

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF
Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica – ICRA

Pós-graduação em Física

**ESTUDO DAS PERTURBAÇÕES EM
UNIVERSOS COM RICOCHETE**

Sandro Dias Pinto Vitenti

TESE DE DOUTORADO

Rio de Janeiro
21 de outubro de 2011

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF
Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica – ICRA

Sandro Dias Pinto Vitenti

**ESTUDO DAS PERTURBAÇÕES EM UNIVERSOS COM
RICOCHETE**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: *Nelson Pinto-Neto*

Rio de Janeiro
21 de outubro de 2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio e amor.

Agradeço também aos meus amigos do Rio: Alvaro Gomes, Bruno Mota, Daniel Maia, Gustavo Catão, Fernando Simoni, Nubia Moreira e Stella Pereira, por todos os encontros entre almoços, jantares e partidas de RPG e Rock Band que serviram para manter minha sanidade. Agradeço também aos meus amigos de Brasília que entenderam meu sumiço durante todo esse tempo, em especial aos meus amigos: André Gomes, Gabriel Nara, Guilherme Nunes, Marcello Leibovich, Mateus Roriz, Paulo Ferreira, Rafael Lago e Zé Melo.

Agradeço ao meu orientador, Nelson Pinto-Neto, não só pela ajuda durante o desenvolvimento da tese mas também por acreditar nos caminhos que segui com este trabalho. E também aos membros do ICRA por terem me recebido e apoiado durante esse tempo. Agradeço também ao Patrick Peter pela participação nas discussões que deram o rumo final desse trabalho.

Entre as várias pessoas a quem agradeço pelo apoio durante a escrita desta tese, não há quem mais mereça minha gratidão que Mariana Penna Lima. Não só pela ajuda revisando as contas enormes que eu insistia em fazer, mas também pela ajuda no desenvolvimento do texto, pela paciência e suporte durante todo esse tempo.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

*Mathematics is a game played according to certain simple rules with
meaningless marks on paper.*

—DAVID HILBERT

RESUMO

O modelo padrão da cosmologia, se extrapolado ao passado sem nenhuma modificação, leva necessariamente a uma singularidade, conhecida como *Big Bang*. Esse fato é naturalmente entendido quando notamos que, ao fazer essa extrapolação, estamos aplicando a relatividade geral a um cenário de altas energias onde espera-se que algum tipo de teoria quântica da gravitação seja necessária. O modelo padrão também não explica uma série de questões relacionadas às condições iniciais do universo. Nesse ponto o modelo inflacionário é bem sucedido e resolve grande parte das questões, porém é omissivo em relação ao *Big Bang*.

Mesmo fornecendo um conjunto de condições iniciais para a cosmologia, os modelos inflacionários geralmente não podem ser testados diretamente. Dessa forma, qualquer outro modelo que faça previsões compatíveis com os dados observacionais deve ser considerado como uma alternativa viável. Os modelos de universo eterno com ricochete não só solucionam os mesmos problemas que a inflação como resolvem, por construção, a singularidade inicial. Eles também fazem previsões aparentemente compatíveis com as observações.

Neste trabalho estudamos em detalhe os modelos com ricochete. Consideramos um universo inicialmente esparsos e em contração, onde as únicas perturbações que o diferem de um com seções espaciais homogêneas e isotrópicas são aquelas geradas pelas flutuações quânticas do vácuo. Supomos inicialmente um universo dominado por um fluido e com seções espaciais com curvatura arbitrária, onde a formação do espectro se dá em uma fase com um ou mais fluidos. A saber, obtemos analiticamente as perturbações quando o espectro é formado durante a dominação de um único fluido. Quando o espectro é formado na transição entre dois fluidos, não temos resultados analíticos e, portanto, estudamos esse caso numericamente. Mostramos que o espectro é quase invariante de escala quando esse é formado durante a dominação de um fluido tipo poeira. Utilizamos a teoria de Bohm como mecanismo para gerar o ricochete. Essa teoria prevê uma trajetória para o fator de escala durante a fase quântica, que obtemos via equação de Wheeler–DeWitt, que faz a transição da fase de contração para a de expansão de forma não singular.

Para mostrar a validade da análise perturbativa, avaliamos quais condições são necessárias para que as perturbações possam ser consideradas pequenas. Aplicando essas condições, mostramos que é possível obter um espectro quase invariante de escala com uma amplitude próxima ao esperado na fase de expansão. Além de mostrarmos que durante toda a evolução as perturbações permanecem pequenas e a série perturbativa válida.

Palavras-chave: gravidade quântica, cosmologia, ricochete, perturbações, fase de contração

ABSTRACT

The standard model of cosmology, if extrapolated to the past without any modification, results necessarily in a singularity, known as Big Bang. This is naturally understood by the fact that such extrapolation applies the General Relativity to high energy scenarios where one expects that it should be substituted by a quantum theory of gravitation. The standard model also does not explain a series of issues related to its initial conditions. At this point the inflationary paradigm is successful and solves most of these issues, however it does not address the Big Bang singularity problem.

Even though it furnishes a set of initial conditions for the cosmological standard model, inflationary models can not be tested directly. Therefore, any other model which predicts initial conditions compatible with observations should be considered as a viable alternative to inflation. Cosmological models with a bounce not only solve the same problems that the inflationary cosmology but also, by construction, the initial singularity problem. These models can also make predictions in apparent agreement with the observations.

In this work we analyse in details this class of cosmologies with bounce. Considering initially a sparse contracting universe where the only perturbations around its homogeneous and isotropic spatial sections are those generated by the quantum fluctuations of the vacuum. We assume that initially the universe is dominated by a single fluid and has arbitrary maximally symmetric spatial sections where the spectrum is formed during a phase with one or more fluids. In the case where it is formed by a single fluid, we obtain an analytic solution for the perturbations. For other cases we perform a numerical investigation. We show that an almost scale invariant spectrum is obtained when the dominating fluid is dust like. We use the Bohm theory to interpret the universe wave function, and quantize the geometry using the Wheeler–DeWitt equation, obtaining a non-singular trajectory for the scale factor.

To study the validity of the perturbative series, we develop a set of necessary conditions for the consistence of the series. Applying such conditions we show that is possible to obtain a spectrum almost scale invariant and with amplitude expected by observations. Besides we show that for all times the perturbative series is well behaved.

Keywords: quantum gravity, cosmology, bounce, perturbations, contracting phase

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xi
Glossário	xii
Capítulo 1—Introdução	1
Capítulo 2—Cosmologia Homogênea e Isotrópica	6
2.1 Homogeneidade e Isotropia	7
2.2 Equações de Friedmann	9
2.3 Descrição Conforme	12
2.4 Desvio para o Vermelho e Distâncias Cosmológicas	13
2.5 Modelo Padrão	15
2.5.1 Energia Escura e CosmoLib	17
2.5.2 Evolução Para um Único Fluido	19
2.6 Problemas Cosmológicos	20
2.6.1 Horizonte	20
2.6.2 Estruturas em Grandes Escalas	22
2.6.3 Planeza	22
2.6.4 Soluções via Período Inflacionário	23
2.6.5 Soluções via Período de Contração	25
Capítulo 3—Perturbações em Torno de um Universo Homogêneo e Isotrópico	27
3.1 Liberdade de Calibre	28
3.2 Quantidades Perturbadas	30
3.3 Decomposição das Perturbações	33
3.4 Variáveis Invariantes de Calibre	36
3.4.1 Métrica	36
3.4.1.1 Escalares	37
3.4.1.2 Vetoriais	40
3.4.1.3 Tensoriais	41
3.4.2 Tensor Energia–Momento	41
3.5 Equações de Movimento	42
3.5.1 Tensor de Ricci	43
3.5.2 Tensor Fonte	45

3.5.3	Equações Escalares	46
3.5.4	Operador de Laplace–Beltrami	50
3.6	Escolha de Calibre	51
3.6.1	Calibre Newtoniano	51
3.6.2	Calibre Síncrono	52
3.6.3	Calibre de Curvatura Constante	53
3.7	Teste da Série Perturbativa	54
3.7.1	Fator de Expansão	55
3.7.2	Cisalhamento	56
3.7.3	Termo de Aceleração e Derivada Temporal	56
3.7.4	Curvatura Espacial	57
3.7.5	Tensor Fonte	57
3.8	Evolução das Perturbações	58
3.8.1	Calibre Newtoniano	60
3.8.2	Calibre de Curvatura Constante	60
Capítulo 4—Cosmologia Quântica		62
4.1	Quantização do Modelo de Fundo	62
4.1.1	Equação de Wheeler–DeWitt	62
4.1.2	Representação no Espaço de Hilbert	67
4.1.3	Soluções para um Universo Plano	68
4.2	Quantização das Perturbações	73
4.2.1	Redução dos Vínculos da Lagrangiana	73
4.2.2	Hamiltoniana e a Álgebra de Poisson	79
4.2.3	Escolha de Calibre	82
4.2.4	Quantização Canônica	82
4.2.5	Função de Correlação de Dois Pontos	89
Capítulo 5—Perturbações em Modelos com Ricochete		92
5.1	Ricochete na Fase de Radiação	92
5.2	Perturbações Adiabáticas	93
5.2.1	Soluções para um Único Fluido	95
5.3	Solução integral	100
5.3.1	Concatenação das Soluções	103
5.4	Atravessando o Ricochete	104
5.4.1	Condições de Junção	105
5.4.2	Ricochete via Trajetória de Bohm	108
5.4.3	Série Perturbativa	111
5.5	Soluções Numéricas	112
Capítulo 6—Conclusão e Perspectivas		115

Apêndice A—Geometria Diferencial	117
A.1 Definições Gerais	117
A.2 Seções Espaciais	119
A.2.1 Relações com a Geometria da Variedade	121
A.2.2 Comutador das Derivadas Espaciais e Temporais	123
A.3 Isometrias	125
A.3.1 Espaços Homogêneos	125
Apêndice B—Tensor energia–momento	128
B.1 Decomposição do Fluido	128
B.2 Hidrodinâmica Relativística	129
B.3 Teoria Cinética Relativística	131
B.4 Princípio Variacional: Fluido Perfeito em Equilíbrio	134
Apêndice C—Perturbações na Métrica	136
C.1 Cinemática dos Campos Vetoriais	137
C.2 Curvatura da Métrica Perturbada	140
C.2.1 Projeção Tempo–Tempo	141
C.2.2 Projeção Tempo–Espaço	142
C.2.3 Projeção Espaço–Espaço	143
C.2.4 Escalar de Curvatura	144
C.2.5 Tensor de Einstein	144
C.3 Curvatura das Hipersuperfícies	145
C.4 Perturbações no Tensor Energia–Momento	147
Apêndice D—Formalismo Lagrangiano para a Gravitação	150
D.1 Determinante da Métrica	150
D.1.1 Expansão do Determinante	150
D.1.2 Derivada do Determinante	151
D.2 Lagrangiana da Gravitação	152
D.2.1 Decomposição em Hipersuperfícies	155
D.2.1.1 Métrica de Fundo Homogênea e Isotrópica	156
D.3 Lagrangiana da Matéria	160
D.3.1 Fluido Perfeito Termodinâmico	163
D.3.1.1 Métrica de Fundo Homogênea e Isotrópica	165
D.4 Lagrangiana Total	168
D.4.1 Equações de Movimento	170
Apêndice E—Funções Especiais	172
E.1 Função Gama	172
E.2 Funções de Bessel	172

E.3 Funções Hipergeométricas de Gauss	173
Bibliografia	175
Índice Remissivo	181

LISTA DE FIGURAS

2.1	Trajetória $q(\tau)$ de um fóton emitido em $q(\tau_e)$ no instante $t_e = t(\tau_e)$ e observado em $q(\tau_0)$ no instante $t_0 = t(\tau_0)$. Projetando essa trajetória na seção Σ_{t_0} , temos que $d(t_0)$ representa a distância entre o emissor e o observador medida nessa hipersuperfície. As linhas cinzas verticais representam as trajetórias $\gamma_t(q_\tau)$ dos observadores isotrópicos e o campo w^μ a tangente à trajetória projetada em Σ_{t_0}	14
5.1	Espectro de potências P_ζ normalizado por $P_{\zeta 0} \equiv P_\zeta(\tilde{k}_a = 10^{-3})$. O espectro começa invariante de escala e, quando as soluções congelam, <i>i.e.</i> , param de oscilar, na transição entre fluidos o índice espectral muda para $n_s = 3$. Nesse cálculo, usamos dois valores distintos para a densidade de radiação $\Omega_{r0} = 10^{-5}$ e $\Omega_{r0} = 10^{-6}$, e os parâmetros $\Omega_{m0} = 0.25$, $c_s = \sqrt{w} = 10^{-9}$, e $x_b = 10^{30}$	112
5.2	Evolução de $\sqrt{P_\Psi}$ e $\sqrt{P_\zeta}$ para modos $\tilde{k}_a \in [10^{-3}, 10^3]$. Os modos que congelam ainda na dominação da poeira têm um espectro quase invariante de calibre ($n_s \gtrsim 1$). Para \tilde{k}_a a partir de um certo valor, os modos têm um espectro com $n_s = 3$ e portanto há um maior espaçamento entre as linhas. Nesse cálculo utilizamos os seguintes valores para os parâmetros: $\Omega_{m0} = 0.25$, $\Omega_{r0} = 10^{-5}$, $c_s = \sqrt{w} = 10^{-9}$, e $x_b = 10^{30}$	114

GLOSSÁRIO

c

Velocidade da luz no vácuo. 7–16, 21, 31, 32, 52, 54, 63–66, 69–71, 73, 79, 80, 82, 88, 90, 93, 111, 131–133, 137

Λ CDM

Λ *Cold Dark Matter*. 2, 17, 18

∂_{ct}

Derivada de Lie na direção normal. 9, 10, 12, 15, 33, 35–38, 40, 42, 43, 48–52, 54, 55, 63, 73, 75–78, 81, 82, 93, 121, 123, 124, 127, 129, 130, 132, 134, 141, 143, 144, 147, 155–157, 166–171

FLRW

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. 9, 15, 17, 28, 29, 32, 33, 35, 38, 42, 44, 47, 55, 83, 98, 115, 116, 132, 133, 137, 156, 165–167

G

Constante gravitacional. 7, 125–127

h

Constante de Hubble adimensional, $H_0/(100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1})$. 15, 71, 93

H_0

Constante de Hubble, $H(t_0)$. 15, 17

\hbar

Constante de Planck sobre 2π . 13

k_B

Constante de Boltzmann. 15, 16, 132, 133

κ

Constante de proporcionalidade da Relatividade Geral, $8\pi G/c^4$. 7, 11, 13, 16, 42, 43, 46–50, 54, 55, 63–66, 69, 73–82, 90, 94, 98, 111, 160, 162, 168–171

κ_*

Constante de proporcionalidade das equações de Friedmann, $c^2\kappa/3 = 8\pi G/(3c^2)$. 11, 16

- l_p
Comprimento de Planck, $\sqrt{c\kappa\hbar}$. 24, 68, 70, 71, 92–95, 99, 107, 110, 111, 115
- Λ
Constante cosmológica. 7, 16, 17, 42, 58
- M
Variedade que representa o espaço-tempo. 7, 9, 12, 29–32, 84, 117, 119, 121–123, 125
- m_e
Massa do elétron. 16
- Mpc
Mega Parsec. 10, 24
- Ω_b
Densidade de bárions. 16
- Ω_c
Densidade de matéria escura fria. 16
- Ω_γ
Densidade de radiação eletromagnética. 16
- Ω_k
Densidade associada à curvatura $-c^2\tilde{K}/(a^2H_0^2)$. 16–18, 21, 22, 24, 26, 58, 72, 73, 94–99, 103, 104, 107, 115
- Ω_Λ
Densidade associada à constante cosmológica $c^2\Lambda/(3H_0)$. 16, 17, 19, 21, 58, 72, 73
- Ω_m
Densidade total de poeira. xi, 16–19, 21, 23, 24, 72, 73, 107, 108, 112, 113
- Ω_ν
Densidade de neutrinos. 16
- Ω_r
Densidade total de radiação. xi, 16–19, 22–25, 72, 73, 93, 107, 108, 112, 113
- \tilde{R}_H
Raio de Hubble conforme, R_H/a_0 . 15–17, 19–25, 59, 73, 93–95, 99–102, 104, 106–108, 110, 111, 115
- RCF**
Radiação Cósmica de Fundo. 1, 6, 16, 18, 19, 21–23, 27, 28, 92, 97, 108

RG

Relatividade Geral. 1, 2, 6, 7, 9, 17, 20, 24, 27, 128

 ρ_c

Densidade crítica, H^2/κ_* . 16, 22, 94

 Σ

Subvariedade que representa uma secção do espaço-tempo. 12, 14, 15, 119–121, 125

 $\tilde{\Sigma}$

Subvariedade que representa a secção espacial conforme do espaço-tempo. 12, 51, 79, 83–86

 x

Variável desvio para o vermelho, $1 + z = a_0/a$. 14–17, 19–26, 48–50, 58–61, 70–73, 93–96, 100–104, 106–113, 115, 133

 z

Desvio para o vermelho. 14

O modelo cosmológico padrão, que remonta desde uma fase quente no passado, onde o fluido dominante era o de radiação, até o presente, é bem sucedido em explicar uma série de observações como: a expansão do universo, abundância de elementos leves, Radiação Cósmica de Fundo (RCF), estrutura em grande escala, entre outras.¹ Contudo, esse modelo diz respeito somente a uma fração da evolução do universo e envolve algumas escolhas especiais para as condições iniciais. Para abordar a fase não descrita pelo modelo padrão e os problemas relacionados com as escolhas especiais de condições iniciais, o paradigma mais usado é o da inflação [4, 5]. Vale ressaltar que existem duas classes de problemas, os que se referem à evolução média do universo, como o da planezza e do horizonte, e os que se referem às perturbações em torno da média, como a estatística das condições iniciais dessas. No contexto da inflação, as perturbações são geradas a partir das flutuações quânticas do vácuo durante a fase de expansão acelerada (quase de Sitter) [6–8]. Do ponto de vista observacional, as condições iniciais previstas pela inflação podem ser testadas, *e.g.*, utilizando a RCF [9], obtém-se uma boa concordância.

No entanto, o modelo inflacionário possui algumas limitações. A escala de energia e o momento da evolução do universo em que a inflação ocorre tornam virtualmente impossível uma observação direta. Além disso, foi mostrado que no contexto inflacionário obtém-se necessariamente um espaço-tempo geodeticamente incompleto no passado, *i.e.*, singular, a não ser que seja adicionado um outro mecanismo [10]. O problema da homogeneidade não é completamente resolvido já que ela requer a homogeneidade em uma pequena fração causalmente conexa do universo primordial, como discutido, por exemplo, em [2]. Portanto, como todo suporte observacional da inflação vem das suas consequências nas condições iniciais, qualquer outro mecanismo que resulte nas mesmas condições iniciais deve ser considerado.

Entre as alternativas ao período inflacionário estão os modelos com uma transição não singular entre uma fase de contração e uma de expansão, a qual chamamos de ricochete. Entre as possíveis implementações de mecanismos que geram o ricochete estão os modelos de gravitação semi-clássica, nos quais consideram-se campos quânticos evoluindo em um cenário de Relatividade Geral (RG). Esses modelos incluem correções vindas do valor esperado do tensor energia-momento [11] e são conhecidos por abrigar, entre outras, soluções que evitam a singularidade [7, 12]. Mesmo sendo uma aproximação, esses modelos são baseados na RG e na teoria quântica de campos, que são teorias bem estabelecidas em seus campos de aplicação. Portanto, espera-se que, mesmo não sendo uma teoria final, o cenário semi-clássico descreva corretamente um sistema com energia abaixo da escala de Planck onde somente os efeitos quânticos dos campos precisam ser considerados. Da

¹Essas observações e a abordagem do modelo padrão para explicá-las podem ser encontradas na maioria dos livros texto de cosmologia, *e.g.*, [1–3].

mesma forma, modelos de gravitação baseados na quantização canônica via equação de Wheeler–DeWitt [13] também possuem soluções de universo eterno [14–16]. Nesses modelos a gravitação e os campos de matéria são quantizados num contexto simplificado de mini-superespaço, considerando-se somente os graus de liberdade de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, e podem ser aplicados a escalas de energia próximas a de Planck. Nos modelos de gravitação quântica via *Loop Quantum Gravity*, a gravitação se torna repulsiva em certas escalas e também resulta, de forma razoavelmente geral, em mecanismos de ricochete [17, 18].

Além de resolver o problema da singularidade inicial por construção, os modelos com ricochete também podem resolver os mesmos problemas que a inflação e até produzir condições iniciais compatíveis com observações. Por exemplo, na Ref. [19] é descrito um modelo com ricochete causado por efeitos de gravitação quântica e a quantização interpretada via teoria de Bohm [20]. Colocando condições iniciais de vácuo no infinito passado, obtêm-se um espectro quase invariante de escala no período de expansão com índice espectral $n_s = 1 + 12w/(1 + 3w)$, onde w é a equação de estado do fluido dominante quando termina o período oscilatório dos modos (congelam). Esse resultado foi obtido em uma série de diferentes contextos em [21–24]. Esse parâmetro está qualitativamente de acordo com os ajustes para modelos inflacionários, quando impomos $w \approx 0$. Porém, nenhum teste estatístico direto e totalmente auto-consistente desses modelos foi realizado até hoje. O que se tem feito é comparar parâmetros ajustados no contexto do modelo Λ *Cold Dark Matter* (Λ CDM), e.g., o índice espectral n_s ajustado usando o modelo Λ CDM tem seu valor comparado com o índice espectral dos modelos com ricochete. Portanto, para comparar de forma objetiva esses modelos de universo eterno com os inflacionários, precisamos do desenvolvimento completo de suas previsões teóricas para poder confrontá-los com os dados observacionais.

Neste trabalho iremos estudar modelos com ricochete com o intuito de obter, nesse contexto, as condições iniciais para o modelo padrão de cosmologia, assim como é feito no contexto da inflação. Para tanto, faremos um estudo abrangente das perturbações cosmológicas em um universo em contração com um ou mais fluidos. Analisando as possíveis condições iniciais e o formato que o espectro das perturbações assume quando congela. Dessa forma, comparando com o espectro esperado, podemos determinar qual é o conteúdo de matéria viável para esse tipo de modelo. Estudaremos também os efeitos do ricochete na forma e na amplitude do espectro. É importante determinar em quais limites as perturbações permanecem pequenas de forma a servir como condições iniciais à fase de expansão.

Nos modelos de ricochete que iremos considerar, a evolução das perturbações começa com suas condições iniciais colocadas em um ponto no passado onde podemos considerar um universo grande e rarefeito. Nesse ponto supomos que todas as perturbações existentes são dissipadas com o inverso do fator de escala e, portanto, podem ser desprezadas. Supomos também que nessa fase inicial o universo será aproximadamente homogêneo e isotrópico e, como no caso da inflação, as flutuações quânticas do vácuo dos campos de matéria são diferentes de zero e são entendidas como fonte das perturbações iniciais do universo. Para estudar esses modelos, supomos a RG como teoria vigente nas regiões longe do momento de transição contração/expansão. Logo, dadas nossas suposições, na

região das condições iniciais o universo será descrito pelas equações de Friedmann, descritas no Capítulo 2. Como as soluções desse sistema não são, em geral, invariantes por translação temporal,² discutiremos o mecanismo de escolha de vácuo que consiste em utilizar soluções aproximadamente invariantes (adiabáticas) para definir os operadores de criação e aniquilação. Como mecanismo de ricochete, utilizaremos a teoria de Bohm para descrever uma trajetória para o fator de escala associada à função de onda do universo. A quantização é feita via equação de Wheeler–DeWitt [20]. Contudo, mostraremos também que com alguns argumentos de continuidade é possível estudar a transição das perturbações durante o ricochete, sem especificar o mecanismo que o causa.

No Capítulo 2 estudaremos os modelos homogêneos e isotrópicos obtendo as restrições na métricas advindas de tais simetrias e, conseqüentemente, as equações de movimento. Nele faremos uma breve revisão de alguns aspectos do modelo padrão da cosmologia, tais como distâncias cosmológicas e desvio para o vermelho, assim como os problemas do modelo padrão e as soluções via período inflacionário e período de contração. Completando a análise clássica, no Capítulo 3 estudaremos modelos aproximadamente homogêneos e isotrópicos de forma que a diferença entre esses modelos e o de Friedmann (modelo de fundo) possa ser tratada perturbativamente. Porém, como essa subtração não é única, analisaremos a liberdade associada à escolha de inserção do modelo de Friedmann, chamada liberdade de calibre. Mostraremos também que essas perturbações podem ser decompostas em quantidades que evoluem de forma independente. A ambiguidade na inserção do modelo de fundo pode ser evitada utilizando variáveis que são invariantes em relação a essa escolha. Portanto, deduziremos essas variáveis invariantes de calibre e também suas relações com as perturbações nas diferentes escolhas de calibre. Por fim, abordaremos a questão de como determinar objetivamente quando a evolução das perturbações é compatível com a hipótese perturbativa. Com isso, mostraremos que existem soluções para as perturbações onde alguns calibres são apropriados e outros que não podem ser usados.

Uma vez determinados os graus de liberdade, tanto do modelo de fundo quanto das perturbações, no Capítulo 4 trataremos da quantização desses modelos. Como parte original desse trabalho, determinaremos a álgebra dos parênteses de Poisson dos graus de liberdade do modelo de Friedmann no caso onde a matéria é descrita por um fluido perfeito termodinâmico. Nesse ponto nos restringiremos ao caso de fluidos barotrópicos em universos planos, onde faremos uma digressão sobre algumas escolhas de funções de onda para o modelo de fundo assim como as trajetórias de Bohm resultantes para cada caso. Para as perturbações, trataremos o caso no qual o modelo perturbado também é o de um fluido perfeito termodinâmico geral. Determinaremos a Lagrangiana total das perturbações gravitacionais e do fluido assim como a redução dos graus de liberdade usando os vínculos da teoria. Nessa análise faremos toda a redução dos vínculos sem utilizar as equações de fundo, estendendo os resultados da literatura onde isso é feito no caso particular de universos de Friedmann planos e com fluidos barotrópicos [20, 25]. Dessa Lagrangiana encontraremos a álgebra de Poisson para as perturbações e discutiremos sua quantização. Nessa discussão consideraremos o caso geral onde o fluido é arbitrário, de

²Os modelos de Friedmann não possuem campos de Killing tipo tempo.

forma que as perturbações de entropia e gravitacionais estão acopladas. Esse estudo também amplia a literatura atual ao considerar essa quantização conjunta. Mostraremos também que a Lagrangiana utilizada na literatura não é apropriada para o caso onde as seções espaciais não são planas. Finalmente falaremos brevemente da função de correlação de dois pontos e como essa função define o espectro de potências.

No Capítulo 5 usaremos as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores para desenvolver de forma completa a evolução das perturbações em modelos com ricochete. Para o modelo específico de ricochete, usaremos as trajetórias de Bohm resultantes de um modelo de fundo quantizado onde o fluido que domina é o de radiação, determinando as possíveis escalas que podem ser atingidas ainda na quantização via equação de Wheeler–DeWitt. Para as perturbações mostraremos que um universo inicialmente dominado por um fluido, com curvatura espacial arbitrária, gera um espectro quase invariante de escala para uma faixa de valores dos modos. Mostraremos também que no limite onde a curvatura vai a zero recuperamos os resultados do caso plano, já estudado na literatura. Deduziremos uma solução aproximada em série de potências para as perturbações e veremos quais são as condições de aplicação dessa aproximação. Para evoluir as perturbações através do ricochete, consideraremos o caso específico das trajetórias de Bohm e também mostraremos que podemos obter o espectro na fase de expansão dadas algumas condições gerais de continuidade e suposições sobre as equações de movimento das perturbações. Concluindo, faremos um estudo numérico da evolução das perturbações, confirmando os resultados aproximados e estendendo aos casos onde as perturbações são formadas em fases onde dois fluidos são relevantes.

Como parte adicional desse trabalho, no Apêndice A mostraremos alguns resultados básicos de geometria diferencial que usaremos no trabalho e uma breve discussão sobre espaços homogêneos a fim de determinar quais imposições às simetrias consideradas podem restringir a forma da métrica. Faremos esse estudo de forma covariante e evitando utilizar coordenadas quando possível. Esse esforço é também estendido a todo o resto do trabalho, pois é da opinião do autor que a introdução de coordenadas pode complicar desnecessariamente os resultados. No Apêndice B estudaremos as possíveis escolhas de tensor energia–momento a serem usados no trabalho. Nesse apêndice, assim como no trabalho, focaremos no caso onde o tensor energia–momento é o de um fluido, discutindo rapidamente uma possível origem cinemática e casos onde existe dissipação. Falaremos também sobre a inexistência de equilíbrio termodinâmico para a maioria dos constituintes. Como a dedução das equações de movimento do fluido via princípio variacional é essencial para a quantização do sistema, ainda nesse apêndice analisaremos um método proposto por Schutz (1970) [26], o qual usaremos no trabalho.

No Apêndice C faremos uma digressão detalhada de perturbações em torno de métricas arbitrárias, não necessariamente de Friedmann, obtendo as perturbações tanto na métrica quanto nas variáveis cinemáticas (curvatura extrínseca) e curvatura das seções espaciais de um seccionamento arbitrário. E no Apêndice D estenderemos essa análise em segunda ordem nas perturbações a fim de deduzir a Lagrangiana que dá origem às equações de movimento para as perturbações. Para a matéria, discutiremos tanto o caso de um fluido termodinâmico quanto o caso geral, determinando também a Lagrangiana para o caso de modelo de fundo de Friedmann que será usado diretamente no trabalho. Finalmente, no

Apêndice E, fazemos uma lista de resultados sobre algumas funções especiais que serão usadas nesse trabalho.

CAPÍTULO 2

COSMOLOGIA HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA

Neste capítulo revisamos o modelo padrão da cosmologia, no que se refere aos modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos. Essa descrição do espaço-tempo foi introduzida inicialmente por Friedmann (1922) [27] e alguns anos depois por Lemaître (1927) [28]. Ambos estudaram tais modelos utilizando a RG aplicada a casos específicos. Posteriormente Robertson (1935) [29] e Walker (1937) [30] mostraram que a forma da métrica, que é independente da teoria de gravitação, utilizada nos trabalhos de Friedmann e Lemaître eram as únicas possíveis em universos com seções espaciais homogêneas e isotrópicas.

Na Seção 2.1 fazemos uma descrição matemática geral das implicações da homogeneidade e isotropia nos modelos de universo, mostrando o resultado dessas restrições na métrica do espaço-tempo e em seguida, na Seção 2.2, obtendo as equações de movimento resultantes. Na Seção 2.3, descrevemos a separação da métrica em uma parte constante nas hipersuperfícies espaciais vezes um fator de escala e, usando essas ferramentas desenvolvidas, na Seção 2.4 calculamos as distâncias cosmológicas assim como a variação do comprimento de onda (desvio para o vermelho) das partículas que seguem trajetórias nulas.

Nas seções citadas acima discutimos a modelagem da geometria do universo. Portanto, para completar a descrição do modelo padrão, na Seção 2.5 examinamos o efeito da homogeneidade e isotropia na caracterização do conteúdo material do universo e, conseqüentemente, nas componentes do tensor energia-momento.

As previsões desse modelo são bem sucedidas ao considerar a época atual até a nucleossíntese primordial (ver, por exemplo, [1]). No entanto, existem pontos importantes que não são explicados ou abordados pelo modelo, como as condições iniciais das perturbações, assimetria matéria anti-matéria e planeza, por exemplo. Além disso, se o modelo for extrapolado para o passado leva necessariamente¹ a uma singularidade [31].

Para resolver as questões citadas acima, pelo menos em parte, atualmente utiliza-se um mecanismo chamado inflação que consiste em uma fase de expansão quase exponencial do universo. Portanto, na Seção 2.6 analisamos de forma geral essas questões e, na Seção 2.6.4, apresentamos as soluções via período inflacionário. Finalmente, na Seção 2.6.5, mostramos como um modelo não singular que experimenta um ricochete, *i.e.*, passa de uma fase de contração para uma de expansão, também pode resolver essas questões.²

¹Os teoremas de singularidades requerem a satisfação de certas condições de energia impostas sobre o tensor energia-momento que uma vez satisfeitas mostram que a singularidade é inevitável.

²Para uma revisão sobre modelos com ricochete, veja as referências [32] e [33].

2.1 HOMOGENEIDADE E ISOTROPIA

Em geral, os modelos cosmológicos utilizam o que chamamos de Princípio Cosmológico (ou Princípio de Copérnico) em que supõe-se homogeneidade e isotropia como hipótese simplificadora. Esse princípio tem como origem as ideias de Copérnico nas quais a Terra não ocupa uma posição privilegiada no universo. Estendendo essa afirmação, dizemos que não existe nenhum ponto ou direção privilegiada no universo. Dados observacionais, como a RCF [9], estruturas em grande escala [34] e crescimento de estruturas [35], parecem confirmar essa premissa.

Para tornar essas hipóteses questões objetivas, modelamos o espaço-tempo como uma variedade quadridimensional M (veja Apêndice A para as definições utilizadas nessa seção) e, como teoria para a evolução temporal da métrica, utilizamos a RG. Nesse contexto, a gravitação é descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$ enquanto toda informação do conteúdo material e das energias de interação são descritas por um tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Dessa forma, temos que as equações de movimento (equações de Einstein) são dadas por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde Λ é uma constante, $\kappa = 8\pi G/c^4$, G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz no vácuo e o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ está definido na Eq. (A.7). O parâmetro Λ é chamado constante cosmológica. A constante cosmológica também pode ser entendida como uma adição de um componente material cujo tensor energia-momento é dado por $T_{(\Lambda)\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}/\kappa$. Nesse caso as equações de Einstein seriam

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde o tensor energia-momento que aparece do lado direito inclui também o da constante cosmológica.

Essas equações em conjunto com a identidade de Bianchi (Eq. A.11), satisfeita pelo tensor de Riemann, formam um conjunto completo de equações diferenciais parciais. Esse conjunto somado às equações de movimento dos campos de matéria fornecem um sistema no qual, dada as condições iniciais para todos esses campos, a evolução temporal da métrica é completamente determinada.³ O sistema de equações descrito acima é um sistema não linear que, em geral, envolve vários campos de matéria acoplados. Devido à complexidade desse conjunto, aplicamos os princípios de homogeneidade e isotropia antes de obter as soluções, simplificando assim, o conjunto de equações diferenciais a ser resolvido.

Para obter as restrições na métrica e no tensor energia-momento advindos da imposição do princípio cosmológico, primeiro aplicamos esse princípio para o espaço e *tempo*, que nesse contexto é conhecido como Princípio Cosmológico Perfeito. Para tanto notamos que o tensor de Riemann pode ser interpretado como um operador linear simétrico atuando no espaço dos tensores $(0, 2)$ antissimétricos (Eqs. A.8–A.10). Portanto, se esse

³Como uma condição adicional, o espaço-tempo deve ser globalmente hiperbólico para termos um sistema de condições iniciais bem posto. Para uma definição completa desses termos e a demonstração dos teoremas apropriados, ver teorema 10.2.2 da referência [36].

operador tiver autovalores distintos entre si, poderíamos utilizá-los para escolher uma direção privilegiada no espaço-tempo. Para evitar isso, o tensor de Riemann deve ser um múltiplo da identidade, *i.e.*,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} C_{[\alpha\beta]} &= K (\delta_{\mu}{}^{\alpha} \delta_{\nu}{}^{\beta} - \delta_{\mu}{}^{\beta} \delta_{\nu}{}^{\alpha}) C_{[\alpha\beta]}, \\ &= 2K C_{[\mu\nu]}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde K é uma constante arbitrária, e $C_{\mu\nu}$ é um tensor arbitrário. Com isso, o tensor de Ricci e escalar de curvatura são dados por

$$R_{\mu}{}^{\nu} = 3K \delta_{\mu}{}^{\nu}, \quad R = 12K. \quad (2.4)$$

Utilizando a Eq. (2.2), temos que nesse caso o conteúdo material é constituído somente de constante cosmológica ($T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$) ou vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$). Logo, vemos que essa imposição é muito restritiva, pois não permite a inclusão de fontes diferentes de constante cosmológica ao modelo.

Podemos relaxar essas hipóteses impondo a homogeneidade e isotropia somente em seções espaciais da variedade. Porém, não existe uma forma geral e natural de definir um seccionamento do espaço-tempo, ou seja, existem muitas formas de dividir a variedade em hipersuperfícies espaciais e não existe nenhuma razão *a priori* para escolher uma delas. Isso significa que precisamos fazer uma escolha arbitrária de seções espaciais e então impor as simetrias em cada uma delas. Contudo, essa escolha impõe uma direção arbitrária no espaço-tempo, *i.e.*, a direção normal às hipersuperfícies escolhidas. Essa direção privilegiada é consequência do fato de que na ausência de qualquer outra simetria, esse espaço-tempo descrito é homogêneo e isotrópico somente nas seções espaciais escolhidas, e qualquer outra escolha nos levaria a seções anisotrópicas e/ou inhomogêneas. Com isso, temos que mesmo entre os observadores em queda livre, *i.e.*, observadores que seguem curvas geodésicas tipo tempo, existe entre eles um conjunto especial que chamaremos de observadores isotrópicos cujas tangentes às suas trajetórias coincidem com a direção normal às hipersuperfícies.⁴

Na Seção A.3.1 fazemos a construção desse seccionamento de forma inversa. Dizemos primeiro que existe um grupo de simetrias e posteriormente definimos as seções como sendo órbitas desse grupo. Nessa construção mostramos que o campo normal n_{μ} tem norma igual a menos um, é geodésico e satisfaz $\nabla_{[\mu} n_{\nu]} = 0$. Podemos construir a função tempo ct , como discutido na Seção A.2, de forma a ser constante nas hipersuperfícies e que coincida com o tempo próprio das geodésicas $\gamma(t)$ com tangente n^{μ} , *i.e.*, $D_{\mu}ct = 0$ e $ct(\gamma(t)) = ct$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e t o tempo próprio de cada geodésica (tempo cósmico). Da primeira equação obtemos $\nabla_{\mu}ct = -n_{\mu}\nabla_n ct$ e diferenciando a segunda $n^{\mu}\nabla_{\mu}ct = 1$. Substituindo a primeira na última mostramos que

$$n_{\mu} = -\nabla_{\mu}ct, \quad (2.5)$$

o que define nossa função tempo a menos da adição de uma constante. Dessa forma, construímos o campo geodésico n^{μ} e a função tempo ct que representam o conjunto de trajetórias seguidas pelos observadores isotrópicos e o tempo próprio medido por eles.

⁴Na Seção A.3.1 mostramos que o campo normal às seções espaciais homogêneas e isotrópicas é sempre geodésico.

Para calcular os objetos referentes a essas geometrias, poderíamos partir direto da Eq. (A.51) e utilizar a estrutura do grupo de isometrias para determinar a curvatura espacial e, com isso, determinar a curvatura do espaço-tempo com as fórmulas obtidas na Seção A.2. Ao invés disso, seguiremos de forma análoga a feita para obter a Eq. (2.3), ou seja, aplicando a homogeneidade e isotropia às seções espaciais, temos que

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = K (\mathbf{h}_{\mu\alpha}\mathbf{h}_{\nu\beta} - \mathbf{h}_{\mu\beta}\mathbf{h}_{\nu\alpha}), \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} = 2K\mathbf{h}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{R} = 6K, \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{h}_{\mu\nu}$ e $\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ estão definidos nas Eqs. (A.14) e (A.18), respectivamente, e K é uma constante arbitrária em cada hipersuperfície espacial, *i.e.*, $D_\mu K = 0$. Pode-se mostrar que os espaços tridimensionais que correspondem ao tensor de Riemann descrito acima são a três esfera S^3 para $K > 0$, espaço euclidiano E^3 para $K = 0$ e espaço hiperbólico para $K < 0$. Em coordenadas hiperesféricas, as métricas que descrevem os espaços citados acima podem ser escritas de forma geral como

$$d\Sigma^2 = dr^2 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}r)}{\sqrt{-K}} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.7)$$

Podemos assim definir um sistema de coordenadas Gaussiano normal na variedade M utilizando as coordenadas hiperesféricas e a função tempo ct discutida acima. Com essa escolha, temos que $K = K(t)$ que reescrevemos como $K = K_0 a(t_0)^2 / a^2(t)$, onde K_0 representa a curvatura no instante t_0 e $a(t)$ um o fator de escala. Fazendo a mudança de variável $r = a(t)\tilde{r}$, obtemos a métrica nas hipersuperfícies espaciais,

$$d\Sigma^2 = a^2(t) \left(d\tilde{r}^2 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K_0 a_0^2 \tilde{r}})}{\sqrt{-K_0 a_0^2}} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right), \quad (2.8)$$

recuperando a forma da métrica mostrada na Eq. (A.51). Finalmente, temos que a métrica na variedade M nessas coordenadas é

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(d\tilde{r}^2 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K_0 a_0^2 \tilde{r}})}{\sqrt{-K_0 a_0^2}} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right). \quad (2.9)$$

Essas são as conhecidas métricas de Friedmann–Lamaître–Robertson–Walker (FLRW) e representam todos os possíveis espaço-tempo com seções homogêneas e isotrópicas.

2.2 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Ao impor as simetrias nas hipersuperfícies espaciais, como discutido na Seção 2.1, reduzimos o número de componentes a serem determinadas e, utilizando a RG, procedemos de forma a obter as equações de movimento para os graus de liberdade não fixados. Notamos primeiro que a métrica para os universos espacialmente homogêneos e isotrópicos (Eq. A.51) divide-se na multiplicação de um fator de escala, que depende somente do tempo, vezes um tensor invariante sobre a ação do grupo de isometrias. Dessa forma

podemos definir uma métrica conforme $\tilde{h}_{\mu\nu} = \delta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$ que é constante ao longo das hipersuperfícies, *i.e.*, $\partial_{ct}\tilde{h}_{\mu\nu} = 0$, com isso, a métrica das seções espaciais é $h_{\mu\nu} = a^2(t)\tilde{h}_{\mu\nu}$.

A métrica discutida acima simplifica também a forma da curvatura extrínseca, a qual, utilizando a Eq. (A.22), é dada por

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} = \frac{\Theta h_{\mu\nu}}{3} = \frac{\dot{a}}{a} h_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$\Theta = 3\frac{\dot{a}}{a} = 3\frac{H}{c}, \quad (2.11)$$

onde definimos a função de Hubble,⁵ *i.e.*, $H = c\dot{a}/a$. Nesse caso a curvatura extrínseca satisfaz $D_\mu \mathcal{K}_{\alpha\beta} = 0$. Dado esse resultado, usamos a identidade de Bianchi projetada (Eq. A.34) e o tensor de Ricci das hipersuperfícies, como mostrado na Eq. (2.6), para obtermos a relação entre a curvatura espacial K a o fator de escala a ,

$$\dot{K} + \frac{2K\Theta}{3} = 0, \quad (2.12)$$

e por conseguinte, integrando essa equação, obtemos

$$K = K_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2, \quad (2.13)$$

onde usamos as quantidades com o subscrito $_0$ para representar as mesmas calculadas no instante t_0 , *i.e.*, para uma função qualquer do tempo $f(t)$, $f_0 \equiv f(t_0)$, e o instante t_0 representa a época atual.

Para seções espaciais não planas ($K_0 \neq 0$), é comum associar o fator de escala ao raio de curvatura hoje $R_0 \equiv \sqrt{1/|K_0|}$. Se escolhermos o fator de escala com unidade de comprimento, podemos escolher esse fator hoje como sendo exatamente igual ao raio de curvatura $R_0 = a_0$ e, dessa forma, $|K_0 a_0^2| = 1$. No caso onde trabalhamos com o fator de escala adimensional, precisamos escolher arbitrariamente a unidade, por exemplo, fazendo $R_0 = a_0$ Mpc, obtemos $|K_0 a_0^2| = 1$ Mpc. Em ambos os casos normalmente define-se uma variável $\tilde{K} = K_0 a_0^2$ que é igual a $-1, 0, 1$ para o caso hiperbólico, plano e esférico, respectivamente, enfatizando que \tilde{K} tem unidade de inverso de comprimento quadrado quando a é adimensional. Com as definições acima temos que a curvatura quando o fator de escala é igual a unidade é $K(a=1) = K_0 a_0^2 = \tilde{K}$, ou seja, o raio de curvatura é igual a unidade na hipersuperfície conforme.

É conveniente calcular o tensor de Riemann e todos os tensores derivados dele para essas geometrias. Usando as Eqs. (A.32), (A.36) e (A.37) em conjunto com a Eq. (2.10)

⁵O operador $\dot{} \equiv \partial_{ct}$ está definido na Eq. (A.23).

temos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = 2 \left(K + \frac{\Theta^2}{9} \right) h_{\mu[\alpha} h_{\nu]\beta} + 4 \left(\frac{\dot{\Theta}}{3} + \frac{\Theta^2}{9} \right) n_{[\mu} h_{\nu][\alpha} n_{\beta]}, \quad (2.14)$$

$$R_{\mu\alpha} = \left(2K + \frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3} \right) h_{\mu\alpha} - \left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} \right) n_{\mu} n_{\alpha}, \quad (2.15)$$

$$R = 6K + 2\dot{\Theta} + \frac{4\Theta^2}{3}, \quad (2.16)$$

$$G_{\mu\alpha} = - \left(K + \frac{2\dot{\Theta}}{3} + \frac{\Theta^2}{3} \right) h_{\mu\alpha} + \left(3K + \frac{\Theta^2}{3} \right) n_{\mu} n_{\nu}. \quad (2.17)$$

Substituindo as expressões acima na Eq. (A.13), vemos que o tensor de Weyl é nulo, *i.e.*,

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (2.18)$$

Podemos verificar que as simetrias das seções espaciais impõem uma restrição no tensor energia–momento. Partindo das equações de Einstein (Eq. 2.2) e projetando-as nas diferentes direções, temos

$$\kappa h [T_{\mu\nu}] = h [G_{\mu\nu}] = - \left(K + \frac{2\dot{H}}{c} + \frac{3H^2}{c^2} \right) h_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

$$\kappa h [T_{\mu n}] = h [G_{\mu n}] = 0, \quad (2.20)$$

$$\kappa T_{nn} = G_{nn} = 3K + \frac{3H^2}{c^2}, \quad (2.21)$$

onde o subscrito n representa a contração do índice com o campo normal, como definido na Eq. (A.16). Partindo das equações acima obtemos $h [T_{\mu\nu}] \propto h_{\mu\nu}$ e $h [T_{\mu n}] = 0$. Essas duas condições restringem a forma do tensor energia–momento à de um fluido perfeito, *i.e.*,

$$T_{\mu\nu} = \rho n_{\mu} n_{\nu} + p h_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$T = -\rho + 3p, \quad (2.23)$$

onde $\rho \equiv \rho(t)$ é a densidade de energia e $p \equiv p(t)$ a pressão isotrópica observadas no referencial definido por n^{μ} . Com isso, temos que a equação projetada na direção $n^{\mu} n^{\nu}$ e o traço fornecem,

$$H^2 = \kappa_* \rho - \frac{c^2 \tilde{K}}{a^2}, \quad (2.24)$$

$$c\dot{H} + H^2 = c^2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa_*}{2} (\rho + 3p), \quad (2.25)$$

onde definimos uma nova constante $\kappa_* \equiv c^2 \kappa / 3$. As equações acima são chamadas equações de Friedmann [27]. A primeira equação funciona como um vínculo para as

condições iniciais do sistema, no entanto, nos regimes onde a função de Hubble não muda de sinal, ela pode ser usada para calcular a evolução temporal do fator de escala. É conveniente obter essas equações em função de Θ , *i.e.*,

$$\frac{\Theta^2}{3} = \kappa\rho - 3K, \quad (2.26)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{3\kappa}{2}(\rho + p) + 3K. \quad (2.27)$$

Usando a identidade de Bianchi contraída (Eq. A.12) e as equações de Einstein, temos que o tensor energia–momento deve satisfazer

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

Aplicando essa condição ao tensor energia–momento definido acima, temos

$$\nabla_\mu(\rho n^\mu n^\nu + p h^{\mu\nu}) = (\dot{\rho} + \Theta(\rho + p))n^\nu = 0,$$

e, lembrando que $c\Theta = 3H$,

$$c\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.29)$$

Vale ressaltar que essa equação pode ser obtida diretamente das Eqs. (2.24–2.25) e, portanto, não representa uma equação de movimento independente.

2.3 DESCRIÇÃO CONFORME

Como discutimos acima, a métrica das hipersuperfícies espaciais $h_{\mu\nu}$ pode ser decomposta no quadrado do fator de escala a^2 vezes uma métrica conforme $\check{h}_{\mu\nu}$ igual em todas as seções. Definimos a seção espacial conforme $\check{\Sigma}$ e usamos o adjetivo conforme para nos referirmos às quantidades calculadas nessa seção espacial.

A inversa da métrica conforme $\check{h}_{\mu\nu}$ é dada por $\check{h}^{\mu\nu} \equiv a^2 h^{\mu\nu}$ (e não simplesmente levantando os índices de $\check{h}_{\mu\nu}$) e, com isso, $\check{h}_{\mu\alpha}\check{h}^{\alpha\nu} = h_\mu{}^\nu$. Podemos verificar facilmente que a inversa também é constante nas seções espaciais, *i.e.*,

$$\dot{\check{h}}^{\mu\nu} = \partial_{ct}(a^2 h^{\mu\nu}) = \frac{2\dot{a}}{a}\check{h}^{\mu\nu} - 2a^2 \mathcal{K}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Podemos estender essa ideia e encontrar um conjunto de campos (co)vetoriais a fim de decompor a métrica em M , $g_{\mu\nu} = a^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$. Para tanto definimos o campo vetorial $\check{n}^\mu = a n^\mu$ e o campo de covetores $\check{n}_\mu = a^{-1} n_\mu$ de forma que $\check{n}^\mu \check{n}_\mu = -1$. Usando esses campos, escrevemos a métrica e sua inversa,

$$g_{\mu\nu} = a^2(\check{h}_{\mu\nu} - \check{n}_\mu \check{n}_\nu) \equiv a^2 \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

$$g^{\mu\nu} = a^{-2}(\check{h}^{\mu\nu} - \check{n}^\mu \check{n}^\nu) \equiv a^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Como mostramos acima, $\dot{\check{h}}^{\mu\nu} = 0 = \dot{\check{h}}_{\mu\nu}$, e é fácil verificar que o fluxo gerado por \check{n}^μ também deixa as métricas conformes em Σ invariantes, *i.e.*, $\mathcal{L}_{\check{n}}\check{h}^{\mu\nu} = 0 = \mathcal{L}_{\check{n}}\check{h}_{\mu\nu}$. Além

disso, temos que $\mathcal{L}_{\check{n}}\check{n}^\mu = 0 = \mathcal{L}_{\check{n}}\check{n}_\mu$ e dessa forma as métricas conformes em M são constantes em relação ao fluxo \check{n}^μ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{\check{n}}\check{g}_{\mu\nu} = 0 = \mathcal{L}_{\check{n}}\check{g}^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Existe ainda uma outra vantagem associada à existência do campo vetorial \check{n}^μ : a derivada de Lie da métrica é proporcional à mesma,

$$\mathcal{L}_{\check{n}}g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\check{n}_{\nu)} = 2(-\dot{a}n_\mu n_\nu + a\mathcal{K}_{\mu\nu}) = 2\dot{a}g_{\mu\nu}.$$

Portanto, o campo \check{n}^μ é um campo de Killing conforme (ver Wald [36]) e, dessa forma, produz uma quantidade conservada ao longo de cada geodésica nula,⁶ *i.e.*, dada uma geodésica nula com tangente w^μ , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_w(w^\mu\check{n}_\mu) &= w^\mu w^\alpha \nabla_\alpha \check{n}_\mu = w^\mu w^\alpha (-\nabla_\mu \check{n}_\alpha + 2\dot{a}g_{\mu\alpha}), \\ \nabla_w(w^\mu\check{n}_\mu) &= \nabla_u a w^\mu w^\alpha g_{\mu\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A coordenada ct associada ao campo vetorial via Eq. (2.5) é simplesmente o tempo próprio medido pelos observadores isotrópicos descritos por n^μ . Da mesma forma, definimos o tempo conforme $\eta \equiv \eta(t)$ associado ao campo covetorial $\check{n}_\mu = -\nabla_\mu \eta = \dot{\eta}n_\mu$.⁷ Portanto, a coordenada η é dada por $\dot{\eta} = 1/a$ e, com isso,

$$\eta - \eta_0 = c \int_{t_0}^t \frac{dt}{a}. \quad (2.35)$$

A derivada de Lie na direção \check{n}^μ , em um sistema de coordenadas no qual usamos o tempo conforme, representa a derivada parcial em relação a essa coordenada. Nesse trabalho usaremos o símbolo $' \equiv \mathcal{L}_{\check{n}}$ para representá-la e definimos também a função de Hubble conforme como,

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}, \quad (2.36)$$

onde

$$\mathcal{H}^2 = a^2 \frac{\kappa}{3} \rho - \tilde{K}, \quad \Theta = \frac{3\mathcal{H}}{a}. \quad (2.37)$$

2.4 DESVIO PARA O VERMELHO E DISTÂNCIAS COSMOLÓGICAS

Como vimos na Seção 2.2, a métrica evolui temporalmente a partir de um fator de escala. Uma forma direta de observar tal modificação é através da alteração do comprimento de onda dos fótons. Suponha que uma galáxia emite um fóton no instante t_e e com quadrimomento nulo dado por p^μ ,⁸ de forma que quando medido por um observador isotrópico em um instante qualquer t_0 tem número de onda $k(t_0) = p^\parallel/(\hbar c)$, onde $p^\parallel \equiv -n^\mu p_\mu$ e \hbar é a constante de Planck.

⁶Chamamos de geodésica nula a curva geodésica cujo vetor tangente w^μ é do tipo nulo.

⁷O sinal de menos na relação entre η e \check{n}_μ vem da escolha de assinatura, ver Eq. (2.5).

⁸Estamos desprezando qualquer velocidade peculiar que a galáxia ou a Terra possa ter em relação aos observadores isotrópicos.

Como os fótons seguem geodésicas nulas, a quantidade

$$p_\mu \tilde{n}^\mu = -p^\parallel(t_e) a(t_e)$$

é constante ao longo da trajetória (ver Eq. 2.34) e, portanto, o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ medido por um observador na Terra em um instante t_0 é dado por

$$\lambda(t_0) = \lambda(t_e) x(t_e),$$

onde, por conveniência, definimos a variável $x(t_e) = a_0/a(t_e)$. Se conhecermos o espectro emitido pela galáxia, observaremos o mesmo modificado por um desvio

$$\frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} = x(t_e) - 1 \equiv z. \quad (2.38)$$

No caso de um universo em expansão, temos que $a(t_e) < a_0$ e portanto $z > 0$, o qual chamamos de desvio para o vermelho já que os comprimentos de onda são aumentados.

Podemos determinar a distância instantânea entre a galáxia emissora e a Terra, *i.e.*, dado um instante t_0 calculamos o comprimento da geodésica que liga a posição da galáxia e da Terra na mesma seção espacial Σ_{t_0} como mostrado na Figura 2.1.

Para isso, decompomos o quadrimomento nas componentes paralelas e perpendiculares a n^μ ,

$$p^\mu = (h^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu) p^\nu = p^\parallel n^\mu + p^\perp{}^\mu,$$

onde $p^\perp{}^\mu \equiv h[p^\mu]$. Como o quadrimomento é nulo, temos que

$$p^\mu p_\mu = -p^\parallel{}^2 + p^\perp{}^2 = 0,$$

onde $p^\perp{}^2 = p^\perp{}^\mu p^\perp{}_\mu$. Note que $p^\parallel = -p^\mu n_\mu = dt/d\tau$, onde τ é o parâmetro da trajetória q_τ do fóton. Para calcular a distância percorrida na hipersuperfície Σ_{t_0} precisamos projetar a trajetória q_τ do fóton como mostrado na Figura 2.1. Para tanto, note que $p^\perp{}^\mu$ representa o deslocamento espacial do fóton a cada instante de sua trajetória e, portanto, é necessário arrastar esse vetor ao longo das trajetórias dos observadores isotrópicos γ até a seção Σ_{t_0} , *i.e.*, dado um ponto inicial q_τ sobre a trajetória

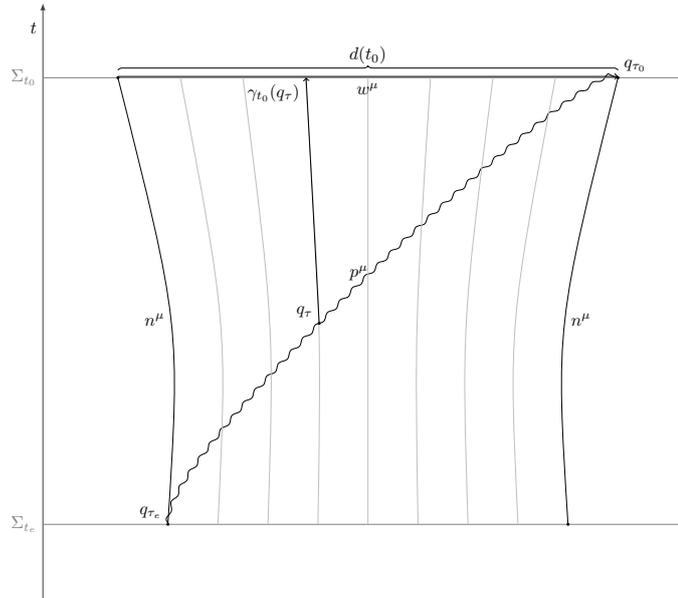


Figura 2.1 – Trajetória $q(\tau)$ de um fóton emitido em $q(\tau_e)$ no instante $t_e = t(\tau_e)$ e observado em $q(\tau_0)$ no instante $t_0 = t(\tau_0)$. Projetando essa trajetória na seção Σ_{t_0} , temos que $d(t_0)$ representa a distância entre o emissor e o observador medida nessa hipersuperfície. As linhas cinzas verticais representam as trajetórias $\gamma_t(q_\tau)$ dos observadores isotrópicos e o campo w^μ a tangente à trajetória projetada em Σ_{t_0} .

do fóton, $\gamma_{t_0}(q(t))$ representa o ponto em Σ_{t_0} da curva do observador isotrópico que no instante $t(\tau)$ estava no ponto q_τ .

A trajetória dos observadores isotrópicos $\gamma_{t_0}(q_\tau)$ define uma operação *empurrar* (como definido na Seção A.1) que utilizamos para definir $p^{\perp\mu}$ ao longo das trajetórias dos observadores isotrópicos, *i.e.*, $\gamma_{t_0}^* p^{\perp\mu}|_{q_\tau} = w^\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)}$. Como o campo vetorial w^μ é definido via operação *empurrar*, ele satisfaz a equação $\dot{w}^\mu = 0$, cuja condição inicial é dada por $w^\mu|_{q_\tau} = p^{\perp\mu}|_{q_\tau}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\nabla_n w^\mu &= \nabla_w n^\mu = w^\nu \mathcal{K}_\nu^\mu, \\ \partial_{ct} w^{\perp 2} &= 2\partial_{ct} \ln(a) w^{\perp 2}, \\ w^{\perp 2}(t) a_0^2 &= w^{\perp 2}(t_0) a(t)^2,\end{aligned}$$

onde $w^{\perp\mu} \equiv \mathbf{h}[w^\mu]$ e $w^{\perp 2} \equiv w^{\perp\mu} w^{\perp\mu}$. Aplicando a condição inicial temos

$$w^\mu w_\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)} = w^{\perp 2}|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)} = \frac{a_0^2}{a^2(t)} p^{\perp 2}(\lambda).$$

Logo, o comprimento dessa curva é dado por

$$d(t_0) = \int_{\tau_e}^{\tau_0} d\tau \sqrt{w^\mu w_\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)}} = \int_{\tau_e}^{\tau_0} d\tau \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2(t)} p^{\perp 2}(\lambda)} = ca_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.39)$$

Da mesma forma poderíamos ter calculado a distância em qualquer outra seção espacial Σ_{t_1} obtendo

$$d(t_1) = ca(t_1) \int_{t_e}^{t_1} \frac{dt}{a} \equiv a(t_1) \tilde{d}, \quad (2.40)$$

onde definimos a distância conforme como $\tilde{d} = d(t)/a$. Note também que essa distância é dada pela diferença da coordenada conforme definida na Eq. (2.35), *i.e.*, $\tilde{d} = \eta - \eta_0$. Para uma galáxia suficientemente próxima, *i.e.*, $t_e \lesssim t_0$, expandimos o fator de escala em série de Taylor em torno de t_0 ,

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) \approx \frac{H_0}{c} d(t_0) = \frac{\tilde{d}}{\tilde{R}_H}, \quad (2.41)$$

onde o valor da função de Hubble na época atual H_0 é chamado constante de Hubble e $\tilde{R}_H \equiv c/(a_0 H_0)$ define o raio de Hubble conforme. Essa relação foi primeiramente medida por Hubble [37] e medidas atuais [38] indicam que $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Como é convencional na literatura, definimos também a quantidade $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ que chamamos de constante de Hubble adimensional. Em função desse parâmetro temos o raio de Hubble hoje é aproximadamente $R_H \equiv a_0 \tilde{R}_H \approx 3000 \text{ Mpc } h^{-1}$.

2.5 MODELO PADRÃO

Para estudarmos as possíveis soluções das Eqs. (2.24–2.25), aproximamos o conteúdo material do universo usando um fluido perfeito. Como vimos na Seção B.2, nem todo

fluido perfeito representa estados em equilíbrio termodinâmico, pode haver dissipação via pressão dissipativa. No entanto, vimos na Seção B.3 que existem pelo menos dois tipos de fluidos que entram em equilíbrio termodinâmico em modelos de FLRW. Esses são caracterizados pela relação entre densidade de energia e pressão, além da evolução da temperatura. Chamamos radiação os fluidos que têm a relação $p = \rho/3$ cujas temperaturas evoluem com $T = T_0x$,⁹ e poeira aqueles com pressão $p \approx 0$ e temperatura $T = T_0x^2$. Em geral descrevemos fluidos barotrópicos (pressão depende somente da densidade de energia), onde a equação de estado $w = p/\rho$ é constante. Note porém que a aproximação de poeira vale enquanto $mc^2 \gg k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann. De forma geral obtemos, usando a Eq. (2.29), que a densidade de energia evolui como

$$\rho = \rho_0 x^{3(1+w)}. \quad (2.42)$$

Podemos usar o valor de $H^2(t)$ para definir uma densidade crítica no instante t , $\rho_c = H^2/\kappa_*$, de forma a termos necessariamente $\tilde{K} = 0$ se a densidade de energia do universo for igual à crítica. Definimos as densidades adimensionais $\Omega = \rho/\rho_{c0}$,¹⁰ e analogamente $\Omega_k = -R_H^2 K$ e

$$\Omega_{k0} = -R_H^2 K_0 = -\tilde{R}_H^2 \tilde{K}. \quad (2.43)$$

Como vimos na Eq. (2.1), a constante cosmológica pode ser descrita como um fluido com tensor energia–momento

$$T_{(\Lambda)\mu\nu} = -\frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa} = \frac{c^2 \Lambda}{3\kappa_*} n_\mu n_\nu - \frac{c^2 \Lambda}{3\kappa_*} h_{\mu\nu},$$

ou seja, um fluido com $\rho = c^2 \Lambda/3\kappa_*$ e $p = -\rho$ e, portanto, $w = -1$. Usando essa equação de estado na Eq. (2.42) vemos que ρ é constante como esperávamos e, de forma similar ao que fizemos para os fluidos, definimos a densidade $\Omega_{\Lambda 0} = R_H^2 \Lambda/3$.

No modelo padrão, o universo é descrito como contendo uma densidade Ω_{r0} de radiação, a qual leva em conta fótons $\Omega_{\gamma 0}$ e neutrinos $\Omega_{\nu 0}$ de forma que a densidade total de radiação é dada por $\Omega_{r0} = \Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\nu 0}$. A temperatura da RCF medida hoje pelo satélite COBE [9] é $T_{\gamma,0} = 2.714 \pm 0.022$ K. Portanto, temos que a temperatura da radiação é dada por $T_\gamma = T_{\gamma,0}x$. Dado que em algum momento no passado os neutrinos estavam em equilíbrio térmico com a radiação e devido sua pequena massa, podemos considerar que $T_\nu \approx T_\gamma = T_{\gamma,0}x$.¹¹ Note que essa igualdade vale enquanto a temperatura for muito maior que a massa dos neutrinos e que, após esse instante, a temperatura dos neutrinos passa a evoluir com x^2 .

Além da radiação, descrevemos o universo como contendo uma densidade de partículas frias Ω_{m0} ($mc^2 \gg k_B T$), ou seja, descrita por um fluido do tipo poeira. Essa categoria consiste na densidade de bárions¹² Ω_{b0} , que representa a matéria visível do universo, e

⁹No que isso vale tanto para partículas de massa nula, quanto para partículas cuja massa é muito menor que a temperatura, *i.e.*, $mc^2 \ll k_B T$.

¹⁰Note que na literatura alguns autores definem uma função $\Omega(t) = \rho/\rho_c$ para ρ_c também como função do tempo, enquanto aqui usamos Ω para representar a densidade em um instante arbitrário dividida pela densidade crítica hoje.

¹¹A menos de fatores numéricos ligados à estatística e Fermi–Dirac ou Bose–Einstein e *spin*.

¹²Mesmo chamada de bariônica essa densidade inclui também os léptons.

também numa densidade de matéria escura fria Ω_{c0} . Vale ressaltar que a aproximação de poeira é válida enquanto $m_e c^2 / (T_p k_B) \propto 10^9 \text{ K} / T_p \gg 1$, onde m_e representa a massa do elétron. Levando em conta que a matéria estava em equilíbrio térmico com a radiação até a recombinação, temos que desse ponto ao passado¹³ $T_p \approx T_\gamma$ e, portanto, a inequação fica da forma $x \ll 10^9 / T_{\gamma,0}$ (teríamos um limiar ainda maior se considerássemos a massa do próton). Como no momento em que esse limiar é atingido a densidade de energia total é dominada pela radiação ($\Omega_{r0} x^4 \gg \Omega_{m0} x^3$), a aproximação tipo poeira é suficiente. Outras modelagens incluem também matéria escura quente, mas aparentemente os modelos com matéria escura fria ajustam melhor os dados (para uma discussão mais completa ver [1]). Assim a densidade total de poeira é dada por $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$.

Evidências observacionais, como a relação distância por desvio para o vermelho das supernovas tipo Ia [39], indicam que o universo está em uma fase de expansão acelerada. Isso pode ser explicado por uma constante cosmológica Λ positiva diferente de zero.¹⁴ Finalmente reescrevemos a densidade total como

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = \Omega_{r0} x^4 + \Omega_{m0} x^3 + \Omega_{\Lambda 0}, \quad (2.44)$$

e a Eq. (2.24) como

$$E^2 \equiv \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \Omega_k = \Omega_{r0} x^4 + \Omega_{m0} x^3 + \Omega_{k0} x^2 + \Omega_{\Lambda 0}, \quad (2.45)$$

onde definimos a função de Hubble normalizada E que satisfaz $E(t_0) = 1$. Com essa definição o escalar de expansão é dado por

$$\Theta = \frac{3E}{R_H}. \quad (2.46)$$

O modelo representado pelas equações acima é conhecido como modelo Λ e matéria escura fria – Λ CDM. A função de Hubble conforme, quando utilizamos as definições acima, é dada por

$$\tilde{R}_H^2 \mathcal{H}^2 = \frac{E^2}{x^2} = \Omega_{r0} x^2 + \Omega_{m0} x + \Omega_{\Lambda 0} x^{-2} + \Omega_{k0}, \quad (2.47)$$

onde na última igualdade usamos o mesmo conteúdo descrito nessa seção.

2.5.1 Energia Escura e CosmoLib

Uma maneira de checar a hipótese de que o universo experimentou uma fase de expansão acelerada, em algum instante no passado, é testar se as condições de energia [31] são violadas em algum instante e se são com qual nível de confiança. Essa análise geralmente é feita utilizando um modelo cosmológico, que envolve a RG ou alguma outra teoria para a gravitação. No entanto, a escolha arbitrária de teoria de gravitação pode ser evitada.

¹³Estamos ignorando fatores numéricos de ordem um, como no caso dos neutrinos.

¹⁴Esse é atualmente um dos grandes desafios da cosmologia, identificar se essa expansão acelerada é simplesmente devido à presença de uma constante cosmológica ou de um fluido com equação de estado $p/\rho < -1/3$ ou ainda uma indicação de uma teoria de gravitação diferente da RG.

Para isso modelamos a métrica diretamente, ou seja, decomparamos os graus de liberdade da métrica em termos de funções de base. Nos trabalhos [40, 41] utilizamos a métrica de FLRW e escrevemos as condições de energia em termos da função de Hubble e da função de desaceleração,

$$q_d \equiv - \left(\frac{3\dot{\Theta}}{\Theta^2} + 1 \right).$$

Decomparamos essa última usando uma *spline* e a integramos obtendo as distâncias cosmológicas (veja Seção 2.4).¹⁵ Utilizando as medidas das distâncias das supernovas tipo Ia [42, 43] ajustamos o modelo e determinamos os erros e correlações dos seus parâmetros. Como resultado obtivemos que a condição de energia forte ($\rho + p \leq 0$ e $\rho + 3p \leq 0$) é violada com $\approx 3\sigma$ de confiança. Esse resultado mostra que independente de teoria de gravitação,¹⁶ existe uma evidência da existência de algum fenômeno que causa expansão acelerada, chamado de energia escura.

Nesse trabalho o autor desenvolveu parte da análise teórica e todo o cálculo numérico envolvido. Os algoritmos produzidos foram organizados em uma biblioteca de programação em C chamada CosmoLib. Desde então ela foi ampliada para incluir o cálculo das perturbações que descrevem a RCF. A CosmoLib implementa os seguintes conceitos usados na descrição de modelos cosmológicos:

- **CIModel:** esse objeto é utilizado para implementar uma série de funções como, por exemplo, $H(z)$, Ω_m , Ω_r , Ω_k , *etc.* Na biblioteca estão implementados alguns modelos mais comuns, como Λ CDM, XCDM,¹⁷ e CPL [44].
- **CIParam:** descreve um conjunto de parâmetros específico. Nele definem-se os valores dos parâmetros e os domínios onde estão definidos.

Para a análise estatística utilizamos os objetos:

- **CIParamsTypes:** define quais parâmetros são mantidos fixos durante a análise estatística.
- **CIData:** descreve um tipo de dado cosmológico, *e.g.*, supernovas tipo Ia, oscilações bariônicas [45]. Esse objeto também define a forma com a qual o modelo (CIModel) é comparado com os dados.
- **CIDataSet:** define um conjunto de CIData.

¹⁵Uma *spline* consiste em uma função contínua formada por polinômios de ordem n definidos em intervalos que particionam o domínio. Impõem-se continuidade na função e nas suas derivadas até ordem $n - 1$ em cada nó. Logo, uma *spline* é contínua e diferenciável até ordem $n - 1$ e é descrita em termos de $m + n - 1$ parâmetros, onde m é o número de nós no domínio.

¹⁶Note que a análise é independente de teoria de gravitação mas depende da escolha de métrica que fazemos como hipótese de trabalho.

¹⁷Modelo padrão onde a energia escura é descrita por um fluido barotrópico com equação de estado constante $w < -1/3$.

- `ClLikelihood`: define uma verosimilhança usada para definir os estimadores via princípio da máxima verosimilhança dados os objetos `ClDataSet`, `ClParamsTypes` e `ClParam`.
- `ClFit`: objeto usado para encontrar as estimativas dos parâmetros e a qualidade do ajuste, dada uma escolha entre os vários algoritmos de minimização disponíveis na `CosmoLib`. Esse objeto também implementa o cálculo da matriz de Fisher e o das regiões de confiança via razão das verosimilhanças, entre outras análises similares para a obtenção das margens de erro e correlações.

Os conceitos citados acima podem ser encontrados nas Refs. [46].

Para a utilização dos dados de RCF foram desenvolvidos os objetos,

- `ClMap`: usado na decomposição dos mapas (por exemplo, os catálogos disponibilizados pelo WMAP [9]) em termos dos coeficientes dos harmônicos esféricos.
- `ClLinearPert`: Calcula a evolução numérica das perturbações gravitacionais e das equações de Boltzmann reimplementando os programas `CMBFast` [47] e derivados (`CAMB` [48], `CMBEasy` [49, 50]) de forma a estender esses cálculos para modelos com ricochete.
- `ClThermodynRecomb`: Esse objeto implementa a recombinação fora do equilíbrio, como descrito na Ref. [51], já que evolução das perturbações depende da densidade de elétrons livres além do livre caminho médio dos fótons.

Esse conjunto de objetos reproduz os resultados dos programas `CMBFast`, `CAMB` e `CMBEasy`, contudo a extensão para universos com ricochete ainda está em andamento.

Essa biblioteca será colocada em domínio público com uma licença de software livre [52] uma vez que a análise para universos com ricochete estiver pronta.

2.5.2 Evolução Para um Único Fluido

Como visto na Eq. (2.42), a densidade de energia de um fluido com w constante tem um comportamento de lei de potência no desvio para o vermelho (fator de escala), o que permite simplificarmos a análise da evolução desses modelos. Como a potência no desvio para o vermelho de fluidos diferentes é também diferente, em geral haverá valores de x nos quais somente um fluido dominará. No caso descrito pela Eq. (2.45), por exemplo, quando $x \ll (\Omega_{\Lambda 0}/\Omega_{m 0})^{1/3}$ a função de Hubble será dada aproximadamente por aquela de um único fluido com $w = -1$, *i.e.*, $E^2 \approx \Omega_{\Lambda 0}$. Similarmente, há domínio de poeira $w = 0$ no intervalo $\Omega_{m 0}/\Omega_{r 0} \gg x \gg (\Omega_{\Lambda 0}/\Omega_{m 0})^{1/3}$ e de radiação $w = 1/3$ quando $x \gg \Omega_{m 0}/\Omega_{r 0}$.

Desta forma, podemos encontrar a evolução do fator de escala analiticamente em cada um desses intervalos em x . Usando a solução do fluido (Eq. 2.42) na Eq. (2.47), temos a seguinte evolução do fator de escala em termos da variável x e do tempo conforme,

$$x(\eta) = \left(\frac{\beta \tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{w 0} |\eta|}} \right)^\beta = \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^\beta, \quad (2.48)$$

onde $\beta \equiv 2/(1+3w)$, Ω_{w0} é a densidade adimensional do fluido em questão e a constante $\eta_0 \equiv \tilde{R}_H \beta / \sqrt{\Omega_{w0}}$ representa o tempo conforme no qual o fator de escala é igual a a_0 ($x = 1$). Escolhemos a constante de integração de forma que $a(0) = 0$ para $w > -1/3$ e $a(0) = \infty$ para $w < -1/3$. Durante essa fase a função de Hubble conforme é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\sqrt{\Omega_{w0}} \eta_0}{\tilde{R}_H \eta} = \frac{\sqrt{\Omega_{w0}} \eta}{\tilde{R}_H |\eta|} x^{1/\beta}, \quad (2.49)$$

onde o termo $\eta/|\eta|$ representa o sinal da coordenada temporal, que da forma que escolhemos descreve a fase de contração quando $\eta < 0$ e expansão quando $\eta > 0$.

2.6 PROBLEMAS COSMOLÓGICOS

Mesmo o modelo idealizado, descrito na Seção 2.5, sendo bem sucedido em explicar várias características do universo, há uma série de questões que não são resolvidas no seu contexto. Os problemas tratados nessa seção estão diretamente ligados a evolução do universo homogêneo e isotrópico quando consideramos somente os componentes materiais discutidos na Seção 2.5. Em geral essas questões estão ligadas ao fato de que nossa descrição do universo até aqui não provê ferramentas para descrever as condições iniciais. Logo, o máximo que podemos fazer é inferir como seria o universo no passado dada a observação do universo hoje. Além disso, como há observações de várias épocas diferentes da evolução, podemos também checar a consistência do nosso modelo.

Vale também ressaltar que esses problemas pressupõem uma extrapolação do modelo para o passado, ou seja, existem motivos observacionais e teóricos para esperarmos que essas descrições sejam válidas até um certo ponto no passado. Porém, alguns pressupostos, como a validade da RG, entre outros, deixam de ser válidos em algum ponto e qualquer previsão feita a partir daí é uma extrapolação e deve ser analisada com cuidado.

Uma questão que exemplifica bem esse ponto é a existência de uma singularidade, o chamado *Big Bang*. Mesmo os teoremas de singularidades garantindo a existência de tal característica na métrica, neles utilizamos a RG em um contexto onde esperamos que efeitos de gravitação quântica e renormalização do tensor energia-momento de matéria sejam dominantes. Portanto, a não ser que os teoremas de singularidade possam ser estendidos levando em conta esses efeitos, não existe nenhum motivo para afirmarmos que esse modelo leva a uma singularidade.

2.6.1 Horizonte

De partida o modelo padrão supõe que o universo é homogêneo e isotrópico. Como vimos na Seção 2.2, as simetrias do espaço-tempo impõem restrições sobre a distribuição de matéria do universo. No entanto, dentro do contexto do modelo discutido até aqui, não é possível explicar tal distribuição de matéria, ou ainda pior, como mostraremos abaixo para os conteúdos materiais discutidos na Seção 2.5, esse modelo possui horizonte de partículas. O que significa que, partindo do início da evolução desse modelo, as partículas materiais percorrem uma distância máxima. Se a distância máxima percorrida for menor que a porção das seções homogêneas que observamos, então não será possível explicar a homogeneidade e isotropia observada via qualquer processo físico causal.

Usando a definição de distância conforme dada na Seção 2.4, definimos o horizonte de partículas como

$$\tilde{d} = c \int_{t_i}^t \frac{dt_1}{a(t_1)} = -\tilde{R}_H \int_{x_i}^x \frac{dx_1}{E(x_1)}. \quad (2.50)$$

Em particular, para um universo plano ($\Omega_{k0} = 0$) sem constante cosmológica ($\Omega_{\Lambda 0} = 0$) com um único fluido que satisfaz $w > -1/3$, temos

$$\tilde{d}(x) = \frac{2\tilde{R}_H}{(1+3w)\sqrt{\Omega_{m0}}} \left(x^{-\frac{1+3w}{2}} - x_i^{-\frac{1+3w}{2}} \right) \approx \frac{2\tilde{R}_H}{(1+3w)\sqrt{\Omega_{m0}x^{\frac{1+3w}{2}}}}, \quad (2.51)$$

onde fazemos $x_i \gg x$. Note que para o caso singular $a(t_i) = 0$, $x_i = \infty$.

Do ponto de vista observacional, montamos o seguinte cenário. Suponha que medimos uma certa quantidade física proveniente de fontes que encontram-se a uma distância conforme $\Delta\tilde{d} = \tilde{d}(t_0) - \tilde{d}(t_e)$. Comparando essa quantidade em diferentes pontos da casca esférica de raio $\Delta\tilde{d}$, saberemos se essa quantidade era distribuída homogeneamente a uma distância máxima de $2\Delta\tilde{d}$.¹⁸ Porém, se o horizonte de partículas for finito, teremos que no instante t_e a distância máxima percorrida por um fóton será de $\tilde{d}_e \equiv \tilde{d}(t_e)$ e, se essa for menor que $2\Delta\tilde{d}$, não poderemos justificar a distribuição homogênea via um processo causal. Mais especificamente, podemos calcular a razão entre a distância máxima entre as quantidades observadas e o horizonte de partículas, *i.e.*,

$$C = 2 \frac{\Delta\tilde{d}}{\tilde{d}_e} = 2 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt_1}{a(t_1)} \Big/ \int_{t_i}^{t_e} \frac{dt_1}{a(t_1)}.$$

No caso da radiação eletromagnética sabemos que os fótons estavam fortemente acoplados aos bárions até a época da recombinação [53–55] ($x_r \approx 10^3$), ou seja, quando os átomos ficam neutros. A partir desse momento os fótons viajam livremente¹⁹ pelo universo. Considere agora as observações da RCF. Aplicando o raciocínio acima temos que para um universo plano com somente um fluido $C = 2 \left(x_r^{(1+3w)/2} - 1 \right)$, em um universo sempre dominado por poeira ($w = 0$) teríamos $C \approx 61$ e para radiação ($w = 1/3$) $C \approx 2 \times 10^3$.

Porém observamos a RCF altamente homogênea com pequenas flutuações da ordem de 10^{-5} [9]. Portanto, o resultado acima mostra que essa homogeneidade não pode ser explicada por nenhum processo físico causal se usarmos esse modelo para descrever a evolução do universo. Esse problema está diretamente relacionado com o fato de que a integral $\tilde{d}(x)$ é convergente, quando isso acontece dizemos que o modelo tem horizonte. Se por algum motivo essa integral divergisse ou simplesmente $\tilde{d}(t_0) - \tilde{d}(t_r) \ll \tilde{d}(t_r)$, toda a RCF que observamos viria de uma região em contato causal e, com isso, sua homogeneidade poderia ser explicada por algum processo físico. Note que isso não resolveria o problema, simplesmente tornaria possível uma explicação dinâmica para a homogeneidade.

¹⁸Estatisticamente temos que a correlação de dois pontos para essa quantidade será medida com uma distância máxima de $2\Delta\tilde{d}$

¹⁹Naturalmente, entre esse fótons há os que interagem gravitacionalmente com as estruturas, chamado Efeito Sachs–Wolfe Integrado [56], e os que sofrem espalhamento Compton inverso ao interagir com elétrons de aglomerados de galáxias, chamado Efeito Sunyaev Zel’dovich [57].

2.6.2 Estruturas em Grandes Escalas

Quando investigamos a distribuição de matéria do universo através da observação de galáxias, aglomerados de galáxias e outros objetos cosmológicos [58], podemos medir as correlações entre as posições das várias estruturas. Essa distribuição não uniforme de matéria está ligada às perturbações em torno do modelo homogêneo e isotrópico (que iremos tratar em detalhes no Capítulo 3). A evolução dessas perturbações tem em geral dois comportamentos diferentes, um quando o comprimento de onda é maior e outro quando é menor que o raio de Hubble R_H/E .²⁰ Para todos os comprimentos maiores que o raio de Hubble, observamos que as perturbações evoluem da mesma forma, nesse sentido, dizemos que essas perturbações estão congeladas. No caso contrário, as perturbações propagam-se de forma diferente com cada modo evoluindo de acordo com o seu comprimento de onda.

Suponha que observamos hoje correlações com comprimento comparável ao raio de Hubble hoje $\lambda_c/R_H \propto 1$. Essa razão é modificada se considerarmos instantes anteriores, já que o comprimento de onda evolui com λ_c/x e o raio de Hubble com R_H/E . Posto isso, em um instante no passado teremos que essa fração será $\lambda_c/R_H E/x \propto E/x$. Usando o fato de que a função de Hubble evolui com $x^{3(1+w)/2}$ para um universo com somente um fluido e equação de estado constante, temos que essa razão será $x^{(1+3w)/2}$. Com isso, vemos que se um certo comprimento de onda observado hoje corresponde a uma escala congelada, no passado tal escala permanecerá congelada se $w > -1/3$.

Assim, como observamos correlações de grande escala e que tais comprimentos sempre estiveram congelados, não será possível explicar no contexto desse modelo essas correlações. Em outras palavras, precisamos colocar as correlações nas condições iniciais das perturbações de forma arbitrária. Note que esse problema é similar ao problema do horizonte, porém aqui tratamos do raio de Hubble que está ligado à dinâmica das perturbações, enquanto na Seção 2.6.1 o problema está ligado à causalidade.

