Tese de
Doutorado

A ENERGIA E A HAMILTONIANA DOS ESPAÇOS ABERTOS ASSINTOTICAMENTE FRIEDMANN - LAMAÎTRE - ROBERTSON - WALKER

PAULO ISRAEL TRAJTENBERG

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, março de 2004.

Agradecimentos

- A NELSON PINTO NETO, pela dedicação e paciência a mim dispensadas, por ter me introduzido neste fascinante tema da energia gravitacional, pela orientação de alto nível ao qual tive o privilégio de me submeter, pelo crescimento intelectual proporcionado por mais de dez anos de trabalho conjunto, enfim, por ser esta figura humana de excepcional qualidade com a qual tive o prazer de conviver. Espero conservar e aprofundar os laços profissionais e de amizade que nos uniram ao longo de todos estes anos.

- A MARIO NOVELLO, pela relação fraternal sempre demonstrada, por sua liderança indispensável ao desenvolvimento da ciência neste país, por sua luta incansável em prol de uma ciência de alto nível que atenda aos reais interesses da sociedade brasileira, pela sua determinação inabalável na manutenção do grupo de Cosmologia e Gravitação por tantos anos apesar das adversidades encontradas, por sua eterna disposição em divulgar as idéias da ciência, em particular da Cosmologia, seja através dos seus instigantes livros, seja proferindo palestras para jovens estudantes, colaborando desta forma para a democratização do saber científico em nossa sociedade.

- A JOSÉ MARTINS SALIM, pela amizade e companheirismo sempre demonstrados, por ter acreditado na minha capacidade intelectual, pelos constantes estímulos. Sem a sua valiosa contribuição não teria atingido os objetivos acadêmicos a que me propus.

- A ÍVANO DAMIÃO SOARES, a quem tenho profundo respeito e admiração, pelas valorosas observasões que certamente contribuiram de forma decisiva no aprimoramento deste trabalho.

- A TODA A EQUIPE DA SECRETARIA GERAL DO CBPF, pela atenção com que sempre me receberam, em especial a MYRIAN SIMÕES COUTINHO, pelo carinho e boa vontade que sempre demonstrou, pelo comportamento ético e profissional exemplar. Sua colaboração foi essencial para a conclusão desta dissertação.

- A minha esposa, SURAIA EL-KADDOUM TRAJTENBERG, por ter caminhado ao meu lado todo este tempo, por ter me amparado nos momentos de crise, por todo o amor e cuidados a mim dedicados, por ter me ajudado com seu talento e inteligência na elaboração deste texto.

- A minha filha MARÍLIA EL-KADDOUM TRAJTENBERG, por seu constante interesse e estímulo pelo meu trabalho, por compartilhar comigo o amor à Filosofia, à Ciência e às Artes, enfim, por ser esta pessoa maravilhosa, da qual muito me orgulho.

- A minha irmã LILIAN TRAJTENBERG, por sempre ter demonstrado interesse e admiração pelo meu trabalho, pelos seus constantes e renovados votos de sucesso, por ser esta pessoa tão querida, que a todos cativa com seu jeito de ser.

- Aos meus pais ROSA TRAJTENBERG e SALOMÃO TRAJTENBERG (in memorian) dos quais herdei o amor à Filosofia, à Ciência e à Música, pilares fundamentais da minha formação intelectual e ética, e que me capacitaram plenamente para o exercício de minhas atuais atividades profissionais.

- A GRAÇA ALMEIDA, por disponibilisar seus conhecimentos da língua inglesa, colaborando para a perfeita tradução de importantes trechos desta dissertassão.

- Ao CNPQ pelo auxílio financeiro concedido.

Resumo

As formas assintóticas gerais das soluções que tendem assintoticamente aos modelos abertos de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) são deduzidas, aplicando a derivada de Lie ao longo dos vetores de Killing de FLRW às soluções tipo Tolman assintoticamente FLRW, abrangendo os casos k = 0 e k = -1. Partindo destas formas assintóticas gerais e usando o formalismo hamiltoniano da gravitação para espaços abertos, é proposta uma expressão para a hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW aberto, mostrando que tal hamiltoniana contém termos de superfície específicos que não podem ser descartados. A obtenção desta hamiltoniana também permitirá definir o conjunto degenerado de soluções cosmológicas assintoticamente FLRW aberto cuja energia é a mesma do espaço de referência de FLRW, e que tem as soluções tipo Tolman assintoticamente FLRW aberto como um de seus elementos. A energia das soluções assintoticamente FLRW aberto, em especial aquelas do tipo Tolman, com respeito aos espaços de fundo definidos pelas soluções abertas de FLRW é calculada em pelo menos dois importantes formalismos conhecidos na literatura, como os formalismos de Deser, Grishchuk, Petrov e Popova (DGPP) e o formalismo de Brown e York, onde os resultados obtidos são comparados e analisados.

Abstract

The general asymptotic forms of the solutions that tend asymptotically to the open models of Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetimes are deduced applying the Lie derivative towards of the Killing vectors of FLRW to the asymptotically FLRW Tolman solutions comprehending the cases k = 0 and k = -1. From these general asymptotic forms and using the hamiltonian formalism of the gravitation for open spaces, an expression for the hamiltonian of the asymptotically FLRW spacetimes is proposal, showing that such hamiltonian contains specific surface terms that cannot be discarded. This hamiltonian also will allow to define the degenerate set of cosmological asymptotically open FLRW solutions whose energy is the same one of the reference space , which has the the asymptotically FLRW Tolman type solutions as one of its elements. The energy of the asymptotically FLRW models with respect to the reference space defined by the FLRW soluctions, in special those of the Tolman type, is calculed in at last two important formalisms know in the literature, as the DGPP formalism and the Brown-York formalism, where the gotten results are compared and analyzed.

Índice

1 INTRODUÇÃO

Das interações fundamentais conhecidas, a gravitação se destaca pelas complexidades inerentes à definição de sua propriedade física básica, qual seja, a quantidade local de massa/energia contida no campo gravitacional que, junto com a matéria, contribui de forma não despresível para a massa/energia total em cada ponto de um dado sistema gravitacional relativístico. Estas complexidades provém de diversos fatores, dentre os quais pode-se citar desde a invariância exigida com respeito às leis de conservação e a devida consistência com o princípio de equivalência até a questão referente ao grau extremo de não linearidade que caracteriza a interação gravitacional, a qual pode ser descrita como um processo auto-interativo onde o campo gravitacional atua como fonte de si mesmo.

Com efeito, o princípio de equivalência assegura que o observador em queda livre no campo é um obsevador inercial para o qual o campo gravitacional é localmente nulo. Alguns autores, dentre os quais pode-se citar Einstein, Tolman, Landau e Lifchitz,[1] [2] [3] entre outros, interpretaram esta anulação local do campo gravitacional como uma impossibilidade de se atribuir à densidade local de massa/energia contida no campo gravitacional um significado físico absoluto independente do observador, ou seja, do sistema de coordenadas adotado. Assim, para estes autores, ao contrário da matéria, em princípio, a densidade de massa/energia gravitacional não pode ser expressa pela componente de um tensor uma vez que, neste caso, sendo nula num sistema de coordenadas, será nula em qualquer outro sistema de coordenadas e não apenas num sistema local inercial. Desta forma de acordo com tais autores, é possível definir apenas o que se convencionou chamar de Pseudotensor momento - energia gravitacional t^{μ}_{ν}, quantidade não tensorial que, consistentemente com o princípio de equivalência, pode ser anulado num dado ponto do espaço-tempo por uma transformação de coordenadas adequada. Neste aspecto a interação gravitacional difere radicalmente de todas as outras interações conhecidas, nas quais um tensor momento - energia local pode sempre ser definido, o que introduz uma dificuldade a ser considerada em qualquer modelo que proponha um tratamento unificado das interações.

A única grandeza para a qual, neste formalismo pseudotensorial, é possível em certos casos atribuir um significado físico absoluto, é a massa/energia global macroscópica de um dado sistema. Tal grandeza é definida usualmente pela integral de volume em todo o espaço da densidade total de energia τ_0^0, uma densidade pseudoescalar que pode ser calculada em função do campo e suas derivadas e que inclui a contribuição da matéria e do campo gravitacional, este último propriamente dito conferindo o caráter pseudoescalar da grandeza. Por considerações físicas, a massa/energia global de um sistema, tal como foi definida, deve coincidir com a massa gravitacional total m experimentada por uma partícula teste que realiza uma geodésica no infinito, isto é, numa região suficientemente afastada do sistema, onde supõe-se que o campo gravitacional é Newtoniano e o espaço é plano. Neste sentido, a massa/energia global representa uma propriedade física que caracteriza a interação gravitacional entre o sistema e a partícula teste e não pode depender do observador. De fato, em geral, τ_ν^μ pode ser expresso como uma divergência de um superpotencial gravitacional $S_\nu^{\mu\alpha}$ de acordo com $\tau_\nu^\mu = S_{\nu\,,\,\alpha}^{\mu\alpha}$ e, pela aplicação do teorema de Gauss, sua integral de volume pode sempre ser reduzida a uma integral do superpotencial sobre uma superfície no infinito que engloba todo o sistema, de modo que seu valor depende apenas dos valores assintóticos do campo e suas derivadas. Desta forma, em acordo com a interpretação física que confere à massa/energia global um significado absoluto, dois sistemas de coordenadas distintos que têm o mesmo comportamento plano assintótico conduzirão ao mesmo valor para a massa total do sistema. Por outro lado, esta dependência entre a massa total e os valores assintóticos do campo restringe, via de regra, a aplicação do formalismo pseudotensorial àqueles sistemas de coordenadas nos quais a métrica e suas derivadas não divirjam no infinito, como os sistemas assintoticamente cartesianos, o que constitui uma restrição incompatível, no âmbito da Relatividade Geral, com um significado físico realmente independente de coordenadas.

Embora o formalismo pseudotensorial tenha pretendido estabelecer a impossibilidade de se atribuir à densidade de massa/energia gravitacional um significado físico absoluto, vários autores posteriores, dentre os quais pode-se citar Møller, Komar, Feymann, Deser, Grishchuk, Petrov, Popov,[4] [5] [6] [7] entre outros, num esforço crescente para dar à energia gravitacional um tratamento mais consistente, procuraram desenvolver métodos alternativos nos quais as ambiguidades inerentes ao formalismo pseudotensorial pudessem ser contornadas. Neste contexto, Moller [4] obtém uma expressão para a densidade de energia na forma de um escalar tridimensional, a qual é generalizada por Komar [5], ao considerar as cargas conservadas associadas à invariância da ação gravitacional com respeito às transformações gerais de coordenadas. No entanto, nem todas as cargas de Komar tem uma interpretação física imediata, não sendo possível em geral, na ausência de vetor de Killing tipo tempo, identificar a carga que corresponde à energia. Numa outra direção, Feyman, Deser, Grishchuk, Petrov e Popov [6] [7] introduzem um formalismo baseado na descrição da teoria de Einstein como uma teoria de campo de spin 2 $h^{\mu\nu}$ dotado de auto - interação que se propaga num espaço de fundo caracterizado pela métrica $\gamma_{\mu\nu}$. Aplicando esta decomposição do campo gravitacional à densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ de acordo com $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})$, estes autores contornaram o problema da não linearidade infinita da interação gravitacional, obtendo para as densidades de momento e energia gravitacional uma representação tensorial com respeito ao espaço de fundo, o que permite dar à densidade de massa/energia gravitacional um significado físico verdadeiramente independente de coordenadas. No entanto, o tensor momento-energia de Deser, Grishchuk, Petrov e Popov depende de calibre, podendo ser anulado por uma transformação deste tipo. Assim, as ambiguidades que caracterizam o cálculo da densidade de energia gravitacional e que no formalismo pseudotensorial estão relacionadas à dependência do pseudotensor com respeito ao sistema de coordenadas não são eliminadas nesta nova prescrição, mas reaparecem sob a forma de uma dependência de calibre do tensor momento-energia [17].

Mais recentemente, o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano da Gravitação possibilitou o aparecimento de novas e importantes formas de abordar o problema da energia gravitacional, indentificando-a com a Hamiltoniana gravitacional, seja calculando tal Hamiltoniana diretamente da Lagrangeana de Hilbert ou através da variação da ação gravitacional com respeito a certas condições de contorno específicas, como na teoria de Hamilton-Jacobi. A aplicação dos métodos Hamiltonianos ao cálculo da energia revelou a importância de se considerar explicitamente a liberdade que se tem na definição da ação gravitacional, a qual pode ser acrescida de termos de superfície sem que as equações de movimento sejam alteradas. Estes termos de superfície, que não desempenham nenhum papel relevante em modelos fechados, uma vez que neste caso a superfície que engloba todo o espaço tem área nula, de modo que todos os termos de superfície são igualmente nulos, mostram-se essenciais na obtenção da Hamiltoniana gravitacional que descreve os espaços abertos, já que agora tais termos não são necessariamente nulos e contribuem, em geral, para a Hamiltoniana. Desta forma, ao contrário do que ocorre em moddelos fechados, a Hamiltoniana gravitacional para espaços abertos não é identicamente nula, mesmo com as condições de vínculo satisfeitas, sendo a contribuição não nula correspondente aos termos de superfície, o que permite identificá-los com certas cargas, em especial, com a massa/energia do sistema gravitacional estudado. Uma característica comum aos métodos hamiltonianos aqui tratados é que a energia, representada pela hamiltoniana, não tem um significado absoluto, sendo sempre especificada com respeito a um certo espaço de fundo de referência convenientemente escolhido, tomado como nível zero de energia e que nunca pode ser eliminado, pois está relacionado à ambiguidade da hamiltoniana, a qual está sempre definida a menos de termos de superfície arbitrários. Tal característica contorna o problema que surge devido a possíveis contribuições divergentes provenientes do espaço de fundo de referência, esperando-se desta forma resultados finitos e bem definidos. Outro aspecto importante é que, ao identificar a Hamiltoniana com a energia do sistema, esta última fica definida como um invariante escalar tridimensional, e portanto independe das coordenadas espaciais adotadas.

Durante as últimas décadas o campo de aplicações dos formalismos Hamiltonianos ao cálculo da energia em sistemas gravitacionais tem se ampliado e diversificado, e sua consistência interna enquanto métodos de definição de energia tem sido testada em inúmeros casos [9] [10] [11] [12] [18], de modo que a-tualmente tais formalismos são cada vez mais adotados como métodos padrão em física teórica para cálculos em energia gravitacional. É neste sentido que o presente trabalho pretende contribuir, ao estender e aprofundar as aplicações dos métodos Hamiltonianos, que em geral fornecem resultados consistentes quando aplicados a espaços assintoticamente planos, aos casos de sistemas gravitacionais abertos cuja estrutura assintótica não é plana .

Assim, de acordo com a proposta desenvolvida para o presente trabalho, pretende-se examinar em detalhe a consistência interna de alguns métodos de definição de energia em sistemas gravitacionais, tais como o formalismo hamiltoniano para espaços abertos [8],a prescrição de Deser, Grishchuk, Petrov e Popova(DGPP) [6] [7] e o formalismo de Brown e York [9], no qual a hamiltoniana é definida de maneira análoga à teoria de Hamilton-Jacobi, estendendo sua aplicação ao caso dos espaços que tendem assintóticamente aos modelos abertos de Friedmann - Lamaître - Robertson - Walker (FLRW), tomando como espaço de referência as próprias soluções abertas de FLRW. Estaremos interessados principalmente em aspectos relacionados a unicidade dos resultados obtidos bem como a possível ocorrência de contribuições divergentes que não podem ser eliminadas, revelando desta forma possíveis inconsistências que não aparecem em outros casos conhecidos na literatura, como as soluções assintoticamente planas ou assintoticamente anti-de Sitter [8] [10] [11]. Em especial, pretende-se deduzir a hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW aberto, isto é, a hamiltoniana que conduz às equações cosmológicas corretas para esta importante classe de soluções. Por outra parte, uma vez obtida tal hamiltoniana, será possível classificar as soluções assintoticamente FLRW aberto conforme suas energias com respeito ao espaço de referência de FLRW, estabelecendo desta forma as condições que devem obedecer o conjunto degenerado de soluções cosmológicas assintoticamente FLRW aberto cujos níveis de energia são iguais ao do espaço de referência. Outro objetivo importante é verificar em que medida o formalismo de Brown e York é aplicável à modelos sem vetor de Killing tipo tempo, como é o caso das soluções assintoticamente FLRW .

Para cumprir os objetivos propostos o presente trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No capítulo I, dentro de uma abordagem bastante geral, o formalismo hamiltoniano da gravitação é desenvolvido e os problemas referentes à generalização deste formalismo para espaços abertos são minuciosamente examinados, mostrando que a inclusão de certos termos de superfície na hamiltoniana é uma condição essencial para que as derivadas funcionais da hamiltoniana de espaços abertos possam ser definidas e, consequentemente, para que as equações de movimento possam ser estabelecidas. Partindo da hamiltoniana para espaços fechados, tais termos de superfície serão exibidos no sistema de coordenadas típico do formalismo 3 + 1, onde serão consideradas as contribuições do campo gravitacional e do fluido de matéria. Uma definição consistente de energia para sistemas gravitacionais assintoticamente planos pode ser obtida considerando a parte não nula da hamiltoniana correspondente aos termos de superfície.

No capítulo II serão deduzidas as formas assintóticas gerais das soluções assintóticamente a FLRW aberto, onde serão considerados os casos de curvatura nula (k = 0) e negativa (k = -1). Para tal, serão estabelecidas primeiramente as formas assintóticas particulares das soluções tipo Tolman que tendem assintoticamente a FLRW aberto. Em seguida, partindo destas formas assintóticas particulares e usando um procedimento geral que será detalhadamente descrito, as formas assintóticas gerais requeridas são obtidas.

No capítulo III, usando as formas assintóticas gerais estabelecidas anteriormente, a hamiltoniana das soluções assintóticamente FLRW aberto é exibida, abrangendo os csos k = 0 e k = -1. Serão descritas em detalhes as manipulações algébricas que conduziram ao resultado obtido, o qual constitui um dos objetivos centrais da presente dissertação. Uma vez dada tal hamiltoniana, será possível obter as condiçoes que definem o conjunto degenerado de soluções cosmológicas assintoticamente FLRW aberto cuja energia é a mesma do espaço de referência de FLRW, permitindo identificar, dentre as soluções assintóticamente FLRW aberto, aquelas que ocupam o nível fundamental correspondente ao estado de menor energia, ou seja, ao nível zero de energia. Em particular verifica-se que as soluções tipo Tolman assintóticamente FLRW aberto pertencem a esta categoria. Serão também obtidas as cargas conservadas correspondentes às isometrias das soluções abertas de FLRW.

No capítulo IV será descrito em detalhes um novo e importante formalismo introduzido por Derser [6] e posteriormente generalizado por Grishchuk, Petrov e Popova [7], no qual, em lugar da interpretação geométrica estabelecida pela Relatividade Geral, a gravitação é tratada como numa teoria de campo usual, onde o campo gravitacional é representado por um campo tensorial que se propaga num espaço de fundo matemático cuja geometria é previamente fixada, e portanto independente do campo gravitacional, e que obedece a equações de campo específicas. Através destas equações de campo é possível verificar de forma explícita como se dá o complexo processo de auto-interação do campo gravitacional consigo mesmo, o que permite definir o tensor momento-energia gravitacional, um verdadeiro tensor com respeito ao espaço de fundo, mas que depende de calibre, como foi mencionado anteriormente. Este tensor momento-energia será usado na deteminação da energia total dos sistemas gravitacionais estudados nos capítulos anteriores, como as soluções assintoticamente planas e, generalizando o formalis-mo para espaços de fundo arbitrários, as soluções assintoticamente FLRW aberto, tomando como espaço de fundo as respectivas soluções assintóticas. Os resultados obtidos serão confrontados com aqueles fornecidos para os mesmos casos pelos diversos métodos aqui tratados, e com aqueles que resultam da aplicação do formalismo DGPP à soluções com diferentes estruturas assintóticas.

