Tese de

Doutorado

Uma Abordagem Alternativa da Relação entre Simetria de Calibre e Conservação da Corrente

Gabriel Di Lemos Santiago Lima

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Março de 2011

Ao meu pai.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador Sebastião Alves Dias por ter assumido o compromisso e o desafio de me orientar nos assuntos que são o foco dessa tese e por ter me conduzido à autonomia científica, me ajudando a construir uma visão particular e crítica sobre uma ciência tão nobre e fundamental como é a física nos dias de hoje. À CAPES e ao CNPq por terem patrocinado o meu trabalho durante os quatro anos regulares de doutoramento. Ao Prof. José Abdalla Helayël Neto pela disponibilidade para discutir os artigos que constituem o cerne das idéias que eu defendo no presente trabalho. Ao Prof. Antonio José Accioly pela revisão ortográfica de alguns dos meus trabalhos. Aos meus amigos, Prof. Ricardo Scherer dos Santos e Ricardo Kullock por frutíferas discussões sobre o tema. Ao meu amigo Dr. Rodrigo Maier pelos desabafos nos cafés das redondezas e a todos que me apoiaram e me aturaram nessa empreitada.

Resumo

Nesta tese, revemos e explicitamos os requisitos necessários para que correntes sejam covariantemente conservadas, como consequência de simetrias de calibre globais e locais. Obtemos, classicamente, que no caso das teorias de calibre abelianas, somente a simetria de calibre global da ação é suficiente para a conservação, enquanto nas não abelianas, a simetria de calibre local da ação de matéria também é necessária.

No caso quântico mostramos que, além dos requisitos clássicos, a invariância da medida fermiônica sob transformações de calibre locais também é necessária para salvaguardar a conservação da corrente sem nenhuma restrição sobre os campos de calibre. No caso da ausência desta última condição, a anomalia pode ser cancelada ao ser tratada como *condição subsidiária*, advinda da imposição das equações de movimento para o campo de calibre clássico sendo necessária, no entanto, a simetria de calibre local da ação de matéria tanto nos casos abelianos como nos não abelianos. Por outro lado, considerando a teoria inteiramente quantizada, demonstramos que o valor esperado da anomalia deve ser nulo, em consequência da invariância da medida funcional do campo de calibre por transformações de calibre.

Propomos uma formulação alternativa à de Harada e Tsutsui (que chamamos de *formulação estendida*), totalmente invariante de calibre e livre da anomalias. A análise do caso abeliano dentro dessa formulação mostra que a corrente conservada é a mesma corrente de matéria da teoria anômala. Propomos, então, que a formulação estendida seja equivalente à formulação anômala original, desde que seja possível fazer uma escolha do calibre de tal forma que o funcional que representa a anomalia do formalismo original se cancele na formulação estendida.

Generalizamos o mapeamento de uma teoria anômala em uma teoria invariante de calibre para teorias que não são anômalas, mas que não possuem simetria de calibre. Rediscutimos o caso do modelo de Proca e demonstramos que o mesmo é mapeado no modelo de Stueckelberg sem o termo de fixação de calibre, permitindo interpretar o formalismo estendido como a generalização do mecanismo de Stueckelberg. Em seguida, são feitas análises, a partir das formulações original e estendida, do modelo de Proca e do modelo de Schwinger quiral. A análise das formulações do modelo de Proca demonstra que elas são equivalentes já que todas as equações de uma se reduzem às equações da outra ao escolhermos o calibre de Lorenz. Análise inteiramente análoga é feita para o modelo de Schwinger quiral e, tal como no caso de Proca, demonstramos que as duas formulações se equivalem, já que as equações da versão estendida se reduzem às da original quando escolhemos o calibre de forma que o funcional que representa a anomalia da formulação anômala é cancelado. Isso permite concluir, no contexto dos dois exemplos específicos, que tanto uma teoria anômala como uma outra que não possui simetria de calibre podem ser pensadas como teorias de calibre onde o mesmo já foi fixado. Mostramos também, através de um mapeamento entre os campos escalares dos modelos, que ambas as formulações invariantes de calibre do modelo de Schwinger quiral são equivalentes à versão bidimensional do modelo de Stueckelberg.

Consideramos o efeito Hall quântico fracionário com fronteira, no qual costuma-se dizer que existe uma anomalia na simetria de calibre e mostramos que esta anomalia vem de um erro no processo de formular a versão em segunda quantização da teoria. Ao se corrigir este erro, escrevendo uma ação de Chern-Simons ilimitada, não aparece qualquer anomalia. As consequências físicas são as mesmas que as da abordagem convencional, onde são adicionados férmions quirais $(1+1)$-dimensionais na fronteira da amostra, de modo a cancelar a suposta anomalia.

Abstract

In this thesis, we review and expose the necessary conditions for covariant conservation of currents, as a consequence of global and local gauge symmetries. Classically, we obtain that global symmetry of the action is enough, in the case of abelian gauge theories. In the non-abelian case, local gauge symmetry of the matter action is required.

In the quantum case we show, besides the classical conditions above exposed, that local gauge symmetry of the fermionic measure is necessary to keep the current conserved with no restrictions over the gauge field. In case this last condition is absent the anomaly can be cancelled being dealt with as a *subsidiary condition*, coming from the equations of motion for the classical gauge field being necessary, however, local gauge symmetry of the matter action in abelian as well as in nonabelian case. On the other hand, considering the fully quantized theory (gauge field included), we show that the vacuum expectation value of the anomaly must be zero, as a consequence of the gauge invariance of the gauge field functional measure.

We propose a formulation, alternative to the one of Harada and Tsutsui (which we call *enhanced formulation*), which is fully gauge invariant and anomaly free. The analysis of

the abelian case within the context of this formulation shows that the conserved current is the same matter current as that of the anomalous theory. Then we propose that the enhanced formulation be equivalent to the original anomalous formulation provided we can make a gauge choice such that the functional that represents the anomaly in the original formalism cancels out in the enhanced formulation.

We generalize the mapping of an anomalous theory into a gauge invariant one to include non-gauge invariant (but non-anomalous) theories. Rederiving the results found by Harada and Tsutsui in the case of the Proca model, we show that it is mapped in the Stueckelberg model without a gauge fixing term, what allows us to interpret the enhanced formalism as the generalization of the Stueckelberg mechanism. The Proca and chiral Schwinger model are considered from the point of view of the original and enhanced formulations. The equivalence of these formulations is stablished for the Proca model, as all equations of motion in one formulation reduce to the ones in the other formulation under the choice of the Lorentz gauge. The same fact is shown for the chiral Schwinger model, with the gauge choice being the condition of zero gauge anomaly. This allows us to conclude, in the context of the examples chosen, that both an anomalous theory and another one which is not gauge symmetric may be thought as gauge theories in which the gauge is fixed. We also show that both gauge invariant formulations of the chiral Schwinger model are equivalent to the two-dimensional version of the Stueckelberg model.

We consider the fractional quantum Hall effect with boundary, where it is usually said that there is a gauge anomaly and we show that this anomaly comes from an error in the process of formulating the second quantized version of the theory. When one corrects this error, writing a non-bounded Chern-Simons action, there is no anomaly. The physical consequences are the same as those of the conventional approach, where one adds $(1+1)$-dimensional chiral edge fermions on the boundary of the sample in order to cancel the so called anomaly.

Conteúdo

Introdução

Desde o final da década de 1960, a simetria de calibre tornou-se a base para a construção de modelos para as interações fundamentais [1, 2, 3]. A descoberta de que teorias nas quais a simetria de calibre era respeitada (chamadas de *teorias de calibre*) forneciam uma descrição bastante precisa das interações eletromagnética, fraca e forte elevou o status desta simetria praticamente ao de um novo postulado na Física de Partículas Elementares. A prova de sua renormalizabilidade [4] e a descoberta de que apenas teorias de calibre não-abelianas podiam ser assintoticamente livres [5] solidificou ainda mais a sua posição dentro dos requerimentos exigidos para uma boa teoria para as interações fundamentais.

No entanto, uma análise mais aprofundada das teorias de calibre mostrou que em algumas circunstâncias esta simetria parecia ser quebrada após a quantização. Este era o caso da situação na qual férmions quirais interagiam minimamente acoplados com os campos de calibre [6]. Neste caso, a violação quântica da simetria de calibre, presente classicamente, se dá pelo aparecimento de uma violação da lei de conservação covariante de uma corrente, usualmente associada à presença da simetria de calibre através do teorema de Noether [7]. Tal fenômeno já havia sido encontrado anteriormente (com a simetria quiral sendo aquela violada quanticamente [8]), tendo sido recebido como a solução teórica para explicar o decaimento do méson π^0 em dois fótons [9]. No entanto, quando esta violação quântica se dava na simetria de calibre, as consequências pareciam potencialmente desastrosas. A renormalizabilidade das teorias de calibre depende de certas identidades entre as funções de Green (chamadas de *identidades de Slavnov-Taylor*) para que constantes de renormalização possam ser relacionadas umas às outras. A não conservação da corrente estaria ligada diretamente à violação destas identidades, o que compromete a renormalizabilidade perturbativa da teoria. Questionamentos igualmente graves também podem ser feitos em relação à unitaridade de uma teoria com anomalia na simetria de calibre. Neste contexto, o aparecimento de tais anomalias passou a ser visto como sinal de inconsistência quântica da teoria e razão suficiente para o seu abandono.

Cabe mencionar que o modelo padrão das interações fundamentais é baseado exatamente em acoplamentos mínimos entre bósons de calibre e férmions quirais (na fase de simetria não quebrada). A sua renormalizabilidade decorre de um delicado cancelamento entre as anomalias provenientes das famílias de quarks com aquelas oriundas das famílias de léptons. Assim, a descoberta de novos quarks, por exemplo, deflagra imediatamente a procura por novos léptons, em número equivalente, de modo que a anomalia de calibre siga sendo cancelada.

No sentido oposto ao indicado pelo cenário acima, um grupo de cientistas publicou uma série de trabalhos bastante interessantes na década de 1980, que apontam para a idéia de que as teorias de calibre anômalas não são necessariamente inconsistentes. Abrindo esta série de trabalhos encontra-se o de Jackiw e Rajaraman [10]. Este artigo trata de um caso bastante simples, o de uma teoria bidimensional de férmions quirais acoplados minimamente a bósons vetoriais. Ele mostra que esta teoria, exatamente solúvel, é unitária e perfeitamente bem definida (a questão da renormalizabilidade não se aplica, dado que a teoria é super-renormalizável). Além disso, é mostrado um mecanismo efetivo de geração de massa para os bósons, através de correções quânticas provenientes da integração funcional dos férmions da teoria. Tal mecanismo já havia aparecido anteriormente nos trabalhos de Schwinger sobre Eletrodinâmica Quântica em (1+1)-dimensões [11].

Em seguida notou-se que o fato das teorias anõmalas quebrarem a simetria de calibre não impede que a mesma seja recuperada através da inclusão de graus de liberdade adicionais na teoria. Fazendo isto, Faddeev e Shatashvilli [12] conseguiram recuperar a simetria de calibre da ação efetiva de uma teoria anômala ao transformar vínculos de segunda em primeira classe. Depois disso, Harada e Tsutsui [13] e Babelon, Schaposnik e Viallet [14], através de manipulações algébricas simples da integral funcional, mostraram que os resultados de Faddeev e Shatashvilli podiam ser obtidos naturalmente, sem a necessidade de introduzir os novos graus de liberdade de uma maneira *ad hoc*. Esta maneira de abordar as teorias anômalas ficou conhecida como *formulação invariante de calibre*. A formulação sem os graus de liberdade adicionais foi chamada de *formulação não invariante de calibre* [13, 14]. Nesta tese iremos nos referir a ela também como *formulação original* [15, 16, 17].

Outros desenvolvimentos recentes [18] mostraram que mesmo teorias de calibre usuais (nos casos citados, o modelo de Schwinger [11]) podem ser vistas alternativamente em uma fase anômala (através da escolha de regularizações que não preservem a invariância de calibre) sem quaisquer problemas de consistência advindos de tal visão.

Ainda não foi demonstrado, até o presente momento, que modelos anômalos mais complexos que o de Jackiw e Rajaraman (também chamado de *modelo de Schwinger quiral*) possam ser bem definidos, mas também não foi demonstrado o oposto. O fato do modelo de Schwinger quiral ser consistente, nos conduz a uma idéia oposta à hoje estabelecida: *teorias anômalas podem ser bem definidas* e apenas requerem uma compreensão mais ampla.

Por outro lado, a série de trabalhos que recuperam a simetria de calibre das teorias anômalas aponta para duas possibilidades: ou as formulações invariante e não invariante são equivalentes e fornecem os mesmos resultados físicos, ou não são. A primeira possibilidade aponta para um aparente paradoxo à idéia comum que relaciona a simetria local e a conservação da corrente. Suponhamos que: a) as duas formulações sejam fisicamente equivalentes e uma possui a simetria de calibre enquanto a outra não; e b) a quebra da simetria de calibre seja entendida da maneira usual, ou seja, como a responsável pela não conservação da corrente. Neste cenário, teríamos uma teoria que conserva a corrente derivada de uma outra que não a conserva, sendo as duas equivalentes. Por outro lado, não sendo elas equivalentes, teríamos que explicar como obtemos uma a partir da outra por simples manipulações algébricas e o resultado final não corresponde ao resultado inicial. Estas questões serão amplamente investigadas no decorrer deste trabalho.

Uma provável solução, possivelmente capaz de encerrar essa discussão, é não associar lei de conservação com simetria local de maneira tão contundente. Há, neste sentido, um contra-exemplo muito bem conhecido que demonstra que mesmo num sistema que quebra a simetria de calibre local a conservação da corrente é ainda preservada: o modelo de Proca minimamente acoplado a campos de matéria. Sabe-se que o termo de massa do campo de Proca quebra a simetria de calibre local da ação. Entretanto, também é bastante claro que a corrente é conservada pela invariância global e que a quebra de simetria do termo de massa apenas impõe uma restrição ao campo vetorial, conhecida como *condição* *subsidiária*. Ela é a responsável pela redução do número de graus de liberdade bosônicos de 4 para 3 (que correspondem aos 3 estados de polarização de uma partícula de spin 1).

Podemos nos perguntar, então, quais critérios exatos uma teoria deve obedecer para garantir a lei de conservação da corrente e qual o papel exato da simetria de calibre local. Esse trabalho tem como objetivo responder a essas perguntas. Para isso, depois de algumas considerações gerais, válidas tanto para o caso abeliano quanto para o não-abeliano, vamos nos concentrar no primeiro. Neste contexto, investigaremos o ponto de vista de que uma teoria que quebre a simetria local, enquanto preserve a simetria global, pode ainda ter a sua corrente de calibre conservada e que, tal qual no modelo de Proca, a falta da simetria de calibre local forneça apenas restrições sobre os bósons vetoriais.

Neste sentido, o capítulo 1 é dedicado a discutir a relação entre simetria de calibre (global e local) e conservação da corrente. No capítulo 2 discutimos as teorias de calibre anômalas e apresentamos nosso ponto de vista, no qual a anomalia é cancelada como condição subsidiária. No capítulo 3, mostramos duas formas alternativas de mergulhar as teorias de calibre anômalas em teorias invariantes de calibre, chamadas formulações invariantes *padrão* [13] e *estendida* [15]. No capítulo 4, mostramos que a formulação invariante estendida pode ser aplicada a modelos que não sejam anômalos, mas que também não possuam simetria de calibre. Uma análise do modelo de Proca sob a luz dessa formulação demonstra que o mesmo é mapeado no modelo de Stueckelberg [19] sem o termo de fixação de calibre, possibilitando interpretar a formulação invariante estendida como a generalização do mecanismo de Stueckelberg. A comparação entre as formulações invariante estendida e não invariante do modelo de Proca e do modelo anômalo de Schwinger quiral é feita no capítulo 5, onde afirmamos a equivalência entre modelos com simetria de calibre local e modelos sem simetria de calibre local. No mesmo capítulo, mostramos que a formulação invariante de calibre do modelo de Schwinger quiral, depois de integrados os férmions, pode ser identificada com o modelo de Stueckelberg em duas dimensões. No capítulo 6, tentamos aplicar as idéias desenvolvidas nos capítulos anteriores ao caso concreto do efeito Hall quântico fracionário com fronteira, onde supostamente existiria uma anomalia na simetria de calibre da teoria de campos efetiva que descreve o efeito [20, 21]. Ao final, apresentamos nossas conclusões e algumas perspectivas.

Capítulo 1

O Teorema de Noether e a Corrente Conservada nas Teorias de Calibre

Neste e no próximo capítulo, iremos rediscutir a relação entre simetria de calibre e conservação covariante da corrente, fixando o nosso particular ponto de vista que servirá de base para os desdobramentos desenvolvidos nos capítulos posteriores.

1.1 Simetria clássica

Consideremos a teoria clássica definida pela seguinte ação em $1 + (n - 1)$ dimensões ($d^n x \equiv dx$):

$$I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + I_G[A_\mu], \tag{1.1}$$

onde $I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$ é a ação de matéria definida por campos ψ e $\bar{\psi}$ que podem ser fermiônicos ou escalares, carregando uma determinada representação de $SU(N)$, e por campos de calibre definidos por

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \tag{1.2}$$

onde T_a são os geradores do grupo $SU(N)$ atuando sobre os campos de matéria e satisfazendo

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \qquad \text{tr}\,(T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{1.3}$$

Definimos as transformações locais de calibre como

$$A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\left(\partial_\mu g\right) g^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\psi^g = g\psi, \tag{1.5}$$

$$\bar{\psi}^g = \bar{\psi} g^{-1}, \tag{1.6}$$

sendo g um elemento de $SU(N)$ local e arbitrário, definido por

$$g = \exp(i\theta\,(x)), \qquad \theta(x) \equiv \theta^a\,(x)\,T_a, \tag{1.7}$$

de maneira que tanto a ação inteira como cada parte dela seja invariante sob o conjunto de transformações acima, ou seja

$$I[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu^g] = I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu], \tag{1.8}$$

$$I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu^g] = I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu], \tag{1.9}$$

$$I_G[A_\mu^g] = I_G[A_\mu]. \tag{1.10}$$

Vamos analisar cada parte da ação separadamente, começando pela ação de matéria. O desenvolvimento que se segue foi inspirado pelo capítulo 2 de [22]. Dado que a ação de matéria I_M é invariante pelas transformações locais acima (equação (1.9)), ela também é invariante sob o seguinte conjunto de transformações *globais*:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp(i\theta)\,\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}\exp(-i\theta)\,, \\ A_\mu &\rightarrow \exp(i\theta)\,A_\mu \exp(-i\theta)\,, \end{aligned} \tag{1.11}$$

com $\partial_\mu \theta^a = 0$. Se mudarmos a lei de transformação (1.11) de global para local

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp(i\theta(x))\,\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}\exp(-i\theta(x))\,, \\ A_\mu &\rightarrow \exp(i\theta(x))\,A_\mu \exp(-i\theta(x))\,, \end{aligned} \tag{1.12}$$

as quais, na forma infinitesimal, se reduzem a

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) + i\theta(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) - i\bar{\psi}(x)\theta(x), \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - i\,[A_\mu, \theta(x)]\,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$A^a_\mu T_a \rightarrow A^a_\mu T_a - iA^b_\mu \theta^c(x)\,[T_b, T_c] = A^a_\mu T_a + A^b_\mu \theta^c(x) f_{bca} T_a,$$

$$\Longrightarrow A^a_\mu \rightarrow A^a_\mu + f_{abc} A^b_\mu \theta^c(x), \tag{1.14}$$

teremos exatamente as transformações locais (1.9) *sem* a parte inomogênea do campo de calibre e, portanto, não teremos simetria. Contudo, se $\theta(x)$ é constante, recaímos nas transformações globais (1.11), que constituem simetria. Portanto, o termo não invariante na ação pela variação por (1.13) só deve depender de $\partial_\mu \theta^a(x)$. Sendo assim, *para* *transformações infinitesimais*

$$\begin{aligned}
& I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, gA_\mu g^{-1}] \\
= \;& I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + \int dx \theta^a(x) \left(\frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} iT_a \psi(x) - i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} + f_{bac} A^b_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)} \right) \\
\equiv \;& I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + \int dx \partial_\mu \theta^a(x) J^\mu_a(x); \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \;& \int dx \theta^a(x) \left(\frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} iT_a \psi(x) - i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} + f_{bac} A^b_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)} \right) \qquad (1.16) \\
= \;& -\int dx \theta^a(x) \partial_\mu J^\mu_a(x).
\end{aligned}$$

Sendo $\theta^a(x)$ arbitrário, concluímos que

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu J^\mu_a(x) + f_{bac} A^b_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)} \qquad (1.17) \\
= \;& i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} iT_a \psi(x).
\end{aligned}$$

Esta relação é satisfeita independentemente do uso das equações de movimento. Se, no entanto, utilizarmos as equações para $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta \psi(x)} &= \frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} = 0, \qquad (1.18) \\
\frac{\delta I}{\delta \bar{\psi}(x)} &= \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} = 0,
\end{aligned}$$

teremos

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) + f_{bac} A^b_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)} = 0. \qquad (1.19)$$

Podemos perceber que esse resultado é independente da invariância de calibre local de qualquer parte da ação. De fato, chegamos a ele apenas pela invariância global e pelas equações de movimento dos campos de matéria. No caso abeliano, particularmente, temos uma corrente conservada

$$\partial_\mu J^\mu(x) = i\bar{\psi}(x) \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} i\psi(x) = 0 \qquad (1.20)$$

sem menção alguma à simetria da calibre local.

Por outro lado, vimos que a ação de matéria também é invariante por transformações locais (1.9). Isso significa que

$$I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu] = I_M[\psi, \bar{\psi}, A^{g^{-1}}] = I_M[\psi, \bar{\psi}, g^{-1}A_\mu g + \frac{i}{e}\left(\partial_\mu g^{-1}\right) g]. \tag{1.21}$$

Assim, se considerarmos I_M para a configuração de campo de calibre

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1}, \tag{1.22}$$

teremos

$$\begin{aligned} I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A'_\mu] &= I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, gA_\mu g^{-1}] \\ &= I_M[\psi, \bar{\psi}, \left(gA_\mu g^{-1}\right)^{g^{-1}}] \\ &= I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu + \frac{i}{e}\left(\partial_\mu g^{-1}\right) g]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Na forma infinitesimal, $(gA_\mu g^{-1})^{g^{-1}}$ se reduz a

$$\left(gA_\mu g^{-1}\right)^{g^{-1}} = A_\mu - \frac{i}{e}\left[\partial_\mu\left(1 - i\theta\right)\right]\left(1 + i\theta\right) = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \tag{1.24}$$

Portanto, para g *infinitesimal*,

$$\begin{aligned} I_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, gA_\mu g^{-1}] &= I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta^a] \\ &= I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + \frac{1}{e}\int dx\partial_\mu\theta^a(x)\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu^a(x)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Mas (1.23) é exatamente a ação transformada pela lei de transformação modificada (1.15) anterior. Logo, igualando (1.25) com (1.15), temos

$$\int dx\partial_\mu\theta^a(x)J_a^\mu(x) = \int dx\partial_\mu\theta^a(x)\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu^a(x)}\right). \tag{1.26}$$

Notemos que, para chegar à última expressão, não precisamos considerar a condição de fronteira no infinito. Sendo $\partial_\mu \theta^a(x)$ arbitrário, podemos nos assegurar que

$$J_a^\mu(x) = \frac{1}{e} \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu^a(x)}. \tag{1.27}$$

Portanto, a simetria local *da ação de matéria* se configura como uma maneira de acoplar o campo de calibre aos campos de matéria de tal forma que a corrente obedeça à expressão (1.27) acima. Usando (1.27) em (1.19) e a antissimetria das constantes de estrutura, chegamos a

$$\partial_\mu J_a^\mu(x) + e f_{cab} A_\mu^c J_b^\mu(x) = 0, \tag{1.28}$$

$$\Rightarrow D_{\mu b}^a J_b^\mu(x) = 0, \tag{1.29}$$

onde

$$D_{\mu b}^a \equiv \delta_b^a \partial_\mu + e f_{cab} A_\mu^c. \tag{1.30}$$

Logo, diferentemente do caso abeliano, a simetria local *da ação de matéria* é importante para assegurar que a corrente possa ser fornecida pela expressão (1.27) acima, garantindo a conservação covariante da corrente (1.29). Por outro lado, a simetria local de qualquer outra parte da ação se mostra irrelevante para a obtenção de (1.29).

Para exemplificar o que afirmamos acima, vamos considerar a ação de matéria abaixo, onde há simetria de calibre global, mas não local:

$$I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = \int dx \left\{ \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu^a T_a \right) \psi - \frac{\lambda}{2} \left(\bar{\psi} \partial_\mu \psi \right) \left(\bar{\psi} \partial^\mu \psi \right) \right\}.$$

A invariância de calibre *global* da ação acima implica:

$$\int dx \left(\frac{\delta I_M}{\delta \psi(x)} i T_a \psi(x) - i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta I_M}{\delta \bar{\psi}(x)} + f_{bac} A_\mu^b \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu^c(x)} \right) = 0.$$

Efetuando os cálculos anteriores explicitamente obtemos

$$(D_\mu)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b \psi\right) = i\lambda \partial_\mu \left\{ \left(\bar{\psi} T_a \psi\right) \left(\bar{\psi}\partial^\mu \psi\right) \right\}.$$

Portanto, a corrente $\bar{\psi}\gamma^\mu T_a \psi$, conservada covariantemente na presença de simetria de calibre local ($\lambda = 0$), não o é mais na sua ausência, embora haja simetria de calibre global nos dois casos.

Agora vamos fazer uma análise da simetria local da ação inteira. Fazendo uma transformação infinitesimal em (1.8), temos

$$I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = I[\psi(x) + i\theta(x)\psi(x), \bar{\psi} - i\bar{\psi}(x)\theta(x), A^\theta_\mu]. \tag{1.31}$$

onde A^θ_μ denota o campo de calibre transformado infinitesimalmente:

$$A^\theta_\mu \equiv A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu - i\left[A_\mu, \theta(x)\right] - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x),$$

$$\Rightarrow A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta, \tag{1.32}$$

onde

$$D_\mu \theta \equiv \partial_\mu \theta + ie\left[A_\mu, \theta\right] \tag{1.33}$$

ou, em termos de componentes,

$$\begin{aligned} D_\mu \theta^a T_a &\equiv \partial_\mu \theta^a T_a + ie A^c_\mu \theta^b \left[T_c, T_b\right] \\ &= \partial_\mu \theta^a T_a - e f_{cba} A^c_\mu \theta^b T_a, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^a_{\mu b}\theta^b = \left(\delta^a_b \partial_\mu + e f_{cab} A^c_\mu\right)\theta^b, \tag{1.34}$$

onde usamos a antissimetria das constantes de estrutura de $SU(N)$ para identificar a derivada covariante de (1.34) com a que aparece em (1.30). Assim, expandindo (1.31) até primeira ordem, chegamos a

$$\begin{aligned} I[\psi,\bar{\psi},A_\mu] &= I[\psi,\bar{\psi},A_\mu] \qquad (1.35)\\ &+ \int dx\theta^a(x)\left(\frac{\delta I}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x) - i\bar{\psi}(x)T_a\frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)\\ &- \int dx\frac{1}{e}D^c_{\mu b}\theta^b\frac{\delta I}{\delta A^c_\mu(x)}. \qquad (1.36)\end{aligned}$$

Mas $\delta I/\delta\psi(x) = \delta I_M/\delta\psi(x)$, portanto,

$$\int dx\left\{\theta^a(x)\left(\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x) - i\bar{\psi}(x)T_a\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) - \frac{1}{e}D^c_{\mu b}\theta^b\frac{\delta I}{\delta A^c_\mu(x)}\right\} = 0. \qquad (1.37)$$

Usando (1.17), temos

$$\begin{aligned} &\int dx\left\{-\theta^a(x)D^a_{\mu b}J^\mu_b(x) - \frac{1}{e}D^a_{\mu b}\theta^b\frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)}\left(I_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right] + I_G\left[A\right]\right)\right\}\\ = &\int dx\left\{-\theta^a(x)D^a_{\mu b}J^\mu_b(x) - \left(D^a_{\mu b}\theta^b\right)J^\mu_a(x) - \frac{1}{e}\left(D^a_{\mu b}\theta^b\right)\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^a_\mu(x)}\right\} = 0. \qquad (1.38)\end{aligned}$$

A derivada covariante respeita a regra de *Leibnitz*. Para ver isso, notemos que

$$\begin{aligned} \left(D^a_{\mu b}\alpha^b\right)\beta_a &= \left[\left(\delta^a_b\partial_\mu + ef_{cab}A^c_\mu\right)\alpha^b\right]\beta_a\\ &= \left(\delta^a_b\partial_\mu\alpha^b\right)\beta_a + e\alpha^b f_{cab}A^c_\mu\beta_a\\ &= \delta^a_b\partial_\mu\left(\alpha^b\beta_a\right) - \alpha^b\delta^a_b\partial_\mu\beta_a - e\alpha^b f_{cba}A^c_\mu\beta_a\\ &= \partial_\mu\left(\alpha^a\beta_a\right) - \alpha^b\left(\delta^a_b\partial_\mu + ef_{cba}A^c_\mu\right)\beta_a,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(D^a_{\mu b}\alpha^b\right)\beta_a = \partial_\mu\left(\alpha^a\beta_a\right) - \alpha^b D^b_{\mu a}\beta_a. \qquad (1.39)$$

Portanto, (1.38) vira

$$\int dx\left\{\partial_\mu\left(\theta^a J^\mu_a(x)\right) - \frac{1}{e}\left(D^a_{\mu b}\theta^b\right)\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^a_\mu(x)}\right\} = 0. \qquad (1.40)$$

Desprezando o termo de superfície, obtemos

$$\int dx D^a_{\mu b}\theta^b\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^a_\mu(x)} = \int dx\theta^a(x)D^a_{\mu b}\left(-\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right) = 0,$$

$$\Longrightarrow D^a_{\mu b}\left(\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)=0, \tag{1.41}$$

ou, usando a forma matricial,

$$D_\mu\left(\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A_\mu(x)}\right)=0, \tag{1.42}$$

onde D_μ é definida na equação (1.33).