2.6.3 Planeza

Medidas recentes da RCF em conjunto com outros observáveis [9] inferem o parâmetro de curvatura na presente época $|\Omega_{k0}| < 10^{-2}$. A partir desse dado podemos medir quão próxima a densidade total estava da crítica, *i.e.*, $|\rho - \rho_c|/\rho_c = \Omega_{k0}x^2/E^2$. Considerando que no passado a função de Hubble é dominada pela radiação, ou seja, $E^2(x \gg 1) \approx \Omega_{r0}x^4$, obtemos que essa razão será $\Omega_{k0}/\Omega_{r0}x^2$. Mais especificamente, na época da nucleossíntese com temperaturas $T \propto 10^{11}\text{K}$ ($x \approx 10^{11}$), essa razão será $< 10^{-19}$.

Note que o raciocínio acima parte de dados medidos na época atual e infere um resultado no passado. Se invertermos essa lógica e pensarmos qual deveria ser a curvatura no passado para obtermos a observada hoje, o fato acima significa que precisaríamos escolher condições iniciais muito especiais, *i.e.*, $|\rho - \rho_c|/\rho_c < 10^{-19}$. Encarando como um problema de condições iniciais, essa questão é ainda mais agravada, pois se escolhêssemos condições iniciais que não satisfizessem a inequação acima, esse modelo seria dominado

²⁰A escala que define o comportamento das perturbações depende da forma de sua equação de movimento, mas em grande parte dos casos essa escala é proporcional ao raio de Hubble.

pela curvatura, já que essa é proporcional à a^{-2} e qualquer outra fonte (com equação de estado constante) contribuiria com termos da forma $\propto a^{-3(1+w)}$ nas equações de Friedmann (Eq. 2.24). Portanto se $w > -1/3$, a curvatura seria a componente que decresceria de forma mais lenta.

2.6.4 Soluções via Período Inflacionário

Atualmente o paradigma mais aceito para lidar com esses problemas é o chamado modelo inflacionário. Esse consiste em supor um período de expansão acelerada que ocorre antes da expansão dominada por radiação e poeira. Nesse sentido o modelo inflacionário estende o modelo padrão, ao invés de simplesmente extrapolá-lo, cria-se um cenário para descrever o universo em momentos anteriores à descrição do modelo padrão. Note no entanto que o período inflacionário, em geral, não trata do problema da singularidade e épocas anteriores a esse período. Além disso, as próprias tentativas de estender a inflação ao passado, a fim de remover a singularidade, não têm sido bem sucedidas. Em alguns casos é possível mostrar que mesmo com a presença desse período os modelos continuam prevendo uma singularidade [10].

No que refere-se ao problema de horizontes, notamos que, como na discussão feita na Seção 2.6.1, a seguinte razão

$$C = 2 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt_1}{a(t_1)} \Big/ \int_{t_i}^{t_e} \frac{dt_1}{a(t_1)}, \quad (2.52)$$

precisa ser menor que um se quisermos explicar a homogeneidade e isotropia das observações via algum processo físico causal. Tomemos o exemplo da RCF. Como a inflação trata de épocas anteriores ao modelo padrão, a primeira integral continua com o mesmo valor, *i.e.*,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt_1}{a(t_1)} = \frac{2\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{m0}}} \left(1 - x_r^{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{2\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{m0}}}, \quad (2.53)$$

onde supomos que esse período foi dominado por poeira. A segunda integral pode ser decomposta em três partes, do instante inicial x_i até o início da inflação x_a , desse ponto até o fim da inflação x_b e até x_r . Por simplicidade, iremos considerar a inflação como um período de expansão acelerada via uma densidade de energia tipo constante cosmológica.

Dessa forma, temos que a função de Hubble é dada por

$$E^2(x) = \begin{cases} \Omega_{r0} \left(\frac{xx_b}{x_a}\right)^4 & x \geq x_a \\ \Omega_{r0} x_b^4 & x_a \geq x \geq x_b \\ \Omega_{r0} x^4 & x_b \geq x \geq x_r. \end{cases}, \quad (2.54)$$

Note que estamos impondo continuidade para a função de Hubble, que é equivalente a

impor continuidade para a densidade de energia. As integrais são então dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{d}_a &= \frac{\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \frac{x_a}{x_b^2}, \\ \tilde{d}_b - \tilde{d}_a &= \frac{\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \frac{(x_a - x_b)}{x_b^2}, \\ \tilde{d}_r - \tilde{d}_b &= \frac{\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \left(\frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_a} \right).\end{aligned}$$

Supondo que a inflação durou um período longo o suficiente e que aconteceu muito antes da recombinação, *i.e.*, $x_a \gg x_b \gg x_r$, a distância será dada por $\tilde{d}_r = 2(\tilde{R}_H/\sqrt{\Omega_{r0}}) x_a/x_b^2$ e, com isso, a razão será $C \approx 2\sqrt{\Omega_{r0}/\Omega_{m0}} x_b^2/x_a$. Podemos parametrizar o problema da seguinte forma. Dado que a inflação terminou em x_b e que durante esse período o universo aumentou de tamanho por um fator de exponencial de N ,²¹ o desvio para o vermelho do início da inflação será $x_a = e^N x_b$. Nessa parametrização a razão será $C \approx 2\sqrt{\Omega_{r0}/\Omega_{m0}} e^{-N+\log(x_b)}$ então, para essa razão ser menor que um, precisamos que $N > \log(10^{-2} x_b)$, onde usamos $2\sqrt{\Omega_{r0}/\Omega_{m0}} \approx 10^{-2}$. Se considerarmos que o modelo padrão começa perto da nucleossíntese, $x_b \approx 10^{11}$, temos que $N > 21$. Dessa forma, quanto mais no passado quisermos que a inflação ocorra, maior deve ser o número N .

Em relação às estruturas em grande escala, vemos que o protótipo de inflação descrito na Eq. (2.54) muda o cenário descrito na Seção 2.6.2. Como vimos nessa seção, no modelo padrão se a razão $\lambda_c/R_H E/x$ é maior do que um hoje, será sempre maior que um. Agora considerando o período inflacionário, temos que no início da inflação essa razão será $\lambda_c/R_H \sqrt{\Omega_{r0}} x_b^2/x_a = \lambda_c/R_H \sqrt{\Omega_{r0}} e^{-N+\log(x_b)}$. Logo, se o fator exponencial N for grande o suficiente para resolver o problema do horizonte, resolverá também o problema das estruturas em grande escala, já que nesse caso a razão será menor que um. Portanto, no início da inflação os maiores comprimentos de onda estarão dentro do raio de Hubble.

Vale ressaltar que se o número N for muito grande, o comprimento de onda no início da inflação, $\lambda_c/x_a = \lambda_c e^{-N}/x_b$, pode ser muito pequeno, por exemplo, para $\lambda_c \approx R_H \approx 3000 \text{Mpc} \approx 10^{60} l_p$, onde l_p é o comprimento de Planck. Nesse caso vemos que se e^{-N}/x_b for próximo de 10^{61} , então os comprimentos de onda no início da inflação seriam próximos à escala de Planck e, dessa forma, não seria mais possível utilizar a RG clássica. Essa questão é conhecida como problema Trans-Planckiano [59].

Por fim, podemos ver também que o problema da planeza é resolvido quando adicionamos a fase inflacionária. Da mesma forma que fizemos na Seção 2.6.3, pensaremos como um problema de condições iniciais. A diferença é que agora estamos colocando condições iniciais no início do período inflacionário. Se nessa época o parâmetro de curvatura era de ordem um ($\Omega_{k0} x_a^2 \approx 1$), então no seu fim ele seria pequeno, *i.e.*, $\Omega_{k0} x_b^2 \approx x_b^2/x_a^2 = e^{-2N}$. Isso acontece porque durante a inflação a curvatura diminui com um fator de x^2 enquanto a energia que propulsiona a inflação se mantém constante. Com isso, teremos que hoje o parâmetro de curvatura seria $\Omega_{k0} \approx x_a^{-2} \approx x_b^{-2} e^{-2N} \approx 10^{-40}$, onde usamos $x_b \approx 10^{11}$ e

²¹Como normalmente a letra e é usada para denotar exponencial, o número N é comumente conhecido como número de *e-folds*.

$N = 21$. Então, vemos que existe uma grande liberdade em escolher o valor inicial para a curvatura. Pois, para um grande intervalo de valores, o resultado final é que a presença de um período de inflação faz com que hoje o parâmetro seja extremamente pequeno.

Existem várias maneiras de implementar a inflação de forma consistente, que vão de modelos simples como um campo escalar com massa, múltiplos campos escalares e modificações na gravitação via correções quânticas do tensor energia-momento. Essas várias implementações são amplamente discutidas nos livros-texto e artigos de revisão [2, 3, 60].

2.6.5 Soluções via Período de Contração

Como discutimos no começo dessa seção, os problemas que aparecem no chamado modelo padrão são consequência de uma extrapolação para o passado. Vimos também na Seção 2.6.4 que resolvemos os problemas citados se adicionarmos um período de expansão acelerada antes da evolução dominada por radiação. De forma geral, a fase pré-modelo padrão pode ter diferentes comportamentos. Um caso é ter sempre expansão, havendo ainda a possibilidade de haver expansão eterna onde a singularidade só é alcançada no infinito passado, *i.e.*, $\lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) = 0$.

Outra possibilidade é ter uma fase de contração que em algum momento converte-se na fase de expansão (dizemos que o universo passa por um ricochete) dominada por radiação. No Capítulo 4 discutiremos em detalhes modelos de gravitação quântica que demonstram esse tipo de comportamento, além de fazermos uma discussão geral sobre outras formas de obter o ricochete. Nessa seção, porém, o mecanismo específico para gerar essa fase não é relevante.

Supondo que exista essa fase de contração, a função de Hubble adimensional é dada por

$$E(x) = \begin{cases} -\Omega_{r0}x^4 & t_i < t < t_b \\ \Omega_{r0}x^4 & t > t_b \end{cases}, \quad (2.55)$$

onde $x(t_b) = x_b$ é a escala onde o ricochete acontece e t_i marca o início do período de contração, podendo ser $-\infty$. A forma como modelamos a mudança entre as fases de contração e expansão é abrupta. Entretanto, a forma exata dessa transição não será importante para a análise que segue. A distância máxima percorrida por um fóton durante a fase de contração será

$$\tilde{d}_b = \int_{t_i}^{t_b} \frac{dt_1}{a(t_1)} = \frac{\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_b} \right) \approx \frac{\tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \frac{1}{x_i},$$

onde na última igualdade estamos considerando que a escala do ricochete é muito menor que a inicial, *i.e.*, $x_b \gg x_i$. A expressão acima mostra também que se o universo começa infinitamente grande ($a_i = \infty$) então $\tilde{d}_b = \infty$. Nesse caso a razão entre as distâncias, discutida na Seção 2.6.1, será $C \approx 2x_i = 2a_0/a_i$. Com isso, para que a fase de contração possa resolver o problema de horizonte, basta que nesse modelo o universo comece maior que ele na presente época, *i.e.*, $a_i > a_0$.

No caso das estruturas em grandes escalas, o comprimento de onda no início será $\lambda_c/R_H E/x = \lambda_c/R_H \sqrt{\Omega_{r0}}x_i$ e, novamente, os comprimentos de onda que correspondem

às estruturas em grande escala estarão inicialmente menores que o raio de Hubble se $a_i > a_0$.

Finalmente, como estamos colocando as condições iniciais em t_i , se supusermos que nesse instante a contribuição da curvatura à função de Hubble seja $\Omega_{k0}x_i^2 \approx 1$, então hoje essa contribuição seria $\Omega_{k0} \approx (a_0/a_i)^2$. Se $a_i > a_0$, ou seja, se o universo começar muito maior que hoje, temos uma explicação para a curvatura pequena observada hoje. Veja que, no caso da contração, a dinâmica das densidades é oposta ao que ocorre na expansão. A curvatura, que evolui com x^2 , torna-se rapidamente desprezível quando comparado à poeira (x^3) e à radiação (x^4).

A questão da planeza mostra ainda uma vantagem dos modelos com ricochete, pois nesse caso a curvatura espacial não precisa ser muito pequena como no caso da inflação. Portanto, em primeira aproximação, esses modelos mostram-se mais flexíveis em relação à solução dos problemas cosmológicos tratados nessa seção.

CAPÍTULO 3

PERTURBAÇÕES EM TORNO DE UM UNIVERSO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO

Discutimos com detalhes no Capítulo 2 um modelo homogêneo e isotrópico para o universo. Entretanto, sabemos que essas simetrias não são exatas. Somente em grandes escalas, a distribuição média de matéria inferida a partir da observação de objetos como galáxias, aglomerados, entre outros, é homogênea em hipersuperfícies de tempo constante. A observação mais profunda, a RCF, como discutimos na Seção 2.5, mostra-se distribuída quase homogeneamente na casca esférica em que a observamos. Porém apresenta pequenas irregularidades em torno do seu valor médio.

Essas observações sugerem que o universo pode ser descrito com seções espaciais homogêneas e isotrópicas mais pequenas perturbações. Já foi citado na Seção 2.6.2 que para explicar as observações atuais, precisamos descrever essas perturbações em escalas de mesma ordem que raio de Hubble. Isso implica na necessidade de uma teoria de perturbações relativística para podermos fazer uma descrição completa. O pioneiro no estudo das perturbações cosmológicas no contexto da RG foi Lifshitz (1946) [61], com o trabalho posteriormente corrigido por Lifshitz e Khalatnikov (1963) [62]. Acontece que mesmo esses trabalhos estando corretos, eles foram mal interpretados pois a liberdade, chamada de liberdade de calibre, que existe ao definir as perturbações em relação a um modelo de fundo, torna sua interpretação difícil gerando graus de liberdade espúrios.¹

Em uma primeira tentativa de resolver o problema da interpretação das perturbações, Hawking (1966) [64] desenvolveu um formalismo covariante para lidar com elas.² Porém, nesse formalismo as variáveis que são naturalmente invariantes sob mudança de calibre (invariantes de calibre) são aquelas que são nulas no modelo de fundo e, portanto, o problema da escolha de calibre continua existindo quando tratamos de variáveis como densidade de energia, fator de expansão e outras que não são nulas no modelo de fundo. Posteriormente, esse problema foi resolvido no trabalho de Ellis e Bruni (1989) [66], onde foram propostas novas variáveis invariantes de calibre associadas à densidade de energia, fator de expansão, entre outras. O significado físico dessas quantidades é ainda explorado em Bruni, Dunsby e Ellis (1992) [67].

Outra ideia desenvolvida para lidar com a dependência de calibre foi a de definir combinações arbitrárias de variáveis dependentes de calibre de forma a obter variáveis independentes. Esse tratamento foi desenvolvido inicialmente por Moncrief (1974) [68], posteriormente por Gerlach e Sengupta (1978) [69] no tratamento de colapso gravitacional e mais tarde por Bardeen (1980) [70] para lidar com as perturbações cosmológicas. Nesse tratamento lidamos somente com variáveis invariantes de calibre e portanto livre dos

¹Essa liberdade era também observada em outros contextos, ver por exemplo em Sachs (1964) [63].

²Ver também Olson (1976) [65].

graus de liberdade espúrios. Entretanto, nessa abordagem, como são feitas combinações arbitrárias de variáveis dependentes de calibre para formar as independentes, a interpretação física dessas últimas fica obscura, sendo necessário usar um calibre específico para identificar o significado de cada uma delas. Independente dessa dificuldade, esse tipo de tratamento tornou-se padrão para lidar com perturbações cosmológicas, pois não existe ambiguidade no cálculo das variáveis invariantes de calibre. Uma série de artigos de revisão abordam esse tratamento utilizando variáveis invariantes de calibre, veja por exemplo [60, 71].

Na Seção 3.1 definimos liberdade de calibre e discutimos como essa liberdade é tratada na literatura. A seguir, na Seção 3.2, mostramos que existem dois grupos distintos de perturbações que têm diferentes comportamentos em função da liberdade de calibre. Em posse das perturbações, na Seção 3.3 tratamos da decomposição em modos escalares, vetoriais e tensoriais, discutindo quais são as características do modelo que permitem essa decomposição, assim como as propriedades especiais que a métrica de fundo de FLRW contém. Definimos na Seção 3.4 as combinações das variáveis que são invariantes sob mudança de calibre, tanto para as variáveis geométricas quanto para as variáveis ligadas ao tensor energia–momento. Nessa seção também definimos as perturbações cinemáticas ligadas às hipersuperfícies da métrica de fundo, a fim de simplificar a interpretação das variáveis e das escolhas de calibre.

Utilizando as perturbações, na Seção 3.5 obtemos a versão linearizada das equações de Einstein assim como a versão invariante de calibre das mesmas. Nessa seção mostramos como podemos usar a base dos autovetores do operador de Laplace–Beltrami para simplificar as equações de movimento, obtendo um conjunto de equações diferenciais ordinárias para as perturbações. Como as soluções das equações de movimento resultam na determinação das variáveis invariantes de calibre, na Seção 3.6, mostramos algumas escolhas de calibre e como elas podem ser usadas para determinar unicamente todas as variáveis perturbadas. Por fim, na Seção 3.8, resolvemos as equações de movimento para um universo com um único fluido e mostramos que, para o caso do universo em contração, a escolha de calibre é crucial na determinação da validade da série perturbativa.

3.1 LIBERDADE DE CALIBRE

Na modelagem de um sistema físico, de forma implícita ou explícita, existe uma escala na qual a descrição é feita. Por exemplo, na mecânica dos fluidos estamos interessados em descrever as propriedades macroscópicas de sistemas compostos por um infinidade de partículas. Portanto, nela utilizamos a noção de elemento de fluido que corresponde ao comportamento médio de um conjunto de partículas que o compõe. No processo de média usado para definir os elementos, o comportamento microscópico e suas propriedades são condensadas nos elementos da sua evolução, como viscosidade, pressão, entre outros. De forma similar, ao criar modelos cosmológicos, esperamos descrever o universo nas maiores escalas observáveis. Nesse sentido supomos que os modelos de FLRW descrevam o universo em uma escala grande o suficiente para que este possa ser tratado como homogêneo e isotrópico. Essa suposição, que é usada *a priori*, mostra-se compatível com as observações, através da RCF e estruturas em grandes escalas como discutido na

Seção 2.6.

Para tratar escalas menores, o modelo não pode mais ser homogêneo e isotrópico. No entanto, podemos supor que o novo modelo, mesmo não sendo mais de FLRW, seja tal que a diferença entre ele e um modelo de FLRW seja pequena. O que normalmente se faz em outras áreas da física é, por algum processo de média, determinar o valor de fundo e definir as perturbações como sendo a diferença entre a quantidade e sua média. Dessa forma temos uma maneira de determinar o valor de fundo e o seu significado físico. Na cosmologia o processo de média é uma questão em aberto (ver [72] e suas referências), portanto nesse trabalho tomaremos outro caminho. Ao invés de definir um processo de média para determinar o modelo de fundo, vamos partir da suposição de que o modelo de fundo é FLRW, e que a diferença entre ele e o modelo real (também chamado de modelo perturbado) é pequena. O que acontece nesse caso, como citamos no começo desse capítulo, é que a definição de perturbação é ambígua, já que a definição de modelo de fundo é arbitrária.

Suponha que o modelo perturbado é descrito por uma métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ em uma variedade M . Essa é a métrica que descreverá nosso sistema físico. De forma arbitrária, adicionamos ao problema uma segunda métrica $g_{\mu\nu}$ do tipo FLRW e fazemos a suposição fundamental de que sua diferença é pequena, *i.e.*, definindo a diferença como

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}.$$

Vamos desprezar todos os termos quadráticos ou de potência superior em $\delta g_{\mu\nu}$. A questão é: de que formas diferentes podemos definir a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ na variedade M tal que $\delta g_{\mu\nu}$ seja pequeno.

Para lidar com essa questão, definimos uma variedade M° com uma métrica de FLRW $g_{\mu\nu}^\circ$. Dado um difeomorfismo $\Upsilon : M^\circ \rightarrow M$ e um grupo de difeomorfismos $\vartheta_\lambda : M \rightarrow M$, como os definidos na Seção A.1, temos que $\Upsilon_\lambda(\cdot) \equiv \vartheta_\lambda(\Upsilon(\cdot))$ provê um conjunto de difeomorfismos de M° em M . Podemos utilizar a inversa de tais difeomorfismos para definir uma operação *puçar*,³ que leva covetores de M° em covetores M , *i.e.*, $g^{(\lambda)}_{\mu\nu} = \Upsilon_\lambda^{-1*} g_{\mu\nu}^\circ = \vartheta_\lambda^{-1*} g_{\mu\nu}$, onde definimos a métrica $g_{\mu\nu} \equiv \Upsilon^{-1*} g_{\mu\nu}^\circ$ na variedade M .

Suponha agora que a diferença $\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ seja pequena. Para um valor pequeno do parâmetro λ , temos que

$$g^{(\lambda)}_{\mu\nu} = \vartheta_\lambda^{-1*} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu},$$

onde o campo vetorial ξ^μ é o campo tangente as curvas $p(\lambda) \equiv \vartheta_\lambda(p)$ em M . Portanto a diferença entre as métricas será dada por

$$\delta g^{(\lambda)}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}) = \delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)},$$

lembrando que a derivada de Lie é independente da derivada covariante que utilizamos. Portanto, nesse caso, escolhemos aquela compatível com $g_{\mu\nu}$, *i.e.*, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Note que isso mostra que uma condição suficiente para que a diferença mantenha-se pequena é a de

³Analogamente à operação *empurrar* definida na Seção A.1, para mais detalhes sobre ambas operações ver *push forward* e *pull back* em [36] ou [73]

que $\nabla_\mu \xi_\nu$ seja pequeno. Mas ela não é necessária: se escolhêssemos os difeomorfismos ϑ_λ de forma que ξ^μ fosse um campo de Killing de $g_{\mu\nu}$, teríamos $\delta g^{(\lambda)}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ para qualquer valor de λ . Definimos como mudança de calibre, qualquer outra escolha de difeomorfismo tal que $\delta g^{(\lambda)}_{\mu\nu}$ continue pequeno. Note que essa liberdade de calibre é parametrizada por campos vetoriais ξ^μ que definem uma mudança pequena nos difeomorfismos.

Vale ressaltar a diferença entre o procedimento descrito acima e uma mudança de coordenadas em M . Dada as duas métricas, $\hat{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, se fizermos uma mudança de coordenadas pequena gerada por um campo vetorial b^μ , teremos

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu} &\rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_b \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_b g_{\mu\nu}, \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_b g_{\mu\nu},\end{aligned}$$

onde consideramos b^μ da mesma ordem que $\delta g_{\mu\nu}$. Com isso, temos que a diferença entre elas se transformará como $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow (\hat{g}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_b g_{\mu\nu}) - (g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_b g_{\mu\nu}) = \delta g_{\mu\nu}$, ou seja, a perturbação na métrica é invariante sob transformações de coordenadas de mesma ordem.

Ao fazer uma mudança de calibre, todos os objetos trazidos da variedade M° são modificados, *i.e.*, se $T^\circ_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ é um tensor arbitrário definido em M° e $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} \equiv \Upsilon^{-1*} T^\circ_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ sua versão em M , então, sob uma transformação de calibre, esse tensor se modifica da seguinte forma

$$T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} \rightarrow T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} + \mathcal{L}_\xi T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}.$$

Contudo, se fizermos uma mudança de coordenadas em M gerada por $-\xi^\mu$, esse tensor será novamente dado por $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$. E, com isso, todas as quantidades definidas originalmente em M sofrerão a mudança

$$\hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} \rightarrow \hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} - \mathcal{L}_\xi \hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}.$$

É nesse sentido que alguns livros texto ou artigos de revisão referem-se à mudança de calibre como sendo uma mudança de coordenadas onde as quantidades de fundo são mantidas “fixas”. Nesse trabalho, todas as mudanças de calibre serão seguidas por uma mudança de coordenadas de forma que os tensores definidos na variedade de fundo M° ficam invariantes.

3.2 QUANTIDADES PERTURBADAS

Seja $\hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ um tensor definido em M , tal que sua construção não dependa de objetos *puxados* de M° , e um objeto construído da mesma forma em M° . Definimos a perturbação em $\hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ como

$$\delta T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} \equiv \hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} - T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}.$$

Estamos interessados em quantidades tais que suas perturbações sejam da mesma ordem de $\delta g_{\mu\nu}$. Para esses objetos, uma mudança de calibre tem o seguinte efeito,

$$\hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} \rightarrow \hat{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} - \mathcal{L}_\xi T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}, \quad (3.1)$$

onde desprezamos o termo de segunda ordem $\mathcal{L}_\xi \delta T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}$. Ao fazer uma mudança de calibre, a perturbação nesse objeto transforma-se como

$$\delta T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} \rightarrow \delta T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} - \mathcal{L}_\xi T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}. \quad (3.2)$$

Se não nos restringirmos a campos ξ^μ especiais,⁴ essa mudança só será identidade para qualquer campo ξ^μ se $\mathcal{L}_\xi T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = 0$. Esse resultado é o lema do artigo [74] em que os autores mostram que as perturbações são invariantes de calibre se e somente se $\mathcal{L}_\xi T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = 0$ e que isso acontece se e somente se o tensor for uma constante ou combinações de constantes e deltas de Kronecker. Chamaremos de perturbações simples as quantidades perturbadas construídas da forma descrita acima.

Porém, existem objetos geométricos que não são construídos da forma descrita acima. Quando se define a métrica perturbada como

$$\hat{g}_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} -1 + 2\phi & -B_i \\ -B_i & h_{ij} + 2C_{ij} \end{pmatrix},$$

e a métrica do fundo

$$g_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix},$$

estamos implicitamente usando coordenadas gaussianas normais para a métrica de fundo, como discutido na Seção A.2. Isso é o mesmo que escolher um conjunto de hipersuperfícies, de forma que a normal a elas é geodésica, e uma função tempo, tal que o campo covetorial normal é dado por $n_\mu = -\partial_\mu ct$, o campo vetorial associado a essa coordenada é simplesmente n^μ , *i.e.*, $n^\mu \partial_\mu ct = -n^\mu n_\mu = 1$, e, por fim, um conjunto de vetores coordenados e_i^μ com $i = 1, 2, 3$ nas hipersuperfícies de forma que $n_\mu e_i^\mu = 0$ e $\dot{e}_i^\mu = 0$. Além de adicionar vários ingredientes relacionados com a escolha de coordenadas, a definição de métrica acima é equivalente às projeções feitas nas Eqs. (C.2–C.4). A métrica de fundo nessa decomposição fica,

$$g_{nn} = -1, \quad g_{n\nu} h^\nu_\alpha e_i^\alpha = 0, \quad g_{\mu\nu} h^\mu_\alpha h^\nu_\beta e_i^\alpha e_j^\beta = h_{ij},$$

enquanto a perturbada é dada por

$$\hat{g}_{nn} = -1 + 2\phi, \quad \hat{g}_{n\nu} h^\nu_\alpha e_i^\alpha = -B_i, \quad \hat{g}_{\mu\nu} h^\mu_\alpha h^\nu_\beta e_i^\alpha e_j^\beta = h_{ij} + 2C_{ij},$$

onde $h_{\mu\nu}$ é o projetor definido na Seção A.2, o subscrito n representa a contração com o campo n , como definido na Eq. (A.16), e $h_{ij} \equiv h_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$, $B_i \equiv B_\alpha e_i^\alpha$, $C_{ij} \equiv C_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$. Então, nesse caso, temos que a perturbação na métrica ϕ é dada por $\phi = (\hat{g}_{nn} - g_{nn})/2$. Note que essa perturbação não se encaixa na forma descrita no começo da seção. A quantidade $\hat{g}_{nn} = n^\mu n^\nu \hat{g}_{\mu\nu}$ envolve termos de ambas as variedades, mais especificamente, a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ e os vetores normais às seções espaciais definidas em M° . As perturbações que envolvem objetos construídos utilizando termos de ambas as variedades serão chamados de perturbações mistas. Em geral, as partes escalares, vetoriais e tensoriais (nas

⁴Poderíamos nos restringir as possíveis isometrias de $T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}$.

hipersuperfícies e não na variedade M) da perturbação da métrica são definidas como projeções onde se usa um sistema de coordenadas atrelado à variedade de fundo. Vale ressaltar que como essas quantidades não são perturbações simples, não vale o lema da invariância de calibre, *e.g.*, a quantidade $g_{nn} = -1$ é claramente constante e tem derivada de Lie nula, porém ϕ não é invariante de calibre.

Além das projeções da perturbação da métrica, existem outros objetos mistos que são úteis na interpretação das perturbações. A variedade de fundo tem um conjunto de seções espaciais bem definido, nas quais temos homogeneidade e isotropia, que definem um campo covetorial $n_\mu = -\partial_\mu ct$. Esse campo é normalizado no contexto da métrica de fundo e, portanto, terá norma diferente de menos um na métrica perturbada. Podemos então calcular a versão normalizada $\hat{n}_\mu = -\partial_\nu ct / \sqrt{-\hat{g}^{\gamma\sigma} \partial_\gamma ct \partial_\sigma ct}$, que em primeira ordem é simplesmente $\hat{n}_\mu = n_\mu - \phi n_\mu$ (na Seção C.1 calculamos as variáveis cinemáticas relacionadas a um campo vetorial arbitrário em M). Note que no caso das normais das seções espaciais de fundo, temos simplesmente que $v^\mu = 0$ (ver Eq. C.10). Por exemplo, a aceleração dessas curvas será $\hat{a}_\mu = -D_\mu \phi$ (ver Eq. C.25). Imagine um conjunto de observadores em M que seguem trajetórias cujas tangentes são dadas por \hat{n}^μ , ou seja, as trajetórias que os observadores isotrópicos seguiriam caso não houvesse perturbações. Esses observadores iriam, portanto, medir uma aceleração $\hat{a}_\mu = -D_\mu \phi$.

Para evitarmos objetos mistos, podemos criar um seccionamento arbitrário em M de forma que difira das seções de M° somente em primeira ordem. Com isso, definimos a curvatura extrínseca do campo normal das hipersuperfícies perturbadas como $\hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu}$ e das não perturbadas como $\mathcal{K}_{\mu\nu}$, e assim a perturbação $\delta\mathcal{K}_{\mu\nu} \equiv \hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} - \mathcal{K}_{\mu\nu}$. Nesse caso, elas serão perturbações simples e, logo, vale o lema das perturbações. Mais especificamente, para a métrica de fundo temos o cisalhamento, definido na Eq. (A.24), $\sigma_{\mu\nu} = 0$ (ver Eq. 2.10) e, com isso, $\delta\sigma_{\mu\nu}$ é invariante de calibre. A desvantagem dessas quantidades é que estamos calculando a diferença entre objetos definidos em seções espaciais diferentes. Suponha que a métrica de fundo tenha curvatura espacial nula, nesse caso $\delta\mathcal{R} = \hat{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ é invariante de calibre, porém $\hat{\mathcal{R}}$ fornece a curvatura espacial de uma certa seção espacial arbitrária definida em M , ou seja, $\delta\mathcal{R}$ é invariante de calibre mas depende da escolha de hipersuperfícies em M .

Em resumo, as perturbações mistas são mais fáceis de interpretar pois podemos usar a mesma noção de hipersuperfícies para definir os objetos a serem comparados, porém as perturbações definidas dessa forma geralmente dependem do calibre usado. Já as perturbações simples, são definidas inteiramente em cada variedade, podem ser invariantes de calibre quando o valor de fundo for nulo, mas sua interpretação é complicada pois estamos comparando objetos definidos em seções espaciais diferentes. Vale notar que no caso de FLRW, a única perturbação simples que podemos definir de forma independente das seções espaciais é o tensor de Weyl, que na métrica que fundo é nulo (ver Eq. 2.18), e, portanto, $\delta C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é invariante de calibre e não depende da escolha de hipersuperfícies, o que simplifica a sua interpretação física. As projeções que fornecem as partes elétrica e magnética desse tensor dependem da escolha de hipersuperfícies. Contudo, em primeira ordem, a projeção

$$\hat{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{n}^\mu \hat{n}^\alpha = \delta C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu n^\alpha$$

depende somente do valor de fundo de \hat{m}^μ , pois $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é nulo na métrica de fundo. Isso mostra que as projeções elétrica e magnética, em primeira ordem, são independentes da escolha de hipersuperfícies perturbadas.

3.3 DECOMPOSIÇÃO DAS PERTURBAÇÕES

No Apêndice C calculamos as perturbações em vários objetos geométricos, necessários para obter as equações de Einstein em primeira ordem, considerando uma métrica de fundo arbitrária. Em uma métrica de fundo do tipo FLRW, podemos fazer uma série simplificações. Nesse caso, a curvatura extrínseca é dada pela Eq. (2.10) e o escalar de expansão Θ depende somente do tempo cósmico, *i.e.*, $D_\mu\Theta = 0$ e, conseqüentemente, $D_\mu\mathcal{K}_{\alpha\beta} = 0$. Essas restrições são suficientes para fazer todas as simplificações e, com isso, podemos obter a curvatura nas hipersuperfícies via Eq. (A.34) obtendo assim as Eqs. (2.6).

Notamos também que o comutador das derivadas espaciais e a derivada de Lie na direção normal se anulam quando agindo sobre qualquer tensor, *i.e.*, o tensor de curvatura definido na Eq. (A.39) é nulo. Porém, a derivada de Lie na direção normal não comuta com o operador de Laplace–Beltrami $D^2 \equiv D_\mu D^\mu$, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \partial_{ct} D^2 T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} &= \partial_{ct} (\mathbf{h}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}), \\ &= -2\mathcal{K}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} + \mathbf{h}^{\mu\nu} \partial_{ct} D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}, \\ &= \left(D^2 \partial_{ct} - \frac{2}{3} \Theta D^2 \right) T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}, \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$[\partial_{ct}, D^2] T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} = -\frac{2}{3} \Theta D^2 T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}. \quad (3.3)$$

Isso acontece porque a derivada de Lie do projetor $\mathbf{h}^{\mu\nu}$ não é zero e portanto ela não comuta com $D^\alpha = \mathbf{h}^{\alpha\mu} D_\mu$. Pela Eq. (A.44), temos

$$[D^\mu, \partial_{ct}] = \frac{2}{3} \Theta D^\mu. \quad (3.4)$$

Outra simplificação acontece no comutador das derivadas espaciais e o operador de Laplace–Beltrami. Usando a Eq. (A.45) e a forma do tensor de Ricci espacial da Eq. (2.6),

$$[D_\mu, D^2] \varphi = -2K D_\mu \varphi, \quad (3.5)$$

onde φ é um escalar. Para um vetor, usamos a Eq. (A.46) e obtemos

$$[D_\mu, D^2] u_\nu = -4K D_{(\mu} u_{\nu)} + 2K \mathbf{h}_{\mu\nu} D_\alpha u^\alpha, \quad (3.6)$$

onde usamos que $D_\mu K = 0$ (ver Eq. 2.13).

Podemos decompor as perturbações vetoriais B_μ da seguinte forma,

$$B_\mu = D_\mu \mathcal{B} + \mathbb{B}_\mu, \quad (3.7)$$

onde \mathcal{B} é uma função arbitrária e B_μ um campo vetorial espacial com divergente nulo, *i.e.*, $\mathfrak{h}[B_\mu] = B_\mu$ e $D_\mu B^\mu = 0$. Se calcularmos o divergente obtemos $D_\mu B^\mu = D^2 \mathcal{B}$. O operador de Laplace–Beltrami para variedades com métrica de assinatura $(+, +, +)$ ou $(-, -, -)$, que é o caso das hipersuperfícies, tem inversa única se as hipersuperfícies forem compactas ou se as funções consideradas forem rapidamente a zero no infinito.⁵ Assim, dado um campo covetorial B_μ , temos uma única função \mathcal{B} que denotaremos como $\mathcal{B} = D^{-2} D_\mu B^\mu$, onde D^{-2} representa a inversa do operador de Laplace–Beltrami. Dessa forma a equação $B_\mu = B_\mu - D_\mu D^{-2} D_\alpha B^\alpha$ define um campo covetorial de divergência nula único associado a B_μ . Isso mostra, portanto, que a Eq. (3.7) define uma decomposição única para um campo covetorial B_μ . Essa decomposição pode ser feita para qualquer campo covetorial.

A decomposição das perturbações tensoriais é mais complicada e depende das características da métrica. Considere a seguinte equação para a parte sem traço da perturbação $C^t_{\mu\nu}$ (definida na Eq. C.23),

$$C^t_{\mu\nu} = - \left(D_\mu D_\nu - \frac{\mathfrak{h}^{\mu\nu}}{3} D^2 \right) \mathcal{E} + D_{(\mu} F_{\nu)} + W_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde $D_\mu F^\mu = 0$, $D_\mu W^{\mu\nu} = 0 = W_\mu{}^\mu$. Calculando a divergência dupla do tensor acima, obtemos

$$D_\mu D_\nu C^{t\mu\nu} = -\frac{2}{3} D^4 \mathcal{E} - 2K D^2 \mathcal{E} + \frac{1}{2} (D_\mu D^2 F^\mu + D_\mu D_\nu D^\mu F^\nu).$$

Usando a Eq. (3.6), temos que $D_\mu D^2 F^\mu = 0$ já que $D_\alpha F^\alpha = 0$. O último termo por sua vez é simplesmente

$$D_\mu D_\nu D^\mu F^\nu = D_\mu (\mathcal{R}_\nu{}^{\mu\nu}{}_\gamma F^\gamma + D^\mu D_\nu F^\nu) = 0.$$

Portanto, a equação da divergência dupla reduz-se a

$$D_\mu D_\nu C^{t\mu\nu} = -D^2 \left(\frac{2}{3} D^2 + 2K \right) \mathcal{E},$$

e, como o operador D^2 tem inversa única e o operador $D^2 + 3K$ também define uma inversa única, a função \mathcal{E} é univocamente determinada por $C^t_{\mu\nu}$. Calculando agora a divergência da Eq. (3.8), temos

$$\begin{aligned} D_\mu C^{t\mu}{}_\nu &= - \left(D^2 D_\nu - \frac{D_\nu D^2}{3} \right) \mathcal{E} + \frac{1}{2} (D^2 F_\nu + D_\mu D_\nu F^\mu), \\ &= -\frac{2}{3} D_\nu D^2 \mathcal{E} - 2K D_\nu \mathcal{E} + \frac{1}{2} (D^2 + 2K) F_\nu, \\ &= D_\nu D^{-2} D_\alpha D_\beta C^{t\alpha\beta} + \frac{1}{2} (D^2 + 2K) F_\nu, \end{aligned}$$

⁵Para mais detalhes veja [75]. E para uma discussão sobre a decomposição em métricas de fundo de FLRW, ver [74].

onde usamos a regra de comutação da Eq. (3.5). Como \mathcal{E} foi determinado acima, podemos escrever essa equação como

$$(D^2 + 2K)\mathbf{F}_\nu = 2D_\mu C^{t\mu}{}_\nu - 2D_\nu D^{-2} D_\alpha D_\beta C^{t\alpha\beta}.$$

É possível mostrar que o operador $(D^2 + 2K)$ também tem inversa única com restrições similares a de D^2 . Com isso, temos que \mathbf{F}_ν é univocamente determinado e, portanto, a decomposição feita na Eq. (3.8) é única. Contudo, é bom ressaltar que essa decomposição só foi possível devido à forma especial da métrica de fundo e, conseqüentemente, da curvatura das hipersuperfícies. De agora em diante escreveremos o tensor $C_{\mu\nu}$ como

$$C_{\mu\nu} = \psi h_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu \mathcal{E} + D_{(\mu} \mathbf{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde a variável ψ é dada por

$$C = 3\psi - D^2 \mathcal{E}, \quad (3.10)$$

temos ainda que a divergência dupla é escrita como

$$D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} = D^2 \psi - D^2 (D^2 + 2K) \mathcal{E}. \quad (3.11)$$

Essa decomposição pode ser usada para simplificar as equações diferenciais envolvendo as perturbações ϕ , B_μ e $C_{\mu\nu}$. Dada uma combinação linear desses objetos, os únicos escalares que podemos formar são ϕ , $D_\mu B^\mu$, $D_\mu D_\nu C^{\mu\nu}$ e C . Isso acontece porque, quando o modelo de fundo é FLRW, a curvatura extrínseca e a das seções espaciais são proporcionais à métrica das hipersuperfícies e não há mais nenhuma quantidade espacial de ordem zero não nula que poderia ser usada para formar escalares. Outros termos que poderiam aparecer são do tipo $D_\mu D^2 B^\mu$, mas, usando a regra de comutação dada na Eq. (3.6), podemos ver que essa quantidade será escrita como $D_\mu D^2 B^\mu = D^2 D_\mu B^\mu + 2K D_\mu B^\mu$ e, portanto, fica em função de $D_\mu B^\mu$. Além disso, como a derivada de Lie na direção normal ∂_{ct} comuta com as derivadas espaciais, o uso dessa derivada não gera novos termos.

Com isso, se tivermos uma equação diferencial escalar, sabemos que ela envolverá somente as perturbações escalares ϕ , \mathcal{B} , ψ e \mathcal{E} . No caso de uma equação diferencial vetorial linear nos argumentos, *i.e.*, $M^\alpha(\phi, B_\mu, C_{\mu\nu}) = 0$, podemos obter uma equação escalar calculando o divergente $D_\alpha M^\alpha = 0$. Como essa equação envolve somente as perturbações escalares, ela deve ser da forma $D_\alpha M^\alpha = D^2 M^s = 0$, onde $D_\mu M^s$ representa os termos escalares da equação $M^\alpha = 0$. Usando a inversa do operador D^2 temos que $D^{-2} D^2 M^s = M^s = 0$. Isso mostra que em uma equação vetorial, a parte envolvendo os escalares da equação é satisfeita independentemente. A equação $M^\mu - D^\mu M^s = 0$ conterà somente os termos B_μ e \mathbf{F}_μ , já que não é possível formar um campo vetorial com $W_{\mu\nu}$.

Concluindo, dada uma equação tensorial do tipo $M_{\mu\nu} = 0$, também linear nas perturbações, temos que o traço fornece uma equação que deve ser satisfeita independentemente, *i.e.*, $M_\mu{}^\mu = 0$. A parte sem traço $M^t{}_{\mu\nu} \equiv M_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} M_\mu{}^\mu / 3 = 0$, fornece outra equação escalar ao tirarmos a divergência dupla, ou seja, $D_\mu D_\nu M^{t\mu\nu} = 0$. Por envolver somente perturbações escalares, essa equação pode ser escrita como

$$D_\mu D_\nu M^{t\mu\nu} = D_\mu D_\nu D^\mu D^\nu M^{ts} = D^2 (D^2 + 2K) M^{ts} = 0,$$

e pelos mesmos argumentos da decomposição temos que $M^{ts} = 0$. Subtraindo a parte escalar, obtemos a equação $M^{t\mu\nu} - D^\mu D^\nu M^{ts} = 0$ que depende somente das variáveis B_μ , F_μ e $W_{\mu\nu}$. Com a divergência dessa última equação, obtemos outra envolvendo somente a parte vetorial da forma $D_{(\mu} M_{\nu)}^{tv}$ e, finalmente, subtraindo esse termo obtemos $M^{t\mu\nu} - D^\mu D^\nu M^{ts} - D_{(\mu} M_{\nu)}^{tv} = 0$ que conterà somente a perturbação $W_{\mu\nu}$.

Na prática, essa decomposição nos mostra que podemos tratar cada tipo de perturbação separadamente e que, para calcular as equações de movimento de cada tipo, basta colocar os outros termos iguais a zero. Em resumo, as perturbações na métrica são decompostas da seguinte forma,

$$\text{Escalares: } \phi, \mathcal{B}, \psi, \mathcal{E}; \quad (3.12)$$

$$\text{Vetoriais: } B_\mu, F_\mu; \quad (3.13)$$

$$\text{Tensoriais: } W_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Na Seção C.4, descrevemos as perturbações de um tensor energia–momento arbitrário. Usando a decomposição descrita acima, temos que o tensor energia–momento introduz as variáveis,

$$\text{Escalares: } \delta\rho, \delta\varepsilon, \mathcal{V}, \delta p, \delta\Pi^{(d)}; \quad (3.15)$$

$$\text{Vetoriais: } V_\mu, \delta\Pi^{(v)\mu}; \quad (3.16)$$

$$\text{Tensoriais: } \delta\Pi^{(t)\mu\nu}, \quad (3.17)$$

onde fizemos as seguintes decomposições

$$\begin{aligned} V_\mu &= D_\mu \mathcal{V} + \mathbf{V}_\mu, \\ \delta\Pi_{\mu\nu} &= - \left(D_\mu D_\nu - \frac{h_{\mu\nu}}{3} D^2 \right) \delta\Pi^{(d)} + D_{(\mu} \delta\Pi^{(v)\nu)} + \delta\Pi^{(t)\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

e, analogamente ao feito para as variáveis da métrica, temos $D_\mu \mathbf{V}^\mu = D_\mu \delta\Pi^{(v)\mu} = D_\mu \delta\Pi^{(t)\mu\nu} = \delta\Pi^{(t)\mu}{}_\mu = 0$.

3.4 VARIÁVEIS INVARIANTES DE CALIBRE

3.4.1 Métrica

Como vimos não Seção 3.1, ao fazer uma mudança de calibre a perturbação na métrica se transforma da seguinte forma,

$$\delta g^{(\lambda)\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (3.19)$$

Para entender como isso afeta cada variável da decomposição, escrevemos o campo vetorial ξ_μ como

$$\xi_\mu = \xi^\parallel n_\mu + \xi^\perp{}_\mu + D_\mu \xi^\perp,$$

onde $\xi^\parallel \equiv -\xi^n$ e $\xi^\perp{}_\mu \equiv h[\xi_\mu]$, em que usamos a decomposição de vetores espaciais descrita na Seção 3.3 para decompor $h[\xi_\mu]$ na parte escalar ξ^\perp e vetorial com divergência

nula ξ^\perp_{μ} . Usando as projeções dadas nas Eqs. (C.2–C.4), obtemos as seguintes regras de transformação

$$\begin{aligned}\delta g_{nn} &\rightarrow n^\mu n^\nu (\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}) = 2\phi + 2\dot{\xi}^\parallel, \\ \delta g_{n\nu} h^{\nu\alpha} &\rightarrow n^\mu h^{\nu\alpha} (\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}) = -B^\alpha - \partial_{ct}(D^\alpha \xi^\perp + \xi^{\perp\alpha}) + D^\alpha \xi^\parallel, \\ h[\delta g_{\mu\nu}] &\rightarrow h[\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}] = 2C_{\mu\nu} - 2\xi^\parallel \mathcal{K}_{\mu\nu} - 2D_{(\mu}(D_{\nu)} \xi^\perp + \xi^{\perp\nu}),\end{aligned}$$

que reescrevemos como

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + \dot{\xi}^\parallel, \\ B^\alpha &\rightarrow B^\alpha + \partial_{ct}(D^\alpha \xi^\perp + \xi^{\perp\alpha}) - D^\alpha \xi^\parallel, \\ C_{\mu\nu} &\rightarrow C_{\mu\nu} - \xi^\parallel \mathcal{K}_{\mu\nu} - D_{(\mu}(D_{\nu)} \xi^\perp + \xi^{\perp\nu}).\end{aligned}$$

Coletando as partes escalares, temos as regras

$$\phi \rightarrow \phi + \dot{\xi}^\parallel, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} + \dot{\xi}^\perp - \frac{2}{3}\Theta \xi^\perp - \xi^\parallel, \quad (3.21)$$

$$\psi \rightarrow \psi - \xi^\parallel \frac{\Theta}{3}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \xi^\perp, \quad (3.23)$$

onde usamos o comutador da derivada de Lie com derivada espacial D^α dado na Eq. (3.4). Substituindo as transformações escalares nas regras, obtemos

$$\mathbb{B}^\alpha \rightarrow \mathbb{B}^\alpha + \dot{\xi}^{\perp\alpha}, \quad (3.24)$$

$$\mathbb{F}^\alpha \rightarrow \mathbb{F}^\alpha - \xi^{\perp\alpha}. \quad (3.25)$$

E então, as perturbações tensoriais

$$W_{\mu\nu} \rightarrow W_{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

que portanto são invariantes sob transformações de calibre em primeira ordem.

Podemos formar objetos usando as perturbações escalares de forma que essa combinação seja invariante de calibre, e podemos fazer o mesmo para as perturbações vetoriais. A desvantagem nesse procedimento é que a combinação obtida não tem significado físico obvio.

3.4.1.1 Escalares Combinando as perturbações escalares, obtemos duas variáveis

$$\Phi = \phi + \partial_{ct} \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta \mathcal{E} \right), \quad (3.27)$$

$$\Psi = \psi - \frac{\Theta}{3} \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta \mathcal{E} \right), \quad (3.28)$$

invariantes de calibre. Essas variáveis, a menos de um sinal, foram introduzidas no contexto cosmológico por Bardeen (1980) [70],⁶ as expressões acima são iguais às definidas no trabalho de revisão [60]. Claramente qualquer combinação linear com coeficientes definidos na variedade de fundo ou derivadas temporais, fornecem novas variáveis invariantes de calibre, o que traz nova complicação à interpretação dessas variáveis.

Para simplificar a interpretação dessas variáveis, podemos escrevê-las em função de variáveis cujo significado físico é direto. Para tanto usaremos as perturbações mistas discutidas na Seção 3.2. Como foi dito, se estudarmos o conjunto de trajetórias definidas pelos observadores comóveis da métrica de fundo, o campo normal será dado por $\hat{n}_\mu = n_\mu - \phi n_\mu$ e, portanto, podemos usar as fórmulas desenvolvidas na Seção C.1 e na Seção C.3 para obter as variáveis cinemáticas e a curvatura das hipersuperfícies definidas por \hat{n}_μ . A perturbação no cisalhamento (Eq. C.22), usando a métrica de fundo de FLRW, fica escrita como

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = D_{(\mu}B_{\nu)} - \frac{h_{\mu\nu}}{3}D_\alpha B^\alpha + \dot{C}^t{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\Theta C^t{}_{\mu\nu},$$

e em termos das decomposições,

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = \left(D_{(\mu}D_{\nu)} - \frac{h_{\mu\nu}}{3}D^2 \right) \delta\sigma^{(s)} + D_{(\mu}B_{\nu)} + \left(\partial_{ct} - \frac{2}{3}\Theta \right) (D_{(\mu}F_{\nu)} + W_{\mu\nu}), \quad (3.29)$$

onde definimos

$$\delta\sigma^{(s)} \equiv \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E} \right). \quad (3.30)$$

A função $\delta\sigma^{(s)}$ age como potencial para o tensor de cisalhamento medido pelos observadores isotrópicos. Note também que

$$D^\mu D^\nu \delta\sigma_{\mu\nu} = \frac{2}{3}D^2(D^2 + 3K)\delta\sigma^{(s)}.$$

Além disso, como citado anteriormente, a aceleração das trajetórias dos observadores de fundo é dada por

$$\hat{a}_\mu = -D_\mu\phi.$$

Os observadores isotrópicos perceberão uma perturbação no escalar de expansão dada por (ver Eq. C.20)

$$\delta\Theta = \dot{C} + D^2\mathcal{B} + \phi\Theta, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} &= D^2 \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E} \right) + \Theta\phi + 3\dot{\psi}, \\ &= D^2\delta\sigma^{(s)} + \Theta\phi + 3\dot{\psi}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Escrevendo a perturbação na curvatura das seções espaciais (Eq. C.71), obtemos o escalar de curvatura do tensor de Riemann das hipersuperfícies

$$\delta\mathcal{R} = 2(D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} - D^2C - \mathcal{R}^{\mu\nu}C_{\mu\nu}) = -4(D^2 + 3K)\psi, \quad (3.33)$$

⁶A noção de perturbações da métrica invariantes de calibre foi introduzido originalmente por Gerlach e Sengupta (1978) [69] no estudo do colapso gravitacional.

ou seja, a variável ψ atua como potencial da perturbação na curvatura das hipersuperfícies da métrica de fundo. O tensor de Ricci dessas seções espaciais é dado pelas Eqs. (C.75), (C.76) e (C.77) e, em termos das perturbações decompostas, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\delta\mathcal{R}_\mu{}^n] &= 0, \\ \mathfrak{h}[\delta\mathcal{R}_n{}^\nu] &= -K(D^\nu\mathcal{B} + \mathcal{B}^\nu), \\ \mathfrak{h}[\delta\mathcal{R}_\mu{}^\nu] &= D_\gamma D_\mu C^{\gamma\nu} + D_\gamma D^\nu C_\mu{}^\gamma - D_\mu D^\nu C - D^2 C_\mu{}^\nu - 2\mathcal{R}_\mu{}^\gamma C_{\gamma}{}^\nu, \\ &= -D_\mu D^\nu \psi - \mathfrak{h}_\mu{}^\nu (D^2 + 4K)\psi - (D^2 - 2K)W_\mu{}^\nu. \end{aligned} \quad (3.34)$$

É interessante notar que a perturbação no tensor de Ricci depende somente da perturbação $C_\mu{}^\nu$ e sua parte escalar depende somente de ψ pois todos os termos com \mathcal{E} se cancelam. Os termos vetoriais de $C_\mu{}^\nu$ também se cancelam, com isso, a perturbação na projeção espacial da curvatura das hipersuperfícies de fundo depende somente de ψ e $W_\mu{}^\nu$.

A presença de projeções cruzadas diferentes de zero pode ser explicada da seguinte forma: a perturbação no projetor é dada por $\delta\mathfrak{h}_\mu{}^\nu = n_\mu B^\nu$ (ver Eq. C.14) e, de forma geral, podemos ver que esse projetor é nulo se e somente se $B_\mu = 0$. Como escolhemos as mesmas hipersuperfícies para descrever as variáveis cinemáticas da métrica de fundo e perturbada, os covetores \hat{n}_μ e n_μ são normais ($\hat{\mathfrak{h}}_\nu{}^\mu n_\mu = 0$ e $\mathfrak{h}_\nu{}^\mu \hat{n}_\mu = 0$) com respeito às duas métricas. No entanto, o vetor $\hat{g}^{\mu\nu} n_\nu$ é o mapeamento do covetor normal usando a métrica perturbada e, neste caso, $\hat{g}^{\mu\nu} n_\nu \mathfrak{h}_\mu{}^\alpha = -B^\alpha$. Se tivéssemos usado a métrica de fundo teríamos $g^{\mu\nu} n_\nu \mathfrak{h}_\mu{}^\alpha = 0$, ou seja, B^α mede a componente espacial adquirida por qualquer covetor temporal quando mapeado em um vetor usando a métrica perturbada. Analogamente, um vetor espacial u^μ com respeito à métrica de fundo ($\mathfrak{h}[u^\mu] = u^\mu$) é também espacial com respeito à métrica perturbada, *i.e.*, $\hat{\mathfrak{h}}[u^\mu] = \mathfrak{h}[u^\mu] + \delta\mathfrak{h}_\nu{}^\mu u^\nu = u^\mu$. Contudo, quando mapeamos para um covetor usando a métrica perturbada $u^\mu \hat{g}_{\mu\nu}$, ele adquire uma componente temporal $u^\mu \hat{g}_{\mu\nu} n^\nu = -u^\mu B_\mu$, onde novamente teríamos $u^\mu g_{\mu\nu} n^\nu = 0$ se tivéssemos usado a métrica de fundo. Com isso, a presença de B_μ faz com que tensores perturbados, que na sua versão de fundo são espaciais, adquiram componentes temporais e *vice-versa*.

As perturbações cinemáticas acima se transformam de acordo com as seguintes regras

$$\delta\sigma^{(s)} \rightarrow \delta\sigma^{(s)} - \xi^\parallel, \quad (3.35)$$

$$\delta\Theta \rightarrow \delta\Theta - (D^2 + \dot{\Theta})\xi^\parallel. \quad (3.36)$$

Essas transformações mostram que essas perturbações estão ligadas às transformações de coordenadas que envolvem ξ^\parallel . Podemos interpretar as transformações que envolvem ξ^\perp da seguinte forma. Dados dois vetores x^μ e y^μ espaciais e ortogonais na métrica de fundo, *i.e.*, $x^\mu n_\mu = y^\mu n_\mu = 0$ e $x^\mu y^\mu \mathfrak{h}_{\mu\nu} = 0$. Quando medimos o ângulo entre eles em uma hipersuperfície do modelo perturbado, usamos a métrica espacial dada na Eq. (C.12), e obtemos, em primeira ordem, o ângulo

$$\delta\theta = \frac{\hat{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu}{\sqrt{\hat{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \sqrt{\hat{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} y^\mu y^\nu}} = \frac{2x^\mu y^\nu}{|x||y|} C_{\mu\nu} = \frac{2x^\mu y^\nu}{|x||y|} (-D_\mu D_\nu \mathcal{E} + D_{(\mu} \mathcal{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}).$$

Dessa forma, vemos que a presença de \mathcal{E} faz com que os vetores ortogonais na métrica de fundo não o sejam na métrica perturbada. Ressaltamos também que esse resultado é independente da escolha de hipersuperfícies perturbadas, ou seja, é independente do campo v^μ que aparece na métrica da Eq. (C.12).

Podemos usar as variáveis cinemáticas obtidas acima para reescrever as variáveis invariantes de calibre como

$$\Phi = \phi + \delta\sigma^{(s)}, \quad (3.37)$$

$$\Psi = \psi - \frac{\Theta}{3}\delta\sigma^{(s)}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \Xi &\equiv 3\dot{\Psi} + \Theta\Phi = \left(\delta\Theta - \dot{\Theta}\delta\sigma^{(s)} - D^2\delta\sigma^{(s)}\right), \\ &= \left(3\dot{\psi} + \Theta\phi - \dot{\Theta}\delta\sigma^{(s)}\right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde introduzimos uma nova variável invariante de calibre Ξ , a qual tem a vantagem de não depender de nenhuma derivada temporal das variáveis cinemáticas, e portanto seu valor depende somente das perturbações em um instante específico.

As variáveis invariantes de calibre são combinações de quantidades perturbadas e portanto não têm interpretação física invariante de calibre. Qualquer combinação linear com os coeficientes definidos na variedade de fundo também será invariante de calibre. Essa arbitrariedade mostra que não podemos concluir sobre a validade da série perturbativa se avaliarmos somente essas variáveis.

Por exemplo, suponha que a variável Ψ se torna muito grande em um certo instante t_1 . Como essa variável é definida da forma $\Psi = \psi - \Theta\delta\sigma^{(s)}/3$, $|\Psi(t_1)| \gg 1$ implica necessariamente que $|\psi(t_1)| \gg 1$ e/ou $|\Theta\delta\sigma^{(s)}(t_1)| \gg 1$. Entretanto, existe a possibilidade que $|\psi(t_1)| \ll 1$ e $|\delta\sigma^{(s)}| \ll 1$ mas $|\Theta\delta\sigma^{(s)}| \gg 1$, ou seja, a quantidade de fundo Θ pode ser grande o suficiente para que o produto envolvido na definição de Ψ contribua com valores maiores que um. Note que nesse exemplo o aparente problema é identificado ao avaliarmos a variável Ψ . Ela é definida de forma que se reduz à perturbação ψ em qualquer calibre onde $\delta\sigma^{(s)} = 0$, e nesse sentido o seu significado está atrelado a variável ψ . Se estivéssemos usando a variável invariante de calibre $-3\Psi/\Theta$ que em um calibre com $\psi = 0$ é igual a $\delta\sigma^{(s)}$, teríamos que no caso discutido no exemplo acima, $|-3\Psi/\Theta| \ll 1$, e nenhum problema seria identificado.

3.4.1.2 Vetoriais Claramente a quantidade $B^\alpha - \dot{F}^\alpha$ é invariante de calibre, dada as transformações nas Eqs. (3.24) e (3.25). Notamos também que a Eq. (3.29) para a perturbação no cisalhamento pode ser escrita como

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = \left(D_{(\mu}D_{\nu)} - \frac{h_{\mu\nu}D^2}{3}\right)\delta\sigma^{(s)} + D_{(\mu}\delta\sigma^{(v)\nu)} + \left(\partial_{ct} - \frac{2}{3}\Theta\right)W_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

onde definimos

$$\delta\sigma^{(v)}_\alpha \equiv B_\alpha + \dot{F}_\alpha - \frac{2}{3}\Theta F_\alpha. \quad (3.41)$$

Subindo o índice dessa equação temos

$$\delta\sigma^{(v)\alpha} = \mathbf{B}^\alpha + \dot{\mathbf{F}}^\alpha, \quad (3.42)$$

ou seja, a variável $\delta\sigma^{(v)\alpha}$, que é invariante de calibre, funciona como um potencial de cisalhamento assim como a variável $\delta\sigma^{(s)}$ para as perturbações escalares.

3.4.1.3 Tensoriais Como observado na Eq. (3.26) a variável $W_{\mu\nu}$ já é invariante de calibre.

3.4.2 Tensor Energia–Momento

Para determinarmos as regras de transformações para perturbações do tensor energia–momento, Eqs. (3.15–3.17), primeiro notamos que nesse caso algumas quantidades são definidas como perturbações simples,

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \widehat{T}_{\hat{u}\hat{u}} - T_{nn} = \hat{\rho} - \rho, \\ \delta\varepsilon &= \widehat{N}^{\hat{u}} - N^n = \hat{\varepsilon} - \varepsilon, \\ \delta p &= \frac{\widehat{T}_{\mu\nu}\hat{\mathbf{p}}^{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\mathbf{h}^{\mu\nu}}{3} = \hat{p} - p, \\ \delta\Pi_{\mu\nu} &= \hat{\mathbf{p}} \left[\widehat{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{p}}_{\mu\nu}\hat{\mathbf{p}}^{\alpha\beta}\widehat{T}_{\alpha\beta} \right] - \mathbf{h} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\mathbf{h}_{\mu\nu}\mathbf{h}^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \right] = \hat{\mathbf{p}} \left[\widehat{T}_{\mu\nu} \right] - \hat{\mathbf{p}}_{\mu\nu}\hat{p}, \end{aligned}$$

ver Eqs (C.78) e (2.22), e também definimos a contração com o campo \hat{u}^μ como $\widehat{T}_{\hat{u}\hat{u}} \equiv \hat{u}^\mu\hat{u}^\nu\widehat{T}_{\mu\nu}$, análogo ao que fizemos na Eq. (A.16). Com isso, suas regras de transformação são

$$\delta\rho \rightarrow \delta\rho - \mathcal{L}_\xi\rho = \delta\rho - \xi^\parallel\dot{\rho}, \quad (3.43)$$

$$\delta\varepsilon \rightarrow \delta\varepsilon - \mathcal{L}_\xi\varepsilon = \delta\varepsilon - \xi^\parallel\dot{\varepsilon}, \quad (3.44)$$

$$\delta p \rightarrow \delta p - \mathcal{L}_\xi p = \delta p - \xi^\parallel\dot{p}, \quad (3.45)$$

$$\delta\Pi_{\mu\nu} \rightarrow \delta\Pi_{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

onde a última equação mostra que $\delta\Pi^{(d)}$, $\delta\Pi^{(v)}_\mu$ e $\delta\Pi^{(t)}_{\mu\nu}$ são invariantes de calibre. As outras perturbações são mistas e dadas pelo campo de velocidades do fluido, *i.e.*,

$$V_\mu = \mathbf{h}[\delta u_\mu] = \mathbf{h}[\hat{u}_\mu] - \mathbf{h}[n_\mu] = \mathbf{h}[\hat{u}_\mu],$$

e consequentemente sob transformação de calibre temos

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} + \xi^\parallel, \quad (3.47)$$

$$V_\mu \rightarrow V_\mu. \quad (3.48)$$

Existem várias combinações possíveis para formarmos variáveis invariantes de calibre utilizando as perturbações no tensor energia–momento e na métrica. Definiremos aqui

aquelas que aparecerão nas equações de movimento invariantes de calibre a serem descritas na Seção 3.5. As perturbações na densidade de energia, número conservado, pressão e velocidade podem ser combinadas com o potencial de cisalhamento (Eq. 3.30) para formarmos as quantidades invariantes,

$$\overline{\delta\rho} = \delta\rho - \delta\sigma^{(s)}\dot{\rho}, \quad (3.49)$$

$$\overline{\delta\varepsilon} = \delta\varepsilon - \delta\sigma^{(s)}\dot{\varepsilon}, \quad (3.50)$$

$$\overline{\delta p} = \delta p - \delta\sigma^{(s)}\dot{p}, \quad (3.51)$$

$$\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + \delta\sigma^{(s)}. \quad (3.52)$$

Note que a fórmula para as variáveis escalares são similares. Em geral, uma perturbação escalar simples δf se transforma da seguinte forma,

$$\delta f \rightarrow \delta f - \xi^\mu \nabla_\mu f = \delta f - \xi^\parallel \dot{f}, \quad (3.53)$$

onde pode-se definir uma variável invariante de calibre dada por

$$\overline{\delta f} \equiv \delta f - \delta\sigma^{(s)}\dot{f}. \quad (3.54)$$

3.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Podemos escrever as equações de Einstein em termos da decomposição como descrita na Seção 3.3. Para tanto partimos das equações de movimento para a métrica perturbada, *i.e.*,

$$\widehat{G}_{\mu\nu} + \Lambda\widehat{g}_{\mu\nu} = \kappa\widehat{T}_{\mu\nu},$$

e a reescrevemos da seguinte forma

$$\widehat{R}_\mu{}^\nu = \kappa\widehat{\mathcal{T}}_\mu{}^\nu, \quad (3.55)$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_\mu{}^\nu = \widehat{T}_\mu{}^\nu - \frac{\delta_\mu{}^\nu}{2}\widehat{T}, \quad (3.56)$$

onde definimos o tensor fonte $\widehat{\mathcal{T}}_\mu{}^\nu$. Essa equação pode ser dividida em termos da componente de fundo mais perturbações. Como estamos impondo que a métrica de fundo é de FLRW e satisfaz as equações de Einstein, a equação acima se reduz a

$$\delta R_\mu{}^\nu = \kappa\delta\mathcal{T}_\mu{}^\nu. \quad (3.57)$$

Para estudarmos como essas equações se transformam quando mudamos o calibre, usamos o fato de que os tensores de fundo que aparecem nessas equações são da forma $f_\mu{}^\nu = f^{(n)}n_\mu n^\nu + f^{(g)}\delta_\mu{}^\nu$, onde $f^{(n)}$ e $f^{(g)}$ são constantes nas hipersuperfícies, *i.e.*, $D_\mu f^{(n)} = D_\mu f^{(g)} = 0$. Portanto, as perturbações dessas quantidades se transformam como

$$\delta f_\mu{}^\nu \rightarrow \delta f_\mu{}^\nu - \mathcal{L}_\xi f_\mu{}^\nu.$$

A derivada de Lie pode ainda ser simplificada,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi f_\mu^\nu &= \mathcal{L}_\xi (f^{(n)}n_\mu n^\nu + f^{(g)}\delta_\mu^\nu), \\ &= \left(\xi^\parallel f^{(n)}n_\mu n^\nu + \xi^\parallel f^{(g)}\delta_\mu^\nu \right) + f^{(n)}\mathcal{L}_\xi(n_\mu n^\nu), \\ &= \xi^\parallel \nabla_n f_\mu^\nu - f^{(n)}(n_\mu \partial_{ct} \mathfrak{h}[\xi^\nu] + n^\nu D_\mu \xi^\parallel),\end{aligned}$$

e, logo, a variação de calibre tem o seguinte efeito

$$\delta f_\mu^\nu \rightarrow \delta f_\mu^\nu + \xi^\parallel \nabla_n f_\mu^\nu + f^{(n)}(n_\mu \partial_{ct} (D^\nu \xi^\perp + \xi^{\perp\nu}) + n^\nu D_\mu \xi^\parallel).$$

Podemos combinar o tensor f_μ^ν com as perturbações da métrica para obtermos a perturbação invariante de calibre, a saber

$$\overline{\delta f}_\mu^\nu \equiv \delta f_\mu^\nu - \delta\sigma^{(s)}\nabla_n f_\mu^\nu - f^{(n)}(n_\mu B^\nu - n_\mu D^\nu \delta\sigma^{(s)} - n^\nu D_\mu \delta\sigma^{(s)}),$$

onde suas projeções são dadas por

$$\overline{\delta f}_n{}^n = \delta f_n{}^n - \delta\sigma^{(s)}\partial_{ct}(f^{(n)} - f^{(g)}), \quad (3.58)$$

$$\mathfrak{h}[\overline{\delta f}_n{}^\nu] = \mathfrak{h}[\delta f_n{}^\nu] + f^{(n)}(B^\nu - D^\nu \delta\sigma^{(s)}), \quad (3.59)$$

$$\mathfrak{h}[\overline{\delta f}_\mu{}^n] = \mathfrak{h}[\delta f_\mu{}^n] - f^{(n)}D_\mu \delta\sigma^{(s)}, \quad (3.60)$$

$$\mathfrak{h}[\overline{\delta f}_\mu{}^\nu] = \mathfrak{h}[\delta f_\mu{}^\nu] - \delta\sigma^{(s)}f^{(g)}\mathfrak{h}_\mu{}^\nu. \quad (3.61)$$

Usando as definições acima, escrevemos a versão invariante de calibre da Eq. (3.57) da forma

$$\overline{\delta R}_\mu{}^\nu = \kappa \overline{\delta \mathcal{T}}_\mu{}^\nu. \quad (3.62)$$

Vale ressaltar que para obter essa expressão, é necessário utilizar as equações de Einstein para a métrica de fundo, *i.e.*, $R^{(n)} = \kappa \mathcal{T}^{(n)}$ e $R^{(g)} = \kappa \mathcal{T}^{(g)}$.

3.5.1 Tensor de Ricci

Para obtermos um tensor invariante de calibre associado ao tensor de Ricci, calculamos primeiro a perturbação

$$\begin{aligned}\delta R_\mu{}^\nu &= \delta R_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} - R_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu}, \\ &= \delta R_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} + (R^{(n)} - R^{(g)})(2\phi n_\mu n^\nu + n_\mu B^\nu) - R^{(g)}(B_\mu n^\nu + 2C_\mu{}^\nu),\end{aligned}$$

onde utilizamos a Eq. (C.1). Para reescrever o tensor de Ricci da métrica de fundo a Eq. (2.15), *i.e.*,

$$R_{\mu\nu} = R^{(n)}n_\mu n_\nu + R^{(g)}g_{\mu\nu} = (R^{(n)} - R^{(g)})n_\mu n_\nu + R^{(g)}\mathfrak{h}_{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

onde

$$R^{(n)} \equiv \left(2K - \frac{2}{3}\dot{\Theta} \right), \quad R^{(g)} \equiv \left(2K + \frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3} \right).$$

A primeira projeção tem a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
\delta R_n{}^n &= \delta R_{nn} + 2(R^{(n)} - R^{(g)})\phi, \\
&= -\left(\delta\dot{\Theta} + \frac{2}{3}\Theta\delta\Theta - \frac{2}{3}\Theta^2\phi - \dot{\Theta}\phi + D^2\phi\right) - 2\left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3}\right)\phi, \\
&= -\left(\delta\dot{\Theta} + \frac{2}{3}\Theta\delta\Theta + \dot{\Theta}\phi + D^2\phi\right), \\
&= -\left(\dot{\Xi} + \frac{2}{3}\Theta\Xi + (\dot{\Theta} + D^2)\Phi + \ddot{\Theta}\delta\sigma^{(s)} + \frac{2}{3}\Theta\dot{\Theta}\delta\sigma^{(s)}\right), \\
&= -\left(\dot{\Xi} + \frac{2}{3}\Theta\Xi + (\dot{\Theta} + D^2)\Phi\right) - \partial_{ct}\left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3}\right)\delta\sigma^{(s)},
\end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (C.39) e as simplificações que ocorrem quando a métrica de fundo é de FLRW. Usando a Eq. (3.58) obtemos a projeção invariante de calibre,

$$\bar{\delta R}_n{}^n = -\left(\dot{\Xi} + \frac{2}{3}\Theta\Xi + (\dot{\Theta} + D^2)\Phi\right). \quad (3.64)$$

A próxima projeção que usaremos, obtida usando a Eq. (C.47), é

$$\begin{aligned}
D^\mu \mathbf{h}[\delta R_\mu{}^n] &= D^\mu \mathbf{h}[\delta R_{\mu n}] + R^{(g)}D^\mu B_\mu, \\
&= D^2\left(-2\dot{\psi} - \frac{2}{3}\Theta\phi + 2K\delta\sigma^{(s)}\right).
\end{aligned}$$

Dessa forma, com o auxílio da Eq. (3.60), obtemos a versão invariante de calibre da parte escalar

$$D^\mu \mathbf{h}[\bar{\delta R}_\mu{}^n] = -\frac{2}{3}D^2\Xi. \quad (3.65)$$

Repetindo o cálculo para a parte vetorial temos

$$\mathbf{h}[\delta R_\mu{}^n] = \frac{1}{2}\left(D^2\delta\sigma^{(v)}{}_\mu + 2K\delta\sigma^{(v)}{}_\mu\right) - \left(2K + \frac{\Theta^2 + \dot{\Theta}}{3}\right)\mathbf{B}_\mu,$$

onde, usando novamente a Eq. (3.60), obtemos

$$\mathbf{h}[\bar{\delta R}_\mu{}^n] = \frac{1}{2}\left(D^2\delta\sigma^{(v)}{}_\mu + 2K\delta\sigma^{(v)}{}_\mu\right). \quad (3.66)$$

Por conveniência, obtemos as fórmulas

$$D^2 D_\mu D_\nu \mathcal{E} = D_\mu D_\nu (D^2 \mathcal{E} + 6K\mathcal{E}) - 2K\mathbf{h}_{\mu\nu} D^2 \mathcal{E}, \quad (3.67)$$

$$D_\gamma D_\mu D^\gamma D_\nu \mathcal{E} = D_\mu D_\nu (D^2 + 5K)\mathcal{E} - \mathbf{h}_{\mu\nu} K D^2 \mathcal{E}, \quad (3.68)$$

para calcularmos a projeção espacial do tensor de Ricci. Aplicando as simplificações da métrica de fundo e as fórmulas acima na Eq. (C.53), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} [\delta R_{\mu}{}^{\nu}] &= D_{\mu} D^{\nu} (\Phi - \Psi) \\
&+ \left(\frac{\dot{\Xi} + 2\Theta\Xi}{3} - D^2\Psi + \frac{\dot{\Theta}\Phi}{3} - 4K\psi + \frac{\ddot{\Theta}\delta\sigma^{(s)}}{3} + \frac{2\Theta\dot{\Theta}\delta\sigma^{(s)}}{3} \right) \mathfrak{h}_{\mu}{}^{\nu} \\
&+ \left(D_{(\mu}\delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} + \frac{1}{3}\Theta D_{(\mu}\delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} \right) \mathfrak{h}^{\alpha\nu} \\
&+ \ddot{W}_{\mu}{}^{\nu} + \Theta\dot{W}_{\mu}{}^{\nu} - D^2W_{\mu}{}^{\nu} + 2KW_{\mu}{}^{\nu},
\end{aligned} \tag{3.69}$$

e, dada a Eq. (3.61), sua versão invariante de calibre,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} [\overline{\delta R}_{\mu}{}^{\nu}] &= D_{\mu} D^{\nu} (\Phi - \Psi) \\
&+ \left(\frac{\dot{\Xi} + 2\Theta\Xi}{3} - D^2\Psi + \frac{\dot{\Theta}\Phi}{3} - 4K\Psi \right) \mathfrak{h}_{\mu}{}^{\nu} \\
&+ \left(D_{(\mu}\delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} + \frac{1}{3}\Theta D_{(\mu}\delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} \right) \mathfrak{h}^{\alpha\nu} \\
&+ \ddot{W}_{\mu}{}^{\nu} + \Theta\dot{W}_{\mu}{}^{\nu} - D^2W_{\mu}{}^{\nu} + 2KW_{\mu}{}^{\nu}.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

3.5.2 Tensor Fonte

O último ingrediente necessário para obter as equações de movimento é a perturbação no tensor fonte (Eq. 3.56) invariante de calibre. Com esse objetivo, usamos a Eq. (C.81) e obtemos

$$\delta\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\delta\rho + 3\delta p}{2} n_{\mu} n^{\nu} + (\rho + p)(V_{\mu} n^{\nu} + n_{\mu}(V^{\nu} + B^{\nu})) + \frac{\delta\rho - \delta p}{2} \mathfrak{h}_{\mu}{}^{\nu} + \delta\Pi_{\mu}{}^{\nu}. \tag{3.71}$$

O tensor $\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu}$ de fundo é calculado usando a Eq. (2.22), a saber

$$\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu} = \mathcal{T}^{(n)} n_{\mu} n^{\nu} + \mathcal{T}^{(g)} \delta_{\mu}{}^{\nu}, \tag{3.72}$$

$$\mathcal{T}^{(n)} = \rho + p, \tag{3.73}$$

$$\mathcal{T}^{(g)} = \frac{\rho - p}{2}. \tag{3.74}$$

Com as Eqs (3.58–3.61), temos as suas versões invariantes de calibre,

$$\overline{\delta\mathcal{T}}_n{}^n = \frac{\overline{\delta\rho} + 3\overline{\delta p}}{2}, \tag{3.75}$$

$$\mathfrak{h} [\overline{\delta\mathcal{T}}_{\mu}{}^n] = -(\rho + p) (D_{\mu}\overline{\mathcal{V}} + \mathbf{v}_{\mu}), \tag{3.76}$$

$$\mathfrak{h} [\overline{\delta\mathcal{T}}_{\mu}{}^{\nu}] = \left(\frac{\overline{\delta\rho} - \overline{\delta p}}{2} + \frac{D^2\delta\Pi^{(d)}}{3} \right) \mathfrak{h}_{\mu}{}^{\nu} - D_{\mu} D^{\nu} \delta\Pi^{(d)} + D_{(\mu}\delta\Pi^{(v)}_{\alpha)} \mathfrak{h}^{\alpha\nu} + \delta\Pi^{(t)}{}_{\mu}{}^{\nu}, \tag{3.77}$$

onde usamos a decomposição de $\delta\Pi_\mu{}^\nu$ definida na Eq. (3.18).

O tensor energia-momento perturbado também satisfaz a equação de conservação, como discutido na Seção C.4, e essa define um campo vetorial $\hat{J}^\nu \equiv \widehat{\nabla}_\mu \widehat{T}^{\mu\nu}$ que deve satisfazer $\hat{J}^\nu = 0$. Como o tensor energia-momento de fundo também satisfaz a mesma equação, *i.e.*, $J^\nu = 0$, a perturbação $\delta J^\nu \equiv \hat{J}^\nu - J^\nu$ é uma perturbação simples e, como $J^\nu = 0$, $\delta J^\nu = 0$ será naturalmente invariante de calibre. A Eq. (C.86) é satisfeita identicamente já que $D_\mu p = 0$. Tomando o divergente da Eq. (C.87) temos

$$D^2 \left(\overline{\delta p} + \overline{\mathcal{V}} \dot{p} + (\rho + p)(\dot{\overline{\mathcal{V}}} - \Phi) + \frac{2}{3} D^2 \delta\Pi^{(d)} + 2K \delta\Pi^{(d)} \right) = 0, \quad (3.78)$$

onde a mudança de variáveis dependentes de calibre para suas versões independentes é simples. Com a Eq. (C.88) temos a expressão

$$\dot{\delta\rho} + \phi\dot{\rho} + \Theta(\delta\rho + \delta p) + (D^2\mathcal{V} + \delta\Theta)(\rho + p) = 0,$$

que reescrevemos em termos das invariantes de calibre usando a equação de fundo para o fluido (Eq. 2.29),

$$\dot{\overline{\delta\rho}} + \Phi\dot{\rho} + \Theta(\overline{\delta\rho} + \overline{\delta p}) + (D^2\overline{\mathcal{V}} + \Xi)(\rho + p) = 0. \quad (3.79)$$

A última equação necessária é obtida da Eq. (C.89),

$$\dot{\delta\varepsilon} + \phi\dot{\varepsilon} + \Theta\delta\varepsilon + (D^2\mathcal{V} + \delta\Theta)\varepsilon = 0,$$

e, analogamente ao feito para equação de $\delta\rho$, temos

$$\dot{\overline{\delta\varepsilon}} + \Phi\dot{\varepsilon} + \Theta\overline{\delta\varepsilon} + (D^2\overline{\mathcal{V}} + \Xi)\varepsilon = 0, \quad (3.80)$$

onde novamente usamos a equação de fundo $\dot{\varepsilon} + \Theta\varepsilon = 0$.

3.5.3 Equações Escalares

As equações de movimento para os termos escalares podem ser obtidas da Eq. (3.62) usando as expressões para as perturbações no tensor de Ricci Eqs. (3.64), (3.65) e (3.70) e no tensor fonte Eqs. (3.75–3.77). A projeção temporal e o traço da projeção espacial das equações de movimento são

$$-\left(\dot{\Xi} + \frac{2}{3}\Theta\Xi + (\dot{\Theta} + D^2)\Phi \right) = \kappa \frac{\overline{\delta\rho} + 3\overline{\delta p}}{2}, \quad (3.81)$$

$$\dot{\Xi} + 2\Theta\Xi + D^2\Phi - 4D^2\Psi + \dot{\Theta}\Phi - 12K\Psi = 3\kappa \left(\frac{\overline{\delta\rho} - \overline{\delta p}}{2} \right), \quad (3.82)$$

e, subtraindo o traço da projeção espacial, temos

$$\left(D_\mu D^\nu - \frac{h_\mu{}^\nu D^2}{3} \right) (\Phi - \Psi) = -\kappa \left(D_\mu D^\nu - \frac{h_\mu{}^\nu D^2}{3} \right) \delta\Pi^{(d)}.$$

Tomando a derivada segunda da equação acima e utilizando a inversa do operador de Laplace–Beltrami, como discutido na Seção 3.3, obtemos

$$\Psi - \Phi = \kappa \delta \Pi^{(d)}. \quad (3.83)$$

A equação escalar obtida das projeções Eq. (3.65) e Eq. (3.76) é expressa como

$$\Xi = \frac{3}{2} \kappa (\rho + p) \bar{\mathcal{V}}. \quad (3.84)$$

As equações obtidas acima são de segunda ordem nas derivadas temporais de Ψ e suas fontes envolvem combinações lineares da densidade de energia e pressão. Logo, podemos combinar as equações acima para obter expressões cuja fonte é simplesmente a densidade de energia ou pressão. Vale notar que naturalmente encontraríamos esse formato caso tivéssemos trabalhado com as equações de Einstein na forma usual, ou seja, usando o tensor de Einstein. A equação relacionada com a densidade de energia é alcançada somando as Eqs. (3.81) e (3.82),

$$\frac{1}{3} \Theta \Xi - D^2 \Psi - 3K \Psi = \frac{\kappa}{2} \bar{\delta \rho}. \quad (3.85)$$

Usando essa equação para eliminar a densidade de energia na (3.82), temos

$$\dot{\Xi} + \Theta \Xi + \dot{\Theta} \Phi + D^2 (\Phi - \Psi) - 3K \Psi = -\frac{3}{2} \kappa \bar{\delta p}. \quad (3.86)$$

Em termos das quantidades dependentes de calibre, podemos reescrever as equações acima da forma (ver Seção 3.4.1.1)

$$\frac{\Theta \delta \Theta}{3} + \frac{\delta \mathcal{R}}{4} = \frac{\kappa}{2} \delta \rho, \quad (3.87)$$

$$\delta \Theta - 3K \delta \sigma^{(s)} - D^2 \delta \sigma^{(s)} = \frac{3}{2} \kappa (\rho + p) \mathcal{V}, \quad (3.88)$$

$$\delta \dot{\Theta} + \Theta \delta \Theta + \mathcal{L}_{\delta n} \Theta - D_\mu \hat{a}^\mu + \frac{\delta \mathcal{R}}{4} = -\frac{3\kappa}{2} \delta p, \quad (3.89)$$

$$\psi - \phi - \delta \sigma^{(s)} - \frac{\Theta}{3} \delta \sigma^{(s)} = \kappa \delta \Pi^{(d)}, \quad (3.90)$$

que são úteis por explicitarem o aspecto geométrico das equações de movimento.