No capítulo V o cálculo da energia das soluções tipo Tolman assintóticamente FLRW aberto é efetuado usando um formalismo quase local recentemente introduzido por Brown e York [9] no qual a hamiltoniana é definida pela variação da ação gravitacional com respeito a certas condições de contorno, de modo análogo à teoria de Hamilton - Jacobi. A dedução da fórmula de Brown e York será feita gradativamente, enfatizando em cada etapa como a definição da energia quase local corresponde a uma genaralização relativística dos conceitos usados na teoria clássica de Hamilton - Jacobi. Os resultados serão confrontados com aqueles obtidos para o mesmo caso usando o formalismo hamiltoniano para espaços abertos e com os resultados relativos à aplicação do método de Brown e York a outros casos de modelos abertos conhecidos na literatura, como os espaços assintoticamente planos e assintoticamente anti - de Sitter[9] [11]. O cálculo permitirá verificar a ocorrência ou não de discrepâncias quando o método de Brown e York é aplicado a soluções que, ao contrário das soluções anteriormente citadas, não têm vetores de Killing tipo tempo.

A última parte conterá alguns comentários e conclusões acerca dos resultados obtidos, procurando atribuir aos mesmos uma interpretação física consistente e propondo novas aplicações que podem levar a resultados não triviais.

2 A Hamiltoniana de Sistemas Gravitacionais Abertos

Em qualquer teoria dinâmica, como as teorias hamiltonianas, é essencial que o parâmetro t que descreve a evolução temporal dos campos possa ser distinguido de todas as outras variáveis, tais como as coordenadas espaciais x^i ou mesmo as coordenadas canônicas que descrevem o sistema. De fato, somente após ter identificado de forma unívoca a variável que faz o papel do tempo, as equações dinâmicas podem ser estabelecidas, relacionando a taxa de variação dos campos respeito a tal parâmetro temporal com as derivadas funcionais da hamiltoniana.

No caso específico dos sistemas gravitacionais, é possível separar o tempo das outras variáveis aplicando-se o formalismo 3 + 1 no qual o espaço-tempo da Relatividade é decomposto em espaço e tempo, ou seja, quando a totalidade espaço-temporal é fatiada ou, como se diz, folheada por um conjunto de hipersuperfícies espaciais de simultaneidade $t = c^{te}$, onde t é um parâmetro temporal definido arbitrariamente, assim como as coordenadas espaciais x^i definidas em cada hipersuperfície. Observa-se que, neste formalismo 3 + 1, a teoria é covariante apenas sob transformações puramente espaciais de coordenadas, isto é, transformações que não envolvem a varável temporal t, de modo que tal parâmetro adquire na teoria um papel nitidamente distinto das variáveis espaciais. Uma escolha adequada para o sistema de coordenadas no formalismo 3 + 1 é aquela na qual o observador $x^i = C^{te}$ comovente com as hipersuperfícies $t = c^{te}$ é ortogonal às mesmas pois neste caso, como se pode verificar, $g_{0i} = 0$. Pode-se simplificar ainda mais escolhendo um referencial sincrônico no qual $g_{00} = -1$ de modo que a coordenada temporal é definida pelo tempo próprio do observador. No entanto, designando por X^α as coordenadas deste observador ortogonal e sincrônico observa-se que, para uma folheação arbitrária, na qual as hipersuperfícies $t(X^\alpha) = c^{te}$ são definidas como funções arbitrárias de X^α, a linha de universo do observador comovente não coincide necessariamente com a normal às hipersuperfícies $t = c^{te}$. Assim, denotando as equações das hipersuperfícies $t = c^{te}$ na forma paramétrica de acordo com $\{X^\alpha(x^i, t)\}$, onde x^i são coordenadas espaciais definidas arbitrariamente sobre as hipersuperfícies pelas equações paramétricas, pode-se afirmar que o vetor deformação $\dot{X}^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t}$ tangente à linha de universo $x^i = C^{te}$ do observador comovente tem, em geral, componentes ao longo do unitário normal u^α à hipersuperfície $t = c^{te}$ e ao longo de seus vetores tangentes $X^\alpha_{,i}$ de modo que:

$$\dot{X}^\alpha = N u^\alpha + N^i X^\alpha_{,i} \tag{1}$$

onde as funções N e N^i chamadas respectivamente lapso e deslocamento designam as componentes de $\dot{X}^\alpha$. Interpretando as equações paramétricas $\{X^\alpha(x^i, t)\}$ como uma relação entre as coordenadas X^α e as coordenandas arbitrarias (x^i, t) e usando as fórmulas usuais de transformação de tensores pode-se exprmir o tensor métrico em termos destes parâmetros arbitrários obtendo-se:

$$\begin{aligned} g'_{ik} &= X^\alpha_{,i} X^\beta_{,k} g_{\alpha\beta} \\ g'_{i0} &= X^\alpha_{,i} \dot{X}^\beta g_{\alpha\beta} = N_i \\ g'_{00} &= \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta g_{\alpha\beta} = -N^2 + N_i N^i, \end{aligned} \tag{2}$$

já que por definição, $u_\alpha u^\alpha = -1$ e $u_\alpha X^\alpha_{,i} = 0$, sendo os índices espaciais abaixados ou levantados pela trimétrica g'_{ik}. Desta forma, em termos das coordenadas arbitrárias (x^i, t) que caracterizam a folheação a que se submeteu o espaço - tempo, o tensor métrico pode ser expresso como:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ik}(N^i dt + dx^i)(N^k dt + dx^k). \tag{3}$$

onde agora omitiu-se a linha em g_{ik}.

Partindo desta métrica, o escalar de curvatura R pode ser calculado em termos das funções N , N_k, g_{ik} e suas derivadas resultando para a ação de Hilbert, a menos de divergências totais, a expressão:

$$S = \int_M \pounds dt = \int_M N\sqrt{g}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R) dx^3 dt. \tag{4}$$

Nesta última expressão $g = \det g_{ik}$ e $K = g_{ij}K^{ij}$, onde K_{ij} são as componentes espaciais do tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ que determina o modo pelo qual as hipresuperfícies $t = C^{te}$ estão curvadas com respeito ao espaço-tempo quadrimensional que as envolve. Tal curvatura extrínseca pode ser completamente caracterizada pela variação $u_{\alpha\|\beta}$ do unitário normal à hipresuperfície quando se desloca através do transporte paralelo ao longo de seus vetores tangentes, ou seja, projetando esta variação sobre a hipresuperfície. Desta forma $K_{\mu\nu}$ pode ser definido como:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} u_{(\alpha\|\beta)} \tag{5}$$

onde $h^{\alpha}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu} + u^{\alpha} u_{\mu}$ é o projetor sobre as hipresuperfícies $t = C^{te}$. Partindo desta expressão, $K_{\mu\nu}$ pode ser calculado usando a solução (3) do formalismo 3 + 1 e notando que o unitário u_{α}, definido pela condição de normalização $g^{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} = -1$, é dado por $u_{\alpha} = -N\delta^{0}_{\alpha}$. Assim, a definição (5) leva ao resultado:

$$K_{ij} = -u_{(i\|j)} = -N^{4}\Gamma^{0}_{ij} = -\frac{1}{2N}[\dot{g}_{ij} - N_{(i;j)}], \tag{6}$$

para as componentes espaciais de $K_{\mu\nu}$, onde o símbolo (;) designa a derivada covariante com respeito à trimétrica g_{ik}, o ponto a derivada com respeito ao parâmetro t e usou-se a relação Riemaniana entre as conexões ${}^{4}\Gamma^{0}_{ij}$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dada por:

$${}^{4}\Gamma^{0}_{ij} = 1/2 g^{o\lambda}(g_{\lambda i\ ,j} + g_{\lambda j\ ,i} - g_{ij\ ,\lambda}). \tag{7}$$

Da mesma forma, a quantidade ${}^{3}R = g^{ik}\ {}^{3}R^{l}_{ilk}$ é o escalar de curvatura das hipresuperfícies cujo tensor de curvatura é ${}^{3}R_{aibk}$, sendo a ação definida numa certa região M do espaço-tempo.

De posse da densidade de lagrangeana $\pounds$, as densidades de momento P, P^{i} e π^{ij} canonicamente conjugados às coordenadas N, N_{i} e g_{ij} que designam o tensor métrico podem ser definidas de forma habitual em termos das derivadas funcionais de $\pounds$ resultando:

$$\begin{aligned} P &\equiv \tfrac{\delta \pounds}{\delta \dot{N}} = 0, \\ P^{i} &\equiv \tfrac{\delta \pounds}{\delta \dot{N}_{i}} = 0, \\ \pi^{ij} &\equiv \tfrac{\delta \pounds}{\delta \dot{g}_{ij}} = \sqrt{g}(g^{ij}K - K^{ij}). \end{aligned} \tag{8}$$

Na última equação usou-se a relação (6) que permite expressar K^{ij} em função de $\dot{g}_{ij}$. Surgem, desta forma, os vínculos primários $P = 0$ e $P^{i} = 0$. Construindo em seguida a densidade de hamiltoniana $\mathcal{H}$ como usualmente obtem-se, omitindo as divergências totais:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{g}_{ij} - \pounds = N_{\mu}H^{\mu}, \tag{9}$$

onde $N_\mu = (N, N_i)$ e H^μ é dado por:

$$
\begin{aligned}
H^0 &= G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - \sqrt{g}\ \ {}^3R \\
H^i &= -2\pi^{ik}_{;k}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

com $G_{abcd} = \frac{1}{2}g^{-1/2}[g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd}]$. Neste cálculo usou-se as equações (6) e (8) que permitem exprimir $\dot{g}_{ij}$ e K^{ij} em termos das variáveis canônicas g_{ij} e π^{ij}. A condição de conservação dos vínculos primários resulta nos vínculos secundários $H^0 = 0$ e $H^i = 0$ que por sua vez se conservam identicamente de modo que a hamiltoniana gravitacional, tal como foi calculada, é identicamente nula, resultado típico de teorias invariantes por reparametrização temporal. Da mesma forma, as funções N e N_i podem ser reconhecidas como multiplicadores de lagrange e corresdpondem, na linguagem da Relatividade Geral, à arbitrariedade na escolha das componentes $g_{0\mu}$ do tensor métrico. Observa-se também que, assim como as componentes $G^\mu_0 = 0$ das equações de Enstein no vácuo, os vínculos $H^\mu = 0$ não contêm as derivadas segundas com respeito ao tempo da trimétrica g_{ik}. De fato, usando a solução 3 + 1 e a definição de π^{ij} dadas em (3) e (8), verifica-se que os vínculos (10) podem ser obtidos de $G^\mu_0 = 0$, quando estas últimas relações são expressas nas variáveis canônicas definidas no formalismo 3+1.

A fim de estabelecer as equações de hamilton para este sistema, as quais devem conduzir às equações de Einstein, é necessário calcular as variações da hamiltoniana gravitacional H_G dada agora por

$$
H_G = \int \mathcal{H}\ d^3x = \int N_\mu H^\mu d^3x \tag{11}
$$

com respeito às variáveis canônicas g_{ij} e π^{ij} que, como pode ser deduzido da discussão anterior, constituem as verdadeiras variáveis dinâmicas da teoria. Uma condição essencial para que estas variações possam ser definidas e, portanto, para que se possa estabelecer as equações de movimento na forma hamiltoniana usual,

$$
\begin{aligned}
\dot{g}_{ij} &= [g_{ij}, H] = \tfrac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \\
\dot{\pi}^{ij} &= [\pi^{ij}, H] = -\tfrac{\delta H}{\delta g_{ij}},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

determina que a variação δH da hamiltoniana gerada por variações arbitrárias no espaço de fase possa ser expressa na forma de uma diferencial funcional exata com respeito às variáveis canônicas de acordo com

$$\delta H = \int (A^{ij}\delta g_{ij} + B_{ij}\delta\pi^{ij})d^3x \tag{13}$$

onde, por definição, os coeficientes A^{ij} e B_{ij} são as derivadas funcionais da hamiltoniana com respeito às variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \tfrac{\delta H}{\delta g_{ij}}, \\ B_{ij} &= \tfrac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Examinando as expressões que definem os vínculos H^0 e H^i pode-se notar a presença de termos que dependem não só de g_{ij} e π^{ij} mas também de suas derivadas até 2^a ordem. Consequentemente, para o cálculo das derivadas funcionais é necessário integrar por partes todos aqueles termos que contém as variações das derivadas dos campos dando origem assim a divergências totais que podem ser transformadas em integrais de superfície. Desta forma, considerando a hamiltoniana gravitacional (11) resulta que:

$$\begin{aligned} &\delta H_G = \textstyle\int (A^{ij}\delta g_{ij} + B_{ij}\delta\pi^{ij})d^3x \\ &-\tfrac{1}{16\pi}\textstyle\oint_B d^2S_l G^{ijkl}(N\delta g_{ij\|k} - N_{,k}\delta g_{ij}) \\ &-\textstyle\oint_B d^2S_l[2N_k\delta\pi^{kl} + (2N^k\pi^{jl} - N^l\pi^{jk})\delta g_{jk}] \end{aligned} \tag{15}$$

onde $d^2S_l = \frac{1}{2!}\epsilon_{ljk}dx^j \wedge dx^k$ é o elemento de área de uma superfície B no infinito que envolve todo o espaço, ϵ_{ljk} o tensor tridimensional completamente antisimétrico e $G^{ijkl} = 1/2g^{1/2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} - 2g^{ij}g^{kl})$, é a inversa do fator G_{ijkl} definido em (10), ou seja, $G^{abkl}G_{abcd} = \delta^{kl}_{cd}$. Se os termos de superfície são identicamente ou assintoticamente nulos, δH_G satisfaz à condição (13) e suas derivadas funcionais podem ser definidas. Consequentemente as equações de Hamilton podem ser estabelecidas, resultando:

$$\dot{g}_{ij} = B_{ij} \quad , \dot{\pi}^{ij} = -A^{ij} \tag{16}$$

onde os coeficientes A^{ij} e B_{ij}, que representam as derivadas funcionais da hamiltoniana, são dados por:

$$
\begin{aligned}
A^{ij} &= Ng^{1/2}[{}^3R^{ij} - 1/2\ \ {}^3Rg^{ij}] - 1/2Ng^{-1/2}g^{ij}[\pi_{ab}\pi^{ab} - 1/2\pi^2]+ \\
& 2Ng^{-1/2}[\pi^{ik}\pi^{j}_{k} - 1/2\pi\pi^{ij}] - g^{1/2}[N^{;i\,;j} - g^{ij}N^{;a}_{,a}] \\
& +[N^k\pi^{ij}]_{;\,k} - 2\pi^{k(i}N^{j)}_{;\,k}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
B_{ij} = Ng^{-1/2}[2\pi_{ij} - g_{ij}\pi] + N_{(i\,;j)},
$$

com $\pi = g_{ab}\pi^{ab}$, sendo os índices i e j simetrisados, como indica o parênteses . De acordo com este último resultado, a primeira das equações de Hamilton (16), que exprime as velocidades generalizadas $\dot{g}_{ij}$ em função dos momentos π^{ik}, é equivalente à definição (6) da curvatura extrínseca, o que pode ser verificado substituindo-se a relação (8) entre π^{ik} e K^{ik}. Já a segunda equação, assim como as componentes $G^i_k = 0$ das equações de Enstein no vácuo, contem as derivadas segundas com respeito ao tempo da trimétrica g_{ik}. De fato, usando a solução 3 + 1 e a definição de π^{ij} dadas em (3) e (8), verifica-se que esta equação pode ser obtida de $G^i_j = 0$, quando estas últimas relações são expressas nas variáveis canônicas definidas no formalismo 3+1. Desta forma, pelo menos quando os termos de superfície podem ser descartados, as equações de Hamilton (16) junto com os vínculos $H^\mu = 0$ definidos em (10) são equivalentes ao conjunto das dez equações de Enstein no vácuo, $G^\nu_\mu = 0$.

Se acrescentarmos a contribuição do fluido de matéria irrotacional à hamiltoniana, outros termos de superfície podem surgir. Para efeito de cálculo, consideremos um fluido de poeira constituído de patículas de massa m cujo movimento é dado pela quadrivelocidade $\eta_\mu(x)$. Sendo um quadrivetor irrotacional, η_μ pode ser definido a partir de um potencial χ de acordo com:

$$
\eta_\mu = -\frac{\chi_{,\mu}}{m}, \tag{18}
$$

A lagrangeana que representa este tipo de fluido é conhecida na literatura sendo dada por:

$$
L_M = -\sqrt{-{}^4g}\frac{n}{2m}\Big(m^2 + \chi_{,\mu}\chi^{,\mu}\Big), \tag{19}
$$

onde n é a densidade de patículas do fluido e ${}^4g = \det g_{\mu\nu} = N^2 g$. De fato, considerando a variação desta lagrangeana com respeito às coordenadas n, χ

e $g^{\mu\nu}$ que descrevem o fluido e seu campo gravitacional, encontra-se:

$$\frac{\delta L_M}{\delta n} = 0 \Rightarrow m^2 + \chi_{,\mu}\chi^{,\mu} = 0,$$
$$\frac{\delta L_M}{\delta \chi} = 0 \Rightarrow [n\eta^{\mu}]_{;\mu} = 0 \tag{20}$$
$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-^4 g}}\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} = nm\eta_{\mu}\eta_{\nu}$$

A primeira equação pode ser identificada com a condição de normalização da quadrivelocidade $\eta_{\mu}\eta^{\mu} = -1$. Como se pode observar, esta condição torna a lagrangeana identicamente nula se χ é uma solução das equações de movimento. A segunda equação expressa a lei de continuidade, associada à conservação do número de patículas do fluido. Estas são propriedades gerais válidas para qualquer fluido. Entretanto, a terceira equação fornece para o tensor momento - energia $T_{\mu\nu} = \rho\eta_{\mu}\eta_{\nu}$ onde $\rho = nm$ é a densidade do fluido, o que corresponde precisamente ao tensor momento - energia de um fluido de poeira de densidade ρ como se queria demonstrar. O momento π^{χ} canonicamente conjugado a χ pode ser definido como usualmente, pela variação da lagrangeana com respeito a $\dot{\chi}$, resultando:

$$\pi^{\chi} = \frac{\delta L_M}{\delta \dot{\chi}} = \frac{ng^{1/2}}{Nm}\Big(\dot{\chi} - N^i\chi_{,i}\Big). \tag{21}$$

As derivadas temporais e espaciais de χ não são independentes, mas estão relacionadas pela condição de normalização da quadrivelocidade $\eta_{\mu}\eta^{\mu} = -1$. Usando este vínculo encontra-se :

$$\dot{\chi} = N^i\chi_{,i} + N(\chi_{,i}\chi^{,i} + m^2)^{1/2}. \tag{22}$$

Substituindo esta última relação em (21) obtem-se finalmente:

$$\pi^{\chi} = ng^{1/2}\Big(\frac{\chi_{,i}\chi^{,i}}{m^2} + 1\Big)^{1/2}. \tag{23}$$

A hamiltoniana H_M do fluido de poeira caracterizado pelo potencial χ pode ser calculada como usualmente a partir da lagrangeana L_M de acordo com $H_M = \pi^{\chi}\dot{\chi} - L_M$. Como foi demonstrado acima, de acordo com as equações de movimento, a lagrangeana L_M é identicamente nula, sendo $\dot{\chi}$ relacionado às suas derivadas espaciais $\chi_{,i}$ pela condição de normalização $\eta_{\alpha}\eta^{\alpha} = -1$ do unitário normal como em (22). Considerando estes resultados obtem-se para a hamiltoniana dos fluidos de poeira:

$$H_M = N^i \chi_{,i} \pi^\chi + N \pi^\chi [\chi_{,i} \chi^{,i} + m^2]^{1/2}. \tag{24}$$

Notando que, assim como a hamiltoniana gravitacional, H_M depende das derivadas dos campos, de sua variação com respeito a χ surgem os seguintes termos de superfície:

$$\begin{aligned} \delta H_M = & \int (A\delta\chi + B\delta\pi^\chi) d^3x + \oint_B d^2 S_l N \pi_\chi \chi^{,l} \delta\chi (m^2 + \chi_{,i}\chi^{,i})^{-1/2} \\ & + \oint_B d^2 S_l N^l \pi_\chi \delta\chi, \end{aligned} \tag{25}$$

onde os coeficientes A e B representam as derivadas de H_M com respeito às variáveis canônicas. Numa teoria completa envolvendo o campo gravitacional e a matéria, tais termos de superfície devem ser acrescentados a (15).

