

TESE DE DOUTORADO

MÉTODOS DE TEORIA QUÂNTICA DE
CAMPOS APLICADOS AO ESTUDO DAS
TRANSIÇÕES DE FASE EM FILMES E FIOS
SUPERCONDUTORES

Yony Milla Gonzales

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, agosto de 2006

TESE DE DOUTORADO

**MÉTODOS DE TEORIA QUÂNTICA DE
CAMPOS APLICADOS AO ESTUDOS DAS
TRANSIÇÕES DE FASE EM FILMES E FIOS
SUPERCONDUTORES**

Yony Milla Gonzales

Orientador: Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

Co-orientador: Itzhak Roditi

Tese apresentada ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas para a obtenção
do título de doutor em física.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, agosto, 2006

Resumo

A presente tese é consagrada à utilização dos métodos desenvolvidos recentemente nas Refs. [1–6] na teoria quântica de campos Euclideana na análise do modelo de Ginzburg-Landau para supercondutividade em sistemas confinados.

Estudos sobre teoria de campos confinados se encontram na literatura há um bom tempo. Em particular, uma análise do grupo de renormalização em geometria de tamanho finito podem ser encontrados em [7,8]. Estes estudos foram realizados levando em conta efeitos de fronteira sobre leis de escala.

Questões a respeito da existência de transições de fase podem também ser levantadas se considerarmos o comportamento da teoria quântica de campos em função dos limites spatial. A existência transições de fase podem ser neste caso associadas a algum parâmetro espacial descrevendo a quebra de invariância translacional, como por exemplo, a distancia L entre duas planos paralelos que confinão o sistema, o que corresponde a uma amostra em forma de fio de espessura L . Estudos deste tipo foram realizados recentemente em [1,2], concernindo com a quebra espontânea da simetria na teoria $\lambda\phi^4$.

Sob essas perspectivas, iniciamos o nosso estudo no capítulo **2** com um breve panorama da teoria de Ginzburg-Landau introduzindo-se algumas ferramentas necessárias da teoria quântica de campos a serem utilizados nesta tese, tais como o método funcional e o potencial efetivo, os quais são utilizados para calcular as correções quânticas da energia livre de Landau em transições de fase de primeira e segunda ordem.

Após ter apresentado o ferramental necessário, no capítulo **3** prosseguimos o nosso estudo com uma generalização para fios dos resultados obtidos recentemente para filmes superconductores [6]. Nós consideramos o modelo de Ginzburg–Landau, confinado num fio retangular de comprimento infinito com secção transversal $L_1 \times L_2$. As contribuições do campo de gauge a nosso modelo são implementadas por meio do potencial efetivo Gaussiano (PEG) [9, 10]. Nós obtemos as equações para a temperatura crítica como uma função das dimensões transversais do fio, L_1 , L_2 e da temperatura de transição T_0 para amostras em forma de "bulk".

No capítulo 4 nós consideramos o modelo de Ginzburg–Landau, $(\lambda\phi^4 + \eta\phi^6)$ descrevendo uma transição de fase de primeira ordem na sua formulação compactificada em uma , duas e três das dimensões espaciais que correspondem a amostras em forma de filmes, fios e grãos respectivamente. Encontramos uma expressão para a temperatura crítica em função da espessura L dos filmes, da área da seção transversa $L_1 \times L_2$ dos fios e do volume $L_1 \times L_2 \times L_3$ dos grãos, para supercondutores.

Em todos os casos o tratamento do confinamento espacial é feito utilizando uma generalização para as coordenadas espaciais da prescrição de Matsubara na teoria de campos a temperatura finita, além de métodos de regularização dimensional e continuação analítica da função *zeta* de Epstein. Também, são feitas comparações com dados experimentais para filmes e fios, os quais sugerem que uma observação experimental do comportamento da temperatura crítica em função das dimensões da amostra podem servir como um critério para decidir sobre a ordem da transição de fase supercondutora.

Abstract

The present thesis deals with the utilization of the methods recently developed in Refs. [1–6] in Euclidean quantum field theory in the analysis of Ginzburg-Landau model for superconductivity in confined systems.

Studies on confined field theory have been done in the literature for a long time. In particular, an analysis of the renormalization group in finite-size geometries can be found in [7,8]. These studies have been performed to take into account boundary effects on scaling laws.

Questions concerning the existence of phase transitions may also be raised if one considers the behaviour of field theories as a function of spatial boundaries. The existence of phase transitions would be in this case associated to some spatial parameters describing the breaking of translational invariance., for instance, the distance L between planes confining the system. Studies of this type have been recently performed in [1,2], concerning with the spontaneous symmetry breaking in the $\lambda\phi^4$ theory.

on those perspective, we begin our study in the chapter 2 with a short panorama of the Ginzburg-Landau model introducing some tools quantum field theory tools that will be used in this thesis, such as the functional method and the effective potential, which have been employed to calculate the quantum corrections of the Landau free energy in first and second order phase transitions.

After the presentation of the necessary tools, in chapter 3 we go ahead in our study with a generalization for wires of the results recently obtained for superconducting films [6]. We consider the Ginzburg–Landau model, confined in an infinitely long rectangular wire of cross-section $L_1 \times L_2$, gauge field contributions to our model being implemented by means of the Gaussian effective potential [9,10]. We obtain an equation for the critical temperature as a function of the wire transverse dimensions, L_1, L_2 , and of the transition temperature T_0 of the sample in bulk form.

In the chapter 4 we consider the Ginzburg–Landau model ($\lambda\phi^4 + \eta\phi^6$) describing a first order phase transition in its compactified formulation with one, two and three of the spatial dimensions compactified, which correspond to samples in the form of films,

wires and grains respectively. We find the expressions for the transition temperature as a function of the thicknesses L for films, the transversal section area $L_1 \times L_2$ for wires and the volume $L_1 \times L_2 \times L_3$ for grains.

In all the cases, the treatment of the spatial confinement is made using a generalization for the spatial coordinates of the Matsubara prescription in finite temperature quantum field theory, combined with dimensional regularization methods and analytical continuation of Epstein generalized *zeta*-functions. Also, comparisons with experimental data for films and wires are done, suggesting that an experimental observation of the behavior of the critical temperature as a function of the dimensions of the sample can be taken as a criterion to decide on the order of the superconducting phase transition.

Dedico esta tese aos meus pais Leoncio e Juana
e meus irmãos e irmãs.

Agradecimentos

A Adolfo Malbouisson , pela orientação e os conselhos abertos prestados.

A Itzhak Roditi, pela co-orientação e discussões estimulantes.

Aos dedicados funcionários do CBPF, em especial Myriam Coutinho, José de Almeida Ricardo, pela eficiente atenção com as documentações solicitadas.

Aos meus amigos e companheiros do LAFEX.

À minha família pelo apoio na minha formação.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	O Modelo Ginzburg-Landau e a Teoria Quântica de Campos	6
2.1	O modelo de Ginzburg–Landau (GL)	6
2.2	Aspectos da teoria quântica de campos	9
2.2.1	Correções ao modelo Gaussiano	12
2.2.2	O potencial efetivo e a energia livre GL	14
2.2.3	As transições de fase na aproximação de Landau	16
3	Flutuações de Gauge e a temperatura crítica em fios supercondutores	21
3.1	Introdução	21
3.2	O Potencial Efetivo Gaussiano para o Modelo de Ginzburg-Landau	23
3.3	A compactificação em $d=2$ dimensões espaciais	29
3.4	O comportamento crítico para fios supercondutores	32
3.5	Comparação qualitativa com os dados experimentais e discussão	36
4	Transição de fase supercondutora de primeira ordem	41
4.1	Introdução	41
4.2	O potencial efetivo no modelo de Ginzburg-Landau $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$	43
4.3	Temperatura de transição de fase de primeira ordem	49
4.4	Cálculo das constantes fenomenológicas	51
4.5	O comportamento crítico em filmes, fios e grãos supercondutores	52
4.5.1	Filmes	53

4.5.2	Fios	55
4.5.3	Grãos	57
5	Conclusões e perspectivas	59
	Apêndices	62
A	O tratamento da função zeta	62
A.1	Função zeta de Epstein-Hurwitz	62
A.2	Função zeta de Epstein 2-dimensional	64
B	A Derivação Microscópica do Funcional GL: Cálculo das constantes fenomenológicas	66
B.1	A Derivação Microscópica da Ação GL	66
B.2	Cálculo das constantes fenomenológicas da energia livre de GL	70
	Referências Bibliográficas	71

Capítulo 1

Introdução

As últimas quatro décadas assistiram a um grande progresso da teoria quântica de campos (TQC). Com a preocupação original de descrever a eletrodinâmica quântica, a TQC tornou-se a base principal para as discussões a respeito das interações fundamentais, conduzindo a previsões teóricas em extraordinária concordância com os resultados experimentais [11], levando à ideia que interações fundamentais poderiam ser descritas por uma mesma teoria, por exemplo, o modelo padrão que descreve as interações eletrofracas e fortes.

Paralelamente as aplicações da TQC à física de partículas, com os trabalhos pioneiros de Ginzburg e Landau [12], a TQC começou a ser aplicada a problemas típicos da física da matéria condensada como a supercondutividade e a superfluidade. Posteriormente Anderson, Wilson, Fisher, entre outros perceberam o alcance e a amplitude gerais da ideia de associar um grupo ao método da renormalização em teoria de campos [7, 13, 14]. Tal grupo, atualmente conhecido como grupo de renormalização (GR), expressa o comportamento da teoria sob transformações de escala de um modelo. Este método, dito de GR, deu excelentes resultados, por exemplo, no cálculo dos expoentes críticos quando há ocorrência de transições de fase. No entanto, não vamos utilizar métodos de GR no presente trabalho.

Particularmente, nos interessamos pelo modelo de Ginzburg-Landau (GL) [16]. Este modelo postula que um sistema físico na vizinhança da criticalidade tem um conjunto de

estados ou configurações possíveis caracterizado por um conjunto de expoentes críticos [15]. Desta maneira o sistema pode ser descrito a partir de um hamiltoniano em função de um certo parâmetro de ordem $\psi(x)$. Na descrição de diferentes transições de fase o parâmetro de ordem deve ser escolhido de forma apropriada. Por exemplo, examinando a magnetização generalizada, $\mathbf{m}(\mathbf{x})$, para spins de n componentes, esta serviria como um parâmetro de ordem para problemas específicos como, por exemplo, para descrever transições líquido-gás ($n = 1$), para descrever a superfluidez, supercondutividade e magnetos planares ($n = 2$). No nosso caso da supercondutividade o parâmetro de ordem ψ tem a seguinte interpretação física: $|\psi|^2 = n_s$, onde n_s é a densidade dos "pares de cooper". Além disso, $\psi \neq 0$ no estado supercondutor, mas zero no estado normal. Assim, ψ é o parâmetro de ordem da transição de fase, existindo abaixo de uma certa temperatura crítica T_c e indo a zero acima de T_c . É, então, assumido que a descrição termodinâmica do sistema pode ser feita expandindo a energia livre em potências de ψ , e que próximo a T_c , o hamiltoniano GL pode ser escrito da forma,

$$H_{GL} = \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2}m_0\psi^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi^4 + \frac{1}{6}\eta\psi^6 + \dots$$

Um outro ponto é que o grau das autointerações está associado a diferentes ordens de transição de fase [12]. No caso em que H_{GL} é expandida em função do parâmetro de ordem até o termo $\lambda\psi^4$, com $\lambda > 0$, este dito hamiltoniano descreve uma transição de fase de segunda ordem, enquanto que se H_{GL} é expandido no seu parâmetro de ordem até o termo $\eta\psi^6$, com $\lambda < 0$ e $\eta > 0$, pode descrever uma transição de fase de primeira ordem. Além disso, o modelo GL estabelece de antemão que a dependência com a temperatura aparece através do termo $m_0 \propto (T/T_c - 1)$.

Um detalhe importante, considerando-se o caso do modelo a n componentes, é a invariância de H_{GL} frente ao grupo de simetria interna do parâmetro de ordem, este dito grupo de simetria é a simetria $O(n)$.

Outro aspecto importante a levar em conta no modelo GL é que as constantes fenomenológicas, λ , m_0 e η , que aparecem no hamiltoniano, podem ser obtidas a partir de uma teoria microscópica. No caso dos supercondutores, estas constantes podem ser obtidas da teoria microscópica da supercondutividade de Bardeen, Cooper e Schrieffer

(BCS) [19] por meio da derivação das equações de Ginzburg–Landau feita originalmente por Gorkov [17, 18], e em seguida refinada por varios autores [20].

Um exemplo onde o modelo GL é empregado atualmente é na descrição dos supercondutores de altas temperaturas críticas (HTSC), para os quais a teoria BCS original revela-se inadequada. A descoberta desta categoria de materiais há quase duas décadas abriu uma nova perspectiva no estudo dos fenômenos críticos. Os materiais HTSC têm a vantagem de possuir uma região crítica maior em relação daqueles supercondutores convencionais. Este fato em princípio permite maior acesso experimental a tal região. Medidas têm mostrado que as flutuações críticas são muito importantes nos HTSC (especialmente aqueles feitos pelo composto YBCO) [21, 22], tendo comportamento diferente da descrição do campo médio. Porém, tais experiências não foram realizadas na região crítica carregada, a qual parece ainda inacessível. Devido aos valores pequenos do comprimento de coerência característico destes materiais, flutuações térmicas são fortemente estimuladas em comparação com os supercondutores de baixa temperatura crítica, reduzindo assim o domínio de validade do campo médio.

Nesta tese nós pretendemos estudar as propriedades das transições de fases ocorrendo em sistemas limitados por fronteiras espaciais. Nós vamos considerar o sistema "vivendo" numa região do espaço Euclideano e vamos a estudar as propriedades termodinâmicas do sistema em função de suas dimensões espaciais. A mais simples das situações que estudaremos será o sistema confinado entre dois planos paralelos separados por uma distância L ; de um ponto de vista físico, esse sistema pode ser visto como uma amostra de um material na forma de um filme.

Para tal estudo nós vamos a utilizar o fato de que em uma teoria de campos Euclideana as coordenadas espaciais e o inverso do tempo imaginário estão em pé de igualdade. Como veremos mais adiante isto permitirá uma transição natural do formalismo de Matsubara (de teoria quântica de campos a temperatura finita) para o estudo dos sistemas confinados em regiões do espaço Euclideano. Esta nova abordagem foi utilizada em [4, 5]. Os resultados neles obtidos constituem a base desta tese.

Desta forma, com o intuito de contribuir ao estudo da supercondutividade em materiais com dimensões espaciais compactificadas, questões a respeito da formulação do modelo de Ginzburg-Landau na presença de condições de fronteira se mostram pertinentes, sobretudo a partir da utilização do método da regularização zeta de Epstein [1,23–26]. Tais métodos têm sido também utilizados em teoria quântica de campos no tratamento de sistemas confinados, como por exemplo o efeito Casimir [24].

Assim, tomando-se como motivação tudo o que foi dito acima, a presente tese é consagrada ao estudo das transições de fase supercondutoras a partir da aplicação dos métodos da teoria quântica de campos no contexto do modelo de Ginzburg-Landau. O conteúdo deste trabalho é organizado da forma a seguir:

No capítulo 2 fazemos uma breve revisão do modelo GL, introduzindo os conceito do gerador funcional e o potencial efetivo da teoria quântica de campos (TQC), mostrando as correções à energia livre do GL na aproximação de campo médio, as transições de segunda e primeira ordem são estudadas nos modelos $\lambda\phi^4$ e $\lambda\phi^4 + \eta\phi^6$, respectivamente.

Seguindo as ideias sobre técnicas da TQC e as transições de fases no modelo GL dadas no capítulo 2, no capítulo 3 nós enfocamos o estudo das transições de fase de segunda ordem no modelo GL na aproximação $\lambda\psi^4$, incluindo as flutuações de gauge em sistemas compactificados em duas de suas dimensões espaciais. Neste sentido, analisa-se o nosso modelo num sistema parcialmente compactificado, com a utilização do método das funções zeta de Epstein multidimensionais. Para lidar com os problemas técnicos que surgem da compactificação de dimensões espaciais utilizamos uma combinação dos métodos de regularização dimensional [27] e da função *zeta* generalizada. Assim, para o nosso modelo GL definido em três dimensões espaciais, considera-se o caso particular de duas dimensões compactificadas, o qual correspondem a uma amostra em forma de um fio de secção transversal retangularde área $A = L_1 \times L_2$.

No capítulo 4, nós utilizamos o modelo de GL incluído os termos $\lambda\phi^4 + \eta\phi^6$ para estudar o comportamento da temperatura crítica nas transições de fase de primeira ordem em sistemas confinados. Aplicamos este estudo para analisar o comportamento da temperatura crítica em amostras supercondutoras em forma de filmes, fios e grãos.

Comparações com os dados experimentais são feitas para amostras supercondutoras em forma de filmes.

E por último, no capítulo 5, apresentamos o resumo e as conclusões dos trabalhos e mostramos algumas perspectivas de trabalho no modelo GL.

Capítulo 2

O Modelo Ginzburg-Landau e a Teoria Quântica de Campos

Este capítulo é devotado a uma breve revisão do modelo Ginzburg-Landau (GL) das transições de fase, bem como uma introdução das ferramentas básicas da teoria de campos. Assim, na seção **2.1** apresentamos a energia livre do modelo GL definida como o Hamiltoniano em termos do parâmetro de ordem (o campo ϕ). Em seguida, na seção **2.2**, introduzimos a função de partição, conceito fundamental que faz a conexão da mecânica estatística com a teoria quântica de campos. O tratamento é feito via métodos da integral funcional, com algumas aplicações na aproximação Gaussiana. Em seguida, as correções quânticas são discutidas. Também mostramos o cálculo do potencial efetivo exibindo a parte livre e as correções a um laço. Finalmente, estudamos as transições de fase com o formalismo do potencial efetivo na aproximação do campo médio.

2.1 O modelo de Ginzburg–Landau (GL)

Sistemas que passam por uma transição de fase são caracterizados pelas flutuações de uma ou um conjunto de variáveis, as quais podem ser interpretadas como distribuições espaciais com um peso estatístico. Desta maneira, cada um das variáveis devem ser definidas sobre todo o espaço de base e variar continuamente em um intervalo que em

princípio é $]-\infty, +\infty[$. A identificação destas variáveis é vinculada ao tipo de transição de fase que se deseja estudar (visto que um único sistema pode experimentar diferentes transições de fase); além disso, diferentes sistemas podem apresentar propriedades em comum. Por estas razões é conveniente formular de início um modelo da maneira mais geral possível, com o intuito de enfatizar sua utilidade e certas propriedades, como por exemplo a universalidade.

Para tal, do ponto de vista da matemático, uma noção equivalente à variável mencionada acima é a de *campo* $\phi(x)$. Definindo-o formalmente no cenário de nosso interesse, seja então \mathcal{E} um espaço de base sobre o qual está o sistema em estudo, cujos pontos são denotados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{E}$, com d sendo a dimensão de \mathcal{E} . O *campo do parâmetro de ordem* do sistema com n componentes reais é definido sobre \mathcal{E} como uma função suave bem comportada tal que

$$\begin{aligned} \phi &: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{R}^n \\ &: \mathbf{x} \longmapsto \phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é uma n -upla de campos reais. Convém escolher o espaço de base $\mathcal{E} = \mathfrak{R}^d$, justamente o próprio espaço Euclideano. Ademais, a terminologia utilizada tem inspiração naquela dos fenômenos críticos, em que $\phi(\mathbf{x})$ é chamado simplesmente de parâmetro de ordem. Em TQC Euclideana, o parâmetro de ordem é simplesmente o campo. No que segue desta tese utilizaremos as duas terminologias, campo ou parâmetro de ordem, para nos referir a ϕ , segundo o critério de conveniência da situação.