As Eqs. (3.83–3.86) formam o conjunto de equações para as perturbações escalares em torno de uma métrica de FLRW. Note que essas quatro equações envolvem seis variáveis invariantes de calibre $(\Phi, \Psi, \bar{\delta \rho}, \bar{\delta p}, \bar{\mathcal{V}}, \delta \Pi^{(d)})$,⁷ o que significa que precisamos de equações adicionais.

No contexto da hidrodinâmica relativística discutida na Seção B.2, essas são obtidas das equações de estado termodinâmicas somadas às equações dissipativas. Pode-se ainda

⁷Lembrando que as equações de conservação do fluido (Eqs. 3.78, 3.79) podem ser obtidas das Eqs. (3.87–3.90) e não constituem novas equações.

usar teorias microscópicas que descrevem as relações entre os constituintes do modelo para obter, através da teoria cinética relativística (discutida brevemente na Seção B.3), as equações necessárias para termos um sistema completo.

Se considerarmos que, mesmo no universo perturbado, o tensor energia–momento ainda pode ser descrito por um fluido perfeito, temos automaticamente que $\delta\Pi_{\mu\nu} = 0$. Além disso, se afirmarmos que o sistema se encontra em equilíbrio termodinâmico local, teremos que a densidade de energia, número de partículas e pressão poderão ser descritos pela termodinâmica. Nesse sistema, teremos as mesmas quatro equações (3.83–3.86) mais a equação da conservação de número de partículas (Eq. 3.80) e seis variáveis escalares invariantes de calibre. A última equação é fornecida através de uma equação de estado, que é comumente dada pela relação da pressão com a densidade de energia e número de partículas, *i.e.*, $\hat{p} = \hat{p}(\hat{\rho}, \hat{\epsilon})$.

Quando há equilíbrio local, a entropia \hat{S} é conservada, *i.e.*, $\widehat{\nabla}_{\hat{a}}\hat{S} = 0$, e em termos das perturbações temos

$$\widehat{\nabla}_{\hat{a}}\hat{S} = (v^{\mu} + \phi n^{\mu} + B^{\mu})\nabla_{\mu}S + \delta\dot{S} = \delta\dot{S} = 0, \quad (3.91)$$

onde usamos que a entropia de fundo é constante. Nesse caso é comum escrever a pressão como função da densidade de energia e entropia, $\hat{p} = \hat{p}(\hat{\rho}, \hat{S})$. Desta forma a perturbação na pressão pode ser escrita como

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho + \iota \delta S,$$

onde

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S, \quad \iota \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{\rho},$$

e a variável c_s^2 representa a velocidade do som no fluido. Como a entropia é conservada $\dot{S} = 0$, temos que $\dot{p} = c_s^2 \dot{\rho} + \iota \dot{S} = c_s^2 \dot{\rho}$, e portanto $c_s^2 = \dot{p}/\dot{\rho}$. Usando as equações de fundo, podemos reescrever a velocidade do som como,

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\frac{\dot{p}}{\Theta(\rho + p)} = -\frac{\partial_{ct} \ln(\rho + p)}{\Theta} - 1, \quad \Theta(c_s^2 + 1) = -\partial_{ct} \ln(\rho + p). \quad (3.92)$$

Nesse caso é conveniente reescrever as equações de movimento de forma que a fonte seja $\overline{\delta\rho}$ e $\overline{\delta S}$,⁸ para tanto primeiro note que

$$\overline{\delta p} = \delta p - \delta\sigma^{(s)}\dot{p} = c_s^2 \delta\rho + \iota \delta S - \delta\sigma^{(s)}c_s^2 \dot{\rho} = c_s^2 \overline{\delta\rho} + \iota \overline{\delta S}. \quad (3.93)$$

Combinando as Eqs. (3.85) e (3.86) e usando que, pela Eq. (3.83), $\Phi = \Psi$, obtemos

$$\dot{\Xi} + (c_s^2 + 1)\Theta\Xi + \left(\dot{\Theta} - 3c_s^2 D^2 - 3(3c_s^2 + 1)K \right) \Phi = -\frac{3}{2}\kappa\iota\overline{\delta S}.$$

⁸Como S é um escalar, vale a Eq. (3.54) para a definição da versão invariante de calibre. Contudo $\dot{S} = 0$ e, portanto, nesse caso a perturbação é naturalmente invariante de calibre $\overline{\delta S} = \delta S$.

Dado que $\Phi = \Psi$, a variável $\Xi = 3\dot{\Phi} + \Theta\Phi = 3\partial_{ct}(\Phi/x)x$, onde usamos a Eq. (2.11) e a variável de desvio para o vermelho definida na Eq. (2.38). Portanto, em conjunto com a Eq. (3.92) obtemos

$$\begin{aligned} 3\partial_{ct}\left(\frac{\partial_{ct}(\Phi/x)x}{\rho+p}\right) + \left(\dot{\Theta} - 3c_s^2 D^2 - 3(3c_s^2 + 1)K\right)\frac{x\Phi}{x(\rho+p)} &= -\frac{3}{2}\frac{\kappa\iota}{\rho+p}\overline{\delta S}, \\ \partial_{ct}^2\left(\frac{\Phi}{x}\right)\lambda^2 + \partial_{ct}\left(\frac{\Phi}{x}\right)\partial_{ct}\lambda^2 + \left(\frac{\dot{\Theta}}{3} - c_s^2 D^2 - (3c_s^2 + 1)K\right)\frac{\Phi}{x}\lambda^2 &= -\frac{1}{2}\kappa\iota\frac{\lambda^2}{x}\overline{\delta S}, \end{aligned}$$

onde $\lambda \equiv \sqrt{3x/(a_0^2\kappa(\rho+p))}$. Fazendo a troca de variável,

$$U \equiv \lambda\frac{\Phi}{x}, \quad (3.94)$$

eliminamos os termos com derivadas primeiras no tempo,

$$\ddot{U} + \left(\frac{\dot{\Theta}}{3} - c_s^2 D^2 - (3c_s^2 + 1)K - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right)U = -\frac{1}{2}\kappa\iota\frac{\lambda}{x}\overline{\delta S}. \quad (3.95)$$

Para simplificar a expressão acima, note que usando a Eq. (3.92) temos

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\Theta}{6}(3c_s^2 + 2), \quad 2\frac{\dot{\lambda}\dot{\Theta}}{\lambda\Theta} = \dot{\Theta}(c_s^2 + 1) - \frac{\dot{\Theta}}{3}, \quad (3.96)$$

e subtraindo a Eq. (2.24) da Eq. (2.25) obtemos

$$\dot{\Theta} = -\frac{3\kappa}{2}(\rho+p) + 3K,$$

que derivando uma vez em relação ao tempo,

$$\ddot{\Theta} = -\frac{3\kappa}{2}\partial_{ct}(\rho+p) - 2\Theta K = \frac{3\kappa}{2}\Theta(c_s^2 + 1)(\rho+p) - 2\Theta K,$$

onde usamos a Eq. (2.12). Combinando as duas equações acima, chegamos à expressão

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -\dot{\Theta}(c_s^2 + 1) + (3c_s^2 + 1)K. \quad (3.97)$$

Combinando as Eqs. (3.96), (3.97) na Eq. (3.95), a equação de movimento fica escrita como

$$\begin{aligned} \ddot{U} - \left(\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} + 2\frac{\dot{\lambda}\dot{\Theta}}{\lambda\Theta} + \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} + c_s^2 D^2\right)U &= -\frac{1}{2}\kappa\iota\frac{\lambda}{x}\overline{\delta S}, \\ \ddot{U} - \frac{\partial_{ct}^2(\lambda\Theta)}{\lambda\Theta}U - c_s^2 D^2 U &= -\frac{1}{2}\kappa\iota\frac{\lambda}{x}\overline{\delta S}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

A equação acima depende somente da variável U , das quantidades de fundo e da função constante $\delta\bar{S}$. Isso mostra que, para um tensor energia–momento no equilíbrio, o sistema de equações de movimento se reduz a uma única equação. Podemos reescrever essa equação usando o tempo conforme, como definido na Seção 2.3. A derivada segunda em relação ao tempo de uma função escalar arbitrária, f , pode ser escrita como

$$\ddot{f} = \frac{1}{a^2}(f'' - \mathcal{H}f'), \quad \partial_{ct}^2 \left(\frac{f}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{f''}{\sqrt{x}} - \frac{f}{\sqrt{x}} \frac{(\sqrt{x})''}{\sqrt{x}} \right),$$

onde \mathcal{H} é a função de Hubble conforme definida na Eq. (2.36). Usando esses resultados na Eq. (3.98) temos,

$$u'' - \frac{\theta''}{\theta}u - c_s^2 \tilde{D}^2 u = -\frac{1}{2} \kappa \lambda a^2 \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \delta\bar{S}, \quad (3.99)$$

onde definimos

$$u \equiv U\sqrt{x} = \lambda\Phi/\sqrt{x}, \quad (3.100)$$

$$\theta \equiv a_0 \lambda \frac{\Theta}{3} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}x^2 \mathcal{H}}{\sqrt{a_0^2 \kappa (\rho + p)}}, \quad (3.101)$$

$$\tilde{D}^2 \equiv a^2 \mathbf{h}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \check{\mathbf{h}}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu, \quad (3.102)$$

o operador \tilde{D}^2 representa o Laplaciano na hipersuperfície conforme, e como $\mathcal{L}_{\check{\mathbf{n}}} \check{\mathbf{h}}^{\mu\nu} = 0 = \check{\mathbf{h}}^{\mu\nu}$, é fácil ver que $[\partial_{ct}, \tilde{D}^2] = [\mathcal{L}_{\check{\mathbf{n}}}, \tilde{D}^2] = 0$. Os fatores arbitrários de a_0 foram adicionados de forma a λ ter dimensão de distância conforme, note também que a definição de θ/a_0 coincide com o θ definido na Eq. (5.26) da Ref. [60], porém diferente dessa referência, a variável u é definida com unidade de distância conforme.

3.5.4 Operador de Laplace–Beltrami

As equações obtidas nas seções anteriores são equações diferenciais parciais acopladas. Contudo, as derivadas espaciais podem ser colocadas na forma do operador de Laplace–Beltrami, o que pode ser usado para simplificar a resolução desse sistema de equações. Usamos o fato de que o conjunto de autofunções desse operador define um conjunto completo de funções, com o qual pode-se decompor qualquer função definida na variedade, *i.e.*,

$$f = \int d^3q f_q \mathcal{Y}_q, \quad (3.103)$$

onde \mathcal{Y}_k representa a autofunção com autovalor $-q^2$, $D^2 \mathcal{Y}_q + q^2 \mathcal{Y}_q = 0$. Representamos a decomposição com o símbolo de integração, mas vale lembrar que, no caso de seções espaciais esféricas, os autovalores são discretos e a integração é trocada por um somatório.

As equações de movimento obtidas acima são lineares e com coeficientes constantes nas hipersuperfícies. Nesse caso, podemos escrevê-las em termos dos coeficientes $f_q(t)$. Como regra, para escrever as equações nessa base, basta trocar a função pelos seus coeficientes ($f \rightarrow f_q$) e o operador de Laplace–Beltrami pelo seu autovalor ($D^2 \rightarrow -q^2$).

Usando o comutador dado na Eq. (3.3), temos que

$$[\partial_{ct}, D^2]\mathcal{Y}_q = -\frac{2\Theta}{3}\mathcal{Y}_q = \partial_{ct}q^2\mathcal{Y}_q,$$

onde escolhemos $\dot{\mathcal{Y}}_q = 0$. Isso mostra que $q^2 = \tilde{q}^2 a^{-2}$, onde \tilde{q} é o autovalor conforme que satisfaz $\dot{\tilde{q}} = 0$. Note que $\tilde{D}^2\mathcal{Y}_q = -\tilde{q}^2\mathcal{Y}_q$ e, para o operador definido na Eq. (3.102), definimos também a derivada

$$\tilde{D}^\mu \equiv \check{h}^{\mu\nu} D_\nu, \quad (3.104)$$

que satisfaz $[\partial_{ct}, \tilde{D}^\mu] = 0$ e $\tilde{D}^2 = D_\mu \tilde{D}^\mu$.

Por fim, vale ressaltar que o operador de Laplace–Beltrami é auto-adjunto em relação ao produto interno

$$f \cdot g \equiv \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} f^*(\tilde{x})g(\tilde{x}), \quad (3.105)$$

onde $\tilde{\Sigma}$ representa a hipersuperfície espacial conforme e as funções complexas f e g são de quadrado integrável definidas nessa hipersuperfície. E dessa forma as autofunções \mathcal{Y}_q sempre podem ser escolhidas de forma que (veja [75])

$$\mathcal{Y}_{q_1} \cdot \mathcal{Y}_{q_2} = \delta^3(q_1 - q_2). \quad (3.106)$$

3.6 ESCOLHA DE CALIBRE

Uma vez resolvido o sistema de equações obtido na Seção 3.5, pode-se determinar a evolução temporal de todas as variáveis invariantes de calibre. Entretanto, é claramente impossível obter as variáveis dependentes de calibre a partir das suas versões independentes. Para determinar essas variáveis, é necessário fazer uma escolha de calibre, ou seja, precisamos escolher como inserir um modelo de fundo na variedade.

3.6.1 Calibre Newtoniano

Uma escolha comum é o chamado calibre Newtoniano, no qual fazemos $\mathcal{B} = \mathcal{E} = 0$. Na linguagem discutida na Seção 3.4.1.1, esse calibre equivale a escolher uma inserção da variedade de fundo de forma que os vetores espaciais ortogonais sejam ainda ortogonais na variedade perturbada e os observadores normais às seções espaciais de fundo meçam cisalhamento nulo, $\delta\sigma^{(s)} = 0$. Nesse calibre as variáveis invariantes de calibre (Eqs. 3.37–3.39) são dadas por

$$\Phi = \phi, \quad \Psi = \psi, \quad \Xi = \delta\Theta,$$

e portanto têm interpretação direta. Em termos dos observadores isotrópicos, essas variáveis representam, respectivamente, a aceleração, a perturbação na curvatura espacial e a expansão. Note também que essa escolha fixa completamente o calibre, *i.e.*, as equações

$$\delta\sigma^{(s)} - \xi^\parallel = 0, \quad \mathcal{E} + \xi^\perp = 0, \quad (3.107)$$

têm solução única para ξ^\parallel e ξ^\perp . Partindo das equações acima podemos determinar univocamente todas as perturbações utilizando as variáveis invariantes de calibre.

3.6.2 Calibre Síncrono

Outro calibre muito usado é o chamado calibre síncrono, onde escolhemos $\phi = \mathcal{B} = 0$. Nesse caso, vemos que as hipersuperfícies definidas na métrica de fundo definem na métrica perturbada um sistema de coordenadas gaussianas normais, como discutido na Seção A.2. Isso mostra que a escolha $\phi = 0$ significa que as curvas normais da métrica de fundo são geodésicas também na métrica perturbada, *i.e.*, $\hat{a}^\mu = 0$, enquanto a escolha $\mathcal{B} = 0$, diz que os vetores espaciais em relação à métrica de fundo, $x^\nu g_{\nu\mu} = 0$, são também espaciais na métrica perturbada, *i.e.*, $x^\nu \hat{g}_{\nu\mu} = -x^\mu B_\mu = 0$. Nesse calibre a variável invariante de calibre Φ tem a forma $\Phi = \delta\sigma^{(s)}$ e, portanto, representa a derivada temporal do cisalhamento das hipersuperfícies de fundo, enquanto as outras são combinações de ϕ , ψ e $\delta\sigma^{(s)}$. Esse calibre é representado pelas equações,

$$\begin{aligned}\phi + \xi^\parallel &= 0, \\ \mathcal{B} + \xi^\perp - \frac{2}{3}\Theta\xi^\perp - \xi^\parallel &= 0.\end{aligned}$$

Diferente do calibre Newtoniano, essas são equações diferenciais que relacionam a mudança de calibre com as perturbações na métrica. Contudo, uma vez que fizemos a mudança de calibre acima e obtivemos $\phi \rightarrow 0$ e $\mathcal{B} \rightarrow 0$, podemos fazer uma segunda mudança de calibre, onde ξ^\parallel é constante ($\dot{\xi}^\parallel = 0$) e ξ^\perp satisfaz $\xi^\perp - \frac{2}{3}\Theta\xi^\perp = \xi^\parallel$, que continuaremos com $\phi = \mathcal{B} = 0$. Ou seja, essas condições não fixam completamente o calibre. A liberdade remanescente em ξ^\parallel é de simples compreensão, ela representa uma diferença constante no tempo usado para nomear as seções espaciais das métricas de fundo e perturbada. Podemos fixar essa liberdade escolhendo arbitrariamente o valor da perturbação de um escalar em uma hipersuperfície. Por exemplo, usando a liberdade remanescente podemos escolher $\delta\sigma^{(s)}(t_1) \rightarrow \delta\sigma^{(s)}(t_1) - \xi^\parallel = 0$, para um instante arbitrário t_1 , fixando a liberdade de calibre residual em ξ^\parallel .

A liberdade residual em ξ^\perp não altera o valor das perturbações nas variáveis cinemáticas ($\delta\mathcal{R}$, $\delta\sigma^{(s)}$, $\delta\Theta$, \hat{a}^μ ver Seção 3.4.1.1) e, portanto, não gera nenhuma ambiguidade no cálculo do valor dessas quantidades nesse calibre. Essas são dadas por

$$\delta\sigma^{(s)} = \int_{t_1}^t d(ct)\Phi, \quad (3.108)$$

$$\psi = \Psi + \frac{\Theta}{3}\delta\sigma^{(s)}, \quad (3.109)$$

$$\delta\Theta = \Xi + (\dot{\Theta} + D^2)\delta\sigma^{(s)}, \quad (3.110)$$

$$\hat{a}^\mu = 0. \quad (3.111)$$

Ainda resta calcular o valor da perturbação \mathcal{E} . No entanto, fixando o calibre residual em ξ^\parallel como descrito acima, transformações de calibre satisfazendo $\xi^\perp - \frac{2}{3}\Theta\xi^\perp = a^2\partial_{ct}(\xi^\perp/a^2) = 0$ ainda deixam as condições $\phi = \mathcal{B} = \delta\sigma^{(s)}(t_1) = 0$ invariantes. Em outras palavras, podemos fazer ainda uma mudança de calibre com $\xi^\perp = fa^2$, onde f é uma função arbitrária nas hipersuperfícies mas constante em t . Similarmente como fizemos para ξ^\parallel ,

note que a perturbação \mathcal{E} se transforma $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \xi^\perp$, logo, podemos usar a liberdade remanescente em ξ^\perp para escolher $\mathcal{E}(t_2) = 0$, para um instante arbitrário t_2 . Dada essa escolha, reescrevemos a Eq. (3.30) como

$$\mathcal{E} = -a^2 \int_{t_2}^t d(ct) \frac{\delta\sigma^{(s)}}{a^2} = -a^2 \int_{t_2}^t d(ct) \frac{1}{a^2} \int_{t_1}^t d(ct) \Phi, \quad (3.112)$$

determinando portanto unicamente todas as perturbações a partir das variáveis invariantes de calibre.

3.6.3 Calibre de Curvatura Constante

Como vimos na seção anterior, o calibre síncrono não fixa completamente a liberdade que temos para definir a inclusão da métrica de fundo na variedade física. A fonte desse problema é que usamos uma equação diferencial para determinar ξ^\perp em termos das perturbações e, portanto, a adição de qualquer solução da equação homogênea a ξ^\perp continua satisfazendo as condições impostas pelo calibre. Porém, como veremos mais a frente, o calibre síncrono é mais adequado que o calibre Newtoniano quando estamos lidando com um universo em contração. Isso se dá porque, no calibre Newtoniano, a perturbação Φ é simplesmente igual a ϕ . Portanto se Φ cresce quando o universo contrai, então a perturbação ϕ também cresce nesse calibre. Já no calibre síncrono, $\Phi = \delta\sigma^{(s)}$ e portanto, se Φ cresce, a perturbação no cisalhamento $\delta\sigma^{(s)}$ pode também crescer mas de forma menos intensa. Por exemplo, suponha que Φ e o fator de escala a tenham um comportamento de lei de potência no tempo conforme η , $\Phi \propto \eta^{-\gamma}$ para uma constante γ positiva. Dessa forma, $a^{-1}\delta\sigma^{(s)} \propto \eta^{-\gamma+1}$, ou seja, $a^{-1}\delta\sigma^{(s)}$ se aproxima de infinito mais vagarosamente que Φ podendo até ir a zero caso $\gamma < 1$. Na Seção 3.8 discutiremos com detalhes as perturbações em um universo em contração.

É possível encontrar um calibre onde $\delta\sigma^{(s)} \neq 0$ mas que, diferente do síncrono, exista liberdade residual somente na escolha de ξ^\perp . Para tanto, note que a escolha $\psi \rightarrow \psi - \Theta\xi^\parallel/3 = 0$ fixa completamente a liberdade em ξ^\parallel e, com isso, a variável Ψ é dada por

$$\Psi = -\frac{\Theta}{3}\delta\sigma^{(s)} = -\frac{\mathcal{H}}{a}\delta\sigma^{(s)}.$$

Dessa forma, $\delta\sigma^{(s)}$ terá o mesmo comportamento que no calibre síncrono, como no exemplo acima, $a^{-1}\delta\sigma^{(s)} \propto \eta^{-\gamma+1}$.

Contudo, o cisalhamento é dado por $\delta\sigma^{(s)} = \mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + 2\Theta\mathcal{E}/3$. Se escolhêssemos fixar a liberdade em ξ^\perp impondo $\mathcal{E} = 0$, não teríamos nenhuma liberdade residual,⁹ porém, com essa escolha teríamos $a^{-1}\mathcal{B} \propto \eta^{-\gamma+1}$. Enquanto que se escolhermos o calibre ξ^\perp impondo $\mathcal{B} = 0$, teremos $a^{-2}\mathcal{E} \propto \eta^{-\gamma+2}$. Ou seja, no calibre de curvatura as perturbações têm um comportamento de lei de potência, com uma potência menor que no caso Newtoniano. Isso permite um menor valor de η sem comprometer a série perturbativa. Na Seção 3.8 mostraremos os detalhes dessa evolução e o cálculo de todas as perturbações não nulas em cada calibre e os expoentes dessas quantidades.

⁹A mudança $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \xi^\perp = 0$ define univocamente ξ^\perp .

No calibre de curvatura, assim como no síncrono, uma mudança de calibre com $\xi^{\parallel} = 0$ e $\xi^{\perp} = fa^2$ mantém invariante as condições $\mathcal{B} = \psi = 0$, onde f é uma função constante nas hipersuperfícies. Portanto escolheremos $\mathcal{E}(t_1) = 0$ para fixar completamente o calibre. Nesse caso as perturbações na métrica são dadas por

$$\delta\sigma^{(s)} = -\frac{3}{\Theta}\Psi = -\frac{a}{\mathcal{H}}\Psi, \quad (3.113)$$

$$\phi = \Phi + \partial_{ct} \left(\frac{3}{\Theta}\Psi \right) = \Phi + \frac{1}{a} \left(\frac{a}{\mathcal{H}}\Psi \right)', \quad (3.114)$$

$$\mathcal{E} = a^2 \int_{t_1}^t d(ct) \frac{3\Psi}{a^2\Theta} = a^2 \int_{\eta_1}^{\eta} d\eta \frac{\Psi}{\mathcal{H}}, \quad (3.115)$$

onde adicionamos por conveniência as fórmulas em termo do tempo conforme. Note que as equações acima envolvem somente derivadas e integrais definidas das variáveis invariantes de calibre e, portanto, não existe nenhuma ambiguidade nas soluções das variáveis de perturbação em termos das invariantes de calibre.

3.7 TESTE DA SÉRIE PERTURBATIVA

Discutimos na Seção 3.6 que as variáveis invariantes de calibre não determinam unicamente todas as quantidades perturbadas e que, para fazê-lo, precisamos escolher um calibre, o qual fornece uma interpretação das variáveis invariantes de calibre. Por exemplo, no calibre Newtoniano, Φ é simplesmente o potencial perturbação na aceleração das geodésicas ϕ , já que nesse calibre $\delta\sigma^{(s)} = 0$. Enquanto que no calibre síncrono ocorre o oposto, ou seja, $\Phi = \delta\sigma^{(s)}$ posto que $\phi = 0$. Além da escolha de calibre, precisamos determinar quais quantidades devem ser pequenas para que a série perturbativa tenha sentido.

Para tanto, é fácil se convencer que

$$\phi \ll 1, \quad a^{-1}\mathcal{B} \ll 1, \quad a^{-2}\mathcal{E} \ll 1 \text{ e } \psi \ll 1, \quad (3.116)$$

são condições necessárias para que a série perturbativa seja válida. Por exemplo, no cálculo da inversa da métrica perturbada $\hat{g}^{\mu\nu}$ (ver Eq. D.12), temos uma série polinomial nessas variáveis que não envolvem derivadas dessas quantidades. Nos termos quadráticos temos,

$$\varsigma_{\mu\nu}\varsigma^{\mu\nu} = 4 \left(\phi^2 - \frac{B_{\mu}B_{\nu}h^{\mu\nu}}{2} + C_{\mu\nu}C_{\alpha\beta}h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} \right),$$

onde $\varsigma_{\mu\nu}$ está definido abaixo da Eq. (C.1) e o termo $B_{\mu}B_{\nu}h^{\mu\nu}$ pode ser escrito em termos da métrica conforme como $B_{\mu}B_{\nu}\check{h}^{\mu\nu}/a^2$. Esse é o motivo pelo qual adicionamos o fator de a^{-1} na inequação de \mathcal{B} . O mesmo acontece para a parte tensorial, com a diferença de que nesse caso temos um fator de a^{-2} em \mathcal{E} e nenhum em ψ , já que esse termo vem multiplicado por $h_{\mu\nu}$.

Contudo precisamos garantir que os termos que estamos desprezando nas equações de movimento também são pequenos. Para tanto, note que usamos a Eq. (C.73) para definir a curvatura espacial em termos do tensor de Ricci e variáveis cinemáticas, porém

podemos usar as equações de Einstein para substituir o tensor de Ricci pelo tensor fonte e, com isso, obter as equações de movimento para a curvatura extrínseca,¹⁰ *i.e.*,

$$\hat{h} \left[\mathcal{L}_{\hat{m}} \hat{h}_{\mu\nu} \right] = 2\hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu}, \quad (3.117)$$

$$\hat{h} \left[\mathcal{L}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \right] = \kappa \hat{h} \left[\hat{\mathcal{T}}_{\mu}{}^{\nu} \right] - \hat{\mathcal{R}}_{\mu}{}^{\nu} - \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \hat{\Theta} + \hat{D}_{\mu} \hat{a}^{\nu} + \hat{a}_{\mu} \hat{a}^{\nu}. \quad (3.118)$$

Essas equações combinadas com as equações de movimento para a componente material formam o conjunto de equações que determina a evolução temporal do sistema, equivalente às equações de Einstein. Usando o modelo de fundo, podemos subtraí-lo das equações acima e assim obter equações para as perturbações. Como discutido anteriormente, a liberdade com que podemos fazer essa subtração é parametrizada pelo que chamamos de liberdade de calibre.

Subtraindo o modelo de fundo de FLRW, obtemos, com o auxílio da Eq. (C.74), as equações de movimento para $\delta\mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}$,

$$\partial_{ct} \mathbf{h} [\delta\mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}] = \kappa \mathbf{h} [\delta\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu}] - \frac{\mathbf{h}_{\mu}{}^{\nu} (2\Theta\delta\Theta + \delta n^{\mu} \nabla_{\mu} \Theta)}{3} - \Theta \delta\sigma_{\mu}{}^{\nu} - \mathbf{h} [\delta\mathcal{R}_{\mu}{}^{\nu}] + D^{\mu} \hat{a}_{\mu}, \quad (3.119)$$

enquanto para a métrica de fundo a equação de movimento é dada por,

$$\dot{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\dot{\Theta} \mathbf{h}_{\mu}{}^{\nu}}{3}, \quad (3.120)$$

ou seja, o lado direito da Eq. (3.119) é a correção de primeira ordem da equação acima e, portanto, essa correção precisa ser pequena para a série perturbativa ser bem definida.

Vamos impor que cada termo da Eq. (C.74) precisa ser muito menor que seu valor de fundo e, para os termos que forem nulos na métrica de fundo, vamos impor que esses devem ser muito menores que a evolução de fundo dada na Eq. (3.120). Se essas condições forem satisfeitas, a equação de movimento para as perturbações será bem definida.

3.7.1 Fator de Expansão

O fator de expansão aparece na equação de movimento na forma,

$$\frac{\hat{\Theta}^2}{3} \approx \frac{\Theta^2 + 2\Theta\delta\Theta}{3},$$

e portanto a restrição é dada por

$$|2\Theta\delta\Theta| \ll \Theta^2, \quad |\delta\Theta| \ll |\Theta|, \quad \left| \frac{a\delta\Theta}{\mathcal{H}} \right| \ll 1, \quad (3.121)$$

onde incluímos a restrição em termos do tempo conforme.

¹⁰A contração da equação citada é exatamente a equação de Raychaudhuri. Sua parte simétrica sem traço e anti-simétrica representam a equação de movimento para o cisalhamento e vorticidade, respectivamente, ver por exemplo [76].

3.7.2 Cisalhamento

Para obter a restrição no termo que envolve o cisalhamento, vemos que na equação de movimento ele aparece com a forma

$$\hat{\sigma}_\mu{}^\nu \hat{\Theta} \approx \delta\sigma_\mu{}^\nu \Theta.$$

Como esse termo é nulo em ordem zero, comparamos seu valor com a equação de fundo, *i.e.*,

$$\delta\sigma_\mu{}^\nu \Theta \ll \frac{\dot{\Theta} h_\mu{}^\nu}{3}. \quad (3.122)$$

A inequação acima compara dois tensores e, para ser bem definida, precisamos definir algum tipo de medida de tamanho para esses objetos. Nesse trabalho faremos isso encontrando quantidades escalares associadas aos tensores. Usando a decomposição do cisalhamento dada na Eq. (3.29) temos

$$\delta\sigma_\mu{}^\nu = \left(D_\mu \tilde{D}^\nu - \frac{h_\mu{}^\nu \tilde{D}^2}{3} \right) \frac{\delta\sigma^{(s)}}{a^2},$$

onde escolhemos os operadores diferenciais que comutam com a derivada de Lie e portanto constantes no tempo. Dado um campo vetorial u^μ espacial, conforme e de norma um ($u^\nu u^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} = 1$, $\dot{u}^\mu = 0$), contraímos o cisalhamento

$$u^\mu u^\alpha \tilde{h}_{\alpha\nu} \delta\sigma_\mu{}^\nu = \left(u^\mu u^\alpha D_\mu D_\alpha - \frac{\tilde{D}^2}{3} \right) \frac{\delta\sigma^{(s)}}{a^2}.$$

Note que $u^\mu u^\alpha D_\mu D_\alpha$, quando atuando em uma autofunção do operador de Laplace–Beltrami, será proporcional a $|\tilde{q} \cos(\varphi)|^2$, onde φ é o ângulo entre u^μ e \tilde{q}^μ . Dessa forma temos que $u^\mu u^\alpha D_\mu D_\alpha \delta\sigma^{(s)}$ será menor ou igual a $\tilde{D}^2 \delta\sigma^{(s)}$ e,¹¹ com isso, obtemos a restrição escalar

$$\left| \frac{\tilde{D}^2 \delta\sigma^{(s)}}{a^2} \right| \ll \left| \frac{\dot{\Theta}}{3\Theta} \right|, \quad \left| \frac{\mathcal{H} \tilde{D}^2 \delta\sigma^{(s)}}{a(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)} \right| \ll 1, \quad (3.123)$$

que, se satisfeita, implica na Eq. (3.122).

3.7.3 Termo de Aceleração e Derivada Temporal

A derivada de Lie da curvatura extrínseca, quando expandida em primeira ordem, gera o fator

$$\mathcal{L}_{\hat{m}} \mathcal{K}_\mu{}^\nu \approx \frac{\dot{\Theta} h_\mu{}^\nu}{3} + \frac{\delta n^\gamma \nabla_\gamma \Theta h_\mu{}^\nu}{3} = \frac{\dot{\Theta} h_\mu{}^\nu}{3} + \frac{\phi \dot{\Theta} h_\mu{}^\nu}{3},$$

¹¹Podemos utilizar dois vetores espaciais u^μ e z^μ . Nesse caso teríamos $u^\mu z^\alpha D_\mu D_\alpha$ proporcional ao produto do cosseno dos ângulos entre os vetores e \tilde{q}^μ . Portanto o resultado é válido para uma projeção arbitrária de $\delta\sigma_\mu{}^\nu$.

e, comparando os termos de ordem zero e um, impõe que $|\phi| \ll 1$. O outro termo que envolve a perturbação ϕ é o da aceleração, porém, como no caso do cisalhamento, a aceleração é nula no modelo de fundo e portanto temos

$$\frac{D_\mu \tilde{D}^\nu \phi}{a^2} \ll \frac{\dot{\Theta} \mathbf{h}_\mu{}^\nu}{3}.$$

Diferente do cisalhamento, os dois tensores comparados têm traço diferente de zero e, neste caso, basta compararmos os traços (como vimos na seção anterior $D_\mu D_\nu \leq D^2$), *i.e.*,

$$\left| \frac{\tilde{D}^2 \phi}{a^2} \right| \ll |\dot{\Theta}|, \quad \left| \frac{\tilde{D}^2 \phi}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2} \right| \ll 1. \quad (3.124)$$

3.7.4 Curvatura Espacial

A curvatura espacial $\hat{\mathcal{R}}_\mu{}^\nu$ em primeira ordem é dada por $\hat{\mathcal{R}}_\mu{}^\nu \approx 2K\mathbf{h}_\mu{}^\nu + \delta\mathcal{R}_\mu{}^\nu$. Tomando o traço, podemos impor

$$\left| \frac{2(\tilde{D}^2 + 3\tilde{K})\psi}{3\tilde{K}} \right| \ll 1. \quad (3.125)$$

Os termos fora da diagonal são dados por derivadas espaciais de ψ (Eq. 3.34). Como mostramos para o cisalhamento, essas quantidades têm valores menores ou iguais ao traço.

Contudo, quando tratamos de modelos cuja curvatura espacial de fundo é nula ($\tilde{K} = 0$), o tensor $\mathcal{R}_\mu{}^\nu$ também é nulo. Portanto, precisamos comparar a perturbação nesse tensor com a equação de fundo, como fizemos para o cisalhamento e aceleração. Nesse caso, usando a Eq. (3.34), obtemos

$$(D_\mu D^\nu + \mathbf{h}_\mu{}^\nu D^2)\psi \ll \frac{\dot{\Theta} \mathbf{h}_\mu{}^\nu}{3},$$

e comparando os traços temos,

$$\left| \frac{4\tilde{D}^2\psi}{a^2\dot{\Theta}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{4\tilde{D}^2\psi}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2} \right| \ll 1. \quad (3.126)$$

3.7.5 Tensor Fonte

O último termo que precisamos analisar é o da expansão do tensor fonte, no qual, usando a Eq. (3.71), temos

$$\hat{\mathbf{h}} \left[\hat{\mathcal{T}}_\mu{}^\nu \right] = \frac{(\delta\rho - \delta p)\mathbf{h}_\mu{}^\nu}{2} + \delta\Pi_\mu{}^\nu.$$

Analisando termo a termo obtemos as condições para a densidade de energia e pressão,

$$\left| \frac{\delta\rho}{\rho} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\delta p}{p} \right| \ll 1. \quad (3.127)$$

No entanto, a pressão anisotrópica de fundo é nula e, portanto, repetimos a análise feita para o cisalhamento obtendo

$$\left| \frac{\tilde{D}^2 \delta \Pi^{(d)}}{a^2} \right| \ll \left| \frac{\dot{\Theta}}{3\Theta} \right|, \quad \left| \frac{\mathcal{H} \tilde{D}^2 \delta \Pi^{(d)}}{a(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)} \right| \ll 1, \quad (3.128)$$

para a decomposição escalar do tensor $\delta \Pi_{\mu}{}^{\nu}$.

3.8 EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES

Nas seções anteriores, determinamos os ingredientes necessários para discutir a evolução das perturbações e a validade da série perturbativa. Como primeiro resultado dessa tese, iremos discutir a evolução de perturbações adiabáticas em um universo em contração. Essa análise é feita com o intuito de colocar limites na validade da série perturbativa e, conseqüentemente, na contração no universo. Nosso primeiro passo é descrever a evolução da métrica de fundo. Para tanto, vamos modelar o conteúdo material como sendo um único fluido em equilíbrio, descrito com uma equação de estado $w = p/\rho$ constante e $w > -1/3$ (ver Seção 2.5.2), e escolher seções espaciais planas, *i.e.*, $K = 0$ e sem constante cosmológica $\Lambda = 0$.

De forma geral a função θ definida na Eq. (3.100) é dada por

$$\theta = \frac{x^2 \mathcal{H}}{\sqrt{(x^2 \mathcal{H}^2 - x^2 \Omega_{k0} - \Omega_{\Lambda 0})(1 + w)}}, \quad (3.129)$$

e no caso tratado nessa seção,

$$\theta = \frac{x}{\sqrt{1 + w}}.$$

Logo, usando a evolução do desvio para o vermelho dada na Eq. (2.48), obtemos,

$$\frac{\theta''}{\theta} = \frac{\beta(\beta + 1)}{\eta^2} = \frac{6(1 + w)}{(1 + 3w)^2 \eta^2}.$$

É simples ver que a velocidade do som (Eq. 3.92) é dada por $c_s^2 = w$. Enfim, usando essas equações para a evolução da métrica de fundo e escrevendo a equação para os coeficientes u_q (ver Seção 3.5.4), temos

$$u_q'' + \left(w \tilde{q}^2 - \frac{6(1 + w)}{(1 + 3w)^2 \eta^2} \right) u_q = 0, \quad (3.130)$$

onde escolhemos os modos adiabáticos, ou seja, $\overline{\delta S} = 0$. A equação acima é da forma da Eq. (E.2) e portanto tem soluções em termos das funções de Hankel do tipo um e dois, *i.e.*,

$$u_q = \sqrt{\frac{|\eta|}{\tilde{q}\sqrt{w}}} \left(A_q \text{H}_{\alpha}^{(1)}(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|) + A_q^* \text{H}_{\alpha}^{(2)}(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|) \right), \quad (3.131)$$

onde $\alpha \equiv \frac{5+3w}{2(1+3w)} = \frac{1}{2} + \beta$ e A_q é um coeficiente complexo constante. Para a curvatura nula, a função u_q tem a seguinte relação com o perturbação Φ ,

$$\begin{aligned}\Phi_q &= |\mathcal{H}|x\sqrt{1+w}u_q, \\ &= x\beta\sqrt{\frac{(1+w)}{\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|}} (A_q\mathbf{H}_\alpha^{(1)}(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|) + A_q^*\mathbf{H}_\alpha^{(2)}(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|)).\end{aligned}\quad (3.132)$$

O termo $\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|$ pode ser reescrito em função do desvio para o vermelho x da forma $\tilde{q}\sqrt{w}|\eta| = \tilde{q}\sqrt{w}\eta_0x^{1/\beta}$, onde esse fator é proporcional a $\tilde{R}_H\tilde{q}$ e representa a razão entre o raio de Hubble conforme e o comprimento típico do modo ($1/\tilde{q}$). Para as aplicações desse trabalho, estaremos interessados em modos que sejam da ordem ou próximos ao raio de Hubble, *i.e.*, $\tilde{q}^{-1} \in (10^{-3}\tilde{R}_H, 10^3\tilde{R}_H)$.

Para essas soluções existem dois regimes bem definidos. Quando $\sqrt{w}\tilde{q}\eta \gtrsim 1$, as soluções são oscilatórias com número de onda da ordem de \tilde{q} . Nesse regime as funções de Hankel são dadas por funções trigonométricas vezes $|\eta|^{-1/2}$ ou $|\eta|^{-3/2}$, e portanto a perturbação tem o seguinte comportamento assintótico

$$\Phi_q \propto x^{1+1/\beta} \propto \eta^{-(\beta+1)} \quad \text{ou} \quad \Phi_q \propto x^{1+2/\beta} \propto \eta^{-(\beta+2)}.$$

Como estamos restringindo ao caso $w > -1/3$, ambas as evoluções acima mostram que $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} \Phi_q = 0$.

No regime $|\eta| \rightarrow 0$, a função de Hankel tem o comportamento dado por uma soma de leis de potência como mostrado na Eq. (E.7). Tomando somente os termos de primeira ordem temos,

$$\begin{aligned}\Phi_q &\approx x\beta\sqrt{\frac{1+w}{\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|}} (A_{\alpha q}^+(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|)^\alpha + A_{\alpha q}^-(\tilde{q}\sqrt{w}|\eta|)^{-\alpha}), \\ &\approx \beta\sqrt{1+w}(\tilde{q}\sqrt{w}\eta_0)^\beta \left(A_{\alpha q}^+ + \frac{A_{\alpha q}^-}{(\tilde{q}\sqrt{w}\eta_0)^{2\beta+1}} \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{2\beta+1} \right),\end{aligned}\quad (3.133)$$

onde definimos as constantes usando a Eq. (E.8), *i.e.*,

$$A_{\alpha q}^+ \equiv 2 \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} A_q \frac{M_\alpha}{2^\alpha} \right], \quad A_{\alpha q}^- \equiv 2 \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} A_q \frac{M_{-\alpha}}{2^{-\alpha}} \right].$$

Como $w > -1/3 \rightarrow \alpha > 0$, o termo que domina quando nos aproximamos de $|\eta| \rightarrow 0$ é $\Phi_q \propto \eta^{-(1+2\beta)} \propto x^2x^{1/\beta}$.

O resultado acima mostra que o coeficiente $\lim_{|\eta| \rightarrow 0} |\Phi_q| = \infty$, e portanto, para algum valor de x , a variável Φ fica muito grande. A questão importante aqui é que consequência tem esse alto valor de Φ para a teoria de perturbação, ou em outras palavras, para quais valores de x a hipótese perturbativa não é violada? Para abordar essa questão, temos que a perturbação Φ está relacionada com os coeficientes Φ_q da forma (Eq. 3.103)

$$\Phi = \int d^3q \Phi_q \mathcal{Y}_q.$$

Usando a solução da Eq. (3.133) na expressão acima, temos

$$\Phi \approx \Phi_0^M + \Phi_0^N \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{2\beta+1} \approx \Phi_0^M + \Phi_0^N x^{2+1/\beta}, \quad (3.134)$$

$$\Phi_0^M \approx \beta \sqrt{1+w} \int d^3q (\tilde{q} \sqrt{w} \eta_0)^\beta A_{\alpha q}^+ \mathcal{Y}_q, \quad (3.135)$$

$$\Phi_0^N \approx \beta \sqrt{1+w} \int d^3q \frac{A_{\alpha q}^+}{(\tilde{q} \sqrt{w} \eta_0)^{\beta+1}} \mathcal{Y}_q. \quad (3.136)$$

Os termos Φ_0^M e Φ_0^N dependem da forma específica do espectro A_q . Contudo, esse espectro é formado, *i.e.*, a solução se torna uma lei de potência no instante η_0 e, a partir desse ponto, esse espectro não muda. A única evolução temporal vem dos coeficientes.

3.8.1 Calibre Newtoniano

Para aplicarmos os testes acima, precisamos escolher um calibre para encontrar os valores das perturbações. No calibre Newtoniano, $\mathcal{B} = \mathcal{E} = 0$ e, nesse caso, $\phi = \Phi$ e $\psi = \Psi$. Usando a solução dada na Eq. (3.134), temos

$$\phi = \psi = \Phi_0^M + \Phi_0^N x^{2+1/\beta},$$

e as imposições de que $\phi \ll 1$ ficam dadas por $|\Phi_0^M| \ll 1$ e $|\Phi_0^N| x^{2+1/\beta} \ll 1$. A segunda inequação mostra que, por exemplo, se o universo em contração for dominado por radiação, $\beta = 1$ e portanto $|\Phi_0^N| x^3 \ll 1$. Quando o universo tiver $a = a_0 10^{-10}$ seu tamanho atual, esse limite será $|\Phi_0^N| \ll 10^{-30}$, impondo assim uma grande restrição nos valores de Φ_0^N .

A perturbação na expansão, aplicada na solução usada, é dada por (ver Eq. 3.32)

$$\delta\Theta = \frac{3}{a^2} (a\phi)' = \frac{3\mathcal{H}}{a} \left(\Phi_0^M - \frac{\beta+1}{\beta} \Phi_0^N x^{2+1/\beta} \right),$$

onde usamos que nesse calibre $\delta\sigma^{(s)} = 0$. Portanto, a restrição no valor de $\delta\Theta$ é dada por

$$\left(\Phi_0^M - \frac{\beta+1}{\beta} \Phi_0^N x^{2+1/\beta} \right) \ll 1,$$

e, a menos do fator $(\beta+1)/\beta$, impõe a mesma restrição que $\phi \ll 1$. Como o fator $3\mathcal{H}^2 + 2K$ cresce quando $\eta \rightarrow 0$, as inequações originárias de $\delta\mathcal{R}$ e \hat{a} não impõem restrições adicionais ao sistema.

3.8.2 Calibre de Curvatura Constante

No calibre de curvatura constante, deduzimos o valor das perturbações via Eqs. (3.114) e (3.115), a saber,

$$\phi = \frac{2\beta+1}{\beta} \Phi_0^M, \\ a^{-2} \mathcal{E} = \frac{\eta_0^2}{\beta} \left(\frac{\Phi_0^M}{2} \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{-2} - \frac{\Phi_0^N}{2\beta-1} \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{2\beta-1} \right) \Big|_{\eta_1}^{\eta}.$$

Devido à fixação do calibre residual em ξ^\perp , temos que escolher um instante no qual $\mathcal{E} = 0$. No caso do universo em contração que tratamos, podemos escolher η_1 como sendo o menor valor de η a ser considerado. Nesse caso, a fase de contração não impõe nenhuma restrição adicional a Φ_0^M , já que esses termos vão a zero no limite $\eta \rightarrow 0$. Como vimos acima, o termo Φ_0^M não contribui em primeira ordem em ϕ . Porém, como mostrado na Eq. (E.7), o próximo termo é de ordem $\eta^{-2\beta-1}\eta^2 = \eta^{-2\beta+1}$, igual a sua contribuição em \mathcal{E} .

Isso mostra que temos a restrição adicional $|\Phi_0^N|x^{2-1/\beta} \ll 1$. Note que para esse calibre, a restrição é menos severa que a do calibre Newtoniano. No caso da contração dominada por radiação, $\beta = 1$ e portanto $\Phi_0^N \ll x^{-1}$. Com isso, se $a = 10^{-10}a_0$ então $\Phi_0^N \ll 10^{-10}$. No caso extremo de uma contração dominada por um fluido duro ($w = 1$), $2 - 1/\beta = 0$ e portanto a contração não impõe nenhuma restrição adicional.

O cisalhamento para esta solução fica dado por (Eq. 3.113)

$$a^{-1}\delta\sigma^{(s)} = -\frac{\eta}{\beta} \left(\Phi_0^M + \Phi_0^N \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{2\beta+1} \right),$$

e portanto a restrição dada na Eq. (3.123) é

$$\frac{\eta^2}{\beta(\beta+1)} \left(\tilde{D}^2\Phi_0^M + \tilde{D}^2\Phi_0^N \left(\frac{\eta_0}{|\eta|} \right)^{2\beta+1} \right) \ll 1.$$

O primeiro ponto importante da restrição acima é que sua dependência temporal tem o comportamento $\eta^{-2\beta+1}$ para o termo proporcional a $\tilde{D}^2\Phi_0^N$ da mesma forma que ϕ e \mathcal{E} , enquanto o termo proporcional a $\tilde{D}^2\Phi_0^M$ vai a zero. A diferença é que nesse caso os coeficientes têm o operador de Laplace–Beltrami. Porém, como utilizamos o operador conforme, o valor dos coeficientes não muda com o tempo e, portanto, não contribuem na análise da evolução temporal.

A próxima restrição é dada pela perturbação na expansão

$$a\delta\Theta = \tilde{D}^2(a^{-1}\delta\sigma^{(s)}) + \mathcal{H}\phi.$$

Usando a Eq. (3.121) vemos que o primeiro termo do lado direito impõe a mesma restrição que a do cisalhamento multiplicada por $(\beta+1)/\beta$ e, portanto, não impõe vínculo adicional para o valor de β que estamos considerando. O segundo termo é simplesmente $|\phi| \ll 1$, já analisado. De forma similar, a Eq. (3.124) não contribui com novas condições. Além disso, nesse calibre a perturbação na curvatura é identicamente zero, *i.e.*, $\psi = 0 \rightarrow \delta\mathcal{R}_\mu^\nu = 0$. Finalmente, usando a Eq. (3.87) e que nesse calibre $\delta\mathcal{R} = 0$, temos que a imposição na perturbação da densidade de energia é igual à imposição da perturbação na expansão, *i.e.*, a Eq. (3.87) implica em

$$\frac{\delta\Theta}{\Theta} = \frac{1}{2} \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\delta p}{p},$$

onde a última igualdade vem do fato de que estamos usando uma equação de estado $\hat{p} = w\hat{\rho}$ constante.

COSMOLOGIA QUÂNTICA

Nos Capítulos 2 e 3 discutimos e apresentamos o cenário da cosmologia padrão para modelos homogêneos e isotrópicos e para as perturbações em torno desses tipos de soluções, respectivamente. Em cenários específicos, é necessário considerar a natureza quântica que esperamos estar presente na dinâmica tanto da evolução do campo gravitacional quanto para os campos de matéria. Mesmo que ainda não exista uma teoria quântica para a gravitação estabelecida, podemos quantizar esse tipo de modelagem cosmológica usando uma aproximação de mini-superespaço para a parte homogênea e isotrópica e quantizá-la via equação de Wheeler–DeWitt [13] enquanto as perturbações são tratadas como campos quânticos em torno do mini-superespaço. Esse tipo de procedimento foi empregado originalmente por Halliwell e Hawking (1985) [77], mais tarde foi modificado introduzindo o conceito de trajetórias de Bohm por Peter, Pinho e Pinto-Neto (2005) [20] para as perturbações tensoriais e por Pinho e Pinto-Neto (2007) [25] para os modos escalares e vetoriais.

Há muitas questões a serem tratadas quando lidamos com a quantização da gravitação. Mesmo nos modelos simplificados de mini-superespaço existem problemas a serem resolvidos. Na Seção 4.1.1 trataremos da quantização dos modelos de fundo, abordando algumas das questões envolvidas, e, usando um fluido barotrópico, mostraremos como um conceito de tempo pode ser introduzido. Na seção Seção 4.2 usaremos o princípio variacional Lagrangiano deduzido em detalhes no Apêndice D para obtermos a álgebra dos parênteses de Poisson das perturbações. Com essa álgebra mostramos como essas quantidades podem ser quantizadas e como podemos usar a evolução adiabática para definir um estado de vácuo.

4.1 QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE FUNDO

4.1.1 Equação de Wheeler–DeWitt

A simplificação de mini-superespaço consiste em aplicar inicialmente as simetrias à métrica e quantizar somente os graus de liberdade que não violam essas simetrias. No caso específico de modelos homogêneos e isotrópicos, quando impomos essas simetrias, o único grau de liberdade gravitacional remanescente é o fator de escala, como mostramos na Seção 2.2. Nesse caso, usamos o escalar de curvatura dado na Eq. (2.16) para construir o termo de fundo da ação de Einstein–Hilbert para a gravitação (Eq. D.1).

Pelo formalismo ADM [78], dado uma escolha de hipersuperfícies, devemos utilizar uma coordenada temporal arbitrária definida pelo campo vetorial $l^\mu \equiv Nn^\mu + N^\mu$ e tratar N e N^μ como campos independentes ao variarmos a ação de Einstein–Hilbert, onde N é chamada função lapso, N^μ o vetor deslocamento espacial, *i.e.*, $\mathbf{h}[N^\mu] = N^\mu$ e n^μ o campo normal a essa escolha de seções espaciais (ver Seção A.2). No caso das equações

de Friedmann, não é necessário deixar o campo deslocamento arbitrário. Dessa forma, escolhemos $N^\mu = 0$ e, conseqüentemente, a ação de fundo para a gravitação dependerá somente do fator de escala e da função lapso.

Além do escalar de curvatura, precisamos obter o determinante da métrica em função desses campos. Para tanto, note que pela Eq. (D.9) temos $\mathcal{L}_l e_{\mu\nu\alpha\beta} = (\nabla_\mu l^\mu) e_{\mu\nu\alpha\beta}$ e, portanto, podemos definir uma 4-forma de integração constante em relação ao campo l^μ da seguinte forma. Dado que $\nabla_\mu l^\mu = \dot{N} + N\Theta$, a 4-forma $\tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv c(Na^3)^{-1} e_{\mu\nu\alpha\beta}$, é constante em relação ao tempo definido por l^μ , *i.e.*,

$$\mathcal{L}_l \tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta} = c \mathcal{L}_l ((Na^3)^{-1} e_{\mu\nu\alpha\beta}) = \frac{N \partial_{ct} ((Na^3)^{-1})}{(Na^3)^{-1}} \tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta} + (\nabla_\mu l^\mu) \tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0.$$

Note também que a 4-forma \tilde{e} tem unidade de volume vezes tempo.¹ Como estamos utilizando coordenadas com unidade de distância, as componentes $e_{\mu\nu\alpha\beta}$ devem ter unidade de inverso de velocidade e, por isso, incluímos na definição de $\tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}$ o fator c .

Conseqüentemente, como a 4-forma de integração é decomposta da forma $e_{\mu\nu\alpha\beta} = c^{-1} Na^3 \tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}$, incorporamos o fator não constante Na^3/c à Lagrangiana, obtendo

$$L_g \equiv \tilde{V} \mathcal{L}_g = \frac{\tilde{V}}{c} Na^3 \left(6K + 2\dot{\Theta} + \frac{4\Theta^2}{3} \right) = \mathcal{L}_l \left(2 \frac{\tilde{V}}{c} a^3 \Theta \right) + 6 \frac{\tilde{V}}{c} Na \left(\tilde{K} - \frac{(\mathcal{L}_l a)^2}{N^2} \right), \quad (4.1)$$

onde o primeiro termo do lado direito é um termo de superfície. O fator \tilde{V} representa a integração no volume da forma constante $\tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}$ e equivale ao volume da seção espacial conforme. Essa quantidade não é bem definida para seções espaciais infinitas, contudo podemos sempre trabalhar com seções espaciais compactas de tamanho arbitrário.

Para descrever a Lagrangiana da matéria, usamos um fluido termodinâmico como descrito na Seção B.4. Logo, a menos do termo de superfície, a Lagrangiana total é dada por

$$2\kappa cL = 6\tilde{V}Na \left(\tilde{K} - \frac{(\mathcal{L}_l a)^2}{N^2} \right) + 2\kappa\tilde{V}Na^3 p(\vartheta, s), \quad (4.2)$$

onde $\vartheta = \sqrt{-\vartheta_\mu \vartheta_\nu g^{\mu\nu}}$, $\vartheta_\mu = \nabla_\mu \chi_1 + \chi_2 \nabla_\mu \chi_3 + \chi_4 \nabla_\mu s$ e \tilde{K} está definido no parágrafo abaixo da Eq. (2.13). Para impor homogeneidade e isotropia aos graus de liberdade de matéria, tomamos os campos $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ e s como constantes nas hipersuperfícies, *i.e.*, $\nabla_\mu \varphi = -n_\mu \dot{\varphi} + D_\mu \varphi = -N^{-1} n_\mu \mathcal{L}_l \varphi$, onde φ é qualquer um dos campos de matéria. Com isso, a entalpia específica é descrita como

$$\vartheta = -N^{-1} (\mathcal{L}_l \chi_1 + \chi_2 \mathcal{L}_l \chi_3 + \chi_4 \mathcal{L}_l s), \quad (4.3)$$

onde estamos considerando $(\dot{\chi}_1 + \chi_2 \dot{\chi}_3 + \chi_4 \dot{s}) < 0$.

As equações de Friedmann e as equações do fluido de matéria podem ser obtidas variando a Lagrangiana acima em relação a N, a e aos campos de matéria, respectivamente.

¹Estamos considerando que as coordenadas têm unidade de distância e, portanto, o tensor de Riemann ($R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta v_\beta = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\alpha$) tem unidade de inverso de distância ao quadrado. Dessa forma $R/2\kappa$ tem unidade de densidade de energia e a 4-forma de integração deve ter unidade de volume vezes tempo.

Para quantizar esses graus de liberdade, devemos obter a Hamiltoniana correspondente. Utilizamos o formalismo descrito por Jackiw (1993) [79],² já que essa Lagrangiana é singular. Isso pode ser visto notando que ela não depende das derivadas temporais dos campos N , χ_2 e χ_4 . Além disso, não é possível obter as velocidades $\mathcal{L}_l\chi_1$, $\mathcal{L}_l\chi_3$ e $\mathcal{L}_l s$ em função dos momentos conjugados

$$\Pi_{\chi_1} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_l\chi_1} = -\frac{\tilde{V}}{c}a^3\varepsilon, \quad \Pi_{\chi_3} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_l\chi_3} = -\frac{\tilde{V}}{c}a^3\varepsilon\chi_2, \quad \Pi_s \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_l s} = -\frac{\tilde{V}}{c}a^3\varepsilon\chi_4. \quad (4.4)$$

Fazemos uma transformação de Legendre para as variáveis $\mathcal{L}_l a$ e $\mathcal{L}_l\chi_1$, obtendo a Lagrangiana de primeira ordem

$$L = \Pi_a \mathcal{L}_l a + \Pi_{\chi_1} \mathcal{L}_l\chi_1 + \Pi_{\chi_1}\chi_2 \mathcal{L}_l\chi_3 + \Pi_{\chi_1}\chi_4 \mathcal{L}_l s + N \left(\frac{c\kappa\Pi_a^2}{12\tilde{V}a} - \frac{\tilde{V}}{c}a^3\rho + \frac{3\tilde{V}a\tilde{K}}{c\kappa} \right), \quad (4.5)$$

onde

$$\Pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_l a} = -\frac{6\tilde{V}a\mathcal{L}_l a}{Nc\kappa}, \quad (4.6)$$

e a densidade de energia é função do momento Π_{χ_1} e da entropia, *i.e.*, $\rho = \varepsilon\vartheta - p \equiv \rho(-c\Pi_{\chi_1}/(\tilde{V}a^3), s)$.³ Identificamos os coeficientes dos termos com derivadas temporais como seus momentos conjugados, ou seja, a álgebra dos parênteses de Poisson é dada por,

$$\{a, \Pi_a\} = \{\chi_1, \Pi_{\chi_1}\} = \{\chi_3, \Pi_{\chi_3}\} = \{s, \Pi_s\} = 1, \quad (4.7)$$

onde definimos $\Pi_{\chi_3} \equiv \Pi_{\chi_1}\chi_2$, $\Pi_s \equiv \Pi_{\chi_1}\chi_4$ e todos os outros parênteses de Poisson sendo iguais a zero. E a Hamiltoniana é

$$H \equiv NH = N \left(\frac{\tilde{V}}{c}a^3\rho - \frac{3\tilde{V}a\tilde{K}}{c\kappa} - \frac{c\kappa\Pi_a^2}{12\tilde{V}a} \right). \quad (4.8)$$

O vínculo dado por N fornece a equação

$$\frac{\tilde{V}}{c}a^3\rho - \frac{3\tilde{V}a\tilde{K}}{c\kappa} - \frac{c\kappa\Pi_a^2}{12\tilde{V}a} = \frac{\tilde{V}a^3}{c\kappa} \left(\kappa\rho - 3K - \frac{3(\mathcal{L}_l a)^2}{N^2 a^2} \right) = 0,$$

que é a equação de Friedmann (2.24). Com a álgebra dos parênteses de Poisson temos as outras equações de movimento para o fator de escala e seu momento conjugado, *i.e.*,

$$\mathcal{L}_l a = \{a, H\} = -\frac{Nc\kappa\Pi_a}{6\tilde{V}a}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_l \Pi_a = \{\Pi_a, H\} = \frac{3Na^2}{c\kappa} \left(\tilde{V}\kappa p + \frac{\tilde{V}\tilde{K}}{a^2} - \frac{c^2\kappa^2\Pi_a^2}{36\tilde{V}a^4} \right), \quad (4.10)$$

²Normalmente utiliza-se a metodologia de Dirac que envolve uma série de procedimentos formais. Em alguns casos é possível evitá-los como descrito em [79].

³Quando fazemos a transformada de Legendre em relação a χ_1 , obtemos $\Pi_{\chi_1} = -c^{-1}\tilde{V}a^3\varepsilon(\vartheta, s)$ que fornece uma função implícita de $\vartheta(-c\Pi_{\chi_1}/(\tilde{V}a^3), s)$. Portanto, todas as funções de (ϑ, s) são agora funções de $(-c\Pi_{\chi_1}/(\tilde{V}a^3), s)$.

que combinadas resultam na Eq. (2.25). Por fim, temos para os graus de liberdade do fluido,

$$\mathcal{L}_l \chi_1 = \{\chi_1, H\} = -N\vartheta, \quad \mathcal{L}_l \Pi_{\chi_1} = \{\Pi_{\chi_1}, H\} = 0, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_l \chi_3 = \{\chi_3, H\} = 0, \quad \mathcal{L}_l \Pi_{\chi_3} = \{\Pi_{\chi_3}, H\} = 0, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}_l s = \{s, H\} = 0, \quad \mathcal{L}_l \Pi_s = \{\Pi_s, H\} = N\Pi_{\chi_1}\tau, \quad (4.13)$$

que são equações de movimento para o fluido obtidas na Seção B.4.

O próximo passo é promover os campos a operadores auto-adjuntos agindo em um espaço de Hilbert.⁴⁵ Esses operadores, representados com uma barra sobre sua contra-
parte clássica, satisfazem a regra de comutação

$$[\overline{A}, \overline{B}] = i\hbar\{\overline{A}, \overline{B}\}. \quad (4.14)$$

Impomos também que os vínculos anulam o vetor de estado, *i.e.*,

$$\overline{H}|\Psi^f\rangle = 0, \quad (4.15)$$

onde colocamos o sobrescrito ^f para distinguir a função de onda Ψ^f da variável invariante de calibre definida na Eq. (3.38). A equação acima é conhecida como equação de Wheeler–DeWitt, a qual não introduz de forma explícita uma noção de tempo. Portanto, para introduzi-la, primeiro definimos a variável $\varrho \equiv c^{-1}\tilde{V}a^{3(1+w_q)}\rho$, onde w_q é uma constante. Essa variável é função dos campos $\varrho = \varrho(\Pi_{\chi_1}, a, s)$, definida implicitamente por $\Pi_{\chi_1} = -c^{-1}\tilde{V}a^3\varepsilon(\rho, s)$. Usando essas relações, trocamos a variável Π_{χ_1} por ϱ e, com essa mudança, obtemos a Lagrangiana a menos do termo de superfície $\mathcal{L}_l(\Pi_{\chi_1}\chi_1)$,

$$L = \left(\Pi_a + \frac{3\tilde{V}\chi_1}{c\vartheta}a^2(p - w_q\rho) \right) \mathcal{L}_l a + \frac{\chi_1}{\vartheta a^{3w_q}} \mathcal{L}_l \varrho + \Pi_{\chi_3} \mathcal{L}_l \chi_3 + \left(\Pi_s - \chi_1 \frac{\tilde{V}a^3\varepsilon\tau}{c\vartheta} \right) \mathcal{L}_l s - H. \quad (4.16)$$

Considerando os coeficientes dos termos com derivada temporal, temos que essa mudança de variável induz a seguinte transformação canônica,

$$\Pi_a \rightarrow \Pi_a + \frac{3\tilde{V}\chi_1}{c\vartheta}a^2(p - w_q\rho), \quad \Pi_s \rightarrow \Pi_s - \chi_1 \frac{\tilde{V}a^3\varepsilon\tau}{c\vartheta}, \quad \Pi_\varrho \equiv \frac{\chi_1}{\vartheta a^{3w_q}}. \quad (4.17)$$

Nessas variáveis a Hamiltoniana é escrita como

$$H = N \left(\frac{\varrho}{a^{3w_q}} - \frac{3\tilde{V}a\tilde{K}}{c\kappa} - \frac{c\kappa \left(\Pi_a - \Pi_\varrho 3c^{-1}\tilde{V}a^{2+3w_q}(p - w_q\rho) \right)^2}{12\tilde{V}a} \right), \quad (4.18)$$

⁴Na quantização canônica, as variáveis canônicas são promovidas a operadores auto-adjuntos. Essa imposição garante autovalores reais e autovetores que formam bases completas. Contudo, vale ressaltar que, como não existe uma teoria completa para a quantização da gravitação, essas imposições são tentativas e podem ser removidas em futuras teorias.

⁵Estamos usando o termo operadores auto-adjuntos e espaço de Hilbert como definido em [80].

e, com isso, a equação de Wheeler–DeWitt pode ser escrita como

$$\bar{\varrho} |\Psi^f\rangle = \bar{a}^{3w_q} \left(\frac{3\tilde{V}\bar{a}\tilde{K}}{c\kappa} + \frac{c\kappa \left(\bar{\Pi}_a - \bar{\Pi}_\varrho 3c^{-1}\tilde{V}\bar{a}^2(\bar{p} - w_q\bar{\rho}) \right)^2}{12\tilde{V}\bar{a}} \right) |\Psi^f\rangle. \quad (4.19)$$

Na representação onde

$$\bar{\varrho} \doteq i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_\varrho}, \quad \bar{\Pi}_\varrho \doteq \Pi_\varrho,$$

o momento Π_ϱ corresponde a uma coordenada temporal. Entretanto, no caso de um fluido arbitrário, tanto p quanto ρ dependem não linearmente do operador $\bar{\varrho}$, tornando complicado o uso de Π_ϱ como coordenada temporal. No caso barotrópico com equação de estado constante $p = w_q\rho$, a equação de Wheeler–DeWitt é dada por

$$\bar{\varrho} |\Psi^f\rangle = \bar{a}^{3w_q} \left(\frac{3\tilde{V}\bar{a}\tilde{K}}{c\kappa} + \frac{c\kappa \bar{\Pi}_a^2}{12\tilde{V}\bar{a}} \right) |\Psi^f\rangle, \quad (4.20)$$

que é equivalente à equação de Schrödinger em uma dimensão, onde Π_ϱ serve como coordenada temporal. Porém, a equação acima envolve algumas questões que ainda não mencionamos.

No ambiente clássico não existe ambiguidade na ordem das variáveis canônicas. No entanto, quando quantizamos o sistema, o termo da Hamiltoniana $\bar{a}^{-1}\bar{\Pi}_a^2$ pode ser escrito de várias formas distintas, *e.g.*, $\bar{\Pi}_a\bar{a}^{-1}\bar{\Pi}_a$, $\bar{a}^{-1/2}\bar{\Pi}_a\bar{a}^{-1/2}\bar{\Pi}_a$. Essa escolha pode ser guiada pela imposição de que o operador Hamiltoniano seja um operador auto-adjunto, contudo essa imposição não fixa completamente a escolha.

Para evitar a ambiguidade discutida acima, fazemos a seguinte mudança de variáveis ainda na Lagrangiana clássica,

$$\mathcal{X} = \frac{2a^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{3(1-w_q)}, \quad \Pi_{\mathcal{X}} = a^{-\frac{1-3w_q}{2}}\Pi_a, \quad N_{\mathcal{X}} = a^{-3w_q}N. \quad (4.21)$$

Com isso, a Lagrangiana reduz-se a

$$L = \Pi_{\mathcal{X}}\mathcal{L}_l\mathcal{X} + \Pi_\varrho\mathcal{L}_l\varrho + \Pi_{\chi_3}\mathcal{L}_l\chi_3 + \Pi_s\mathcal{L}_l s - H, \quad (4.22)$$

$$H = N_{\mathcal{X}} \left(\varrho - U_0\mathcal{X}^{\frac{2(1+3w_q)}{3(1-w_q)}} - \frac{c\kappa\Pi_{\mathcal{X}}^2}{12\tilde{V}} \right), \quad U_0 \equiv \frac{3\tilde{V}\tilde{K}}{c\kappa} \left(\frac{3(1-w_q)}{2} \right)^{\frac{2(1+3w_q)}{3(1-w_q)}}, \quad (4.23)$$

de forma que nessas variáveis não existe ambiguidade na escolha de ordenação da Hamiltoniana. Na representação das autofunções de \mathcal{X} ,⁶ a equação de Wheeler–DeWitt é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_\varrho} \Psi^f(\Pi_\varrho, \mathcal{X}) = \left(U_0\mathcal{X}^{\frac{2(1+3w_q)}{3(1-w_q)}} - \frac{\hbar^2 c\kappa}{12\tilde{V}} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{X}^2} \right) \Psi^f(\Pi_\varrho, \mathcal{X}). \quad (4.24)$$

⁶Nessa representação

$$\bar{\mathcal{X}} \doteq \mathcal{X}, \quad \bar{\Pi}_{\mathcal{X}} \doteq -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}}.$$

Para obter a relação da variável que estamos utilizando como tempo e o tempo cósmico definido por n^μ ,⁷ usamos a equação de movimento para Π_ρ , *i.e.*, $\mathcal{L}_l \Pi_\rho = \{\Pi_\rho, H\} = -N_{\mathcal{X}} = -a^{-3w_q} N$. Logo, temos que $\dot{\Pi}_\rho = -a^{-3w_q}$, ou seja, a relação entre o tempo cósmico e o tempo Π_ρ é independente de N . Enfatizamos também que $\dot{\Pi}_\rho < 0$ e, portanto, Π_ρ é monotonicamente decrescente ($t_2 > t_1 \Rightarrow \Pi_\rho(t_1) < \Pi_\rho(t_2)$) e dessa forma é relacionada biunivocamente com t . Em algumas referências, por exemplo [81], os autores fixam o calibre escolhendo uma forma específica para N . Entretanto, isso serve somente para definir o tempo caracterizado por l^μ . No exemplo citado é escolhido $N_{\mathcal{X}} = 1 \Rightarrow N = a^{3w_q}$ de forma que $\mathcal{L}_l \Pi_\rho = -1$, *i.e.*, essa escolha define o tempo l^μ como $-\Pi_\rho$ a menos de uma constante aditiva.

4.1.2 Representação no Espaço de Hilbert

Na Seção 4.1.1 promovemos os campos a operadores e associamos a esses uma álgebra de Lie através do homomorfismo definido na Eq. (4.14). Porém, a definição da álgebra não é o suficiente para estudarmos a quantização do sistema, precisamos também de uma representação para esses operadores. No caso discutido na seção anterior, temos que representar um conjunto finito de operadores. Consequentemente, o problema da representação é simplificado, pois o teorema de Stone–von Neumann garante que todas as representações irredutíveis dessa álgebra são unitariamente equivalentes e, portanto, representam o mesmo sistema físico.⁸ Parte da premissa do teorema é que os operadores com a regra de comutação, *e.g.*, $[\mathcal{X}, \bar{\Pi}_{\mathcal{X}}] = i\hbar$, sejam auto-adjuntos.

Em princípio, como ainda não existe uma teoria quântica para a gravitação, não há nenhum motivo *a priori* para impormos que os operadores devam ser auto-adjuntos. Entretanto, sem o teorema de Stone–von Neumann, não temos garantia de que diferentes representações sejam unitariamente equivalentes. Isso significa que nesse caso a escolha da representação afeta os resultados físicos e funciona como uma escolha adicional a ser feita para quantizar o sistema. Outra questão relevante vem do fato de que, se os operadores não forem auto-adjuntos, os seus autovalores não serão necessariamente reais nem os autovetores formarão uma base completa.

Na representação discutida na Seção 4.1.1 as funções $f(\mathcal{X}) \equiv \langle \mathcal{X} | f \rangle$ são definidas da forma $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e são de quadrado integrável nesse domínio. É possível mostrar que nesse domínio o operador $-i\hbar \partial / \partial \mathcal{X}$ não possui extensões auto-adjuntas.⁹ Como o operador $\bar{\mathcal{X}}$ é auto-adjunto, utilizamos a base das suas autofunções. O operador de evolução temporal, por exemplo, é um gerador de translações temporais unitárias se e somente se ele for auto-adjunto. Nesse caso é possível mostrar que ele o será se e somente

⁷Vale ressaltar que essa coordenada temporal é definida naturalmente pelas hipersuperfícies fixas escolhidas.

⁸Para uma apresentação simples do teorema ver [82], e para uma referência rigorosa ver teorema X. 84 em [83].

⁹Veja [14], por exemplo, ou para um tratamento mais recente e uma possível solução [84].

se as funções de estado satisfizerem a condição de contorno,¹⁰

$$f(0) = \alpha \frac{\partial f(0)}{\partial \mathcal{X}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Vale ressaltar que cada escolha de valor de α corresponde a um cenário físico diferente. Na referência citada é mostrado que esse valor está associado à mudança de fase que as ondas incidentes na parede $\mathcal{X} = 0$ sofrem ao serem refletidas.

Além das questões técnicas sobre a evolução dos estados, existe a questão da sua interpretação física. Nesse trabalho adotamos a teoria de Bohm que provê uma interpretação causal para a evolução quântica. Do ponto de vista prático, essa teoria permite calcular a evolução temporal da métrica sem precisar recorrer a qualquer tipo de interpretação probabilística. Na referência [88], e em referências contidas, essa abordagem é discutida em detalhes e aplicada a modelos de mini-superespaço com fluidos termodinâmicos.

4.1.3 Soluções para um Universo Plano

Em um universo com seções espaciais planas, a equação de Wheeler–DeWitt se reduz a

$$i \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi^f(\lambda, \mathcal{X}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{X}^2} \Psi^f(\lambda, \mathcal{X}), \quad (4.26)$$

onde definimos a variável temporal adimensional $\lambda \equiv l_p^2 \Pi_g / (6\tilde{V})$, que é equivalente à equação de Schrödinger para uma partícula em uma dimensão contida em $\mathcal{X} \in [0, \infty)$. Como discutimos na Seção 4.1.2, os operadores $\overline{\mathcal{X}}$ e $\overline{\mathbb{H}}$ são auto-adjuntos e, com isso, seus autovalores são reais e seus autovetores formam uma base completa [80]. Escrevendo os autovetores da energia na base de $\overline{\mathcal{X}}$, obtemos

$$\langle \mathcal{X} | E \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{2E} (2E\alpha^2 + 1)}} \left(\sqrt{2E} \alpha \cos(\sqrt{2E} \mathcal{X}) + \sin(\sqrt{2E} \mathcal{X}) \right), \quad (4.27)$$

onde $\overline{\mathcal{X}} | \mathcal{X} \rangle = \mathcal{X} | \mathcal{X} \rangle$, $\overline{\mathbb{H}} | E \rangle = E | E \rangle$ e α define a condição de contorno conforme a Eq. (4.25). Para os casos extremos, *i.e.*, $\alpha = 0$ e $|\alpha| \rightarrow \infty$ as autofunções se reduzem, respectivamente, a

$$\langle \mathcal{X} | E \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{2E}}} \sin(\sqrt{2E} \mathcal{X}), \quad \langle \mathcal{X} | E \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{2E}}} \cos(\sqrt{2E} \mathcal{X}). \quad (4.28)$$

Usando os resultados acima, podemos calcular o propagador na base de $\overline{\mathcal{X}}$ da seguinte forma

$$G_\alpha(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1, \lambda) \equiv \langle \mathcal{X}_2 | e^{-i\overline{\mathbb{H}}\lambda} | \mathcal{X}_1 \rangle = \int_0^\infty dE e^{-iE\lambda} \langle \mathcal{X}_2 | E \rangle \langle E | \mathcal{X}_1 \rangle. \quad (4.29)$$

Para os casos extremos temos as soluções analíticas

$$G_\pm(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{8i\pi\lambda}} \left(e^{-\frac{(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1)^2}{2i\lambda}} \pm e^{-\frac{(\mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_1)^2}{2i\lambda}} \right), \quad (4.30)$$

¹⁰Veja [85] seção X.1 para uma discussão matemática e [14, 86, 87] para uma abordagem física sobre quantização do mini-superespaço.

onde a solução com + representa o propagador quando $|\alpha| \rightarrow \infty$ e a com - quando $\alpha = 0$. Com os propagadores + e -, podemos obter a evolução temporal de qualquer função de onda cuja condição inicial satisfaça, respectivamente,

$$\frac{\partial \Psi_+^f(0, 0)}{\partial \mathcal{X}} = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi_-^f(0, 0) = 0.$$

Como os propagadores satisfazem as condições de contorno apropriadas, as soluções

$$\Psi_{\pm}^f(\lambda, \mathcal{X}) = \int_0^{\infty} d\mathcal{X}_1 G_{\pm}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \lambda) \Psi_{\pm}^f(0, \mathcal{X}_1), \quad (4.31)$$

as satisfarão em qualquer instante λ .

Escolhemos as seguintes condições iniciais,

$$\Psi_+^f(0, \mathcal{X}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mathcal{X}_m}} e^{-\frac{\mathcal{X}^2}{2\pi \mathcal{X}_m^2}}, \quad \Psi_-^f(0, \mathcal{X}) = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \mathcal{X}_m^3}} \mathcal{X} e^{-\frac{2\mathcal{X}^2}{\pi \mathcal{X}_m^2}}, \quad (4.32)$$

de forma que $\langle \Psi_{\pm}^f(0) | \bar{\mathcal{X}} | \Psi_{\pm}^f(0) \rangle = \mathcal{X}_m$, onde \mathcal{X}_m representa o valor esperado de $\bar{\mathcal{X}}$ calculado na função de onda inicial. Aplicando o propagador a cada uma das funções de onda iniciais, obtemos as soluções

$$\Psi_+^f(\lambda, \mathcal{X}) = \sqrt{\frac{2\mathcal{X}_m}{i\lambda + \pi \mathcal{X}_m^2}} e^{-\frac{\mathcal{X}^2}{2i\lambda + 2\pi \mathcal{X}_m^2}}, \quad \Psi_-^f(\lambda, \mathcal{X}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi \mathcal{X}_m}{4i\lambda + \pi \mathcal{X}_m^2} \right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{X} e^{-\frac{2\mathcal{X}^2}{4i\lambda + \pi \mathcal{X}_m^2}}, \quad (4.33)$$

de forma que o valor esperado de $\bar{\mathcal{X}}$ evolui da seguinte forma

$$\langle \Psi_{\pm}^f(\lambda) | \bar{\mathcal{X}} | \Psi_{\pm}^f(\lambda) \rangle = \sqrt{\left(\frac{f_{\pm} \lambda}{\pi \mathcal{X}_m^2} \right)^2 + \mathcal{X}_m^2}, \quad (4.34)$$

onde $f_+ = 1$ e $f_- = 4$. Note que o valor esperado para essas soluções nunca é zero. No entanto, isso não é o suficiente para afirmarmos se o universo descrito por essas funções de onda possui ou não singularidade. Para uma discussão sobre singularidade em modelos de mini-superespaço, veja [89] e suas referências.

Podemos evitar a interpretação estatística da função de onda se adotarmos a interpretação de Bohm para a teoria quântica do mini-superespaço [90]. Na teoria de Bohm, atribuímos uma trajetória às variáveis conjugadas que satisfazem a seguinte equação de movimento,

$$\Pi_{\mathcal{X}} = \frac{\hbar}{2i|\Psi^f|^2} \left(\Psi^{f*} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \mathcal{X}} - \Psi^f \frac{\partial \Psi^{f*}}{\partial \mathcal{X}} \right), \quad (4.35)$$

onde o momento $\Pi_{\mathcal{X}}$ é obtido em termos das derivadas temporais de \mathcal{X} variando a Lagrangiana da Eq. (4.22) em relação a $\Pi_{\mathcal{X}}$. Seguindo esse procedimento encontramos

$$\mathcal{L}_l \mathcal{X} + N_{\mathcal{X}} \frac{c\kappa \Pi_{\mathcal{X}}}{6\tilde{V}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hbar \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \lambda} = \Pi_{\mathcal{X}}, \quad (4.36)$$

onde usamos que $\mathcal{L}_i \Pi_\varrho = -N_{\mathcal{X}}$ (ver o fim da Seção 4.1.1). Dessa forma temos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para \mathcal{X} ,

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2i|\Psi^f|^2} \left(\Psi^{f*} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \mathcal{X}} - \Psi^f \frac{\partial \Psi^{f*}}{\partial \mathcal{X}} \right). \quad (4.37)$$

É importante enfatizar que essa equação não depende de uma escolha da função lapso e, com isso, é independente da escolha de coordenada temporal. Usando as soluções Ψ^f_{\pm} , obtemos as seguintes equações de movimento,

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \lambda} = \frac{f_{\pm}^2 \lambda \mathcal{X}_+}{f_{\pm}^2 \lambda^2 + \pi^2 \mathcal{X}_m^4}, \quad (4.38)$$

com as soluções

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_b \sqrt{\left(\frac{f_{\pm} \lambda}{\pi \mathcal{X}_m^2} \right)^2 + 1}, \quad (4.39)$$

de forma que $\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_b$. Note também que a trajetória coincide com a evolução temporal do valor esperado de $\bar{\mathcal{X}}$ quando $\mathcal{X}_b = \mathcal{X}_m$, ou seja, a introdução da trajetória adiciona ao problema um novo parâmetro \mathcal{X}_b .

Podemos obter a trajetória de Bohm para a energia ϱ . Fazemos a transformação canônica $(\varrho, \Pi_\varrho) \rightarrow (\Pi_\varrho, -\varrho)$, de forma que nessas coordenadas a trajetória de Bohm para ϱ é expressa por

$$-\varrho = \frac{\hbar}{2i|\Psi^f|^2} \left(\Psi^{f*} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \Pi_\varrho} - \Psi^f \frac{\partial \Psi^{f*}}{\partial \Pi_\varrho} \right) = \frac{l_p^2 \hbar}{12\tilde{V}i|\Psi^f|^2} \left(\Psi^{f*} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \lambda} - \Psi^f \frac{\partial \Psi^{f*}}{\partial \lambda} \right). \quad (4.40)$$

Usando as funções de onda Ψ^f_{\pm} , temos

$$\begin{aligned} \frac{6\tilde{V}\varrho}{l_p^2 \hbar} &= \frac{f_{\pm}(f_{\pm}^2 \lambda^2 (f_{\pm} \mathcal{X}^2 + g_{\pm} \pi \mathcal{X}_m^2) - \pi^2 \mathcal{X}_m^4 (f_{\pm} \mathcal{X}^2 - g_{\pm} \pi \mathcal{X}_m^2))}{2(f_{\pm}^2 \lambda^2 + \pi^2 \mathcal{X}_m^4)}, \\ &= \frac{f_{\pm}^2 \mathcal{X}_b^2}{2\pi^2 \mathcal{X}_m^4} \left(1 - \frac{2\mathcal{X}_b^2}{\mathcal{X}^2} + \frac{g_{\pm} \pi \mathcal{X}_m^2}{f_{\pm} \mathcal{X}^2} \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde na segunda linha usamos $g_+ = 1$, $g_- = 3$ e a Eq. (4.39) para eliminar λ . Em termos da densidade adimensional temos

$$\Omega = \left(f_{\pm} \frac{l_p^2 c \mathcal{X}_b}{6\pi \tilde{V} H_0 \mathcal{X}_m^2 a_0^{\frac{3(1+w_q)}{2}}} \right)^2 \left(x^{3(1+w_q)} - \frac{2x^6}{x_b^{3(1-w_q)}} + \frac{g_{\pm} \pi x^6}{f_{\pm} x_m^{3(1-w_q)}} \right), \quad (4.42)$$

lembrando que $x = a_0/a$.