Podemos notar que não fizemos uso da corrente de Noether para chegar à expressão acima. De fato, ela simplesmente é subtraída em (1.38) a menos de um termo de superfície. Por outro lado, notemos que para chegar à equação (1.42) não foi necessário fazer uso das equações de movimento, ou seja, ela é verdadeira pela simples imposição da simetria de calibre da ação, o que significa que a mesma não é nada além de uma identidade. Para exemplificar, consideremos o seguinte termo cinético:

$$I_G\left[A\right]=\int dx\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{1.43}$$

onde,

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+ie\left[A_\mu,A_\nu\right] \tag{1.44}$$

é conhecido como *intensidade de campo*. Estrategicamente, exprimimos a *intensidade de campo* em termos das suas componentes:

$$F^a_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu-ef_{cba}A^c_\mu A^b_\nu. \tag{1.45}$$

O traço é dado por

$$\mathrm{tr}\,\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)=F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\mathrm{tr}\,\left(T_aT_b\right)=-\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \tag{1.46}$$

então temos:

$$I_G\left[A\right]=-\frac{1}{4}\int dx\,F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}. \tag{1.47}$$

Calculando (1.41),

$$\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^b_\mu(x)} = -\frac{1}{2}\int dy\, F^{a\alpha\beta}\frac{\delta F^a_{\alpha\beta}(y)}{\delta A^b_\mu(x)}.$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned}
F^{a\alpha\beta}\frac{\delta F^a_{\alpha\beta}(y)}{\delta A^b_\mu(x)} &= F^{a\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)}\left(\partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - ef_{cda}A^c_\alpha A^d_\beta\right)\\
&= 2F^{a\alpha\beta}\left(\delta^a_b\delta^\mu_\beta\partial_\alpha\delta\left(x-y\right) - ef_{cda}\delta^c_b\delta^\mu_\alpha A^d_\beta\delta\left(x-y\right)\right)\\
&= 2\left(\partial_\nu\delta\left(x-y\right)F^{b\nu\mu} + \delta\left(x-y\right)ef_{bca}A^c_\nu F^{a\nu\mu}\right),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^b_\mu(x)} &= -\int dy\,\left(\partial_\nu\delta\left(x-y\right)F^{b\nu\mu} + \delta\left(x-y\right)ef_{bca}A^c_\nu F^{a\nu\mu}\right)\\
&= \int dy\,\delta\left(x-y\right)\left(\partial_\nu F^{b\nu\mu} - ef_{bca}A^c_\nu F^{a\nu\mu}\right)\\
&= \partial_\nu F^{b\nu\mu} + ef_{dbc}A^d_\nu F^{c\nu\mu} = D^b_{\nu c}F^{c\nu\mu};
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^a_{\mu b}\left(-\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right) = -D^a_{\mu b}D^b_{\nu c}F^{c\mu\nu}, \tag{1.48}$$

ou, em termos matriciais,

$$D_\mu\left(-\frac{\delta I_G\left[A\right]}{\delta A_\mu(x)}\right) = -D_\mu D_\nu F^{\mu\nu}. \tag{1.49}$$

Calculando (1.49), temos

$$\begin{aligned}
D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu D_\nu F^{\mu\nu} + ie\left[A_\mu, D_\nu F^{\mu\nu}\right] \\
&= \partial_\mu\left(\partial_\nu F^{\mu\nu} + ie\left[A_\nu, F^{\mu\nu}\right]\right) + ie\left[A_\mu, \partial_\nu F^{\mu\nu} + ie\left[A_\nu, F^{\mu\nu}\right]\right] \\
&= ie\left[\partial_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right] + ie\left[A_\mu, ie\left[A_\nu, F^{\mu\nu}\right]\right] \\
&= ie\left\{\left[\partial_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right] + ie\left[A_\mu, A_\nu F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu}A_\nu\right]\right\} \\
&= ie\left\{\left[\partial_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right] + ie\left(A_\mu A_\nu F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\right)\right\} \\
&= ie\left\{\left[\partial_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right] + ie\left[A_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right]\right\} \\
&= ie\left[\partial_\mu A_\nu + ieA_\mu A_\nu, F^{\mu\nu}\right] \\
&= \frac{ie}{2}\left[F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\right];
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.50}$$

Esse mesmo tipo de identidade é fornecido pela invariância local de um funcional apenas dos campos de calibre. Para ver isso, consideremos agora apenas a parte puramente bosônica da ação (1.10). Fazendo uma transformação infinitesimal, teremos

$$\begin{aligned}
I_G\left[A_\mu - \frac{1}{e}D_\mu\theta\right] &= I_G\left[A_\mu\right] - \int dx \frac{\delta I_G[A]}{\delta A^a_\mu(x)}\frac{1}{e}D^a_{\mu b}\theta^b(x) \\
&= I_G\left[A_\mu\right] + \int dx\theta^a(x) D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_G[A]}{\delta A^b_\mu(x)}\right),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_G[A]}{\delta A^b_\mu(x)}\right) = 0. \tag{1.51}$$

A equação (1.51) é identicamente verdadeira apenas a partir da imposição da simetria local de $I_G[A_\mu]$. Podemos notar que isso é verdadeiro para *qualquer* ação invariante sob transformações apenas dos campos de calibre.

Vimos que a corrente é calculada pela simetria *global* via imposição das equações de movimento. Também é notório o fato da simetria *local* nos fornecer uma interação cujo acoplamento do campo de calibre com o campo de matéria deve obedecer a equação (1.27). Tal acoplamento, dado pela invariância local da ação de matéria, é responsável pelo fato da corrente ser *covariantemente* conservada. Assim, podemos dizer que a simetria local tem duas funções: acoplar os campos de calibre de tal forma que a corrente possa ser calculada por (1.27) e mudar a lei de conservação acrescentando um termo, além da divergência, de tal forma que a derivada *covariante* da corrente seja nula. Porém, a simetria local da ação inteira, considerando a obtenção da corrente de *Noether,* não fornece nada além de uma identidade dada por (1.42), onde a ação de matéria nem mesmo participa do cálculo.

Reconsideremos, por outro lado a expressão (1.19)

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) + f_{cab} A^c_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A^b_\mu(x)} = 0. \tag{1.52}$$

Notemos que o segundo termo do lado esquerdo de (1.52) depende de $\frac{\delta I_M}{\delta A^b_\mu(x)}$ e que a identificação desse termo com a corrente só pode ser feita se a ação de matéria for localmente invariante de calibre. Somente assim podemos afirmar que a equação (1.29) de conservação covariante da corrente seja válida, demonstrando a importância da invariância local da ação de matéria para assegurar a lei de conservação para o caso não abeliano.

Por outro lado, como já apontado, em teorias abelianas a lei de conservação não é modificada pela simetria local, já que as constantes de estrutura são nulas e, portanto, a derivada covariante é a própria derivada comum. Assim, a equação (1.52) se torna a própria lei de conservação da corrente. Consequentemente, as correntes das teorias abelianas demonstram ser completamente inatingíveis pela simetria local.

1.2 Simetria quântica

Consideremos agora a situação em que os campos *fermiônicos* são quânticos e os campos de calibre são mantidos não quantizados. Isto é feito integrando funcionalmente apenas sobre os férmions, o que nos leva a definir a *ação efetiva*

$$\exp\left(iW[A_\mu]\right) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right), \tag{1.53}$$

onde $I[\psi,\bar{\psi},A_\mu]$ é a ação invariante de calibre definida em (1.1). Podemos, então, seguir o mesmo procedimento da seção anterior, efetuando uma transformação infinitesimal da ação de matéria e modificando a lei de transformação global como em (1.13). Teremos, analogamente à teoria clássica, uma modificação da ação que só deverá depender de $\partial_\mu\theta^a(x)$, já que ela se mostrará invariante para $\theta^a(x)$ constante. Assim, expandindo (1.53) com a ação modificada como em (1.13) até primeira ordem, teremos

$$\begin{aligned}
\exp\left(iW'\right) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_M[\psi + i\theta(x)\psi, \bar{\psi} - i\bar{\psi}\theta(x), A_\mu - i\left[A_\mu, \theta(x)\right]] + I_G\left[A_\mu\right]\right) \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left\{1 + i\int d^nx\theta^a(x)\left(\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - i\bar{\psi}(x)T_a\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}(x)} + f_{bac}A^b_\mu\frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)}\right)\right\} \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left\{1 + i\int d^nx\partial_\mu\theta^a(x)J^\mu_a\right\}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\exp\left(iW'\right) &= \exp\left(iW\right) + i\int d^nx\theta^a(x)\int d\psi d\overline{\psi} \exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left(\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x)\right. \\
&\quad \left. - i\bar{\psi}(x)T_a\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}(x)} + f_{bac}A^b_\mu\frac{\delta I_M}{\delta A^c_\mu(x)}\right) \\
&= \exp\left(iW\right) - i\int d^nx\theta^a(x)\int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\partial_\mu J^\mu_a.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

A variação da exponencial da ação efetiva pode, então, ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Delta\left\{\exp\left(iW\right)\right\} &= i\int d^nx\theta^a(x)\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left(\frac{\delta I}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x)\right.\\
&\quad\left.-i\bar{\psi}(x)T_a\frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}(x)}+f_{bac}A_\mu^b\frac{\delta I}{\delta A_\mu^c(x)}\right)\\
&= -i\int d^nx\theta^a(x)\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\partial_\mu J_a^\mu, \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left(\partial_\mu J_a^\mu+f_{cab}A_\mu^b\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu^c(x)}\right)\\
=&\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\left(\bar{\psi}(x)iT_a\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}(x)}-\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x)\right). \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

Usando (1.27), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int d\psi d\overline{\psi}D_{\mu b}^a J_b^\mu\exp\left(iI[\psi,\overline{\psi},A_\mu]\right)\\
=&\int d\psi d\overline{\psi}\left(i\overline{\psi}(x)T_a\frac{\delta I_M}{\delta\overline{\psi}(x)}-\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)}iT_a\psi(x)\right)\exp\left(iI[\psi,\overline{\psi},A_\mu]\right). \qquad (1.58)
\end{aligned}$$

Se a medida fermiônica for invariante por *transformações locais*, ou seja, se

$$d\psi^g d\bar{\psi}^g = d\psi d\bar{\psi}, \qquad (1.59)$$

então, para qualquer funcional $F\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]$, teremos

$$\begin{aligned}
\int d\psi d\bar{\psi}F\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] &= \int d\psi^g d\bar{\psi}^g F\left[\psi^g,\bar{\psi}^g,A_\mu\right] \qquad (1.60)\\
&= \int d\psi d\bar{\psi}F\left[\psi+\delta\psi,\bar{\psi}+\delta\bar{\psi},A_\mu\right]\\
&= \int d\psi d\bar{\psi}F\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+\int d\psi d\bar{\psi}\int dx\left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}}\right),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int d\psi d\bar{\psi}\int dx\left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}}\right)=0. \qquad (1.61)$$

Tomando

$$F\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]\equiv\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right); \qquad \delta\psi=i\theta\left(x\right)\psi; \qquad \delta\bar{\psi}=-i\bar{\psi}\theta\left(x\right), \tag{1.62}$$

então,

$$\int d\psi d\bar{\psi}\int dx\theta^a(x)\left(\frac{\delta I}{\delta\psi}iT_a\psi-i\bar{\psi}T_a\frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)=0. \tag{1.63}$$

Usando o fato de que

$$\frac{\delta I}{\delta\psi(x)}=\frac{\delta I_M}{\delta\psi(x)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}(x)}=\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}(x)}, \tag{1.64}$$

e usando (1.58), teremos

$$\int d^4x\theta^a(x)\int d\psi d\bar{\psi}\left(D^a_{\mu b}J^\mu_b\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)=0. \tag{1.65}$$

Sendo $\theta^a(x)$ um parâmetro infinitesimal arbitrário, concluímos que

$$\int d\psi d\bar{\psi}\left(D^a_{\mu b}J^\mu_b\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)=0, \tag{1.66}$$

que é a versão quântica da lei de conservação da corrente.

A imposição de simetria global da medida não nos conduziria ao resultado acima. Em vez de (1.63) teríamos

$$\begin{aligned}&\int d\psi d\bar{\psi}\int dx\left(\frac{\delta I_M}{\delta\psi}iT_a\psi-i\bar{\psi}T_a\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\\ =\;&\int d\psi d\bar{\psi}\int dx\left(D^a_{\mu b}J^\mu_b(x)\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)=0,\end{aligned}$$

o que não permitiria chegar à mesma conclusão (1.66), onde foi crucial que $\theta^a\left(x\right)$ fosse genérico.

Notemos que, na teoria quântica, além da simetria local da ação de matéria, que se faz necessária apenas nos casos não abelianos dada a forma do acoplamento (1.27), a invariância *local* da medida fermiônica (1.59) parece desempenhar um papel importante na conservação da corrente de *Noether*. Classicamente é necessário utilizar a invariância local da ação de matéria e impor as equações de movimento do campo de matéria para extrair a lei de conservação da corrente. Quando passamos para o nível quântico, em vez de impor as equações de Dyson-Schwinger, que são o análogo quântico das equações de movimento, obtidas a partir da invariância *translacional* da medida funcional (veja o capítulo 4 de [23]), é necessário impor a invariância de calibre local da medida do campo de matéria (1.59), além da invariância local da ação de matéria, para assegurar a lei quântica de conservação (1.66). Assim, contrariamente ao nosso bom-senso, em vez da invariância translacional, é a invariância de calibre local da medida fermiônica (que não deixa de ser uma espécie de simetria *rotacional* no espaço interno) que parece desempenhar o papel análogo, no nível quântico, ao das equações clássicas de movimento, no sentido de assegurar a conservação da corrente.

É nesse espírito que uma teoria em que a medida fermiônica não é invariante por transformações locais é definida como uma teoria *anômala*. Ou seja, apesar da ação possuir simetria local, a equação (1.66) não é mais necessariamente verdadeira, abrindo a possibilidade da lei de conservação da corrente ser quebrada no nível quântico. Podemos nos perguntar se isso realmente acontece. Quais seriam as consequências de uma teoria de calibre anômala? Será que a equação (1.66) ficaria de fato comprometida?

O próximo capítulo tem como foco fazer um estudo aprofundado sobre teorias de calibre anômalas e suas consequências para o teorema de Noether.

Capítulo 2

Teorias de Calibre Anômalas

No capítulo anterior, vimos que uma lei de conservação clássica pode ser confirmada quanticamente se a medida funcional associada aos campos de matéria for invariante sob transformações *locais*. Este requerimento nem sempre pode ser satisfeito e, do ponto de vista da integração funcional [24], isso é comumente interpretado como uma violação quântica das leis de conservação clássicas, definindo uma teoria *anômala*, onde a chamada *anomalia* é definida pelo funcional não identicamente nulo associado ao valor esperado da divergência covariante da corrente clássica sobre os campos de matéria.

Neste capítulo, analisaremos em detalhe a possibilidade de existir anomalia na simetria de calibre, a qual tem consequências potencialmente catastróficas para a renormalizabilidade de uma teoria de calibre [25]. Não obstante, apresentaremos um ponto de vista alternativo, onde a anomalia pode ser cancelada como uma condição subsidiária no caso dos campos de calibre serem tratados como campos clássicos via imposição das equações de movimento sobre a teoria efetiva; ou mesmo através da invariância da medida dos campos de calibre, no caso dos mesmos serem quantizados [15, 16, 17].

2.1 A origem da anomalia sob o ponto de vista da integral funcional

Consideremos a ação efetiva $W[A_\mu]$ definida na equação (1.53):

$$\exp\left(iW[A_\mu]\right) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right) \tag{2.1}$$

Se fizermos uma redefinição das variáveis fermiônicas no lado direito de (2.1), de tal forma que $\left\{\psi, \bar{\psi} \to \psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}\right\}$, teremos:

$$\begin{aligned} \exp\left(iW[A_\mu]\right) &= \int d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}} \exp\left(iI[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu]\right) \\ &= \int d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu]\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se a medida fermiônica for invariante, *i.e.*, se a equação (1.59) for válida, então

$$\begin{aligned} \exp\left(iW[A_\mu]\right) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp iI[\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu] \\ &= \exp\left(iW\left[A^g_\mu\right]\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Rightarrow W[A_\mu] = W\left[A^g_\mu\right], \tag{2.4}$$

ou seja, a invariância local da ação *e da medida fermiônica* nos proporcionam uma ação efetiva invariante de calibre. Considerando g infinitesimal,

$$W\left[A^g_\mu\right] = W\left[A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta(x)\right] = W\left[A_\mu\right]. \tag{2.5}$$

e expandindo até primeira ordem, vemos que a simetria de calibre local da ação efetiva implica imediatamente a identidade abaixo:

$$D_\mu \left(\frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu}\right) \equiv 0. \tag{2.6}$$

Isso significa que

$$\begin{aligned} D_\mu\left(\frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iW[A_\mu]\right) &= -iD_\mu\left\{\frac{\delta}{\delta A_\mu}\left(\exp\left(iW[A_\mu]\right)\right)\right\} \\ &= -i\int d\psi d\bar{\psi}D_\mu\left\{\frac{\delta}{\delta A_\mu}\left(\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\right)\right\} \\ &= \int d\psi d\bar{\psi}D_\mu\left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sendo $I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] = I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] + I_G\left[A_\mu\right]$, temos

$$\begin{aligned} &\int d\psi d\bar{\psi}D_\mu\left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\ = &\int d\psi d\bar{\psi}\left\{D_\mu\left(\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu}\right) + D_\mu\left(\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu}\right)\right\}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Mas $I_G[A_\mu]$ é invariante de calibre local, o que implica, como vimos no capítulo anterior, a identidade algébrica

$$D_\mu\left(\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu}\right) \equiv 0.$$

Portanto,

$$\int d\psi d\bar{\psi}D_\mu\left(\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) = 0, \tag{2.9}$$

$$\Rightarrow \int d\psi d\bar{\psi}\left(D^a_{\mu b}J^\mu_b\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) = 0. \tag{2.10}$$

Ou seja, a invariância da ação efetiva nos leva, naturalmente, à conservação da corrente. Podemos notar que não importa se o campo de calibre é um campo externo clássico ou quântico, pois não precisamos integrar sobre os mesmos para obter a equação de conservação (2.10).

Suponhamos agora que a medida fermiônica não seja invariante pelas transformações de calibre dos férmions, *i.e.*,

$$d\psi^g d\bar{\psi}^g = J\left[g,A_\mu\right]d\psi d\bar{\psi}. \tag{2.11}$$

Na equação acima, estamos supondo a possibilidade do Jacobiano depender do campo A_μ. Isto é absurdo numa integral convencional, mas possível de acontecer numa integral funcional. A razão é que o cálculo concreto do Jacobiano conduz a quantidades divergentes, que necessitam de regularização [26]. No procedimento de regularização, frequentemente apelamos para a introdução de fatores de convergência que envolvem o operador $D[A_\mu]$, o que pode fazer com que o Jacobiano dependa de A_μ no final. Este fato requer que tomemos muito cuidado ao trocar a ordem de integração e de derivação funcional, quando tais situações estão presentes, para não incorrermos em inconsistências.

Voltando às consequências da não invariância da medida fermiônica, vamos denotar o Jacobiano por

$$J[g, A_\mu] \equiv \exp\left(i\alpha_1 [A_\mu, g]\right). \tag{2.12}$$

Esta forma de expressar o Jacobiano será mais conveniente nos cálculos que mostraremos a seguir. Em particular, é fácil ver que

$$\exp\left(i\alpha_1 \left[A_\mu, g^{-1}\right]\right) = \exp\left(-i\alpha_1 [A_\mu, g]\right), \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \left[A_\mu, g^{-1}\right] = -\alpha_1 [A_\mu, g] \tag{2.14}$$

e que, para uma transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} \alpha_1 [A_\mu, g] &= \alpha_1 [A_\mu, 1] + \int dx \theta^a(x) \left.\frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, g]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0} \\ &= \int dx \theta^a(x) \left.\frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, g]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

pois $J\left[1, A_\mu\right] = 1 \Rightarrow \alpha_1\left[A_\mu, 1\right] = 0$. Com esta notação, a equação (2.2) fica:

$$\begin{aligned}
\exp\left(iW[A_\mu]\right) &= \int d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^g]\right) \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^g] + i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right) \\
&= \exp\left(iW[A_\mu^g] - i\alpha_1\left[A_\mu, g\right]\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Isso significa, evidentemente que um jacobiano diferente de 1 implica a não invariância de calibre da ação efetiva

$$\alpha_1\left[A_\mu, g\right] = W[A_\mu^g] - W[A_\mu]. \tag{2.17}$$

Isso é o que entendemos como uma quebra da invariância de calibre no nível quântico.

As consequências desta violação podem ser vistas no raciocínio a seguir. Se $g(\theta)$ for uma transformação *infinitesimal* arbitrária, então,

$$\begin{aligned}
W[A_\mu^\theta] &= W\left[A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta\right] \\
&\approx W\left[A_\mu\right] - \int d^n x \left(\frac{1}{e} D_{\mu b}^a \theta^b\right) \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^a} \\
&= W\left[A_\mu\right] + \int d^n x \theta^a D_{\mu b}^a \left(\frac{1}{e} \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b}\right),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int d^n x \theta^a(x) D_{\mu b}^a \left(\frac{1}{e} \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b}\right) \\
&= \alpha_1\left(A_\mu, 1 + i\theta\right) \approx \int dx \theta^a(x) \left.\frac{\delta \alpha_1\left[A_\mu, g\right]}{\delta \theta(x)}\right|_{\theta=0}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ou,

$$D_\mu \left(\frac{1}{e} \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu(x)}\right) = \left.\frac{\delta \alpha_1\left[A_\mu, g\right]}{\delta \theta(x)}\right|_{\theta=0}. \tag{2.20}$$

Então temos,

$$\left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0}\exp\left(iW[A_\mu]\right) = D_\mu\left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iW[A_\mu]\right)$$
$$= \int d\psi d\bar{\psi} D_\mu\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)$$
$$= \int d\psi d\bar{\psi} D_\mu\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \quad (2.21)$$

Portanto,

$$\left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi}\left(D^a_{\mu b}J^\mu_b\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)}{\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)} \quad (2.22)$$

Definimos, portanto, uma teoria anômala em analogia a (2.22), da seguinte maneira: *uma teoria é dita anômala se o valor esperado da divergência covariante da corrente clássica*[1]*, sobre todos os outros campos exceto os campos de calibre, não for identicamente nulo*; com a anomalia definida através de

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\int d\varphi d\psi d\bar{\psi}\left(D_\mu J^\mu\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu,\varphi]\right)}{\int d\varphi d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu,\varphi]\right)}, \quad (2.23)$$

onde φ representa todos os outros campos da teoria, além dos férmions que definem a corrente e dos campos de calibre. No nosso caso, evidentemente

$$\mathcal{A}_a = D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)}\right) = \left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} \overset{id}{\neq} 0. \quad (2.24)$$

Nenhum argumento de invariância por transformações locais fornece qualquer razão para a anomalia ser nula. Portanto, uma teoria anômala, em princípio, poderia dar ensejo à quebra da conservação da corrente, o que indicaria uma violação quântica da lei de conservação.

Entretanto, como vimos, a corrente não é necessariamente conservada impondo-se prioritariamente invariância local da ação, mas sim global. Voltando aos argumentos do

[1]A corrente de Noether que é conservada na versão clássica da teoria.

capítulo anterior, se em vez de (1.59) tivermos (2.11), então, para $g \approx 1 + i\theta$, com θ infinitesimal, a equação (1.60) se transforma em:

$$\begin{aligned}
\int d\psi d\bar{\psi} F\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] &= \int d\psi^g d\bar{\psi}^g F\left[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu\right] \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i\alpha_1\left[A_\mu, g\right]\right) F\left(\psi + \delta\psi, \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, A_\mu\right) \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} \left(1 + i \int dx \theta^a(x) \left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu, g\right]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0}\right) \\
&\quad \times \left(F\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + \frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\delta\psi(x) + \delta\bar{\psi}(x)\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Tomando apenas termos de primeira ordem em θ, temos

$$\begin{aligned}
& i \int dx \theta^a(x) \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{A}_a F\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] \\
+ \quad & \int dx \int d\psi d\bar{\psi} \left(\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\delta\psi(x) + \delta\bar{\psi}(x)\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Usando (1.62), além de

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta\psi} &= \frac{\delta I_M}{\delta\psi}, \\
\frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}} &= \frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e a hipótese de simetria global, cuja consequência é a equação (1.17),

$$\int dx \theta^a(x) \left(\bar{\psi} i T_a \frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}} - \frac{\delta I_M}{\delta\psi} i T_a \psi\right) = \int dx \theta^a(x) \left(D^a_{\mu b} J^\mu_b\right), \tag{2.28}$$

chegamos a

$$\Rightarrow \left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu, g\right]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi} \left(D^a_{\mu b} J^\mu_b\right) \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right)}{\int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right)}, \tag{2.29}$$

que é o mesmo resultado (2.22), só que, desta vez, utilizando os mesmos argumentos da simetria global da ação que levariam à conservação da corrente se a medida fosse invariante, em vez da simetria local da ação efetiva.

Como já apontado no capítulo anterior, a simetria *local* da medida fermiônica desempenha um papel fundamental na conservação da corrente. No caso clássico, a conservação era obtida impondo-se as equações de movimento para os campos fermiônicos, além da invariância local apenas da ação de matéria. Porém, naquele contexto, a importância da simetria local era apenas em relação à forma do acoplamento do campo de calibre com os campos de matéria, de forma a garantir que a corrente fosse covariantemente conservada sendo, por outro lado, irrelevante no caso abeliano. O papel principal era desempenhado pela invariância global da ação. Por outro lado, no nível quântico a *invariância local* da medida fermiônica aparenta desempenhar papel fundamental na lei de conservação, de maneira que se a mesma é quebrada, (2.23) não é identicamente nula, apontando para uma provável e explícita quebra da conservação da corrente mesmo no caso abeliano.

Portanto, se no caso clássico a simetria local não é fundamental para assegurar a conservação da corrente, podendo até mesmo ser quebrada em alguns casos, como no abeliano ou naqueles que não envolvam a ação de matéria, quanticamente a invariância local da medida parece possuir papel importante na lei de conservação, de forma que, se ela não é invariante, a teoria exibe uma anomalia não nula potencialmente capaz de comprometer a lei de conservação.