Assim, devido à presença dos termos de superfície, verifica-se que, em geral, as variações δH_G e δH_M das hamiltonianas gravitacional e de matéria tal como são usualmente definidas não satisfazem a condição anteriormente exigida segundo a qual a variação da hamiltoniana deve ser expressa na forma de uma diferencial funcional exata como em (13). Consequentemente, as derivadas funcionais das hamiltonianas dadas não podem ser definidas de modo que, partindo destas hamiltonianas, não é possível, em geral, estabelecer as equações de movimento, a não ser que os termos de superfície sejam todos identicamente ou assintoticamente nulos, como ocorre em modelos fechados. Desta forma, H deve ser modificada de algum modo para que, também no caso de modelos abertos, as equações de hamilton possam ser estabelecidas. De fato, em modelos fechados, ou seja, sem estrutura assintótica, os termos de superfície são identicamente nulos uma vez que neste caso a superfície B que engloba todo o espaço se reduz a um ponto de área nula, sendo $H = H_G + H_M$ a hamiltoniana correta, já que sua variação obedece à condição (13). Para espaços abertos, todavia, tais termos de superfície não se anulam necessariamente pois dependem de maneira crucial da estrutura assintótica dos campos e não podem, em geral, ser eliminados.

Uma vez que toda hamiltoniana está definida a menos de termos de superfície arbitrários, pode-se obter a hamiltoniana correta para modelos abertos definindo uma nova hamiltoniana estendida H_E que difere de H por certos termos de superfície cuja variação anule os termos de superfície que aparecem em (15) e (25) de modo que δH_E pode ser expressa na forma exigida,

$$\delta H_E = \int (A^{ij}\delta g_{ij} + B_{ij}\delta\pi^{ij})d^3x. \qquad (26)$$

Assim, definindo

$$\delta H_S = \int [(2N^a\pi^{bl} - N^l\pi^{ab} - N_{,c}G^{abcl})\delta g_{ab} + NG^{abcl}\delta g_{ab;c} + 2N_i\delta\pi^{il}]d^2s_l$$

$$- \oint_B d^2S_l N\pi_\chi \chi^{,l}\delta\chi(m^2 + \chi_{,i}\chi^{,i})^{-1/2} - \oint_B d^2S_l N^l \pi_\chi \delta\chi, \qquad (27)$$

e observando que δH_S satisfaz às condições requeridas ou seja, sua variação é igual e contrária aos termos de superfície gerados por H_G e H_M, pode-se estender o formalismo hamiltoniano para espaços abertos partindo da hamiltoniana

$$H_E = H + H_S \qquad (28)$$

onde H_S representa certos termos de superfície cuja variação é dada por (27). A hamiltoniana H_E se reduz a H para espaços fechados, uma vez que neste caso H_S é identicamente nulo. Para modelos abertos, todavia, nada pode ser afirmado " a priore ", sendo necessário calcular H_S em cada caso a partir das condições assintóticas dos campos estabelecidas sobre a superfície em que H_S é definida. Outro aspecto importante é que tal procedimento, a saber, a adição de termos de superfície à hamiltoniana, ainda que não altere as equações de movimento, modifica o valor da hamiltoniana, que deixa de ser identicamente nula se $H_S \neq 0$ mesmo na superfície de vínculo que contem as trajetórias clássicas fisicamente possíveis para os sistemas gravitacionais.

Uma vez que a hamiltoniana, em geral, representa a energia do sistema, pode-se obter uma definição consistente de energia gravitacional em espaços abertos identificando-a com a parte não nula da hamiltoniana correspondente aos termos de superfície. Para examinar a validade desta definição de energia consideremos a forma assintótica assumida por qualquer solução assintoticamente plana em coordenadas assintoticamente cartesianas:

$$dS^2_{r\to\infty} = -(1 - \frac{m}{8\pi r})dt^2 + (\delta_{ik} + \frac{m}{8\pi}\frac{x_i x_k}{r^3})dx^i dx^k \qquad (29)$$

onde $r^2 = \delta_{ik}x^i x^k$ e m é o parâmetro que caracteriza a solução de Schwarzschild, o qual pode ser interpretado como a massa gravitacional total experimentada por uma partícula teste que realiza uma geodésica no infinito sob a ação deste campo e que deve coincidir com a massa total contida no interior de uma superfície no infinito que engloba todo o espaço. Como se pode notar de (15), o conjunto completo de condições assintóticas envolve, além de (29), as formas assintóticas de π^{ik} e das funções N e N^i. Para as soluções assintoticamente planas estas condições assintóticas são dadas por [8]:

$$\begin{aligned} &\pi^{ik} \sim r^{-2} \\ &N \sim 1 - O(r^{-1}) \\ &N^i \sim r^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Com estas formas assintóticas gerais, o único termo de superfície em (15) que não é identicamente ou assintoticamente nulo é aquele dado por:

$$S = -\oint_B N G^{abcl} \delta g_{ab\|c} d^2 s_l, \tag{31}$$

onde o símbolo $\|$ designa a derivada covariante com respeito às conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ tal como expressas no sistema de coordenadas assintoticamente cartesiano definido em (29). Ainda de acordo com as mesmas condições assintóticas, verifica-se desenvolvendo a expressão acima que os termos que contêm as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ bem como as pertubações ΔG^{abcl} do fator G^{abcl} com respeito ao seu valor constante $\overset{\circ}{G}{}^{abcl}$ no espaço de fundo plano não sobrevivem, sendo assinto-ticamente nulos, de forma que, neste sistema de coordenadas assintoticamente cartesiano, S se reduz a:

$$S = -\oint_B \overset{\circ}{G}{}^{abcl} \delta g_{ab,c} d^2 s_l. \tag{32}$$

onde agora a derivada covariante foi substituida pela derivada simples. Caso estivéssemos considerando um sistema de coordenadas arbtrário, a vírgula deveria ser substituida pelo ponto e vírgula, que denota a derivada covariante com respeito ao espaço de fundo. Usando a definição de $\overset{\circ}{G}{}^{abcl}$ ainda se pode escrever:

$$S = -\oint_B \delta^{ik}(\delta g_{il,k} - \delta g_{ik,l}) d^2 s^l = -\delta \oint_B \delta^{ik}(g_{il,k} - g_{ik,l}) d^2 s^l. \tag{33}$$

Este termo é de ordem zero, portanto contribui com uma quantidade finita e não pode ser descartado. Consequentemente, de acordo com o procedimento geral adotado no cálculo da hamiltoniana de espaços abertos, a hamiltoniana das soluções abertas assintoticamente planas é dada por:

$$H_E = H + E \tag{34}$$

onde E é um termo de superfície cuja variação é igual e contrária a da hamiltoniana H sendo dado, de acordo com (33), por:

$$E = \oint_B \delta^{ik}(g_{il,k} - g_{ik,l})d^2s^l. \tag{35}$$

Como se pode verificar, a adição deste termo de superfície assegura que a variação δH_E da nova hamiltoniana é uma diferencial funcional exata das variáveis canônicas, tal como expresso pela condição (13). Substituindo a forma assintótica (29) na última expressão obtem-se finalmente o importante resultado $H_E = E = m$. Observa-se que, de acordo com (35), a qual é válida em coordenadas cartesianas, para o espaço plano, $H_E = E = 0$. Desta forma, o método hamiltoniano fornece a energia da solução assintótica dada com respeito ao seu próprio espaço assintótico tomado como nível de referência zero de energia.

Fica demonstrado desta forma que, pelo menos para espaços assintoticamente planos, é possível identificar os termos de superfície não nulos da hamiltoniana de espaços abertos com a massa/energia total do sistema. Seria interessante prosseguir nesta investigação estendendo a aplicação do método hamiltoniano a soluções abertas não assintoticamente planas, como já foi feito para as soluções assintoticamente anti - de Sitter [10] a qual, no conjunto de soluções das equações de Einstein com constante cosmológica negativa, desempenha um papel análogo à solução plana para $\Lambda = 0$, pois contem o maior número de simetrias de sua classe de soluções. Na presente dissertação estaremos interessados em aplicar o formalismo hamiltoniano às soluções cuja estrutura assintotica são os espaços abertos de FLRW, determinando suas energias com respeito às soluções de fundo de FLRW bem como a hamiltoniana que representa esta importante classe de soluções, o que será tratado nas próximas seções.

3 Formas Assintóticas Gerais das Soluções que Tendem a FLRW Aberto

3.1 As Soluções de Tolman Assintoticamente FLRW Aberto

O objetivo deste capítulo é estabelecer as condições assintóticas mais gerais possíveis para uma importante classe de soluções cosmológicas, a saber, as soluções que tendem assintoticamente aos modelos abertos de Friedmann - Lamâitre - Robertson - Walker, aqui designados por FLRW, os quais são considerados modelos padrão em Cosmologia. Como foi visto no capítulo anterior, onde se discutiu o formalismo hamiltoniano para espaços abertos, tais formas assintóticas gerais serão essenciais na obtenção da hamiltoniana que representa esta importante classe de soluções, o que constitui um dos objetivos centrais da presente Dissertação .

Para determinação das referidas formas assintóticas gerais pode-se partir de uma classe conhecida de soluções cosmológicas que tendem assintoticamente a FLRW aberto, calculando-se as formas assintóticas particulares destas soluções. Em seguida, considerando que qualquer variação na forma funcional de um campo tensorial, com respeito a um dado sistema de coordenadas, que represente uma solução possível das equações de movimento é expressa pela derivada de Lie deste campo ao longo do descriptor $\varepsilon^{\mu}(x)$, característico de cada variação, e que a classe de soluções estudada tem uma estrutura assintótica definida - as soluções abertas de FLRW - pode-se obter a forma funcional geral das soluções assintoticamente FLRW na região assintótica aplicando à solução assintoticamente FLRW particular escolhida - e portanto à sua forma assintótica - a derivada de Lie ao longo dos vetores de Killing $\vec{\zeta}_{ab}$ correspondentes às isometrias das soluções abertas de FLRW. De fato, atuando ao longo dos vetores de Killing $\vec{\zeta}_{ab}$ a derivada de Lie mapeia a solução particular $g_{\mu\nu}(x)$ numa nova forma funcional geral $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \pounds_{\vec{\zeta}_{ab}} g_{\mu\nu}(x)$ que seguramente é assintoticamente FLRW aberto uma vez que os vetores de Killing $\vec{\zeta}_{ab}$, na condição de geradores de isometrias, não atuam sobre a solução de fundo de FLRW, que se mantém invariante sob tal transformação, mas apenas sobre suas perturbações (formas assintóticas), de modo que a forma assintótica particular $h_{\mu\nu}(x)$ é mapeada numa nova forma funcional geral $h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \pounds_{\vec{\zeta}_{ab}} h_{\mu\nu}(x)$ fornecendo assim as expressões assintóticas mais gerais possíveis que as soluções assintoticamente FLRW aberto podem assumir com respeito ao sistema de coordenadas dado.

Assim, de acordo com o procedimento geral exposto acima para a obtenção das formas assintóticas gerais de FLRW, pode-se adotar como solução cosmológica conhecida um elemento arbitrário da classe de soluções tipo Tolman que tendem assintoticamente a FLRW aberto. Em termos mais específicos, as soluções tipo Tolman representam um fluido de poeira não estático dotado de simetria esférica $\rho(r,t)$ sendo portanto uma generalização das soluções não estáticas de FLRW que correspondem ao caso homogêneo $\rho(t)$ as quais, em coordenadas esféricas (t,r,θ,ϕ) podem ser expressas como:

$$ds^2 = -dt^2 + (1-kr^2)^{-1}a^2dr^2 + a^2r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \tag{36}$$

onde $k = -1, 0, 1$ e $a(t,k)$ é o fator de escala não estático que caracteriza as soluções de FLRW. Dos tres tipos de soluções, os casos k = -1,0 podem representar modelos abertos enquanto o caso k = 1 é necessariamente do tipo fechado. Quanto às soluções de Tolman podem ser expressas na forma [3]:

$$ds^2 = (1+f)^{-1}R'^2dr^2 + R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{37}$$

sendo a densidade $\rho(r,t)$ dada por

$$8\pi\rho(r,t) = \frac{F'}{R'R^2} \tag{38}$$

Nas expressões acima f(r) e F(r) são duas funções esfericamente simétricas obtidas por integração das equações de Einstein e $R(r,t)$ é uma função que satisfaz a equação de movimento

$$\dot{R}^2 - R^{-1}F = f, \tag{39}$$

onde a linha representa derivação com respeito a r e o ponto com respeito a t. Como a métrica tem assinatura definida, $f(r)$ deve satisfazer a condição $f \geq -1$. Desta forma, assim como o parâmetro que define as soluções de FLRW, $f(r)$ pode ser negativa, positiva ou nula o que permite, ainda em analogia com as soluções de FLRW, escolher a coordenada radial r de modo que $f(r) = -kr^2$ (k = -1,0,1). Para cada caso a equação de movimento (39) admite soluções específicas para $R(r,t)$ que, como as soluções de FLRW, podem ser excpressas na forma paramétrica com o auxílio de um parâmetro η. Para $F \neq 0$ estas soluções são dadas por:

$$
\begin{aligned}
&R = \tfrac{F}{2f}\Big[\cosh\eta - 1\Big], t - u(r) = \tfrac{F}{2f^{3/2}}\Big[\operatorname{senh}\eta - \eta\Big] \;\; (f > 0),\\
&R = \tfrac{F}{2(-f)}\Big[1 - \cos\eta\Big] \;\; , \; t - u(r) = \tfrac{F}{2(f^{3/2})}\Big[\eta - \operatorname{sen}\eta\Big] \;\; (f < 0),\\
&R = (9/4F)^{1/3}[t - u(r)]^{2/3} \;\; (f = 0),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

onde u(r) é uma terceira função esfericamente simétrica obtida por integração de (39). A fim de garantir a positividade de ρ, bem como de t e R, F e sua derivada F' devem satisfazer as condições $F \geq 0$, $F' \geq 0$. O caso F = 0 completa o conjunto de soluções admitidas pela equação de Tolman (39):

$$
\begin{aligned}
&R = f^{1/2}[t - u(r)] \;\; (f > 0),\\
&R = u(r) \;\; (f = 0).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Observa-se que as soluções de Tolman correspondentes à $F = 0$ representam o vácuo de Minkowski uma vez que neste caso $\rho = 0$ e a métrica de Tolman pode ser reduzida por uma simples transformação de coordenadas à forma Minkowskiana

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2. \tag{42}$$

Já as soluções de Tolman com $F \neq 0$ representam espaços abertos ou fechados conforme $f \geq 0$ ou $f < 0$ respectivamente. Desta forma, é possível encontrar soluções tipo Tolman contendo vácuos estáticos ou em expansão e que tendem assintoticamente a FLRW aberto como demonstraram Bonnor e Chamorro [13].

Comparando as soluções de FLRW (36) e de Tolman (37) pode-se verificar facilmente que a condição necessária e suficiente para que uma solução de Tolman seja assintoticamente FLRW aberto consiste em admitir para a função de Tolman $R(r,t)$ uma expansão do tipo:

$$R(r,t,k) = ra(t,k)\Big[1 + \frac{f(t,k)}{r} + \frac{g(t,k)}{r^2} + ...\Big], \tag{43}$$

onde, considerando apenas as soluções abertas de FLRW, k = -1 , 0. As expansões correspondentes às derivadas de R podem ser calculadas diretamente por derivação de (43). Partindo destas expansões, é possível calcular as formas assintóticas das soluções tipo Tolman que tendem a FLRW aberto. Conforme o procedimento geral estabelecido, aplicando sobre estas formas assintóticas particulares as derivadas de Lie ao longo dos vetores de Killing $\vec{\zeta}_{ab}$ obtem-se as formas assintóticas gerais para qualquer solução assintoticamente FLRW aberto. Os vetores de Killing dos espaços abertos de FLRW são conhecidos na literatura sendo dados por [10]:

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_{(12)} &= \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \vec{\zeta}_{(23)} &= -\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \text{cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \vec{\zeta}_{(31)} &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \text{cotg}\theta\,\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned} \tag{44}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_{(14)} &= (1-kr^2)^{1/2}\text{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1-kr^2)^{1/2}}{r}\cos\theta\, cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{(1-kr^2)^{1/2}}{r}\frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \vec{\zeta}_{(24)} &= (1-kr^2)^{1/2}\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1-kr^2)^{1/2}}{r}\cos\theta\,\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{(1-kr^2)^{1/2}}{r}\frac{\cos\phi}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \vec{\zeta}_{(34)} &= (1-kr^2)^{1/2}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(1-kr^2)^{1/2}}{r}\text{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{45}$$

Os vetores de Killing listados em (44) são geradores de simetria de rotação enquanto que os listados em (45) são geradores de simetria de translação. Como as estruturas assintóticas dependem do parâmetro k os casos k = -1 e k = 0 serão tratados separadamente.

3.2 O Caso k = 0

Neste caso a solução de Tolman toma a forma:

$$ds^2 = R'^2dr^2 + R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{46}$$

Na região assintótica a solução pode ser expressa como:

$$g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{47}$$

onde $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ designa a solução de FLRW (36) com k = 0 e $h_{\mu\nu}$ a forma assintótica da solução de Tolman escolhida. Substituindo a expansão (43) em (46) resulta, para as componentes espaciais de $h_{\mu\nu}$ até segunda ordem:

$$\begin{aligned} &h_{11} \sim -2a^2(t)g(t)r^{-2} \quad h_{22} \sim a^2(t)\{2rf(t) + [f^2(t) + 2g(t)]\}; \\ &h_{33} = \mathrm{sen}^2\theta h_{22} \qquad\qquad h_{ik} = 0 \;\; (i \neq k). \end{aligned} \tag{48}$$

Como foi visto anteriormente na discussão do formalismo hamiltoniano para espaços abertos, o conjunto completo de condições assintóticas envolve, além de (51), as formas assintóticas dos momentos π^{ik} canonicamente conjugados a g_{ik} bem como dos campos de matéria, além das funções lapso e deslocamento N e N^i. Estas formas assintóticas são definidas de maneira análoga a $h_{\mu\nu}$ de acordo com:

$$\begin{aligned} \pi^{ik} &= \overset{\circ}{\pi}{}^{ik} + p^{ik} \\ \chi &= \overset{\circ}{\chi} + q \\ \pi^{\chi} &= \overset{\circ}{\pi}{}^{\chi} + p^{\chi} \end{aligned} \tag{49}$$

onde χ é o potencial associado à quadrivelocidade do fluido de poeira da solução de Tolman escolhida e π^{χ} é o momento canonicamente conjugado a χ. Os valores das quantidades correspondentes no espaço de fundo de FLRW são designados por $\overset{\circ}{\pi}{}^{ik}$, etc. Para o cálculo dos momentos π^{ij} pode-se usar as relações (8) e (6) resultando, para os valores de fundo no espaço de referência de FLRW com k = 0

$$\overset{\circ}{\pi}{}^{ik} = -2a^2\dot{a}r^2 \mathrm{sen}\,\theta\, \overset{\circ}{g}{}^{ik} \tag{50}$$

Com respeito à solução de Tolman (46), as mesmas relações permitem expressar os momentos π^{ik} em função de R e suas derivadas. Substituindo nestas expressões as expansões correspondentes e comparando com (50) obtém-se as formas assintóticas desejadas para os momentos:

$$\begin{aligned} p^{11} \sim n_1(t)r; \quad p^{22} \sim n_2(t)r^{-1}; \\ p^{33} = p^{22}\mathrm{sen}^{-2}\theta; \quad p^{ik} = 0 \;\; (i \neq k) \end{aligned} \tag{51}$$

Como o sistema de coordenadas em que são expressas as soluções de FLRW (36) define um referencial sincrônico no qual o observador comovente com a matéria é perpendicular às hipersuperfícies espaciais $t = C^{te}$, pode-se determinar a forma assintótica dos campos de matéria exigindo-se que o quadrivetor velocidade η_μ que decreve o fluido de Tolman correspondente à solução particular escolhida tenda assintoticamente a $\overset{\circ}{\eta}_\mu = \delta^0_\mu$, o que implica para o potencial χ, de acordo com sua definição, o valor assitótico $\overset{\circ}{\chi} = mt$. Assim, se um fluido de Tolman é assintóticamente FLRW deve-se ter:

$$\chi \simeq mt[1 + s(t)/r + ...] \tag{52}$$

de modo que $q \sim l(t)r^{-1}$ com $l(t)$ característica da solução de Tolman escolhida. Procedendo como antes, mas agora também considerando a forma assintótica de χ definida acima, exprime-se π^χ em função de R e suas derivadas usando-se a definição (23) e substitui-se as expansões correspondentes. Subtraindo o resultado do valor de fundo $\overset{\circ}{\pi}{}^\chi = na^3r^2\mathrm{sen}\theta$ encontra-se para π^χ a forma assintótica $p^\chi \sim s(t)r$.