Para compararmos as trajetórias de Bohm com as clássicas, reescrevemos a derivada temporal da trajetória $\mathcal{X}(\lambda)$ substituindo λ definido implicitamente nas trajetórias da Eq. (4.39),

$$\left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \lambda} \right)^2 = f_{\pm}^2 \mathcal{X}_b^2 \frac{\mathcal{X}^2 - \mathcal{X}_b^2}{\pi^2 \mathcal{X}^2 \mathcal{X}_m^4}. \quad (4.43)$$

Reescrevendo a derivada temporal usando o tempo cósmico e \mathcal{X} em função do fator de escalar a , obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \lambda} = -\frac{6\tilde{V}a^3}{l_p^2} \frac{2}{\mathcal{X}3(1-w_q)} \frac{\dot{a}}{a},$$

e, conseqüentemente, temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left(f_{\pm} \frac{l_p^2}{6\pi V_0} \frac{3(1-w_q)}{2} \frac{x_m^{3(1-w_q)}}{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}} \right)^2 x^{3(1+w_q)} \left(1 - \left(\frac{x}{x_b} \right)^{3(1-w_q)} \right), \quad (4.44)$$

onde $V_0 = \tilde{V}a_0^3$ é o volume calculado no instante t_0 . A equação acima contém uma série de informações relevantes. O primeiro termo no segundo parênteses tem a mesma forma que a evolução clássica da densidade de energia de um fluido com equação de estado w_q constante.¹¹ O segundo termo é equivalente à densidade de energia de um fluido com energia negativa e equação de estado constante igual a um. Além disso, para fluidos com $w_q < 1$, o primeiro termo dominará quando $(x/x_b)^{3(1-w_q)} \ll 1$, *i.e.*, quando o universo se tornar muito maior que a escala a_b sua evolução será igual à clássica. Com isso, temos que, quando o fator de escala for igual à escala de referência $a = a_0$, a constante de Hubble será

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{c} &\approx f_{\pm} \frac{l_p^2}{6\pi V_0} \frac{\mathcal{X}_b a_0^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\mathcal{X}_m^2} \approx f_{\pm} \frac{l_p^2}{6\pi V_0} \frac{3(1-w_q)}{2} \frac{x_m^{3(1-w_q)}}{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}, \\ h &\approx f_{\pm} 10^{-120} \frac{3(1-w_q)}{2} \frac{x_m^{3(1-w_q)}}{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}} V_{0\text{Gpc}}}, \end{aligned}$$

onde h é a constante de Hubble adimensional (veja a discussão abaixo da Eq. 2.41) e $V_{0\text{Gpc}}$ é o volume do universo em unidade de gigaparsec cúbico.

Dessa relação vemos que deve haver uma grande diferença entre o fator de escala inicial da trajetória de Bohm a_b e o fator de escala que representa o valor médio inicial a_m . Escolhendo o fluido tal que $3(1-w_q)/2 \approx 1$, o volume do universo da ordem do universo observado, *i.e.*, $V_{0\text{Gpc}} \approx 1$ e lembrando que o valor medido de $h \approx 1$, a relação entre os fatores de escala é $x_m \approx 10^{40/(1-w_q)} \sqrt{x_b}$. Em termos de \mathcal{X} a relação é dada por $\mathcal{X}_m^2 \approx f_{\pm} \mathcal{X}_b a_0^{3(1-w_q)/2} 10^{-120}$. Isso mostra que a densidade de probabilidade de encontrarmos o universo inicialmente com $\mathcal{X} = \mathcal{X}_b$ é da ordem $\ln(\Psi^f(0, \mathcal{X}_b)) \propto -10^{120} \mathcal{X}_b a_0^{-3(1-w_q)/2} \propto -10^{120} x_b^{-3(1-w_q)/2}$, de forma que o universo deve começar com um fator de escala muito pequeno para essa probabilidade não ser extremamente pequena.

Como não há uma interpretação final para a função de onda do universo, a própria questão da probabilidade não é bem definida quando tratamos de cosmologia quântica. No entanto, independente dessa questão, é possível mostrar que existe uma classe de funções de onda para as quais o universo pode “começar” grande [81].

¹¹Veja Eq. (2.42).

Na linguagem da Seção 2.5, definimos a densidade adimensional e a função de Hubble efetiva

$$\Omega_{q0} \equiv \left(f_{\pm} \frac{l_p^2 c}{6\pi V_0 H_0} \frac{\mathcal{X}_b a_0^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\mathcal{X}_m^2} \right)^2, \quad E^2 = \Omega_{q0} \left(x^{3(1+w_q)} - \frac{x^6}{x_b^{3(1-w_q)}} \right), \quad (4.45)$$

respectivamente. Os resultados acima nos permitem fazer a seguinte consideração. Se adicionarmos à equação de Friedmann um segundo fluido com equação de estado constante w menor que w_q , obtemos

$$E^2 = \Omega_{q0} x^{3(1+w_q)} + \Omega_{w0} x^{3(1+w)}.$$

Esses dois fluidos terão contribuição iguais à densidade de energia total quando o fator de escala satisfizer $x_{\text{eq}} = (\Omega_{w0}/\Omega_{q0})^{1/(3w_q-3w)}$. O regime quântico ocorrendo em x_b e sendo $x_b \gg x_{\text{eq}}$, podemos utilizar o modelo quantizado com somente um fluido, já que nessa fase a contribuição do segundo fluido é desprezível. Por exemplo, se os dois fluidos forem radiação $\Omega_{r0} \approx 10^{-5}$ e poeira $\Omega_{m0} \approx 1$, o fator de escala de equivalência será $x_{\text{eq}} = 10^5$. Dessa forma, se o regime quântico estiver na escala de $x_b \approx 10^{25}$, então próximo a esse valor do fator de escala teremos $\Omega_{m0} x^3 / (\Omega_r x^4) \approx 10^{-30}$ e, logo, a contribuição da poeira será desprezível nessa escala.

O mesmo raciocínio acima é válido ao considerar a curvatura espacial, *i.e.*, se a curvatura dominar em um regime distante do regime quântico, podemos usar a trajetória definida por

$$E_q^2 = E^2 - \Omega_{q0} \frac{x^6}{x_b^{3(1-w_q)}}, \quad (4.46)$$

onde E^2 é a função de Hubble normalizada clássica que contém todos os fluidos utilizados no modelo, *e.g.*, Eq. (2.45). Nesse caso é útil também fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\Omega_{r0} x_b^{-2} \rightarrow \Omega_{r0} x_b^{-2} + \Omega_{m0} x_b^{-3} + \Omega_{k0} x_b^{-4} + \Omega_{\Lambda 0} x_b^{-6},$$

onde nesse exemplo escolhemos a radiação $w_q = 1/3$ como o fluido que domina no regime quântico. Dessa forma, a função de Hubble normalizada fica escrita como

$$E_q^2 = \Omega_{r0} x^4 \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2} \right) + \Omega_{m0} x^3 \left(1 - \frac{x^3}{x_b^3} \right) + \Omega_{k0} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{x_b^4} \right) + \Omega_{\Lambda 0} \left(1 - \frac{x^6}{x_b^6} \right). \quad (4.47)$$

A mudança de parâmetros acima é útil pois com ela temos que $E^2(x_b) = 0$.

As soluções descritas na Eq. (4.39) são o que chamamos de soluções de ricochete. Elas começam em uma fase de contração para $\lambda < 0$, atingem um valor mínimo para o fator de escala em $\lambda = 0$ e passam para uma fase de expansão para $\lambda > 0$.

Do ponto de vista computacional, a forma da função de Hubble é inconveniente. A representação de um número real é feita com uma precisão finita usando números de ponto flutuante de 32 ou 64 bits, no último caso temos ≈ 15 casas decimais de precisão. Quando avaliamos uma expressão do tipo $x^4(1-x^2/x_b^2)$, a razão x/x_b nunca é exatamente um, pois

sempre há um erro da ordem do número de casas de precisão, *i.e.*, $x/x_b = 1 \pm \sigma_r$, calculado numericamente em $x = x_b$,¹² onde $\sigma_r \approx 10^{-15}$. Nesse caso a subtração $1 - x^2/x_b^2 \approx 2\sigma_r$. Com isso, para um valor de $x_b \approx 10^{20}$, o resultado será $2 \times 10^{-15} x_b^4 \approx 10^{65}$ ao invés de zero. Para remediar esse problema, introduzimos a variável ν ,

$$a = a_b e^{\frac{\nu^2}{2}}, \quad \frac{\dot{a}}{a} = \nu \dot{\nu}, \quad (4.48)$$

de forma que o seu sinal coincide com o sinal de \dot{a} , e portanto $\dot{\nu} \geq 0$. Nessa variável a função de Hubble é dada por

$$E_q^2 = \Omega_{r0} x^4 (1 - e^{-\nu^2}) + \Omega_{m0} x^3 (1 - e^{-\frac{3\nu^2}{2}}) + \Omega_{k0} x^2 (1 - e^{-2\nu^2}) + \Omega_{\Lambda 0} (1 - e^{-3\nu^2}). \quad (4.49)$$

Quando $\nu \approx 0$, *i.e.*, $x \approx x_b$, expandimos essa função em série de Taylor

$$E_q^2 = \left(\Omega_{r0} x_b^4 + \frac{3}{2} \Omega_{m0} x_b^3 + 2\Omega_{k0} x_b^2 + 3\Omega_{\Lambda 0} \right) \nu^2 + \mathcal{O}(\nu^4), \quad (4.50)$$

$$E_q = \nu \sqrt{\Omega_{r0} x_b^4 + \frac{3}{2} \Omega_{m0} x_b^3 + 2\Omega_{k0} x_b^2 + 3\Omega_{\Lambda 0} + \mathcal{O}(\nu^2)}, \quad (4.51)$$

onde na última igualdade usamos que o sinal de ν é igual ao de \dot{a} . Além de ter uma expansão de Taylor bem comportada em torno de $\nu = 0$, essa parametrização tem a vantagem da derivada temporal satisfazer $\dot{\nu} > 0$. Portanto, essa derivada nunca é nula e, próximo a $\nu = 0$, ela é dada por

$$\dot{\nu} = \frac{E_q}{R_H \nu} \approx \frac{1}{R_H} \sqrt{\Omega_{r0} x_b^4 + \frac{3}{2} \Omega_{m0} x_b^3 + 2\Omega_{k0} x_b^2 + 3\Omega_{\Lambda 0} + \mathcal{O}(\nu)}. \quad (4.52)$$

As propriedades acima mostram que ν é uma função monotonicamente crescente de ct e portanto tem uma relação biunívoca com o tempo ct . Além disso, nas integrações, quando reescrevemos em termos dessa variável, o elemento de integração é $dct = a d\eta = d\nu/\dot{\nu}$ e é bem comportado em todo intervalo, inclusive em $\nu = 0$.

4.2 QUANTIZAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES

4.2.1 Redução dos Vínculos da Lagrangiana

No Apêndice D deduzimos a Lagrangiana para a gravitação em segunda ordem nas perturbações. Mostramos na Seção D.4.1 que parte do conjunto de perturbações funciona como vínculo na teoria, já que a Lagrangiana não depende da derivada temporal dessas quantidades. Nessa seção, partiremos da Lagrangiana da Eq. (D.86) para deduzir a álgebra dos parênteses de Poisson das perturbações. Contudo, como o espaço de fase contém vínculos, vamos primeiramente resolvê-los.

¹²Esse erro é chamado de erro de arredondamento e é praticamente inevitável em qualquer cálculo numérico.

Para tanto obtemos os momentos relacionados às variáveis \mathcal{E} , ψ^t e \mathcal{V} , definidos como

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \mathbf{L}^{(s)}}{\partial \dot{\varphi}},$$

obtendo os pares $(D^2 D_K^2 \pi_\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}})$, $(\pi_{\psi^t}, \dot{\psi}^t)$ e $(\pi_\mathcal{V}, \dot{\mathcal{V}})$, onde definimos o operador $D_K^2 \equiv D^2 + 3K$.¹³ Note que nessa definição utilizamos a Lagrangiana escalar e portanto não incluímos o termo de $\sqrt{-g}/(2\kappa)$. Esse termo não é necessário no processo de eliminação dos vínculos e, por ser um termo de fundo, pode ser reintroduzido no final. Reservamos o símbolo π para os momentos obtidos a partir da Lagrangiana escalar, e usaremos o símbolo Π para representar os momentos conjugados de \mathcal{L} .

Encontramos os momentos conjugados do subespaço no qual a inversão dos momentos em função das derivadas temporais é possível. Esse procedimento é o mesmo que utilizamos para as variáveis de fundo na Seção 4.1.1 [79]. As expressões relacionando os momentos e as derivadas temporais são

$$\pi_\mathcal{E} = -\frac{4}{3}\delta\sigma^{(s)}, \quad \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{B} + \frac{3}{4}\pi_\mathcal{E} + \frac{2\Theta}{3}\mathcal{E}, \quad (4.53)$$

$$\pi_{\psi^t} = 6\kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V} - 4\delta\Theta, \quad \dot{\psi}^t = \frac{\kappa\varepsilon\vartheta}{2}\mathcal{V} - \frac{\Theta}{3}\phi - \frac{D^2\mathcal{B}}{3} - \frac{\pi_{\psi^t}}{12}, \quad (4.54)$$

$$\pi_\mathcal{V} = -2\kappa\vartheta\delta\varepsilon, \quad \dot{\mathcal{V}} = \frac{c_s^2}{2\kappa\varepsilon\vartheta}\pi_\mathcal{V} + \phi + c_s^2\Theta\mathcal{V} - \left(\frac{c_s^2\varepsilon\tau + \iota}{\varepsilon\vartheta}\right)\delta s. \quad (4.55)$$

Com as expressões acima, podemos calcular a transformada de Legendre em relação a essas variáveis e definir a Hamiltoniana inicial como

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_i^{(s)} &= D^2 D_K^2 \pi_\mathcal{E} \dot{\mathcal{E}} + \pi_{\psi^t} \dot{\psi}^t + \pi_\mathcal{V} \dot{\mathcal{V}} - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_4 \dot{\delta}s - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_2 \dot{\delta}\chi_3 - \mathbf{L}^{(s)}, \\ &= \frac{c_s^2 \pi_\mathcal{V}^2}{4\kappa\varepsilon\vartheta} + \frac{3}{8} D^2 \pi_\mathcal{E} D_K^2 \pi_\mathcal{E} - \frac{\pi_{\psi^t}^2}{24} + \pi_\mathcal{V} \left(\phi + c_s^2 \Theta \mathcal{V} - \left(\frac{\varepsilon c_s^2 \tau + \iota}{\varepsilon \vartheta} \right) \delta s \right) \\ &+ D^2 D_K^2 \pi_\mathcal{E} \left(\mathcal{B} + \frac{2\Theta\mathcal{E}}{3} \right) + \pi_{\psi^t} \left(\frac{\kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V}}{2} - \frac{\Theta\phi}{3} - \frac{D^2\mathcal{B}}{3} \right) \\ &- \left(\kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V} D^2 \mathcal{V} + \frac{3(\kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V})^2}{2} - 2\kappa\vartheta\Theta\varepsilon\phi\mathcal{V} + \left(\frac{\psi}{2} - \phi \right) \delta\mathcal{R} - \kappa \frac{\partial\tau}{\partial s} \Big|_\varepsilon \varepsilon \delta s^2 \right) \\ &- 2\kappa\phi\tau\varepsilon\delta s. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dessa forma escrevemos a Lagrangiana de primeira ordem

$$\mathbf{L}^{(s)} = D^2 D_K^2 \pi_\mathcal{E} \dot{\mathcal{E}} + \pi_{\psi^t} \dot{\psi}^t + \pi_\mathcal{V} \dot{\mathcal{V}} - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_4 \dot{\delta}s - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_2 \dot{\delta}\chi_3 - \mathbb{H}_i^{(2)}. \quad (4.57)$$

Nessa Lagrangiana, os campos e os momentos são considerados variáveis independentes e sua variação em relação a esses provê as mesmas equações de movimento e vínculos que

¹³Note que, pela Eq. (2.12), o operador D_K^2 tem o mesmo comutador que D^2 (Eq. 3.3) com a derivada de Lie na direção normal, *i.e.*,

$$[\partial_{ct}, D_K^2] = -\frac{2}{3}\Theta D_K^2.$$

a Lagrangiana original. Vale ressaltar que os termos nos quais os operadores D^2 agem sobre os campos na forma $\varphi_1 D^2 \varphi_2$, onde φ_i representa qualquer combinação linear de campos com coeficientes dependentes de quantidades de fundo, podem ser escritos como $\varphi_2 D^2 \varphi_1$ a menos de termos de superfície. Portanto, faremos essa troca sem mencioná-la explicitamente.

Na Lagrangiana acima ϕ e \mathcal{B} aparecem como multiplicadores de Lagrange, já que a Lagrangiana não depende das derivadas temporais desses campos e depende linearmente deles. Fazendo as variações respectivas a ϕ e \mathcal{B} , temos os vínculos

$$\pi_{\mathcal{V}} - \frac{\Theta}{3} \pi_{\psi^t} + \delta \mathcal{R} + 2\kappa(\vartheta \Theta \varepsilon \mathcal{V} - \tau \varepsilon \delta s) = 0, \quad (4.58)$$

$$D^2 D_K^2 \pi_{\mathcal{E}} - \frac{D^2 \pi_{\psi^t}}{3} = 0, \quad (4.59)$$

que relacionam os campos e não incluem derivadas temporais dos mesmos. Usando esses vínculos, eliminamos a dependência da Lagrangiana tanto nos campos ϕ e \mathcal{B} quanto nos momentos π_{ψ^t} e $\pi_{\mathcal{V}}$ em favor de $\pi_{\mathcal{E}}$, e assim obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(s)} &= D_K^2 \pi_{\mathcal{E}} (D^2 \dot{\mathcal{E}} + \Theta \dot{\mathcal{V}} + 3\dot{\psi}^t) \\ &+ (2\kappa(\vartheta \dot{\mathcal{E}} \mathcal{V} + \dot{\chi}_4 \varepsilon \delta s) - \delta \mathcal{R}) \dot{\mathcal{V}} - 2\kappa \varepsilon \delta \chi_4 \dot{\delta s} - 2\kappa \varepsilon \delta \chi_2 \delta \dot{\chi}_3 - \mathbf{H}_i^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde a Hamiltoniana $\mathbf{H}_i^{(s)}$ tem os momentos π_{ψ^t} e $\pi_{\mathcal{V}}$ eliminados pelos vínculos. Note que

$$\partial_{ct} D^2 \mathcal{E} + \frac{2\Theta}{3} \mathcal{E} + \Theta \dot{\mathcal{V}} + 3\dot{\psi}^t = \dot{\mathcal{U}} - \dot{\Theta} \mathcal{V} + \frac{2\Theta}{3} \mathcal{E},$$

onde definimos a variável

$$\mathcal{U} \equiv 3\psi + \Theta \mathcal{V} = 3\Psi + \Theta \bar{\mathcal{V}}. \quad (4.61)$$

Podemos observar pelas regras de transformação de ψ e \mathcal{V} , Eqs. (3.22) e (3.47), que essa combinação é invariante de calibre e aparece naturalmente quando usamos os vínculos discutidos acima. Com essa mudança de variável, o termo da Eq. (4.60) que envolve ψ^t e $\dot{\mathcal{V}}$ pode ser expressado como $-\delta \mathcal{R} \dot{\mathcal{V}} = \frac{4}{3} \dot{\mathcal{V}} D_K^2 (\mathcal{U} - \Theta \mathcal{V})$. O primeiro termo do lado direito é reescrito como

$$\frac{4}{3} \dot{\mathcal{V}} D_K^2 \mathcal{U} = \frac{4 \partial_{ct} (\sqrt{-g} \mathcal{V} D_K^2 \mathcal{U})}{3 \sqrt{-g}} - \frac{4}{3} D_K^2 \mathcal{V} \left(\partial_{ct} + \frac{\Theta}{3} \right) \mathcal{U},$$

onde usamos as Eqs. (2.12) e (3.3). No segundo eliminamos os termos com derivadas temporais das perturbações

$$-\frac{4\Theta}{3} \dot{\mathcal{V}} D_K^2 \mathcal{V} = -\frac{2 \partial_{ct} (\sqrt{-g} \Theta \mathcal{V} D_K^2 \mathcal{V})}{3 \sqrt{-g}} + \left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} \right) \frac{2 \mathcal{V} D_K^2 \mathcal{V}}{3}.$$

Tratamos a quantidade $-2\kappa(\vartheta \Theta \varepsilon \mathcal{V} - \tau \varepsilon \delta s) \dot{\mathcal{V}}$ de forma similar,

$$\begin{aligned} -2\kappa \vartheta \Theta \varepsilon \mathcal{V} \dot{\mathcal{V}} &= -\frac{\partial_{ct} (\sqrt{-g} \kappa \vartheta \Theta \varepsilon \mathcal{V}^2)}{\sqrt{-g}} + \kappa (\partial_{ct} + \Theta) (\vartheta \Theta \varepsilon) \mathcal{V}^2, \\ 2\kappa \tau \varepsilon \delta s \dot{\mathcal{V}} &= \frac{\partial_{ct} (\sqrt{-g} 2\kappa \varepsilon \tau \mathcal{V} \delta s)}{\sqrt{-g}} - 2\kappa (\partial_{ct} + \Theta) (\varepsilon \tau) \mathcal{V} \delta s - 2\kappa \varepsilon \tau \mathcal{V} \dot{\delta s}, \end{aligned}$$

e escrevemos então a Lagrangiana ignorando os termos de superfície

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{(s)} &= D_K^2 \pi_{\mathcal{U}} \dot{\mathcal{U}} + \pi_{\delta s} \dot{\delta s} + \pi_{\delta \chi_3} \dot{\delta \chi_3} \\
&+ D_K^2 \left(\pi_{\mathcal{U}} + \frac{4\mathcal{V}}{3} \right) \left(-\dot{\Theta} \mathcal{V} + \frac{2\Theta}{3} \mathcal{E} \right) - \frac{4\Theta}{9} \mathcal{U} D_K^2 \mathcal{V} \\
&+ \left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} \right) \frac{2\mathcal{V} D_K^2 \mathcal{V}}{3} \\
&+ \kappa (\partial_{ct} + \Theta) (\vartheta \Theta \mathcal{E}) \mathcal{V}^2 - 2\kappa (\partial_{ct} + \Theta) (\varepsilon \tau) \mathcal{V} \delta s - \mathbb{H}_i^{(2)},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

onde definimos as variáveis

$$\pi_{\delta s} \equiv -2\kappa \varepsilon (\delta \chi_4 + \mathcal{V} \tau) = -2\kappa \varepsilon (\overline{\delta \chi_4} + \overline{\mathcal{V} \tau}), \tag{4.63}$$

$$\pi_{\delta \chi_3} \equiv -2\kappa \varepsilon \delta \chi_2, \tag{4.64}$$

$$\pi_{\mathcal{U}} \equiv \pi_{\mathcal{E}} - \frac{4\mathcal{V}}{3} = -\frac{4}{3} \left(\mathcal{V} + \delta \sigma^{(s)} \right) = -\frac{4}{3} \overline{\mathcal{V}}. \tag{4.65}$$

Usando a Eq. (3.54), vemos que as quantidades definidas acima são invariantes de calibre. Especificamente, lembramos que \mathcal{V} tem a mesma regra de transformação que $-\delta \sigma^{(s)}$, os termos δs e $\delta \chi_2$ são automaticamente invariantes de calibre, já que $\delta \chi_2 = 0 = \dot{\delta s}$, e $\pi_{\delta s}$ também é invariante já que $\dot{\chi}_4 = \tau$. Pelas definições de $\pi_{\mathcal{E}}$ (Eq. 4.53) e $\overline{\mathcal{V}}$ (Eq. 3.52), verificamos a invariância do momento $\pi_{\mathcal{U}}$.

Em retrospecto, vemos que originalmente tínhamos nove campos independentes, listados na Eq. (D.89), e que, com a transformada de Legendre descrita na Eq. (4.57), esse conjunto passou a ser

$$(\phi, \mathcal{B}, \psi^{\dagger}, \mathcal{E}, \mathcal{V}, \delta \chi_2, \delta \chi_3, \delta \chi_4, \delta s, \pi_{\mathcal{E}}, \pi_{\psi^{\dagger}}, \pi_{\mathcal{V}}),$$

já que nesse formalismo consideramos as derivadas temporais de \mathcal{E} , ψ^{\dagger} e \mathcal{V} como campos independentes. Como os campos ϕ e \mathcal{B} são multiplicadores de Lagrange que podem ser resolvidos reescrevendo $\pi_{\psi^{\dagger}}$ e $\pi_{\mathcal{V}}$ em função de $\pi_{\mathcal{E}}$, o conjunto de variáveis após resolver os vínculos é

$$(\psi^{\dagger}, \mathcal{E}, \mathcal{V}, \delta \chi_2, \delta \chi_3, \delta \chi_4, \delta s, \pi_{\mathcal{E}}) \Rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{V}, \mathcal{U}, \pi_{\mathcal{U}}, \delta \chi_3, \pi_{\delta \chi_3}, \delta s, \pi_{\delta s}).$$

O lado direito da lista acima representa o conjunto de campos que temos após aplicar os vínculos e estão relacionados às variáveis do lado esquerdo via Eqs. (4.61) e (4.63–4.65). Para o novo conjunto de variáveis, a Lagrangiana não contém os campos \mathcal{E} e \mathcal{V} com derivadas temporais e esses não multiplicam nenhum termo com derivadas temporais. Logo, esses campos se comportam como vínculos. Reescrevemos a Lagrangiana das perturbações nas novas variáveis e usando os vínculos de ϕ e \mathcal{B} ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{(s)} &= D_K^2 \pi_{\mathcal{U}} \dot{\mathcal{U}} + \pi_{\delta s} \dot{\delta s} + \pi_{\delta \chi_3} \dot{\delta \chi_3} + \frac{2\iota}{\varepsilon \vartheta} (2D_K^2 \Psi + \kappa \varepsilon \tau \delta s) \delta s - \frac{2}{9} \mathcal{U} D_K^2 \mathcal{U} \\
&- \frac{4c_s^2}{\kappa \varepsilon \vartheta} (D_K^2 \Psi)^2 + \frac{\kappa \varepsilon c_s^2}{\vartheta} \tau^2 \delta s^2 + \frac{9K}{8} \pi_{\mathcal{U}} D_K^2 \pi_{\mathcal{U}} - \kappa \left. \frac{\partial \tau}{\partial s} \right|_{\varepsilon} \varepsilon \delta s^2 + \mathbf{L}^{(s,1)},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

onde escrevemos todos os termos cujos coeficientes são proporcionais às equações de fundo como

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(s,1)} = & - \left(\mathcal{V} D_K^2 \pi_{\mathcal{U}} + \frac{2}{3} \mathcal{V} D_K^2 \mathcal{V} - \kappa \varepsilon \vartheta \mathcal{V}^2 \right) \left(\dot{\Theta} + \frac{3\kappa \varepsilon \vartheta}{2} - 3K \right) \\ & + \kappa \left(\vartheta (1 + c_s^2) \mathcal{V}^2 \Theta - 2 \frac{\tau \varepsilon (1 + c_s^2) + \iota}{\varepsilon} \mathcal{V} \delta s \right) (\partial_{ct} + \Theta) \varepsilon \\ & + \kappa \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s} \Big|_{\varepsilon} \Theta \varepsilon \mathcal{V}^2 - 2 \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial s} \Big|_{\varepsilon} \mathcal{V} \delta s \right) \dot{s}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Usamos também que $12\Psi = 3\Theta\pi_{\mathcal{U}} + 4\mathcal{U}$, relação que pode ser identificada usando as Eqs. (4.61) e Eq. (4.65).

Da Lagrangiana acima, vemos que os termos com \mathcal{E} se cancelaram e que os que envolvem \mathcal{V} aparacem somente multiplicados pelas equações de fundo. Poderíamos agora fazer uma mudança de variável, como feito na Eq. (D.84), para eliminar o termo $\mathbf{L}^{(s,1)}$. Porém existe um conjunto de variáveis no qual a Lagrangiana fica ainda mais simples. Para deduzir esse conjunto, obtemos as equações de movimento variando a Lagrangiana em relação a \mathcal{U} e $\pi_{\mathcal{U}}$,

$$\dot{\mathcal{U}} - \frac{2\Theta c_s^2}{\kappa \varepsilon \vartheta} D_K^2 \Psi + \frac{9K}{4} \pi_{\mathcal{U}} + \frac{\iota \Theta}{\varepsilon \vartheta} \delta s = 0, \quad (4.68)$$

$$\left(\partial_{ct} + \frac{\Theta}{3} \right) \pi_{\mathcal{U}} + \frac{8c_s^2}{3\kappa \varepsilon \vartheta} D_K^2 \Psi + \frac{4}{9} \mathcal{U} - \frac{4\iota}{3\varepsilon \vartheta} \delta s = 0. \quad (4.69)$$

Multiplicando a primeira equação por $4/3$ e a segunda por Θ temos

$$3\dot{\Psi} + \Theta\Psi + \frac{9}{8}\kappa \varepsilon \vartheta \pi_{\mathcal{U}} = 0, \quad (4.70)$$

onde usamos a Eq. (2.27). Essa equação é a mesma Eq. (3.84) quando fazemos que $\Psi = \Phi$. Usando a equação acima para eliminar $\pi_{\mathcal{U}}$ da primeira equação, temos

$$\dot{\zeta} - \frac{2\Theta c_s^2}{\kappa \varepsilon \vartheta} D^2 \Psi + \frac{\iota \Theta}{\varepsilon \vartheta} \delta s = 0, \quad \zeta \equiv \mathcal{U} - \frac{6K}{\kappa \varepsilon \vartheta} \Psi, \quad (4.71)$$

onde definimos a variável ζ . Essa variável é definida na Eq. (6.68) da Ref [60]. Ela é proporcional à variável \mathbf{v} definida na Eq. (10.61) da mesma referência, e é conhecida na literatura como variável de Mukhanov–Sasaki.¹⁴ A forma das equações de movimento para Ψ e ζ mostra que é simples trabalhar com essas variáveis. Para efetuar essa mudança, primeiro introduzimos as quantidades

$$\gamma = \frac{K}{\kappa \varepsilon \vartheta}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\Theta}{3} (3c_s^2 + 1) \gamma - \frac{\gamma F}{\varepsilon \vartheta}, \quad \alpha = \frac{1}{1 - 2\gamma} \quad (4.72)$$

$$F \equiv \vartheta (1 + c_s^2) (\partial_{ct} + \Theta) \varepsilon + (\tau \varepsilon (1 + c_s^2) + \iota) \dot{s}, \quad (4.73)$$

¹⁴Nessa mesma referência, a variável de Mukhanov–Sasaki é definida primeiramente na Eq (10.43a) para o caso das seções espaciais planas.

onde separamos em F os termos proporcionais às equações de fundo. Com essas definições, a troca de variáveis é expressa como

$$\mathcal{U} = \zeta + 6\gamma\Psi, \quad \pi_{\mathcal{U}} = \frac{4\Psi}{\alpha\Theta} - \frac{4\zeta}{3\Theta}. \quad (4.74)$$

Para fazer a mudança de variáveis na Lagrangiana, note que o termo que envolve derivadas temporais pode ser reescrito como

$$D_K^2 \pi_{\mathcal{U}} \dot{\mathcal{U}} = \frac{4}{\Theta} D_K^2 \left(\frac{\Psi}{\alpha} - \frac{\zeta}{3} \right) \partial_{ct} (\zeta + 6\gamma\Psi).$$

Para que tenhamos derivadas temporais somente do campo ζ , reescrevemos os termos acima como

$$\begin{aligned} \frac{24\gamma\dot{\Psi}D_K^2\Psi}{\Theta\alpha} &= \frac{\partial_{ct}}{\sqrt{-g}} \left(\frac{12\gamma\sqrt{-g}}{\Theta\alpha} \Psi D_K^2\Psi \right) - \left(\frac{4\gamma}{\alpha} + \partial_{ct} \left(\frac{12\gamma}{\Theta\alpha} \right) \right) \Psi D_K^2\Psi, \\ \frac{8\gamma}{\Theta} \dot{\Psi} D_K^2 \zeta + \frac{8\gamma}{\Theta} \dot{\zeta} D_K^2 \Psi &= \frac{\partial_{ct}}{\sqrt{-g}} \left(\frac{8\gamma\sqrt{-g}}{\Theta} \Psi D_K^2 \zeta \right) - \left(\frac{8\gamma}{3} + \partial_{ct} \left(\frac{8\gamma}{\Theta} \right) \right) \zeta D_K^2 \Psi, \\ -\frac{4\dot{\zeta}}{3\Theta} D_K^2 \zeta &= -\frac{\partial_{ct}}{\sqrt{-g}} \left(\frac{2\sqrt{-g}\zeta D_K^2 \zeta}{3\Theta} \right) + \frac{2\zeta D_K^2 \zeta}{9} - \frac{2\dot{\Theta}}{3\Theta^2} \zeta D_K^2 \zeta. \end{aligned}$$

Ignorando os termos de superfície, temos a Lagrangiana escrita em termos das novas variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(s)} &= \frac{4}{\Theta} D_K^2 \Psi \dot{\zeta} + \pi_{\delta s} \dot{\delta s} + \pi_{\delta\chi_3} \dot{\delta\chi_3} + \frac{2\iota}{\varepsilon\vartheta} (2D_K^2 \Psi + \kappa\varepsilon\tau\delta s) \delta s \\ &+ \frac{\kappa\varepsilon\vartheta}{\Theta^2} \zeta D_K^2 \zeta - \frac{4c_s^2}{\kappa\varepsilon\vartheta} D^2 \Psi D_K^2 \Psi + \frac{\kappa\varepsilon c_s^2}{\vartheta} \tau^2 \delta s^2 - \kappa \left. \frac{\partial\tau}{\partial s} \right|_{\varepsilon} \varepsilon \delta s^2 + \mathbf{L}^{(s,1)} + \mathbf{L}^{(s,2)}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde novamente separamos os termos proporcionais às equações de fundo definindo o termo

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(s,2)} &= \left(\dot{\Theta} + \frac{3}{2}\kappa\varepsilon\vartheta - 3K \right) \left(\frac{12\gamma(1-2\gamma)}{\Theta^2} \Psi D_K^2 \Psi - \frac{2\zeta D_K^2 \zeta}{3\Theta^2} - \frac{8\gamma}{\Theta^2} \zeta D_K^2 \Psi \right) \\ &- \frac{12\gamma F}{\varepsilon\vartheta\Theta} \Psi D_K^2 \Psi. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Podemos agora repetir o procedimento feito no Apêndice D, onde efetuamos mudanças de variáveis a fim de eliminar da Lagrangiana os termos proporcionais às equações de ordem zero (ver Eqs. D.81, D.82 e D.84 na Seção D.4). Para tanto, note que a equação de fundo que aparece nas expressões para $\mathbf{L}^{(s,1)}$ e $\mathbf{L}^{(s,2)}$ pode ser escrita como (ver Eq. 2.17)

$$\left(\dot{\Theta} + \frac{3}{2}\kappa\varepsilon\vartheta - 3K \right) = -\frac{3}{2} \left(G_{nn} - \kappa T_{nn} + (G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \frac{\mathbf{h}^{\mu\nu}}{3} \right).$$

Logo, usando a Lagrangiana de primeira ordem dada nas Eq. (D.80) e Eq. (D.83), vemos que a seguinte transformação elimina todos os termos proporcionais às equações de

movimento de ordem zero,

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{3}{4}M, \quad \psi^t \rightarrow \psi^t - \frac{1}{4}M, \quad (4.77)$$

$$M \equiv \mathcal{V}D_K^2\pi_U + \frac{2}{3}\mathcal{V}D_K^2\mathcal{V} - \kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V}^2 - \frac{12\gamma(1-2\gamma)}{\Theta^2}\Psi D_K^2\Psi + \frac{2\zeta D_K^2\zeta}{3\Theta^2} + \frac{8\gamma\zeta D_K^2\Psi}{\Theta^2},$$

$$\delta\chi_4 \rightarrow \delta\chi_4 + \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\Big|_\varepsilon \left(\frac{6\gamma\Psi D_K^2\Psi}{\kappa\varepsilon\vartheta\Theta} - \frac{\Theta\mathcal{V}^2}{2} \right) + \frac{\partial\tau}{\partial s}\Big|_\varepsilon \mathcal{V}\delta s, \quad (4.78)$$

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} + \frac{1+c_s^2}{2\varepsilon}\mathcal{V}^2 - \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\Big|_\varepsilon \frac{\mathcal{V}\delta s}{\kappa\varepsilon\vartheta} - \frac{6\gamma}{\kappa\varepsilon\vartheta} \frac{1+c_s^2}{\varepsilon}\Psi D_K^2\Psi. \quad (4.79)$$

Desta forma, a Lagrangiana final com todos os vínculos resolvidos é dada pela Eq. (4.75) a menos dos termos $L^{(s,1)}$ e $L^{(s,2)}$.

4.2.2 Hamiltoniana e a Álgebra de Poisson

Na Seção 4.2.1, deduzimos a Lagrangiana escalar resolvendo todos os vínculos. Porém precisamos determinar a Lagrangiana $\mathcal{L}^{(2)}$, que inclui a 4-forma $e_{\mu\nu\alpha\beta}$, para obtermos a álgebra de Lie dos parênteses de Poisson. Na Seção 4.1.1 utilizamos um tempo arbitrário definido pelas curvas de tangente l^μ , e mostramos que a 4-forma de integração pode ser dividida em uma parte constante em relação a \mathcal{L}_l vezes $c^{-1}Na^3$. Dessa forma, reescrevemos as derivadas temporais que aparecem na Eq. (4.75), usando a nova coordenada temporal definida por l^μ , e usamos a relação $\mathcal{L}^{(s)} = Na^3/(2c\kappa)L^{(s)}$ para escrever a Lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(s)} = \Pi_\zeta \mathcal{L}_l \zeta + \Pi_s \mathcal{L}_l \delta s + \Pi_{\chi_3} \mathcal{L}_l \delta \chi_3 - \mathcal{H}^{(s)}, \quad (4.80)$$

onde $\mathcal{L}^{(s)}$ se refere à parte envolvendo as perturbações escalares de $\mathcal{L}^{(2)}$. Os momentos são definidos como os coeficientes das derivadas temporais

$$\Pi_\zeta \equiv \frac{2a^3}{c\kappa\Theta} D_K^2 \Psi, \quad \Pi_s \equiv \frac{a^3}{2c\kappa} \pi_{\delta s}, \quad \Pi_{\chi_3} \equiv \frac{a^3}{2c\kappa} \pi_{\delta \chi_3}, \quad (4.81)$$

e a densidade de Hamiltoniana é identificada pelos termos que não envolvem derivadas temporais das perturbações,

$$\mathcal{H}^{(s)} = N \left(\frac{c\Theta^2 c_s^2}{2\varepsilon\vartheta a^3} \Pi_\zeta D^2 D_K^{-2} \Pi_\zeta - \frac{\iota\Theta}{\varepsilon\vartheta} \Pi_\zeta \delta s - \frac{a^3 \varepsilon \vartheta}{2c\Theta^2} \zeta D_K^2 \zeta - U_s \frac{\delta s^2}{2} \right), \quad (4.82)$$

$$U_s \equiv \frac{a^3}{c} \left(\frac{2\iota\tau}{\vartheta} + \frac{\varepsilon c_s^2 \tau^2}{\vartheta} - \varepsilon \frac{\partial\tau}{\partial s}\Big|_\varepsilon \right). \quad (4.83)$$

Da Lagrangiana acima, identificamos a álgebra dos parênteses de Poisson,

$$\{\zeta(\tilde{x}), \Pi_\zeta(\tilde{y})\} = \{\delta s(\tilde{x}), \Pi_s(\tilde{y})\} = \{\delta \chi_3(\tilde{x}), \Pi_{\chi_3}(\tilde{y})\} = \delta^3(\tilde{x} - \tilde{y}), \quad (4.84)$$

onde \tilde{x} e \tilde{y} são coordenadas na hipersuperfície conforme e todos os outros parênteses de Poisson são nulos. A Hamiltoniana é definida como

$$H^{(s)} = \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \mathcal{H}^{(s)}, \quad (4.85)$$

onde $\tilde{\Sigma}$ representa a hipersuperfície conforme e $d^3\tilde{x} \equiv \tilde{\mathbf{e}}(l^\mu)$ é a 3-forma espacial com componentes $\tilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}l^\beta$. Usando a álgebra de Poisson, encontramos as seguintes equações de movimento

$$\mathcal{L}_l\zeta = \{\zeta, H^{(s)}\} = N \left(\frac{c\Theta^2 c_s^2}{\varepsilon\vartheta a^3} D^2 D_K^{-2} \Pi_\zeta - \frac{\iota\Theta}{\varepsilon\vartheta} \delta s \right) = N \left(\frac{2\Theta c_s^2}{\kappa\varepsilon\vartheta} D^2 \Psi - \frac{\iota\Theta}{\varepsilon\vartheta} \delta s \right), \quad (4.86)$$

$$\mathcal{L}_l \Pi_\zeta = \{\Pi_\zeta, H^{(s)}\} = N \frac{a^3 \varepsilon \vartheta}{c \Theta^2} D_K^2 \zeta, \quad (4.87)$$

$$\mathcal{L}_l \delta s = \{\delta s, H^{(s)}\} = 0, \quad \mathcal{L}_l \Pi_{\delta s} = \{\Pi_{\delta s}, H^{(s)}\} = N \left(\frac{\iota\Theta}{\varepsilon\vartheta} \Pi_\zeta + U_s \delta s \right), \quad (4.88)$$

$$\mathcal{L}_l \delta \chi_3 = \{\delta \chi_3, H^{(s)}\} = 0, \quad \mathcal{L}_l \Pi_{\chi_3} = \{\Pi_{\chi_3}, H^{(s)}\} = 0. \quad (4.89)$$

A Eq. (4.86) é simplesmente a Eq. (4.71) escrita usando a derivada de Lie na direção l^μ . Da definição de Π_ζ , temos que

$$\mathcal{L}_l \Pi_\zeta = \frac{2Na^3}{c\kappa\Theta^2} \left(\frac{\Theta^2}{3} - \dot{\Theta} \right) D_K^2 \Psi + \frac{2a^3}{c\kappa\Theta} D_K^2 \mathcal{L}_l \Psi,$$

e, com isso, a Eq. (4.87) é reescrita como

$$\frac{\mathcal{L}_l \Psi}{N} + \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\Theta^2}{3} - \dot{\Theta} \right) \Psi = \frac{\kappa\varepsilon\vartheta}{2\Theta} \zeta,$$

que é equivalente a Eq. (4.70). É simples mostrar que a Eq. (4.88) é equivalente a Eq. (D.94). Portanto, a Hamiltoniana acima com os parênteses de Poisson dados na Eq. (4.84) formam um sistema equivalente ao formalismo Lagrangiano.

O sistema de equações de movimento acima tem uma característica especial. Os campos $\delta\chi_3$ e Π_{χ_3} são constantes e a Hamiltoniana não depende deles, dessa forma podemos ignorá-los ao tratarmos das perturbações cosmológicas. O campo da perturbação de entropia surge como fonte nas equações de movimento e a Hamiltoniana não depende de seu momento conjugado de forma que δs é uma quantidade conservada classicamente, e seu momento conjugado é irrelevante para a evolução das perturbações ζ e Π_ζ .

No procedimento seguido para encontrarmos a Hamiltoniana, fizemos uma transformada de Legendre a fim de escrever a Lagrangiana de primeira ordem. Para comparar o resultado com a literatura, vamos fazer a transformada de Legendre inversa para eliminarmos Π_ζ da Hamiltoniana dada na Eq. (4.82). Como primeiro passo, é conveniente definir a seguinte quantidade

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon\vartheta a^3}{cN} \frac{1}{\Theta c_s}}. \quad (4.90)$$

Essa combinação de funções de fundo aparece naturalmente na Hamiltoniana e é igual, a menos de fatores constantes, à quantidade z definida na Eq. (10.43b) da Ref. [60]. Lembrando que nessa referência os autores usam o tempo conforme e, portanto, $N = a$. Resolvendo a Eq. (4.86) para Π_ζ , obtemos

$$D^2 D_K^{-2} \Pi_\zeta = z^2 \mathcal{L}_l \zeta + \frac{a^3 \iota}{\Theta c_s^2} \delta s, \quad (4.91)$$

e substituindo Π_ζ na Lagrangiana da Eq. (4.80), temos

$$\mathcal{L}^{(s)} = \frac{z^2}{2} \mathcal{L}_l \zeta \Delta^2 \mathcal{L}_l \zeta + \frac{N^2 z^2 c_s^2}{2} \zeta D_K^2 \zeta + \frac{N a^3 \iota^2}{2 c_s^2 \varepsilon \vartheta} \delta s \Delta^2 \delta s + \frac{a^3 \iota}{\Theta c_s^2} \delta s \Delta^2 \mathcal{L}_l \zeta + N U_s \frac{\delta s^2}{2}, \quad (4.92)$$

onde definimos o operador $\Delta^2 \equiv D^{-2} D_K^2$. Note que esse operador tem as seguintes propriedades,

$$[\partial_{ct}, \Delta^2] = 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0} \Delta^2 \rightarrow 1. \quad (4.93)$$

A primeira propriedade pode ser mostrada usando a Eq. (3.3) para concluir que

$$\text{se } D^2 F = D_K^2 G, \quad \text{então } \partial_{ct} D^2 F = \partial_{ct} D_K^2 G \Rightarrow D^2 \dot{F} = D_K^2 \dot{G},$$

enquanto a segunda é consequência direta da definição de D_K^2 . Como a função lapso é constante nas hipersuperfícies, $D_\mu N = 0$, temos também que $[\mathcal{L}_l, \Delta^2] = 0$.

Quando nos restringimos ao caso plano $K = 0$, no calibre conforme $N = a$ e com fluidos barotrópicos $\iota = 0$, a Lagrangiana se reduz a

$$\mathcal{L}^{(s)} = \frac{z^2}{2} \zeta'^2 + \frac{z^2 c_s^2}{2} \zeta \tilde{D}^2 \zeta, \quad (4.94)$$

onde ignoramos os fatores que envolvem a perturbação de entropia, já que essa se desacopla da evolução de ζ no caso barotrópico. Essa Lagrangiana é a mesma que a encontrada em [60] na Eq. (10.62), ou Eq. (8.78) de [2].¹⁵ Porém, ao contrário do que é afirmado nas Refs. [2, 60], a Lagrangiana acima não é válida para universos com seções espaciais não planas. Comparando com o mesmo caso porém com $K \neq 0$, temos

$$\mathcal{L}^{(s)} = \frac{z^2}{2} \zeta' \Delta^2 \zeta' + \frac{a^2 z^2 c_s^2}{2} \zeta D_K^2 \zeta. \quad (4.95)$$

Variando ambas as Lagrangianas obtemos, respectivamente, as seguintes equações de movimento

$$(z^2 \zeta')' - z^2 c_s^2 \tilde{D}^2 \zeta = 0, \quad (4.96)$$

$$\Delta^2 \left((z^2 \zeta')' - a^2 z^2 c_s^2 D^2 \zeta \right) = 0. \quad (4.97)$$

Como o operador D^2 tem inversa única, podemos multiplicar a segunda equação por Δ^{-2} e mostrar que as equações são iguais. Ou seja, as duas Lagrangianas acima fornecem a mesma equação de movimento. Contudo, esse fato não é o suficiente pois a determinação da álgebra dos parênteses de Poisson depende da forma da Lagrangiana e não da equação de movimento. Dessa forma, como a quantização depende do mapeamento dessa álgebra, as duas Lagrangianas resultam em teorias quânticas distintas.

¹⁵No exercício 8.9 da Ref. [2], o autor esquece de levar em conta que o operador \hat{O} não precisa ser exatamente o operador de Laplace–Beltrami, mas sim qualquer operador que no limite $K \rightarrow 0$ se reduza ao operador de Laplace–Beltrami.

4.2.3 Escolha de Calibre

Como vimos acima, o princípio variacional leva naturalmente a escolhas das variáveis invariantes de calibre ζ e Π_ζ . Para relacioná-las com as perturbações na métrica, usamos as Eqs. (3.39), (3.84), (4.61) e (4.71) para reescrever ζ da forma

$$\zeta = \frac{2\Psi}{\kappa\varepsilon\vartheta} \left(\frac{3\kappa\varepsilon\vartheta}{2} + \dot{\Theta} - 3K \right) + \frac{2\Theta^2}{3\kappa\varepsilon\vartheta} \left(\partial_{ct} \left(\frac{3\Psi}{\Theta} \right) + \Phi \right). \quad (4.98)$$

O primeiro termo no lado direito é exatamente a equação de movimento de fundo dada na Eq. (2.27). Contudo, quando a evolução de fundo for clássica, esse termo será nulo, independente disso, podemos redefinir a variável ζ como

$$\zeta \equiv \frac{2\Theta^2}{3\kappa\varepsilon\vartheta} \left(\partial_{ct} \left(\frac{3\Psi}{\Theta} \right) + \Phi \right), \quad (4.99)$$

e substituir a expressão resultante na Lagrangiana. Dessa forma teríamos novos termos, porém todos proporcionais a equação de fundo, e repetindo o procedimento de mudança de variáveis que fizemos no fim da Seção 4.2.1 podemos eliminar todos esses termos. Portanto podemos sempre usar a Eq. (4.99) para representar ζ .

Escrevendo em termos das perturbações na métrica (Eqs. 3.37–3.38) temos

$$\zeta = \frac{2\Theta^2}{3\kappa\varepsilon\vartheta} \left(\partial_{ct} \left(\frac{3\psi}{\Theta} \right) + \phi \right). \quad (4.100)$$

Ressaltamos que no calibre de curvatura constante definido na Seção 3.6.3 essa variável é proporcional a ϕ , enquanto no calibre síncrono (Seção 3.6.2) ela está relacionada somente a variável ψ , para ambos temos respectivamente

$$\phi = \frac{3\kappa\varepsilon\vartheta}{2\Theta^2}\zeta, \quad \psi = \Theta \int d(ct) \frac{\kappa\varepsilon\vartheta}{2\Theta^2}\zeta. \quad (4.101)$$

No calibre síncrono, como as condições $\phi = 0$ e $\mathcal{B} = 0$ não fixam completamente o calibre a integral acima é definida a menos de uma função constante em uma hipersuperfície. Portanto vemos que o calibre de curvatura constante é bem definido e relaciona de forma simples a variável ζ com as perturbações na métrica. Porém, no momento de um ricochete, como Θ vai a zero, esse calibre deixa de ser possível. Veremos na Seção 5.4.2 que no momento do ricochete, podemos usar o calibre síncrono, no qual todas as perturbações serão bem definidas.

4.2.4 Quantização Canônica

Na quantização canônica, fazemos o mapeamento dos observáveis clássicos para os operadores usando a álgebra dos parênteses de Poisson e definindo o homomorfismo, como fizemos na Eq. (4.14).¹⁶ Como discutimos na Seção 4.1.2, no caso onde temos um número

¹⁶Esse mapeamento não vale para qualquer observável. Geralmente há ambiguidade na ordenação dos operadores, veja discussão em [82, Capítulo 2].

finito de graus de liberdade sendo quantizados, o teorema de Stone–von Neumann garante que qualquer representação irredutível da álgebra é unitariamente equivalente a qualquer outra, representando assim o mesmo sistema físico. Dessa forma, a escolha da representação não resulta em uma escolha física. Contudo, no caso das perturbações o problema é descrito por campos e, conseqüentemente, temos infinitos graus de liberdade, onde novamente o teorema de Stone–von Neumann não se aplica.

Na teoria de campos em espaços planos, o problema das múltiplas representações unitariamente não equivalentes é resolvido com a constatação que a presença de um vetor de Killing tipo tempo permite a construção de um conjunto de representações unitariamente equivalentes entre si. Da mesma forma, no caso onde o espaço–tempo de fundo é curvo mas possui pelo menos um vetor de Killing tipo tempo, essa construção também pode ser feita, ver [82, Seção 4.3].

No caso onde não há um vetor de Killing tipo tempo, o que inclui os universos de FLRW, não existe um procedimento geral para determinar a representação. É possível mostrar que a liberdade na representação pode ser mapeada na liberdade da escolha de vácuo ou na escolha do espaço de Hilbert das soluções do sistema Hamiltoniano a ser quantizado. Veja mais detalhes e outros resultados que usaremos nessa seção em [82].

Os parênteses de Poisson induzem uma 2-forma no espaço de fase da teoria Hamiltoniana chamada forma simplética (não degenerada e fechada). Representando as perturbações e seus momentos como $\varphi_A \doteq (\zeta, \delta s, \Pi_\zeta, \Pi_{\delta s})$,¹⁷ a matriz simplética e sua inversa têm as componentes dadas, respectivamente, por

$$\Omega^{AB} \doteq \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{AB} \doteq \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

onde $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade bidimensional. Note que $\Omega_{AB}\Omega^{BC} = \delta_A^C$ e $\Omega_{AB} = -\Omega_{BA}$. Dessa forma os parênteses de Poisson são escritos como

$$\{A, B\} = \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \frac{\delta A}{\delta \varphi_A(\tilde{x})} \Omega_{AB} \frac{\delta B}{\delta \varphi_B(\tilde{x})}, \quad (4.103)$$

e as equações de movimento da forma

$$\mathcal{L}_I \varphi_A = \Omega_{AB} \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi_B(\tilde{x})}, \quad (4.104)$$

onde estamos usando a convenção de soma para os índices latinos maiúsculos repetidos. Além de reescrever o formalismo Hamiltoniano de forma mais compacta, a forma simplética induz um produto no espaço de fase. Dada duas soluções φ_A^1 e φ_A^2 , temos

$$\Omega(\varphi^1, \varphi^2) = \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \varphi_A^1 \varphi_B^2 \Omega^{AB}. \quad (4.105)$$

E para sistemas com Hamiltoniana quadrática nos campos,

$$\mathcal{H}^{(s)} = \frac{\mathfrak{H}^{AB} \varphi_A \varphi_B}{2}, \quad (4.106)$$

¹⁷Como a Hamiltoniana não depende das perturbações $\delta\chi_3$ e Π_{χ_3} , elas se comportam como constantes. E por não se acoplarem com nenhum observável, iremos ignorá-las deste ponto em diante.

onde a matriz \mathfrak{H}^{AB} é simétrica em AB , o produto $\Omega(\varphi^1, \varphi^2)$ é conservado, *i.e.*,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_l \Omega(\varphi^1, \varphi^2) &= \int_{\tilde{\Sigma}} d^3 \tilde{x} (\mathcal{L}_l \varphi_A^1 \varphi_B^2 \Omega^{AB} + \varphi_A^1 \mathcal{L}_l \varphi_B^2 \Omega^{AB}), \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} d^3 \tilde{x} (-\varphi_A^1 \varphi_B^2 \mathfrak{H}^{AB} + \varphi_A^1 \varphi_B^2 \mathfrak{H}^{AB}), \\ &= 0.\end{aligned}$$

O parênteses de Poisson dos campos φ_A , usando a forma simplética Eq. (4.103), tem a seguinte expressão

$$\{\varphi_A(\tilde{x}), \varphi_B(\tilde{y})\} = \Omega_{AB} \delta^3(\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (4.107)$$

Portanto, quando quantizamos o sistema impondo o homomorfismo entre a álgebra dos parênteses de Poisson e os operadores de campo, temos

$$[\bar{\varphi}_A(\tilde{x}), \bar{\varphi}_B(\tilde{y})] = i\hbar \Omega_{AB} \delta^3(\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (4.108)$$

Reescrevendo os momentos em termos das derivadas temporais das perturbações e permitindo condições iniciais complexas, definimos o produto

$$(\varphi^1, \varphi^2) = \frac{1}{i\hbar} \Omega(\varphi^{1*}, \varphi^2). \quad (4.109)$$

Esse possui todas as características de um produto interno no espaço das soluções das equações de Hamilton, porém falha ao ser positivo definido.¹⁸ Entretanto, como discutido em [82], existe um subespaço do espaço das soluções complexas do sistema Hamiltoniano $\mathbf{S} = \{\varphi_A : M \rightarrow \mathbb{C}^4 \mid \mathcal{L}_l \varphi_A = \{\varphi_A, H^{(s)}\}\}$, denotado por $\mathbf{H} \in \mathbf{S}$, que satisfaz as seguintes condições:

- $\mathbf{S} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^*$, onde \mathbf{H}^* é o espaço complexo conjugado a \mathbf{H} e \oplus denota soma direta de espaços vetoriais,
- se $\varphi_A^1 \in \mathbf{H}$ e $\varphi_A^1 \neq 0$ então $(\varphi^1, \varphi^1) > 0$,
- para qualquer $\varphi_A^1 \in \mathbf{H}$ e $\varphi_A^2 \in \mathbf{H}^*$ temos $(\varphi^1, \varphi^2) = 0$.

Se nos restringirmos às soluções contidas em \mathbf{H} , o produto (\cdot, \cdot) é positivo definido e portanto pode ser usado como produto interno.

Dessa forma, usamos o produto interno para obter uma base ortonormal \mathbf{u}_{iq} para \mathbf{H} ,¹⁹ que satisfaz

$$(\mathbf{u}_{iq_1}, \mathbf{u}_{jq_2}) = \frac{1}{i\hbar} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3 \tilde{x} \mathbf{u}_{iq_1, A}^* \mathbf{u}_{jq_2, B} \Omega^{AB} = \delta_{ij} \delta^3(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2).$$

Usando essa base, decompos os operadores de campos em termos dos operadores de criação e aniquilação, respectivamente \mathbf{a}_{iq}^\dagger e \mathbf{a}_{iq} , da forma

$$\mathbf{a}_{iq} \equiv (\mathbf{u}_{iq}, \bar{\varphi}), \quad \mathbf{a}_{iq}^\dagger \equiv (\mathbf{u}_{iq}, \bar{\varphi})^\dagger = -(\mathbf{u}_{iq}^*, \bar{\varphi}), \quad (4.110)$$

¹⁸O produto é positivo definido quando $(\varphi^1, \varphi^1) > 0$ para qualquer φ^1 não nulo.

¹⁹Lembrando que os índices q podem ser contínuos ou discretos e que, em cada caso, o símbolo $\int d^3 \tilde{q}$ representa, respectivamente, integral e somatório.

onde na última igualdade o símbolo \dagger representa o transposto conjugado complexo de um operador, que quando atuando em funções satisfaz $f^\dagger = f^*$. Usamos também a propriedade $(A, B)^* = -(A^*, B^*)$ e que o operador de campo satisfaz $\bar{\varphi}^\dagger = \bar{\varphi}$. Podemos ver que, para qualquer dois elementos φ^1 e φ^2 de \mathbf{S} , o comutador de seus produtos com o operador de campo $\bar{\varphi}$ é

$$[(\varphi^1, \bar{\varphi}), (\varphi^2, \bar{\varphi})^\dagger] = \frac{-1}{(i\hbar)^2} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} d^3\tilde{y} \varphi_A^{1*}(\tilde{x}) \Omega^{AB} \varphi_C^2(\tilde{y}) \Omega^{CD} [\bar{\varphi}_B(\tilde{x}), \bar{\varphi}_D(\tilde{y})] = (\varphi_1, \varphi_2),$$

onde usamos que $\Omega_{AB}\Omega^{BC} = \delta_A^C$ e o comutador dos operadores de campo dado na Eq. (4.108). Com o resultado acima e usando a ortonormalidade de \mathbf{u}_{iq} , temos que os operadores de criação e aniquilação satisfazem

$$[\mathbf{a}_{iq_1}^\dagger, \mathbf{a}_{jq_2}^\dagger] = [\mathbf{a}_{iq_1}, \mathbf{a}_{jq_2}] = 0, \quad [\mathbf{a}_{iq_1}, \mathbf{a}_{jq_2}^\dagger] = \delta_{ij} \delta^3(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2). \quad (4.111)$$

Determinamos o vácuo como o estado que satisfaz $\mathbf{a}_{iq}|0\rangle = 0$ para quaisquer valores de i e q . Logo, o problema da escolha de representação e, conseqüentemente, da escolha de vácuo é mapeado na escolha do subespaço \mathbf{H} que satisfaz as condições acima.

Por exemplo, no caso de somente um campo $\varphi_A \doteq (\mathcal{F}, \Pi_{\mathcal{F}})$ com seu momento dado por $\Pi_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_l \mathcal{F}$, o produto é dado por

$$(\varphi^1, \varphi^2) = \frac{1}{i\hbar} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} (\Pi_{\mathcal{F}}^{1*} \mathcal{F}^2 - \Pi_{\mathcal{F}}^2 \mathcal{F}^{1*}) = \frac{1}{i\hbar} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} (\mathcal{L}_l \mathcal{F}^{1*} \mathcal{F}^2 - \mathcal{L}_l \mathcal{F}^2 \mathcal{F}^{1*}).$$

A última igualdade é equivalente ao produto definido comumente na literatura, veja [91]. Note que não é conveniente usar essa definição, pois nesse caso sempre precisamos reescrever os graus de liberdade do sistema de forma que $\Pi_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_l \mathcal{F}$.

Para o exemplo acima, podemos escolher o subespaço \mathbf{H} da seguinte forma. Seja \mathbf{u}_q^+ uma base de “energia” positiva, *i.e.*, para uma hipersuperfície fixa, denotada por t_i , satisfaz $\mathbf{u}_{q_2}^+|_{t_i} = \mathcal{L}_l \mathbf{u}_{q_1}^+|_{t_i} = -iE_q \mathbf{u}_{q_1}^+|_{t_i}$, com $E_q \in \mathbb{R}$ e $E_q > 0$. Com essa escolha, as soluções são inicialmente expressas como $\mathbf{u}_q^+|_{t_i} \doteq (\mathbf{u}_{q_1}^+, -iE_q \mathbf{u}_{q_1}^+)|_{t_i}$. Analogamente, definimos as soluções de “energia” negativa satisfazendo inicialmente $\mathbf{u}_q^-|_{t_i} \doteq (\mathbf{u}_{q_1}^-, iE_q \mathbf{u}_{q_1}^-)|_{t_i}$. Uma solução geral contida em \mathbf{S} é descrita por duas funções complexas, enquanto as soluções de energia positiva e negativa são compostas, cada uma, de uma função complexa. Dessa forma notamos que \mathbf{H}^* é o espaço conjugado a \mathbf{H} e que $\mathbf{S} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^*$.

As funções \mathbf{u}_q^+ são escolhidas de forma que inicialmente o conjunto $\mathbf{u}_q^+|_{t_i}$ é uma base para as funções definidas na hipersuperfície tal que

$$\int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \mathbf{u}_{q_1}^{+*} \mathbf{u}_{q_2}^+ \Big|_{t_i} = \frac{\delta^3(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)}{2E_q}.$$

Ressaltamos que essas escolhas sempre são possíveis, pois elas correspondem à escolha de condições iniciais para as soluções \mathbf{u}_q^+ em t_i . Logo, uma solução arbitrária contida em \mathbf{H} pode ser escrita como

$$\varphi^1 \doteq (\mathcal{F}^1, \mathcal{L}_l \mathcal{F}^1), \quad \mathcal{F}^1 = \int d^3\tilde{q} \tilde{\mathbf{u}}_{q_1}^+ \mathcal{F}_q^1.$$

Podemos mostrar que o produto dessas soluções será positivo definido, *i.e.*, para $\mathcal{F} \neq 0$ temos

$$(\varphi^1, \varphi^1)|_{t_i} = \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} d^3\tilde{q}_1 d^3\tilde{q}_2 \mathcal{F}_{q_1}^{1*} \mathcal{F}_{q_2}^1 \mathbf{u}_{q_1}^{+*} \mathbf{u}_{q_2}^+ (E_{q_1} + E_{q_2}) \Big|_{t_i} = \int d^3\tilde{q} \mathcal{F}_q^{1*} \mathcal{F}_q^1 > 0,$$

e, como mostramos acima, $\mathcal{L}_l(\varphi^1, \varphi^1) = 0$. Portanto, o produto vai ser positivo definido em qualquer seção espacial. Para impormos que os vetores de \mathbf{H} e \mathbf{H}^* sejam ortogonais, basta requerer que quaisquer dois elementos de cada base sejam ortogonais, *i.e.*, $\mathbf{u}^{q_1*} \in \mathbf{H}^*$ e $\mathbf{u}^{q_2} \in \mathbf{H}$ então

$$(\mathbf{u}_{q_1}^*, \mathbf{u}_{q_2})|_{t_i} = -(E_{q_1} - E_{q_2}) \int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \mathbf{u}_{q_1} \mathbf{u}_{q_2} \Big|_{t_i}.$$

A expressão acima impõe que a integral do lado direito é diferente de zero somente para os valores de q_1 e q_2 tal que $E_{q_1} = E_{q_2}$.²⁰

Quando a variedade de fundo possui um campo de Killing tipo tempo, é possível mostrar que existe uma função energia, tal que a condição de positividade, imposta em uma hipersuperfície, é equivalente a imposta a qualquer outra hipersuperfície. Dessa forma, temos uma definição para a representação e, conseqüentemente, vácuo e partículas, que é independente da seção espacial inicial.

Para as perturbações cosmológicas, podemos procurar soluções da forma $\varphi_{iq,A} \mathcal{Y}_q$, onde \mathcal{Y}_q são as autofunções do operador de Laplace–Beltrami, discutidas na Seção 3.5.4. Substituindo essa expressão para os campos, vemos que os coeficientes

$$\varphi_{iq} \doteq (\zeta_{iq}, \delta s_{iq}, \Pi_{\zeta_{iq}}, \Pi_{\delta s_{iq}}),$$

satisfazem as mesmas equações de movimento (Eqs. 4.86–4.88) trocando $D^2 \rightarrow -q^2$. Definimos duas classes de soluções \mathbf{u}_{iq} para $i = 1, 2$, na hipersuperfície rotulada por t_i , dadas por

$$\mathbf{u}_{1q}|_{t_i} \doteq (\zeta_{1q} \mathcal{Y}_q, 0, \Pi_{\zeta_{1q}} \mathcal{Y}_q, 0)|_{t_i}, \quad \mathbf{u}_{2q}|_{t_i} \doteq (0, \delta s_{2q} \mathcal{Y}_q, 0, \Pi_{\delta s_{2q}} \mathcal{Y}_q)|_{t_i}. \quad (4.112)$$

Observando as equações de movimento Eq. (4.88), temos que se δs_q é nulo em t_i será nulo em qualquer outro instante. Dessa forma, as soluções \mathbf{u}_{1q} representam as perturbações gravitacionais adiabáticas. As soluções \mathbf{u}_{2q} por sua vez têm $\delta s_q \neq 0$ e representam as perturbações gravitacionais geradas pela presença de uma perturbação de entropia, e portanto iremos chamá-las de perturbações de entropia. Por fim, note que de forma geral as funções de base podem ser escritas como

$$\mathbf{u}_{iq} = \varphi_{iq} \mathcal{Y}_q \doteq (\zeta_{iq}, \delta s_{iq}, \Pi_{\zeta_{iq}}, \Pi_{\delta s_{iq}}) \mathcal{Y}_q. \quad (4.113)$$

²⁰No caso onde as seções espaciais são planas, note que para a base de ondas planas $\mathbf{u}^q|_{t_i} \propto e^{iq^\mu x^\nu} \mathbf{h}_{\mu\nu}$ com a energia dada por uma função $f(q_\mu q^\mu)$ que depende somente de $q_\mu q^\mu$ temos

$$\int_{\tilde{\Sigma}} d^3\tilde{x} \mathbf{u}^{k_1} \mathbf{u}^{q_2} \Big|_{t_i} \propto \delta^3(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2), \quad \delta^3(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2) (f(q_{1\mu} q_1^\mu) - f(q_{2\mu} q_2^\mu)) = 0.$$

Como o produto (\cdot, \cdot) é constante, é fácil mostrar que $(\mathbf{u}_{1q_1}, \mathbf{u}_{2q_2}) = 0$, enquanto os produtos restantes são expressos como

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{1q_1}, \mathbf{u}_{1q_2}) &= \frac{1}{i\hbar} (\Pi_{\zeta_{1q_1}}^* \zeta_{1q_1} - \Pi_{\zeta_{1q_1}} \zeta_{1q_1}^*)|_{t_i} \delta^3(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2), \\ (\mathbf{u}_{2q_1}, \mathbf{u}_{2q_2}) &= \frac{1}{i\hbar} (\Pi_{\delta s_{2q_1}}^* \delta s_{2q_1} - \Pi_{\delta s_{2q_1}} \delta s_{2q_1}^*)|_{t_i} \delta^3(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2), \end{aligned}$$

onde usamos a ortonormalidade de \mathcal{Y}_q dada na Eq. (3.106). Ou seja, se as equações

$$(\Pi_{\zeta_{1q_1}}^* \zeta_{1q_1} - \Pi_{\zeta_{1q_1}} \zeta_{1q_1}^*)|_{t_i} = i\hbar, \quad (\Pi_{\delta s_{2q_1}}^* \delta s_{2q_1} - \Pi_{\delta s_{2q_1}} \delta s_{2q_1}^*)|_{t_i} = i\hbar, \quad (4.114)$$

forem satisfeitas, então as soluções \mathbf{u}_{iq} são ortonormais, *i.e.*, $(\mathbf{u}_{iq_1}, \mathbf{u}_{jq_2}) = \delta_{ij} \delta^3(q_1 - q_2)$. Expressando o momento $\Pi_{\zeta_{1q}}$ em termos de ζ_{1q} via Eq. (4.86), e lembrando que as soluções $_1$ tem $\delta s_{1q} = 0$, reescrevemos a primeira condição em termos de ζ como

$$\Delta_q^2 \mathbf{z}^2 (\mathcal{L}_l \zeta_{1q_1}^* \zeta_{1q_1} - \mathcal{L}_l \zeta_{1q_1} \zeta_{1q_1}^*)|_{t_i} = i\hbar, \quad \Delta_q^2 \equiv \frac{q^2 - 3K}{q^2} = \frac{\tilde{q}^2 - 3\tilde{K}}{\tilde{q}^2}. \quad (4.115)$$

Na literatura defini-se uma variável $\mathbf{v} \equiv \mathbf{z}\zeta$ com a qual a condição acima assume a forma

$$\Delta_q^2 (\mathcal{L}_l \mathbf{v}_{1q_1}^* \mathbf{v}_{1q_1} - \mathcal{L}_l \mathbf{v}_{1q_1} \mathbf{v}_{1q_1}^*)|_{t_i} = i\hbar.$$

Para seções espaciais planas ($K = 0$) temos $\Delta_q^2 = 1$ e a fórmula acima é idêntica à Eq. (11.14) da Ref. [60]. Contudo, como discutimos no fim da Seção 4.2.2, a Lagrangiana usada nessa referência não é válida para o caso $K \neq 0$. Portanto, mesmo que as equações de movimento obtidas dessa Lagrangiana sejam corretas, a álgebra de Poisson e, conseqüentemente, a normalização deduzida a partir dela está errada.

As condições de ortonormalidade dadas na Eq. (4.114) não garantem que o produto das soluções seja positivo definido. Para tanto, repetimos o procedimento discutido no exemplo acima e impomos que as soluções sejam de “energia” positiva, *i.e.*,

$$\Pi_{\zeta_{1q}}|_{t_i} = -iE_{1q}\zeta_{1q}|_{t_i}, \quad \Pi_{\delta s_{2q}}|_{t_i} = -iE_{2q}\delta s_{2q}|_{t_i}. \quad (4.116)$$

Porém, mesmo que a escolha acima garanta a positividade do produto interno, ainda existe a liberdade para a escolha das funções E_{iq} . As equações de movimento para as soluções adiabáticas são dadas pelas Eqs. (4.86) e (4.87), tomando $\delta s = 0$, *i.e.*,

$$\mathcal{L}_l \zeta_{1q} = \frac{1}{\mathbf{z}^2 \Delta_q^2} \Pi_{\zeta_{1q}}, \quad \mathcal{L}_l \Pi_{\zeta_{1q}} = -N^2 \Delta_q^2 q^2 \mathbf{z}^2 c_s^2 \zeta_{1q}, \quad (4.117)$$

escrevendo a perturbação na forma polar e substituindo nas equações acima, obtemos

$$\zeta_{1q} = |\zeta_{1q}| e^{-i \int dt \theta_q}, \quad |\zeta_{1q}| = \frac{|\zeta_{1q}|_0}{\mathbf{z} \sqrt{\theta_q}}, \quad (4.118)$$

$$\theta_q^2 - \sqrt{\theta_q} \mathcal{L}_l^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_q}} \right) = N^2 q^2 c_s^2 - \frac{\mathcal{L}_l^2 \mathbf{z}}{\mathbf{z}}, \quad (4.119)$$

onde a integração $\int dl$ é feita na variável definida pelo campo l^μ , e $|\zeta_{1q}|_0$ é uma constante arbitrária. A troca de variável acima, resulta em um equação não linear de segunda ordem para a fase θ_q . Se supusermos que a fase varia lentamente com a evolução do espaço-tempo, podemos desprezar os termos contendo derivadas de θ_q e, assim, obtemos a solução de ordem zero para a fase

$$\theta_q^0 = \pm \sqrt{N^2 q^2 c_s^2 - \frac{\mathcal{L}_l^2 z}{z}}. \quad (4.120)$$

As soluções acima são as mesmas que as obtidas diretamente da equação de movimento para o campo \mathbf{v} usando o método WKB.²¹ Na próxima ordem obtemos

$$\theta_q^1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\theta_q^0}} \mathcal{L}_l^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_q^0}} \right), \quad (4.121)$$

e, portanto, exigimos que $\theta_q^0 \gg \theta_q^1$ para utilizarmos a aproximação acima. Com isso, temos duas possíveis soluções, uma para cada sinal da fase θ_q^0 . Escolhendo as soluções com θ_q^0 positivo, temos que o momento $\Pi_{\zeta_{1q}}$ é dado por

$$\Pi_{\zeta_{1q}} = -iE_{1q}\zeta_{1q}, \quad E_{1q} \equiv z^2 \Delta_q^2 \left(\theta_q - i \frac{\mathcal{L}_l(z^2 \theta_q)}{2z^2 \theta_q} \right), \quad (4.122)$$

onde definimos a função energia a partir da decomposição polar da perturbação. É fácil mostrar que o fato da parte real de E_{1q} ser positiva é condição suficiente para que o produto (\cdot, \cdot) seja positivo definido. Aplicando a condição de ortonormalidade dada na Eq. (4.114), obtemos

$$2\Re(E_{1q})|\zeta_q|^2 = \hbar, \quad |\zeta_{1q}|_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Delta_q^2}}, \quad (4.123)$$

onde escolhemos a fase constante de $\zeta_{1q}|_0$ igual a zero.

O procedimento acima fornece uma prescrição para obtermos soluções de “energia” positiva quando $\theta_q^0 \gg \theta_q^1$. Ou seja, quando a evolução da geometria de fundo for lenta o suficiente, podemos considerar que as perturbações evoluem como em um espaço estático, porém com seus parâmetros evoluindo lentamente no tempo. Essa aplicação é uma simplificação de uma ideia mais geral de como obter as funções de Green de uma teoria quântica em um universo de fundo com geometria arbitrária, veja [91].

Para as soluções de entropia u_{2q} , as equações de movimento (Eqs. 4.86–4.88) podem ser reescritas como,

$$\mathcal{L}_l^2 \zeta_{2q} + \frac{\mathcal{L}_l z^2}{z^2} \mathcal{L}_l \zeta_{2q} + q^2 N^2 c_s^2 \zeta_{2q} = -\frac{\mathcal{L}_l \mathbf{w}}{z^2} \delta s_{2q}, \quad (4.124)$$

$$\mathcal{L}_l \Pi_{\delta s_{2q}} = \Delta_q^2 \left(\mathbf{w} \mathcal{L}_l \zeta_{2q} + \frac{\mathbf{w}^2}{z^2} \delta s_{2q} \right) + N U_s \delta s_{2q}, \quad (4.125)$$

$$\mathcal{L}_l \delta s_{2q} = 0, \quad (4.126)$$

²¹Veja mais detalhes sobre o método em [92].

onde definimos a quantidade $\mathbf{w} \equiv a^3 \iota / (c\Theta c_s^2)$. Como temos as soluções da equação homogênea de ζ_{1q} e δs_{2q} é constante, é fácil checar que

$$\zeta_{2q} = - \left(\zeta_{1q}^* \int dl \zeta_{1q} \mathcal{L}_l \mathbf{w} - \zeta_{1q} \int dl \zeta_{1q}^* \mathcal{L}_l \mathbf{w} \right) \frac{\Delta_q^2}{i\hbar} \delta s_{2q}, \quad (4.127)$$

é uma solução particular da Eq. (4.124). Por fim, a solução de $\Pi_{\delta s_{2q}}$ é dada pela integral do lado direito da Eq. (4.125), e portanto temos um conjunto completo de soluções para o sistema de equações acima. Diferente do caso adiabático, as soluções de entropia não parecem dispor de uma forma geral para obtermos soluções de “energia” positiva. Porém, vale ressaltar que qualquer escolha de função energia E_{2q} constante é suficiente para obtermos uma teoria quântica bem definida. A constante E_{2q} define o valor de δs_{2q} enquanto a imposição de $\zeta_{2q}|_{t_i} = \Pi_{\zeta_{2q}}|_{t_i} = 0$ fixa as duas constantes da solução particular ζ_{2q} .

4.2.5 Função de Correlação de Dois Pontos

Vimos na seção anterior que, dada uma definição de base onde temos um produto positivo definido, podemos definir os operadores de criação e aniquilação como na Eq. (4.110) e, conseqüentemente, o estado de vácuo associado a esses operadores $|0\rangle$. Nesse estado, podemos checar que o valor esperado de qualquer campo é nulo, *i.e.*, $\langle 0 | \bar{\varphi}_A(\tilde{x}) | 0 \rangle$. Para uma interpretação probabilística, isso significa que a média dos campos $\bar{\varphi}_A(\tilde{x})$ é nula. Porém, como veremos mais adiante, a função de correlação de dois pontos $\langle 0 | \bar{\varphi}_A(\tilde{x}) \bar{\varphi}_B(\tilde{y}) | 0 \rangle \neq 0$ e, portanto, o valor dos campos flutua em torno de zero com uma variância definida por essa expressão.

Usando a ortonormalidade da base \mathbf{u}_{iq} , \mathbf{u}_{iq}^* , podemos expressar o operador de campo $\bar{\varphi}$ em termos dos operadores de criação e aniquilação da forma

$$\bar{\varphi} = \sum_i \int d^3 \tilde{q} \left(\mathbf{u}_{iq} \mathbf{a}_{iq} + \mathbf{u}_{iq}^* \mathbf{a}_{iq}^\dagger \right). \quad (4.128)$$

Logo, o valor esperado do produto $\bar{\varphi}_A(\tilde{x}) \bar{\varphi}_B(\tilde{y})$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\varphi}_A(\tilde{x}) \bar{\varphi}_B(\tilde{y}) | 0 \rangle &= \\ \sum_{ij} \int d^3 \tilde{q}_1 d^3 q_2 \left\langle 0 \left| \left(\mathbf{u}_{iq_1 A}(\tilde{x}) \mathbf{a}_{iq_1} + \mathbf{u}_{iq_1 A}^*(\tilde{x}) \mathbf{a}_{iq_1}^\dagger \right) \left(\mathbf{u}_{jq_2 B}(\tilde{y}) \mathbf{a}_{jq_2} + \mathbf{u}_{jq_2 B}^*(\tilde{y}) \mathbf{a}_{jq_2}^\dagger \right) \right| 0 \right\rangle, \\ &= \sum_{ij} \int d^3 \tilde{q}_1 d^3 q_2 \left\langle 0 \left| \mathbf{u}_{iq_1 A}(\tilde{x}) \mathbf{a}_{iq_1} \mathbf{u}_{jq_2 B}^*(\tilde{y}) \mathbf{a}_{jq_2}^\dagger \right| 0 \right\rangle = \sum_i \int d^3 \tilde{q} \mathbf{u}_{iq A}(\tilde{x}) \mathbf{u}_{iq B}^*(\tilde{y}), \end{aligned} \quad (4.129)$$

onde usamos que $\mathbf{a}_{iq} | 0 \rangle = 0$, $\langle 0 | \mathbf{a}_{iq}^\dagger = 0$, $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ e o comutador dado na Eq. (4.111). Para calcular a integral acima, observamos que as funções de base, como definidas na Eq. (4.112), são proporcionais às autofunções do operador de Laplace–Beltrami \mathcal{Y}_q . É possível expressar essas autofunções em termos das funções associadas de Legendre e Harmônicos Esféricos [93] de forma que os índices sejam dados por $q = (\tilde{k}, l, m)$, os

autovalores $q^2 a^2 = \tilde{q}^2 = \tilde{k}^2 - \tilde{K}$, e a medida de integração

$$\int d^3 \tilde{q} \equiv \begin{cases} \int_0^\infty d\tilde{k} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l, & K \leq 0 \\ \sum_{\tilde{k}=1}^\infty \sum_{l=0}^{\tilde{k}-1} \sum_{m=-l}^l, & K > 0 \end{cases}. \quad (4.130)$$

Observando as equações de movimento para a perturbação φ_{iq} , definidas na decomposição da Eq. (4.113), vemos que essas dependem somente do autovalor q^2 do operador de Laplace–Beltrami e, portanto, do índice \tilde{k} . Como as condições iniciais, que discutimos acima, também não dependem dos outros índices, essas funções dependerão somente de \tilde{k} . Com isso, a correlação dada na Eq. (4.129) pode ser reescrita como

$$\langle 0 | \bar{\varphi}_A(\tilde{x}) \bar{\varphi}_B(\tilde{y}) | 0 \rangle = \begin{cases} \sum_i \int_0^\infty d\tilde{k} \varphi_{i\tilde{k}A} \varphi_{i\tilde{k}B}^* \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \mathcal{Y}_q(\tilde{x}) \mathcal{Y}_q^*(\tilde{y}) & K \leq 0 \\ \sum_i \sum_{\tilde{k}=1}^\infty \varphi_{i\tilde{k}A} \varphi_{i\tilde{k}B}^* \sum_{l=0}^{\tilde{k}-1} \sum_{m=-l}^l \mathcal{Y}_q(\tilde{x}) \mathcal{Y}_q^*(\tilde{y}) & K > 0 \end{cases}. \quad (4.131)$$

É possível mostrar [93, Eq. 9.15] que a soma das autofunções é dada por

$$\sum_{lm} \mathcal{Y}_q(\tilde{x}) \mathcal{Y}_q^*(\tilde{y}) = \frac{\tilde{k} \sqrt{-\tilde{K}}}{2\pi^2} \frac{\sin(\tilde{k}\tilde{r})}{\sinh(\sqrt{-\tilde{K}}\tilde{r})}, \quad (4.132)$$

onde \tilde{r} é a distância geodésica entre os pontos x e y calculada com a métrica conforme $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Com isso, a função de dois pontos fica escrita como

$$\langle 0 | \bar{\varphi}_A(\tilde{x}) \bar{\varphi}_B(\tilde{y}) | 0 \rangle = \begin{cases} \int_0^\infty d\tilde{k} P_{AB} \frac{\sqrt{-\tilde{K}}}{\tilde{k}^2} \frac{\sin(\tilde{k}\tilde{r})}{\sinh(\sqrt{-\tilde{K}}\tilde{r})} & K \leq 0 \\ \sum_{\tilde{k}=1}^\infty P_{AB} \frac{\sqrt{-\tilde{K}}}{\tilde{k}^2} \frac{\sin(\tilde{k}\tilde{r})}{\sinh(\sqrt{-\tilde{K}}\tilde{r})} & K > 0 \end{cases}, \quad (4.133)$$

onde definimos o espectro de potências para as correlações como

$$P_{AB} \equiv \sum_i \frac{\tilde{k}^3 \varphi_{i\tilde{k}A} \varphi_{i\tilde{k}B}^*}{2\pi^2}. \quad (4.134)$$

Pela definição do campo $\varphi_3 = \Pi_\zeta$ dada na Eq. (4.81), temos que o potencial invariante de calibre Ψ é

$$\Psi = \frac{c\kappa\Theta}{2a^3} D_K^{-2} \Pi_\zeta, \quad \Psi_{i\tilde{k}} = -\frac{c\kappa\Theta}{2a^3(q^2 - 3K)} \Pi_{\zeta i\tilde{k}},$$

onde $\Pi_{\zeta_{i\tilde{k}}}$ é a contribuição dos modos adiabáticos e de entropia para $i = 1, 2$ respectivamente, para o potencial Ψ . Usando as Eqs. (4.117) e (4.124), obtemos a relação de cada uma das contribuições,

$$\Psi_{1\tilde{k}} = -\frac{c\kappa\Theta}{2a^3} \frac{z^2}{q^2} \mathcal{L}_i \zeta_{1q}, \quad \Psi_{2\tilde{k}} = -\frac{c\kappa\Theta}{2a^3} \frac{z^2}{q^2} \left(\mathcal{L}_i \zeta_{2\tilde{k}} + \frac{w}{z^2} \delta s_{2\tilde{k}} \right). \quad (4.135)$$

Logo, o espectro de potências da função de correlação de dois pontos para a perturbação Ψ é

$$P_\Psi = \frac{\tilde{k}^3}{2\pi^2} (|\Psi_{1\tilde{k}}|^2 + |\Psi_{2\tilde{k}}|^2). \quad (4.136)$$

PERTURBAÇÕES EM MODELOS COM RICOCHETE

Modelos cosmológicos que passam por uma fase de contração têm sido estudados como uma extensão do modelo padrão de cosmologia. Esses foram analisados em vários contextos, incluindo em ricochete singular e não singular [21, 22, 94–103]. Em [104] foram propostas condições gerais para a conexão de fases dominadas por fluidos diferentes. Na Ref. [22] foi mostrado que um universo em contração dominado por um campo escalar, se comportando como um fluido de poeira, gera um espectro de potências quase invariante de escala para as perturbações ζ . E na Ref. [19] um modelo completo com fases de contração e de expansão, onde o ricochete é causado por efeitos quânticos, mostrou que o espectro presente na fase de expansão e formado na de contração é quase invariante de escala e, portanto, *a priori* compatível com as observações de RCF.