2.2 O cancelamento da anomalia como condição subsidiária

A possibilidade de uma teoria de calibre poder apresentar uma anomalia gera algumas controvérsias como, por exemplo, se considerarmos o campo de calibre como um campo externo clássico interagindo com um campo fermiônico quântico cujas correções quânticas são levadas em consideração pela integração funcional sobre os férmions. Neste contexto, poderíamos encarar a ação efetiva como uma ação clássica incorporando efeitos quânticos. A equação clássica de movimento obtida de uma tal teoria efetiva seria

$$\begin{aligned}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu(x)} &= \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\\ &= i\int d\psi d\bar{\psi}\frac{\delta I}{\delta A_\mu(x)}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)\\ &= i\int d\psi d\bar{\psi}\left(\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)}+\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu(x)}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right)=0. \end{aligned}\tag{2.30}$$

$$\Rightarrow \int d\psi d\bar{\psi}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) = -\frac{1}{e}\int d\psi d\bar{\psi}\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu(x)}\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \tag{2.31}$$

Se calcularmos a divergência de (2.31), teremos:

$$\mathcal{A}\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) = -\frac{1}{e}\int d\psi d\bar{\psi}D_\mu\left(\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu(x)}\right)\exp\left(iI[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \tag{2.32}$$

O lado direito de (2.32) é identicamente nulo pela invariância local de I_G. Porém, o lado esquerdo, ou seja, o lado da anomalia, não é. Esse é um dos motivos que levaram muitos teóricos a concluírem que teorias anômalas são inconsistentes (veja a discussão na seção 14.1 de [27]). Entretanto, podemos tentar entender essa questão por um outro viés: impondo as equações clássicas de movimento para o campo de calibre como em (2.30) e calculando sua divergência, chegamos em (2.32), onde temos o lado direito identicamente nulo. Situação análoga acontece na teoria de Proca onde, quando tomamos a divergência das equações de movimento, um lado da equação resultante é identicamente nulo e o outro não é. A solução é tomar este lado da equação ($\partial_\mu A^\mu$) como nulo, gerando uma restrição ao campo bosônico, usualmente chamada de *condição subsidiária*. Ninguém entende isso como sendo uma inconsistência. Ao contrário, esta equação representa uma condição essencial para a obtenção do número correto de graus de liberdade para um campo vetorial com massa. Podemos tentar utilizar, neste contexto, o mesmo argumento desenvolvido para a teoria de Proca e testar a consistência da teoria anômala, encarando a nulidade da anomalia como uma condição subsidiária. Esse será o ponto de vista *central* a ser desenvolvido nesse trabalho[2] [16, 17].

Por outro lado, é possível demonstrar que a anomalia também se cancela na situação onde o campo de calibre é quantizado. Para ver isso, devemos partir da integração da ação efetiva da teoria anômala definida em (2.1) sobre os campos de calibre, definindo o funcional de vácuo[3].

$$Z \equiv \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu]\right). \tag{2.33}$$

Redefinindo os campos de calibre de tal forma que $A_\mu \to A_\mu^g$ e utilizando a invariância da medida bosônica, temos:

$$\begin{aligned} Z &= \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu]\right) \\ &= \int dA_\mu^g \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) \\ &= \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu^g]\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Portanto,

$$\int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu]\right) = \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) \tag{2.35}$$

[2]Notemos, no entanto, que nesse contexto é necessário que a ação de matéria seja invariante de calibre mesmo no caso abeliano para podermos fazer a identificação da corrente com o lado esquerdo de (2.31).

[3]Para manipulações algébricas envolvendo o funcional de vácuo a introdução de fontes externas é supérflua uma vez que a contribuição das fontes vai a zero no final dos cálculos, por estarmos interessados em valores esperados. Esta manipulação é feita nas referências [13, 35]

Isso acontece pela imposição da invariância de dA_μ, mesmo que $W[A_\mu] \neq W[A_\mu^g]$. Considerando $g = \exp(i\theta)$ uma transformação infinitesimal, temos

$$
\begin{aligned}
& \int dA_\mu \exp(iW[A_\mu]) = \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu^\theta]\right) \\
= & \int dA_\mu \exp\left(iW[A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta]\right) \\
= & \int dA_\mu \exp(iW[A_\mu]) \left(1 - \int dx \frac{1}{e} D_{\mu b}^a \theta^b(x) \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a(x)}\right); \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow & \int dx \int dA_\mu \left(-\frac{1}{e} D_{\mu b}^a \theta^b(x)\right) \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a(x)} \exp(iW[A_\mu]) \\
= & \int dx \theta^a(x) \int dA_\mu D_{\mu b}^a \left(\frac{1}{e} \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^b(x)}\right) \exp(iW[A_\mu]) = 0. \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

Sendo $\theta^a(x)$ um parâmetro infinitesimal arbitrário, inevitavelmente chegamos a

$$
\int dA_\mu D_{\mu b}^a \left(\frac{1}{e} \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^b(x)}\right) \exp(iW[A_\mu]) = 0. \qquad (2.38)
$$

Isso implica, evidentemente,

$$
\langle 0|\mathcal{A}_a|0\rangle = \langle 0|D_{\mu b}^a J_b^\mu|0\rangle = 0. \qquad (2.39)
$$

i.e., no cancelamento do valor esperado da anomalia no caso em que os campos de calibre forem quantizados [17, 28]. Como veremos na seção seguinte, tal cancelamento pela invariância da medida bosônica pode ser entendido como o análogo quântico da condição subsidiária que cancela a anomalia com campo de calibre não quantizado. Evidentemente, tal restrição sobre o campo de calibre implica a existência de potenciais vínculos sobre a teoria. Cabe demonstrar, ainda, a consistência de teorias sujeitas a tais tipos de vínculos.

2.3 Considerações adicionais sobre o cancelamento da anomalia como condição subsidiária

Vimos que, no caso da teoria clássica, a corrente é conservada pela imposição da invariância local da ação de matéria e das equações de movimento dos campos fermiônicos. No caso quântico, por sua vez, a conservação da corrente é garantida pela imposição da invariância local da ação de matéria, e também da invariância local da medida fermiônica. Assim, como já discutido, a invariância local da medida parece desempenhar, quanticamente, o papel análogo das equações de movimento no caso clássico. Consideremos, por sua vez, uma teoria clássica genérica cuja ação de matéria possui a simetria local, mas com um termo não simétrico que seja função apenas do campo de calibre, ou seja:

$$\begin{aligned} I_A[\psi,\bar{\psi},A_\mu] &= I_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + I_{Ass}[A_\mu] \\ \text{com:} \qquad & I_{Ass}[A_\mu^g] \neq I_{Ass}[A_\mu] \end{aligned} \tag{2.40}$$

como $I_{Ass}[A_\mu^g] \neq I_{Ass}[A_\mu]$, então

$$D_\mu \left(\frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \overset{id}{\neq} 0. \tag{2.41}$$

Entretanto, se impusermos as equações de movimento para o campo A_μ, teremos

$$\frac{\delta I_A[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}{\delta A_\mu} = 0 \Rightarrow D_\mu \left(\frac{\delta I_A[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) = D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}{\delta A_\mu} + \frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) = 0, \tag{2.42}$$

mas

$$D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) = D_\mu J^\mu = 0 \tag{2.43}$$

pela invariância global da ação. Portanto,

$$D_\mu \left(\frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) = 0 \tag{2.44}$$

como condição subsidiária. Se usarmos a versão quântica dessa teoria e ela não for anômala, teremos:

$$Z = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right). \tag{2.45}$$

Utilizando a invariância da medida bosônica teremos, então,

$$\begin{aligned} Z &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) \\ &= \int dA^g_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu] \right) \\ &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_A[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) \\ = & \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}{\delta A_\mu} + \frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.46}$$

mas

$$\begin{aligned} & \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) \\ = & \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iI_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + iI_{Ass}[A_\mu] \right) \\ = & \int dA_\mu \exp\left(iI_{Ass}[A_\mu] \right) \int d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iI_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) \\ = & \int dA_\mu \exp\left(iI_{Ass}[A_\mu] \right) D_\mu \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu} \left\{ -i \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) \right\} \right) \\ = & \int dA_\mu \exp\left(iI_{Ass}[A_\mu] \right) D_\mu \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu} \left\{ -i \exp\left(iW_M[A_\mu] \right) \right\} \right) \\ = & \int dA_\mu D_\mu \left(\frac{\delta W_M[A_\mu]}{\delta A_\mu} \right) \exp\left(iW_M[A_\mu] + iI_{Ass}[A_\mu] \right), \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde

$$\exp\left(iW_M[A_\mu]\right) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right). \tag{2.48}$$

Entretanto,

$$d\psi d\bar{\psi} = d\psi^g d\bar{\psi}^g \Leftrightarrow W_M[A_\mu] = W_M[A_\mu^g] \tag{2.49}$$

$$\Rightarrow D_\mu \left(\frac{\delta W_M[A_\mu]}{\delta A_\mu}\right) = 0 \tag{2.50}$$

e, portanto,

$$\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}{\delta A_\mu}\right) \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right) = 0 \tag{2.51}$$

Usando, então, em (2.46), que o valor esperado da corrente é nulo pela invariância da medida fermiônica e da ação de matéria, como demonstrado em (2.51), chegamos finalmente a

$$\Rightarrow \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} D_\mu \left(\frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu}\right) \exp\left(iI_A[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right) = \langle 0|D_\mu \left(\frac{\delta I_{Ass}[A_\mu]}{\delta A_\mu}\right)|0\rangle = 0 \tag{2.52}$$

Podemos notar que a equação (2.52) é a versão quântica da condição subsidiária (2.44). Assim, a invariância da medida bosônica parece representar o análogo quântico das equações clássicas de movimento dos campos de calibre no sentido de fornecer uma condição subsidiária que é compatível com a conservação do valor esperado da corrente, garantida pela invariância local da medida fermiônica e da ação de matéria [17]. Notemos, no entanto, que a conservação da corrente existe *a priori*, e que a condição subsidiária aparece *a posteriori*, como resultado da compatibilização das equações de movimento do campo de calibre com a conservação da corrente.

Como será demonstrado em (3.21), numa teoria quântica nos campos de matéria e clássica nos campos de calibre, o valor esperado da corrente é identicamente nulo se, e somente se, a ação efetiva for invariante de calibre. Assim, o fato da ação efetiva não ser invariante de calibre, devido à não invariância da medida fermiônica, gera uma quebra da simetria colocando em risco a conservação da corrente. Se, contudo, impusermos o princípio variacional e, portanto, as equações clássicas de movimento e tirarmos a sua divergência, o resultado não será outro senão que a anomalia é nula. Esquematicamente temos

$$\begin{aligned} A_\mu \text{ clássico:} \qquad & d\psi d\bar{\psi} = d\psi^g d\bar{\psi}^g \Rightarrow W[A_\mu] \neq W[A_\mu^g] \Rightarrow \mathcal{A} \overset{id}{\neq} 0, \text{ mas} \\ \text{eq. de mov} \quad : \quad & \frac{\delta W\,[A]}{\delta A_\mu^b(x)} = 0 \Rightarrow \text{cond. subsid: } D_{\mu b}^a \left(\frac{\delta W\,[A]}{\delta A_\mu^b(x)} \right) = \mathcal{A} = 0. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Assim, embora a não invariância da ação efetiva diga que a anomalia não é nula, as equações de movimento impõem o contrário. Isso é usualmente entendido como contraditório e, portanto, muitos autores dizem que as teorias anômalas são inconsistentes. No entanto, como já esboçado na seção anterior, podemos tentar relaxar esse julgamento e impor o princípio variacional para a ação efetiva (as equações de movimento) e, portanto, o cancelamento da anomalia como condição subsidiária, da mesma forma que fazemos para teorias onde a simetria de calibre é explicitamente quebrada.

Entretanto, há uma diferença: como vimos, nas teorias cujas ações originais não são invariantes locais, a conservação da corrente existe *a priori*, e a condição subsidiária aparece *a posteriori*. No caso das teorias anômalas, por sua vez, se utilizarmos raciocínio análogo, acontece o contrário: as equações de movimento são impostas *a priori* levando, portanto, à condição subsidiária, e a conservação da corrente se manifesta *a posteriori* pela imposição da condição subsidiária, mas não há nada que a garanta *a priori*.

Por outro lado, se considerarmos A_μ quântico, embora a ação efetiva não seja invariante de calibre, a medida bosônica é, gerando o cancelamento do valor esperado da anomalia.

$$\begin{aligned} A_\mu \text{ quântico:} \qquad & W[A_\mu] \neq W[A^g_\mu], \text{ mas} \\ dA^g_\mu \;=\; & dA_\mu \Rightarrow \text{cond. subsid: } \langle 0|D^a_{\mu b}\left(\frac{\delta W\,[A]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{A}|0\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Mas, como vimos, usar a invariância da medida bosônica significa impor condição subsidiária no nível quântico. Também nesse caso não há nada que garanta a conservação da corrente *a priori*, sendo essa advinda da invariância da medida do campo de calibre.

Assim, o mesmo argumento que levou autores a considerarem teorias anômalas como inconsistentes poderia ser extrapolado para o caso quântico já que, como vimos, utilizar a invariância da medida do campo de calibre e chegar à conclusão de que o valor esperado da anomalia é nulo (embora não o seja identicamente), pode ser considerado o análogo quântico de usar as equações clássicas de movimento e, ao tirar a divergência da mesma, chegar à conclusão de que a anomalia tem que ser nula (embora também não o seja identicamente). No entanto, um argumento pode ser levantado em favor do cancelamento da anomalia no nível quântico em detrimento da mesma no nível da ação efetiva clássica: no segundo caso, precisamos *postular* o princípio variacional para a ação efetiva e calcular as equações de movimento para anular a anomalia. No primeiro, ao contrário, a medida dA_μ *é invariante de calibre* e, portanto, o cancelamento do valor esperado da anomalia não vem de um postulado, mas de um fato.

Uma outra questão a ser levantada é a consistência da equação que anula a anomalia com as equações de Dyson-Schwinger (DS) para o campo da calibre. No caso abeliano, de fato, ela é consistente, já que

$$\text{eq. DS: } \langle 0|\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A_{\mu}(x)}|0\rangle = 0 \Rightarrow \partial_{\mu}\langle 0|\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A_{\mu}(x)}|0\rangle = \langle 0|\partial_{\mu}\left(\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A_{\mu}(x)}\right)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{A}|0\rangle = 0. \tag{2.55}$$

Portanto, nesse caso, o cancelamento da anomalia é redundante já que também vem como consequência das equações de DS. Logo, no caso abeliano, impor a invariância da medida bosônica é equivalente a tomar a divergência das equações quânticas de movimento, assim como tomamos a divergência das equações clássicas de movimento para chegar à sua correlata condição subsidiária clássica. Entretanto, no caso não abeliano, teríamos que conviver com uma condição extra, já que

$$\text{eq. DS: } \langle 0|\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^a_{\mu}(x)}|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0|\partial_{\mu}\left(\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^a_{\mu}(x)}\right)|0\rangle = 0, \tag{2.56}$$

mas

$$\begin{aligned} \text{“eq. subsid.”:} \qquad & \langle 0|D^a_{\mu b}\left(\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^b_{\mu}(x)}\right)|0\rangle \\ = \quad & \langle 0|\partial_{\mu}\left(\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^a_{\mu}(x)}\right)|0\rangle + f_{cab}\langle 0|A^c_{\mu}\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^b_{\mu}(x)}|0\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & f_{cab}\langle 0|A^c_{\mu}\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A^b_{\mu}(x)}|0\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

que significa que as equações de DS e a “equação subsidiária” que cancela o valor esperado da anomalia *não são* redundantes e que, portanto, constituem duas afirmações distintas. Caberia, portanto, no caso de uma teoria não abeliana, testar a consistencia de (2.57) com as equações quânticas de movimento.

Vamos supor, daqui para frente, que as equações que anulam a anomalia sejam válidas, seja pela imposição das equações clássicas ou, analogamente, pela invariância da medida do campo de calibre, e que a corrente se conserve como consequência desses motivos. Nada nos impede de supor isso, a não ser que se demonstre a inconsistência de tais suposições. Como já mencionado, esse é o nosso ponto de partida e a nossa proposta, contrastando com a idéia da quebra da conservação da corrente ao quantizar-se os férmions.

Por ora, faremos uma pausa estratégica nessa discussão e estudaremos uma antiga proposta de mergulho de uma teoria anômala em um modelo invariante de calibre. Essa mesma proposta servirá de base para uma segunda proposta a ser desenvolvida no próximo capítulo.

Capítulo 3

Formulações Invariantes de Calibre das Teorias Anômalas

Vimos no capítulo anterior que, ao considerarmos uma teoria mista com campos fermiônicos quânticos e campos de calibre clássicos, a quebra da invariância de calibre local no nível da ação efetiva fornece uma anomalia não identicamente nula que deu margem à interpretação de que haveria uma quebra da conservação da corrente de Noether. Como a divergência desta corrente precisa ser nula, em função da anulação algébrica de $D_\mu \left(\delta I_G / \delta A_\mu\right)$, isso levou a um entendimento das teorias anômalas como sendo modelos inconsistentes e, portanto, não confiáveis.

No entanto, várias evidências começaram a apontar para a idéia de que teorias anômalas não são necessariamente inconsistentes. O trabalho de Jackiw e Rajaraman [10] mostra, por exemplo, que uma teoria de calibre anômala em duas dimensões pode ser bem definida. Além disso, apesar das teorias anômalas quebrarem a simetria de calibre quando são integrados os campos fermiônicos, alguns autores conseguiram construir formulações que recuperam a simetria. Faddeev e Shatashvilli [12] notaram que a simetria de calibre pode ser recuperada pela introdução de novos graus de liberdade, que transformam vínculos de segunda classe (correlacionados à anomalia de calibre) em vínculos de primeira classe. Tais novos graus de liberdade levam a ação efetiva em uma nova ação que é invariante de calibre. A exposição explícita dessa invariância recebeu o nome de *formulação invariante de calibre*.

É natural tentar entender o que acontece à anomalia de calibre nesse novo contexto das ações efetivas simétricas. Além disso, esse mapeamento é feito com os campos de calibre quantizados. Podemos nos perguntar o que acontece com a anomalia nessa formulação invariante e com a herança dessa formulação no limite de campos de calibre clássicos. Na seção seguinte, faremos uma revisão do trabalho de Harada e Tsutsui que formula, naturalmente, uma teoria invariante de calibre. Em seguida, analisaremos a anomalia e, consequentemente, a divergência covariante da corrente no contexto dessa formulação. Paradoxalmente, mostraremos que essa teoria continua anômala e que, ao contrário da formulação original, não há condições sobre os campos de calibre que possibilitem seu cancelamento. Finalmente, mostraremos que o mesmo procedimento proposto por Harada e Tsutsui para derivar a formulação proposta por Fadeev e Shatashvili pode ser utilizado para construir uma nova formulação, chamada formulação estendida, que demonstra ser livre de anomalias.

3.1 A formulação invariante padrão

Consideremos a teoria inteiramente quântica descrita pela amplitude vácuo-vácuo

$$Z \equiv \int d\psi d\bar{\psi} dA_{\mu} \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_{\mu}\right]\right). \tag{3.1}$$

Em uma teoria de calibre sem anomalias, a ação efetiva é invariante e, portanto, cada termo no integrando funcional que difere dos outros por uma transformação de calibre genérica fornece a mesma contribuição para a integral. O resultado é que a integração sobre todas as configurações possíveis exibe infinitas repetições de termos equivalentes. Um método para resolver esse problema é integrar apenas as configurações que não são equivalentes por transformações de calibre, como proposto por Fadeev e Popov [29]. Seguindo seu método, eles introduzem as condições de fixação de calibre $f_a\left[A_{\mu}\right] = 0$ e supõem que $f_a\left[A_{\mu}^{g}\right] = 0$ possuem solução única para g. Assim, define-se $\Delta_f\left[A_{\mu}\right]$ de tal forma que, além de ser invariante de calibre, também satisfaça

$$\Delta_f\left[A_{\mu}\right] \int dg \delta\left(f\left[A_{\mu}^{g}\right]\right) = 1, \tag{3.2}$$

onde dg representa a medida invariante de integração sobre o grupo de calibre G[1]. Multiplicando (3.1) por (3.2) filtram-se, portanto, apenas as configurações do campo de calibre

[1]Tomamos esta medida como sendo a medida invariante de Haar [30], no sentido de que ela satisfaz

$$dg = d\left(gg'\right).$$

Na vizinhança da identidade, ela sempre pode ser tomada como

$$dg = \prod_{a,x} d\theta^{a}(x).$$

Os $\theta^{a}(x)$, parâmetros que caracterizam g, são chamados, neste contexto, de *campos de Wess-Zumino*. Embora estes sejam os campos nos quais vamos nos interessar, vamos deixá-los subentendidos na maioria das vezes, durante este capítulo, nos referindo genericamente ao elemento do grupo g como "campo de que não são equivalentes.

Isso acontece em teorias de calibre genuínas já que, de fato, contribuições que diferem entre si por uma transformação de calibre são totalmente equivalentes, contribuindo exatamente da mesma maneira para Z. Entretanto, teorias anômalas exibem ação efetiva não invariante de calibre, de maneira que cada configuração de calibre fornece uma contribuição diferente para a amplitude vácuo-vácuo. Portanto, em princípio, dever-se-ia integrar sobre *todas* as configurações do campo de calibre, já que essa equivalencia não se sustenta no caso de uma teoria que não possui a simetria.

Aproveitando a técnica proposta por Fadeev e Popov, Harada e Tsutsui utilizam a identidade (3.2) em (3.1) da mesma forma que os primeiros, sabendo da não fatorização da integração sobre o grupo de calibre. Assim,

$$Z \equiv \int dg d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \Delta_f \left[A_\mu\right] \delta\left(f_a\left[A_\mu^g\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right). \tag{3.3}$$

Se fizermos a seguinte mudança de variáveis

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^g, \tag{3.4}$$

lembrarmos que o funcional Δ_f é invariante de calibre

$$\Delta_f\left[A_\mu\right] = \Delta_f\left[A_\mu^g\right],$$

e supusermos que a medida bosônica seja invariante, ou seja

$$dA_\mu = dA_\mu^g, \tag{3.5}$$

poderemos reescrever Z como

$$Z = \int dg d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D} A_\mu \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^g\right]\right), \tag{3.6}$$

Wess-Zumino".

onde

$$\mathcal{D}A_\mu \equiv dA_\mu \Delta_f \left[A_\mu\right] \delta\left(f_a\left[A_\mu\right]\right). \tag{3.7}$$

Usando a invariância de calibre de I, a eq. (3.3) fica

$$Z = \int dg d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iI\left[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu\right]\right). \tag{3.8}$$

No caso em que a teoria não seja anômala, a medida fermiônica será invariante de calibre, de modo que a medida poderá ser redefinida $d\psi d\bar{\psi} \to d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}}$ sem gerar um jacobiano que implicará em novos termos na ação. Consequentemente, o integrando é independente de g e, portanto, a integração sobre o volume de calibre fornece um termo constante que pode ser desconsiderado. Na integração restante, a delta funcional garante que apenas um campo de calibre por órbita seja selecionado. O método de Fadeev-Popov consiste, portanto, numa maneira eficiente de definir quanticamente as teorias de calibre. Entretanto, se insistirmos em utilizar a igualdade (3.2) numa teoria anômala, a ação ganha um termo extra relacionado ao jacobiano da medida fermiônica (2.11), conhecido como *ação de Wess-Zumino* [31, 32, 33]. Assim, usando (2.11) em (3.8), escrevemos agora

$$Z = \int dg d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iI_{st}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, g\right]\right), \tag{3.9}$$

com

$$I_{st}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, g\right] \equiv I\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + \alpha_1\left[A_\mu, g\right], \tag{3.10}$$

onde $I_{st}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, g\right]$ foi batizada por Harada e Tsutsui como a *ação padrão*. Efetuando a integração sobre os campos fermiônicos teremos,

$$\begin{aligned} Z &= \int dg d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iI_{st}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, g\right]\right) \\ &= \int dg d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, g\right]\right) \\ &= \int dg \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iW\left[A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, g\right]\right) \\ &= \int dg \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iW\left[A_\mu^g\right]\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Definindo $W_{eff}\left[A_\mu\right]$ como:

$$\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) \equiv \int dg \exp\left(iW\left[A_\mu^g\right]\right), \tag{3.12}$$

chegamos a

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right). \tag{3.13}$$

É fácil ver que essa nova ação efetiva é invariante de calibre. Para isso, basta notar que

$$\begin{aligned} \exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu^h\right]\right) &\equiv \int dg \exp\left(iW\left[\left(A_\mu^h\right)^g\right]\right) \\ &= \int dg \exp\left(iW\left[A_\mu^{gh}\right]\right) \\ &= \int d\left(gh\right) \exp\left(iW\left[A_\mu^{gh}\right]\right) \\ &= \int dg \exp\left(iW\left[A_\mu^g\right]\right) \\ &= \exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_{eff}\left[A_\mu^h\right] = W_{eff}\left[A_\mu\right]. \tag{3.14}$$

Assim, a teoria é invariante de calibre e o funcional gerador Z já incorpora a fixação de calibre automaticamente, ao se utilizar da medida $\mathcal{D}A_\mu$. A teoria anômala é vista, desta forma, como *uma teoria de calibre onde este já foi fixado.*

Numa teoria onde existe simetria de calibre no nível quântico podemos nos perguntar, então, o que acontece com a divergência da corrente fermiônica no contexto dessa nova formulação invariante de calibre. A identidade obtida pelo fato da ação efetiva ser simétrica é (repetindo os passos que levaram a (2.6)),

$$D_\mu \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta W_{eff}\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} \right\} = 0. \tag{3.15}$$

A condição acima, em uma teoria comum, é necessária e suficiente para a divergência nula da corrente. Para ver isso, consideremos uma teoria *não anômala* com ação efetiva invariante $W\left[A\right]$. Assim,

$$D_\mu \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} \right\} = 0 \tag{3.16}$$

Vejamos, então, a relação de $D_\mu \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu(x)} \right\}$ com a corrente:

$$\begin{aligned} & D^a_{\mu b} \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)} \right\} \exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) \\ = \;& -\frac{i}{e} D^a_{\mu b} \frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)} \left\{ \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right)\right\} \\ = \;& \int d\psi d\bar{\psi} \left(-\frac{i}{e} D^a_{\mu b} \frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)} \right) \left\{ \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right)\right\} \\ = \;& \int d\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b} \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta I\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)} \right\} \left\{ \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Mas $I\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] = I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + I_G\left[A_\mu\right]$. Como estamos analisando o contexto das ações clássicas invariantes de calibre, $I_G\left[A_\mu\right]$ é simétrica, portanto,

$$D^a_{\mu b} \left(\frac{1}{e} \frac{\delta I_G\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)} \right) = 0 \Rightarrow D^a_{\mu b} \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta I\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)} \right\} = D^a_{\mu b} \left\{ \frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)} \right\}. \tag{3.18}$$

Voltando ao desenvolvimento da (3.17) e utilizando (3.16) temos, finalmente

$$
\begin{aligned}
& D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}\exp\left(iW\left[A_{\mu}\right]\right) \\
= & \int d\psi d\bar{\psi} D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_{M}\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & \int d\psi d\bar{\psi}\left(D_{\mu b}^{a}J_{b}^{\mu}\right)\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\}=0. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Fazendo o caminho inverso, temos, evidentemente

$$
\begin{aligned}
& \int d\psi d\bar{\psi} D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_{M}\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & \int d\psi d\bar{\psi} D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & -\frac{i}{e}\int d\psi d\bar{\psi} D_{\mu b}^{a}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & -\frac{i}{e}D_{\mu b}^{a}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\left\{\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & -\frac{i}{e}D_{\mu b}^{a}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\left\{\exp\left(iW\left[A_{\mu}\right]\right)\right\} \\
= & D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}\exp\left(iW\left[A_{\mu}\right]\right)=0. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
D_{\mu b}^{a}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_{\mu}\right]}{\delta A_{\mu}^{b}(x)}\right\}=0 \Longleftrightarrow \int d\psi d\bar{\psi}\left(D_{\mu b}^{a}J_{b}^{\mu}\right)\left\{\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\right\}=0, \qquad (3.21)
$$

o que significa que a lei de conservação da corrente, em uma teoria de calibre não anômala, pode ser identificada com (3.16). Entretanto, não podemos nos esquecer de que, para chegarmos ao resultado acima, tivemos que fazer uso do fato de que além da ação efetiva ser invariante de calibre a ação clássica também o é.