Prosseguindo este estágio de formulação, um sistema físico na vizinhança da criticidade tem um conjunto de estados ou configurações possíveis. Neste panorama, é importante definir uma função característica do sistema: o *Hamiltoniano*, a qual associa um número real a uma configuração do campo no \mathfrak{R}^n e a cada região \mathcal{R} em \mathcal{E} . Deste modo, considerando $\partial\mathcal{R}$ a fronteira de \mathcal{R} , o hamiltoniano é definido como um funcional do modo

$$\begin{aligned}
S &: \mathfrak{R}^n \times \mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{R} \\
&: (\phi, \mathcal{R}) \longmapsto S(\phi, \mathcal{R}).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, os campos possíveis do sistema são aqueles soluções de

$$\delta W(\phi, \mathcal{R}) = 0. \tag{2.3}$$

sob as condições

$$\delta\phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{R}} = 0. \tag{2.4}$$

No quadro considerado, o interesse aqui é o Hamiltoniano da forma

$$S(\phi, \mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^d\mathbf{x} \mathcal{S}(\phi(\mathbf{x}), \nabla\phi(\mathbf{x}); \mathbf{x}), \tag{2.5}$$

onde \mathcal{S} é uma função característica do sistema, chamada de densidade de Hamiltoniano.

Passando ao aspecto da forma explícita do Hamiltoniano, postula-se que o Hamiltoniano de interesse aqui é dado por

$$\begin{aligned}
S_{GL}(\phi, \mathcal{R}) &= \int_{\mathcal{R}} d^d\mathbf{x} \mathcal{S}_{GL}(\phi(\mathbf{x}), \nabla\phi(\mathbf{x}); \mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathcal{R}} d^d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m_0\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda_0(\phi^2)^2 \right],
\end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo $\phi^2 = \sum_{i=1}^n \phi_i^2$ e $\lambda_0 > 0$; S_{GL} é dito ser o *Hamiltoniano GL*. Em adição, as expressões $d\mathcal{S}_{GL}/d\phi_i = 0$ são ditas *equações de estado*. Este modelo estabelece de antemão que a dependência na temperatura aparece através do termo $m_0 = m_0(T)$. Um detalhe explícito é a invariância de S_{GL} frente ao grupo de simetria interna do parâmetro de ordem, que neste caso é a simetria $O(n)$. É importante também enfatizar que este modelo é desenvolvido para descrever sistemas somente na vizinhança do ponto crítico, próximos à temperatura de transição de fase, T_0 . Isto ficará evidente mais adiante. Outro ponto digno de observação é com respeito à escolha dos parâmetros m_0 e λ_0 :

embora a escolha deles aparente ter em princípio toques de arbitrariedade, este fato ressalta o aspecto da universalidade, pois consegue-se traçar as propriedades de um imenso número de sistemas na vizinhança da criticalidade. Esta questão aparece em toda a sua plenitude na análise do grupo de renormalização.

2.2 Aspectos da teoria quântica de campos

Na seção anterior havíamos definido o parâmetro de ordem ϕ , no modelo GL, como sendo um campo escalar; este fato nos permite utilizar o Hamiltoniano (2.6) como um modelo da teoria de campos em função do campo ϕ . E da relação que existe no estudo dos fenômenos críticos na mecânica estatística e na teoria de campos em espaços euclidianos (tempo imaginário), o Hamiltoniano é tratado como a ação. Uma teoria quântica de campos pode ser definida a partir do chamado funcional gerador das funções de Green, $Z[J]$, também conhecido como amplitude de persistência do vácuo sob a influência de fontes de campos externos, $J(x)$. Esta abordagem usa o conceito de integrais de trajetória, originalmente introduzido por Feynman [28], que mostrou que o formalismo de integrais de trajetórias podia ser visto como uma alternativa aos formalismos tradicionais de Heisenberg e Schrodinger da mecânica quântica [29]. O funcional gerador das funções de Green é a solução da equação de Dyson-Schwinger e pode ser escrito como uma expansão funcional das funções de Green de n-pontos. Através de uma transformação funcional de Legendre encontramos o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula (1-PI), $\Gamma[\phi_c]$, que é, então, expandido em potências de \hbar . Tal funcional é chamado de ação efetiva, pois ele contém, além da ação clássica, todas as correções quânticas. Uma expansão alternativa do funcional gerador 1-PI em potências das derivadas do campo clássico, $\phi_c(x)$, nos fornece o potencial efetivo. Tal como a ação efetiva, o potencial efetivo contém, além do potencial clássico, todas as correções quânticas. Neste panorama, varias funções termodinâmicas e seus comportamentos singulares podem ser obtidos do funcional gerador (função de partição):

$$\mathcal{Z} = \int D\phi e^{-S[\phi] + \int d^d x j(x)\phi(x)} \quad (2.7)$$

onde j é uma corrente externa, com a ação escrita da forma

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int dx \phi(x) [m_0 - \nabla^2] \phi(x) + \frac{\lambda_0}{4} \phi^4 \quad (2.8)$$

Como foi dito acima, a função de partição \mathcal{Z} , é idêntica ao funcional gerador $Z[j]$ de uma teoria de campos Euclideana. Logo, o valor esperado de alguma certa quantidade física pode ser obtido tomando as derivadas funcionais apropriadas em relação ao campo externo $j(x)$. Por exemplo o parâmetro de ordem

$$\langle \phi \rangle = \frac{\delta}{\delta j(x)} \ln Z[j], \quad (2.9)$$

análogamente, a função de correlação de dois pontos,

$$G(x - x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_c = \frac{\delta^2}{\delta j(x)\delta j(x')} \ln Z[j]. \quad (2.10)$$

onde a expressão $\langle \dots \rangle_c$ indica uma função de correlação conexa. Uma situação simples é se nós consideramos só a parte livre da ação (2.8) a qual corresponde ao **modelo Gaussiano**. Logo a função de partição para a parte livre é dada por,

$$\mathcal{Z}_0 = \exp\left\{\frac{1}{2} \int dx dx' j(x)G(x - x')j(x')\right\} \quad (2.11)$$

onde $G(x - x')$ é a função de correlação, dada por

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 + m_0}, \quad (2.12)$$

e está relacionada à medida do alcance das interações no ponto crítico. Daqui nós podemos computar a quantidade física usando o método do ponto de sela e a identidade,

$$\frac{1}{D} = \int_0^\infty dx \exp(-xD), \quad (2.13)$$

donde encontramos que

$$G(r) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 + m_0} \approx \exp(-r/\xi), \quad (2.14)$$

onde $r = |x - x'|$ e ξ é uma quantidade identificada como o comprimento de correlação,

$$\xi \approx |m_0|^{-1/2} = \alpha |T - T_c|^{-1/2}. \quad (2.15)$$

Por outro lado, no espaço de momentos podemos identificar a função de Green como

$$G(k) = [k^2 + m_0]^{-1}. \quad (2.16)$$

No modelo GL a susceptibilidade é obtida de $G(0)$ isto é

$$\chi(0) \approx |m_0|^{-1} = |T - T_c|^{-1}. \quad (2.17)$$

Agora quando $T \rightarrow T_0$ temos que a função de correlação $\xi \rightarrow \infty$ e a função de Green (2.12) é dada então por

$$G(r) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} e^{-ik.r}. \quad (2.18)$$

introduzindo a variável $z = p \times r$ na exponencial em, 2.18 temos

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{r^{d-2}} \int \frac{d^d z}{z^2} e^{-iz \cos \theta} \quad (2.19)$$

Assim, no ponto crítico T_0 , $G(r)$ tem o seguinte comportamento,

$$G(r, T_0) \approx \frac{1}{r^{d-2}} \quad (2.20)$$

Onde podemos ver que para $d = 2$ a função de correlação diverge na região onde $r \ll 1$.

As correlações que nós acabamos de examinar no modelo Gaussiano correspondem a pequenas flutuações Gaussianas ao redor da solução ponto de sela, a expressão escrita acima corresponde a uma fase desordenada onde $\langle \phi \rangle = 0$. Entretanto, uma análise similar pode ser realizada dentro da fase ordenada por uma expansão em torno do valor

não zero do campo $\langle \phi \rangle = \phi_c$, e outra vez retendo somente os termos quadráticos na flutuação do campo para obter um outro modelo Gaussiano.

2.2.1 Correções ao modelo Gaussiano

As correções por teoria de perturbações em ϕ^4 são essencialmente o mesmo problema encontrado na teoria quântica de campos para partículas que interagem através de um acoplamento fraco. Diferentes termos na teoria de perturbação podem ser elegantemente classificados usando uma representação gráfica através dos **diagramas de Feynman**. Posto que estas técnicas são muito familiares para as pessoas que trabalham em teoria de campos ou na teoria de muitos corpos, nós apresentamos aqui, sem muito detalhe, esta técnica.

Começando com a correção para a susceptibilidade, nós precisamos calcular

$$\chi = G(k=0) = \int dx e^{ikx} \langle \phi(0)\phi(x) \rangle. \quad (2.21)$$

Na aproximação Gaussiana ($\lambda_0 = 0$), nós tínhamos encontrado que $\chi_0 = G_0(k=0) = |m_0|^{-1}$. Agora se incluímos o termo de autointeração $\lambda_0\phi^4$ em nosso hamiltoniano e em seguida expandimos perturbativamente esta contribuição em nossa função de partição, o propagador $G(k)$ pode ser escrita como [29],

$$G(k) = [m_0 + k^2 - \Sigma(k)]^{-1}, \quad (2.22)$$

onde $\Sigma(k)$ é definido como a auto-energia. Aqui o que nos interessa é calcular a massa renormalizada $m_r = m_0 - \Sigma(0)$. Nesse sentido vamos a calcular as correções do propagador

$$G(x) = \langle \phi(0)\phi(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int d\phi \phi(0)\phi(x) \exp(-S_0 - S_{int}), \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{2} \int dx \phi(x) [m_0 - \nabla^2] \phi(x), \\
S_{int} &= \frac{\lambda_0}{4} \int dx \phi^4(x).
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

Expandindo em termo de de λ_0 ,

$$\exp(-S_{int}) = 1 - \frac{\lambda_0}{4} \int dx \phi^4(x), \tag{2.25}$$

nós temos

$$G(x-y) = G_0(x-y) - \frac{\lambda_0}{4} \int dx' \langle \phi(x) \phi(y) \phi^4(x') \rangle_0 + \vartheta(\lambda_0^2). \tag{2.26}$$

onde, aplicando o teorema de Wick [29],

$$\langle \phi(x) \phi^4(x') \rangle_0 = 12G_0(x-x')G_0(0)G(x'-y). \tag{2.27}$$

No espaço dos momentos encontramos que

$$G(k) = G_0(k) + G_0(k)\Sigma(k)G_0(k) + \dots \tag{2.28}$$

com

$$\Sigma(k) = -3\lambda_0 \int \frac{dk'}{(2\pi)^d} G_0(k') + \vartheta(\lambda^2). \tag{2.29}$$

Com o intuito de calcular a mudança da temperatura crítica, nós necessitamos calcular o inverso da susceptibilidade, $\chi^{-1} = G^{-1}(k=0)$, em ordem λ_0 nós encontramos (a equação de Dyson)

$$G^{-1}(k) = G_0^{-1}(k) - \Sigma(k). \tag{2.30}$$

Nesta aproximação a correção para a susceptibilidade é dada por

$$\chi^{-1} = G^{-1}(k=0) = m_0 + \delta m \tag{2.31}$$

onde a correção para a massa na ordem de aproximação λ_0 é

$$\delta m = 3\lambda_0 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{m_0 + k^2} + \vartheta(\lambda^2) \quad (2.32)$$

A integral acima é dada em d -dimensões, integrando a parte esférica, nós podemos escrever

$$\delta m = 3\lambda K_d \int_0^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{m_0 + k^2}, \quad (2.33)$$

onde $K_d = S_d/(2\pi)^d$, S_d é o ângulo sólido em d -dimensões. A integral acima é convergente no infravermelho a $m_0 = 0$, o que implica numa correção da massa (temperatura crítica) pequena:

$$\delta m = \frac{3\lambda K_d}{d-2} \Lambda^{d-2}. \quad (2.34)$$

A expressão para a susceptibilidade com estas correções pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \chi^{-1} &= m_r = m_0 + 3\lambda K_d \int_0^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{m_r + k^2} \\ &= m_0 + \delta m_0 - \frac{3\lambda_0 K_d}{d-2} m_r^{d/2-1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Observe-se que o último termo decresce com a potência $(d/2) - 1 < 1$ no domínio de m_r pequeno. Pode-se também demonstrar que para $d < 4$ a susceptibilidade diverge na transição de fase de segunda ordem, onde $m_r = 0$. Desta maneira, as correções das flutuações não podem ser ignoradas para $d < 4$ e o melhor tratamento para esses casos é dado através da utilização sistemática do grupo de renormalização.

2.2.2 O potencial efetivo e a energia livre GL

A ação efetiva é determinada a partir do funcional gerador das funções de Green do modelo, neste caso a partir da equação (2.7), mediante uma transformação de Legendre,

$$\Gamma[\phi_c] = \ln \mathcal{Z} - \int d^d x J(x) \phi_c(x), \quad (2.36)$$

onde

$$\phi_c = \frac{\delta \ln \mathcal{Z}[J]}{\delta J} \quad (2.37)$$

Estas relações são exatamente as mesmas que são dadas entre a Hamiltoniana e a Lagrangeana na formulação da mecânica clássica e que são entendidas da mesma forma. A relação (2.37) significa que ϕ_c é uma funcional de J . Assim da definição dada acima, podemos ver que

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (2.38)$$

Quando $J(x) \rightarrow 0$, $\phi_c(x)$ torna-se uma constante, devido à invariância translacional do vácuo, dada por $\langle \phi \rangle$, de modo que $\langle \phi \rangle$ é a solução da equação,

$$\left. \frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c} \right|_{\langle \phi \rangle} = 0. \quad (2.39)$$

Rescrevendo $\phi_c(x)$ da seguinte maneira

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \hbar \phi_1(x) + O(\hbar^2), \quad (2.40)$$

podemos encontrar

$$\Gamma[\phi_c] = \Gamma[\phi_0] + \hbar \int d^d x \phi_1(x) J(x) + O(\hbar^2), \quad (2.41)$$

ou tomando o limite $J \rightarrow 0$, o potencial efetivo $\Gamma[\phi_c]/V$ é dado por

$$\mathcal{V}_{ef}(\phi_c) = \mathcal{V}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + \mathcal{V}''(\phi_c)). \quad (2.42)$$

Onde V é o volume, e k é o momento.

No caso em que o campo clássico é uniforme, $\phi_c(x) = \phi_c$, o potencial efetivo é dado simplesmente pelo primeiro termo da equação (2.42). Como se pode ver a integral da equação acima é claramente divergente e, portanto, é necessário um procedimento de regularização para isolar as divergências contidas ali. Um procedimento de regularização comumente utilizado é o do método de regularização dimensional [27]. Tal

procedimento conduz ao aparecimento de pólos que devem ser eliminados pela prescrição de renormalização (absorvidos nos parâmetros livres da teoria). Contudo, uma renormalização finita é necessária para que ocorra o ajuste dos parâmetros livres da teoria aos valores observados. Isto é feito mediante as condições de renormalização

$$\frac{d^2\mathcal{V}_{ef}}{d\phi_c^2}\Big|_{\phi_c=0} = m_r \quad (2.43)$$

e

$$\frac{d^4\mathcal{V}_{ef}}{d\phi_c^4}\Big|_{\phi_c=0} = \lambda_r. \quad (2.44)$$

Desde o ponto de vista da energia livre o primeiro termo em (2.42) corresponde à aproximação de Landau ou aproximação de campo médio onde as flutuações do parâmetro de ordem não são levados em conta, enquanto que os termos seguintes dão as correções quânticas da energia livre de GL.

2.2.3 As transições de fase na aproximação de Landau

A aproximação de Landau ou campo médio é aplicável nas situações onde as flutuações do campo ϕ são desprezíveis, isto é, ele é considerado uniforme perto do ponto crítico. Sistemas desta classe são supercondutores do tipo I e ferromagnetos. Tendo em conta que o Hamiltoniano dado em (2.6) só contém a expansão até ϕ^4 , a energia livre na aproximação de Landau vem dada pelo primeiro termo em (2.42) e que tem a forma explícita,

$$\mathcal{V}(\phi_c) = \frac{1}{2}m_0\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4, \quad (2.45)$$

de onde vemos que a equação de estado é dada por

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi_c} = m_0\phi_c + \lambda\phi_c^3 = 0. \quad (2.46)$$

Assim, quando $m_0 > 0$ ($T > T_0$) temos uma única solução trivial $\phi_c = 0$ que corresponde à fase normal (fase não supercondutora), enquanto que se $m_0 < 0$ ($T <$

T_0) encontramos uma solução $\phi_c \neq 0$ que corresponde à fase não simétrica (fase supercondutora) cuja solução é dada por

$$\phi_0 = \pm \left(\frac{-m_0}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (2.47)$$

Como podemos ver temos duas soluções para o campo ϕ_0 na fase supercondutora. A verdadeira solução é aquela que vai garantir a estabilidade do sistema, condição dada pela energia mínima,

$$\frac{\delta^2 \mathcal{V}(\phi_0)}{\delta \phi_0^2} > 0. \quad (2.48)$$

Da situação anterior é fácil demonstrar que o calor específico sofre uma descontinuidade ao passar da fase desordenada à fase ordenada supercondutora, isto é em $T = T_0$ a descontinuidade é dada por

$$\Delta C \propto \frac{\alpha^2 T_0^2}{\lambda} \quad (2.49)$$

Desde o ponto de vista termodinâmico esta situação é característica das **transições de fase de segunda ordem**.

Uma simples mudança na expressão do hamiltoniano, permite o aparecimento de transições de fase descontínuas entre as fases ordenada e desordenada, denominadas transições de fase de primeira ordem. Por exemplo, se ao hamiltoniano em (2.6) é incluído um termo adicional, ϕ^6 , a energia livre de Landau em (2.42) estaria dada por

$$\mathcal{V}(\phi_c) = \frac{1}{2} m_0 \phi_c^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi_c^4 + \frac{\eta}{6} \phi_c^6. \quad (2.50)$$

Para os parâmetros $\lambda < 0$ e $\eta > 0$, em (2.50) podemos encontrar soluções adicionais a $\phi_c = 0$ sempre que

$$\Delta = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{\eta} - m_0 \geq 0, \quad (2.51)$$

isto é

$$T \leq T_0 + \frac{\lambda^2}{4\alpha\eta} \equiv T_1 \quad (2.52)$$

Observe-se que se $T > T_1$ \mathcal{V} somente apresenta um extremo a $\phi_c = 0$ o qual é um mínimo global, enquanto que se $T_0 < T < T_2$ neste caso \mathcal{V} apresenta cinco extremos em $\phi_{c1} = 0, \pm\phi_{c2} \neq 0, \pm\phi_{c3} \neq 0$ com

$$\phi_{c2}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\eta} - \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}, \quad \phi_{c3}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\eta} + \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}. \quad (2.53)$$

É fácil de comprovar que $\phi_{c1} = 0$ e $\pm\phi_{c3}$ dão mínimos locais, enquanto que $\pm\phi_{c2}$ dá um máximo local. Lembrando que $\langle \phi \rangle$ é definido minimizando o potencial podemos encontrar uma certa temperatura T_c na qual

$$\begin{aligned} T > T_c, \quad \mathcal{V}(\pm\phi_{c3}) > 0 \quad \text{onde } \langle \phi_c \rangle = 0 \\ T \leq T_c < T_1, \quad \mathcal{V}(\pm\phi_{c3}) \leq 0 \quad \text{onde } \langle \phi_c \rangle = \pm\phi_{c3} \end{aligned} \quad (2.54)$$

logo $\langle \phi_c \rangle$ muda descontinuamente quando $T \rightarrow T_c$, concluindo-se que na aproximação (2.50), com $\lambda < 0$ e $\eta > 0$, existe **transição de fase de primeira ordem**.

