

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍAS FÍSICAS - CBPF

Tese de Doutorado

**Estudo do Vidro de Spins de Ising em Redes  
Hierárquicas**

**Sebastião Tadeu de Oliveira Almeida**

**Orientador: Fernando Dantas Nobre**

Rio de Janeiro, RJ

2015

**Sebastião Tadeu de Oliveira Almeida**

**Estudo do Vidro de Spins de Ising em Redes  
Hierárquicas**

Tese apresentada para obtenção do título de  
doutor em Física pelo Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas.

Orientador: Fernando Dantas Nobre

Rio de Janeiro, RJ

2015

## Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Fernando Dantas Nobre, pela colaboração, paciência, incentivos e, principalmente, pelos conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao grupo de Mecânica Estatística do CBPF, em especial ao Prof. Evaldo M. F. Curado, por todas as contribuições a mim e à tese.

Aos meus pais, Sebastião e Juracy, pelo apoio à minha formação.

À minha esposa Alexsandra, grande companheira em todos os momentos.

Ao meu filho Arthur, que nasceu durante o doutorado, tornando-se fonte de incentivo e inspiração.

À família de Nelson e Maria da Luz, por tudo o que fizeram pela minha família, sendo fundamentais nesta caminhada.

Aos colegas Leonardo, Maurício e Max, pela convivência nesses anos de pesquisa.

## Resumo

Propriedades de vidros de spins sobre diversas redes hierárquicas da família de Migdal-Kadanoff, assim como na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional com dimensão fractal  $D \cong 3.58$ , são estudadas. A natureza caótica da fase vidro de spins é investigada nesta segunda rede. Através de técnicas do grupo de renormalização, calculamos os expoentes de rigidez e caos, e também a dimensão fractal da superfície da gota.

As formas das distribuições de ponto fixo associadas às transições de fases vidro de spins-paramagnética são investigadas numericamente. Nas redes hierárquicas de Migdal-Kadanoff as distribuições de ponto fixo são bem ajustadas por exponenciais esticadas, ou  $q$ -gaussianas; ambos ajustes recuperam o limite gaussiano quando  $D \rightarrow \infty$ . Na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional, o melhor ajuste é fornecido pela distribuição exponencial esticada.

Inspirados na técnica desenvolvida por Morgado, Coutinho e Curado, determinamos as relações de recorrência das magnetizações locais e funções de correlação para a rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Este método possibilitou o estudo do parâmetro de ordem de vidro de spins, entre outras propriedades termodinâmicas do sistema. Através do método de escalas para tamanho finito estimamos os expoentes críticos associados à transição de fases vidro de spins-paramagnética; alguns dos resultados apresentam boa concordância com estimativas existentes na literatura para a rede cúbica.

Estudamos o perfil de parâmetros de ordem locais através de um mapeamento completo da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Observamos uma distribuição de valores não trivial sobre a rede, o que nos induziu a realizar uma análise multifractal, confirmando a existência de características multifractais para este sistema.

## Abstract

Properties of spin glasses on several hierarchical lattices of the Migdal-Kadanoff family, as well as on the tridimensional Wheatstone–Bridge hierarchical lattice with fractal dimension  $D \cong 3.58$ , are studied. The chaotic nature of the spin-glass phase is investigated for the later lattice. Through renormalization–group techniques we calculate the stiffness and chaos exponents, in addition to the fractal dimension of the droplet’s surface.

The forms of the fixed-point distributions, associated with the spin glass–paramagnetic phase transitions, are investigated numerically. In the hierarchical lattices of the Migdal-Kadanoff family the fixed-point distributions are well fitted by stretched exponentials, or by  $q$ -Gaussian distributions; both fittings recover the expected Gaussian limit as  $D \rightarrow \infty$ . In the case of the Wheatstone–Bridge lattice, the best fit is given by a stretched-exponential distribution.

Inspired by the technique developed by Morgado, Coutinho and Curado, we calculated the recursion relations of the local magnetizations and correlation functions for the tridimensional Wheatstone–Bridge hierarchical lattice. This method enabled the study of the spin-glass order parameter, among other thermodynamic properties of the system. Using a finite-size scaling method, we estimated the critical exponents associated with the spin glass-paramagnetic phase transition; some of the results are in good agreement with existing estimates in the literature for the cubic lattice.

We studied the profile of local order parameters through a full mapping of the Wheatstone–Bridge hierarchical lattice. We observed a non-trivial distribution of values throughout the lattice, which motivated us to perform a multifractal analysis, confirming the existence of multifractal characteristics for this system.

# Lista de Figuras

1.1	Agrupamentos com quatro spins apresentando frustração. Nestes dois casos as intensidades das interações são iguais diferindo apenas no sinal. Verifica-se que tanto em (a) quanto em (b) existe mais de uma configuração de estado fundamental, ou seja, o mesmo é degenerado. . . . .	2
1.2	Ilustração de como varia a intensidade da interação RKKY entre dois spins separados por uma distância $R$ . . . . .	3
1.3	(a) Suscetibilidade linear para a liga de $\text{Au}_{1-x}\text{Fe}_x$ . A porcentagem indica a concentração de ferro e os círculos indicam algumas medidas para altas temperaturas (extraído da Ref. [3]). (b) Calor específico para liga $\text{Cu}_{1-x}\text{Mn}_x$ , onde a seta indica a temperatura crítica estimada pelo pico da suscetibilidade (extraído da Ref. [6]). . . . .	4
2.1	(a) Unidade básica geradora das redes hierárquicas da família Migdal-Kadanoff com $p$ caminhos paralelos [44, 45]. (b) Unidade básica geradora da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional [46]. Os índices $\mu$ e $\nu$ representam os sítios externos da unidade básica. . . . .	13
2.2	(a)-(c) Construção da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Em (a) exibimos uma ligação na ordem zero, que em suas extremidades contém os sítios $\mu$ e $\nu$ ; em (b) doze ligações são conectadas para formar a célula básica da rede hierárquica PWT, equivalente à hierarquia de ordem um; em (c) cada ligação da hierarquia anterior é substituída por uma célula básica, formando assim a hierarquia na ordem dois. Esse procedimento, onde cada ligação é substituída pela célula básica, é repetido até a hierarquia de ordem $n$ . . . . .	16

- 2.3 Para a rede hierárquica de MK com  $D = 3$ , exibimos o comportamento da distribuição de probabilidades ao longo de 16 iterações do GR para três temperaturas (escaladas convenientemente) diferentes. Em (a), para a temperatura  $k_B T/J = 0.8497$ , a cada iteração a largura aumenta sempre com média nula, representando o comportamento esperado na fase VS; em (b), para a temperatura  $k_B T/J = 0.8797$ , ocorre o colapso das distribuições, sendo portanto, esta a distribuição do ponto fixo associada à transição VS-P e a temperatura correspondente é denominada temperatura crítica; em (c), para a temperatura  $k_B T/J = 0.9097$ , observamos que a largura diminui a cada iteração, representando o comportamento esperado na fase P. Em todos os casos, a seta vermelha indica a distribuição inicial para os acoplamentos. . . . . 24
- 2.4 Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ) ou para a fase P ( $\eta_P$ ). Neste caso os acoplamentos são obtidos inicialmente de uma distribuição gaussiana com média zero. Obtemos a temperatura crítica observando o ponto onde ocorre o cruzamento das duas curvas, ou seja, quando  $\eta_{VS} = \eta_P$ , encontrando neste caso  $k_B T_c/J = 0.982(2)$ . . . . . 26
- 2.5 Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ) ou para a fase F ( $\eta_F$ ), com a temperatura fixada em zero ( $k_B T/J = 0$ ). O cruzamento das duas curvas determina o ponto associado à transição de fases VS-F, ou seja, quando  $\eta_{VS} = \eta_F$ ; neste caso encontramos que  $J_0/J = 0.564(2)$ . . . . . 27
- 2.6 Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ), para a fase F ( $\eta_F$ ), ou para a fase P ( $\eta_P$ ). (a) Para a temperatura  $k_B T/J = 1.760$  encontramos amostras em todas as três fases. (b) Novamente, para a temperatura  $k_B T/J = 1.766$ , as três fases coexistem, porém neste caso encontramos  $\eta_{VS} = \eta_P = \eta_F$ , que nos fornece o valor de  $J_0$  associado ao ponto multicrítico,  $J_0/J = 0.5437(13)$ . . . 30
- 2.7 Diagrama de fases utilizando como distribuição inicial de acoplamentos uma gaussiana [Eq. (2.9)]. Observa-se a existência de três fases distintas, a fase vidro de spins (VS), a fase paramagnética (P) e a fase ferromagnética (F). 31
- 3.1 Gráfico log-log para a distância [Eqs. (3.15) e (3.16)] à temperatura nula ( $d_J^{(n)}$ ) e à temperatura diferente de zero ( $d_T^{(n)}$ ) versus  $L = b^n$ . O expoente  $\zeta$  é obtido diretamente das inclinações das retas nas regiões apropriadas. . 43

- 3.2 Gráfico log-log da grandeza definida na Eq. (3.17) *versus*  $L = b^n$ , para  $T > 0$  e  $\delta T = 10^{-14}$ . A reta pontilhada representa o ajuste linear dos dados e a sua inclinação fornece o expoente  $d_s$  para a rede hierárquica PWT. 46
- 3.3 O expoente de rigidez  $y$  para redes hierárquicas da família MK (ver figura 2.1(a)), obtido na Ref. [70], é representando em função da dimensão fractal  $D$  (quadrados); nesta representação as barras de erro são menores que os símbolos. Para dimensões inteiras, apresentamos os resultados calculados através de simulações sobre redes de Bravais (círculos),  $y = -0.287(4)$  ( $D = 2$ ) [93],  $y = 0.20(5)$  ( $D = 3$ ) [68], e  $y \approx 0.75$  [68], ou  $y \approx 0.70$  [105], para  $D = 4$ . Para a rede hierárquica PWT (triângulo) observamos que o resultado difere significativamente do obtido para a mesma dimensão fractal ( $D \cong 3.58$ ) na rede hierárquica de MK. . . . . 47
- 4.1 Diagramas de fluxo para diferentes distribuições de probabilidades  $P(K_{ij})$ , para duas redes da família MK com dimensões fractais: (a)  $D = 3$ ; (b)  $D = 6$ . Em ambos os casos a seta vermelha indica o ponto associado à distribuição de ponto fixo (PF); esta região é ampliada na inserção em (a). Observa-se que a distribuição inicial bimodal é a mais distante da distribuição de ponto fixo, enquanto a  $q$ -gaussiana e exponencial esticada já iniciam as iterações do GR muito próximas da mesma. . . . . 57
- 4.2 Diagrama de fluxo para diferentes distribuições de probabilidades  $P(K_{ij})$ , para a rede hierárquica PWT. A seta vermelha indica o ponto associado à distribuição de ponto fixo (PF); a distribuição exponencial esticada mantém-se neste ponto da primeira até a décima iteração do GR, enquanto a gaussiana alcança este ponto somente após a terceira iteração. . . . . 58

- 4.3 Distribuição de ponto fixo na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ . A distribuição inicial considerada é a gaussiana, cuja temperatura crítica vale  $(k_B T_c / J) = 0.8797(5)$ . Para um grande intervalo de iterações do GR, de  $n = 4$  até  $n = 16$ , obtivemos a distribuição de ponto fixo. (a) Na representação linear, os ajustes com a  $q$ -gaussiana e exponencial esticada não apresentam diferenças perceptíveis. Os mesmos dados são apresentados como  $\ln_q P(K_{ij})$  versus  $K_{ij}^2$ , onde o ajuste com a  $q$ -gaussiana (linha verde) é uma linha reta, sendo comparado com a exponencial esticada (linha vermelha pontilhada). (b) Os mesmos dados e ajustes de (a) são exibidos na representação log-linear; na inserção aumentamos o tamanho das caixas na região das caudas (ver o texto), reduzindo assim a dispersão dos dados nesta região. . . . . 61
- 4.4 Dados da distribuição de ponto fixo sobre a rede hierárquica PWT. Para todos os dados apresentados, a distribuição inicial considerada é uma gaussiana, cuja temperatura crítica vale  $(k_B T_c / J) = 0.9821(5)$ . Para um dado intervalo de iterações do GR, de  $n = 4$  até  $n = 10$ , obtivemos a distribuição de ponto fixo. (a) Na representação linear exibimos os dados e o ajuste com a distribuição exponencial esticada. (b) Os mesmos dados com seu ajuste são exibidos na representação log-linear; na inserção, aumentamos o tamanho das caixas na região das caudas (ver o texto), reduzindo assim a dispersão. . . . . 63
- 4.5 Distribuições de ponto fixo para redes hierárquicas da família MK com dimensão fractal  $2.58 \leq D \leq 7$ , representadas pelos ajustes das distribuições  $q$ -gaussianas Eq. (4.7), além da distribuição exponencial esticada Eq. (4.12) para a rede hierárquica PWT (linha preta pontilhada). (a) Na representação log-linear, observamos as larguras das distribuições diminuindo com o aumento da dimensão fractal. (b) Nas variáveis usadas, as distribuições  $q$ -gaussianas com mesmo índice  $q$  não dependem da largura, colapsando em um única curva: conseqüentemente, a linha vermelha representa as distribuições associadas às redes hierárquicas da família MK com  $2.58 \leq D \leq 5$ , para as quais  $q \approx 1.10$ , considerando as barras de erro. A linha pontilhada azul representa uma distribuição gaussiana. . . . . 66

- 4.6 Diversas tentativas de ajuste para distribuições de ponto fixo na representação log-linear. (a) VS de Ising na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ ; além das distribuições usadas na figura 4.3 (exponencial esticada e  $q$ -gaussiana), consideramos como possibilidades de ajuste as distribuições gaussiana,  $\alpha$ -Lévy estável e  $t$ -student. (b) VS de Ising na rede hierárquica PWT; além da distribuição usada na figura 4.4 (exponencial esticada), consideramos como possibilidades de ajuste as distribuições gaussiana,  $\alpha$ -Lévy estável,  $t$ -student e  $q$ -exponencial esticada. A região central é ampliada (escala linear-linear) nas respectivas inserções. . . . . 71
- 5.1 Ilustração das etapas para implementação do método MCC na rede hierárquica PWT. A primeira etapa [de (a) até (c)] consiste no processo de renormalização, onde todos os sítios internos são dizimados até obtermos apenas a ligação efetiva entre os sítios  $\mu$  e  $\nu$ , ou seja, a hierarquia de ordem zero [exibida em (c)]. A segunda etapa [de (d) para (e)] consiste na reconstrução da rede e através do método MCC determinamos as magnetizações locais dos sítios internos. As células mostradas em (b) e (d) representam a unidade básica geradora da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. . . . . 74
- 5.2 Esquema representativo de uma célula básica com uma ligação efetiva  $\Gamma_{\mu\nu}$  entre os sítios externos  $\mu$  e  $\nu$ , com campos efetivos  $h_\mu$  e  $h_\nu$ . . . . . 77
- 5.3 Apresentamos a magnetização total por spin [Eq. (5.54)] para uma dada faixa de temperaturas, para hierarquias variando de  $n = 3$  até  $n = 7$ . Os momentos magnéticos locais são obtidos com o método MCC aplicado à rede hierárquica PWT. . . . . 87
- 5.4 Parâmetro de ordem de EA versus a temperatura para quatro hierarquias diferentes. Para cada hierarquia utilizamos  $N_a = 400$  amostras. A distribuição inicial de acoplamentos considerada foi a distribuição de ponto fixo. A seta azul indica a temperatura crítica. . . . . 88
- 5.5 Calor específico em função da temperatura para a sétima hierarquia ( $n = 7$ ). A linha pontilhada é uma extrapolação para baixas temperaturas e a seta azul indica a temperatura crítica. . . . . 89

- 5.6 (a) Neste gráfico  $\chi_1$  representa a contribuição das correlações entre primeiros vizinhos para a suscetibilidade de VS. Nota-se a existência de um pico, cuja posição  $\tilde{T}(L)$  aproxima-se da temperatura crítica com o aumento da temperatura. Na inserção mostramos  $a(L) = (\tilde{T}(L) - T_c)/T_c|_{\chi_1=\tilde{\chi}_1(L)}$ , que representa a distância entre a temperatura  $\tilde{T}(L)$ , associada ao valor máximo de  $\chi_1$ , com relação à temperatura crítica no limite  $L \rightarrow \infty$  ( $T_c$ ), variando em função de  $L^{-1}$ . (b) Neste gráfico  $\chi_2^{(p)}$  representa a contribuição das correlações entre segundos vizinhos dentro da célula básica [Eq. (5.53)]. 92
- 5.7 Suscetibilidade linear [Eq. (5.59)] em função da temperatura. Para a maior hierarquia estudada ( $n = 7$ ) não existe nenhuma evidência de divergência nas proximidades da temperatura crítica  $T_c$  (indicada pela seta azul); a linha pontilhada representa uma extrapolação para baixas temperaturas. A curva pontilhada de cor vermelha mostra que para altas temperaturas a lei de Curie ( $\chi \propto T^{-1}$ ) é obedecida. . . . . 93
- 5.8 Colapso de dados para parâmetro de ordem de EA, onde  $\epsilon = |T - T_c|/T_c$  e  $L = b^n$  com  $b = 2$  para a rede hierárquica PWT. Exibimos o colapso para simulações de diferentes hierarquias para a distribuição de ponto fixo. A inserção apresenta uma ampliação da região crítica. . . . . 95
- 6.1 Ilustração do mapeamento da rede hierárquica PWT. (a) Mapeamento completo da rede onde a posição de cada sítio é obtida seguindo os números em ordem crescente. (b) Mapeamento parcial, seguindo os números em ordem crescente teremos a posição de cada sítio ao longo de um caminho ligando os sítios  $\mu$  e  $\nu$ ; assim estamos tratando apenas uma pequena parte da rede. Números com mesma cor pertencem à mesma hierarquia. . . . . 102
- 6.2 Esquema indicando a posição inicial e final dos sítios em cada hierarquia, quando realizamos o mapeamento completo da rede. . . . . 103
- 6.3 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 0.6$ ; cada parte corresponde a 40000 sítios da rede PWT. Em (a) exibimos as primeiras 40 mil posições, contendo sítios da hierarquia  $n = 0$  até a hierarquia  $n = 5$ ; (b) apenas sítios da hierarquia  $n = 5$ ; (c) sítios da hierarquia  $n = 6$  oriundos das ligações do quadrado; em (d) os sítios pertencem ao início da hierarquia  $n = 7$ ; (e) sítios da sétima hierarquia que são oriundos das ligações do quadrado. . . . . 105

- 6.4 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 0.95$ . As posições mostradas são as mesmas da figura 6.3. . . . . 106
- 6.5 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 1.40$ . As posições são as mesmas exibidas na figura 6.3. . . . . 107
- 6.6 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos perfis dos parâmetros de ordem de EA locais de uma única amostra, para três temperaturas diferentes. Neste caso, adotamos o caminho que conecta os sítios raízes passando pelo menor número de células básicas possível; em cada célula necessariamente passamos pelos quatro sítios internos [ver figura 6.1(b)]. . . . . 108
- 6.7 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 0.6$ ; cada parte corresponde a 40000 sítios da rede PWT. Em (a) exibimos as primeiras 40 mil posições, contendo sítios da hierarquia  $n = 0$  até a hierarquia  $n = 5$ ; (b) apenas sítios da hierarquia  $n = 5$ ; em (c) mostramos sítios da hierarquia  $n = 6$  oriundos das ligações do quadrado; (d) sítios do início da hierarquia  $n = 7$ ; (e) sítios da sétima hierarquia oriundos das ligações do quadrado. . . . . 109
- 6.8 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 0.95$ . As posições são as mesmas consideradas na figura 6.7. . . . . 110
- 6.9 Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 1.40$ . As regiões são as mesmas consideradas na Fig. 6.7. . . . . 111
- 6.10 Perfis dos parâmetros de ordem de EA locais para a hierarquia de ordem  $n = 7$ , 400 amostras e três temperaturas diferentes. Neste caso, adotamos um caminho que conecta os sítios da raízes passando pelo menor número de células básicas possível; em cada célula necessariamente passamos pelos quatro sítios internos. . . . . 112
- 6.11 Função  $f(\alpha)$  para várias temperaturas. A seta vermelha indica a curva pontilhada que está associada à temperatura crítica  $(k_B T_c/J) = 0.95(2)$ ; mais estreitas que esta temos em ordem decrescente temperaturas até  $(k_B T_c/J) = 0.91$ , enquanto que as mais largas correspondem a temperaturas crescentes até  $(k_B T_c/J) = 1.42$ . . . . . 117

6.12	Função $f(\alpha)$ para temperaturas $T \leq T_c$ . A curva pontilhada está associada à temperatura crítica $(k_B T_c/J) = 0.95(2)$ e nota-se o estreitamento da função $f(\alpha)$ com o decréscimo da temperatura até a curva para $T = 0.2T_c$ , sugerindo uma convergência para um único expoente $\alpha$ à temperatura nula. 118
6.13	$\alpha_{\max}$ e $\alpha_{\min}$ do perfil médio do parâmetro de EA para diversas temperaturas. 118
C.1	Ilustração da construção da rede hierárquica PWT. . . . . 132

# Lista de Tabelas

2.1	Valores de pontos críticos importantes do diagrama de fases obtidos para o VS de Ising na rede hierárquica PWT [ver figura 2.1(b)]. . . . .	28
3.1	Valores dos expoentes de caos ( $\zeta$ ), rigidez ( $y$ ) e da dimensão fractal da superfície da gota ( $d_s$ ), obtidos através de simulações computacionais na rede cúbica por diferentes autores. Também apresentamos estimativas para os mesmos expoentes, na rede hierárquica PWT, que foram obtidos neste trabalho. . . . .	44
4.1	Temperaturas críticas ( $k_B T_c / J$ ) estimadas para diferentes distribuições iniciais nas redes hierárquicas da família de MK e PWT. Cada distribuição, com sua respectiva temperatura crítica, converge após algumas iterações do GR para um ponto fixo, como mostrado nas figuras 4.1 e 4.2, onde estimamos a temperatura crítica universal da distribuição de ponto fixo $k_B T_c^{PF} / J$ . Apresentamos nas últimas colunas as quantidades $\kappa_4$ [Eq. (4.4)] e $\kappa_6$ [Eq. (4.5)] associadas à distribuição de ponto fixo, calculadas numericamente a partir dos dados. . . . .	59
4.2	Valores estimados dos parâmetros $q$ e $B_q$ no ajuste com a distribuição $q$ -gaussiana [Eq. (4.7)], assim como, $J^{-1}$ e $\delta$ no ajuste da exponencial esticada [Eq. (4.12)], para diferentes redes hierárquicas de MK. Para a rede hierárquica PWT apresentamos os parâmetros de ajuste apenas para a distribuição exponencial esticada. Para cada ajuste calculamos $\chi^2 / ndf$ ( $ndf$ representa o número de graus de liberdade, típico do teste $\chi^2$ ). . . . .	59
4.3	Estimativas para o expoente $\nu$ , considerando a distribuição $q$ -gaussiana da Eq. (4.7) como distribuição inicial no caso de redes hierárquicas de MK. Para a rede hierárquica PWT, utilizamos a distribuição exponencial esticada da Eq. (4.12) como distribuição inicial. . . . .	68

- 5.1 Para a rede hierárquica PWT os expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$  foram obtidos através do colapso de dados do parâmetro de ordem de EA na figura 5.8, enquanto  $\eta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  são determinados das relações de escala e hiperescala. Incluímos também resultados obtidos na rede cúbica; na Ref. [113] utilizou-se uma distribuição bimodal, enquanto que na Ref. [106] uma distribuição gaussiana. . . . . 98

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>I</b>
<b>Lista de abreviaturas</b>	<b>III</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>III</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>XI</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Redes hierárquicas</b>	<b>12</b>
2.1 Introdução . . . . .	12
2.2 Características gerais de uma rede hierárquica . . . . .	13
2.3 Renormalização de vidros de spins em redes hierárquicas . . . . .	17
2.4 Diagrama de fases . . . . .	23
<b>3 Natureza caótica da fase vidro de spins</b>	<b>32</b>
3.1 Introdução . . . . .	32
3.2 Quadro de gotas . . . . .	33
3.3 Expoente de caos . . . . .	38
3.4 Procedimento numérico . . . . .	39
3.5 Resultados . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Distribuição de ponto fixo</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	48
4.2	Procedimento numérico . . . . .	50
4.2.1	Distribuições de probabilidades consideradas . . . . .	52
4.3	Resultados . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Magnetizações locais</b>	<b>72</b>
5.1	Introdução . . . . .	72
5.2	Equações de recorrência do grupo de renormalização . . . . .	75
5.3	Equações de recorrência para magnetizações locais . . . . .	76
5.3.1	Campos magnéticos locais diferentes de zero . . . . .	76
5.3.2	Ausência de campos magnéticos . . . . .	81
5.4	Resultados . . . . .	86
5.4.1	Magnetização . . . . .	86
5.4.2	Parâmetro de ordem de Edwards-Anderson . . . . .	87
5.4.3	Calor específico . . . . .	89
5.4.4	Suscetibilidade de vidro de spins . . . . .	90
5.4.5	Expoentes críticos . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Multifractalidade</b>	<b>99</b>
6.1	Introdução . . . . .	99
6.2	Perfis do parâmetro de ordem de EA . . . . .	100
6.3	Análise multifractal . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Função de Partição <math>Z_{S_\mu S_\nu}</math></b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Termos das relações de recorrência</b>	<b>126</b>

<b>C Endereçamento de sítios e ligações</b>	<b>131</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>133</b>

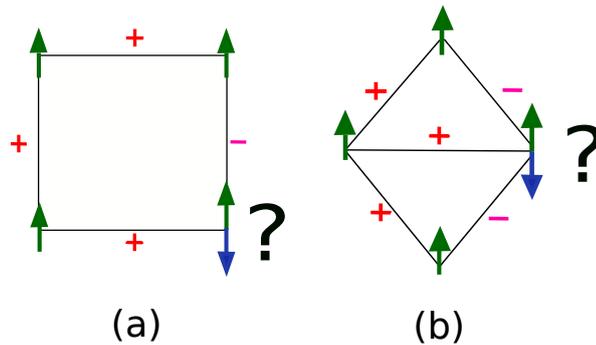
# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas quatro décadas, sistemas que apresentam desordem e frustração, como os vidros de vpins (VSs), foram intensamente estudados por físicos e matemáticos. Ao longo deste período ocorreu um grande avanço tecnológico e computacional, porém, simulações numéricas de VSs em dimensão três revelam-se um tema de grande debate ainda hoje. Novas técnicas analíticas e computacionais estão sendo desenvolvidas com o objetivo de conhecer mais profundamente a fase VS. Estas novas ideias e “ferramentas”, inicialmente propostas para VSs, têm encontrado um amplo campo de aplicações também em outras áreas de pesquisa, como redes neurais, otimização combinatória, biologia e matemática [1].

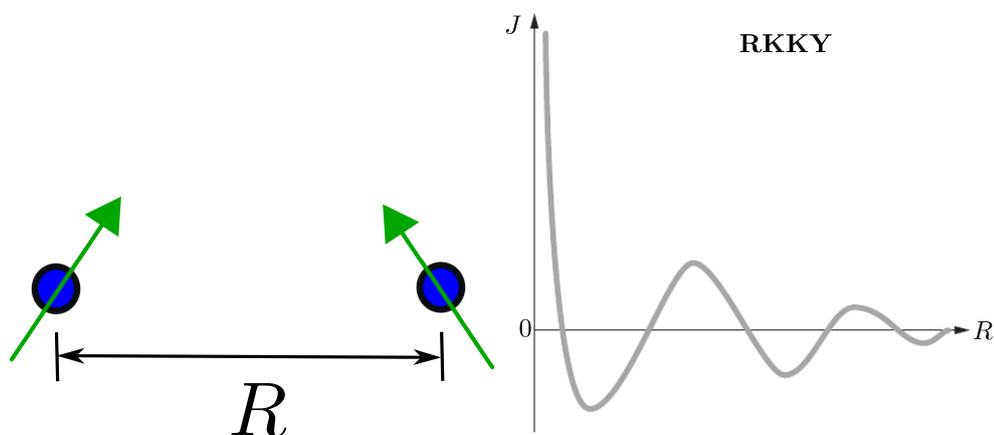
A fase VS surge a baixas temperaturas quando um aglomerado de spins apresenta um “congelamento” local desordenado orientacionalmente. Esta estrutura ocorre devido às interações competitivas - positivas e negativas - presentes na amostra, tornando impossível para os spins atingirem uma configuração que satisfaça todas as interações, efeito conhecido como frustração, exibido na figura 1.1, na qual este efeito é ilustrado em dois casos simples. Devido à existência de frustração, o estado fundamental da fase VS pode ser altamente degenerado, visto que não é possível satisfazer a todas as interações simultaneamente, apresentando assim várias configurações diferentes, todas aproximadamente com a mesma energia. Como consequência, torna-se difícil determinar numericamente o estado fundamental da fase VS.

Os vidros de spins foram observados inicialmente em ligas binárias constituídas de metais nobres fracamente diluídos com íons de metais de transição magnéticos (impurezas magnéticas); típicos exemplos de VSs são as ligas de  $\text{Cu}_{1-x}\text{Mn}_x$  e  $\text{Au}_{1-x}\text{Fe}_x$ , onde  $x$  representa a concentração das impurezas. Nestes casos específicos, os átomos magnéticos ocupam posições aleatórias na rede e devido aos elétrons de condução das matrizes não magnéticas, interações de troca indiretas surgem entre os íons magnéticos, conhecidas como interações RKKY (Ruderman, Kittel, Kasuya e Yosida). Estas interações têm um caráter oscilatório para grandes distâncias  $R$ , como exibido na figura 1.2. Como a distância entre os átomos magnéticos são aleatórias, algumas interações de um spin qualquer com outro spin poderão ser positivas, favorecendo assim o alinhamento paralelo entre os spins ( $\uparrow\uparrow$ ), ou poderão ser negativas, favorecendo assim um alinhamento antiparalelo entre os spins ( $\uparrow\downarrow$ ). Como consequência, para baixa temperaturas, esta mistura de interações cria um congelamento dos spins em direções totalmente aleatórias. Atualmente existem um número muito grande de materiais que apresentam características de VS, onde outros mecanismos são responsáveis por gerar interações com diferentes sinais [2].



**Figura 1.1:** Agrupamentos com quatro spins apresentando frustração. Nestes dois casos as intensidades das interações são iguais diferindo apenas no sinal. Verifica-se que tanto em (a) quanto em (b) existe mais de uma configuração de estado fundamental, ou seja, o mesmo é degenerado.

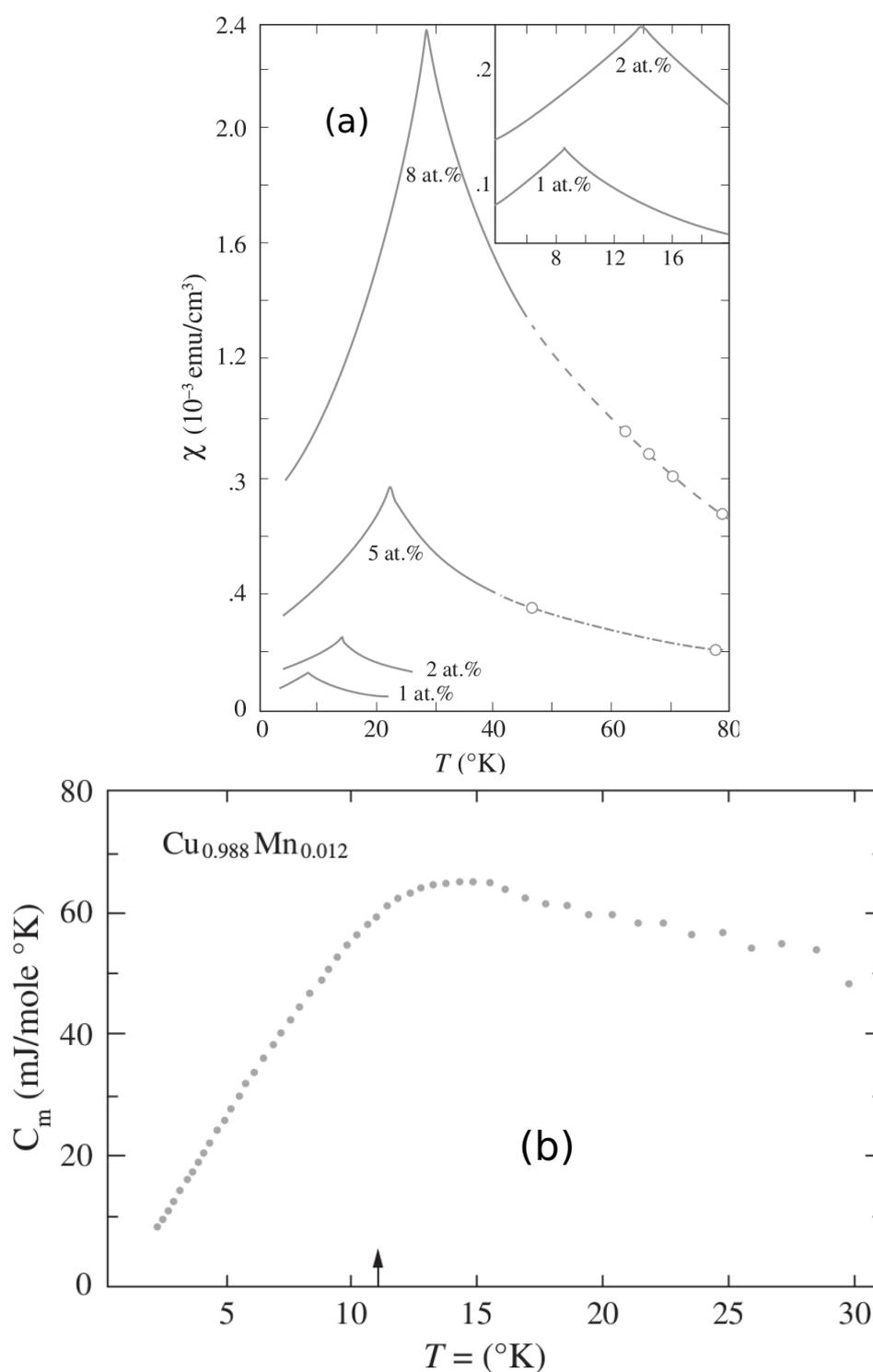
Experimentalmente, materiais que apresentam a fase VS revelam algumas características marcantes. A suscetibilidade linear dependente da frequência apresenta um pico agudo característico, em campos magnéticos pequenos. Esta propriedade foi observada



**Figura 1.2:** Ilustração de como varia a intensidade da interação RKKY entre dois spins separados por uma distância  $R$ .

nas ligas metálicas diluídas de AuFe [3] e CuMn [4], assim como no isolante concentrado  $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$  [5] (tipicamente para  $0.13 \leq x \leq 0.5$ ), sendo esta uma assinatura universal da fase VS. Na figura 1.3(a) exibimos o comportamento da suscetibilidade para uma liga  $\text{Au}_{1-x}\text{Fe}_x$  para diferentes concentrações de ferro, onde o pico agudo sugere uma transição da fase paramagnética (P) para a fase VS a uma temperatura finita. O calor específico é uma função termodinâmica que fornece uma assinatura bem característica em VSs, ao invés de uma divergência na temperatura crítica ( $T_c$ ), o mesmo apresenta um máximo suave, arredondado e contínuo, como exibido na figura 1.3(b). A transição da fase P para a fase VS é caracterizada pela observação de um pico na suscetibilidade linear, um máximo arredondado no calor específico e para temperaturas abaixo de  $T_c$ , a ocorrência de um congelamento estrutural dos momentos magnéticos de forma aleatória sobre a rede.