Vamos efetuar agora o mesmo cálculo, mas considerando W_{eff}. Nesta versão invariante de calibre da teoria anômala, (3.15) nos fornece

$$\begin{aligned}
& D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W_{eff}\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) \\
= & -\frac{i}{e}D^a_{\mu b}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)}\left\{\int dgd\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\right\} \\
= & \int dgd\psi d\bar{\psi}\left(-\frac{i}{e}D^a_{\mu b}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right) \\
= & \int dgd\psi d\bar{\psi}D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Porém, $I_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]=I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+\alpha_1\left[A_\mu,g\right]$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
& \int dgd\psi d\bar{\psi}D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\left\{\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\right\} \\
= & \int dgd\psi d\bar{\psi}\left\{D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)+D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\right\} \\
& \times\left\{\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\right\} \\
= & \int dgd\psi d\bar{\psi}\left\{D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)+D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\right\} \\
& \times\left\{\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\right\} \\
\equiv & \; 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\int dgd\psi d\bar{\psi}\left\{D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)+D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\right\}\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\equiv 0. \tag{3.24}$$

Mas, nesse caso, $\alpha_1\left[A_\mu,g\right]$ *não é* invariante de calibre. Para ver isso, basta notar que

$$\begin{aligned}
\alpha_1\left[A^h_\mu,g\right] &= W\left[\left(A^h_\mu\right)^g\right]-W\left[A^h_\mu\right] \\
&= \alpha_1\left[A_\mu,gh\right]-\alpha_1\left[A_\mu,h\right] \\
&\neq \alpha_1\left[A_\mu,g\right].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto,

$$D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\neq 0. \tag{3.26}$$

Consideremos em detalhe o segundo termo da equação (3.23):

$$\begin{aligned}
&\int dgd\psi d\bar{\psi}D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\\
=&\int d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]\right)\int dgD^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\exp\left(i\alpha_1\left[A_\mu,g\right]\right)\\
=&\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right)\int dgD^a_{\mu b}\left\{-\frac{i}{e}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)}\left[\exp\left(iW\left[A^g_\mu\right]\right)\exp\left(-iW\left[A_\mu\right]\right)\right]\right\}\\
=&\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right)D^a_{\mu b}\left\{-\frac{i}{e}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right)\exp\left(-iW\left[A_\mu\right]\right)\right\}\\
=&\left(D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W_{eff}\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}-D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\right)\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right)\\
=&-D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right)\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Vemos, assim, que a invariância da ação efetiva na formulação invariante padrão não nos leva à divergência covariante nula da corrente, como seria esperado de uma teoria não anômala. Isso se dá pelo fato de que, embora a ação efetiva da teoria, depois de integrados os férmions e os campos de Wess-Zumino, seja invariante de calibre, a ação de partida não o é, já que sua invariância é quebrada por $\alpha_1\left[A_\mu,g\right]$ invalidando uma das condições necessárias para que (3.21) seja satisfeita. De fato, usando (3.27) em (3.23), temos

$$\begin{aligned}
&\int dgd\psi d\bar{\psi}D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\\
=&\; D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Percebendo que o lado direito de (3.28) é a própria anomalia (2.24) multiplicada pela exponencial da ação efetiva, temos, portanto

$$\mathcal{A}=\frac{\int dgd\psi d\bar{\psi}D^a_{\mu b}\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)}{\int dgd\psi d\bar{\psi}\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)}\neq 0. \tag{3.29}$$

O resultado anterior demonstra que, pela nossa definição (2.23), a formulação padrão preserva a mesma anomalia. Isso se deve ao fato de que, se utilizarmos a ação padrão $I_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]$ como ponto de partida de nossa teoria, teremos exatamente a mesma corrente $J^\mu_a=\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A^a_\mu}$ covariantemente conservada classicamente, mas apresentando uma anomalia não nula (3.29) ao quantizar-se os campos de matéria. Nessa situação podemos notar que, ao contrário da formulação original, o fato da ação efetiva ser invariante de calibre impossibilita o cancelamento da anomalia como condição subsidiária.

Finalizamos esta seção apresentando uma maneira mais conveniente de obter uma formulação invariante de calibre. Harada e Tsutsui derivam a formulação padrão através do método de Faddeev-Popov, ou seja, multiplicando a amplitude de vácuo (3.1) pela identidade (3.2) acima. Entretanto, podemos obter os mesmos resultados simplesmente redefinindo o funcional de vácuo multiplicando-o pelo volume do grupo de calibre

$$\Omega=\int dg. \tag{3.30}$$

Assim procedendo,

$$Z=\int dgdA_\mu \exp\left(iW[A_\mu]\right), \tag{3.31}$$

Utilizando a invariância de calibre de dA_μ, temos

$$\begin{aligned} Z &= \int dgdA^g_\mu \exp\left(iW[A^g_\mu]\right) \\ &= \int dgdA_\mu \exp\left(iW[A^g_\mu]\right) \\ &= \int dA_\mu \exp\left(iW_{eff}[A_\mu]\right), \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde, como antes,

$$\exp\left(iW_{eff}[A_\mu]\right)\equiv\int dg \exp\left(iW[A^g_\mu]\right). \tag{3.33}$$

exatamente como em (3.12). A partir deste ponto, precisamos utilizar a formulação de Faddeev-Popov como numa teoria de calibre normal. Inserindo a identidade de Faddeev-Popov, reobtemos as expressões familiares de Harada e Tsutsui.

3.2 A formulação invariante estendida

Vimos na seção anterior que a formulação padrão, embora seja invariante de calibre, preserva intacta precisamente a mesma anomalia (3.29) do modelo original e que, contrariamente à formulação original, não há condição subsidiária capaz de cancelá-la. Poder-se-ia conjecturar que, pelo fato da ação efetiva ser invariante de calibre, uma escolha particular de calibre tal que cancele a anomalia poderia demonstrar a equivalência entre a formulação original e a formulação padrão. Entretanto, isso incorre em absurdo, uma vez que teríamos uma teoria que conserva a corrente em um determinado calibre e, por outro lado, teríamos a mesma não conservada em todos os outros, demonstrando uma quebra da equivalência fisica entre calibres distintos. Do nosso ponto de vista onde a corrente é conservada como condição subsidiária, isso é suficiente para concluir que as duas formulações não são equivalentes. Isso pode ser explicado pela não invariância de calibre da ação padrão, fazendo com que calibres distintos da ação efetiva invariante de calibre, depois de integrados os campos de matéria e os campos de Wess-Zumino, não forneçam resultados físicos equivalentes, tal qual sugerido no trabalho de C. Linhares, H. Rothe e K. Rothe [34], a menos que a condição que anule a anomalia seja *imposta* nas duas formulações.

Por outro lado, para derivarmos uma formulação invariante de calibre, é necessário apenas que utilizemos a ação efetiva, ou seja, como visto na seção anterior, simplesmente chegamos a

$$\exp\left(iW_{eff}[A_\mu]\right) \equiv \int dg \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) \tag{3.34}$$

que pode ser construída através da ação padrão

$$\exp\left(iW_{eff}[A_\mu]\right) = \int dg \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) = \int dg d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A\right] + i\alpha_1\left[A,g\right]\right)$$

ou, alternativamente, através de uma outra mais simples:

$$\exp\left(iW_{eff}[A_\mu]\right) = \int dg \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) = \int dg d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A,g\right]\right)$$

onde

$$I_{en}[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g] \equiv I[\psi,\bar{\psi},A_\mu^g] \tag{3.35}$$

é batizada de *ação estendida*.

A vantagem da ação estendida é que, ao contrário da ação padrão, ela é obviamente invariante de calibre, tal qual a ação original $I[\psi,\overline{\psi},A_\mu]$. Além disso, classicamente uma teoria parece ser redutível à outra por uma redefinição dos campos de matéria onde $\left\{\psi,\bar{\psi}\right\} \to \left\{\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}}\right\}$, o que significaria que, classicamente, o parâmetro g seria invisível. Portanto, as duas formulações podem ser classicamente equivalentes. Entretanto, uma análise das equações de movimento dos campos da teoria deve ser realizada para termos certeza de que são, de fato, equivalentes no nível clássico. No nível quântico, devemos, tal qual fizemos com a formulação estendida, procurar a quantidade trivialmente conservada pela invariância de calibre de $W_{eff}[A_\mu]$. Assim, procedendo desenvolvimento análogo ao que foi feito em (3.22), chegamos a

$$
\begin{aligned}
&D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta W_{eff}\left[A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) \\
&= \int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)=0. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A^g_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right) \\
&= \int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right) \\
&= \int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)=0 \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}J^\mu_b\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)=0 \qquad (3.38)
$$

onde

$$
D^a_{\mu b}J^\mu_b\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]\equiv D^a_{\mu b}\left\{\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]}{\delta A^b_\mu(x)}\right\}. \qquad (3.39)
$$

Em teorias fermiônicas, o campo de calibre é acoplado de maneira linear aos campos de matéria, de forma que a corrente só dependa dos últimos. Assim, temos

$$
J^\mu_a\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}}\right]\equiv\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu\right]}{\delta A^a_\mu(x)} \qquad (3.40)
$$

e, portanto, a teoria estendida nos fornece

$$
\int dgd\psi d\bar{\psi} D^a_{\mu b}J^\mu_b\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}}\right]\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,g\right]\right)\equiv 0. \qquad (3.41)
$$

Mas a corrente $J^\mu_a\left[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}}\right]$ é exatamente a corrente de Noether que é classicamente conservada na teoria estendida. Portanto, a formulação estendida é *livre de anomalias*.

Existe, no entanto, uma diferença sutil entre as versões clássica e quântica do formalismo original e estendido: enquanto classicamente o parametro de calibre pode ser absorvido na definição dos campos fermiônicos (ou do campo de calibre), se mantendo invisível, no nível quântico este parametro se mantém indispensável para garantir a conservação covariante da corrente não abeliana. Além disso, não é mais a corrente usual que é *identicamente* conservada, mas a corrente *transformada de calibre* $J_a^\mu\left[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}\right]$. Isso classicamente talvez não faça nenhuma diferença. A diferença se dá quando quantizamos os campos de matéria e o parâmetro g, uma vez que o mesmo deve ser integrado e não pode ser absorvido pelas variáveis fermiônicas, dada a não trivialidade do jacobiano fermiônico.

Por outro lado, no caso abeliano só temos a parte inomogênea da transformação do campo de calibre. Isso significa que

$$\begin{aligned}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu(x)} &= \int dy \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\nu^\theta(y)}\frac{\delta A_\nu^\theta(y)}{\delta A_\mu(x)} \\ &= \int dy \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\nu^\theta(y)}\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\left(A_\nu(y)+\frac{1}{e}\partial_\nu\theta(y)\right) \\ &= \int dy \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(y)}\delta(x-y) = \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(x)}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Como a corrente só depende dos campos fermiônicos, temos

$$\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu(x)} = \frac{\delta I_M\left[\psi^{-\theta},\bar{\psi}^{-\theta},A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} = \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(x)} = \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)}, \tag{3.43}$$

o que significa, evidentemente, que a corrente abeliana é invariante de calibre, ou seja

$$J^\mu\left[\psi^{-\theta},\bar{\psi}^{-\theta}\right] = J^\mu\left[\psi,\bar{\psi}\right]. \tag{3.44}$$

Portanto, para o caso abeliano (3.41) fica

$$\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu J^\mu \exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta\right]\right)\equiv 0, \tag{3.45}$$

onde a corrente é exatamente a mesma nas duas formulações.

Façamos, agora, uma comparação entre equações clássicas de movimento das formulações não invariante e invariante estendida de um modelo abeliano genérico. No primeiro caso, temos

$$I[\psi,\overline{\psi},A_\mu]=I_M[\psi,\overline{\psi},A_\mu]+I_G\left[A_\mu\right]. \tag{3.46}$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\psi} &= \frac{\delta I_M[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\psi}=0 && (3.47)\\
\frac{\delta I[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}} &= \frac{\delta I_M[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}}=0 && (3.48)\\
\frac{\delta I}{\delta A_\mu} &= \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu}+\frac{\delta I_G}{\delta A_\mu}=0 && (3.49)
\end{aligned}$$

No caso da formulação estendida, sendo o campo de calibre acoplado de maneira linear, podemos expandir a ação até primeira ordem em A_μ^θ obtendo

$$I_{en}[\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta]=I_F\left[\psi,\bar{\psi}\right]+\int dx\frac{\delta I_M[\psi,\bar{\psi},A]}{\delta A_\mu(x)}\left\{A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right\}+I_G[A]. \tag{3.50}$$

As equações clássicas de movimento nos dão

$$\begin{aligned}
\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta\psi(x)} &= \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta\psi(x)}=0 && (3.51)\\
\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta\overline{\psi}} &= \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta\overline{\psi}}=0 && (3.52)\\
\frac{\delta I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu} &= \frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu(x)}+\frac{\delta I_G\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu(x)}=\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)}+\frac{\delta I_G\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)}=0 && (3.53)\\
\frac{\delta I}{\delta\theta} &= \partial_\mu\left(-\frac{1}{e}\frac{\delta I_M[\psi,\bar{\psi},A]}{\delta A_\mu(x)}\right)=\partial_\mu J^\mu=0 && (3.54)
\end{aligned}$$

A equação (3.54) para θ é redundante, já que a corrente é conservada por invariância global. A equação (3.53) para o campo de calibre, além de ser invariante, é exatamente a mesma da teoria original, e as equações de movimento (3.51) e (3.52) para os campos de matéria se reduzem às equações (3.47) e (3.48) da teoria original se redefinirmos os campos de calibre de tal forma que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A^\theta_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \qquad (3.55)$$

Assim, a teoria estendida abeliana classicamente equivale-se à teoria original, sua ação é invariante de calibre e o valor esperado da quantidade que é conservada é exatamente a corrente de *Noether* da teoria clássica. Portanto, a teoria estendida parece desempenhar o mesmo papel da teoria original, mas com a vantagem de não ser anômala, isso é, com a vantagem de ter o valor esperado da divergência da corrente sobre os campos de matéria *identicamente* nulo, ou seja, sem condição subsidiária.

Para finalizar essa seção, devemos ressaltar algumas sutilezas a serem consideradas em relação à definição da medida fermiônica nesse formalismo estendido. Em geral, o acoplamento com o campo de calibre é feito pelo operador de Dirac $D[A]$ na ação de matéria

$$I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A\right] = \bar{\psi} D[A]\,\psi, \qquad (3.56)$$

e a medida fermiônica é *definida* através desse operador [26] como se segue: primeiro, ψ e $\bar{\psi}$ são expandidos da seguinte forma:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) \qquad (3.57)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\,\bar{b}_n \qquad (3.58)$$

em termos de um conjunto completo de autofunções *do operador de Dirac* no espaço euclidiano

$$D\left[A\right]\varphi_n\left(x\right) = \lambda_n \varphi_n\left(x\right), \tag{3.59}$$

então, a medida fermiônica é *definida* pelos coeficientes a_n e $\bar{b}_n$, que são elementos da àlgebra de Grasmann

$$d\psi d\bar{\psi} \equiv \prod_{n,m} d\bar{b}_m da_n. \tag{3.60}$$

Percebemos, portanto, que $D\left[A\right]$ desempenha um papel importante na definição da medida fermiônica. Por outro lado, $I\left[\psi, \bar{\psi}, A, g\right] = I\left[\psi, \bar{\psi}, A^g\right]$, e o operador de Dirac que define $d\psi d\bar{\psi}$ e que garante a equação de conservação (3.41) é o *operador de Dirac transformado* $D\left[A^g\right]$ e não o original $D\left[A\right]$.

Assim, o problema da anomalia simplesmente não aparece na formulação invariante fornecida pela ação estendida, onde a mesma conduz a uma redefinição da medida fermiônica que leva em conta o parâmetro g da mesma maneira que o bóson de calibre.

Daqui por diante, iremos nos concentrar *apenas* no caso abeliano, onde a corrente da teoria estendida é exatamente a mesma da teoria original.

3.3 As três formulações e a corrente de Noether abeliana

Vimos que podemos construir modelos cujas ações efetivas são invariantes de calibre a partir de teorias anômalas através de manipulações algébricas sobre a integral funcional. Apesar de estarmos abertos à possibilidade de considerar esses modelos mapeados mesmo com campos de calibre clássicos, não podemos nos esquecer que, para realizar tal mapeamento, tivemos que quantizar os campos de calibre e impor a invariância da medida bosônica. Podemos nos perguntar se esses modelos são equivalentes e, no caso da resposta ser afirmativa, se podemos estender essa equivalência ao regime onde o campo de calibre é clássico. Sendo mais claros, consideremos a integração da anomalia abeliana sobre o campo de calibre

$$\int dA_\mu \mathcal{A} \exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu \left(\frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} \right) \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right), \tag{3.61}$$

e vamos mapeá-la, primeiro, na formulação estendida

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Omega} \int d\theta dA_\mu \mathcal{A} \exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) \\
= & \frac{1}{\Omega} \int d\theta dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu \left(\frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} \right) \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]\right) \\
= & \frac{1}{\Omega} \int d\theta dA^\theta_\mu d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu \left(\frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A^\theta_\mu\right]}{\delta A^\theta_\mu(x)} \right) \exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A^\theta_\mu\right]\right) \\
= & \frac{1}{\Omega} \int d\theta dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu \left(\frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A^\theta_\mu\right]}{\delta A^\theta_\mu(x)} \right) \exp\left(iI_{en}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta\right]\right)
\end{aligned}$$

Porém, como vimos em (3.43)

$$\frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A^\theta_\mu\right]}{\delta A^\theta_\mu(x)} = \frac{1}{e} \frac{\delta I_M\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu. \tag{3.62}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \int dA_\mu \mathcal{A} \exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) = \frac{1}{\Omega} \int d\theta dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu J^\mu \exp\left(iI_{en}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta\right]\right). \tag{3.63}$$

Por outro lado, relembrando (3.45):

$$\int d\theta d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu J^\mu \exp\left(iI_{en}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta\right]\right) \equiv 0.$$

Isso implica

$$\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A^\theta_\mu\right]}{\delta A^\theta_\mu(x)}\right)\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A^\theta_\mu\right]\right)\equiv 0$$

$$\Rightarrow \int d\theta \mathcal{A}^\theta \exp\left(iW\left[A^\theta\right]\right)\equiv 0. \tag{3.64}$$

Podemos notar que essa identidade independe do formalismo, já que $W\left[A^\theta\right]$ é o mesmo nos dois formalismos. Se considerarmos a possibilidade da anomalia ser invariante de calibre, teremos

$$\begin{aligned} & \int d\theta \mathcal{A}^\theta \exp\left(iW\left[A^\theta\right]\right) \\ = & \int d\theta \mathcal{A} \exp\left(iW\left[A^\theta\right]\right)\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}\exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right)\equiv 0. \tag{3.65}$$

Veremos o que isso pode significar, no caso em que $\mathcal{A} \overset{id}{\neq} 0$, quando analisarmos o caso específico do modelo de Schwinger quiral.

Realizando procedimento análogo para a formulação padrão, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_\mu \mathcal{A}\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) \\ = & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA^\theta_\mu \mathcal{A}^\theta \exp\left(iW\left[A^\theta_\mu\right]\right) \\ = & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_\mu \partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A^\theta\right]}{\delta A^\theta_\mu}\right)\exp\left(iW\left[A^\theta_\mu\right]\right) \\ = & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_\mu \partial_\mu \left\{-i\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^\theta_\mu}\left[\exp\left(iW\left[A^\theta_\mu\right]\right)\right]\right\} \\ = & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_\mu d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu \left\{-i\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^\theta_\mu}\left[\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A\right]+i\alpha_1\left[A,\theta\right]\right)\right]\right\} \\ = & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_\mu d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right]}{\delta A^\theta_\mu}+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A^\theta_\mu}\right)\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A\right]+i\alpha_1\left[A,\theta\right]\right). \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right]}{\delta A^{\theta}_{\mu}}+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A^{\theta}_{\mu}}=\int dy\left(\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right]}{\delta A_{\nu}(y)}+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A_{\nu}(y)}\right)\frac{\delta A_{\nu}(y)}{\delta A^{\theta}_{\mu}(x)}, \quad (3.66)$$

e

$$A_{\mu}(x)=A^{\theta}_{\mu}(x)-\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x) \quad (3.67)$$

Portanto

$$\Rightarrow\frac{1}{e}\frac{\delta I_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right]}{\delta A^{\theta}_{\mu}}+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A^{\theta}_{\mu}}=J^{\mu}_{st}, \quad (3.68)$$

onde

$$J^{\mu}_{st}(x)\equiv J^{\mu}(x)+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A_{\mu}(x)} \quad (3.69)$$

Portanto, temos o valor esperado da divergência da corrente mapeada nos dois formalismos invariantes

$$\begin{aligned}
& \int dA_{\mu}\mathcal{A}\exp\left(iW\left[A_{\mu}\right]\right) && (3.70)\\
= & \int dA_{\mu}d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}J^{\mu}\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\\
= & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_{\mu}d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}J^{\mu}_{st}(x)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right) && (3.71)\\
= & \frac{1}{\Omega}\int d\theta dA_{\mu}d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}J^{\mu}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu},\theta\right]\right)=0. && (3.72)
\end{aligned}$$

Fizemos isso integrando a anomalia sobre o campo de calibre. Por outro lado, como já visto em (3.45) e (3.24)

$$\begin{aligned}
& \int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}J^{\mu}\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu},\theta\right]\right)\\
= & \int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}\left(J^{\mu}+\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A_{\mu}}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)\equiv 0. && (3.73)
\end{aligned}$$

Entretanto, considerando que o campo de calibre seja clássico, em princípio $\mathcal{A}\neq 0$, ou seja

$$\mathcal{A}=\int d\psi d\bar{\psi}\partial_{\mu}J^{\mu}\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]\right)\overset{id}{\neq}0 \quad (3.74)$$

o que significaria uma não equivalência entre os dois modelos invariantes e o não invariante, como apontado na ref. [34] no caso do modelo de Schwinger quiral.

Por outro lado, do nosso ponto de vista, como já apresentado, consideramos que a anomalia se anule como condição subsidiária. Assim, no caso da anomalia não possuir simetria de calibre, podemos supor que o modelo estendido se reduza ao modelo original se for possível impor uma escolha específica de calibre que seja

$$\mathcal{A} = 0. \tag{3.75}$$

Sendo esse o caso, fica demonstrado que, de fato, a teoria anômala é uma teoria de calibre onde o mesmo se encontra fixado.

Entretanto, como já apontado, notemos que há um problema na formulação invariante padrão se considerarmos uma anomalia que não possua simetria de calibre. Pois apesar de teoria efetiva final ser invariante de calibre, a teoria inicial não é. Isso implica uma quebra na equivalência física entre calibres distintos. Para entender isso, notemos que se integrarmos o segundo termo de (3.73) teremos, assim como em (3.27),

$$\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A_\mu}\right)\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right) = -\mathcal{A}\exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right). \tag{3.76}$$

Por um lado, se considerarmos que a nossa corrente física, conservada classicamente por invariancia global, seja a mesma $\partial_\mu J^\mu$, então, usando (3.76) em (3.73), teremos

$$\mathcal{A}\exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right) = \int d\theta d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu J^\mu \exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right). \tag{3.77}$$

Isso significa que teríamos a corrente conservada em um calibre muito específico (3.75) e a mesma não conservada em todos os outros.

Por outro lado, se considerarmos que a corrente no formalismo estendido não seja mais J^{μ}, mas uma versão modificada pela adição do termo de Wess-Zumino, então, evidentemente ela deverá ser calculada a partir de $J^{\mu}_{st}(x)$, definida por (3.69), contando com a adição de $\frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1[A,\theta]}{\delta A_{\mu}(x)}$ à corrente original. Entretanto, pelo mesmo motivo anterior, (3.77) nos fornece a mesma corrente original

$$J^{\mu}_{st}(x) = J^{\mu} \tag{3.78}$$

no calibre específico (3.75) acima, e a corrente modificada (3.69)

$$J^{\mu}_{st}(x) = J^{\mu} + \frac{1}{e}\frac{\delta\alpha_1\left[A,\theta\right]}{\delta A_{\mu}(x)}$$

em todos os outros, demonstrando que a corrente do formalismo original não possui representante físico no formalismo estendido.

Retornaremos a essa discussão mais adiante, onde o caso específico do modelo de Schwinger quiral será analisado.

Capítulo 4

A Formulação Estendida e a Generalização do Mecanismo de Stueckelberg

No capítulo anterior vimos que é possível mapear uma teoria anômala, ou seja, uma teoria que possui simetria de calibre na ação clássica, mas cuja ação efetiva não é invariante de calibre, numa teoria com ação efetiva invariante de calibre. Tal descrição, conhecida como formulação invariante de calibre, é obtida ao integrar-se a ação efetiva transformada sobre os parâmetros de transformação dos campos de calibre, como já visto em (3.33). Assim,

$$\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) = \int d\theta \exp\left(iW\left[A_\mu^\theta\right]\right) \tag{4.1}$$

onde $W_{eff}\left[A_\mu\right]$ é invariante embora $W\left[A_\mu\right]$ não seja.

Apesar desse tipo de mapeamento ter sido construído no contexto das teorias anômalas, podemos notar que ele não precisa estar circunscrito ao âmbito das mesmas, já que não há nada que trace a origem da ação efetiva, ou seja, ela pode vir, por exemplo, de uma teoria que não seja invariante já classicamente.

Assim, esta formulação abre a possibilidade de mapear modelos com ações clássicas não invariantes de calibre em ações invariantes com o mesmo conteúdo físico. Isso, de fato, foi feito por Harada e Tsutsui para o caso especfico do modelo de Proca [35]. A seguir, revisaremos o mesmo exemplo que mapeia o campo vetorial massivo acoplado a campos de matéria, num modelo invariante através de (4.1) e veremos que ele coincide exatamente com o modelo de Stueckelberg [19] sem o termo de fixação de calibre, possibilitando interpretar a formulação estendida como a generalização do mecanismo de Stueckelberg.

4.1 O modelo de Proca

O modelo de Proca acoplado a um campo de matéria pode ser definido da seguinte forma:

$$I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]=I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+W_P\left[A_\mu\right], \tag{4.2}$$

onde $I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]$ é a ação de matéria invariante de calibre e $W_P\left[A_\mu\right]$ é a ação de Proca pura

$$W_P\left[A_\mu\right]\equiv-\frac{1}{4}\int dxF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{m^2}{2}\int dxA^\mu A_\mu. \tag{4.3}$$

A simetria de calibre é quebrada pelo termo massivo. Para ver isso, notemos que

$$\begin{aligned}
I\left[\psi^\theta,\bar{\psi}^\theta,A_\mu^\theta\right] &= I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]-\frac{1}{4}\int dxF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&\quad +\frac{m^2}{2}\int dx\left(A^\mu+\frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right)\left(A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right) \\
&= I\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+\frac{m^2}{2}\int dx\left(\frac{2}{e}A^\mu\partial_\mu\theta+\frac{1}{e^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\Rightarrow\Delta I=\frac{m^2}{2e}\int dx\left(2A^\mu\partial_\mu\theta+\frac{1}{e}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\right)\neq0. \tag{4.5}$$

Se utilizarmos (4.1) em (4.2), teremos

$$\begin{aligned}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) &= \int d\theta \exp\left(iW\left[A_\mu^\theta\right]\right) \\ &= \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu^\theta\right]\right).\end{aligned}$$

Considerando que a teoria não seja anômala e que, portanto, a medida do campo de matéria seja invariante, temos:

$$\begin{aligned}&\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) \\ =& \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI\left[\psi^\theta,\bar{\psi}^\theta,A_\mu^\theta\right]\right) \\ =& \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left\{iI\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] + \frac{i}{2}m^2\int dx\left(\frac{2}{e}A^\mu\partial_\mu\theta + \frac{1}{e^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\right)\right\}, \quad (4.6)\end{aligned}$$

onde usamos (4.4) para chegar ao resultado acima.