Falaremos na Seção 5.1 sobre o ricochete causado por efeitos quânticos, discutidos na Seção 4.1.3, no caso onde o fluido dominante nessa fase é o de radiação. Nesse caso mostramos a relação entre o fator de escala do ricochete e a escala de Planck, impondo limite inferior ao primeiro. Na Seção 5.2 discutiremos a formação de perturbações adiabáticas com um ou mais fluidos e na Seção 5.2.1 o caso de um fluido e curvatura espacial. Nessa fase consideraremos as perturbações adiabáticas com solução analítica assim como na Seção 5.3, as soluções em série para os modos de super-horizonte. Para evoluir as perturbações através do ricochete, na Seção 5.4 avaliaremos condições gerais de continuidade. Faremos também a comparação dessas condições com o caso específico do ricochete causado por efeitos quânticos, como veremos na Seção 5.4.2. Na Seção 5.4.3 mostramos que no calibre síncrono todas as perturbações passam finitas pelo ricochete e portanto a hipótese perturbativa é válida nesse caso. Por fim na Seção 5.5 mostraremos os resultados da análise numérica estendendo a análise para casos mais complicados onde o espectro é formado na transição entre dois fluidos.

5.1 RICOCHETE NA FASE DE RADIAÇÃO

Como vimos na Seção 4.1.3, podemos considerar um universo com muitos fluidos e utilizar o modelo quântico para a fase de ricochete, se nessa houver o domínio de somente um fluido. Supondo a extensão do modelo padrão de cosmologia (Sec. 2.5), onde utilizamos a trajetória de Bohm para descrever a fase quântica, a radiação é o fluido com maior equação de estado presente. Dessa forma temos $w_q = 1/3$, e portanto a coordenada temporal que utilizamos é (veja discussão abaixo da Eq. 4.24)

$$\dot{\Pi}_g = -\frac{1}{a}, \quad \Pi_g = -\eta, \quad (5.1)$$

onde usamos a definição da coordenada conforme (Eq. 2.35) e escolhemos $\Pi_\varrho(\eta = 0) = 0$. Em termos das coordenadas conformes, a trajetória de Bohm (Eq. 4.39) é dada por

$$a = a_b \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta_b^2} + 1}, \quad \eta_b \equiv \frac{6\pi\tilde{V}a_m^2}{f_\pm l_p^2}, \quad (5.2)$$

onde η_b representa a escala de tempo conforme que divide a fase quântica da clássica, respectivamente, $\eta \ll \eta_b$ e $\eta \gg \eta_b$, e usamos que para $w_q = 1/3$, $\mathcal{X} = a$ (Eq. 4.21). A princípio os parâmetros a_m e a_b são livres. Contudo, quando fazemos o limite para o caso clássico, vemos que a densidade de radiação fixa um desses parâmetros (Eq. 4.45), *i.e.*,

$$a_m^2 = f_\pm \frac{l_p^2 c}{6\pi V_0 H_0} \frac{a_b a_0}{\sqrt{\Omega_{r0}}}, \quad \eta_b = \frac{\tilde{R}_H}{x_b \sqrt{\Omega_{r0}}}. \quad (5.3)$$

Dessa forma, o único parâmetro introduzido pelo modelo quântico é a_b . A escala do ricochete η_b no instante caracterizado por a_b é dada por $a_b \eta_b = R_H / (x_b^2 \sqrt{\Omega_{r0}}) \approx 4 \times 10^{62} l_p / (x_b^2 h)$, onde usamos $\Omega_{r0} \approx 10^{-5}$. Com isso, modelos com $x_b \lesssim 10^{31}$ ainda terão uma escala maior que a distância de Planck.

5.2 PERTURBAÇÕES ADIABÁTICAS

Vimos na Seção 4.1.3 que quando o fator de escala é muito maior que a_b , o modelo se comporta como o modelo clássico. Nessa fase, portanto, podemos utilizar as equações de movimento clássicas para o fator de escala e fluidos. Como discutido na Seção 2.6.5, considerarmos um universo inicialmente em contração com fator de escala maior que o atual. Impondo que próximo ao ricochete somente um fluido domina sem presença de curvatura, podemos utilizar uma função de Hubble como a definida na Eq. (4.47). Nos Capítulos 3 e 4 encontramos as equações para as perturbações assim como a quantização destas. Como estamos interessados na quantização das soluções de fundo e perturbações, não utilizamos as equações de fundo clássicas a fim de simplificar as equações das perturbações. Para tanto usamos uma série de mudanças de variáveis. Uma análise similar já havia sido empregada nos trabalhos [20, 25] no contexto Hamiltoniano utilizando transformações canônicas. Nos capítulos citados fizemos uma extensão desse estudo aos casos com curvatura e na presença de fluidos gerais não barotrópicos.

Como estamos fazendo uma análise perturbativa, resolvemos inicialmente as equações de fundo obtendo, como citado acima, uma função de Hubble como a discutida no fim da Seção 4.1.3, que descreve a trajetória de Bohm associada às funções de onda encontradas. Na quantização do modelo de fundo, escolhemos o momento Π_ϱ (Eq. 4.17) como coordenada temporal e, como vimos no fim da Seção 4.1.1, a relação entre essa variável e o tempo definido por n^μ é dada por $\dot{\Pi}_\varrho = -a^{-3w_q}$. Usando a definição de Π_ϱ e a equação de movimento (Eq. 4.11) para χ_1 , temos $\partial_{ct}(\vartheta a^{3w_q}) = 0$, que para um fluido barotrópico, onde $\varepsilon(\rho)$, implica em $\partial_{ct}(\rho a^{3(1+w_q)}) = 0$, e assim mostra que ρ satisfaz a mesma equação de continuidade clássica. Portanto, ao tratarmos a variável Π_ϱ como tempo, precisamos tratar ρ como um funcional do fator de escala, que por sua vez segue a trajetória de

Bohm. Com isso, temos que as perturbações quânticas satisfazem as equações de movimento obtidas no Capítulo 4, onde a densidade de energia é tratada como uma função do fator de escala, que segue as trajetórias de Bohm.

Supomos que inicialmente o universo é dominado por somente um fluido barotrópico, e as únicas perturbações presentes são as das flutuações do vácuo. Como o fluido é barotrópico, $\iota = 0$ e, com isso, a perturbação ζ desacopla da de entropia δs . Para calcular as perturbações criadas pelas flutuações do vácuo, precisamos determiná-lo definindo um conjunto de soluções de “energia” positiva, como discutimos na Seção 4.2.4. Nesse caso, a equação de movimento que precisamos resolver é

$$\mathcal{L}_l^2 \zeta_{1q} + \frac{\mathcal{L}_l z^2}{z^2} \mathcal{L}_l \zeta_{1q} + q^2 N^2 c_s^2 \zeta_{1q} = 0. \quad (5.4)$$

Podemos simplificar essa equação reescrevendo a função z^2 como uma função do fator x . Usamos a equação de continuidade (Eq. 2.29) escrita na forma

$$\frac{1}{\rho_{c0}} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 3 \frac{\Omega + p/\rho_{c0}}{x}, \quad \frac{p}{\rho_{c0}} = \frac{x^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right), \quad (5.5)$$

para expressar $\varepsilon\vartheta$ e c_s^2 , respectivamente, como

$$\varepsilon\vartheta = \frac{x}{R_H^2 \kappa} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{x}{3} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right). \quad (5.6)$$

Reunindo esses resultados e expressando Θ em termos da função de Hubble adimensional E (Eq. 2.46), temos o fator z^2 (Eq. 4.90) dado por

$$z^2 = \frac{\hbar}{9l_p^2} \frac{a^3 x}{N E^2 c_s^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\hbar}{3l_p^2} \frac{a^3}{N x^2 E^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

As equações para z e c_s^2 acima são aparentemente mais complicadas que suas definições em termos das derivadas em relação ao tempo. No entanto, essas expressões são úteis pois não é necessário obter a evolução temporal de a para ter as formas explícitas dessas quantidades em termos do fator de escala. Além disso, quanto tratarmos o caso quântico, a evolução do fator de escala não será mais regida pelas equações de Friedmann. Contudo, como vimos no início da seção, essa relação entre a densidade de energia e o fator de escala não se altera e assim as expressões acima poderão ser usadas. Note que, no nosso modelo quantizado, usamos somente um fluido barotrópico sem curvatura. Assim, essas equações são válidas se, no período quântico, somente um fluido barotrópico dominar.

As soluções integrais, que veremos na Seção 5.3, dependem da quantidade $x^2 N^2 c_s^2 z^2$ que, usando as fórmulas acima, é expressa por

$$x^2 N^2 c_s^2 z^2 = \frac{\hbar a_0^3}{9l_p^2} \frac{N}{E^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \quad (5.8)$$

5.2.1 Soluções para um Único Fluido

Para um único fluido com equação de estado $-1/3 < w < 1$, temos $\Omega = \Omega_{w0}x^{3(1+w)}$ e as quantidades acima, na fase de contração e longe da fase quântica, são dadas por,

$$E = -\sqrt{\Omega_{w0}x^{3(1+w)} + \Omega_{k0}x^2}, \quad c_s^2 = w, \quad z^2 = \frac{\hbar a_0^3}{3l_p^2} \frac{1+w}{wNx^3} \left(1 + \frac{\Omega_{k0}}{\Omega_{w0}x^{1+3w}}\right)^{-1}. \quad (5.9)$$

Escolhendo a seguinte variável como tempo,¹

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{w0}x^{1/\beta}}}, \quad x = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{-\beta}, \quad \beta \equiv \frac{2}{1+3w}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{w0}}}, \quad (5.10)$$

temos que a função lapso é dada por

$$l^\mu \nabla_\mu \lambda = 1, \quad Nn^\mu \nabla_\mu \lambda = 1, \quad N = \beta \frac{R_H}{\lambda E},$$

de forma que a função z nessa coordenada é expressa como

$$z^2 = -\hbar z_d^2 \frac{(\lambda/\lambda_0)^{2\beta}}{\sqrt{1 + \Omega_{k0}\lambda^2}}, \quad z_d^2 \equiv \frac{a_0^3}{3l_p^2 R_H} \frac{1+w}{w\beta}. \quad (5.11)$$

Quando a contribuição da curvatura for igual a contribuição do fluido, temos $\Omega_{w0}x_e^{3(1+w)} = \Omega_{k0}x_e^2$, *i.e.*,

$$x_e^2 = \left(\frac{\Omega_{k0}}{\Omega_{w0}}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_e}\right)^{2\beta}, \quad \lambda_e = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{k0}}}. \quad (5.12)$$

Dadas as quantidades acima, o fator $\mathcal{L}_l z^2/z^2$ que aparece na equação de movimento da perturbação é

$$\frac{\mathcal{L}_l z^2}{z^2} = \frac{2\beta}{\lambda} - \frac{\Omega_{k0}\lambda}{1 + \Omega_{k0}\lambda^2}. \quad (5.13)$$

Nessa variável a equação de movimento expressa pela Eq. (5.4) é dada por

$$\frac{\partial^2 \zeta_{1q}}{\partial \lambda^2} + \left(\frac{2\beta}{\lambda} - \frac{\Omega_{k0}\lambda}{1 + \Omega_{k0}\lambda^2}\right) \frac{\partial \zeta_{1q}}{\partial \lambda} + \frac{\beta^2 w \tilde{q}_a^2}{(1 + \Omega_{k0}\lambda^2)} \zeta_{1q} = 0, \quad (5.14)$$

onde definimos o autovalor adimensional $\tilde{q}_a \equiv \tilde{R}_H \tilde{q}$. Essa equação possui a solução geral

$$\zeta_{1q} = A_1 S_c^{a,b}(-\lambda^2 \Omega_{k0}) + A_2 S_c^{b,a}(-\lambda^2 \Omega_{k0}), \quad (5.15)$$

onde A_1 e A_2 são coeficientes constantes arbitrários, as funções $S_c^{a,b}(t)$ são definidas pela Eq. (E.14) e as constantes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ são expressas por

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\beta - 1 - \mu}{2}, \quad \mathbf{b} \equiv \frac{\beta - 1 + \mu}{2}, \quad \mu \equiv \sqrt{-\frac{\tilde{q}_a^2 w \beta^2}{\Omega_{k0}} + (\beta - 1)^2}, \quad \mathbf{c} = \beta + \frac{1}{2}. \quad (5.16)$$

¹O tempo λ é bem definido enquanto a função de Hubble não muda de sinal, ou seja, durante toda a fase de contração.

Para seções espaciais hiperbólicas ($\Omega_{k0} > 0$) e modos que satisfazem $\mu^2 < 0$, temos que $\mathbf{b} = \mathbf{a}^*$. Nesse caso as soluções acima satisfazem $S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0}) = S_c^{b,a}(-\lambda^2\Omega_{k0})^*$. Tomando o limite do universo muito grande no passado $\lambda \rightarrow \infty$, temos que as soluções $S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0})$ e $S_c^{b,a}(-\lambda^2\Omega_{k0})$ oscilam com frequência positiva e negativa, respectivamente, *i.e.*,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0}) \propto e^{\mu \log(\lambda)}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_c^{b,a}(-\lambda^2\Omega_{k0}) \propto e^{-\mu \log(\lambda)},$$

onde usamos que ${}_2F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}; 0) = 1$ (veja Eq. E.13). Nesse caso temos que as soluções de energia positiva no passado são as representadas por $S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0})$. Nos casos onde $\mu^2 > 0$, que compreendem alguns modos do caso hiperbólico e todos os modos do caso esférico, não conhecemos *a priori* uma maneira de determinar os modos de “energia” positiva, e deixaremos essa análise para um trabalho futuro.

Com a escolha das soluções descrita acima, podemos aplicar a normalização dos estados dada na Eq. (4.115) em conjunto com a fórmula para o Wronskiano das soluções $S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0})$ e $S_c^{b,a}(-\lambda^2\Omega_{k0})$ (Eq. E.12) para determinar A_1 da forma

$$|A_1|^2 = \frac{ix_e^2\lambda_e}{2\mu z_d^2\Delta_q^2} = \frac{(\mathbf{ab})^{1-c}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \left(\frac{\tilde{q}_a^2 w \beta^2 \lambda_0^2}{4} \right)^{c-1} \frac{i\lambda_0}{2z_d^2\Delta_q^2}. \quad (5.17)$$

Podemos notar que a normalização acima é independente do tempo. No limite em que $\Omega_{k0} \rightarrow +0$, podemos usar a Eq. (E.18) para mostrar que

$$\lim_{\Omega_{k0} \rightarrow +0} A_1 S_c^{a,b}(-\lambda^2\Omega_{k0}) = \frac{\sqrt{\pi\lambda_0}}{2z_d\Delta_q} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{1-c} H_{c-1}^{(1)}(\tilde{k}_a\sqrt{w}\beta\lambda), \quad (5.18)$$

onde escolhemos a fase constante $\arg(A_1) = -i\mu \ln(2) + \pi(1/2 - c)/2$ para obter, no limite plano, a função de Hankel a menos de um fator multiplicativo real. Esse limite coincide, como esperado, com o resultado que obteríamos caso supuséssemos seções espaciais planas de partida. Os modos que satisfazem $\mu^2 < 0$ fornecem a relação

$$\frac{\tilde{q}_a^2 w \beta^2}{\Omega_{k0}} = \frac{(\tilde{k}_a^2 + \Omega_{k0})w\beta^2}{\Omega_{k0}} > (\beta - 1)^2.$$

Caso $w = 1/3$, temos que $\beta = 1$ e portanto todos os modos \tilde{k}_a satisfazem $\mu^2 < 0$. Quando $0 < w \ll 1$ ($\beta \approx 2$), temos

$$\tilde{k}_a^2 + \Omega_{k0} > \frac{\Omega_{k0}}{4w},$$

ou seja, no caso de poeira precisamos de um universo com escala de curvatura muito grande ($\Omega_{k0} \ll w$) para que os modos comparáveis ao raio de Hubble $\tilde{k}_a \approx 1$ satisfaçam $\mu^2 < 0$.

Caso o modelo possa ser descrito com um único fluido até o instante onde as soluções param de oscilar (congelam), *i.e.*, $\lambda^2\Omega_{k0}/\Omega_{w0} \ll 1$, a solução, nessa fase, será aproximada

por (veja Eq. E.14)

$$\zeta_{1q} \approx A_1 S_c^{a,b} (-\lambda^2 \Omega_{k0}) = A_1 \left(C_1 + C_2 (\lambda^2 \Omega_{k0})^{-\alpha} \right), \quad (5.19)$$

$$C_1 \equiv \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{-\beta-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-\beta-\mu}{2}\right)}, \quad C_2 \equiv \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{\beta-1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\beta-\mu}{2}\right)}, \quad (5.20)$$

$$\alpha \equiv c - 1 = \beta - \frac{1}{2} = \frac{3(1-w)}{2(1+3w)}. \quad (5.21)$$

Como a faixa de valores $-1/3 < w < 1$ implica $\alpha > 0$, temos que o segundo termo da Eq. (5.19) será muito maior que o primeiro. Usando as propriedades descritas na Eq. (E.1), reescrevemos as constantes C_1 e C_2 na forma

$$C_1 = \frac{2^{-\beta-\mu}\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi}(1-\beta-\mu)\Gamma(-\beta-\mu)}, \quad C_2 = \frac{2^{\beta-1-\mu}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi}(\beta-\mu)\Gamma(\beta-1-\mu)}. \quad (5.22)$$

Para $|\mu| \gg 1$, temos as séries assintóticas

$$C_1 \approx \frac{\Gamma(-\alpha)}{2^\mu \sqrt{\pi}} \left(-\frac{\mu}{2}\right)^\beta \left(1 + \frac{2-\beta(1-\beta)}{2\mu} + \dots\right), \quad (5.23)$$

$$C_2 \approx \frac{\Gamma(\alpha)}{2^\mu \sqrt{\pi}} \left(-\frac{\mu}{2}\right)^{1-\beta} \left(1 + \frac{2-\beta(1-\beta)}{2\mu} + \dots\right), \quad (5.24)$$

lembrando que a normalização $|A_1|$ contribui com um fator de $1/\sqrt{\mu}$. Observamos que cada termo $A_1 C_1$ e $A_1 C_2$ acima tem o comportamento de lei de potência em μ dado, respectivamente, por μ^α e $\mu^{-\alpha}$. Avaliando somente a dependência em \tilde{k}_a , temos que para $\tilde{k}_a \gg 1$ tal que $\mu \propto \tilde{k}_a$, a dependência do espectro de potências (Eq. 4.134) de ζ é dada por $P_\zeta \propto \tilde{k}_a^{3+2\alpha}$ para o termo constante e $P_\zeta \propto \tilde{k}_a^{3-2\alpha}$ para o termo crescente. Por fim, concluímos que a presença da curvatura modifica o espectro das perturbações somente para modos com grande comprimento de onda $\tilde{k}_a \ll 1$, como esperado.

Da análise acima temos que o modo crescente tem um índice espectral, que definimos como o expoente de \tilde{k}_a do espectro de potências mais um, dado por

$$n_s = 1 + 3 - 2\alpha = 1 + \frac{12w}{1+3w}.$$

Os espectros independentes de \tilde{k}_a são chamados de invariantes de escala, assim como os que têm índice espectral muito próximo de um de quase invariantes de escala. Nos modelos inflacionários o espectro gerado pelo período de inflação é descrito aproximadamente por uma lei de potências com índice espectral $n_s \lesssim 1$ [2]. Usando os sete anos de observação do WMAP [9] para ajustar um modelo cosmológico, onde o espectro primordial é modelado por uma simples lei de potência, obtém-se $n_s = 0.967 \pm 0.014$ em 1σ . Ou seja, os dados indicam que o espectro de potências primordial tem um índice espectral $n_s \lesssim 1$ como previsto pela inflação. Nos modelos de ricochete que estamos estudando, temos que, para uma contração dominada inicialmente por poeira $w \gtrsim 0$, $n_s \gtrsim 1$ em aparente contradição com os resultados obtidos dos dados de RCF.

Podemos fazer os seguintes comentários referentes a esse ponto. Nos modelos utilizados para ajustar os dados de RCF, foi usado uma forma simples de lei de potência para o espectro. Portanto, o resultado do ajuste, assim como as barras de erro, são aplicáveis somente a modelos de lei de potência. Entretanto, os espectros que obtivemos têm comportamento de lei de potência somente para uma faixa de valores de \tilde{k}_a , *i.e.*, o espectro só é dado por uma lei de potência para valores do modo $\tilde{k}_a \gg \Omega_{k0}$. Dessa forma, não é correto afirmar que esses modelos são desfavorecidos pelos dados. Por exemplo, no mesmo trabalho [9] os autores consideram modelos onde o índice espectral é corrigido por um fator que depende do logaritmo de \tilde{k}_a . Para esse modelo é obtido $n_s = 1.027_{-0.051}^{+0.050}$ que é, portanto, compatível com o índice espectral que obtivemos. Se adicionarmos outro fluido ao modelo, como faremos na Seção 5.5, o espectro será novamente alterado. Também veremos que o espectro terá um comportamento de lei de potência, porém com diferentes índices espectrais em diferentes intervalos de \tilde{k}_a .

Até esse ponto estudamos o comportamento da variável invariante de calibre ζ . Podemos agora obter o espectro de potências da perturbação invariante de calibre Ψ . Usando a Eq. (4.135) e os resultados acima chegamos à seguinte expressão

$$\Psi_{1\tilde{k}} = \frac{A_1 (1+w)\beta}{\mathbf{b}} \frac{1}{4} S_{c+1}^{\mathbf{a}+1, \mathbf{b}+1} (-\lambda^2 \Omega_{k0}). \quad (5.25)$$

Para fazer o limite para o caso de hipersuperfícies espaciais planas, note que

$$\frac{|A_1|^2}{\mathbf{b}^2} = \frac{\mathbf{a} (\mathbf{a}\mathbf{b})^{-c}}{\mathbf{b} \mathbf{b} - \mathbf{a}} \left(\frac{\tilde{q}_a^2 w \beta^2 \lambda_0^2}{4} \right)^{c-1} \frac{i\lambda_0}{2z_d^2 \Delta_q^2},$$

e que no limite temos $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \mathbf{a}/\mathbf{b} = -1$. Portanto, analogamente a ζ_{1q} , temos

$$\lim_{\mu \rightarrow i\infty} \Psi_{1\tilde{k}} = \frac{\sqrt{\pi\lambda_0}(1+w)}{4\tilde{q}_a\sqrt{w}\lambda_0 z_d \Delta_q} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{-d} H_c^{(1)}(\tilde{k}_a \sqrt{w}\beta\lambda). \quad (5.26)$$

No limite $\lambda^2 \Omega_{k0} \ll 1$, a solução dada na Eq. (5.25) pode também ser aproximada por

$$\Psi_{1q} \approx A_1 \frac{(1+w)\beta}{4} \left(\frac{C_1}{1+\alpha} + \frac{\alpha C_2}{\mathbf{a}\mathbf{b}} (\lambda^2 \Omega_{k0})^{-\alpha-1} \right). \quad (5.27)$$

O modo crescente tem o expoente de λ dado por $-2\beta - 1$, enquanto o crescimento de ζ_{1q} tem um expoente $-2\beta + 1$. Logo, Ψ tem os mesmos dois modos, com a diferença de um maior crescimento que ζ_{1q} . Em relação ao espectro, fazendo a análise análoga a que fizemos para ζ_{1q} , obtemos que o modo constante tem o mesmo espectro que o de ζ , ou seja, \tilde{k}_a^α . O modo crescente tem um fator adicional de $1/(\mathbf{a}\mathbf{b}) \propto \tilde{k}_a^{-2}$ e, portanto, uma dependência $\tilde{k}_a^{-\alpha-2}$.

Com isso, o modo crescente de Ψ não terá um espectro com $n_s \gtrsim 1$ na fase de contração e crescerá mais rapidamente que ζ . Porém, como discutimos na Seção 3.8, a variável invariante de calibre Ψ ($= \Phi$) só está relacionada diretamente com as perturbações na métrica nos calibres onde $\delta\sigma^{(s)} = 0$, que resulta em $\Phi = \phi$. Já que no calibre de curvatura

constante, discutido na Seção 4.2.3, temos que a relação entre a perturbação ϕ e a variável ζ é dada na Eq. (4.101) e assim temos

$$\zeta = \frac{2\Theta^2}{3\kappa\varepsilon\vartheta}\phi = \frac{2(1 + \lambda^2\Omega_{k0})}{1 + w}\phi. \quad (5.28)$$

Na Seção 3.7 mostramos que as perturbações na métrica no calibre de curvatura constante crescem mais vagorosamente que no calibre Newtoniano quando consideramos um universo em contração. Os resultados físicos são independentes da escolha de calibre. Porém, como discutimos na seção citada, podem existir situações onde somente um subconjunto de todas as possíveis escolhas de calibres mantém a série perturbativa válida. Isso ocorre porque a série perturbativa em si não representa um resultado físico. Ela é um artifício matemático utilizado que depende de uma escolha de modelo de fundo apropriado, tal que a diferença entre o modelo de fundo e o modelo físico seja pequena. Como vimos na Seção 3.1, mesmo o modelo de fundo sendo fixo FLRW, ainda assim temos uma liberdade de como introduzi-lo na variedade que usamos para descrever o universo. A existência de um subconjunto de calibre, onde a série perturbativa não é válida, mostra que há formas de introduzir o modelo de fundo tal que a diferença não é sempre pequena.

Para ilustrar o argumento acima, considere um instante λ_1 tal que

$$\sqrt{P_\zeta} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_a^3}{2\pi^2\tilde{R}_H^3}}\zeta_{1q}(\lambda_1) \approx 1, \quad \Omega_{k0}\lambda_1^2 \approx \left(\sqrt{\frac{\tilde{k}_a^3}{2\pi^2\tilde{R}_H^3}}A_1C_2 \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A constante A_1 é proporcional a $l_p\sqrt{\tilde{R}_H}/a_0$ e, portanto, o termo entre parênteses é proporcional a $l_p/R_H \approx 10^{-60}$ de forma que $\lambda_1 \propto 10^{-30/\alpha} \ll 1$. Nesse mesmo instante o espectro de potências de Ψ é dado por

$$\sqrt{P_\Psi} = \frac{(1+w)\beta}{4} \frac{\alpha}{ab} \frac{1}{\lambda_1^2\Omega_{k0}} \propto 10^{\frac{60}{\alpha}}.$$

Com isso, vemos que no instante em que o espectro de potências de ζ fica igual a um, o de Ψ é muito maior que um. Suponha que tivéssemos feito todo o cálculo no calibre de curvatura constante. Nele teríamos encontrado um espectro de potências para ϕ (Eq. 5.28) da ordem de um ao se aproximar de λ_1 . Se nesse instante fizéssemos uma mudança de calibre para o calibre Newtoniano, via Eqs. (3.20) e (3.107), teríamos

$$\phi_N = \phi_C + \xi^\parallel, \quad \xi^\parallel = (\Phi - \phi_C), \quad (5.29)$$

onde o índice N representa a perturbação no calibre Newtoniano e C no calibre de curvatura constante. No entanto, essa mudança de calibre não é bem definida, como vimos acima: próximo ao instante λ_1 , a variável Φ é muito maior que um, ou seja, a condição de fixação de calibre dada na Eq. (3.107) não é bem definida sempre. Isso mostra que existem soluções para as perturbações tais que a condição de fixação de alguns calibres não é bem definida, pois implica em um difeomorfismo gerado por um campo vetorial, tal que $\nabla_\mu\xi_\nu \gg 1$.

Em resumo, como Ψ e Φ são iguais a ψ e ϕ nos calibres com $\delta\sigma^{(s)} = 0$, temos que esse calibre não é bem definido quando essas variáveis ficam maiores que um. Contudo, enquanto existir um calibre onde as perturbações são pequenas, a série perturbativa é justificada.

5.3 SOLUÇÃO INTEGRAL

No caso geral não é possível encontrar soluções analíticas para as equações de movimento dadas na Eq. (4.117). Para lidar com esses casos podemos procurar por soluções aproximadas. Como vimos na Seção 4.2.4, quando as soluções variam muito mais rápido que as funções de fundo podemos usar soluções tipo WKB. Contudo, vimos na Seção 5.2.1 que após um certo instante as soluções têm um comportamento simples descrito em termos das quantidades de fundo. Para lidar com essa fase da evolução, primeiramente reescrevemos a Eq. (4.117) na forma

$$\mathcal{L}_l \zeta_{1q} = \frac{\mathcal{P}_{1q}}{z^2}, \quad \mathcal{L}_l \mathcal{P}_{1q} = -N^2 z^2 c_s^2 q^2 \zeta_{1q}, \quad \mathcal{P}_{1q} \equiv \frac{1}{\Delta_q^2} \Pi_{\zeta_{1q}}, \quad (5.30)$$

onde definimos o campo \mathcal{P}_{1q} para simplificar as equações, lembrando que Δ_q^2 é constante e adimensional. Reescrevendo o autovalor na forma $q^2 = x^2 \tilde{q}_a^2 / R_H^2$, temos que a equação de $\mathcal{L}_l \mathcal{P}_{1q}$ depende do fator

$$F^2 z^2 \tilde{q}_a^2 = \tilde{F}^2 F_r^2 z^2 \tilde{q}_a^2, \quad F \equiv \frac{x N c_s}{R_H}, \quad \tilde{F} \equiv \frac{F}{F_r}, \quad (5.31)$$

onde r representa o cálculo das quantidades em um instante de referência arbitrário. Supondo que a constante satisfaz $F_r \tilde{q}_a \ll 1$, podemos procurar por soluções em série de potências em $F_r \tilde{q}_a$. Essas soluções serão válidas enquanto $|\tilde{F}| \leq 1$. Mais a frente, veremos outras restrições necessárias para a solução poder ser escrita em série de potências. Escrevemos a solução em série na forma

$$\zeta_{1q} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{1q,n} (F_r \tilde{q}_a)^{2n}, \quad \mathcal{P}_{1q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{1q,n} (F_r \tilde{q}_a)^{2n}, \quad (5.32)$$

e a partir da Eq. (5.30) obtemos para o termo de ordem zero

$$\mathcal{L}_l \mathcal{P}_{1q,0} = 0, \quad \mathcal{L}_l \zeta_{1q,0} = \frac{\mathcal{P}_{1q,0}}{z^2}, \quad (5.33)$$

onde as soluções são dadas por

$$\mathcal{P}_{1q,0} = B_1, \quad \zeta_{1q,0} = \zeta_{1q,0}(l_i) + B_1 \int_{l_i}^l dl_1 z^{-2}, \quad (5.34)$$

onde B_1 é uma constante com dependência arbitrária em \tilde{q}_a . Como as duas condições iniciais $\zeta_{1q,0}(l_i)$ e $\mathcal{P}_{1q,0}(l_i)$ têm, em geral, dependência diferente no autovalor \tilde{q} , a evolução acima faz com que $\zeta_{1q,0}(l)$ misture essas duas dependências. Podemos obter duas soluções

linearmente independentes de forma que cada uma delas dependa, respectivamente, de $\zeta_{1q,0}(l_i)$ e $\mathcal{P}_{1q,0}(l_i)$. Para tanto, primeiro note que a solução acima para $\zeta_{1q,0}$ pode ser expressa como

$$\zeta_{1q,0}(l) - \zeta_{1q,0}(l_i) = B_1 (f_d(l) - f_d(l_i)), \quad f_d(l) \equiv \int_{l_d}^l dl_1 z^{-2} + C_d, \quad (5.35)$$

para um outro instante l_d e constante C_d arbitrários. Escolhemos uma das soluções linearmente independentes como aquela onde $\zeta_{1q,0}(l) = B_1 f_d(l)$, que é definida a menos da escolha de l_d . Como as equações são lineares, vamos obter a solução colocando $B_1 = 1$, que pode ser posteriormente reintroduzido multiplicando essa solução por B_1 . Os termos da próxima ordem satisfazem as equações

$$\mathcal{L}_l \mathcal{P}_{1q,1} = -\tilde{F}^2 z^2 \zeta_0, \quad \mathcal{L}_l \zeta_{1q,1} = \frac{\mathcal{P}_{1q,1}}{z^2}. \quad (5.36)$$

Integrando a primeira equação temos

$$\mathcal{P}_{1q,1}(l) = -I_1 [f_d], \quad I_1 [g] \equiv \int_{l_i}^l dl_1 \tilde{F}^2 z^2 g(l_1), \quad (5.37)$$

onde definimos o funcional $I_1 [\cdot]$ escolhendo o instante inicial l_i . Com isso, a outra equação tem a solução integral

$$\zeta_{1q,1}(l) = -I_2 [I_1 [f_d]] \equiv -I_{21} [f_d], \quad I_2 [g] \equiv \int_{l_i}^l \frac{dl_1}{z^2} g(l_1), \quad (5.38)$$

onde definimos um segundo funcional $I_2 [\cdot]$ e a composição como $I_2 [I_1 [g]] \equiv I_2 [g]$. Repetindo esse procedimento n vezes temos as soluções integrais

$$\zeta_{1q,n} = (-1)^n I_{21}^n [f_d], \quad \mathcal{P}_{1q,n+1} = (-1)^n I_{12}^n [I_1 [f_d]], \quad (5.39)$$

válidas para $n \geq 0$ onde definimos

$$I_{21}^0 [g] \equiv g(l) \equiv I_{12}^0 [g], \quad I_{21}^{n+1} [g] = I_{21} [I_{21}^n [g]], \quad I_{12}^{n+1} [g] = I_{12} [I_{12}^n [g]]. \quad (5.40)$$

Com os termos acima, definimos dois funcionais

$$\zeta_{1q}^I [f_d] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (F_r \tilde{q}_a)^{2n} I_{21}^n [f_d], \quad \mathcal{P}_{1q}^I [f_d] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (F_r \tilde{q}_a)^{2n} I_{12}^n [I_1 [f_d]], \quad (5.41)$$

de forma que

$$\mathcal{L}_l \zeta_{1q}^I [f_d] = \frac{1}{z^2} (1 - (F_r \tilde{q}_a)^2 \mathcal{P}_{1q}^I [f_d]), \quad \mathcal{L}_l \mathcal{P}_{1q}^I [f_d] = \tilde{F}^2 z^2 \zeta_{1q}^I [f_d].$$

Com isso temos a primeira solução dada por

$$\zeta_{1q}^{(1,d)} = \zeta_{1q}^I [f_d], \quad \mathcal{P}_{1q}^{(1,d)} = 1 - (F_r \tilde{q}_a)^2 \mathcal{P}_{1q}^I [f_d]. \quad (5.42)$$

Essa solução, quando calculada no instante inicial l_i , é dada por $\zeta_{1q}^{(1,d)}(l_i) = f_d(l_i)$ e $\mathcal{P}_{1q}^{(1,d)}(l_i) = 1$ de forma que $B_1\zeta_{1q}^{(1,d)}$ e $B_1\mathcal{P}_{1q}^{(1,d)}$ forma a solução desejada. Escrevendo explicitamente a solução para $\zeta_{1q}^{(1,d)}$, temos

$$\begin{aligned}\zeta_{1q}^{(1,d)}(l) &= f_d(l) - (F_r\tilde{q}_a)^2 I_{21}[f_d](l) + \dots, \\ &= f_d(l) - (F_r\tilde{q}_a)^2 \int_{l_i}^l dl_1 \frac{1}{z^2} \int_{l_i}^{l_1} dl_2 \tilde{F}^2 z^2 f_d(l_2) + \dots, \\ &= f_d(l) - \tilde{q}_a^2 \int_{l_i}^l dl_1 \frac{1}{z^2} \int_{l_i}^{l_1} dl_2 \left(\frac{xNz c_s}{R_H} \right)^2 f_d(l_2) + \dots\end{aligned}$$

Na última linha mostramos a expressão geralmente utilizada na literatura. Ela pode ser obtida diretamente das equações de movimento supondo $\tilde{q}_a^2 \ll 1$. Contudo, para os modos que estamos interessados, $10^{-3} < \tilde{q}_a < 10^3$, a suposição está aparentemente errada já que temos $\tilde{q}_a > 1$. Essa confusão se dá pois quando se faz a expansão diretamente em \tilde{q}_a^2 , não se leva em consideração a ordem de grandeza do fator

$$\int_{l_i}^l dl_1 \frac{1}{z^2} \int_{l_i}^{l_1} dl_2 \left(\frac{xNz c_s}{R_H} \right)^2 z^2 f_d(l_2).$$

Da forma que fizemos a expansão, garantimos que as integrais contribuam com termos ≤ 1 quando exigimos que $\tilde{F} \leq 1$. Dessa expressão, vemos porque não é necessário introduzir z^2 em F^2 , já que essa quantidade sempre aparece no numerador e denominador das integrais. Desta forma basta impor que $\tilde{F}z^2/z_r^2 \leq 1$. Por fim, mesmo que o integrando seja pequeno, a integral pode contribuir com valores maiores que um se $|l - l_i| > 1$. Logo, as imposições no integrando devem ser feitas uma vez escolhido a função lapso de forma que $|l - l_i| < 1$.

Encontramos a primeira solução impondo inicialmente $\mathcal{P}_{1q,0}(l_i)$ igual a uma constante, que depois tomamos igual a um. Podemos obter uma segunda solução impondo $\mathcal{P}_{1q,0}(l_i) = 0$. Repetindo o procedimento acima, chegamos nas expressões

$$\zeta_{1q}^{(2)} = \zeta_{1q}^I [1], \quad \mathcal{P}_{1q}^{(2)} = -(F_r\tilde{q}_a)^2 \mathcal{P}_{1q}^I [1], \quad (5.43)$$

de forma que $\zeta_{1q}^{(2)}(l_i) = 1$ e $\mathcal{P}_{1q}^{(2)}(l_i) = 0$. Vale notar que, nessa solução, \mathcal{P}_{1q} tem seu primeiro termo não nulo com um fator de $(F_r\tilde{q}_a)^2$, ou seja, o modo constante de ζ_{1q} gera um modo de ordem $(F_r\tilde{q}_a)^2$ menor em \mathcal{P}_{1q} .

A solução integral geral é dada por

$$\zeta_{1q} = B_1\zeta_{1q}^{(1,d)} + B_2\zeta_{1q}^{(2)}, \quad \mathcal{P}_{1q} = B_1\mathcal{P}_{1q}^{(1,d)} + B_2\mathcal{P}_{1q}^{(2)}, \quad (5.44)$$

e é possível mostrar, ordem a ordem, que o Wronskiano dessas solução é diferente de zero, e que, portanto, formam um conjunto de soluções linearmente independente.

Essas soluções foram encontradas usando um valor arbitrário para o limite inferior da integral e da constante, ambos definidos na Eq. (5.35). Se mudarmos esse valor para l_e

e a constante para C_e , temos $f_d(l) = f_e(l) + (f_d(l_e) - C_e)$ e, portanto, a seguinte relação entre as soluções obtidas com f_d e f_e

$$\zeta_{1q}^{(1,d)} = \zeta_{1q}^{(1,e)} + (f_d(l_e) - C_e)\zeta_{1q}^{(2)}, \quad \mathcal{P}_{1q}^{(1,d)} = \mathcal{P}_{1q}^{(1,e)} + (f_d(l_e) - C_e)\mathcal{P}_{1q}^{(2)}. \quad (5.45)$$

Com isso, a mudança do limite inferior da função é equivalente a manter o limite l_d mas modificar as constantes B_1 e B_2 na forma

$$B_1 \rightarrow B_1, \quad B_2 \rightarrow B_2 + (f_d(l_e) - C_e)B_1. \quad (5.46)$$

5.3.1 Concatenação das Soluções

As soluções integrais são apropriadas para os instantes em que as soluções congelam. Para obter as constantes B_1 e B_2 que caracterizam essa solução, precisamos de um instante onde a solução integral é uma boa aproximação e a solução inicial também é bem definida. Por exemplo, na seção anterior obtivemos uma solução analítica para o caso de um fluido barotrópico em um universo com Ω_{k0} arbitrário. Se essa solução for válida até o fim das oscilações, podemos fazer a concatenação nesse ponto. Esse tipo de análise é útil, pois é mais fácil lidar com a solução integral quando temos muitos fluidos e portanto, toda vez que as perturbações terminam a fase oscilatória em um instante onde somente um fluido domina, poderemos fazer a concatenação.

Para obter a solução integral em ordem zero, precisamos calcular as integrais $f_d(l)$ e $I_1[1]$. Restringindo-nos ao caso com somente um fluido (Seção 5.2.1), podemos calcular essas integrais analiticamente. Contudo, antes temos que avaliar as condições sobre $F_r \tilde{q}_a$ para sabermos quando a expansão é bem definida. Se usarmos a mesma variável que utilizamos na Seção 5.2.1 teremos

$$F_r \tilde{q}_a = \frac{\beta \sqrt{w} \tilde{q}_a}{\sqrt{1 + \lambda_r^2 \Omega_{k0}}},$$

e como queremos $|\lambda - \lambda_r| < 1$, impomos que $\lambda_r < 1$ e, assim, a aproximação é válida enquanto $\lambda < \lambda_r$. Isso inclui todos os instantes depois de λ_r , pois $\lambda \propto x^{-1/\beta}$ e vai a zero quando o universo contrai. Porém, isso implica $F_r \propto \sqrt{w}$ e, com isso, a faixa de $10^{-3} < \tilde{q}_a < 10^3$ pode incluir valores tais que $F_r \tilde{q}_a > 1$.

Para contornar esse problema, reescalamos a variável temporal da forma

$$l = \left(\frac{x_r}{x} \right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{\lambda}{\lambda_r}.$$

Com essa mudança temos as seguintes alterações nos resultados da Seção 5.2.1,

$$\lambda \rightarrow l, \quad \Omega_{k0} \rightarrow \Omega_{kr} = \Omega_{k0} x_r^2, \quad \Omega_{w0} \rightarrow \Omega_{wr} = \Omega_{w0} x_r^{3(1+w)}, \quad z^2 \rightarrow \frac{z^2}{x_r^3}, \quad (5.47)$$

e, conseqüentemente,

$$F_r \tilde{q}_a = \frac{\beta \sqrt{w}}{\sqrt{1 + \lambda_r^2 \Omega_{k0}}} \frac{\tilde{q}_a}{x_r^{\frac{1+3w}{2}}} = \sqrt{\frac{\beta^2 w \tilde{q}_a^2 (\lambda_r / \lambda_0)^2 \Omega_{k0}}{\Omega_{k0} (1 + \lambda_r^2 \Omega_{k0})}}. \quad (5.48)$$

Portanto podemos ajustar o valor de x_r para que $F_r \tilde{q}_a$ seja menor que um. Com essa imposição, o intervalo de possíveis valores da variável temporal é expresso por $|l - l_r| = |l - 1| < 1$, ou seja, $l = \lambda/\lambda_r < 1$, que em termos de a resulta em $a < a_r$. Em outras palavras, quanto menor o valor de a_r maior o valor dos modos \tilde{q}_a que podemos tratar perturbativamente, salvo que $a < a_r$. Como $z^2 \propto N^{-1}$, temos que todas as integrais acima são independentes da escolha da função tempo, como era de se esperar. Com isso, podemos trabalhar com qualquer variável, contanto que estejamos nas faixas de valores de a descritas acima.

Calculando as integrais dos termos de ordem zero, temos

$$f_{d^-}(\lambda) = \int_{\lambda_{d^-}}^{\lambda} \frac{d\lambda_1}{z^2} + C_{d^-} = f(\lambda), \quad (5.49)$$

$$f(\lambda) \equiv \frac{\lambda_0}{2\alpha\hbar z_d^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{-2\alpha} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\alpha; 1-\alpha; -\lambda^2\Omega_{k0}\right), \quad (5.50)$$

$$F_r^2 I_1 [1] = \int_{\lambda_b}^{\lambda} d\lambda_1 \frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H^2} = g(\lambda) - g(\lambda_i), \quad (5.51)$$

$$g(\lambda) \equiv -\frac{w\beta^2\hbar\lambda_0 z_d^2}{2c} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{2c} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, c; 1+c; -\frac{\lambda^2\Omega_{k0}}{\Omega_{w0}}\right), \quad (5.52)$$

onde escolhemos o instante λ_{d^-} posterior à fase oscilatória, λ_b o valor mínimo atingido antes do ricochete e denotamos f e g como funções de λ tais que $f_{d^-}(\lambda) = f(\lambda)$ e $F_r^2 I_1 [1] = g(\lambda) - g(\lambda_i)$ somente durante a fase de contração. Como $(\lambda/\lambda_0)^{2c} = x^{-\frac{5+3w}{2}}$, podemos desprezar o termo de $g(\lambda_b)$ pois o ricochete acontece em uma escala $x_b \gg 1$. Por fim, escolhemos a constante $C_{d^-} = f(\lambda_d)$ de forma que a aproximação integral coincida com a expansão da solução obtida na seção anterior. Portanto, em ordem zero, a solução geral é expressa da forma

$$\zeta_{1q} = B_1^- f_{d^-}(\lambda) + B_2^-, \quad \mathcal{P}_{1q}^- = B_1^- - (F_r \tilde{q}_a)^2 B_2^- I_1 [1]. \quad (5.53)$$

Encontramos as constantes B_1^- e B_2^- comparando com a expansão em zero ordem da solução dada nas Eqs. (5.19) e Eq. (5.27). Assim, às constantes acima são

$$B_1^- = A_1 C_2 \frac{2\alpha\hbar z_d^2}{\lambda_e x_e^2}, \quad B_2^- = A_1 C_1, \quad (5.54)$$

onde usamos a relação entre Ψ_{1q} e \mathcal{P}_{1q} dada pelas Eqs. (4.135) e (5.30), *i.e.*,

$$\mathcal{P}_{1q} = -\frac{2\hbar z_d^2 w \beta \tilde{q}_a^2}{(1+w)xE} \Psi_{1q}. \quad (5.55)$$

5.4 ATRAVESSANDO O RICOCHETE

A variável λ não é bem definida quando a solução passa da fase de contração para a de expansão. Desta forma, deixamos em aberto a escolha de variável temporal l , mas de forma que $l < 0$ e $l > 0$ correspondam à fase de contração e expansão, respectivamente.

Para calcularmos a aproximação de zero ordem na fase de expansão, precisamos calcular f_{d-} e $I_1[1]$ em $l > 0$. Pela escolha de extremo de integração λ_i como o mínimo, temos que $l_i = 0$. Assim, $I_1[1]$ é uma função crescente na fase de expansão já que o integrando não troca de sinal nessa fase. No entanto, a função $f_{d-}(l)$ para $l > 0$ pode ser expressa como

$$f_{d-}(l) = \int_{l_{d-}}^l dl_1 \frac{1}{z^2} + C_{d-} = f_{d-}(l_{d+}) + \int_{l_{d-}}^l dl_1 \frac{1}{z^2} = f_{d-}(l_{d+}) - C_{d+} + f_{d+}(l), \quad (5.56)$$

onde introduzimos o instante l_{d+} na fase de expansão, correspondente ao l_{d-} da fase de contração. Primeiramente vemos pela Eq. (5.7) que z^2 tem o mesmo sinal de N , já que todos os outros termos na sua definição são positivos. Além disso, a função lapso só trocará de sinal se mudarmos a ordem da variável temporal. Dessa forma, depois do ricochete, $f_{d-}(l)$ é sempre uma função monotonicamente crescente de l . Esse crescimento acontece porque temos uma constante positiva $f_{d-}(l_{d+})$,² da qual subtraímos um fator monotonicamente decrescente $f_{d+}(l)$.³ Portanto na fase após o ricochete usamos a função $f_{d+}(l)$ para definir a solução integral.

Em ordem zero a solução geral no período $l > 0$ é expressa da forma

$$\zeta_{1q} = B_1^+ f_{d+}(l) + B_2^+, \quad \mathcal{P}_{1q}^- = B_1^+ - (F_r \tilde{q}_a)^2 B_2^+ I_1[1], \quad (5.57)$$

onde as constantes estão relacionadas pela Eq. (5.46), *i.e.*,

$$B_1^+ = B_1^-, \quad B_2^+ = B_2^- + (f_{d-}(l_{d+}) - C_{d+}) B_1^-. \quad (5.58)$$

Isso mostra que, de forma geral, o modo constante ζ_{1q} na fase pós ricochete adquire um termo proporcional a B_1^- misturando as dependências nos modos \tilde{q}_a . Usando as constantes obtidas na Seção 5.3.1 (Eq. 5.54), vemos que nesse caso o modo constante de ζ_{1q} adquire um termo proporcional a $\tilde{k}_a^{-\alpha}$ e, portanto, quase invariante de escala. Assim, se a quantidade $(f_{d-}(l_{d+}) - C_{d+})$ for grande o suficiente, teremos um espectro de potências para as perturbações quase invariante de escala na fase de expansão, se o fluido dominante na formação do espectro for poeira $w \approx 0$.

5.4.1 Condições de Junção

As equações de movimento utilizadas até agora são válidas somente longe do ricochete. Para avaliar a evolução das perturbações próximas a essa fase, precisamos levar em conta os efeitos que causam o ricochete e como eles afetam as perturbações. Porém, mesmo sem um modelo específico para o ricochete, é possível obter resultados impondo continuidade em certas quantidades durante essa fase. Em [104], é feita uma discussão geral sobre condições de junção e em [22] essas condições são discutidas no contexto de modelos de ricochete.

²Como $z^2 > 0$ e o extremo superior da integral é maior que o inferior, a integral $\int_{l_{d-}}^l dl_1 \frac{1}{z^2} > 0$.

³A integral $\int_{l_{d+}}^l dl_1 \frac{1}{z^2}$ é negativa pois $z^2 > 0$, mas o extremo superior é menor que o inferior.

Supondo que as equações de movimento para as perturbações não são alteradas durante o ricochete e que a aproximação em série de potências de $F_r \tilde{q}_a$ é válida, basta estimar $f_{d^-}(l_{d^+}) - C_{d^+}$ para termos o espectro de potências na fase pós ricochete. Para tanto, dividimos a integral nas duas fases,

$$f_{d^-}(l_{d^+}) - C_{d^+} = \int_{l_{d^-}}^{l_{d^+}} \frac{dl_1}{z^2} + C_{d^-} - C_{d^+} = \int_{l_{d^-}}^0 \frac{dl_1}{z^2} + \int_0^{l_{d^+}} \frac{dl_1}{z^2} + C_{d^-} - C_{d^+}. \quad (5.59)$$

Como cada integral é feita em somente uma fase, podemos usar uma variável proporcional ao fator de escala para esse cálculo, *i.e.*,

$$\int_{l_{d^-}}^0 \frac{dl_1}{z^2} + C_{d^-} = \int_0^1 \frac{dy_1}{z_-^2} + C_{d^-}, \quad \int_0^{l_{d^+}} \frac{dl_1}{z^2} - C_{d^+} = - \left(\int_0^1 \frac{dy_1}{z_+^2} + C_{d^+} \right), \quad (5.60)$$

onde z_-^2 e z_+^2 são as funções calculadas nas fases de contração e expansão, respectivamente, e

$$y \equiv \frac{\ln(a/a_{d^\pm})}{\ln(a_b/a_{d^\pm})}, \quad a = a_{d^\pm} \left(\frac{a_b}{a_{d^\pm}} \right)^y,$$

impondo novamente que o fator de escala tem um valor mínimo a_b . Implicitamente estamos impondo que a função de Hubble normalizada E se comporta identicamente à clássica e troca de sinal no instante $l = 0$, enquanto a densidade de energia e pressão se comportam como as funções clássicas, *e.g.*, $\rho \propto x^{3(1+w)}$.

Se o conteúdo do universo não se alterar durante o ricochete, essas funções serão simplesmente $z_+^2 = -z_-^2$, veja Eq. (5.7). Para a variável y temos que $N = R_H \ln(a_b/a_{d^\pm})/E$, e portanto z^2 , quando consideramos somente o fluido com maior equação de estado, vai ser da ordem $z^2 \propto a^{3(1-w)/2}$ e, com isso, se $w < 1$, o integrando crescerá rapidamente quando $y \rightarrow 1$. Logo, as integrais acima vão ser da forma

$$\int_0^1 dy_1 u(y) e^{s_\pm y}, \quad u(y) = \frac{a^{\frac{3(1-w)}{2}}}{a_{d^\pm}^{\frac{3(1-w)}{2}} z_\pm^2}, \quad s_\pm = \frac{3(1-w)}{2} \ln(a_{d^\pm}/a_b).$$

Podemos aproximar a integral acima com a série assintótica [105]

$$\int_0^1 dy_1 u(y) e^{s_\pm y} \approx \sum_{n=0} (-1)^n \frac{e^{s_\pm y} \partial^n u(y)}{s_\pm^{n+1} \partial y^n} \Big|_0^1 \approx \frac{1}{s_\pm} \left(\frac{1}{z_\pm^2(a_b)} - \frac{1}{z_\pm^2(a_{d^\pm})} \right) + \dots, \quad (5.61)$$

se $a_b \ll a_{d^\pm}$. Então $s_\pm > 1$, de forma que os primeiros termos fornecem uma boa aproximação. Podemos notar também que quando z^2 é uma lei de potência em a , o primeiro termo da série é a solução exata da integral. Nessa aproximação, o fator $f_{d^-}(l_{d^+}) - C_{d^+}$ é dado por

$$f_{d^-}(l_{d^+}) - C_{d^+} = \frac{2}{s_m z_m^2(a_b)}, \quad s_m z_m^2 = 2 \frac{s_+ s_- z_+^2(a_b) z_-^2(a_b)}{s_+ z_+^2(a_b) - s_- z_-^2(a_b)}, \quad (5.62)$$

onde escolhemos $C_{d^-} = 1/(s_- z_-^2(a_{d^-}))$ e $C_{d^+} = 1/(s_+ z_+^2(a_{d^+}))$. No caso onde o ricochete é simétrico, ou seja, o conteúdo material é o mesmo nas duas fases e $a_{d^+} = a_{d^-}$, temos $z_+^2 = z_-^2$ e $s_+ = s_-$ e, dessa forma, $f_{d^-}(l_{d^+}) - C_{d^+} = 2/(s z^2(a_b))$.

A segunda integral depende do fator dado na Eq. (5.8) e portanto o integrando é dominado por um fator de $a^{(5+3w)/2}$, que dará a maior contribuição longe do ricochete. Portanto, reescrevemos a integral como

$$\int_1^y dy_1 v(y_1) e^{ry_1}, \quad v(y) \equiv \frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H x^{-\frac{5+3w}{2}}},$$

$$y = \frac{\ln(x)}{\ln(x_b)}, \quad N = -\frac{R_H \ln(x_b)}{E}, \quad r = -\frac{5+3w}{2} \ln(x_b).$$

Fazendo a mesma aproximação em termos da série assintótica [105], temos

$$F_r^2 I_1[1] = \int_0^l dl_1 \frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H^2} \approx \frac{1}{r} \left(\frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H^2} - \frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H^2} \right) \approx \frac{1}{r} \frac{x^2 N^2 c_s^2 z^2}{R_H^2}, \quad (5.63)$$

observando que para cada fase, expansão ou contração, deve-se usar as quantidades apropriadas nas equações acima. Na última igualdade desprezamos o termo $\propto x_b^{-(5+3w)/2}$ que é uma boa aproximação para $x \ll x_b$.

Com os resultados acima, temos o comportamento aproximado da perturbação ζ_{1q} após o ricochete. Essa, como vimos acima, tem um modo constante e um decrescente. Pela análise acima temos

$$\zeta_{1q} = \frac{B_1^-}{s_+ z_+^2} + B_2^- + \frac{2B_1^-}{s_m z_m^2(a_b)}, \quad (5.64)$$

lembrando que o modo decrescente é dominado por um fator de $a^{3(1-w)/2}$ e, com isso, decai rapidamente. A mistura dos modos resultou na constante amplificada, que no caso das perturbações geradas por um fluido e curvatura resulta em

$$\frac{2|B_1^-|}{s_m z_m^2(a_b)} = 2|A_1 C_2| \frac{(1-w^2)w_q}{(1-w_q^2)w} \sqrt{\frac{\Omega_w}{\Omega_q}} \left(\frac{x_b}{x_e} \right)^2 \frac{x_e^{1/\beta}}{x_b^{\frac{1+3w_q}{2}}}, \quad (5.65)$$

onde denotamos a equação de estado do fluido que domina próximo ao ricochete com w_q e o que domina quando as perturbações congelam como w . Na fórmula acima nos restringimos ao ricochete simétrico. No limite plano $\Omega_{k0} \rightarrow +0$ temos

$$\lim_{\Omega_{k0} \rightarrow +0} \frac{2|B_1^-|}{s_m z_m^2(a_b)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{z_d \sqrt{\pi}} \frac{(1-w^2)w_q}{(1-w_q^2)w} \frac{\lambda_0^{-\beta}}{\sqrt{\Omega_q}} \frac{x_b^2}{x_b^{\frac{1+3w_q}{2}}} \left(\frac{\tilde{k}_a \sqrt{w} \beta}{2} \right)^{-\alpha}, \quad (5.66)$$

onde, para fazer o limite, usamos as Eqs. (5.17) e (5.24).

Como a escala do ricochete é muito pequena, $x_b \gg 1$, a constante amplificada domina e, com isso, o espectro de potências de ζ_{1q} será

$$\sqrt{P_\zeta} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_a^3}{2\pi^2 \tilde{R}_H^3}} 2|A_1 C_2| \frac{(1-w^2)w_q}{(1-w_q^2)w} \sqrt{\frac{\Omega_w}{\Omega_q}} \left(\frac{x_b}{x_e} \right)^2 \frac{x_e^{1/\beta}}{x_b^{\frac{1+3w_q}{2}}}. \quad (5.67)$$

No limite plano, onde o ricochete acontece em uma fase dominada por radiação $w_q = 1/3$ e as perturbações se formam durante a dominação da poeira $w \approx 0$, em primeira ordem em w o espectro é

$$\sqrt{P_\zeta} = \sqrt{\frac{3l_p^2}{16\pi^2 R_H^2} \frac{3}{4} \frac{\Omega_{m0} x_b}{\sqrt{\Omega_{r0}} (\sqrt{w})^{\frac{5}{2}}}}. \quad (5.68)$$

Como mantivemos somente o termo de menor ordem em w , o espectro acima é exatamente invariante de escala. Mantendo termos de mais alta ordem no expoente de \tilde{k}_a , teríamos $n_s = 1 + 12w/(1 + 3w)$ como esperado. O espectro acima mostra que, para termos uma amplitude da ordem da estimada usando dados de RCF [9] ($P_\zeta \approx 2.42 \times 10^{-9}$), precisamos de

$$x_b \approx 10^{30}, \quad c_s = \sqrt{w} \approx 10^{-9},$$

onde usamos que

$$\Omega_r \approx 10^{-5}, \quad \Omega_m \approx 1,$$

para estimar as ordens de grandeza. Ou seja, os modelos com ricochete fornecem um espectro quase invariante de escala com amplitude próxima ao observado. Isso é possível sem atingirmos escalas muito menores que a de Planck, veja Seção 5.1.

5.4.2 Ricochete via Trajetória de Bohm

Como vimos no início da Seção 5.2, quando usamos as trajetórias de Bohm como modelo de fundo, temos as mesmas equações de movimento para as perturbações, onde agora o fator de escala segue as trajetórias de Bohm. Nesse caso, temos um ricochete simétrico, onde a única diferença será o uso de uma função de Hubble como a definida na Eq. (4.47). No caso de um único fluido com equação de estado w_q , temos

$$E_q^2 = \Omega_{q0} x_b^{3(1+w_q)} e^{-3(1+w_q)\frac{\nu^2}{2}} \left(1 - e^{-3(1-w_q)\frac{\nu^2}{2}}\right), \quad N = \frac{R_H \nu}{E_q}, \quad (5.69)$$

onde usamos a variável ν definida na Eq. (4.48). Portanto a função z^2 é expressa por

$$z^2 = \hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{-\frac{3(1-w_q)}{2}} \frac{e^{\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1-w_q)}{2}}}{\nu^2} \left(\frac{1 - e^{-3(1-w_q)\frac{\nu^2}{2}}}{\nu^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.70)$$

Para encontrarmos a integral $f_d(l)$, podemos proceder da seguinte maneira: fazemos primeiro a integral analiticamente ou numericamente até um ponto l_1 antes do ricochete, onde somente um fluido quantizado domina. Deste ponto até um ponto na fase após o ricochete, usamos a função z^2 acima para obter

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{1}{z^2} = -\frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \frac{2}{3(1-w_q)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d \left(e^{-\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1-w_q)}{2}} \right) \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1 - e^{-3(1-w_q)\frac{\nu^2}{2}}}. \quad (5.71)$$

Podemos evitar trabalhar com o módulo $|\nu|$ usando a variável θ definida por

$$\cos(\theta) = e^{-\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1-w_q)}{2}}.$$

Com essa definição, temos $\theta(\nu = 0) = 0$ e impomos que o sinal de θ é o mesmo que ν e portanto $\nu/|\nu| = \theta/|\theta|$, lembrando que dessa forma $\theta(\nu = -\infty) = -\pi/2$ e $\theta(\nu = \infty) = \pi/2$. A raiz quadrada no integrando nessa variável será $|\sin(\theta)|$ e como $|\sin(\theta)|\theta/|\theta| = \sin(\theta)$ na faixa de $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, a integral fica expressa por

$$\begin{aligned} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{1}{z^2} &= \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \frac{2}{3(1-w_q)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2(\theta), \\ &= \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \frac{2}{3(1-w_q)} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\sin(2\theta_2) - \sin(2\theta_1)}{4} \right). \end{aligned}$$

Como queremos conectar com as soluções longe do ricochete onde $e^{-\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1-w_q)}{2}} \ll 1$ nas fases após e antes do ricochete, expandimos em θ em torno de $\pm\pi/2$, respectivamente, obtendo a relação

$$\cos(\theta) \approx \frac{\pi}{2} \mp \theta = e^{-\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1-w_q)}{2}} = \left(\frac{x}{x_b} \right)^{\frac{3(1-w_q)}{2}}, \quad \theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{x_b} \right)^{\frac{3(1-w_q)}{2}} \right).$$

Impondo que $x_1 = x_2$, temos que longe do ricochete a integral dada por

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \frac{1}{z^2} \approx \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \frac{2}{3(1-w_q)} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \left(\frac{x_1}{x_b} \right)^{\frac{3(1-w_q)}{2}} \right). \quad (5.72)$$

Para aplicar o resultado acima, dividimos o fator $f_{d-}(l_{d+}) - C_{d+}$ da relação entre os coeficientes das soluções antes e após o ricochete (Eq. 5.58), na forma

$$\begin{aligned} f_{d-}(l_{d+}) - C_{d+} &= \int_{l_{d-}}^{l_1} \frac{dl}{z^2} + \int_{l_2}^{l_{d+}} \frac{dl}{z^2} + \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{z^2} + C_{d-} - C_{d+}, \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \frac{2}{3(1-w_q)}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde usamos a solução aproximada Eq. (5.61), trocando $a_b \rightarrow a_1$ e mantendo as escolhas de C_{d-} e C_{d+} . Esse resultado mostra que nossa aproximação (Eq. 5.62) prevê um resultado próximo ao obtido com um modelo de ricochete, onde a diferença é que nesse último encontramos um fator de $\pi/2$, enquanto na aproximação tínhamos um fator de 2, *i.e.*, o erro na aproximação é de $|(2 - \pi/2)/(\pi/2)| \approx 0.27$. Portanto, a menos dessa diferença na amplitude, temos a mesma ordem dos mesmos resultados da seção anterior para a perturbação ζ_{1q} . Quando avaliamos essa solução próximo ao ricochete, temos $\nu \ll 1$ e portanto

$$\theta \approx \nu \sqrt{\frac{3(1-w_q)}{2}}.$$

Para avaliar a perturbação ζ próximo ao ricochete, precisamos calcular a integral

$$f_{d^-}(l) = \int_{l_{d^-}}^{l_1} \frac{dl}{z^2} + \int_{l_1}^l \frac{dl_2}{z^2} + C_{d^-} = \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \left(\frac{\nu^3}{3} \sqrt{\frac{3(1-w_q)}{2}} + \frac{\pi}{4} \frac{2}{3(1-w_q)} \right), \quad (5.74)$$

onde ν representa um instante próximo ao ricochete e usamos as mesmas aproximações acima. Portanto, próximo ao ricochete, a variável ζ é dada por

$$\zeta_{1q} = B_1^- \frac{x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}}{\hbar z_d^2 \sqrt{\Omega_{q0}}} \left(\frac{\nu^3}{3} \sqrt{\frac{3(1-w_q)}{2}} + \frac{\pi}{4} \frac{2}{3(1-w_q)} \right) + B_2^-. \quad (5.75)$$

Ou seja, nessa fase essa perturbação tem o seu modo constante com metade da amplitude que atinge longe do ricochete. Além disso ressaltamos que o outro termo não constante vai a zero no ricochete e, portanto, não há singularidade nessa variável.

Para efetuar a integral $I_1 [1]$, expressamo-la em termos da variável ν

$$F_r^2 I_1 [1] = \frac{\hbar a_0^3 (1+w_q)}{3l_p^2 R_H \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}} \int d\nu |\nu| e^{\frac{\nu^2}{2} \frac{5+3w_q}{2}} \left(1 - e^{-3(1-w_q) \frac{\nu^2}{2}} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

A integral acima tem uma primitiva dada em termos da seguinte função Hipergeométrica

$$F_r^2 I_1 [1] = \frac{\hbar a_0^3 (1+w_q)}{3l_p^2 R_H \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}} \frac{2e^{\frac{\nu^2}{2} \frac{(5+3w_q)}{2}} {}_2F_1 \left(1, -\frac{4}{3(1-w_q)}; \frac{1-9w_q}{6(1-w_q)}; e^{-\frac{\nu^2}{2} 3(1-w_q)} \right)}{\nu(5+3w_q) \sqrt{\frac{1-e^{-\frac{\nu^2}{2} 3(1-w_q)}}{\nu^2}}}. \quad (5.76)$$

Essa primitiva é singular em $\nu = 0$. Isso acontece porque o termo $\mathcal{L}_I z^2/z^2$ da equação de movimento de ζ_{1q} é singular em $\nu = 0$. Porém, como $\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{L}_I z^2/z^2 \propto \nu^{-1}$, esse ponto é regular e portanto existem duas soluções linearmente independentes em torno desse ponto, de forma que a evolução através do ricochete é bem definida. O potencial invariante de calibre Ψ_{1q} relacionado com \mathcal{P} via Eq. (5.55) é expresso por

$$\begin{aligned} \Psi_{1q} = & -B_1^+ \frac{\nu}{|\nu|} \frac{3l_p^2 R_H \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}}{2\hbar a_0^3 \tilde{q}_a^2} \sqrt{1 - e^{-\frac{\nu^2}{2} 3(1-w_q)}} \\ & + B_2^+ \frac{(1+w_q)}{5+3w_q} {}_2F_1 \left(1, -\frac{4}{3(1-w_q)}; \frac{1-9w_q}{6(1-w_q)}; e^{-\frac{\nu^2}{2} 3(1-w_q)} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Note que a expressão acima é finita para qualquer ν . O termo com B_1 vai a zero no ricochete e decai quando nos afastamos, enquanto o termo B_2^+ é constante. Longe do ricochete temos,

$$\Psi_{1q} = -B_1^+ \frac{\nu}{|\nu|} \frac{3l_p^2 R_H \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}}{2\hbar a_0^3 \tilde{q}_a^2} + B_2^+ \frac{(1+w_q)}{5+3w_q}.$$

O primeiro termo, mesmo sendo decrescente, quando próximo ao ricochete tem sua amplitude da ordem de $B_1^+ x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}$, enquanto a mistura dos modos faz com que B_2^+ tenha

uma parte proporcional a $B_1^+ x_b^{\frac{3(1-w_q)}{2}}$, como vemos na Eq. (5.73). Como vimos no fim da Seção 5.2.1, a variável Ψ_{1q} possui uma componente crescente e decrescente, respectivamente, nas fases de contração e expansão. Essa componente se torna muito maior que um próxima ao ricochete. Isso implica que alguns calibres, como o Newtoniano (Seção 3.6.1), sejam proibidos enquanto o modo decrescente for maior que um. Por fim, próximo ao ricochete temos ($\nu \ll 1$) e, portanto,

$$\Psi_{1q} = -B_1^+ \nu \frac{3l_p^2 R_H \sqrt{\Omega_{q0}} x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}}{2\hbar a_0^3 \tilde{q}_a^2} \sqrt{\frac{3(1-w_q)}{2}} - B_2^+ \frac{(1+w_q)}{3(1-w_q)}, \quad (5.78)$$

onde mantivemos somente o primeiro termo em ν para cada coeficiente de B_1^+ e B_2^+ .

5.4.3 Série Perturbativa

Vimos nas Seções 3.8 e 5.2.1 que as perturbações presentes em um universo em contração, são amplificadas quando se aproximam do ricochete. Quando isso acontece alguns calibres não são mais apropriados, já que as condições necessárias para fixá-los se tornam mal definidas (veja Eq. 5.29). Para contornar esse problema mostramos que o calibre de curvatura constante mantém todas as perturbações pequenas mesmo nos instantes onde o calibre Newtoniano não é bem definido. Contudo, como vemos na Eq. (4.101), no calibre de curvatura constante ζ tem uma relação simples com a perturbação ϕ , porém proporcional a Θ^{-2} e, portanto, não é bem definido nos instantes próximos ao ricochete. Em outras palavras, o calibre de curvatura constante é apropriado para as fases de contração e expansão clássicas, mas para analisarmos o instante do ricochete, precisamos de outro calibre.

Para esse período, podemos usar o calibre síncrono descrito na Seção 3.6.2. Nesse calibre a perturbação ψ é dada pela Eq. (4.101), *i.e.*,

$$\begin{aligned} \psi_{1q} &= \Theta \int d(ct) \frac{\kappa \varepsilon \vartheta}{2\Theta^2} \zeta, \\ &= \frac{(1+w_q) e^{-\frac{3(1+w_q)}{2} \frac{\nu^2}{2}}}{2} \nu \sqrt{\frac{1 - e^{-3(1-w_q) \frac{\nu^2}{2}}}{\nu^2}} \int d\nu \frac{e^{\frac{3(1+w_q)}{2} \frac{\nu^2}{2}}}{\nu^2 \left(\frac{1 - e^{-3(1-w_q) \frac{\nu^2}{2}}}{\nu^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \zeta_{1q}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Próximo ao ricochete o integrando acima é proporcional a $\nu^{-2} \zeta_{1q}$ e, como vemos na Eq. (5.75), ζ_{1q} tem um termo constante e outro proporcional a ν^3 . Dessa forma a integral de cada termo é proporcional a ν^{-1} e ν^3 , respectivamente. Nesse período o coeficiente da integral é proporcional a ν e assim ψ_{1q} no instante do ricochete será

$$\psi_{1q}(\nu = 0) \approx -\frac{(1+w_q)}{9(1-w_q)} \zeta_{1q}(\nu = 0), \quad (5.80)$$

onde aproximamos o integrando em primeira ordem em ν . Note que o valor da perturbação nesse ponto não depende da constante arbitrária da integral já que essa é multiplicada por ν . Por fim, nesse calibre a perturbação \mathcal{E} é dada pela Eq. (3.112) e nessa

fase é expressa por

$$\mathcal{E}_{1q} = -\frac{e^{\nu^2} R_H^2}{\Omega_{q0} x_b^{3(1+w_q)}} \int d\nu \frac{e^{-\frac{\nu^2}{2} \frac{1-3w}{2}}}{\sqrt{1-e^{-3(1-w_q)\frac{\nu^2}{2}}}} \int d\nu \frac{e^{\frac{\nu^2}{2} \frac{3(1+w)}{2}}}{\sqrt{1-e^{-3(1-w_q)\frac{\nu^2}{2}}}} \Psi_{1q}. \quad (5.81)$$

Diferente de Ψ_{1q} , \mathcal{E}_{1q} terá uma amplitude pequena, pois o fator $x_b^{-3(1+w_q)}$ que multiplica as integrais é muito menor que o que amplifica Ψ_{1q} , *i.e.*, $x_b^{\frac{5+3w_q}{2}}$. A aproximação em primeira ordem em ν dos integrandos acima próximos ao ricochete é constante e, portanto, as integrais nesse intervalo são finitas. Com isso, temos que todas as perturbações não nulas no calibre síncrono são no máximo da mesma ordem que ζ_{1q} , ou seja, isso mostra que a série perturbativa é bem definida durante o ricochete.

5.5 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Nas seções anteriores, fizemos uma série de análises onde nos restringimos a um fluido com curvatura espacial, ou aproximações válidas nos regimes não oscilatórios. Como vimos na Seção 5.2.1, o espectro é uma simples lei de potência em \tilde{k}_a , quando os modos congelam na fase onde somente um fluido domina. Portanto, para obter as soluções onde modos se tornam não oscilatórios em uma fase de transição de dois fluidos, temos que fazer uma investigação numérica da Eq. (5.4).

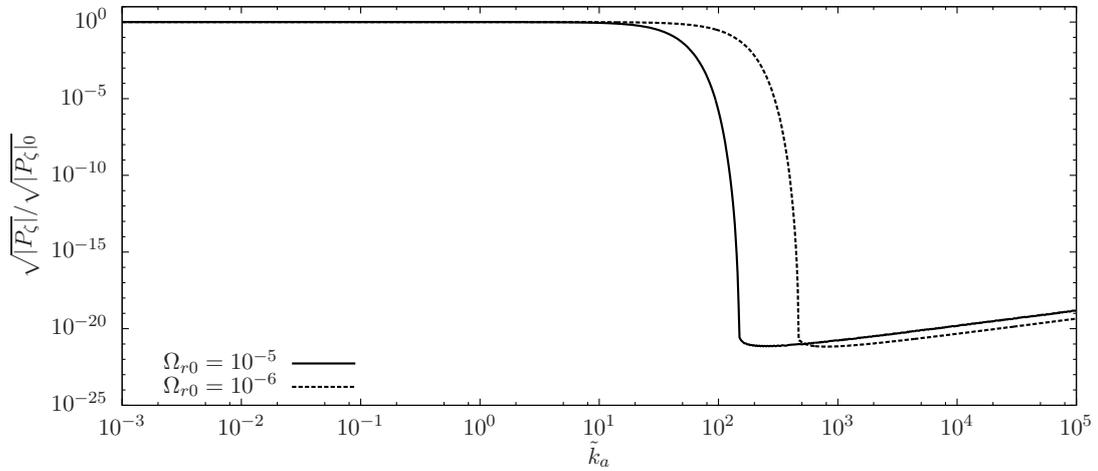


Figura 5.1 – Espectro de potências P_ζ normalizado por $P_{\zeta 0} \equiv P_\zeta(\tilde{k}_a = 10^{-3})$. O espectro começa invariante de escala e, quando as soluções congelam, *i.e.*, param de oscilar, na transição entre fluidos o índice espectral muda para $n_s = 3$. Nesse cálculo, usamos dois valores distintos para a densidade de radiação $\Omega_{r0} = 10^{-5}$ e $\Omega_{r0} = 10^{-6}$, e os parâmetros $\Omega_{m0} = 0.25$, $c_s = \sqrt{w} = 10^{-9}$, e $x_b = 10^{30}$.

Mesmo com muitos fluidos, quando fazemos o limite para o universo no início da fase de contração, temos que somente o fluido com menor equação de estado dominará, de forma que sempre podemos impor as condições iniciais de vácuo obtidas na Seção 5.2.1. Isso implica em restringir o fluido que domina inicialmente como sendo barotrópico.

Para a evolução numérica, usaremos o tempo definido na Eq. (4.48), que como argumentamos na Seção 5.4.2, podemos usar durante toda a evolução, *i.e.*, da fase de contração a expansão. Como estamos interessados em observar o efeito dos modos que se congelam na transição entre fluidos, nos restringiremos ao caso plano. Além disso, como o modelo de ricochete via trajetórias de Bohm, a princípio, não inclui criação nem destruição de matéria, utilizamos um modelo com um fluido de poeira com $w = 10^{-18}$ e $\Omega_m = 0.25$ e radiação com $w = 1/3$ e $\Omega_r = 10^{-5}$. Nesse caso, a função de Hubble normalizada é expressa por

$$E_q^2 = \Omega_{r0} x^4 \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) + \Omega_{m0} x^{3(1+w)} \left(1 - \frac{x^{3(1-w)}}{x_b^{3(1-w)}}\right), \quad (5.82)$$

a velocidade do som por

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 3wR}{1 + R}\right), \quad R \equiv \frac{3(1+w)\Omega_{m0}}{4\Omega_{r0}x^{1-3w}}, \quad (5.83)$$

e o último ingrediente necessário para calcular z^2 (Eq. 5.7) é dado por

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 4\Omega_{r0}x(1+R). \quad (5.84)$$

Avaliando independentemente o espectro gerado por cada fluido, teríamos um índice espectral $n_s = 1 + 12w/(1 + 3w)$, com poeira tendo $n_s \approx 1$ e radiação $n_s = 3$. Portanto esperamos que a evolução numérica do sistema com esses dois fluidos resulte em uma combinação desses dois espectros. Observando a Figura 5.1, vemos que, de fato, temos o comportamento esperado para cada fluido para certos valores de \tilde{k}_a e na interface o efeito, além da transição de $n_s \approx 1$ para $n_s = 3$, de perda de amplitude. Isto pode ser explicado pela Eq. (5.68). Nessa equação, temos que parte da amplitude dos modos gerados na fase de poeira vem do pequeno valor de w . Como o mesmo efeito não ocorre para os modos que congelam na fase da radiação, temos uma perda de potência na transição.

Vale ressaltar que o ganho de potência dos modos formados na fase de poeira pode ser entendido observando a Eq. (5.18): nela vemos que os modos aparecem na forma $\beta\sqrt{w}\tilde{k}_a$ no argumento da função de Hankel. Como a função de Hankel $H_\nu^{(1)}(mt)$ termina a fase oscilatória quando $mt = \sqrt{\nu^2 - 1/4}$ [106], temos, que no caso de um fluido, $\beta\sqrt{w}\tilde{k}_a\lambda = \sqrt{\beta(\beta - 1)}$. Ou seja, quanto menor for w , maior será o valor de λ para que o modo congele. Como $\lambda \propto x^{-1/\beta}$ (Eq. 5.10), então mais no passado o modo congela, e como depois de congelar os modos crescem com uma lei de potência, quanto mais cedo ele congela mais ele cresce.

Na Figura 5.1 plotamos também a mesma análise com um valor de $\Omega_{r0} = 10^{-6}$, como esse valor altera o instante de transição entre a fase da poeira e da radiação, o valor de \tilde{k}_a onde há a transição entre os espectros também muda.

Plotamos a evolução temporal dos espectros de potências de ζ e Ψ na Figura 5.2. Como previsto, a perturbação ζ depois que congela cresce ao se aproximar do ricochete e após ele se torna constante. Da mesma forma vemos que Ψ tem um modo crescente

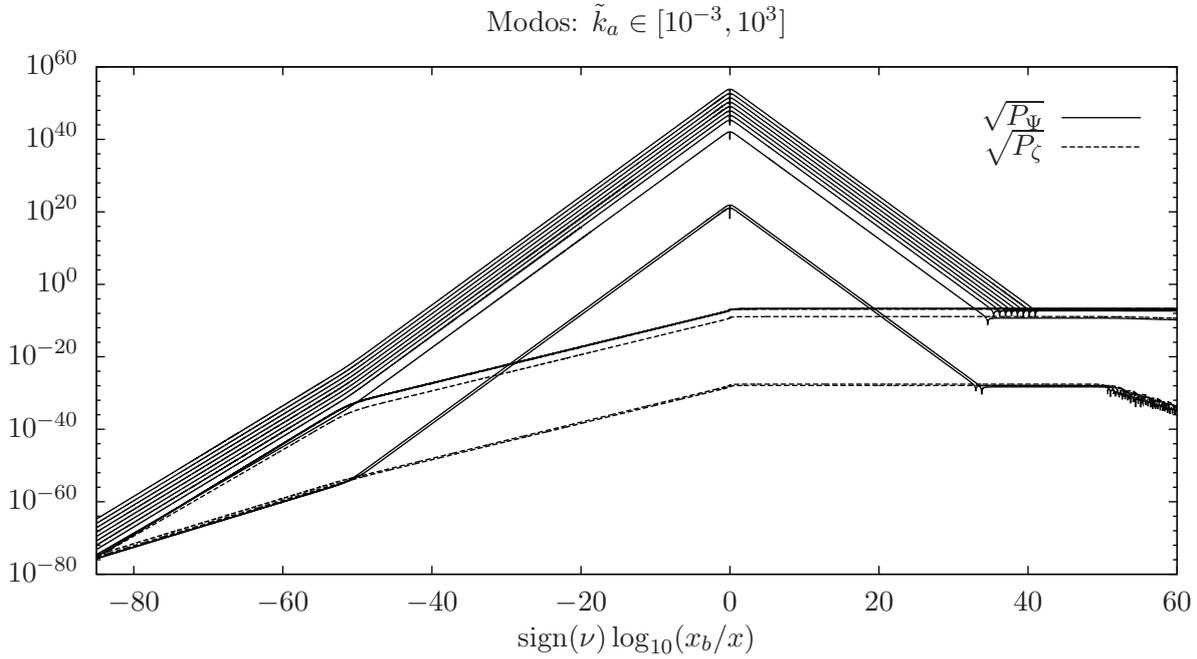


Figura 5.2 – Evolução de $\sqrt{P_\Psi}$ e $\sqrt{P_\zeta}$ para modos $\tilde{k}_a \in [10^{-3}, 10^3]$. Os modos que congelam ainda na dominação da poeira têm um espectro quase invariante de calibre ($n_s \gtrsim 1$). Para \tilde{k}_a a partir de um certo valor, os modos têm um espectro com $n_s = 3$ e portanto há um maior espaçamento entre as linhas. Nesse cálculo utilizamos os seguintes valores para os parâmetros: $\Omega_{m0} = 0.25$, $\Omega_{r0} = 10^{-5}$, $c_s = \sqrt{w} = 10^{-9}$, e $x_b = 10^{30}$.

maior que ζ , mas que após o ricochete se converte em um modo decrescente. Note que durante toda fase onde $P_\Psi > 1$, o calibre Newtoniano é proibido, no sentido discutido na Seção 5.2.1. Por fim, vemos que modos \tilde{k}_a que congelam dentro da fase de radiação têm um espectro com $n_s = 3$. Essa forte dependência pode ser notada observando a distância entre as linhas de cada modo na Figura 5.2.⁴

⁴Comparada com o espectro quase invariante de escala $n_s \approx 0$ cuja dependência em \tilde{k}_a vem de uma lei de potências com expoente próximo de zero.