Outra característica observada experimentalmente é a magnetização remanente, observada quando aplicamos um campo magnético ao sistema. A história do que aconteceu com o sistema é muito importante. Se o material é resfriado na presença do campo magnético a partir de uma temperatura  $T > T_c$  para uma outra  $T < T_c$ , e então o campo é desligado, inicialmente o VS permanece com uma magnetização interna, chamada de *magnetização termo-remanente*, e com o passar do tempo a magnetização decai muito lentamente. Outro procedimento consiste em resfriar o sistema de uma temperatura  $T > T_c$  para



**Figura 1.3:** (a) Suscetibilidade linear para a liga de Au<sub>1-x</sub>Fe<sub>x</sub>. A porcentagem indica a concentração de ferro e os círculos indicam algumas medidas para altas temperaturas (extraído da Ref. [3]). (b) Calor específico para liga Cu<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>, onde a seta indica a temperatura crítica estimada pelo pico da suscetibilidade (extraído da Ref. [6]).

$T < T_c$  sem campo. Depois do resfriamento o campo magnético é ligado, e após um certo tempo o mesmo é removido. Isto faz surgir uma *magnetização remanente isotérmica* [7]. Em ambos os casos a magnetização remanente depende da história do processo e varia lentamente no tempo. Efeitos de remanência também são observados na suscetibilidade magnética linear. Outras propriedades dinâmicas importantes da fase VS são envelhecimento, o rejuvenescimento, assim como outros efeitos de memória, onde o material parece reter informações de seu passado [8, 9].

Em 1975, Edwards e Anderson (EA) [10] definiram um modelo para a descrição de um vidro de spins, cujos principais ingredientes eram a combinação de frustração e desordem temperada. Introduziram assim um modelo com constantes de acoplamento aleatórias  $\{J_{ij}\}$ , definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j, \quad (1.1)$$

com interações entre pares de spins do tipo Ising ( $S_i = \pm 1$ ), primeiros vizinhos de uma dada rede. Um novo parâmetro de ordem, também foi introduzido, conhecido na literatura como parâmetro de ordem de Edwards-Anderson,

$$q^{EA} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\langle S_i \rangle_T]_c, \quad (1.2)$$

onde  $N$  é o número total de spins do sistema,  $\langle \dots \rangle_T$  representa uma média térmica e  $[\dots]_c$  uma média sobre diferentes configurações das interações aleatórias. O parâmetro de ordem,  $q^{EA}$ , desempenha um papel central na descrição da fase VS, sendo diferente de zero na fase VS e nulo na fase P.

Atualmente existem diversos quadros que tentam descrever a fase VS; a seguir, descreveremos resumidamente os dois principais.

- **Quadro de quebra de simetria de réplicas**

No modelo EA as interações de troca são de curto alcance (interações entre primeiros vizinhos); uma extensão do tipo aproximação de campo médio foi proposta por Sherrington e Kirkpatrick (SK) [11]. No modelo SK as interações são de alcance infinito, ou seja, cada spin interage com todos os outros spins do sistema, e são definidas aleatoriamente e independentemente a partir de uma distribuição de probabilidades. O hamiltoniano do modelo SK para um sistema com  $N$  spins, na ausência de uma campo magnético, é dado por

$$H = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{ij} S_i S_j, \quad (1.3)$$

onde utilizamos spins clássicos do tipo Ising ( $S_i = \pm 1$ ) e os acoplamentos são obtidos de uma distribuição gaussiana com média nula e variância unitária. Neste caso, o somatório da Eq. (1.3) gera acoplamentos de  $O(N^2)$  para um sistema de  $N$  spins; isso ocorre pois cada spin interage com outros  $N - 1$  spins, e assim a introdução do fator  $1/\sqrt{N}$  no hamiltoniano garante que no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ) a energia livre por spin seja finita<sup>1</sup>.

Este modelo de campo médio foi resolvido na chamada aproximação de simetria de réplicas, onde Sherrington e Kirkpatrick [11] mostraram que existe uma transição de fases à temperatura finita; neste caso a temperatura crítica é da ordem da largura da distribuição de acoplamentos ( $k_B T_c / J = 1$ ). Para esta temperatura a suscetibilidade apresenta um pico, assim como o calor específico um máximo arredondado.

Entretanto, Almeida e Thouless (AT) [12] em 1978 mostraram que a solução do modelo SK com um único parâmetro de ordem (simetria de réplicas) é instável abaixo da linha de Almeida-Thouless, no plano temperatura-campo ( $T - H$ ), assim

---

<sup>1</sup>Se todos os acoplamentos fossem ferromagnéticos, o fator de normalização seria  $1/N$ ; porém, para VSs os acoplamentos apresentam sinais aleatórios, e por isso um fator  $O(\sqrt{N})$  é suficiente.

como também na ausência de campo magnético para baixas temperaturas, onde o modelo SK apresenta uma entropia negativa<sup>2</sup>.

Através de um procedimento conhecido como quebra de simetria de réplicas (QSR) [8, 13–16], Parisi encontrou a solução analítica do modelo SK para baixas temperaturas. Uma característica marcante da solução de Parisi é que, abaixo da linha AT, o parâmetro de ordem não é caracterizado por um número para um dado par de valores  $(T, H)$ , mas por uma função,  $q(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) que varia continuamente. Neste cenário, uma característica da fase VS em campo médio é a existência de um grande número (infinito quando  $N \rightarrow \infty$ ) de estados de equilíbrio [17] (vales na energia livre separados por barreiras que divergem no limite termodinâmico) a baixas temperaturas.

- **Quadro de gotas**

Este quadro se desenvolveu a partir da década de 80, buscando uma descrição mais simples da fase VS. Seu desenvolvimento se deve aos trabalhos pioneiros de McMillan [18], Bray e Moore [19], Fisher e Huse [20, 21]. Quando consideramos excitações do estado fundamental, várias propriedades de escala são assumidas para excitações de aglomerados compactos de spins em uma escala de comprimento  $L$  em torno de um spin particular, onde o número de spins é da ordem de  $L^D$ , sendo  $D$  a dimensão. Estes aglomerados são chamados de gotas. Neste formalismo usa-se naturalmente técnicas do Grupo de Renormalização (GR). Diferente do quadro de QSR, este cenário é baseado na suposição de que abaixo da temperatura de transição existem poucos estados fundamentais (mais precisamente, dois estados para o caso de spins de Ising) na fase VS em qualquer dimensão.

---

<sup>2</sup>Visto que a entropia é proporcional ao logaritmo do número de estados acessíveis, e que o número de estados é um inteiro maior que zero, a entropia não pode ser negativa.

Neste cenário, a energia livre das excitações, de tamanho  $L$ , escala como

$$F_L \sim L^y, \quad (1.4)$$

onde  $y$  é conhecido com expoente de rigidez (ou expoente da gota). O expoente  $y$  revela como a energia livre da gota escala com o comprimento. A fase VS existe apenas para  $y > 0$ , ou seja, a energia livre da gota cresce com  $L$ . Quando  $y < 0$  a fase VS deixa de existir, uma vez que  $F_L$  decresce com  $L$ .

Neste cenário, a presença de um campo magnético externo sempre destrói a transição para a fase ordenada, não existindo portanto a linha AT [19–21]. Devido à natureza altamente não trivial da gota, este quadro prevê um comportamento caótico da fase VS, onde pequenas variações de temperatura, ou perturbações nos acoplamentos, podem alterar o estado fundamental do sistema. Vale salientar que caos devido à mudanças na temperatura também é previsto no cenário QSR. Outras características deste quadro serão abordadas no capítulo 3.

As diferenças entre o quadro de QSR e o de gotas são evidentes, porém, devido à grandes dificuldades computacionais encontradas nas simulações de vidros de spins em três dimensões, ainda não se sabe ao certo qual deles seria mais apropriado para descrever a fase VS do modelo EA. Efeitos de um campo magnético sobre a fase VS revelam drasticamente a diferença entre os dois quadros. No quadro de QSR é previsto a existência de uma fase VS na presença de campo magnético finito e no quadro de gotas esta fase é totalmente destruída por um campo magnético diferente de zero [19–21]. Ainda não existe um consenso sobre este ponto, pois é difícil verificar qual dos quadros está correto, principalmente pelo baixo valor do campo magnético crítico previsto no quadro de QSR, abaixo do qual a fase VS existe.

Outro ponto importante e recentemente muito debatido é a suposição do quadro de QSR de que existe um número infinito de estados puros no limite termodinâmico no

modelo de VS de Ising com interações de curto alcance em dimensões finitas; em contraste com esta hipótese, o quadro de gotas prevê apenas a existência de um par de estados puros. Enquanto que trabalhos recentes sugerem que existem apenas dois estados puros, sendo necessário ir além da descrição de campo médio para descrever corretamente VSs com interações de curto alcance [22–24], este ponto está longe de ser um consenso, já que outros trabalhos também recentes afirmam exatamente o contrário [25–27].

Atualmente a solução no regime de campo médio para modelos de VS é bem compreendida, de forma que o ansatz proposto por Parisi para QSR vem sendo fundamentada por diversos matemáticos [28]; por outro lado, VSs em dimensão finita representam um grande desafio para a física. Nesta tese vamos investigar diversas propriedades da fase VS, e para tal, estudaremos o modelo EA em redes fractais, com destaque para a rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional (PWT), caracterizada por uma dimensão fractal  $D \cong 3.58$ . Redes hierárquicas revelaram-se uma excelente ferramenta para o estudo da fase VS, permitindo através de técnicas do GR, o acesso a grandes escalas de comprimento com um baixo custo computacional, fornecendo estimativas que às vezes diferem menos que 5% em relação às das simulações em redes de Bravais. A maioria dos trabalhos sobre VSs em redes hierárquicas concentram-se nas redes da família Migdal-Kadanoff (MK) [29–40], sendo a rede hierárquica PWT ainda pouco investigada na literatura; entretanto, acreditamos que esta rede forneça resultados melhores do que a rede MK com dimensão fractal  $D = 3$ , sendo uma aproximação mais apropriada para a rede cúbica. Esperamos assim que os resultados aqui encontrados contribuam para uma melhor compreensão do modelo de VS de Ising com interações de curto alcance. A seguir, apresentamos um breve resumo de cada capítulo desta tese.

No capítulo 2 definimos as células básicas das redes hierárquicas da família de MK e da PWT, assim como suas principais características. Além disso, mostramos como implementar técnicas do GR sobre estas redes, apresentando as relações de recorrência que utilizaremos ao longo desta tese. Especificamente para a rede hierárquica PWT, determi-

namos seu diagrama de fases, o qual revela que a fase VS existe para uma temperatura finita, assim como as fases paramagnética e ferromagnética (F).

No capítulo 3 investigamos a natureza caótica da fase VS na rede hierárquica PWT, onde pequenas perturbações nos acoplamentos, ou na temperatura, podem modificar completamente o estado fundamental do sistema. Tal sensibilidade às perturbações é uma propriedade prevista em ambos os quadros apresentados anteriormente. Com o auxílio do GR, calculamos o expoente de caos ( $\zeta$ ), encontrando para este um valor positivo ( $\zeta > 0$ ), o que confirma a natureza caótica da fase VS. Além do expoente de caos, obtemos a dimensão fractal da superfície da gota ( $d_s$ ) e o expoente de rigidez ( $y$ ). Através dos expoentes  $d_s$  e  $y$ , podemos discernir qual é o quadro mais correto para a descrição da fase VS na rede hierárquica PWT. Para dimensão três, o quadro de QSR é consistente com  $d_s = D$  e  $y = 0$ , já o quadro de gotas prevê  $d_s < D$  e  $y > 0$ .

No capítulo 4 investigamos a distribuição de ponto fixo na transição de fases VS–P para redes hierárquicas da família MK com dimensões variando entre  $D \cong 2.58$  e  $D = 7$  e para a rede hierárquica PWT com  $D \cong 3.58$ . Durante o processo de renormalização do sistema, na temperatura crítica, após poucos passos do processo de renormalização, a distribuição que obtemos é a distribuição de ponto fixo. Esta distribuição mostrou-se independente da distribuição inicial, ou seja, podemos iniciar o processo de renormalização com qualquer distribuição<sup>3</sup> para os acoplamentos, que após algumas renormalizações tendemos sempre para a mesma distribuição. Nas simulações, a distribuição de ponto fixo permaneceu inalterada (dentro da nossa precisão numérica) em alguns casos por mais de 13 iterações do GR. Os ajustes revelaram que a distribuição de ponto fixo cai na classe de distribuições conhecidas como  $q$ -gaussianas [41], ou exponenciais esticadas [42]. Posteriormente, a distribuição de ponto fixo da rede hierárquica PWT será usada para o estudo de propriedades termodinâmicas da fase VS.

No capítulo 5, inspirados no método recursivo introduzido por Morgado, Coutinho e

---

<sup>3</sup>Qualquer distribuição caracterizada por momentos finitos.

Curado (MCC) [43], encontramos relações de recorrência que possibilitam a determinação das magnetizações locais, assim como funções de correlação, na rede hierárquica PWT. O método consiste inicialmente em gerar uma rede na hierarquia de ordem  $n$  e através do processo de renormalização obter o acoplamento efetivo do sistema; em seguida, de modo inverso retornamos, e partindo do acoplamento efetivo, determinamos as magnetizações locais em todos os sítios, até alcançarmos novamente a hierarquia de ordem  $n$ . Este procedimento apresenta um alto custo computacional, o que nos possibilitou simular sistemas até a sétima hierarquia ( $n = 7$ ). Para darmos uma ideia do tamanho deste sistema, para  $n = 7$  a rede hierárquica PWT apresenta 13 029 750 sítios e 35 831 808 acoplamentos. Apesar do grande número de sítios considerado, ainda assim os resultados apresentam alguns efeitos de tamanho finito.

A aplicação do método MCC para determinação das magnetizações locais nos permite investigar algumas propriedades termodinâmicas do VS de Ising com interações de curto alcance. É possível calcular o parâmetro de ordem de EA, e para a transição VS-P, determinar seus expoentes críticos. Além do parâmetro de ordem de EA, podemos obter o calor específico e termos que contribuem para o comportamento dominante da suscetibilidade magnética não linear. Verificamos assim uma transição de fases VS-P apresentando características muito semelhantes às aquelas observadas nos experimentos.

No capítulo 6, apresentamos o perfil de parâmetros de ordem locais obtido através de um mapeamento completo da rede hierárquica PWT, onde observamos uma rica e não trivial distribuição de valores ao longo da rede; isto nos induziu a investigar propriedades multifractais do parâmetro de ordem de EA calculado pelo método MCC. Através do espectro de singularidades  $f(\alpha)$  ( $\alpha$  é denominado expoente de Hölder), obtido para diferentes temperaturas considerando médias sobre amostras, confirmamos a existência de características multifractais para este sistema.

Finalmente, no capítulo 7 apresentamos nossas conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Redes hierárquicas

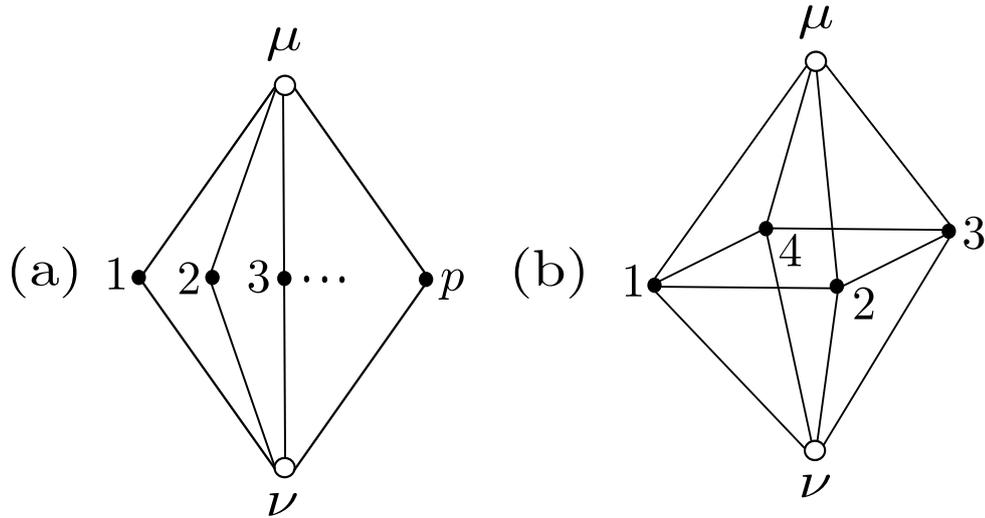
### 2.1 Introdução

O estudo da fase vidro de spins em dimensão três (rede cúbica) é um tema controverso, com diversas questões em aberto. Não existe uma solução analítica e simulações numéricas encontram dificuldades devido às limitações técnicas, que apenas permitem simulações numéricas de sistemas físicos pequenos. Uma alternativa interessante surge através das redes hierárquicas, onde os procedimentos de renormalização são simples e o tempo computacional é baixo quando comparado com simulações de Monte Carlo sobre redes de Bravais. Estas redes, que apresentam características fractais, revelaram-se uma importante ferramenta de investigação na mecânica estatística, principalmente porque certos modelos de spins, como os modelos de Ising e Potts, possuem solução exata em redes hierárquicas específicas. Apesar de sua simplicidade, algumas redes hierárquicas fornecem excelentes resultados para a fase vidro de spins. É importante destacar que na ausência de uma solução analítica, nossos resultados são comparados com simulações realizadas sobre redes de Bravais.

Estudaremos algumas propriedades em redes hierárquicas da família MK [44, 45] (ver figura 2.1(a)), porém uma atenção especial será dada à rede hierárquica PWT [46] (ver figura 2.1(b)), que esperamos ser uma boa aproximação para uma rede cúbica. Na litera-

tura, ao contrário das redes de MK, a rede hierárquica PWT foi pouco estudada e alguns trabalhos recentes nesta rede apresentaram boa concordância com resultados obtidos na rede cúbica. Um estudo sobre o VS de Ising na presença de um campo magnético externo encontrou indícios de que a fase VS pode persistir na presença de um campo magnético [39]; além disso, expoentes de rigidez ( $y$ ) e o diagrama de fases na ausência de um campo magnético externo [47] também foram obtidos para esta rede.

Apresentaremos ao longo deste capítulo algumas propriedades das redes hierárquicas, enfatizando aquelas que utilizaremos nos próximos capítulos. Além disso, descrevemos a implementação do procedimento do GR nestas redes e exemplificamos a utilização de tal procedimento com a determinação do diagrama de fases na rede hierárquica PWT.



**Figura 2.1:** (a) Unidade básica geradora das redes hierárquicas da família Migdal-Kadanoff com  $p$  caminhos paralelos [44, 45]. (b) Unidade básica geradora da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional [46]. Os índices  $\mu$  e  $\nu$  representam os sítios externos da unidade básica.

## 2.2 Características gerais de uma rede hierárquica

Descreveremos aqui algumas características gerais das redes hierárquicas<sup>1</sup> da família de MK e da rede hierárquica PWT, que invariavelmente apresentam propriedades geométricas

<sup>1</sup>Existe um universo muito grande de redes hierárquicas, as quais podem apresentar propriedades diferentes das que abordaremos neste trabalho; para mais detalhes ver as Refs. [46, 48–56].

e topológicas muito diferentes das observadas em redes Bravais.

Inicialmente descrevemos como gerar uma rede hierárquica, tomando como exemplo a rede PWT (o mesmo procedimento é válido para redes hierárquicas de MK). A unidade básica geradora da rede é mostrada na figura 2.1(b), sendo constituída por 12 ligações, 2 sítios externos,  $\mu$  e  $\nu$ , e 4 sítios internos. A construção da rede pode ser feita através de um processo conhecido como “agregação” [48]. Inicialmente considera-se uma ligação na ordem zero (ver figura 2.2(a)), a partir da qual doze ligações são geradas, unidas de tal forma a formarem a célula básica, ou unitária, mostrada na figura 2.2(b). Em seguida, cada ligação da rede na hierarquia de ordem um é substituída por uma célula básica, para formarem uma rede hierárquica na ordem dois, como mostrado na figura 2.2(c). Este processo pode ser repetido um número arbitrário de vezes para formar uma rede na hierarquia de ordem  $n$ . Como toda rede hierárquica, o processo da figura 2.2 é auto similar, ou seja, invariante por mudança de escala.

Alguns parâmetros importantes em uma rede hierárquica são:

(i)  $B$ , número de agregação, sendo o número de subunidades unidas a cada passo para construir uma nova unidade. Na rede hierárquica PWT,  $B = 12$ ;

(ii)  $b$ , número de ligações sobre o menor caminho que conectam os dois spins das extremidades na hierarquia de ordem um. Para as células básicas exibidas na figura 2.1,  $b = 2$ ;

(iii)  $N_L^{(n)}$ , número total de ligações sobre a rede na hierarquia de ordem  $n$ . Para a rede hierárquica PWT temos  $N_L^{(n)} = 12^n$ , já para redes da família MK  $N_L^{(n)} = (pb)^n$ , onde  $p$  representa o número de caminhos paralelos da célula básica.

(iv)  $N_s^{(n)}$ , o número de sítios sobre a rede de ordem  $n$ . Para a rede hierárquica PWT temos

$$N_s^{(n)} = \frac{b^{d-1}\{[(d-1)b^{d-2}(b-1)^2 + b^d]^n - 1\}}{(d-1)b^{d-2}(b-1) + (1+b+b^2)} + 2, \quad (2.1)$$

onde  $b = 2$  e  $d = 3$  nesta rede [56], já para redes da família MK (definidas na figura 2.1(a))

temos

$$N_s = \frac{p[1 + (bp)^n] + 2(p-1)}{2p-1}. \quad (2.2)$$

(iv)  $N_c$ , a razão do número de ligações por sítio da rede, definido como

$$N_c = \frac{N_L^{(n)}}{N_s^{(n)}}, \quad (2.3)$$

onde  $N_L^{(n)}$  e  $N_s^{(n)}$  são tomados no limite termodinâmico. Então, quando  $n \rightarrow \infty$ , para redes hierárquicas da família de MK [figura 2.1(a)] encontramos

$$N_c = \frac{2p-1}{p}, \quad (2.4)$$

enquanto que para rede hierárquica PWT obtemos

$$N_c = \frac{(d-1)b^{(d-2)}(b-1)^2 + b^d - 1}{b^{d-1}(b-1)} = \frac{11}{4}. \quad (2.5)$$

Em uma rede cúbica com condições de contorno periódicas,  $N_c = 3$ ; logo, a rede hierárquica PWT apresenta  $N_c$  menor que o da rede cúbica em 8.3%.

O número de ligações na rede,  $N_L^{(n)}$ , cresce como uma lei de potência,

$$N_L^{(n)} = L^D, \quad (2.6)$$

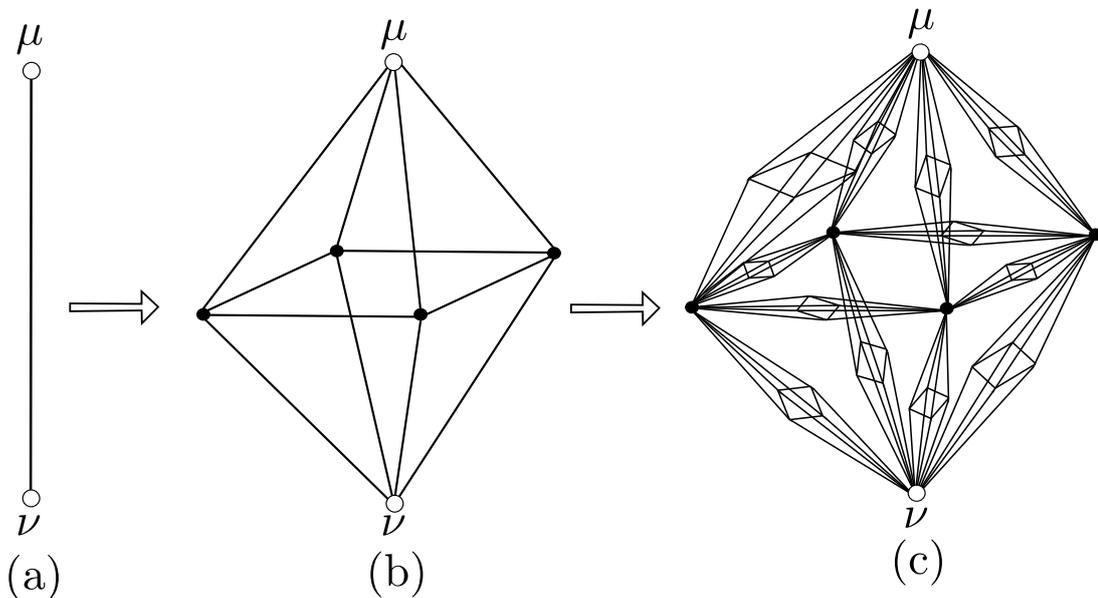
onde  $L = b^n$  representa o tamanho do sistema e  $D$  a dimensão fractal da rede hierárquica, definida como

$$D = \frac{\ln N_L^{(n)}}{n \ln b} \quad \text{ou} \quad D = \frac{\ln N_L^{(1)}}{\ln b}. \quad (2.7)$$

As redes hierárquicas definidas pelas unidades básicas da figura 2.1 possuem respectivamente,  $D = \ln(2p)/\ln 2$  (figura 2.1(a)) e  $D = \ln 12/\ln 2 \cong 3.58$  (figura 2.1(b)).

Outra característica comum observada em redes hierárquicas é a variação do número

de coordenação de um sítio para outro, situação que pode ser observada na figura 2.2(c), onde sítios oriundos das hierarquias iniciais apresentam número de coordenação igual a 16, enquanto para os sítios da hierarquia atual o número de coordenação é 4. Para hierarquias maiores essa diferença tende a aumentar para sítios pertencentes a hierarquias diferentes. Mais detalhes sobre redes hierárquicas podem ser encontrados nas Refs. [46, 48–56].



**Figura 2.2:** (a)-(c) Construção da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Em (a) exibimos uma ligação na ordem zero, que em suas extremidades contém os sítios  $\mu$  e  $\nu$ ; em (b) doze ligações são conectadas para formar a célula básica da rede hierárquica PWT, equivalente à hierarquia de ordem um; em (c) cada ligação da hierarquia anterior é substituída por uma célula básica, formando assim a hierarquia na ordem dois. Esse procedimento, onde cada ligação é substituída pela célula básica, é repetido até a hierarquia de ordem  $n$ .

### 2.3 Renormalização de vidros de spins em redes hierárquicas

Técnicas do GR permitem estudar numericamente sistemas com grandes escalas de comprimento; entretanto, em redes de Bravais o processo de renormalização geralmente leva a um GR atuando em um espaço de dimensão infinita. Uma possibilidade para contornar esta dificuldade consiste em utilizar redes aproximadas que preservem simetrias importantes da rede original e permitam estudar o GR em um espaço de dimensão reduzida. Um bom exemplo são as redes hierárquicas, nas quais, em certas situações, se obtém resultados exatos com o GR [49]. Para mais detalhes sobre GR, e particularmente a utilização de redes hierárquicas, aconselhamos a leitura das Refs. [45, 46, 48–60]. Considerando VSs de Ising com interações de curto alcance, apresentaremos as relações de recorrência do GR para as células básicas exibidas na figura 2.1, que serão estudadas nos próximos capítulos.

O hamiltoniano do sistema que será investigado ao longo deste trabalho é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \quad (S_i = \pm 1), \quad (2.8)$$

no qual a soma  $\sum_{\langle ij \rangle}$  está restrita a pares distintos de spins primeiros vizinhos de uma dada rede hierárquica. As interações  $J_{ij}$  entre os spins  $S_i$  são escolhidas aleatoriamente a partir de uma distribuição de probabilidades  $P(J_{ij})$ ; na literatura as duas distribuições mais utilizadas são a gaussiana e a bimodal, escritas respectivamente, como

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp \left[ -\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right], \quad (2.9)$$

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{2} [\delta(J_{ij} - J) + \delta(J_{ij} + J)], \quad (2.10)$$

onde, na maioria das simulações adota-se a média nula ( $J_0 = 0$ ) e a variância unitária ( $J^2 = 1$ ).

O processo de renormalização do sistema é realizado de forma inversa ao da geração da rede hierárquica (ver seção 2.2): iniciamos com uma rede hierárquica na ordem  $n$ , contendo  $N_L^{(n)}$  ligações e  $N_s^{(n)}$  sítios; em seguida, iniciamos o processo de dizimação dos sítios internos da rede até que reste apenas os sítios externos  $\mu$  e  $\nu$  e uma única ligação efetiva, equivalente à hierarquia de ordem zero. Definindo os acoplamentos adimensionais como  $K_{ij} = \beta J_{ij}$ , onde  $[\beta = 1/k_B T]$ , a relação de recorrência para as células básicas exibidas na figura 2.1, pode ser escrita da seguinte forma,

$$K'_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \log \left( \frac{Z_{--}Z_{++}}{Z_{-+}Z_{+-}} \right), \quad (2.11)$$

onde  $Z_{S_\mu, S_\nu}$  representa a função de partição da célula básica com os sítios externos mantidos fixos ( $S_\mu, S_\nu = \pm 1$ ),

$$Z_{S_\mu, S_\nu} = \text{Tr}_{\{S_{i \neq \mu, \nu}\}} [\exp(-\beta \mathcal{H})]. \quad (2.12)$$

No limite  $T \rightarrow 0$ , a relação de recorrência, Eq. (2.11), torna-se bem mais simples, assumindo a forma

$$4J'_{\mu\nu} = \max[F_{++}] + \max[F_{--}] - \max[F_{-+}] - \max[F_{+-}], \quad (2.13)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  representa vários termos que dependem apenas dos acoplamentos  $\{J_{ij}\}$  (na forma de somas e/ou diferenças destes acoplamentos) e são obtidos dos argumentos das exponenciais na Eq. (2.12), como mostraremos a seguir. Como um exemplo, vamos aplicar as Eqs. (2.11)–(2.13) para a célula básica da PWT [figura 2.1(b)]. A partir da Eq. (2.12)

obtemos os termos,

$$Z_{++} = Z_{--} = \sum_{i=1}^{16} \exp(A_i), \quad (2.14)$$

$$Z_{+-} = Z_{-+} = \sum_{i=1}^{16} \exp(B_i), \quad (2.15)$$

que quando substituídos na Eq. (2.11), fornecem

$$K'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sum_{i=1}^{16} \exp(A_i)}{\sum_{i=1}^{16} \exp(B_i)} \right). \quad (2.16)$$

Na equação acima, os termos  $A_i$  e  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ) dependem somente dos 12 acoplamentos da célula básica e são definidos a seguir,

$$A_1 = +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.17)$$

$$A_2 = -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.18)$$

$$A_3 = -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.19)$$

$$A_4 = +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.20)$$

$$A_5 = +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.21)$$

$$A_6 = -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.22)$$

$$A_7 = -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.23)$$

$$A_8 = +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.24)$$

$$A_9 = +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.25)$$

$$A_{10} = -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.26)$$

$$A_{11} = -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.27)$$

$$A_{12} = +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.28)$$

$$A_{13} = +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.29)$$

$$A_{14} = -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.30)$$

$$A_{15} = -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.31)$$

$$A_{16} = +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.32)$$

$$B_1 = +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.33)$$

$$B_2 = -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.34)$$

$$B_3 = -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.35)$$

$$B_4 = +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.36)$$

$$B_5 = +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.37)$$

$$B_6 = -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.38)$$

$$B_7 = -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.39)$$

$$B_8 = +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4}, \quad (2.40)$$

$$B_9 = +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.41)$$

$$B_{10} = -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.42)$$

$$B_{11} = -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.43)$$

$$B_{12} = +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.44)$$

$$B_{13} = +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.45)$$

$$B_{14} = -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.46)$$

$$B_{15} = -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}, \quad (2.47)$$

$$B_{16} = +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4}. \quad (2.48)$$

Para temperatura nula, a Eq. (2.13) fornece

$$J'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\max} - B_{\max}), \quad (2.49)$$

onde

$$A_{\max} = \max(A_1, A_2, \dots, A_{16}); \quad B_{\max} = \max(B_1, B_2, \dots, B_{16}), \quad (2.50)$$

$$A_i = \lim_{T \rightarrow 0} k_B T(A_i); \quad B_i = \lim_{T \rightarrow 0} k_B T(B_i); \quad (i = 1, 2, \dots, 16). \quad (2.51)$$

Neste exemplo,  $F_{++} = F_{--}$ , sendo compostos por 16 termos de  $A_i$ s, assim como  $F_{+-} = F_{-+}$  e são compostos por 16 termos de  $B_i$ s.

Para o modelo de VS de EA escolhemos inicialmente os acoplamentos  $\{J_{ij}\}$  entre os spins a partir de uma distribuição de probabilidades gaussiana Eq. (2.9); ao longo do

processo de renormalização, que faz uso da Eq. (2.11), a forma da distribuição dos acoplamentos pode alterar-se (quando comparada com a distribuição inicial). A implementação numérica do procedimento de renormalização para uma determinada célula básica é realizada da seguinte forma: (i) geramos a partir de  $P(K_{ij})$ , um banco inicial de acoplamentos com  $N$  números reais (quando  $N \rightarrow \infty$  este banco representa a distribuição de probabilidades associada ao acoplamentos adimensionais  $\{K_{ij}\}$ ); (ii) selecionamos aleatoriamente do banco inicial  $y$  acoplamentos ( $y$  representa o número de acoplamentos da célula básica escolhida) que serão utilizados na Eq. (2.11) para obtermos o primeiro acoplamento de um novo banco; (iii) aplicamos o passo anterior até que o novo banco de acoplamentos contenha  $N$  termos; após isto, concluímos a primeira etapa de renormalização; (iv) para novas renormalizações, repetimos as etapas (ii) e (iii), sempre com o cuidado de selecionar apenas acoplamentos do último banco gerado; assim é possível renormalizar a distribuição  $P(K_{ij})$  do sistema  $n$  vezes.

Nosso interesse neste procedimento é acompanhar ao longo das  $n$  iterações do GR a evolução da distribuição de probabilidades dos acoplamentos adimensionais  $\{K_{ij}\}$ ; para tal, considerando uma distribuição inicial de acoplamentos com média diferente de zero, ou seja, não simétrica, é necessário a cada iteração o acompanhamento dos momentos da distribuição, a partir dos quais, obtemos,

$$\text{Média : } \langle K_{ij} \rangle, \quad (2.52)$$

$$\text{Largura : } \sigma_K = \langle (K_{ij} - \langle K_{ij} \rangle)^2 \rangle^{1/2}. \quad (2.53)$$

Ao longo das  $n$  iterações é possível com essas duas grandezas identificar os seguintes

atratores,

$$\langle K_{ij} \rangle \rightarrow 0; \quad \sigma_K \rightarrow 0; \quad \mathbf{P}; \quad (2.54)$$

$$\langle K_{ij} \rangle \rightarrow 0; \quad \sigma_K \rightarrow \infty; \quad \mathbf{VS}; \quad (2.55)$$

$$\langle K_{ij} \rangle \rightarrow \infty; \quad \sigma_K \rightarrow \infty; \quad (\langle K_{ij} \rangle / \sigma_K \rightarrow \infty); \quad \mathbf{F}. \quad (2.56)$$

A fase P apresenta um comprimento de correlação finito, ou seja, no processo de renormalização as interações diminuem sobre sucessivas iterações [Eq. (2.54)]; isso ocorre porque as interações efetivas fornecem informação sobre as correlações para distâncias cada vez maiores. Por outro lado, se a média permanece nula e a largura da distribuição de acoplamentos aumenta [Eq. (2.55)], a fase é identificada como fase VS. Para investigar a competição entre a fase VS e a fase F é importante lembrar que a fase F é caracterizada pelas interações crescendo após sucessivas iterações, fazendo a média e a largura divergirem [Eq. (2.56)].