Restam ainda as formas assintóticas das funções lapso e deslocamento N e N_i através das quais se expressam as componentes $g_{0\mu}$ do tensor métrico. Quanto à função lapso pode-se usar a relação dinâmica (6) que depende explicitamente de N. Variando-se esta equação com respeito a N obtém-se a relação dinâmica correspondente entre as formas assintóticas de N e g_{ik}:

$$\delta\dot{g}_{ik} = -2K_{ik}\delta N \tag{53}$$

Notando que a derivada em relação ao tempo não altera a dependência em r, a forma assintótica δN deve ser tal que o lado direito de (53) seja no máximo da mesma ordem de grandeza que as formas assintóticas de g_{ik}. Dentre as formas assintóticas de g_{ik} listadas em (51) aquela de menor ordem possível corresponde a $h_{11} \sim O(r^{-2})$. Assim, usando a relação (53) com i = k = 1 resulta:

$$\delta\dot{g}_{11} = -2K_{11}\delta N \sim O(r^{-2}) \tag{54}$$

Exprimindo K_{11} em termos de R e suas derivadas e expandindo encontra-se que na região assintótica K_{11} é de ordem zero em r. Desta forma, a equação (54) implica que no máximo em potências de r, $N \sim 1 + O(r^{-2})$.

As condições assintóticas das funções deslocamento N^i podem ser obtidas invocando a exigência anterior de que assintoticamente o fluido de Tolman descrito pelo quadrivetor η^μ seja perpendicular às hipersuperfícies espaciais

$t = C^{te}$ de modo que na região assintótica η^μ torna-se paralelo ao vetor unitário $u^\mu = g^{0\mu}$ normal às hipersuperfícies $t = C^{te}$ o qual pode ser expresso em função de N e N_i de acordo com $u^\mu = N^{-2}(1\,,N^i)$. Assim, na região assintótica, a componente espacial da quadrivelocidade $\eta^i = -g^{i\nu}\chi_{,\nu}/m$ é proporcional à N^i e portanto seus comportamentos assintóticos coincidem. Considerando agora a solução de Tolman (46) e substituindo as expansões necessárias, notando que as derivadas com respeito às coordenadas angulares não afetam a dependência em r, resulta:

$$\begin{aligned} &N^1 \sim \eta^1 \sim O(r^{-2}), \\ &N^2 \sim \eta^2 \sim O(r^{-3}), \\ &N^3 \sim \eta^3 \sim O(r^{-3}). \end{aligned} \tag{55}$$

Tendo completado o conjunto de condições assintóticas particulares requeridas para a solução de Tolman assintoticamente FLRW adotada, procede-se ao cálculo das derivadas de Lie das referidas formas assintóticas de Tolman ao longo de todos os seis vetores de Killing de FLRW listados em (44) e (45) a fim de obter as expressões generalizadas das formas assintóticas possíveis para qualquer solução assintoticamente FLRW. Em linguagem algébrica a forma assintótica particular de Tolman $g_{\mu\nu} = \mathring{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ é mapeada pela derivada de Lie numa nova forma funcional generalizada assintoticmente FLRW $g'_{\mu\nu} = \mathring{g}_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ onde $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \pounds_{\vec{\zeta}_{ab}} h_{\mu\nu}$. As derivadas de Lie em primeira ordem dos campos assintóticos ao longo do vetor ε^k podem ser calculadas segundo as fórmulas:

$$\pounds_{\vec{\varepsilon}} h_{ik} = h_{ik,l}\varepsilon^l + h_{il}\varepsilon^l_{,k} + h_{kl}\varepsilon^l_{,i}, \tag{56}$$

e, já que os momentos são densidades tensoriais,

$$\pounds_{\vec{\varepsilon}} p^{ik} = p^{ik}_{,l}\varepsilon^l - p^{il}\varepsilon^k_{,l} - p^{kl}\varepsilon^i_{,l} + p^{ik}\varepsilon^l_{,l}, \tag{57}$$

com expresões análogas para χ e p^χ. Pode ocorrer que as derivadas de Lie em primeira ordem sejam todas identicamente nulas para alguma componente dos campos. Neste caso é necessário calcular as derivadas de Lie de ordem superior, cujas fórmulas são análogas a (56) e (57) até que seja encontrado um resultado não trivial que revele a forma assintótica procurada.

Procedendo da forma descrita e considerando os valores assintóticos calculados nesta seção chega-se às seguintes formas assintóticas generalizadas para a classe de soluções assintoticamente FLRW aberto com k = 0:

$$
\begin{aligned}
&h_{11} \sim r^{-2} l_{11}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&h_{22} \sim r l_{22}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&h_{33} \sim r l_{33}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&h_{12} \sim r^{-1} l_{12}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&h_{13} \sim r^{-1} l_{13}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&h_{23} \sim r^{-1} l_{23}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{11} \sim r M^{11}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&p^{22} \sim r^{-1} M^{22}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{33} \sim r^{-1} M^{33}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{12} \sim r^{-1} M^{12}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{13} \sim r^{-1} M^{13}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{23} \sim r^{-2} M^{23}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&p^{\chi} \sim r M_{\chi}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&q \sim r^{-1} h_{\chi}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2})
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Passemos em seguida ao segundo caso de modelo aberto de FLRW.

3.3 O Caso k = -1

A solução de Tolman para este caso é agora:

$$ds^2 = (1+r^2)^{-1} R'^2 dr^2 + R^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2. \tag{59}$$

Da mesma forma que na seção anterior calculam-se os valores de fundo dos campos usando a solução de FLRW (36) com k = -1 obtendo-se:

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{g}_{11} = a^2(t)(1+r^2)^{-1}; \qquad \overset{\circ}{g}_{22} = a^2(t)r^2; \\
\overset{\circ}{\pi}{}^{11} = -2r^2(1+r^2)^{1/2}\mathrm{sen}\,\theta\dot{a}(t); \quad \overset{\circ}{\pi}{}^{22} = -2\mathrm{sen}\theta\dot{a}(t)(1+r^2)^{-1/2}; \\
\overset{\circ}{g}_{33} = \mathrm{sen}^2\theta\overset{\circ}{g}_{22}; \qquad \overset{\circ}{\pi}{}^{33} = \overset{\circ}{\pi}{}^{22}\mathrm{sen}^{-2}\theta \\
\overset{\circ}{\chi} = mt; \quad \overset{\circ}{\pi}{}^{\chi} = na^3r^2\mathrm{sen}\,\theta(1+r^2)^{-1/2}
\end{gathered}
\tag{60}
$$

Em seguida, considerando a solução de Tolman para este caso e exprimindo os momentos π^{ik} em função de R e suas derivadas através das relações (6) e (8), determinam-se as formas assintóticas particulares desta solução substituindo-se as expansões necessárias e comparando os resultados com os valores de fundo dados em (60), obtendo-se:

$$
\begin{gathered}
h_{11} \sim -2a^2(t)g(t)r^{-4}; \quad h_{22} \sim a^2(t)\{2rf(t) + [f^2(t) + 2g(t)]\}; \\
p^{11} \sim n_1(t)r^2; \qquad p^{22} \sim n_2(t)r^{-2}; \\
h_{33} = \mathrm{sen}^2\theta h_{22}; \qquad p^{33} = p^{22}\mathrm{sen}^{-2}\theta
\end{gathered}
\tag{61}
$$

sendo nulas as componentes com $i \neq k$.

A determinação das formas assintóticas dos campos de matéria neste caso k = -1 requer um pouco mais de cuidado. De fato, assumindo que $q \sim r^{-1}$ como no caso k = 0 encontra-se que a componente $\eta^1 = -\frac{g^{1\mu}\chi_{,\mu}}{m}$ da quadrivelocidade é assintoticamente de ordem zero em r, ou seja, não é assintoticamente nula como seria desejável, tendo em vista as condições assintóticas definidas para η^1. Assim, para que η^1 seja assintoticamente nulo, como requerem as condições assintóticas, é necessário que no máximo assintoticamente $\eta^1 \sim r^{-1}$ o que implica em $q \sim r^{-2}$. Com esta condição assintótica para χ e exprimindo π^χ em função de R e suas derivadas de acordo com a fórmula (23) obtem-se, após substituir as formas assintóticas características das soluções de Tolman assintoticamente FLRW definidas a partir de (61), $p^\chi \sim r^0$, o que define o comportamento assintótico de π^χ para este caso.

De acordo com o procedimento geral adotado, aplicando a estas formas assintóticas particulares as derivadas de Lie ao longo dos vetores de Killing $\vec{\zeta}_{ab}$

listados em (44) e (45) com k = -1 obtem-se as seguintes formas assintóticas gerais para a classe de soluções que tendem a FLRW aberto com k = -1:

$$
\begin{aligned}
&h_{11} \sim r^{-4} l_{11}(t,\theta,\phi) + O(r^{-5}) \\
&h_{22} \sim r l_{22}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&h_{33} \sim r l_{33}(t,\theta,\phi) + O(r^{0}) \\
&h_{12} \sim r^{-2} l_{12}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&h_{13} \sim r^{-2} l_{13}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&h_{23} \sim r^{-1} l_{23}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{11} \sim r^{2} M^{11}(t,\theta,\phi) + O(r) \\
&p^{22} \sim r^{-2} M^{22}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&p^{33} \sim r^{-2} M^{33}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3}) \\
&p^{12} \sim r^{-1} M^{12}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{13} \sim r^{-1} M^{13}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{23} \sim r^{-1} M^{23}(t,\theta,\phi) + O(r^{-2}) \\
&p^{\chi} \sim M_{\chi}(t,\theta,\phi) + O(r^{-1}) \\
&q \sim r^{-2} h_{\chi}(t,\theta,\phi) + O(r^{-3})
\end{aligned} \tag{62}
$$

Usando os mesmos procedimentos do caso k = 0, isto é, aplicando a relação dinâmica (6) com i = k = 1 e a exigência de que a quadrivelocidade que descreve o fluido de matéria seja assintoticamente perpendicular às hipersuperfícies espaciais $t = C^{te}$, resulta para as formas assintóticas das funções lapso e deslocamento:

$$
\begin{aligned}
&N \sim 1 + O(r^{-2}),\\
&N^1 \sim O(r^{-1}),\\
&N^2 \sim O(r^{-4}),\\
&N^3 \sim O(r^{-4}).
\end{aligned} \tag{63}
$$

As formas assintóticas gerais aqui deduzidas serão úteis posteriormente na obtenção da hamiltoniana dos sistemas que tendem assintoticamente a FLRW aberto, que será discutida no próximo capítulo.

4 A Hamiltoniana das Soluções Assintoticamente FLRW Aberto

Após ter discutido o método hamiltoniano para espaços abertos e deduzido as formas funcionais mais gerais possíveis para as soluções assintoticamente FLRW aberto, pretende-se agora obter a hamiltoniana desta importante classe de soluções, a qual deve ser compatível com as condições assintóticas gerais estabelecidas e cuja variação conduz às equações de movimento corretas, qual sejam, as equações de Einstein. Ao mesmo tempo, de acordo com a interpretação segundo a qual a hamiltoniana representa a energia do sistema, a obtenção de tal hamiltoniana fornecerá a energia da solução assintoticamente FLRW dada com respeito ao espaço de referência de FLRW aberto considerado, o que permite classificar as soluções assintoticamente FLRW conforme suas energias com respeito a este espaço de referência e determinar, por exemplo, o conjunto degenerado de soluções cosmológicas cujo nível de energia corresponde ao do espaço de referência, ou seja, quais as soluções pertubadas que podem ser obtidas de FLRW sem nenhum acréscimo de energia. Outro objetivo importante é examinar mais profundamente a consistência dos resultados fornecidos pelo método hamiltoniano ampliando sua aplicação a espaços abertos não assintoticamente planos, como as soluções abertas de FLRW.

A fim de obter a hamiltoniana desejada, consideremos mais de perto o procedimento usado no cálculo da hamiltoniana dos espaços assintoticamente planos deduzida no capítulo anterior no qual, em conformidade com as condições assintóticas gerais estabelecidas naquele caso, se constatou a presença de um termo de superfície de ordem zero não identicamente nulo que contribui na variação da hamiltoniana H com um montante finito - e portanto não pode ser descartado - o qual, numa forma covariante, pode ser expresso como

$$\oint_B N\overset{\circ}{G}{}^{abcl}\delta g_{ab;c}d^2s_l = \delta \oint_B N \overset{\circ}{G}{}^{abcl} h_{ab;c}d^2s_l, \tag{64}$$

onde $\overset{\circ}{G}{}^{abcl}$, definido como usualmente, é calculado com as soluções do espaço de referência plano $\overset{\circ}{g}{}^{ab}$, o ponto e vírgula designa a derivada covariante com respeito a este mesmo espaço de referência e h_{ab} é a pertubação com respeito a $\overset{\circ}{g}{}^{ab}$ da solução assintoticamente plana. Verifica-se que, com excessão da própria variação δg_{ab} a qual, a não ser pelas condições assintóticas exigidas é arbitrária, todas as outras quantidades que aparecem na integral são relativas ao espaço de referência. Assim, como está mostrado em (64), o diferencial pode ser retirado da integral uma vez que a estrutura assintótica é fixada não sendo afetada pelo operador δ o qual, por definiçao, atua apenas sobre a solução assintoticamente plana dada $g_{ab} = \overset{\circ}{g}_{ab} + h_{ab}$, isto é , sobre sua pertubação h_{ab} de modo que $\delta g_{ab} = \delta h_{ab}$. Desta forma, exprimindo os termos de superfície gerados pela variação da hamiltoniana em função das quantidades de fundo relativas ao espaço de referência e das pertubações h_{ab} é possível, em princípio, retirar o operador δ da integral de superfície, expressando-a na forma de uma diferencial δE, revelando assim o termo de superfície E cuja variação é igual e contrária a da hamiltoniana, tal como foi definido anteriormente na discussão do formalismo hamiltoniano para espaços abertos. Este procedimento geral será usado na obtenção da hamiltoniana dos espaços assintoticamente FLRW aberto, onde serão tratados separadamente os casos k = 0 e k = -1.

4.1 O Caso k = 0

Como foi demonstrado anteriormente, para o cálculo da hamiltoniana de espaços abertos é necessário verificar, uma vez estabelecidas condições assintó - ticas, quais os termos de superfície que não se anulam assintóticamente e que portanto contribuem para a variação da hamiltoniana, ou seja, os termos não identicamente nulos cujo comportamento assintótico em r é de ordem maior ou igual a zero.

Consideremos primeiramente os termos de superfície gerados pelo fluido de matéria definidos em (25). A superfície de integração B, que engloba todo o espaço, é definida pela esfera de raio infinito de modo que a única componente não nula do elemento de área é $dS_1 = d\theta d\phi$. Aplicando as condições assintóticas para k = 0 definidas em (58) obtem-se para o termo proporcional a N^i, com $\pi_\chi \sim r^2$, $N^1 \sim r^{-2}$ e $\delta\chi \sim r^{-1}$:

$$\oint_B d^2 S_l N^l \pi_\chi \delta\chi \sim r^{-1}. \tag{65}$$

Este termo é assintoticamente nulo e portanto não contribui. Para o termo proporcional a N, com $N = 1 + O(r^2)$, $\chi^{,1} \sim r^{-2}$ e $\chi_{,i}\chi^{,i} \sim r^{-4}$ resulta:

$$\oint_B d^2S_1 N\pi_\chi \chi^{,1}(m^2 + \chi_{,i}\chi^{,i})^{-1/2}\delta\chi \sim (1 + r^{-2})(1 + r^{-4})r^{-1} \sim r^{-1} \qquad (66)$$

Este termo é também assintoticamente nulo e não contribui. Assim, já que a matéria não contribui com nenhum termo de superfície, as derivadas funcionais da hamiltoniana da H_M, tal como expressa em (24), são bem definidas e as equações de movimento da matéria podem ser estabelecidas. Passemos agora aos termos gravitacionais. Usando as condições assintóticas estabelecidas para este caso e realizando cálculos análogos verifica-se que todos os termos de superfície gerados pela variação da hamiltoniana gravitacional H_G contendo π^{ik} e $\delta\pi^{ik}$ são assintoticamente nulos, assim como os termos contendo as derivadas $N_{,k}$ da função lapso. Resta ainda o termo $\oint_B d^2S_l N G^{ijkl}\delta g_{ij\|k}$. Designando por ΔG^{ijkl} e $\Delta\Gamma^l_{ki}$ as pertubações do fator G^{ijkl} e das conexões Γ^l_{ki} com respeito aos seus valores no espaço de referência, o referido termo pode ser expresso como:

$$\oint_B d^2S_l N(\overset{\circ}{G}{}^{ijkl} + \Delta G^{ijkl})[\delta g_{ij,k} - (\overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{ki} + \Delta\Gamma^l_{ki})\delta g_{lj} - (\overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj} + \Delta\Gamma^l_{kj})\delta g_{il}] \quad (67)$$

O termo ΔG^{ijkl} e as conexões $\Gamma^l_{ki} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{ki} + \Delta\Gamma^l_{ki}$ podem ser calculados diretamente substituindo as condições assintóticas exigidas e a solução de referência $\overset{\circ}{g}_{ik}$, em função das quais estas quantidades são expressas. Verifica-se que, de acordo com as condições assintóticas dadas, os termos que contêm ΔG^{ijkl} e $\Delta\Gamma^l_{ki}$ não contribuem sendo, em geral, de ordem muito baixa. Desta forma (67) se reduz a:

$$\oint_B N\, \overset{\circ}{G}{}^{abc1}\, \delta g_{ab;c} d^2s_1 \qquad (68)$$

como no caso das soluções assintoticamente planas. Examinemos a seguir se este termo contribui ou é assintoticamente nulo. Tendo em vista a definição de $\overset{\circ}{G}{}^{abcl}$ obtem-se:

$$\oint_B d^2s_1 N \overset{\circ}{g}{}^{1/2}\overset{\circ}{g}{}^{11}[\overset{\circ}{g}{}^{22}(\delta g_{21;2} - \delta g_{22;1}) + \overset{\circ}{g}{}^{33}(\delta g_{31;3} - \delta g_{33;1})]. \qquad (69)$$

As conexões de fundo não nulas necessárias ao cálculo são dadas por:

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}_{22} = -r, \\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}_{13} = r^{-1}, \\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}_{33} = -r\text{sen}^2\theta \\
&\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}_{33} = -\text{sen}\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{70}$$

Substituindo estes resultados em (69) e considerando as condições assintóticas dadas sobram, após descartar todos os termos assintoticamente nulos:

$$\oint_B d^2s_1 \overset{\circ}{g}{}^{1/2} \overset{\circ}{g}{}^{11} [\overset{\circ}{g}{}^{22} (\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}_{12} \delta g_{22} - \delta g_{22,1}) + \overset{\circ}{g}{}^{33} (\overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}_{13} \delta g_{33} - \delta g_{33,1})]. \tag{71}$$

que contem termos de ordem zero. Em seguida, ainda de acordo com as condições assintóticas dadas, resulta que $\delta g_{22,1} = r^{-1}\delta g_{22} + O(r^{-1})$ e $\delta g_{33,1} = r^{-1}\delta g_{33} + O(r^{-1})$. Consequentemente, na integral de superfície (71) os termos de ordem zero se anulam identicamente, restando apenas um termo de ordem r^{-1} que é assintoticamente nulo.