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, desenvolvemos o estudo das perturbações em modelos com ricochete. Para tanto, o primeiro aspecto relevante que tratamos foi como determinar de forma objetiva a validade da série perturbativa. Isso é importante, pois fazemos a hipótese inicial de que o universo, quando muito grande e rarefeito, é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Portanto, para sabermos se essas simetrias são mantidas durante a fase de contração, foi necessário determinar até que ponto as perturbações podem crescer antes de violar a hipótese perturbativa. Na Seção 3.8, mostramos quais são essas condições e também que existem calibres que não são apropriados quando tratamos de perturbações em um universo em contração que atinge uma escala muito pequena ($x_b \approx 10^{30}$) antes do ricochete. Além disso, encontramos um calibre onde, mesmo as variáveis invariantes de calibre Ψ e Φ se tornando muito maiores que um, temos que as perturbações satisfazem todos os requisitos necessários para serem tratadas perturbativamente.

No Capítulo 4, estendemos os resultados da literatura, que são restritos a fluidos barotrópicos, encontrando a Lagrangiana e Hamiltoniana para modelos de FLRW com um fluido perfeito termodinâmico geral como fonte. A mesma extensão é feita para as perturbações. Contudo, nesse caso fizemos ainda a redução dos vínculos para quantizarmos a teoria sem precisar impor a dinâmica clássica para a evolução de fundo. Com a álgebra de Poisson para o conjunto completo das perturbações, indicamos também os passos necessários para a quantização do sistema completo, assim como as dificuldades a serem superadas para esse propósito.

Por fim, no Capítulo 5, fizemos uma análise completa de um modelo com ricochete que provê um espectro para as perturbações na fase de expansão, que a princípio pode ser compatível com as observações. Mostramos na Seção 5.2.1 que a presença de curvatura na fase de contração pode afetar os modos de grandes comprimentos de onda ($\tilde{k}_a < \Omega_{k0}$) gerando um espectro que é quase invariante de escala no intervalo $\tilde{k}_a \gg \Omega_{k0}$. Tratamos também da solução aproximada para as perturbações na fase onde essas se encontram congeladas, assim como determinamos quais são as condições necessárias para a aplicação dessa aproximação. Com o exemplo específico do caso de contração com somente um fluido (Seção 5.2.1), mostramos que existem instantes na evolução das perturbações nos quais as condições de fixação de certos calibres envolveriam um difeomorfismo gerado por um campo vetorial ξ^μ que viola a hipótese perturbativa, tornando assim esses calibres proibidos, explicitando os resultados da Seção 3.8.

Para atravessar o ricochete, mostramos na Seção 5.4.1 de forma geral que, se as soluções de fundo forem contínuas durante essa transição, podemos estimar o espectro das perturbações na fase de expansão. Para complementar esse resultado na Seção 5.4.2, mostramos que quando usamos o modelo de fundo quantizado e utilizamos a trajetória de Bohm para determinar o fator de escala, recuperamos um resultado compatível com

o aproximado. Mostramos também, na Seção 5.4.3, que no calibre síncrono todas as perturbações passam pelo ricochete finitas e pequenas. Encontramos que a amplitude obtida para esses espectros, considerando somente a análise dimensional, é proporcional a $l_p/R_H \approx 10^{-60}$. Obtemos também que, para que o espectro tenha uma amplitude próxima ao esperado, precisamos de uma equação de estado muito pequena $c_s = \sqrt{w} \approx 10^{-9}$ para o fluido dominante na formação do espectro. Isso também é compatível com a forma do espectro, que deve ser próxima ao invariante de escala, onde o índice espectral é dado por $n_s = 1 + 12w/(1 + 3w)$.

Por fim, confirmamos os resultados analíticos e calculamos numericamente o caso onde as perturbações congelam na transição entre dois fluidos. O efeito desse resultado no espectro é o de uma transição suave entre os espectros obtidos separadamente considerando somente um fluido de cada vez.

Adicionalmente, no Apêndice C fizemos o cálculo das perturbações em torno de um modelo de fundo arbitrário. E no Apêndice D desenvolvemos o princípio variacional também para as perturbações em torno de um modelo de fundo arbitrário para um tensor energia–momento geral, além do caso onde o modelo de fundo é FLRW e o fluido é perfeito e termodinâmico.

O próximo passo a ser desenvolvido é o da análise estatística desses modelos utilizando dados observacionais. Para tanto, além da infraestrutura já implementada na CosmoLib descrita na Seção 2.5.1, precisamos adaptá-la para os modelos com ricochete. Como vimos na Figura 5.2, durante um longo intervalo da evolução das perturbações na fase de expansão, os calibres com $\delta\sigma^{(s)} = 0$ são proibidos, e os códigos atuais são obtidos considerando o modo decrescente desprezível desde o início da evolução. Portanto é necessário estudar o efeito de um modo decrescente grande e da impossibilidade de usar alguns calibres na evolução das perturbações. Adicionalmente os programas CMBFast, CAMB e CMBEasy dependem de aproximações baseadas na forma do espectro de potências como lei de potência e, como vimos, no nosso caso a forma de lei de potência se aplica somente a intervalos de valores dos modos.

Outro passo importante a ser feito é determinar as não gaussianidades geradas nesses modelos. Para tanto, é necessária a extensão da análise perturbativa em pelo menos terceira ordem a fim de determinar a amplitude das funções de três pontos. Com isso, será possível fazer os mesmos testes feitos nos modelos inflacionários nos modelos de ricochete.

APÊNDICE A

GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste apêndice apresentamos uma série de definições e resultados referentes à geometria diferencial que utilizados na tese, assim como, as convenções adotadas. Para definições precisas de todos os objetos, veja a referência [36] e, no que refere-se aos objetos associados a grupos de Lie e isometrias, veja também [73, 107]. Detalhes sobre modelos cosmológicos espacialmente homogêneos podem ser encontrados na referência [108]. Na Seção A.1 apresentamos as definições gerais dos objetos geométricos utilizados e, na Seção A.2, mostramos alguns resultados sobre o seccionamento da variedade em hipersuperfícies espaciais tridimensionais (separação $3 + 1$), assim como relações entre as curvaturas nas seções espaciais e a curvatura na variedade. Por fim, na Seção A.3 discutimos isometrias e sua utilização no seccionamento de variedades.

A.1 DEFINIÇÕES GERAIS

O espaço-tempo é descrito por uma variedade M onde, em cada ponto p , define-se o conjunto de todos os vetores tangentes a esse ponto como um espaço vetorial V_p . A união de todos os espaços vetoriais V_p definidos em cada ponto p da variedade M é chamado fibrado tangente TM . Analogamente, para cada espaço V_p , define-se o espaço de todos os funcionais lineares em V_p como V_p^* , de forma que sua união fornece o espaço cotangente T^*M . O produto tensorial arbitrário desses espaços forma o espaço dos tensores em M o qual denotamos como (n, m) , onde n é o número de espaços tangentes e m de espaços cotangentes presentes no produto. Chamamos de índices contravariantes os que referem-se aos vetores e covariantes os referidos aos covetores. Na variedade M definimos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de assinatura $(-1, 1, 1, 1)$, formando assim uma variedade de Lorentz ou pseudo-riemanniana.

Partindo de um sistema de coordenadas em um subconjunto aberto da variedade, $x^\mu : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos $\vec{u} \equiv u^\mu \partial_\mu$ o vetor cujas componentes na base $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ são dadas por u^μ , e $\mathbf{w} \equiv w_\mu dx^\mu$ a um-forma com componentes w_μ na base dx^μ . Os vetores possuem um produto natural associado chamado comutador, *i.e.*,

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu) \partial_\nu \equiv [\vec{u}, \vec{v}]^\nu \partial_\nu, \quad (\text{A.1})$$

do tipo $[\cdot, \cdot] : TM \times TM \rightarrow TM$. Utilizaremos também o símbolo $[A, B] = AB - BA$ para quaisquer operadores diferenciais A e B , note porém que no caso geral o comutador não forma necessariamente uma álgebra.

Dado um grupo de difeomorfismos com um parâmetro $\phi_\lambda : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, temos que, para cada valor fixo do parâmetro λ , ϕ_λ é um difeomorfismo, $\phi_{\lambda_1} \circ \phi_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1 + \lambda_2}$, e ϕ_0 é a operação identidade. Partindo de um ponto fixo $p \in M$, temos que $\phi_\lambda(p)$ define uma curva na variedade M e, portanto, podemos utilizar esse grupo de difeomorfismos para

definir um campo vetorial v^μ que coincide com a tangente das curvas definidas por ϕ_λ em cada ponto. A partir desse difeomorfismo, definimos a operação *empurrar* um vetor, ou seja, dado um vetor $v^\mu|_p$ em um ponto $p \in M$ arbitrário, obtemos um vetor $\phi_\lambda^* v^\mu|_{\phi_\lambda(p)}$ no ponto $\phi_\lambda(p)$.

Dessa forma, definimos a derivada de Lie de um campo vetorial u^μ por um grupo de difeomorfismos, com o campo v^μ associado, como sendo a diferença do campo calculado em $\phi_\lambda(p)$ e empurrado de volta ao ponto p menos o campo calculado no ponto p , *i.e.*,

$$\mathcal{L}_v u^\mu \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi_{-\lambda}^* (u^\mu|_{\phi_\lambda(p)}) - u^\mu|_p}{\lambda} = [\vec{v}, \vec{u}]^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Estendendo essa definição para os campos duais, temos que a deriva de Lie pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_v w_\mu = v^\nu \partial_\nu w_\mu + w_\nu \partial_\mu v^\nu. \quad (\text{A.3})$$

Vale ressaltar que essas definições são independentes do operador de derivada utilizado. Existe ainda outra propriedade útil das derivadas de Lie quando atuando em campos (co)vetoriais ou funções, a saber,

$$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] = \mathcal{L}_{[v, u]}. \quad (\text{A.4})$$

Como o tensor métrico é não degenerado, ele fornece um mapa natural entre o espaço tangente e cotangente de forma que, dado um vetor u^μ , definimos um covetor $u_\nu \equiv u^\mu g_{\mu\nu}$ com o mesmo símbolo u . Dessa forma utilizamos a métrica $g_{\mu\nu}$ e sua inversa $g^{\mu\nu}$ para “subir” e “descer” índices no sentido da definição acima. Na nossa convenção de assinatura da métrica, dizemos que vetor tipo tempo é aquele cuja norma satisfaz $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} < 0$, tipo espaço $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} > 0$ e tipo luz (ou nulo) $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = 0$. Dado um campo tensorial arbitrário $T_{\mu\nu}$, definimos o símbolo de simetria

$$T_{(\mu\nu)} \equiv \frac{T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}}{2},$$

e anti-simetria

$$T_{[\mu\nu]} \equiv \frac{T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}}{2},$$

com a extensão natural para tensores de mais alta ordem, onde o fator numérico é dado pelo número de permutações dos índices, *i.e.*, para uma (anti-)simetria de n índices o fator será $1/n!$.

Dada uma métrica, existe somente uma derivada covariante compatível,¹ *i.e.*, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, que chamaremos de conexão métrica (ou de Levi-Civita). Com isso, definimos também a derivada direcional $\nabla_v = v^\mu \nabla_\mu$ e o tensor de Riemann

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] v_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu v_\nu. \quad (\text{A.5})$$

As suas contrações,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha, \quad R = R_\mu{}^\mu, \quad (\text{A.6})$$

¹Estamos utilizando sempre conexões com torção nula. Veja [36], por exemplo, para mais detalhes.

são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente. O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R. \quad (\text{A.7})$$

O tensor curvatura dado na Eq. (A.5) tem as seguintes propriedades,

$$R_{(\alpha\beta)\mu}{}^\nu = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$R_{[\alpha\beta\mu]}{}^\nu = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$R_{\alpha\beta(\mu\nu)} = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla_{[\gamma}R_{\alpha\beta]\mu}{}^\nu = 0, \quad (\text{A.11})$$

onde a propriedade (A.8) vem da definição de tensor curvatura, a propriedade (A.9) vale para conexões sem torção, a propriedade (A.10) para conexões métricas, e a propriedade (A.11), chamada identidade de Bianchi, depende das propriedades (A.8–A.10). A última identidade pode ser escrita na forma

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.12})$$

onde foram contraídos dois pares de índices. Definimos o tensor de Weyl como

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - (g_{\mu[\alpha}R_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha}R_{\beta]\mu}) + \frac{1}{3}(Rg_{\mu[\alpha}g_{\beta]\nu}), \quad (\text{A.13})$$

que tem a característica de ser invariante sob transformações conformes e representa a parte sem traço do tensor de Riemann, já que seu traço em relação a qualquer par de índices é zero.

A.2 SEÇÕES ESPACIAIS

Suponha que escolhemos uma certa seção espacial $\Sigma_0 \in M$, *i.e.*, uma hipersuperfície espacial Σ_0 onde todos os vetores tangentes às curvas contidas nela são tipo espaço em M .² Portanto, uma vez escolhido Σ_0 , temos que existe um campo vetorial n^μ que é ortogonal a qualquer vetor definido em Σ_0 e com norma $n_\mu n^\mu = -1$. Esse é chamado vetor normal à hipersuperfície Σ_0 . Definimos um conjunto de seções espaciais Σ_t disjuntas ($\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset$ para $t_1 \neq t_2$) tal que a união de todas as seções forma a variedade, *i.e.*, $\cup_t \Sigma_t = M$. Utilizando esse conjunto de seções espaciais, temos que o vetor normal n^μ é definido em toda a variedade M .

A partir da métrica definida em M , podemos definir uma métrica

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (\text{A.14})$$

nas seções espaciais Σ_t . O tensor $h_{\mu\nu}$ é um tensor métrico positivo em Σ_t . Quando aplicado a um campo vetorial de M , o tensor $h_{\mu\nu}$ age como um projetor (portanto, ele é idempotente) já que, para um $v^\mu \in TM$, temos que o campo vetorial $\tilde{v}^\mu = h^\mu{}_\nu v^\nu$ é um

²Estamos supondo que a variedade M é globalmente hiperbólica. Para mais detalhes e definições, veja [36].

vetor tangente de uma hipersuperfície espacial Σ_t dado que $\tilde{v}^\mu n_\mu = 0$. De forma geral, definimos a aplicação do projetor $\mathbf{h}[\cdot]$ em um tensor arbitrário $T(n, m)$ como

$$\mathbf{h}[T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}] = \mathbf{h}^{\mu_1}_{\alpha_1} \mathbf{h}^{\mu_2}_{\alpha_2} \dots \mathbf{h}^{\mu_n}_{\alpha_n} \mathbf{h}^{\beta_1}_{\nu_1} \mathbf{h}^{\beta_2}_{\nu_2} \dots \mathbf{h}^{\beta_m}_{\nu_m} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}, \quad (\text{A.15})$$

onde $\mathbf{h}[\cdot]$ é também linear e associativo, definimos também a contração de um tensor arbitrário com a direção normal n^μ como

$$T_n \equiv T_\mu n^\mu, \quad T^n \equiv T^\nu n_\nu. \quad (\text{A.16})$$

Podemos agora definir uma derivada covariante nas hipersuperfícies espaciais Σ_t , a saber,

$$D_\alpha T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = \mathbf{h}[\nabla_\alpha T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}]. \quad (\text{A.17})$$

Utilizando a definição acima, obtemos que $D_\alpha \mathbf{h}_{\mu\nu} = 0$ e que o operador D satisfaz a regra de Leibniz quando aplicado a campos vetoriais de Σ_t e, portanto, ele é o único operador diferencial compatível com $\mathbf{h}_{\mu\nu}$. Essa derivada covariante também define um tensor de Riemann que corresponderá à curvatura das hipersuperfícies espaciais Σ_t , as quais denotaremos com a letra \mathcal{R} , *i.e.*,

$$[D_\mu, D_\nu]v_\alpha = \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta v_\beta. \quad (\text{A.18})$$

Ao invés de escolher arbitrariamente as seções espaciais, podemos escolher uma primeira seção arbitrária Σ_{t_0} com um campo normal n^μ definido somente nessa hipersuperfície. Então, em cada ponto $p \in \Sigma_{t_0}$, definimos uma geodésica $\gamma(p; t)$ tal que $\gamma(p; t_0) = p$ e cujo vetor tangente $\xi^\mu(t_0)|_p = n^\mu|_p$. Dessa forma temos que³ $\gamma(\Sigma_{t_0}, t_0) = \Sigma_{t_0}$ e, assim, definimos as demais hipersuperfícies como $\Sigma_t \equiv \gamma(\Sigma_{t_0}, t)$. Como o vetor ξ^μ satisfaz a equação da geodésica, temos que seu módulo é constante ao longo da mesma, *i.e.*, $\nabla_\xi(\xi^\mu \xi_\mu) = 0$. Por construção $\xi_\mu \xi^\mu|_{t_0} = n_\mu n^\mu = -1$ e, portanto, $\xi_\mu \xi^\mu = -1$ para qualquer valor de t . Utilizando coordenadas gaussianas normais, *i.e.*, as coordenadas de cada ponto $\gamma(p; t)$ ao longo de cada geodésica serão dadas pelas coordenadas espaciais de p em Σ_{t_0} mais a coordenada temporal t , e sendo X^μ um vetor coordenado associado com qualquer uma das coordenadas espaciais, temos que

$$\nabla_\xi(\xi^\mu X_\mu) = \xi^\mu \nabla_\xi X_\mu = \xi^\mu \nabla_X \xi_\mu = \frac{1}{2} \nabla_X (\xi^\nu \xi_\nu) = 0, \quad (\text{A.19})$$

onde a segunda igualdade vem do fato de que vetores coordenados comutam⁴ ($\nabla_\xi X^\mu - \nabla_X \xi^\mu = 0$). Com isso, temos que os vetores tangentes geodésicos permanecem normais às hipersuperfícies Σ_t . Vale lembrar que no caso geral essas coordenadas não valem para toda variedade pois, quando as geodésicas se cruzam, essas deixam de ser bem definidas. Restringindo-nos ao caso do seccionamento geodésico, temos $\nabla_n n^\nu = 0$. Assim definimos a curvatura extrínseca como

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu. \quad (\text{A.20})$$

³Utilizamos aqui a notação de que a função $f : A \rightarrow B$, quando avaliada em um subconjunto $S \subset A$, *i.e.*, $f(S) \equiv \{f(p) | \forall p \in S\}$, significa a imagem da função f quando avaliada em S .

⁴Essa propriedade é devida à comutação das derivadas parciais quando atuando em funções com pelo menos derivadas segundas contínuas.

Usando a normalização de n^μ e a equação da geodésica, verificamos que esse tensor é espacial, *i.e.*, $\mathfrak{h}[\mathcal{K}_{\mu\nu}] = \mathcal{K}_{\mu\nu}$. Por definição n^μ é normal à hipersuperfície espacial Σ_t e portanto, pelo teorema de Frobenius, temos que $\mathcal{K}_{[\mu\nu]} = v_{[\mu}n_{\nu]}$ para uma certa um-forma v_μ . Porém, como n^μ é geodésico e de norma menos um, temos que $n^\mu \nabla_{[\mu} n_{\nu]} = 0$. Isso mostra que $n^\mu v_\mu n_\nu + v_\nu = 0$ e portanto

$$\mathcal{K}_{[\mu\nu]} = v_{[\mu}n_{\nu]} = -n^\alpha v_\alpha n_{[\mu}n_{\nu]} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Esse resultado pode ser escrito como $\nabla_{[\mu} n_{\nu]} = 0$, ou seja, a derivada exterior da um-forma é zero $dn = 0$. Logo, pelo Lema de Poincaré, sabemos que pelo menos localmente (em um subconjunto aberto de M) existe uma função α tal que $n_\mu = \nabla_\mu \alpha$ (para definição de derivada exterior e referências sobre o Lema de Poincaré ver por exemplo [36]).

Calculando a derivada de Lie da métrica induzida $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned} \partial_{ct} \mathfrak{h}_{\mu\nu} &\equiv \mathcal{L}_n \mathfrak{h}_{\mu\nu} = \nabla_n \mathfrak{h}_{\mu\nu} + \mathfrak{h}_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + \mathfrak{h}_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha, \\ &= 2\mathcal{K}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde utilizamos o símbolo ∂_{ct} , *i.e.*,

$$\partial_{ct} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \equiv \dot{T}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \equiv \mathfrak{h}[\mathcal{L}_n T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}], \quad (\text{A.23})$$

para representar a derivada de Lie na direção normal projetada nas seções espaciais. Lembrando que, no sistema de coordenadas onde n^μ coincide com a coordenada temporal, a derivada de Lie nada mais é que a derivada parcial em relação a essa coordenada. Note que também definimos o símbolo $\dot{\cdot} \equiv \partial_{ct}$ para representar essa derivada quando for tipograficamente conveniente. Quando houver ambiguidade, por exemplo, quando agindo sobre uma função escalar $\nabla_n \varphi = \partial_{ct} \varphi$ utilizaremos a derivada ∂_{ct} . Por fim, da curvatura extrínseca definimos as quantidades cinemáticas, respectivamente, escalar de expansão e tensor de cisalhamento,

$$\Theta \equiv \mathcal{K}_\mu{}^\mu, \quad \sigma_{\mu\nu} = \mathcal{K}_{\mu\nu} - \frac{\mathfrak{h}_{\mu\nu} \Theta}{3}. \quad (\text{A.24})$$

A.2.1 Relações com a Geometria da Variedade

Para relacionar os tensores de curvatura da variedade M e das hipersuperfícies Σ_t com as curvaturas extrínsecas de cada uma, partimos da Eq. (A.18) e substituímos as derivadas covariantes tridimensionais por sua definição obtendo

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \mathfrak{h}[R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta] - \mathcal{K}_{\mu\alpha} \mathcal{K}_\nu{}^\beta + \mathcal{K}_{\nu\alpha} \mathcal{K}_\mu{}^\beta, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha} = \mathfrak{h}[R_{\mu\alpha}] + \mathfrak{h}[R_{\mu n\alpha}{}^n] - \mathcal{K}_{\mu\alpha} \Theta + \mathcal{K}_{\nu\alpha} \mathcal{K}_\mu{}^\nu, \quad (\text{A.26})$$

lembrando que, como definido na Eq. (A.16), $R_{\mu n\alpha}{}^n = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta n^\nu n_\beta$. Usando a definição do tensor de Riemann a partir de derivadas covariantes,

$$\mathfrak{h}[R_{\mu\nu\alpha}{}^n] = \mathfrak{h}[2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} n_\alpha] = \mathfrak{h}[2\nabla_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu]\alpha}] = 2D_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu]\alpha}, \quad (\text{A.27})$$

podemos reescrever o segundo termo do lado direito da Eq. (A.26) como,

$$\mathfrak{h}[R_{\mu\alpha}{}^n] = \mathfrak{h}[n^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu n_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu n_\alpha)] = -\mathcal{K}_\mu{}^\nu \mathcal{K}_{\nu\alpha} - \nabla_n \mathcal{K}_{\mu\alpha}, \quad (\text{A.28})$$

e, conseqüentemente, a Eq. (A.26) é reescrita como

$$\mathfrak{h}[R_{\mu\alpha}] = \mathcal{R}_{\mu\alpha} + \nabla_n \mathcal{K}_{\mu\alpha} + \mathcal{K}_{\mu\alpha} \Theta. \quad (\text{A.29})$$

Note que essa equação relaciona a projeção do tensor de Ricci com a curvatura das hipersuperfície espaciais e a curvatura extrínseca assim como sua derivada na direção normal. Para obter as outras projeções do tensor de Ricci, partimos novamente da sua definição por derivadas covariantes,

$$R_{\mu n} = \nabla_\nu \nabla_\mu n^\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu n^\nu = \nabla_\nu \mathcal{K}_\mu{}^\nu - \nabla_\mu \Theta,$$

e as reescrevemos em termos das suas projeções nas hipersuperfícies espaciais usando a relação entre as métricas ($\delta_\mu{}^\nu = \mathfrak{h}_\mu{}^\nu - n_\mu n^\nu$), ou seja,

$$R_{\mu n} = D_\nu \mathcal{K}_\mu{}^\nu - D_\mu \Theta + n_\mu \left(\mathcal{K}_{\alpha\beta} \mathcal{K}^{\beta\alpha} + \dot{\Theta} \right).$$

Com isso, as projeções do tensor de Ricci nas outras direções são

$$R_{nn} = -\mathcal{K}_{\alpha\beta} \mathcal{K}^{\beta\alpha} - \dot{\Theta}, \quad (\text{A.30})$$

$$\mathfrak{h}[R_{\mu n}] = D_\nu \mathcal{K}_\mu{}^\nu - D_\mu \Theta. \quad (\text{A.31})$$

Contraindo a Eq. (A.29), temos que o escalar de curvatura pode ser reescrito como

$$R = \mathcal{R} + 2\dot{\Theta} + \Theta^2 + \mathcal{K}_{\alpha\beta} \mathcal{K}^{\beta\alpha}. \quad (\text{A.32})$$

Para relacionar a curvatura extrínseca com o tensor de Riemann das hipersuperfícies espaciais, partimos da Eq. (A.11) contraída com n^γ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \nabla_n R_{\mu\nu\alpha\beta} + n^\gamma (\nabla_\mu R_{\nu\gamma\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\gamma\mu\alpha\beta}) &= 0, \\ \nabla_n R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\mu (R_{\nu n\alpha\beta}) + \nabla_\nu (R_{n\mu\alpha\beta}) - (\mathcal{K}_\mu{}^\gamma R_{\nu\gamma\alpha\beta} + \mathcal{K}_\nu{}^\gamma R_{\gamma\mu\alpha\beta}) &= 0. \end{aligned}$$

Para projetar a expressão acima utilizando o operador $\mathfrak{h}[\cdot]$, notamos primeiro que

$$\begin{aligned} n^\gamma R_{\nu\gamma\alpha\beta} &= [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n_\nu = 2\nabla_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta]\nu}, \\ \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\beta\nu} &= D_\alpha \mathcal{K}_{\beta\nu} - n_\alpha \nabla_n \mathcal{K}_{\beta\nu} + n_\beta \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \mathcal{K}_{\gamma\nu} + n_\nu \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \mathcal{K}_{\beta\gamma}, \\ \mathfrak{h}[\nabla_\mu \nabla_\alpha \mathcal{K}_{\beta\nu}] &= D_\mu D_\alpha \mathcal{K}_{\beta\nu} - \mathcal{K}_{\mu\alpha} \nabla_n \mathcal{K}_{\beta\nu} + \mathcal{K}_{\mu\beta} \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \mathcal{K}_{\gamma\nu} + \mathcal{K}_{\mu\nu} \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \mathcal{K}_{\beta\gamma}, \\ \mathfrak{h}[\nabla_\mu \nabla_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta]\nu}] &= D_\mu D_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta]\nu} - \mathcal{K}_{\mu[\alpha} \nabla_n \mathcal{K}_{\beta]\nu} + \mathcal{K}_{\mu[\beta} \mathcal{K}_{\alpha]}{}^\gamma \mathcal{K}_{\gamma\nu}, \end{aligned}$$

então, combinando os resultados acima, temos

$$\nabla_n \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + 2 \left(D_\mu D_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta]\nu} - D_\nu D_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta]\mu} - \mathcal{K}^\gamma{}_{[\mu} \mathcal{R}_{\nu]\gamma\alpha\beta} \right) = 0, \quad (\text{A.33})$$

e contraindo dois índices

$$\nabla_n \mathcal{R}_{\mu\alpha} + D_\mu D_\alpha \Theta - 2D_\nu D_{(\mu} \mathcal{K}_{\nu)}^\alpha + D_\nu D^\nu \mathcal{K}_{\alpha\mu} + 2\mathcal{R}_{\gamma(\alpha} \mathcal{K}_{\mu)}^\gamma = 0. \quad (\text{A.34})$$

Vale ressaltar que as duas equações acima são puramente geométricas e relacionam a evolução da curvatura nas hipersuperfícies com a curvatura extrínseca.

É útil também obter as relações inversas, ou seja, o tensor de curvatura da variedade M em função das suas projeções nas hipersuperfícies. Para tanto, o tensor de Riemann pode ser escrito da seguinte forma,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathbf{h} [R_{\mu\nu\alpha\beta}] + 2 (\mathbf{h} [R_{\mu\nu n[\alpha} n_{\beta]}] + \mathbf{h} [R_{\alpha\beta n[\mu} n_{\nu]}]) + 4n_{[\mu} \mathbf{h} [R_{\nu]nn[\alpha} n_{\beta]}], \quad (\text{A.35})$$

onde usamos as simetrias do tensor de Riemann para simplificar a projeção acima. Usando as equações (A.25), (A.27) e (A.28) temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{K}_{\mu\alpha} \mathcal{K}_{\nu\beta} - \mathcal{K}_{\mu\beta} \mathcal{K}_{\nu\alpha} - 4 (D_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu][\alpha} n_{\beta]} + D_{[\alpha} \mathcal{K}_{\beta][\mu} n_{\nu]}) \\ &\quad + 4 (\nabla_n (n_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu][\alpha} n_{\beta]}) + n_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu]}^\gamma \mathcal{K}_{\gamma[\alpha} n_{\beta]}), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

com o seguinte tensor de Ricci

$$R_{\mu\alpha} = \mathcal{R}_{\mu\alpha} + (\Theta + \nabla_n) \mathcal{K}_{\mu\alpha} + 2 (D_{(\mu} \Theta n_{\alpha)} - D_\gamma \mathcal{K}_{(\mu}^\gamma n_{\alpha)}) - n_\mu n_\alpha (\dot{\Theta} + \mathcal{K}_{\gamma\sigma} \mathcal{K}^{\gamma\sigma}), \quad (\text{A.37})$$

e o escalar de curvatura que já foi obtido na Eq. (A.32).

A.2.2 Comutador das Derivadas Espaciais e Temporais

O seccionamento da variedade M induz uma direção temporal definida por n^μ , que por sua vez tem associada a si uma derivada temporal, definida pelo operador ∂_{ct} (Eq. A.23), e também uma definição de derivada espacial dada pelo operador D_μ . Portanto será útil calcular o comutador dessas duas derivadas. Contudo, esse comutador dependerá do objeto no qual elas atuam. Quando atuando em um escalar, temos

$$D_\mu \dot{\phi} = \mathbf{h} [\nabla_\mu \dot{\phi}] = \mathcal{K}_\mu^\gamma D_\gamma \phi + \nabla_n D_\mu \phi = \partial_{ct} D_\mu \phi,$$

ou seja,

$$[D_\mu, \partial_{ct}] \phi = 0. \quad (\text{A.38})$$

No caso de covetores espaciais $\mathbf{h} [u_\mu] = u_\mu$, temos

$$\begin{aligned} D_\mu \partial_{ct} u_\nu &= D_\mu (\nabla_n u_\nu + \mathcal{K}_\nu^\gamma u_\gamma), \\ &= \mathcal{K}_\mu^\gamma D_\gamma u_\nu + \nabla_n D_\mu u_\nu + \mathbf{h} [R_{\nu\gamma\mu}{}^n] u^\gamma + D_\mu (\mathcal{K}_\nu^\gamma u_\gamma), \\ &= \partial_{ct} D_\mu u_\nu + (D_\mu \mathcal{K}_\nu^\gamma + D_\nu \mathcal{K}_\mu^\gamma - D^\gamma \mathcal{K}_{\mu\nu}) u_\gamma, \\ &= \partial_{ct} D_\mu u_\nu + S_{\mu\nu}{}^\gamma u_\gamma, \end{aligned}$$

onde definimos o tensor de curvatura

$$S_{\mu\nu}{}^\gamma \equiv D_\mu \mathcal{K}_\nu^\gamma + D_\nu \mathcal{K}_\mu^\gamma - D^\gamma \mathcal{K}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.39})$$

que satisfaz $S_{[\mu\nu]}{}^\gamma = 0$. Definimos também a contração

$$S^\gamma \equiv \mathbf{h}^{\mu\nu} S_{\mu\nu}{}^\gamma = 2D_\mu \mathcal{K}^{\mu\gamma} - D^\gamma \Theta, \quad (\text{A.40})$$

e temos que $S_{\mu\gamma}{}^\gamma = D_\mu \Theta$ e $S_{\mu[\nu\gamma]} = 2\nabla_{[\nu} \mathcal{K}_{\gamma]\mu}$. Com isso, o comutador agindo sobre covetores é dado por

$$[D_\mu, \partial_{ct}] u_\nu = S_{\mu\nu}{}^\gamma u_\gamma. \quad (\text{A.41})$$

Para campos vetoriais temos

$$[D_\mu, \partial_{ct}] u^\nu = -S_{\mu\gamma}{}^\nu u^\gamma. \quad (\text{A.42})$$

Estendendo esse cálculo é simples mostrar que

$$\begin{aligned} [D_\mu, \partial_{ct}] T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = \\ \sum_{i=1}^m S_{\mu\nu_i}{}^\gamma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{i-1} \gamma \nu_{i+1} \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} - \sum_{i=1}^l S_{\mu\gamma}{}^{\nu_i} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i-1} \gamma \mu_{i+1} \mu_l}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

onde (m, l) definem a ordem do tensor. É bom enfatizar que o comutador com a derivada espacial D^μ não é o mesmo que com a derivada D_μ . Como a derivada de Lie do projetor $\mathbf{h}^{\mu\nu}$ não é nula, é simples ver que

$$[D^\mu, \partial_{ct}] = [\mathbf{h}^{\mu\gamma} D_\gamma, \partial_{ct}] = \mathbf{h}^{\mu\gamma} [D_\gamma, \partial_{ct}] + 2\mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\gamma. \quad (\text{A.44})$$

Outra quantidade útil é o comutador das derivadas espaciais e o operador D^2 que, quando atuando em escalares, é

$$D_\mu D^2 \phi = D_\mu D_\alpha D^\alpha \phi = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma \phi + D^2 D_\mu \phi,$$

ou seja, o comutador é dado por

$$[D_\mu, D^2] \phi = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma \phi. \quad (\text{A.45})$$

O mesmo cálculo pode ser feito para um campo covetorial,

$$\begin{aligned} D_\mu D^2 u_\nu &= -\mathcal{R}^{\mu\gamma} D_\gamma u_\nu + \mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^\gamma D^\alpha u_\gamma + D_\alpha (\mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma + D^\alpha D_\mu u_\nu), \\ &= -\mathcal{R}^{\mu\gamma} D_\gamma u_\nu + 2\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^\gamma D^\alpha u_\gamma + D_\alpha \mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma + D^2 D_\mu u_\nu, \end{aligned}$$

com isso, o comutador pode ser escrito como

$$[D_\mu, D^2] u_\nu = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma u_\nu + 2\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^\gamma D^\alpha u_\gamma + D_\alpha \mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma. \quad (\text{A.46})$$

A.3 ISOMETRIAS

Dada uma variedade de Lorentz, dizemos que um difeomorfismo⁵ ϕ_λ é uma isometria quando a métrica é invariante pela operação de *empurrar*, *i.e.*, $\phi_\lambda^*(g_{\mu\nu}|_p) = g_{\mu\nu}|_{\phi_\lambda(p)}$, a métrica no sentido descrito na Seção A.1. No limite $\lambda \rightarrow 0$ essa invariância traduz-se em,

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = 0,$$

onde v^μ é o campo vetorial associado ao difeomorfismo. Podemos reescrever as equações acima como as chamadas equações de Killing,

$$g_{\alpha\nu} \nabla_\mu v^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu v^\alpha = 0, \quad (\text{A.47})$$

onde o campo v^μ que satisfaz tais equações é conhecido como campo de Killing.

Se v^μ e ξ^μ são campos de Killing, então, a combinação linear com coeficientes constantes dos dois campos é também um campo de Killing. Podemos ver também que o comutador de dois campos de Killing também é um campo de Killing, *i.e.*,

$$\mathcal{L}_{[\vec{v}, \vec{\xi}]} g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Dessa forma, como o comutador satisfaz a identidade de Jacobi

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] = 0, \quad (\text{A.49})$$

temos que o conjunto dos campos de Killing formam uma álgebra de Lie.

O conjunto de todas as isometrias é representado por um grupo de Lie agindo na variedade, ou seja, dado um grupo de Lie G , defini-se uma operação ação do grupo $\theta : G \times M \rightarrow M$ que para cada elemento de $g \in G$ o mapeamento $\theta(g, \cdot) : M \rightarrow M$ é uma isometria. Por exemplo, o grupo de Lie associado ao grupo de difeomorfismo com um parâmetro (como definido na Seção A.1) é o conjunto dos reais \mathbb{R} com a operação adição.

Um resultado importante da teoria dos grupos de Lie é que o grupo pode ser descrito pela álgebra de Lie associada,⁶ a menos de questões globais da topologia do grupo. Quando consideramos a ação do grupo em uma variedade, temos que os campos vetoriais associados à álgebra de Lie do grupo são exatamente os campos de Killing e que a álgebra dos comutadores desses campos é um homomorfismo da álgebra de Lie do grupo.

A.3.1 Espaços Homogêneos

Dado um grupo de Lie G com uma ação θ , definimos $Gp \equiv \{\theta(g, p) | \forall g \in G\}$ como a órbita do ponto p pela ação do grupo G . Quando as órbitas Gp são hipersuperfícies

⁵Nesse caso estamos interpretando os difeomorfismos no sentido ativo, *i.e.*, os difeomorfismos movem os pontos da variedade. Note a diferença em relação a interpretação passiva onde o difeomorfismo é encarado como uma mudança no sistema de coordenadas e, portanto, representa uma mudança na descrição do espaço-tempo.

⁶Existe um mapeamento sobrejetor entre os elementos do espaço tangente em torno no elemento identidade do grupo e os elementos do grupo chamado mapa exponencial.

esaciais que formam um seccionamento da variedade M , dizemos que o espaço-tempo é espacialmente homogêneo. Definimos uma curva $\gamma(t)$ tal que se $t_1 \neq t_2$ então $G\gamma(t_1) \neq G\gamma(t_2)$ e, dessa forma, temos as hipersuperfícies dadas por $\Sigma_t \equiv G\gamma(t)$. Portanto, dada uma hipersuperfície Σ_t arbitrária, temos que a ação do grupo quando restrita a essa seção é transitiva, ou seja, qualquer ponto $p \in \Sigma_t$ da seção pode ser levado a qualquer outro $q \in \Sigma_t$ da mesma seção via ação do grupo G ($\exists g \in G$ tal que $\theta(g, p) = q$). Para cada ponto p da hipersuperfície, temos que o subgrupo $U_p \subset G$ que deixa o ponto imóvel ($U_p p = \{p\}$) é conhecido como grupo de isotropia do ponto p .

Quando restringimos a atuação dos grupos de Lie em variedades tridimensionais, temos que quase todos os grupos de isometria têm um subgrupo $G_T \subset G$ que age de forma simplesmente transitiva,⁷ *i.e.*, todos os grupos de isotropia desse subgrupo são triviais $U_p = \{e\}$, onde e representa o elemento identidade. Note que o subgrupo G_T tem as mesmas órbitas do grupo de simetrias e, além disso, os vetores de sua álgebra de Lie são linearmente independentes e a dimensão desse subgrupo é igual a dimensão da variedade onde ele age. Portanto, esse subgrupo representa as simetrias de translação na variedade.

Dado o conjunto dos campos de Killing, $\vec{\xi}_a$ para $a = 1, 2, 3$, associados à álgebra do grupo G_T , temos naturalmente uma definição de vetor normal às hipersuperfícies, tal que, $n_\mu \xi_a^\mu = 0$. Podemos mostrar que se o campo n^μ é geodésico e normal a uma seção espacial, então é normal a todas, *i.e.*, $\nabla_n(n^\mu \xi_{a\mu}) = n^\mu n^\nu \nabla_\nu \xi_{a\mu} = 0$, onde a última igualdade vem da anti-simetria de $\nabla_\mu \xi_{a\nu}$, já que este é um campo de Killing. Por outro lado, notamos que um campo normal a todas as seções é um campo geodésico, o que pode ser visto provando que a aceleração $a^\mu = \nabla_n n^\mu$ é zero. Para tanto, usamos a normalização do campo, $n^\mu n_\mu = -1$, para mostrar que

$$a^\mu n_\mu = \nabla_n n^\mu n_\mu = \nabla_n(n^\mu n_\mu)/2 = 0.$$

Adicionalmente temos que

$$a^\mu \xi_{a\mu} = (\nabla_n n^\mu) \xi_{a\mu} = \nabla_n(\xi_{an}) - n^\mu n^\nu \nabla_\nu \xi_{a\mu} = 0.$$

Logo, como (n^μ, ξ_a^μ) são linearmente independentes, então $a^\mu = 0$ e n^μ é geodésico. Outra propriedade de n^μ é que ele é invariante pela ação do grupo, *i.e.*,

$$\mathcal{L}_{\xi_a} n_\mu = \nabla_{\xi_a} n_\mu + n_\nu \nabla_\mu \xi_a^\nu = \nabla_{\xi_a} n_\mu - \xi_a^\nu \nabla_\mu n_\nu = 0,$$

onde na última igualdade usamos a simetria de $\nabla_\mu n_\nu$ mostrada na Eq. (A.21).

Vemos então que uma variedade espacialmente homogênea possui um seccionamento natural formado pelas órbitas do grupo de isometrias. Podemos utilizar esse fato para escrever a métrica de forma simplificada. Definimos uma base de um-formas e^a , com $a = 1, 2, 3$, linearmente independente e tangente às hipersuperfícies que seja invariante pela ação do subgrupo G_T , $\mathcal{L}_{\xi_a} e^b{}_\nu = 0$ para todos $a, b = 1, 2, 3$. Essa base pode ser construída escolhendo $e^a|_p$ linearmente independente e espacial ($e^a{}_\nu|_p = 0$) em um ponto p e

⁷Existe uma única exceção onde isso não acontece, são os chamados modelos de Kantowski-Sachs [108].

aplicando a operação *empurrar* para defini-la nos outros pontos. Como ξ_c^α é uma isometria e n^μ invariante $\mathcal{L}_{\xi_c}(e^a{}_\mu e^b{}_\nu g^{\mu\nu}) = 0$ e $\mathcal{L}_{\xi_c}(e^a{}_n) = 0$. Com isso, as formas permanecerão linearmente independentes e espaciais em todos os outros pontos.

Por construção temos que a base é espacial e, com isso, podemos utilizar esses campos para reescrever a métrica nas seções espaciais na forma

$$h_{\mu\nu} = h_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \quad (\text{A.50})$$

onde h_{ab} são as componentes da métrica das seções espaciais na base $e^a{}_\mu$. Usando o fato de que os campos de Killing são espaciais, podemos mostrar que ξ_a^μ também são isometrias da métrica induzida $h_{\mu\nu}$, *i.e.*, $\mathcal{L}_{\xi_a} h_{\mu\nu} = 0$. Dessa forma, temos que $\mathcal{L}_{\xi_c} h_{ab} = \xi_c^\alpha \partial_\alpha h_{ab} = 0$ e, portanto, h_{ab} é constante nas hipersuperfícies, já que ξ_c^α são linearmente independentes.

Podemos definir essa base arbitrariamente em cada seção espacial, porém é conveniente defini-la em uma hipersuperfície inicial e definir a base nas outras seções impondo que seja *empurrada*, *i.e.*, $\dot{e}^a{}_\mu = 0$. Partindo dessa definição podemos ver que a base $e^a{}_\mu$ mantém todas as propriedades impostas na seção inicial. Primeiro vemos que a base permanecerá ortogonal a n^μ , ou seja, $\partial_{ct}(e^a{}_n) = e^a{}_\mu \partial_{ct} n^\mu = 0$. Segundo, da forma que construímos o campo normal n^μ , temos que os difeomorfismos gerados por n^μ comutam com os definidos pelos campos de Killing ξ_a^μ , *i.e.*, quando agindo sobre um campo arbitrário \mathbf{w} temos

$$[\partial_{ct}, \mathcal{L}_{\xi_a}] \mathbf{w} = \mathcal{L}_{[n, \xi_a]} \mathbf{w} = 0,$$

onde usamos que $[n, \xi_a] = -\mathcal{L}_{\xi_a} \vec{n} = 0$. Com isso, temos que $\partial_{ct} \mathcal{L}_{\xi_a} e^b{}_\mu = \mathcal{L}_{\xi_a} \dot{e}^b{}_\mu = 0$ e deste modo como a base é invariante ($\mathcal{L}_{\xi_a} e^b{}_\mu|_p = 0$) na hipersuperfície inicial será invariante em todas.

Por fim, quando o grupo de isometrias é tal que em cada ponto o grupo de isotropia é isomórfico ao grupo de rotações tridimensional $G_p \cong \text{SO}(3)$, temos que as seções espaciais são isotrópicas em cada ponto. Dessa forma, pode-se mostrar (ver por exemplo [108]) que a métrica na base invariante é diagonal, *i.e.*,

$$h_{ab} = a^2 \delta_{ab}, \quad (\text{A.51})$$

onde a é uma função arbitrária do tempo e constante nas hipersuperfícies, *i.e.*, $D_\mu a = 0$.

APÊNDICE B

TENSOR ENERGIA–MOMENTO

Quando trabalhamos com modelos cosmológicos utilizando a RG, precisamos especificar o conteúdo material via tensor energia–momento. Porém, a equação de Einstein (Eq. 2.2) em conjunto com as identidades de Bianchi (Eqs. A.8–A.11) não são suficientes para determinar completamente a forma do tensor energia–momento. Existem várias formas de especificar o conteúdo material, por exemplo, se é conhecida a Lagrangiana que descreve a dinâmica do conteúdo material, então é natural usar sua variação em relação a métrica como tensor energia–momento. Contudo, muitas vezes a evolução do conteúdo material é muito complicada ou é irrelevante para a escala que estudamos, com isso, é conveniente definir o tensor energia–momento de alguma forma que esse descreva o comportamento médio do conteúdo. Com esse objetivo, podemos usar a teoria cinética para obter o tensor energia–momento de primeiros princípios ou podemos, partindo de considerações sobre equilíbrio local, utilizar termodinâmica para determinar o tensor energia–momento. Para uma revisão sobre teoria cinética em espaço–tempo curvo veja [109] e [110, cap. X], e sobre termodinâmica e (não)equilíbrio local veja [111–115].

Nesse apêndice trabalhamos a decomposição do tensor energia–momento da mesma forma que fizemos para a geometria na Seção A.2. O fluxo de observadores definidos por um campo vetorial n^μ determina o referencial que usaremos para discutir o equilíbrio local e como sua imposição restringe a forma do tensor energia–momento.

B.1 DECOMPOSIÇÃO DO FLUIDO

Dado um campo vetorial tipo tempo e normalizado n^μ , podemos definir as mesmas projeções definidas na Seção A.2. Mesmo que o campo não seja ortogonal às hiper-superfícies, essa projeção continua valendo com a restrição de não descrever mais uma seção do espaço–tempo. Note que nesse caso

$$\nabla_\mu n_\nu = \mathcal{K}_{\mu\nu} - n_\mu a_\nu, \quad (\text{B.1})$$

onde $a_\mu \equiv \nabla_n n_\mu$ representa a aceleração das trajetórias descritas por n^μ , $\mathcal{K}_{\mu\nu} = \mathbf{h}[\nabla_\mu n_\nu]$ e $\mathbf{h}[a_\mu] = a_\mu$. De forma geral o tensor energia–momento $T_{\mu\nu}$ pode ser decomposto como

$$T_{nn} = \rho, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{h}[T_{n\nu}] = -q_\nu, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{h}[T_{\mu\nu}] = p\mathbf{h}_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

onde ρ representa a densidade de energia medida pelo fluxo n^μ , q_ν o fluxo de energia espacial ($\mathbf{h}[q_\mu] = q_\mu$), p a pressão isotrópica, $\Pi_{\mu\nu}$ a pressão anisotrópica com $\Pi_\mu{}^\mu = 0$ e

$\mathbf{h}[\Pi_{\mu\nu}] = \Pi_{\mu\nu}$. Com as definições acima, podemos reescrever o tensor energia–momento como

$$T_{\mu\nu} = \rho n_\mu n_\nu + p \mathbf{h}_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} n_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}. \quad (\text{B.5})$$

Pela equação de Einstein (Eq. 2.2) e identidade de Bianchi contraída (Eq. A.12), temos que o tensor energia–momento deve satisfazer $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, o que implica nas seguintes equações,

$$\begin{aligned} n_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \nabla_\mu T^{\mu n} - T^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = -\nabla_\mu (\rho n^\mu + q^\mu) - T^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} n_{\nu)}, \\ &= -\dot{\rho} - \Theta \rho - \nabla_\mu q^\mu - T^{\mu\nu} (\mathcal{K}_{(\mu\nu)} - n_{(\mu} a_{\nu)}), \\ &= -\dot{\rho} - \Theta \rho - \nabla_\mu q^\mu - p \Theta - \Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - q^\mu a_\mu, \end{aligned}$$

onde o escalar de expansão e o cisalhamento do fluxo n^μ estão definidos na Eq. (A.24). Dessa forma temos

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) + \nabla_\mu q^\mu + \Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + q^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{B.6})$$

e, com a projeção,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[\nabla_\mu T^{\mu\nu}] &= \mathbf{h}[\nabla_\mu (\rho n^\mu n^\nu + p \mathbf{h}^{\mu\nu} + 2q^{(\mu} n^{\nu)} + \Pi^{\mu\nu})], \\ &= \rho a^\nu + D^\nu p + p a^\nu + \mathbf{h}^{\mu\nu} \dot{q}_\mu + \Theta q^\nu + \omega^{\mu\nu} q_\mu + D_\mu \Pi^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{q}_\mu + \Theta q_\mu + \omega^\nu{}_\mu q_\nu + (\rho + p) a_\mu + D_\nu p + D_\nu \Pi^\nu{}_\mu = 0. \quad (\text{B.7})$$

B.2 HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

Impondo que o tensor energia–momento é o de um fluido termodinâmico em equilíbrio local, podemos restringir substancialmente a forma do tensor $T_{\mu\nu}$. Para um fluido em equilíbrio ou perto do equilíbrio, podemos supor a validade da equação de Gibbs para um elemento de volume suficientemente pequeno (ver [111, cap. 3]), *i.e.*,

$$d(s_e \varepsilon V) = \beta(d(\rho_e V) + p_e dV) + \alpha_a d(\varepsilon V), \quad (\text{B.8})$$

onde $s_e \equiv S/N$, $\rho_e \equiv E/V$ e $\varepsilon = N/V$ são a entropia específica (entropia por partícula) e as densidades termodinâmicas de energia e de partículas, respectivamente, α_a é a afinidade das partículas consideradas, p_e representa a pressão termodinâmica e $V = \int \sqrt{\mathbf{h}} d^3x$, onde \mathbf{h} é o determinante de $\mathbf{h}_{\mu\nu}$, é o volume de uma região do fluido. Se considerarmos o volume V em outras seções espaciais como o volume inicial arrastado via n^μ ,¹ temos que $\dot{V} = \Theta V$.²

¹Os pontos do volume V são definidos nas outras hipersuperfícies via transporte de Lie, tal como feito na Seção 2.4 para os pontos da trajetória do fóton.

²Na Seção D.1 mostramos explicitamente como calcular a derivada do determinante. Note também que tiramos o fator de expansão Θ de dentro da integral. Isso vale no caso onde Θ é constante no volume, ou quando o volume é pequeno o suficiente para podermos considerar Θ constante quando integrado nele.

Podemos agora calcular a evolução temporal da entropia derivando a equação acima,

$$\partial_{ct}(s_e \varepsilon V) = \beta(\partial_{ct}(\rho_e V) + p_e \dot{V}) + \alpha_a \partial_{ct}(\varepsilon V),$$

ou seja,

$$\partial_{ct}(s_e \varepsilon) + \Theta(s_e \varepsilon) = \beta(\dot{\rho}_e + \Theta(\rho_e + p_e)) + \alpha_a(\Theta \varepsilon + \dot{\varepsilon}), \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla_\mu(n^\mu s_e \varepsilon) = \beta(\dot{\rho}_e + \Theta(\rho_e + p_e)) + \alpha_a \nabla_\mu(n^\mu \varepsilon). \quad (\text{B.10})$$

Se escolhermos o campo n^μ como sendo paralelo ao fluxo de partículas $N^\mu = -\varepsilon n^\mu$, temos que o último termo da equação acima é simplesmente $\alpha_a \nabla_\mu N^\mu$. Contudo sabemos que o campo N^μ deve ser conservado,³ e no caso em que o número de partículas não se conserva a afinidade é nula. Desta forma a equação acima pode ser reescrita como,

$$\nabla_\mu S_e^\mu = -\beta n_\mu \nabla_\nu T_e^{\mu\nu}, \quad (\text{B.11})$$

onde definimos o vetor entropia associado ao equilíbrio como $S_e^\mu = s_e \varepsilon n^\mu$. Lembrando que o campo vetorial é colinear ao fluxo de partículas $n^\mu = -N^\mu/\varepsilon$ e o tensor do lado direito é o tensor energia-momento associado às quantidades termodinâmicas, *i.e.*,

$$T_e^{\mu\nu} = \rho_e n^\mu n^\nu + p_e h^{\mu\nu}. \quad (\text{B.12})$$

Com isso, podemos escrever o tensor energia-momento como a parte do equilíbrio mais parte dissipativa $T^{\mu\nu} = T_e^{\mu\nu} + T_d^{\mu\nu}$, e usando a Eq. (B.5) temos

$$T_d^{\mu\nu} = \rho_d n_\mu n_\nu + p_d h_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} n_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (\text{B.13})$$

onde a energia e pressão do termo dissipativo são definidas por $\rho_d \equiv \rho - \rho_e$ e $p_d \equiv p - p_e$, respectivamente. Como o tensor energia-momento é conservado temos que $\nabla_\mu T_e^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T_d^{\mu\nu}$. Usando essas definições podemos reescrever a Eq. (B.12) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla_\mu S_e^\mu &= -\beta n_\mu \nabla_\nu T_e^{\mu\nu}, \\ \nabla_\mu S_e^\mu &= \beta n_\mu \nabla_\nu T_d^{\mu\nu}, \\ \nabla_\mu S_e^\mu &= \nabla_\nu(\beta T_d^{\mu\nu}) - T_d^{\mu\nu} \nabla_\nu(\beta n_\mu), \\ \nabla_\mu S^\mu &= -T_d^{\mu\nu} \nabla_\nu(\beta n_\mu), \end{aligned}$$

onde definimos o vetor entropia por

$$S^\mu \equiv S_e^\mu - \beta T_d^{\mu\nu} n_\nu = S_e^\mu + \beta q^\mu + \beta \rho_d n^\mu. \quad (\text{B.14})$$

O divergente do vetor entropia definido acima será dado por

$$\begin{aligned} T_d^{\mu\nu} \nabla_\nu(\beta n_\mu) &= T_d^{\mu\nu}(\nabla_\nu \beta n_\mu + \beta(\mathcal{K}_{\nu\mu} - n_\nu a_\mu)), \\ &= \beta^2 \rho_d \partial_{ct}(\beta^{-1}) + \beta p_d \Theta + \beta^2 q^\mu (D_\mu \beta^{-1} + a_\mu \beta^{-1}) + \beta \Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

³No contexto da teoria cinética, o fluxo N^μ é simplesmente o primeiro momento da distribuição no espaço de fase e pode ser mostrado que $\nabla_\mu N^\mu = 0$, ver [109, 110].

Para que o campo de entropia S^μ satisfaça a segunda lei da termodinâmica, *i.e.*, $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$, precisamos que

$$-(\beta^2 \rho_d \partial_{ct}(\beta^{-1}) + \beta p_d \Theta + \beta^2 q^\mu (D_\mu \beta^{-1} + a_\mu) + \beta \Pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}) \geq 0.$$

Para tanto escolhamos as seguintes equações de dissipação

$$\rho_d = -c_{\rho_d} \partial_{ct}(\beta^{-1}), \quad (\text{B.15})$$

$$p_d = -c_p \Theta, \quad (\text{B.16})$$

$$q_\mu = -c_q (D_\mu \beta^{-1} + a_\mu \beta^{-1}), \quad (\text{B.17})$$

$$\Pi_{\mu\nu} = -c_\Pi (\sigma_{\mu\nu}), \quad (\text{B.18})$$

onde os coeficientes c_p , c_q e c_Π são positivos. Com isso, temos finalmente,

$$\nabla_\mu S^\mu = \frac{\beta^2 \rho_d^2}{c_\rho} + \frac{\beta p_d^2}{c_p} + \frac{\beta^2 q^\mu q_\mu}{c_q} + \frac{\beta \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}}{c_\Pi} \geq 0. \quad (\text{B.19})$$

Com essa construção, se exigimos o equilíbrio local, ou seja, que a inequação acima seja saturada, temos

$$\frac{\beta^2 \rho_d^2}{c_\rho} + \frac{\beta p_d^2}{c_p} + \frac{\beta^2 q^\mu q_\mu}{c_q} + \frac{\beta \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}}{c_\Pi} = 0.$$

No entanto, como todos os termos são positivos definidos, o equilíbrio local é obtido se e somente se todos os termos dissipativos forem zero. Note contudo que a exigência de forma de fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \rho n_\mu n_\nu + p h_{\mu\nu},$$

não impõe necessariamente o equilíbrio local, pois ainda podemos ter pressão p_d e densidade de energia dissipativas ρ_d não nulas.

A construção acima pode parecer um tanto arbitrária dado o número de escolhas feitas. Porém, vale notar que essas escolhas são baseadas em resultados da teoria cinética e que, dada as escolhas acima de termos dissipativos no limite não relativístico e para campos gravitacionais fracos, as equações dissipativas se reduzem à hidrodinâmica não relativística via equações de Navier-Stokes e Fourier. Outro ponto importante é que essas escolhas levam a uma teoria não causal, no sentido que nela a equação de difusão prevê propagação instantânea de temperatura. Isso pode ser corrigido adicionando termos quadráticos ao vetor entropia, recuperando propagações causais [115].

B.3 TEORIA CINÉTICA RELATIVÍSTICA

Diferente da termodinâmica, a teoria cinética tem sua extensão a variedades métricas arbitrárias bem definida. O objeto do seu estudo é a função de distribuição $f(x, p)$ que identifica o número de objetos com quadri vetor momento p^μ e posição x^μ . É possível mostrar que essa função satisfaz o equivalente relativístico do teorema de Liouville e, portanto, define-se a equação de Boltzmann para tal função.

Ao considerar estados no equilíbrio, o termo de colisão da equação de Boltzmann impõe a seguinte forma para a função de distribuição,

$$f(x, p) \propto e^{\alpha_a + c\beta_\mu p^\mu}, \quad (\text{B.20})$$

chamada distribuição de Maxwell–Jüttner, onde α_a e β_μ são funções da posição a serem determinadas. Aplicando o operador de Liouville à distribuição acima, obtém-se o resultado,

$$p^\mu \nabla_\mu \alpha_a - cp^\mu p^\nu \nabla_\mu \beta_\nu = 0. \quad (\text{B.21})$$

Como a distribuição é função da posição e do momento, essa equação deve ser satisfeita para qualquer ponto e qualquer p^μ . Nesse caso temos $\nabla_\mu \alpha_a = 0$ e $\nabla_{(\mu} \beta_{\nu)}$, ou seja, α_a é constante e β_μ um vetor de Killing tipo tempo.⁴ Esse resultado nos diz que para a métrica de FLRW só pode existir equilíbrio se $\Theta = 0$, ou seja, para o caso estático.

Porém se restringirmos a distribuição $f(x, p)$ a classes específicas de partículas de certa massa, *i.e.*, $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$, o resultado acima não é imediato. Para o caso de massa zero, temos que, para o equilíbrio, basta que $\nabla_{(\mu} \beta_{\nu)} \propto g_{\mu\nu}$ pois $p^\mu p_\mu = 0$, ou seja, que exista um vetor de Killing conforme tipo tempo. Esse é exatamente o caso das métricas de FLRW. Como vimos na Seção 2.3, o vetor \check{n}^μ satisfaz $\nabla_{(\mu} \check{n}_{\nu)} = \dot{a} g_{\mu\nu}$, com isso, concluímos que no caso de um universo de FLRW a radiação entra em equilíbrio térmico com

$$\beta_\mu = \frac{1}{a_0 k_B T_0} \check{n}_\mu = \frac{a}{a_0 k_B T_0} n_\mu, \quad (\text{B.22})$$

onde identificamos a constante β como o inverso da temperatura, *i.e.*, $\tau \equiv k_B T \equiv \beta^{-1}$ e k_B é a constante de Boltzmann. Nesse caso recupera-se o resultado usual que para a radiação o equilíbrio é atingido, a temperatura como função do tempo é dada por $T = T_0 a_0 / a$ e α_a é constante e portanto irrelevante.

Considerando agora partículas de massa m e restringindo ao caso de uma métrica de FLRW, temos que o campo β_μ deve ser paralelo a $\beta_\mu = \beta n_\mu$, pois caso contrário, o tensor energia–momento obtido da distribuição $f(x, p)$ conteria direções diferentes de n^μ e, portanto, não compatível com a geometria (ver Eq. 2.15). A função α_a e β devem depender somente do tempo cósmico t , pois, pelo mesmo argumento acima, o tensor energia–momento deve ser constante nas hipersuperfícies. Aplicando essas restrições a Eq. (B.21), obtemos

$$\begin{aligned} p^\mu \nabla_\mu \alpha_a - cp^\mu p^\nu \nabla_\mu \beta_\nu &= p^\parallel \dot{\alpha}_a - cp^\mu p^\nu (-n_\mu \dot{\beta} n_\nu + \beta \mathcal{K}_{\mu\nu}), \\ &= p^\parallel \dot{\alpha}_a + cp^\parallel \dot{\beta} - c \frac{\Theta}{3} p^{\perp 2} \beta, \\ &= \sqrt{m^2 c^2 + p^{\perp 2}} \dot{\alpha}_a + c(m^2 c^2 + p^{\perp 2}) \dot{\beta} - Hp^{\perp 2} \beta, \end{aligned}$$

onde usamos os mesmos símbolos p^\parallel e $p^{\perp \mu}$ da Seção 2.4 e a curvatura extrínseca da Eq. (2.10). Usando a equação acima, reescrevemos a Eq. (B.21) como

$$\dot{\alpha}_a + \sqrt{m^2 c^2 + p^{\perp 2}} \dot{\beta} - \frac{Hp^{\perp 2} \beta}{\sqrt{m^2 c^2 + p^{\perp 2}}} = 0, \quad (\text{B.23})$$

⁴A necessidade de β_μ ser tipo tempo vem do fato de que a integral de $f(x, p)$ sobre todos os momentos deve convergir, o que acontece somente se β_μ for tipo tempo.

e expandindo em potências de $p^{\perp 2}/(m^2c^2)$, obtemos em primeira ordem

$$\partial_{ct}(\alpha_a + mc^2\beta) + \frac{p^{\perp 2}}{2m} \left(\dot{\beta} - \frac{2H}{c}\beta \right) = 0. \quad (\text{B.24})$$

Nesse caso vemos que existe a solução

$$\beta = \frac{a^2}{k_B a_0^2 T_0}, \quad (\text{B.25})$$

$$\alpha_a = -mc^2\beta = -\frac{a^2}{a_0^2} \frac{mc^2}{k_B T_0}, \quad (\text{B.26})$$

onde escolhemos a constante $\alpha_a + mc^2\beta = 0$. Observamos com esse resultado que a temperatura evolui como $T = T_0 a_0^2/a^2$ e o potencial químico $\mu = -\alpha_a/\beta = mc^2$ como esperado.

Podemos entender a expansão acima da seguinte forma. Da definição da função distribuição no equilíbrio, Eq. (B.20), temos que para universos do tipo FLRW

$$f(x, p) = f_0 e^{\alpha_a - c\beta p^{\parallel}}.$$

Fazendo a razão da distribuição acima para valores diferentes da energia p^{\parallel} , obtemos

$$f(x, p_1)/f(x, p_2) = e^{-c\beta(p_1^{\parallel} - p_2^{\parallel})}.$$

Suponha que o estado marcado por p_1 tem momento proporcional a mc , de forma que $p_1^{\parallel} = 2mc$, e o estado marcado por p_2 tenha o momento muito menor que mc , como na expansão acima temos $p_2^{\parallel} = mc + (p_2^{\perp})^2/(2mc)$. Dessa forma a razão acima é dada por

$$f(x, p_1)/f(x, p_2) = e^{-\beta \left(mc^2 - \frac{(p_2^{\perp})^2}{2m} \right)} \approx e^{-\beta mc^2}. \quad (\text{B.27})$$

Isso mostra que, se $\beta mc^2 = mc^2/(k_B T) \gg 1$, os estados com momento proporcional a mc não são importantes se a temperatura for muito menor que a energia de repouso das partículas, e nesse caso vale a distribuição dada pelas soluções Eq. (B.25) e Eq. (B.26).

Em resumo temos que fluidos com partículas de massa zero atingem equilíbrio térmico mesmo em universos de FLRW. Esses fluidos são caracterizados pela equação de estado $p = \rho/3$ e a sua temperatura evolui com o tempo da forma $T = T_0 a_0/a = T_0 x$ (com a variável x definida na Eq. 2.38). Já fluidos de partículas com massa em estados cuja temperatura é muito menor que a energia de repouso, *i.e.*, $k_B T \ll mc^2$, o equilíbrio é atingido aproximadamente. Nesse caso temos a equação de estado,⁵

$$p = \frac{2}{3}\rho_{\text{cin}} = 2/3(\rho - mc^2\varepsilon) \approx \rho \frac{k_B T}{mc^2},$$

onde ρ_{cin} é a densidade de energia cinética e a temperatura evolui como $T = T_0 x^2$.

Para mais detalhes sobre teoria cinética em espaços curvos com a definição precisa da função distribuição assim como a dedução da distribuição de Maxwell–Jüttner, veja [109] e [110, cap. X] e, para uma exposição sobre teoria cinéticas especializada em universos de FLRW, veja [116].

⁵Aqui usamos que um gás de Fermi com baixa densidade satisfaz $p = 2/3(\rho - mc^2\varepsilon)$ e $\rho = \varepsilon(3/2k_B T + mc^2)$. Resultados que podem ser obtidos diretamente da teoria cinética.

B.4 PRINCÍPIO VARIACIONAL: FLUIDO PERFEITO EM EQUILÍBRIO

Quando consideramos um fluido perfeito em equilíbrio, o tensor energia–momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho n_\mu n_\nu + p h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.28})$$

A densidade de energia ρ , a pressão p e o quadrivetor n^μ normalizado representam cinco graus de liberdade, enquanto a equação de conservação do tensor acima, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, provê somente quatro equações, de forma que a imposição de fluido perfeito não determina unicamente a evolução do fluido. Nos casos simples, podemos escrever a pressão como função da densidade de energia, *i.e.*, $p \equiv p(\rho)$, e assim obter uma descrição completa para evolução do fluido.

Contudo, no caso geral para um fluido perfeito composto de um único componente, a pressão é função de duas quantidades termodinâmicas. Por exemplo, podemos escrever a pressão como função da densidade de energia e entropia específica, *i.e.*, $p \equiv p(\rho, s)$. Nesse caso temos, além da conservação do tensor energia–momento, a equação de conservação do número de partículas e entropia, ou seja,⁶

$$\dot{\varepsilon} + \Theta\varepsilon = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$\partial_{ct}(s\varepsilon) + \Theta s\varepsilon = \dot{s} = 0. \quad (\text{B.30})$$

Com isso, temos as cinco variáveis do tensor energia–momento mais duas novas variáveis, a entropia e a densidade de número de partículas, e um total de sete equações, as seis de conservação mais a equação de estado $p(\rho, s)$.

Precisamos obter essas equações de movimento usando um princípio variacional. Para tanto seguiremos o procedimento proposto por Schutz [26]. Usamos a entalpia específica como potencial termodinâmico, *i.e.*, definimos $\vartheta = (\rho + p)/\varepsilon$ como a entalpia por partícula $\vartheta \equiv \mathbf{H}/N \equiv (E + pV)/N$. A entalpia é função da entropia, pressão e número de partículas de forma que $\vartheta = \mathbf{H}(s, p, 1)$, e portanto

$$d\vartheta = \tau ds + \frac{1}{\varepsilon} dp, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\vartheta} = -\tau\varepsilon, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right|_s = \varepsilon.$$

Com isso, definimos uma densidade de Lagrangiana para o fluido como $\mathcal{L}_f = \sqrt{-g}p(\vartheta, s)$, onde g é do determinante da métrica. A entalpia é definida como o módulo de um campo vetorial tipo tempo da forma

$$\begin{aligned} \vartheta_\mu &\equiv \vartheta n_\mu = \nabla_\mu \chi_1 + \chi_2 \nabla_\mu \chi_3 + \chi_4 \nabla_\mu s, \\ \vartheta^2 &= -\vartheta_\mu \vartheta_\nu g^{\mu\nu} = -(\nabla_\mu \chi_1 + \chi_2 \nabla_\mu \chi_3 + \chi_4 \nabla_\mu s)(\nabla_\nu \chi_1 + \chi_2 \nabla_\nu \chi_3 + \chi_4 \nabla_\nu s)g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

onde χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 são funções escalares que em conjunto com s formam o conjunto de funções que usaremos para variar a ação

$$S_f = \int d^4x \mathcal{L}_f. \quad (\text{B.32})$$

⁶Ver Seção B.2.

Para isso, primeiro note que variando a entalpia em relação a essas funções obtemos $2\vartheta\delta\vartheta = -2\vartheta n^\mu\delta\vartheta_\mu$, onde

$$\delta\vartheta_\mu = \nabla_\mu\delta\chi_1 + \delta\chi_2\nabla_\mu\chi_3 + \chi_2\nabla_\mu\delta\chi_3 + \delta\chi_4\nabla_\mu s + \chi_4\nabla_\mu\delta s, \quad (\text{B.33})$$

e portanto

$$\delta S_f = - \int d^4x \sqrt{-g} (\varepsilon n^\mu \delta\vartheta_\mu + \tau \varepsilon \delta s). \quad (\text{B.34})$$

A menos de termos de superfície, temos que a variação de χ_1 , χ_2 , χ_3 , χ_4 e s implica, respectivamente, em

$$\nabla_\mu(\varepsilon n^\mu) = 0, \quad \varepsilon\dot{\chi}_3 = 0, \quad \nabla_\mu(\chi_2\varepsilon n^\mu) = 0, \quad \varepsilon\dot{s} = 0, \quad \nabla_\mu(\chi_4\varepsilon n^\mu) = \tau\varepsilon. \quad (\text{B.35})$$

Contraindo a Eq. (B.31) com n^μ , as equações acima implicam que

$$\dot{\chi}_1 = -\vartheta. \quad (\text{B.36})$$

Duas das equações acima podem ser identificadas como as equações de conservação de número de partículas e entropia, $\nabla_\mu(\varepsilon n^\mu) = 0$ e $\dot{s} = 0$. Para identificar a conservação do tensor energia-momento, note que a variação de ϑ em relação à inversa da métrica é $2\vartheta\delta\vartheta = -\vartheta^2 n_\mu n_\nu \delta g^{\mu\nu}$, enquanto a variação da raiz do determinante da métrica é dada por,⁷ $\delta\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}/2$. Então para essa variação temos

$$\delta S_f = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\varepsilon\vartheta n_\mu n_\nu + p g_{\mu\nu}}{2} \right) \delta g^{\mu\nu},$$

ou seja,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_f}{\delta g^{\mu\nu}} = \varepsilon\vartheta n_\mu n_\nu + p g_{\mu\nu} = (\rho + p)n_\mu n_\nu + p g_{\mu\nu} = \rho n_\mu n_\nu + p h_{\mu\nu},$$

onde usamos a definição da entalpia ϑ e do projetor $h_{\mu\nu}$. Para mostrarmos que as Eqs. (B.35) e (B.36) são equivalentes a $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, notamos que essa equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \nabla_\mu(\varepsilon n^\mu)\vartheta n_\nu + \varepsilon n^\mu \nabla_\mu(\vartheta n_\nu) + \nabla_\nu p, \\ &= \varepsilon \nabla_n(\vartheta n_\nu) - \tau \varepsilon \nabla_\nu s + \varepsilon \nabla_\nu \vartheta. \end{aligned}$$

Podemos usar a Eq. (B.31) para escrever o termo $\nabla_n(\vartheta n_\nu)$ como

$$\begin{aligned} \nabla_n(\vartheta n_\mu) &= \nabla_n(\nabla_\mu\chi_1 + \chi_2\nabla_\mu\chi_3 + \chi_4\nabla_\mu s), \\ &= \nabla_n\nabla_\mu\chi_1 + \chi_2\nabla_n\nabla_\mu\chi_3 + \chi_4\nabla_n\nabla_\mu s + \tau\nabla_\mu s, \\ &= n^\nu(\nabla_\mu\nabla_\nu\chi_1 + \chi_2\nabla_\mu\nabla_\nu\chi_3 + \chi_4\nabla_\mu\nabla_\nu s) + \tau\nabla_\mu s, \\ &= -\nabla_\mu n^\nu(\nabla_\nu\chi_1 + \chi_2\nabla_\nu\chi_3 + \chi_4\nabla_\nu s) - \nabla_\mu\vartheta + \tau\nabla_\mu s, \\ &= -\nabla_\mu n^\nu\vartheta n_\nu - \nabla_\mu\vartheta + \tau\nabla_\mu s, \\ &= -\nabla_\mu\vartheta + \tau\nabla_\mu s, \end{aligned}$$

onde usamos que as derivadas covariantes comutam quando atuando sobre escalares e que $\nabla_\mu(n^\nu n_\nu) = \nabla_\mu(-1) = 0$. Essa última expressão é o mesmo que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, mostrando que a densidade Lagrangiana \mathcal{L}_f determina corretamente as equações de movimento do fluido.

⁷Ver Eq. (D.8), note que $\zeta^{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}$ e $\zeta = \zeta^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$.

APÊNDICE C

PERTURBAÇÕES NA MÉTRICA

Dadas duas métricas $\hat{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ as quais chamaremos de perturbada e de fundo, respectivamente, definimos sua diferença como $\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ de forma que ela seja pequena, *i.e.*, desprezaremos todos os termos quadráticos em $\delta g_{\mu\nu}$. Posteriormente, de posse de alguns resultados, discutiremos em que sentido estamos requerendo $\delta g_{\mu\nu}$ pequeno. Neste apêndice iremos utilizar uma métrica $g_{\mu\nu}$ definida utilizando seções espaciais cujas normais n^μ sejam geodésicas, como discutido na Seção A.2. De forma geral usaremos a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ e sua inversa para subir e descer índice dos objetos perturbados que denotaremos com o símbolo $\hat{\cdot}$, e as diferenças entre as quantidade perturbadas e de fundo serão representadas com o prefixo δ .

Dada a contração da métrica $\hat{g}^{\mu\alpha}$ com a sua inversa $\hat{g}_{\alpha\nu}$,

$$\hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu + g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} + \delta g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu,$$

temos que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.1})$$

de forma que o tensor $\delta g^{\mu\nu}$ não é obtido simplesmente subindo os índices de $\delta g_{\mu\nu}$. Assim sendo, definimos o tensor $\varsigma_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu}$, no qual aplicaremos a métrica $g_{\mu\nu}$ para subir e descer índices. Note que com essa definição $\varsigma^{\mu\nu} \neq \delta g^{\mu\nu}$ e, em primeira ordem, $\delta g^{\mu\nu} = -\varsigma^{\mu\nu}$.

Primeiramente definimos as projeções de $\varsigma_{\mu\nu}$ nas direções normais e perpendiculares como,

$$\varsigma_{nn} = 2\phi, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{h}[\varsigma_{n\nu}] = -B_\nu, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{h}[\varsigma_{\mu\nu}] = 2C_{\mu\nu}, \quad (\text{C.4})$$

e assim temos

$$\varsigma_{\mu\nu} = 2\phi n_\mu n_\nu + 2B_{(\mu}n_{\nu)} + 2C_{\mu\nu}. \quad (\text{C.5})$$

Como discutido na Seção A.1, para cada métrica existe uma única deriva covariante associada tal que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ e $\widehat{\nabla}_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} = 0$. Pode-se mostrar [36] que a diferença de duas derivadas covariantes é dada por um tensor da seguinte forma,

$$(\widehat{\nabla}_\mu - \nabla_\mu)w_\nu = \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\beta w_\beta. \quad (\text{C.6})$$

Como ambas as conexões têm torção nula, esse tensor satisfaz $\mathbf{L}_{[\mu\nu]}{}^\beta = 0$. Aplicando a diferença das derivadas covariantes no tensor métrico $\hat{g}_{\mu\nu}$, obtemos

$$-\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\gamma \hat{g}_{\gamma\beta} + \mathbf{L}_{\mu\beta}{}^\gamma \hat{g}_{\alpha\gamma}, \quad (\text{C.7})$$

e, combinando diferentes ordenações de índices, temos

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\frac{\hat{g}^{\gamma\sigma}}{2} (\nabla_\alpha \hat{g}_{\sigma\beta} + \nabla_\beta \hat{g}_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta}), \quad (\text{C.8})$$

$$= -\frac{g^{\gamma\sigma}}{2} (\nabla_\alpha \varsigma_{\sigma\beta} + \nabla_\beta \varsigma_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma \varsigma_{\alpha\beta}). \quad (\text{C.9})$$

C.1 CINEMÁTICA DOS CAMPOS VETORIAIS

Em geral não impomos nenhum tipo de simetria ou vínculos a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$. Portanto, não há, *a priori* nenhum tipo de seccionamento, nem campos vetoriais privilegiados, como há quando a variedade é FLRW (ver Seção A.3). Contudo, como estamos interessados em pequenas perturbações em torno de FLRW, estudaremos a cinemática dos campos vetoriais \hat{m}^μ impondo somente que a diferença entre ele e o campos normal n^μ seja pequena, ou seja, $\delta m^\mu \equiv \hat{m}^\mu - n^\mu$ será considerado da mesma ordem das perturbações na métrica.

Os observadores descritos pelo campo vetorial \hat{m}^μ são aqueles que a tangente de sua trajetória coincide com \hat{m}^μ . É simples mostrar que o módulo do campo \hat{m}^μ está diretamente relacionado com a parametrização da curva dos observadores e que, quando o campo é normalizado, as trajetórias dos observadores estão parametrizadas pelo tempo próprio. Portanto restringimos ao caso normalizado, *i.e.*,

$$\hat{m}_\mu \hat{m}_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = -1 + 2\delta m_\mu n^\mu - 2\phi = -1,$$

o que implica que todos os campos vetoriais normalizados desse tipo satisfazem $\delta m^\mu n_\mu = \phi$. A perturbação pode então ser reescrita como

$$\delta m_\mu = -n_\mu \phi + v_\mu, \quad (\text{C.10})$$

onde $v_\mu \equiv \mathbf{h}[\delta m_\mu]$ guarda todos os graus de liberdade não fixados de \hat{m}^μ e da mesma forma que $\varsigma_{\mu\nu}$ usaremos a métrica de fundo para subir e descer os índices de v_μ . Note que nesse caso

$$\hat{m}^\mu = \hat{m}_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = n^\mu + v^\mu + \phi n^\mu + B^\mu,$$

ou seja, $\delta m^\mu = v^\mu + \phi n^\mu + B^\mu$.

Pelo teorema de Frobenius, sabemos que se \hat{m}_μ for ortogonal a uma hipersuperfície então $\hat{m}_{[\gamma} \widehat{\nabla}_\mu \hat{m}_{\nu]} = 0$. Calculando a derivada covariante de \hat{m}_μ , obtemos

$$\widehat{\nabla}_\mu \hat{m}_\nu = \mathcal{K}_{\mu\nu} - \phi \mathcal{K}_{\mu\nu} - \nabla_\mu \phi n_\nu + \nabla_\mu v_\nu + \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma n_\gamma, \quad (\text{C.11})$$

e aplicando a condição do teorema na expressão acima temos

$$n_{[\gamma} \nabla_\mu v_{\nu]} = 0,$$

onde usamos a simetria de $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ e $\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma$. Reescrevemos a expressão acima da seguinte forma,

$$n_{[\gamma} \nabla_\mu v_{\nu]} = n_{[\gamma} \mathbf{h}[\nabla_\mu v_{\nu}]] = n_{[\gamma} D_\mu v_{\nu]} = \frac{1}{3} (n_\gamma D_{[\mu} v_{\nu]} + n_\nu D_{[\gamma} v_{\mu]} + n_\mu D_{[\nu} v_{\gamma]}) = 0,$$

ou seja, temos que \hat{m}_μ é ortogonal às hipersuperfícies se e somente se $D_{[\mu}v_{\nu]} = 0$. Então, pelo menos localmente, temos que $v_\mu = D_\mu f$ para uma função f arbitrária. Se ao invés de definir arbitrariamente um campo \hat{m}^μ tivéssemos dado uma função tempo arbitrária $\hat{c}t$, obteríamos que $v_\mu = D_\mu(\hat{c}t - ct)$ satisfazendo automaticamente o teorema de Frobenius.