Na transição de fases o comprimento de correlação torna-se infinito e com isso o sistema permanece invariante sobre mudanças de escala. Nessa região crítica, para um valor específico de temperatura, o fluxo de acoplamentos<sup>2</sup> através das  $n$  iterações converge para um ponto fixo instável, o qual é associado a uma distribuição de probabilidades denominada distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$ . Para determinação da distribuição  $P^*(K_{ij})$  associada à transição VS–P, variamos a temperatura até que os momentos mantenham-se inalterados (dentro de nossa precisão numérica) ao longo de  $n$  iterações do GR. A temperatura associada à distribuição de ponto fixo é denominada temperatura crítica ( $T_c$ ).

Para exemplificar como obtemos a temperatura crítica  $T_c$  (associada à transição VS–P) e o comportamento da distribuição de acoplamentos durante o processo de renormalização, aplicamos o procedimento do GR na rede hierárquica da família MK caracterizada

---

<sup>2</sup>O fluxo dos acoplamentos pode ser observado em um plano através de um gráfico da  $\langle \tanh^2 K_{ij} \rangle$  versus  $\langle K_{ij}^2 \rangle^{-1/2}$ , conforme estudaremos no capítulo 4.

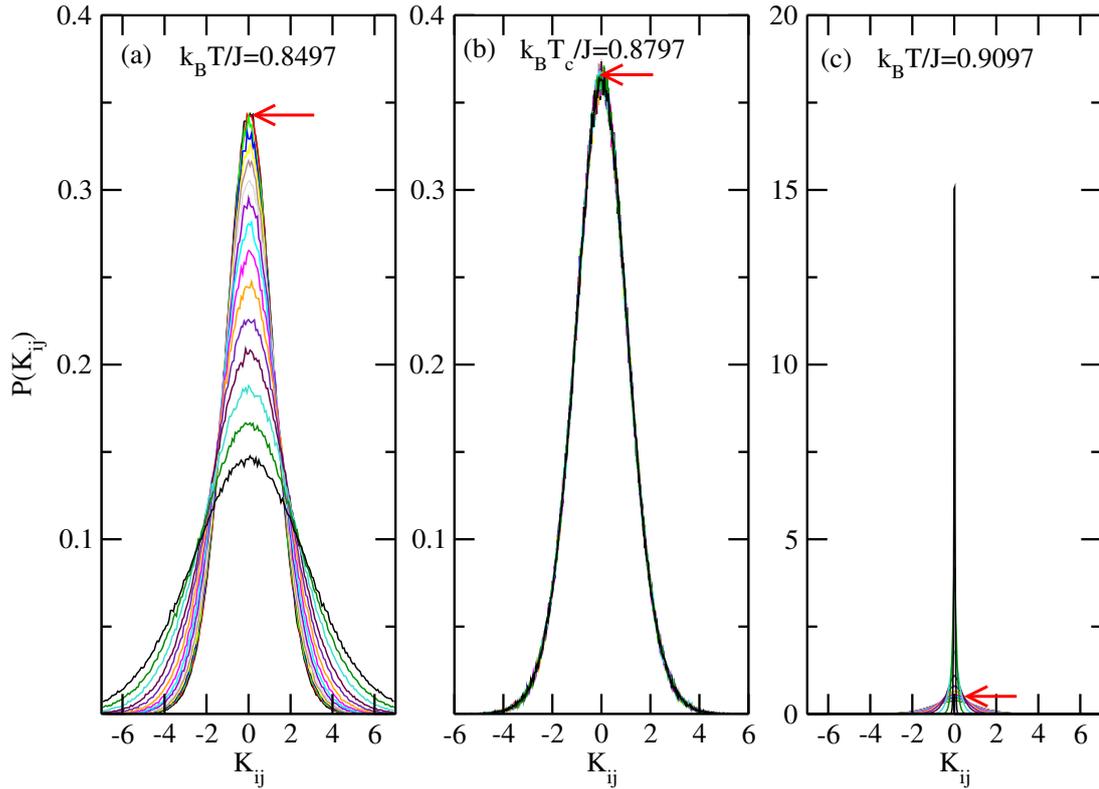
por uma dimensão fractal  $D = 3$ ; na figura 2.3 exibimos o comportamento da distribuição de probabilidades dos acoplamentos através de  $n$  iterações do GR ( $n = 16$ ) para três casos diferentes. A distribuição inicial para os acoplamentos é uma gaussiana com média nula e variância unitária nos três casos. Na figura 2.3(a), para a temperatura  $k_B T/J = 0.8497$ , observa-se que após sucessivas iterações do GR a distribuição continua simétrica, apresentando média zero e largura aumentando a cada iteração, características da fase VS. Na figura 2.3(b) as distribuições associadas a cada iteração do GR aparentemente colapsam em um única curva, ou seja, os momentos praticamente não se alteram após sucessivas iterações do GR, o que caracteriza a distribuição de ponto fixo associada à transição de fases VS–P, cuja temperatura crítica é  $k_B T_c/J = 0.8797$ . Na figura 2.3(c), para a temperatura  $k_B T/J = 0.9097$ , todas as distribuições permanecem com média nula, mas a largura está diminuindo a cada iteração (convergindo para uma delta), indicando a fase P. Em todos os casos a seta vermelha indica o pico da distribuição inicial dos acoplamentos. Destacamos que a forma funcional da distribuição de ponto fixo [figura 2.3(b)] será investigada no capítulo 4 para redes hierárquicas da família de MK e para a rede PWT.

É importante destacar que para VSs o procedimento de renormalização não é exato para as redes hierárquicas da figura 2.1; porém, o mesmo pode ser considerado uma boa aproximação, que além do baixo custo computacional, tem proporcionado um avanço na compreensão do VS de Ising [29, 31, 32, 36–39, 47, 61–71].

A seguir, utilizaremos as técnicas apresentadas nessa seção para construir um diagrama de fases para a rede hierárquica PWT [figura 2.1(b)].

## 2.4 Diagrama de fases

Acompanhando a evolução da distribuição de acoplamentos ao longo das iterações do GR para diferentes temperaturas, determinaremos o diagrama de fases para a rede hierárquica PWT. A fim de obtermos um diagrama de fases preciso, vamos seguir o método introduzido na Ref. [66], cujo objetivo é reduzir a dependência da largura e média



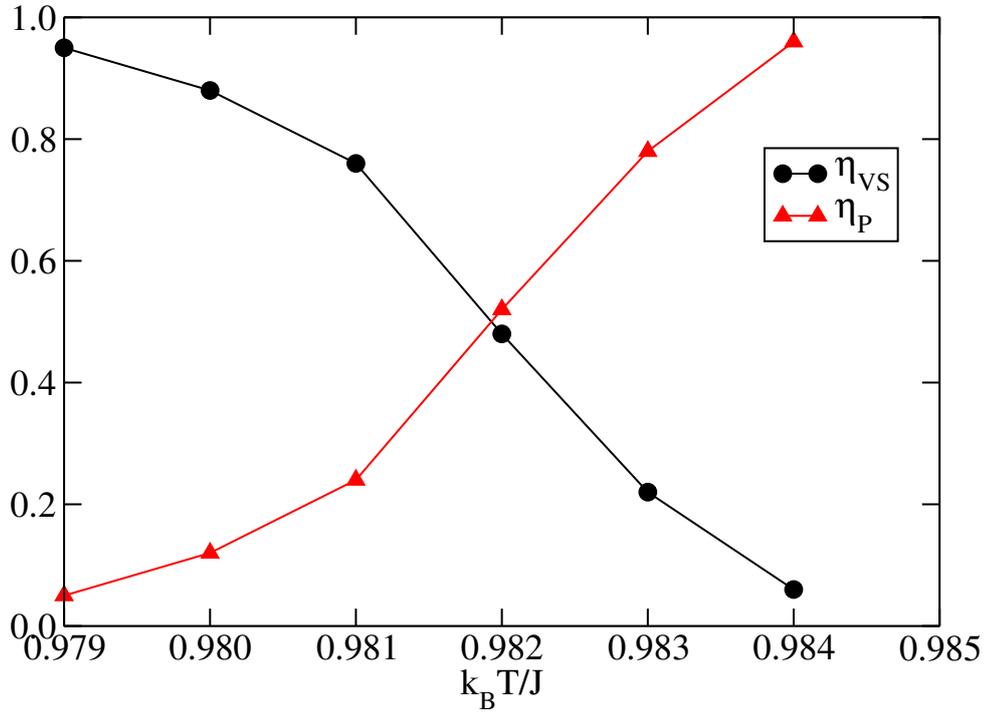
**Figura 2.3:** Para a rede hierárquica de MK com  $D = 3$ , exibimos o comportamento da distribuição de probabilidades ao longo de 16 iterações do GR para três temperaturas (escaladas convenientemente) diferentes. Em (a), para a temperatura  $k_B T/J = 0.8497$ , a cada iteração a largura aumenta sempre com média nula, representando o comportamento esperado na fase VS; em (b), para a temperatura  $k_B T_c/J = 0.8797$ , ocorre o colapso das distribuições, sendo portanto, esta a distribuição do ponto fixo associada à transição VS–P e a temperatura correspondente é denominada temperatura crítica; em (c), para a temperatura  $k_B T/J = 0.9097$ , observamos que a largura diminui a cada iteração, representando o comportamento esperado na fase P. Em todos os casos, a seta vermelha indica a distribuição inicial para os acoplamentos.

[Eqs. (2.52)–(2.53)] de uma determinada sequência de números aleatórios; para tal, em cada passo do GR os momentos são obtidos para  $N_a$  amostras (diferentes sequências de números aleatórios), e em seguida realiza-se uma média sobre amostras para cada grandeza investigada.

Consideramos o hamiltoniano da Eq. (2.8), cujos acoplamentos são obtidos de uma distribuição gaussiana [Eq. (2.9)], que aqui é simulada por um banco de acoplamentos  $\{K_{ij}\}$  contendo  $N = 5 \times 10^5$  números reais, sendo o número de amostras  $N_a = 100$ . Para determinamos a fronteira crítica entre as fases VS–P, é necessário fixar o valor da média  $J_0 = 0$  e em seguida variar a temperatura até encontrarmos  $T_c$ ; realizamos o mesmo procedimento para novos valores de  $J_0 > 0$  e assim determinamos a linha crítica que separa a fase VS da fase P. A partir de determinados valores para  $J_0$ , observa-se que os atratores indicam as fases F ou P, e portanto, a linha crítica obtida separa a fase F da fase P; além disso, para uma faixa de valores de  $J_0$  e temperatura, encontramos as três fases coexistindo (VS–P–F), o que indica a proximidade do ponto multicrítico, sendo este de difícil determinação numérica. Para encontrar a linha crítica que separa as fases VS–F é necessário fixar a temperatura e variar a média da distribuição, até obter a média crítica para a qual os momentos da distribuição permanecem praticamente inalterados (dentro de nossa precisão numérica).

Como estamos considerando diversas amostras, nas proximidades de uma transição de fases, é possível que para uma fração das amostras os momentos indiquem uma determinada fase, enquanto outra fração apresentem atratores de outra fase. Portanto, vamos definir as variáveis,  $\eta_{VS}$  representando a fração de amostras na fase VS,  $\eta_P$  a fração de amostras na fase P e  $\eta_F$  a fração de amostras na fase F. Para definir as barras de erro relacionadas às fronteiras críticas do sistema adotamos o critério de quando  $\eta_j > 0.8$  ( $j = VS, P, F$ ) o sistema encontra-se na fase  $j$ .

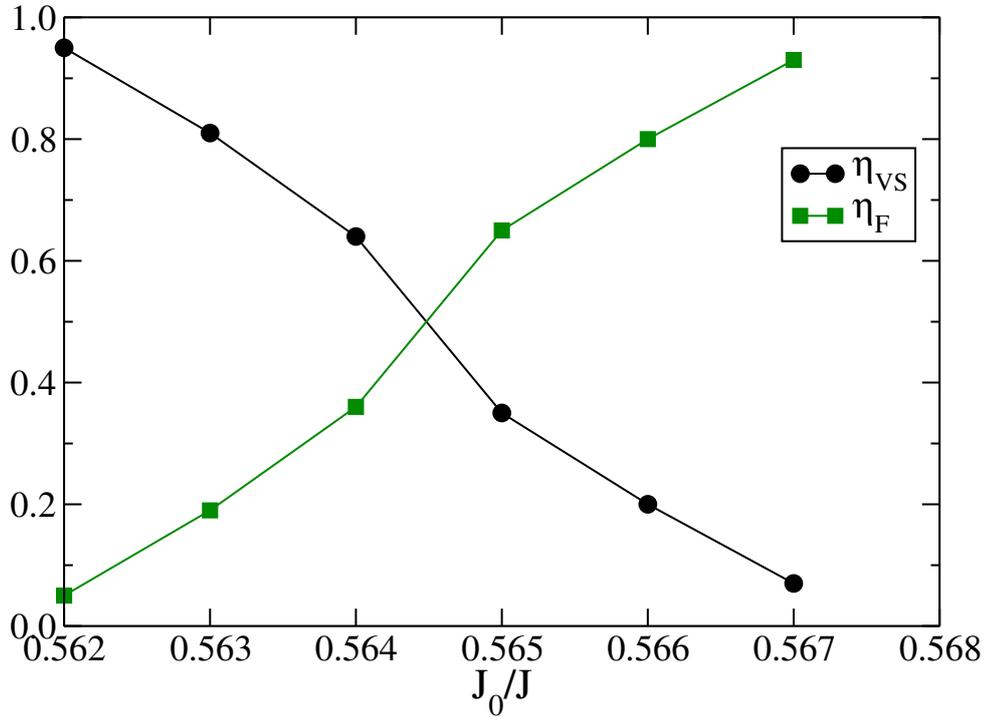
Inicialmente fixamos a média em zero e exibimos o comportamento das amostras na figura 2.4. Para a temperatura  $k_B T/J = 0.979$  o sistema está na fase VS, com aproxima-



**Figura 2.4:** Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ) ou para a fase P ( $\eta_P$ ). Neste caso os acoplamentos são obtidos inicialmente de uma distribuição gaussiana com média zero. Obtemos a temperatura crítica observando o ponto onde ocorre o cruzamento das duas curvas, ou seja, quando  $\eta_{VS} = \eta_P$ , encontrando neste caso  $k_B T_c/J = 0.982(2)$ .

damente 97% das amostras nesta fase; já para temperatura  $k_B T/J = 0.984$  o sistema está na fase P, com apenas 6% das amostras na fase VS. O cruzamento entre as curvas  $\eta_{VS}$  e  $\eta_P$  ( $\eta_{VS} = \eta_P$ ) indica a temperatura crítica  $k_B T_c/J = 0.982(1)$ . Destacamos que este valor de temperatura crítica apresenta concordância com o valor  $k_B T/J = 0.980(2)$  [47], obtido na mesma rede hierárquica considerando somente uma amostra.

Para determinar a transição entre as fases VS–F realizamos alterações na média  $J_0$  com  $T$  fixo, pesquisando neste caso a média crítica, que é identificada quando os momentos permanecem inalterados (dentro de nossa precisão numérica) ao longo das  $n$  iterações do GR. Exibimos na figura 2.5 o caso para o qual fixamos a temperatura em zero ( $k_B T/J = 0$ ), onde a relação de recorrência da Eq. (2.49) deve ser utilizada no processo de renormalização. O gráfico da figura 2.5 revela que para  $J_0/J = 0.562$  o número de amostras na fase



**Figura 2.5:** Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ) ou para a fase F ( $\eta_F$ ), com a temperatura fixada em zero ( $k_B T/J = 0$ ). O cruzamento das duas curvas determina o ponto associado à transição de fases VS–F, ou seja, quando  $\eta_{VS} = \eta_F$ ; neste caso encontramos que  $J_0/J = 0.564(2)$ .

VS é superior a 95%, para  $J_0/J = 0.567$  o sistema encontra-se na fase F e a média associada à transição de fases é  $(J_0/J) = 0.564(2)$ , obtida quando  $\eta_{VS} = \eta_F$ . Este resultado é ligeiramente inferior à estimativa de uma única amostra,  $J_0/J = 0.5665(5)$  [47].

Outro ponto importante no diagrama de fases consiste na determinação do ponto multicrítico, onde as três fases coexistem. Sua determinação numérica revelou-se trabalhosa, portanto, nesta região consideramos um número maior de amostras ( $N_a = 400$ ). Exibimos na figura 2.6 o comportamento das amostras nas proximidades dessa região, para duas escolhas apropriadas da temperatura. Na figura 2.6(a), para a temperatura  $k_B T/J = 1.760$ , observamos amostras presentes nas três fases: para valores abaixo de  $J_0/J = 0.5434$  existe uma predominância de amostras na fase P, na região entre  $0.5434 < J_0/J < 0.5440$  um número maior de amostras convergiu para a fase VS, enquanto que na região acima de

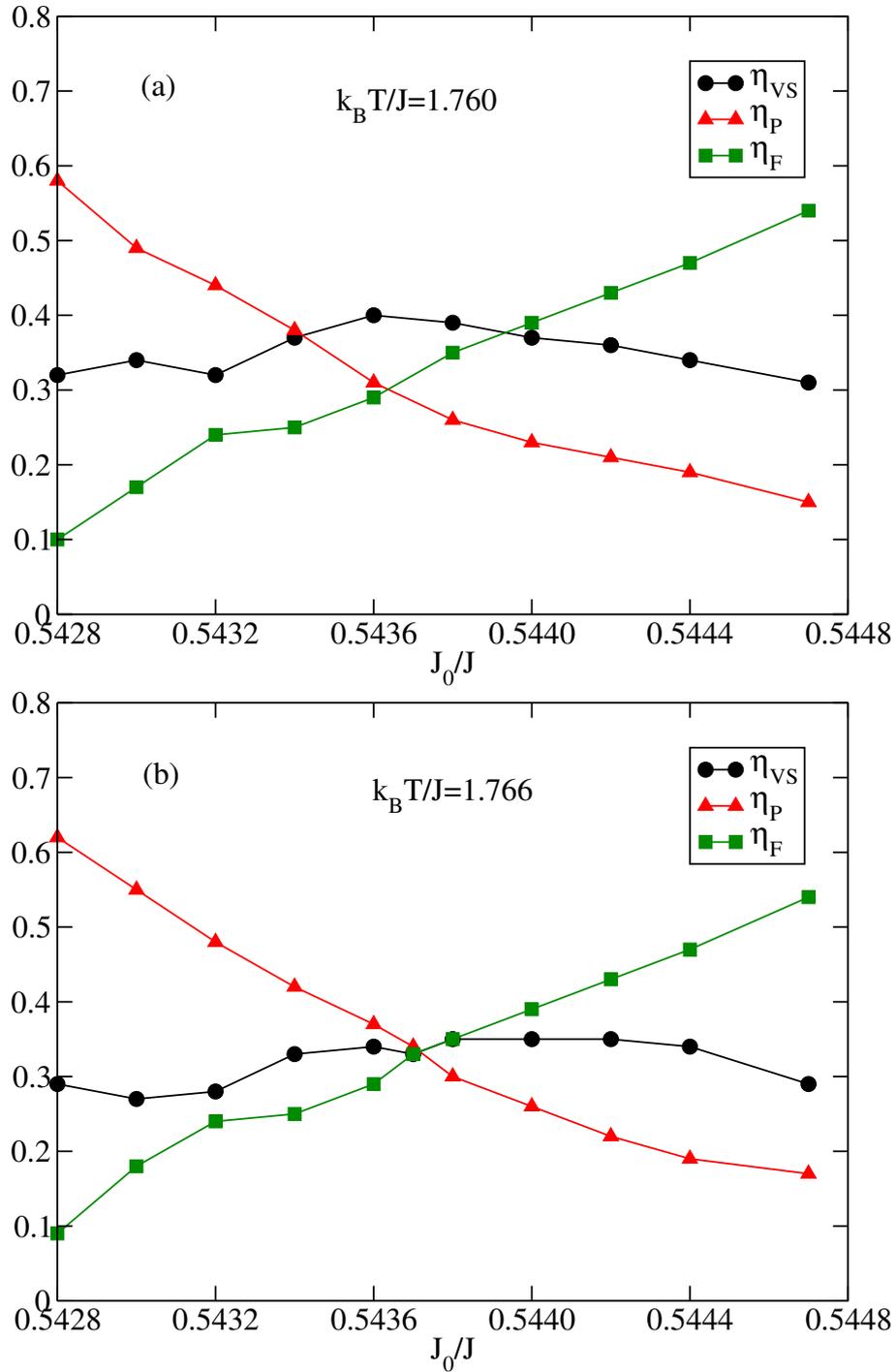
**Tabela 2.1:** Valores de pontos críticos importantes do diagrama de fases obtidos para o VS de Ising na rede hierárquica PWT [ver figura 2.1(b)].

$k_B T/J$ ( $J_0 = 0$ )	$J_0/J$ ( $T = 0$ )	Ponto multicrítico
0.982(1)	0.564(2)	$k_B T/J = 1.766(14)$ ; $J_0/J = 0.5437(13)$

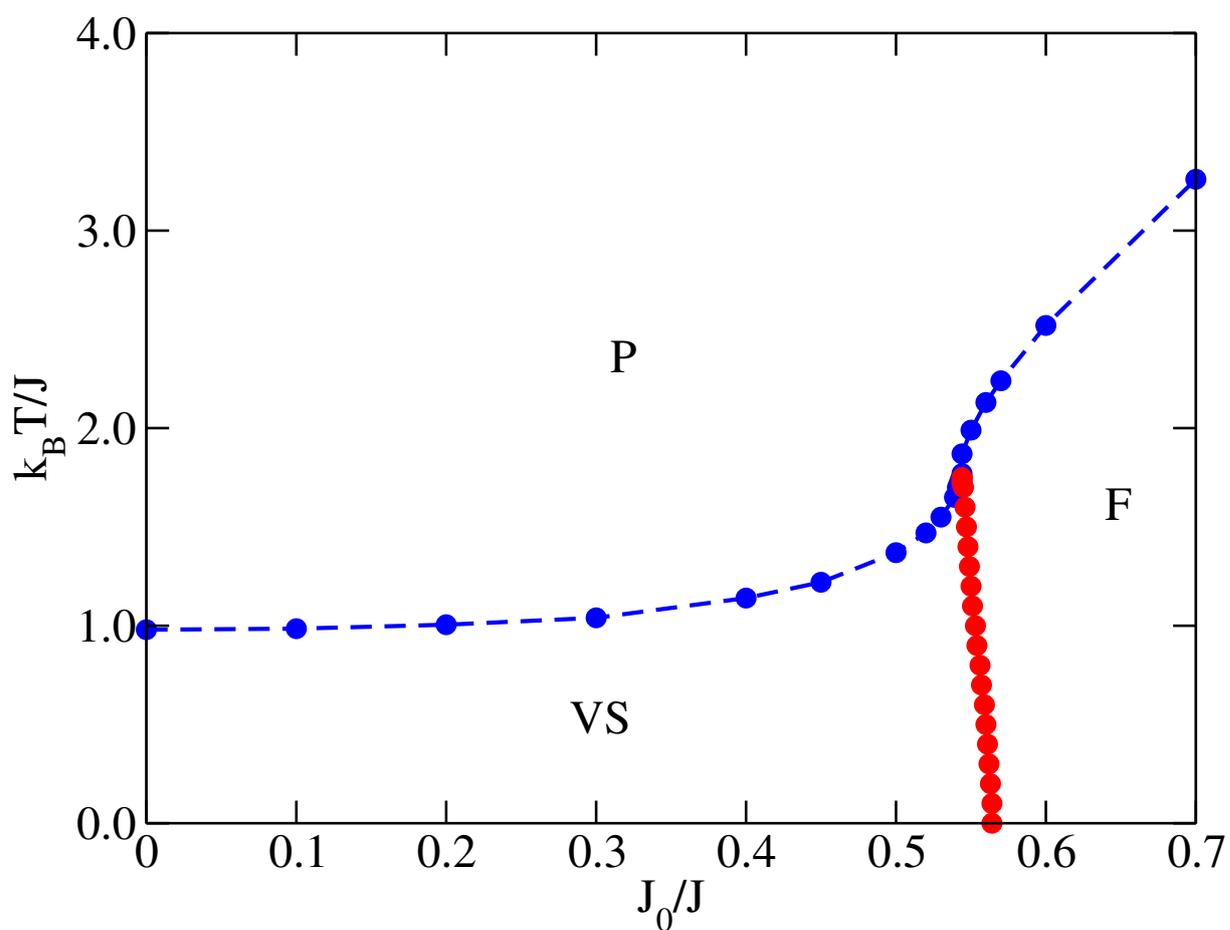
$J_0/J = 0.5440$  encontramos mais amostras na fase F. Na figura 2.6(b), para a temperatura  $k_B T/J = 1.766$  encontramos a média  $J_0/J = 0.5437$ , para a qual  $\eta_{VS} = \eta_P = \eta_F$ , e considerando as barras de erro adotamos  $k_B T/J = 1.766(14)$  e  $J_0/J = 0.5437(13)$ , como os valores de temperatura e média, respectivamente, associados ao ponto multicrítico. Neste ponto, nosso resultado não coincide (considerando as barras de erro) com o obtido em simulações sobre a mesma rede utilizando apenas uma amostra [47],  $k_B T/J = 1.690(2)$  e  $J_0/J = 0.538(2)$ . Como podemos observar, para determinar o ponto multicrítico, uma abordagem que considere diferentes sequências de números aleatórios parecer ser mais eficiente nesta tarefa computacional; entretanto, devemos salientar que ao considerar uma única amostra formada por um número grande de acoplamentos, os resultados serão muito próximos dos encontrados utilizando diversas amostras para regiões do diagrama de fases afastadas do ponto multicrítico. Os resultados dos pontos críticos mais importantes aqui obtidos estão resumidos na tabela 2.1.

Diversos pontos foram investigados e estão representados no diagrama de fases apresentado na figura 2.7. Observa-se que para  $J_0/J > 0$  a fase VS persiste e a temperatura crítica associada à transição de fases VS–P aumenta muito lentamente (com excessão da região próxima ao ponto multicrítico) com o aumento de  $J_0/J$ . Quando fixamos uma temperatura na qual a fase VS existe, ao aumentarmos o valor de  $J_0$  encontraremos um valor médio que indica o ponto crítico associado à uma transição de fases VS–F, ou seja, para valores  $J_0$  maiores, após sucessivas iterações do GR, a média e a largura da distribuição de acoplamentos divergirão, características da fase F. Outro aspecto importante é observado na linha crítica que separa a fase VS da fase F, que apresenta uma leve

inclinação; tal característica é conhecida como reentrância. Para uma pequena faixa de valores da média ( $0.5437 < (J_0/J) < 0.564$ , na figura 2.7) observamos o seguinte efeito: quando reduzimos a temperatura do sistema na fase P (fixando a média), ocorre uma transição da fase P para a fase F, e reduzindo ainda mais a temperatura, ocorrerá uma nova transição de fases, especificamente da fase F para a fase VS. Tal fenômeno é observado experimentalmente, ocorrendo por exemplo, no isolante  $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$  [72] e na liga de AuFe (14% Fe) [73]. Através do método empregado aqui, podemos comparar a coordenada associada ao ponto multicrítico com a coordenada do ponto fixo à temperatura nula [ver tabela 2.1], e observamos que mesmo considerando as barras de erro, a coordenada do ponto cuja temperatura é nula, encontra-se levemente deslocada para a direita, como resultado da reentrância.



**Figura 2.6:** Fração do número total de amostras, que após  $n$  iterações do GR convergiram para a fase VS ( $\eta_{VS}$ ), para a fase F ( $\eta_F$ ), ou para a fase P ( $\eta_P$ ). (a) Para a temperatura  $k_B T/J = 1.760$  encontramos amostras em todas as três fases. (b) Novamente, para a temperatura  $k_B T/J = 1.766$ , as três fases coexistem, porém neste caso encontramos  $\eta_{VS} = \eta_P = \eta_F$ , que nos fornece o valor de  $J_0$  associado ao ponto multicrítico,  $J_0/J = 0.5437(13)$ .



**Figura 2.7:** Diagrama de fases utilizando como distribuição inicial de acoplamentos uma gaussiana [Eq. (2.9)]. Observa-se a existência de três fases distintas, a fase vidro de spins (VS), a fase paramagnética (P) e a fase ferromagnética (F).

## Capítulo 3

# Natureza caótica da fase vidro de spins

### 3.1 Introdução

Na fase vidro de spins, o estado de equilíbrio do sistema apresenta uma natureza caótica, sendo extremamente sensível à pequenas perturbações em alguns parâmetros externos, tal como a temperatura ou o campo magnético. Uma pequena perturbação nas constantes de acoplamento também pode gerar um comportamento caótico da fase vidro de spins. É importante destacar que esta propriedade foi prevista tanto em modelos com interações de longo alcance [74–78], quanto em modelos com interações de curto alcance [62, 79, 80], sendo esta uma propriedade comum aos dois modelos.

Basicamente, quando uma pequena perturbação ocorre no sistema, o novo estado de equilíbrio será completamente diferente do estado antes da perturbação. Esta fragilidade à pequenas perturbações é um fenômeno conhecido como “caos” [79]. Atualmente, a existência de caos devido à perturbações nos acoplamentos é amplamente aceita, porém, no caso de pequenas variações na temperatura o quadro é controverso; alguns trabalhos apontam a existência do comportamento caótico da fase VS até mesmo para pequenas variações de temperatura [21, 74, 81], enquanto outros argumentam justamente o contrário, ausência de caos, nos quais as simulações numéricas não detectaram nenhuma evidência de sua existência [76, 82]. Uma possibilidade é que esta sensibilidade à variações de temperatura

em VSs ocorra para grandes escalas de comprimento que ainda não são acessíveis em algumas simulações; trabalhos mais recentes com sistemas maiores encontraram evidências da existência de caos devido à temperatura [80,81].

O grande interesse pela natureza caótica da fase VS está relacionado à possibilidade que caos devido à temperatura seja um mecanismo que está presente em efeitos de rejuvenescimento e memória, que são observados na dinâmica de VS reais (ver por exemplo Refs. [9,83,84]).

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar o estudo desenvolvido sobre o comportamento caótico do vidro de spins de Ising com interações de curto alcance sobre a rede hierárquica PWT (ver figura 2.1(b)). Usando técnicas do grupo de renormalização calculamos o expoente de caos ( $\zeta$ ), a dimensão fractal da superfície de uma gota ( $d_s$ ) e o expoente de rigidez ( $y$ ), podendo compará-los com resultados numéricos encontrados em redes de Bravais.

É importante destacar que uma melhor compreensão da natureza caótica da fase VS deve-se a diversos trabalhos realizados em redes hierárquicas [31,40,62,70,85–90], onde existe um consenso quanto à existência de caos, seja devido à perturbações nos acoplamentos ou à variações na temperatura; entretanto, uma investigação dessas propriedades nunca foi realizada na rede hierárquica PWT.

### 3.2 Quadro de gotas

Aqui, utilizaremos um modelo fenomenológico de interações de curto alcance conhecido como “*quadro de escala/gotas*” [18–21]. Neste cenário gotas são definidas a partir de excitações coletivas em alguns estados puros abaixo da temperatura crítica. Fisher e Huse [21] definiram uma gota do seguinte modo:

- Define-se uma gota  $D_L(j)$  com escala de comprimento  $L$ , a qual contém o sítio  $j$ , como um aglomerado de spins com menor energia de excitação que contenha mais que  $L^D$  e menos que  $(2L)^D$  spins (onde  $D$  representa a dimensão espacial). A energia

de  $D_L(j)$  é,

$$F_L(j) = \min_{C_N \supset j} (E_{C_N}), \quad (3.1)$$

onde  $L^D \leq N < (2L)^D$ , sendo o mínimo definido sobre todos os aglomerados conectados  $C_N$  de  $N$  spins, onde está contido o sítio  $j$ , e  $E_C$  é a energia necessária para inverter um aglomerado  $C$ .

Para uma temperatura positiva, consideramos a energia livre ao invés da energia  $E_{C_N}$ . Neste quadro, a fase VS é caracterizada por uma magnetização nula [ $m = N^{-1} \sum_i [\langle S_i \rangle_T]_c = 0$ ] e um parâmetro de ordem de EA diferente de zero [ $q^{EA} = N^{-1} \sum_i [\langle S_i^2 \rangle_T]_c > 0$ ], caracterizando o “congelamento” dos momentos magnéticos em direções aleatórias. Como a desordem é uma característica da fase VS, o quadro de gotas argumenta que excitações (gotas) fora do estado fundamental não são triviais. Tipicamente estas excitações, obtidas pela inversão de um aglomerado de spins de tamanho  $L$ , apresentam um custo energético que obedece a lei de escala

$$F_L \sim L^y, \quad (3.2)$$

onde  $y$  é denominado expoente de rigidez (ou expoente da gota). A existência de uma fase VS em baixas temperaturas depende do sinal do expoente de rigidez, de tal maneira que o expoente  $y$  desempenha um papel central neste quadro.

O sistema encontra-se na fase VS em baixas temperaturas somente quando  $y > 0$ , ou seja, quando o sistema escala para fortes acoplamentos. Neste caso existe uma temperatura crítica diferente de zero ( $T_c \neq 0$ ). Para  $T < T_c$  o custo energético para inverter os spins é muito alto, logo o sistema permanece com sua estrutura fixa no tempo e apresentando frustração, o que caracteriza uma fase VS. Por outro lado, se o expoente  $y$  é negativo, verificamos que o sistema escala para acoplamentos fracos. Nesta situação o custo energético necessário para inverter os spins é pequeno, não existindo a fase VS para temperaturas diferentes de zero.

Em um sistema ferromagnético descrito por variáveis do tipo Ising ( $S_i = \pm 1$ ), um aglomerado genérico (por exemplo, um conjunto de variáveis com sinal positivo imersos em um mar de spins com sinal negativo) de escala  $L$  apresenta uma energia de interface que escala com  $L^{D-1}$ . Para um VS, segundo o argumento dado por Fisher e Huse [21], espera-se que o expoente  $y$  seja menor que  $D - 1$ , com o limite superior dado por

$$y \leq \frac{D - 1}{2}. \quad (3.3)$$

Dessa forma, a energia livre da interface de uma gota de escala  $L$  cresce mais lentamente do que  $L$  elevado à sua área,  $L^{D-1}$ . Devido à aleatoriedade, argumenta-se que a superfície de uma gota apresenta características de um fractal, de forma que a área da superfície é dada por

$$A_L \sim L^{d_s}, \quad (3.4)$$

onde  $d_s$  ( $d_s < D$ ) representa a dimensão fractal da superfície da gota. Deve-se observar que esta superfície também pode ser vista como uma parede de domínio (“domain wall”) do sistema, separando os spins que apresentam uma orientação no estado fundamental do domínio de spins que têm orientação oposta. Geralmente assume-se que o comportamento da energia  $F_L$ , tanto para gotas quanto para domínios de parede, escalam com o mesmo expoente  $y$ .

A distribuição da energia livre de uma gota típica de tamanho  $L$  assume a forma [21]

$$P_L(F_L) \sim \frac{1}{L^y} \tilde{P}_L \left( \frac{F_L}{\Upsilon L^y} \right), \quad (3.5)$$

onde  $\Upsilon$  representa o módulo de rigidez, a função de escala  $\tilde{P}_L(x)$  é contínua e não se anula para  $x = 0$ , sendo também normalizada, de forma que  $\int \tilde{P}_L(x) dx = 1$ . Para grandes valores de  $L$ ,  $\tilde{P}_L \rightarrow \tilde{P}_\infty$ , tornando-se independente de  $L$ ; na fase VS o comportamento termodinâmico é dominado por gotas cuja energia são da ordem de  $\Upsilon L^y$ . Gotas cujas

energias livres são menores que, ou da ordem da temperatura, são denominadas gotas termicamente ativas, sendo que  $T \ll \Upsilon L^y$  representam uma pequena parcela de todas as gotas [21].