Para $T < T_0$, temos que a expressão,

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\eta} - \sqrt{\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\eta} - m_0\right)} \right] < 0, \quad (2.55)$$

apresenta somente tres extremos em $\phi_{c3} = 0$ e $\pm\phi_{c3} \neq 0$; enquanto que $\pm\phi_{c3} \neq 0$ continua sendo um mínimo global. Este valor é dado por

$$\phi_{c3} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{se } T > T_c \text{ (fase desordenada)} \\ \pm \left[-\frac{\lambda_0}{2\eta} - \sqrt{\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{4}\frac{\lambda_0^2}{\eta} - m_0\right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se } T \leq T_c \text{ (fase ordenada)} \end{array} \right\}. \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

O valor de T_c pode ser encontrar pela condição de que $\mathcal{V}(\phi_c(T_c)) = 0$, de onde temos que

$$4m_0 = \frac{\lambda}{4} \left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\eta} - \sqrt{\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\eta} - m_0\right)} \right] \quad (2.58)$$

onde a solução para T_c é obtida de 3.65 fazendo-se $m_0 = \alpha(T_c - T_0)/T_0$

$$T_c = T_0 \left(1 + \frac{3\lambda^2}{16\alpha\eta} \right), \quad (2.59)$$

que é a temperatura de transição de fase de primeira ordem para materiais em "bulk form".

Agora consideramos o caso quando $\lambda > 0$ e $\eta > 0$, na eq. (2.53), nós podemos observar que não é possível encontrar um máximo local em ϕ_2^2 . No entanto, podemos encontrar um extremo em $\pm\phi_3$ somente quando $m_0 < 0$.

Agora, quando $m_0^2 \rightarrow 0^-$, $\phi_3^2 \rightarrow 0^+$. Ademais, para $m_0^2 < 0$ e da análise feita acima encontramos que $\mathcal{V}(\phi_3) < 0$ em (2.50). Portanto, aqui, $\pm\phi_3$ fazem um mínimo global.

$$\begin{aligned} \langle \phi_c \rangle &= 0, & m_0^2 &> 0 \\ \langle \phi_c \rangle &= \pm\phi_3, & m_0^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Portanto, existe uma transição de fase em $T = T_0$. É possível demonstrar que $\langle \phi_c \rangle$ varia suavemente quando o valor de T atravessa o valor T_0 , isto quer dizer que em $T = T_0$ temos uma transição de fase de segunda ordem. Estes dois casos ($\lambda < 0$ e $\lambda > 0$ junto com $\eta > 0$) são mostrados na figura.

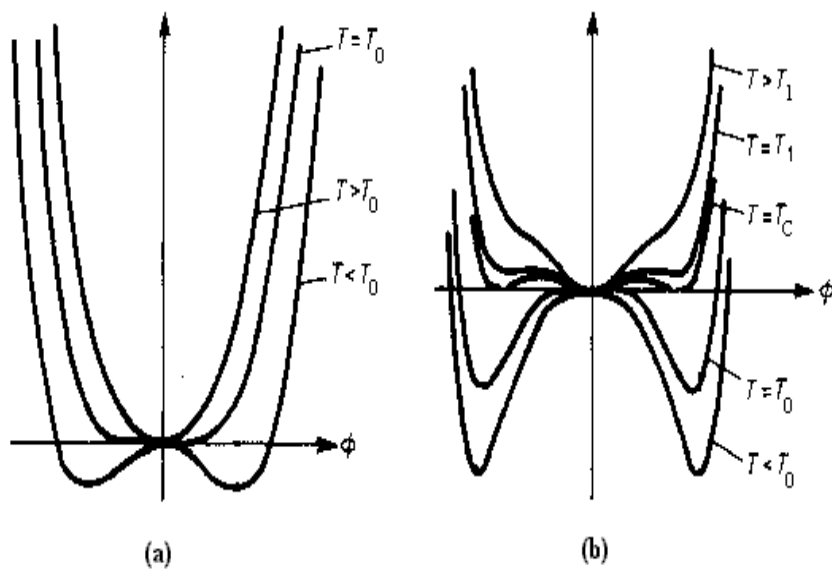


Figura 2.1: Figura mostrando as transições de fase de segunda ordem (a) e primeira ordem (b) contidas na aproximação de Landau (2.50)

Capítulo 3

Flutuações de Gauge e a temperatura crítica em fios supercondutores

3.1 Introdução

Nas últimas décadas tanto trabalhos teóricos quanto trabalhos experimentais foram realizados investigando as propriedades supercondutoras de filmes finos [6, 19, 30–40]. Os resultados encontrados nesses trabalhos mostram o fato de que a temperatura crítica de transição de fase supercondutora T_c diminui quando a espessura do filme diminui.

Questões concernentes à estabilidade e à existência de transições de fase podem ser levantadas se investigamos o comportamento da teoria de campos como função das condições de fronteiras espaciais. A existência de transições de fase pode ser, neste caso, associada a algum parâmetro espacial descrevendo a quebra de invariância translacional. Efeitos de fronteiras espaciais na TQC se encontram em diversas formas na literatura [7].

No presente capítulo apresentamos nossos resultados da Ref. [4] e discutiremos o comportamento crítico do modelo Ginzburg-Landau compactificado em algumas das suas dimensões espaciais e implementaremos as contribuições das flutuações de gauge

utilizando o formalismo de Potencial Efetivo Gaussiano (PEG) [6, 9, 10, 41–43]. A quebra espontânea da simetria é obtida levando em conta a massa no Hamiltoniano (energia livre) parametrizada como $m_0^2 = a(T/T_0 - 1)$, com $a > 0$, muda de sinal quando a temperatura T varia num intervalo contendo a temperatura de transição de fase em "bulk form" T_0 . Com esta escolha nós consideramos o sistema confinado num prisma retangular infinito com seção transversal $A = L_1 \times L_2$. A criticalidade é alcançada quando a massa renormalizada (obtida da segunda derivada do PEG com respeito da campo ϕ) se aproxima de zero. Desta maneira, nós estamos dentro da estrutura do modelo de Ginzburg-Landau que descreve uma transição de fase de segunda ordem numa amostra de material supercondutor em forma de um fio. Este trabalho é uma generalização direta dos resultados obtidos para supercondutores na forma de filmes [6]. Nós investigamos o comportamento crítico do sistema levando em conta as flutuações de gauge, o que significa que transições de fase carregadas são incluídas neste trabalho. Nosso interesse aqui é encontrar uma dependência da temperatura crítica T_c como função das dimensões L_1, L_2 da seção rectangular do fio. Este estudo será feito utilizando o Potencial Efetivo Gaussiano (PEG), junto com o mecanismo de compactificação espacial introduzido em trabalhos recente [1, 26]. A ideia central é que o formalismo de Matsubara numa teoria de campos Euclideana pode ser generalizado para tratar diferentes situações físicas na qual os campos são compactificados em dimensões puramente *espaciais*, considerando o mecanismo de Matsubara sob uma topologia $R^{D-d} \times S^{1_1} \times S^{1_2} \dots \times S^{1_d}$, onde o campo é confinado no sub-espaco $d - dimensional$ [1, 26]. Nosso interesse particular aqui é considerar o formalismo de Matsubara sob $R^{D-2} \times S^1 \times S^1$, onde o sub-espaco confinado é 2-dimensional.

Nós começamos na seção **3.2** apresentando brevemente o formalismo do (PEG) no modelo de Ginzburg-Landau na versão da eletrodinâmica escalar com o gauge transversal unitário $U(1)$, como foi desenvolvido em [6, 43] e descrevendo um procedimento para tratar a teoria de campo massivo em D -dimensões no espaco Euclideano. Na seção **3.3** o efeito da compactificação é apresentado em um sub-espaco de d -dimensões, com $d \leq D$; e na seção **3.4** faremos uma aplicação ao caso particular $d = 2$ dimensões

compactificadas para estudar o comportamento crítico de um fio supercondutor.

3.2 O Potencial Efetivo Gaussiano para o Modelo de Ginzburg-Landau

O modelo de Ginzburg-Landau, na versão da eletrodinâmica quântica escalar, é conhecido também como modelo de Higgs abeliano [44] tem sido muito utilizado no estudo das transições de fase carregadas na supercondutividade. O mecanismo de Higgs é a extensão da quebra espontânea da simetria para criar bosons vetoriais massivos numa teoria com invariância de gauge. Este mecanismo apareceu inicialmente no contexto da teoria da supercondutividade e foi introduzido inicialmente em [45–47]. Já na física de partículas elementares o mecanismo de Higgs está associado ao modelo padrão. De acordo com este modelo o mecanismo de Higgs é responsável pela geração de massa dos bosons vetoriais na interação fraca. No caso Abelianos este mecanismo está associado à transições de fase de primeira ordem induzida por flutuações em supercondutores de tipo II [48]. A nível clássico uma quebra espontânea da simetria no modelo $\lambda\phi^4$ com acoplamento de gauge gera um termo de massa bosônica. No nosso caso, onde vamos a considerar a transição de fase supercondutora com flutuações de gauge, a densidade do hamiltoniano que descreve este mecanismo no espaço euclidiano D -dimensional é escrito na forma [53],

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi|^2 + \frac{1}{2}m_0^2|\Psi|^2 + \lambda(|\Psi|^2)^2, \quad (3.1)$$

onde Ψ é o parâmetro de ordem, que supõe-se complexo. Além disso, as componentes do campo magnético,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \mu, \nu = 1, \dots, d, \quad (3.2)$$

são relacionadas ao potencial vetor em d dimensões por

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2. \quad (3.3)$$

Note-se que o potencial vetor é independente do tempo.

Com o objetivo de obter somente graus de liberdade físicos, escreve-se o parâmetro de ordem Ψ em termos de dois campos reais ϕ e θ , de tal forma que:

$$\Psi = \phi e^{i\theta}, \quad (3.4)$$

supondo-se ainda que as transformações de calibre são definidas por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - 1/e \nabla \theta. \quad (3.5)$$

A adoção do calibre de unitariedade transversa [43] acarreta a existência de uma componente longitudinal, \mathbf{A}_L , proporcional a $\nabla \theta$. Em função destas últimas definições, a parte real e imaginária do parâmetro de ordem são consideradas como campos independentes, escritos em função de Ψ e Ψ^* ou de ϕ e θ . Logo o Hamiltoniano é reescrito como

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 + \frac{1}{2}e^2 \phi^2 (A_L^2 + A_T^2) + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}_T)^2. \quad (3.6)$$

e a parte longitudinal do potencial vetorial A_L pode ser integrado e colocado como um fator de medida fora da integral na função de partição, que é reescrita como:

$$Z[j] = \int D\phi DA_T \exp \left[- \int d^d x \mathcal{H} + \int d^d x j \phi \right], \quad (3.7)$$

Nos podemos reforçar a condição de transversalidade do potencial vetor por um termo fixador de gauge ϵ , que será anulado ao final dos cálculos, de tal maneira que possamos fazer a integração exata da função de partição. Isto é:

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 + \frac{1}{2}e^2 \phi^2 A^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2\epsilon}(\nabla \cdot \mathbf{A})^2 \quad (3.8)$$

No que segue, usa-se \mathbf{A} para designar o potencial vetor transversa.

Em seguida, fazendo-se um deslocamento no campo escalar na forma $\phi = \tilde{\phi} + \varphi$, de tal maneira que possamos separar o Hamiltoniano na parte livre e na parte interagente,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \quad (3.9)$$

onde \mathcal{H}_0 é a parte livre e \mathcal{H}_{int} a parte de interação dos campos, dadas respectivamente por

$$\mathcal{H}_0 = \left[\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\tilde{\phi}^2 \right] + \left[\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}\Delta^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2\epsilon}(\nabla \cdot \mathbf{A})^2 \right], \quad (3.10)$$

e

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{n=0}^4 v_n \tilde{\phi}^n + \frac{1}{2} (e^2 \varphi^2 - \Delta^2) A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} e^2 \tilde{\phi} A_\mu A^\mu \varphi + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu \tilde{\phi}^2, \quad (3.11)$$

onde

$$v_0 = \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^4, \quad (3.12)$$

$$v_1 = m_0^2 \varphi + 4\lambda \varphi^3, \quad (3.13)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + 6\lambda \varphi^2 - \frac{1}{2} \Omega^2, \quad (3.14)$$

$$v_3 = 4\lambda \varphi, \quad (3.15)$$

$$v_4 = \lambda. \quad (3.16)$$

Desta forma, fica claro das Eqs. (3.9), (3.10) e (3.11) que \mathcal{H} descreve a interação de dois campos, um campo escalar real ϕ com massa Ω e um campo vetorial real \mathbf{A} (campo de gauge) com massa Δ .

O potencial efetivo, é definido por

$$V_{eff}[\varphi] = \frac{1}{V} \left[-\ln Z + \int d^d x j \varphi + \int d^d x J_\nu A_\nu \right], \quad (3.17)$$

onde V é o volume total.

O Hamiltoniano em (3.9) é separado na parte livre e a parte de interação, logo a exponencial em (3.7) contendo a parte do Hamiltoniano de interação pode ser expandida perturbativamente; levando em conta só a primeira ordem desta expansão, a expressão em (3.17) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
V_{eff}[\varphi] = & \frac{1}{V} \left\{ \frac{1}{2} Tr \ln[g^{-1}(x, y)] + \frac{1}{2} Tr \ln[G_{\mu\nu}^{-1}(x, y)] + \right. \\
& \left. + \int d^d x \left[v_0 + v_2 g(x, x) + 3v_4 g^2(x, x) + \frac{1}{2} e^2 (g(x, x) + \varphi^2 - \Delta^2) G_{\mu\nu}(x, x) \right] \right\}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

onde $g(x, x)$ é o propagador da partícula livre do campo escalar, e $G_{\mu\nu}$ é o propagador da partícula livre do campo de gauge,

$$G_{\mu\nu}^{-1}(x, y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik(x-y)} [\delta_{\mu\nu}(k^2 + \Delta^2) + (\frac{1}{\epsilon} - 1)k_\mu k_\nu]. \tag{3.19}$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, temos que

$$Tr \ln[G_{\mu\nu}^{-1}(x, y)] = 2V \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + \Delta^2). \tag{3.20}$$

De onde o potencial efetivo é dado por

$$\begin{aligned}
V_{eff}[\varphi] = & I_1^d(\Omega) + 2I_1^d(\Delta) + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^4 + \frac{1}{2} [m_0^2 - \Omega^2 + 12\lambda \varphi^2 + 6\lambda I_0^d(\Omega)] I_0^d(\Omega) \\
& + [e^2 (\varphi^2 + I_0^d(\Omega)) - \Delta^2] I_0^d(\Delta), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

onde,

$$I_0^d(M) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + M^2}, \tag{3.22}$$

e

$$I_1^d(M) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + M^2), \tag{3.23}$$

com $k = (k_1, \dots, k_d)$ sendo o momento d -dimensional.

Como vemos, o potencial efetivo (3.21) depende dos parâmetros de massa Ω e Δ . Posto que nenhum desses dois parâmetros esteve inicialmente presente no Hamiltoniano GL (3.8), então, o potencial efetivo não deve depender explicitamente desses dois

parâmetros, e o método *de sensibilidade mínima* [9] pode ser adotado para fixar esses parâmetros: O potencial efetivo $V_{eff}[\varphi]$ deve ser estacionário sob variações das massas Δ and Ω . Assim, o potencial efetivo Gaussiano (PEG) é derivado por o requerimento de que $V_{eff}[\varphi]$ pode ser estacionário sob variações das massas Ω e Δ , da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial V_{eff}}{\partial \Omega^2}\right)_{\Omega^2=\bar{\Omega}^2} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial V_{eff}}{\partial \Delta^2}\right)_{\Delta^2=\bar{\Delta}^2} = 0, \quad (3.25)$$

Estas condições geram as equações do gap,

$$\bar{\Omega} = m_0^2 + 12\lambda\varphi^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}), \quad (3.26)$$

$$\bar{\Delta} = e^2\varphi^2 + e^2 I_0^d(\bar{\Omega}). \quad (3.27)$$

Observe-se que as Eqs.(3.26) e (3.27) são um par de equações acopladas, e soluções não analíticas podem ser encontradas, as quais podem ser resolvidas somente por métodos numéricos.

Substituindo Ω e Δ na Eq.(3.21) pelas soluções $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Delta}$ das Eqs.(3.26) e (3.27), nós obtemos a expressão formal para o PEG, o que é dada por:

$$\bar{V}_{eff}[\varphi] = I_1^d(\bar{\Omega}) + 2I_1^d(\bar{\Delta}) + \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 - 3\lambda[I_0^d(\bar{\Omega})]^2 - e^2 I_0^d(\bar{\Omega})I_0^d(\bar{\Delta}). \quad (3.28)$$

O PEG contem divergências devido às integrais que aparecem em (3.28); a finitude do PEG será manifestada somente reexpresando-o em termos dos parâmetros finitos. Esta reparametrização da teoria, chamada de renormalização, não muda o conteúdo físico da teoria.

Em seguida, deseja-se compor uma expressão para o termo massivo \bar{r} , obtido da segunda derivada do potencial efetivo gaussiano no ponto $\varphi = 0$, pois em princípio o sistema está sendo analisado na vizinhança da fase desordenada, $T \geq T_c$. No entanto, vê-se que no cálculo das derivadas de \bar{V}_{eff} com respeito a φ deve-se levar em conta

que $\bar{\Omega}^2$ e $\bar{\Delta}^2$ em (3.26) e (3.27) também dependem de φ de acordo com as seguintes relações

$$\frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi} = \frac{24\lambda\varphi - e^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \frac{d\bar{\Delta}^2}{d\varphi}}{1 + 6\lambda I_{-1}^d(\bar{\Omega})}, \quad (3.29)$$

$$\frac{d\bar{\Delta}^2}{d\varphi} = 2e^2\varphi - \frac{1}{2}e^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi}, \quad (3.30)$$

onde

$$I_{-1}^d(M) = 2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + M^2)^2}. \quad (3.31)$$

Substituindo Eq.(3.30) em (3.29) temos,

$$\frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi} = \frac{[24\lambda - 2e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] \varphi}{1 + [6\lambda - \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Omega})] I_{-1}^d(\bar{\Omega})}. \quad (3.32)$$

Dessa maneira temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}_{eff}}{d\varphi^2} &= m_0^2 + 12\lambda\varphi^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}) + 2e^4 \varphi^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \\ &\quad - \frac{[6\lambda + \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] [24\lambda - 2e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] \varphi^2}{1 + [6\lambda - \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Omega})] I_{-1}^d(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Assim nós chegamos à fórmula para a massa Gaussiana que é dada por

$$\bar{m}^2 \equiv \left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = m_0^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}_0) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}_0), \quad (3.34)$$

onde $\bar{\Omega}_0$ and $\bar{\Delta}_0$ são as soluções para $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Delta}$ respectivamente a $\varphi = 0$, explicitamente:

$$\bar{\Omega}_0^2 = m_0^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}_0) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}_0), \quad (3.35)$$

$$\bar{\Delta}_0 = e^2 I_0^d(\bar{\Omega}_0). \quad (3.36)$$

Conseqüentemente, das Eqs.(3.34) e (3.35) nós temos simplesmente,

$$\bar{m}^2 = \bar{\Omega}_0^2. \quad (3.37)$$

Assim, chegamos à equação do gap (3.34) que obedece a uma equação Dyson-Schwinger Gaussiana generalizada,

$$\bar{m}^2 = m_0^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{m}) + 2e^2 I_0^d \left(\sqrt{e^2 I_0^d(\bar{m})} \right). \quad (3.38)$$

Esta expressão será utilizada mais adiante para descrever o sistema na vizinhança da criticalidade, obtendo uma expressão matemática da temperatura crítica em supercondutores.