Desta forma, nenhum termo de superfície sobrevive e, ao contrário do que ocorre nas soluções assintoticamente planas, não é necessário acrescentar termos de superfície à hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW com k = 0. Em outras palavras, na superfície de vínculo definida pelas soluções assintoticamente FLRW com k = 0 a hamiltoniana gravitacional é identicamente nula. Passemos em seguida ao estudo do caso k = -1.

4.2 O Caso k = -1

Aplicando-se agora as condições assintóticas para este caso dadas em (62) e realizando cálculos análogos verifica-se como no caso k = 0 que, escolhendo como superfície de integração B a esfera de raio infinito, todos os termos, com excessão do termo dado em (68), são assintoticamente nulos. Da mesma forma que antes, observa-se que os termos contendo ΔG^{ijkl} não contribuem sendo, em geral, de ordem muito baixa. Assim, o referido termo de superfície pode ser expresso como:

$$\oint_B N \overset{\circ}{G}{}^{abcl} \delta g_{ab;c} d^2s_l - \oint_B d^2s_l N \overset{\circ}{G}{}^{ijkl} [\Delta\Gamma^l_{ki} \delta g_{lj} + \Delta\Gamma^l_{kj} \delta g_{il}] \tag{72}$$

onde agora o ponto e vírgula designa a derivada covariante com respeito à solução de FLRW com k = -1. Desenvolvendo o primeiro termo e considerando as condições assintóticas dadas encontra-se, após descartar os termos assintoticamente nulos:

$$\oint_B d^2 s_1 \overset{\circ}{g}^{1/2} \overset{\circ}{g}^{11} [\overset{\circ}{g}^{22} (\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12} \delta g_{22} - \delta g_{22,1} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22} \delta g_{11}) + \overset{\circ}{g}^{33} (\overset{\circ}{\Gamma}{}^3_{13} \delta g_{33} - \delta g_{33,1} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{33} \delta g_{11})], \tag{73}$$

onde foram usadas as conexões de fundo não nulas dadas por:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22} = -(1+r^2)r, \\ &\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^3_{13} = r^{-1}, \\ &\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{33} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22} \, \mathrm{sen}^2\theta, \\ &\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{33} = -\mathrm{sen}\theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{74}$$

Como se pode verificar, a integral (73) contem termos divergentes de ordem r e termos de ordem zero. Por outro lado,assim como no caso k = 0 as condições assintóticas permitem estabelecer as relações $\delta g_{22,1} = r^{-1}\delta g_{22} + O(r^{-1})$ e $\delta g_{33,1} = r^{-1}\delta g_{33} + O(r^1)$. Substituindo estas relações encontra-se que os termos divergentes anulam-se identicamente, restando apenas termos finitos de ordem zero. Assim, o referido termo de superfície não pode ser descartado e contribui na variação da hamiltoniana com uma quantidade finita e bem definida. Observa-se que tal termo já está expresso numa forma adequada, pois todas as quantidades que aparecem são fixadas com respeito à variação arbitrária δg_{ab}, uma vez que são quantidades de fundo. Com relação ao segundo termo em (72) é necessário calcular as formas assintóticas $\Delta\Gamma^l_{ki}$ das conexões, exprimindo-as em função das pertubações h_{ik} e da solução de referência $\overset{\circ}{g}_{ab}$. Deste cálculo resulta, conforme as condições assintóticas determinadas para este caso que, após descartar os termos assintoticamente nulos, ainda sobrevivem termos de ordem zero dados por:

$$\oint_B d^2 s_1 \overset{\circ}{g}^{1/2} \overset{\circ}{g}^{11} (\overset{\circ}{g}^{22} \Delta\Gamma^2_{12} \delta g_{22} + \overset{\circ}{g}^{33} \Delta\Gamma^3_{13} \delta g_{33}) \tag{75}$$

Assim, este termo também contribui e não pode ser descartado. De acordo com o procedimento geral adotado, deve-se agora exprimir este termo em função das pretubações h_{ik} e das variáveis de fundo a fim de expressá-lo na forma de uma diferencial δS. Calculando as conexões Γ^2_{12} e Γ^3_{13} como usualmente em função da métrica e suas derivadas e, retendo apenas os termos perturbativos de primeira ordem, que são aqules que efetivamente contribuem, obtem-se para a pertubação $\Delta\Gamma^2_{12}$ até esta ordem de grandeza:

$$\Delta\Gamma^2_{12} \sim \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}^{22} h_{22,1} + h^{22}\overset{\circ}{g}_{22,1}), \tag{76}$$

e uma expressão semelhante para $\Delta\Gamma^3_{13}$. Usando em seguida a aproximação válida $h^{22} \sim -\overset{\circ}{g}^{22}\overset{\circ}{g}^{22} h_{22}$ e a identidade $(\overset{\circ}{g}^{22}\overset{\circ}{g}_{22})_{,1} = 0$ o integrando em (75) pode ser escrito numa forma compacta como:

$$\frac{1}{2}\overset{\circ}{g}^{1/2}\overset{\circ}{g}^{11}[\overset{\circ}{g}^{22}(\overset{\circ}{g}^{22} h_{22})_{,1}\delta g_{22} + \overset{\circ}{g}^{33}(\overset{\circ}{g}^{33} h_{33})_{,1}\delta g_{33}] \tag{77}$$

Esta forma é adequada uma vez que depende apenas das pretubações h_{ik} e das variáveis de fundo $\overset{\circ}{g}^{ab}$. Com efeito, lembrando que a estrutura assintótica é fixada, não sendo afetada pelo operador δ, o termo acima pode ser expresso na forma algébrica geral $F^{ik}[h_{ab}, \overset{\circ}{g}^{ab}]\delta h_{ik}$ onde F^{ik} são funcionais de h_{ik} e $\overset{\circ}{g}^{ab}$. Desta forma, se existe um funcional $S[h_{ab}, \overset{\circ}{g}^{ab}]$ cujas derivadas funcionais são tais que $F^{ik} = \frac{\delta S}{\delta h_{ik}}$, então pode-se escrever:

$$F^{ik}\delta h_{ik} = \frac{\delta S}{\delta h_{ik}}\delta h_{ik} = \delta S \tag{78}$$

de modo que S é o termo cuja variação reproduz a forma funcional desejada e que deve ser acrescentado à hamiltoniana a fim de que sua variação seja uma diferencial funcional exata como em (13). Examinando a estrutura algébrica de (77) verifica-se que tal termo contem produtos envolvendo δh_{ik} e $h_{ik,l}$, sugerindo que o termo de superfície S cuja variação é dada por (77) pode ser definido como:

$$S = \beta \oint_B d^2 S_l \overset{\circ}{g}^{1/2}(\tilde{h}^{ij} h_{ij})_{;m}\overset{\circ}{g}^{ml} \tag{79}$$

onde $\tilde{h}^{ij} = -h^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ia}\overset{\circ}{g}^{jb} h_{ab}$ e β uma constante a ser determinada. De fato, considerando uma esfera no infinito e calculando - se a variação δS resulta , após eliminar todos os termos assintoticamente nulos:

$$\delta E = 2\beta \oint_B d^2 S_1 \overset{\circ}{g}^{1/2}\overset{\circ}{g}^{11}\delta[\overset{\circ}{g}^{22} h_{22}(\overset{\circ}{g}^{22} h_{22})_{,1} + \overset{\circ}{g}^{33} h_{33}(\overset{\circ}{g}^{33} h_{33})_{,1}] \tag{80}$$

Aplicando o operador δ sobre o termo entre colchetes e lembrando que $\delta h_{ab} = \delta g_{ab}$ obtem - se:

$$\begin{gathered}\delta E = 2\beta \oint_B d^2 S_1 \overset{\circ}{g}^{1/2} \overset{\circ}{g}^{11} [\overset{\circ}{g}^{22} \delta g_{22} (\overset{\circ}{g}^{22} h_{22})_{,1} + \overset{\circ}{g}^{22} h_{22} (\overset{\circ}{g}^{22} \delta g_{22})_{,1}] + \\ 2\beta \oint_B d^2 S_1 \overset{\circ}{g}^{1/2} \overset{\circ}{g}^{11} [\overset{\circ}{g}^{33} \delta g_{33} (\overset{\circ}{g}^{33} h_{33})_{,1} + \overset{\circ}{g}^{33} h_{33} (\overset{\circ}{g}^{33} \delta g_{33})_{,1}]\end{gathered} \tag{81}$$

Prosseguindo, pode-se verificar que as condições assintóticas dadas permitem escrever as relações $h_{22}\delta g_{22,1} = \delta g_{22} h_{22,1} + O(r^0)$ e $h_{33}\delta g_{33,1} = \delta g_{33} h_{33,1} + O(r^0)$. Levando estas relações em (81) e descartando os termos perturbativos de ordem r^{-1} os quais são assintoticamente nulos resulta:

$$\delta E = 4\beta \oint_B d^2 S_1 \overset{\circ}{g}^{1/2} \overset{\circ}{g}^{11} [\overset{\circ}{g}^{22} \delta g_{22} (\overset{\circ}{g}^{22} h_{22})_{,1} + \overset{\circ}{g}^{33} \delta g_{33} (\overset{\circ}{g}^{33} h_{33})_{,1}] \tag{82}$$

Comparando esta última expressão com (77) verifica - se que elas coincidem se $\beta = \frac{1}{8}$. Assim, obteve -se agora um resultado não trivial, com a hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW com k = -1 sendo dada por:

$$H = \int N_\mu H^\mu d^3x + \oint_B d^2 S_l [\overset{\circ}{G}^{ijkl} h_{ij;k} + \frac{1}{8} (\tilde{h}^{ij} h_{ij})_{;m} \overset{\circ}{g}^{ml} \overset{\circ}{g}^{1/2}]. \tag{83}$$

como se desejava calcular.
Considerando que os termos de superfície representam a energia, calculemos a energia das suloções de Tolman assintoticamente FLRW com k = -1 cujas formas assintóticas foram dadas em (62). Neste caso, descontando os termos assintoticamente nulos, o primeiro termo de superfície fornece a contribuição de ordem zero dada por $2f^2(t)a(t)\text{sen}\theta$. Já o segundo termo, descontado os termos assitoticamente nulos, fornece uma contribuição de ordem zero igual e contrária de modo que para soluções de Tolman assintoticamente FLRW com k = -1 os termos de superfície se anulam identicamente, significando que tais soluções têm o mesmo nível de energia que o espaço de referência de FLRW. Generalizando, pode -se afirmar que o conjunto degenerado de soluções cosmológicas cujo nível de energia corresponde ao espaço de referência de FLRW com k = -1 deve obedecer às seguintes condições:
i)$g_{33} = \text{sen}^2\theta g_{22}$
ii) A função g(t) que aparece na expansão de g_{11} é a mesma que aparece na expansão de g_{22}
iii) As funções pertubativas f(t) e g(t) dependem apenas do tempo.

Se alguma destas condições não for satisfeita, os termos de superfície da hamiltoniana podem dar contribuições não nulas. No entanto estas contribuições são de ordem zero e portanto finitas.

Embora tenha se verificado que nos dois casos estudados , de acordo com as condições assintóticas exigidas, os termos de superfície proporcionais às funções deslocamento N^i não contribuem na hamiltoniana, novos termos de superfície cuja contribuição não é necessariamente assintótica ou identicamente nula podem ser acrescentados se considerarmos as cargas conservadas associadas às isometrias das soluções abertas de FLRW descritas pelos vetores de Killing $\zeta^i_{(ab)}$ listados em (44) e (45). De fato, uma vez que a estrutura assintótica é fixada pelas soluções abertas de FLRW, é permissível que o vetor deformação que conecta duas hipersuperfícies adjacentes tenda assintoticamente a um vetor de Killing arbitrário $\varepsilon^i = K^{ab}\zeta^i_{(ab)}$ do espaço vetorial de base $\zeta^i_{(ab)}$, com K^{ab} constantes arbitrárias. Como os vetores de Killing de FLRW só têm componentes ao longo das hipersuperfícies, pode-se afirmar que, assintoticamente, as componentes espaciais do vetor deformação dadas pelo trivetor deslocamento N^i estão definidas a menos de vetores de Killing arbitrários de modo que, descartando termos assintoticamente nulos, $N^i = K^{ab}\zeta^i_{(ab)}$ na região assintótica. Considerando esta forma assintótica não trivial de N^i são gerados, de acordo com (15) e (25), os seguintes termos de superfície, os quais estão relacionados às cargas conservadas correspondentes às simetrias de FLRW:

$$-\oint_B d^2S_l[2K^{ab}\zeta^i_{(ab)}\delta\pi^l_i - K^{ab}\zeta^l_{(ab)}(\pi_\chi\delta\chi + \pi^{ik}\delta g_{ik})] \qquad (84)$$

Como B é uma superfície fechada no infinito, o valor das integrais pode ser estimado considerando o comportamento dos integrandos com respeito às condições assintóticas e às transformações de paridade $r \to r$, $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi + \phi$, em relação as quais os vetores de Killing (44) são pares enquanto aqueles definidos em (45) são ímpares. Desta forma, os termos em (84) que não são identicamente ou assintoticamente nulos definem as cargas conservadas associadas às isometrias de FLRW que comparecem nestes termos. A determinação exata destes termos não será realizada na presente dissertação, uma vez que constitui um tema transversal com respeito aos objetivos centrais propostos para este trabalho, e não altera os resultados aqui apresentados. No entanto, a determinação das cargas conservadas de FLRW é de interesse teórico relevante, e um estudo completo deve ser efetuado.

5 O Formalismo de Deser, Grishchuk, Petrov e Popova

No formalismo introduzido por Deser [6] e posteriormente generalizado por Grishchuk, Petrov e Popova, [7] aqui designado por DGPP, a gravitação é tratada como uma teoria de campo convencional, na qual o potencial gravitacional $h^{\mu\nu}$ e o campo gravitacional $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ são campos tensoriais que se propagam sobre um espaço de fundo previamente escolhido caracterizado pela métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$, pelas conexões Riemanianas $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ e pelo tensor de curvatura $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$. Neste formalismo, ao contrário da interpretação geométrica estabelecida pela Relatividade Geral, a gravitação pode ser tratada da mesma forma que outras interações fundamentais conhecidadas, o que é uma condição básica para a formulação consistente de uma teoria unificada das interações que incorpore a gravitação.

A relação entre este formalismo e a teoria de Einstein é dada pelas definições:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \tag{85}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}, \tag{86}$$

onde $g^{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são, respectivamente, a métrica e as conexões do espaço-tempo Einsteniano, sendo os índices tensoriais levantados ou abaixados com a métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$. em termos destas novas variáveis, a ação gravitacional pode ser expressa na forma covariante:

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{g}d^4x = \frac{1}{2\kappa}\int L^g d^4x, \tag{87}$$

onde κ é a constante de Einstein, com a lagrangeana gravitacional L^g dada, a menos de divergências totais, por [7]:

$$L^g = \tilde{h}^{\mu\nu}(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu}) + (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})(KK)_{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\,\overset{\circ}{R} + \tilde{h}^{\mu\nu}\overset{\circ}{R}_{\mu\nu}. \tag{88}$$

Na expressão acima foram usadas as seguintes definições:

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}\ , \tilde{h}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}h^{\mu\nu}, \tag{89}$$

$$K_{\mu} \equiv K^{\alpha}_{\alpha\mu}, \tag{90}$$

$$(KK)_{\mu\nu} \equiv K^{\alpha}_{\mu\nu}K_{\alpha} - K^{\alpha}_{\mu\beta}K^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{91}$$

sendo o ponto e vírgula a derivada covariante com respeito ao espaço de fundo, cujo escalar de curvatura é $\overset{\circ}{R} = \gamma^{\mu\nu} \overset{\circ}{R}_{\mu\nu}$.

Consideremos primeiramente o caso de um campo gravitacional no vácuo que se propaga num espaço de fundo Ricci-plano no qual $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = 0$, de modo que os dois últimos termos em (88) são agora identicamente nulos. As equações dinâmicas do campo gravitacional para este caso podem ser obtidas variando-se a ação gravitacional (87) com respeito a $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$, que neste formalismo de DGPP designam o campo gravitacional, resultando, após aplicar a condição de extremo:

$$\frac{\delta L^g}{\delta \tilde{h}^{\mu\nu}} = K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu} = 0 \tag{92}$$

$$\frac{\delta L^g}{\delta K^{\alpha}_{\mu\nu}} = -\tilde{h}^{\mu\nu}_{;\alpha} + (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})K_{\alpha} - (\tilde{\gamma}^{\mu\rho} + \tilde{h}^{\mu\rho})K^{\nu}_{\rho\alpha} - (\tilde{\gamma}^{\nu\rho} + \tilde{h}^{\nu\rho})K^{\mu}_{\rho\alpha} = 0. \tag{93}$$

Estas equações de movimento devem ser consistentes com a teoria de Einstein da gravitação para o caso estudado. De fato, usando as relações (85) e (86) e reescrevendo as equações em termos da métrica $g^{\mu\nu}$ e das conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ do espaço-tempo Einsteniano, verifica-se que (92) é equivalente às equações de Einnstein no vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$, enquanto que (93) reestabelece a hipótese Einsteniana de que o espaço-tempo é uma variedade Riemaniana, ou seja, $g^{\mu\nu}_{\|\alpha} = 0$, onde o símbolo $\|$ designa a derivada covariante com respeito às conexões Einstenianas $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$.