Para  $D = 2$ , resultados encontrados em diversos cálculos numéricos fornecem  $y \approx -0.28$  [91–93], indicando que não existe fase VS para temperaturas diferentes de zero. Em  $D = 3$  a situação é diferente, onde resultados numéricos encontram  $y \approx 0.2$  [24, 91, 94], confirmando a existência da fase VS. Desse modo a dimensão crítica inferior ( $d_{lcd}$ , definida como a dimensão para qual  $y = 0$ ) [91] está situada entre  $2 < d_{lcd} < 3$ . Historicamente este limite para a  $d_{lcd}$  foi primeiro obtido em redes hierárquicas de MK [29], antes mesmo do desenvolvimento do quadro de gotas, que surgiu na década de 80; ainda no final desta década estimou-se  $d_{lcd} \cong 2.58$  para redes hierárquicas de MK [32]. Muitos anos depois, mais precisamente em 2005, um trabalho em redes de Bravais, que combinou extensos cálculos numéricos e resultados teóricos, obteve  $d_{lcd} = 5/2$  [95]; resultado este que coincide também com recentes simulações realizadas em redes hierárquicas de MK, que encontraram  $d_{lcd} \approx 2.5$  [70].

Outra grandeza importante neste quadro é a função de correlação, que na ausência de um campo magnético e considerando uma distribuição de acoplamentos contínua, comporta-se como

$$G(R) \sim \frac{T}{\Upsilon R^y}, \quad (3.6)$$

para  $T$  próximo de zero, onde  $R$  representa a distância entre dois spins. Neste caso, a correlação decai com uma lei de potência, desaparecendo para sítios que apresentam grande separação na fase VS.

Uma propriedade do estado fundamental (deve-se considerar um estado puro para  $T > 0$ ), considerando um sistema infinito, é que sua energia não pode ser reduzida por inversão de qualquer conjunto finito de spins. O quadro de gotas prevê que a fase VS, na ausência de um campo magnético, é caracterizada somente por dois estados fundamentais;

se o sistema encontra-se no estado fundamental  $\Gamma$  o outro estado fundamental  $\bar{\Gamma}$  é obtido simplesmente com a inversão de todos os spins. Esta conclusão é um ponto controverso que ainda é muito debatido; resultados recentes fornecem evidências de que a fase VS seja caracterizada somente por dois estados puros [22–24], em concordância com o quadro de gotas. É importante destacar que estes resultados são incompatíveis com a previsão do quadro de quebra de simetria de réplicas, onde a fase VS é caracterizada por infinitos estados puros. Neste quadro o estado fundamental é extremamente sensível à perturbações nos acoplamentos ou variações na temperatura, por menor que sejam. Dessa forma, após realizada uma perturbação, a partir de uma determinada escala de comprimento, o sistema converge para um novo estado fundamental totalmente descorrelacionado do estado inicial. Aqui investigaremos tal comportamento na rede hierárquica PWT com o auxílio de técnicas do GR.

Na terminologia do grupo de renormalização, podemos trocar o conceito de gotas por “blocos de spins” de escala  $L$ . Neste caso, analisamos a distribuição de acoplamentos  $P(J_{ij})$  nestes blocos de spins de escala  $L$ . Para grandes escalas de comprimento esperamos que a distribuição de acoplamentos aproxime-se de uma forma fixa universal [19,91], com a largura da distribuição escalando com

$$J'(L) \sim JL^y, \quad (3.7)$$

e

$$J = \langle (J_{ij} - \langle J_{ij} \rangle)^2 \rangle^{1/2}, \quad (3.8)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa uma média sobre a distribuição de acoplamentos  $P(J_{ij})$ . Observe que a Eq. (3.7) nos fornece um meio para determinar o expoente de rigidez  $y$ , e para tal devemos acompanhar a evolução da distribuição de acoplamentos por  $n$  iterações do GR em temperatura nula; mais adiante apresentaremos outra forma de obter o mesmo expoente.

### 3.3 Expoente de caos

No quadro de gotas, o custo energético de uma excitação (gota) de tamanho típico  $L$  é da ordem de  $JL^y$ . Na fase VS, a baixas temperaturas, pode existir um comportamento caótico devido a pequenas perturbações nos acoplamentos ou devido a uma pequena variação de temperatura sofrida pelo sistema. No primeiro caso adicionamos uma pequena perturbação aleatória  $\delta J$  nos acoplamentos, e como consequência desta, o estado fundamental revela-se instável a pequenas perturbações para escalas de comprimento maiores que  $l_c(J)$ ,

$$l_c(J) \propto (J/\delta J)^{1/\zeta}, \quad (3.9)$$

onde

$$\zeta = \frac{d_s}{2} - y, \quad (3.10)$$

representa o expoente de caos. A derivação da Eq. (3.9) é obtida explicitamente para VS de Ising em  $D = 1$  (ver [31, 90]), enquanto para  $D = 2$  ela é inferida a partir da sensibilidade das energias da interface às perturbações nos acoplamentos. Outra derivação possível é seguindo uma variante do argumento de Imry-Ma [96], observando que a perturbação contribui para a energia da gota com uma soma de  $L^{d_s}$  variáveis aleatórias independentes de sinais aleatórios, ou seja, um termo da ordem  $(\delta J)L^{d_s/2}$ . Dessa forma, a energia do estado inicial escala com  $JL^y$ , enquanto o novo estado (com a perturbação) apresenta uma contribuição energética da ordem  $\delta JL^{d_s/2}$ ; quando estes dois termos são da mesma ordem ( $JL^y \sim \delta JL^{d_s/2}$ ), obtemos a Eq. (3.9), que indica a escala de comprimento onde tais efeitos devem ser considerados. Consequentemente, sempre que  $d_s/2 > y$  [79], o sistema apresentará um novo sistema fundamental, totalmente decorrelacionado do estado fundamental original, para escalas de comprimento maiores que  $l_c$ . Para redes de Bravais temos

$$y \leq \frac{D-1}{2}; \quad d_s > D-1,$$

logo  $y \leq d_s/2$ , ou seja, o expoente de caos é sempre positivo, de modo que este comportamento caótico é uma característica da fase VS. Para  $D = 1$  temos,  $y = -1$  (não existe fase VS para  $T > 0$ ),  $d_s = 0$  e  $\zeta = 1$ , confirmando esta sensibilidade às pequenas perturbações. Em um ferromagneto de Ising  $y = D - 1 = d_s$ , logo

$$\zeta = -(D - 1)/2, \quad (3.11)$$

que é sempre negativo para  $D > 1$ , ou seja, o sistema é estável à pequenas perturbações.

Outra situação possível é o caos devido a uma pequena variação na temperatura. Neste caso, consideramos uma gota de tamanho  $L$ , na qual a energia livre da interface é dada por

$$F(T) = E - TS \sim L^y \quad (3.12)$$

Quando o sistema sofre uma pequena variação de temperatura ( $\delta T$ ), temos

$$F(T + \delta T) \approx E - (T + \delta T)S \approx L^y - (\delta T)L^{d_s/2}. \quad (3.13)$$

Neste caso, a entropia da superfície é da ordem de  $L^{d_s/2}$ , onde este comportamento de  $S$  é uma previsão do quadro de gotas [21]. Então, quando  $d_s/2 > y$ , a energia livre da interface pode mudar de sinal devido apenas a uma pequena alteração na temperatura do sistema. Isto acontece quando  $L^y \sim \delta T L^{d_s/2}$ , ou seja, para escalas de comprimento maiores que  $l_c(T)$ ,

$$l_c(T) \propto (\delta T)^{-1/\zeta}, \quad (3.14)$$

onde novamente,  $\zeta = (d_s/2) - y$ .

### 3.4 Procedimento numérico

Nesta seção descreveremos como calcular numericamente os expoentes  $\zeta$ ,  $d_s$  e  $y$ , através do GR. O hamiltoniano do sistema é dado pela Eq. (2.8), cujas interações entre os spins

estão restritas a primeiros vizinhos na rede hierárquica PWT. As ligações  $J_{ij}$  são obtidas aleatoriamente a partir de uma distribuição de probabilidades gaussiana  $P(J_{ij})$  [Eq. (2.9)], onde para as simulações a seguir adotaremos média zero ( $J_0 = 0$ ) e variância unitária ( $J^2 = 1$ ).

Utilizaremos aqui o procedimento do GR que foi descrito na seção 2.3. A relação de recorrência para a célula da figura 2.1(b), para  $(k_B T/J) > 0$ , é dada pela Eq. (2.16) e para  $(k_B T/J) = 0$  pela Eq. (2.49).

Para estudar caos devido a perturbações nos acoplamentos à temperatura nula [ $(k_B T/J) = 0$ ], construímos um banco inicial de ligações,  $\{J_i^{(0)}\}$ , com  $N$  ligações geradas a partir da distribuição da Eq. (2.9). A seguir criamos uma réplica deste banco,  $\{J_i^{\prime(0)}\}$ , com uma pequena perturbação aleatória em cada ligação,  $J_i^{\prime(0)} = J_i^{(0)} + (\delta J)x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), com  $\delta J$  ( $\delta J = 10^{-6}$ ) representando a perturbação e  $x_i$  um número aleatório gaussiano. No processo de renormalização, doze acoplamentos de  $\{J_i^{(0)}\}$  são selecionados aleatoriamente e combinados através da relação de recorrência, formando o primeiro acoplamento de um novo banco de acoplamentos  $\{J_i^{(1)}\}$ . Este processo é repetido novamente até que o novo banco de acoplamentos apresente o mesmo número de acoplamentos que o banco inicial; este procedimento corresponde a um passo de renormalização. De forma similar à anterior, um novo banco de acoplamentos  $\{J_i^{(2)}\}$  é gerado a partir de  $\{J_i^{(1)}\}$ , o que equivale a uma nova renormalização. Este processo é repetido  $n$  vezes até a geração do banco de acoplamentos  $\{J_i^{(n)}\}$ .

Paralelamente, o mesmo procedimento é aplicado ao banco  $\{J_i^{\prime(0)}\}$  até a geração de  $\{J_i^{\prime(n)}\}$ . É importante ressaltar que ao selecionarmos aleatoriamente doze acoplamentos do banco  $\{J_i^{(n)}\}$  para a formação de um novo acoplamento do banco  $\{J_i^{(n+1)}\}$ , necessariamente doze acoplamentos correspondentes ao banco  $\{J_i^{\prime(n)}\}$  serão selecionadas para a formação de um novo acoplamento na mesma posição na rede, para o banco  $\{J_i^{\prime(n+1)}\}$ . A seguir,

acompanhamos a evolução da quantidade

$$d_J^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^N [J_i^{(n)} - J_i'^{(n)}]^2}{\sum_{i=1}^N \left[ \left( J_i^{(n)} \right)^2 + \left( J_i'^{(n)} \right)^2 \right]}, \quad (3.15)$$

que mede a “distância” entre as configurações de acoplamentos [31]. Quando os dois bancos de acoplamentos estão totalmente descorrelacionados  $d_J^{(n)} \rightarrow 1$  e para  $L < l_c$ , quando ainda estão correlacionados,  $d_J^{(n)} \cong (\delta J)^2 L^{2\zeta} / 2$ .

Para caos devido à perturbações na temperatura, consideramos um banco de acoplamentos  $\{J_i^{(0)}\}$ , a partir do qual construímos dois bancos  $\{K_i^{(0)}\}$  e  $\{K_i'^{(0)}\}$ , onde  $K_i^{(0)} = J_i^{(0)} / (k_B T)$ ,  $K_i'^{(0)} = J_i^{(0)} / [k_B (T + \delta T)]$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Novamente seguimos a evolução da distância,

$$d_T^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^N [K_i^{(n)} - K_i'^{(n)}]^2}{\sum_{i=1}^N \left[ \left( K_i^{(n)} \right)^2 + \left( K_i'^{(n)} \right)^2 \right]}, \quad (3.16)$$

a qual é esperada apresentar propriedades semelhantes às de  $d_J^{(n)}$ .

Outra quantidade que podemos obter através do procedimento do GR é a dimensão fractal da superfície da gota, que em geral satisfaz a relação  $D - 1 \leq d_s \leq D$  [20] em redes de Bravais. Para a rede hierárquica PWT podemos obter  $d_s$  através da relação

$$\frac{\left[ \sum_{i=1}^N \left( K_i^{(n)} - K_i'^{(n)} \right)^2 \right]^{1/2}}{\delta T} \sim L^{d_s/2}. \quad (3.17)$$

Observe que a grandeza física que escala como  $L^{d_s/2}$  é a entropia da interface da gota. A partir da Eq. (3.15) ou Eq. (3.16) podemos determinar o expoente de caos  $\zeta$  e com a Eq. (3.17) determinar  $d_s$ . Com estes expoentes podemos determinar o expoente de rigidez  $y = (d_s/2) - \zeta$ . Entretanto, o expoente  $y$  pode ser calculado de maneira independente seguindo a evolução da largura da distribuição  $P(J_{ij})$  para  $(k_B T / J) = 0$  [36], de acordo com

a Eq. (3.7). Assim, podemos verificar a precisão das estimativas por cálculos numéricos independentes.

### 3.5 Resultados

Nossas simulações foram realizadas para um banco com  $N = 5 \times 10^5$  acoplamentos e repetidas para 100 amostras. Para a obtenção do expoente  $\zeta$ , as perturbações nos acoplamentos ( $\delta J$ ) e na temperatura ( $\delta T$ ) foram da ordem de  $10^{-6}$ ; já para a obtenção do expoente  $d_s$ , utilizamos uma perturbação muito menor, da ordem  $10^{-14}$ .

Inicialmente, para temperatura nula obtemos o expoente de caos  $\zeta$  do gráfico  $d_J^{(n)}$  versus  $L = 2^n$ . Na figura 3.1 verificamos que na região onde os bancos estão correlacionados,  $d_J^{(n)} \ll 1$ , a relação  $d_J^{(n)} \cong (\delta J)^2 L^{2\zeta} / 2$  é claramente obedecida, com a inclinação do gráfico fornecendo um expoente

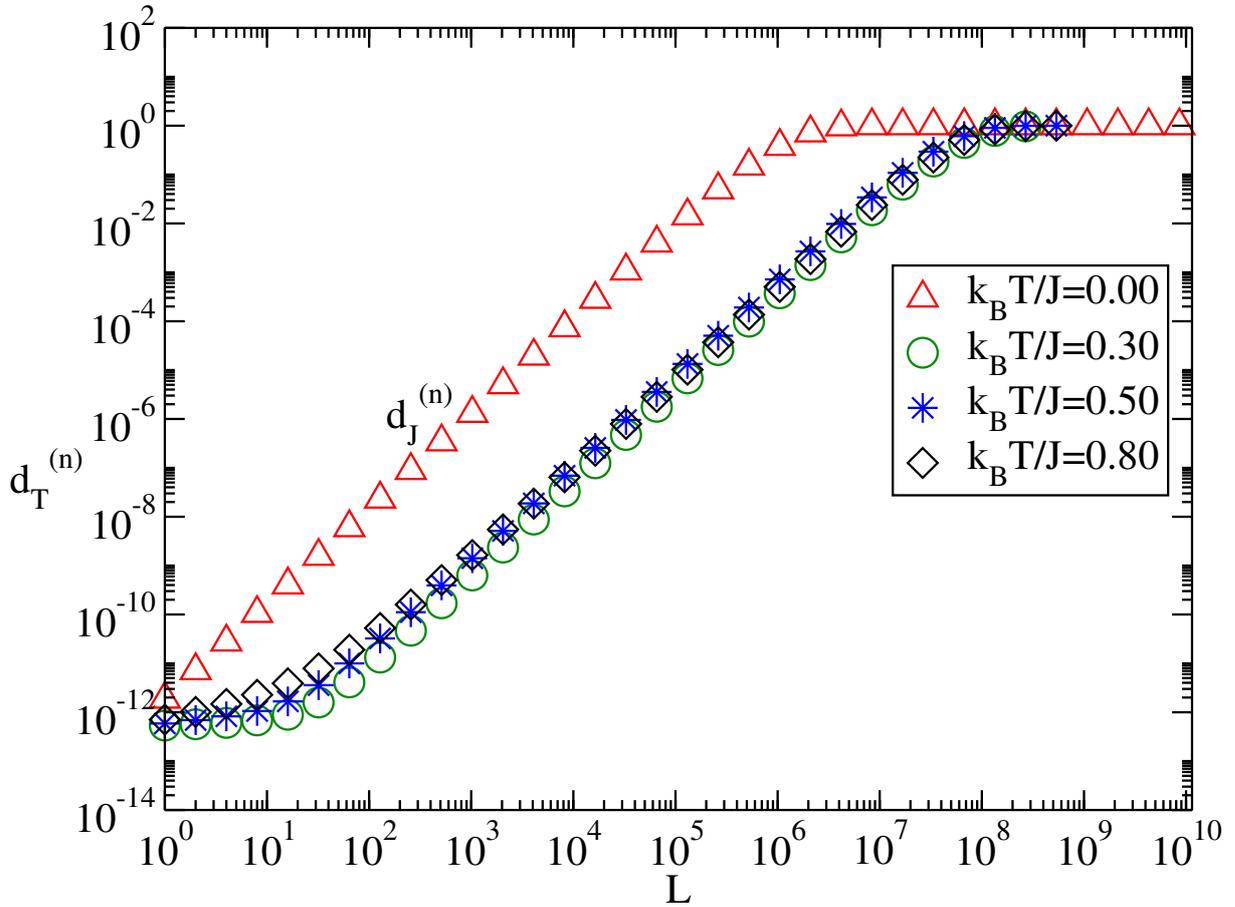
$$\zeta = 0.969(1). \quad (3.18)$$

Verificamos que o sistema torna-se descorrelacionado devido às perturbações introduzidas nos acoplamentos para  $10^5 < l_c < 10^6$ . Para temperaturas finitas, abaixo da temperatura crítica ( $0 < T < T_c$ ), observamos um transiente inicial, e após alguns passos da renormalização,  $d_T^{(n)}$  obedece a mesma lei de potência de  $d_J^{(n)}$ , apresentando o mesmo expoente  $\zeta$ . Neste caso, os bancos de acoplamentos tornam-se totalmente descorrelacionados para  $10^7 < l_c < 10^8$ .

A partir da Eq. (3.17), obtemos o gráfico mostrado na figura 3.2. Observamos novamente um transiente inicial após o qual o mesmo comportamento de lei de potência é observado para todas as temperaturas. A partir da inclinação do gráfico log-log obtemos o expoente

$$d_s = 2.386(2), \quad (3.19)$$

onde nota-se que a relação  $d_s \geq D - 1$  [20] não é obedecida para esta rede fractal. É importante notar que a violação desta relação foi verificada também em outras redes



**Figura 3.1:** Gráfico log-log para a distância [Eqs. (3.15) e (3.16)] à temperatura nula ( $d_J^{(n)}$ ) e à temperatura diferente de zero ( $d_T^{(n)}$ ) versus  $L = b^n$ . O expoente  $\zeta$  é obtido diretamente das inclinações das retas nas regiões apropriadas.

hierárquicas [40], em contraste com o esperado para as redes de Bravais, nas quais  $d_s$  não pode ser menor que  $D - 1$ . A partir destes resultados, é possível calcular o expoente  $y$  do seguinte modo

$$y = \frac{d_s}{2} - \zeta = 0.224(3). \quad (3.20)$$

O expoente  $y$  foi estimado de maneira independente, acompanhando a evolução da largura da distribuição de acoplamentos  $P(K_{ij})$  através de  $n$  iterações do GR, que a cada iteração aumenta por um fator de  $2^y$ , de onde obtemos

$$y = 0.225(1). \quad (3.21)$$

**Tabela 3.1:** Valores dos expoentes de caos ( $\zeta$ ), rigidez ( $y$ ) e da dimensão fractal da superfície da gota ( $d_s$ ), obtidos através de simulações computacionais na rede cúbica por diferentes autores. Também apresentamos estimativas para os mesmos expoentes, na rede hierárquica PWT, que foram obtidos neste trabalho.

Autor	$d_s$	$\zeta$	$y$
Bray e Moore (1984) [91]	–	–	0.2
Huse (1991) [97]	2.2	–	–
Palassini, Matteo e Young (1999) [98]	2.68(2)	–	$0.23^{+0.02}_{-0.04}$
Palassini, Matteo and Young (2000) [99]	2.58(2)	–	0
Katzgraber, Palassini e Young (2001) [100]	2.62	–	0
Aspelmeier, Bray e Moore (2002) [87]	2.7 ( $T = 0$ ) 2.38 ( $T > 0$ )	1.01	0.18
Carter, Bray e Moore (2002) [101]	–	–	0.27
Boettcher (2004) [102]	–	–	0.24(1)
Krzakała e Bouchaud (2005) [103]	2.6	1.3	0
Katzgraber e Krzakała (2007) [80]	–	1.16	–
Jörg e Katzgraber (2008) [68]	–	–	0.20(5)
Wang, Machta e Katzgraber(2014) [24]	–	–	0.197(17)
Neste trabalho, para a rede PWT	2.386(2)	0.969(1)	0.224(3)

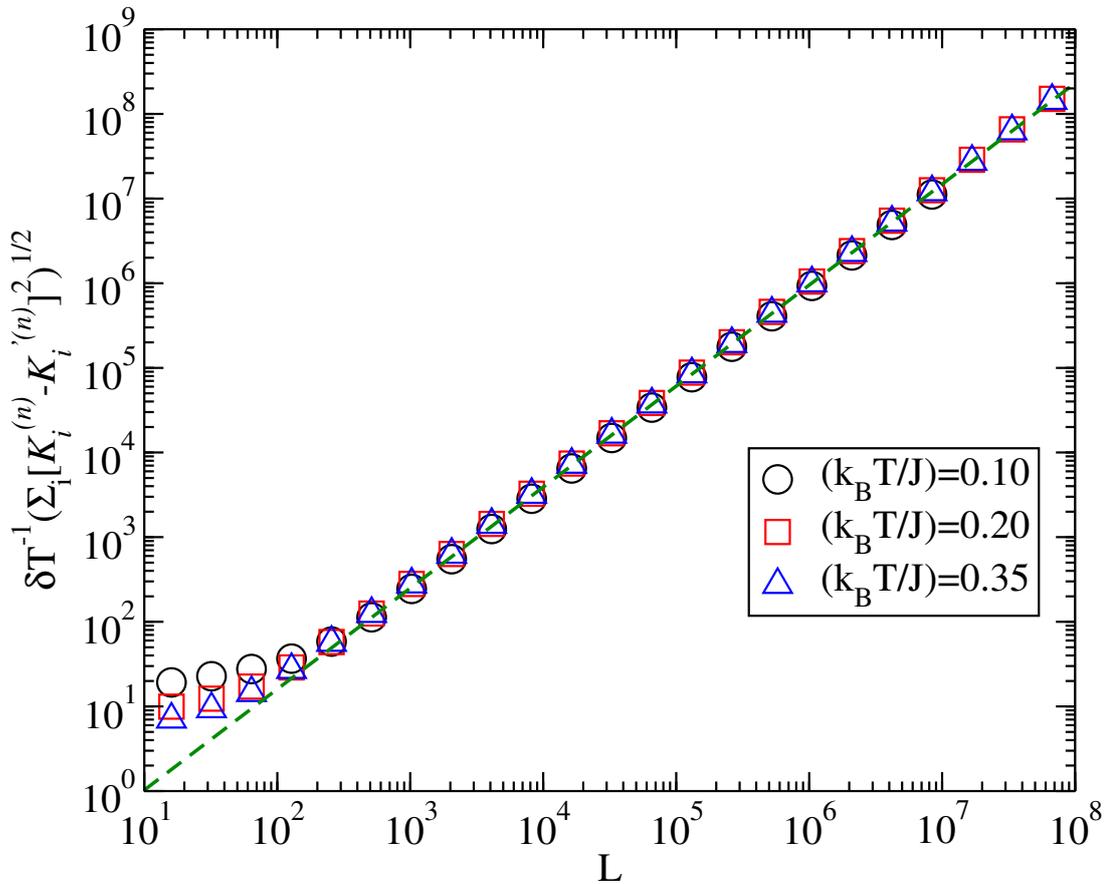
Este resultado apresenta excelente concordância com o obtido através dos expoentes  $\zeta$  e  $d_s$  [Eq. (3.20)]. Apesar do baixo valor encontrado, o expoente de rigidez é positivo ( $y > 0$ ), o que caracteriza a existência da fase VS na rede hierárquica PWT para temperaturas diferentes de zero. Como podemos observar na tabela 3.1, o expoente  $y$  também apresenta boa concordância com diversos resultados obtidos em redes cúbicas, onde  $y \approx 0.20$ .

Na tabela 3.1 apresentamos os expoentes  $\zeta$ ,  $d_s$  e  $y$  para a rede cúbica, determinados por diferentes autores, assim como os resultados obtidos neste trabalho para a rede hierárquica PWT. Alguns trabalhos encontraram valores,  $d_s \approx 2.6$  e  $y \approx 0.2$ , que fornecem uma estimativa para o expoente de caos positivo ( $\zeta \approx 1.1$ ); porém como podemos observar, isto não é um consenso. Na verdade, cada quadro para a descrição da fase VS apresenta previsões para os expoentes  $y$  e  $d_s$ ; o quadro de quebra de simetria de réplicas prevê  $d_s = D$  e  $y = 0$ , enquanto que o quadro de gotas prevê  $d_s < D$  e  $y > 0$ , existindo ainda um quadro alternativo, conhecido como trivial não trivial (TNT) [104], que prevê  $d_s < D$  e  $y = 0$ . Devido a dificuldades computacionais, simulações da fase VS são realizadas para

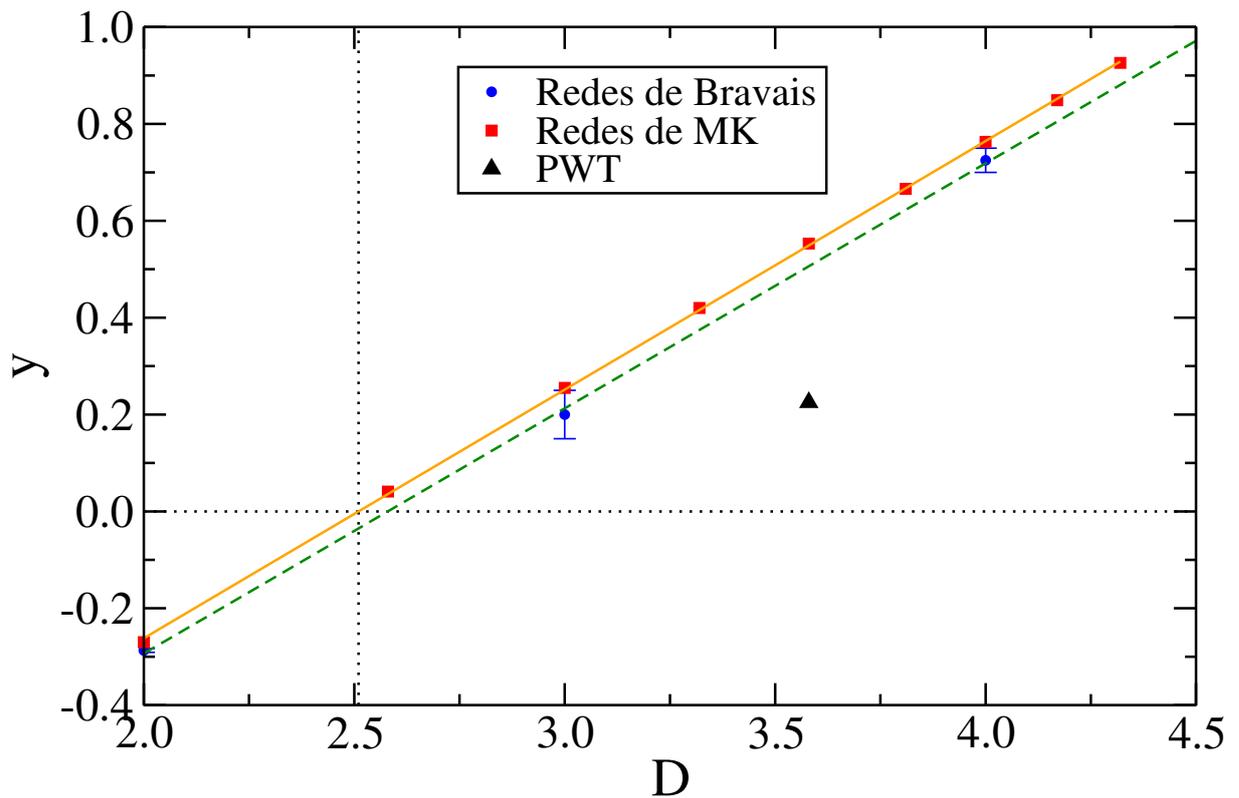
sistemas pequenos em  $D = 3$ , e portanto, ainda não é claro qual quadro descreve melhor a fase VS na rede cúbica. Aqui nossas simulações na rede hierárquica PWT seguem as previsões do quadro de gotas, com  $d_s < D$ ,  $y > 0$  e  $\zeta > 0$ .

Na figura 3.3 exibimos um gráfico com os expoentes de rigidez  $y$  em função da dimensão para diversas redes. Apresentamos expoentes de rigidez estimados em redes hierárquicas da família MK ( $2 \leq D \leq 4.32$ ) [70], redes de Bravais ( $D = 2, 3$  e  $4$ ) [68, 93, 105], assim como a presente estimativa para a rede hierárquica PWT. Uma linha reta sugere um aumento linear de  $y(D)$  apresentando praticamente a mesma inclinação para ambas as redes de Bravais e MK. Neste gráfico também é possível visualizar, para redes de MK, a dimensão crítica inferior (definida como a dimensão para a qual  $y = 0$ )  $d_{lcd} = 2.511(9)$  [70]. É importante destacar que apesar da rede hierárquica PWT ser caracterizada por uma dimensão fractal  $D \cong 3.58$ , observamos que o expoente de rigidez  $y$  encontrado nesta rede está muito próximo dos resultados obtidos em simulações de Monte Carlo na rede cúbica ( $D = 3$ ), sendo até mais próximo do que o resultado da rede hierárquica de MK com  $D = 3$ . Note a discrepância entre os resultados fornecidos por duas redes que apresentam a mesma dimensão fractal, as redes hierárquicas de MK e PWT, ambas com  $D \cong 3.58$ . Relembramos aqui que na seção 2.4, considerando uma distribuição gaussiana com média nula ( $J_0 = 0$ ), encontramos  $k_B T_c / J = 0.982(1)$  que também se aproxima muito do resultado encontrado na rede cúbica onde  $k_B T_c / J \approx 0.96$  [106].

Os resultados aqui obtidos através do GR na rede hierárquica PWT devem ser vistos em um primeiro momento como próprios desta rede para VSs com interações de curto alcance. Entretanto, podemos considerar estes resultados como aproximações para a rede cúbica, os quais podem ser comparados com aqueles das simulações de Monte Carlo para  $D = 3$ , ressaltando que diferente destes, que possibilitam a investigação de sistemas pequenos, aqui, por meio do GR, acessamos grandes escalas de comprimento.



**Figura 3.2:** Gráfico log-log da grandeza definida na Eq. (3.17) versus  $L = b^n$ , para  $T > 0$  e  $\delta T = 10^{-14}$ . A reta pontilhada representa o ajuste linear dos dados e a sua inclinação fornece o expoente  $d_s$  para a rede hierárquica PWT.



**Figura 3.3:** O expoente de rigidez  $y$  para redes hierárquicas da família MK (ver figura 2.1(a)), obtido na Ref. [70], é representado em função da dimensão fractal  $D$  (quadrados); nesta representação as barras de erro são menores que os símbolos. Para dimensões inteiras, apresentamos os resultados calculados através de simulações sobre redes de Bravais (círculos),  $y = -0.287(4)$  ( $D = 2$ ) [93],  $y = 0.20(5)$  ( $D = 3$ ) [68], e  $y \approx 0.75$  [68], ou  $y \approx 0.70$  [105], para  $D = 4$ . Para a rede hierárquica PWT (triângulo) observamos que o resultado difere significativamente do obtido para a mesma dimensão fractal ( $D \cong 3.58$ ) na rede hierárquica de MK.

## Capítulo 4

# Distribuição de ponto fixo

### 4.1 Introdução

Em 1975, Edwards e Anderson [10] introduziram um modelo para a descrição de VSs, o qual é investigado até os dias atuais. Nesta proposta, um ingrediente importante do VS foi introduzido através da competição entre interações ferromagnéticas e antiferromagnéticas temperadas, apresentando assim uma combinação de desordem temperada e frustração. Devido à frustração, torna-se impossível satisfazer todos os acoplamentos ao mesmo tempo. De forma geral, sempre que existir um circuito fechado onde o produto dos acoplamentos for negativo, a frustração poderá estar presente. Estas características estão inseridas no hamiltoniano do sistema [Eq. (2.8)] através dos acoplamentos  $\{J_{ij}\}$  entres os spins ( $S_i = \pm 1$ ), que seguem uma distribuição de probabilidades simétrica. É importante destacar que a existência de desordem e frustração não garantem que um determinado modelo apresente características da fase VS [8].

Nos modelos onde cada spin interage com todos os outros spins (interações de alcance infinito, como o modelo SK) utiliza-se tipicamente a distribuição gaussiana [Eq. (2.9)] com média zero e variância unitária; para o modelo de EA com interações somente entre primeiros vizinhos, diversas distribuições de probabilidades são normalmente utilizadas na literatura, como a bimodal [Eq. (2.10)], exponencial, uniforme [38], e na maior parte

dos trabalhos, a gaussiana.

No estudo da transição de fases através do procedimento do GR adota-se uma distribuição de probabilidades simétrica para os acoplamentos, a qual se mantém simétrica sob renormalização [29] e acompanha-se a evolução da média [Eq. (2.52)] e largura [Eq. (2.53)] da distribuição de acoplamentos através de  $n$  iterações do GR. A transição de fases, por meio do processo de renormalização, é determinada quando os momentos da distribuição permanecem praticamente inalterados após sucessivas iterações do GR. Nosso objetivo neste capítulo é justamente investigar a forma desta distribuição de probabilidades associada especificamente à transição de fases VS–P, denominada distribuição de ponto fixo ( $P^*(K_{ij})$ ).

Até onde sabemos, a forma da distribuição de ponto fixo para uma transição de fases VS–P é desconhecida na literatura, para VSs definidos em redes hierárquicas. Dentre diversas distribuições, a gaussiana é geralmente utilizada devido a sua proximidade com  $P^*(K_{ij})$ , conclusão obtida pela análise dos momentos e curtose [29, 32, 34, 35, 38]. Através do GR investigamos a distribuição de ponto fixo em redes hierárquicas da família MK com dimensão fractal variando de  $D \cong 2.58$  até  $D = 7$  [figura 2.1(a)], assim como da PWT com  $D \cong 3.58$  [figura 2.1(b)]; verificamos que a distribuição  $P^*(K_{ij})$  está nas classes de distribuições conhecidas como  $q$ -gaussianas [41], ou exponencial esticada [42]; esta última fornece um bom ajuste para todas as redes hierárquicas aqui investigadas [107].