3.3 A compactificação em $d=2$ dimensões espaciais

Nós consideramos o nosso sistema num espaço Euclideano D -dimensional, confinado numa caixa rectangular d -dimensional ($d < D$), definido pela intersecção dos planos $x_i = 0$, $x_i = L_i$, $i = 1, 2, \dots, d$. Adicionalmente, assumimos que o campo satisfaz as condições de fronteira espacial "bag-model" [50, 51] nas faces da caixa. Estas condições de fronteira, fazem com que o campo φ tenha uma dependência em x_i numa caixa definida pelo vetor $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_d)$, tal que é equivalente a proceder em relação às x_i -coordenadas numa maneira análoga a como é feito no formalismo de Matsubara (tempo imaginário) em teoria quântica de campos; como, por exemplo, quando compactificamos cada um das direções espaciais x_i a um tamanho L_i [51]. As coordenadas cartesianas, neste caso, podem ser escritas como

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{z} = (x_1, \dots, x_d, \mathbf{z})), \quad (3.39)$$

onde \mathbf{z} é um vetor $(D - d)$ -dimensional. Assim, o vetor momento é dado por,

$$\mathbf{p} = (k_1, \dots, k_d, \mathbf{q}), \quad (3.40)$$

onde \mathbf{q} é um vetor $(D - d)$ -dimensional no espaço dos momentos. Logo o gerador funcional pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi \exp \left(- \int_0^{\mathbf{L}} d^d r \int d^{D-d} \mathbf{z} \mathcal{H}(\varphi, \nabla\varphi) \right), \quad (3.41)$$

onde $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_d)$. Aquí, supõe-se então que o parâmetro de ordem obedece às condições tipo Dirichlet-Dirichlet generalizadas, dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z})|_{\mathbf{x}=0} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z})|_{\mathbf{x}=\mathbf{L}}. \quad (3.42)$$

Neste contexto, φ não pode ser escrito em termos de uma base de ondas planas. Nota-se imediatamente que na teoria quântica de campos esta característica induz a uma modificação nas regras de Feynman, visto que as integrações correspondentes a cada processo são agora limitadas ao espaço compactificado. Levando-se em conta isto, introduz-se a seguinte prescrição de compactificação no espaço dos momentos,

$$k_i \rightarrow \frac{2n_i\pi}{L_i}; \quad i = 1, 2, \dots, d, \\ \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} f(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{1}{L_1 \dots L_d} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{D-d} \mathbf{q}}{(2\pi)^{D-d}} f(\{k_i\}, \mathbf{q}), \quad (3.43)$$

onde $\{a_i\} = a_1, \dots, a_d$.

A fórmula anterior pode ser interpretada como uma prescrição de Matsubara generalizada. Note-se a manutenção da invariância translacional ao longo das outras direções não-compactificadas [23]. Por exemplo, no caso em que $d = 1$ descreve-se o sistema confinado entre dois planos paralelos e infinitos separados por uma distância L . No caso mais geral é quando d assume valores arbitrários. Logo, a função de onda φ pode ser escrita por expansão mista de séries e integrais na forma.

$$\varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} c_{\{n_i\}} \int \frac{d^{D-d} \mathbf{q}}{(2\pi)^{D-d}} e^{-i(\sum_i k_i z_i + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \tilde{\varphi}_l(\{k_i\}, \mathbf{q}). \quad (3.44)$$

Onde o coeficiente $c_{\{n_i\}}$ refere-se à representação das séries de Fourier sobre as direções \mathbf{z} .

Nós trabalharemos aqui na aproximação em que a constante de auto-interação λ não é corrigida devido às condições de fronteira. Uma definição precisa do parâmetro de massa será dada mais adiante para a situação de $D = 3$ com $d = 2$, onde o sistema é confinado entre dois planos paralelos separados por uma distância L_1 um do outro normalmente ao eixo x_1 , e dois planos paralelos normais ao eixo x_2 separados por uma

distância L_2 , correspondendo a um fio de seção transversal retangular $L_1 \times L_2$. Nós também consideraremos a situação de limite onde uma das dimensões transversais, ($L_2 \rightarrow \infty$), a qual corresponde ao caso de um filme de espesura L_1 . Aqui, nós enfatizamos que estamos considerando a teoria de campos Euclideana em D -dimensões puramente espaciais, de uma forma análoga a quando se trabalha na teoria de campos a temperatura finita, onde uma das suas dimensões é parametrizada pelo inverso da temperatura T . Mas no nosso caso, a temperatura é introduzido no termo de massa no Hamiltoniano da energia livre por meio da prescrição usual de Ginzburg-Landau.

Para nosso propósito nós necessitamos calcular as integrais que aparecem na equação (3.22) em situação de "confinamento". Seguindo a prescrição (3.43), a integral (3.22) para sistemas confinados se pode escrever da forma mais geral, como

$$I_0^D(M) = \frac{1}{4\pi^2 L_1 L_2 \dots L_d} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}q}{(a_1^2 n_1^2 + a_2^2 n_2^2 + \dots + a_d^2 n_d^2 + c^2 + q^2)}, \quad (3.45)$$

Com a finalidade de facilitar os cálculos na regularização da integral (3.45), nós introduzimos os parâmetros,

$$c = \frac{m}{2\pi}, \quad a_i = \frac{1}{L_i}, \quad q_i = \frac{k_i}{2\pi} \quad (3.46)$$

Utilizando a conhecida fórmula de regularização dimensional [27] podemos calcular a integral sobre as variáveis de momento em $(D - d)$ dimensões não-compactificadas, e a eq. (3.45) pode ser reescrita como

$$I_0^D(M) = \frac{\pi^{\frac{D-d}{2}} \Gamma(s - \frac{D-d}{2})}{4\pi^2 L_1 L_2 \dots L_d} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_d n_d^2 + c^2)^{s - \frac{D-d}{2}}}. \quad (3.47)$$

A soma na Eq.(3.47) é uma das funções generalizadas de Epstein, definida como,

$$A_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) = \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} (a_1^2 n_1^2 + \dots + a_d^2 n_d^2 + c^2)^{-\nu} \quad (3.48)$$

onde no nosso caso $\nu = s - \frac{D-d}{2}$. Em seguida nós podemos proceder mediante o

procedimento de regularizaçãõ descrito na Ref. [23] generalizando-o para múltiplas dimensões. Esta generalizaçãõ foi feita no trabalho da ref. [1]. No apêndice (A.1) mostramos o resultado de (3.48) para $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$. Em nosso caso $s = 1$ e para fios $d = 2$, e obtemos:

$$\begin{aligned}
A_2^{c^2} \left(2 - \frac{D}{2}; L_1, L_2\right) &= \frac{L_1 L_2 2^{2-\frac{D}{2}} \pi^{3-D}}{\Gamma(2 - \frac{D}{2})} \left[2^{-\frac{D}{2}} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) M^{D-2} + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{L_1^2 n_1}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} \right. \\
&\times K_{1-\frac{D}{2}}(M L_1 n_1) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{L_2^2 n_2}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}}(M L_2 n_2) + \\
&\left. + 2^2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}} \left(M \sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}\right) \right]. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Assim, inserindo a equaçãõ (3.49) na equaçãõ (3.47) e fazendo algumas manipulações algébricas, nós obtemos,

$$\begin{aligned}
I_0^D(M) &= 2^{-D} \pi^{-\frac{D}{2}} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) M^{D-2} + 2^{1-\frac{D}{2}} \pi^{-\frac{D}{2}} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{L_1 n_1}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}}(M L_1 n_1) \right. \\
&+ \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{L_2 n_2}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}}(M L_2 n_2) + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}{M}\right)^{1-\frac{D}{2}} \\
&\left. \times K_{1-\frac{D}{2}}(M \sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}) \right]. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

onde K_ν são as funções de Bessel de terceiro tipo.

3.4 O comportamento crítico para fios supercondutores

Em nosso caso vamos analisar um fio supercondutor de tipo-I, o qual obedece as seguintes condições, [53],

$$\xi(T) = (\bar{m})^{-1} \gg \lambda(T) \gg L, \tag{3.51}$$

onde L é o menor valor de uma das dimensões da seçãõ retangular do fio de área $A = L_1 \times L_2$, e $\xi(T)$ e $\lambda(T)$ são o comprimento de correlaçãõ crítica e a profundidade

de penetração respectivamente definidos por,

$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{|t|^{1/2}}; \quad \lambda(T) = \frac{\lambda_0}{|t|^{1/2}}; \quad t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (3.52)$$

onde T_c é a temperatura de transição, ξ_0 e λ_0 são o comprimento de coerência intrínseco e a profundidade de penetração de London, respectivamente. No caso em que um dos dois lados da seção retangular é muito maior que o outro, $L_1 \gg L_2$ ou $L_2 \gg L_1$, recuperamos o comportamento limite para um filme. Nesse caso, L na Eq.(3.51) seria a espessura do filme. Em qualquer dos casos, $M = \bar{m}$ na Eq.(3.50) e restringindo à vizinhança da criticalidade, isto é na região definida por $\bar{m} \approx 0$, podemos utilizar a aproximação assintótica da função K_ν dada por,

$$K_{|\nu|}(z) = \frac{1}{2}\Gamma(|\nu|)\left(\frac{2}{z}\right)^{|\nu|}; \quad z \sim 0 \quad (3.53)$$

o que nos permite escrever a equação (3.50) na forma,

$$\begin{aligned} I_0^D(\bar{m} \approx 0) &= 2^{-\frac{D}{2}}\pi^{-\frac{D}{2}}\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{D}{2}-1}}{(L_1 n_1)^{\frac{D}{2}-1}} + \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{D}{2}-1}}{(L_2 n_2)^{\frac{D}{2}-1}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{D}{2}-1}}{(L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2)^{\frac{D}{2}-1}} \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

ou

$$I_0^D(\bar{m} \approx 0) \approx \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{2\pi^{\frac{D}{2}}} \left[\left(\frac{1}{L_1^{D-2}} + \frac{1}{L_2^{D-2}} \right) \zeta(D-2) + 2E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1, L_2\right) \right], \quad (3.55)$$

onde $\zeta(D-2)$ é a função ζ de Riemann e $E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1, L_2\right)$ é a função *zeta* de Epstein generalizada, em duas dimensões definida por [49],

$$E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1, L_2\right) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2]^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)}. \quad (3.56)$$

O tratamento desta função é mostrado também no apêndice A.2 e cujo resultado é dado por

$$\begin{aligned} E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1^2, L_2^2\right) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{L_1^{D-2}} + \frac{1}{L_2^{D-2}} \right) \zeta(D-2) + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D-3}{2})}{4\Gamma(\frac{D-2}{2})} \left(\frac{1}{L_1 L_2^{D-3}} + \frac{1}{L_1^{D-3} L_2} \right) \times \\ &\quad \times \zeta(D-3) + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{D-2}{2})} W_2\left(\frac{D-3}{2}; L_1, L_2\right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Inserindo (3.57) em (3.55) nós obtemos,,

$$I_0^D(\bar{m} \approx 0) = \frac{\Gamma(\frac{D-2}{2})}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{1}{L_1^{D-2}} + \frac{1}{L_2^{D-2}} \right) \zeta(D-2) + \frac{\Gamma(\frac{D-3}{2})}{4\pi^{D-1/2}} \left(\frac{1}{L_1 L_2^{D-3}} + \frac{1}{L_2 L_1^{D-3}} \right) \times \zeta(D-3) + \frac{1}{\pi^{D-1/2}} W_2\left(\frac{D-3}{2}; L_1, L_2\right) \quad (3.58)$$

Para $D = 3$ temos que,

$$W_2(0; L_1, L_2) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L_1} K_0 \left(2\pi \frac{L_2}{L_1} n_1 n_2 \right) + \frac{1}{L_2} K_0 \left(2\pi \frac{L_1}{L_2} n_1 n_2 \right) \right\}. \quad (3.59)$$

Podemos ver que para $D = 3$, que é a situação de interesse físico, o primeiro e segundo termos entre parênteses na Eq. (3.58) apresentam divergências devidas à existência de polos na função ζ e na função Γ , respectivamente. No entanto, a expressão em (3.58) na sua totalidade é *não* divergente. Em efeito estas divergências são anuladas mutuamente chegando-se a um resultado finito para $I_0^3(\bar{m} \approx 0)$. Isto pode ser facilmente observado se nós consideramos a seguinte propriedade da função *zeta*,

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z/2)} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{z-\frac{1}{2}} \zeta(1-z); \quad \lim_{z \rightarrow 1} \left[\zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right] = \gamma, \quad (3.60)$$

onde $\gamma \approx 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni.

A quantidade $W_2(0; L_1, L_2)$, que aparece em Eq.(3.58), envolve somas duplas muito complicadas; em particular é complicado calcular analiticamente quando se tem $L_1 \neq L_2$, o que significa que não é possível fazer um exame analítico no limite como por exemplo quando $L_2 \rightarrow \infty$ para um valor finito de L_1 . Tal limite (o qual corresponde a um filme de espessura L_1) será considerado numericamente.

Utilizando a eq. (3.60) e a eq. (3.58) para $D = 3$ nós obtemos,

$$I_0^3(\bar{m} \approx 0) \approx \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) + \frac{1}{\pi} W_2(0; L_1 L_2), \quad (3.61)$$

e da Eq. (3.50), com $M = \bar{\Delta}_0$, obtemos,

$$I_0^3(\Delta_0) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\Delta_0}{2^3\pi^{3/2}} + \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_0}{L_1 n_1} \right)^{1/2} K_{1/2}(\Delta_0 L_1 n_1) + \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_0}{L_2 n_2} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times K_{1/2}(\Delta_0 L_2 n_2) + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_0}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}} \right)^{1/2} K_{1/2}(\Delta_0 \sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}) \right]. \quad (3.62)$$

Utilizando a fórmula,

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (3.63)$$

e lembrando a notação, $\Delta_0 = \sqrt{e^2 I_0^D(\bar{m})}$ e após alguns arranjos encontramos,

$$I_0^3(\sqrt{e^2 I_0^3(\bar{m})}) = -\frac{e\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}}{4\pi} - \frac{\ln(1 - e^{-eL_1\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}})}{2\pi L_1} - \frac{\ln(1 - e^{-eL_2\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}})}{2\pi L_2} \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-e\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}. \quad (3.64)$$

Assim nós chegamos à equação de Dyson-Schwinger Gaussiana (3.38) escrita para a vizinhança da criticalidade na forma seguinte,

$$\bar{m}^2 \approx m_0^2 + 12\lambda I_0^3(\bar{m} \approx 0) - \frac{e^3}{2\pi} \sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)} - \frac{e^2}{\pi L_1} \ln(1 - e^{-eL_1\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}}) + \\ - \frac{e^2}{\pi L_2} \ln(1 - e^{-eL_2\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}}) + \frac{2e^2}{\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-e\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}} \quad (3.65)$$

Lembrando que $m_0^2 = a(T/T_0 - 1)$, com $a > 0$ nós obtemos da condição de criticalidade para uma transição de fase de segunda ordem $\bar{m}^2 = 0$, a temperatura crítica em função dos parâmetros L_1, L_2 e da temperatura de transição T_0 , para uma amostra em "bulk form",

$$T_c(L_1, L_2) = T_0 \left[1 - \frac{12\lambda}{a} I_0^3(\bar{m} \approx 0) + \frac{e^3}{2a\pi} \sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)} + \frac{e^2}{a\pi L_1} \ln(1 - e^{eL_1\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}}) + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{a\pi L_2} \ln(1 - e^{eL_2\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}}) - \frac{2e^2}{a\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-e\sqrt{I_0^3(\bar{m} \approx 0)}\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}} \right]. \quad (3.66)$$

Por razões que serão evidenciadas mais adiante, fazemos ($L_2 = p \times L_1$), $L_1 \equiv L$, onde p é uma constante positiva; então das Eqs.(3.59) e (3.61),

$$I_0^3(\bar{m}) = \frac{C_p}{L}, \quad (3.67)$$

onde

$$C_p = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{p+1}{p} \right) + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (K_0(2\pi p n_1 n_2) + \frac{1}{p} K_0(2\pi n_1 n_2 / p)) \right]. \quad (3.68)$$

e a temperatura crítica (3.66) é reescrita na forma,

$$T_c(L, p) = T_0 \left[1 - \frac{12\lambda C_p}{aL} + \frac{e^3 \sqrt{C_p}}{2\pi a \sqrt{L}} + \frac{e^2}{a\pi L} \ln(1 - e^{-e\sqrt{LC_p}}) + \frac{e^2}{a\pi p L} \ln(1 - e^{-ep\sqrt{LC_p}}) - \frac{2e^2}{a\pi L} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-e\sqrt{LC_p} \sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}}}{\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}} \right]. \quad (3.69)$$

Esta equação descreve o comportamento da temperatura crítica da transição de fase para fios supercondutores tipo-I em função da área de suas dimensões transversas, dadas por ($L_1 \equiv L$) e do parâmetro $p = L_2/L_1$. É importante notar que no resultado (3.69) todas as flutuações de gauge foram levados em conta através do cálculo do potencial efetivo Gaussiano. As contribuições de gauge aparecem nos quatro últimos termos na Eq. (3.69).

3.5 Comparação qualitativa com os dados experimentais e discussão

O comportamento da temperatura crítica dada pela Eq. (3.69) pode ser comparado qualitativamente com dados experimentais expostos na literatura. No entanto as quantidades físicas envolvidas na Eq. (3.69) não estão dadas em unidades SI, já que esta equação foi obtida a partir do Hamiltoniano (3.1), onde foram adotadas inicialmente as unidades naturais usuais em teoria quântica de campos. Deste modo, tínhamos inicialmente adotado $c = \hbar = k_B = 1$. Logo, há a necessidade de relacionar as quantidades expressas neste caso ao sistema de unidades SI, como foi feito em [53] e como

mostramos no apêndice B.2. Esta relação é obtida da equação de Ginzburg–Landau na derivação microscópica feita por Gorkov [17, 18]. Neste contexto, há um fator $1/k_B T_0$ no expoente da função de partição que nós não tínhamos incluído explicitamente. Assim, para estar em concordância com as unidades SI, os campos devem ser substituídos por,

$$\phi \rightarrow \phi_{new} = \sqrt{\xi_0/k_B T_0} \phi, \quad A \rightarrow A_{new} = \sqrt{\xi_0/k_B T_0} A, \quad (3.70)$$

e as coordenadas x por $x_{new} = x/\xi_0$, onde $\xi_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_0$ é o comprimento de coerência intrínseco de um dado material, com v_F sendo a velocidade de Fermi. Conseqüentemente, λ e e tornam-se adimensionais, de tal maneira que estes parâmetros ficam relacionados às quantidades características do material por [53],

$$a = 1, \quad \lambda = \frac{3\xi_0 k_B T_0}{N(E_F) \hbar^2 v_F^2 \xi_0^2} \approx 111.08 \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^2, \quad e = \frac{2\bar{e}}{\hbar c} \sqrt{k_B T_0 \xi_0} \approx 2.59 \sqrt{\frac{\alpha v_F}{c}}, \quad (3.71)$$

onde T_F é a temperatura de Fermi, α a constante de estrutura fina, $N(E_F)$ a densidade de estados na superfície de Fermi, e \bar{e} a carga de um elétron. No mesmo sentido, a espessura L em (3.69) deve ser reescrita como $L_{new} = L/\xi_0$. Assim, a substituição de (3.71) em (3.69) produz a expressão da temperatura crítica em termos diretamente relacionados às quantidades características de uma dada amostra. Desta forma, a equação (3.69) é reescrita como,

$$\begin{aligned} T_c(L, pL) = T_0 & \left[1 - 1333.0 \left(\frac{\xi_0}{L} \right) \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^2 C_p + 17.253x10^{-4} \sqrt{\frac{\xi_0}{L}} \sqrt{C_p v_{Fc}^3} + \right. \\ & + 15.594x10^{-3} \left(\frac{\xi_0}{L} \right) v_{Fc} \ln(1 - e^{-0.22128 \sqrt{\frac{L}{\xi_0}} \sqrt{C_p v_{Fc}}}) + \\ & + 15.594x10^{-3} \left(\frac{\xi_0}{pL} \right) v_{Fc} \ln(1 - e^{-0.22128 p \sqrt{\frac{L}{\xi_0}} \sqrt{C_p v_{Fc}}}) + \\ & \left. - 0.031187 \left(\frac{\xi_0}{L} \right) v_{Fc} \sum_{n_1 n_2 = 1}^{\infty} \frac{e^{-0.22128 \sqrt{\frac{L}{\xi_0}} \sqrt{C_p v_{Fc}} \sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}}}{\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}} \right] \quad (3.72) \end{aligned}$$

Como uma aplicação desta equação nós plotamos na Fig. 3.1 o comportamento da temperatura crítica $T_c(L, p)$ em função de $1/L$ para um fio supercondutor de Niobio,

caracterizado por $v_F = 1.37 \times 10^6$ m/s, $T_0 = 9.3$ K, e $T_F = 6.18 \times 10^4$ K. Aqui consideramos tres situações, $p = 1$, $p = 4$ e $p = 10$ correspondendo a diferentes seções transversais retangulares do fio.