Portanto, temos uma teoria estendida com um campo extra θ, descrita por

$$\begin{aligned}&\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) \\ =& \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left\{iI_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]\right. \\ &\left. +i\int dx\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu + \frac{m^2}{e}A^\mu\partial_\mu\theta\right]\right\}. \quad (4.7)\end{aligned}$$

Temos, portanto

$$I_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta\right] = I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] + W_{P(en)}\left[A,\theta\right], \quad (4.8)$$

onde $W_{P(en)}\left[A,\theta\right]$ é a ação de Proca estendida

$$W_{P(en)}\left[A,\theta\right] = \int dx\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu + \frac{m^2}{e}A^\mu\partial_\mu\theta\right). \quad (4.9)$$

Se redefinirmos o campo escalar por uma constante multiplicativa, ou seja,

$$B\left(x\right) \equiv \frac{m}{e}\theta\left(x\right) \quad (4.10)$$

a ação de Proca estendida toma a exata forma da ação de Stueckelberg [19] *sem* o termo de fixação de calibre

$$W_{Stueck}\left[A,B\right] = \int dx \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(mA^{\mu} + \partial^{\mu}B\right)\left(mA_{\mu} + \partial_{\mu}B\right) \right\}, \qquad (4.11)$$

que é invariante sob o grupo de transformações de calibre de Pauli [36]

$$A_{\mu} \;\; \rightarrow \;\; A_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda \qquad (4.12)$$

$$B \;\; \rightarrow \;\; B - m\Lambda. \qquad (4.13)$$

4.2 A generalização do mecanismo de Stueckelberg

Vimos que a formulação estendida nos permite o mapeamento do modelo de Proca no de Stueckelberg, invariante sob o conjunto de transformações de Pauli (4.12) e (4.13). No formalismo invariante estendido aplicado aos modelos anômalos, por outro lado, partimos de uma ação invariante de calibre $I_{en}\left[\bar{\psi}, \psi, A, \theta\right]$, e chegamos a uma ação efetiva $W_{eff}\left[A\right]$ também invariante. Existe, no entanto, uma ação intermediária

$$W'\left[A,\theta\right] \equiv W\left[A^{\theta}\right] \qquad (4.14)$$

que não possui simetria de calibre. Entretanto, tal qual o formalismo de Stueckelberg, tanto essa ação quanto a ação de Proca estendida (4.9), são evidentemente invariantes sob o conjunto de transformações de Pauli redimensionadas por (4.10) abaixo:

$$\begin{aligned} A_{\mu} \;\; &\rightarrow \;\; A_{\mu} + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\Lambda \\ \theta \;\; &\rightarrow \;\; \theta - \Lambda \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Isso significa que, se considerarmos o escalar como um campo clássico, podemos anulá-lo por uma simples escolha de calibre e voltar ao formalismo anômalo original, tanto quanto o Stueckelberg se reduz a Proca pela mesma escolha de calibre. Em outras palavras, classicamente θ não é notado, mas deve existir e ser quantizado no sentido de possibilitar a construção de um modelo livre de anomalias. Vimos anteriormente que as equações clássicas de movimento da formulação invariante estendida são redutíveis às da formulação original por uma simples redefinição do campo de calibre. Sob o ponto de vista da simetria de calibre estendida (4.15), isso simplesmente redunda em uma escolha de calibre onde o escalar θ é constante.

Assim, o formalismo estendido pode ser entendido como uma generalização do procedimento de Stueckelberg, enunciado da seguinte forma: *todo boson de calibre deve ser acompanhado por um escalar de tal maneira que o gradiente do último deve ser adicionado ao primeiro.*

A grande vantagem do modelo abeliano massivo de Stueckelberg, que coincide exatamente com a formulação estendida do modelo de Proca, é que foi rigorosamente demonstrado que ele é renormalizável e unitário [37].

Começamos toda a discussão da formulação invariante pela integração do que identificamos como sendo o parâmetro de calibre. Entretanto, ao menos no caso de uma teoria abeliana, podemos reinterpretar esse procedimento afirmando que não é o parâmetro de calibre que é realmente integrado, mas o escalar de Stueckelberg, um campo quântico compensador que se mantém escondido pela simetria de calibre convencional, mas que se torna necessário no sentido de recuperá-la quando a mesma é quebrada, capaz de fornecer uma teoria abeliana livre de anomalias, assim como um modelo massivo renormalizável para o campo vetorial.

Pelo fato do nosso campo θ ter sido identificado com o escalar de Stueckelberg ao extrapolarmos o nosso procedimento para o modelo de Proca, iremos generalizá-lo. Assim, da mesma forma que os parâmetros de calibre são chamados campos de Wess-Zumino na formulação padrão, dada a adição do termo de Wess-Zumino à ação, na formulação estendida eles serão chamados de campos de Stueckelberg ou, no caso da teoria abeliana, de escalar de Stueckelberg.

No próximo capítulo, iremos integrar o escalar de Stueckelberg da ação estendida do modelo de Proca, obtendo a sua versão invariante de calibre e faremos uma análise de sua ação efetiva (integrada *apenas* sobre o escalar). Faremos procedimento análogo para o caso anômalo do modelo de Schwinger quiral. Veremos que a analogia entre os dois casos se demonstra extremamente conveniente. Isso nos conduzirá, naturalmente, a uma condição de *equivalência* entre modelos com simetria de calibre e modelos sem simetria de calibre.

Capítulo 5

Equivalência entre Modelos com Simetria de Calibre e Modelos Sem Simetria de Calibre

Dando sequência à análise do capítulo anterior, iremos considerar dois exemplos abelianos: o modelo de Proca e o modelo de Schwinger quiral. Iremos comparar os dois modelos na formulação original e na estendida, demonstrando a equivalência entre as duas formulações.

5.1 Equivalência entre o modelo de Stueckelberg e o modelo de Proca

Consideremos o campo de Proca interagindo com férmions, exatamente como em (4.2). Como vimos, essa ação não possui simetria de calibre por causa do termo massivo. As equações clássicas de movimento nos levam a

$$\frac{\delta I_M}{\delta\psi} = \frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}} = 0, \tag{5.1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = eJ^\nu, \tag{5.2}$$

onde, evidentemente

$$J^\mu = \frac{1}{e}\frac{\delta I_M}{\delta A^\mu} \tag{5.3}$$

é a corrente conservada por invariância global calculada através do acoplamento linear com o campo de calibre, dada a invariância local da ação de matéria. Se calcularmos a divergência de (5.2), teremos

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{5.4}$$

como condição subsidiária.

Por outro lado, como vimos, podemos aplicar o procedimento de Harada-Tsutsui, transformando apenas a parte massiva que quebra a invariância de calibre e obter (4.8)

$$I_{P(en)}\left[\psi, \overline{\psi}, A, \theta\right] = I_M[\psi, \overline{\psi}, A] + W_{P(en)}\left[A, \theta\right], \tag{5.5}$$

com $W_{P(en)}[A, \theta]$ definida em (4.9). Como vimos no capítulo anterior, $W_{P(en)}[A, \theta]$ coincide com a ação de Stueckelberg, que é invariante sob as transformações de Pauli (4.15).

É evidente que o modelo de Stueckelberg se reduz ao modelo de Proca original escolhendo-se o calibre onde o campo de Stueckelberg é constante. Entretanto, nosso interesse é demonstrar a equivalência entre o modelo de Proca e sua versão invariante, depois de integrado o campo θ [1]. Para tanto, devemos integrá-lo sobre as órbitas de calibre para

[1]Em teorias de calibre, configurações de calibre distintas fornecem a mesma contribuição para a integral funcional configurando-se, portanto, apenas como repetições redundantes que nada acrescem à integral

achar a versão canonicamente invariante de calibre do modelo de Proca acoplado aos campos fermiônicos

$$\exp\left(iI'_P\left[\psi,\bar{\psi},A\right]\right)\equiv\exp\left(iI_M\left[\psi,\bar{\psi},A\right]\right)\int d\theta\exp\left(iW_{P(en)}\left[A,\theta\right]\right). \qquad (5.6)$$

Para isso, utilizamos (4.6):

$$\int d\theta\exp\left(iW_{P(en)}\left[A,\theta\right]\right)=\exp\left(iW_P\left[A\right]\right)\int d\theta\exp\left(i\int\frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta+\frac{m^2}{e}A^\mu\partial_\mu\theta\right), \qquad (5.7)$$

e o fato de que

$$\begin{aligned}
&\int d\theta\exp\left\{i\int dx\left(\frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta+\frac{m^2}{e}A_\mu\partial^\mu\theta\right)\right\}\\
=&\int d\theta\exp\left\{\frac{i}{2}m^2\int dx\left(\frac{2}{e}\partial^\mu A_\mu\theta+\frac{1}{e^2}\theta\Box\theta\right)\right\}\\
=&\int d\theta\exp\left\{\frac{i}{2}m^2\int dx\left(\frac{2}{e}\frac{1}{\Box}\partial^\mu A_\mu\Box\theta+\frac{1}{e^2}\theta\Box\theta\right)\right\}\\
=&\int d\theta\exp\left\{\frac{i}{2}m^2\int dx\left[\left(\frac{1}{\Box}\partial^\mu A_\mu+\frac{\theta}{e}\right)\Box\left(\frac{1}{\Box}\partial^\nu A_\nu+\frac{\theta}{e}\right)-A_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu\right]\right\}\\
=&\exp\left(-\frac{i}{2}m^2\int dxA_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu\right)\\
&\times\int d\theta\exp\left\{\frac{i}{2}m^2\int dx\left[\left(\frac{1}{\Box}\partial^\mu A_\mu+\frac{\theta}{e}\right)\Box\left(\frac{1}{\Box}\partial^\nu A_\nu+\frac{\theta}{e}\right)\right]\right\}. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis $\theta\to\theta'=\theta+\frac{e}{\Box}\partial^\mu A_\mu$; $d\theta'=d\theta$, eq. (5.8) fica

$$\begin{aligned}
&\int d\theta\exp\left\{i\int dx\left(\frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta+\frac{m^2}{e}A_\mu\partial^\mu\theta\right)\right\}\\
=&\exp\left(-\frac{i}{2}m^2\int dxA_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu\right)\int d\theta' e^{-\frac{i}{2e^2}m^2\int dx\theta'\Box\theta'} \qquad (5.9)\\
\sim&\exp\left(-\frac{i}{2}m^2\int dxA_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu\right) \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

---

além de uma constante trivial. Dessa forma, se pudermos demonstrar que uma teoria se reduz a outra por uma simples escolha de calibre, então será possível afirmar que ambas são equivalentes. Sob essa idéia faremos a nossa análise.

e, portanto, (5.7) fica

$$\Rightarrow \int d\theta \exp\left(iW_{P(en)}\left[A,\theta\right]\right) \tag{5.11}$$

$$= \int d\theta \exp\left\{-\frac{i}{2}m^2\int dx\left(A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\left(A^\mu+\frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right)\right\} \tag{5.12}$$

$$\sim \exp\left(-\frac{i}{2}m^2\int dx A_\mu\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)A_\nu\right). \tag{5.13}$$

A integral sobre θ' é apenas uma constante e, portanto, pode ser descartada. Assim, (4.7) se torna

$$\begin{aligned}\exp\left(iW_{eff}\left[A_\mu\right]\right) &= \int d\psi d\bar{\psi}\exp i\left\{\left[I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]-\frac{1}{4}\int d^nxF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}m^2\int d^nxA_\mu\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)\right]A_\nu\right\}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto, temos um modelo massivo invariante de calibre descrito por

$$I'\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]\equiv I_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]+\int d^nx\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)A_\nu\right\}, \tag{5.15}$$

onde, ao contrário de (4.2), nesse modelo o termo massivo *é* invariante de calibre *strictu sensu*. Apesar de termos mergulhado na teoria inteiramente quântica para derivar (5.15), podemos usar a sua versão clássica e calcular suas equações de movimento. Assim, temos:

$$\frac{\delta I_M}{\delta\psi}=\frac{\delta I_M}{\delta\bar{\psi}}=0, \tag{5.16}$$

$$eJ^\nu=\partial_\mu F^{\mu\nu}+m^2\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)A_\nu, \tag{5.17}$$

onde, obviamente, as equações de movimento dessa versão invariante de calibre do modelo vetorial massivo coincide com as de Proca se fixarmos o calibre de *Lorenz* $\partial_\mu A^\mu=0$, demonstrando a equivalência entre as duas formulações. Podemos perceber que tal escolha de calibre é equivalente a escolher θ constante antes da integração sobre o escalar. Voltaremos a esse ponto nas próximas seções.

Temos, portanto, um mapeamento plausível e consistente de uma teoria que claramente não é invariante de calibre numa formulação invariante de calibre equivalente *strictu sensu*, só que aplicado ao contexto do modelo de Proca, onde temos, ao invés da não trivialidade do jacobiano fermiônico, a assimetria da ação.

Esse exemplo serve apenas de guia para nos conduzir a um resultado mais interessante e menos próximo do *senso comum*, a ser apresentado na próxima seção.

5.2 Equivalência entre as formulações original e estendida do modelo de Schwinger quiral

Retornaremos aos modelos anômalos definidos através de (2.11) focalizando, agora, o caso abeliano. Consideremos a ação da teoria anômala

$$I\left[\psi, \bar{\psi}, A\right] = I_{M(Ano)}\left[\psi, \bar{\psi}, A\right] + I_S\left[A\right], \tag{5.18}$$

sendo $I_{M(Ano)}\left[\psi, \bar{\psi}, A\right]$ a ação de matéria anômala[2] e $I_S\left[A\right]$ a ação bosônica livre que possui simetria de calibre. Como vimos no capítulo 2, a não invariância da ação efetiva implica a existêcia de uma anomalia que não é identicamente nula, ou seja

$$\mathcal{A} \equiv \partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A_\mu(x)}\right) \overset{id}{\neq} 0. \tag{5.19}$$

[2]Definimos a ação de matéria anômala como aquela que, depois de integrados os campos de matéria, quebra a sua simetria de calibre original.

Isso resulta, como vimos, numa suposta quebra de conservação da corrente, já que

$$\int d\psi d\bar{\psi}\partial_\mu J^\mu(x)\exp\left(iI\left[\psi,\bar{\psi},A\right]\right)=\mathcal{A}\exp\left(iW\left[A\right]\right)\overset{id}{\neq}0, \tag{5.20}$$

onde

$$J^\mu(x)\equiv\frac{1}{e}\frac{\delta I_{(Ano)M}\left[\psi,\bar{\psi},A\right]}{\delta A_\mu(x)}. \tag{5.21}$$

Entretanto, nosso ponto de partida foi considerar o cancelamento da anomalia como condição subsidiária, calculando a divergência das equações de movimento do campo de calibre obtidas através do princípio variacional aplicado à ação efetiva ou através da simetria de calibre da medida do campo bosônico. Portanto, sob a nossa ótica

$$\mathcal{A}\equiv\partial_\mu\left(\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A\right]}{\delta A_\mu(x)}\right)=0. \tag{5.22}$$

Tal nulidade da anomalia, contudo, implica em vínculos sobre o campo de calibre. Falta demonstrar, ainda, a consistência interna de uma teoria sujeita a tais vínculos. Nesse sentido, iremos analisar um exemplo concreto, o modelo de Schwinger quiral, cuja ação é

$$I\left[\psi,\bar{\psi},A\right]=\int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\bar{\psi}i\gamma^\mu\left[\partial_\mu-ieA_\mu P_+\right]\psi\right\}, \tag{5.23}$$

sendo

$$P_+\equiv\frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right). \tag{5.24}$$

Essa ação é invariante de calibre e a corrente classicamente conservada em função de sua simetria é

$$J^\mu(x)=\bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi. \tag{5.25}$$

A ação efetiva é exatamente solúvel [10, 38], sua expressão é dada por

$$W\left[A\right]=\int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{e^2}{8\pi}A_\mu\left[ag^{\mu\nu}-\left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu\right\}, \tag{5.26}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski bidimensional, $\epsilon^{\mu\alpha}$ é o tensor de Levi-Civita e a é um parâmetro de regularização arbitrário.

É fácil perceber que $W\left[A^{\theta}\right] \neq W\left[A\right]$ [13]. De fato,

$$\begin{aligned}\alpha_1\left[A,\theta\right] &= W\left[A^{\theta}\right] - W\left[A\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^2x\left\{\frac{1}{2}\left(a-1\right)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - e\theta\left[\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\}. \qquad (5.27)\end{aligned}$$

Portanto, o modelo de Schwinger quiral é anômalo, sendo a anomalia dada por:

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{4\pi}\left\{\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right\}. \qquad (5.28)$$

Por outro lado, podemos impor o princípio variacional à ação efetiva (5.26) e tirar as equações de movimento para o campo A_μ. Assim procedendo, temos

$$\delta W\left[A\right] = \int d^2x\left\{\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu + \frac{e^2}{8\pi}\delta\left(A_\mu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu\right)\right\} = 0$$

$$\begin{aligned}&\delta\left(A_\mu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu\right) \\ =\ &\delta A_\mu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu \\ &+A_\mu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]\delta A_\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta A_\nu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\nu\alpha}+\epsilon^{\nu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\mu}-\epsilon^{\beta\mu}\right)\right]A_\mu \\ =\ &\delta A_\nu\left[aA^\nu - \frac{\partial^\nu\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\beta\mu}\frac{\partial^\nu\partial_\beta}{\Box}A_\mu - \epsilon^{\nu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\nu\alpha}\epsilon^{\beta\mu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}A_\mu\right] \\ &A_\mu\left[ag^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]\delta A_\nu \\ =\ &\delta A_\nu\left[aA^\nu - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\beta\nu}\frac{\partial^\mu\partial_\beta}{\Box}A_\mu - \epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial^\nu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\mu\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\partial_\mu F^{\mu\nu} + aA^\nu - \frac{\partial^\nu\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\beta\mu}\frac{\partial^\nu\partial_\beta}{\Box}A_\mu - \epsilon^{\nu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\nu\alpha}\epsilon^{\beta\mu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}A_\mu \\ &+aA^\nu - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\beta\nu}\frac{\partial^\mu\partial_\beta}{\Box}A_\mu - \epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial^\nu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\mu \\ =\ &0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{4\pi}\left(aA^\nu - \frac{\partial^\nu\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\alpha\mu}\frac{\partial^\nu\partial_\alpha}{\Box}A_\mu - \epsilon^{\nu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial^\mu}{\Box}A_\mu + \epsilon^{\nu\alpha}\epsilon^{\beta\mu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}A_\mu \right) = 0. \tag{5.29}$$

Tomando a divergência de (5.29), teremos:

$$\Rightarrow (a-1)\,\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = 0 \tag{5.30}$$

que é a condição subsidiária que anula a anomalia. Substituindo em (5.29) e utilizando o fato de que

$$\epsilon^{\mu\alpha}\epsilon^{\beta\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}, \tag{5.31}$$

e que, portanto

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu} = \left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box} \\
= \quad & -g^{\mu\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\alpha\nu} + g^{\mu\nu} \\
= \quad & -g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu} + g^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.32}$$

teremos

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{4\pi}\frac{a^2}{(a-1)}\left(A^\nu - \frac{\partial^\nu\partial^\mu}{\Box}A_\mu\right) = 0. \tag{5.33}$$

Mas a eq. (5.33), além de ser invariante de calibre, é exatamente a equação de movimento obtida pela versão invariante do modelo de Proca, sujeita à restrição (5.30). Assim, temos o que parece ser uma teoria de campos para o campo vetorial massivo consistente e plausível se entendermos a equação subsidiária que anula a anomalia como um vínculo que relaciona a parte longitudinal do campo com a sua parte transversa.

Por outro lado, utilizando a versão estendida do modelo de Schwinger quiral, teremos

$$\begin{aligned}
& I_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right] \equiv I\left[\psi,\bar{\psi},A^\theta\right] \\
= \quad & \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu\left[\partial_\mu - ie\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)P_+\right]\psi \right\},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Como já visto no capítulo anterior, a formulação estendida, antes da integração sobre o escalar, pode ser entendida como o análogo do mecanismo de Stueckelberg e, obviamente, se reduz a formulação original pela escolha de calibre onde θ é constante. Depois de integrados os férmions, teremos

$$W\left[A^{\theta}\right] = \alpha_1\left[A,\theta\right] + W\left[A\right]. \tag{5.35}$$

Logo, só precisamos considerar o termo de Wess-Zumino (5.27) na integração sobre θ. Assim,

$$\begin{aligned}&\exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right) = \exp\left(iW\left[A\right]\right) \\ &\times \int d\theta \exp\left(\frac{i}{4\pi}\int d^2x\left\{\frac{1}{2}\left(a-1\right)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - e\theta\left[\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\}\right).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\int d\theta \exp\left(\frac{i}{4\pi}\int d^2x\left\{\frac{1}{2}\left(a-1\right)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - e\theta\left[\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\}\right) \\ = &\int d\theta \exp\left(-\frac{i}{8\pi}\left(a-1\right)\int d^2x\left\{\theta\Box\theta + \frac{2}{\Box}e\left[\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\Box\theta\right\}\right) \\ = &\int d\theta \exp\left\{-\frac{i}{8\pi}\left(a-1\right)\int d^2x\left[\frac{1}{\Box}e\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\right.\right. \\ &\left.+\theta\right]\Box\left[\frac{1}{\Box}e\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right) + \theta\right] \\ &\left.-\frac{e^2}{\Box}\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.37}$$

Fazemos a seguinte translação em θ:

$$\theta' = \theta + \frac{1}{\Box}e\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right); d\theta' = d\theta \tag{5.38}$$

e, a menos de uma constante multiplicativa, a eq. (5.37) torna-se

$$\begin{aligned}&\int d\theta \exp\left(\frac{i}{4\pi}\int d^2x\left\{\frac{1}{2}\left(a-1\right)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - e\theta\left[\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\}\right) \\ = \;&\exp\left\{i\frac{e^2}{8\pi}\left(a-1\right)\int d^2x\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\frac{1}{\Box}\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\left(a-1\right)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Logo, substituindo (5.39) em (5.36), teremos

$$
\begin{aligned}
W_{eff}\left[A\right] &= W\left[A\right]+\frac{e^2}{8\pi}\left(a-1\right) \\
&\times\int d^2x\left(\partial_\mu A^\mu+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\frac{1}{\Box}\left(\partial_\mu A^\mu+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right).
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Podemos procurar uma forma mais conveniente para a eq. (5.40). Assim, abrindo o segundo termo do lado direito, temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^2}{8\pi}\left(a-1\right)\int d^2x\left(\partial_\mu A^\mu+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\frac{1}{\Box}\left(\partial_\nu A^\nu+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\right) \\
=\; & \frac{e^2}{8\pi}\left(a-1\right)\int d^2x\left(-A_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu-\frac{2}{(a-1)}A_\mu g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu+\frac{1}{(a-1)^2}A_\mu\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu\right) \\
=\; & \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x\left(-\left(a-1\right)A_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu-2A_\mu g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu+\frac{1}{(a-1)}A_\mu\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu\right) \\
=\; & \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x\left\{-\left(a-1\right)A_\mu\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}A_\nu+A_\mu\left(-2g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}\right)A_\nu\right\} \\
=\; & \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x\left\{A_\mu\left(-\left(a-1\right)g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu}-2g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}+\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}\right)A_\nu\right\}. \quad (5.41)
\end{aligned}
$$

O primeiro termo, por outro lado,é dado por

$$
\begin{aligned}
W\left[A\right] &= \int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{e^2}{8\pi}A_\mu\left[ag^{\mu\nu}-\left(g^{\mu\alpha}+\epsilon^{\mu\alpha}\right)\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\left(g^{\beta\nu}-\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu\right\} \\
&= \int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right. \qquad (5.42) \\
&\left.+\frac{e^2}{8\pi}A_\mu\left[ag^{\mu\nu}-\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu}-2g^{\alpha\mu}\frac{\partial_\beta\partial_\alpha}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}-\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}\right)\right]A_\nu\right\}
\end{aligned}
$$

e, portanto, somando os dois termos teremos

$$
W_{eff}\left[A\right]=\int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{e^2}{8\pi}A_\mu\left[ag^{\mu\nu}-ag^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu}+\frac{a}{(a-1)}\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}\right]A_\nu\right\}.
\tag{5.43}
$$

Usando (5.31) e (5.32), chegamos finalmente a

$$
\Rightarrow W_{eff}\left[A\right]=\int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi}\frac{a^2}{(a-1)}A_\mu\left[g^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right]A_\nu\right\}.
\tag{5.44}
$$

Isso significa que a ação efetiva (5.40) é exatamente a ação de Proca invariante de calibre em duas dimensões que fornece a equação de movimento do modelo anômalo original (5.33), mas *sem* a restrição (5.30) sobre o campo de calibre. Assim, analogamente ao caso *Proca/Stueckelberg*, se fixarmos o calibre (5.30) na ação efetiva invariante de calibre (5.44), o modelo estendido se reduz ao modelo anômalo original, demonstrando a equivalência entre as duas formulações.

Para finalizar essa seção, vamos tentar calcular a ação efetiva (5.34) realizando, primeiro, a integração sobre o escalar e entender o que isso pode nos trazer. Temos, portanto,

$$\begin{aligned}
& \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI\left[\bar{\psi}, \psi, A^{\theta}\right]\right) \\
= & \int d\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i\int d^2x \left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^{\mu}\left[\partial_{\mu} - ie\left(A_{\mu} + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta\right)P_{+}\right]\psi\right\}\right) \\
= & \int d\psi d\bar{\psi}\left\{\int d\theta \exp\left[i\int d^2x\theta(x)\partial_{\mu}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}P_{+}\psi\right)\right]\right\}\exp\left(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A\right]\right). \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

Se utilizarmos a medida fermiônica definida por

$$D\left[A\right] \equiv i\gamma^{\mu}\left[\partial_{\mu} - ieA_{\mu}P_{+}\right], \qquad (5.46)$$

como ela não depende de θ, teremos uma delta de *Dirac* funcional em (5.45). Isso gera algumas complicações, pois a medida do campo fermiônico depende do campo de calibre, o que dificulta a resolução da integral (5.45). A maneira de burlar a delta de Dirac é, como fizemos, utilizar a definição da medida fermiônica fornecida por $D\left[A^{\theta}\right]$. Assim, teremos uma dependência da mesma em θ, o que torna essencial que primeiro realize-se a integração sobre os férmions antes do escalar, fornecendo $W\left[A^{\theta}\right]$ com termo quadrático em θ, em vez de linear, evitando, dessa forma, o surgimento da delta de Dirac funcional. Esse exemplo, portanto, demonstra a necessidade de utilizar a definição da medida fermiônica através do operador de Dirac *transformado* no sentido de prover uma formulação não anômala integrável através da ação estendida.

5.3 Discussão

Tudo o que foi discutido até agora no presente trabalho nos conduz, naturalmente, à seguinte afirmação: *Uma teoria com simetria de calibre é equivalente a uma teoria sem simetria de calibre se a primeira for redutível à segunda por alguma condição de calibre.* Pelo ponto de vista da simetria de calibre estendida de Pauli (4.15), as formulações original e estendida são obviamente equivalentes, já que a segunda se reduz à primeira por uma escolha de calibre onde o escalar θ é constante.

Desde o ponto de vista canônico das teorias de calibre, por outro lado, nossos exemplos demonstram que os modelos efetivos integrados são redutíveis um ao outro através do calibre de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{5.47}$$

no caso do modelo de Proca; e do calibre modificado

$$(a-1)\,\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = 0 \tag{5.48}$$

no caso do modelo de Schwinger quiral.

Notemos que, para atingir tais condições de calibre, é necessário proceder as seguintes transformações sobre um campo de calibre não restrito A_μ:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda \tag{5.49}$$

calculando a divergência de A'_μ no caso do modelo de Proca (5.49), teremos

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e}\Box\Lambda_P = 0, \tag{5.50}$$

logo,

$$\Lambda_P = -\frac{e}{\Box}\partial_\mu A^\mu. \tag{5.51}$$

Procedendo da mesma maneira com o modelo de Schwinger quiral e adicionando $\frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$, teremos

$$\begin{aligned}\partial_\mu A'^\mu + \frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A'_\nu = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{e}\Box\Lambda_{Sch} = 0 \\ \Rightarrow \Lambda_{Sch} = -\frac{e}{\Box}\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right).\end{aligned} \tag{5.52}$$

Se compararmos (5.51) e (5.52) com (5.37) e (5.38), respectivamente, podemos perceber que a translação sobre o escalar de Stueckelberg para atingir a ação efetiva invariante é tão somente

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta - \Lambda. \tag{5.53}$$

Isso sugere que a condição de calibre estendida $\theta = cte$, que garante a equivalência entre os dois formalismos é transferida para os campos de calibre depois de integrado o campo de Stueckelberg, como demonstrado em (5.47) e (5.48), de tal maneira que se torna a condição subsidiária dos modelos originais.