O próximo passo é definir o projetor das hipersuperfícies definido por $\hat{g}_{\mu\nu}$ como

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \hat{m}_\mu \hat{m}_\nu = h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}, \quad (\text{C.12})$$

onde

$$\delta h_{\mu\nu} = \varsigma_{\mu\nu} - 2\phi n_\mu n_\nu + 2v_{(\mu}n_{\nu)} = 2(v_{(\mu}n_{\nu)} + B_{(\mu}n_{\nu)} + C_{\mu\nu}). \quad (\text{C.13})$$

Note que, quando o campo \hat{m}_μ não for ortogonal às hipersuperfícies ele não definirá seções espaciais e o projetor $\hat{h}_{\mu\nu}$ não terá o mesmo significado. Contudo, a definição desses objetos será útil para ambos os casos. Subindo um dos índices do projetor temos

$$\delta h_\mu{}^\nu = n_\mu(B^\nu + v^\nu) + v_\mu n^\nu. \quad (\text{C.14})$$

De forma análoga, a inversa do projetor é dada por

$$\hat{h}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \hat{m}^\mu \hat{m}^\nu = h^{\mu\nu} + \delta h^{\mu\nu}, \quad (\text{C.15})$$

onde a diferença é dada por

$$\delta h^{\mu\nu} = 2v^{(\mu}n^{\nu)} - 2C^{\mu\nu}. \quad (\text{C.16})$$

Podemos calcular agora a curvatura extrínseca associada ao campo \hat{m}_μ . Como agora esse campo não é necessariamente geodésico, a curvatura extrínseca é dada por $\hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} \equiv \hat{h} \left[\hat{\nabla}_\mu \hat{m}_\nu \right]$. Expandindo obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} &= \hat{h} [\mathcal{K}_{\mu\nu} + \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma n_\gamma - \nabla_\mu \phi n_\nu - \phi \mathcal{K}_{\mu\nu} + \nabla_\mu v_\nu], \\ &= \mathcal{K}_{\mu\nu} + 2(B^\gamma + v^\gamma) \mathcal{K}_{\gamma(\mu} n_{\nu)} + D_\mu v_\nu + \mathbf{h} [\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma n_\gamma] - \phi \mathcal{K}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde o termo projetado é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{h} [\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma n_\gamma] &= \mathbf{h} \left[-\frac{n^\sigma}{2} (\nabla_\mu \varsigma_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \varsigma_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \varsigma_{\mu\nu}) \right], \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{h} [\nabla_\mu (\varsigma_{\sigma\nu} n^\sigma) + \nabla_\nu (\varsigma_{\sigma\mu} n^\sigma) - \mathcal{K}_\mu{}^\sigma \varsigma_{\sigma\nu} - \mathcal{K}_\nu{}^\sigma \varsigma_{\sigma\mu} - \nabla_n \varsigma_{\mu\nu}], \\ &= \frac{1}{2} (4\phi \mathcal{K}_{\mu\nu} + 2D_{(\mu} B_{\nu)} + 2\mathcal{K}_\mu{}^\sigma C_{\sigma\nu} + 2\mathcal{K}_\nu{}^\sigma C_{\sigma\mu} + 2\nabla_n C_{\mu\nu}), \\ &= 2\phi \mathcal{K}_{\mu\nu} + D_{(\mu} B_{\nu)} + \dot{C}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Substituindo esse resultado na curvatura extrínseca, essa fica escrita como

$$\hat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} = \mathcal{K}_{\mu\nu} + 2(B^\gamma + v^\gamma) \mathcal{K}_{\gamma(\mu} n_{\nu)} + D_\mu v_\nu + D_{(\mu} B_{\nu)} + \phi \mathcal{K}_{\mu\nu} + \dot{C}_{\mu\nu}. \quad (\text{C.18})$$

Usando a métrica perturbada para subir o índice de $\widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu}$ obtemos também a versão com um índice covariante e outro contravariante,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} &= (1 + \phi)\mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} + \mathcal{K}_{\alpha}{}^{\beta}(\mathbf{h}_{\mu}{}^{\alpha}v_{\beta}n^{\nu} + \mathbf{h}_{\beta}{}^{\nu}(v^{\alpha} + B^{\alpha})n_{\mu}) + D_{\mu}v^{\nu} + D_{(\mu}B_{\gamma)}\mathbf{h}^{\gamma\nu} \\ &\quad + \dot{C}_{\mu}{}^{\nu} - 2\mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma}C_{\gamma}{}^{\nu} + 2\mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu}C_{\mu}{}^{\gamma},\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

e contraindo a equação acima, temos o traço, que é conhecido como escalar de expansão perturbado,

$$\widehat{\Theta} \equiv \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu}\widehat{\mathbf{h}}^{\mu\nu} = \Theta + D_{\alpha}v^{\alpha} + D_{\alpha}B^{\alpha} + \phi\Theta + \dot{C}, \quad (\text{C.20})$$

onde $C \equiv C_{\mu\nu}\mathbf{h}^{\mu\nu}$. Pela Eq. (C.18) vemos que a vorticidade é dada por

$$\widehat{\omega}_{\mu\nu} \equiv \widehat{\mathcal{K}}_{[\mu\nu]} = D_{[\mu}v_{\nu]}, \quad (\text{C.21})$$

e como se espera, quando o campo \widehat{m}^{μ} é ortogonal às hipersuperfícies, a vorticidade é zero. Subtraindo o traço obtido acima da parte simétrica, obtemos o cisalhamento perturbado

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{\mu\nu} &\equiv \widehat{\mathcal{K}}_{(\mu\nu)} - \frac{\widehat{\mathbf{h}}_{\mu\nu}\widehat{\Theta}}{3}, \\ &= \mathcal{K}_{\mu\nu} - \frac{\mathbf{h}_{\mu\nu}\Theta}{3} + 2(B^{\gamma} + v^{\gamma})\mathcal{K}_{\gamma(\mu}n_{\nu)} + D_{(\mu}v_{\nu)} + D_{(\mu}B_{\nu)} + \phi\mathcal{K}_{\mu\nu} + \dot{C}_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{\mathbf{h}_{\mu\nu}}{3} \left(D_{\alpha}v^{\alpha} + D_{\alpha}B^{\alpha} + \phi\Theta + \dot{C} \right) - \frac{2\Theta}{3} (v_{(\mu}n_{\nu)} + B_{(\mu}n_{\nu)} + C_{\mu\nu}), \\ &= (1 + \phi)\sigma_{\mu\nu} + 2(v^{\gamma} + B^{\gamma})\sigma_{\gamma(\mu}n_{\nu)} + D^{\dagger}{}_{\mu\nu}{}^{\gamma}(v_{\gamma} + B_{\gamma}) \\ &\quad + \dot{C}^{\dagger}{}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}(C\sigma_{\mu\nu} - \Theta C^{\dagger}{}_{\mu\nu}),\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

onde $D^{\dagger}{}_{\mu\nu}{}^{\gamma} \equiv D_{(\mu}\mathbf{h}_{\nu)}{}^{\gamma} - \frac{\mathbf{h}_{\mu\nu}}{3}D^{\gamma}$. O tensor $C^{\dagger}{}_{\mu\nu}$ é definido como a parte sem traço de $C_{\mu\nu}$, *i.e.*,

$$C^{\dagger}{}_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\nu} - \frac{\mathbf{h}_{\mu\nu}}{3}C. \quad (\text{C.23})$$

Como discutimos acima, \widehat{m}^{μ} não é necessariamente geodésico, portanto outra quantidade cinemática de interesse é a aceleração das curvas definidas por \widehat{m}^{μ} , ou seja,

$$\widehat{a}^{\mu} \equiv \widehat{\nabla}_{\widehat{m}}\widehat{m}^{\mu} = (v^{\gamma} + B^{\gamma})\mathcal{K}_{\gamma}{}^{\mu} + \dot{\phi}n^{\mu} + \nabla_n(v^{\mu} + B^{\mu}) - \mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^{\mu}n^{\alpha}n^{\beta}.$$

Usando a Eq. (C.8) projetamos o tensor $\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^{\mu}$ e, assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^{\mu}n^{\alpha}n^{\beta} &= -\frac{g^{\mu\sigma}}{2} (\nabla_n(\varsigma_{\sigma\beta}n^{\beta}) + \nabla_n(\varsigma_{\sigma\alpha}n^{\alpha}) - \nabla_{\sigma}(\varsigma_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}) + \varsigma_{\alpha\beta}\nabla_{\sigma}(n^{\alpha}n^{\beta})), \\ &= 2\dot{\phi}n^{\mu} + \nabla_n B^{\mu} + \nabla^{\mu}\phi + \mathcal{K}^{\mu}{}_{\alpha}B^{\alpha}, \\ &= 2\dot{\phi}n^{\mu} + g^{\mu\nu}\dot{B}_{\nu} + \nabla^{\mu}\phi.\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

Substituindo esse resultado na aceleração obtemos

$$\widehat{a}^{\mu} = -D^{\mu}\phi + \mathbf{h}^{\gamma\mu}\dot{v}_{\gamma}. \quad (\text{C.25})$$

Como a aceleração é de primeira ordem, o seu covetor é dado por $\widehat{a}_{\mu} = \widehat{a}^{\nu}\widehat{g}_{\nu\mu} = -D_{\nu}\phi + \dot{v}_{\nu}$. Se o campo \widehat{m}^{μ} for geodésico então $\dot{v}_{\nu} = D_{\nu}\phi$.

C.2 CURVATURA DA MÉTRICA PERTURBADA

Podemos agora calcular o tensor de Riemann associado à derivada covariante $\widehat{\nabla}_\mu$. Para tanto partimos da sua definição,

$$[\widehat{\nabla}_\mu, \widehat{\nabla}_\nu]w_\alpha \equiv \widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta w_\beta,$$

utilizando a Eq. (C.6) obtemos

$$\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta + 2\nabla_{[\mu}\mathbf{L}_{\nu]\alpha}{}^\beta + 2\mathbf{L}_{\alpha[\mu}{}^\gamma\mathbf{L}_{\nu]\gamma}{}^\beta, \quad (\text{C.26})$$

e conseqüentemente o tensor de Ricci em primeira ordem,

$$\widehat{R}_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha} + \nabla_\mu\mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu - \nabla_\nu\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu. \quad (\text{C.27})$$

Lembrando que o tensor de Ricci é simétrico temos somente três possibilidades para projetá-lo: δR_{nn} , $\mathbf{h}[\delta R_{n\alpha}]$ e $\mathbf{h}[\delta R_{\mu\alpha}]$ as quais chamaremos de tempo–tempo, tempo–espaço e espaço–espaço, respectivamente. Como as equações de Einstein (Eq. 2.2) dependem somente do tensor de Einstein e conseqüentemente do tensor de Ricci e escalar de curvatura, nas próximas seções calcularemos as possíveis projeções descritas acima.

Independente da projeção, o primeiro termo da perturbação $\delta R_{\mu\alpha}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu &= -\nabla_\mu \left[\frac{g^{\nu\sigma}}{2} (\nabla_\nu\varsigma_{\sigma\alpha} + \nabla_\alpha\varsigma_{\sigma\nu} - \nabla_\sigma\varsigma_{\nu\alpha}) \right], \\ &= \nabla_\mu\nabla_\alpha(\phi - C). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Outras projeções úteis nas seções seguintes são:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\alpha}{}^n] &= -\mathbf{h} \left[\frac{n^\gamma n^\mu}{2} (\nabla_\mu\varsigma_{\gamma\alpha} + \nabla_\alpha\varsigma_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma\varsigma_{\mu\alpha}) \right] = -\mathbf{h} \left[\frac{n^\gamma n^\mu}{2} \nabla_\alpha\varsigma_{\gamma\mu} \right], \\ &= -D_\alpha\phi - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma B_\gamma, \\ \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\mu\nu}] &= \mathbf{h} \left[-\frac{1}{2} (\nabla_n\varsigma_{\nu\mu} + \nabla_\mu(n^\alpha\varsigma_{\nu\alpha}) - \mathcal{K}_\mu{}^\alpha\varsigma_{\nu\alpha} - \nabla_\nu(n^\alpha\varsigma_{\alpha\mu}) + \mathcal{K}_\nu{}^\alpha\varsigma_{\alpha\mu}) \right], \\ &= -\nabla_n C_{\mu\nu} + D_{[\mu}B_{\nu]} + 2\mathcal{K}_{[\mu}{}^\alpha C_{\nu]\alpha}, \\ &= -\mathbf{h}_{\sigma\mu}\dot{C}_\nu{}^\sigma + D_{[\mu}B_{\nu]}, \\ \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu] &= -\frac{\mathbf{h}^{\nu\gamma}}{2}\mathbf{h}[\nabla_\mu\varsigma_{\gamma\alpha} + \nabla_\alpha\varsigma_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma\varsigma_{\mu\alpha}], \\ &= -\mathcal{K}_{\mu\alpha}B^\nu - \mathbf{h}^{\nu\gamma} (D_\mu C_{\gamma\alpha} + D_\alpha C_{\gamma\mu} - D_\gamma C_{\mu\alpha}). \end{aligned}$$

Em conjunto com as projeções já calculadas nas equações (C.17) e (C.24), obtemos a lista

completa de projeções do tensor $\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^\mu$:

$$\mathbf{L}_{nn}{}^n = -\dot{\phi}, \quad (\text{C.29})$$

$$\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\mu] = \mathfrak{h}^{\mu\gamma}\dot{B}_\gamma + D^\mu\phi, \quad (\text{C.30})$$

$$\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\beta}{}^n] = -D_\beta\phi - \mathcal{K}_\beta{}^\gamma B_\gamma, \quad (\text{C.31})$$

$$\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^n] = 2\phi\mathcal{K}_{\alpha\beta} + D_{(\alpha}B_{\beta)} + \dot{C}_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\beta\mu}] = -\mathfrak{h}_{\sigma\beta}\dot{C}_\mu{}^\sigma + D_{[\beta}B_{\mu]}, \quad (\text{C.33})$$

$$\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^\mu] = -\mathcal{K}_{\alpha\beta}B^\mu - \mathfrak{h}^{\mu\gamma}(D_\alpha C_{\gamma\beta} + D_\beta C_{\gamma\alpha} - D_\gamma C_{\alpha\beta}). \quad (\text{C.34})$$

C.2.1 Projeção Tempo–Tempo

Usando a Eq. (C.27) obtemos essa projeção como

$$\delta R_{nn} = \nabla_\mu \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu n^\mu n^\alpha - \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu n^\mu n^\alpha.$$

O primeiro termo pode ser obtido diretamente da Eq. (C.28)

$$\nabla_\mu \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu n^\mu n^\alpha = \partial_{ct}^2(\phi - C). \quad (\text{C.35})$$

O outro termo a ser projetado é

$$\nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu n^\mu n^\alpha = \nabla_\nu(\mathbf{L}_{nn}{}^\nu) - 2\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu \mathcal{K}_\nu{}^\mu n^\alpha. \quad (\text{C.36})$$

Utilizando a Eq. (C.24) reescrevemos o primeiro termo do lado direito como

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(\mathbf{L}_{nn}{}^\nu) &= \nabla_\nu(2\dot{\phi}n^\nu + g^{\nu\alpha}\dot{B}_\alpha + \nabla^\nu\phi), \\ &= 2(\ddot{\phi} + \Theta\dot{\phi}) + D^\nu\dot{B}_\nu + \nabla^2\phi, \end{aligned}$$

onde $\nabla^2 \equiv \nabla_\alpha \nabla^\alpha$, que por sua vez quando atuando em escalares pode ser ainda simplificado

$$\nabla^2\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = D^2\phi - \ddot{\phi} - \Theta\dot{\phi},$$

onde $D^2 \equiv D_\alpha D^\alpha$. Obtemos então

$$\nabla_\nu(\mathbf{L}_{nn}{}^\nu) = \ddot{\phi} + \Theta\dot{\phi} + D^\nu\dot{B}_\nu + D^2\phi. \quad (\text{C.37})$$

Agora o segundo termo da Eq. (C.36) depende da projeção obtida na Eq. (C.33) e portanto

$$\mathbf{L}_{\mu n}{}^\nu \mathcal{K}_\nu{}^\mu = -\mathcal{K}^{\mu\nu}\nabla_n C_{\mu\nu},$$

e, assim, a Eq. (C.36) fica escrita como

$$\nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu n^\mu n^\alpha = \ddot{\phi} + \Theta\dot{\phi} + D^\nu\dot{B}_\nu + D^2\phi + 2\mathcal{K}^{\mu\nu}\nabla_n C_{\mu\nu}. \quad (\text{C.38})$$

Com isso, reunindo os resultados acima, obtemos a primeira projeção

$$\delta R_{nn} = -(\ddot{C} + \Theta\dot{\phi} + D^\nu\dot{B}_\nu + D^2\phi + 2\mathcal{K}^{\mu\nu}\nabla_n C_{\mu\nu}). \quad (\text{C.39})$$

C.2.2 Projeção Tempo–Espaço

Para obter essa projeção partimos novamente da Eq. (C.27)

$$\mathfrak{h}[\delta R_{n\alpha}] = \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\mu \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu] - \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu],$$

e usando a Eq. (C.28), o primeiro termo da equação acima fica dado por

$$\mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\mu \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu] = \nabla_n D_\alpha(\phi - C) = D_\alpha \partial_{ct}(\phi - C) - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma(\phi - C). \quad (\text{C.40})$$

O segundo termo pode ser separado em duas partes,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu] &= \mathfrak{h}[n^\mu (\nabla_\nu (\mathfrak{h}_\sigma{}^\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma) - \Theta n_\sigma \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma - n_\sigma \nabla_n \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma)], \\ &= \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu (\mathfrak{h}_\sigma{}^\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma)] - (\Theta + \nabla_n) \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\alpha}{}^n]. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

A segunda parte pode ser calculada usando a Eq. (C.31), *i.e.*,

$$(\Theta + \nabla_n) \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\alpha}{}^n] = -(\Theta + \nabla_n)(D_\alpha \phi + \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma B_\gamma). \quad (\text{C.42})$$

A primeira parte é separada ainda da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu (\mathfrak{h}_\sigma{}^\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma)] &= \mathfrak{h}[n^\mu \mathfrak{h}_\alpha{}^\gamma \nabla_\nu (\mathfrak{h}_\sigma{}^\nu \mathbf{L}_{\mu\gamma}{}^\sigma)], \\ &= \mathfrak{h}[\nabla_\nu \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\alpha}{}^\nu] - \mathcal{K}_\nu{}^\mu \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu] - \mathcal{K}_{\nu\alpha} \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\nu]]. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Das projeções acima, a última é simplesmente a projeção da Eq. (C.30), que fica dada por

$$\mathcal{K}_{\nu\alpha} \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\nu] = \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \dot{B}_\gamma + \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma \phi, \quad (\text{C.44})$$

e a segunda projeção pode ser escrita utilizando a Eq. (C.34) como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu{}^\mu \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu] &= -\mathcal{K}_\nu{}^\mu \mathcal{K}_{\mu\alpha} B^\nu - \mathcal{K}^{\mu\gamma} (D_\mu C_{\gamma\alpha} + D_\alpha C_{\gamma\mu} - D_\gamma C_{\mu\alpha}), \\ &= -\mathcal{K}_\nu{}^\mu \mathcal{K}_{\mu\alpha} B^\nu - \mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\alpha C_{\gamma\mu}. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Para calcular a primeira projeção partimos da Eq. (C.33)

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\nabla_\nu \mathfrak{h}[\mathbf{L}_{n\alpha}{}^\nu]] &= \mathfrak{h}\left[\nabla^\nu \left(-\mathfrak{h}_{\sigma\alpha} \dot{C}_\nu{}^\sigma + D_{[\alpha} B_{\nu]}\right)\right], \\ &= -\mathfrak{h}_{\sigma\alpha} D^\nu \dot{C}_\nu{}^\sigma + D^\nu D_{[\alpha} B_{\nu]}, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

e finalmente, combinando as Eqs. (C.44–C.46), obtemos a Eq. (C.43)

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu (\mathfrak{h}_\sigma{}^\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\sigma)] &= -\mathfrak{h}_{\sigma\alpha} D^\nu \dot{C}_\nu{}^\sigma + D^\nu D_{[\alpha} B_{\nu]} + \mathcal{K}_\nu{}^\mu \mathcal{K}_{\mu\alpha} B^\nu + \mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\alpha C_{\gamma\mu} \\ &\quad - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \dot{B}_\gamma - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma \phi, \\ &= -\mathfrak{h}_{\sigma\alpha} D^\nu \dot{C}_\nu{}^\sigma + \mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\alpha C_{\gamma\mu} + D^\nu D_{[\alpha} B_{\nu]} - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \nabla_n B_\gamma \\ &\quad - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma \phi, \end{aligned}$$

e substituindo na Eq. (C.41) temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[n^\mu \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu] &= -\mathfrak{h}_{\sigma\alpha} D^\nu \dot{C}_\nu{}^\sigma + \mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\alpha C_{\gamma\mu} + D^\nu D_{[\alpha} B_{\nu]} + B_\gamma (\Theta + \nabla_n) \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma \\ &\quad - \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma \phi + (\Theta + \nabla_n) D_\alpha \phi. \end{aligned}$$

Unindo os resultados dessa seção obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[n^\mu \delta R_{\mu\alpha}] &= -D_\alpha \dot{C} + \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma C + \mathfrak{h}_{\sigma\alpha} D^\nu \dot{C}_\nu{}^\sigma - \mathcal{K}^{\mu\gamma} D_\alpha C_{\gamma\mu} - D^\nu D_{[\alpha} B_{\nu]} \\ &\quad - B_\gamma (\Theta + \nabla_n) \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma + \mathcal{K}_\alpha{}^\gamma D_\gamma \phi - \Theta D_\alpha \phi. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

C.2.3 Projeção Espaço–Espaço

Para completar o conjunto de projeções partiremos novamente da Eq. (C.27),

$$\mathfrak{h}[\delta R_{\mu\alpha}] = \mathfrak{h}[\nabla_{\mu}\mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^{\nu}] - \mathfrak{h}[\nabla_{\nu}\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^{\nu}].$$

A primeira projeção é obtida diretamente da Eq. (C.28),

$$\mathfrak{h}[\nabla_{\mu}\mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^{\nu}] = D_{\mu}D_{\alpha}(\phi - C) - \mathcal{K}_{\mu\alpha}\partial_{ct}(\phi - C), \quad (\text{C.48})$$

e o segundo termo é dividido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\nabla_{\nu}\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^{\nu}] &= \mathfrak{h}[\nabla_{\nu}(\delta_{\mu}{}^{\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\sigma}\delta_{\lambda}{}^{\nu}\mathbf{L}_{\gamma\sigma}{}^{\lambda})], \\ &= \mathfrak{h}[\nabla_{\nu}\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^{\nu}]] - 2\mathcal{K}_{\nu(\alpha}\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu)n}{}^{\nu}] - (\Theta + \nabla_n)\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^n]. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Calculamos a primeira projeção usando a Eq. (C.34),

$$\mathfrak{h}[\nabla_{\nu}\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^{\nu}]] = -D_{\nu}(\mathcal{K}_{\mu\alpha}B^{\nu}) - 2D_{\gamma}D_{(\mu}C^{\gamma}{}_{\alpha)} + D^2C_{\mu\alpha}, \quad (\text{C.50})$$

a segunda com a Eq. (C.33),

$$2\mathcal{K}_{\nu(\alpha}\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu)n}{}^{\nu}] = -2\mathcal{K}_{(\alpha}{}^{\gamma}\mathfrak{h}_{\mu)\sigma}\dot{C}_{\gamma}{}^{\sigma} + \mathcal{K}_{\alpha}{}^{\gamma}D_{[\mu}B_{\gamma]} + \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma}D_{[\alpha}B_{\gamma]}, \quad (\text{C.51})$$

e a terceira com a Eq. (C.32),

$$(\Theta + \nabla_n)\mathfrak{h}[\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^n] = (\Theta + \nabla_n)(2\phi\mathcal{K}_{\mu\alpha} + D_{(\mu}B_{\alpha)} + \dot{C}_{\mu\alpha}). \quad (\text{C.52})$$

Reunindo os resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\delta R_{\mu\alpha}] &= (D_{\mu}D_{\alpha} - \mathcal{K}_{\mu\alpha}\partial_{ct})(\phi - C) + D_{\nu}(\mathcal{K}_{\mu\alpha}B^{\nu}) + 2D_{\gamma}D_{(\mu}C^{\gamma}{}_{\alpha)} - D^2C_{\mu\alpha} \\ &\quad - \mathcal{K}_{\alpha}{}^{\gamma}D_{\gamma}B_{\mu} - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma}D_{\gamma}B_{\alpha} + 2(\Theta + \nabla_n)(\phi\mathcal{K}_{\mu\alpha}) + (\Theta + \partial_{ct})D_{(\mu}B_{\alpha)} \\ &\quad + (\Theta + \partial_{ct})\dot{C}_{\mu\alpha} - 4\mathcal{K}_{(\alpha}{}^{\gamma}\dot{C}_{\mu)\gamma} + 4\mathcal{K}_{(\alpha}{}^{\gamma}\mathcal{K}_{\mu)}{}^{\sigma}C_{\gamma\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

e calculando a versão com um índice covariante e outro contravariante, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\delta R_{\mu}{}^{\nu}] &= \mathfrak{h}[\delta R_{\mu\alpha}]\mathfrak{h}^{\alpha\nu} - \mathfrak{h}[R_{\mu n}]B^{\nu} - 2\mathfrak{h}[R_{\mu}{}^{\alpha}]C_{\alpha}{}^{\nu}, \\ &= (D_{\mu}D^{\nu} - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}\partial_{ct})(\phi - C) + D_{\gamma}D_{\mu}C^{\nu\gamma} + D_{\gamma}D^{\nu}C_{\mu}{}^{\gamma} - D^2C_{\mu}{}^{\nu} \\ &\quad - 2D_{\gamma}(\mathcal{K}_{\mu}{}^{[\gamma}B^{\nu]}) + \mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu}D_{\mu}B^{\gamma} + 2(\Theta + \nabla_n)(\phi\mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}) + (\Theta + \partial_{ct})(D_{(\mu}B_{\alpha)}\mathfrak{h}^{\alpha\nu}) \\ &\quad + (\Theta + \partial_{ct})\dot{C}_{\mu}{}^{\nu} + 2(\Theta + \partial_{ct})(C_{\mu}{}^{\gamma}\mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu} - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma}C_{\gamma}{}^{\nu}) \\ &\quad + D_{\mu}\Theta B^{\nu} - 2\mathcal{R}_{\mu}{}^{\gamma}C_{\gamma}{}^{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Na próxima seção calculamos o escalar de curvatura que depende da quantidade,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[\delta R_{\mu\alpha}]h^{\mu\alpha} &= (D^2 - \Theta\partial_{ct})(\phi - C) + D_{\nu}(\Theta B^{\nu}) + 2D_{\gamma}D_{\sigma}C^{\gamma\sigma} - D^2C - 2\mathcal{K}^{\gamma\sigma}\nabla_n C_{\gamma\sigma} \\ &\quad + (\Theta + \nabla_n)(2\phi\Theta + D_{\mu}B^{\mu} + \dot{C} + 2C_{\mu\gamma}\mathcal{K}^{\mu\gamma}). \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

C.2.4 Escalar de Curvatura

Partindo dos resultados das seções anteriores calculamos o escalar de curvatura da métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, *i.e.*,

$$\widehat{R} \equiv \widehat{R}_{\mu\alpha}\hat{g}^{\mu\alpha} = R - R^{\mu\alpha}\varsigma_{\mu\alpha} + \mathfrak{h}[\delta R_{\mu\alpha}]\mathfrak{h}^{\mu\alpha} - \delta R_{nn}. \quad (\text{C.56})$$

O único termo ainda não calculado é

$$\begin{aligned} R^{\mu\alpha}\varsigma_{\mu\alpha} &= 2(R^{nn}\phi + \mathfrak{h}[R^{\mu n}]B_\mu + \mathfrak{h}[R^{\mu\nu}]C_{\mu\alpha}), \\ &= 2(-(\mathcal{K}_{\mu\alpha}\mathcal{K}^{\mu\alpha} + \dot{\Theta})\phi + (D_\alpha\mathcal{K}^{\alpha\mu} - D^\mu\Theta)B_\mu \\ &\quad + (\mathcal{R}^{\mu\alpha} + \nabla_n\mathcal{K}^{\mu\alpha} + \mathcal{K}^{\mu\alpha}\Theta)C_{\mu\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

onde utilizamos as projeções do tensor de Ricci que são dadas nas Eqs (A.29–A.31), calculadas na Seção A.2. Com isso,

$$\begin{aligned} \delta R &= 2(\ddot{C} + \Theta\dot{C} + D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} - D^2C + \mathcal{K}^{\mu\nu}\nabla_n C_{\mu\nu} - \mathcal{R}^{\mu\nu}C_{\mu\nu}) \\ &\quad + 2(\nabla_n D_\mu B^\mu + \mathcal{K}^{\mu\nu}D_\mu B_\nu + B^\mu D_\mu\Theta + \Theta D_\mu B^\mu) \\ &\quad + 2(\Theta\dot{\phi} + 2\phi\dot{\Theta} + D^2\phi + \Theta^2\phi + \mathcal{K}_{\mu\nu}\mathcal{K}^{\mu\nu}\phi). \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

C.2.5 Tensor de Einstein

Para encontrarmos as equações de movimento, precisamos calcular o tensor de Einstein em função das perturbações. Para tanto temos

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = \widehat{R}_{\mu\nu} - \frac{\hat{g}_{\mu\nu}\widehat{R}}{2} = G_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} - \frac{\varsigma_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\delta R}{2}, \quad (\text{C.59})$$

$$\widehat{G}_\mu{}^\alpha = \widehat{G}_{\mu\nu}\hat{g}^{\nu\alpha} = G_\mu{}^\alpha + \left(\delta R_{\mu\nu} - R_\mu{}^\gamma\varsigma_{\gamma\nu} - \frac{g_{\mu\nu}\delta R}{2}\right)g^{\nu\alpha}. \quad (\text{C.60})$$

Como fizemos para o tensor de Ricci, calcularemos $\delta G_{\mu\nu}$ em termos das projeções, sendo a primeira dada por

$$\begin{aligned} \delta G_n{}^n &= \delta R_{nn} - R_n{}^\gamma\varsigma_{\gamma n} + \frac{\delta R}{2}, \\ &= \Theta\dot{C} + D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu}\nabla_n C_{\mu\nu} - D^2C - \mathcal{R}^{\mu\nu}C_{\mu\nu} \\ &\quad + D_\gamma(\Theta B^\gamma - \mathcal{K}^\gamma{}_\nu B^\nu) + (\Theta^2 - \mathcal{K}_{\mu\nu}\mathcal{K}^{\mu\nu})\phi. \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

As projeções cruzadas são

$$\mathfrak{h}[\delta G_n{}^\beta] = \delta R_{n\nu}\mathfrak{h}^{\nu\beta} - R_n{}^\gamma\varsigma_{\gamma\nu}\mathfrak{h}^{\nu\beta}, \quad (\text{C.62})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_{ct}D_\alpha C^{\alpha\beta} + 2\mathcal{K}^{\alpha\gamma}D_\gamma C_\alpha{}^\beta - \mathcal{K}_{\mu\nu}D^\beta C^{\mu\nu} - S_{\alpha\gamma}{}^\beta C^{\alpha\gamma} - D^\beta\dot{C} + \mathcal{K}^{\beta\gamma}D_\gamma C \\ &\quad - \mathfrak{h}^{\alpha\beta}D^\nu D_{[\alpha}B_{\nu]} - B_\gamma(\Theta + \nabla_n)\mathcal{K}^{\beta\gamma} + (\mathcal{K}_{\mu\nu}\mathcal{K}^{\mu\nu} + \dot{\Theta})B^\beta \\ &\quad + \mathcal{K}^{\beta\gamma}D_\gamma\phi - \Theta D^\beta\phi, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{h}[\delta G_\beta{}^n] = \mathfrak{h}[\delta R_{n\beta}] - R_\mu{}^\gamma\varsigma_{\gamma n}\mathfrak{h}^\mu{}_\beta, \quad (\text{C.63})$$

$$\begin{aligned} &= -D_\beta\dot{C} + \mathcal{K}_\beta{}^\gamma D_\gamma C + \mathfrak{h}_{\sigma\beta}D^\nu\dot{C}_\nu{}^\sigma - \mathcal{K}^{\mu\gamma}D_\beta C_{\gamma\mu} \\ &\quad - D^\nu D_{[\beta}B_{\nu]} + \mathcal{R}_{\beta\gamma}B^\gamma \\ &\quad + \mathcal{K}_\beta{}^\gamma D_\gamma\phi - \Theta D_\beta\phi + 2(D_\nu\mathcal{K}^\nu{}_\beta - D_\beta\Theta)\phi. \end{aligned}$$

Por fim, os termos espaciais são

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} [\delta G_\mu^\alpha] \mathfrak{h}_{\alpha\nu} &= r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} (D_\alpha D_\beta \phi + \mathcal{K}_{\alpha\beta} (\dot{\phi} + \Theta \phi) + 2\phi \nabla_n \mathcal{K}_{\alpha\beta}) \\
&+ \phi \mathcal{K}^{\alpha\beta} (\mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathcal{K}_{\mu\nu} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\mu\nu}) \\
&+ \mathcal{K}_\mu^\gamma D_{[\nu} B_{\gamma]} + \mathcal{K}_\nu^\gamma D_{[\mu} B_{\gamma]} \\
&+ r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} ((\Theta + \nabla_n) D_{(\alpha} B_{\beta)} + B^\gamma D_\gamma \mathcal{K}_{\alpha\beta}) - r_\mu^{\gamma\alpha\beta} D_\gamma \mathcal{K}_{\alpha\beta} B_\nu \\
&+ D_\alpha B_\beta (\mathcal{K}_{\mu\nu} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_{\mu\nu} \mathcal{K}^{\alpha\beta}) \\
&+ r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} (2D_\gamma D_{(\alpha} C_{\beta)}^\gamma - D_\alpha D_\beta C) - D^\alpha D^\beta (\mathfrak{h}_{\alpha\beta} C_{\mu\nu} - \mathfrak{h}_{\mu\nu} C_{\alpha\beta}) \\
&+ (\partial_{ct} + \Theta) \dot{C}_{\mu\nu} - 4(\mathcal{K}_{(\mu}^\alpha \mathfrak{h}_{\nu)}^\beta) \dot{C}_{\alpha\beta} + 4\mathcal{K}_{(\mu}^\alpha \mathcal{K}_{\nu)}^\beta C_{\alpha\beta} \\
&+ r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \mathcal{K}_{\alpha\beta} \dot{C} - \mathfrak{h}_{\mu\nu} (\ddot{C} + (\mathcal{K}^{\alpha\beta} - \mathcal{R}^{\alpha\beta}) \nabla_n C_{\alpha\beta}) \\
&- 2C_{\mu\alpha} (\mathcal{R}^\alpha_\nu + (\nabla_n + \Theta) \mathcal{K}^\alpha_\nu),
\end{aligned}$$

onde $r_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv 2\mathfrak{h}_{\mu[\alpha} \mathfrak{h}_{\nu]\beta}$.

C.3 CURVATURA DAS HIPERSUPERFÍCIES

Na Seção C.1 mostramos que um campo vetorial arbitrário \hat{m}^μ define uma série de variáveis cinemáticas associadas a ele. Quando esse campo é também ortogonal às hipersuperfícies, ele define também seções espaciais. Dessa forma podemos então calcular a curvatura associada a essas seções espaciais. Vamos repetir o cálculo feito na Seção A.2.1 porém, como agora \hat{m}^μ não é necessariamente geodésico, temos que

$$\widehat{\nabla}_\mu \hat{m}_\nu = \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} - \hat{m}_\mu \hat{a}_\nu, \quad (\text{C.64})$$

onde $\hat{a}_\mu \equiv \widehat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{m}_\mu$. Além disso $\widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu}$ não é necessariamente simétrico. De forma análoga a Eq. (A.17), definimos a derivada covariante \widehat{D}_μ . Note que estamos fazendo o cálculo no qual \hat{m}_μ não é necessariamente ortogonal às seções espaciais, portanto essa derivada e os tensores que iremos calcular só terão significado de derivada covariante e curvatura quando \hat{m}^μ for ortogonal às hipersuperfícies.

Partimos do comutador da derivada \widehat{D}_μ segunda de um campo u_μ que satisfaz $\hat{\mathfrak{h}} [u_\mu] = u_\mu$, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\mu \widehat{D}_\nu u_\alpha &= \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{\nabla}_\mu \left(\hat{\mathfrak{h}}_\nu^\gamma \hat{\mathfrak{h}}_\alpha^\sigma \widehat{\nabla}_\gamma u_\sigma \right) \right], \\
&= \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\nu} \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{\nabla}_{\hat{m}} u_\alpha \right] - \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \widehat{\mathcal{K}}_\nu^\sigma u_\sigma + \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{\nabla}_\mu \widehat{\nabla}_\nu u_\alpha \right].
\end{aligned}$$

Com isso, o comutador é escrito como

$$[\widehat{D}_\mu, \widehat{D}_\nu] u_\alpha = 2\widehat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{\nabla}_{\hat{m}} u_\alpha \right] + (\widehat{\mathcal{K}}_{\nu\alpha} \widehat{\mathcal{K}}_\mu^\sigma - \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \widehat{\mathcal{K}}_\nu^\sigma) u_\sigma + \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}^\sigma \right] u_\sigma. \quad (\text{C.65})$$

Quando a vorticidade é nula temos

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\mu\nu\alpha}^\beta = \widehat{\mathcal{K}}_{\nu\alpha} \widehat{\mathcal{K}}_\mu^\beta - \widehat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \widehat{\mathcal{K}}_\nu^\beta + \hat{\mathfrak{h}} \left[\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}^\beta \right]. \quad (\text{C.66})$$

Usaremos a expressão acima mesmo quando \hat{m}^μ não for ortogonal às seções espaciais. Nesse caso vale notar que o tensor $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu\alpha\beta}$ não tem as mesmas simetrias que um tensor de Riemann (ver Eqs. A.8–A.11). Contraindo um par de índices, obtemos o tensor de Ricci

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\alpha} = \hat{\mathcal{K}}_{\nu\alpha} \hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\nu - \hat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \hat{\Theta} + \hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{R}_{\mu\alpha} \right] + \hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{R}_{\mu\hat{m}\alpha\hat{m}} \right], \quad (\text{C.67})$$

onde o último termo do lado direito pode ser escrito (analogamente a Eq. A.28) como

$$\hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{R}_{\mu\hat{m}\alpha\hat{m}} \right] = -\hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\nu \hat{\mathcal{K}}_{\nu\alpha} - \hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \right] + \hat{D}_\mu \hat{a}_\alpha + \hat{a}_\mu \hat{a}_\alpha. \quad (\text{C.68})$$

Substituindo na Eq. (C.67) obtemos

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\alpha} = \hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{R}_{\mu\alpha} \right] - \hat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \hat{\Theta} - \hat{\mathfrak{h}} \left[\hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu\alpha} \right] + \hat{D}_\mu \hat{a}_\alpha + \hat{a}_\mu \hat{a}_\alpha, \quad (\text{C.69})$$

definimos também o escalar contraindo a equação acima

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{R} + \hat{R}_{\hat{m}\hat{m}} - \hat{\Theta}^2 - \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\Theta} + \hat{D}_\mu \hat{a}^\mu + \hat{a}_\mu \hat{a}^\mu,$$

e, contraindo a Eq. (C.68), podemos substituir o termo $\hat{R}_{\hat{m}\hat{m}}$ e obter

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{R} - \hat{\mathcal{K}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{K}}_{\nu\mu} - \hat{\Theta}^2 - 2\hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\Theta} + 2\hat{D}_\mu \hat{a}^\mu + 2\hat{a}_\mu \hat{a}^\mu. \quad (\text{C.70})$$

Finalmente escreveremos o escalar acima diretamente em termos das perturbações em primeira ordem. Lembrando que como \hat{a}^μ não tem termo de ordem zero, então o termo $\hat{a}_\mu \hat{a}^\mu$ não contribui em primeira ordem. Para tanto primeiro temos, usando as Eqs. (C.18), (C.20) e (C.25):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{K}}_{\nu\mu} - \mathcal{K}^{\mu\nu} \mathcal{K}_{\nu\mu} &= 2 \left(\mathcal{K}^{\mu\nu} \delta \mathcal{K}_{\nu\mu} - 2 \mathcal{K}_\mu{}^\alpha \mathcal{K}_\nu{}^\beta C_{\alpha\beta} \right), \\ &= 2 \mathcal{K}^{\mu\nu} \left(D_{(\mu} v_{\nu)} + D_{(\mu} B_{\nu)} + \phi \mathcal{K}_{\mu\nu} + \nabla_n C_{\mu\nu} \right), \\ \hat{\Theta}^2 - \Theta^2 &= 2\Theta \delta\Theta = 2\Theta \left(D_\alpha v^\alpha + D_\alpha B^\alpha + \phi\Theta + \dot{C} \right), \\ \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\Theta} - \dot{\Theta} &= \delta m^\mu \nabla_\mu \Theta + \delta \dot{\Theta}, \\ &= (v^\mu + \phi n^\mu + B^\mu) \nabla_\mu \Theta + \nabla_n \left(D_\alpha v^\alpha + D_\alpha B^\alpha + \phi\Theta + \dot{C} \right), \\ \hat{D}_\mu \hat{a}^\mu &= D_\mu \hat{a}^\mu = -D^2 \phi + D^\gamma \dot{v}_\gamma. \end{aligned}$$

Combinando com a Eq. (C.58) e com o auxílio da Eq. (A.41), temos finalmente

$$\delta \mathcal{R} \equiv \hat{\mathcal{R}} - \mathcal{R} = 2 \left((S_\mu - S_{\mu\gamma}{}^\gamma) v^\mu + (\mathcal{K}^{\mu\nu} - \Theta \mathfrak{h}^{\mu\nu}) D_\mu v_\nu - D^2 C - (\mathcal{R}^{\mu\nu} - D^\mu D^\nu) C_{\mu\nu} \right). \quad (\text{C.71})$$

Para calcular a Eq. (C.69) em termo das perturbações, é conveniente calcular o tensor de curvatura das hipersuperfícies da forma $\hat{\mathcal{R}}_\mu{}^\nu$. Nesse caso a derivada temporal da curvatura extrínseca é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\nu &= \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\nu + \hat{\mathcal{K}}_\gamma{}^\nu \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{m}^\gamma - \hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\gamma \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{m}^\nu, \\ &= \hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_\mu{}^\nu - \hat{m}_\mu \hat{a}^\gamma \hat{\mathcal{K}}_\gamma{}^\nu, \end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (C.64), e portanto

$$\hat{\mathbf{h}} \left[\mathcal{L}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \right] = \hat{\mathbf{h}} \left[\hat{\nabla}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \right]. \quad (\text{C.72})$$

Usando a equação acima, reescrevemos a Eq. (C.69) da forma

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu}{}^{\nu} = \hat{\mathbf{h}} \left[\hat{R}_{\mu}{}^{\nu} \right] - \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \hat{\Theta} - \hat{\mathbf{h}} \left[\mathcal{L}_{\hat{m}} \hat{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} \right] + \hat{D}_{\mu} \hat{a}^{\nu} + \hat{a}_{\mu} \hat{a}^{\nu}. \quad (\text{C.73})$$

Expandindo em primeira ordem temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{\mu}{}^{\nu} &= (\delta \mathbf{h}_{\mu}{}^{\gamma} \mathbf{h}_{\beta}{}^{\nu} + \delta \mathbf{h}_{\beta}{}^{\nu} \mathbf{h}_{\mu}{}^{\gamma}) (R_{\gamma}{}^{\beta} - \dot{\mathcal{K}}_{\gamma}{}^{\beta}) + \mathbf{h} [\delta R_{\mu}{}^{\nu}] - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} \delta \Theta - \delta \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} \Theta \\ &\quad - \partial_{ct} \mathbf{h} [\delta \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}] - \mathbf{h} [\mathcal{L}_{\delta m} \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}] + D_{\mu} \hat{a}^{\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

e tomando as projeções da equação acima, temos que $\delta \mathcal{R}_n{}^n = 0$. As projeções cruzadas são dadas por

$$\mathbf{h} [\delta \mathcal{R}_{\mu}{}^n] = -v_{\beta} \mathcal{R}_{\mu}{}^{\beta}, \quad (\text{C.75})$$

$$\mathbf{h} [\delta \mathcal{R}_n{}^{\nu}] = -(v^{\gamma} + B^{\gamma}) \mathcal{R}_{\gamma}{}^{\nu}, \quad (\text{C.76})$$

onde usamos a Eq. (A.29) para reescrever os termos com derivada temporal da curvatura extrínseca. Para calcular a projeção espacial, primeiro note que

$$\begin{aligned} \mathbf{h} [\delta \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}] &= \phi \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} + D_{\mu} v^{\nu} + D_{(\mu} B_{\gamma)} \mathbf{h}^{\gamma\nu} + \dot{C}_{\mu}{}^{\nu} - 2\mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma} C_{\gamma}{}^{\nu} + 2\mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu} C_{\mu}{}^{\gamma}, \\ \mathbf{h} [\mathcal{L}_{\delta m} \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}] &= \phi \dot{\mathcal{K}}_{\mu}{}^{\nu} + (v^{\gamma} + B^{\gamma}) D_{\gamma} \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} + \mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu} D_{\mu} (v^{\gamma} + B^{\gamma}) - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma} D_{\gamma} (v^{\nu} + B^{\nu}), \end{aligned}$$

reunindo os resultados acima obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{h} [\delta \mathcal{R}_{\mu}{}^{\nu}] &= D_{\gamma} D_{\mu} C^{\gamma\nu} + D_{\gamma} D^{\nu} C_{\mu}{}^{\gamma} - D_{\mu} D^{\nu} C - D^2 C_{\mu}{}^{\nu} - 2\mathcal{R}_{\mu}{}^{\gamma} C_{\gamma}{}^{\nu} \\ &\quad + v^{\gamma} (D^{\nu} \mathcal{K}_{\gamma\mu} - 2D_{\gamma} \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu}) - \mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} D_{\gamma} v^{\gamma} - D_{\mu} (\Theta v^{\nu}) + D_{\gamma} (\mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma} v^{\nu}) \\ &\quad + D_{\mu} (\mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu} v^{\gamma}) + v_{\mu} D_{\gamma} \mathcal{K}^{\gamma\nu} - v_{\mu} D^{\nu} \Theta, \\ &= D_{\gamma} D_{\mu} C^{\gamma\nu} + D_{\gamma} D^{\nu} C_{\mu}{}^{\gamma} - D_{\mu} D^{\nu} C - D^2 C_{\mu}{}^{\nu} - 2\mathcal{R}_{\mu}{}^{\gamma} C_{\gamma}{}^{\nu} \\ &\quad + S_{\mu}{}^{\nu}{}_{\gamma} v^{\gamma} + S_{\mu} v^{\nu} + v_{\mu} S^{\nu} - D_{\gamma} (\mathcal{K}_{\mu}{}^{\nu} v^{\gamma}) - \Theta D_{\mu} v^{\nu} \\ &\quad + \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma} D_{\gamma} v^{\nu} + D_{\mu} v^{\gamma} \mathcal{K}_{\gamma}{}^{\nu} - v_{\mu} D_{\gamma} \mathcal{K}^{\gamma\nu} - D_{\gamma} \mathcal{K}_{\mu}{}^{\gamma} v^{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

C.4 PERTURBAÇÕES NO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Como vimos no Apêndice B, podemos descrever fluidos em equilíbrio térmico utilizando um fluido perfeito e as equações termodinâmicas usuais. Porém, esse tratamento é bem motivado somente para fluidos de partículas ultra-relativísticas ou para fluidos frios, pois são casos onde o equilíbrio térmico é possível. Nesta seção faremos a descrição de um fluido perfeito perturbado, tal que não seja necessariamente escrito como fluido perfeito. No caso do fluido perfeito o campo de velocidades que aparece na sua descrição coincide com o autovetor do tensor energia-momento. Dessa forma, podemos escrever o tensor perturbado usando seu autovetor, *i.e.*, $\hat{T}^{\mu}{}_{\nu} \hat{u}^{\nu} = -\hat{\rho} \hat{u}^{\mu}$,

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{\rho} \hat{u}_{\mu} \hat{u}_{\nu} + \hat{p} \hat{\mathbf{p}}_{\mu\nu} + \hat{\Pi}_{\mu\nu}. \quad (\text{C.78})$$

A diferença entre essa decomposição e a feita na Seção B.1 é que nessa o fluxo de energia é nulo. Definindo a projeção $\hat{\rho}_{\mu\nu}$ analogamente ao projetor $h_{\mu\nu}$ definido para os campos n^μ na Seção A.2, temos

$$\hat{\rho}_\mu^\alpha \hat{T}^\mu_\nu \hat{u}^\nu = -\hat{\rho}_\mu^\alpha \hat{\rho} \hat{u}^\mu = 0.$$

Vale ressaltar que na decomposição feita na Seção B.1 temos um total de 13 graus de liberdade, 10 do tensor energia-momento mais 3 do campo n^μ normalizado. Na representação acima, temos somente os 10 graus do tensor energia-momento. Representaremos as variáveis cinemáticas associadas ao campo \hat{u}^μ como aceleração $\hat{a}^\mu \equiv \hat{\nabla}_{\hat{u}} \hat{u}^\mu$ e tensor curvatura extrínseca

$$\hat{E}_{\mu\nu} \equiv \hat{\rho} \left[\hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\nu \right],$$

suas contrações $\hat{G} \equiv \hat{E}^\mu_\mu$ e

$$\hat{C}_{\mu\nu} = \hat{E}_{\mu\nu} - \frac{\hat{\rho}_{\mu\nu}}{3} \hat{G},$$

onde usamos o símbolo

$$\hat{D}_\mu \cdot \equiv \hat{\rho} \left[\hat{\nabla}_\mu \cdot \right]$$

para representar a derivada espacial associada.¹ Existe ainda um campo vetorial \hat{N}^μ , que representa o fluxo do número de partículas,² como discutido no Apêndice B. Vamos nos restringir ao caso onde o fluxo de número tem a mesma direção de \hat{u}^μ , assim $\hat{N}^\mu = -\hat{\varepsilon} \hat{u}^\mu$, onde $\hat{\varepsilon} \equiv \hat{N}^\mu \hat{u}_\mu$ representa a densidade de número medida pelos observadores definidos pelo fluido.

Impomos que $\delta u_\mu = \hat{u}_\mu - n_\mu$, $\delta \rho = \hat{\rho} - \rho$, $\delta \varepsilon = \hat{\varepsilon} - \varepsilon$ e $\delta p = \hat{p} - p$ são da mesma ordem que as perturbações na métrica $\delta g_{\mu\nu}$. O campo \hat{u}^μ representa a quadrivelocidade do fluido e como é normalizado, pode ser decomposto como na Eq. (C.10)

$$\delta u_\mu = -n_\mu \phi + V_\mu, \quad (\text{C.79})$$

onde $V^\mu \equiv h[\delta u^\mu]$. Lembre que todas as equações deduzidas nas Seções C.1 e C.3 valem para a quadrivelocidade do fluido, substituindo v^μ por V^μ . Dada essas definições temos que a perturbação no tensor energia-momento é dada por

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta \rho - 2\phi) n_\mu n_\nu + 2(\rho + p) n_{(\mu} V_{\nu)} + \delta p h_{\mu\nu} + 2p(n_{(\mu} B_{\nu)} + C_{\mu\nu}) + \delta \Pi_{\mu\nu}, \quad (\text{C.80})$$

$$\delta T_\mu{}^\nu = \delta \rho n_\mu n^\nu + (\rho + p)(V_\mu n^\nu + n_\mu(V^\nu + B^\nu)) + \delta p h_\mu{}^\nu + \delta \Pi_\mu{}^\nu, \quad (\text{C.81})$$

$$\delta T^{\mu\nu} = (\delta \rho + 2\phi) n^\mu n^\nu + 2(\rho + p)V^{(\mu} n^{\nu)} + 2\rho n^{(\mu} B^{\nu)} + \delta p h^{\mu\nu} - 2pC^{\mu\nu} + \delta \Pi^{\mu\nu}, \quad (\text{C.82})$$

e a perturbação no traço,

$$\delta T = -\delta \rho + 3\delta p. \quad (\text{C.83})$$

¹Lembrando que esse operador e os tensores respectivos somente serão definidos como curvatura extrínseca e derivada covariante nas hipersuperfícies quando esse campo for irrotacional.

²Em geral, representa qualquer contagem conservada, como número bariônico, número total de carga, entre outras.

A conservação do tensor energia-momento impõe que $\widehat{\nabla}_\mu \widehat{T}^{\mu\nu} = 0$. Usando a forma de $\widehat{T}^{\mu\nu}$, temos as duas projeções

$$\hat{\mathbf{p}} \left[\widehat{\nabla}_\alpha \widehat{T}^\alpha_\mu \right] = \widehat{\mathbf{D}}_\mu \hat{p} + (\hat{\rho} + \hat{p}) \hat{\mathbf{a}}_\mu + \widehat{\mathbf{D}}_\alpha \widehat{\Pi}^\alpha_\mu = 0, \quad (\text{C.84})$$

$$-\hat{u}_\nu \widehat{\nabla}_\mu \widehat{T}^{\mu\nu} = \widehat{\nabla}_{\hat{u}} \hat{p} + \widehat{\mathbf{G}}(\hat{\rho} + \hat{p}) + \widehat{\mathbf{C}}_{\mu\nu} \widehat{\Pi}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.85})$$

Em termo das perturbações temos, da primeira equação,

$$(B^\nu + V^\nu) D_\nu p = 0, \quad (\text{C.86})$$

$$V_\mu \dot{p} + D_\mu \delta p + (\rho + p)(\dot{V}_\mu - D_\mu \phi) + D_\alpha \delta \Pi^\alpha_\mu = 0, \quad (\text{C.87})$$

e da segunda equação

$$\dot{\delta\rho} + \phi \dot{\rho} + (B^\nu + V^\nu) D_\nu \rho + \Theta(\delta\rho + \delta p) + \delta\mathbf{G}(\rho + p) + \sigma_{\mu\nu} \delta \Pi^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.88})$$

onde $\delta\mathbf{G}$ é dado na Eq. (C.20). A última equação relevante para o tensor energia-momento vem da conservação do número de partículas,

$$\widehat{\nabla}_\mu \widehat{N}^\mu = -\widehat{\nabla}_\mu (\hat{u}^\mu \hat{\varepsilon}) = -\left(\widehat{\nabla}_{\hat{u}} \hat{\varepsilon} + \widehat{\mathbf{G}} \hat{\varepsilon} \right) = 0.$$

Em termos das perturbações, temos

$$\dot{\delta\varepsilon} + \phi \dot{\varepsilon} + (B^\nu + V^\nu) D_\nu \varepsilon + \Theta \delta\varepsilon + \delta\mathbf{G} \varepsilon = 0. \quad (\text{C.89})$$

APÊNDICE D

FORMALISMO LAGRANGIANO PARA A GRAVITAÇÃO

As equações de movimento podem ser obtidas a partir do formalismo de Euler-Lagrange. Para esse fim, usamos a ação de Einstein-Hilbert,

$$\widehat{S}_g = \int d^4x \sqrt{-\widehat{g}} \widehat{R} = \int d^4x \widehat{\mathcal{L}}_g, \quad (\text{D.1})$$

onde \widehat{g} é o determinante da métrica $\widehat{g}_{\mu\nu}$ e $\widehat{\mathcal{L}}_g \equiv \sqrt{-\widehat{g}} \widehat{R}$ é a densidade Lagrangiana. Para obtermos a ação associada às perturbações em primeira ordem, precisamos calcular a ação até os termos quadráticos nas perturbações. Neste apêndice, apresentamos as ferramentas necessárias para calcular essa ação.

D.1 DETERMINANTE DA MÉTRICA

De forma rigorosa a integração na variedade é definida como

$$\int_U \mathbf{e} \equiv \int_U d^4x f,$$

onde U é um subconjunto aberto da variedade M , \mathbf{e} é uma 4-forma diferencial, que em um sistema de coordenadas é dada por $\mathbf{e} = e_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = f dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Dessa forma a integração na variedade é definida como a soma das integrais em cada subconjunto disjunto. Definimos a 4-forma (natural) de integração compatível com a métrica como sendo aquela que $e_{\mu\nu\alpha\beta} e^{\mu\nu\alpha\beta} = -4!$ e $\nabla_\gamma e_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Com essas definições temos que

$$e_{\mu\nu\alpha\beta} e^{\mu\nu\alpha\beta} = e_{\mu\nu\alpha\beta} e_{\sigma\gamma\lambda\eta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\gamma} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} = 4! e_{0123}^2 g^{-1} = -4!,$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas usado para calcular e_{0123} , e portanto $e_{0123} = \sqrt{-g}$. Para mais detalhes e uma discussão completa sobre integração em variedades, veja [36, Apêndice B].

D.1.1 Expansão do Determinante

Usando as definições acima, podemos calcular a relação entre a 4-forma natural da métrica perturbada e a de fundo. Para tanto, partimos da definição da 4-forma natural

$$\widehat{e}_{\mu\nu\alpha\beta} \widehat{e}_{\sigma\gamma\lambda\eta} \widehat{g}^{\mu\sigma} \widehat{g}^{\nu\gamma} \widehat{g}^{\alpha\lambda} \widehat{g}^{\beta\eta} = -4!,$$

definimos sua relação com a de fundo como $\hat{e}_{\mu\nu\alpha\beta} = (1 + \delta f)e_{\mu\nu\alpha\beta}$,¹ e, conseqüentemente, $\hat{e}^{\mu\nu\alpha\beta} = (1 + \delta f)^{-1}e^{\mu\nu\alpha\beta}$ com a qual obtemos

$$(1 + \delta f)^2 = -\frac{e^{\mu\nu\alpha\beta}e^{\sigma\gamma\lambda\eta}\hat{g}_{\mu\sigma}\hat{g}_{\nu\gamma}\hat{g}_{\alpha\lambda}\hat{g}_{\beta\eta}}{4!}. \quad (\text{D.2})$$

Expandindo o lado direito em potências do tensor $\varsigma_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu}$ (definido no Apêndice C), temos em segunda ordem

$$(1 + \delta f)^2 = -\frac{-4! + 4e^{\mu\nu\alpha\beta}e_{\sigma\nu\alpha\beta}\varsigma_{\mu}^{\sigma} + 6e^{\mu\nu\alpha\beta}e_{\sigma\gamma\alpha\beta}\varsigma_{\mu}^{\sigma}\varsigma_{\nu}^{\gamma}}{4!}. \quad (\text{D.3})$$

Note que a quantidade $e_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\phi\nu\alpha\beta}$ deve ser proporcional a δ_{μ}^{ϕ} pela anti-simetria do tensor. Como o traço da quantidade acima é $e_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\mu\nu\alpha\beta} = -4!$, pela definição da 4-forma natural, e $\delta_{\mu}^{\mu} = 4$, temos que

$$e_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\phi\nu\alpha\beta} = -3!\delta_{\mu}^{\phi}. \quad (\text{D.4})$$

Seguindo passos similares podemos mostrar que

$$e_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\theta\alpha\beta} = -2!(\delta_{\mu}^{\phi}\delta_{\nu}^{\theta} - \delta_{\mu}^{\theta}\delta_{\nu}^{\phi}). \quad (\text{D.5})$$

Com essas equações obtemos

$$(1 + \delta f)^2 = 1 + \varsigma + \frac{\varsigma^2 - \varsigma_{\mu\nu}\varsigma^{\mu\nu}}{2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\delta f = \frac{\varsigma}{2} - \frac{\varsigma_{\mu\nu}\varsigma^{\mu\nu}}{4} + \frac{\varsigma^2}{8}, \quad (\text{D.7})$$

onde $\varsigma \equiv \varsigma_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ é o traço da perturbação na métrica. Com isso, para um sistema de coordenadas específico, temos a seguinte relação entre os determinantes da métrica perturbada e de fundo,

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g} \left(1 + \frac{\varsigma}{2} - \frac{\varsigma_{\mu\nu}\varsigma^{\mu\nu}}{4} + \frac{\varsigma^2}{8} \right). \quad (\text{D.8})$$

D.1.2 Derivada do Determinante

Além da expansão do determinante, é necessário obter relações que envolvem suas derivadas. Como vimos no começo da seção, a 4-forma natural é definida de forma que sua derivada covariante é nula e, portanto, a derivada espacial (como definido na Eq. A.17) da 4-forma também será nula, já que $D_{\gamma}e_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathbf{h}[\nabla_{\gamma}e_{\mu\nu\alpha\beta}] = 0$.

A derivada de Lie em relação a um campo vetorial arbitrário v^{μ} é calculada como

$$\mathcal{L}_v e_{\mu\nu\alpha\beta} = v^{\gamma}\nabla_{\gamma}e_{\mu\nu\alpha\beta} + e_{\gamma\nu\alpha\beta}\nabla_{\mu}v^{\gamma} + e_{\mu\gamma\alpha\beta}\nabla_{\nu}v^{\gamma} + e_{\mu\nu\gamma\beta}\nabla_{\alpha}v^{\gamma} + e_{\mu\nu\alpha\gamma}\nabla_{\beta}v^{\gamma}.$$

Usando o fato que a derivada covariante da 4-forma é zero, a Eq. (D.4) e que $\mathcal{L}_v e_{\mu\nu\alpha\beta} \propto e_{\mu\nu\alpha\beta}$, obtemos

$$\mathcal{L}_v e_{\mu\nu\alpha\beta} = (\nabla_{\mu}v^{\mu})e_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{D.9})$$

¹Como o espaço das 4-formas em uma variedade de quatro dimensões é unidimensional, todas as 4-formas são proporcionais entre si.

Como a derivada de Lie satisfaz a regra de Leibniz, temos que

$$\mathcal{L}_v(fe_{\mu\nu\alpha\beta}) = (v^\gamma \nabla_\gamma f + f \nabla_\gamma v^\gamma) e_{\mu\nu\alpha\beta} = \nabla_\gamma (fv^\gamma) e_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{D.10})$$

Pode-se mostrar que uma 4-forma do tipo $(\nabla_\mu v^\mu) e_{\mu\nu\alpha\beta}$ pode ser escrita como uma derivada exterior da 3-forma $v^\mu e_{\mu\nu\alpha\beta}$. Portanto, pelo teorema de Stokes,² sua integral é dada pela integral da superfície determinada pelo campo v^μ .

Nas seções a seguir, chamaremos de termos de superfície aqueles da forma $\mathcal{L}_v(fe_{\mu\nu\alpha\beta})$ ou $(\nabla_\mu v^\mu) e_{\mu\nu\alpha\beta}$ e, por simplicidade, usaremos o símbolo $\sqrt{-g}$ para representar a 4-forma $e_{\mu\nu\alpha\beta}$. Vale ressaltar que esses termos não são relevantes para o princípio variacional.

D.2 LAGRANGIANA DA GRAVITAÇÃO

Para calcular o escalar de curvatura partimos da Eq. (C.26) e obtemos o tensor de Ricci sem desprezar nenhum termo,

$$\widehat{R}_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha} + \nabla_\mu \mathbf{L}_{\mathbf{a}\alpha} - \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\nu + \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\gamma \mathbf{L}_{\mathbf{a}\gamma} - \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\gamma \mathbf{L}_{\mu\gamma}{}^\nu,$$

onde $\mathbf{L}_{\mathbf{a}\alpha} \equiv \mathbf{L}_{\nu\alpha}{}^\nu$. Pela Eq. (C.8), vemos que $\mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\gamma$ não tem termos de ordem zero, pois o termo $\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} = \nabla_\mu \varsigma_{\mu\nu}$ parte de ordem um. Com isso, temos

$$\widehat{R} = R + R_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\alpha} + \nabla_\mu (\mathbf{L}_{\mathbf{a}}{}^\mu - \mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu) + \mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu \mathbf{L}_{\mathbf{a}\mu} - \mathbf{L}_{\mu\nu\alpha} \mathbf{L}^{\mu\alpha\nu} + (\nabla_\mu \mathbf{L}_{\mathbf{a}\nu} - \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\gamma) \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varsigma_{\mu\nu}^3), \quad (\text{D.11})$$

onde $\mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu \equiv g^{\alpha\beta} \mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^\mu$. O próximo passo é calcular a perturbação da inversa da métrica até segunda ordem, para tanto temos

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\alpha} \hat{g}^{\alpha\nu} &= \delta_\mu{}^\nu + \varsigma_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} + \varsigma_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} = \delta_\mu{}^\nu, \\ \varsigma_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} + \varsigma_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Usando o resultado em primeira ordem (Eq. C.1), obtemos

$$\delta g^{\mu\nu} = -\varsigma^{\mu\nu} + \varsigma^{\mu\lambda} \varsigma_\lambda{}^\nu + \mathcal{O}(\varsigma_{\mu\nu}^3). \quad (\text{D.12})$$

Calculamos agora o produto $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}} = \sqrt{-\hat{g}} \widehat{R}$ utilizando as Eqs. (D.8), (D.11) e (D.12),

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}} &= \mathcal{L}_{\mathbf{g}} + \sqrt{-g} \left(-G_{\mu\nu} \varsigma^{\mu\nu} + \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) \varsigma^\mu{}_\alpha \left(\varsigma^{\alpha\nu} - \frac{g^{\alpha\nu} \varsigma}{2} \right) \right) + \mathcal{L}_{\text{sup}}^{(1)} \\ &\quad + \sqrt{-g} \left(\mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu \mathbf{L}_{\mathbf{a}\mu} - \mathbf{L}_{\mu\nu\alpha} \mathbf{L}^{\mu\alpha\nu} - (\nabla_\mu \mathbf{L}_{\mathbf{a}\nu} - \nabla_\nu \mathbf{L}_{\mu\alpha}{}^\gamma) \varsigma^{\mu\nu} + \nabla_\mu (\mathbf{L}_{\mathbf{a}}{}^\mu - \mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu) \frac{\varsigma}{2} \right), \end{aligned}$$

onde os termos de superfície de primeira ordem são dados por

$$\mathcal{L}_{\text{sup}}^{(1)} = \sqrt{-g} \nabla_\mu (\mathbf{L}_{\mathbf{a}}{}^\mu - \mathbf{L}_{\mathbf{b}}{}^\mu). \quad (\text{D.13})$$

Termos com derivada covariante de \mathbf{L} equivalem aos termos de derivada segunda nas perturbações. Para simplificá-los, primeiro note que os termos de \mathbf{L} aparecem de forma

²Ver Teorema B.2.1 da Ref. [36].

quadrática e, logo, precisamos somente de \mathbf{L} em primeira ordem. Contraindo a Eq. (C.9) temos

$$\mathbf{L}_{a\mu} = -\frac{\nabla_\mu \zeta}{2}, \quad \mathbf{L}_{b\mu} = -\nabla_\nu \zeta^\nu{}_\mu + \frac{\nabla_\mu \zeta}{2},$$

e tomando a Eq. (C.7) em primeira ordem,

$$\nabla_\mu \zeta_{\alpha\beta} = -2\mathbf{L}_{\mu(\alpha\beta)}.$$

Reescrevemos os termos com derivadas de \mathbf{L} como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \mathbf{L}_{a\nu} \zeta^{\mu\nu} &= \nabla_\mu (\mathbf{L}_{a\nu} \zeta^{\mu\nu}) - \mathbf{L}_{a\nu} \nabla_\mu \zeta^{\mu\nu} = \nabla_\mu (\mathbf{L}_{a\nu} \zeta^{\mu\nu}) + \mathbf{L}_{a\nu} (\mathbf{L}_a{}^\nu + \mathbf{L}_b{}^\nu), \\ \nabla_\gamma \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma \zeta^{\mu\nu} &= \nabla_\gamma (\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma \zeta^{\mu\nu}) - \mathbf{L}^{\mu\nu\gamma} \nabla_\gamma \zeta_{\mu\nu} = \nabla_\gamma (\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma \zeta^{\mu\nu}) + 2\mathbf{L}^{\mu\nu\gamma} \mathbf{L}_{\gamma(\mu\nu)}, \\ \nabla_\mu (\mathbf{L}_a{}^\mu - \mathbf{L}_b{}^\mu) \frac{\zeta}{2} &= \nabla_\mu \left((\mathbf{L}_a{}^\mu - \mathbf{L}_b{}^\mu) \frac{\zeta}{2} \right) + (\mathbf{L}_a{}^\mu - \mathbf{L}_b{}^\mu) \mathbf{L}_{a\mu}, \end{aligned}$$

e substituímos esses resultados na equação de $\widehat{\mathcal{L}}_g$ obtendo

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_g &= \mathcal{L}_g + \sqrt{-g} \left(-G_{\mu\nu} \zeta^{\mu\nu} + \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) \zeta^\mu{}_\alpha \left(\zeta^{\alpha\nu} - \frac{g^{\alpha\nu} \zeta}{2} \right) \right) \\ &\quad + \sqrt{-g} (\mathbf{L}^{\mu\nu\gamma} \mathbf{L}_{\gamma(\mu\nu)} - \mathbf{L}_{a\mu} \mathbf{L}_b{}^\mu) + \mathcal{L}_{\text{sup}}^{(1)} + \mathcal{L}_{\text{sup}}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

onde os novos termos de superfície são

$$\mathcal{L}_{\text{sup}}^{(2)} = \sqrt{-g} \nabla_\mu \left(\mathbf{L}_{\alpha\beta}{}^\mu \zeta^{\alpha\beta} + (\mathbf{L}_a{}^\mu - \mathbf{L}_b{}^\mu) \frac{\zeta}{2} - \mathbf{L}_{a\nu} \zeta^{\mu\nu} \right). \quad (\text{D.15})$$

Por fim, escrevemos os termos quadráticos em \mathbf{L} como

$$\mathbf{L}^{\mu\nu\gamma} \mathbf{L}_{\gamma(\mu\nu)} - \mathbf{L}_{a\mu} \mathbf{L}_b{}^\mu = \frac{\nabla_\gamma \zeta_{\mu\nu}}{4} (\nabla^\mu \zeta^{\gamma\nu} + \nabla^\nu \zeta^{\gamma\mu} - \nabla^\gamma \zeta^{\mu\nu}) + \frac{\nabla_\gamma \zeta}{2} \left(\frac{\nabla^\gamma \zeta}{2} - \nabla_\sigma \zeta^{\sigma\gamma} \right),$$

e, com esses resultados, a perturbação em segunda ordem na Lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_g^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \frac{\mathcal{L}_{\text{sup}}^{(2)}}{\sqrt{-g}} + \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) \zeta^\mu{}_\alpha \left(\zeta^{\alpha\nu} - \frac{g^{\alpha\nu} \zeta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\nabla_\gamma \zeta_{\mu\nu}}{4} (2\nabla^\mu \zeta^{\gamma\nu} - \nabla^\gamma \zeta^{\mu\nu}) + \frac{\nabla_\gamma \zeta}{2} \left(\frac{\nabla^\gamma \zeta}{2} - \nabla_\sigma \zeta^{\sigma\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Formando a ação com a Lagrangiana acima, podemos obter as equações de movimento para as perturbações em primeira ordem variando essa ação em relação ao campo $\zeta_{\mu\nu}$. Em primeira ordem o tensor de Einstein é dado por

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} \zeta^{\alpha\beta} + \left(\zeta_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} \zeta}{2} \right) G \right) \\ &\quad + \nabla_\mu \mathbf{L}_{a\nu} - \nabla_\gamma \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\gamma \mathbf{L}_a{}^\gamma - \nabla_\gamma \mathbf{L}_b{}^\gamma). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

A versão com os índices contravariantes está relacionada com a expansão acima como

$$\delta G^{\mu\nu} = \delta G_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - 2\zeta^{\gamma(\mu} G^{\nu)\gamma}, \quad (\text{D.18})$$

e deve ser reobtido variando a ação

$$S_{\text{g}}^{(2)} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{g}}^{(2)}. \quad (\text{D.19})$$

Para isso, note que a variação em relação aos termos com derivada covariante de $\zeta_{\mu\nu}$ podem ser escritos esquematicamente como,³

$$\nabla_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\mu\nu\gamma}}{\partial \nabla_{\sigma} \zeta_{\alpha\beta}} P \right) = -\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \delta_{\gamma}^{(\alpha} \delta_{\nu}^{\beta)} + \nabla_{\nu} \delta_{\gamma}^{(\alpha} \delta_{\mu}^{\beta)} - \nabla_{\gamma} \delta_{\mu}^{(\alpha} \delta_{\nu}^{\beta)}) P,$$

para qualquer tensor P . Usando a fórmula acima na Eq. (D.14), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\mu\nu\gamma}}{\partial \nabla_{\sigma} \zeta_{\alpha\beta}} \mathbf{L}^{\gamma\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \mathbf{L}^{\mu(\alpha\beta)} + \nabla_{\nu} \mathbf{L}^{\alpha\beta\nu} - \nabla_{\gamma} \mathbf{L}^{\gamma(\alpha\beta)}) = -\frac{\nabla_{\nu} \mathbf{L}^{\alpha\beta\nu}}{2}, \\ \nabla_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\mu\nu\gamma}}{\partial \nabla_{\sigma} \zeta_{\alpha\beta}} g^{\nu\gamma} \mathbf{L}_{\text{b}}^{\mu} \right) &= -\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} g^{\alpha\beta} + \nabla^{(\alpha} \delta_{\mu}^{\beta)} - \nabla^{(\beta} \delta_{\mu}^{\alpha)}) \mathbf{L}_{\text{b}}^{\mu} = -\frac{\nabla_{\mu} \mathbf{L}_{\text{b}}^{\mu} g^{\alpha\beta}}{2}, \\ \nabla_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\mu\nu\gamma}}{\partial \nabla_{\sigma} \zeta_{\alpha\beta}} g^{\mu\nu} \mathbf{L}_{\text{a}}^{\gamma} \right) &= -\frac{1}{2} (2\nabla^{(\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta)} - \nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta}) \mathbf{L}_{\text{a}}^{\gamma} = -\nabla^{(\alpha} \mathbf{L}_{\text{a}}^{\beta)} + \frac{\nabla_{\gamma} \mathbf{L}_{\text{a}}^{\gamma} g^{\alpha\beta}}{2}. \end{aligned}$$

Somando esses resultados, temos que a variação da parte com derivadas,

$$S_{\text{g,deriv}}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathbf{L}^{\mu\nu\gamma} \mathbf{L}_{\gamma(\mu\nu)} - \mathbf{L}_{\text{a}\mu} \mathbf{L}_{\text{b}}^{\mu}), \quad (\text{D.20})$$

é dada por

$$\frac{\delta S_{\text{g,deriv}}^{(2)}}{\delta \zeta_{\alpha\beta}} = -\sqrt{-g} \left(\nabla^{(\alpha} \mathbf{L}_{\text{a}}^{\beta)} - \nabla_{\nu} \mathbf{L}^{\alpha\beta\nu} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2} (\nabla_{\gamma} \mathbf{L}_{\text{a}}^{\gamma} - \nabla_{\mu} \mathbf{L}_{\text{b}}^{\mu}) \right). \quad (\text{D.21})$$

O próximo passo é calcular a variação dos termos sem derivadas,

$$S_{\text{g},\zeta}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) \zeta^{\mu}{}_{\alpha} \left(\zeta^{\alpha\nu} - \frac{g^{\alpha\nu} \zeta}{2} \right) \right), \quad (\text{D.22})$$

em relação ao campo $\zeta_{\alpha\beta}$, *i.e.*,

$$\frac{\delta S_{\text{g},\zeta}^{(2)}}{\delta \zeta_{\alpha\beta}} = \sqrt{-g} \left(-\frac{R^{\mu\nu} \zeta_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \zeta^{\alpha\beta} R}{2} + 2G^{\mu(\alpha} \zeta_{\mu}^{\beta)} - \frac{\zeta G^{\alpha\beta}}{2} \right). \quad (\text{D.23})$$

³Os termos que envolvem derivada no campo $\zeta_{\mu\nu}$ são escritos como uma derivada total menos o termo com a derivada agindo sobre o coeficiente, *i.e.*, $\sqrt{-g} P^{\mu\alpha\beta} \nabla_{\mu} \zeta_{\alpha\beta} = \nabla_{\mu} (\sqrt{-g} P^{\mu\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}) - \sqrt{-g} \zeta_{\alpha\beta} \nabla_{\mu} P^{\mu\alpha\beta}$. Portanto, na fórmula, estamos desprezando o termo de superfície.

Usando a Eq. (D.17), temos que a variação da Lagrangiana completa da gravitação em segunda ordem é dada por,

$$\frac{\delta S_g^{(2)}}{\delta \varsigma_{\alpha\beta}} = \sqrt{-g} \left(-\delta G^{\alpha\beta} - \frac{\varsigma G^{\alpha\beta}}{2} \right), \quad (\text{D.24})$$

que possui um termo adicional a perturbação do tensor de Einstein.

Na próxima seção obteremos a perturbação no tensor energia–momento da Lagrangiana da matéria mais um termo adicional, ao expandi-la em segunda ordem. De forma que, ao variarmos em relação a $\varsigma_{\mu\nu}$, obteremos as perturbações de primeira ordem nas equações de Einstein mais termos adicionais. Esses termos combinados com aqueles da Lagrangiana de matéria se anulam com as equações de fundo.

D.2.1 Decomposição em Hipersuperfícies

Na Seção D.2 escrevemos a Lagrangiana da gravitação em segunda ordem nas perturbações e mostramos que a variação da ação formada por ela fornece as equações de movimento corretas. Para quantizar essas teorias, é necessário seccionar a variedade em hipersuperfícies, para definir uma Hamiltoniana para o sistema, assim como ter a álgebra de Lie das transformações canônicas dos campos. Portanto, nessa seção faremos a decomposição da Lagrangiana em termos das decomposições descritas nas Eqs. (C.2–C.4).

Para calcular a Lagrangiana dada na Eq. (D.14), obtemos primeiro que os tensores $\mathbf{L}_{a\mu}$ e $\mathbf{L}_{b\mu}$ podem ser escritos, usando as Eqs. (C.29–C.34), como

$$\mathbf{L}_{a\mu} = n_\mu \partial_{ct}(C - \phi) - D_\mu(C - \phi), \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{b\mu} = & -n_\mu(\partial_{ct}(C + \phi) + 2\Theta\phi + D_\gamma B^\gamma + 2\mathcal{K}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}) \\ & - ((\Theta + \partial_{ct})B_\mu + 2D_\gamma C^\gamma{}_\mu + D_\mu(\phi - C)), \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

e, portanto, o produto $\mathbf{L}_a{}^\mu \mathbf{L}_{b\mu}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a{}^\mu \mathbf{L}_{b\mu} = & \partial_{ct}(C - \phi)(\partial_{ct}(C + \phi) + 2\Theta\phi + D_\gamma B^\gamma + 2\mathcal{K}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}) \\ & + D^\mu(C - \phi)((\Theta + \partial_{ct})B_\mu + 2D_\gamma C^\gamma{}_\mu + D_\mu(\phi - C)). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Para calcular o produto $\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma \mathbf{L}_\gamma{}^{\mu\nu}$, decomposmos o tensor $\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma$ da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma = & -n_\mu n_\nu n^\gamma \mathbf{L}_{nn}{}^n - n_\mu \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\nu}{}^\gamma] - n_\nu \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu n}{}^\gamma] - n^\gamma \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^n] \\ & + \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma] + n_\mu n_\nu \mathbf{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\gamma] + n_\mu n^\gamma \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\nu}{}^n] + n_\nu n^\gamma \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu n}{}^n], \end{aligned}$$

e assim o produto é

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma \mathbf{L}_\gamma{}^{\mu\nu} = & -\mathbf{L}_{nn}{}^n \mathbf{L}_{nn}{}^n - \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\gamma}{}^\nu] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\nu}{}^\gamma] - 2\mathbf{h}[\mathbf{L}_n{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^n] \\ & + \mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma] + 2\mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma{}^{nn}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\gamma] + \mathbf{h}[\mathbf{L}_n{}^{\mu n}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu n}{}^n]. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Os produtos individuais são dados por,

$$\mathbf{L}_{nn}{}^n \mathbf{L}_{nn}{}^n = \dot{\phi}^2, \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\gamma}{}^\nu] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\nu}{}^\gamma] = (\dot{C}_\nu{}^\gamma - \mathbf{h}^{\gamma\sigma} D_{[\sigma} B_{\nu]}) (\dot{C}_\gamma{}^\nu - \mathbf{h}_{\gamma\beta} D^{[\nu} B^{\beta]}), \quad (\text{D.30})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{L}_n{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^n] = -\dot{C}_\nu{}^\sigma (2\phi \mathcal{K}_\sigma{}^\nu + D_{(\sigma} B_{\gamma)}) \mathbf{h}^{\gamma\nu} + \dot{C}_\sigma{}^\nu + 2\mathcal{K}_\beta{}^\nu C_\sigma{}^\beta, \quad (\text{D.31})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^\gamma] = (\mathcal{K}_\gamma{}^\mu B^\nu + D_\gamma C^{\mu\nu}) (\mathcal{K}_{\mu\nu} B^\gamma + 2D_{(\mu} C_{\nu)}{}^\gamma - D^\gamma C_{\mu\nu}), \quad (\text{D.32})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma{}^{nn}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{nn}{}^\gamma] = -(D_\gamma \phi + \mathcal{K}_\gamma{}^\sigma B_\sigma) (\mathbf{h}^{\gamma\beta} \dot{B}_\beta + D^\gamma \phi), \quad (\text{D.33})$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{L}_n{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^n] = (D_\gamma \phi + \mathcal{K}_\gamma{}^\sigma B_\sigma) (D^\gamma \phi + \mathcal{K}^{\gamma\beta} B_\beta). \quad (\text{D.34})$$

Usando as fórmulas acima, podemos calcular a Lagrangiana em função das perturbações decompostas. Nesse trabalho faremos esse cálculo somente no caso onde a métrica de fundo é de FLRW.

D.2.1.1 Métrica de Fundo Homogênea e Isotrópica Podemos aplicar as simplificações obtidas nos Capítulos 2 e 3 para o conjunto de métricas homogêneas e isotrópicas (modelos de FLRW). Primeiramente calculamos a seguinte soma $l_1 \equiv -\mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\gamma}{}^\nu] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{n\nu}{}^\gamma] - 2\mathbf{h}[\mathbf{L}_n{}^{\mu\nu}] \mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}{}^n]$,

$$l_1 = \dot{C}_\nu{}^\gamma \dot{C}_\gamma{}^\nu + 2D^\gamma B_\nu \dot{C}_\gamma{}^\nu - D_{[\nu} B_{\sigma]} D^{[\sigma} B^{\nu]} + \frac{4\Theta}{3} (\phi \dot{C} + \dot{C}_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma), \quad (\text{D.35})$$

onde usamos a forma da curvatura extrínseca para essas métricas (Eq. 2.10). Usando a Eq. (C.19), obtemos a relação

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}_\nu{}^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma{}^\nu &= \dot{C}_\nu{}^\gamma \dot{C}_\gamma{}^\nu + 2D^\gamma B_\nu \dot{C}_\gamma{}^\nu + D_{(\sigma} B_{\nu)} D^{(\sigma} B^{\nu)} \\ &+ \frac{\Theta^2}{3} \phi^2 + \frac{2\Theta\phi}{3} (D_\gamma B^\gamma + \dot{C}). \end{aligned}$$

Substituindo a equação acima na Eq. (D.35), temos

$$l_1 = \delta\mathcal{K}_\nu{}^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma{}^\nu - D_\nu B_\sigma D^\sigma B^\nu + \frac{\Theta}{3} (2\phi \delta\Theta + 4\dot{C}_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma - 3\Theta\phi^2 - 4\phi D_\gamma B^\gamma).$$

Lembrando que $\sqrt{-g} = \Theta\sqrt{-g}$ (veja Eq. D.9), reescrevemos os termos

$$\begin{aligned} \frac{4\Theta}{3} \dot{C}_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{ct} \left(\sqrt{-g} \frac{2\Theta}{3} C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma \right) - 2 \left(\frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3} \right) C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma, \\ -D_\nu B_\sigma D^\sigma B^\nu &= -D_\nu (B_\sigma D^\sigma B^\nu) + D^\sigma (B_\sigma D_\nu B^\nu) + 2KB_\sigma B^\sigma - (D_\nu B^\nu)^2, \end{aligned}$$

onde usamos a forma do tensor de Riemann nas hipersuperfícies dada na Eq. (2.6). Logo, temos

$$\begin{aligned} l_1 &= \delta\mathcal{K}_\nu{}^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma{}^\nu + \frac{2\phi\Theta(\delta\Theta - 2D_\gamma B^\gamma)}{3} + 2KB_\sigma B^\sigma - (D_\nu B^\nu)^2 \\ &- \Theta^2 \phi^2 - 2 \left(\frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3} \right) C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma, \end{aligned}$$

onde omitimos o termos de derivada total. Reorganizando os termos da Eq. (D.27) com derivada temporal, $l_2 = -\partial_{ct}(C - \phi)(\partial_{ct}(C + \phi) + 2\Theta\phi + D_\gamma B^\gamma + 2\mathcal{K}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta})$, temos

$$l_2 = (\dot{\phi} + \Theta\phi)^2 - \delta\Theta^2 + D_\gamma B^\gamma (\dot{\phi} + \delta\Theta + \Theta\phi) + \frac{2\Theta C}{3} \partial_{ct}(\phi - C). \quad (\text{D.36})$$

Com as relações abaixo

$$\begin{aligned} \frac{2\Theta C \dot{\phi}}{3} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\Theta C \phi)}{\sqrt{-g}} - (\Theta^2 + \dot{\Theta})C\phi + \Theta^2\phi^2 - \Theta\delta\Theta\phi + \Theta\phi D_\gamma B^\gamma \right), \\ -\frac{2\Theta C \dot{C}}{3} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\Theta C^2)}{\sqrt{-g}} - (\Theta^2 + \dot{\Theta})C^2 \right), \\ 2\Theta\phi\dot{\phi} &= \frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\Theta\phi^2)}{\sqrt{-g}} - (\dot{\Theta} + \Theta^2)\phi^2, \\ D_\gamma B^\gamma \dot{\phi} &= \frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}D_\gamma B^\gamma \phi)}{\sqrt{-g}} - \frac{\Theta}{3}\phi D_\gamma B^\gamma - \phi D^\gamma \dot{B}_\gamma, \end{aligned}$$

eliminamos os termos com derivada temporal de ϕ e C , obtendo

$$\begin{aligned} l_2 &= \dot{\phi}^2 - \dot{\Theta}\phi^2 + \frac{2\Theta^2\phi^2}{3} + \delta\Theta \left(-\delta\Theta + D_\gamma B^\gamma - \frac{2\Theta\phi}{3} \right) \\ &\quad - \phi D^\gamma \dot{B}_\gamma + \frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3}(C^2 - 2C\phi), \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

onde omitimos os termos de derivada total. Reunindo os outros termos da Eq. (D.27) com os produtos dados nas Eqs. (D.29), (D.33) e (D.34), $l_3 \equiv -\mathbf{L}_{a\mu}\mathbf{L}_b^\mu - l_2 - \mathbf{L}_{nn}^n \mathbf{L}_{nn}^n + 2\mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma^{nn}]\mathbf{h}[\mathbf{L}_{nn}^\gamma] + \mathbf{h}[\mathbf{L}_n^{\mu n}]\mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu n}^n]$, obtemos

$$\begin{aligned} l_3 &= -\dot{\phi}^2 - D^\gamma \phi \dot{B}_\gamma - D^\gamma C \dot{B}_\gamma - \frac{2\Theta B^\gamma \dot{B}_\gamma}{3} - \Theta B_\gamma D^\gamma C - \frac{\Theta}{3} B_\gamma D^\gamma \phi + \frac{\Theta^2 B_\gamma B^\gamma}{9} \\ &\quad + D_\gamma C D^\gamma C - 2D_\gamma \phi D^\gamma C + 2D^\gamma \phi D_\alpha C^\alpha{}_\gamma - 2D^\gamma C D_\alpha C^\alpha{}_\gamma. \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Usando as relações abaixo,

$$\begin{aligned} -\dot{B}_\gamma D^\gamma C &= -\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}B_\gamma D^\gamma C)}{\sqrt{-g}} + D_\mu(B^\mu(\delta\Theta - D_\gamma B^\gamma - \Theta\phi)) \\ &\quad + \frac{\Theta}{3} B_\gamma D^\gamma C - \delta\Theta D_\gamma B^\gamma + (D_\gamma B^\gamma)^2 + \Theta\phi D_\gamma B^\gamma, \\ -\frac{2\Theta B^\gamma \dot{B}_\gamma}{3} &= -\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\Theta B_\gamma B^\gamma)}{3\sqrt{-g}} + \frac{(3\dot{\Theta} + \Theta^2)}{9} B_\gamma B^\gamma, \\ -D^\gamma \phi \dot{B}_\gamma &= -D^\gamma(\phi \dot{B}_\gamma) + \phi D^\gamma \dot{B}_\gamma, \\ -\frac{\Theta}{3} B_\gamma D^\gamma \phi &= -D^\gamma \left(\frac{\Theta}{3} B_\gamma \phi \right) + \frac{\Theta\phi}{3} D^\gamma B_\gamma, \end{aligned}$$

reescrevemos a Eq. (D.38) como

$$l_3 = -\dot{\phi}^2 + \phi D^\gamma \dot{B}_\gamma - \frac{2\Theta}{3} B_\gamma D^\gamma C - \delta\Theta D_\gamma B^\gamma + (D_\gamma B^\gamma)^2 + \frac{4\Theta\phi}{3} D_\gamma B^\gamma + \frac{(3\dot{\Theta} + 2\Theta^2)}{9} B_\gamma B^\gamma + D_\gamma C D^\gamma C - 2D_\gamma \phi D^\gamma C + 2D^\gamma(\phi - C) D_\alpha C^\alpha_\gamma, \quad (\text{D.39})$$

onde novamente omitimos as derivadas totais.