Uma proposta anterior para a distribuição de ponto fixo para as redes hierárquicas da família de MK foi efetuada na Ref. [108], onde a distribuição  $P^*(K_{ij})$ , obtida através de uma análise dos coeficientes de Pearson, foi determinada com a utilização de quatro parâmetros de ajuste. No presente trabalho foi realizada uma análise dos histogramas da distribuição de probabilidades, a partir dos quais foram efetuados ajustes com as distribuições mencionadas; no caso particular das redes hierárquicas de MK com  $2.58 \leq D \leq 7$ , a nossa proposta fornece ajustes mais apropriados, com um número menor de parâmetros de ajustes (mais precisamente, dois parâmetros) do que a da Ref. [108].

## 4.2 Procedimento numérico

O hamiltoniano é definido na Eq. (2.8) da seção 2.3, onde consideramos apenas interações entre primeiros vizinhos. Para distribuição inicial de acoplamentos, usamos três distribuições simétricas diferentes bem conhecidas na literatura, a saber,

$$\text{Gaussiana : } P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2}{2J^2}\right), \quad (4.1)$$

$$\text{Bimodal : } P(J_{ij}) = \frac{1}{2}[\delta(J_{ij} - J) + \delta(J_{ij} + J)], \quad (4.2)$$

$$\text{Uniforme : } P(J_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{2J} & \text{se } -J \leq J_{ij} \leq J \\ 0 & \text{(outros casos)} \end{cases}. \quad (4.3)$$

De uma forma geral, as relações de recorrência para a renormalização das redes aqui estudadas [figura 2.1] podem ser escritas na forma da Eq. (2.11), seguindo o procedimento de renormalização descrito na seção 2.3. O processo do GR é aplicado na região crítica da transição de fases VS–P, onde cada distribuição [Eqs. (4.1)–(4.3)] apresenta uma temperatura crítica própria, sobre determinada rede hierárquica. Porém, após alguns passos de renormalização, todas as distribuições iniciais convergem para a mesma distribuição, ou seja, para a distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$ . A determinação da região crítica é realizada pelo acompanhamento da média,  $\langle K_{ij} \rangle$ , e largura,  $\langle K_{ij}^2 \rangle^{1/2}$ , da distribuição de acoplamentos, onde os atratores de cada fase são:

$$\langle K_{ij} \rangle \rightarrow 0; \quad \langle K_{ij}^2 \rangle^{1/2} \rightarrow 0; \quad \text{Fase P,}$$

$$\langle K_{ij} \rangle \rightarrow 0; \quad \langle K_{ij}^2 \rangle^{1/2} \rightarrow \infty; \quad \text{Fase VS.}$$

Conforme descrito na seção 2.4, o procedimento do GR deve ser implementado realizando médias sobre muitas amostras; entretanto, resultados semelhantes podem ser obti-

dos quando utilizamos apenas uma amostra com um grande banco de acoplamentos. No presente trabalho, as simulações são realizadas com um banco contendo  $10^6$  acoplamentos.

Na transição de fases VS–P, independente da distribuição inicial adotada, após algumas iterações do GR, alcançamos a distribuição de ponto fixo, que sob um número razoável de iterações (tipicamente 10 iterações) não apresenta alterações nos seus momentos (dentro de nossa precisão numérica). Para observarmos a distribuição  $P^*(K_{ij})$  por várias iterações, torna-se necessário uma estimativa muito precisa da temperatura crítica associada a esta transição (ver seção 2.3). Aqui, para a maioria das redes estimamos a temperatura crítica com três casas decimais de certeza (incerteza na quarta casa decimal). Tal precisão permitiu a observação de distribuições que representam a  $P^*(K_{ij})$  por um número considerável de iterações (precisamente 13 iterações para redes hierárquicas da família MK e 7 para a rede hierárquica PWT). Para uma dada iteração  $n$ , a distribuição correspondente é obtida através do histograma normalizado, que obtemos de um banco com  $N$  acoplamentos adimensionais  $\{K_{ij}\}$ , do quais são calculados os momentos (que devem permanecer praticamente inalterados no ponto fixo). Também acompanhamos a cada iteração a curtose,

$$\kappa_4 = \frac{\langle K_{ij}^4 \rangle}{3\langle K_{ij}^2 \rangle^2}, \quad (4.4)$$

assim como uma razão de momentos de ordem superior,

$$\kappa_6 = \frac{\langle K_{ij}^6 \rangle}{15\langle K_{ij}^2 \rangle^3}. \quad (4.5)$$

As grandezas das Eqs. (4.4) e (4.5) valem exatamente 1 para a distribuição gaussiana, e no caso onde  $\kappa_4, \kappa_6 > 1$  ( $\kappa_4, \kappa_6 < 1$ ) a distribuição apresenta caudas mais longas (curtas) que uma distribuição gaussiana; em todas as redes hierárquicas aqui investigadas a distribuição de ponto fixo é caracterizada por  $\kappa_4, \kappa_6 > 1$ . Para calcular analiticamente os momentos de uma determinada distribuição de probabilidades  $P(x)$ , a fim de compará-

los com os obtidos nas simulações, utilizamos a definição do momento de ordem  $p$ ,

$$\langle x^p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^p P(x) dx, \quad (4.6)$$

onde  $p$  é um número natural e  $x$  uma variável aleatória. De forma geral, se duas distribuições apresentam os mesmos conjuntos de momentos, elas são ditas idênticas.

#### 4.2.1 Distribuições de probabilidades consideradas

Neste trabalho, pesquisamos diversas distribuições de probabilidades conhecidas na literatura, buscando a melhor candidata para a distribuição universal de ponto fixo em cada caso. A seguir, apresentamos algumas distribuições que utilizamos para os ajustes dos dados.

A primeira candidata é a distribuição conhecida como  $q$ -gaussiana ( $q$  real) [41, 109]

$$P(x) = \frac{\sqrt{B_q}}{A_q} [1 - (1 - q)B_q x^2]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (4.7)$$

onde  $[u]_+ = u$ , para  $u > 0$  e zero para todos os outros casos,  $B_q$  está associado com a largura da distribuição e  $A_q$  é uma constante de normalização dada por [41, 109]

$$A_q = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{(3-q)\sqrt{1-q}} \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \left[\Gamma\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right)\right]^{-1} & \text{se } q < 1, \\ \sqrt{\pi} & \text{se } q = 1, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q-1}} \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\right]^{-1} & \text{se } 1 < q < 3. \end{cases} \quad (4.8)$$

Para  $q < 1$  temos distribuições com suporte compacto, no caso  $q = 1$  recuperamos a distribuição gaussiana e para  $q > 1$  as distribuições apresentam caudas mais longas do que uma gaussiana. Todas as distribuições aqui estudadas apresentam  $\kappa_4, \kappa_6 > 1$ , e conseqüentemente, nosso interesse se restringe aos casos  $q > 1$ . A seguir apresentamos alguns

momentos pares (considerando o fator  $A_q$  definido para  $1 < q < 3$ ) desta distribuição,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right)}{2B_q(q-1)\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{5}{3}, \quad (4.9)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{3\Gamma\left(\frac{7-5q}{2(q-1)}\right)}{4B_q^2(q-1)^2\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{7}{5}, \quad (4.10)$$

$$\langle x^6 \rangle = \frac{15\Gamma\left(\frac{9-7q}{2(q-1)}\right)}{8B_q^3(q-1)^3\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{9}{7}. \quad (4.11)$$

Qualquer distribuição deve obedecer a lei de normalização  $\langle x^0 \rangle = 1$ ; entretanto, não é necessário que outros momentos existam. Observe que para a distribuição  $q$ -gaussiana os momentos não são definidos para todo  $q$  no intervalo  $1 < q < 3$  (apresentando divergências acima de determinados valores de  $q$ ); para os casos aqui estudados foi possível a determinação destes momentos [Eq. (4.9)–(4.11)], pois  $q$  se manteve sempre dentro do intervalo  $1 < q < 9/7$ .

A segunda candidata é conhecida como distribuição exponencial esticada<sup>1</sup>, dada por

$$P(x) = \frac{1}{2J\Gamma(1 + \frac{1}{\delta})} \exp\left[-\left(\frac{|x|}{J}\right)^\delta\right], \quad (J > 0, \delta > 0), \quad (4.12)$$

onde o parâmetro  $J$  está associado com a largura da distribuição. Note que esta distribuição encontra-se centrada na origem e inclui os seguintes casos especiais: (i) a distribuição exponencial dupla<sup>2</sup> ( $\delta = 1$ ); (ii) a distribuição gaussiana ( $\delta = 2$ ). A seguir apresentamos

<sup>1</sup>A nomenclatura “exponencial esticada” é usada para  $0 < \delta < 1$ , embora para qualquer  $0 < \delta < 2$  tenhamos uma distribuição com caudas mais longas do que uma gaussiana.

<sup>2</sup>Também conhecida com distribuição de Laplace [42].

alguns momentos pares desta distribuição,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{J^2 \Gamma\left(\frac{3+\delta}{\delta}\right)}{3\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}, \quad (4.13)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{J^4 \Gamma\left(\frac{5+\delta}{\delta}\right)}{5\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}, \quad (4.14)$$

$$\langle x^6 \rangle = \frac{J^6 \Gamma\left(\frac{7+\delta}{\delta}\right)}{7\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}. \quad (4.15)$$

A terceira candidata é uma distribuição pouco conhecida; aqui a denominaremos distribuição  $q$ -exponencial esticada (“stretched  $q$ -exponential”), dada por

$$P(x) = \frac{B_q^{1/\delta}}{A_{q,\delta}} [1 - (1-q)B_q|x|^\delta]_+^{\frac{1}{1-q}}; \quad (B_q > 0, \delta > 0), \quad (4.16)$$

onde consideramos  $1 < q < 3$  e  $0 < \delta \leq 2$ . A distribuição acima generaliza as distribuições definidas nas Eqs. (4.7) e (4.12), pois nos limites  $\delta \rightarrow 2$  e  $q \rightarrow 1$  (onde  $B_1 = J^{-\delta}$ ), recuperamos as respectivas distribuições. O fator de normalização depende de dois índices  $q$  e  $\delta$  reais,

$$A_{q,\delta} = \frac{2(q-1)^{-1/\delta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}; \quad (1 < q < 1 + \delta). \quad (4.17)$$

Abaixo apresentamos alguns de seus momentos pares,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{[B_q(q-1)]^{-2/\delta} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{\delta}\right) \Gamma\left(\frac{3+\delta}{\delta}\right)}{3\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\delta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{3+\delta}{3}, \quad (4.18)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{[B_q(q-1)]^{-4/\delta} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{5}{\delta}\right) \Gamma\left(\frac{5+\delta}{\delta}\right)}{5\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\delta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{5+\delta}{5}, \quad (4.19)$$

$$\langle x^6 \rangle = \frac{[B_q(q-1)]^{-6/\delta} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{7}{\delta}\right) \Gamma\left(\frac{7+\delta}{\delta}\right)}{7\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\delta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}; \quad \text{se } 1 < q < \frac{7+\delta}{7}. \quad (4.20)$$

As outras distribuição consideradas são bem conhecidas na literatura, ou seja, a distribuição gaussiana [110], a t-student [110] e a  $\alpha$ -Lévy estável [111]; entretanto, em praticamente todos os casos estudados as distribuições apresentadas nas Eqs. (4.7)–(4.15) apresentaram os melhores ajustes aos dados. Para nos auxiliar na verificação de que os dados são realmente de uma determinada distribuição de probabilidades, utilizamos o teste  $\chi^2$  (“chi-square goodness-of-fit test”) [110] em todos os casos; comparamos também  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$  [Eqs. (4.4) e (4.5)], obtidos através dos momentos das distribuições com os dados fornecidos diretamente pelas simulações.

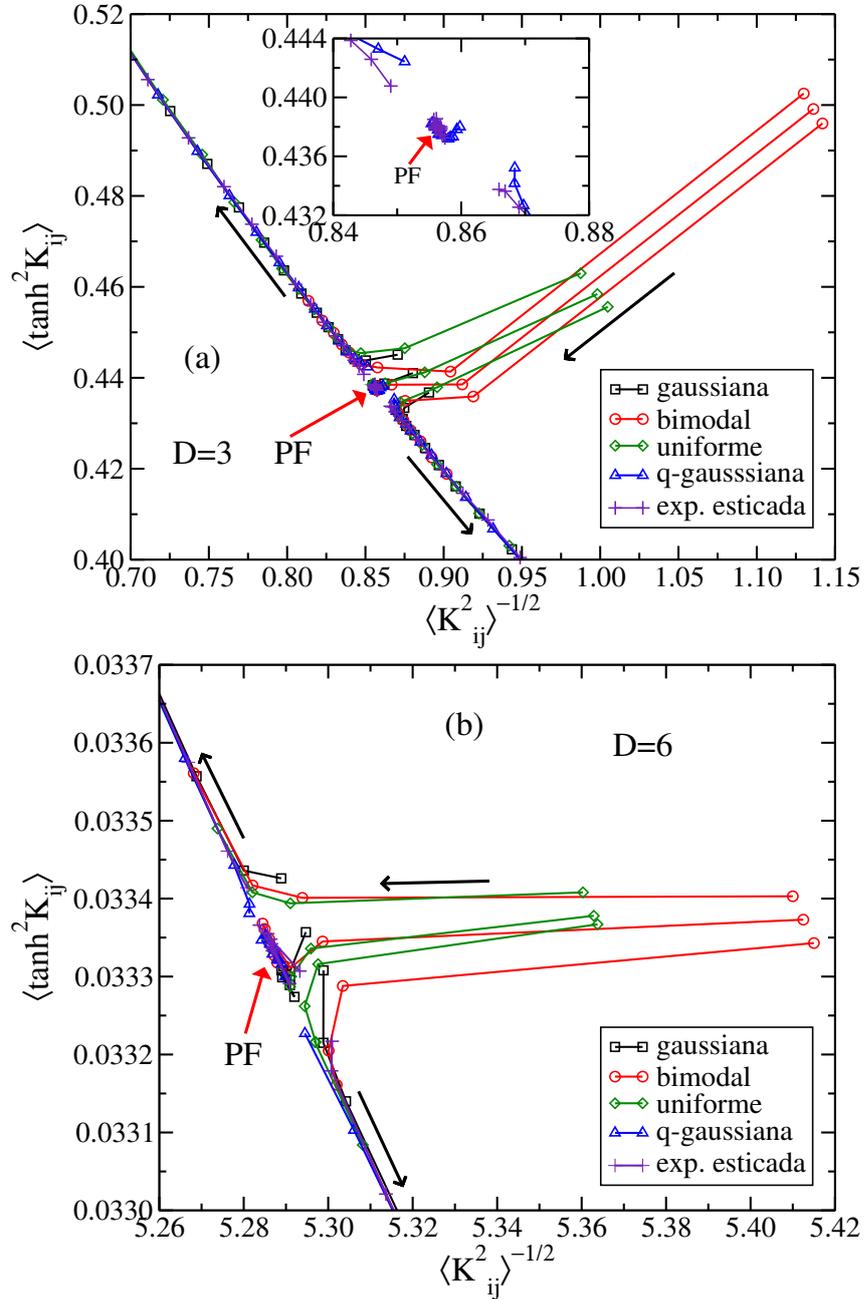
### 4.3 Resultados

Nossas simulações foram realizadas com um banco de  $10^6$  acoplamentos para uma única amostra. Investigamos redes hierárquicas da família MK [figura 2.1(a)] com dimensões fractais variando entre  $D \cong 2.58$  até  $D = 7$ , além da rede hierárquica PWT [figura 2.1(b)]. Na figura 2.3 exibida na seção 2.3, apresentamos o comportamento da distribuição de probabilidades dos acoplamentos na fase VS, na fase P e na transição de fases VS–P, para o caso da rede hierárquica de MK com  $D = 3$ . Aqui, apresentaremos a evolução da distribuição de probabilidades através do GR nas mesmas regiões, utilizando uma representação diferente, como descreveremos a seguir.

Para as distribuições iniciais das Eqs. (4.1)–(4.3), assim como as distribuições mencionadas na seção 4.2.1, acompanhamos a evolução de cada  $P(K_{ij})$  por  $n$  iterações do GR (tipicamente  $n = 16$ ). Na figura 4.1 apresentamos os diagramas de fluxo correspondentes, através das variáveis  $\langle \tanh^2 K_{ij} \rangle$  versus  $1/\langle K_{ij}^2 \rangle^{1/2}$  [32,38], onde  $\langle .. \rangle$  representa uma média sobre a distribuição, para redes hierárquicas da família MK, caracterizadas por  $D = 3$  e  $D = 6$ . Em ambos os casos observamos: (i) um ponto fixo instável, associado com a transição de fases VS–P, indicado por uma seta vermelha; (ii) dois atratores:  $\langle \tanh^2 K_{ij} \rangle \rightarrow 0$  e  $\langle K_{ij}^2 \rangle^{-1/2} \rightarrow \infty$  (atrator P) e  $\langle \tanh^2 K_{ij} \rangle \rightarrow 1$  e  $\langle K_{ij}^2 \rangle^{-1/2} \rightarrow 0$  (atrator VS); (iii) dentre as distribuições consideradas, observamos que a  $q$ -gaussiana e exponencial esticada repre-

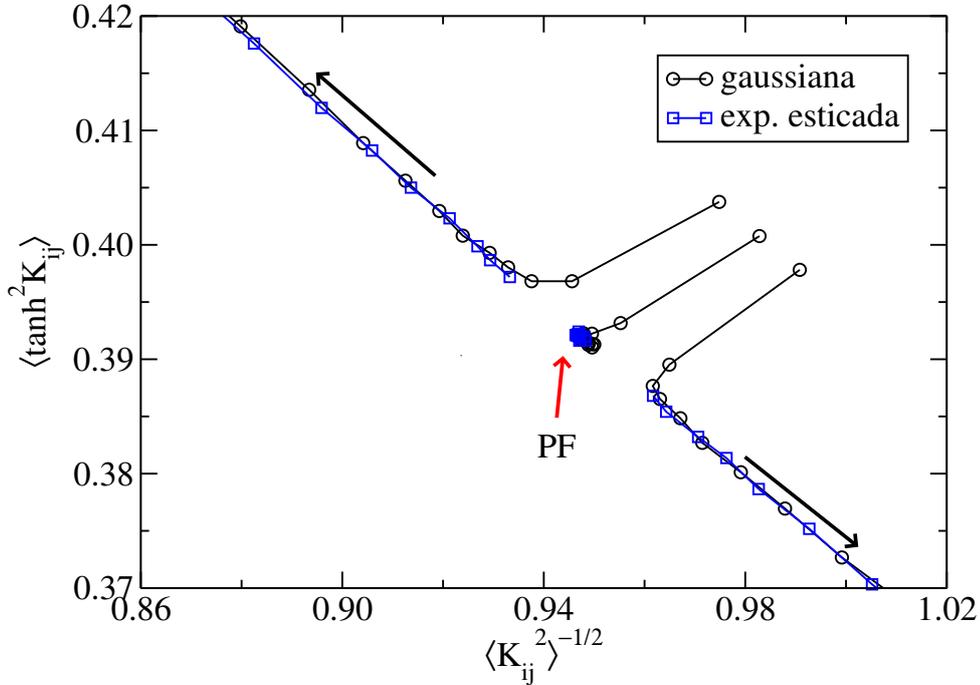
sentam boas aproximações para a distribuição de ponto fixo, como mostraremos a seguir. Observa-se também que a distribuição gaussiana se aproxima da distribuição de ponto fixo com o aumento da dimensão fractal.

É importante destacar que na figura 4.1 todas as distribuições iniciais, quando consideradas em suas respectivas temperaturas críticas  $T_c$ , aproximam-se de uma única distribuição de ponto fixo. Na tabela 4.1 apresentamos as temperaturas críticas para VSs de Ising em redes hierárquicas de MK com diferentes dimensões fractais  $D$ , assim como para a rede hierárquica PWT, para cada distribuição inicial considerada. Podemos obter as coordenadas associadas com  $P^*(K_{ij})$ , obtendo assim estimativas da temperatura crítica efetiva associada com a mesma. Aqui, definimos esta temperatura efetiva como  $(k_B T_c^{PF}/J) \equiv \langle (K_{ij}^*)^2 \rangle^{-1/2}$ , sendo estimada para  $P(K_{ij}) = P^*(K_{ij})$ . Para os casos exibidos na figura 4.1 estimamos  $(k_B T_c^{PF}/J) = 0.856(1)$  ( $D = 3$ ) e  $(k_B T_c^{PF}/J) = 5.289(3)$  ( $D = 6$ ).



**Figura 4.1:** Diagramas de fluxo para diferentes distribuições de probabilidades  $P(K_{ij})$ , para duas redes da família MK com dimensões fractais: (a)  $D = 3$ ; (b)  $D = 6$ . Em ambos os casos a seta vermelha indica o ponto associado à distribuição de ponto fixo (PF); esta região é ampliada na inserção em (a). Observa-se que a distribuição inicial bimodal é a mais distante da distribuição de ponto fixo, enquanto a  $q$ -gaussiana e exponencial esticada já iniciam as iterações do GR muito próximas da mesma.

Para a rede hierárquica PWT o diagrama de fluxo é apresentado na figura 4.2, construído somente para as distribuições iniciais gaussiana e exponencial esticada. Novamente observamos as características obtidas nas redes hierárquicas de MK, destacando que a distribuição exponencial esticada permaneceu por 10 iterações do GR em torno do ponto fixo, enquanto que a distribuição gaussiana somente alcançou o ponto fixo após a terceira renormalização. Para a rede hierárquica PWT estimamos  $(k_B T_c^{PF}/J) = 0.948(2)$  e para uma variação da ordem de  $10^{-3}$  na temperatura, o fluxo é induzido para o atrator da fase VS (se  $k_B T/J$  diminui), ou para o atrator P (se  $k_B T/J$  aumenta).



**Figura 4.2:** Diagrama de fluxo para diferentes distribuições de probabilidades  $P(K_{ij})$ , para a rede hierárquica PWT. A seta vermelha indica o ponto associado à distribuição de ponto fixo (PF); a distribuição exponencial esticada mantém-se neste ponto da primeira até a décima iteração do GR, enquanto a gaussiana alcança este ponto somente após a terceira iteração.

Na figura 4.3 apresentamos a distribuição de ponto fixo para o VS de Ising na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ , juntamente com os dois melhores ajustes encontrados. Atínhamos a distribuição de ponto fixo iniciando o processo de renormalização com acoplamentos obtidos de uma distribuição gaussiana, na sua temperatura crítica,  $(k_B T_c/J) = 0.8797(5)$ ;

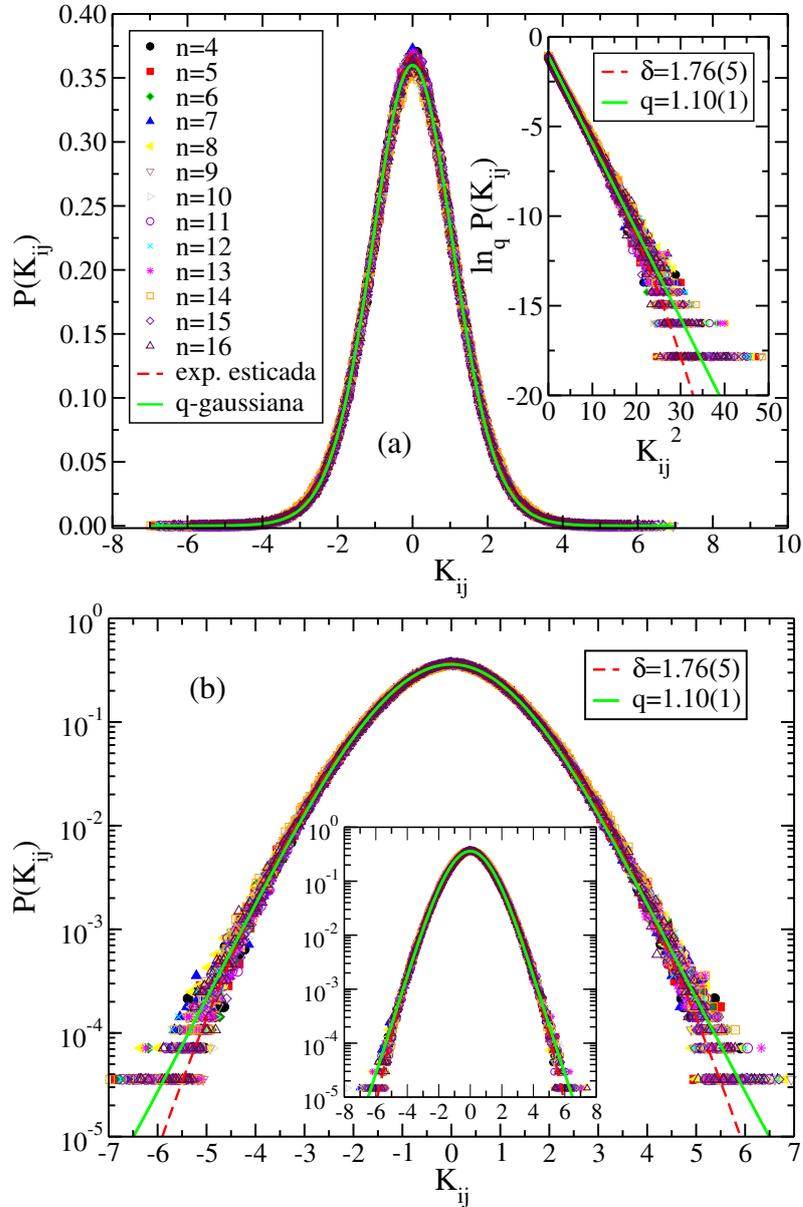
	$D$	$k_B T_c/J$ (gaussiana)	$k_B T_c/J$ (bimodal)	$k_B T_c/J$ (uniforme)	$k_B T_c^{PF}/J$	$\kappa_4$	$\kappa_6$
MK	2.58	0.291(5)	0.479(5)	0.201(5)	0.284(2)	1.08	1.23
MK	3.00	0.8797(5)	1.1362(5)	0.5762(5)	0.856(1)	1.12	1.37
MK	3.58	1.5718(5)	1.8219(5)	0.9825(5)	1.539(1)	1.15	1.47
MK	4.00	2.0808(5)	2.3067(5)	1.2716(5)	2.046(2)	1.14	1.45
MK	4.58	2.8623(5)	3.0522(5)	1.7147(5)	2.838(2)	1.12	1.38
MK	5.00	3.4799(5)	3.6522(5)	2.0662(5)	3.464(2)	1.10	1.31
MK	6.00	5.2908(5)	5.4125(5)	3.0955(5)	5.289(3)	1.06	1.17
MK	7.00	7.7402(5)	7.8273(5)	4.4957(5)	7.745(6)	1.03	1.09
PWT	3.58	0.9821(5)	1.1166(5)	0.6122(5)	0.948(2)	1.21	1.66

**Tabela 4.1:** Temperaturas críticas ( $k_B T_c/J$ ) estimadas para diferentes distribuições iniciais nas redes hierárquicas da família de MK e PWT. Cada distribuição, com sua respectiva temperatura crítica, converge após algumas iterações do GR para um ponto fixo, como mostrado nas figuras 4.1 e 4.2, onde estimamos a temperatura crítica universal da distribuição de ponto fixo  $k_B T_c^{PF}/J$ . Apresentamos nas últimas colunas as quantidades  $\kappa_4$  [Eq. (4.4)] e  $\kappa_6$  [Eq. (4.5)] associadas à distribuição de ponto fixo, calculadas numericamente a partir dos dados.

	$D$	$q$	$B_q$	$\chi^2/ndf$	$J^{-1}$	$\delta$	$\chi^2/ndf$
MK	2.58	1.08(2)	0.045(5)	0.98	0.21(2)	1.85(4)	0.99
MK	3.00	1.10(1)	0.43(3)	0.98	0.66(2)	1.76(5)	0.96
MK	3.58	1.11(1)	1.4(1)	0.98	1.19(2)	1.74(5)	0.73
MK	4.00	1.11(1)	2.5(2)	0.99	1.59(2)	1.75(5)	0.97
MK	4.58	1.09(2)	4.8(3)	0.62	2.16(3)	1.80(5)	1.02
MK	5.00	1.08(2)	6.8(2)	0.66	2.60(3)	1.83(5)	0.96
MK	6.00	1.05(2)	15.1(2)	0.71	3.87(4)	1.90(4)	1.02
MK	7.00	1.03(1)	31.3(1)	0.69	5.58(4)	1.95(3)	0.80
PWT	3.58	–	–	–	0.78(2)	1.57(3)	1.00

**Tabela 4.2:** Valores estimados dos parâmetros  $q$  e  $B_q$  no ajuste com a distribuição  $q$ -gaussiana [Eq. (4.7)], assim como,  $J^{-1}$  e  $\delta$  no ajuste da exponencial esticada [Eq. (4.12)], para diferentes redes hierárquicas de MK. Para a rede hierárquica PWT apresentamos os parâmetros de ajuste apenas para a distribuição exponencial esticada. Para cada ajuste calculamos  $\chi^2/ndf$  ( $ndf$  representa o número de graus de liberdade, típico do teste  $\chi^2$ ).

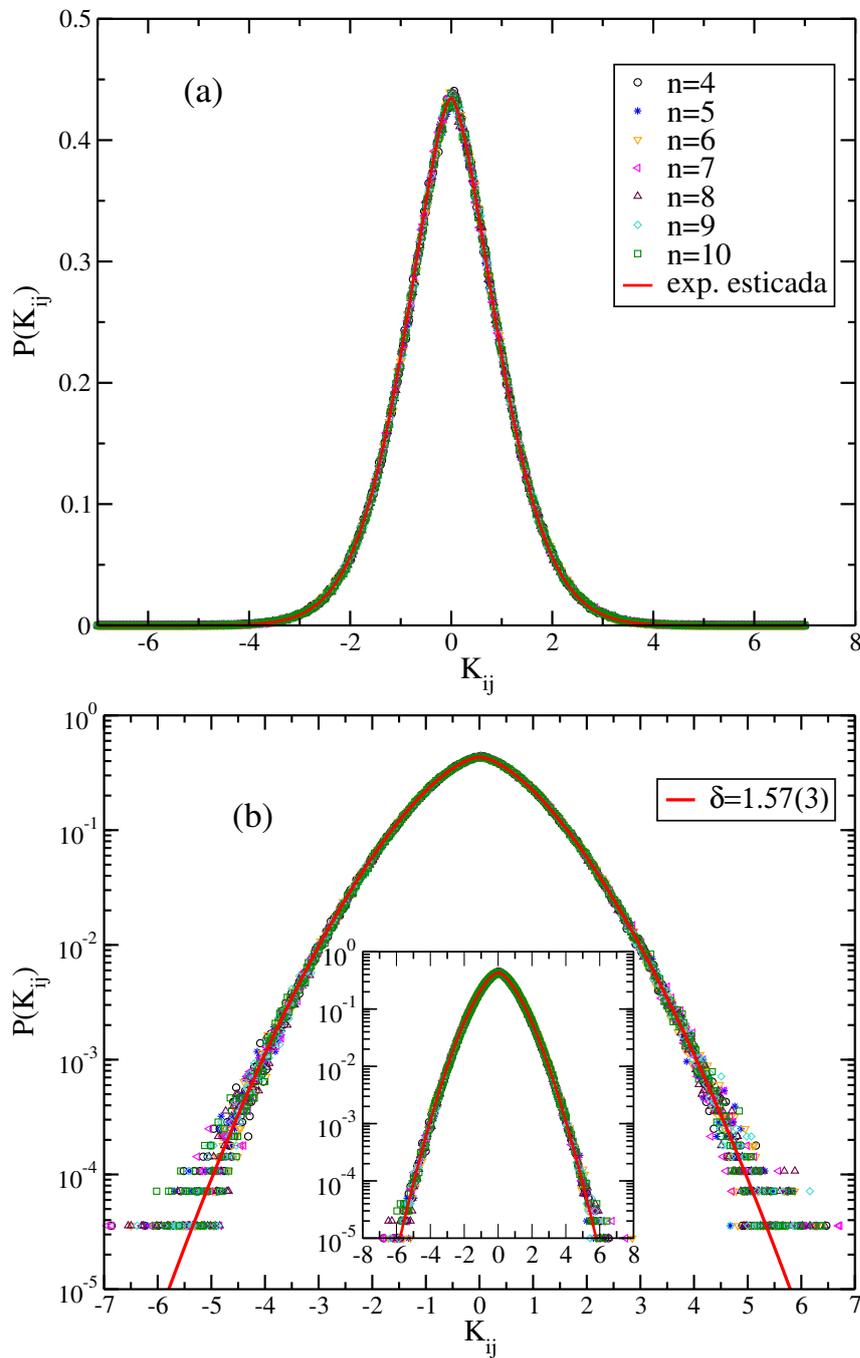
a partir da quarta iteração do GR ( $n = 4$ ), as distribuições renormalizadas permanecem inalteradas (dentro de nossa precisão numérica) até a décima sexta iteração ( $n = 16$ ), conforme representadas na figura 4.3. Nota-se que as 13 distribuições praticamente colapsam em uma única curva, a qual representa a distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$  associada à transição de fases VS–P da respectiva rede hierárquica. Na representação linear da figura 4.3(a), ambas as distribuições  $q$ -gaussiana e exponencial esticada apresentam ajustes igualmente bons aos dados. Na representação  $\ln_q P(K_{ij})$  versus  $K_{ij}^2$  (inserção),  $[\ln_q u = (u^{1-q} - 1)/(1 - q)]$  [41], a  $q$ -gaussiana [ $q = 1.10(1)$ ] torna-se uma reta, produzindo um excelente ajuste tanto na região central quanto na cauda da distribuição, ligeiramente melhor do que o ajuste produzido pela exponencial esticada [ $\delta = 1.76(5)$ ]. Na figura 4.3(b) os mesmos dados são exibidos na representação log-linear, onde mais uma vez, ambas as distribuições apresentam excelentes ajustes. Devido à grande dispersão dos dados nas caudas, apresentamos os mesmos dados na inserção da figura 4.3(b), onde aumentamos o tamanho das caixas (“bins”) utilizadas nos histogramas na região das caudas; mais precisamente, as caixas foram aumentadas por um fator 2 para  $2 \leq |K_{ij}| \leq 4$  e por um fator 4 para  $|K_{ij}| > 4$ . Observamos assim uma diminuição da dispersão nas caudas e uma confirmação de que as duas distribuições fornecem bons ajustes aos dados.



**Figura 4.3:** Distribuição de ponto fixo na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ . A distribuição inicial considerada é a gaussiana, cuja temperatura crítica vale  $(k_B T_c/J) = 0.8797(5)$ . Para um grande intervalo de iterações do GR, de  $n = 4$  até  $n = 16$ , obtivemos a distribuição de ponto fixo. (a) Na representação linear, os ajustes com a  $q$ -gaussiana e exponencial esticada não apresentam diferenças perceptíveis. Os mesmos dados são apresentados como  $\ln_q P(K_{ij})$  versus  $K_{ij}^2$ , onde o ajuste com a  $q$ -gaussiana (linha verde) é uma linha reta, sendo comparado com a exponencial esticada (linha vermelha pontilhada). (b) Os mesmos dados e ajustes de (a) são exibidos na representação log-linear; na inserção aumentamos o tamanho das caixas na região das caudas (ver o texto), reduzindo assim a dispersão dos dados nesta região.