As equações de movimento (92) e (93) podem ser combinadas numa forma conveniente na qual o tensor momento-energia do campo gravitacional aparece explicitamente. De fato, derivando covariantemente (93) com respeito a x^{β}, contraindo com α e antisimetrisando nos índices μ, ν e α encontra-se, após usar (92) [7]:

$$G^{L}_{\mu\nu} = -(KK)_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}_{\alpha} + Q^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha}, \tag{94}$$

onde

$$\begin{aligned} 2Q^{\alpha}_{\mu\nu} \;=\; & -\gamma_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}K^{\alpha}_{\rho\sigma} + h_{\mu\nu}K^{\alpha} - h^{\alpha}_{\mu}K_{\nu} - h^{\alpha}_{\nu}K_{\mu} + \\ + \; & h^{\rho}_{\mu}(K^{\alpha}_{\rho\nu} - K^{\sigma}_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\sigma\nu}) + h^{\rho}_{\nu}(K^{\alpha}_{\rho\mu} - K^{\sigma}_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\sigma\mu}) + \\ + \; & h^{\alpha\rho}(K^{\sigma}_{\rho\mu}\gamma_{\sigma\nu} + K^{\sigma}_{\rho\nu}\gamma_{\sigma\mu}). \end{aligned} \tag{95}$$

e $G^L_{\mu\nu}$, contendo apenas termos lineares em $h_{\mu\nu}$, é definido como:

$$2G^L_{\mu\nu} = [\gamma_{\mu\nu}h^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\mu h^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu h^\beta_\mu]_{;\alpha;\beta}, \tag{96}$$

De acordo com esta última definição, como se pode verificar, a equação (94) pode ser formalmente reconhecida como a forma covariante da equação de um campo de spin 2 não massivo cuja fonte é representada pelo termo à direita, que inclui o campo gravitacional $K^\alpha_{\mu\nu}$, de modo que este formalismo mostra explicitamente que o campo gravitacional atua como fonte de si mesmo, gerando gravitação. Assim, o referido termo pode ser identificado com o tensor momento-energia do campo gravitacional, o qual é obtido pela variação da lagrangeana gravitacional com respeito à métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$. Com efeito, um cálculo direto a partir da lagrangeana (88) fornece:

$$\kappa t_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta L^g}{\delta\gamma^{\mu\nu}} = -(KK)_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^\alpha_\alpha + Q^\alpha_{\mu\nu;\alpha}, \tag{97}$$

mostrando que o tensor momento-energia do campo gravitacional de DGPP $t_{\mu\nu}$ corresponde precisamente ao lado direito de (94), o que permite escrever:

$$G^L_{\mu\nu} = \kappa t_{\mu\nu}. \tag{98}$$

A teoria pode ser generalizada para incluir a contribuição da matéria através da lagrangeana da matéria L^m que supõe-se depender de $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$, $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e dos campos de matéria $\overset{\circ}{\phi}$, e que inclui a sua interação com o campo gravitacional. A ação total é agora dada por:

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int L^g d^4x + \int L^m d^4x \tag{99}$$

Considerando ainda um espaço de fundo Ricci-plano e variando-se esta ação com respeito aos campos gravitacional e de matéria obtém-se, usando o mesmo procedimento feito no caso do vácuo examinado acima, as seguintes equações de movimento:

$$G^L_{\mu\nu} = \kappa(t_{\mu\nu} + 2\frac{\delta L^m}{\delta\tilde{h}^{\mu\nu}} - \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\delta L^m}{\delta\tilde{h}^{\alpha\beta}}) \tag{100}$$

com $G^L_{\mu\nu}$ e $t_{\mu\nu}$ tal como definidos em (96) e (97) e

$$\frac{\delta L^m}{\delta\overset{\circ}{\phi}} = 0 \tag{101}$$

Os termos a direita de (100) que contém a contribuição da lagrangeana de matéria devem corresponder ao tensor momento-energia da matéria $T_{\mu\nu}$ definido como usualmente:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta L^m}{\delta \gamma^{\mu\nu}} = 2\frac{\delta L^m}{\delta \tilde{\gamma}^{\mu\nu}} - \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\delta L^m}{\delta \tilde{\gamma}^{\alpha\beta}} \tag{102}$$

Comparando esta definição com (100), verifica-se que a condição necessária e suficiente para que o termo à direita de (100) represente o tensor momento-energia total, incluindo a contribuição da matéria e do campo gravitacional, é que

$$\frac{\delta L^m}{\delta \tilde{h}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L^m}{\delta \tilde{\gamma}^{\mu\nu}} \tag{103}$$

Neste caso L^m depende de $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ e $\tilde{h}^{\mu\nu}$ apenas na forma $L^m = L^m[\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}]$.

Em muitos casos de interesse teórico relevante, o espaço de fundo pode não ser Ricci-plano, como é o caso das soluções abertas de FLRW que temos adotado como espaço de fundo ao longo deste trabalho. Tal espaço de fundo generalizado é caracterizado pela lagrangeana de fundo

$$\overset{\circ}{L} = -\frac{1}{2\kappa}\overset{\circ}{L}{}^{g} + \overset{\circ}{L}{}^{m}, \tag{104}$$

com $\overset{\circ}{L}{}^{g} = \sqrt{-\gamma}\ \overset{\circ}{R}$, sendo agora necessário considerar a matéria de fundo descrita pela lagrangeana $\overset{\circ}{L}{}^{m}$ e que não existia no caso Ricci-plano, . A variação da lagrangeana de fundo com respeito à métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ e aos campos $\overset{\circ}{\phi}$ que descrevem a matéria de fundo fornece as equações de movimento de fundo de acordo com:

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} = \kappa \overset{\circ}{T}_{\mu\nu}\ \ , \ \ \frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^{m}}{\delta\ \overset{\circ}{\phi}} = 0 \tag{105}$$

onde $\overset{\circ}{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^{m}}{\delta \gamma^{\mu\nu}}$ é o tensor momento-energia da matéria de fundo. Desta forma, no lado esquerdo de (100), além do termo $G^L_{\mu\nu}$ que provém da parte gravitacional de fundo $\overset{\circ}{L}{}^{g}$ é necessário, no caso de um espaço de fundo arbitrário, acrescentar a contribuição que provém da lagrangeana de fundo da matéria $\overset{\circ}{L}{}^{m}$. De fato, considerando que o termo gravitacional pode ser expresso na forma [7]:

$$G^L_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \left[\tilde{h}^{\alpha\beta} \frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^{g}}{\delta\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}} \right], \tag{106}$$

o qual envolve apenas pertubações lineares com respeito ao espaço de fundo, a contribuição linear do fluido material de fundo pode ser definida de maneira análoga como:

$$\Phi^L_{\mu\nu} = -\frac{2\kappa}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \left[\tilde{h}^{\alpha\beta} \frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^{m}}{\delta\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}} + \phi_A \frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^{m}}{\delta \overset{\circ}{\phi}_A} \right], \tag{107}$$

onde ϕ_A são as pertubações de primeira ordem com respeito aos campos de fundo $\overset{\circ}{\phi}_A$. Assim, para um espaço de fundo arbitrário no qual existe um fluido de matéria, as equações de campo (100) devem ser generalizadas de acordo com:

$$G^L_{\mu\nu} + \Phi^L_{\mu\nu} = \kappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{108}$$

O lado direito desta equação é por definição o momento-energia total, incluindo a contribuição da matéria e do campo gravitacional, bem como a interação entre eles. Integrando em todo o espaço obtem-se o momento-energia total macroscópico do sistema.

A fim de examinar a consistência dos resultados fornecidos por este formalismo e compará-los com aqueles obtidos por outros formalismos, apliquemos o método de DGPP aos casos que têm sido tratados no presente trabalho, a saber, as soluções assintoticamente planas e as soluções assintoticamente FLRW aberto, tomando como espaço de fundo as próprias soluções assintóticas.

5.1 A Solução Assintoticamente Plana

Como caso típico de solução assintoticamente plana consideremos a solução de Schwarzschild que, em coordenadas polares (r, θ, ϕ), é dada na forma:

$$ds^2 = B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - Bdt^2, \tag{109}$$

onde $B = 1 - \frac{2m}{r}$ sendo m o parâmetro de massa de Schwarzschild. Adotando como espaço de fundo a forma assintótica plana desta solução de acordo com

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{110}$$

o potencial gravitacional $h^{\mu\nu}$ pode ser calculado usando-se (85) resultando, para as únicas componentes não nulas:

$$h^{00} = 1 - B^{-1} \quad , \quad h^{11} = B - 1 \tag{111}$$

A energia total E é dada pela integral de volume da densidade de energia t^{00} que, de acordo com as definições (98) e (96) pode ser expressa como:

$$E = \int t^{00}\sqrt{-\gamma}d^3x = \frac{1}{2\kappa}\int [\gamma^{00}h^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}h^{00} - 2\gamma^{0\alpha}h^{0\beta}]_{;\alpha;\beta}\sqrt{-\gamma}d^3x \tag{112}$$

onde, adotando um sistema no qual c = G = 1, $\kappa = 8\pi$. Substituindo-se na última equação os valores de $h^{\mu\nu}$ e $\gamma^{\mu\nu}$ tal como definidos acima verifica-se que os termos que contêm um ou ambos os índices α e β iguais a zero são identicamente nulos. Além disto, como o espaço de fundo plano é estático, ou seja, não depende do tempo, toda conexão de fundo $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ na qual um ou mais índices são iguais a zero são igualmente nulas. Assim (112) se reduz a:

$$E = \frac{1}{2\kappa}\int [\gamma^{00}h^{ik} + \gamma^{ik}h^{00}]_{|i\,|k}\sqrt{-\gamma}d^3x \tag{113}$$

onde o símbolo | designa a derivada covariante com prespeito às conexões espaciais C^{l}_{ik} do espaço de fundo. Nesta forma, é possível aplicar o teorema de Gauss transformando esta integral de volume em uma integral de superfície de acordo com:

$$E = \frac{1}{16\pi}\int_S [\gamma^{00}h^{ik} + \gamma^{ik}h^{00}]_{|i}\sqrt{-\gamma}d^2S_k, \tag{114}$$

sendo $d^2S_k = d\theta d\phi\delta^1_k$ o elemento de área de uma superfície esférica S no infinito que engloba todo o espaço. Desenvolvendo o integrando e calculando as conexões necessárias chega-se a expressão:

$$E = \frac{m}{2}(1 + B^{-2}). \tag{115}$$

Usando a definição de B e fazendo o limite $r \to \infty$ obtém-se finalmente

$$E = m, \tag{116}$$

o que é um resultado consistente, uma vez que m, por definição, representa a massa-energia total do sistema. Nota-se que, devido às propriedades de simetria da solução plana, foi possível expressar a energia como uma integral de superfície de modo que, neste caso, a energia depende apenas dos valores assintóticos do campo, fornecendo o mesmo resultado para qualquer solução assintoticamente plana. Examinemos em seguida se o mesmo pode ser afirmado quando aplicamos o formalismo de DGPP às soluções assintoticamente FLRW aberto tomando como espaço de fundo as próprias soluções abertas de FLRW.

5.2 As Soluções Assintoticamente FLRW Aberto

Uma vez que as soluções de FLRW tratadas nesta dissertação são geradas por um fluido de poeira existe, neste caso, um fluido material de fundo e, como foi anteriormente explicado, para o cálculo da energia total é necessário considerar, além da contribuição da lagrangeana gravitacional de fundo representada pelo termo $G^L_{\mu\nu}$, a contribuição da lagrangeana $\overset{\circ}{L}{}^m$ da matéria de fundo representada pelo termo $\Phi^L_{\mu\nu}$. Desta forma, usando a definição (96) e a relação (101) verifica-se como no caso precedente que todos os termos nos quais os índices α ou β são zero são identicamente nulos, de modo que a parte gravitacional do tensor momento-energia pode ser expressa como:

$$t^{00} = \frac{1}{\kappa} G^{L00} = \frac{1}{2\kappa}[\gamma^{00} h^{ik} + \gamma^{ik} h^{00}]_{;i\ ;k} \tag{117}$$

No entanto, como as soluções de FLRW não são estáticas, isto é, dependem do tempo, as conexões de fundo $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ com um dos índices igual a zero, as quais estão relcionadas ao tensor de curvatura extrínseco K_{ij} das hipresuperfícies espaciais de fundo, não são necessariamente nulas, podendo contribuir para t^{00}. Consequentemente, t^{00} não pode ser expresso na forma de uma tridivergência espacial como no caso precedente, de modo que agora o teorema de Gauss não pode ser aplicado. Com efeito, computando G^{L00} a partir da expressão acima encontra-se:

$$G^{L00} = \frac{1}{2\kappa}[\gamma^{ik} v_{|i|k} + h^{ik}_{|i|k} + K\dot{v} + K^2(1-v) + K_{ij}\dot{h}^{ij} - 2K_{ij}K^{il}h^j_l] \tag{118}$$

onde foram usadas as definições $v = -h^{00}$ e $K = K_{ij}\gamma^{ij}$, com o símbolo $|$ denotando as derivadas covariantes com respeito à métrica de fundo espacial

γ_{ik}. Considerando agora explicitamente a solução de FLRW (36) e calculando o tensor de curvatura extrínseco K_{ij} obtém-se:

$$K_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{ij} \tag{119}$$

Substituindo este resultado encontra-se:

$$G^{L00} = \frac{1}{2\kappa}\Big[\gamma^{ik}v_{|i} + h^{ik}_{|i}\Big]_{|k} + \frac{1}{2\kappa}\Big[-\frac{\dot{a}}{a}(3\dot{v} + \dot{h}) + 3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2(3v + h)\Big], \tag{120}$$

com $h = \gamma_{ik}h^{ik}$. Observa-se que apenas o primeiro termo pode ser expresso na forma de uma divergência tridimensional. Passemos em seguida ao cálculo do termo $\Phi^L_{\mu\nu}$ correspondente à contribuição do fluido de fundo de FLRW. A lagrangeana da matéria de fundo, considerada como um fluido de poeira de partículas de massa m cuja quadrivelocidade é descrita pelo potencial de fundo $\overset{\circ}{\chi}= mt$ é dada por:

$$\overset{\circ}{L}_M = -\frac{\overset{\circ}{n}}{2m}\Big(\sqrt{-\gamma}m^2 + \tilde{\gamma}^{\mu\nu}\overset{\circ}{\chi}_{,\mu}\overset{\circ}{\chi}_{,\nu}\Big), \tag{121}$$

onde $\overset{\circ}{n}$ e a densidade de patículas do fluido. De acordo com a definição (107), para o cálculo de $\Phi^L_{\mu\nu}$ é necessário determinar as variações de $\overset{\circ}{L}_M$ com respeito a $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ bem como em relação a $\overset{\circ}{n}$ e $\overset{\circ}{\chi}$ que descrevem os campos de matéria. Realizando estes cálculos encontra-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^m}{\delta\tilde{\gamma}^{\mu\nu}} &= -\frac{\overset{\circ}{n}}{2m}\Big(\tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}m^2 + \overset{\circ}{\chi}_{,\mu}\overset{\circ}{\chi}_{,\nu}\Big),\\
\frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^m}{\delta\overset{\circ}{n}} &= -\frac{1}{2m}\Big(\sqrt{-\gamma}m^2 + \tilde{\gamma}^{\mu\nu}\overset{\circ}{\chi}_{,\mu}\overset{\circ}{\chi}_{,\nu}\Big),\\
\frac{\delta \overset{\circ}{L}{}^m}{\delta\overset{\circ}{\chi}} &= -\tilde{\gamma}^{\mu\nu}\Big[\frac{\overset{\circ}{n}}{m}\overset{\circ}{\chi}_{,\mu}\Big]_{,\nu}.
\end{aligned} \tag{122}$$

Levando estes resultados em (107) e designando por q e δn, respectivamente, as pertubações em primeira ordem dos campos de fundo $\overset{\circ}{\chi}$ e $\overset{\circ}{n}$ resulta:

$$\Phi^L_{00} = \kappa\Big[\frac{m\,\overset{\circ}{n}}{2}h_{00} - m\delta n - \overset{\circ}{n}\,q_{,0}\Big]. \tag{123}$$

Como se pode verificar, para este espaço de fundo de FLRW, nem G^L_{00} nem Φ^L_{00} nem sua soma $G^L_{00} + \Phi^L_{00}$ podem ser expressos na forma de divergências tridimensionais, de modo que o teorema de Gauss não pode ser aplicado. Consequentemente, a energia total, expressa pela integral de volume de $G^L_{00} + \Phi^L_{00}$, não depende apenas dos valores assintóticos do campo, como no caso das soluções assintoticamente planas, de forma que, nesta prescrição de DGPP, soluções assintoticamente FLRW diferentes podem fornecer resultados diferentes para a energia total, não sendo possível definir um único resultado geral, como no caso plano.

6 O Formalismo de Brown e York

Este método consiste numa generalização relativística da teoria de Hamilton - Jacobi, sendo portanto diretamente aplicável aos sistemas gravitacionais. Na versão clássica da teoria, aplicável a um conjunto discreto de graus de liberdade, a Hamiltoniana , ao invés de ser calculada diretamente a partir da Lagrangeana como no formalismo de Hamilton, está associada à variação negativa da ação clássica S_{cl} com respeito ao instante final, supondo fixos o instante inicial e as coordenadas iniciais e finais e considerando apenas trajetórias clássicas fisicamente possíveis para o sistema, ou seja, aquelas que obedecem as equações de movimento. De fato, expressando a ação na forma canônica com o tempo reparametrisado por $t(\lambda)$ de acordo com

$$S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda [p_i \dot{q}^i - \dot{t} H(q^i, p_i, t)], \tag{124}$$

onde o ponto designa a derivada respeito a λ sendo $t' = t'(\lambda')$, $t'' = t''(\lambda'')$ dois instantes inicial e final dados, e realizando variações arbitrárias nas coordenadas canônicas e no tempo que, nesta forma reparametrisada da ação aparece como mais uma coordenada, obtem-se para a variação da ação após integração por partes:

$$\delta S = \text{termos associados as eq. de movimento} + p_i \delta q^i \mid_{\lambda'}^{\lambda''} - H \delta t \mid_{\lambda'}^{\lambda''} \tag{125}$$

Assim, se as coordenadas e o tempo são fixados nos instantes inicial e final ou seja, $\delta q^i(\lambda') = \delta q^i(\lambda'') = \delta t(\lambda') = \delta t(\lambda'') = 0$, a condição de extremo $\delta S = 0$ fornece as equações de movimento cujas soluções $[q^i(\lambda), t(\lambda)]$ correspondem às trajetórias clássicas fisicamente possíveis do sistema. Por outro lado, considerando apenas as trajetórias clássicas fisicamente possíveis, os termos relativos às equações de movimento se anulam de forma que δS se reduz a

$$\delta S_{cl} = p_{i_{cl}} \delta q^i \mid_{\lambda'}^{\lambda''} - H_{cl} \delta t \mid_{\lambda'}^{\lambda''}, \tag{126}$$

onde o índice *cl* significa que as quantidades devem ser calculadas usando-se as soluções clássicas fisicamente possíveis do sistema. Esta última relação permite identificar a hamiltoniana com a taxa de variação negativa da ação clássica com respeito ao instante final, como se pode verificar.

A fim de generalizar estas idéias para os sistemas gravitacionais, em lugar de definir a ação sobre trajetórias clássicas limitadas por dois conjuntos discretos de valores dados das coordenadas e do tempo, considera-se a ação gravitacional clássica S^G_{cl} definida numa região M do espaço - tempo limitada por um conjunto de hipersuperfícies com valores dados da métrica. Admitindo uma folheação típica do espaço - tempo sob a forma de hipersuperfícies espaciais $t = C^{te}$ e especificando uma região Σ de fronteira S em cada hipersuperfície, pode-se conceber o 4-volume M como a região do espaço - tempo limitada pelas hipersuperfícies $t' = C^{te}$ e $t'' = C^{te}$ de trimétricas h'_{ik} e h''_{ik}, correspondentes a dois instantes inicial e final dados e por uma hipersuperfície envoltória ou lateral ^3S de trimétrica γ_{ik} que descreve a evolução da fronteira bidimensional S entre os instantes inicial e final dados. Supõe-se como antes que apenas trajetórias clássicas são consideradas, ou seja, que as hipersuperfícies $t = C^{te}$ evoluam segundo as equações de movimento, neste caso, as equações de Einstein. Admite-se também que o folheamento é ortogonal de modo que o unitário normal às hipersuperfícies $t = C^{te}$ é sempre tangente à ^3S e portanto pode ser representado por um trivetor u_i. Desta forma, o intervalo de tempo próprio $d\tau$ em relação ao qual deve-se variar a ação clássica a fim de obter a Hamiltoniana é agora generalizado pelo intervalo $ds^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k$ sobre a hipersuperfície ^3S que determina não apenas o tempo próprio $d\tau = Ndt$ mas também todos os intervalos $ds^2 = \sigma_{ab}dx^a dx^b$ tangentes à S, cuja métrica intrínseca nas coordenadas x^a é σ_{ab}.