Voltemos agora à formulação invariante padrão. A referência [34], ao analisar a versão padrão do modelo de Schwinger quiral, mostra que suas funções de correlação invariantes de calibre coincidem com as da teoria anômala original, mas também demonstra não ser este o caso das funções de Green não invariantes. Mostra ainda que não há condição de calibre tal que o funcional gerador da formulação padrão coincida com o da formulação original. A conclusão, portanto, é que o conteúdo físico de ambas as formulações diferem entre si. Contudo, também é demonstrado que a ação com a adição do termo de Wess-Zumino é equivalente à da formulação original se a condição de calibre (5.48) for *imposta* a ambos os modelos. Como vimos, essa condição aparece como condição subsidiária no modelo original. Por outro lado, vimos que a anomalia é preservada graças ao fato da ação de Wess-Zumino não possuir simetria de calibre e que, ao contrário da formulação original, não há condição subsidiária que a cancele uma vez que a ação efetiva final *é* invariante de calibre. Para ser mais preciso, podemos tentar um tipo de "condição subsidiária" utilizando a equação de Dyson-Schwinger para o campo θ, ou seja

$$\begin{aligned}
&\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\frac{\delta I_{st}}{\delta\theta}\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)\\
&=\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\frac{\delta\alpha_1}{\delta\theta}\left[A,\theta\right]\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)=0,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

mas,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\alpha_1}{\delta\theta}\left[A,\theta\right]=\frac{\delta W}{\delta\theta}\left[A^\theta\right]&=\int d^n y\frac{\delta W\left[A^\theta\right]}{\delta A^\theta_\mu(y)}\frac{\delta A^\theta_\mu(y)}{\delta\theta(x)}\\
&=\int d^n x\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A^\theta\right]}{\delta A^\theta_\mu}\partial_\mu\delta(x-y)=\partial_\mu\left(-\frac{1}{e}\frac{\delta W\left[A^\theta\right]}{\delta A^\theta_\mu}\right)=\mathcal{A}^\theta,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

e, portanto,

$$\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\mathcal{A}^\theta\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)=0. \tag{5.56}$$

Isso é totalmente coerente com (3.64), pois

$$\begin{aligned}
&\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\mathcal{A}^\theta\exp\left(iI_{st}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)\\
=&\int d\theta d\psi d\bar{\psi}\mathcal{A}^\theta\exp\left(iI_{en}\left[\psi,\bar{\psi},A,\theta\right]\right)\\
=&\int d\theta\mathcal{A}^\theta\exp\left(iW\left[A^\theta\right]\right)\equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Se fosse permitida uma anomalia invariante de calibre, o que significaria escolher $a = 1$ no modelo de Schwinger quiral, teríamos, evidentemente

$$\int d\theta \mathcal{A} \exp\left(iW\left[A^{\theta}\right]\right) = 0,$$

ou seja, o cancelamento da anomalia. Entretanto, a escolha $a = 1$ representa um parâmetro de calibre (5.52), a ser utilizado para integrar o escalar pela translação em (5.38), que é infinito. É fácil ver, por (5.36), que tal escolha também representaria uma delta de Dirac funcional que teria a anomalia como parâmetro. Ou seja, se $a = 1$, então

$$\begin{aligned}
&\exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right) \\
&= \exp\left(iW\left[A\right]\right) \int d\theta \exp\left(-\frac{i}{4\pi}\int d^2x \left\{e\theta\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right\}\right) \\
&= \delta\left(\mathcal{A}\left[A\right]\right)\exp\left(iW\left[A\right]\right). \qquad (5.58)
\end{aligned}$$

Vimos em (3.65) que uma anomalia invariante de calibre teria, como consequência,

$$\mathcal{A} \exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right) \equiv 0.$$

No nosso caso, obviamente

$$\mathcal{A} \exp\left(iW_{eff}\left[A\right]\right) = \mathcal{A}\left[A\right]\delta\left(\mathcal{A}\left[A\right]\right)\exp\left(iW\left[A\right]\right) \equiv 0. \qquad (5.59)$$

Assim, explica-se o resultado (3.65) para $\mathcal{A} \overset{id}{\neq} 0$ no modelo de Schwinger quiral. Ambas as formulações invariantes são trivialmente equivalentes ao modelo anômalo original, uma vez que possuem a mesma ação não invariante, com o redundante cancelamento da anomalia sendo imposto pela delta de Dirac antes da equação de movimento do campo vetorial sobre a teoria efetiva $W_{eff}\left[A\right]$. A sobrevivência da anomalia na formulação padrão advém, portanto, da sua não invariância de calibre.

Por outro lado, um valor distinto de a claramente tornaria o cancelamento da anomalia impossível. Retornando à discussão da invariância de calibre da ação efetiva, vimos na seção 3.3 que a assimetria do termo de Wess-Zumino da ação padrão nos fornece resultados físicos distintos para calibres distintos. Como já demonstramos, a corrente se conserva num calibre muito específico (aquele que cancela a anomalia) e não se conserva em nenhum outro. Estas considerações talvez expliquem os resultados encontrados na referência [34].

5.4 Correspondência entre as formulações invariantes do modelo de Schwinger quiral e o modelo de Stueckelberg

Vimos que ambas as formulações invariantes de calibre do modelo de Schwinger quiral nos fornecem, depois de integrados os férmions,

$$W_{Sch}\left[A^{\theta}\right] = W_{Sch}\left[A\right] + \int d^2x \left\{ \frac{1}{8\pi}\left(a-1\right)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \frac{e}{4\pi}\theta\left[\left(a-1\right)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\}, \tag{5.60}$$

enquanto o modelo de Stueckelberg bidimensional é descrito por

$$W_P\left[A^{\theta}\right] = -\frac{1}{4}\int d^2x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\int d^2x\left(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right)\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right). \tag{5.61}$$

Após integrado o campo escalar, esses modelos fornecem a mesma ação de Proca invariante de calibre

$$W_{eff}\left[A\right] = \int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi}\frac{a^2}{(a-1)}A_\mu\left[g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right]A_\nu\right\}. \tag{5.62}$$

A diferença entre eles para atingir (5.62) está na translação sobre a variável θ. No modelo de Stueckelberg, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\theta_P \to \theta_P + \frac{e}{\Box}\partial^\mu A_\mu, \tag{5.63}$$

enquanto no modelo de Schwinger quiral temos

$$\theta_{Sch} \to \theta_{Sch} + \frac{1}{\Box} e \left(\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right). \tag{5.64}$$

É conveniente, portanto, que encontremos um mapeamento entre esses modelos. De fato, podemos nos certificar que a seguinte relação entre as variáveis escalares

$$\theta_{Sch} = \frac{a}{(a-1)}\theta_P - \frac{e}{(a-1)}\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + \frac{e}{(a-1)}\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho \tag{5.65}$$

transforma um modelo no outro

$$W_{Sch(en)}\left[A, \theta_{Sch}\right] = W_{P(en)}\left[A, \theta_P\right] \tag{5.66}$$

$$\int d\theta_{Sch} \exp\left(iW_{Sch(en)}\left[A, \theta_{Sch}\right]\right) \sim \int d\theta_P \exp\left(iW_{P(en)}\left[A, \theta_P\right]\right). \tag{5.67}$$

Para ver isso, basta substituir (5.65) em (5.60). Assim, temos

$$\begin{aligned}
& W_{Sch}\left[A^{\theta_{Sch}}\right] - W_{Sch}\left[A\right] \\
= & \int d^2x \left\{\frac{1}{8\pi}(a-1)\partial_\mu\theta_{Sch}\partial^\mu\theta_{Sch} - \frac{e}{4\pi}\theta_{Sch}\left[(a-1)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\right\} \\
= & -\frac{1}{8\pi}(a-1)\int d^2x \left\{\theta_{Sch}\Box\theta_{Sch} + \left[2e\partial_\mu A^\mu + \frac{2e}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\theta_{Sch}\right\}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Abrindo o primeiro termo de (5.68), temos

$$\begin{aligned}
& \theta_{Sch}\Box\theta_{Sch} \\
= & \frac{1}{(a-1)^2}\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right)\Box\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right),
\end{aligned} \tag{5.69}$$

com

$$\begin{aligned}
&\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right)\Box\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right)\\
=\;& a^2\theta_P\Box\theta_P + 2ea\theta_P\partial_\rho A^\rho - 2ea\theta_P\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu - 2e^2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\\
&+e^2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\frac{1}{\Box}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + e^2\partial_\rho A^\rho\frac{1}{\Box}\partial_\gamma A^\gamma
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Abrindo o segundo, temos

$$\begin{aligned}
&\left[2e\partial_\mu A^\mu + \frac{2e}{(a-1)}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right]\theta_{Sch}\\
=\;& \frac{1}{(a-1)^2}\left(2e(a-1)\partial_\mu A^\mu + 2e\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right),
\end{aligned} \tag{5.71}$$

sendo

$$\begin{aligned}
&\left(2e(a-1)\partial_\mu A^\mu + 2e\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)\left(a\theta_P - e\frac{1}{\Box}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + e\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right)\\
=\;& 2ea(a-1)\theta_P\partial_\rho A^\rho + 2ea\theta_P\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu - 2e^2(a-2)\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\\
&-2e^2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\frac{1}{\Box}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + 2e^2(a-1)\partial_\rho A^\rho\frac{1}{\Box}\partial_\mu A^\mu
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Somando (5.69) com (5.71) chegamos a

$$W_{Sch}\left[A^{\theta_{Sch}}\right] - W_{Sch}\left[A\right] \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
=\;& \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x\left(-\frac{a^2}{e^2(a-1)}\theta_P\Box\theta_P - \frac{2a^2}{e(a-1)}\theta_P\partial_\rho A^\rho + 2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\frac{1}{\Box}\partial_\rho A^\rho\right.\\
&\left.+\frac{1}{(a-1)}A_\mu\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\beta\partial_\alpha}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu + \frac{1}{(a-1)}\partial_\rho A^\rho\frac{1}{\Box}\partial_\gamma A^\gamma - \frac{2a}{(a-1)}\partial_\rho A^\rho\frac{1}{\Box}\partial_\mu A^\mu\right)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
W_{Sch}\left[A\right] \;=\;& \int d^2x\left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{8\pi}\left[A_\mu a g^{\mu\nu} - A_\mu g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu}A_\nu\right.\right.\\
&\left.\left.+2A_\mu g^{\alpha\mu}\frac{\partial_\beta\partial_\alpha}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu + A_\mu\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_{Sch}\left[A^{\theta_{Sch}}\right] &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi\left(a-1\right)}\left[-a^2\theta_P\Box\theta_P - 2a^2e\theta_P\partial_\rho A^\rho \right.\right. \quad (5.75) \\ &\left.\left. + ae^2\left(a-1\right)A_\mu A^\mu + ae^2A^\rho\frac{\partial_\rho\partial_\gamma}{\Box}A^\gamma + ae^2A_\mu\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu}A_\nu\right]\right\} \end{aligned}$$

mas, como vimos em (5.32), $\epsilon^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\epsilon^{\beta\nu} = -g^{\mu\alpha}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}g^{\beta\nu} + g^{\mu\nu}$. Portanto, substituindo em (5.75), teremos

$$\begin{aligned} & W_{Sch}\left[A^{\theta_{Sch}}\right] \quad (5.76) \\ = & \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{a^2}{8\pi\left(a-1\right)}\theta_P\Box\theta_P - \frac{a^2}{4\pi\left(a-1\right)}e\theta_P\partial_\mu A^\mu + \frac{a^2e^2}{8\pi\left(a-1\right)}A_\mu A^\mu \right\} \end{aligned}$$

Definindo

$$m^2 = \frac{e^2}{4\pi}\frac{a^2}{\left(a-1\right)}, \quad (5.77)$$

chegamos, finalmente a

$$\begin{aligned} W_{Sch}\left[A^{\theta_{Sch}}\right] &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{e^2}\partial_\mu\theta_P\partial^\mu\theta_P + \frac{m^2}{e}\partial_\mu\theta_P A^\mu + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \right\} \\ &= W_P\left[A^{\theta_P}\right]. \quad (5.78) \end{aligned}$$

Isso significa que podemos identificar quaisquer das duas formulações invariantes de calibre do modelo de Schwinger quiral, depois de integrados os férmions, com a versão bidimensional do modelo original proposto por Stueckelberg. Cabe ressaltar que esse resultado é bastante consistente com a idéia da generalização do mecanismo de Stueckelberg proposto no capítulo anterior. Se puder ser demonstrado resultado análogo em $4-D$, então será fornecido um mecanismo de geração de massa através de correções quânticas da integração sobre férmions quirais que pode ser unitário e renormalizável [37].

Capítulo 6

A Pseudoanomalia do Efeito Hall Quântico Fracionário

Em 1989, Zhang, Hansson e Kivelson propuseram uma teoria efetiva capaz de descrever o efeito Hall quântico fracionário (EHQF) [39, 40]. A teoria de Chern-Simons-Landau-Ginsburg (CSLG), como foi nomeada, conta com a inclusão de um campo de calibre auxiliar, cuja dinâmica é fornecida por um termo de Chern-Simons (CS) na ação, além do acoplamento mínimo próprio entre os campos de calibre e os campos de matéria.

Essa teoria emerge ao fazer-se um mapeamento do problema fermiônico de um gás de elétrons bidimensionais submetidos a um forte campo magnético perpendicular ao plano que os contém num problema bosônico. Isso é feito através de uma transformação unitária nos estados e nos respectivos operadores. Após essa transformação, emerge um termo extra no momentum canonicamente conjugado que é função dos campos de matéria e que pode ser obtido dinamicamente se o definirmos como um campo de calibre auxiliar cuja dinâmica é governada pela ação de Chern-Simons. Através do princípio variacional e *tomando-se um calibre específico*, chega-se à forma exata do campo de calibre em função dos campos de matéria. É mister, portanto, que essa teoria seja, de fato, uma *teoria de calibre*.

Esse mapeamento só é possível para um conjunto específico de valores de um parâmetro que aparece no operador unitário. É interessante notar que o fato dos valores precisos do parâmetro aparecerem na teoria implicará exatamente os platôs da condutividade Hall, o que nos leva a concluir que o efeito Hall quântico fracionário é consequência de fatores *topológicos* decorrentes do fato do sistema estar em duas dimensões. Este ponto será abordado posteriormente.

Apesar do notável sucesso da teoria, os referidos autores se ocuparam em construir o modelo para um sistema bidimensional infinito, sem se preocupar se o mesmo poderia ser válido para o caso real de um sistema limitado por fronteiras. De fato, como apontou Wen [20], a ação de Chern-Simons possui simetria de calibre se a mesma estiver definida em um espaço bidimensional ilimitado ou num espaço compacto sem bordas. Contudo, ela perde a simetria quando se considera o sistema num espaço com fronteira como, por exemplo, um disco.

Esta quebra da simetria de calibre costuma ser entendida na literatura como indicativa da presença de uma anomalia [20], [21]. Wen argumenta que, como a teoria inicialmente *é* invariante de calibre, a quebra da simetria implica que a ação considerada não está completa e que, portanto, falta um termo de fronteira capaz de anular a anomalia, recuperando a invariância de calibre da teoria.

Inspirado por Witten, num trabalho em que o mesmo aponta a relação entre teorias de Chern-Simons tridimensionais $(2+1)$ e teorias conformes quirais bidimensionais $(1+1)$

[41], Wen propõe *cancelar* a anomalia através da adição de uma ação fermiônica quiral de fronteira. Isso é feito ajustando-se os coeficientes da ação quiral de tal forma que a quebra da simetria causada pela fronteira do sistema no termo de Chern-Simons seja anulada pela anomalia de calibre da ação quiral. De fato, o termo que anula a anomalia é o mesmo independentemente da geometria da fronteira considerada.

Esse procedimento de restauração da simetria de calibre, apesar de engenhoso, parece ser uma tentativa de reparar uma teoria cujo verdadeiro problema não está corretamente identificado. Isso será discutido detalhadamente nas seções seguintes. Nesse contexto, faremos uma análise minuciosa da ação de Chern-Simons limitada por uma fronteira e levantaremos a questão se ela é, de fato, *anômala*, ou seja, se a quebra da invariância de calibre se dá *exclusivamente* no nível quântico ou se ela já aparece no contexto de uma teoria clássica de campos. Adiantando nossos resultados, afirmamos que a simetria é quebrada já classicamente, o que a descaracteriza como uma teoria anômala. Assim, questionamos o procedimento de restauração de simetria proposto por Wen lembrando que a ação quiral é, de fato, anômala, o que significa que ela é simétrica já de início e que sua invariância é quebrada *a posteriori*, ao tomar-se a ação efetiva do campo de calibre, após o procedimento da integração sobre os férmions quirais. Contudo, a ação de Chern-Simons limitada quebra a simetria antes mesmo de qualquer integração funcional. Portanto, temos uma teoria de partida que não é invariante e que torna-se simétrica apenas depois de integrada sobre os férmions quirais. Nossa análise indica que tal anomalia não existe e que, seguindo estritamente a estratégia de definir corretamente o campo de Chern-Simons de modo a reproduzir o fator estatístico correto, obtemos uma ação invariante de calibre, inclusive no nível quântico.

A ausência da anomalia pode forçar uma revisão de vários argumentos que aparecem na literatura recente. Podemos citar uma amostra de trabalhos lidando com assuntos diversos tais como estados de borda no grafeno [42, 43], descrições de líquidos de Lüttinger quirais [44, 45] e relações entre elétrons de borda e fase de Berry [46]. De fato, um trabalho recente de Goldman *et al.* [47] sobre o efeito Hall quântico anômalo em redes ópticas descobriu uma função de onda de Laughlin que depende de ambas as coordenadas z e $\bar{z}$, o que implica que a teoria subjacente não deve ser quiral.

Assim sendo, seguiremos o procedimento de Zhang [40] para construir desde o início o tratamento do caso com fronteira, procurando entender onde, como e por quê há a quebra da simetria, sempre contrastando com o caso sem fronteira.

Para uma revisão mais detalhada do efeito Hall quântico, indicamos o livro de Ezawa [48]. Aspectos de férmions em uma dimensão espacial na matéria condensada são amplamente discutidos em [49]. Nossos resultados, discutidos neste capítulo, já foram aceitos para publicação e devem aparecer na literatura nos próximos meses [50].

6.1 Análise da quebra da invariância de calibre da ação de Chern-Simons

Vamos mostrar que a ação de Chern-Simons é invariante de calibre a menos de um termo de superfície. Consideremos, portanto, a ação sem fronteira

$$S_{CS}[a] = \frac{\sigma_{xy}}{2} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho. \tag{6.1}$$

Se fizermos uma transformação de calibre em (6.1), teremos

$$\begin{aligned} S_{CS}[a+\partial\alpha] &= \frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}(a_\mu+\partial_\mu\alpha)\partial_\nu(a_\rho+\partial_\rho\alpha) \\ &= S_{CS}[a]+\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\alpha\partial_\nu a_\rho \\ &= S_{CS}[a]+\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho}\alpha\partial_\nu a_\rho) \end{aligned}$$

$$\delta S_{CS}=\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho}\alpha\partial_\nu a_\rho). \tag{6.2}$$

Ou seja, a variação da ação é a integral de uma divergência que, pelo teorema de Green, se traduz em um termo de superfície (a ser calculado no infinito). Como em qualquer caso físico real nos damos o direito de dizer que o campo deve se anular no infinito, podemos tomar esse termo como sendo nulo, tendo, portanto, uma ação com simetria de calibre.

Tomemos, agora, a ação de Chern-Simons limitada por uma fronteira

$$\begin{aligned} S^b_{CS}[a] &= \frac{\sigma_{xy}}{2}\int_A d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\Theta(\mathbf{x})\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho, \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde a função degrau $\Theta\left(\mathbf{x}\right)$ é definida como

$$\Theta(\mathbf{x})=\begin{cases} 1, \text{ se } \mathbf{x}\in A \\ 0, \text{ se } \mathbf{x}\notin A \end{cases}. \tag{6.4}$$

Se, nessa versão alterada, fizermos uma transformação de calibre seguindo os mesmos passos que levaram a (6.2) e tomando os termos de divergência total como sendo nulos, teremos

$$S^b_{CS}[a+\partial\alpha]=S^b_{CS}[a]-\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\partial_\mu\Theta(\mathbf{x})\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho\alpha$$

$$\Rightarrow \delta S^b_{CS}=-\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\partial_\mu\Theta(\mathbf{x})\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho\alpha. \tag{6.5}$$

O que antes podia se anular por ser uma quadridivergência, agora fica impossibilitado pelo fato de haver uma função degrau no lagrangeano. Temos, portanto, uma variação *não nula* da ação proporcional a uma função delta $\partial_\mu \Theta(\mathbf{x})$ na fronteira. Sendo essa função não nula apenas na fronteira, é evidente que δS^b_{CS} é apenas um termo de borda *em uma dimensão espacial e uma temporal.*

Temos, portanto, um problema: a teoria que, no caso ideal de um sistema bidimensional não compacto ilimitado ou mesmo compacto (mas sem bordas) possuía simetria de calibre, agora, num caso real limitado por uma fronteira, perde a sua simetria por um termo unidimensional de fronteira. Isso parece um contrasenso já que, como será visto na seção seguinte, a teoria microscópica inicial é invariante e, de fato, precisa ser por uma questão de consistência.

Como vimos no primeiro capítulo, em uma teoria abeliana a conservação da corrente se dá pela invariância global da ação, e a simetria local constitui-se apenas em uma maneira eficaz de acoplar o campo de calibre aos campos de matéria. Entretanto, muitos autores insistem em considerar a corrente de Noether como sendo uma decorrência da simetria local. Assim, seguindo o desenvolvimento descrito na ref. [21], se calculássemos a identidade de Noether completa fornecida pela simetria local caso a ação de Chern-Simons limitada fosse invariante, teríamos

$$S^b[a+\partial\alpha] - S^b[a] = -\int d^3x \partial_\mu \left(\frac{\delta S^b}{\delta a_\mu(x)} \right) \alpha(x). \tag{6.6}$$

Como, nesse caso, $S^b[a+\partial\alpha] \neq S^b[a]$ por conta da ação de CS não ser invariante, a quantidade entre parêntesis do integrando não é nula. Calculando a contribuição da "corrente local" fornecida pelo termo de Chern-Simons, teremos

$$\begin{aligned}
j^{\alpha}_{CS} &= -\frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu} = -\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3y\Theta(\mathbf{y})\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\frac{\delta a_\mu(y)}{\delta a_\alpha(x)}\partial_\nu a_\rho(y) + a_\mu(y)\partial_\nu\frac{\delta a_\rho(y)}{\delta a_\alpha(x)}\right)\\
&= -\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3y\varepsilon^{\mu\nu\rho}\delta^3(x-y)\left(\delta_{\mu\alpha}\Theta(\mathbf{y})\partial_\nu a_\rho(y) - \delta_{\rho\alpha}\partial_\nu\Theta(\mathbf{y})a_\mu(y) - \delta_{\rho\alpha}\Theta(\mathbf{y})\partial_\nu a_\mu(y)\right)\\
&= -\frac{\sigma_{xy}}{2}\left(\varepsilon^{\alpha\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) - \varepsilon^{\rho\nu\alpha}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x) - \varepsilon^{\rho\nu\alpha}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x)\right)\\
&= -\frac{\sigma_{xy}}{2}\left(2\varepsilon^{\alpha\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) - \varepsilon^{\rho\nu\alpha}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x)\right)\\
&= -\frac{\sigma_{xy}}{2}\left(2\varepsilon^{\alpha\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) + \varepsilon^{\alpha\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow j^{\mu}_{CS} = -\sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) - \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x) \tag{6.7}$$

e, portanto

$$\Rightarrow \partial_\mu j^{\mu}_{CS} = -\frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) \neq 0. \tag{6.8}$$

Isso é comumente entendido como sendo uma anomalia [20], [21]. Entretanto, a situação parece confusa pelo fato de atribuir-se a lei de conservação da corrente à simetria local. Além disso, toda essa análise foi feita para campos clássicos, ou seja, para campos que são apenas funções do espaço-tempo e não operadores agindo no espaço de Hilbert. Uma anomalia é uma quebra da invariância de calibre apenas no nível quântico, mas essa ação não é invariante já classicamente.

Por outro lado, se escrevermos a ação completa dessa teoria

$$S^b = S^b_M + S^b_{CS}, \tag{6.9}$$

onde S^b_M é a ação de matéria com acoplamento mínimo com os campos de calibre e o sobreíndice b denota que a teoria é limitada por uma fronteira. A equação de movimento para o campo de CS nos fornece

$$\frac{\delta S^b}{\delta a_\mu} = \frac{\delta}{\delta a_\mu}(S^b_M + S^b_{CS}) = ej^{\mu}_M + \frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu} = 0 \tag{6.10}$$

Evidentemente,

$$j_M^\mu = -\frac{1}{e}\frac{\delta S_M^b}{\delta a_\mu} \tag{6.11}$$

é a corrente conservada pela invariância global. Portanto, se calcularmos a divergência de (6.10), teremos

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta S^b}{\delta a_\mu}\right) = \partial_\mu \left(-e j_M^\mu + \frac{\delta S_{CS}^b}{\delta a_\mu}\right) = 0. \tag{6.12}$$

Como

$$\partial_\mu j_M^\mu = 0 \tag{6.13}$$

pela simetria global, então deveríamos concluir, também, que

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta S_{CS}^b}{\delta a_\mu}\right) = 0. \tag{6.14}$$

Isso seria uma identidade se S_{CS}^b fosse invariante de calibre. Entretanto, como vimos, sua simetria é quebrada pela fronteira do sistema. Portanto, a eq. (6.14) nos dá, explicitamente,

$$\partial_\mu j_{CS}^\mu = -\frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu \Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) = 0. \tag{6.15}$$

Em vez de uma anomalia, a equação acima deveria ser considerada simplesmente como uma *condição subsidiária* clássica. Tal condição impõe diferenças fundamentais na forma das equações de movimento na fronteira ($\mathbf{x} \in\partial A$) e dentro da superfície ($\mathbf{x} \in A; \mathbf{x} \notin \partial A$). Para entender isso, basta notar que $\partial_\mu \Theta(\mathbf{x})$ é uma função delta que contorna a fronteira da amostra, e que a sua geometria é arbitrária. Portanto, (6.15) nos diz que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x)|_{\mathbf{x}\in\partial A} = 0. \tag{6.16}$$

Usando (6.10), (6.7) e (6.16), respectivamente, e levando em conta que $\Theta(\mathbf{x})$ é uma função constante dentro da amostra e só varia na borda,

$$\frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu} = j^\mu_M$$

$$\Longrightarrow \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) + \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x) = j^\mu_M. \tag{6.17}$$

Portanto,

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\notin\partial A} = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x)|_{\mathbf{x}\notin\partial A} \tag{6.18}$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\in\partial A} = \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x)|_{\mathbf{x}\in\partial A} \tag{6.19}$$

Isso significa que, mesmo nesse modelo com termo de Chern-Simons limitado, a corrente se conserva. Além disso, há dois tipos de corrente: uma corrente *bidimensional* no interior da amostra (6.18) e, além dessa, uma outra *unidimensional* na fronteira (6.19). A isso talvez possam ser dadas várias interpretações como, por exemplo, a imagem clássica de um movimento de cíclotron próximo a fronteira, comumente utilizada para fortalecer a idéia da adição de férmions quirais unidimensionais, cujas correntes, como veremos, possuem exatamente a mesma forma acima, sendo a inclusão dos referidos férmions, portanto, redundante. Isto será discutido nas próximas seções. Neste momento, cabe observar que, mesmo sem a adição de férmions quirais circulando na fronteira, a teoria de Chern-Simons limitada já prevê uma componente da corrente circulando na borda, dispensando a adição de tais férmions.

A teoria considerada acima é perfeitamente consistente. Apesar de ter a invariância de calibre violada pela limitação da ação de CS, a corrente de matéria ainda é conservada pela simetria global. Sua ação é clássica, o que a descaracteriza como sendo anômala. Além disso, percebemos que a *pseudoanomalia* deve se cancelar como *equação subsidiária* (6.15), exigida para fazer valer as equações de movimento. Portanto, a conclusão que emerge é que *não há anomalia alguma*. Temos apenas um modelo cuja quebra da simetria impõe alguns vínculos sobre a corrente que continua sendo conservada.