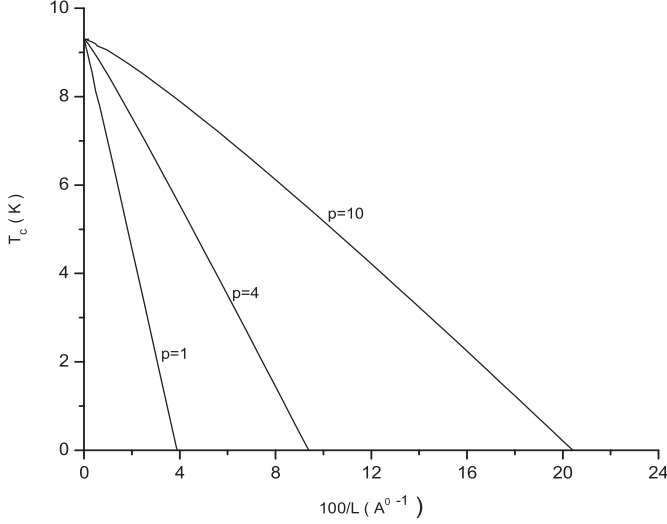


Figura 3.1: Temperatura crítica T_c em função de uma das suas dimensões transversais $1/L$, de Eq.(3.72) para um fio supercondutor feito de Niobio com seção transversal rectangular $A = L \times pL$. A figura mostra o comportamento da temperatura crítica nos casos, $p = 1$, $p = 4$ e $p = 10$, respectivamente.

Na *Fig.3.1*, nós mostramos o comportamento quase linear da temperatura crítica de um fio supercondutor de Niobio em função de $1/L$, para $p = 1$, $p = 4$ e $p = 10$. Estas curvas sugerem a existência de um valor mínimo de L (ou da seção transversa do fio), para o qual a transição de fase supercondutora é suprimida. Os valores aproximados para cada caso são: $L_{p=1}^{min} \approx 2.5$ nm, $L_{p=4}^{min} \approx 1.0$ nm e $L_{p=10}^{min} \approx 0.5$ nm respectivamente.

Também, pode ser mostrado numericamente que quando p toma valores muito grandes, ($p \rightarrow \infty$) na Eq.(3.72) todas as curvas coincidem, neste limite a curva resultante correspondendo a uma amostra em forma de um filme de espessura L . Uma análise numérica da Eq.(3.68) mostra que quando $p \gg 1$, a quantidade C_p tende a um valor constante, $C_p = \frac{\gamma}{2\pi}$. Substituindo este valor na Eq.(3.72) nós obtemos o comportamento da temperatura crítica para um filme. Na *Fig.3.2* nós mostramos o comporta-

mento da temperatura crítica dada pela Eq.(3.72) na situação limite $L_2 \rightarrow \infty$, a qual corresponde a um filme supercondutor de espessura L . Neste caso nós encontramos que a espessura mínima é $L_{film}^{min} \approx 0.13nm$.

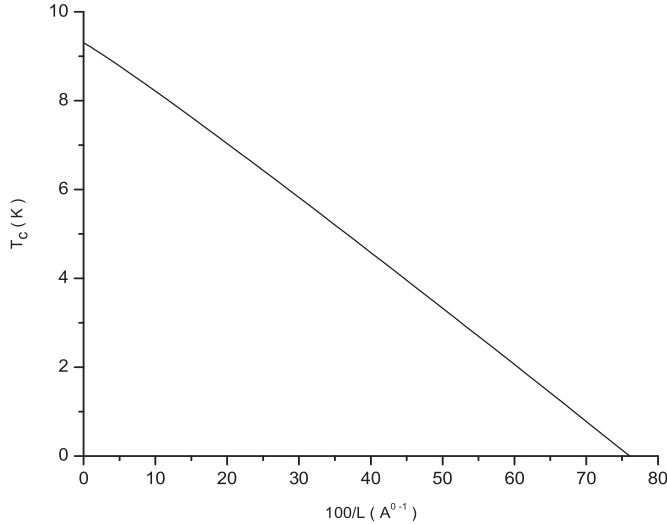


Figura 3.2: Temperatura T_c como função do inverso da espessura $1/L$, para um filme supercondutor de Nióbio.

O comportamento descrito na Eq.(3.72) para $p \rightarrow \infty$ (o filme) pode ser comparado com o decréscimo linear da temperatura crítica em função de $1/L$ encontrado *experimentalmente* em materiais metálicos, como por exemplo, em PB [33], em ligas W-Re [32], em Nb [31, 36, 37], Mo-Ge [34]. Também podemos ver com clareza da Eq.(3.72), que o decréscimo linear da temperatura crítica em função de $1/L$ é recuperado quando a carga $e = 0$. Ainda quando $e \neq 0$ consegue-se um comportamento quase-linear no decréscimo de T_c com $1/L$, isto por que os termos que incluem os efeitos das flutuações de gauge em (3.72) são muito pequenos em comparação ao termo gerado pela auto-interação do campo escalar ϕ^4 . Este resultado também pode ser contrastado com resultados teóricos recentes para supercondutores de tipo II [3], onde um comportamento similar da temperatura crítica em função da espessura do filme foi encontrado para transições não-carregadas.

Entretanto, deve-se observar que nós usamos valores 3-dimensionais para os parâmetros

fenomenológicos. Isto significa que devemos nos restringir somente aos fios e aos filmes relativamente finos, que poderiam ser considerados como objetos essencialmente 3-dimensionais; fios e películas muito finos não podem ser fisicamente acomodados no contexto de nosso modelo. Por exemplo, o valor que nós obtivemos para $L_{film}^{min}(Nb)$ ($\approx 0.13 \text{ nm}$) é da ordem de grandeza de alguns poucos raios de Bohr e deve ser considerado como um sistema 2-dimensional, estando assim, no contexto estritamente físico, além do domínio da validade do nosso modelo. Também, é necessário observar que o nosso modelo não leva em conta detalhes microscópicos presentes numa amostra real tais como impurezas ou crescimento de grãos na fabricação da amostra. Não obstante, nossos resultados obtidos do modelo *puro* de GL *está em concordância qualitativa* com o comportamento experimental mencionado acima. Vale a pena enfatizar aqui que o caráter quasi-linear do decréscimo da temperatura de transição obtida no nosso trabalho, emerge unicamente como um efeito topológico da compactificação espacial do modelo Ginzburg-Landau.

Capítulo 4

Transição de fase supercondutora de primeira ordem

4.1 Introdução

A teoria de campo escalar massivo descrito pelo Hamiltoniano GL incluindo ambos os termos de auto-interações dos campos ($H = \frac{(\nabla\phi(x))^2}{2} + \frac{m_0\phi(x)^2}{2} + \frac{\lambda\phi(x)^4}{4} + \frac{\eta\phi(x)^6}{6}$) é um modelo simples para estudar fenômenos críticos em duas e três dimensões, onde a teoria é renormalizável. Em termos dos diagramas de fase, o ponto tricrítico pode aparecer sempre que as três fases coexistam simultaneamente. Na aproximação de campo médio, onde as correções devido às flutuações não são levadas em conta ($\nabla\phi = 0$), se podem encontrar transições de fase de segunda ordem quando $m_0 \propto (T/T_0 - 1) = 0$, $\lambda > 0$, $\eta = 0$. No entanto, uma transição de fase de primeira ordem acontece quando $m_0 \neq 0$, $\lambda < 0$, $\eta > 0$. Já o comportamento tricrítico ocorre quando $\lambda = 0$, $m_0 = 0$ e $\eta > 0$. Um estudo do diagrama de fase deste modelo em 3D a temperatura finita foi feito em [57].

Há muitas aplicações associadas a este modelo mas aqui vamos nos ocupar da transição de fase de primeira ordem supercondutora. Como foi estudado no capítulo anterior utilizando o modelo $\lambda\phi^4$ com flutuações de gauge, vamos também estudar neste capítulo, o comportamento crítico do modelo $(\lambda\phi^4 + \eta\phi^6)$ para supercondutores, na presença das condições de contornos espaciais. O comportamento crítico é obtido

da massa renormalizada derivando-a do potencial efetivo através da condição de renormalização. No entanto, esta condição reduz consideravelmente o número de diagramas de Feynman que contribuem à renormalização da massa nos cálculos perturbativos se nossos cálculos se restringirem à aproximação da primeira ordem nas constantes de auto-interação, λ e η . Nesta aproximação, apenas dois diagramas necessitam ser considerados aqui: um gráfico de tadpole com o acoplamento de ϕ^4 (1 laço) e um gráfico do "shoestring" com o acoplamento de ϕ^6 (2 laços) (ver Fig.4.1). A dependência com as condições de fronteira aparecerá no tratamento matemático das integrais dos laços. As condições de fronteira serão dadas mediante o confinamento do nosso sistema, entre dois planos paralelos separados por uma distância L (caso dos filmes), entre quatro planos paralelos dois a dois separados por distâncias L_1 e L_2 (caso de fios com secção transversal rectangular) e em um cubo de dimensões L_1 , L_2 e L_3 . O tratamento da compactificação é semelhante à situação no capítulo anterior [1].

O capítulo é organizado como segue. Na seção 4.2, nós apresentamos o modelo em D -dimensões descrevendo a compactificação em d -dimensões, $d < D$ no formalismo de Matsubara para o nosso propósito. A contribuição dos dois diagramas de Feynman relevantes ao potencial efetivo são estabelecidas e a massa renormalizada é calculada da condição de renormalização. Na seção 4.3, uma expressão para a temperatura de transição de fase é calculada da condição de existência de transição de fase de primeira ordem. Na seção 4.4, os valores das constantes fenomenológicas envolvidas na fórmula da temperatura de transição são derivadas da teoria microscópica e na seção 4.5 uma aplicações particulares à transição de fase supercondutora em filmes, fios e cubos são realizadas, fazendo as comparações com os dados experimentais encontrados na literatura para o caso de filmes.

4.2 O potencial efetivo no modelo de Ginzburg-Landau $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$

Começamos apresentando o Hamiltoniano Ginzburg-Landau no espaço D -dimensional Euclidiano, incluindo ambas interações φ^4 and φ^6 na ausência de campos externos, o qual é dado por (em unidades naturais, $\hbar = c = k_B = 1$),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} m_0^2 |\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4 + \frac{\eta}{6} |\varphi|^6, \quad (4.1)$$

onde fixamos os valores das constantes *renormalizadas* $\lambda > 0$ e $\eta > 0$ de forma tal que possamos garantir a existência de uma transição de fase de primeira ordem e o parâmetro de massa nua é dado por $m_0^2 = \alpha(T/T_0 - 1)$, com $\alpha > 0$ e T_0 sendo um parâmetro com dimensões de temperatura. Lembramos que a temperatura crítica para uma transição de fase de primeira ordem é maior que T_0 , como se pode ver na seção (2.2.3) do capítulo 2 e [15]. Isto será indicado explicitamente na Eq. (4.23) mais adiante. Nós consideramos o sistema confinado numa caixa retangular formada por pares de planos separados por distâncias L_i , $i = 1, 2, 3, \dots, d$. Como no capítulo anterior, utilizamos as coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_d, \mathbf{z})$, onde \mathbf{z} é um vetor $(D - d)$ -dimensional, com seus correspondentes momentos $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d, \mathbf{q})$, sendo \mathbf{q} um vetor $(D - d)$ -dimensional no espaço dos momentos. A função de partição neste caso é escrita na forma,

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(- \int_0^{L_1} dx_1 \cdots \int_0^{L_d} dx_d \int d^{D-d}x \mathcal{H}(\varphi, \nabla\varphi) \right), \quad (4.2)$$

com o campo $\varphi(x_1, \dots, x_d, \mathbf{z})$ satisfazendo à condição de confinamento dentro de uma caixa, $\varphi(x_i \leq 0, \mathbf{z}) = \varphi(x_i \geq L_i, \mathbf{z}) = \text{const}$, e como no capítulo anterior introduzimos a prescrição de Matsubara generalizada (compactificação de um sub-espaço d -dimensional),

$$\int \frac{dk_i}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty}; \quad k_i \rightarrow \frac{2n_i\pi}{L_i}, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (4.3)$$

Em princípio, o potencial efetivo para sistemas com quebra espontânea de simetria é obtido, seguindo a análise de Coleman–Weinberg [58], como uma expansão em

números de laços nos diagramas de Feynman. Portanto, ao propagador livre e aos diagramas sem laço (nível de árvore) para ambos acoplamentos, as correções radiativas são adicionadas, com número crescente de laços. Assim, na aproximação a um laço, se consegue uma série infinita de diagramas com todos os números de inserções dos vértices da autointeração ϕ^4 (duas pernas externas por cada vértice), mais uma série infinita de diagramas de um laço com todos os números de inserções da auto-interação ϕ^6 (quatro pernas externas em cada vértice), mais uma série infinita com os números de inserções de todos os vértices da mistura de ϕ^4 e ϕ^6 . Analogamente, nós podemos incluir todas as formas de inserções nos diagramas com 2-laços, etc. No entanto, em lugar de empreender este cálculo, em nossa aproximação restringimo-nos aos termos de ordem mais baixa na expansão em laços. Lembramos que o gap que nós estamos procurando é dado pela condição de renormalização na qual a massa renormalizada é definida pela segunda derivada do potencial efetivo $U(\varphi_0)$ em relação ao campo clássico φ_0 , tomado a campo zero,

$$\left. \frac{\partial^2 U(\varphi_0)}{\partial \varphi_0^2} \right|_{\varphi_0=0} = m^2. \quad (4.4)$$

Dentro da nossa aproximação, nós não necessitamos levar em conta as condições de renormalização para as constantes de acoplamento das interações, elas já foram consideradas renormalizadas desde o início.

Na aproximação a 1-laço, a contribuição de ϕ^4 ao potencial efetivo é obtida diretamente de [1], como uma adaptação da expressão dada por Coleman–Weinberg [58]. Nós começamos com a bem conhecida expressão para a contribuição de 1-laço ao potencial efetivo a temperatura zero [29],

$$U_1(\phi_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2s} \left[\frac{\lambda \phi_0^2}{2} \right]^s \int \frac{d^D k}{(k^2 + m^2)^s}, \quad (4.5)$$

onde m é a massa *renormalizada*. Com o propósito de levar a cabo o procedimento de regularização dimensional, introduzimos os parâmetros adimensionais $c^2 = m^2/4\pi^2\mu^2$, $(L_i\mu)^2 = a_i^{-1}$, $g_1 = (\lambda/8\pi^2\mu^{4-D})$, $(\varphi_0/\mu^{D-2})^2 = \phi_0^2$, onde φ_0 é o valor esperado do campo no vácuo (o campo clássico) e μ é uma escala de massa. Em termos destes

parâmetros e utilizando a prescrição de Matsubara no nosso caso (4.3), a contribuição de 1-laço ao potencial efetivo pode ser escrita na forma,

$$U_1(\phi_0, a_1, \dots, a_d) = \mu^D \sqrt{a_1 \cdots a_d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2s} g_1^s \phi_0^{2s} \\ \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{D-d}q}{(a_1 n_1^2 + \cdots + a_d n_d^2 + c^2 + \mathbf{q}^2)^s}. \quad (4.6)$$

O parâmetro s conta o número de vértices nos laços.

É fácil ver que somente o termo com $s = 1$ contribue à condição de renormalização (4.4). Isto corresponde ao diagrama "tadpole". É também claro que todos os ϕ^6 -vértices e as misturas de vértices ϕ^4 e ϕ^6 nos diagramas de 1-laço não contribuem no cálculo da segunda derivada em relação ao campo: somente diagramas com duas pernas externas sobrevivem. Isto é impossível para uma inserção em vértice ϕ^6 na aproximação de um-laço. Portanto, a primeira contribuição do acoplamento ϕ^6 deve vir dos termos de maior ordem da expansão em laços. Diagramas com 2-laços com duas pernas externas e somente ϕ^4 vértice são de segunda ordem na sua constante de acoplamento, e nós não vamos considera-los, assim como todos os possíveis diagramas com vértices misturados. No entanto, os diagramas "shoestring" 2-laços, com somente um vértice ϕ^6 e duas pernas externas é uma contribuição de primeira ordem (em η) ao potencial efetivo, de acordo com nosso critério de renormalização.

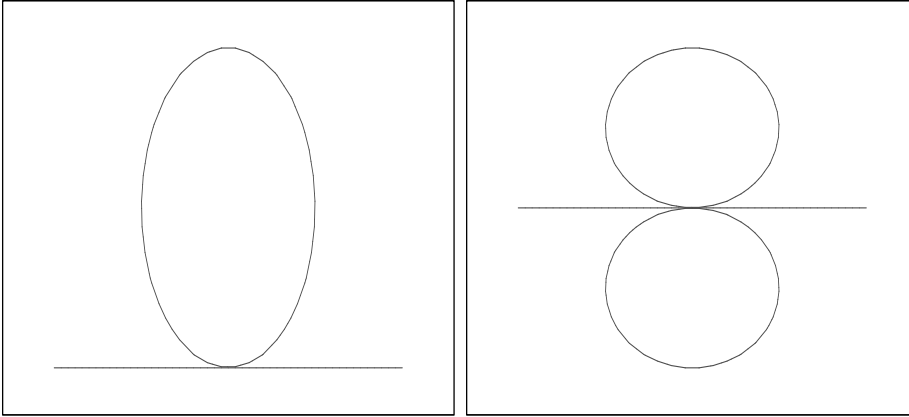


Figura 4.1: Diagramas que contribuem à renormalização da massa a mais baixa ordem de expansão nas constantes de acoplamento.