Considerando tal possibilidade de generalização, Brown e York [9] definem a variação funcional da ação gravitacional clássica com respeito a γ_{ik} obtendo, ao invés da função Hamiltoniana, um tensor momento energia superficial definido em ^3S de acordo com:

$$T^{ik} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S^G_{cl}}{\delta \gamma_{ik}} \tag{127}$$

Assim, na prescrição de Brown e York a energia total E contida numa região Σ de fronteira S é calculada como:

$$E = \int_S \varepsilon \sqrt{\sigma} d^2x \tag{128}$$

onde a densidade superficial de energia ε é definida na forma usual, como a projeção do tensor momento energia ao longo do unitário normal às hipersuperfícies $t = C^{te}$:

$$\varepsilon = u_i u_k T^{ik} \tag{129}$$

Observa-se que tal definição de energia é quase local, uma vez que é sempre definida sobre uma superfície anulando-se, em geral, quando a área da superfície tende a zero. Para avaliar como esta definição de energia corresponde a generalização da definição de energia na teoria clássica de Hamilton - Jacobi, representada pela hamiltoniana, considera-se um intervalo arbitrário da hipresuperfície ${}^3S$ de métrca dada γ_{ik} definida por $x^1 = C^{te}$ tal como expresso no formalismo 3 + 1:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \sigma_{ab}(N^a dt + dx^a)(N^b dt + dx^b) \tag{130}$$

com (t, x^a, x^b) coordenadas arbitrárias em ${}^3S$. Desta última relação obtem-se os resultados:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \gamma_{ik}}{\partial N} &= -2N\delta_i^0 \delta_k^0 \\ u_i &= -N\delta_i^0 \end{aligned} \tag{131}$$

onde u_i é o vetor unitário normal à hipersuperfície $t = C^{te}$ definido por $\gamma^{ik} u_i u_k = -1$. Consequentemente, resulta para a densidade de energia quase local, de acordo com sua definção:

$$\varepsilon = u_i u_k T^{ik} = \frac{2u_i u_k}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{cl}^G}{\delta \gamma_{ik}} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\delta S_{cl}^G}{\delta \gamma_{ik}} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial N} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\delta S_{cl}^G}{\delta N}, \tag{132}$$

onde usou-se $\sqrt{-\gamma} = N\sqrt{\sigma}$. Para a energia total E contida numa superfície S obtem-se, de acordo com (5):

$$E = -\int_S \frac{\delta S_{cl}^G}{\delta N} d^2x. \tag{133}$$

Desta forma, em estreita analogia com a relação entre a energia e a taxa de variação temporal da ação clássica estabelecida pala teoria de Hamilton - Jacobi, a energia quase local de Brown e York contida no interior de uma supeerfície S está relacionada ao negativo da variação da ação gravitacional clássica S_{cl}^G com respeito à função lapso N que determina o tempo próprio $d\tau = Ndt$ medido por um observador ortogonal à persuperfície $t = C^{te}$ que envolve S, quando estendemos esta variação a todos os pontos de S.

Completando esta analogia com a teoria de Hamilton - Jacobi, na qual os momentos canonicamente conjugados estão associados à variação da ação clássica com respeito às condições de contorno, ou seja, às coordenadas iniciais ou finais, como se pode verificar de (125), a variação da ação gravitacional clássica com respeito às condições de contorno impostas sobre as hipersuperfícies limítrofes, a saber, as trimétricas h'_{ik} , h''_{ik} e γ_{ik} definem os momentos canonicamente conjugados conjugados a estas coordenadas. Consequentemente, a dependência da ação gravitacional com respeito às referidas condições de contorno deve ser especificada. Esta dependência pode ser explicitada acrescentando-se à ação de Hilbert termos de superfície na forma de integrais estendidas sobre as hipersuperfícies limítrofes de modo a incluir na região de definição da ação não só ao 4-volume M mas também a sua fronteira.

Revendo os cálculos que conduzem à expressão da ação gravitacional no formalismo 3+1 e considerando explicitamente as divergências totais então omitidas, as quais se reduzem a integrais sobre as hipersuperfícies limítrofes, Brown e York adotam para a ação gravitacional a forma [9]:

$$S^G = \int_M R\sqrt{-g}d^3xdt + 2\int_{t'}^{t''} K\sqrt{h}d^3x - 2\int_{{}^3S} \Theta\sqrt{-\gamma}d^2xdt - S^0 \qquad (134)$$

onde $\int_{t'}^{t''} = \int_{t''} - \int_{t'}$ são integrais estendidas às hipersuperfícies limítrofes $t = C^{te}$, Θ é o escalar de curvatura extrínseca de ${}^3S$ e S^0 representa uma série de termos de superfície abitrários os quais podem ser acrescentados à ação sem alterar as equações de movimento. Observa-se no entanto que a fixação da métrica induzida nas hipersuperfícies limítrofes não determina de forma unívoca a geometria do espaço quadrimensional de dimensão superior no qual estão imersas. Assim, os termos de superfície S^0 devem ser especificados com respeito a um certo espaço de referência previamente adotado. O espaço de Minkowisk é em geral uma escolha natural, mas não a única possível. No presente trabalho estaremos interessados em adotar as soluções abertas de FLRW como espaço de referência.

Para o cálculo da energia quase local, de acordo com sua definição, é suficiente considerar a variação da ação somente com respeito à γ_{ik}, ou seja, variações definidas em ${}^3S$. No entanto, estendendo o campo de variações a todo o domínio de definição da ação, os termos gerados por estas variações podem ser reunidos em dois grupos: aqueles resultantes de variações sobre o 4-volume M e que contribuem para as equações de movimento, e termos de superfície resultantes de variações definidas sobre as hipersuperfícies limítrofes. Se as condições de contorno são fixadas, a contribuição destes termos de superfície será identicamente nula, e a condição de extremo da ação equivale a estabelecer as equações de movimento. Por outro lado, considerando apenas as soluções clássicas das equações de movimento, os termos relativos a estas equações se anulam identicamente, restando apenas os termos de superfície de forma que:

$$\delta S_{cl}^{G} = \int_{t'}^{t''} P^{ik}\delta h_{ik} d^3x + \int_{^3S} (\pi^{ik} - \pi_0^{ik})\delta\gamma_{ik} d^3x \tag{135}$$

onde agora foi omitido o índice *cl* nos termos à direita. Uma vez obtida a relação entre a variação da ação clássica e as variações relativas às condições de contorno, os momentos P^{ik}, π^{ik} e π_0^{ik} canonicamente conjugados a estas condições de contorno podem ser definidos, sendo dados por:

$$P^{ik} = 1/2\sqrt{h}(h^{ik}K - K^{ik}) \tag{136}$$

$$\pi^{ik} = -1/2\sqrt{-\gamma}(\gamma^{ik}\Theta - \Theta^{ik}) \tag{137}$$

$$\pi_0^{ik} = \frac{\delta S^0}{\delta \gamma_{ik}} \tag{138}$$

Como estamos interessados na variação da ação clássica com respeito a γ_{ik} a dependência de S^0 com respeito às trimétricas h'_{ik} e h''_{ik} não precisa ser considerada. Para o tensor momento energia quase local obtem-se:

$$T^{ik} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta S_{cl}^{G}}{\delta\gamma_{ik}} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}(\pi^{ik} - \pi_0^{ik}), \tag{139}$$

e para a densidade de energia quasde local,

$$\varepsilon = u_i u_k T^{ik} = \frac{2u_i u_k}{\sqrt{-\gamma}}(\pi^{ik} - \pi_0^{ik}) \tag{140}$$

Este escalar pode ser expresso de forma mais compacta notando que $\Theta_{\mu\nu}$, o tensor de curvatura extrínseca de ^3S é, por definição um tensor projetado sobre ^3S e portanto não tem componentes na direção de seu unitário normal n^α, mas apenas ao longo dos vetores tangentes à ^3S, quais sejam, as direções tangentes à S e, já que o folheamento é ortogonal, a direção perpendicular à hipersuperfície $t = C^{te}$ na qual S está imersa.

A componente de $\Theta_{\mu\nu}$ tangente à S pode ser identificada como o tensor de curvatura extrínseca de S tal como imersa numa dada hipersuperfície $t = C^{te}$ da folheação. De fato, definindo os projetores $h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu$ sobre a hipersuperfície $t = C^{te}$ e $\sigma^{\mu}_{\nu} = h^{\mu}_{\nu} - n^{\mu} n_{\nu}$ sobre a superfície S tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$, é possível decompor $\Theta_{\mu\nu}$ na forma [9]:

$$\Theta_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} + u_{\mu} u_{\nu} n_{\alpha} a^{\alpha} + 2\sigma^{\alpha}_{\mu} u_{\nu} n^{\beta} K_{\alpha\beta} \tag{141}$$

onde $k_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura extrínseca de S tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ dada e a^{α} é o vetor aceleração $a^{\alpha} = u^{\alpha}_{\|\beta} u^{\beta}$.
Para o escalar de curvatura extrínseca resulta:

$$\Theta^{\mu}_{\mu} = \Theta = k - n_{\alpha} a^{\alpha}, \tag{142}$$

onde k é o escalar de curvatura extrínseca de S tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ dada.

Substituindo esta decomposição de $\Theta_{\mu\nu}$ em (14) obtem-se para a projeção de π^{ik}:

$$u_i u_k \pi^{ik} = 1/2\sqrt{-\gamma} k \tag{143}$$

Desta forma, a projeção de π^{ik} na direção perpendicular à hipersuperfície $t = C^{te}$ que contem S está essencialmente relacionada ao escalar de curvatura extrínseca de S tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ dada.
Analogamente, pode-se definir a projeção ao longo de u_i do termo π^{ik}_0 que surge devido à arbitrariedade que se tem ao definir a ação, como estando relacionada a k_0, o escalar de curvatura extrínseca de S, é dizer, de uma superfície de mesma métrica induzida de S, tal como imersa numa hipersuperfície de referência correspondente a uma folheação dada do espaço de referência.

Com estes resultados a densidade de energia quasde local pode ser expreessa como:

$$\varepsilon = k - k_0 \tag{144}$$

Sendo a energia total em S dada por:

$$E = \int_S (k - k_0)\sqrt{\sigma} d^2x \tag{145}$$

No espaço de referência $k = k_0$ e E = 0. Desta forma, a energia quase local está sempre definida com respeito a um certo espaço de referência tomado como nível zero de energia. Tal espaço de referência pode ser escolhido de diversas formas mas nunca pode ser eliminado da teoria uma vez que decorre diretamente da ambiguidade inerente na definição da ação gravitacional.

A fim de comparar os resultados fornecidos pelo método de Brown e York com aqueles obtidos nos formalismos Hamiltoniano e de DGPP, tratados nos capítulos anteriores, calculemos a energia quase local para tres casos simples e importantes, qual sejam, a solução assintoticamente plana de Schwarzschild e as soluções de Tolman assintoticamente FLRW aberto com k = 0 e k = -1 definidas previamente. Assim, de acordo com a interpretação dada acima, o valor da energia quase local para uma superfície S que engloba todo o espaço representa a energia da solução dada com respeito aos seus respectivos espaços de referência adotados como nível zero de energia. O tensor de curvatura extrinseca de qualquer superfície S tal como imersa numa hipersuperfície dada é caracterizado pela variação $n^i_{;k}$ do unitário n^i normal à S, especificado pela condição $h_{ik}n^i n^k = 1$. Assim, o escalar de curvatura extrinseca , ao qual se relaciona a densidade quase local de energia, pode ser expresso pela divergência de n^i:

$$k = n^i_{;i} = \frac{(\sqrt{h}n^i)_{,i}}{\sqrt{h}} \tag{146}$$

Usaremos esta relação para o cáculo da energia quase local nos casos estudados.

6.1 A Solução Assintoticamente Plana de Schwarzschild

Esta solução é dada na forma:

$$ds^2 = B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - Bdt^2, \tag{147}$$

onde $B = 1 - \frac{2m}{r}$ sendo m o parâmetro de massa de Schwarzschild. Calculemos a energia quase local de Schwarzschild contida no interior da esfera $r = C^{te}$ tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ da folheação a que se submeteu o espaço de Schwarzschild adotando como espaço de referência a solução plana de Minkowsk dada por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{148}$$

Embora referindo-se a espaços diferentes, as coordenadas de Minkowsk e Schwarzschild se confundem neste caso uma vez que a esfera $r = C^{te}$ tem o mesmo raio, independente de estar imersa numa hipersuperfície $t = C^{te}$ do espaço de referência ou do espaço de Schwarzschild, como se pode verificar. Nem sempre, como se verá adiante no caso das soluções assintoticamente FLRW, esta identidade entre as coordenadas è possível. Em continuação, a trimètrca g_{ik} das hipersuperfícies de Schwarzschild è dada por:

$$dl^2 = B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{149}$$

Desta forma, o vetor unitário n^i à superfície $r = C^{te}$ tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ de Schwarzschild, definido pala condição de normalização $g_{ik}n^i n^k = 1$ è dado por $n^i = (B^{1/2}, 0, 0)$. Usando a fórmula (146) resulta para o escalar de curvatura intrínseca:

$$k = -\frac{2B^{1/2}}{r}. \tag{150}$$

Da mesma forma, no espaço de referência de Minkowsk, $n^i = (1, 0, 0)$ obtendo-se para o escalar de curvatura intrínseca:

$$k_0 = -\frac{2}{r}. \tag{151}$$

Assim, a energia quase local de Schwarzschild contida no interior da esfera $r = C^{te}$ è dada por:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_S (k - k_0)\sqrt{\sigma}d^2x = r(1 - B^{1/2}) \tag{152}$$

Na região assintótica, o fator $B^{1/2}$ pode ser expandido, resultando:

$$E \sim m + \frac{m^2}{2r} \tag{153}$$

Para uma superfície no infinito que engloba todo o espaço o valor da energia quase local se reduz a m , que representa a massa-energia total do sistema, incluindo a matèria e seu campo gravitacional, em relação ao espaço vazio de Minkowsk. Para uma supefície de raio finito r, a definição (153) admite tambèm uma interpretação física consistente. Com efeito, a massa m que representa a energia total do sistema inclui a energia da matéria mais a auto-energia potencial gravitacional associada ao trabalho realizado para trazer todos os elementos de massa do infinito até as suas posições finais.

O trabalho necessário para trazer todos os elementos de massa do infinito e distribui-los sobre a casca esférica de raio r é dado pela auto-energia potencial gravitacional $U = -\frac{m^2}{2r}$ da casca esférica de raio r, que é precisamente o negativo do termo que aparece na expansão (153). Assim, na aproximação clássica que estamos considerando, a energia quase local E contida no interior da esfera de raio r é dada pela energia total m subtraida da auto-energia potencial gravitacional da casca esférica de raio r. Consequentemente, a energia quase local contida na esfera de raio r corresponde à energia de toda a matéria contida na esfera mais a energia potencial gravitacional associada ao trabalho realizado para trazer os elementos de massa do sistema da fronteira r até posições finais, independente da quantidade de trabalho realizada fora da esfera para trazer os elementos do infinto até r. Deste modo, para calcular a energia quase local contida numa superfície basta descontar da energia total do sistema a parte da energia localizada na região exterior à superfície, como seria desejável em uma definição consistente de energia.

Desta forma, pelo menos no caso de espaços assintoticamente planos, o formalismo de Brown e York fornece resultados fisicamente consistentes. Veremos que resultados tal formalismo fornece quando aplicado a espaços abertos não assintoticamente planos, com as soluções de Tolman assintoticamente FLRW aberto.

6.2 As Soluções de Tolman Assintoticamente FLRW Aberto Com k = 0

A solução de Tolman para este caso toma a forma:

$$ds^2 = R'^2 dr^2 + R^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{154}$$

Sua forma assintótica é dada pela solução aberta de FLRW com k = 0 , tomada como nível de referência zero de energia. Designando por $(\mathring{t}, \mathring{r}, \theta, \phi)$ as coordenadas deste espaço de referência resulta, para a solução assintótica:

$$ds^2 = \mathring{R}'^2 d\mathring{r}^2 + \mathring{R}^2 (d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) - d\mathring{t}^2 . \tag{155}$$

com $\mathring{R} = \mathring{r}\, a(\mathring{t}; 0)$ sendo $a(\mathring{t})$ o fator não estático que caracteriza as soluções de FLRW aberto com k = 0. Como a própria notação indica, as coordenadas (r, t) e $(\mathring{t}, \mathring{r})$ não devem ser confundidas pois referem-se a espaços diferentes.

A relação entre elas pode ser obtida considerando que a superfície S usada no cálculo da energia quase local deve ser única, uma vez que suas propriedades geométricas intrínsecas são determinadas pela própria natureza da superfície e independem do espaço tridimensional de dimensão superior no qual está imersa. Desta forma, tal superfície deve ter um escalar de curvatura intrínseca de valor único e bem definido. Escolhendo como superfície S a esfera $r = C^{te}$ tal como imersa na hipersuperfície $t = C^{te}$ do espaço de Tolman, seu escalar de curvatura intrínseca , de acordo com (154), é uma constante positiva dada por:

$$^2\Re = 2R^{-2}(r = C^{te}\,,\, t = C^{te}) \tag{156}$$

A superfície $\overset{\circ}{S}$ que, imersa numa hipersuperfície $\overset{\circ}{t}= C^{te}$ do espaço de referência, tem como escalar de curvatura intrínseco uma constante positiva é evidentemente a esfera $\overset{\circ}{r}= C^{te}$. Cálculos análogos conduzem ao resultado:

$$^2\,\overset{\circ}{\Re}= 2\,\overset{\circ}{R}^{-2}\,(\overset{\circ}{r}= C^{te}\,,\,\overset{\circ}{t}= C^{te}) \tag{157}$$

para o escalar de curvatura intrínseco de $\overset{\circ}{S}$. A unicidade do escalar de curvatura intrínseco exige que $^2\Re = {}^2\,\overset{\circ}{\Re}$ o que resulta na condição :

$$R(r,t) =\overset{\circ}{R}\,(\overset{\circ}{r},\overset{\circ}{t}), \tag{158}$$

que define a relação procurada entre os dois sistemas de coordenadas. Uma vez identificadas as superfícies S e $\overset{\circ}{S}$ seus respectivos escalares de curvatura extrínseca podem ser calculados diretamente pela fórmula (146) obtendo-se:

$$k = -2R^{-1}(r,t) \tag{159}$$

para S e

$$\overset{\circ}{k}= -2\,\overset{\circ}{R}^{-1}\,(\overset{\circ}{r},\overset{\circ}{t}) \tag{160}$$

para $\overset{\circ}{S}$. Da condição (158) segue que $k =\overset{\circ}{k}$ e portanto a densidade de energia quase local é nula neste caso, bem como a energia total:

$$\varepsilon = k-\,\overset{\circ}{k}= 0 \tag{161}$$

o que concorda com o resultado anterior obtido pelo método Hamiltoniano para o mesmo caso.