Isso acontece, também, como vimos, na teoria de *Proca* para o campo vetorial massivo. Nesse modelo, a simetria é violada pelo termo de massa do campo vetorial

$$S_{MP} = S^S_{MP} + \frac{1}{2}m^2 \int d^3x A^\mu A_\mu \tag{6.20}$$

onde S^S_{MP} é a parte simétrica da ação, dada por

$$S^S_{MP} = S_M - \frac{1}{4}\int d^3x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{6.21}$$

sendo S_M a ação de matéria com acoplamento mínimo e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a *intensidade de campo* do campo de calibre. Usando a mesma idéia confusa de "corrente de Noether" extraída pela simetria local, chegamos à seguinte corrente conservada vinda da parte simétrica da ação

$$\partial_\mu j^\mu_S = \partial_\mu \left(-\frac{\delta S^S_{MP}}{\delta A_\mu} \right) = 0 \tag{6.22}$$

A corrente total, se a teoria fosse totalmente invariante, deveria ser

$$j^\mu = -\frac{\delta S_{MP}}{\delta A_\mu}. \tag{6.23}$$

Sua divergência, no entanto,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \left\{ -\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left(S^S_{MP} + \frac{1}{2}m^2 \int d^3y A^\nu(y) A_\nu(y) \right) \right\} \\
&= \partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2}m^2 \int d^3y \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left[A^\nu(y) A_\nu(y) \right] \right\} \\
&= -m^2 \partial_\mu \left\{ \int d^3y \delta^3(y-x) \delta^\mu_\nu A^\nu(y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = -m^2 \partial_\mu A^\mu, \tag{6.24}$$

não é nula. Na verdade, não é *identicamente nula* como deveria ser se houvesse invariância de calibre. Entretanto, a equação de movimento para o campo A_μ, analogamente ao campo de CS, nos impõe que

$$\frac{\delta S_{MP}}{\delta A_\mu} = 0. \tag{6.25}$$

Portanto,

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta S_{MP}}{\delta A_\mu} \right) = -\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{6.26}$$

como imposição de (6.25). Assim, por (6.24), a equação

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{6.27}$$

aparece como *condição subsidiária*, necessária para dar suporte às equações de movimento. Ninguém questiona esse resultado. Na verdade, ele fica mais evidente e, de fato, é mais conhecido ao tratarmos com as equações de movimento explicitamente

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{MP}}{\delta A_\mu} &= \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left\{ S_M - \frac{1}{4}\int d^3y F^{\lambda\nu}(y) F_{\lambda\nu}(y) + \frac{1}{2} m^2 \int d^3y A^\nu(y) A_\nu(y) \right\} \\
&= -j^\mu_M - \int d^3y F^{\lambda\nu}(y) \partial_\lambda \left(\frac{\delta A_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} \right) + m^2 \int d^3y A^\nu(y) \frac{\delta A_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} \\
&= -j^\mu_M + \int d^3y \delta^\mu_\nu \delta^3(x-y) \left(\partial_\lambda F^{\lambda\mu}(y) + m^2 A^\nu(y) \right) \\
&= -j^\mu_M + \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu_M. \tag{6.28}$$

A corrente j^ν_M é obtida pela simetria da ação dos campos de matéria acoplados ao campo de Proca e, pela prescrição do acoplamento mínimo, é exatamente a corrente obtida por *invariância global* da ação a menos da carga elétrica como constante multiplicativa. Portanto, se tomarmos a divergência de (6.28), teremos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu_M.$$

Sendo $F^{\mu\nu}$ um tensor antisimétrico e j^ν_M conservada, concluímos que

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

que é o mesmo resultado (6.27). Esse resultado é bastante conhecido, a ação é clássica, não é invariante, a corrente é conservada, (6.27) é equação subsidiária e ninguém chama $\partial_\mu A^\mu$ de anomalia. Essa situação é totalmente análoga à teoria de CS com fronteira, como já analisado. Portanto, se a teoria de Proca não possui nenhuma anomalia, não há razão distinta alguma para a teoria de CS com fronteira possuir.

Contudo, apesar de análogas no contexto em que estamos tratando, existem diferenças marcantes sobre os vínculos das duas teorias. Na teoria de Proca, o vínculo se dá sobre o campo A^μ, equivalente a escolher o calibre de Lorenz caso a teoria fosse simétrica. Isso significa que se pudermos simetrizar o termo de massa da ação tomando, por exemplo, apenas a parte transversa do campo, *i. e.*,

$$\frac{1}{2}m^2 \int d^3x A_\mu \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box}\right) A_\nu \tag{6.29}$$

teremos teorias completamente equivalentes. Tomar o calibre de *Lorenz* em (6.29) significa apenas passar de uma teoria de calibre para a teoria de Proca[1]. Portanto, o vínculo (6.27) não traz nenhuma consequência física para o problema (além de aumentar o número de graus de liberdade, em comparação com o caso sem massa).

O mesmo não pode ser dito para a teoria limitada de CS. Como visto em (6.19), o vínculo impõe fortes restrições sobre a forma da corrente na fronteira, distinguindo-a explicitamente da corrente do interior da amostra. Essa teoria prevê uma corrente efetiva unidimensional na fronteira e, portanto, ao contrário da teoria de Proca, o vínculo

[1]Isso foi discutido detalhadamente em capítulos anteriores.

imposto pela equação subsidiária induzida pela ação limitada de CS produz profundas consequências físicas.

Wen argumenta que a ação microscópica que leva a essa teoria efetiva é, de fato, invariante de calibre. Portanto, a quebra da simetria sugere que (6.9) não seja a ação completa que descreve os estados do efeito Hall quântico fracionário. Já que, por (6.8), a diferença na transformação de calibre da ação é apenas um termo de fronteira, a parte que está faltando deveria ser um termo unidimensional associado a excitações na fronteira. Inspirado por Witten [41], o autor propõe que excitações de fronteira devam ser descritas por *férmions quirais unidimensionais* interagindo com os campos de calibre (mais precisamente, álgebras quirais U(1) de Kac-Moody). Férmions quirais são, de fato, anômalos, ou seja, sua ação clássica é invariante, mas sua simetria se perde após a quantização. Isso significa que a ação efetiva, depois de integrados os campos quirais, perde a invariância de calibre. A soma $S^b + W[a]$, onde $W[a]$ é a ação efetiva dos férmions quirais, pode tornar-se invariante de calibre por uma escolha específica de certos coeficientes na ação quiral. No entanto, ao adicionar férmions quirais na fronteira para restaurar a simetria de calibre, estamos usando uma *anomalia* real, que é uma quebra da simetria apenas no nível quântico, para cancelar uma *pseudoanomalia*, ou seja, para fazer invariante uma ação que não tem simetria local alguma desde o início. O resultado final parece uma espécie de anomalia reversa, ou seja, começamos com uma ação clássica que não possui simetria de calibre,

$$S = S_M^b + S_{CS}^b[a] + S_\varphi[\varphi, a] \tag{6.30}$$

e, somente depois de integrados os campos quirais φ, terminamos com uma teoria invariante

$$S' = S^b_M + S^b_{CS}[a] + W[a]. \tag{6.31}$$

Podemos nos perguntar o que acontece com a corrente depois de adicionados os férmions quirais. Por um lado, como $S^b_M + S_\varphi[\varphi, a]$ é invariante, a quebra da simetria se dá da mesma forma que em (6.6), ou seja, pela ação de CS. Isso não muda o vínculo da teoria, já que $S_\varphi[\varphi, a]$, assim como S^b_M, é invariante. Portanto[2],

$$j^\mu = -\frac{\delta S}{\delta a_\mu} = -\frac{\delta}{\delta a_\mu}\left(S^b_M + S^b_{CS}[a] + S_\varphi[\varphi, a]\right) = j^\mu_M + j^\mu_\varphi - \frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu} = 0,$$

ao impormos as equações de movimento. Assim,

$$\frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu} = j^\mu_M + j^\mu_\varphi \tag{6.32}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta S^b_{CS}}{\delta a_\mu}\right) = 0,$$

já que j^μ_M e j^μ_φ são conservadas pelo teorema de Noether. Portanto, a equação (6.16) ainda é válida aqui. A equação de movimento, por (6.7), fica

$$\sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x) + \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x) = j^\mu_M + j^\mu_\varphi. \tag{6.33}$$

Usando o vínculo (6.16), temos, para a fronteira do sistema,

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\in\partial A} + j^\mu_\varphi = \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x). \tag{6.34}$$

Ou seja, nesse estágio, o resultado de adicionar férmions quirais é simplesmente somar a corrente quiral à corrente de matéria em (6.19). A equação (6.33) nos diz que a soma da

[2]Aqui, seguindo a mesma linha de raciocínio de [21],utilizaremos j^μ para denotar a "quantidade" que deveria ser conservada pela invariância de calibre local, e j^μ_M a corrente de matéria propriamente dita.

corrente de matéria que, em princípio, é bidimensional com a corrente quiral unidimensional é igual a um termo também bidimensional dependente da divergência do campo de calibre somado a outro unidimensional que depende do próprio campo. Além disso, (6.34) nos diz que, se tomarmos a corrente total na fronteira, ela é exatamente igual ao termo unidimensional da equação (6.33). Isso, talvez, nos autorize a fazer as seguintes identificações:

$$j^\mu_\varphi = \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x), \tag{6.35}$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\notin\partial A} = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Theta(\mathbf{x})\partial_\nu a_\rho(x), \tag{6.36}$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\in\partial A} = 0. \tag{6.37}$$

Isso é consistente com a teoria de CS sem fronteira que, no caso, significa tão somente extrapolarmos a fronteira de S^b para o infinito. $\Theta(\mathbf{x}) = 1$ é constante *sempre*, portanto, $\partial_\nu\Theta(\mathbf{x}) = 0$, ou seja, não há corrente quiral e

$$j^\mu_M = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x). \tag{6.38}$$

Essa é exatamente a corrente calculada para a teoria sem fronteira. Para ver isso, notemos que as equações de movimento nos fornecem

$$-\frac{\delta S}{\delta a_\mu} = j^\mu = j^\mu_M - \frac{\delta S_{CS}}{\delta a_\mu} = 0$$

$$\Rightarrow j^\mu_M = \frac{\delta S_{CS}}{\delta a_\mu}$$

$$\begin{aligned} j^\mu_M &= \frac{\delta}{\delta a_\mu(x)}\left(\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3y\varepsilon^{\alpha\nu\rho}a_\alpha(y)\partial_\nu a_\rho(y)\right) \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{2}\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho - \varepsilon^{\rho\nu\mu}\partial_\nu a_\rho\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j^\mu_M = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho,$$

resultado idêntico a (6.38).

Se compararmos as identificações (6.35), (6.36) e (6.37) com (6.18) e (6.19), notaremos que, de um lado temos

$$j^\mu_\varphi = \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x),$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\notin\partial A} = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x),$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\in\partial A} = 0,$$

e do outro,

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\in\partial A} = \frac{\sigma_{xy}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\Theta(\mathbf{x})a_\rho(x),$$

$$j^\mu_M|_{\mathbf{x}\notin\partial A} = \sigma_{xy}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x).$$

Portanto, o papel dos férmions quirais é, tão somente, substituir a corrente unidimensional de matéria na fronteira por uma corrente fermiônica quiral sendo, portanto, irrelevante no contexto de uma teoria com o termo de Chern-Simons limitado.

As duas teorias em questão não possuem invariância de calibre, suas ações são, de partida, não invariantes. Apesar disso, não há nenhum impedimento teórico aparente que determine que sejam descartadas. Elas são consistentes e as duas possuem *a mesma* relação de corrente unidimensional na fronteira com os campos de calibre. A única diferença reside no fato de uma corrente ser determinada pelos campos físicos da teoria e a outra por campos efetivos quirais. Além disso, percebemos que a adição de férmions quirais na fronteira para restaurar a invariância de calibre é um artifício duvidoso e sem sentido, já que ela só se dá depois de integrados os campos quirais. Uma teoria que é definida por uma ação sem simetria local não pode ser considerada uma teoria de calibre.

A situação anterior representa uma análise do panorama teórico atual na descrição do efeito Hall quântico fracionário. Vimos que, embora a ação de CS comumente utilizada não seja invariante de calibre, ela seria capaz de fornecer uma descrição consistente (do ponto de vista teórico) do fenômeno. No entanto, conforme veremos a seguir, esta ação de CS limitada não deve ser utilizada na descrição física do problema. Com o intuito de mostrar este fato e encontrar a descrição teórica mais adequada (e invariante de calibre) faremos, na próxima seção, a construção da teoria efetiva de CSLG do efeito Hall quântico fracionário com fronteira, tendo como base a construção análoga para o caso sem fronteira e alterando-a quando necessário. Neste processo de construção ficará claro o ponto onde a simetria de calibre foi perdida e de que maneira ela deve ser restaurada.

6.2 A teoria de Chern-Simons-Landau-Ginsburg para o efeito Hall quântico fracionário com fronteira

Numa situação típica onde o efeito Hall quântico fracionário acontece, temos um sistema eletrônico bidimensional submetido a um campo elétrico tangente e a um forte campo magnético perpendicular à superfície da amostra, descritos pelos potenciais $(A_0, \mathbf{A})$, respectivamente. O Hamiltoniano microscópico do sistema é

$$H = \sum_i \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\right]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \qquad (6.39)$$

onde m é a massa de banda dos elétrons no cristal e $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ é o potencial coloumbiano da interação entre os elétrons. O campo magnético é forte o suficiente para que os elétrons estejam quase totalmente polarizados. Portanto, a interação entre o *spin* dos elétrons e o campo magnético pode ser negligenciada e não foi levada em consideração em (6.39).

O Hamiltoniano em questão descreve um sistema fermiônico, ou seja, um sistema que obedece à estatística de Fermi-Dirac sendo, portanto, fiel ao princípio de exclusão de Pauli. As funções de onda são antissimétricas

$$\psi(r_1, ..., r_i, ..., r_j, ...r_N) = -\psi(r_1, ..., r_j, ..., r_i, ...r_N) \tag{6.40}$$

Em três dimensões espaciais, podemos trabalhar com essas funções antissimétricas sem nenhum problema. Porém, em duas dimensões, o fato de termos férmions num plano produz consequências topológicas que precisam ser levadas em consideração. Para elucidar a natureza do problema, consideremos um sistema de duas partículas genéricas. O fato de serem partículas quânticas idênticas, implica que a troca de posições entre elas no espaço de Hilbert é fisicamente indistinguível. Portanto, normalmente concluímos que sua função de onda só pode variar por um fator de fase

$$\varphi(r_1, r_2) = e^{i\alpha\pi}\varphi(r_2, r_1). \tag{6.41}$$

Quando suas posições são trocadas mais uma vez, temos

$$\varphi(r_1, r_2) = e^{i2\alpha\pi}\varphi(r_1, r_2) \tag{6.42}$$

e, portanto, $e^{i\alpha\pi} = \pm 1$. Conclui-se, então, que apenas as estatísticas de Bose-Einstein ($\alpha = 0$) e de Fermi-Dirac ($\alpha = 1$) são possíveis. As equações (6.41) e (6.42) são válidas quando o espaço de base é uma variedade tridimensional, porém, em duas dimensões, não podemos afirmar que que tais equações são válidas e, de fato, como veremos a seguir, não são.

Vamos pensar na mesma operação, em duas dimensões espaciais. Imaginemos que fizemos a troca da partícula 1 pela partícula 2 seguindo um caminho C_{12} no espaço bidimensional. Com isto,

$$\varphi(r_1, r_2) = e^{i\alpha(C_{12})\pi}\varphi(r_2, r_1), \tag{6.43}$$

onde admitimos a possibilidade da fase depender do caminho usado para a troca. Trocando novamente, através de um outro caminho C_{21}, obtemos

$$\varphi(r_1, r_2) = e^{i\alpha(C_{12})\pi}e^{i\alpha(C_{21})\pi}\varphi(r_1, r_2). \tag{6.44}$$

Obviamente, devemos ter

$$\alpha\left(C_{12}\right) = -\alpha\left(C_{21}\right), \tag{6.45}$$

para que $\varphi(r_1, r_2) \neq 0$. Respeitada esta condição, no entanto, nada mais se pode afirmar sobre a fase $\alpha\left(C_{12}\right)$. A função de onda não é nem simétrica, nem antissimétrica pela troca das partículas idênticas.

Por que em duas dimensões espaciais a fase depende do caminho utilizado para a troca e em três dimensões não? Podemos entender o processo de trocar as partículas de posição duas vezes como uma descrevendo um circuito fechado (um laço, ou *loop*) em torno da outra. Como a fase decorre de uma propriedade intrínseca das partículas, já que ela diz respeito somente ao tipo de partícula em consideração, a mesma permanece constante se o *laço* é movido continuamente sendo, portanto, um invariante topológico. Em três dimensões, podemos deformar esse *laço* continuamente até colapsar num ponto, cuja posição é a própria configuração inicial da partícula, sem que o *laço* cruze com a outra partícula. Portanto, a fase α é independente do caminho particular utilizado para a troca. Entretanto, em duas dimensões, não podemos fazer uma deformação contínua do laço ao ponto referente à configuração inicial do estado da partícula (ou seja, não podemos levar continuamente a situação em que houve a troca na situação em que não houve) sem cruzar, durante este processo, com a outra partícula. Como estamos lidando com partículas que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli (lembremos que os elétrons são, na verdade, tridimensionais), tal cruzamento é proibido. Dessa forma, partículas fermiônicas numa variedade bidimensional representam, topologicamente, buracos na variedade, tornando impossível fazer o mapeamento contínuo do laço na identidade. Com isto, a fase depende do caminho usado para a troca e temos, ao final,

$$\varphi(r_2, r_1) = e^{i\alpha(C_{12})\pi}\varphi(r_1, r_2). \tag{6.46}$$

Partículas que obedecem à estatística expressa pela equação (6.46) são chamadas de *anyons*.

A descrição de um problema de muitos anyons em interação é um problema bastante complexo. O seu tratamento é facilitado se conseguirmos, de alguma maneira, neutralizar o princípio de exclusão de Pauli. É exatamente esse princípio que inviabiliza a relação de equivalência do *laço* com a identidade. Isso pode ser feito se fizermos um mapeamento do sistema fermiônico inicial num sistema bosônico. Dois bósons podem ocupar o mesmo estado sem maiores problemas, logo, podemos cruzar as duas partículas e o argumento acima já não é mais aplicável para impedir a deformação contínua do *laço* na identidade.

O Hamiltoniano (6.39) age no espaço das funções antissimétricas e define o problema de autovalores

$$H\psi(r_1, ..., r_N) = E\psi(r_1, ..., r_N). \tag{6.47}$$

Através de uma transformação unitária, podemos fazer um mapeamento de (6.47) num problema de autovalores equivalente para funções de onda simétricas:

$$H'\phi(r_1,...,r_N) = E\phi(r_1,...,r_N). \tag{6.48}$$

Podemos demonstrar que o seguinte operador

$$U = \exp\left(-i\sum_{i<j}\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ij}\right), \tag{6.49}$$

é capaz de mapear (6.47) em (6.48), para um certo conjunto de valores específicos de θ. Em (6.49), α_{ij} é o ângulo entre $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ e um eixo de referência arbitrário (por exemplo, o eixo x). Para ver isso, notemos que

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \alpha(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \pi = \alpha_{ji} + \pi. \tag{6.50}$$

Então,

$$\begin{aligned} U &= \exp\left\{-i\frac{\theta}{\pi}\left(\alpha_{12}+\alpha_{23}+...+\alpha_{ij}+...+\alpha_{(N-1)N}\right)\right\} \\ &= \exp\left(-i\theta\right)\exp\left\{-i\frac{\theta}{\pi}\left(\alpha_{12}+\alpha_{23}+...+\alpha_{ji}+...+\alpha_{(N-1)N}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Fazendo a transformação sobre os férmions, temos:

$$\phi(...\mathbf{r}_i...\mathbf{r}_j...) = U^{-1}\psi(...\mathbf{r}_i...\mathbf{r}_j...) = e^{i\frac{\theta}{\pi}(...+\alpha_{ij}+...)}\psi(...\mathbf{r}_i...\mathbf{r}_j...) \tag{6.52}$$

$$\phi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right) = e^{i\frac{\theta}{\pi}(...+\alpha_{ji}+...)}\psi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right), \tag{6.53}$$

usando (6.50) em (6.53),

$$\phi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right) = e^{-i\theta}e^{i\frac{\theta}{\pi}(...+\alpha_{ij}+...)}\psi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right) \tag{6.54}$$

Sendo ψ antissimétrica, temos

$$\phi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right) = -e^{-i\theta}e^{i\frac{\theta}{\pi}(...+\alpha_{ij}+...)}\psi\left(...\mathbf{r}_i...\mathbf{r}_j...\right). \tag{6.55}$$

Usando (6.52), temos, portanto,

$$\phi\left(...\mathbf{r}_j...\mathbf{r}_i...\right) = -e^{-i\theta}\phi(...\mathbf{r}_i...\mathbf{r}_j...). \tag{6.56}$$

Para que ϕ seja simétrica é necessário, portanto, que

$$e^{-i\theta} = -1 \Rightarrow \theta = (2k+1)\,\pi; k \in \mathbb{Z}. \tag{6.57}$$

Logo, (6.49) mapeia férmions em bósons desde que (6.57) seja satisfeita, ou seja, para θ sendo um múltiplo ímpar de π. Essa é a origem dos *plateaus* fracionários do EHQF. U só atua de maneira não trivial sobre os operadores de momentum, já que comuta com os de posição. Transformando o momentum canonicamente conjugado, temos

$$U^{-1}\left(\mathbf{p}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}_i\right)\right)U = U^{-1}\mathbf{p}_i U - \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}_i\right) \tag{6.58}$$

$$U^{-1}\mathbf{p}_i U = U^{-1}\left(-i\hbar\nabla_i\right)U = \mathbf{p}_i + U^{-1}\left(-i\hbar\nabla_i U\right) \tag{6.59}$$

$$\Rightarrow U^{-1}\mathbf{p}_i U = \mathbf{p}_i - \hbar\frac{\theta}{\pi}\nabla_i\left(\sum_{k<j}\alpha_{kj}\right) \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}\nabla_i\left(\sum_{k<j}\alpha_{kj}\right) &= \sum_{k<j}\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,j;k\neq j}\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1;j\neq i}^{N}\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right) + \sum_{k=1;k\neq i}^{N}\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\right)\right\}.\end{aligned}$$

$\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right)$ é uma função par, já que $\alpha\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right) = \alpha\left(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\right) + \pi$ e, portanto, $\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right) = \nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\right)$. Assim,

$$\nabla_i\left(\sum_{k<j}\alpha_{kj}\right) = \sum_{j=1;j\neq i}^{N}\nabla_i\alpha\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j\neq i}\nabla_i\alpha_{ij} \tag{6.61}$$

$$\Rightarrow U^{-1}\mathbf{p}_i U = \mathbf{p}_i - \hbar\frac{\theta}{\pi}\sum_{j\neq i}\nabla_i\alpha_{ij}. \tag{6.62}$$

Usando (6.62) em (6.58) e lembrando que o operador de posição e, por conseguinte, funções dele são invariantes pela transformação em questão, chegamos, finalmente, à seguinte expressão para o hamiltoniano bosônico $H' = U^{-1}HU$:

$$H' = \sum_i \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) - \hbar\frac{\theta}{\pi}\sum_{j\neq i}\nabla_i\alpha_{ij}\right]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \tag{6.63}$$

Definindo os operadores estatísticos

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\sum_{j\neq i}\nabla_i\alpha_{ij} \tag{6.64}$$

$$a_0(\mathbf{r}_i) = 0, \tag{6.65}$$

onde $\phi_0 = hc/e$, chegamos a uma expressão mais conveniente para o hamiltoniano:

$$H' = \sum_i \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) - \frac{e}{c}\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)\right]^2 + \sum_i \left[eA_0(\mathbf{r}_i) + ea_0(\mathbf{r}_i)\right] + \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \tag{6.66}$$

Podemos observar que o campo $a_\mu \equiv \{a_0(\mathbf{r}_i), -\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)\}$ se relaciona com o sistema da mesma forma que o campo eletromagnético $A_\mu \equiv \{A_0(\mathbf{r}_i), -\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\}$, ou seja, acoplado minimamente. Tanto o campo eletromagnético como o campo estatístico devem ser entendidos como campos externos, sendo que o último é dado pelas equações (6.64) e (6.65) acima. A_μ é conhecido como um campo de calibre, ou seja, para um conjunto específico de transformações desse campo, temos situações físicas equivalentes. O mesmo deve acontecer com o campo estatístico a_μ já que ele se coloca no hamiltoniano da mesma forma que A_μ. Assim, temos um campo de calibre estatístico, cuja simetria fornece um grupo de transformações que dispõe situações físicas equivalentes a (6.64) e (6.65). Isso quer dizer que temos um conjunto de transformações unitárias, governado pelo grupo $U(1)$, capaz de bosonizar o sistema.

Calculando $\nabla_i \alpha_{ij}$ explicitamente, temos

$$\nabla_i \alpha\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) = \nabla_{(i-j)} \alpha\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) = \nabla \alpha_{ij}\left(\mathbf{r}\right); \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \tag{6.67}$$

Em coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} r^1 &= |\mathbf{r}| \cos\alpha_{ij} \Rightarrow \cos\alpha_{ij} = \frac{r^1}{|\mathbf{r}|} \\ r^2 &= |\mathbf{r}| \sin\alpha_{ij} \Rightarrow \sin\alpha_{ij} = \frac{r^2}{|\mathbf{r}|} \\ \frac{\sin\alpha_{ij}}{\cos\alpha_{ij}} &= \frac{r^2/|\mathbf{r}|}{r^1/|\mathbf{r}|} \Rightarrow \tan\alpha_{ij} = \frac{r^2}{r^1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\tan\alpha_{ij}\right) = \sec^2\alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^2} = \frac{1}{r^1} \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^2} = \frac{\cos^2\alpha_{ij}}{r^1} = \frac{\left(r^1\right)^2}{|\mathbf{r}|^2 r^1} = \frac{r^1}{|\mathbf{r}|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^2} = \frac{r_i^1 - r_j^1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \tag{6.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\tan\alpha_{ij}\right) = \sec^2\alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^1} = -\frac{r^2}{\left(r^1\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^1} = -\frac{r^2}{\left(r^1\right)^2}\cos^2\alpha_{ij} = -\frac{r^2}{\left(r^1\right)^2}\frac{\left(r^1\right)^2}{|\mathbf{r}|^2} = -\frac{r^2}{|\mathbf{r}|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial r^1} = -\frac{r_i^2 - r_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \tag{6.69}$$

Agrupando (6.68) e (6.69) em uma só equação, temos, para as componentes de $\nabla \alpha_{ij}\left(\mathbf{r}\right)$:

$$\partial_\beta \alpha_{ij} = -\epsilon^{\beta\gamma} \frac{r_i^\gamma - r_j^\gamma}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \tag{6.70}$$

onde, em (6.70), os índices gregos representam as componentes espaciais do sistema, os latinos indexam as partículas e $\epsilon^{\beta\gamma}$ é o tensor de Levi-Civita em duas dimensões. Usando esse resultado em (6.64), chegamos à seguinte expressão para as componentes do campo estatístico:

$$a^\alpha(\mathbf{r}_i) = -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\sum_{j\neq i} \epsilon^{\alpha\beta} \frac{r_i^\beta - r_j^\beta}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \tag{6.71}$$

Até aqui, temos uma teoria de calibre microscópica sem nenhuma ressalva e nada foi dito a respeito do sistema ser limitado ou não. Isso permanece válido para ambos os casos. A diferença se dá quando o submetemos à segunda quantização, onde introduzimos os campos bosônicos em (6.66):

$$\left[\phi(x), \phi^{\dagger}(y)\right] = \delta(x - y). \tag{6.72}$$

Para um sistema ilimitado, (6.66) se torna

$$\begin{aligned} H' &= \int d^2x \phi^{\dagger}(x) \left\{ \frac{1}{2m} \left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \left(\mathbf{A}(x) + \mathbf{a}(x) \right) \right]^2 + e \left(A_0(x) + a_0(x) \right) \right\} \phi(x) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \delta\rho(x) V(x-y) \delta\rho(y), \end{aligned} \tag{6.73}$$

onde $\rho(x) \equiv \phi^{\dagger}(x)\phi(x)$ é o operador de densidade e $\delta\rho(x) \equiv \rho(x) - \bar{\rho}$ o desvio em relação a densidade média $\bar{\rho}$. $\rho(x)$ é substituído por $\delta\rho(x)$, no termo referente ao potencial, para que o limite termodinâmico possa ser definido no caso em que $V(x)$ seja um potencial de longo alcance.