Como observado na figura 4.3, mesmo utilizando diferentes representações ou alterações nos tamanhos das caixas do histograma, não é possível afirmar claramente qual das distribuições representa o melhor ajuste. Além destes gráficos, analisamos também as quantidades  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$  [Eqs. (4.4) e (4.5)], assim como o teste  $\chi^2$ , na tentativa de discernir entre estas duas distribuições. Para o ajuste com a distribuição  $q$ -gaussiana [Eq. (4.7)], os parâmetros usados foram  $q = 1.10(1)$  e  $B_q = 0.43(3)$ , para os quais obtivemos  $\chi^2/ndf \approx 0.98$  ( $ndf$  representa o número de graus de liberdade, típico do teste  $\chi^2$ ). Para o ajuste com a distribuição exponencial esticada [Eq. (4.12)], os parâmetros utilizados foram  $\delta = 1.76(5)$  e  $J^{-1} = 0.66(2)$ , com os quais obtivemos  $\chi^2/ndf \approx 0.96$ . Na análise das quantidades  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$  [Eqs. (4.4) e (4.5)], os valores teóricos (calculados para cada distribuição) não possibilitaram a distinção do melhor ajuste;  $\kappa_4$  apresenta uma concordância até a segunda casa decimal quando comparamos os valores da distribuição  $P^*(K_{ij})$  com os obtidos nas duas distribuições utilizadas no ajuste, enquanto que  $\kappa_6$  em ambos os casos apresenta uma boa concordância até a primeira casa decimal. Notamos que todas as análises efetuadas sugerem que ambas distribuições são igualmente aceitáveis como distribuições de ponto fixo.

Na figura 4.4 exibimos os dados da distribuição de ponto fixo para a rede hierárquica PWT. Na figura 4.4(a) exibimos a distribuição de ponto fixo em uma representação linear, ao longo de sete iterações do GR ( $4 \leq n \leq 10$ ); a distribuição inicial para os acoplamentos é uma gaussiana e a linha vermelha representa o ajuste com a distribuição exponencial esticada. Na figura 4.4(b) mostramos os mesmos dados em uma representação log-linear, onde observamos uma grande dispersão nas caudas; na inserção aumentamos o tamanho das caixas por um fator 2 para  $2 \leq |K_{ij}| \leq 4$  e por um fator 4 para  $|K_{ij}| > 4$ , resultando na redução da dispersão nesta região. Para esta rede o melhor ajuste foi obtido com a distribuição exponencial esticada [Eq. (4.12)] com  $\delta = 1.57(3)$ ; aplicando o teste  $\chi^2$ , encontramos  $\chi^2/ndf = 1.00$ . A análise de  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$  mostrou uma concordância até a segunda casa decimal, e portanto, dentre todas as distribuições investigadas, podemos afirmar que



**Figura 4.4:** Dados da distribuição de ponto fixo sobre a rede hierárquica PWT. Para todos os dados apresentados, a distribuição inicial considerada é uma gaussiana, cuja temperatura crítica vale  $(k_B T_c / J) = 0.9821(5)$ . Para um dado intervalo de iterações do GR, de  $n = 4$  até  $n = 10$ , obtivemos a distribuição de ponto fixo. (a) Na representação linear exibimos os dados e o ajuste com a distribuição exponencial esticada. (b) Os mesmos dados com seu ajuste são exibidos na representação log-linear; na inserção, aumentamos o tamanho das caixas na região das caudas (ver o texto), reduzindo assim a dispersão.

a distribuição  $P^*(K_{ij})$  é bem ajustada pela distribuição exponencial esticada. Especificamente na rede hierárquica PWT, consideramos a distribuição  $q$ -exponencial esticada [Eq. (4.16)] como uma boa possibilidade de ajuste, porém, ao aumentarmos o tamanho das caixas do histograma na região das caudas, verificamos que a mesma converge para a distribuição exponencial esticada, com  $q \rightarrow 1$ .

Para todas as redes hierárquicas da família MK investigadas, encontramos distribuições  $q$ -gaussianas e exponenciais esticadas fornecendo bons ajustes para as distribuições de ponto fixo; conforme mencionado acima, esta conclusão foi obtida pela análise dos gráficos, do teste  $\chi^2$  (onde na maioria dos casos  $\chi^2/ndf \approx 1$ ) e análise das quantidades  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$ . Em cada caso, as distribuições iniciais (gaussiana, bimodal e uniforme) foram consideradas em suas correspondentes temperaturas críticas  $T_c$ , e após algumas iterações do GR (tipicamente 4), todas convergem para a distribuição de ponto fixo. Na tabela 4.2 apresentamos os parâmetros da distribuição  $q$ -gaussiana,  $q$  e  $B_q$ , para redes hierárquicas da família de MK com  $2.58 \leq D \leq 7$ , assim como aqueles da distribuição exponencial esticada  $\delta$ ,  $J^{-1}$ , além do  $\chi^2$  de cada ajuste; esta última distribuição também é utilizada no ajuste na rede hierárquica PWT. Os parâmetros das distribuições e suas barras de erro são obtidos realizando ajustes<sup>3</sup> da distribuição de ponto fixo em cada iteração  $n$  do GR ( $4 \leq n \leq 16$  para redes MK e  $4 \leq n \leq 10$  para a rede PWT).

Para redes hierárquicas da família MK, observamos que o parâmetro  $q$  [tabela 4.2] associado à distribuição  $q$ -gaussiana, apresenta uma redução gradual para grandes dimensões ( $D > 4$ ), sugerindo que quando o número de caminhos paralelos ( $p$ ) da rede tende para infinito, obteremos o limite  $q \rightarrow 1$ , indicando que a distribuição de ponto fixo converge para uma gaussiana, como previsto na Ref. [30]. Comportamento semelhante é observado para o parâmetro  $\delta$  associado à exponencial esticada, o qual para  $D > 3$  aumenta lentamente para o limite  $\delta = 2$ , ou seja, aproximando-se da distribuição de ponto fixo gaussiana. A

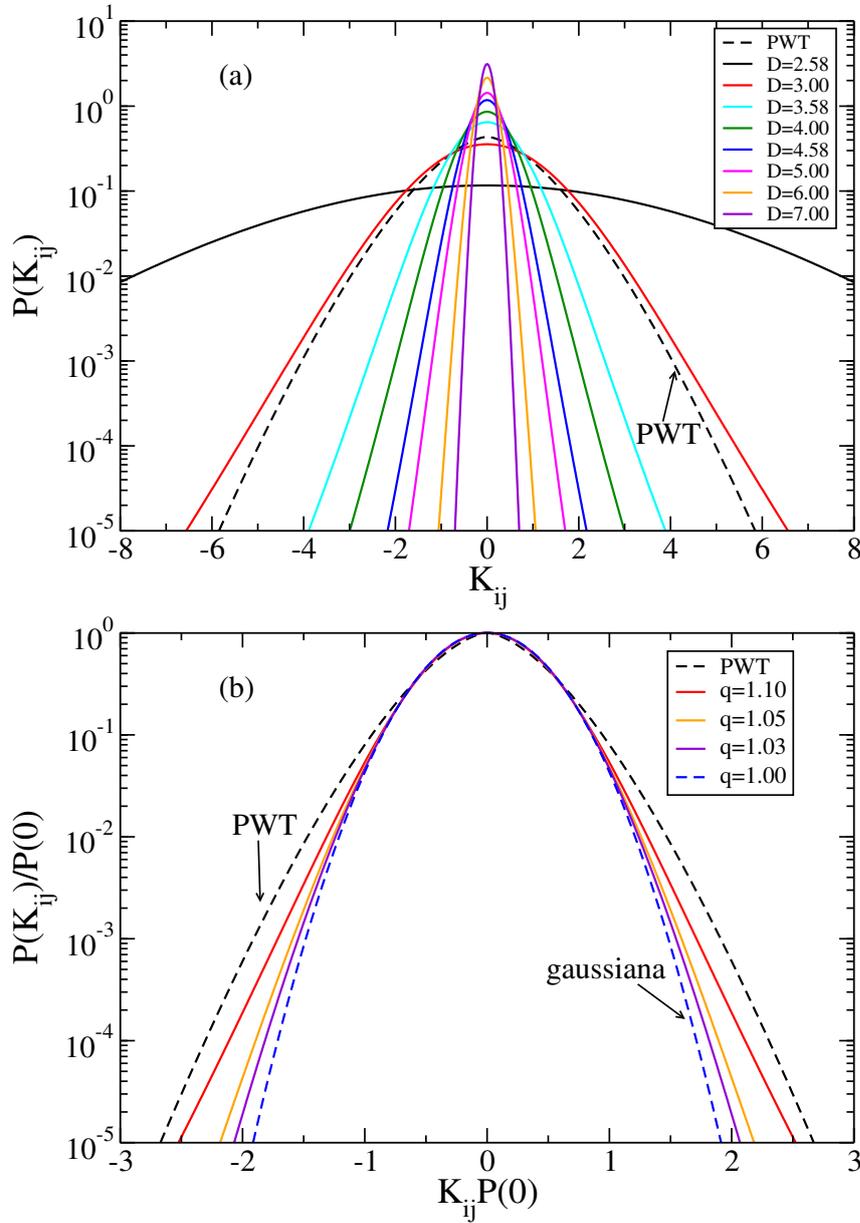
<sup>3</sup>Os ajustes foram realizados com o programa *gnuplot*, que utiliza o algoritmo de Marquardt-Levenberg [112] para ajustar os parâmetros.

maior dimensão aqui estudada foi  $D = 7$ , cuja célula básica é constituída por 64 caminhos paralelos; neste caso, a distribuição de ponto fixo encontra-se próxima de uma gaussiana, o que pode ser verificado, por exemplo, através do teste  $\chi^2$ , o qual para um ajuste com a distribuição gaussiana fornece  $\chi^2/ndf \approx 1$ .

Um ponto interessante é observado na tabela 4.1, onde para a rede hierárquica PWT a temperatura crítica, considerando qualquer distribuição inicial, apresenta resultados que sempre estão mais próximos aos encontrados na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ , do que aqueles encontrados na rede hierárquica de MK com  $D \cong 3.58$ . Estes resultados sugerem a considerarmos a rede PWT como uma aproximação para a rede cúbica [46]. De fato, estimativas recentes da temperatura crítica para a rede cúbica,  $k_B T_c/J = 0.951(9)$  [106] (distribuição gaussiana) e  $k_B T_c/J = 1.1019(29)$  [113] (distribuição bimodal), estão muito próximas dos resultados da rede hierárquica PWT, na qual  $k_B T_c/J = 0.9821(5)$  (distribuição gaussiana) e  $k_B T_c/J = 0.1166(5)$  (distribuição bimodal).

Destacamos que a distribuição  $q$ -gaussiana apresenta um bom ajuste somente para redes hierárquicas da família de MK, enquanto que a distribuição exponencial esticada fornece um bom ajuste tanto para redes hierárquicas de MK, quanto para a PWT. De modo geral, para redes hierárquicas de MK a distribuição  $q$ -gaussiana e exponencial esticada representam um bom ajuste aos dados e ambas possuem como um caso especial a distribuição gaussiana, que é a distribuição de ponto fixo no limite  $p \rightarrow \infty$ .

Exibimos na figura 4.5 as distribuições  $q$ -gaussianas, assim como a exponencial esticada, que podem ser consideradas boas aproximações de distribuições de ponto fixo para as redes hierárquicas da família MK e PWT, respectivamente. Verificamos na figura 4.5(a) que a largura das distribuições está diminuindo com o aumento da dimensão fractal  $D$ , associado a um aumento nas temperaturas críticas correspondentes (ver tabela 4.1). Observamos que a distribuição de ponto fixo da rede hierárquica PWT está mais próxima da distribuição associada à rede hierárquica de MK com  $D = 3$ , do que da rede de MK com mesma dimensão fractal, isto é,  $D \cong 3.58$ . A representação utilizada na figura 4.5(b) é



**Figura 4.5:** Distribuições de ponto fixo para redes hierárquicas da família MK com dimensão fractal  $2.58 \leq D \leq 7$ , representadas pelos ajustes das distribuições  $q$ -gaussianas Eq. (4.7), além da distribuição exponencial esticada Eq. (4.12) para a rede hierárquica PWT (linha preta pontilhada). (a) Na representação log-linear, observamos as larguras das distribuições diminuindo com o aumento da dimensão fractal. (b) Nas variáveis usadas, as distribuições  $q$ -gaussianas com mesmo índice  $q$  não dependem da largura, colapsando em um única curva: conseqüentemente, a linha vermelha representa as distribuições associadas às redes hierárquicas da família MK com  $2.58 \leq D \leq 5$ , para as quais  $q \approx 1.10$ , considerando as barras de erro. A linha pontilhada azul representa uma distribuição gaussiana.

muito conveniente para a distribuição  $q$ -gaussiana, pois nela estas distribuições tornam-se independentes da largura, dependendo apenas do parâmetro  $q$ . Conseqüentemente, redes hierárquicas da família de MK com  $2.58 \leq D \leq 5$ , colapsam em uma única curva (linha vermelha) com  $q \approx 1.10$  considerando as barras de erro (tabela 4.2). Ainda na figura 4.5(b) observa-se que as distribuições com maiores dimensões fractais revelam clara tendência de convergência para o limite gaussiano (linha azul pontilhada), onde  $D = 6$  é representado pela curva com  $q = 1.05$  e  $D = 7$  pela curva com  $q = 1.03$ . A distribuição de ponto fixo da rede hierárquica PWT é a que apresenta a cauda mais afastada da distribuição gaussiana, resultado já esperado, pois como visto na tabela 4.1, a mesma apresenta os maiores valores para as quantidades  $\kappa_4$  e  $\kappa_6$ .

### O expoente $\nu$

A partir da distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$  podemos calcular numericamente o expoente  $\nu$  associado com a divergência do comprimento de correlação na transição de fases [29, 114, 115]. Para tal, em cada caso consideramos duas temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , ligeiramente abaixo de  $T_c^{PF}$  (ver tabela 4.1), tal que  $T_2 < T_1 < T_c^{PF}$ . Uma vez que as estimativas de  $T_c^{PF}$  na tabela 4.1 foram feitas até a terceira casa decimal, definimos  $(k_B T_1/J) = (k_B T_c^{PF}/J) - 10^{-3}$ , enquanto que  $T_2 = T_1 - \delta T$ , com  $\delta T$  representando uma pequena variação na temperatura. Então, seguindo o procedimento do GR descrito na seção 2.3, iniciamos com essas duas temperaturas, de modo que para um dado passo  $n$  do GR temos as respectivas larguras,  $\langle K_{ij}^2 \rangle_{1,n}^{1/2}$  (quando o processo do RG inicia com a temperatura  $T_1$ ) e  $\langle K_{ij}^2 \rangle_{2,n}^{1/2}$  (quando o processo do RG inicia com a temperatura  $T_2$ ); como  $T_2 < T_1$ , temos que  $\langle K_{ij}^2 \rangle_{2,n}^{1/2} > \langle K_{ij}^2 \rangle_{1,n}^{1/2}$ , para cada passo  $n$ . O expoente  $\nu_n$  para cada passo  $n$  é definido como

$$\nu_n = \frac{\ln 2}{\ln(\Delta_{n+1}/\Delta_n)}, \quad (4.21)$$

onde,

$$\Delta_n = \langle K_{ij}^2 \rangle_{2,n}^{1/2} - \langle K_{ij}^2 \rangle_{1,n}^{1/2}. \quad (4.22)$$

	MK								PWT
$D$	2.58	3.00	3.58	4.00	4.58	5.00	6.00	7.00	3.58
$\nu$	13.1(9)	2.97(5)	1.77(9)	1.49(9)	1.29(4)	1.20(6)	1.08(5)	1.04(3)	3.02(7)

**Tabela 4.3:** Estimativas para o expoente  $\nu$ , considerando a distribuição  $q$ -gaussiana da Eq. (4.7) como distribuição inicial no caso de redes hierárquicas de MK. Para a rede hierárquica PWT, utilizamos a distribuição exponencial esticada da Eq. (4.12) como distribuição inicial.

Se consideramos  $\delta T$  suficientemente pequeno, as estimativas de  $\nu_n$  flutuam em torno de um dado valor para um certo intervalo de iterações do GR. Na presente análise consideramos a distribuição  $q$ -gaussiana [Eq. (4.7)] como distribuição inicial no caso das redes hierárquicas da família MK, enquanto que para a rede hierárquica PWT, utilizamos a distribuição exponencial esticada [Eq. (4.12)] como distribuição inicial. Considerando  $k_B(\delta T)/J = 10^{-6}$ ,  $\nu_n$  permanece estável (isto é, apresentando pequenas flutuações em torno de um dado valor médio), para um certo intervalo de iterações do RG (tipicamente 10 iterações do RG); o resultado final para o expoente  $\nu$  corresponde a uma média sobre estas iterações.

As estimativas na tabela 4.3, considerando redes hierárquicas de MK com  $D = 3, 4, 5$  e 6, essencialmente coincidem com os obtidos previamente na Ref. [115]. Para a rede hierárquica PWT, encontramos  $\nu = 3.02(7)$ , que quando comparado com os resultados encontrados nas redes de MK, se aproxima bastante da estimativa da rede hierárquica com  $D = 3$ . Nosso resultado sobre a PWT também concorda, dentro das barras de erro, com a estimativa recente sobre a mesma rede,  $\nu = 3.25(66)$  [71]; porém, ambos apresentam discordâncias com relação aos resultados encontrados através de simulações de Monte Carlo sobre uma rede cúbica, na qual, considerando diferentes distribuições de probabilidades para os acoplamentos, encontram um valor universal,  $\nu \approx 2.5$  [106, 113, 116, 117]. É importante destacar que os valores da tabela 4.3 representam expoentes universais para cada rede hierárquica considerada, uma vez que foram obtidos a partir da distribuição de ponto fixo; neste sentido, nossa estimativa para a rede hierárquica PWT apresenta uma discrepância relativa de 15% com respeito ao resultado mais recente obtido

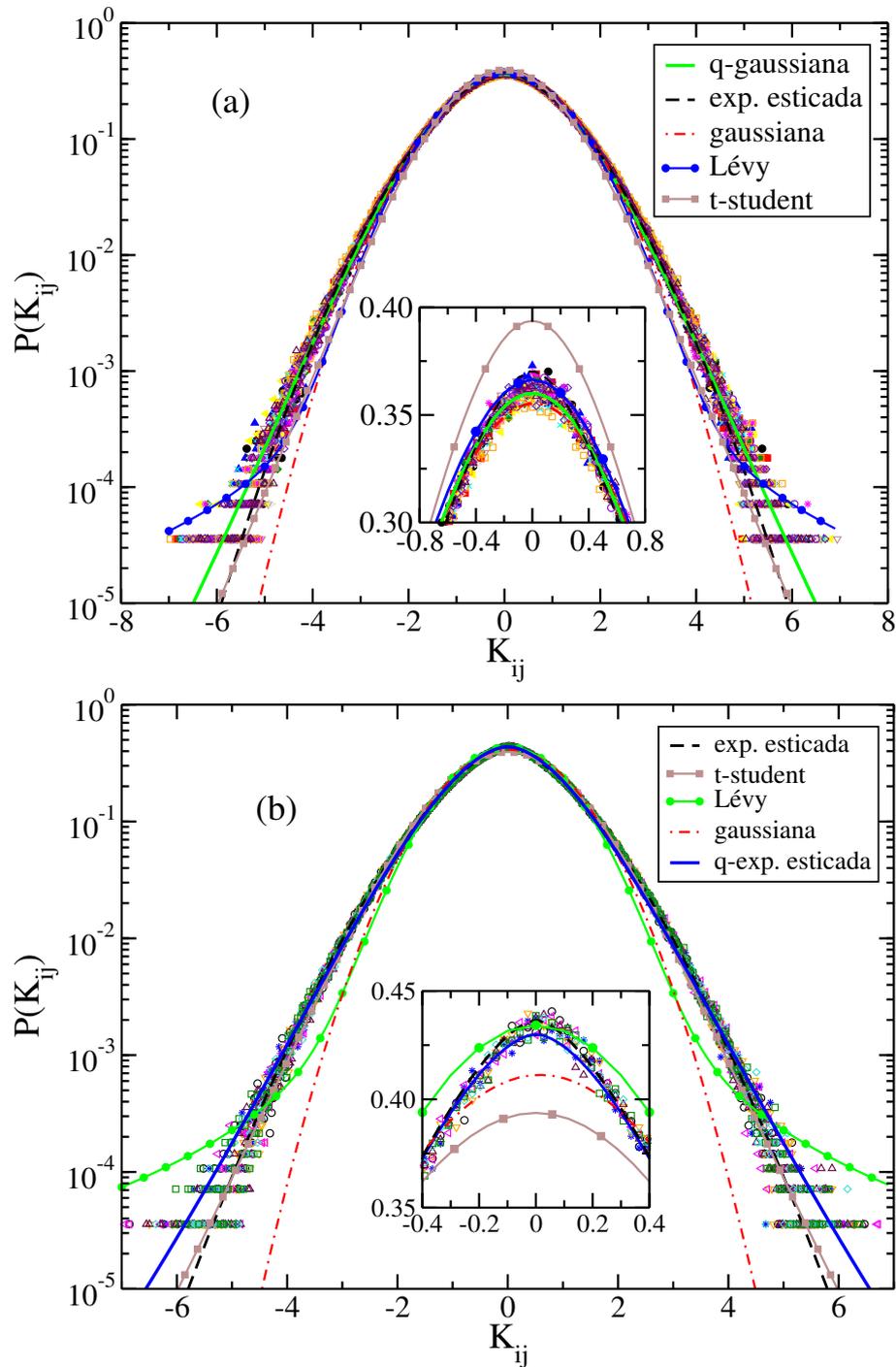
através de extensas simulações numéricas na rede cúbica, onde  $\nu = 2.562(42)$  [113]. A discrepância aumenta muito quando comparamos o resultado da rede hierárquica de MK com  $D = 4$ ,  $\nu = 1.49(9)$ , com simulações de Monte Carlo em redes hipercúbicas com  $D = 4$ , onde  $\nu = 1.025(15)$  [118]. É possível que estas discrepâncias estejam associadas com o procedimento de linearização usado para obter a Eq. (4.21), como argumentado na Ref. [119]. No caso específico da rede hierárquica PWT, no próximo capítulo iremos novamente estimar o expoente  $\nu$ , através de uma abordagem que utiliza a distribuição de ponto fixo, encontrando um resultado que se aproxima muito dos obtidos na rede cúbica.

### Outras propostas de ajustes para a distribuição de ponto fixo

Na figura 4.6 apresentamos dados da distribuição de ponto fixo na representação log-linear para as redes hierárquicas de MK com  $D = 3$  [figura 4.6(a)] e PWT [figura 4.6(b)]. Em cada caso, além dos ajustes com as distribuições usadas nas figura 4.3(b) e figura 4.4(b), respectivamente, também apresentamos outras distribuições utilizadas como tentativas para os ajustes, tais como a gaussiana [Eq. (4.1)],  $\alpha$ -Lévy estável [111],  $t$ -student [110] e a  $q$ -exponencial esticada [Eq. (4.16)]. Para a distribuição  $t$ -student o número de graus de liberdade (por definição um inteiro positivo) considerado para o melhor ajuste foi 19 [figuras 4.6(a)–(b)], para a  $\alpha$ -Lévy estável usamos  $\alpha = 1.98(1)$  na figura 4.6(a) e  $\alpha = 1.95(2)$  na figura 4.6(b). Observa-se que essas tentativas de ajustes acabam falhando em alguma região, na cauda ou na região central, como mostrado nas inserções. Aparentemente a distribuição  $q$ -exponencial esticada apresenta um bom ajuste para a rede hierárquica PWT, com os parâmetros  $q = 1.10$  e  $\delta = 1.76$ ; porém, verificamos que esta distribuição não é robusta, sendo sensível à escolha dos tamanhos das caixas utilizadas para o histograma, por exemplo, quando aumentamos o tamanho das caixas por um fator 4 na região das caudas a  $q$ -exponencial esticada converge para a distribuição exponencial esticada, ou seja,  $q \rightarrow 1$ . Portanto, na presente abordagem, as distribuições  $q$ -gaussiana e exponencial esticada apresentam um bom ajuste para redes da família de MK, não sendo possível

determinar neste caso qual delas é a mais apropriada. Para a rede hierárquica PWT, o melhor ajuste foi encontrado com a distribuição exponencial esticada, que pode ser utilizada como uma excelente aproximação da distribuição de ponto fixo.

Concluindo, ao longo deste capítulo investigamos a forma funcional da distribuição de ponto fixo para VSs de Ising em diversas redes hierárquicas; o conhecimento destas distribuições é uma questão relevante para a compreensão de modelos de VSs em redes hierárquicas. Através destas, podemos calcular importantes quantidades críticas, como expoentes críticos universais, totalmente independentes da distribuição inicial de acoplamentos. Simulações numéricas recentes de VSs em redes de Bravais têm confirmado a universalidade dos expoentes críticos, em concordância com nossos resultados. Aqui apresentamos uma forma funcional para distribuições de ponto fixo de diferentes redes hierárquicas, apresentando boa concordância com os dados numéricos. Esperamos que estes resultados possibilitem uma melhor compreensão dos VSs de Ising com interações de curto alcance também em redes de Bravais.



**Figura 4.6:** Diversas tentativas de ajuste para distribuições de ponto fixo na representação log-linear. (a) VS de Ising na rede hierárquica de MK com  $D = 3$ ; além das distribuições usadas na figura 4.3 (exponencial esticada e  $q$ -gaussiana), consideramos como possibilidades de ajuste as distribuições gaussiana,  $\alpha$ -Lévy estável e  $t$ -student. (b) VS de Ising na rede hierárquica PWT; além da distribuição usada na figura 4.4 (exponencial esticada), consideramos como possibilidades de ajuste as distribuições gaussiana,  $\alpha$ -Lévy estável,  $t$ -student e  $q$ -exponencial esticada. A região central é ampliada (escala linear-linear) nas respectivas inserções.

## Capítulo 5

# Magnetizações locais

### 5.1 Introdução

Grande parte dos trabalhos dedicados ao estudo da fase VS em redes hierárquicas utilizaram como principal ferramenta o GR. Através do processo de renormalização, a distribuição de acoplamentos, para grandes escalas de comprimento, mantém uma forma fixa universal no ponto crítico. O acompanhamento da evolução do momentos da distribuição através do GR pode fornecer informações importantes sobre o sistema, como a determinação de uma transição de fases ou a determinação do expoente de rigidez da fase VS. Diferente do procedimento do GR empregado nos capítulos anteriores, aqui implementaremos o procedimento de renormalização de forma exata e através do mesmo obteremos as magnetizações locais para um vidro de spins com interações de curto alcance na rede hierárquica PWT.

O método que possibilita o cálculo das magnetizações locais foi introduzido pela primeira vez no trabalho de Morgado, Coutinho e Curado [43], onde propriedades multifractais das magnetizações locais no modelo ferromagnético de Ising sobre uma rede hierárquica da família MK, assim como algumas propriedades termodinâmicas, foram estudadas. Posteriormente o método MCC foi estendido para diversos modelos magnéticos, como o vidro de spins de Ising [34,35], o modelo ferromagnético de Potts [120] e o modelo

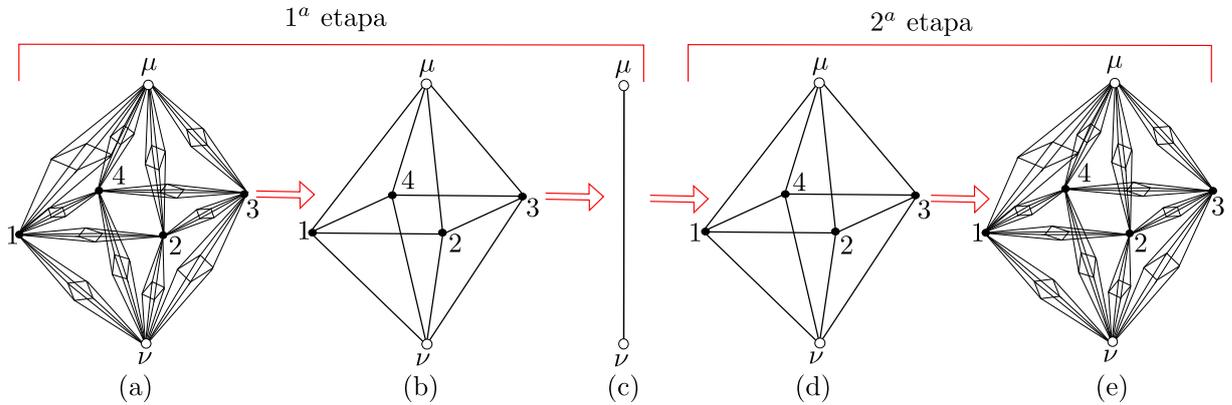
de Ising com campo aleatório [121]. Todos estes trabalhos foram realizados sobre redes hierárquicas da família MK, com foco principal na rede com dimensão fractal  $D = 3$ .

A distribuição de ponto fixo, estudada no capítulo 4, é vital para a implementação do método MCC. Com uma abordagem exata, a última hierarquia do sistema sempre terá a maior parte dos acoplamentos  $\{J_{ij}\}$  oriundos de alguma distribuição inicial de probabilidades  $P(J_{ij})$ ; como já apresentando, no ponto crítico todas as distribuições iniciais convergem para uma distribuição universal, a distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$ . Nas redes hierárquicas da família de MK onde a implementação deste método foi realizada com diferentes distribuições iniciais para os acoplamentos, obteve-se diferentes estimativas para os expoentes críticos (principalmente para o expoente  $\beta$  associado ao parâmetro de ordem), sugerindo uma possível quebra de universalidade [35]. Posteriormente, utilizando a distribuição de ponto fixo<sup>1</sup>, verificou-se que os expoentes críticos são os mesmos para estas redes, ou seja, existe universalidade em redes hierárquicas de MK [38].

Aqui nossa atenção está voltada para a rede hierárquica PWT [figura 5.1(b)]. Vamos estender o método MCC para o vidro de spins de Ising nesta rede; para tal, primeiro devemos obter as equações de recorrência do GR, assim como as equações recursivas que relacionam as magnetizações dos sítios internos com as dos sítios externos da célula básica. O processo sobre a rede hierárquica PWT é dividido em duas etapas bem distintas descritas a seguir. Na primeira etapa geramos um sistema na hierarquia de ordem  $n$ , e dizimamos a rede até que reste apenas um acoplamento efetivo entre os dois sítios externos, ou seja, a hierarquia de ordem zero. Nesta etapa todas as ligações e campos dizimados no processo de renormalização devem ser armazenados para sua utilização na reconstrução da rede; isto gera um alto custo computacional, o que nos impossibilitou de realizar simulações acima da sétima hierarquia. Na segunda etapa, partindo do acoplamento efetivo

---

<sup>1</sup>Como a forma da distribuição de ponto fixo  $P^*(K_{ij})$  não era conhecida, a mesma foi obtida pelo seguinte procedimento: considera-se uma dada distribuição de probabilidades inicial e determina-se a sua temperatura crítica  $T_c$ ; em seguida, o procedimento do GR é aplicado até no mínimo a quarta iteração do GR ( $n = 4$ ), garantindo assim que a distribuição escolhida tenha convergido para  $P^*(K_{ij})$ ; por último, utiliza-se esses acoplamentos na implementação do método MCC.



**Figura 5.1:** Ilustração das etapas para implementação do método MCC na rede hierárquica PWT. A primeira etapa [de (a) até (c)] consiste no processo de renormalização, onde todos os sítios internos são dizimados até obtermos apenas a ligação efetiva entre os sítios  $\mu$  e  $\nu$ , ou seja, a hierarquia de ordem zero [exibida em (c)]. A segunda etapa [de (d) para (e)] consiste na reconstrução da rede e através do método MCC determinamos as magnetizações locais dos sítios internos. As células mostradas em (b) e (d) representam a unidade básica geradora da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional.

entre os dois sítios externos, iniciamos o processo de agregação, reconstruindo toda a rede e paralelamente com as relações de recorrência, determinando as magnetizações locais dos sítios internos em função daquelas dos sítios externos (sítios  $\mu$  e  $\nu$ ) até retornarmos à hierarquia de ordem  $n$ . Para exemplificar, ilustramos na figura 5.1 um esquema simplificado com as duas etapas para a rede hierárquica PWT até a segunda hierarquia ( $n = 2$ ).

A seguir determinaremos as relações de recorrência utilizadas na renormalização e no cálculo das magnetizações locais para duas situações diferentes, ou seja, com um campo magnético aplicado em cada sítio da rede e para campo magnético nulo. Devido ao alto custo computacional gerado por este procedimento exato, nas simulações desta tese consideramos campo nulo. O tempo computacional cresce exponencialmente com a hierarquia, e nossas simulações são repetidas para 400 amostras em cada temperatura; em um computador com processador Intel Xeon X5670 (com 2,93 Ghz e 12 núcleos), esta simulação leva aproximadamente uma semana para uma hierarquia de ordem 7, de tal forma que simulações na hierarquia de ordem 8 tornam-se inviáveis.

## 5.2 Equações de recorrência do grupo de renormalização

Estudaremos um sistema de vidro de spins de Ising cujo hamiltoniano é dado por,

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j - \sum_i \xi_i S_i \quad (S_i = \pm 1), \quad (5.1)$$

onde  $J_{ij}$  representa o acoplamento entre dois spins  $S_i$  e  $S_j$  nos sítios  $i$  e  $j$ , primeiros vizinhos em uma determinada hierarquia, enquanto que  $\xi_i$  representa o campo magnético que atua no sítio  $i$ . O hamiltoniano da Eq. (5.1) é definido na rede hierárquica PWT cuja célula unitária é mostrada na figura 5.1(b), onde  $\mu$  e  $\nu$  representam os sítios externos, ao passo que 1, 2, 3 e 4 são os sítios internos de uma célula básica. Os acoplamentos são obtidos da distribuição exponencial esticada Eq. (4.12), que representa a distribuição de ponto fixo.

O procedimento de renormalização funciona de forma inversa ao da geração da rede, ou seja, iniciamos em uma hierarquia de ordem  $n$  e realizamos a dizimação dos sítios internos da rede até a hierarquia de ordem zero. Definindo os acoplamentos e campos adimensionais como  $K_{ij} = \beta J_{ij}$  e  $H_i = \beta \xi_i$  [ $\beta = 1/k_B T$ ], respectivamente, as equações do GR podem ser escritas como

$$K'_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \log \left( \frac{Z_{--} Z_{++}}{Z_{-+} Z_{+-}} \right), \quad (5.2)$$

$$H'_\mu = H_\mu + \frac{1}{4} \log \left( \frac{Z_{++} Z_{+-}}{Z_{--} Z_{-+}} \right), \quad (5.3)$$

$$H'_\nu = H_\nu + \frac{1}{4} \log \left( \frac{Z_{++} Z_{-+}}{Z_{--} Z_{+-}} \right), \quad (5.4)$$

onde  $Z_{S_\mu, S_\nu}$  representa a função de partição de uma dada célula básica com os sítios externos mantidos fixos ( $S_\mu, S_\nu = \pm 1$ ) [Eq. (2.12)] (ver Apêndice A).

As Eqs. (5.3) e (5.4) mostram que após a transformação do GR o campo magnético

nos sítios que não foram dizimados é dado por aquele que já existia no mesmo, mais uma contribuição dos sítios dizimados, sendo então extremamente importante que estes campos sejam armazenados a cada passo do GR.

### 5.3 Equações de recorrência para magnetizações locais

Concluída a primeira etapa, ou seja, após renormalizar o sistema  $n$  vezes, iniciamos a segunda etapa que consiste na implementação do método MCC; para tal é necessário obter as relações recursivas específicas da rede hierárquica PWT. A seguir, apresentamos como obter tais relações para o hamiltoniano da Eq. (5.1) em dois casos distintos: (i) com campos magnéticos diferentes de zero ( $\xi_i \neq 0$ ); (ii) com campos magnéticos nulos ( $\xi_i = 0$ ).