6.3 As Soluções de Tolman Assintoticamente FLRW Aberto Com k = -1

A solução de Tolman é dada agora por:

$$ds^2 = (1 + r^2)^{-1} R'^2 dr^2 + R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - dt^2, \tag{162}$$

com $R(r, t)$ definido parametricamente de acordo com

$$R = A(r)[\cosh\eta - 1] \ , \ t = B(r)[\text{senh}\eta - \eta], \tag{163}$$

onde os fatores $A(r)$ e $B(r)$ estão associados às constantes de integração esfericamente simétricas que caracterizam a solução de Tolman dada. Sua forma assintótica coincide com a solução aberta de FLRW com curvatura espacial negativa, tomada como espaço de referência para o cálculo da energia quase local:

$$ds^2 = (1 + \overset{\circ}{r}{}^2)^{-1} \overset{\circ}{R}{}'^2 d\overset{\circ}{r}{}^2 + \overset{\circ}{R}{}^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - d\overset{\circ}{t}{}^2, \tag{164}$$

onde $\overset{\circ}{R}(\overset{\circ}{r}, \overset{\circ}{t})$ é definido pelo parâmetro $\overset{\circ}{\eta}$ de acordo com

$$\overset{\circ}{R} = K \overset{\circ}{r} [\cosh \overset{\circ}{\eta} - 1] \ , \ \overset{\circ}{t} = K[\text{senh} \overset{\circ}{\eta} - \overset{\circ}{\eta}], \tag{165}$$

onde K é uma constante positiva. Escolhendo a esfera $r = C^{te}$ tal como imersa numa hipersuperfície $t = C^{te}$ da folheação a que se submeteu a solução dada Tolman para o cálculo da energia quase local e usando a fórmula (146), resulta para o escalar de curvatura extrínseca da superfície, de acordo com (162):

$$k = -2(1 + r^2)^{1/2} R^{-1}(r, t). \tag{166}$$

Ainda de acordo com (32), o escalar de curvatura intrínseca da mesma superfície é dado por:

$$^2\Re = 2R^{-2}(r = C^{te}, t = C^{te}), \tag{167}$$

sendo portanto uma constante positiva. Pelos mesmos argumentos apresentados na discussão anterior, a superfície que, imersa na hipersuperfície $\overset{\circ}{t} = C^{te}$ do espaço de referência tem como escalar de curvatura intrínseca uma constante positiva é a esfera $\overset{\circ}{r} = C^{te}$. Cálculos análogos mostram que, de acordo com (164), o escalar de curvatura extrínseca desta superfície é dado por:

$$\overset{\circ}{k} = -2(1 + \overset{\circ}{r}{}^2)^{1/2} \overset{\circ}{R}{}^{-1} (\overset{\circ}{r}, \overset{\circ}{t}) \tag{168}$$

enquanto que para o escalar de curvatura intrínseca obtem-se:

$$^2 \overset{\circ}{\Re} = 2 \overset{\circ}{R}^{-2} \quad (\overset{\circ}{r} = C^{te}, \overset{\circ}{t} = C^{te}) \tag{169}$$

A condição de unicidade do escalar de curvatura intrínseca implica que

$$R(r,t) = \overset{\circ}{R} (\overset{\circ}{r}, \overset{\circ}{t}), \tag{170}$$

o que define a relação entre os sitemas de coordenadas de Tolman e do espaço de referência. A energia quase local é então dada por:

$$E = \int_{r\to\infty} \sqrt{\sigma}(k - \overset{\circ}{k}) d^2x = R(r,t)[(1 + \overset{\circ}{r}^2)^{1/2} - (1 + r^2)^{1/2}](r \to \infty) \tag{171}$$

Para completar o cálculo deve-se exprimir E totalmente em termos de r e tomar o limite ao infinito sendo necessário, ao contrário do caso anterior, considerar explicitamente a relação (158) a fim de obter $\overset{\circ}{r}$ como função de r. Para uma superfície no infinito é suficiente usar a expressão assintótica de R(r,t) de acordo com:.

$$R(r,t) = ra(t)(1 + C^{(1)}r^{-1} + C^{(2)}r^{-2} + ...) \tag{172}$$

Escolhendo hipersuperfícies espaciais no espaço de Tolman e no espaço de referência tais que $t = \overset{\circ}{t} = C^{te}$ e aplicando a condição (158), o fator temporal pose ser cancelado resultando, até segunda ordem, de acordo com (43) e (158):

$$\overset{\circ}{r} = r(1 + C^{(1)}r^{-1} + C^{(2)}r^{-2}). \tag{173}$$

Esta expressão mostra que $r \to \infty$ implica $\overset{\circ}{r} \to \infty$ de forma que no limite assintótico:

$$E \approx R(\overset{\circ}{r} - r) \tag{174}$$

Finalmente, usando a expansão (43) e novamente (173) obtem-se:

$$\begin{aligned} E &= ra(t)(1 + C^{(1)}r^{-1} + C^{(2)}r^{-2})(C^{(1)} + C^{(2)}r^{-1}) \\ &= a(t)[C^{(1)}r + C^{(2)} + (C^{(1)} + C^{(2)}r^{-1})^2] \end{aligned} \tag{175}$$

Esta expressão diverge claramente quando $r \to \infty$, obtendo-se desta vez um resultado infinito para a energia total, ao contrário do valor finito obtido anteriormente para este mesmo caso usando o formalismo hamiltoniano. É necessário agora buscar uma interpretação física que explique esta discrepância, o que será feito a seguir.

7 CONCLUSÃO

Com base na discussão desenvolvida nos capítulos anteriores, pretende-se nesta última parte resumir de forma sistemática os resultados que aparecem ao longo do texto e que foram obtidos a partir da aplicação das várias definições de energia conhecidas na literatura a sistemas gravitacionais com diferentes estruturas assintóticas, como as soluções assintoticamente planas ou FLRW, procurando aferir a extensão do campo de aplicação dos referidos métodos e seu grau de ambiguidade quanto ao significado físico da energia em sistemas gravitacionais, bem como buscando interpretações físicas consistentes que possam explicar as possíveis discrepâncias encontradas.

Primeiramente, da análise desenvolvida no capítulo III, onde foi calculada a hamiltoniana que gera a dinâmica das soluções assintoticanmente FLRW aberto, e de acordo com a interpretação segundo a qual os termos de superfície definidos para tal hamiltoniana representam a energia do sistema gravitacional dado com respeito ao espaço de referência - neste caso as soluções abertas de FLRW - conclui-se que o conjunto degenerado das soluções cosmológicas assintoticanmente FLRW que ocupam o estado fundamental de mínima energia, isto é, cujas energias são iguais ao do espaço de refrência, tomado como nível zero, é constituido pelas soluções assintoticanmente FLRW aberto com k = 0, as quais geram termos de superfície assintoticamente nulos, e pelas soluções cuja estrutura geométrica é semelhante à das soluções tipo Tolman assintoticanmente FLRW aberto com k = -1, quais sejam, dependem apenas de r e t, o termo perturbativo $g(t)$ que ocorre na expansão de g_{22} tal como definida em (60) também aparece em g_{11} e $g_{33} = g_{22}\mathrm{sen}^2\theta$. Neste último caso, os termos de superfície definidos para a hamiltoniana não são assintoticamente nulos, como em k = 0, mas anulam-se identicamente. Quanto aos fluidos de poeira assintoticanmente FLRW , embora gerem termos de superfície, não contribuem em nenhum dos casos estudados, resultado que pode ser estendido a outros fluidos perfeitos assintoticanmente FLRW. Desta forma, soluções assintoticanmente FLRW aberto com k = -1 cuja geometria difere da de Tolman podem gerar contribuições não nulas na hamiltoniana de modo que, em geral, na hamiltoniana das soluções assintoticanmente FLRW aberto com k = -1, os termos de superfície não podem ser descartados.

Uma consequência importante decorrente da presença destes termos de superfície é que, em geral, na quantização canônica de geometrias assintoticanmente FLRW aberto com k = -1, os termos de superfície podem gerar uma nova equação de Schrödinger, além da equação de Wheeler-De Witt. De fato, na quantização canônica, a função de onda $\Psi(g_{ik}, t)$ das soluções assintoticamente FLRW obedece a equação de Schrödinger [14] [15],

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{176}$$

onde o operador $H = N_\mu H^\mu + H_S$ é obtido a partir da hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW dada em (83) quando as variáveis canônicas são substituidas pelos seus respectivos operadores quânticos, os quais obedecem a relações de comutação bem definidas [14] [15]. Assim, além das equações vinculares $H^\mu\Psi = 0$ geradas pelos vínculos hamiltonianos $H^\mu = 0$ definidos em (10) resta ainda uma equação do tipo Schrödinger dada por:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_S\Psi \tag{177}$$

onde H_S é o operador que corresponde aos termos de superfície definidos na hamiltoniana das soluções assintoticanmente FLRW dados em (83). Como se pode verificar, numa representação adequada, tais termos não apresentam nenhum problema de ordenamento de operadores. Outro aspecto a destacar é que, na quantização canônica de modelos assintoticamente FLRW o parâmetro temporal é bem definido, uma vez que, não sendo nula a hamiltoniana, a função de onda das soluções assintoticamente FLRW aberto com k = -1 depende explicitamente do parâmetro temporal t, o que permite distinguilo das outras variáveis canônicas, ao contrário do que ocorre, por exemplo, em modelos fechados, onde a hamiltoniana é identicamente nula e o parâmetro temporal se confunde com as variáveis canônicas. Observa-se também que, mesmo na ausência de um vetor de Killing tipo tempo, como é o caso da classe de soluções estudada, onde em geral não é possível estabelecer a conservação da energia, este método hamiltoniano fornece resultados finitos e bem definidos. Outro aspecto importante a considerar neste método hamiltoniano, ao lado da não conservação da energia, é a determinação completa das cargas conservadas de FLRW, tal como definidas em (84). Um cálculo preliminar sugere que existem cargas conservadas de FLRW associadas às rotações em torno das linhas coordenadas definidas pelas coordenadas cartesianas (x, y, z), relacionadas às coordenadas esféricas de forma usual. Tal problema deverá ser objeto de um estudo detalhado em futuras investigações.

Da análise feita no capítulo IV, onde introduziu-se o formalismo de DGPP, [6] [7] verificou-se que, assim como outros formalismos, o método de DGPP fornece resultados consistentes quando aplicado à soluções assintoticamente planas. Entretanto, quando o mesmo formalismo é aplicado usando como espaço de fundo as soluções abertas de FLRW, observa-se que nem a densidade de energia gravitacional t^{00}, nem a densidade de energia da matéria T^{00}, nem a densidade de energia total $t^{00} + T^{00}$ podem ser expressas na forma de uma divergência tridimensional e, consequentemente, o teorema de Gauss não é mais aplicável. Assim, a integral de volume de $t^{00} + T^{00}$, que representa a energia macroscópica total do sistema, não pode ser transformada numa integral de superfície contendo apenas os valores assintóticos dos campos, como ocorre no formalismo hamiltoniano e no método de Brown e York descritos neste trabalho, ou quando o formalismo de DGPP é aplicado às soluções assintoticamente planas [7]. Desta forma, ao contrário de outros formalismos nos quais é possível definir um resultado geral único para todas as soluções com a mesma estrutura assintótica, uma vez que a energia total pode ser expressa como integrais de superfície dependendendo apenas dos valores assintóticos dos campos, quando o formalismo de DGPP é aplicado às soluções assintoticamente FLRW usando como espaço de fundo as próprias soluções abertas de FLRW, não existe um resultado único, sendo necessário estudar separadamente cada tipo de solução assintoticamente FLRW dada, jà que agora, como foi demonstrado, a energia total depende dos valores dos campos em todo o espaço e não apenas na região assintótica.

Prosseguindo com o objetivo de examinar a consistência interna dos métodos de definição de enrgia em sistemas gravitacionais, no capítulo V aplicou-se o formalismo introduzido por Brown e York [9] para o cálculo da energia ao mesmo caso já tratado anteriormente, a saber, as soluções tipo Tolman assintoticanmente FLRW aberto, adotando como espaço de referência as mesmas soluções de FLRW. Para o caso k = 0 encontrou-se um resultado análogo ao anterior, qual seja, o de que as soluções tipo Tolman assintoticanmente FLRW aberto com k = 0 ocupam o estado fundamental de mínima energia, correspondente à energia zero de seu respectivo espaço de referência. Quanto ao caso k = -1, de acordo com as condições assintóticas exigidas, obteve-se um resultado completamente discrepante com respeito ao fornecido pelo método hamiltoniano anterior para o mesmo caso, com o aparecimento de um termo divergente que não pode ser eliminado. Buscando uma interpretação física consistente que possa explicar as razões desta discrepância, consideremos as cargas conservadas de Brown e York correspondentes às isometrias descritas pelos vetores de Killing ε^{μ} definidas por [9]:

$$Q_{\varepsilon} = \oint_{B} d^2x\sqrt{\sigma}(\epsilon u^i + j^i)\varepsilon_i \tag{178}$$

onde B é uma superfície caracterizada pela métrica bidimensional σ_{ab} e imersa na hipersuperfície cujo unitário normal é u^i, com ϵ e j^i sendo, respectivamente, as densidades superficiais de energia e momento tais como definidas neste formalismo de Brown e York [9]. Observa-se que se ε^{μ} é um vetor de Killing tipo tempo, então $u^i\varepsilon_i = -1$ e $j^i\varepsilon_i = 0$ de modo que a carga Q_{ε} se confunde com a energia quase local E definida por Brown e York para esta mesma superfície, diferindo apenas no sinal. Assim, quando a solução admite um vetor de Killing tipo tempo, a energia quase local de Brown e York tem um significado físico específico, correspondente à carga conservada associada à invariância da ação com respeito ao tempo. Nestes casos a energia quase local produz resultados consistentes e bem definidos, como se constatou quando da aplicação do formalismo às soluções assintotiocamdente planas e anti - de Sitter [9] [11]. Na ausência de um vetor de Killing tipo tempo, entretanto, não existe nenhuma carga conservada que possa ser relacionada à energia quase local tal como definida por Brown e York, de modo que esta não admite qualquer significado físico, sendo meramente uma definição matemática. Neste caso nada se pode afirmar "a priore", podendo-se obter ou não resultados inconsistentes, como ocorreu com as soluções assintoticamente FLRW aberto com k = -1.

De tudo que foi discutido e demonstrado nesta dissertação acerca das soluções assintoticamente FLRW, e considerando os trabalhos que já foram realizados anteriormente, nos quais os mesmos métodos aqui descritos são aplicados a outras estruturas assintóticas importantes, como as soluções assintoticamente planas e anti-de Sitter, [8] [9] [10] [11] [16] é possível formar um quadro que permite uma visão mais global da extensão e do domínio de aplicação das várias definições conhecidas de energia em sistemas gravitacionais. Dos métodos propostos para o cálculo da energia em sistemas gravitacionais conhecidos na literatura, pode-se destacar as prescrições de DGPP [6] [7], Brown e York [9], e o fromalismo hamiltoniano [8], que foram tratados nesta dissertação, bem como o formalismo de Komar [5], que não foi analisado aqui, uma vez que sua aplicação se restringe aos espaços com vetores de Killing tipo tempo, o que não é o caso das soluções assintoticamente FLRW. Comparando os resultados fornecidos pelos referidos métodos quando aplicados a diferentes estruturas assintóticas, observa-se que, em relação às soluções assintoticamente planas, todos os métodos citados fornecem resultados consistentes, tendo a energia total de todas as soluções assintoticamente planas um valor único e bem definido, correspondente à massa total m. Tal resultado não surpreende, considerando que o espaço plano é aquele que contém o maior número de simetrias dentre as soluções das equações de Einstein sem constante cosmológica, sendo de fato a forma assintótica mais simples que se pode obter. No entanto, à medida que se considera estruturas assintóticas mais complexas, resultados discrepantes podem ocorrer. Com efeito, aplicando-se os quatro métodos à soluções cuja estrutura assintótica é anti-de Sitter que, analogamente à solução plana, é aquela dentre as soluções das equações de Einstein com constante cosmológica que contém o maior número de simetrias, encontra-se que o formalismo hamiltoniano, bem como as prescrições de DGPP e Brown - York fornecem o mesmo resultado, o qual é finito e bem definido [10] [11] [16], enquanto que a definição de Komar fornece um resultado diferente para o mesmo caso, embora também finito e bem definido [11]. Assim, ao contrário do caso plano, para as estruturas assintóticas de anti-de Sitter não existe um valor único que possa ser atribuido á massa-energia total do sistema. Em relação às estruturas assintóticas de FLRW, que contém menos simetrias que os casos precedentes, pois não tém vetor de Killing tipo tempo, e para cujo o estudo a presente dissertção pretendeu contribuir, verificou-se uma discrepância ainda maior entre os resultados, principalmente no caso das soluções tipo Tolman assintoticamente FLRW aberto com k = -1. De fato, como já foi anteriormente mencionado, tanto neste caso quanto no caso k = 0, o formalismo de DGPP não fornece um resultado único para a massa-energia total, já que tal grandeza vai depender dos valores do campo em todo o espaço, e não apenas na região assintótica. Quanto ao formalismo de Brown-York, embora forneça para o caso das soluções de Tolman assintoticamente FLRW aberto com k = 0 um resultado semelhante ao do formalismo hamiltoniano, o qual é finito e bem definido, quando aplicado ao caso k = -1 fornece um resultado divergente ao qual, em geral, não se pode atribuir nenhum significado físico. Apenas o formalismo hamiltoniano fornece neste último caso um resultado consistente e bem definido, mostrando que a referida solução pertence ao conjunto degenerado de soluções cosmológicas cuja energia é igual ao do espaço de fundo.

Deste quadro geral, pode-se concluir que, para espaços abertos sem vetor de Killing tipo tempo, como as soluções assintoticamente FLRW tratadas nesta dissertação, o formalismo hamiltoniano é aquele que, dentre os outros métodos estudados, apresenta a definição de energia mais consistente, com características semelhantes às definições de energia em espaços maximalmente simétricos, ou seja, fornece resultados finitos, os quais podem ser expressos sob a forma de integrais de superfície, e portando dependem apenas dos valores assintóticos dos campos. Seria interessante prosseguir esta investigação, aplicando os métodos aqui descritos nào só a geometrias assintoticamente FLRW mais gerais que a de Tolman, a fim de avaliar de forma mais precisa o significado físico dos termos de superfície que, como foi demonstrado neste trabalho, devem ser necessariamente acrescentados à hamiltoniana das soluções assintoticamente FLRW aberto, mas também a formas assintóticas diversas das que aqui foram consideradas, possivelmente com menos simetrias que as soluções de FLRW, para que se possa examinar de forma criteriosa em que grau os métodos aqui descritos podem ser aplicados à geometrias não estáticas, onde a energia depende do tempo.

References

[1] A. Einstein,Ann.Physik 4, 769 (1916)

[2] R. C. Tolman, "On the Use of Energy - Momentum Principle in General Relativity", Phys. Rev. 35, 875 (1930)

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford, 1985)

[4] C. Møller,"On the Localization of the Energy of a Physical System in the General Theory of Relativity" Ann. Phys. 4, 347 (1958)

[5] A. Komar, "Covariant Conservation Laws in General Relativity", Phys. Rev. 113, 934 (1959)

[6] S. Deser,"Self-Interation and Gauge Invariance", G.R.G. 1, 9 (1970)

[7] L. P. Grishchuk, A. N. Petrov and A. D. Popova, , " Exact Theory of the (Enstein) Gravitational Field in a Arbitrary Background Space-Time", Commun. Math. Phys. 94, 379 (1984).

[8] T. Regge and C. Tetelboin, "Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity", Ann. Phys. 88, 286 (1974)

[9] J. D. Brown and J. W. York, Jr.,"Quase Local Energy and Conserved Chages Derived From the Gravitational Action" Phys. Rev. D 47, 1407 (1993)

[10] M. Henneaux and C. Teitelboim, "Asymptotically Anti-de Sitter Spaces", Commun. Math. Phys. 98, 391 (1985).

[11] I. Damião Soares and N. Pinto-Neto,"The Gravitational Energy in Asymptotically Anti-de Sitter Spacetimes ", Phys. Rev. D 52, 5665, (1995).

[12] E. A. Martinez, "Quasilocal Energy for a Kerr Black Hole", Phys. Rev. D 50, 4920 (1994)

[13] W. B. Bonnor and A. Chamorro, " Models of Voids in the Expanding Universe ", The Astrophysical Journal 361, 21 (1990)

[14] J. A. Wheeler in Battelle Rencontre "Lectures in Mathematical Physics", ed. por B. de Witt e J. A. Wheeler (1968)

[15] B. S. de Witt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967)

[16] N. Pinto Neto e R. Rodrigues da Silva, "Generalized Field Theoretical Approuch to General Relativity and Conserved Quantities in Anti-de Sitter Spacetimes", Phys. Rev. D 61, 104002 (2000)

[17] P. Trajtenberg and N. Pinto, "On the Localization of the Gravitational Energy", Brazilian Journal of Physics, vol. 30 n^o1 (2000)

[18] P. Trajtenberg and N. Pinto, "The Hamiltonian of Asymptotically Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker Spacetimes", GRG 36 (2004)