Ao submetermos o sistema à segunda quantização passamos do limite discreto para o contínuo e, assim, o somatório se transforma em uma integral. Dessa forma, emerge uma diferença importante entre o sistema ser ilimitado ou limitado, já que no primeiro caso a integral é realizada em todo o espaço e no segundo ela é limitada pela fronteira. Vamos considerar primeiramente o caso ilimitado. Para passarmos ao formalismo lagrangeano, fazemos a transformação de Legendre

$$L = \int d^2x \pi(x) \dot{\phi}(x) - H' = \int d^2x \pi(x) c\partial_0 \phi(x) - H', \tag{6.74}$$

onde $\partial_t \equiv c\partial_0$. Impondo a relação de comutação canônica $[\phi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta(x-y)$ e atentando para (6.72), é fácil perceber que $\pi(x) = i\hbar\phi^{\dagger}(x)$. Assim, explicitando o hamiltoniano (6.74), o lagrangeano (6.74) fica

$$\begin{aligned}
L &= \int d^2x \left\{ i\hbar c\phi^\dagger(x)\partial_0\phi(x) - \frac{1}{2m}\phi^\dagger(x)\left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\left(\mathbf{A}(x)+\mathbf{a}(x)\right)\right]^2\phi(x) \right.\\
&\left. -\phi^\dagger(x)e\left(A_0(x)+a_0(x)\right)\phi(x)\right\} - \frac{1}{2}\int d^2xd^2y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y)\\
&= \int d^2x \left\{ -c\phi^\dagger(x)\left[-i\hbar\partial_0 + \frac{e}{c}\left(A_0(x)+a_0(x)\right)\right]\phi(x) \right.\\
&\left. -\frac{1}{2m}\phi^\dagger(x)\left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\left(\mathbf{A}(x)+\mathbf{a}(x)\right)\right]^2\phi(x)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\int d^2xd^2y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y). \qquad (6.75)
\end{aligned}$$

Reescrevendo (6.75) em termos de componentes e definindo a notação covariante $(\nabla)_k \equiv \partial_k; (\mathbf{A})_k \equiv -A_k = A^k$, chegamos a uma expressão mais conveniente para o lagrangeano:

$$\begin{aligned}
L &= \int d^2x \left\{ -c\phi^\dagger(x)\left[-i\hbar\partial_0 + \frac{e}{c}\left(A_0(x)+a_0(x)\right)\right]\phi(x) \right.\\
&\left. -\frac{1}{2m}\phi^\dagger(x)\left[-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}\left(A_k(x)+a_k(x)\right)\right]^2\phi(x)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\int d^2xd^2y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y)\\
&= \int d^2x \left\{ i\hbar c\phi^\dagger(x)\left[\partial_0 + i\frac{e}{c\hbar}\left(A_0(x)+a_0(x)\right)\right]\phi(x) \right.\\
&\left. +\frac{\hbar^2}{2m}\phi^\dagger(x)\left[\partial_k + i\frac{e}{c\hbar}\left(A_k(x)+a_k(x)\right)\right]^2\phi(x)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\int d^2xd^2y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y). \qquad (6.76)
\end{aligned}$$

Definindo a *derivada covariante*

$$\begin{aligned}
D_\mu &\equiv \left\{\partial_\mu + i\frac{e}{c\hbar}\left(A_\mu(x)+a_\mu(x)\right)/\mu\in\mathbb{Z}; 0\le\mu\le 2\right\} \qquad (6.77)\\
D_\mu &= \{D_0, D_k\} \equiv \left\{D^0, -D^k\right\}; D^\mu = \left\{D^0, D^k\right\}/k\in\{1,2\},
\end{aligned}$$

reescrevemos (6.76) numa forma mais compacta:

$$L = \int d^2x \left\{ i\hbar c\phi^\dagger(x)D_0\phi(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\phi^\dagger(x)D_kD^k\phi(x) \right\} - \frac{1}{2}\int d^2xd^2y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y). \tag{6.78}$$

A ação do sistema, portanto, é dada por

$$S = \int d^3x \left\{ i\hbar c\phi^\dagger(x)D_0\phi(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\phi^\dagger(x)D_kD^k\phi(x) \right\} - \frac{1}{2}\int d^3xd^3y\delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y), \tag{6.79}$$

e o campo estatístico, portanto, é dado por

$$a^i(x) = -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\epsilon^{ij}\int d^2y\frac{x^j - y^j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\rho(y) \tag{6.80}$$

$$a^0(\mathbf{r}_i) = 0, \tag{6.81}$$

onde

$$\rho(x) \equiv \phi^\dagger(x)\phi(x). \tag{6.82}$$

A invariância global da ação (6.79) implica a equação de continuidade

$$\partial_0 j^0_M + \partial_i j^i_M = 0, \tag{6.83}$$

onde as componentes da corrente de matéria, como visto no cap. 1, são dadas por

$$j^\mu_M = \frac{1}{e}\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)}, \tag{6.84}$$

portanto,

$$j^0_M(x) = \rho(x) \tag{6.85}$$

$$j^i_M(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left\{\phi^\dagger(x)D^i\phi(x) - \left(D^i\phi(x)\right)^\dagger\phi(x)\right\}. \tag{6.86}$$

A proposta de Zhang [40] é fazer do operador $\mathbf{a}(x)$ um campo auxiliar. Assim, ele nota que, no seu modelo sem fronteira, (6.80) é a solução da equação de Chern-Simons

$$\epsilon^{ij}\partial_i a_j(x) = \phi_0 \frac{\theta}{\pi}\rho(x) \tag{6.87}$$

onde $\rho(x) = \phi^\dagger(x)\phi(x)$, evidentemente, é a componente zero da corrente de matéria. Fazendo uso da equação de continuidade (6.83) e tomando a derivada temporal de (6.87), ele chega a

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij}\partial_i\partial_0 a_j(x) &= \phi_0\frac{\theta}{\pi}\partial_0\rho(x) && (6.88)\\ &= -\phi_0\frac{\theta}{\pi}\partial_i j^i && (6.89)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_i\left(\epsilon^{ij}\partial_0 a_j(x)\right) = \partial_i\left(-\phi_0\frac{\theta}{\pi}j^i\right). \tag{6.90}$$

Assim, ele toma a liberdade de impor que

$$\epsilon^{ij}\partial_0 a_j(x) = -\phi_0\frac{\theta}{\pi}j^i. \tag{6.91}$$

Podemos agrupar (6.87) e (6.91) numa única equação de Chern-Simons covariante

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda(x) = \phi_0\frac{\theta}{\pi}j^\mu. \tag{6.92}$$

A equação (6.92) pode ser gerada dinâmicamente se adicionarmos o termo de Chern-Simons à ação, ou seja,

$$S_{CS} \equiv \int d^3x \frac{1}{2}\frac{\pi}{\theta}\frac{1}{\phi_0}\epsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda(x). \tag{6.93}$$

Essa ação é invariante de calibre, como já visto na seção 6.1. Portanto, no caso sem fronteiras, não há quebra alguma da invariância de calibre ao se passar à descrição do sistema por meio de segunda quantização.

Entretanto, no caso do espaço ser limitado, teremos limites de integração finitos. A abordagem usual consiste em simplesmente limitar todas as integrais da ação, ou seja,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_A d^3x \left\{ i\hbar c \phi^\dagger(x) D_0 \phi(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(D_k\phi\right)^\dagger(x) D^k \phi(x) \right\} - \frac{1}{2}\int_A d^3x d^2y \delta\rho(x) V(x-y) \delta\rho(y) \\
&+ \int_A d^3x \frac{1}{2}\frac{\pi}{\theta}\frac{1}{\phi_0}\epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda(x) \qquad (6.94)
\end{aligned}
$$

e, como já vimos, a ação de Chern-Simons deixa de ser invariante de calibre. Podemos reescrever a ação limitada[3] (6.94) com limites de integração infinitos usando a função degrau $\Theta(\mathbf{x})$. Assim, (6.94) se torna

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^3x \Theta(\mathbf{x}) \left\{ i\hbar c \phi^\dagger(x) D_0 \phi(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(D_k\phi\right)^\dagger(x) D^k \phi(x) \right\} \\
&- \frac{1}{2}\int d^3x d^2y \Theta(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{y}) \delta\rho(x) V(x-y) \delta\rho(y) \\
&+ \int d^3x \Theta(\mathbf{x}) \frac{1}{2}\frac{\pi}{\theta}\frac{1}{\phi_0}\epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda(x) \qquad (6.95)
\end{aligned}
$$

Podemos notar que o problema da quebra da invariância de calibre só aparece após feita a segunda quantização, onde a integral sobre o volume toma o lugar do somatório. Talvez seja esta a razão que levou à compreensão equivocada de que a teoria limitada é anômala. Entretanto, como já visto, esse não é o caso, já que a invariância de calibre é perdida mesmo tratando-se de campos clássicos, ou seja, com os mesmos sendo funções do espaço-tempo em vez de operadores quânticos agindo no espaço de Hilbert.

[3] Observe que mudou a forma do termo envolvendo as conponentes espaciais da derivada covariante:

$$\phi^\dagger(x) D_k D^k \phi(x) \rightarrow -\left(D_k\phi\right)^\dagger(x) D^k \phi(x).$$

A diferença é uma divergência total, no caso da ação ilimitada e é, portanto, irrelevante. No caso limitado, porém, as duas formas não são equivalentes, devido à presença de um termo associado à fronteira. Optamos pela segunda forma pois apenas neste caso a ação é real e a Hamiltoniana, consequentemente, hermitiana.

Entretanto, devemos nos lembrar de que o campo de Chern-Simons é um campo auxiliar que *deve* ser governado pelas equações (6.80) e (6.81) no caso do mesmo estar imerso em um espaço ilimitado, ou, evidentemente, por

$$\begin{aligned} a^i(x) &= -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\epsilon^{ij}\int d^2y\frac{x^j-y^j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\Theta(\mathbf{y})\phi^\dagger(y)\phi(y) && (6.96)\\ a^0(\mathbf{r}_i) &= 0. && (6.97)\end{aligned}$$

no caso do volume ser limitado. Isso significa que a ação (6.93) é construída *a posteriori* com o intuito de *gerar* as equações para o campo estatístico dinamicamente. Ou seja, as equações (6.80) e (6.81), no caso do volume ser ilimitado, ou, analogamente, (6.96) e (6.97), no caso do mesmo ser limitado, *devem* ser satisfeitas e o termo de Chern-Simons é adicionado à ação para que as mesmas sejam geradas dinamicamente. Portanto, a ação de Chern-Simons é consequência da imposição das equações do campo estatístico e não o oposto. Entretanto, os autores que entenderam a teoria limitada como sendo anômala não notaram essa sutileza e trataram a ação de Chern-Simons como fundamental, *i.e.*, como um termo que existe *a priori*, sendo as equações de campo geradas *a posteriori* e invertendo, portanto, causa com consequência.

Usando (6.82), podemos reescrever (6.96) como

$$a^i(x) = -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\epsilon^{ij}\int d^2y\frac{x^j-y^j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\Theta(\mathbf{x})\rho(y). \qquad (6.98)$$

Podemos verificar, realizando o cálculo (6.84) anterior que, no caso limitado,

$$\begin{aligned} j_M^{(b)0}(x) &= \Theta(\mathbf{x})\rho(x) = \Theta(\mathbf{x})j_M^0 && (6.99)\\ j_M^{(b)i}(x) &= \frac{i\hbar}{2m}\Theta(\mathbf{x})\left\{\phi^\dagger(x)D^i\phi(x) - \left(D^i\phi(x)\right)^\dagger\phi(x)\right\} = \Theta(\mathbf{x})j_M^i(x). && (6.100)\end{aligned}$$

Logo, na forma local, a equação (6.98) se torna

$$\epsilon^{ij}\partial_i a_j(x) = \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \Theta(\mathbf{x}) j^0_M$$

assim como em (6.87). Podemos notar que o mesmo desenvolvimento utilizado para chegar a (6.92) pode ser realizado aqui, chegando a

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda(x) = \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \Theta(\mathbf{x}) j^\mu_M(x), \tag{6.101}$$

ou seja, aqui a equação de Chern-Simons para o campo auxiliar encontra-se limitada pela fronteira do sistema. Podemos notar que o termo a ser adicionado à ação limitada que gera a equação de CS limitada (6.101) é, ainda, a ação de Chern-Simons *ilimitada,* e não a limitada. Lembramos que a equação (6.101) deve ser satisfeita *por construção*, *i.e.*, pela própria definição do campo estatístico. Dessa forma, percebemos que, embora o sistema seja limitado, o termo de Chern-Simons ainda deve ser *ilimitado* para que as equações do campo estatístico, que são mandatórias, sejam satisfeitas. Logo, a ação correta que fornece o modelo de Chern-Simons-Landau-Ginsburg limitado deve ser

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int d^3x \Theta(\mathbf{x}) \left\{ i\hbar c \phi^\dagger(x) D_0 \phi(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(D_k \phi\right)^\dagger (x) D^k \phi(x) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \int d^3x d^2y \Theta(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{y}) \delta\rho(x) V(x-y) \delta\rho(y) \\ & + \int d^3x \frac{1}{2} \frac{\pi}{\theta} \frac{1}{\phi_0} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda(x) \end{aligned} \tag{6.102}$$

e, portanto, a teoria é perfeitamente consistente sem nenhuma quebra na simetria de calibre.

Assim, a quebra da invariância de calibre pela segunda quantização da teoria limitada, entendida como uma anomalia, é decorrente do procedimento equivocado de limitar a ação de Chern-Simons.

Por outro lado, foi mostrado na seção anterior que, mesmo que o termo de Chern-Simons fosse limitado, a emergente não invariância de calibre da teoria simplesmente daria ensejo a uma corrente de matéria unidimensional fronteiriça, cuja forma, descrita pelos campos de calibre, é exatamente a mesma da corrente de fronteira obtida pela inclusão dos férmions quirais. Logo, mesmo a teoria de Chern-Simons limitada pode ser aparentemente bem definida, com a pseudoanomalia sendo nula como simples condição subsidiária. Esta situação dá ensejo à corrente fronteiriça e a inclusão dos férmions quirais anômalos não acrescenta resultado distinto algum. Portanto, a idéia de adicionar férmions quirais unidimensionais na borda do sistema limitado se configura, pictoricamente, como uma espécie de remendo sobre um problema inexistente.

6.3 Compatibilidade com resultados conhecidos

Vimos que não há anomalia de calibre relacionada à fronteira de um sistema Hall quântico limitado e que, portanto, não há necessidade da inclusão de férmions quirais unidimensionais na fronteira. Na verdade, a perda da simetria de calibre se deve ao equívoco de limitar a ação de Chern-Simons. Como vimos, o campo auxiliar é definido de forma a satisfazer a equação (6.101).

Se a ação de Chern-Simons fosse limitada, tal qual em (6.3), teríamos a equação não limitada

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda(x) = \phi_0 \frac{\theta}{\pi} j^\mu_M(x) \tag{6.103}$$

que não contém a restrição sobre a fronteira do sistema e, portanto, não coincide com (6.101). Isso resultaria em uma ação com segunda quantização não equivalente ao problema original. Portanto, a ação de Chern-Simons precisa ser ilimitada para produzir a definição correta do campo estatístico. A limitação da ação de CS é a origem da destruição da simetria de calibre [20], [21]. Este problema não existe aqui.

Podemos seguir os mesmos passos de [40] e procurar por uma solução de campo médio na presença de um campo magnético $\Theta(\mathbf{x})B = -\epsilon_{ij}\partial_i a_j$. Para isso, podemos utilizar exatamente a mesma proposta

$$\phi(x) = \sqrt{\bar{\rho}},\ \mathbf{a} = -\mathbf{A},\ a_0(x) = 0, \tag{6.104}$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade média de partículas. A corrente toma a forma $j^{(b)\mu} = (e\Theta(\mathbf{x})\bar{\rho}, \mathbf{0})$. As equações de movimento no setor de CS são

$$\epsilon_{ij}\partial_0 a_j(x) = 0 \text{ (identicamente satisfeita)} \tag{6.105}$$

$$\epsilon_{ij}\partial_i a_j(x) = \Theta(\mathbf{x})B = \Theta(\mathbf{x})\phi_0\frac{\theta}{\pi}\bar{\rho}. \tag{6.106}$$

Identificando a densidade de fluxo magnético com $\rho_A = \frac{B}{\phi_0}$, podemos obter a condição de validação da aproximação de campo médio

$$\nu = \frac{\bar{\rho}}{\rho_A} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{1}{2k+1}. \tag{6.107}$$

Esse é exatamente o resultado obtido em [40] para os fatores fracionários de preenchimento do efeito Hall quântico fracionário.

Em relação à expressão da corrente em termos do campo de Chern-Simons, podemos notar, utilizando as equações de movimento, que

$$\frac{\delta S}{\delta a_\mu} = \frac{\delta}{\delta a_\mu}\left(S_M + S_{CS}\right) = j_M^{(b)\mu} + \frac{\delta S_{CS}}{\delta a_\mu} = 0.$$

Portanto, $j_M^{(b)\mu} = -\frac{\delta S_{CS}}{\delta a_\mu}$. Calculando essa última quantidade, temos

$$\frac{\delta S_{CS}}{\delta a_\mu} \equiv e j^\mu_{CS} = -\sigma_{xy}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho(x).$$

Essa é precisamente a corrente final obtida em [21] depois do efeito da inclusão dos férmions quirais de fronteira terem sido levados em conta. Portanto, o resultado é o mesmo obtido caso os férmions quirais houvessem sido incluídos na teoria.

Falta, ainda, analisar o que acontece na fronteira do sistema. Para isso, usamos a equação de continuidade $\partial_\mu j_M^{(b)\mu} = 0$. Temos, portanto

$$\partial_\mu \left(\Theta(\mathbf{x}) j_M^\mu\right) = \Theta(\mathbf{x}) \partial_\mu j_M^\mu + \partial_\mu \Theta(\mathbf{x}) j_M^\mu = 0. \tag{6.108}$$

A expressão (6.108) implica em duas equações separadas: uma para o interior da amostra e outra para a fronteira. Temos, portanto,

$$\partial_\mu j_M^\mu = 0, \text{ no interior,} \tag{6.109}$$

e

$$j_{M,n}^i = n_i j_M^i = 0, \text{ na fronteira,} \tag{6.110}$$

onde n_i é o campo vetorial que é normal à fronteira da amostra. A condição (6.110) revela que a corrente na fronteira só pode ser tangencial, correspondendo aos estados de fronteira discutidos no efeito Hall quântico fracionário.

Conclusão

Vimos que a corrente não é necessariamente conservada em função da existência da simetria de calibre local da ação da teoria, sendo necessária apenas em algumas nuances específicas. Assim, no caso abeliano clássico, só precisamos da simetria global da ação para termos corrente conservada. No caso abeliano quântico, além da simetria global da ação, é necessária também a simetria local da medida fermiônica. Caso contrário, a teoria apresentará uma anomalia, *i.e.*, o valor esperado da corrente sobre os campos de matéria será uma função não identicamente nula dos campos de calibre.

Entretanto, sob o nosso ponto-de-vista, o fato da teoria apresentar uma anomalia não significa que a corrente deixe de ser conservada, uma vez que a mesma pode ser anulada como condição subsidiária, seja pela utilização das equações de movimento do campo de calibre clássico ou pela invariância da medida do campo de calibre no caso do mesmo ser quantizado sendo, portanto, necessária apenas a simetria local da ação de matéria. A idéia desenvolvida nos capítulos 3 e 5 foi sugerir que uma teoria que não possua simetria de calibre possa ser pensada como uma teoria que possua simetria de calibre onde o mesmo já fora fixado. De fato, como demonstramos, isso é verdade se a restrição sobre os campos de calibre que aparece como condição subsidiária nos modelos que não possuem simetria puder ser entendida como a fixação de calibre de sua correlata versão invariante de calibre, demonstrando a equivalência entre as duas formulações. Nesse sentido, conseguimos demonstrar a equivalência entre versões invariante e não invariante do modelo de Proca e do modelo de Schwinger quiral.

Sendo uma teoria de calibre anômala apenas uma teoria de calibre mais ampla, onde o calibre já foi fixado (o calibre onde a anomalia se cancela), a corrente é conservada e, portanto, não há motivos para considerá-la inconsistente. Além disso, o formalismo estendido fornece a sua versão invariante, livre de anomalias.

Seguindo esse raciocínio, demonstramos que a teoria que descreve o efeito Hall quântico fracionário com fronteira, comumente pensada como uma teoria anômala devido a uma suposta quebra na invariância de calibre quando submetida ao procedimento da segunda quantização, não possui anomalias, e que a perda da simetria de calibre é decorrente do equívoco de limitar-se a ação de Chern-Simons, uma ação adicionada de maneira *ad-hoc* com o intuito de gerar dinamicamente as equações que *definem* o campo estatístico. Por outro lado, constatamos que mesmo que houvesse a tal perda da simetria, a teoria continuaria preservando a conservação da corrente, sendo a corrente de fronteira descrita exatamente da mesma maneira pelos férmions da teoria, no lugar dos férmions quirais unidimensionais que são comumente adicionados com o intuito de anular a *pseudoanomalia*. Assim, demonstrou-se que uma quebra da simetria de calibre ocasionada pela limitação da ação de Chern-Simons, além de não comprometer os resultados físicos da teoria, gera uma corrente unidimensional de fronteira, descrita em função dos campos de calibre, idêntica à que é produzida pelos férmions quirais, e que tais férmions unidimensionais são, portanto, irrelevantes.

Por outro lado, algumas questões merecem ser levantadas, por exemplo, a questão da renormalizabilidade e unitaridade de tais teorias. Algumas evidências apontam em nosso favor: no capítulo 4, vimos que a formulação estendida pode ser pensada como a generalização do mecanismo de Stueckelberg. Por outro lado, sabemos que o modelo de Proca não é nem unitário, nem renormalizável, mas para a sua versão estendida, o modelo de Stueckelberg, foi demonstrada a sua unitaridade e renormalizabilidade em um determinado calibre. Isso aponta para a possibilidade das teorias abelianas anômalas, em sua versão estendida, também serem unitárias e renormalizáveis, tal qual o modelo de Stueckelberg.

De fato, como ficou demonstrado, consistentemente com a idéia da generalização do mecanismo de Stueckelberg as formulações invariantes do modelo de Schwinger quiral, depois de integrados os férmions, coincidem exatamente com o modelo de Stueckelberg em duas dimensões. Se esse resultado puder ser extrapolado para quatro dimensões, então será fornecido um mecanismo de geração de massa proveniente de correções quânticas associados a férmions anômalos que pode ser uma alternativa interessante ao mecanismo de *Higgs*.

Uma segunda questão a ser mencionada é a das anomalias não abelianas. Como podemos perceber, a partir do final do capítulo 2, resolvemos nos ocupar apenas com teorias abelianas. Isso se deve à dificuldade em comparar as versões original e estendida das teorias não abelianas. Vimos que, classicamente, as equações de movimento das duas versões do caso abeliano são redutíveis umas às outras e o parâmetro θ não é percebido. Entretanto, embora possamos pensar que o lagrangeano do formalismo estendido não abeliano seja redutível ao do formalismo original pela redefinição dos campos onde $\exp(i\theta)\,\psi \to \psi$, uma comparação das equações de movimento é crucial para demonstrar a equivalência clássica entre as formulações. Mas, ao contrário do acoplamento abeliano, onde $\partial_\mu\theta$ é acoplado de forma linear, no caso não abeliano temos o acoplamento extremamente não linear $gA_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\left(\partial_\mu g\right) g^{-1}$; $g \equiv \exp\left(i\theta^a T_a\right)$, o que torna a análise extremamente complicada. Além disso, vimos que a corrente da teoria estendida é a corrente da teoria original transformada de calibre. A análise das teorias não abelianas, portanto, pode não se apresentar tão simples como as que constam nesta tese.

Foi possível generalizar a técnica de recuperação da simetria de calibre proposta por Harada e Tsutsui para modelos não anômalos sem simetria de calibre, através da formulação estendida. Um exemplo foi aquele do modelo de Proca, relacionado através da formulação estendida com o modelo de Stueckelberg. O sucesso do procedimento nos leva a conjecturar se não seria possível a generalização do método para outras simetrias. Isto nos permitiria abordar outras quebras quânticas de simetria, como no caso das anomalias quirais, conformes ou gravitacionais, por exemplo.

Bibliografia

[1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Nova Iorque, 1995.

[2] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford, 2006.

[3] J. F. Donoghue, E. Golowich e B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, Nova Iorque, 1996.

[4] M. Veltman, *Nuc. Phys.* **B7** (1968), 637; G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971), 173; G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35** (1971), 167; G. 't Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972), 189; ibid. **B50** (1972), 318; C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **B40** (1972), 566.

[5] D. J. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1343; H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1346.

[6] G. 't Hooft, *The discovery of the renormalizability of non-abelian gauge theories*, preprint SPIN-2001/03, disponível eletronicamente no sítio do autor localizado em http://www.phys.uu.nl/˜thooft/lectures/erice00.pdf.

[7] E. Noether, "Invariante Variationsprobleme", *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse* (1918), 235.

[8] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969), 2426; J. S. Bell e R. Jackiw, Il Nuovo Cimento **A60** (1969), 47.

[9] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951), 664.

[10] R. Jackiw e X Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219, 2060 (Errata).

[11] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962), 2425.

[12] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvilli, *Phys. Lett.* **B167** (1986), 225.

[13] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B183** (1987), 311.

[14] O. Babelon, F. Schaposnik e C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B177** (1986), 385.

[15] Gabriel Di Lemos Santiago Lima, *Path-Integral Gauge Invariant Mapping: from Abelian Gauge Anomalies to the Generalized Stueckelberg Mechanism*, *preprint* CBPF-NF-015/10, disponível em

http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/nf01510.2010_10_29_17_57_46.pdf

[16] Gabriel Di Lemos Santiago Lima, *The Equivalence Between Gauge and Non-Gauge Abelian Models*, *preprint* CBPF-NF-016/10, disponível em

http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/nf01610.2010_10_29_18_00_56.pdf

[17] Gabriel Di Lemos Santiago Lima, *A Discussion on Gauge Symmetry and Charge Conservation*, *preprint* CBPF-NF-017/10, disponível em

http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/nf01710.2010_10_29_18_03_02.pdf

[18] R. Casana and S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **15**, 4603 (2000); R. Casana and S. A. Dias, *Jour. Phys. G* **27**, 1501 (2001); R. Casana and S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **17**, 4601 (2002).

[19] E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Act. 30 (1957), 209.

[20] X. G. Wen, *Phys. Rev.* **B43** (1991), 11025.

[21] N. Maeda, *Phys. Lett.* **B376** (1996), 142.

[22] J. Polchinski, *String Theory, vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[23] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, 1ª edição, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, Nova Iorque, 1990.

[24] K. Fujikawa e H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, The International Series of Monographs on Physics, 1ª edição, Oxford University Press, Nova Iorque, 2004.

[25] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* 184 (1969), 1848; C. Bouchiat, J. Iliopoulos e P. Meyer, *Phys. Lett.* **B38** (1972), 519; D. J. Gross e R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6** (1972), 477.

[26] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979), 1195; K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D21** (1980), 2848; **D22** (1980), 1499 (E).

[27] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2-Dimensional Quantum Field Theory*, 2ª edição, World Scientific, Singapura, 2001.

[28] Gabriel Di Lemos Santiago Lima e Sebastião Alves Dias, *Anomaly Cancellation in Gauge Theories*, *preprint* eletrônico 0912.4007, disponível em http://lanl.arxiv.org/

[29] L. D. Fadeev e Y. N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967), 29; L. D. Faddeev e A. A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, 1ª edição, Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, 1980.

[30] Veja, por exemplo, a seção 52 de P. Halmos, *Measure Theory*, D. van Nostrand and Co., Amsterdam, 1950; veja também A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1940.

[31] J. Wess e B. Zumino, *Phys. Lett.* **B37** (1971), 95.

[32] D'Hoker e E. Farhi, *Nucl. Phys.* **B248** (1984), 59.

[33] K. Fujikawa, *Nucl. Phys.* **B271** (1986),681.

[34] C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev.* **D35** (1987), 2501.

[35] K. Harada e I. Tsutsui, *Prog. Theo. Phys.* **78 4** (1987), 878-885.

[36] W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **13** (1941), 203.

[37] J. H. Lowenstein e B. Schroer, *Phys. Rev.* **D6** (1972), 1553. Veja também H. van Hees, *The renormalizability for massive Abelian gauge field theories re-visited (* 2003), e-print *hep-th*/0305076, disponível em

http://lanl.arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/0305/0305076v1.pdf .

[38] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev.* **D45** (1992), 2162.

[39] S. C. Zhang, T. H. Hansson and S. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), 82

[40] S. C. Zhang, *Int. J. Mod. Phys.* **B6** (1992), 25.

[41] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B278** (1986), 493.

[42] W. Yao, S. A. Yang and Q. Niu, Phys. Rev. Lett. **102**, 096801 (2009).

[43] Y. Hatsugai, Sol. St. Comm. **149**, 1061 (2009).

[44] A. Boyarsky, V. V. Cheianov and O. Ruchayskiy, Phys. Rev. B **70**, 235309 (2004).

[45] A. M. Chang, Rev. Mod. Phys. **75**, 1449 (2003).

[46] B. Basu and P. Bandyopadhyay, Phys. Scr. **73**, 332 (2006).

[47] N. Goldman, A. Kubasiak, A. Bermudez, P. Gaspard, M. Lewenstein and M. A. Martin-Delgado, Phys. Rev. Lett. **103**, 035301 (2009).

[48] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects - Field Theoretic Approach and Related Topics*, 2^{nd} edition, World Scientific, Singapore, 2008.

[49] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*, International Series of Monographs in Physics, vol. 121, Oxford Science Publications, New York, 2003.

[50] G. L. S. Lima e S. A. Dias, *Fractional Quantum Hall Effect With No Chiral Edge Fermions*, *preprint* eletrônico 0910.3661, disponível em http://lanl.arxiv.org/