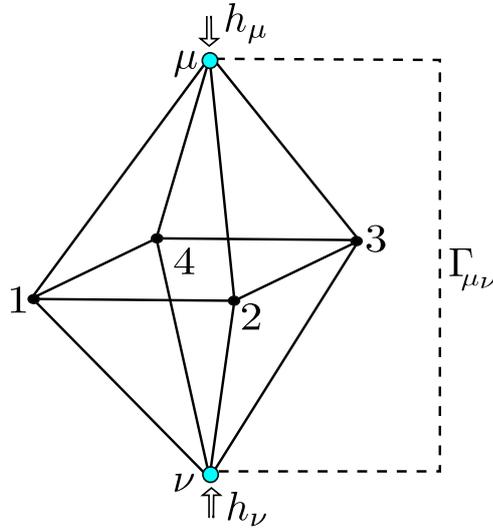
#### 5.3.1 Campos magnéticos locais diferentes de zero

O método para determinação das relações de recorrência para as magnetizações locais baseia-se na suposição que o hamiltoniano do modelo para uma rede hierárquica com  $n$  gerações é equivalente ao hamiltoniano efetivo de uma única célula básica, com a adição de campos efetivos agindo sobre os sítios externos, assim como de uma ligação efetiva atuando entre os sítios externos, situação esquematizada na Fig. 5.2. Esta ligação efetiva e campos efetivos representam a influência do restante da rede sobre a célula básica escolhida [34, 43].

Considerando um sistema com campos magnéticos diferentes de zero, o hamiltoniano para célula básica da figura 5.2 é dado por

$$\mathcal{H} = -\Gamma_{\mu\nu}S_{\mu}S_{\nu} - h_{\mu}S_{\mu} - h_{\nu}S_{\nu} - J_{12}S_1S_2 - J_{23}S_2S_3 - J_{34}S_3S_4 - J_{41}S_4S_1 - \sum_{j=1}^4 (J_{\mu j}S_{\mu}S_j + J_{j\nu}S_jS_{\nu} + \xi_j S_j), \quad (5.5)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}$  representa a interação efetiva entre os sítios  $\mu$  e  $\nu$ , enquanto que  $h_{\mu}$  e  $h_{\nu}$  são campos efetivos aplicados sobre os sítios externos. Note que os campos que atuam nos sítios externos,  $\xi_{\mu}$  e  $\xi_{\nu}$ , foram absorvidos em  $h_{\mu}$  e  $h_{\nu}$  para uma simplificação da notação,



**Figura 5.2:** Esquema representativo de uma célula básica com uma ligação efetiva  $\Gamma_{\mu\nu}$  entre os sítios externos  $\mu$  e  $\nu$ , com campos efetivos  $h_\mu$  e  $h_\nu$ .

procedimento que não altera o resultado final. A função de partição do sistema é escrita como,

$$Z = \text{Tr}_{\{S_j\}, S_\mu, S_\nu} \exp(-\beta\mathcal{H}) \quad (5.6)$$

$$= \sum_{S_\mu=\pm 1} \sum_{S_\nu=\pm 1} \exp[\beta(\Gamma_{\mu\nu}S_\mu S_\nu + h_\mu S_\mu + h_\nu S_\nu)] \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{S_4=\pm 1} \exp\{\beta[J_{12}S_1S_2 + J_{23}S_2S_3 + J_{34}S_3S_4 + J_{41}S_4S_1 + \sum_{j=1}^4 (J_{\mu j}S_\mu S_j + J_{j\nu}S_j S_\nu + \xi_j S_j)]\}. \quad (5.7)$$

Efetuando o traço acima obtemos,

$$Z = \mathbf{A} e^{\beta(\Gamma_{\mu\nu}-h_\mu-h_\nu)} + \mathbf{B} e^{\beta(\Gamma_{\mu\nu}+h_\mu+h_\nu)} + \mathbf{C} e^{\beta(h_\mu-\Gamma_{\mu\nu}-h_\nu)} + \mathbf{D} e^{\beta(h_\nu-\Gamma_{\mu\nu}-h_\mu)}, \quad (5.8)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{16} e^{R_i}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=17}^{32} e^{R_i}, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=33}^{48} e^{R_i}, \quad \mathbf{D} = \sum_{i=49}^{64} e^{R_i}, \quad (5.9)$$

onde cada  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 64$ ) é função dos 12 acoplamentos  $J_{ij}$  da célula básica e dos 4 campos magnéticos  $\xi_i$  que atuam sobre os sítios internos. Apresentamos a seguir um

destes termos,

$$\begin{aligned} R_1 = & K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 \\ & - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sendo os demais termos semelhantes a este, porém com combinações de sinais diferentes precedendo os acoplamentos e campos, conforme apresentados no Apêndice B. É importante destacar que os termos **A**, **B**, **C** e **D** (que dependem apenas dos acoplamentos e campos que atuam nos sítios internos da célula básica) são multiplicados por exponenciais que dependem do acoplamento efetivo  $\Gamma_{\mu\nu}$  e dos campos efetivos que atuam nos sítios externos, ou seja, em cada produto da Eq. (5.8) existe um termo que depende das variáveis internas e outro dependente das variáveis externas. Para simplificar a notação, vamos definir os termos externos como

$$\psi_1 = e^{\beta(\Gamma_{\mu\nu} - h_\mu - h_\nu)}, \quad (5.11)$$

$$\psi_2 = e^{\beta(\Gamma_{\mu\nu} + h_\mu + h_\nu)}, \quad (5.12)$$

$$\psi_3 = e^{\beta(h_\mu - \Gamma_{\mu\nu} - h_\nu)}, \quad (5.13)$$

$$\psi_4 = e^{\beta(h_\nu - \Gamma_{\mu\nu} - h_\mu)}, \quad (5.14)$$

e assim a Eq. (5.8) é reescrita como

$$Z = \mathbf{A}\psi_1 + \mathbf{B}\psi_2 + \mathbf{C}\psi_3 + \mathbf{D}\psi_4.$$

Agora, podemos realizar a média térmica<sup>2</sup> e calcular os momentos magnéticos médios dos sítios externos e internos, assim como a correlação entre eles. Para o sítios externos

---

<sup>2</sup>Ao longo desta tese adotamos a representação  $\langle \dots \rangle_T$  para a média térmica; neste capítulo utilizaremos apenas  $\langle \dots \rangle$  para representar esta média.

obtemos,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \langle S_\mu \rangle \\ \langle S_\nu \rangle \\ \langle S_\mu S_\nu \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \frac{\psi_1}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \frac{\psi_2}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix} \frac{\psi_3}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \end{pmatrix} \frac{\psi_4}{Z}, \quad (5.15)$$

enquanto que para os sítios internos,

$$\begin{pmatrix} \langle S_1 \rangle \\ \langle S_2 \rangle \\ \langle S_3 \rangle \\ \langle S_4 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_4 \end{pmatrix} \frac{\psi_1}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \frac{\psi_2}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \frac{\psi_3}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_4 \end{pmatrix} \frac{\psi_4}{Z}, \quad (5.16)$$

$$\begin{pmatrix} \langle S_\mu S_1 \rangle \\ \langle S_1 S_\nu \rangle \\ \langle S_1 S_2 \rangle \\ \langle S_\mu S_2 \rangle \\ \langle S_2 S_\nu \rangle \\ \langle S_2 S_3 \rangle \\ \langle S_\mu S_3 \rangle \\ \langle S_3 S_\nu \rangle \\ \langle S_3 S_4 \rangle \\ \langle S_\mu S_4 \rangle \\ \langle S_4 S_\nu \rangle \\ \langle S_4 S_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{L}_1 \\ -\mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_5 \\ -\mathbf{L}_2 \\ -\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_6 \\ -\mathbf{L}_3 \\ -\mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_7 \\ -\mathbf{L}_4 \\ -\mathbf{L}_4 \\ \mathbf{L}_8 \end{pmatrix} \frac{\psi_1}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_5 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_6 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_7 \\ \mathbf{M}_4 \\ \mathbf{M}_4 \\ \mathbf{M}_8 \end{pmatrix} \frac{\psi_2}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ -\mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_5 \\ \mathbf{N}_2 \\ -\mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_6 \\ \mathbf{N}_3 \\ -\mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_7 \\ \mathbf{N}_4 \\ -\mathbf{N}_4 \\ \mathbf{N}_8 \end{pmatrix} \frac{\psi_3}{Z} + \begin{pmatrix} -\mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_5 \\ -\mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_6 \\ -\mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_7 \\ -\mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_8 \end{pmatrix} \frac{\psi_4}{Z}, \quad (5.17)$$

onde  $L_j$ ,  $M_j$ ,  $N_j$  e  $O_j$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) dependem dos 12 acoplamentos  $J_{ij}$  da célula e dos 4

campos magnéticos  $\xi_i$  que atuam sobre os sítios internos da célula básica. Apresentamos a seguir um destes termos,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 = & -e^{R1} + e^{R2} - e^{R3} + e^{R4} - e^{R5} - e^{R6} + e^{R7} + e^{R8} - e^{R9} + e^{R10} \\ & - e^{R11} + e^{R12} - e^{R13} - e^{R14} + e^{R15} + e^{R16}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

sendo os outros termos semelhantes a este, porém com diferentes combinações de sinais, encontrando-se definidos no Apêndice B. Observando os sistemas de Eqs. (5.15)–(5.17), verifica-se quatro grupos de variáveis externas bem definidas. Observe na figura 5.1(d) que os sítios externos ( $\mu$  e  $\nu$ ) são oriundos da hierarquia anterior ( $n = 0$ ), enquanto os sítios internos pertencem à hierárquica atual ( $n = 1$ ). Podemos então resolver o sistema da Eq. (5.15) para as variáveis externas

$$\frac{\psi_1}{Z} = \frac{1 - \langle S_\nu \rangle - \langle S_\mu \rangle + \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{A}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\psi_2}{Z} = \frac{1 + \langle S_\nu \rangle + \langle S_\mu \rangle + \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{B}}, \quad (5.20)$$

$$\frac{\psi_3}{Z} = \frac{1 - \langle S_\nu \rangle + \langle S_\mu \rangle - \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{C}}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\psi_4}{Z} = \frac{1 + \langle S_\nu \rangle - \langle S_\mu \rangle - \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{D}}. \quad (5.22)$$

As Eqs. (5.16)–(5.17) podem ser reescritas em função das variáveis das Eqs. (5.19)–(5.22), assumindo a forma simplificada a seguir

$$\langle S_j \rangle = \Upsilon_j \langle S_\mu \rangle + \Phi_j \langle S_\nu \rangle + \Xi_j \langle S_\mu S_\nu \rangle + \Lambda_j \quad (j = 1, 2, 3 \text{ e } 4), \quad (5.23)$$

$$\langle S_\mu S_j \rangle = \Lambda_j \langle S_\mu \rangle + \Xi_j \langle S_\nu \rangle + \Phi_j \langle S_\mu S_\nu \rangle + \Upsilon_j \quad (j = 1, 2, 3 \text{ e } 4), \quad (5.24)$$

$$\langle S_j S_\nu \rangle = \Xi_j \langle S_\mu \rangle + \Lambda_j \langle S_\nu \rangle + \Upsilon_j \langle S_\mu S_\nu \rangle + \Phi_j \quad (j = 1, 2, 3 \text{ e } 4), \quad (5.25)$$

$$\langle S_j S_{j+1} \rangle = \Upsilon_{4+j} \langle S_\mu \rangle + \Phi_{4+j} \langle S_\nu \rangle + \Xi_{4+j} \langle S_\mu S_\nu \rangle + \Lambda_{j+4} \quad (j = 1, 2 \text{ e } 3), \quad (5.26)$$

$$\langle S_j S_{j-3} \rangle = \Upsilon_{4+j} \langle S_\mu \rangle + \Phi_{4+j} \langle S_\nu \rangle + \Xi_{4+j} \langle S_\mu S_\nu \rangle + \Lambda_{4+j} \quad (j = 4), \quad (5.27)$$

onde

$$\Upsilon_j = \frac{1}{4} \left( -\frac{\mathbf{L}_j}{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{M}_j}{\mathbf{B}} + \frac{\mathbf{N}_j}{\mathbf{C}} - \frac{\mathbf{O}_j}{\mathbf{D}} \right), \quad (5.28)$$

$$\Phi_j = \frac{1}{4} \left( -\frac{\mathbf{L}_j}{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{M}_j}{\mathbf{B}} - \frac{\mathbf{N}_j}{\mathbf{C}} + \frac{\mathbf{O}_j}{\mathbf{D}} \right), \quad (5.29)$$

$$\Xi_j = \frac{1}{4} \left( \frac{\mathbf{L}_j}{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{M}_j}{\mathbf{B}} - \frac{\mathbf{N}_j}{\mathbf{C}} - \frac{\mathbf{O}_j}{\mathbf{D}} \right), \quad (5.30)$$

$$\Lambda_j = \frac{1}{4} \left( \frac{\mathbf{L}_j}{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{M}_j}{\mathbf{B}} + \frac{\mathbf{N}_j}{\mathbf{C}} + \frac{\mathbf{O}_j}{\mathbf{D}} \right). \quad (5.31)$$

As Eqs. (5.23)–(5.27) revelam a conexão entre os momentos magnéticos e funções de correlação dos sítios da hierarquia atual com os momentos magnéticos e funções de correlação dos sítios de hierarquias anteriores. Portanto, partindo da hierarquia de ordem zero e conhecendo  $\langle S_\mu \rangle$ ,  $\langle S_\nu \rangle$  e  $\langle S_\mu S_\nu \rangle$ , associados à hierarquia de ordem zero, podemos iterar as Eqs. (5.23)–(5.27) para obter as magnetizações locais e funções de correlação das próximas gerações.

### 5.3.2 Ausência de campos magnéticos

Agora vamos abordar um sistema com campos magnéticos nulos,  $\xi_i = 0$  ( $\forall i$ ). O hamiltoniano para a célula básica da figura 5.2 é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\Gamma_{\mu\nu} S_\mu S_\nu - h_\mu S_\mu - h_\nu S_\nu - J_{12} S_1 S_2 - J_{23} S_2 S_3 - J_{34} S_3 S_4 \\ & - J_{41} S_4 S_1 - \sum_{j=1}^4 (J_{\mu j} S_\mu S_j + J_{j\nu} S_j S_\nu), \end{aligned} \quad (5.32)$$

enquanto que a função de partição é escrita como

$$\begin{aligned}
Z &= \text{Tr}_{(\{S_i\}, S_\mu, S_\nu)} \exp(-\beta\mathcal{H}) \\
&= \text{Tr}_{(S_\mu, S_\nu)} \exp[\beta(\Gamma S_\mu S_\nu + h_\mu S_\mu + h_\nu S_\nu)] \text{Tr}_{(\{S_i\})} \exp\{\beta[J_{12}S_1S_2 + J_{23}S_2S_3 \\
&\quad + J_{34}S_3S_4 + J_{41}S_4S_1 + \sum_{j=1}^4 (J_{\mu j}S_\mu S_j + J_{j\nu}S_j S_\nu)]\}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Efetuada o traço sobre todas as variáveis de spin, temos

$$Z = \mathbf{A}'(\psi_1 + \psi_2) + \mathbf{B}'(\psi_3 + \psi_4), \tag{5.34}$$

onde  $\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{16} \exp(R'_i)$  e  $\mathbf{B}' = \sum_{i=17}^{32} \exp(R'_i)$ . As grandezas  $R'_i$  ( $i = 1, \dots, 32$ ) dependem apenas dos acoplamentos  $J_{ij}$ , como por exemplo,

$$R'_1 = K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \tag{5.35}$$

sendo os demais termos semelhantes a este, porém com combinações de sinais diferentes, conforme definidos no Apêndice B.

Podemos então realizar a média térmica e calcular os momentos magnéticos médios dos sítios externos e internos, assim como a funções de correlação entre eles. Para o sítios externos obtemos,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \langle S_\mu \rangle \\ \langle S_\nu \rangle \\ \langle S_\mu S_\nu \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ -\mathbf{A}' \\ -\mathbf{A}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \frac{\psi_1}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \frac{\psi_2}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}' \\ \mathbf{B}' \\ -\mathbf{B}' \\ -\mathbf{B}' \end{pmatrix} \frac{\psi_3}{Z} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}' \\ -\mathbf{B}' \\ \mathbf{B}' \\ -\mathbf{B}' \end{pmatrix} \frac{\psi_4}{Z}, \tag{5.36}$$

e para os sítios internos,

$$\langle S_i \rangle = Z^{-1}[\Upsilon'_i \psi_1 - \Upsilon'_i \psi_2 + \Lambda'_i \psi_3 - \Lambda'_i \psi_4] \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.37)$$

$$\langle S_i S_\mu \rangle = Z^{-1}[-\Upsilon'_i \psi_1 - \Upsilon'_i \psi_2 + \Lambda'_i \psi_3 + \Lambda'_i \psi_4] \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.38)$$

$$\langle S_i S_\nu \rangle = Z^{-1}[-\Upsilon'_i \psi_1 - \Upsilon'_i \psi_2 - \Lambda'_i \psi_3 - \Lambda'_i \psi_4] \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.39)$$

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = Z^{-1}[\Upsilon'_{4+i} \psi_1 + \Upsilon'_{4+i} \psi_2 + \Lambda'_{4+i} \psi_3 + \Lambda'_{4+i} \psi_4] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.40)$$

$$\langle S_i S_{i-3} \rangle = Z^{-1}[\Upsilon'_{4+i} \psi_1 + \Upsilon'_{4+i} \psi_2 + \Lambda'_{4+i} \psi_3 + \Lambda'_{4+i} \psi_4] \quad (i = 4), \quad (5.41)$$

$$\langle S_i S_{i+2} \rangle = Z^{-1}[\Upsilon'_{8+i} \psi_1 + \Upsilon'_{8+i} \psi_2 + \Lambda'_{8+i} \psi_3 + \Lambda'_{8+i} \psi_4] \quad (i = 1, 2). \quad (5.42)$$

Os termos  $\Upsilon'_i$  e  $\Lambda'_i$  dependem apenas dos acoplamentos da célula básica; a seguir apresentamos um destes termos,

$$\begin{aligned} \Upsilon'_1 = & -e^{R'_1} + e^{R'_2} - e^{R'_3} + e^{R'_4} - e^{R'_5} - e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} - e^{R'_9} + e^{R'_{10}} \\ & - e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} + e^{R'_{16}}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

com os demais termos  $\Upsilon'_i$  e  $\Lambda'_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) definidos no Apêndice B.

Novamente podemos resolver o sistema da Eq. (5.36), o qual admite a solução,

$$\frac{\psi_1}{Z} = \frac{1 - \langle S_\nu \rangle - \langle S_\mu \rangle + \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{A}'}, \quad (5.44)$$

$$\frac{\psi_2}{Z} = \frac{1 + \langle S_\nu \rangle + \langle S_\mu \rangle + \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{A}'}, \quad (5.45)$$

$$\frac{\psi_3}{Z} = \frac{1 - \langle S_\nu \rangle + \langle S_\mu \rangle - \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{B}'}, \quad (5.46)$$

$$\frac{\psi_4}{Z} = \frac{1 + \langle S_\nu \rangle - \langle S_\mu \rangle - \langle S_\mu S_\nu \rangle}{4\mathbf{B}'}. \quad (5.47)$$

Substituindo os termos das Eqs. (5.44)–(5.47) nas Eqs. (5.37)–(5.42) obtemos,

$$\langle S_i \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\nu \rangle \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.48)$$

$$\langle S_i S_\mu \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu S_\nu \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle \langle S_\nu \rangle \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.49)$$

$$\langle S_i S_\nu \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu S_\nu \rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_i}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_i}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle \langle S_\nu \rangle \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.50)$$

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{4+i}}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_{4+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu S_\nu \rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{4+i}}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_{4+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle \langle S_\nu \rangle \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.51)$$

$$\langle S_i S_{i-3} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{4+i}}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_{4+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu S_\nu \rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{4+i}}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_{4+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle \langle S_\nu \rangle \quad (i = 4), \quad (5.52)$$

$$\langle S_i S_{i+2} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{8+i}}{\mathbf{A}'} - \frac{\Lambda'_{8+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu S_\nu \rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{\Upsilon'_{8+i}}{\mathbf{A}'} + \frac{\Lambda'_{8+i}}{\mathbf{B}'} \right) \langle S_\mu \rangle \langle S_\nu \rangle \quad (i = 1, 2). \quad (5.53)$$

As Eqs. (5.48)–(5.53) permitem que de forma recursiva, para o caso com campo magnético nulo, obtenhamos para uma determinada hierarquia as magnetizações locais e correlações em função das magnetizações e correlações das hierarquias anteriores. Para iniciar o método MCC é necessário o conhecimento de  $\langle S_\mu \rangle$ ,  $\langle S_\nu \rangle$  e  $\langle S_\mu S_\nu \rangle$  associados à hierarquia de ordem zero [figura 5.1(c)]. A determinação destas condições iniciais segue o seguinte critério: se o acoplamento da hierarquia de ordem zero for positivo, adotamos uma configuração onde os spins dos sítios  $\mu$  e  $\nu$  sejam antiparalelos ( $\uparrow\downarrow$ ), enquanto que se o acoplamento for negativo os spins são configurados de forma paralela ( $\uparrow\uparrow$ ), sempre satisfazendo a condição  $|\langle S_\mu \rangle| = |\langle S_\nu \rangle| = |\langle S_\mu S_\nu \rangle| = 1$ , de forma que a medida local de  $|\langle S_i \rangle|$  no estado fundamental seja unitária. Verificamos que outras configurações iniciais que satisfaçam esta condição levam a resultados semelhantes. Além disso, na ausência de um campo magnético os  $\langle S_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) dependem apenas de  $\langle S_\mu \rangle$  e  $\langle S_\nu \rangle$  provenientes da hierarquia anterior, enquanto as correlações dependem apenas de  $\langle S_\mu S_\nu \rangle$ .

A implementação das Eqs. (5.48)–(5.53) é realizada em duas etapas, ou seja, na primeira etapa geramos uma rede hierárquica de ordem  $n$ , onde os acoplamentos são obtidos de uma determinada distribuição de probabilidades e em seguida, inicia-se o processo de

renormalização. Optamos por um processo “exato” no sentido que em cada hierarquia todos os acoplamentos são armazenados, ou seja, a posição de todos os acoplamentos será conhecida, permitindo assim o conhecimento preciso da hierarquia na qual o mesmo foi gerado, assim como os sítios aos quais o mesmo encontra-se conectado. Na ausência de campo magnético a relação de recorrência do GR para a rede hierárquica PWT é dada pela Eq. (2.16) da seção 2.3. A primeira etapa termina ao alcançarmos a hierarquia de ordem zero [ver figura 5.1(c)]. Na segunda etapa reconstruímos a rede até a hierarquia de ordem  $n$ ; partindo da hierarquia de ordem zero, adotamos uma condição de contorno de tal forma que  $|\langle S_\mu \rangle| = |\langle S_\nu \rangle| = |\langle S_\mu S_\nu \rangle| = 1$  e através das Eqs. (5.48)–(5.53) determinamos as magnetizações locais e correlações dos sítios internos da próxima geração; o processo é repetido até a hierarquia de ordem  $n$ . É importante ressaltar que usaremos em cada hierarquia os acoplamentos obtidos e armazenados na primeira etapa, de forma que na hierarquia de ordem  $n$  teremos novamente os acoplamentos obtidos da distribuição de probabilidades escolhida.

Na última etapa de reconstrução da rede são gerados 11/12 do total de sítios da rede, e portanto a maior parte dos momentos magnéticos e correlações são calculados utilizando os acoplamentos da distribuição inicial adotada; conseqüentemente, a escolha da distribuição poderá influenciar no resultado final. Entretanto, como verificamos no capítulo 4, no ponto crítico associado à transição de fases VS–P, independente da distribuição de probabilidades inicial, ocorrerá uma convergência para a distribuição de ponto fixo ( $P^*(K_{ij})$ ). Para reduzir essa dependência da distribuição inicial de acoplamentos na implementação do método MCC, consideraremos uma proposta aproximada para a distribuição de ponto fixo. A distribuição exponencial esticada [Eq. (4.12)] apresenta um excelente ajuste para a distribuição  $P^*(K_{ij})$ , podendo representar a mesma nas simulações.

Devido ao alto custo computacional gerado pela adoção de um procedimento exato, onde todos os acoplamentos devem ser armazenados na primeira etapa do processo para que posteriormente sejam reutilizados na segunda etapa, a sétima hierarquia ( $n = 7$ ) foi a

maior considerada em nossas simulações. Observe que a mesma já possui números exorbitantes, como 35 831 808 acoplamentos e 13 029 750 sítios, dos quais durante a segunda etapa aproximadamente 92% desses sítios são gerados na última hierarquia de ordem  $n$ . A descrição de como realizamos o mapeamento da rede hierárquica PWT é apresentada no Apêndice C.

## 5.4 Resultados

Aqui são apresentados os resultados referentes às simulações numéricas sobre a rede hierárquica PWT, na ausência de campos magnéticos, ou seja,  $\xi_i = 0$  ( $\forall i$ ). Nas simulações, para cada temperatura, são realizadas médias sobre  $N_a = 400$  amostras; além disso, utilizamos a mesma semente para iniciar o gerador de número aleatórios quando alteramos a temperatura. Em todos os casos apresentados nessa seção a distribuição inicial para os acoplamentos é a distribuição de ponto fixo (representada aqui pela exponencial esticada, conforme discutido no capítulo anterior).

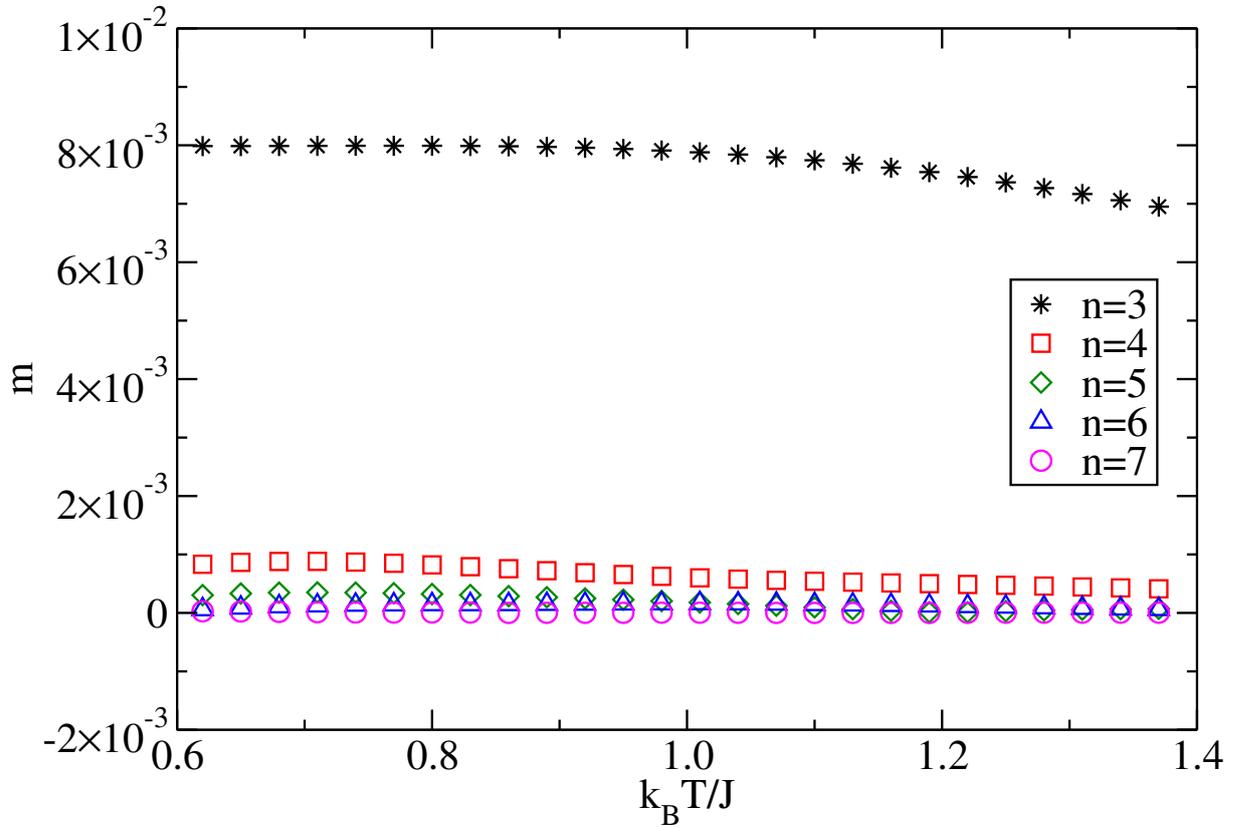
### 5.4.1 Magnetização

A primeira grandeza física calculada com o método MCC é a magnetização total por sítio,

$$m = \frac{1}{N_a} \sum_{\alpha=1}^{N_a} \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \langle S_i^{(\alpha)} \rangle, \quad (5.54)$$

onde  $N_a$  representa o número de amostras com diferentes configurações da desordem e  $N_s$  o número de sítios. Como podemos verificar na figura 5.3, principalmente nas maiores hierarquias ( $n = 6$  e  $n = 7$ ), a magnetização não indica nenhuma anomalia na faixa de temperaturas investigada. Como esperado em ambos os estados, P e VS, a magnetização é sempre nula. Podemos observar que para pequenas hierarquias a magnetização é da ordem de  $10^{-3}$ , e apesar de não ser possível observar na figura 5.3, para a maior hierarquia ( $n = 7$ ) a magnetização é da ordem de  $10^{-6}$ .

É importante destacar que para baixas temperaturas a magnetização local associada



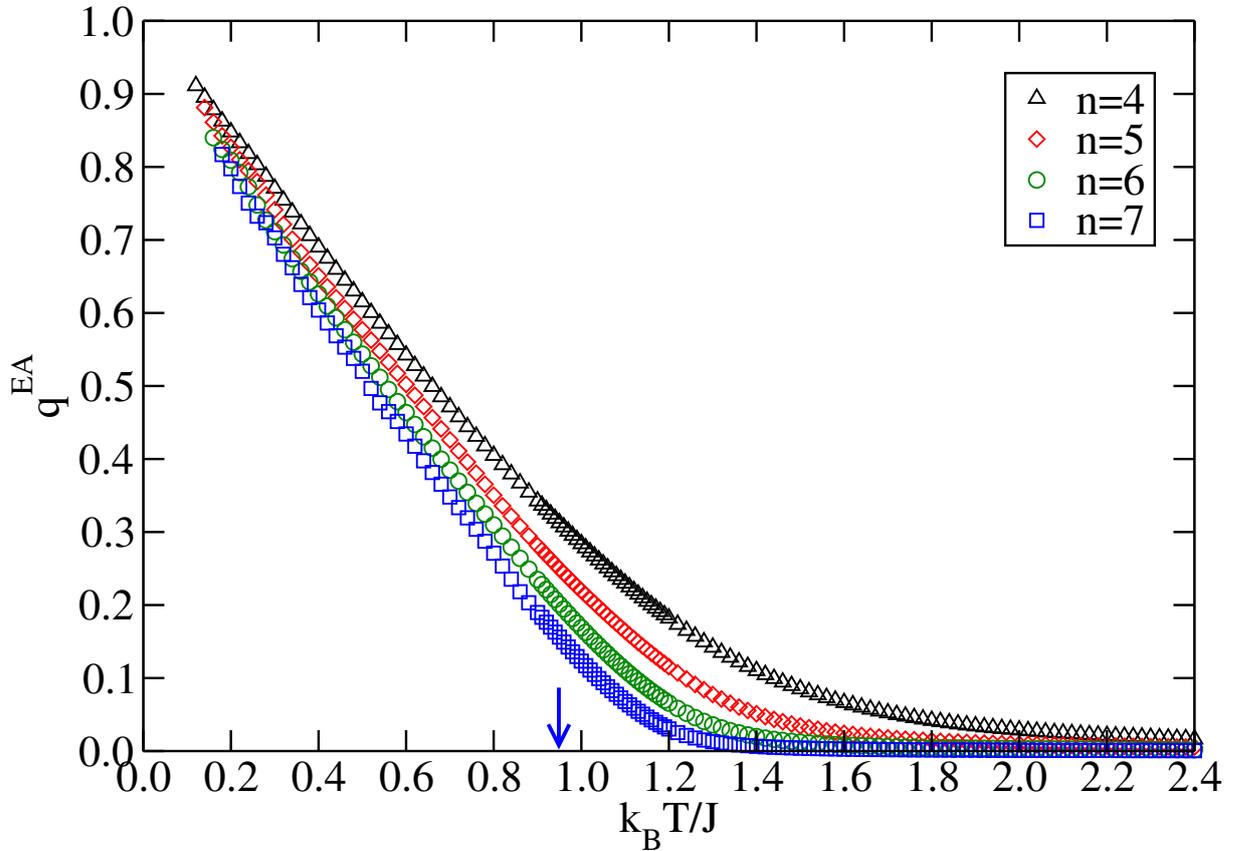
**Figura 5.3:** Apresentamos a magnetização total por spin [Eq. (5.54)] para uma dada faixa de temperaturas, para hierarquias variando de  $n = 3$  até  $n = 7$ . Os momentos magnéticos locais são obtidos com o método MCC aplicado à rede hierárquica PWT.

a um determinado sítio  $i$ , não é nula ( $\langle S_i \rangle \neq 0$ ), e somente a magnetização total por sítio [Eq. (5.54)] é nula, como esperado para uma fase VS, na qual os momentos magnéticos encontram-se “congelados” em direções aleatórias. Para altas temperaturas tanto as magnetizações locais, quanto a total são nulas, características da fase P.

#### 5.4.2 Parâmetro de ordem de Edwards-Anderson

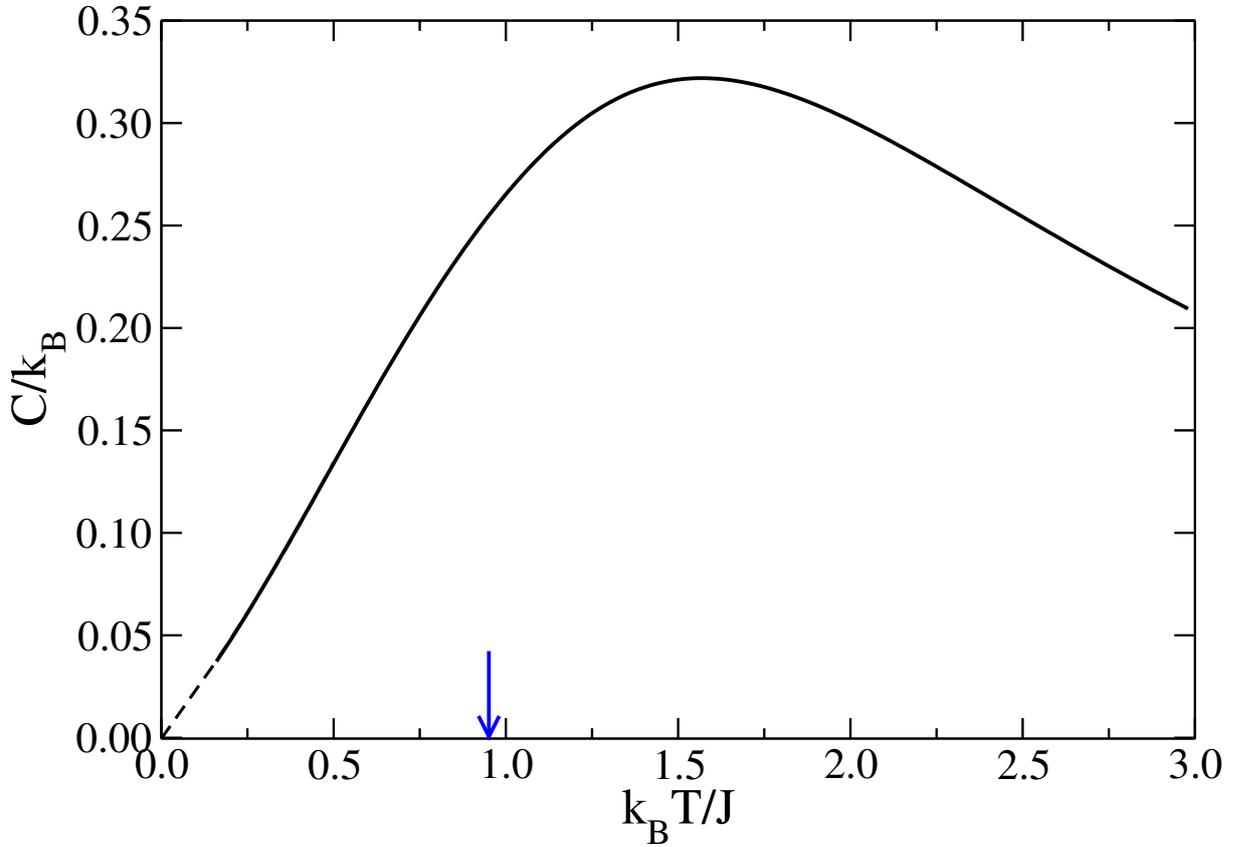
Para o VS de Ising o parâmetro de ordem de Edwards-Anderson é dado por

$$q^{EA} = \frac{1}{N_a} \sum_{\alpha=1}^{N_a} \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \langle S_i^{(\alpha)} \rangle^2. \quad (5.55)$$



**Figura 5.4:** Parâmetro de ordem de EA versus a temperatura para quatro hierarquias diferentes. Para cada hierarquia utilizamos  $N_a = 400$  amostras. A distribuição inicial de acoplamentos considerada foi a distribuição de ponto fixo. A seta azul indica a temperatura crítica.