Portanto, a massa renormalizada é definida a primeira ordem em ambas constantes de acoplamento, pela contribuição das correções radiativas de somente dois diagramas:

o tadpole e o shoestring. A contribuição do tadpole é dada (colocando $s = 1$ em (4.6)) por,

$$U_1(\phi_0, a_1, \dots, a_d) = \mu^D \sqrt{a_1 \cdots a_d} \frac{1}{2} g_1 \phi_0^2 \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{D-d} q}{\mathbf{q}^2 + a_1 n_1^2 + \cdots + a_d n_d^2 + c^2}. \quad (4.7)$$

A integral em (4.7) é avaliada utilizando a fórmula de regularização dimensional [27]

$$\int \frac{d^k q}{q^2 + M} = \frac{\Gamma(1 - \frac{k}{2}) \pi^{k/2}}{M^{1-k/2}}; \quad (4.8)$$

para $k = D - d$, nós obtemos

$$U_1(\phi_0, a_1, \dots, a_d) = \mu^D \sqrt{a_1 \cdots a_d} \sum_{s=1}^{\infty} f(D, d) g_1 \phi_0^2 Z_d^{c^2} \left(\frac{2 - D + d}{2}; a_1, \dots, a_d \right), \quad (4.9)$$

onde

$$f(D, d) = \pi^{(D-d)/2} \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{D-d}{2} \right) \quad (4.10)$$

e $Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d)$ é uma das funções zeta de Epstein–Hurwitz, válida para $\text{Re}(\nu) > d/2$, definida por

$$\begin{aligned} Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) &= \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} (a_1 n_1^2 + \cdots + a_d n_d^2 + c^2)^{-\nu} \\ &= \frac{1}{c^{2\nu}} + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} (a_i n_i^2 + c^2)^{-\nu} + 2^2 \sum_{i < j=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} (a_i n_i^2 + a_j n_j^2 + c^2)^{-\nu} + \cdots \\ &\quad + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} (a_1 n_1^2 + \cdots + a_d n_d^2 + c^2)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta função é a mesma que aparece no capítulo (3) e do que é mostrado no Apêndice

(A.1); podemos efetuar o cálculo de (4.9), dando o resultado:

$$\begin{aligned}
U_1(\varphi_0, L_1, \dots, L_d) &= \frac{\lambda\varphi_0^2}{2(2\pi)^{D/2}} \left[2^{-D/2-1} m^{D-2} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_i n_i}\right)^{D/2-1} \right. \\
&\quad \times K_{D/2-1}(m L_i n_i) + 2 \sum_{j<i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_i^2 + L_j^2}}\right)^{D/2-1} \\
&\quad \times K_{D/2-1}(m \sqrt{L_i^2 + L_j^2}) + \dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}\right)^{D/2-1} \\
&\quad \left. \times K_{D/2-1}(m \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}) \right]. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Nós voltamos agora para o cálculo da contribuição do diagrama a 2-laços ao potencial efetivo, utilizando outra vez as regras de Feynman para dimensões modificadas pela compactificação; temos

$$U_2(\varphi) = \frac{\eta\varphi_0^2}{16} \left[\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2} \right]^2, \tag{4.13}$$

ou com a compactificação de d dimensões em extensões L_i , $i = 1, \dots, d$, este é dado por:

$$\begin{aligned}
U_2(\varphi_0, a_1, \dots, a_d) &= \frac{\eta\varphi_0^2}{4(2\pi)^D} \left[2^{-1-D/2} m^{D-2} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_i n_i}\right)^{D/2-1} \right. \\
&\quad \times K_{D/2-1}(m L_i n_i) + \dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}\right)^{\frac{D}{2}-1} \\
&\quad \left. \times K_{D/2-1}(m \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}) \right]^2, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

onde $g_2 = (\eta/8 \cdot 16\pi^4 \mu^{6-2D})$. Depois de subtrair o termo polar dado pelo primeiro

termo da Eq.(4.12) nós temos:

$$\begin{aligned}
U_1^{(\text{Ren})}(\varphi_0, L_i) &= \frac{\lambda\varphi_0^2}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_i n_i} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(mL_i n_i) + \right. \\
&+ 2 \sum_{i<j=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}) + \\
&\dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \right)^{\frac{D}{2}-1} \\
&\left. \times K_{\frac{D}{2}-1}(m\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}) \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e da mesma forma:

$$\begin{aligned}
U_2^{(\text{Ren})}(\varphi_0, L_i) &= \frac{\eta\varphi_0^2}{4(2\pi)^D} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_i n_i} \right)^{D/2-1} K_{D/2-1}(mL_i n_i) + \right. \\
&+ 2 \sum_{i<j=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}} \right)^{D/2-1} K_{D/2-1}(m\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}) + \\
&\dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \right)^{D/2-1} \\
&\left. \times K_{D/2-1}(m\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}) \right]^2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Logo o potencial efetivo total é dado por

$$U(\varphi_0, L_i) = \frac{1}{2}m_0^2\varphi_0^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi_0^4 + \frac{\eta}{6}\varphi_0^6 + U_1^{(\text{Ren})} + U_2^{(\text{Ren})}. \tag{4.17}$$

A massa renormalizada com ambas contribuições satisfazendo então à equação generalizada de Dyson–Schwinger dependendo dos L_i será,

$$\begin{aligned}
m^2(L_i) = & m_0^2 - \frac{\lambda}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_1 n_1} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m L_1 n_1) + \cdots + \sum_{n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_d n_d} \right)^{\frac{D}{2}-1} \times \right. \\
& \times K_{\frac{D}{2}-1}(m L_d n_d) + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}} \right)^{\frac{D}{2}-1} \times \\
& \times K_{\frac{D}{2}-1}(m \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}) \left. \right] + \frac{\eta}{2(2\pi)^D} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_1 n_1} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m L_1 n_1) + \cdots \right. \\
& + \sum_{n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{L_d n_d} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m L_d n_d) + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}} \right)^{\frac{D}{2}-1} \times \\
& \times K_{\frac{D}{2}-1}(m \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}) \left. \right]^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Assím, o potencial efetivo levando e conta as correções de fronteira é reescrito na forma:

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{2} m^2(L_i) \varphi_0^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi_0^4 + \frac{\eta}{6} \varphi_0^6, \tag{4.19}$$

4.3 Temperatura de transição de fase de primeira ordem

Ao assumir em (4.1) os valores das constantes λ e η como sendo maiores que zero, isto faz com que o potencial efetivo (4.19) assegure a existência de uma transição de fase de primeira ordem. A transição de fase de primeira ordem ocorre quando todos os tres mínimos deste potencial estão simultaneamente sobre a linha $U(\varphi_0) = 0$. Esta condição dá,

$$m^2(L_i) = \frac{3\lambda^2}{16\eta}. \tag{4.20}$$

Note que o valor $m = 0$ é excluído na condição acima, por que isto corresponderia a uma transição de fase de segunda ordem. Para $D = 3$, situação de interesse físico direto, as funções de Bessel que entrarão nas equações acima terão a forma explícita, $K_{1/2}(z) =$

$\sqrt{\pi}e^{-z}/\sqrt{2z}$, o que substituída na Eq.(4.18), efetuando as somas, e lembrando que $m_0^2 = \alpha(T/T_0 - 1)$, dá,

$$\begin{aligned}
m^2(L_i) = & \alpha \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-m(L_i)L_i}) + 2 \sum_{j<i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \times \right. \\
& \times \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + \dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \left. \right] + \\
& \frac{\eta\pi}{4(2\pi)^3} \left[\sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-m(L_i)L_i}) + 2 \sum_{j<i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + \dots \right. \\
& \left. + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \right]^2. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Então introduzindo o valor da massa, da Eq. (4.20), na Eq.(4.21), nós obtemos a temperatura crítica.

$$\begin{aligned}
T_c(L_i) = & T_c \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3\lambda^2}{8\eta\alpha} \right)^{-1} \left[\frac{\lambda}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} L_i}) + 2 \sum_{j<i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \times \right. \right. \right. \\
& \times \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + \dots + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \left. \left. \right) \right. \\
& - \frac{\eta}{32\pi^2\alpha} \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} L_i}) + 2 \sum_{j<i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + \right. \\
& \left. \left. + 2^{d-1} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_d^2 n_d^2}} \right)^2 \right] \left. \right\}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

onde

$$T_c = T_0 \left(1 + \frac{3\lambda^2}{16\eta\alpha} \right) \tag{4.23}$$

é a temperatura crítica de transição de fase de primeira ordem para um material em "bulk form" ($L_i \rightarrow \infty$).

4.4 Cálculo das constantes fenomenológicas

Nosso interesse nesta seção é generalizar a derivação microscópica de Gorkov [17, 18] dada para o modelo $\lambda\varphi^4$ incluindo um termo adicional de interação $\eta\varphi^6$ na energia livre de G-L. Aqui, o nosso interesse específico é determinar a constante fenomenológica η como uma função dos parâmetros dos materiais, em forma análoga a como se fez para a constante λ no modelo $\lambda\varphi^4$ [53]. Utilizando as equações de Gorkov e combinando com a condição de auto-consistência do gap [18], a densidade da energia livre pode ser escrita em termos da energia do gap $\Delta(x)$, (ver apêndice B.1).

$$f(\Delta) = N(0) \left[\xi_0^2 |\nabla\Delta|^2 + \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) |\Delta|^2 + \frac{3\xi_0^2}{\hbar^2 v_F^2} |\Delta|^4 + \frac{1674 \zeta(5) \xi_0^4}{147 \hbar^4 v_F^4 \zeta^2(3)} |\Delta|^6 \right], \quad (4.24)$$

onde $N(0)$ é a densidade de estados na superfície de Fermi, ξ_0 é o comprimento de coerência, v_F a velocidade de Fermi, e $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann. $N(0)$ e ξ_0 são dados por,

$$N(0) = \frac{1}{4\pi^2 k_B T_F} \left(\frac{p_F}{\hbar} \right)^3, \quad \xi_0 \approx 0.13 \frac{\hbar v_F}{k_B T_0}, \quad (4.25)$$

onde T_F é a temperatura de Fermi, p_F é o momento de Fermi e k_B é a constante de Boltzmann. T_0 é o parâmetro de temperatura introduzido na Eq. (4.1) que pode ser obtido da temperatura crítica da transição de fase de primeira ordem para o material em "bulk form" por meio da Eq. (4.23). Introduzindo o parâmetro de ordem $\varphi = \sqrt{2N(0)}\xi_0\Delta$ na Eq. (B.1) nós obtemos

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2\xi_0^2} \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) |\varphi|^2 + \frac{3}{4 \hbar^2 v_F^2 \xi_0^2 N(0)} |\varphi|^4 + \frac{1}{6} \frac{1674 \zeta(5)}{196 N(0)^2 \hbar^4 v_F^4 \zeta^2(3) \xi_0^2} |\varphi|^6. \quad (4.26)$$

A fim de poder comparar nossos resultados com algumas observações experimentais existentes na literatura, nós procedemos a restabelecer as unidades SI (lembrando que

nós tínhamos utilizado as unidades naturais, $c = \hbar = k_B = 1$). Em unidades SI, o expoente na função de partição tem implicitamente o fator $1/k_B T_0$. Logo, nós devemos dividir por $k_B T$ a densidade da energia livre na Eq. (4.26) (ver apêndice B.2). Além disso, nós reescalamos os campos e as coordenadas na forma $\varphi_{\text{new}} = \sqrt{\xi_0/k_B T_0} \varphi$ e $x_{\text{new}} = x/\xi_0$, que dá a energia livre adimensional e, comparando com a Eq. (4.1), podemos identificar as constantes fenomenológicas adimensionais λ , η , e m_0 , com $\alpha = 1$ (B.2),

$$\lambda \approx 111.08 \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^2, \quad \eta \approx 8390 \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^4, \quad m_0^2 = \frac{T}{T_0} - 1. \quad (4.27)$$

4.5 O comportamento crítico em filmes, fios e grãos supercondutores

Lembramos que a derivação original das constantes fenomenológicas feita por Gorkov é válida somente para materiais cristalinos puros, onde o livre caminho médio do elétron l é infinito. No entanto, nós sabemos que em muitos supercondutores a interação atrativa entre os elétrons (necessária para formar os pares de Cooper) ocorre indiretamente pela interação dos elétrons com vibrações da rede cristalina (os fónons). Considerando que esta interação pode ser maior se temos impurezas na rede cristalina das amostras supercondutoras, então o caminho livre médio dos elétrons é finito, o que ocorre na situação real. As constantes fenomenológicas de Ginzburg–Landau λ e η e o comprimento de coerência estão de alguma forma relacionados com a interação dos pares de elétrons com a rede cristalina e as impurezas. Uma maneira de levar em conta estes efeitos mas preservando a forma da energia livre de Ginzburg–Landau é modificar o comprimento de coerência e as constantes de acoplamento. De acordo com [53] e adaptando a nossa situação, $\xi_0 \rightarrow r^{1/2} \xi_0$, $\lambda \rightarrow 2r^{-3/2} \lambda$ e $\eta \rightarrow 4r^{-3} \eta$, onde $r \approx 0.18R^{-1}$, com $R = \xi_0/l$. Sendo assim, vamos a analisar o comportamento crítico em amostras supercondutoras em forma de filme, fios y grãos.

4.5.1 Filmes

No caso em que $d = 1$ temos que a compactificação é somente de uma dimensão e, neste caso, nós estamos considerando o material supercondutor confinado entre dois planos paralelos separados por uma distância L . Físicamente isto corresponderia a um filme supercondutor. A temperatura crítica de transição de fase de primeira ordem para o filme é obtido da Eq. (4.22),

$$T_c(L) = T_c \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3\lambda^2}{16\eta} \right)^{-1} \left[\frac{2R\lambda}{0.18 \cdot 8\pi} \frac{\xi_0}{L} \ln(1 - e^{-\frac{L}{\xi_0} \sqrt{\frac{3\lambda^2}{16\eta} \frac{R}{0.18}}}) + \frac{4R^2\eta}{0.18^2 32\pi^2} \left(\frac{\xi_0}{L} \right)^2 \left(\ln(1 - e^{-\frac{L}{\xi_0} \sqrt{\frac{3\lambda^2}{16\eta} \frac{R}{0.18}}}) \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.28)$$

No entanto, se nós queremos comparar o nosso resultado com os dados experimentais, devemos considerar outros efeitos, tais como o efeito de substrato sobre o qual o filme supercondutor é depositado. No contexto de nosso modelo, no entanto, nós não temos a possibilidade de descrever tais efeitos a nível microscópico. Portanto assumimos que estes efeitos podem ser incluídos de alguma forma nos valores das constantes de acoplamento λ e η . Assim, propomos como um *Ansatz* o reescalonamento dessas constantes na forma $\lambda \rightarrow a\lambda$ e $\eta \rightarrow a^2\eta$. Podemos relacionar ambos os parâmetros R e a como $r = aR$. Logo a Eq. (4.28) é reescrita como,

$$T_c(L) = T_c \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3\lambda^2}{16\eta} \right)^{-1} \left[\frac{2r\lambda}{0.18 \cdot 8\pi} \frac{\xi_0}{L} \ln(1 - e^{-\frac{L}{\xi_0} \sqrt{\frac{3\lambda^2}{16\eta} \frac{R}{0.18}}}) + \frac{4r^2\eta}{0.18^2 32\pi^2} \left(\frac{\xi_0}{L} \right)^2 \left(\ln(1 - e^{-\frac{L}{\xi_0} \sqrt{\frac{3\lambda^2}{16\eta} \frac{R}{0.18}}}) \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.29)$$

O gráfico da Eq. (4.29) é mostrada na Fig. 4.2, onde mostramos o comportamento da temperatura de transição em função da espessura de um filme feito de alumínio. Os valores dos parâmetros microscópicos para o Al, temperatura de Fermi, a temperatura de transição do material em "bulk" são $T_F = 13.53 \times 10^4$ K e $T_c = 1.2$ K, respectivamente e a velocidade de Fermi $v_F = 2.02 \times 10^6$ m/s.

Da análise da figura 4.2 observamos que a temperatura crítica cresce a partir de um valor zero correspondendo a uma espessura mínima permitida e alcança um valor

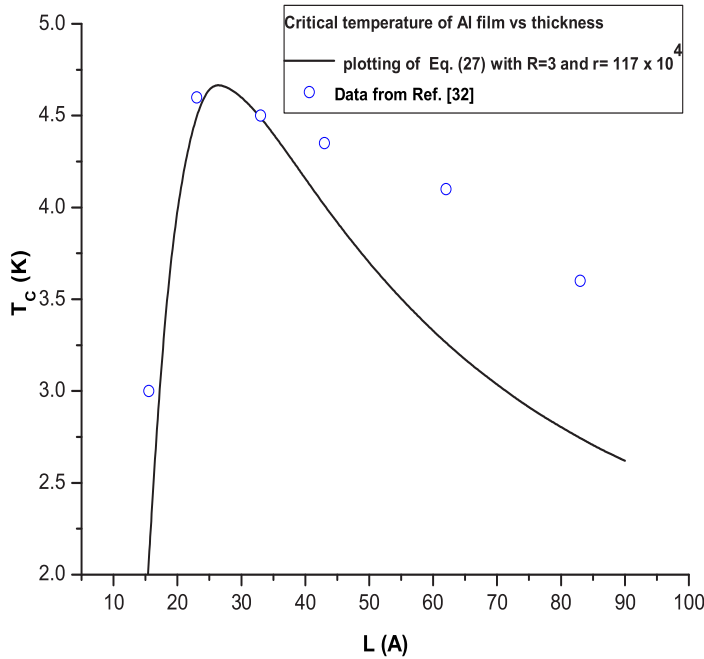


Figura 4.2: Temperatura crítica T_c (K) como função da espessura L (Å), de Eq.(4.29) e os dados tomados da Ref. [33] para um filme supercondutor feito de alumínio.

máximo acima da temperatura de transição de "bulk" à medida que a espessura é maior. Depois de alcançar esse valor máximo ela tende a decrescer assintoticamente até seu valor de "bulk" T_c quando $L \rightarrow \infty$. Na Fig. 2.4 nós também exibimos o gráfico de alguns dados experimentais da temperatura crítica do alumínio em função da espessura do filme, estes dados foram obtidos da Ref. [33]. Da comparação destas duas, podemos concluir que nossa curva teórica está qualitativamente em boa concordância com as medidas experimentais, especialmente na região onde a espessura é menor.

Experiências mostram que em alguns filmes supercondutores existe uma espessura para a qual a $T_c(L)$ está bem acima da temperatura de "bulk"; estes resultados foram relatados na literatura desde os 1950s e 60s [63–66]. Do ponto de vista teórico, uma fórmula para a temperatura de transição foi obtido dentro da teoria BCS em termos da constante de acoplamento elétron-fónon, da temperatura de Debye e da constante de acoplamento de Coulomb [67]. Esta fórmula foi utilizada para explicar incrementos observados na temperatura crítica de multicamadas compostas em filmes

finos metálicos [64]. Na Ref. [68] uma técnica de dinâmica molecular foi aplicada para obter o espectro da frequência dos fónons que conduziu aos mesmos resultados. Mecanismos que explicam o comportamento da $T_c(L)$ para filmes muito finos são discutidos na Ref. [33]. Os autores concluem que a influência mais importante sobre $T_c(L)$ é a interação do filme com o substrato, descrito pelo modelo da Ref. [69].

Este comportamento pode ser contrastado com o mostrado pela temperatura crítica para uma transição de *segunda ordem*. Neste caso, a temperatura crítica $T_c(L)$ cresce desde um valor zero, correspondendo a um valor mínimo de espessura do filme, alcançando assintoticamente o valor da temperatura de transição de "bulk", quando $L \rightarrow \infty$. Isto é ilustrado na Fig. 4.3, adaptada da Ref. [6], com os dados experimentais de [31]. Tal comportamento também foi encontrado experimentalmente por alguns outros grupos para uma variedade de materiais de metais de transição, ver Refs. [32, 39, 40].