O último termo a ser avaliado é dado na Eq. (D.32), $l_4 = \mathbf{h}[\mathbf{L}_\gamma^{\mu\nu}]\mathbf{h}[\mathbf{L}_{\mu\nu}^\gamma]$, que fica simplificado como

$$l_4 = \frac{\Theta^2}{9} B_\gamma B^\gamma + \frac{2\Theta B_\gamma D^\gamma C}{3} + 2D_\gamma C^{\mu\nu} D_\mu C_\nu^\gamma - D_\gamma C^{\mu\nu} D^\gamma C_{\mu\nu}. \quad (\text{D.40})$$

Reunindo todos os termos calculados, a parte da Lagrangiana que resulta dos termos que dependem do tensor $\mathbf{L}_{\mu\nu}^\gamma$, $\mathcal{L}_{\text{g,deriv}}^{(2)} = \sqrt{-g}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$, é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{\text{g,deriv}}^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \delta\mathcal{K}_\nu^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma^\nu + 2KB_\sigma B^\sigma + \frac{2\Theta^2\phi^2}{3} - \delta\Theta^2 \\ &+ \frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3} (C^2 - 2C\phi + B_\gamma B^\gamma - 2C_\gamma^\nu C_\nu^\gamma - 3\phi^2) \\ &+ D_\gamma C D^\gamma C - 2D_\gamma \phi D^\gamma C + 2D^\gamma(\phi - C) D_\alpha C^\alpha_\gamma \\ &+ 2D_\gamma C^{\mu\nu} D_\mu C_\nu^\gamma - D_\gamma C^{\mu\nu} D^\gamma C_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

O próximo passo é calcular a parte da Lagrangiana que não envolve derivadas de $\varsigma_{\mu\nu}$, *i.e.*,

$$\mathcal{L}_{\text{g},\varsigma}^{(2)} = \sqrt{-g} \left(\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) \varsigma^\mu_\alpha \left(\varsigma^{\alpha\nu} - \frac{g^{\alpha\nu}\varsigma}{2} \right) \right).$$

Usando as Eqs. (2.15) e (2.16), a parte sem traço do tensor de Ricci é

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \right) = \frac{(3K - \dot{\Theta})}{2} \left(\frac{\mathbf{h}_{\mu\nu}}{3} + n_\mu n_\nu \right),$$

e, com isso,

$$\frac{\mathcal{L}_{\text{g},\varsigma}^{(2)}}{\sqrt{-g}} = \frac{(3K - \dot{\Theta})}{3} (2C_\mu^\nu C_\nu^\mu + B_\mu B^\mu - C^2 - 2C\phi - 3\phi^2). \quad (\text{D.42})$$

Somando as duas partes obtemos a Lagrangiana da gravitação em segunda ordem como

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{\text{g}}^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \delta\mathcal{K}_\nu^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma^\nu - \delta\Theta^2 + G_{nn}(B_\gamma B^\gamma - \phi^2 - 2C\phi) + \frac{G^{(\text{h})}}{3} (2C_\gamma^\nu C_\nu^\gamma - C^2) \\ &+ D_\gamma C D^\gamma C - 2D_\gamma \phi D^\gamma C + 2D^\gamma(\phi - C) D_\alpha C^\alpha_\gamma \\ &+ 2D_\gamma C^{\mu\nu} D_\mu C_\nu^\gamma - D_\gamma C^{\mu\nu} D^\gamma C_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{R}}{3} (2C_\gamma^\nu C_\nu^\gamma + 2C\phi - C^2), \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

onde definimos o traço espacial do tensor de Einstein como $G^{(h)} \equiv G_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = -(3K + 2\dot{\Theta} + \Theta^2)$ (Eq. 2.17). Podemos obter as equações de movimento variando essa Lagrangiana em relação às perturbações. No entanto, ela ainda não está escrita em função das perturbações decompostas, veja Seção 3.3. Para esse propósito, podemos simplificar a Lagrangiana acima reescrevendo os termos com derivada espacial usando as relações

$$\begin{aligned}
D_\gamma C D^\gamma C &= D_\gamma(C D^\gamma C) - C D^2 C, \\
-2D_\gamma \phi D^\gamma C &= -2D_\gamma(\phi D^\gamma C) + 2\phi D^2 C, \\
2D^\gamma \phi D_\alpha C^{\alpha\gamma} &= 2D^\gamma(\phi D_\alpha C^{\alpha\gamma}) - 2\phi D_\gamma D_\alpha C^{\alpha\gamma}, \\
-2D^\gamma C D_\alpha C^{\alpha\gamma} &= -D^\gamma(C D_\alpha C^{\alpha\gamma}) + C D_\gamma D_\alpha C^{\alpha\gamma} - D_\alpha(C^{\alpha\gamma} D^\gamma C) + C^{\alpha\gamma} D_\alpha D_\gamma C, \\
2D_\gamma C^{\mu\nu} D_\mu C_\nu^\gamma &= 2D_\gamma(C^{\mu\nu} D_\mu C_\nu^\gamma) - 2C^{\mu\nu} D_\gamma D_\mu C_\nu^\gamma, \\
-D_\gamma C^{\mu\nu} D^\gamma C_{\mu\nu} &= -D_\gamma(C^{\mu\nu} D^\gamma C_{\mu\nu}) + C^{\mu\nu} D^2 C_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Com essas relações e lembrando das expressões para o tensor de Ricci nas hipersuperfícies dadas nas Eqs. (3.33) e (3.34), a Lagrangiana é reescrita, ignorando os termos de derivada total, como

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}_g^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \delta\mathcal{K}_\nu^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma^\nu - \delta\Theta^2 + \left(\frac{C}{2} - \phi\right) \delta\mathcal{R} - C_\mu^\nu \delta\mathcal{R}_\nu^\mu \\
&+ G_{nn}(B_\gamma B^\gamma - \phi^2 - 2C\phi) + \frac{G^{(h)}}{3}(2C_\gamma^\nu C_\nu^\gamma - C^2),
\end{aligned} \tag{D.44}$$

onde $G_{nn} = (3K + \Theta^2/3)$, conforme a Eq. (2.17). Para decompor em termos das perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, primeiro note que, usando a forma $\delta\mathcal{K}_\nu^\gamma = \delta\sigma_\nu^\gamma + (\delta\Theta h_\nu^\gamma + \Theta n_\nu B^\gamma)/3$, o termo $\delta\mathcal{K}_\nu^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma^\nu - \delta\Theta^2$ é reescrito como

$$\delta\mathcal{K}_\nu^\gamma \delta\mathcal{K}_\gamma^\nu - \delta\Theta^2 = \delta\sigma_\nu^\gamma \delta\sigma_\gamma^\nu - \frac{2\delta\Theta^2}{3}.$$

Com a Eq. (3.40), o primeiro termo é dado por

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_\nu^\gamma \delta\sigma_\gamma^\nu &= \frac{2}{3}(D^2 \delta\sigma^{(s)})^2 + 2KD^\gamma \delta\sigma^{(s)} D_\gamma \delta\sigma^{(s)} \\
&+ D_{(\nu} \delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)} + \dot{W}_\nu^\gamma \dot{W}_\gamma^\nu.
\end{aligned} \tag{D.45}$$

Os termos cruzados não contribuem, pois podem ser escritos como uma derivada total, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
D_\nu D_\alpha \delta\sigma^{(s)} D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)} &= D_\nu(D_\alpha \delta\sigma^{(s)} D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)}) - D_\alpha(\delta\sigma^{(s)} D_\nu D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)}), \\
D_\nu D^\gamma \delta\sigma^{(s)} \dot{W}_\gamma^\nu &= D_\nu(D^\gamma \delta\sigma^{(s)} \dot{W}_\gamma^\nu), \\
D_{(\nu} \delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} h^{\alpha\gamma} \dot{W}_\gamma^\nu &= D_{(\nu}(\delta\sigma^{(v)}_{\alpha)} h^{\alpha\gamma} \dot{W}_\gamma^\nu),
\end{aligned}$$

onde usamos que $D_\alpha D_\nu D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)} = 0 = D_\nu \dot{W}_\gamma{}^\nu$. O termo

$$\begin{aligned} & \left(D_\nu D^\gamma - \frac{\mathfrak{h}_\nu{}^\gamma D^2}{3} \right) \delta\sigma^{(s)} \left(D_\gamma D^\nu - \frac{\mathfrak{h}_\gamma{}^\nu D^2}{3} \right) \delta\sigma^{(s)} \\ &= \left(D_\nu D^\gamma - \frac{\mathfrak{h}_\nu{}^\gamma D^2}{3} \right) \delta\sigma^{(s)} D_\gamma D^\nu \delta\sigma^{(s)}, \\ &= D_\nu D^\gamma \delta\sigma^{(s)} D_\gamma D^\nu \delta\sigma^{(s)} - \frac{(D^2 \delta\sigma^{(s)})^2}{3}, \\ &= D_\nu (D^\gamma \delta\sigma^{(s)} D_\gamma D^\nu \delta\sigma^{(s)}) - D_\gamma ((D^2 + 2K) \delta\sigma^{(s)} D^\gamma \delta\sigma^{(s)}) + \frac{2D^2 \delta\sigma^{(s)} (D^2 + 3K) \delta\sigma^{(s)}}{3}, \end{aligned}$$

onde usamos o comutador dado na Eq. (3.5). O próximo passo é simplificar o termo $C_\mu{}^\nu \delta\mathcal{R}_\nu{}^\mu$. Para tanto, usamos a Eq. (3.34) obtendo

$$\begin{aligned} -C_\mu{}^\nu \delta\mathcal{R}_\nu{}^\mu &= C_\mu{}^\nu (D_\nu D^\mu \psi + \mathfrak{h}_\nu{}^\mu (D^2 + 4K) \psi + (D^2 - 2K) W_\nu{}^\mu), \\ &= \frac{\delta\mathcal{R}}{2} (\psi - C) + W_\mu{}^\nu (D^2 - 2K) W_\nu{}^\mu, \end{aligned}$$

onde usamos também que

$$\begin{aligned} C_\mu{}^\nu D_\nu D^\mu \psi &= D_\nu (C_\mu{}^\nu D^\mu \psi) - D^\mu (D_\nu C_\mu{}^\nu \psi) + \left(\frac{\delta\mathcal{R}}{2} + D^2 C + 2KC \right) \psi, \\ &= D_\nu (C_\mu{}^\nu D^\mu \psi) - D^\mu (D_\nu C_\mu{}^\nu \psi) + \frac{\delta\mathcal{R}}{2} \psi + (D^2 \psi + 2K\psi) C \\ &\quad + D_\gamma (\psi D^\gamma C) - D^\gamma (D_\gamma \psi C). \end{aligned}$$

Com as simplificações acima, temos a Lagrangiana em termos das perturbações decompostas sem incluir os termos de superfície,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_g^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \frac{2D^2 \delta\sigma^{(s)} (D^2 + 3K) \delta\sigma^{(s)}}{3} - \frac{2\delta\Theta^2}{3} + \left(\frac{\psi}{2} - \phi \right) \delta\mathcal{R} \\ &\quad + \dot{W}_\nu{}^\gamma \dot{W}_\gamma{}^\nu + W_\mu{}^\nu (D^2 - 2K) W_\nu{}^\mu + D_{(\nu} \delta\sigma^{(v)}{}_{\alpha)} D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)} \\ &\quad + G_{nm} (B_\gamma B^\gamma - \phi^2 - 2C\phi) + \frac{G^{(h)}}{3} (2C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma - C^2). \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

Note que, como discutido acima, os termos tensoriais, vetoriais e escalares já desacoplam na Lagrangiana e, a partir desse ponto, podem ser tratados como campos independentes.

D.3 LAGRANGIANA DA MATÉRIA

Nesta seção calcularemos a expansão da Lagrangiana de matéria em segunda ordem e as equações de movimento para as perturbações. Considere a ação de gravitação mais matéria,

$$\hat{S} = \int d^4x \left(\frac{\hat{\mathcal{L}}_g}{2\kappa} + \hat{\mathcal{L}}_m \right) \quad (\text{D.47})$$

onde $\widehat{\mathcal{L}}_m$ é a Lagrangiana que descreve os campos de matéria, como por exemplo a dada na Seção B.4 que inclui o fator de $\sqrt{-\widehat{g}}$. Variando-a em relação à inversa da métrica $\widehat{g}^{\mu\nu}$, obtemos

$$\sqrt{-\widehat{g}}\frac{\widehat{G}_{\mu\nu}}{2\kappa} + \frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}^{\mu\nu}} = 0, \quad \widehat{G}_{\mu\nu} = \kappa\frac{-2}{\sqrt{-\widehat{g}}}\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}^{\mu\nu}} = \kappa\widehat{T}_{\mu\nu}, \quad \widehat{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-\widehat{g}}}\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}^{\mu\nu}}. \quad (\text{D.48})$$

Note que, partindo da relação $\widehat{g}_{\mu\alpha}\widehat{g}^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$, temos que

$$\frac{\delta\widehat{g}_{\mu\alpha}(x)}{\delta\widehat{g}^{\gamma\sigma}(y)} = -\widehat{g}_{\mu\gamma}(x)\widehat{g}_{\alpha\sigma}(x)\delta^4(x-y), \quad \frac{\delta\widehat{g}^{\mu\alpha}(x)}{\delta\widehat{g}^{\gamma\sigma}(y)} = -\widehat{g}^{\mu\gamma}(x)\widehat{g}^{\alpha\sigma}(x)\delta^4(x-y), \quad (\text{D.49})$$

onde usamos que

$$\frac{\delta\widehat{g}_{\mu\nu}(x)}{\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}(y)} = \delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\delta^4(x-y).$$

Dessa forma o tensor energia–momento é reescrito como

$$\widehat{T}_{\mu\nu}(x) = \frac{-2}{\sqrt{-\widehat{g}(x)}}\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}^{\mu\nu}(x)} = \frac{-2}{\sqrt{-\widehat{g}(x)}}\int d^4y\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}(y)}\frac{\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}(y)}{\delta\widehat{g}^{\mu\nu}(x)} = \frac{2}{\sqrt{-\widehat{g}}}\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}(x)}\widehat{g}_{\alpha\mu}\widehat{g}_{\beta\nu},$$

ou seja,

$$\widehat{T}^{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\widehat{g}}}\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}}. \quad (\text{D.50})$$

Note que nessas expressões colocamos explicitamente a coordenada na qual os tensores são calculados. Nas fórmulas que seguem, manteremos esse padrão e colocaremos as coordenadas onde houver ambiguidade.

Para expandir a ação de matéria até segunda ordem, podemos escrevê-la explicitamente como um funcional dos campos perturbados, *i.e.*, $\widehat{S}_m \equiv S_m[\widehat{g}_{\mu\nu}, \widehat{\varphi}]$, onde $\widehat{\varphi}$ representa os campos de matéria. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} S_m[\widehat{g}_{\mu\nu}, \widehat{\varphi}] &= S_m[g_{\mu\nu}, \varphi] + \int d^4y \left(\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \delta\widehat{\varphi}(y) + \frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}_{\mu\nu}(y)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \varsigma_{\mu\nu}(y) \right) \\ &+ \int d^4y d^4w \left(\frac{\delta^2\widehat{S}_m}{\delta\widehat{\varphi}(y)\delta\widehat{\varphi}(w)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \frac{\delta\widehat{\varphi}(y)\delta\widehat{\varphi}(w)}{2} + \frac{\delta^2\widehat{S}_m}{\delta\widehat{g}_{\mu\nu}(y)\delta\widehat{g}_{\alpha\beta}(w)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \frac{\varsigma_{\mu\nu}(y)\varsigma_{\alpha\beta}(w)}{2} \right) \\ &+ \int d^4y d^4w \frac{\delta^2\widehat{S}_m}{\delta\widehat{\varphi}(y)\delta\widehat{g}_{\mu\nu}(w)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \delta\widehat{\varphi}(y)\varsigma_{\mu\nu}(w). \end{aligned}$$

Dos termos de primeira ordem nas perturbações proveem as equações de movimento para a métrica e para o campo de matéria, ambos de fundo. Denotamos esses termos como

$$S_m^{(1)} = \int d^4y \left(\frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\widehat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\widehat{g}=g \\ \widehat{\varphi}=\varphi}} \delta\widehat{\varphi}(y) + \frac{\sqrt{-g(y)}}{2} T^{\mu\nu}(y)\varsigma_{\mu\nu}(y) \right), \quad (\text{D.51})$$

onde escrevemos a variação da ação em relação à métrica em termos do tensor energia-momento. Os termos de segunda ordem, podem ser reescritos como

$$S_m^{(2)} = \int d^4y d^4w \sqrt{-g(w)} \left(\frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(w)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \frac{\delta \hat{\varphi}(y) \varsigma_{\mu\nu}(w)}{2} + \frac{\delta \hat{T}^{\alpha\beta}(w)}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \frac{\varsigma_{\mu\nu}(y) \varsigma_{\alpha\beta}(w)}{4} \right) \\ + \int d^4y \frac{\sqrt{-g(y)} T^{\alpha\beta}(y) \varsigma(y) \varsigma_{\alpha\beta}(y)}{8} + \int d^4y d^4w \frac{\delta^2 \hat{S}_m}{\delta \hat{\varphi}(y) \delta \hat{\varphi}(w)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \frac{\delta \hat{\varphi}(y) \delta \hat{\varphi}(w)}{2}. \quad (D.52)$$

A variação dos termos acima com respeito às perturbações na métrica devem resultar na equação de movimento para as perturbações em primeira ordem. Nesse caso, os termos que envolvem somente perturbações no campo de matéria não contribuem. Fazendo a variação obtemos,

$$\frac{\delta S_m^{(2)}}{\delta \varsigma_{\mu\nu}(x)} = \frac{\sqrt{-g(x)}}{2} \int d^4y \left(\frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \delta \hat{\varphi}(y) + \frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{g}_{\alpha\beta}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \frac{\varsigma_{\alpha\beta}(y)}{2} \right) \\ + \int d^4w \sqrt{-g(w)} \frac{\delta \hat{T}^{\alpha\beta}(w)}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}(x)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \frac{\varsigma_{\alpha\beta}(w)}{4} + \frac{\sqrt{-g}}{8} (T^{\mu\nu} \varsigma + T^{\alpha\beta} \varsigma_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}).$$

Podemos simplificar essa expressão notando que

$$\frac{\delta \hat{T}^{\alpha\beta}(w)}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}(x)} = \frac{\delta}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}(x)} \left(\frac{2}{\sqrt{-\hat{g}(w)}} \frac{\delta \hat{S}_m}{\delta \hat{g}_{\alpha\beta}(w)} \right), \\ = \left(\hat{T}^{\mu\nu}(w) \hat{g}^{\alpha\beta}(w) - \hat{T}^{\alpha\beta}(w) \hat{g}^{\mu\nu}(w) \right) \frac{\delta^4(x-w)}{2} + \frac{\sqrt{-\hat{g}(x)} \delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\sqrt{-\hat{g}(w)} \delta \hat{g}_{\alpha\beta}(w)}, \quad (D.53)$$

onde usamos a simetria da variação da ação em relação a métrica. Substituindo o resultado acima na variação da ação, temos

$$\frac{\delta S_m^{(2)}}{\delta \varsigma_{\mu\nu}(x)} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \int d^4y \left(\frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \delta \hat{\varphi}(y) + \frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{g}_{\alpha\beta}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \varsigma_{\alpha\beta}(y) \right) + \frac{\sqrt{-g}}{4} T^{\mu\nu} \varsigma. \quad (D.54)$$

Expandindo o tensor energia-momento em primeira ordem nas perturbações, obtemos

$$\delta T^{\mu\nu} = \int d^4y \left(\frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \delta \hat{\varphi}(y) + \frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x)}{\delta \hat{g}_{\alpha\beta}(y)} \Big|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \varsigma_{\alpha\beta}(y) \right), \quad (D.55)$$

ou seja, a variação da ação em segunda ordem é dada por

$$\frac{\delta S_m^{(2)}}{\delta \varsigma_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta T^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{-g}}{4} T^{\mu\nu} \varsigma. \quad (D.56)$$

Portanto, a partir da ação total (ver Eq. D.47) em segunda ordem, obtemos a equação de movimento para as perturbações usando as Eqs. (D.24) e (D.56),

$$\delta G^{\alpha\beta} + \frac{\varsigma(G^{\alpha\beta} - \kappa T^{\alpha\beta})}{2} = \kappa \delta T^{\mu\nu}. \quad (\text{D.57})$$

Utilizando as equações de fundo, temos a mesma equação que obtemos ao expandir as equações de Einstein em primeira ordem nas perturbações.

D.3.1 Fluido Perfeito Termodinâmico

Nessa seção vamos aplicar a expansão descrita acima para o caso de um fluido perfeito termodinâmico, no formalismo discutido na Seção B.4. Nesse formalismo, estamos usando a representação da entalpia específica com o sistema definido pela determinação da pressão como função da entalpia específica e entropia, *i.e.*, $\hat{p} = \hat{p}(\hat{\vartheta}, \hat{s})$. Nessa representação a equação termodinâmica é dada por

$$d\hat{\vartheta} = \hat{\tau} d\hat{s} + \frac{1}{\hat{\varepsilon}} d\hat{p}, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}} = -\hat{\tau} \hat{\varepsilon}, \quad \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}} = \hat{\varepsilon}.$$

Dessa forma, quando expandirmos em segunda ordem, teremos na Lagrangiana as derivadas

$$\left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}}.$$

Podemos reescrever em termos das quantidades

$$\hat{c}_s^2 \equiv \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\rho}} \right|_{\hat{s}}, \quad \hat{\iota} \equiv \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\rho}},$$

facilitando a comparação com as equações de movimento obtidas na Seção 3.5.3. Para tanto, substituímos a entalpia por sua definição $\hat{\vartheta} = (\hat{\rho} + \hat{p})/\hat{\varepsilon}$, e obtemos

$$d\left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\varepsilon}}\right) = \frac{\hat{p}}{\hat{\varepsilon}^2} d\hat{\varepsilon} + \hat{\tau} d\hat{s}, \quad d\hat{\rho} = \frac{\hat{\rho} + \hat{p}}{\hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} \hat{\tau} d\hat{s}. \quad (\text{D.58})$$

Usando essas equações, obtemos as seguintes relações,

$$\left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}} = \left(\left. \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \hat{\varepsilon}} \right|_{\hat{s}} \right)^{-1} = \left(\left. \frac{\partial(\hat{\rho}/\hat{\varepsilon})}{\partial \hat{\varepsilon}} \right|_{\hat{s}} + \left. \frac{\partial(\hat{p}/\hat{\varepsilon})}{\partial \hat{\varepsilon}} \right|_{\hat{s}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\rho}} \right|_{\hat{s}} + \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{\varepsilon}} \right|_{\hat{s}} \right)^{-1} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{c}_s^2 \hat{\vartheta}}, \quad (\text{D.59})$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}} = -\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\rho}} = -\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left. \frac{\partial((\hat{\rho} + \hat{p})/\hat{\vartheta})}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\tau}}{\hat{\vartheta}} - \frac{1}{\hat{\varepsilon} \hat{\vartheta}} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\tau}}{\hat{\vartheta}} + \frac{\hat{\iota}}{\hat{\varepsilon} \hat{\vartheta} \hat{c}_s^2}. \quad (\text{D.60})$$

Na segunda equação usamos a comutação das derivadas parciais em \hat{p} , *i.e.*,

$$\frac{\partial^2 \hat{\vartheta}}{\partial \hat{s} \partial \hat{p}} = \frac{\partial^2 \hat{\vartheta}}{\partial \hat{p} \partial \hat{s}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\hat{\varepsilon}^2} \left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\rho}} = \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{s}} = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{\vartheta}}.$$

Com a comutação das derivadas na pressão, temos

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{\vartheta} \partial \hat{s}} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{s} \partial \hat{\vartheta}} \Rightarrow \left. \frac{\partial(-\hat{\varepsilon}\hat{\tau})}{\partial \hat{\vartheta}} \right|_{\hat{s}} = \left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}},$$

e substituindo os resultados das Eqs. (D.59) e (D.60), obtemos

$$\left. \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}} = -\frac{\hat{\tau}\hat{\varepsilon}(1 + \hat{c}_s^2) + \hat{l}}{\hat{c}_s^2 \hat{\vartheta}}. \quad (\text{D.61})$$

Partimos da Eq. (D.52) para calcular a expansão da ação desse fluido em segunda ordem nas perturbações. O primeiro termo da ação é

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \hat{T}^{\mu\nu}(w)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} &= \left[\varepsilon \left(2\mathbf{h}^{\alpha(\mu} n^{\nu)} - \mathbf{h}^{\mu\nu} n^\alpha - \frac{n^\mu n^\nu}{c_s^2} n^\alpha \right) \right]_{(w)} \left. \frac{\delta \hat{\vartheta}_\alpha(w)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \\ &- \left[\frac{\tau\varepsilon + \iota}{c_s^2} n^\mu n^\nu + \tau\varepsilon \mathbf{h}^{\mu\nu} \right]_{(w)} \left. \frac{\delta \hat{s}(w)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}}, \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

onde os colchetes indicam os termos calculados na coordenada w , e o campo de matéria $\hat{\varphi}$ representa qualquer um dos campos $\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \hat{\chi}_3, \hat{\chi}_4$ e \hat{s} . O próximo termo é dado pela variação do tensor energia-momento em relação à inversa da métrica, ou seja,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \hat{T}^{\alpha\beta}(w)}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}(y)} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} &= [-2\rho n^{(\alpha} \mathbf{h}^{\beta)(\mu} n^{\nu)} - p \mathbf{h}^{\alpha(\mu} \mathbf{h}^{\nu)\beta}]_{(w)} \delta^4(w - y) \\ &+ \left[n^\alpha n^\beta n^\mu n^\nu \left(\frac{\varepsilon \hat{\vartheta}}{2c_s^2} + \rho \right) + \frac{\varepsilon \hat{\vartheta}}{2} \mathbf{h}^{\mu\nu} n^\alpha n^\beta \right]_{(w)} \delta^4(w - y). \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

Os últimos termos necessários envolvem as derivadas segundas da pressão em relação aos campos de matéria, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \hat{p}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y) \delta \hat{\varphi}(w)} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} &= \left[\frac{\varepsilon}{\hat{\vartheta}} \left(\frac{n^\gamma n^\sigma}{c_s^2} - \mathbf{h}^{\gamma\sigma} \right) \right]_{(x)} \left[\frac{\delta \hat{\vartheta}_\gamma(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \frac{\delta \hat{\vartheta}_\sigma(x)}{\delta \hat{\varphi}(w)} \right]_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \\ &- [\varepsilon n^\gamma]_{(x)} \left[\frac{\delta^2 \hat{\vartheta}_\gamma(x)}{\delta \hat{\varphi}(y) \delta \hat{\varphi}(w)} \right]_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} + [\varpi]_{(x)} \left[\frac{\delta \hat{s}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \frac{\delta \hat{s}(x)}{\delta \hat{\varphi}(w)} \right]_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \\ &+ \left[\frac{\tau\varepsilon(1 + c_s^2) + \iota}{c_s^2 \hat{\vartheta}} n^\gamma \right]_{(x)} \left[\frac{\delta \hat{s}(x)}{\delta \hat{\varphi}(y)} \frac{\delta \hat{\vartheta}_\gamma(x)}{\delta \hat{\varphi}(w)} + w \leftrightarrow y \right]_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}}, \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

onde definimos a derivada segunda da pressão como

$$\hat{\omega} \equiv \left. \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{s}^2} \right|_{\hat{\vartheta}} = - \left. \frac{\partial(\hat{\tau}\hat{\varepsilon})}{\partial \hat{s}} \right|_{\hat{\vartheta}}. \quad (\text{D.65})$$

A fim de obter as equações de movimento corretas para o fluido, usamos os campos $\hat{\chi}_i$ e $\hat{\vartheta}$ como os campos a serem variados. Em geral as equações de movimento para as perturbações são obtidas usando a densidade de energia, entropia e o campo vetorial do fluido como os campos básicos. Para relacionar essas quantidades, note que a perturbação na entalpia pode ser reescrita em primeira ordem como

$$\delta\vartheta = -\frac{\delta(\hat{\vartheta}_\mu \hat{\vartheta}_\nu \hat{g}^{\mu\nu})}{2\vartheta} = -\delta\vartheta_\mu n^\mu + \vartheta\phi = -\delta\vartheta_n + \vartheta\phi. \quad (\text{D.66})$$

Lembrando que a perturbação $\hat{\vartheta}_\mu$ depende somente dos campos de matéria (ver Eq. B.33). O campo normalizado que descreve o fluxo do fluido perturbado \hat{u}_μ , como descrito na Seção C.4, é dado em primeira ordem por

$$\hat{u}_\mu = \frac{\hat{\vartheta}_\mu}{\vartheta} = n_\mu + \frac{\delta\vartheta_\mu}{\vartheta} - \frac{n_\mu}{\vartheta}\delta\vartheta = n_\mu + \mathbf{h} \left[\frac{\delta\vartheta_\mu}{\vartheta} \right] - \phi n_\mu, \quad (\text{D.67})$$

e portanto, comparando com a Eq. (C.79), temos que o campo vetorial V_μ é

$$V_\mu = \mathbf{h} \left[\frac{\delta\vartheta_\mu}{\vartheta} \right]. \quad (\text{D.68})$$

Usando essas relações, a perturbação na densidade de energia pode ser reescrita em primeira ordem como

$$\delta\rho^* = \hat{\varepsilon}\hat{\vartheta} - \hat{p} - \rho = \frac{\varepsilon}{c_s^2}\delta\vartheta - \frac{\tau\varepsilon + \iota}{c_s^2}\delta s = -\frac{\varepsilon\delta\vartheta_n + (\tau\varepsilon + \iota)\delta s - \varepsilon\vartheta\phi}{c_s^2}, \quad (\text{D.69})$$

onde o sobrescrito * indica que nenhuma equação de fundo foi usada nessa definição.

Unindo os resultados acima, obtemos a Lagrangiana para um fluido perfeito em segunda ordem,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_m^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \frac{\varepsilon(\delta\vartheta_n)^2}{2c_s^2\vartheta} - \frac{\varepsilon\vartheta V_\gamma V^\gamma}{2} - \frac{\varepsilon\delta^2\vartheta_n}{2} + \frac{\varpi(\delta s)^2}{2} + \frac{(\tau\varepsilon(1+c_s^2) + \iota)\delta s\delta\vartheta_n}{c_s^2\vartheta} \\ &\quad - \varepsilon\vartheta B^\gamma V_\gamma + C\delta p^* + \phi\delta\rho^* - \varepsilon\vartheta C\phi - \frac{\varepsilon\vartheta}{2c_s^2}\phi^2 \\ &\quad + \frac{\rho}{2}(-B_\gamma B^\gamma + \phi^2 + 2C\phi) + \frac{p}{2}(-2C_\gamma{}^\nu C^{\nu\gamma} + C^2), \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

onde $\delta p^* = c_s^2\delta\rho^* + \iota\delta s$ e $\delta^2\vartheta_n = 2(\delta\chi_2\delta\dot{\chi}_3 + \delta\chi_4\dot{\delta}s)$.

D.3.1.1 Métrica de Fundo Homogênea e Isotrópica Até este ponto, não fizemos nenhuma suposição sobre a métrica de fundo. Quando impomos que a métrica de fundo é do tipo de FLRW, temos que o tensor energia-momento é o de um fluido perfeito, com os vínculos adicionais de que os gradientes $D_\mu\rho$, $D_\mu p$ são nulos. Usando as relações entre as quantidades termodinâmicas, temos também que $D_\mu s = D_\mu\varepsilon = 0$, já que

$$D_\mu p = c_s^2 D_\mu\rho + \iota D_\mu s, \quad D_\mu\rho = \vartheta D_\mu\varepsilon + \varepsilon\tau D_\mu s.$$

Contudo, para um fluido barotrópico ($\iota = 0$) não temos mais o vínculo de que a entropia tem gradiente nulo, mas sobra o vínculo $\vartheta D_\mu \varepsilon + \varepsilon \tau D_\mu s = 0$. Usando a Eq. (D.60), temos que $\tau = \vartheta \frac{dF(s)}{ds}$, onde $F(s)$ é uma função arbitrária da entropia. Nesse caso o vínculo se reduz a $D_\mu (\log(\varepsilon) + F(s)) = 0$, e assim a entropia e a densidade de partículas podem ter gradiente espacial de forma que a combinação acima seja constante.

O campo covetorial ϑ_μ deve ser proporcional ao campo normal. Dessa forma, temos também que $h[\vartheta_\mu] = D_\mu \chi_1 + \chi_2 D_\mu \chi_3 + \chi_4 D_\mu s = 0$. Portanto, a imposição da métrica de fundo de FLRW não implica que todos os campos escalares de fundo tenham gradiente nulo. No entanto, se houver algum campo com gradiente espacial não nulo, teremos o seguinte problema quando calcularmos as equações de movimento para sua perturbação. Por exemplo, a equação de movimento $D_{\hat{u}} \dot{\chi}_2 = 0$, em primeira ordem, é dada por

$$(V^\mu + B^\mu) D_\mu \chi_2 + \phi \dot{\chi}_2 + \delta \dot{\chi}_2 = 0.$$

Portanto, se o gradiente de χ_2 não for nulo, não poderemos separar os graus de liberdade escalares dos vetoriais (ver Seção 3.3), pois o gradiente $D_\mu \chi_2$ forma quantidades escalares de primeira ordem quando contraído com B^μ ou V^μ .

Para evitar complicações como do exemplo acima, vamos impor que os gradientes das quantidades relacionadas ao fluido são nulos, satisfazendo identicamente todos os vínculos descritos acima. Usando essa imposição, vemos que a perturbação na velocidade do fluido, dada na Eq. (D.68), fica escrita como

$$V_\mu = D_\mu \left(\frac{\delta \chi_1 + \chi_2 \delta \chi_3 + \chi_4 \delta s}{\vartheta} \right), \quad \mathcal{V} = \frac{\delta \chi_1 + \chi_2 \delta \chi_3 + \chi_4 \delta s}{\vartheta}. \quad (\text{D.71})$$

Nesse caso, temos que a perturbação $\delta \vartheta_n$ é dada por

$$\delta \vartheta_n = \vartheta (\partial_{ct} - c_s^2 \Theta) \mathcal{V} - \tau \delta s + Q, \quad (\text{D.72})$$

$$Q \equiv -\dot{\chi}_2 \delta \chi_3 - (\dot{\chi}_4 - \tau) \delta s + \delta \chi_2 \dot{\chi}_3 + \left(\delta \chi_4 + \mathcal{V} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \Big|_\varepsilon \right) \dot{s} + \mathcal{V} \frac{c_s^2 \vartheta}{\varepsilon} (\dot{\varepsilon} + \Theta \varepsilon). \quad (\text{D.73})$$

Note que a quantidade Q depende somente das perturbações multiplicadas por equações de movimento de fundo. A Lagrangiana dada na Eq. (D.70) depende de $\delta \chi_1$ somente através de $\delta \vartheta_n$ ou V_μ . Logo, com Eq. (D.71), podemos utilizar a variável \mathcal{V} no lugar de $\delta \chi_1$. Com essa mudança de variável, a densidade de energia fica dada por

$$\delta \rho^* = \delta \rho - \frac{\varepsilon Q}{c_s^2}, \quad \delta \rho \equiv -\frac{\varepsilon \vartheta (\partial_{ct} - c_s^2 \Theta) \mathcal{V} + \iota \delta s - \varepsilon \vartheta \phi}{c_s^2}, \quad (\text{D.74})$$

onde definimos a perturbação na densidade de energia $\delta \rho$ sem os termos proporcionais às equações de fundo. Similarmente temos

$$\delta p^* = \delta p - \varepsilon Q, \quad \delta p \equiv c_s^2 \delta \rho + \iota \delta s = -\varepsilon \vartheta (\partial_{ct} - c_s^2 \Theta) \mathcal{V} + \varepsilon \vartheta \phi. \quad (\text{D.75})$$

Usando a Eq. (D.58) para obter a perturbação na densidade de partículas em termos das outras perturbações, temos

$$\delta\varepsilon^* = \delta\varepsilon - \frac{\varepsilon Q}{c_s^2 \vartheta}, \quad \delta\varepsilon \equiv \frac{\delta\rho - \tau\varepsilon\delta s}{\vartheta} = -\frac{\varepsilon\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V} + \iota\delta s - \varepsilon\vartheta\phi}{c_s^2\vartheta} - \frac{\tau\varepsilon\delta s}{\vartheta}. \quad (\text{D.76})$$

Podemos utilizar a expressão para a perturbação na densidade em função de $\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V}$ e δs para substituir todos os termos que envolvem $\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V}$ por $\delta\varepsilon$ e δs na Lagrangiana da matéria (Eq. D.70). Assim sendo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_m^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \frac{c_s^2\vartheta}{2\varepsilon}\delta\varepsilon^2 - \frac{(\tau\varepsilon(1+c_s^2)+\iota)^2}{2c_s^2\varepsilon\vartheta}\delta s^2 + \frac{\varepsilon\vartheta\mathcal{V}D^2\mathcal{V}}{2} + \frac{\varpi(\delta s)^2}{2} \\ &\quad - \varepsilon\delta\chi_4\dot{\delta s} - \varepsilon\delta\chi_2\dot{\delta\chi}_3 + \varepsilon\vartheta\delta\Theta\mathcal{V} - \vartheta\Theta\varepsilon\phi\mathcal{V} + \phi\tau\delta s \\ &\quad + Q\left(\frac{\varepsilon Q}{2c_s^2\vartheta} - \delta\varepsilon - \varepsilon C\right) + \mathcal{V}\vartheta C(1+c_s^2)(\partial_{ct} + \Theta)\varepsilon + \varepsilon C\mathcal{V}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right|_\varepsilon \dot{s} \\ &\quad + \frac{\rho}{2}(-B_\gamma B^\gamma + \phi^2 + 2C\phi) + \frac{p}{2}(-2C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma + C^2). \end{aligned}$$

Para chegar na expressão acima, reescrevemos os termos envolvendo C como

$$\begin{aligned} C\delta p - \varepsilon\vartheta C\phi &= -\varepsilon C\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V}, \\ &= -\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\varepsilon C\vartheta\mathcal{V})}{\sqrt{-g}} + \varepsilon C\mathcal{V}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right|_\varepsilon \dot{s} + C\vartheta\mathcal{V}(1+c_s^2)(\partial_{ct} + \Theta)\varepsilon + \varepsilon\vartheta\mathcal{V}\dot{C}, \end{aligned}$$

os termos com $D_\gamma\mathcal{V}$ da forma

$$\begin{aligned} -\varepsilon\vartheta B^\gamma D_\gamma\mathcal{V} &= -D_\gamma(\varepsilon\vartheta B^\gamma\mathcal{V}) + \varepsilon\vartheta D_\gamma B^\gamma\mathcal{V}, \\ -\frac{\varepsilon\vartheta D_\gamma\mathcal{V}D^\gamma\mathcal{V}}{2} &= -D_\gamma\left(\frac{\varepsilon\vartheta\mathcal{V}D^\gamma\mathcal{V}}{2}\right) + \frac{\varepsilon\vartheta\mathcal{V}D^2\mathcal{V}}{2}, \end{aligned}$$

e descartamos os termos de superfície. Podemos simplificar a Lagrangiana acima reescrevendo os coeficientes de δs^2

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_m^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \frac{c_s^2\vartheta}{2\varepsilon}\delta\varepsilon^2 - \left.\frac{\partial\tau}{\partial s}\right|_\varepsilon \frac{\varepsilon\delta s^2}{2} + \frac{\varepsilon\vartheta\mathcal{V}D^2\mathcal{V}}{2} - \varepsilon\delta\chi_4\dot{\delta s} - \varepsilon\delta\chi_2\dot{\delta\chi}_3 \\ &\quad + \varepsilon\vartheta\delta\Theta\mathcal{V} - \vartheta\Theta\varepsilon\phi\mathcal{V} + \phi\tau\varepsilon\delta s \\ &\quad + Q\left(\frac{\varepsilon Q}{2c_s^2\vartheta} - \delta\varepsilon - \varepsilon C\right) + \mathcal{V}\vartheta C(1+c_s^2)(\partial_{ct} + \Theta)\varepsilon + \varepsilon C\mathcal{V}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right|_\varepsilon \dot{s} \\ &\quad + \frac{\rho}{2}(-B_\gamma B^\gamma + \phi^2 + 2C\phi) + \frac{p}{2}(-2C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma + C^2), \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

onde, usando as Eqs. (D.59–D.61) e (D.65),

$$\left.\frac{\partial\tau}{\partial s}\right|_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{(\tau\varepsilon(1+c_s^2)+\iota)^2}{c_s^2\varepsilon\vartheta} - \varpi\right), \quad \left.\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}\right|_s = \frac{\tau\varepsilon c_s^2 + \iota}{\varepsilon^2}. \quad (\text{D.78})$$

D.4 LAGRANGIANA TOTAL

Usando os resultados das seções anteriores, escreveremos a ação total envolvendo as perturbações nos campos de matéria e na métrica. No contexto desse trabalho, nos restringiremos ao caso onde a métrica de fundo é de FLRW. Como vemos na Eq. (D.47), a Lagrangiana total em segunda ordem é dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{\mathcal{L}_g^{(2)}}{2\kappa} + \mathcal{L}_m^{(2)}.$$

Portanto, usando as Eqs. (D.46) e (D.70), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa\mathcal{L}^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \kappa \frac{c_s^2 \vartheta}{\varepsilon} \delta\varepsilon^2 - \kappa \left. \frac{\partial\tau}{\partial s} \right|_{\varepsilon} \varepsilon \delta s^2 + \kappa \varepsilon \vartheta \mathcal{V} D^2 \mathcal{V} \\ &\quad - 2\kappa \varepsilon \delta\chi_4 \dot{\delta}s - 2\kappa \varepsilon \delta\chi_2 \delta\dot{\chi}_3 + 2\kappa \varepsilon \vartheta \delta\Theta \mathcal{V} - 2\kappa \vartheta \Theta \varepsilon \phi \mathcal{V} + 2\kappa \phi \tau \varepsilon \delta s \\ &\quad + \frac{2D^2 \delta\sigma^{(s)} (D^2 + 3K) \delta\sigma^{(s)}}{3} - \frac{2\delta\Theta^2}{3} + \left(\frac{\psi}{2} - \phi \right) \delta\mathcal{R} \\ &\quad + \dot{W}_\nu{}^\gamma \dot{W}_\gamma{}^\nu + W_\mu{}^\nu (D^2 - 2K) W_\nu{}^\mu + D_{(\nu} \delta\sigma^{(v)}{}_{\alpha)} D^{(\nu} \delta\sigma^{(v)\alpha)} \\ &\quad + (G_{nn} - \kappa\rho) (B_\gamma B^\gamma - \phi^2 - 2C\phi) + \frac{(G^{(h)} - 3\kappa p)}{3} (2C_\gamma{}^\nu C_\nu{}^\gamma - C^2) \\ &\quad + 2\kappa Q \left(\frac{\varepsilon Q}{2c_s^2 \vartheta} - \delta\varepsilon - \varepsilon C \right) \\ &\quad + 2\kappa \mathcal{V} C \left(\vartheta (1 + c_s^2) (\partial_{ct} + \Theta) \varepsilon + \varepsilon \left. \frac{\partial\vartheta}{\partial s} \right|_{\varepsilon} \dot{s} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

Os últimos termos da Lagrangiana acima são formados pelas equações de fundo, multiplicadas por um polinômio quadrático nas perturbações. Poderíamos usar o argumento de que as equações de fundo são satisfeitas em ordem zero e, portanto, esses termos podem ser desprezados. Contudo, nosso objetivo final é quantizar as perturbações e a métrica de fundo. Nesse caso, não podemos simplesmente usar o resultado das equações de fundo na Lagrangiana.

Podemos lidar com os termos proporcionais às equações de fundo de outra forma. Note primeiro que a Lagrangiana total de primeira ordem é dada por (veja as Eqs. D.14 e D.51)

$$\frac{2\kappa\mathcal{L}^{(1)}}{\sqrt{-g}} = - (G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \varsigma_{\mu\nu} + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left. \frac{\delta\widehat{S}_m}{\delta\hat{\varphi}} \right|_{\substack{\hat{g}=g \\ \hat{\varphi}=\varphi}} \delta\hat{\varphi}. \quad (\text{D.80})$$

Os termos que envolvem as perturbações na métrica, $(G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \varsigma_{\mu\nu}$, podem ser escritos em relação à decomposição nas hipersuperfícies da forma

$$(G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \varsigma_{\mu\nu} = 2 (G_{nn} - \kappa\rho) \phi + 2 \left(\frac{G^{(h)} - 3\kappa p}{3} \right) C.$$

Se fizermos a seguinte mudança de variável nas perturbações,

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{B_\gamma B^\gamma + \phi^2}{2} + C\phi, \quad (\text{D.81})$$

$$C_\mu{}^\nu \rightarrow C_\mu{}^\nu + C_\mu{}^\gamma C_\gamma{}^\nu - \frac{CC_\mu{}^\nu}{2}, \quad (\text{D.82})$$

os termos proporcionais às equações de fundo são anulados e, como essas transformações não alteram as perturbações em primeira ordem, o resto da Lagrangiana é invariante. Essa mudança de variável pode ser entendida da seguinte forma: a Eq. (D.12) mostra a relação entre a perturbação na métrica e na inversa da métrica, ou seja, se utilizássemos a perturbação na inversa da métrica como variável, teríamos a seguinte mudança de variável,

$$n_\mu n_\nu \delta g^{\mu\nu} = -2\phi - 4\phi^2 - B_\gamma B^\gamma.$$

Podemos fazer o mesmo procedimento para eliminar os termos da Lagrangiana proporcionais às equações de fundo do fluido. Para tanto note que a Lagrangiana de primeira ordem do fluido é

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_m^{(1)}}{\sqrt{-g}} &= -(\varepsilon\delta\vartheta_n + \tau\varepsilon\delta s) = -\varepsilon\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V} - \varepsilon Q, \\ &= -\frac{\partial_{ct}(\sqrt{-g}\varepsilon\vartheta\mathcal{V})}{\sqrt{-g}} + \vartheta\mathcal{V}(\partial_{ct} + \Theta)\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon(\dot{\chi}_2\delta\chi_3 - \dot{\chi}_3\delta\chi_2 + (\dot{\chi}_4 - \tau)\delta s - \delta\chi_4\dot{s}), \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

onde usamos a expressão para $\delta\vartheta_n$ dada na Eq. (D.72). Portanto, com as mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} + c_s^2\mathcal{V}\left(\frac{Q}{2c_s^2\vartheta} - \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \mathcal{V}C, \\ \delta\chi_i &\rightarrow \delta\chi_i - \delta\chi_i\left(\frac{Q}{2c_s^2\vartheta} - \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} - C\right), \\ \delta\chi_4 &\rightarrow \delta\chi_4 - \left(\delta\chi_4 + \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\Big|_\varepsilon\mathcal{V}\right)\left(\frac{Q}{2c_s^2\vartheta} - \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \delta\chi_4 C, \\ \delta s &\rightarrow \delta s - \delta s\left(\frac{Q}{2c_s^2\vartheta} - \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} - C\right), \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

para $i = 2, 3$, e com as descritas nas Eqs. (D.81) e (D.82), escrevemos a expressão para a Lagrangiana total como

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa\mathcal{L}^{(2)}}{\sqrt{-g}} &= \kappa\frac{c_s^2\vartheta}{\varepsilon}\delta\varepsilon^2 - \kappa\frac{\partial\tau}{\partial s}\Big|_\varepsilon\varepsilon\delta s^2 + \kappa\varepsilon\vartheta\mathcal{V}D^2\mathcal{V} \\ &\quad - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_4\dot{\delta s} - 2\kappa\varepsilon\delta\chi_2\dot{\delta\chi}_3 + 2\kappa\varepsilon\vartheta\delta\Theta\mathcal{V} - 2\kappa\vartheta\Theta\varepsilon\phi\mathcal{V} + 2\kappa\phi\tau\varepsilon\delta s \\ &\quad + \frac{2D^2\delta\sigma^{(s)}(D^2 + 3K)\delta\sigma^{(s)}}{3} - \frac{2\delta\Theta^2}{3} + \left(\frac{\psi}{2} - \phi\right)\delta\mathcal{R} \\ &\quad + \dot{W}_\nu{}^\gamma\dot{W}_\gamma{}^\nu + W_\mu{}^\nu(D^2 - 2K)W_\nu{}^\mu + D_{(\nu}\delta\sigma^{(v)}{}_{\alpha)}D^{(\nu}\delta\sigma^{(v)\alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

Os últimos três termos da Lagrangiana acima se referem aos modos tensoriais e vetoriais, que agem como campos desacoplados. Com isso, definimos separadamente as Lagrangianas das perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(s)} = & \kappa \frac{c_s^2 \vartheta}{\varepsilon} \delta \varepsilon^2 - \kappa \left. \frac{\partial \tau}{\partial s} \right|_{\varepsilon} \varepsilon \delta s^2 + \kappa \varepsilon \vartheta \mathcal{V} D^2 \mathcal{V} \\ & - 2\kappa \varepsilon \delta \chi_4 \dot{\delta} s - 2\kappa \varepsilon \delta \chi_2 \dot{\delta} \chi_3 + 2\kappa \varepsilon \vartheta \delta \Theta \mathcal{V} - 2\kappa \vartheta \Theta \varepsilon \phi \mathcal{V} + 2\kappa \phi \tau \varepsilon \delta s \\ & + \frac{2D^2 \delta \sigma^{(s)} (D^2 + 3K) \delta \sigma^{(s)}}{3} - \frac{2\delta \Theta^2}{3} + \left(\frac{\psi}{2} - \phi \right) \delta \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

$$\mathbf{L}^{(v)} = D_{(\nu} \delta \sigma^{(v)\alpha)} D^{\nu} \delta \sigma^{(v)\alpha)}, \quad (\text{D.87})$$

$$\mathbf{L}^{(t)} = \dot{W}_\nu^\gamma \dot{W}_\gamma^\nu + W_\mu^\nu (D^2 - 2K) W_\nu^\mu. \quad (\text{D.88})$$

Usamos o símbolo \mathbf{L} para representar a Lagrangiana da forma $2\kappa \mathcal{L}^{(2)} = \sqrt{-g} \mathbf{L}^{(2)}$.

D.4.1 Equações de Movimento

As equações de movimento em primeira ordem nas perturbações são obtidas variando a ação em relação aos campos

$$(\phi, \mathcal{B}, \psi, \mathcal{E}, \mathcal{V}, \delta \chi_2, \delta \chi_3, \delta \chi_4, \delta s). \quad (\text{D.89})$$

Dentre esses campos, $(\phi, \mathcal{B}, \delta \chi_2, \delta \chi_4)$ aparecem sem derivadas temporais na Lagrangiana da Eq. (D.85) e, portanto, atuam como vínculos na evolução do sistema. Já para os campos $(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{V})$, as suas derivadas temporais estão contidas somente nas quantidades $\delta \Theta$, $\delta \sigma^{(s)}$ e $\delta \varepsilon$, onde ψ e \mathcal{V} aparecem somente em $\delta \Theta$ e $\delta \varepsilon$, respectivamente, e \mathcal{E} está contido em $\delta \sigma^{(s)}$ e $\delta \Theta$.

Fazendo a mudança de variável $\psi = \psi^t + D^2 \mathcal{E}/3$, vemos que o traço de $C_{\mu\nu}$ não dependerá do campo \mathcal{E} , *i.e.*, $C = 3\psi^t$. Essa mudança tem duas vantagens. A primeira consiste na eliminação de $\dot{\mathcal{E}}$ na perturbação da expansão (Eq. 3.32),

$$\delta \Theta = D^2 \delta \sigma^{(s)} + \Theta \phi + 3\dot{\psi} = D^2 \mathcal{B} + \Theta \phi + 3\dot{\psi}^t. \quad (\text{D.90})$$

A segunda vantagem é o fato da variação da Lagrangiana em relação a \mathcal{E} resultar na parte espacial sem traço das equações para as perturbações, como veremos adiante. Essa modificação não altera a forma de $\delta \sigma^{(s)}$, e a perturbação na curvatura das hipersuperfícies fica dada por

$$\delta \mathcal{R} = -4(D^2 + 3K)\psi = -4(D^2 + 3K) \left(\psi^t + \frac{D^2 \mathcal{E}}{3} \right). \quad (\text{D.91})$$

Para escrever a equação de Euler-Lagrange é mais conveniente trabalhar com a Lagrangiana escalar \mathbf{L} . Como o fator $\sqrt{-g}$ aparece multiplicando a Lagrangiana total na ação, quando calculamos as variações em relação aos campos com derivada temporal, a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$(\partial_{ct} + \Theta) \frac{\partial \mathbf{L}^{(2)}}{\partial \dot{\varphi}} + (\partial_{ct} + \Theta) D^2 \frac{\partial \mathbf{L}^{(2)}}{\partial (D^2 \dot{\varphi})} - D^2 \frac{\partial \mathbf{L}^{(2)}}{\partial (D^2 \varphi)} - \frac{\partial \mathbf{L}^{(2)}}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{D.92})$$

pois $\sqrt{-g} = \Theta\sqrt{-g}$, onde φ representa uma perturbação arbitrária. Lembramos também que, como $\sqrt{-g}$ tem gradiente nulo, as integrais por partes envolvendo derivadas espaciais não adicionam novos termos.

Fazendo a variação em relação aos campos ϕ , B , ψ^t e \mathcal{E} obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\frac{\Theta\delta\Theta}{3} + \frac{\delta\mathcal{R}}{4} &= \frac{\kappa}{2}\delta\rho, \\ \delta\Theta - 3K\delta\sigma^{(s)} - D^2\delta\sigma^{(s)} &= \frac{3\kappa}{2}\varepsilon\vartheta\mathcal{V}, \\ \delta\dot{\Theta} + \Theta\delta\Theta + \dot{\Theta}\phi + D^2\phi + \frac{\delta\mathcal{R}}{2} &= -\frac{3\kappa}{2}\delta p, \\ -\frac{4}{3}(D^2 + 3K) \left(\left(\partial_{ct} + \frac{\Theta}{3} \right) \delta\sigma^{(s)} - \psi^t + \phi - \frac{D^2\mathcal{E}}{3} \right) &= 0,\end{aligned}$$

onde usamos que D^2 tem inversa única, $\delta p = -\varepsilon\vartheta(\partial_{ct} - c_s^2\Theta)\mathcal{V} + \varepsilon\vartheta\phi$ (ver Eq. D.75) e as equações de fundo $(\partial_{ct} + \Theta)\varepsilon = 0$ e Eq. (2.27). Essas equações são iguais às Eqs. (3.87–3.90) obtidas no Capítulo 3 perturbando diretamente as equações de Einstein.

Variando agora em relação aos campos \mathcal{V} , $\delta\chi_2$, $\delta\chi_3$, $\delta\chi_4$ e δs , as equações de movimento são, respectivamente,

$$(\partial_{ct} + \Theta)\delta\varepsilon + (D^2\mathcal{V} + \delta\Theta)\varepsilon + \phi\dot{\varepsilon} = 0, \quad (\text{D.93})$$

$$\delta\dot{\chi}_3 = 0, \quad \delta\dot{\chi}_2 = 0, \quad \dot{\delta}s = 0, \quad \delta\dot{\chi}_4 + \phi\tau = \delta\tau, \quad (\text{D.94})$$

onde escrevemos a perturbação na temperatura em função das perturbações na densidade de partículas e entropia específica (ver Eq. D.78),

$$\delta\tau = \frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}\Big|_s \delta\varepsilon + \frac{\partial\tau}{\partial s}\Big|_\varepsilon \delta s. \quad (\text{D.95})$$

Dada a relação entre $\delta\varepsilon$ e $\delta\rho$ [Eq. (D.76)], podemos obter a equação de movimento

$$\delta\dot{\rho} + (1 + c_s^2)\Theta\delta\rho + \Theta\iota\delta s + \varepsilon\vartheta(D^2\mathcal{V} + \delta\Theta) + \phi\dot{\rho} = 0, \quad (\text{D.96})$$

onde usamos as equações para $\delta\varepsilon$, δs e que (veja a Eq. D.60)

$$\dot{\tau} = \left(\frac{\tau}{\vartheta} + \frac{\iota}{\varepsilon\vartheta c_s^2} \right) \dot{\vartheta} = -\Theta \left(\tau c_s^2 + \frac{\iota}{\varepsilon} \right).$$

Essas equações são iguais àquelas quando expandimos em primeira ordem a conservação do tensor energia–momento e da densidade de partícula, veja as Eqs. (C.88) e (C.89), lembrando que $\delta G = D^2\mathcal{V} + \delta\Theta$.

FUNÇÕES ESPECIAIS

Nesse apêndice apresentamos algumas funções especiais e suas características, que foram utilizadas nesse trabalho. As definições mostradas aqui podem ser encontradas com todos os detalhes nas Refs. [106, 117, 118].

E.1 FUNÇÃO GAMA

As funções Hipergeométricas, usadas para representar as soluções das equações diferenciais deste trabalho, são definidas em termos do símbolo de Pochhammer [106, 118]. Esse símbolo pode ser escrito em termos das funções $\Gamma(t)$ pela expressão $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. Para n inteiro o símbolo de Pochhammer é dado por $(a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k)$ onde $(a)_0 = 1$.

Abaixo listamos algumas propriedades da função Γ utilizadas nesse trabalho:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \frac{2^{t-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right), & \Gamma(t+1) &= t\Gamma(t), \\ \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+b)} &= t^{a-b} \left(1 + \frac{(a+b-1)(a-b)}{2t} + \dots\right) \quad \forall |\arg(a+t)| < \pi, |t| \gg 1, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde a série da última expressão é assintótica.

E.2 FUNÇÕES DE BESSEL

As equações diferenciais da forma

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + \left(m^2 - \frac{1}{t^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right) f(t) = 0, \quad (\text{E.2})$$

têm soluções linearmente independentes dadas por

$$f_1 = J_\nu(|m|t), \quad (\text{E.3})$$

$$f_2 = Y_\nu(|m|t), \quad (\text{E.4})$$

onde $J_\nu(y)$ e $Y_\nu(y)$ são funções de Bessel de ordem ν . É comum usar também as funções de Hankel do tipo um e dois, a saber,

$$H_\nu^{(1)}(y) = J_\nu(y) + iY_\nu(y), \quad (\text{E.5})$$

$$H_\nu^{(2)}(y) = J_\nu(y) - iY_\nu(y), \quad (\text{E.6})$$

onde i é a unidade imaginária. Como estamos trabalhando com os argumentos ν e y reais, $H_\nu^{(2)}(y) = (H_\nu^{(1)}(y))^*$, onde $*$ denota a operação de conjugação complexa.

Para estudar os regimes assintóticos, é útil reescrever essas funções especiais em termos das séries Hipergeométricas da forma,

$$H_\nu^{(1)}(y) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \left(M_\nu \left(\frac{y}{2} \right)^\nu {}_0F_1 \left(1 + \nu; -\frac{y^2}{4} \right) + M_{-\nu} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\nu} {}_0F_1 \left(1 - \nu; -\frac{y^2}{4} \right) \right), \quad (\text{E.7})$$

onde

$$M_\nu = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\nu)}\Gamma(-\nu)}{\pi}, \quad (\text{E.8})$$

e a função Hipergeométrica é definida como

$${}_0F_1(a; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(a)_n n!}. \quad (\text{E.9})$$

E.3 FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS DE GAUSS

As equações diferenciais da forma

$$t(t-1) \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + ((a+b+1)t - c) \frac{\partial f(t)}{\partial t} + abf(t) = 0, \quad (\text{E.10})$$

possuem duas soluções linearmente independentes $S_c^{a,b}(t)$ e $S_c^{b,a}(t)$, onde

$$S_c^{a,b}(t) = (-t)^{-a} {}_2F_1 \left(a, a - c + 1; a - b + 1; \frac{1}{t} \right), \quad (\text{E.11})$$

quando $a - b$ não for inteiro. Essas soluções são apropriadas para quando $|t| > 1$. O Wronskiano, que pode ser calculado diretamente da equação diferencial via fórmula de Liouville [117, 118], dessas soluções é dado por

$$S_c^{a,b}(t) \frac{\partial S_c^{b,a}(t)}{\partial t} - \frac{\partial S_c^{a,b}(t)}{\partial t} S_c^{b,a}(t) = (b-a)(1-t)^{c-a-b-1} (-t)^{-c}. \quad (\text{E.12})$$

Formalmente a Hipergeométrica de Gauss é definida pela expressão

$${}_2F_1(a, b; c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(c)_n n!}. \quad (\text{E.13})$$

Podemos relacionar essas soluções com aquelas apropriadas para $|t| < 1$ usando as equações (veja [118] para um conjunto completo de relações)

$$\begin{aligned} S_c^{a,b}(t) &= \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)} {}_2F_1(a, b; c; t) \\ &+ \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-t)^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; t). \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Essas funções possuem um limite bem definido quando o argumento t é da forma $t/(ab)$, para obter esse limite primeiro temos que [118],

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} {}_2F_1 \left(a, b; c; \frac{t}{ab} \right) = {}_0F_1 (c; t). \quad (\text{E.15})$$

Considerando o caso onde tomamos $a + b = \beta - 1$ e $b - a = \mu$, temos os seguintes limites

$$\lim_{\mu \rightarrow +i\infty} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)2^{a-b}} \frac{(ab)^{\frac{1-c}{2}}}{\sqrt{b-a}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}c}\Gamma(1-c)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{E.16})$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +i\infty} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)2^{a-b}} \frac{(ab)^{\frac{c-1}{2}}}{\sqrt{b-a}} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{2}c}\Gamma(c-1)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{E.17})$$

calculados com o auxílio da Eq. (E.1). Finalmente, combinando as expressões acima com a Eq. (E.7), temos

$$\lim_{\mu \rightarrow +i\infty} \frac{(ab)^{\frac{1-c}{2}}}{2^{a-b}\sqrt{b-a}} S_c^{a,b} \left(-\frac{y^2}{4ab} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}(c-1)} \left(\frac{y}{2} \right)^{1-c} H_{c-1}^{(1)}(y). \quad (\text{E.18})$$

A derivada da função $S_c^{a,b}(t)$ é dada por [118]

$$\frac{\partial S_c^{a,b}(t)}{\partial t} = a S_{c+1}^{a+1,b+1}(t). \quad (\text{E.19})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, ed. por Addison-Wesley, Allan M. Wylde, 1990.
- [2] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [3] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [4] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23 (1981), 347–356.
- [5] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* 108 (1982), 389–393.
- [6] A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* 30 (1979), 682–685.
- [7] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* 91 (1980), 99–102.
- [8] V. F. Mukhanov e G. V. Chibisov, *JETP Lett.* 33 (1981), 532–535.
- [9] D. J. Fixsen et al., *Astrophys. J.* 420 (1994), 445–449; D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 148 (2003), 175, arXiv:astro-ph/0302209; D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 170 (2007), 377, arXiv:astro-ph/0603449; E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 180 (2009), 330–376, arXiv:0803.0547 [astro-ph]; E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 192 (2011), 18, arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO].
- [10] A. Borde, A. H. Guth e A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003), 151301, arXiv:gr-qc/0110012.
- [11] B. S. DeWitt, *Phys. Rept.* 19 (1975), 295–357.
- [12] L. Parker e S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* 7 (1973), 2357–2374.
- [13] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* 160 (1967), 1113–1148.
- [14] M. J. Gotay e J. Demaret, *Phys. Rev. D* 28.10 (1983), 2402–2413.
- [15] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto e M. A. Sagiuro-Leal, *Phys. Lett. A* 241 (1998), 229–239, arXiv:gr-qc/9710084.
- [16] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos e G. A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* 34 (2002), 651–663, arXiv:gr-qc/0106051.
- [17] M. Bojowald, *Classical Quant. Grav.* 26.7 (2009), 075020, arXiv:0811.4129 [gr-qc].
- [18] M. Bojowald, *Nuclear Physics A* 862 (2011), 98–103, arXiv:1109.0248 [gr-qc].
- [19] P. Peter, E. J. C. Pinho e N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* 75 (2007), 023516, arXiv:hep-th/0610205.

- [20] P. Peter, E. Pinho e N. Pinto-Neto, *JCAP* 7 (2005), 14, arXiv:hep-th/0509232.
- [21] D. Wands, *Phys. Rev. D* 60.2 (1999), 023507, arXiv:gr-qc/9809062.
- [22] F. Finelli e R. Brandenberger, *Phys. Rev. D* 65 (2002), 103522, eprint: hep-th/0112249v2.
- [23] L. E. Allen e D. Wands, *Phys. Rev. D* 70 (2004), 063515, eprint: astro-ph/0404441v3.
- [24] P. Peter e N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* 78 (2008), 063506, arXiv:0809.2022 [gr-qc].
- [25] E. J. C. Pinho e N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* 76 (2007), 023506, eprint: hep-th/0610192.
- [26] B. Schutz, *Phys. Rev. D* 2.12 (1970), 2762.
- [27] A. Friedman, *Zeitschrift fur Physik* 10 (1922), 377–386; A. Friedmann, *Zeitschrift fur Physik* 21 (1924), 326–332; A. Friedman, *Gen. Relativ. Gravitation* 31 (1999), 1991.
- [28] A. G. Lemaître, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A* 47 (1927), 49; A. G. Lemaître, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 91 (1931), 483; A. G. Lemaître, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A* 53 (1933), 51; A. G. Lemaître, *Gen. Relativ. Gravitation* 29 (1997), 641.
- [29] H. P. Robertson, *Astrophys. J.* 82 (1935), 284; H. P. Robertson, *Astrophys. J.* 83 (1936), 187; H. P. Robertson, *Astrophys. J.* 83 (1936), 257.
- [30] A. G. Walker, *Proceedings of the London Mathematical Society* 42 (1937), 90.
- [31] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, England, 1973.
- [32] M. Novello e S. E. P. Bergliaffa, *Phys. Rep.* 463 (2008), 127–213, arXiv:0802.1634 [astro-ph].
- [33] R. H. Brandenberger, *AIP Conf. Proc.* 1268.1 (2010), ed. por R. Dupke, J. Alcaniz, R. de la Reza e S. Daflon, 3–70, arXiv:1003.1745 [hep-th].
- [34] D. W. Hogg et al., *Astrophys. J.* 624 (2005), 54–58, arXiv:astro-ph/0411197.
- [35] M. Tegmark et al., *Astrophys. J.* 606 (2004), 702–740, arXiv:astro-ph/0310725.
- [36] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [37] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 15 (1929), 168–173.
- [38] W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* 553 (2001), 47–72, arXiv:astro-ph/0012376.
- [39] A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116 (1998), 1009–1038, arXiv:astro-ph/9805201.
- [40] M. P. Lima, S. Vitenti e M. J. Rebouças, *Phys. Rev. D* 77 (2008), 083518, arXiv:0802.0706 [astro-ph].

- [41] M. P. Lima, S. D. P. Vitenti e M. J. Reboucas, *Phys. Lett. B* 668 (2008), 83, arXiv:0808.2467 [astro-ph].
- [42] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* 659 (2007), 98–121, arXiv:astro-ph/0611572.
- [43] W. M. Wood-Vasey et al., *Astrophys. J.* 666 (2007), 694–715, arXiv:astro-ph/0701041.
- [44] M. Chevallier e D. Polarski, *Int. J. Mod. Phys. D* 10 (2001), 213–224, arXiv:gr-qc/0009008.
- [45] W. J. Percival et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 381 (2007), 1053–1066, arXiv:0705.3323 [astro-ph].
- [46] P. G. Hoel, *Introduction to Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1966; G. Cowan, *Statistical Data Analysis*, Oxford University Press, 1998; R. J. Barlow, *Statistics: A guide to the use of statistical methods in the physical sciences*, ed. por A. C. P. D. J. Sandiford F. Mandl, The Manchester Physics Series, John Wiley & Sons, 1999; A. van den Bos, *Parameter Estimation for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, 2007.
- [47] M. Zaldarriaga e U. Seljak, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 129 (2000), 431–434.
- [48] A. Lewis, A. Challinor e A. Lasenby, *Astrophys. J.* 538 (2000), 473–476, eprint: astro-ph/9911177.
- [49] M. Doran, *JCAP* 0506 (2005), 011, eprint: astro-ph/0503277v2, URL: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/0503277>.
- [50] M. Doran, *JCAP* 0510 (2005), 011, eprint: astro-ph/0302138.
- [51] S. Seager, D. D. Sasselov e D. Scott, *Astrophys. J.* 523.1 (1999), L1.
- [52] *GNU General Public License, Version 2*, URL: <http://www.gnu.org/licenses/gpl-2.0.html>.
- [53] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* 153 (1968), 1.
- [54] Y. B. Zeldovich, V. G. Kurt e R. A. Sunyaev, *J. Exp. Theor. Phys.* 28 (1969), 146.
- [55] V. Sahni e A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* 9 (2000), 373–444, arXiv:astro-ph/9904398.
- [56] R. K. Sachs e A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* 147 (1967), 73.
- [57] R. A. Sunyaev e I. B. Zeldovich, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 18 (1980), 537–560.
- [58] M. Colless et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 328 (2001), 1039–1063, arXiv:astro-ph/0106498.
- [59] J. Martin e R. H. Brandenberger, *Phys. Rev. D* 63.12 (2001), 123501, arXiv:hep-th/0005209.
- [60] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* 215 (1992), 203–333.

- [61] E. Lifshitz, *J. Phys. (USSR)* 10 (1946), 116.
- [62] E. Lifshitz e I. Khalatnikov, *Adv. Phys.* 12 (1963), 185–249.
- [63] R. K. Sachs, “Gravitational Radiation”, *Relativity, Groups and Topology*, Les Houches Lectures, Gordon & Breach Science Publishers, 1964, pp. 523–562.
- [64] S. W. Hawking, *Astrophys. J.* 145 (1966), 544.
- [65] D. W. Olson, *Phys. Rev. D* 14 (1976), 327–331.
- [66] G. F. R. Ellis e M. Bruni, *Phys. Rev. D* 40 (1989), 1804–1818.
- [67] M. Bruni, P. K. S. Dunsby e G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.* 395 (1992), 34–53.
- [68] V. Moncrief, *Annals of Physics* 88 (1974), 323–342.
- [69] U. H. Gerlach e U. K. Sengupta, *Phys. Rev. D* 18 (1978), 1789–1797.
- [70] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* 22 (1980), 1882–1905.
- [71] H. Kodama e M. Sasaki, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 78 (1984), 1.
- [72] T. Buchert, *Gen. Relativ. Gravitation* 32 (2000), 105–125, eprint: gr-qc/9906015; G. F. R. Ellis e T. Buchert, *Phys. Lett. A* 347 (2005), 38–46, arXiv:gr-qc/0506106; D. L. Wiltshire, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007), 251101, eprint: 0709.0732; T. Buchert, (2010), eprint: 1012.3084.
- [73] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry For Physicists*, World Scientific Publishing Company, 1999.
- [74] J. M. Stewart e M. Walker, *Royal Society of London Proceedings Series A* 341 (1974), 49–74; J. M. Stewart, *Classical Quant. Grav.* 7 (1990), 1169–1180.
- [75] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.
- [76] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, New York, 2004.
- [77] J. J. Halliwell e S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* 31 (1985), 1777.
- [78] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, *Gen. Relativ. Gravitation* 40.9 (1962), 1997, URL: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0405109>.
- [79] R. Jackiw, (1993), eprint: hep-th/9306075v1, URL: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/9306075>.
- [80] M. Reed e B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*, v. 1, Academic Press, 1980.
- [81] N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* 79 (2009), 083514, eprint: 0904.4454v1.
- [82] R. Wald, *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*, Chicago lectures in physics, University of Chicago Press, 1994.
- [83] M. Reed e B. Simon, *Methods of modern mathematical physics III: Scattering Theory*, Methods of mathematical physics, Elsevier Science, 1979.

- [84] J. Twamley e G. J. Milburn, *New Journal of Physics* 8 (2006), 328.
- [85] M. Reed e B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, 1975.
- [86] *Relativity, Groups and Topology*, Les Houches Lectures, Gordon & Breach Science Publishers, 1964.
- [87] W. Blyth e C. Isham, *Phys. Rev. D* 11.4 (1975), 768.
- [88] N. Pinto-Neto, E. Sergio Santini e F. T. Falciano, *Phys. Lett. A* 344 (2005), 131–143, eprint: [arXiv:gr-qc/0505109](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505109).
- [89] J. A. d. Barros e N. Pinto-Neto, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 57 (1997), 247, eprint: [gr-qc/9611028v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9611028v1), URL: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/9611028>.
- [90] J. A. Barros, N. Pinto-Neto e M. A. Sagiuro-Leal, *Phys. Lett. A* 241 (1998), 229–239, eprint: [arXiv:gr-qc/9710084](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710084).
- [91] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982, p. 340.
- [92] C. M. Bender e S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory*, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Springer, 1978, URL: <http://books.google.com/books?id=-yQXwhE6iWMC>.
- [93] A. Grib, S. Mamayev e V. Mostepanenko, *Vacuum quantum effects in strong fields*, Friedmann Laboratory, 1994, URL: <http://books.google.com/books?id=azBdcgAACAAJ>.
- [94] M. Gasperini e G. Veneziano, *Mod. Phys. Lett. A* 8 (1993), 3701–3713, [arXiv:hep-th/9309023](https://arxiv.org/abs/hep-th/9309023).
- [95] M. Gasperini e G. Veneziano, *Phys. Rev. D* 50 (1994), 2519–2540, [arXiv:gr-qc/9403031](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403031).
- [96] R. Brandenberger e F. Finelli, *J. High Energy Phys.* 11 (2001), 56, [arXiv:hep-th/0109004](https://arxiv.org/abs/hep-th/0109004).
- [97] J. Martin, P. Peter, N. Pinto-Neto e D. J. Schwarz, *Phys. Rev. D* 65.12 (2002), 123513, [arXiv:hep-th/0112128](https://arxiv.org/abs/hep-th/0112128).
- [98] D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* 524 (2002), 1–4, [arXiv:hep-ph/0106153](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0106153).
- [99] D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* 526 (2002), 173–178, [arXiv:hep-ph/0110007](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0110007).
- [100] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt e N. Turok, *Phys. Rev. D* 66.4 (2002), 046005, [arXiv:hep-th/0109050](https://arxiv.org/abs/hep-th/0109050).
- [101] R. Durrer e F. Vernizzi, *Phys. Rev. D* 66.8 (2002), 083503, [arXiv:hep-ph/0203275](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0203275).
- [102] J. C. Hwang e H. Noh, *Phys. Rev. D* 65.12 (2002), 124010, [arXiv:astro-ph/0112079](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0112079).

- [103] C. Cartier, R. Durrer e E. J. Copeland, *Phys. Rev. D* 67.10 (2003), 103517, arXiv:hep-th/0301198.
- [104] N. Deruelle e V. F. Mukhanov, *Phys. Rev. D* 52 (1995), 5549–5555, arXiv:gr-qc/9503050.
- [105] R. Wong, *Asymptotic expansions of integrals*, vol. 34, Classics in Applied Mathematics, SIAM: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2001.
- [106] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, 1964.
- [107] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2002.
- [108] M. P. Ryan e L. C. Spatilly, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press, 1975.
- [109] W. Israel, “The Relativistic Boltzmann Equation”, L. O’Raifeartaigh, *General Relativity Papers in Honor of J. L. Synge*, ed. por L. O’Raifeartaigh, 1972, cap. 12, pp. 201–241.
- [110] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and Einstein’s Equations*, Oxford university press, 2009.
- [111] J. M. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*, Springer-Verlag, 1971.
- [112] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, W H Freeman e Company, 1973.
- [113] W. Israel, “Covariant Fluid Mechanics and Thermodynamics: An Introduction”, *Relativistic Fluid Dynamics*, ed. por A. M. Anile, Springer-Verlag Berlin e Heidelberg GmbH & Co. K, 1987, pp. 152–210.
- [114] R. Maartens, (1996), eprint: astro-ph/9609119v1, URL: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9609119>.
- [115] S. A. Hayward, (2007), arXiv:gr-qc/9803007.
- [116] J. Bernstein, *Kinetic theory in the expanding universe*, Cambridge University Press, 1988.
- [117] A. D. Polyanin e V. F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [118] *The Wolfram Functions Site*, URL: <http://functions.wolfram.com/>.

ÍNDICE REMISSIVO

C

calibre

- de curvatura constante, 82, 99, 111
- Newtoniano, 51, 99, 111, 114
- síncrono, 52, 82, 111, 112

campo

- conforme de Killing, 13
- de Killing, 30, 125
- de Killing tipo tempo, 86
- normal, 8, 11, 32, 38

cisalhamento, 32, 38, 121, 129

- perturbado, 139

comutador, 117

condições de energia, 6

condições de junção, 105

conexão métrica, 118

constante

- cosmológica, 7, 8, 16, 17
- de Hubble, 15, 71
- de Hubble adimensional, 15

coordenadas

- gaussianas normais, 31, 52, 120
- hiperesféricas, 9

curvatura

- espacial, 9, 10, 26
- extrínseca, 10, 35, 120
- tensor de Riemann, 118

D

densidade

- adimensional, 20
- de energia, 11
- total, 17
- total de poeira, 17
- total de radiação, 16

densidade crítica, 16

desvio para o vermelho, 14

difeomorfismo, 29, 30

distância

- conforme, 15, 21

E

energia positiva, 85, 87–89

entalpia específica, 63

equação

- de Wheeler–DeWitt, 65, 68
- de Friedmann, 72
- de Schrödinger, 66

equação de Wheeler–DeWitt, 4

equações

- Einstein, 7
- Friedmann, 11

equações de movimento

- invariantes de calibre, 42

equilíbrio, 128, 131

equilíbrio termodinâmico, 16

escalar de expansão, 33, 38, 121, 129

- perturbado, 139

espaço de Hilbert, 65, 83

espectro de potências, 90, 91

F

fator de escala, 9, 12

fluido

- de poeira, 16
- de radiação, 16
- perfeito, 11, 15

função

- de Hubble, 10, 23, 26, 72
- de Hubble adimensional, 25
- de Hubble conforme, 17, 20
- de Hubble normalizada, 17
- tempo, 8

G

geodésicas nulas, 14

H

hipersuperfície espacial, 119

homogeneidade, 7

horizonte

de partículas, 21

I

identidade

de Bianchi, 7, 12, 119

de Jacobi, 125

índice espectral, 97

inflação, 1, 6, 23

invariante de escala, 97

quase, 97, 105

isotropia, 7

K

Killing

equações de, 125

L

liberdade de calibre, 27, 30

M

matriz simplética, 83

métrica

conforme, 10, 12, 13

de fundo, 31–33, 38

perturbada, 31, 32

mini–superespaço, 62, 69

modelo

de fundo, 29

inflacionário, 23

perturbado, 29

modelo padrão, 16, 23

mudança

de calibre, 30, 36

de coordenadas, 30

O

observadores

isotrópicos, 32

observadores isotrópicos, 8, 38, 51

operadores

de criação e aniquilação, 84, 85

P

parâmetro

de curvatura, 22, 24

parênteses de Poisson, 62, 64, 73, 79, 81, 83, 84

perturbação

escalar simples, 42

perturbações, 22

adiabáticas, 86

invariantes de calibre, 31

mistas, 31, 32, 38

simples, 31, 32, 41

tensoriais, 34

vetoriais, 33

pressão

isotrópica, 11

Princípio Cosmológico, 7

Princípio Cosmológico Perfeito, 7

produto interno, 84, 87

R

raio de Hubble, 15, 22, 24, 27

conforme, 15

recombinação, 21

ricochete, 72

S

seccionamento, 8

singularidade, 6

soluções adiabáticas, 87

T

tempo

conforme, 13, 20

cósmico, 8, 33

tensor

de Ricci espacial, 33

de Riemann, 10

de Weyl, 11, 32

invariante de calibre, 43

teoria

de perturbações, 27

termodinâmica, 128
trajetória de Bohm, 69, 70

V

variáveis
 cinemáticas, 4, 32, 38–40, 52, 54, 145,
 148
 invariantes de calibre, 38, 40, 41
variável
 de Mukhanov–Sasaki, 77
 invariante de calibre, 42