4.5.2 Fios

Agora nós tomamos o caso quando $d = 2$, no qual o supercondutor está confinado simultaneamente entre dois planos paralelos separados em cada par por distâncias L_1 e L_2 , respectivamente. Isto é, o material supercondutor se encontra na forma de um fio de comprimento infinito com secção transversal retangular $L_1 \times L_2$, a qual podemos parametrizar como $L_1 = L$ e $L_2 = p \times L$ com $p > 0$. Dessa maneira da Eq. 4.22 obtemos a expressão da temperatura crítica para um fio supercondutor,

$$\begin{aligned}
T_c(L; p) = T_c \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3\lambda^2}{8\eta} \right)^{-1} \left[\frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{L} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}L}) + \frac{1}{pL} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}pL}) \right. \right. \right. \\
+ 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}L\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}}}{L\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}} \left. \left. - \frac{\eta}{32\pi^2\alpha} \left(\frac{1}{L} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}L}) + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. \frac{1}{pL} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}pL}) + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}}L\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}}}{L\sqrt{n_1^2 + p^2 n_2^2}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

A equação (4.30) é exibida gráficamente em Fig. 4.4 com os mesmos valores dos

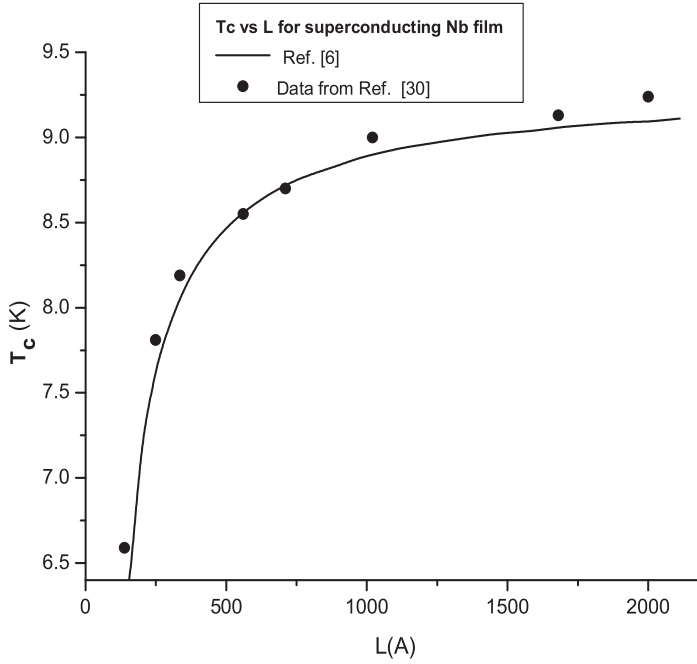


Figura 4.3: Temperatura crítica T_c (K) como uma função da espessura L (Å) para uma transição de segunda ordem, como foi previsto teóricamente na Ref. [6]. os pontos são os dados experimentais tomadas de Ref. [31] para um um filme supercondutor feito de Nióbio.

parâmetros dados para o caso dos filmes, de tal forma que possamos mostrar o comportamento da temperatura crítica como função da área da seção transversal do fio supercondutor, neste caso de um fio feito de alumínio. O comportamento da temperatura crítica em função das áreas transversais dos fios é mostrado na figura 4.4 com valores para $p = 1$, $p = 4$, $p = 10$ e $p = 20$. Note-se que quando temos $p = 1$ ou $L_1 = L_2$, que é o caso de uma seção quadrada, a temperatura crítica apresenta um pequeno máximo em relação ao valor da temperatura de transição "bulk". Observamos que, quando $p \gg 1$ ou $L_2 \gg L_1 = L$, a temperatura crítica apresenta um valor máximo cada vez maior, correspondendo a valores diferentes da área. Por outro lado, fazendo p cada vez maior, nós chegamos ao caso limite para $p \rightarrow \infty$ ou $L_2 \rightarrow \infty$ o que corresponderia a uma amostra supercondutora na forma de um filme.

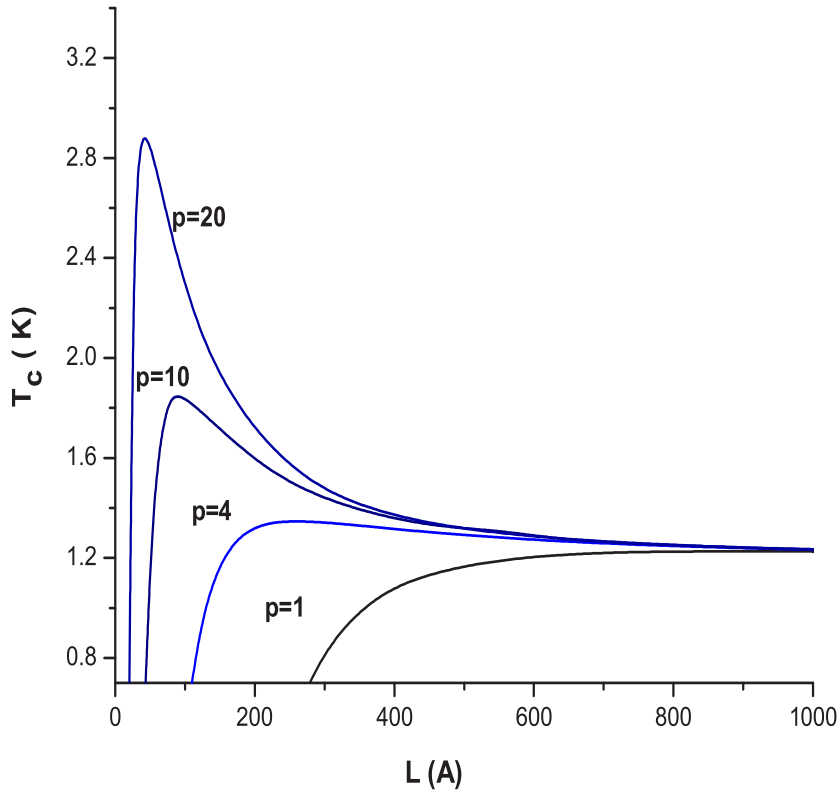


Figura 4.4: Temperatura crítica $T_c(L)$ como função das áreas transversais definidas por $A = L \times pL$, para $p = 1$, $p = 4$, $p = 10$ e $p = 20$, plotada da Eq.(4.30) para um fio supercondutor de alumínio

4.5.3 Grãos

Finalmente, para completar a nossa análise, nós podemos compactificar as três dimensões, $d = D = 3$, o que corresponde a um material na forma de um grão. A dependência da sua temperatura crítica em função das dimensões lineares $L_1 = L$, $L_2 = p \times L$ e $L_3 = q \times L$ com $p > 0$ e $q > 0$. A fórmula da temperatura crítica em função desses parâmetros vem da equação 4.22,

$$\begin{aligned}
T_c(L; p, q) = T_0 & \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3\lambda^2}{8\eta\alpha} \right)^{-1} \left[\frac{\lambda}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} L_i}) + \right. \right. \\
& 2 \sum_{j<i=1}^3 \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + 4 \sum_{n_1, \dots, n_3=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_3^2 n_3^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_3^2 n_3^2}} \Big) + \\
& + \frac{\eta}{32\pi^2\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \ln(1 - e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} L_i}) + 2 \sum_{j<i=1}^3 \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \frac{e^{-m(L_i)\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}}}{\sqrt{L_i^2 n^2 + L_j^2 n^2}} + \right. \\
& \left. \left. + 4 \sum_{n_1, \dots, n_3=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\eta}} \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_3^2 n_3^2}}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_3^2 n_3^2}} \right)^2 \right] \Big\}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

A expressão acima contém somatórias, somatórias duplas e somatórias triplas, todas elas convergentes, de tal maneira que encontra-se valores finitos para a temperatura crítica dos grãos supercondutores. Também, daqui, nós podemos recuperar analiticamente a fórmula da temperatura crítica para fios no limite $q \gg 1$ o que equivale dizer $L_3 \rightarrow \infty$, além disso se $p \gg 1$ ou $L_2 \rightarrow \infty$ recuperamos a expressão para a temperatura crítica de filmes.

Posto que no presente capítulo, foi assumido explicitamente uma transição de fase de primeira ordem, podemos inferir que a transição supercondutora descrita no experimento em [33] é de primeira ordem. Em outras palavras, um pode dizer que numa observação experimental do comportamento da temperatura crítica em função da espessura (para filmes) ou em função da seção transversal (para um fio) pode servir como um possível critério para decidir sobre a ordem da transição supercondutora da amostra: um incremento monotônico da temperatura crítica com o crescimento da espessura do filme indica que o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem, enquanto que se a temperatura crítica apresenta um valor máximo numa determinada espessura e logo decresce com o incremento da espessura, isto pode significar a ocorrência de uma transição de fase de primeira ordem.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta Tese, utilizamos alguns métodos da teoria quântica dos campos no estudo das transições de fases supercondutoras no contexto do modelo fenomenológico de Ginzburg Landau. Neste contexto, a teoria $\lambda\phi^4$ incluindo as flutuações de gauge foi aplicada para estudar transições de fase carregadas de segunda ordem, enquanto que a teoria $\lambda\phi^4 + \eta\phi^6$ foi utilizada para estudar transições de fase supercondutoras de primeira ordem.

No capítulo 3 consideramos o modelo Ginzburg–Landau, num calibre de gauge unitário transversal, como um modelo para descrever transições de fase carregadas em amostras em forma de fios. Para gerar as contribuições devidos às flutuações de gauge, nós utilizamos o potencial efetivo Gaussiano. Uma vantagem do método vem do fato que o PEG é menos sensível às correções de ordem maiores à diferença do método perturbativo usual. Neste sentido o PEG fornece resultados mais exatos quando são comparados com os dados experimentais. O PEG nos permite obter uma equação do gap que pode ser tratada pelos métodos desenvolvidos recentemente [1, 26]. Nós derivamos as equações que descrevem a temperatura crítica em função do tamanho da amostra. As contribuições da auto-interação $\lambda\phi^4$ e das flutuações de gauge são identificadas. Encontrou-se que em fios supercondutores a temperatura de transição de fase de segunda ordem varia quase que em forma linear com o inverso da raiz quadrada da área da sua secção transversal retangular. Além do mais, o nosso tratamento sugere um tamanho mínimo para a existência de transições carregadas e não carregadas tanto para amostras em forma de fios quanto na forma de filmes. Tal tipo de resultado, se

adaptado apropriadamente a amostras reais do material, poderia ser de interesse prático para definir limites de miniaturização de dispositivos supercondutores na fabricação de circuitos eletrônicos.

Nossos resultados obtidos do modelo puro de GL estão em boa concordância qualitativa com os resultados experimentais. Vale a pena enfatizar que o caráter quasi-linear do decréscimo da temperatura de transição de fase de segunda ordem com o inverso das dimensões lineares transversais do fio (ou com o inverso da espessura do filme) obtidas por nós, emerge unicamente como um efeito topológico da compactificação espacial do modelo de Ginzburg-Landau

No capítulo 4, nós estudamos o comportamento crítico da temperatura para amostras supercondutoras em forma de filmes, fios e grãos; nestes casos, utilizamos o modelo de GL modificado, onde temos incluído os termos de auto-interação $\lambda\phi^4 + \eta\phi^6$ com $\lambda < 0$ e $\eta > 0$ o que implica automaticamente a existência de uma transição de fase de primeira ordem. Neste caso um comportamento diferente da temperatura crítica é encontrado em função das dimensões das amostras em comparação com o comportamento obtido nas transições de fase de segunda ordem, como foi visto no capítulo 3. No caso específico para amostras em forma de filmes, o comportamento da temperatura de transição de primeira ordem apresenta um valor máximo acima do valor da temperatura crítica da amostra em forma de "bulk" para um certo valor da espessura L_c . Para $L > L_c$ o comportamento da temperatura crítica decresce assintoticamente a seu valor de bulk, enquanto que para $L < L_c$ a temperatura crítica cai muito rápido abaixo do valor da temperatura de bulk. Um exemplo deste fato é mostrado para um filme supercondutor de alumínio. Para amostras em forma de fios, o comportamento da temperatura crítica apresenta quase que os mesmos comportamentos na medida que a seção retangular do fio corresponde a L_2 muito maior que L_1 , como foi mostrado na figura (4.3). Desde que aqui assumimos explicitamente uma transição de fase de primeira ordem podemos inferir que a transição descrita nas experiências em Ref. [33] é de primeira ordem. Em outras palavras, podemos sugerir que uma observação experimental do comportamento da temperatura crítica em filmes e fios pode servir como um critério para decidir sobre

a ordem de transição de fase supercondutora.

Também, para nossa derivação da temperatura crítica de transição de primeira ordem, foi necessário calcular a constante fenomenológica η , posto que o seu valor relacionado com os parâmetros microscópicos do material não é encontrado na literatura. O cálculo desta constante fenomenológica se fez de forma análoga para o caso do parâmetro λ que é encontrado na literatura [53].

Em resumo, dos resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 concluímos que o método da teoria quântica de campos no contexto do modelo fenomenológico de Ginzburg–Landau apresenta-se como uma ferramenta útil no estudo das transições de fase supercondutoras na presença de condições de fronteiras.

Como perspectivas futuras, podemos aplicar os métodos desenvolvidos nesta tese ao estudo do modelo GL para supercondutores, incluindo ambos termos, as flutuações de campo de gauge e um termo topológico massivo Chern-Simons para estudar o comportamento do parâmetro de Ginzburg–Landau (κ_{GL}) em função do tamanho de amostras supercondutoras em forma de filmes e fios.

Também, é possível estender o estudo das transições de fase supercondutoras no modelo GL com condições de fronteiras com quebra da invariância translacional, tipo Dirichlet-Dirichlet (DD) e Neumann-Neumann (NN), entre dois planos paralelos separados por uma distância L (caso filmes supercondutores), analisando o efeito do tamanho do sistema sobre as constantes fenomenológicas e sobre a temperatura crítica (size effect).

Apêndice A

O tratamento da função zeta

A.1 Função zeta de Epstein-Hurwitz

No presente apêndice apresentamos os procedimentos necessários no tratamento da função zeta de Epstein-Hurwitz utilizados na técnica de regularização das integrais que aparecem nos capítulos 3 e 4. Os procedimentos empregados aqui são uma generalização daqueles descritos na ref. [23], e são semelhantes aos da ref. [1]. A função zeta de Epstein-Hurwitz é definida por,

$$\begin{aligned} Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) &= \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} (a_1 n_1^2 + \dots + a_d n_d^2 + c^2)^{-\nu} \\ &= \frac{1}{c^{2\nu}} + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} (a_i n_i^2 + c^2)^{-\nu} + 2^2 \sum_{i < j=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} (a_i n_i^2 + a_j n_j^2 + c^2)^{-\nu} + \dots \\ &\quad + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} (a_1 n_1^2 + \dots + a_d n_d^2 + c^2)^{-\nu}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

com validade para $\text{Re}(\nu) > d/2$. Ela pode ser estendida para todo o plano complexo usando a identidade [23],

$$\frac{1}{\Delta^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\Delta t}, \tag{A.2}$$

com que obtemos,

$$Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-c^2 t} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^d T_1(t, a_i) + \right. \\ \left. + 2^2 \sum_{i,j=1}^d T_2(t, a_i, a_j) + \dots + 2^d T_d(t, a_1, \dots, a_d) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde

$$T_1(t, a_i) = \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-a_i n_i^2 t}, \quad (\text{A.4})$$

$$T_j(t, a_1, \dots, a_j) = T_{j-1}(t, a_1, \dots, a_{j-1}) T_1(t, a_j), \quad j = 2, \dots, d. \quad (\text{A.5})$$

Considerando as propriedades das funções T_1 ,

$$T_1(t, a_i) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{a_i t}} \left[\frac{1}{2} + S\left(\frac{\pi^2}{a_i t}\right) \right], \quad (\text{A.6})$$

onde

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}, \quad (\text{A.7})$$

nós podemos observar que os termos que sobrevivem na Eq.(A.3) são proporcionais a $(a_1 \cdots a_d)^{-1/2}$. Conseqüentemente nós encontramos

$$Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{a_1 \cdots a_d} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{(\nu-\frac{d}{2})-1} e^{-c^2 t} \times \\ \left[1 + 2 \sum_{i=1}^d S\left(\frac{\pi^2}{a_i t}\right) + 2^2 \sum_{i<j=1}^d S\left(\frac{\pi^2}{a_i t}\right) S\left(\frac{\pi^2}{a_j t}\right) + \dots + 2^d \prod_{i=1}^d S\left(\frac{\pi^2}{a_i t}\right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Inserindo na Eq.(A.8) a forma explícita da função $S(x)$ na Eq.(A.7) e utilizando a seguinte representação para as funções de Bessel de terceiro tipo, K_ν ,

$$2(a/b)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{ab}) = \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-(a/x)-bx}, \quad (\text{A.9})$$

depois de algumas manipulações algébricas chegamos a obter,

$$\begin{aligned}
Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) &= \frac{2^{\nu-\frac{d}{2}+1} \pi^{2\nu-\frac{d}{2}}}{\sqrt{a_1 \cdots a_d} \Gamma(\nu)} \left[2^{\nu-\frac{d}{2}-1} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{d-2\nu} \Gamma\left(\nu - \frac{d}{2}\right) + \right. \\
&+ 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\mu^2 L_i n_i}\right)^{\frac{d}{2}-\nu} K_{\nu-\frac{d}{2}}(m L_i n_i) + \dots \\
&\left. + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\mu^2 \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}}\right)^{\frac{d}{2}-\nu} K_{\nu-\frac{d}{2}}\left(m \sqrt{L_1^2 n_1^2 + \cdots + L_d^2 n_d^2}\right) \right]. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

A.2 Função zeta de Epstein 2-dimensional

A função *zeta* de Epstein 2-dimensional é definida por [49]

$$E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1, L_2\right) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2]^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)}. \tag{A.11}$$

Em forma análoga como foi dada para a função *zeta* de Epstein-Hurwitz, nós também podemos construir uma continuação analítica e relações de recorrência para a função *zeta* de Epstein multidimensional. Isto será efetuada considerando a continuação analítica da função *zeta* de Epstein-Hurwitz dada por [23],

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + p^2)^{-\nu} = -\frac{1}{2} p^{-2\nu} + \frac{\sqrt{\pi}}{2 p^{2\nu-1} \Gamma(\nu)} \left[\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi p n)^{\nu-\frac{1}{2}} K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi p n) \right].$$

Utilizando estas relações podemos efetuar uma das somas em (A.11), sem perder a simetria das somas ao efetuar uma de elas primeiro, nós adotamos aqui uma soma simetrizada. Generalizando a prescrição introduzida em [1], nós consideramos a função de Epstein multidimensional definida como uma soma simetrizada:

$$E_d(\nu; L_1, \dots, L_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=1}^{\infty} [\sigma_1^2 n_1^2 + \cdots + \sigma_d^2 n_d^2]^{-\nu}, \tag{A.12}$$

onde $\sigma_i = \sigma(L_i)$, com σ levando em conta todas as permutações do conjunto dos parâmetros L_1, \dots, L_d , e a soma sobre n_1, \dots, n_d tomados nessa ordem. Aplicando (A.12) para efetuar a soma sobre n_d , temos,

$$\begin{aligned}
E_d(\nu; L_1, \dots, L_d) &= -\frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d E_{d-1}\left(\nu; \dots, \widehat{L}_i, \dots\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2d\Gamma(\nu)} \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \times \\
&\quad \sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} E_{d-1}\left(\nu - \frac{1}{2}; \dots, \widehat{L}_i, \dots\right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{d\Gamma(\nu)} W_d\left(\nu - \frac{1}{2}, L_1, \dots, L_d\right),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

onde o $(\widehat{\cdot})$ acima dos parâmetros L_i nas funções E_{d-1} significa que exclui do conjunto $\{L_1, \dots, L_d\}$ (os outros $d-1$ parâmetros de E_{d-1}), e

$$W_d(\eta; L_1, \dots, L_d) = \sum_{i=1}^d \frac{1}{L_i} \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_i}{L_i \sqrt{(\dots + \widehat{L_i^2 n_i^2} + \dots)}} \right)^\eta K_\eta \left(\frac{2\pi n_i}{L_i} \sqrt{(\dots + \widehat{L_i^2 n_i^2} + \dots)} \right), \tag{A.14}$$

com $(\dots + \widehat{L_i^2 n_i^2} + \dots)$ representando a soma $\sum_{j=1}^d L_j^2 n_j^2 - L_i^2 n_i^2$. Em particular, notando que $E_1(\nu; L_j) = L_j^{-2\nu} \zeta(2\nu)$, encontra-se que,

$$\begin{aligned}
E_2\left(\frac{D-2}{2}; L_1^2, L_2^2\right) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{L_1^{D-2}} + \frac{1}{L_2^{D-2}} \right) \zeta(D-2) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{4\Gamma(\frac{D-2}{2})} \left(\frac{1}{L_1 L_2^{D-3}} + \frac{1}{L_1^{D-3} L_2} \right) \\
&\quad \times \zeta(D-3) + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{D-2}{2})} W_2\left(\frac{D-3}{2}; L_1, L_2\right).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Estes resultados foram utilizados nos capítulos 3 e 4.

Apêndice B

A Derivação Microscópica do Funcional GL: Cálculo das constantes fenomenológicas

B.1 A Derivação Microscópica da Ação GL

A derivação da ação GL a partir da teoria microscópica BCS é baseada na utilização direta das funções de Green termicas nas equações de Gorkov [17, 18]. Por intermedio desta derivação nós podemos determinar os valores das constantes fenomenológicas envolvidas no modelo GL e que estão relacionadas com a teoria microscópica, as quais caracterizam algumas das propriedades dos materiais supercondutores que se deseja estudar. Então, partindo das equações de Gorkov,

$$\left[i\hbar\omega_n + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla + \frac{ieA}{\hbar c} \right)^2 + \mu \right] \tilde{G}(x, x', \omega_n) + \int dx'' \Delta(x, x'') F^\dagger(x'', x', \omega_n) = \delta(x - x'). \quad (\text{B.1})$$

$$\left[-i\hbar\omega_n + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ieA}{\hbar c} \right)^2 + \mu \right] F^\dagger(x, x', \omega_n) + \int dx'' \Delta^*(x, x'') \tilde{G}(x'', x', \omega_n) = 0. \quad (\text{B.2})$$

junto com a condição de consistência,

$$\frac{\Delta^*(x)}{g} = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n F^\dagger(x, x, \omega_n), \quad (\text{B.3})$$

das equações (B.1), (B.2) juntamente com a equação (B.3), podemos calcular o valor do gap até o quinto ordem em Δ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^*(x)}{g} = & \frac{1}{\beta\hbar} \left[\int d^3y Q(x, y) \Delta^*(y) + \int d^3y d^3z d^3w R(x, y, z, w) \Delta^*(y) \Delta(z) \Delta^*(w) \right. \\ & \left. + \int d^3y d^3z d^3w d^3v d^3s P(x, y, z, w, v, s) \Delta^*(y) \Delta(z) \Delta^*(w) \Delta^*(v) \Delta^*(s) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$Q(x, y) = \frac{1}{\beta\hbar^2} \sum_n \tilde{G}_0(y, x, -\omega_n) \tilde{G}_0(y, x, \omega_n), \quad (\text{B.5})$$

$$R(x, y, z, w) = -\frac{1}{\beta\hbar^4} \sum_n \tilde{G}_0(y, x, -\omega_n) \tilde{G}_0(y, z, \omega_n) \tilde{G}_0(w, z, -\omega_n) \tilde{G}_0(w, x, \omega_n) \quad (\text{B.6})$$

e

$$\begin{aligned} P(x, y, z, w, v, s) = & \frac{1}{\beta\hbar^6} \sum_n \tilde{G}_0(y, x, -\omega_n) \tilde{G}_0(y, z, \omega_n) \tilde{G}_0(w, z, -\omega_n) \tilde{G}_0(w, v, \omega_n) \times \\ & \tilde{G}_0(s, v, -\omega_n) \tilde{G}_0(s, x, \omega_n). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Onde \tilde{G}_0 é a função de Green que descreve o estado normal na presença do campo magnético $B = \nabla \times A$. Nesta derivação, Gorkov [17] considerou a aproximação onde $1/k_F$, k_F é o número de onda de Fermi, é muito menor que a profundidade de penetração de London, e \tilde{G}_0 pode ser aproximado à função de Green com campo magnético nulo G_0 , mediante a aproximação

$$\tilde{G}_0(x, x', \omega_n) = G_0(x - x', \omega_n) e^{-ieA(x).(x-x')}, \quad (\text{B.8})$$

e também

$$Q(x, y) = \frac{1}{\beta \hbar^2} \sum_n e^{2ieA(x,y)} G_0(y - x, -\omega_n) G_0(y - x, \omega_n) = e^{-2ieA(x,y)} Q_0(x - y). \quad (\text{B.9})$$

A expressão de G_0 na ausência do campo magnético é dada por

$$G_0(x, \omega_n) = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{ik.x}}{i\hbar\omega_n - \xi_k} \quad (\text{B.10})$$

e considerando essas aproximações, o primeiro termo em (B.4) são calculados em detalhe na Ref. [18], o que resulta,

$$\int d^3y Q(x, y) \Delta^*(y) \approx \left[N(0) \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) + \frac{1}{g} + \frac{7\zeta(3)}{8} N(0) \left(\frac{\hbar v_F}{\pi k_B T_0} \right)^2 \right] \Delta(x). \quad (\text{B.11})$$

Os dois últimos termos são calculados na aproximação $\tilde{G}_0 \approx G_0$, o que resulta,

$$\int d^3y d^3z d^3w R(x, y, z, w) \Delta^*(y) \Delta(z) \Delta^*(w) \approx -N(0) \frac{7\zeta(3)}{8(\pi k_B T_0)^2} \Delta^3(x). \quad (\text{B.12})$$

e

$$\int d^3y d^3z d^3w d^3v d^3s P(x, y, z, w, v, s) \Delta^*(y) \Delta(z) \Delta^*(w) \Delta^*(v) \Delta^*(s) \approx \frac{93\zeta(5)N(0)}{128(\pi T_0 k_B)^4} \Delta^5(x). \quad (\text{B.13})$$

Logo, utilizando (B.11), (B.13) e (B.12) em (B.4) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^*(x)}{g} \approx & \left[N(0) \left(\frac{T_0 - T}{T_0} \right) + \frac{1}{g} \right] \Delta^*(x) + \frac{7\zeta(3)N(0)}{48} \left(\frac{\hbar v_F}{\pi k_B T_0} \right)^2 \left(\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c} \right)^2 \Delta^*(x) \\ & - \frac{N(0)7\zeta(3)}{8\pi^2 k_B^2 T_0^2} \Delta^*(x) |\Delta(x)|^2 + \frac{93N(0)\zeta(5)}{128\pi^4 T_0^4 k_B^4} \Delta^*(x) |\Delta(x)|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

o que resulta

$$\begin{aligned}
0 = & N(0)\left(\frac{T_0 - T}{T_0}\right)\Delta^*(x) + \frac{7\zeta(3)N(0)}{48}\left(\frac{\hbar v_F}{\pi k_B T_0}\right)^2 \left(\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c}\right)^2 \Delta^*(x) \\
& - \frac{N(0)7\zeta(3)}{8\pi^2 k_B^2 T_0^2} \Delta^*(x)|\Delta(x)|^2 + \frac{93N(0)\zeta(5)}{128\pi^4 T_0^4 k_B^4} \Delta^*(x)|\Delta(x)|^4, \tag{B.15}
\end{aligned}$$

que é a equação de Ginzburg Landau mais um termo adicional. Integrando a equação (B.15) podemos encontrar o funcional de GL em função do gap

$$\begin{aligned}
f(\Delta) = & \frac{N(0)7\zeta(3)}{48}\left(\frac{\hbar v_F}{\pi k_B T_0}\right)^2 \left|\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c}\Delta(x)\right|^2 + N(0)\left(\frac{T_0 - T}{T_0}\right)|\Delta(x)|^2 \\
& + \frac{N(0)14\zeta(3)}{4 \times 8\pi^2 k_B^2 T_0^2} |\Delta(x)|^4 + \frac{186N(0)\zeta(5)}{6 \times 128\pi^4 T_0^4 k_B^4} |\Delta(x)|^6 \tag{B.16}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
f(\Delta) = & N(0) \left[\xi_0^2 \left|\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c}\Delta(x)\right|^2 + \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) |\Delta|^2 \right. \\
& \left. + \frac{3\xi_0^2}{\hbar^2 v_F^2} |\Delta|^4 + \frac{1674 \zeta(5) \xi_0^4}{147 \hbar^4 v_F^4 \zeta^2(3)} |\Delta|^6 \right] \tag{B.17}
\end{aligned}$$

onde

$$N(0) = \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^3} \tag{B.18}$$

e

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{48\pi^2} \frac{\hbar p_F}{mk_B T_0}} \approx 0.26 \frac{T_F \hbar}{T_0 p_F}. \tag{B.19}$$

Nestas equações, p_F , T_F , v_F são o momento, a temperatura e a velocidade de Fermi, k_B é a constante de Boltzman e $\zeta(x)$ é a função zeta de Rieman. A teperatura de Fermi é dada por $T_F = p_F^2/(2mk_B)$

Fazendo a identificação do gap com o parâmetro de ordem, $\Delta = \varphi/\sqrt{2N(0)}\xi_0$ obtemos

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = & \frac{1}{2} \left|\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c}\varphi\right|^2 + \frac{1}{2\xi_0^2} \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) |\varphi|^2 + \frac{3}{4 \hbar^2 v_F^2 \xi_0^2 N(0)} |\varphi|^4 + \frac{1}{6} \frac{1674 \zeta(5)}{196 N(0)^2 \hbar^4 v_F^4 \zeta^2(3) \xi_0^2} |\varphi|^6. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

B.2 Cálculo das constantes fenomenológicas da energia livre de GL

A equação B.20 é a densidade de energia livre de Ginzburg-Landau. No entanto, quando a energia livre total aparece na exponencial da função de partição como a ação ela vai acompanhada do fator $1/k_B T_0$ fazendo com que as quantidades na exponencial sejam adimensionais. Por este motivo é necessário introduzir algumas mudanças [53], tais como: $\varphi \rightarrow \sqrt{k_B T_0 / \xi_0} \phi$, $A \rightarrow \sqrt{k_B T_0 / \xi_0} A$ e $x = x \xi_0$, com o que se chega a uma expressão adimensional

$$\frac{F}{k_B T_0} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} |(\nabla - iqA)\phi|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 + \frac{\eta}{6} |\phi|^6 \right]. \quad (\text{B.21})$$

De (B.21) podemos identificar as constantes fenomenológicas que aparecem no modelo de Ginzburg-Landau, que são

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3k_B T_0}{N(0)\hbar^2 v_F^2 \xi_0} \approx 111.08 \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^2, \\ q &= \frac{2e}{\hbar c} \sqrt{k_B T_0 \xi_0} \approx 2.59 \sqrt{\alpha \frac{v_F}{c}}, \\ \eta &= \frac{1674\zeta(5)}{1764\zeta^2(3)} \left(\frac{3k_B T_0}{N(0)\hbar^2 v_F^2 \xi_0} \right)^2 \approx 8390 \left(\frac{T_0}{T_F} \right)^4. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

onde $m_0^2 = (T/T_0 - 1)$ com $\alpha = 1$.

Essas constantes são utilizados nas comparações experimentais de nossos modelos nos capítulos 3 e 4. Aqui fazemos lembrar que no capítulo 3 nós utilizamos a equação (B.21) esquecendo o último termo. Já no capítulo 3, nós utilizamos esta expressão na aproximação do potencial magnético $A \approx 0$ incluindo ainda o último termo.

Referências Bibliográficas

- [1] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, Nucl. Phys. B **631**, 83 (2002).
- [2] A.P.C. Malbouisson, Phys. Rev. B, **66**, 092502 (2002).
- [3] L. M. Abreu, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A. E. Santana, Phys. Rev. B **67**, 212502 (2003)
- [4] A.P.C. Malbouisson, Y. W. Milla, I. Roditi, Physica A 359, 455 (2006).
- [5] C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, Y. W. Milla and I. Roditi, Phys. Rev.B **73**, 214525 (2006).
- [6] L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, I. Roditi, Eur. Phys. J. B **37** (2004) 515.
- [7] Zinn-Justin, J. (1996); Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford, e referências nele indicadas.
- [8] J. L. Cardy (ed.), *Finite-Size Scaling*(North Holland, Amsterdam, 1988).
- [9] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **30** (1984) 1712; P. M. Stvenson, Phys. Rev. D **32** (1985).
- [10] P. M. Stevenson, I. Roditi, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1986).
- [11] S. F. Novaes, **Standard Model: An Introduction**,(Instituto de Fisica Teorica, UNESP), report no: IFT-P/010/2000, "Particle and Fields", Proceedings of the X J. A. Swieca Summer School (World Scientific, Singapore, 2000)

- [12] Landau, Lev Davidovich - Lifshitz, E.M, *Statistical Physics - Thermodynamics* , Pergamon Press, Oxford, 1969, Ed. 2.
- [13] Wilson, K.G. and Kogut, J.B. (1974); Phys. Rep. 12C, 75.
- [14] Daniel J. Amit, *Field Theory, The Renormalization Groups, And Critical Phenomena*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984,Ed.2.
- [15] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [16] Ginzburg, V.L. and Landau, L.D. (1950); Zh. Eksp.Teor Fiz. 20, 1064.
- [17] L. P. Gorkov, Sov. Phys. JETP **9**, 636 (1959).
- [18] Alexander L. Fetter - John Dirk Walecka, *Quantum Theory - Many-Body Problems*, Mcgraw-Hill Publishing Co., New York, 1971.
- [19] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity", Phys. Rev. 108 (5), 1175 (1957).
- [20] Randeira M, *Bose Eintein Condensation*, Griffin A, Cambridge UP, (1995) .
- [21] J. F. Annett, M. Randeira, and S. R. Renn, Phys. Rev. B **38**, 4600 (1988).
- [22] M. Sgrist and T. M. Rice, Z. Phys. B **68**, 9 (1987).
- [23] , E. Elizalde, E. Romeo J. Math. Phys. **30**, 1133 (1989).
- [24] A. Elizalde, J. Phys. A: math. Gen, **22** 931 (1989).
- [25] A. Elizalde *Ten physical application of spectral zeta function*, (Springer-Verlag, Berling, 1995).
- [26] A.P.C. Malbouisson and J.M.C. Malbouisson, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263 (2002).
- [27] Pierre Ramond, "*Field Theory—a modern primer*", Benjamin Cummings, 1981, Appendix **B**.

- [28] Feynman, R. P., and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York: McGraw-Hill, 1964.
- [29] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1981).
- [30] Folk R., Holovatch Yu., *Critical Fluctuations in a Normal-to-Superconducting Transition. Correlations and Order*, ed. by Shopova D. V., Uzunov D. I. Kluwer, Academic/Plenum Publishers, N. Y. London, 1999; COND-MAT/9807421.
- [31] M. I. J. Kodama and H. Hirai, *Appl. Phys.* **54**, 4050 (1983).
- [32] P. C. H. Raffy, R. B. Laibowitz and S. Maekawa, *Phys. Rev. B* **28**, 6607 (1983).
- [33] O. F. K. M. Strongin, R. S. Thompson and J. E. Crow, *Phys. Rev. B* **1**, 1078 (1970).
- [34] J. M. Graybeal and M. R. Beasley, *Phys. Rev. B* **29**, 4167 (1984).
- [35] J. Simonin, *Phys. Rev. B* **33**, 7830 (1986).
- [36] J. H. Quateman, *Phys. Rev.* **34**, 19848 (1986).
- [37] S. I. Park and T. H. Geballe, *Physica* **135B**, 108 (1985).
- [38] D. V. Shopova and T. P. Todorov, D. I. Uzunov, *Phys. Lett. A* **281** (2001) 197.
- [39] M.S.M. Minhaj, S. Meepagala, J.T. Chen and L.E. Wenger, *Phys. Rev. B* **49**, 15235 (1994).
- [40] A.V. Pogrebnyakov, J.M. Redwing, J.E. Jones, X.X. Xi, S.Y. Xu, Qi Li, V. Vaithyanathan and D.G. Schlom, *Appl. Phys. Lett.* **82** (2003) 4319.
- [41] I. Roditi, *Phys. Lett.* **169B**, 264 (1986); *Phys. Lett.* **177B**, 85 (1986).
- [42] A. Okopińska, *Phys. Rev. D* **35**, 1835 (1987); I. Stancu, P. M. Stevenson, *Phys. Rev. D* **42**, 2710 (1990); R. Ibañez-Meier, I. Stancu, P. M. Stevenson, *Z. Phys. C* **70**, 307 (1996).

- [43] M. Camarda, G. G. N. Angliella, R. Pucci, F. Siringo, Europhys. J. B **33**, (2003) 273.
- [44] P. W. Higgs, Phys. Lett., **12**, 132 (1964).
- [45] P. W. Anderson, Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).
- [46] P. W. Anderson, Phys. Rev. **130**, 439 (1962).
- [47] Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- [48] Halperin, B.I., Lubensky, T.C. and Ma, S.-K. (1974); Phys. Rev. Lett. **32**, 292.
- [49] K. Kirsten, J. Math. Phys. **35** (1994) 459.
- [50] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson. C. B. Thorn, V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 373.
- [51] C. A. Lütken, F. Ravndal, J. Math. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) L793.
- [52] C. de Calan, A.P.C. Malbouisson, F.S. Nogueira, Phys. Rev. B **64**, 212502 (2001).
- [53] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. 1: Superflow and Vortex Lines, World Scientific, Singapore, 1989.
- [54] L.M. Abreu, A.P.C. Malbouisson, I. Roditi, Physica A **331**, 99 (2004).
- [55] C.D. Fosco and A. Lopez, Nucl. Phys. B **538**, 685 (1999).
- [56] L. Da Rold, C.D. Fosco and A.P.C. Malbouisson, Nucl. Phys. B **624**, 485 (2002).
- [57] G.N.J. Añaños, A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, Nucl. Phys. B **547**, 221 (1999).
- [58] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [59] C. L. A. Bezryadin and M. Tinkham, Nature, **404**, 971 (2000).

- [60] C. L. M. Markovic and M. Tinkham, *Physica C* **387**, 44 (2003).
- [61] D. C. R. J. Von Delft, *Phys. Rep.* **345**, 61 (2001).
- [62] J. Von Delft, *Ann. Phys. (Leipzig)* **10**, 219 (2001).
- [63] V. Buckel and R. Hilsch, *Z. Phys.* **132**, 420 (1952); **138**, 109 (1954); N.V. Zavaritsky, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **86**, 501 (1952).
- [64] M. Strongin, O.F. Kammerer, J.E. Crow, R.D. Parks, D.H. Douglass, Jr. and M. A. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1320 (1968).
- [65] M. Strongin and O.F. Kammerer, *J. Appl. Phys.* **39**, 2509 (1968).
- [66] M. Strongin, O.F. Kammerer, D.H. Douglass, Jr. and M.H. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **19** 121 (1967).
- [67] W.L. McMillan, *Phys. Rev.* **167**, 331 (1968).
- [68] J.M. Dickey and A. Paskin, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1441 (1968).
- [69] L.N. Cooper, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 689 (1961); W. Silvert and L.N. Cooper, *Phys. Rev.* **141**, 336 (1966).