Na fase P,  $\langle S_i \rangle$  é zero para todo sítio  $i$ , logo  $q^{EA} = 0$ . Entretanto, na fase VS o parâmetro de ordem de EA é positivo ( $q^{EA} > 0$ ), indicando assim a existência de uma transição de fases. Na figura 5.4 apresentamos o parâmetro de ordem de EA calculado pela Eq. (5.55); para  $T < T_c$  observa-se que  $q^{EA} \neq 0$ , com um decaimento quase linear com o aumento da temperatura, devendo tornar-se nulo para  $T$  maior que  $T_c$ . O comportamento suave em torno da temperatura crítica acontece devido a efeitos de tamanho finito, porém nota-se que o parâmetro de ordem de EA na sétima hierarquia sugere uma transição de fases. É importante mencionar que o parâmetro exibido na figura 5.4 apresenta um comportamento similar ao de medidas experimentais (ver, por exemplo, Ref. [8]).



**Figura 5.5:** Calor específico em função da temperatura para a sétima hierarquia ( $n = 7$ ). A linha pontilhada é uma extrapolação para baixas temperaturas e a seta azul indica a temperatura crítica.

### 5.4.3 Calor específico

Para obtermos o calor específico, primeiro calculamos a energia interna  $u$  da rede, expressa como

$$u = -\frac{1}{N_a N_L} \sum_{\alpha=1}^{N_a} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij}^{(\alpha)} \langle S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} \rangle, \quad (5.56)$$

onde  $\langle i, j \rangle$  denota uma soma entre pares de spins primeiros vizinhos, enquanto que  $N_L$  representa o número de ligações da rede hierárquica, na hierarquia  $n$  de cada amostra. O calor específico é obtido através de uma derivação numérica da curva da energia interna em função da temperatura.

Na figura 5.5 exibimos o calor específico em função da temperatura para a maior

hierarquia investigada,  $n = 7$ . Não observamos nenhuma evidência de divergência nas proximidades da temperatura crítica (indicada por um seta azul), apresentando boa concordância com os resultados experimentais [2, 6], onde o calor específico apresenta um suave máximo, arredondado e contínuo, levemente deslocado da temperatura crítica.

#### 5.4.4 Suscetibilidade de vidro de spins

A suscetibilidade de vidro de spins [8] é definida como

$$\chi_{VS} = \frac{1}{N_s} \sum_{ij} [(\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle)^2]_c, \quad (5.57)$$

onde a soma  $\sum_{ij}$  refere-se a todos os pares de spins da rede. Assim como no caso do parâmetro de ordem, para a suscetibilidade de VS devemos observar o segundo momento das correlações para que um pico agudo seja visível exatamente na temperatura crítica, característica esta que é detectada em diversos experimentos e considerada como principal evidência de uma transição de fases em VS reais. Para temperatura nula, a Eq. (5.57) tende a zero, situação na qual existe um congelamento dos spins levando a  $\langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$ . O método MCC fornece as Eqs. (5.48)–(5.53), que determinam as magnetizações locais e correlações entre primeiros e segundos vizinhos (estas somente no interior de cada célula básica); portanto, através deste método não é possível a determinação da suscetibilidade de VS. A correlação entre os spins separados por distâncias  $R_{ij}$  quaisquer é relevante principalmente na região crítica associada à transição de fases VS–P; embora as contribuições de primeiros e segundos vizinhos contribuam significativamente para a determinação suscetibilidade de VS, podendo, de forma aproximada revelar o seu comportamento nas proximidades da transição, não devemos esperar que expoentes críticos sejam obtidos neste caso.

Apresentamos na figura 5.6(a) o comportamento da grandeza da Eq. (5.57) levando em conta apenas as correlações entre primeiros vizinhos, a qual denominamos  $\chi_1$ , para diferentes hierarquias. Nota-se a formação de um pico a uma temperatura  $\tilde{T}(L)$ , que aproxima-se

da temperatura crítica com o aumento da hierarquia; aqui nossas simulações utilizam a distribuição de ponto fixo (representada pela distribuição exponencial esticada Eq. (4.12), para a qual  $k_B T_c/J \cong 0.95$ ). Na inserção, a grandeza  $a(L) = (\tilde{T}(L) - T_c)/T_c|_{\chi_1 = \tilde{\chi}_1(L)}$  representa a distância entre a temperatura  $\tilde{T}(L)$ , associada ao valor máximo de  $\chi_1$ , com relação à temperatura crítica no limite  $L \rightarrow \infty$  ( $T_c$ ) em função de  $L^{-1}$ , cujo comportamento obedece a seguinte equação

$$a(L) = \mathbf{p} \ln \frac{1}{\mathbf{c}L}, \quad (5.58)$$

com  $\mathbf{p} \cong 0.1033$  e  $\mathbf{c} \cong 9 \times 10^{-4}$ , para a região de valores de  $L$  investigada. De acordo com essa relação, na décima hierarquia<sup>3</sup> ( $n = 10$ ) o pico de  $\chi_1$  coincidirá com a temperatura crítica (a ser estimada). Na figura 5.6(b) apresentamos o comportamento da grandeza da Eq. (5.57) levando em conta as correlações entre primeiros e segundos vizinhos dentro da célula básica ( $\chi_2^{(p)}$ ); observamos neste caso uma elevação do pico em cada hierarquia. Apesar da impossibilidade de obter a suscetibilidade VS com o método MCC, este resultado exibe uma forte evidência de que um pico mais agudo, indicando uma divergência, deve ser observado em  $T_c$  ao considerarmos todos os termos da Eq. (5.57).

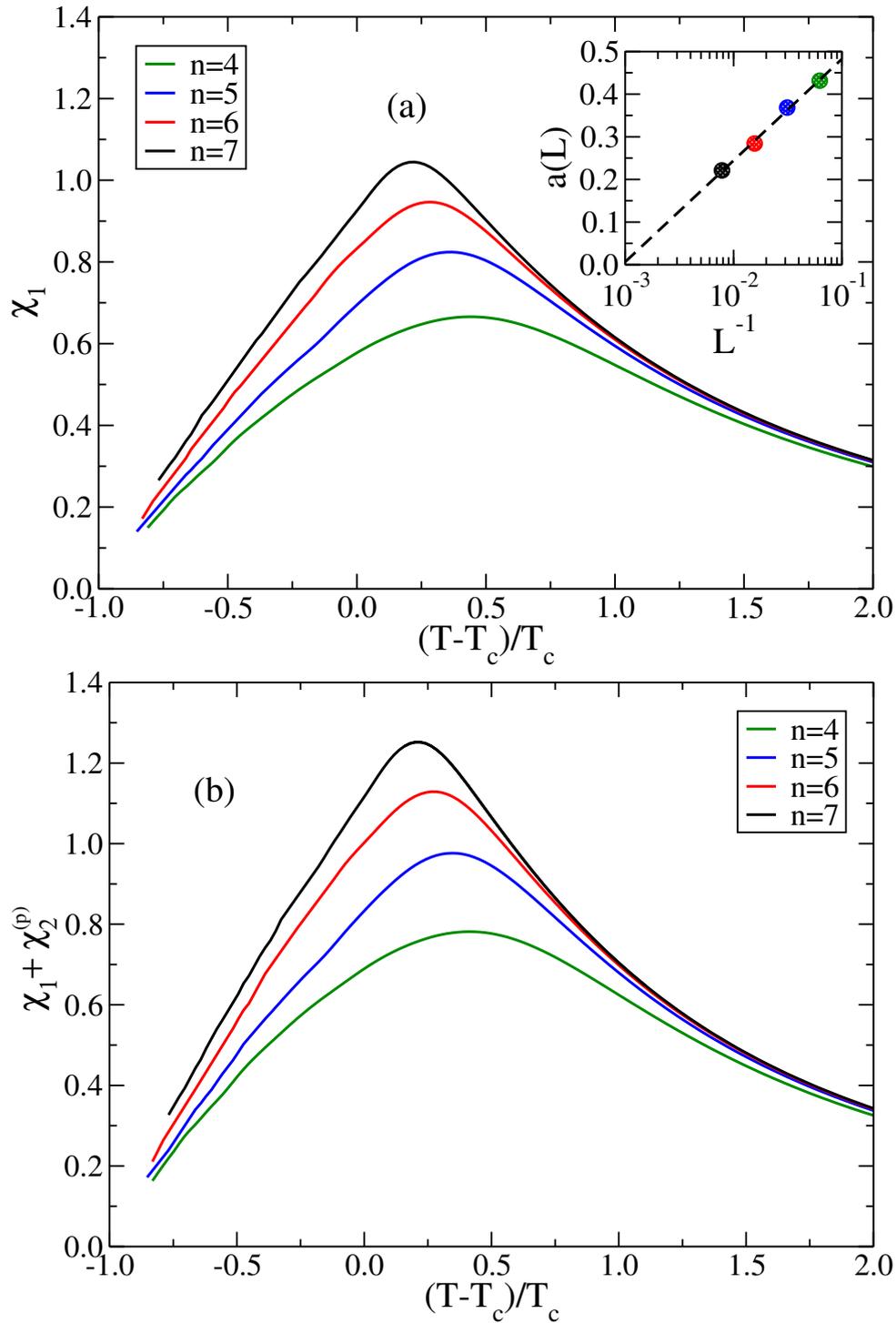
Apesar da suscetibilidade linear não apresentar nenhuma divergência na temperatura crítica, a mesma pode ser calculada através da relação [122],

$$\chi = \frac{1 - q^{EA}}{k_B T}. \quad (5.59)$$

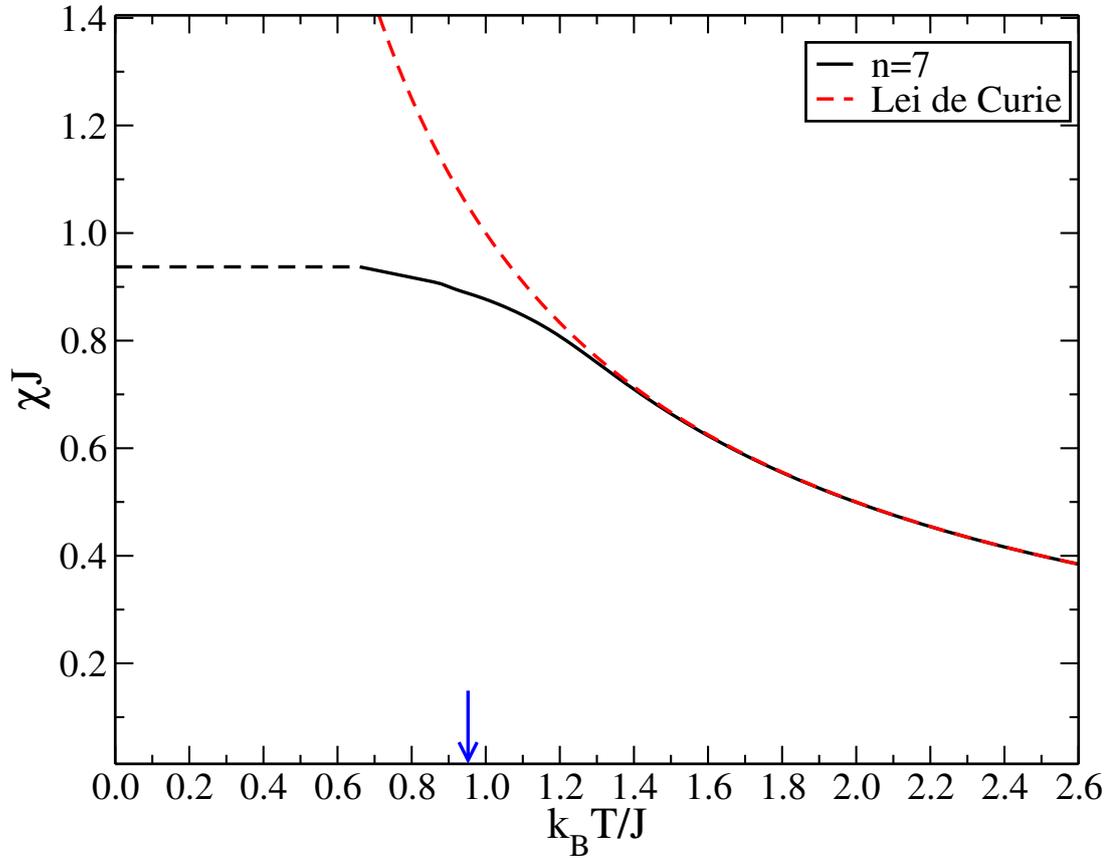
Exibimos na figura 5.7 o comportamento da suscetibilidade linear, que como esperado, não revela nenhuma evidência de transição de fases nas proximidades da temperatura crítica (indicada pela seta azul); a linha pontilhada preta representa uma extrapolação para baixas temperaturas. Na fase paramagnética (altas temperaturas) a lei de Curie

---

<sup>3</sup>A hierarquia  $n = 10$  da rede hierárquica PWT contém aproximadamente 62 bilhões de acoplamentos e 22,5 bilhões de sítios.



**Figura 5.6:** (a) Neste gráfico  $\chi_1$  representa a contribuição das correlações entre primeiros vizinhos para a suscetibilidade de VS. Nota-se a existência de um pico, cuja posição  $\tilde{T}(L)$  aproxima-se da temperatura crítica com o aumento da temperatura. Na inserção mostramos  $a(L) = (\tilde{T}(L) - T_c)/T_c|_{\chi_1 = \tilde{\chi}_1(L)}$ , que representa a distância entre a temperatura  $\tilde{T}(L)$ , associada ao valor máximo de  $\chi_1$ , com relação à temperatura crítica no limite  $L \rightarrow \infty$  ( $T_c$ ), variando em função de  $L^{-1}$ . (b) Neste gráfico  $\chi_2^{(p)}$  representa a contribuição das correlações entre segundos vizinhos dentro da célula básica [Eq. (5.53)].



**Figura 5.7:** Suscetibilidade linear [Eq. (5.59)] em função da temperatura. Para a maior hierarquia estudada ( $n = 7$ ) não existe nenhuma evidência de divergência nas proximidades da temperatura crítica  $T_c$  (indicada pela seta azul); a linha pontilhada representa uma extrapolação para baixas temperaturas. A curva pontilhada de cor vermelha mostra que para altas temperaturas a lei de Curie ( $\chi \propto T^{-1}$ ) é obedecida.

( $\chi \propto T^{-1}$ ) coincide exatamente com os dados da simulação, ou seja,  $q^{EA} = 0$  quando  $T > T_c$ .

#### 5.4.5 Expoentes críticos

Na seção 4.3, para a rede hierárquica PWT, estimamos o expoente crítico  $\nu$  associado ao comprimento de correlação na transição de fases VS-P, encontrando  $\nu \cong 3.02$ , resultado obtido pelo acompanhamento da distribuição de probabilidades nas proximidades do ponto crítico. Aqui investigaremos novamente o expoente  $\nu$ , assim como outros expoentes críticos, porém agora utilizando o método de escalas para tamanhos finitos (“Finite Size

Scaling”) [123]. Aplicaremos este método para obter dois expoentes críticos a partir do parâmetro de ordem de EA. Este método baseia-se na suposição de que nas proximidades do ponto crítico o comprimento de correlação ( $\xi$ ) é da ordem do tamanho do sistema  $L$  ( $\xi \sim L$ ). No limite termodinâmico esperamos que o comprimento de correlação apresente uma divergência na criticalidade,

$$\xi \propto \epsilon^{-\nu}, \quad (5.60)$$

onde  $\epsilon = |T - T_c|/T_c$ , sendo  $\nu$  o expoente crítico associado ao comprimento de correlação. A principal hipótese do método de escalas para tamanhos finitos é de que nas proximidades da temperatura crítica, para um grande sistema (mas ainda finito) de tamanho  $L$ , a relação  $L/\xi \sim 1$  é válida; assim a Eq. (5.60) pode ser reescrita como

$$\epsilon \sim L^{-1/\nu}. \quad (5.61)$$

Já o parâmetro de ordem na criticalidade comporta-se como

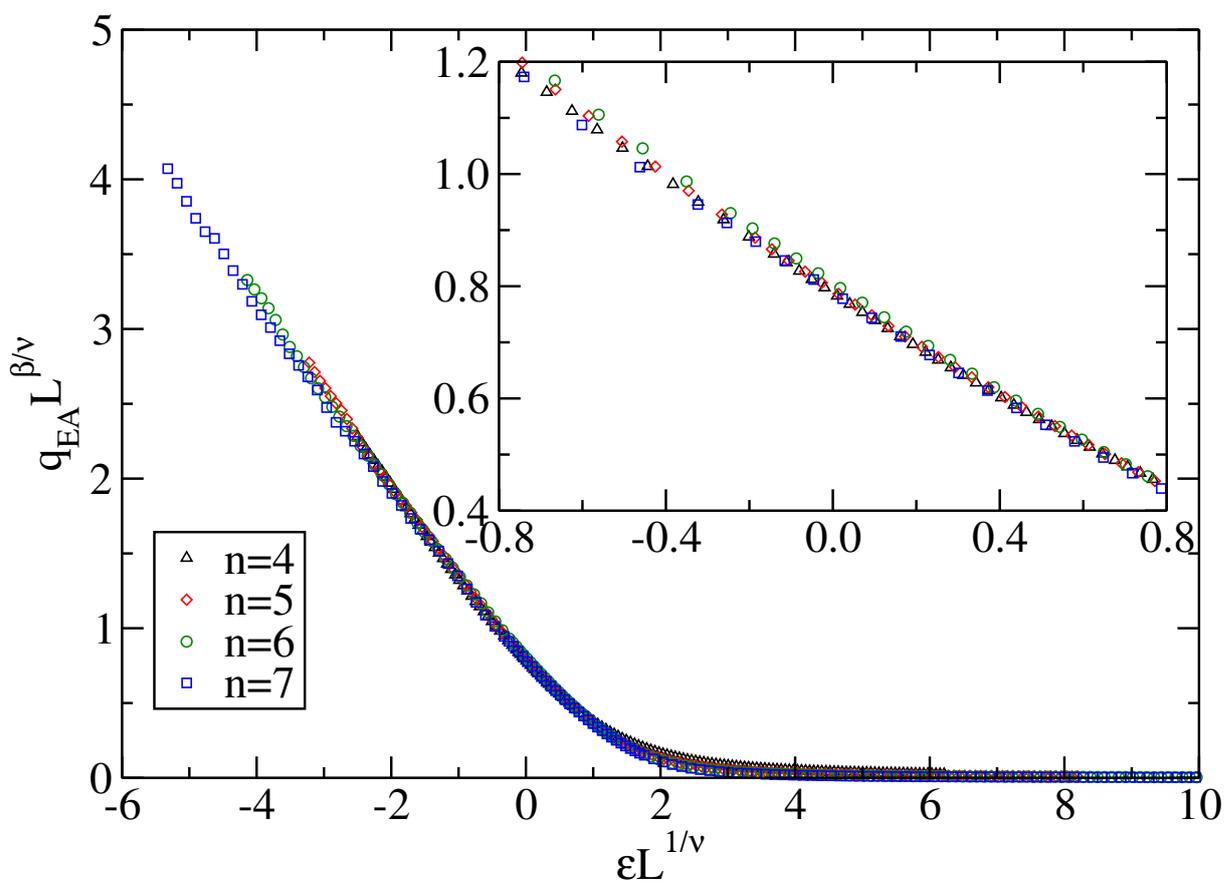
$$q^{EA} \propto \epsilon^\beta, \quad (5.62)$$

onde  $\beta$  denota o expoente crítico do parâmetro de ordem. De acordo com o argumento de escalas para tamanhos finitos, temos

$$q^{EA} \sim L^{-\beta/\nu}. \quad (5.63)$$

Investigamos os expoentes críticos considerando a distribuição exponencial esticada [Eq. (4.12)] para os acoplamentos iniciais; a mesma pode ser utilizada como uma boa aproximação para a própria distribuição de ponto fixo, como verificamos nos ajustes realizados no capítulo 4, fornecendo assim expoentes críticos universais.

Para a determinação dos expoentes críticos realizamos o colapso dos dados do parâme-



**Figura 5.8:** Colapso de dados para parâmetro de ordem de EA, onde  $\epsilon = |T - T_c|/T_c$  e  $L = b^n$  com  $b = 2$  para a rede hierárquica PWT. Exibimos o colapso para simulações de diferentes hierarquias para a distribuição de ponto fixo. A inserção apresenta uma ampliação da região crítica.

tro de ordem de EA (ver figura 5.8). Para tal, procuramos inicialmente os três parâmetros ( $T_c$ ,  $\beta$  e  $\nu$ ) que apresentem um bom colapso dos dados das hierarquias  $n = 5, 6, 7$ ; em seguida, refinamos estas estimativas com o auxílio do programa autoScale [124] e obtemos os três parâmetros que fornecem o melhor colapso dos dados, considerando as hierarquias  $n = 4, 5, 6, 7$ .

O resultado é exibido na figura 5.8, onde estimamos

$$\frac{k_B T_c}{J} = 0.95(2); \quad \beta = 0.82(4); \quad \nu = 2.50(4). \quad (5.64)$$

Estes parâmetros representam valores universais, pois a distribuição usada é uma boa aproximação para a distribuição de ponto fixo, cujos expoentes são universais para redes hierárquicas. O valor encontrado para a temperatura crítica concorda com o obtido para esta mesma rede através do método de acompanhamento dos momentos da distribuição de acoplamentos com o GR [47] e com nossa estimativa obtida na seção 4.3; além disso, é importante destacar a proximidade deste valor com os encontrados em simulações na rede cúbica ( $D = 3$ ), onde para uma distribuição gaussiana estimou-se  $k_B T_c/J = 0.95(4)$  [125] e  $k_B T_c/J = 0.951(9)$  [106]. O expoente do parâmetro de ordem  $\beta$  está próximo de resultados experimentais, como  $\beta \sim 0.9$ , obtido para AuFe [126]. Também, para a rede cúbica,  $\beta = 0.7(2)$  foi obtido por meio de uma expansão em séries com uma distribuição de acoplamentos bimodal [127] e mais recentemente, para a mesma distribuição estimou-se  $\beta = 0.77(5)$  através de simulações computacionais [117].

Em contraste com o valor encontrado na seção 4.3, aqui o expoente  $\nu$  está muito próximo do valor encontrado em simulações mais recentes em uma rede cúbica, onde  $\nu = 2.44(9)$  [106] para uma distribuição gaussiana,  $\nu = 2.45(15)$  [117] para as distribuições gaussiana e bimodal e  $\nu = 2.53(8)$  [116] para a distribuição bimodal. Certamente, a presente estimativa pelo método MCC é mais precisa do que as estimativas obtidas através da Eq. (4.21), e portanto consideramos para a rede hierárquica PWT,  $\nu \approx 2.50$  como a

melhor estimativa.

Os demais expoentes,  $\gamma$ ,  $\eta$  e  $\alpha$ , são apresentados na tabela 5.1; os mesmos são obtidos a partir de relações de escala e hiperescala,

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (5.65)$$

$$(2 - \eta)\nu = \gamma, \quad (5.66)$$

$$\alpha + D\nu = 2. \quad (5.67)$$

Na tabela 5.1 apresentamos os expoentes obtidos pelas relações de escala e hiperescala, adotando para a Eq. (5.67) a dimensão fractal  $D \cong 3.58$ . Conforme já mencionado, o calor específico não revelou nenhum sinal de transição de fases, como observado na figura 5.5; neste caso, o expoente  $\alpha$  é negativo, e portanto a existência de alguma anomalia será revelada apenas em derivadas de ordem superior. Para comparação, exibimos também na tabela 5.1 resultados obtidos em redes cúbicas, onde observamos boa concordância para os expoentes  $\beta$ ,  $\nu$ , sendo que os demais expoentes não coincidem dentro das barras de erros.

É interessante ressaltar que para diversos modelos ferromagnéticos em redes hierárquicas a relação de hiperescala ( $D\nu = 2 - \alpha$ ) foi verificada numericamente [33, 120, 128] e com comprovação analítica de sua validade para redes da família de MK [129, 130]; entretanto, não existe qualquer comprovação desta relação para o modelo de VS de Ising para rede hierárquica PWT, sendo portanto esta uma questão que permanece em aberto. Neste caso, será necessário a determinação direta de mais um expoente, para confirmar a validade da Eq. (5.67).

Rede	$D$	$\nu$	$\beta$	$\eta$	$\gamma$	$\alpha$	$k_B T_c / J$
PWT	3.58	2.50(4)	0.82(4)	-0.92(6)	7.30(12)	-6.95(4)	0.95(2)
Cúbica [113]	3.00	2.562(42)	0.782(10)	-0.3900(36)	6.13(11)	-5.69(13)	1.1019(29)
Cúbica [106]	3.00	2.44(9)	-	-0.37(5)	-	-	0.951(9)

**Tabela 5.1:** Para a rede hierárquica PWT os expoentes críticos  $\beta$  e  $\nu$  foram obtidos através do colapso de dados do parâmetro de ordem de EA na figura 5.8, enquanto  $\eta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  são determinados das relações de escala e hiperescala. Incluímos também resultados obtidos na rede cúbica; na Ref. [113] utilizou-se uma distribuição bimodal, enquanto que na Ref. [106] uma distribuição gaussiana.

## Capítulo 6

# Multifractalidade

### 6.1 Introdução

Uma das características de um fractal é a ausência de um comprimento característico<sup>1</sup>, sendo a dimensão fractal<sup>2</sup> o parâmetro que desempenha papel central no estudo destes objetos. A inexistência de um comprimento característico é notada no momento que alteramos a escala de observação e verificamos que o objeto é auto-similar. Em diversos processos físicos envolvendo fractais podemos encontrar uma distribuição espacial de quantidades relevantes que possuem infinitas singularidades, onde a palavra singular aplica-se a uma função que obedece localmente uma lei de potência. Nestes casos a propriedade de auto-similaridade não é obedecida globalmente, mas é preservada localmente em vários subconjuntos e utilizamos o termo medida multifractal, ou apenas multifractal.

A análise multifractal é empregada em diferentes áreas, como no estudo de fluxos turbulentos, mercados financeiros (por exemplo, preços das ações), processos geofísicos, dinâmica de batimentos cardíacos, modelagens de terremotos, e sistemas magnéticos, entre outros. Nestes últimos, especificamente em redes hierárquicas da família de MK, vários

---

<sup>1</sup>Em um sistema físico sempre temos um limite inferior para uma escala de comprimento, como por exemplo o tamanho de uma partícula. Por outro lado, um objeto real apresenta um comprimento linear finito, definindo assim um limite de escala superior onde características fractais podem ser observadas.

<sup>2</sup>Dimensão fractal é empregada aqui de forma genérica, referindo-se à dimensão cujo valor pode assumir um número real positivo.

trabalhos importantes foram realizados, conforme descreveremos a seguir. O primeiro em 1990, investigou o modelo de Ising ferromagnético, mostrando que as magnetizações locais apresentam uma estrutura multifractal no ponto crítico [43]. Dois anos depois, relações entre os expoentes críticos e propriedades multifractais, assim como os primeiros resultados sobre estas redes para VSs foram obtidos [33]. Em 1996 a relação entre expoentes críticos e multifractalidade foi investigada para o modelo de Potts ferromagnético, obtendo os expoentes de Hölder, máximo e mínimo, analiticamente [120]. No ano seguinte, para um VS com interações de curto alcance na rede hierárquica MK com dimensão fractal  $D = 3$ , utilizando diferentes distribuições iniciais para os acoplamentos, observou-se um comportamento universal do espectro de singularidades [34]. Em 1999, também para um VS na mesma rede, pesquisou-se a multifractalidade utilizando a distribuição de ponto fixo, a qual foi determinada neste mesmo trabalho [108]. Em 2001 investigou-se o papel de flutuações geométricas sobre propriedades multifractais da magnetização local no modelo de Ising aperiódico [131].

Neste capítulo estudaremos as propriedades multifractais do parâmetro de ordem de EA sobre a rede hierárquica PWT, caracterizada por uma dimensão fractal  $D \cong 3.58$ .

## 6.2 Perfis do parâmetro de ordem de EA

Consideramos a Eq. (5.55), a qual pode ser reescrita na forma

$$q^{EA} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} q_i^{EA}, \quad (6.1)$$

onde  $q_i^{EA}$  denota o parâmetro EA no sítio  $i$ , definido por

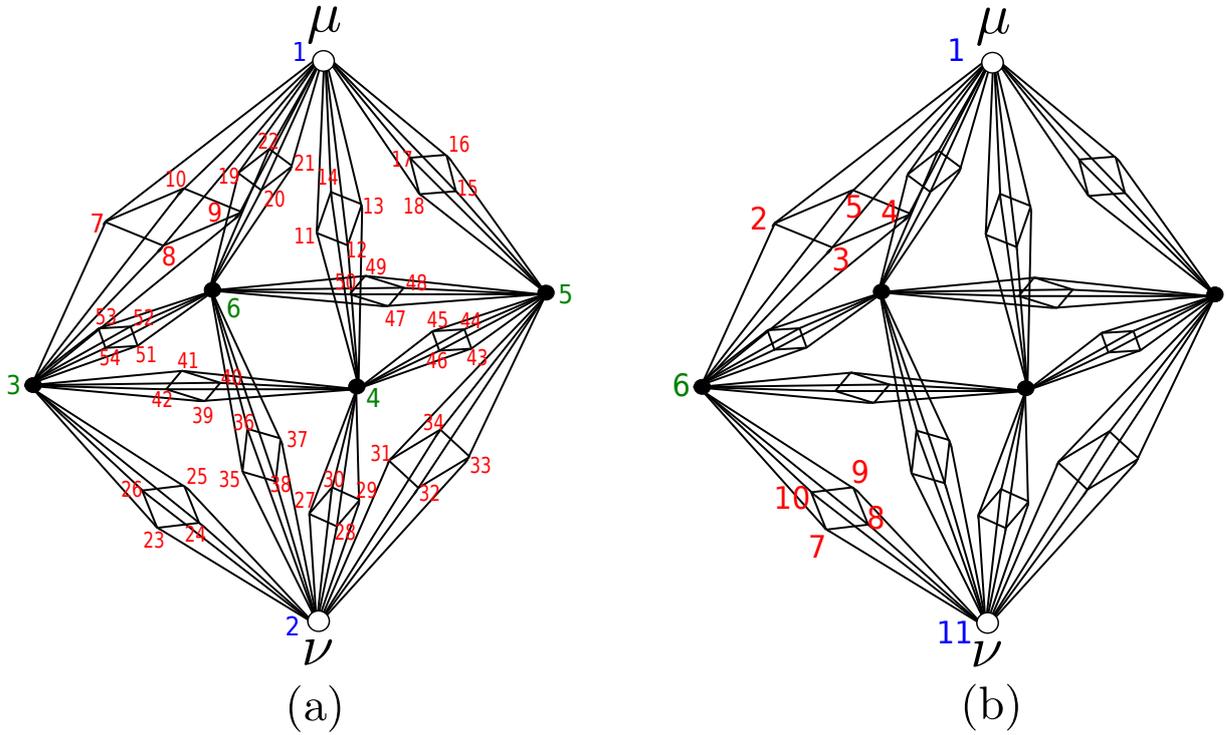
$$q_i^{EA} = \frac{1}{N_a} \sum_{\alpha=1}^{N_a} \langle S_i^{(\alpha)} \rangle^2 = [\langle S_i^{(\alpha)} \rangle^2]_c. \quad (6.2)$$

O conjunto dos parâmetros locais  $\{q_i^{EA}\}$  pode ser exibido em uma representação  $q_i^{EA}$  versus  $i$ , conhecida como perfil do parâmetro de ordem de EA.

O perfil do parâmetro de ordem de EA contém uma exuberante estrutura na qual características multifracais são observadas, como já verificado para o VS de Ising em redes do tipo MK [34]. No presente trabalho, geramos dois tipos de perfil, no primeiro todos os sítios da rede são considerados, enquanto que no segundo apenas uma pequena fração dos sítios é utilizada.

Apresentamos, na figura 6.1, um exemplo ilustrativo de como realizamos o mapeamento para obtermos os perfis numa rede hierárquica PWT na ordem 2. Na figura 6.1(a) todos os sítios são exibidos no perfil; geramos um mapeamento linear onde as duas primeiras posições são ocupadas por sítios da raiz ( $\mu$  e  $\nu$ ), hierarquia de ordem zero; as posições de 3 a 6 são ocupadas por sítios pertencentes à hierarquia de ordem um; as posições de 7 até 54 são ocupadas por sítios da hierarquia de ordem dois. Em cada hierarquia o mapeamento é realizado seguindo a ordem de cima para baixo, da esquerda para a direita, até alcançarmos os sítios próximos à raiz inferior ( $\nu$ ); então iniciamos o mapeamento dos sítios que surgiram de ligações do quadrado, ou seja, ligações que na hierarquia de ordem 1 não estão conectados aos sítios da raiz. Na figura 6.1(b) apenas os sítios de um determinado caminho são mostrados no perfil; partindo do sítio da raiz superior ( $\mu$ ), percorremos a rede seguindo a numeração em ordem crescente até alcançarmos o sítio da raiz inferior ( $\nu$ ). Em ambos os casos os números indicam as posições dos sítios quando exibimos grandezas locais em uma representação linear, onde as diferentes cores indicam a hierarquia do sítio: azul  $n = 0$ , verde  $n = 1$  e vermelho  $n = 2$ .

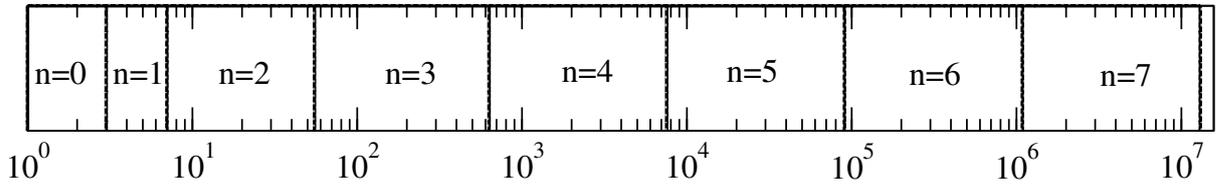
Para facilitar a associação de uma determinada posição com sua respectiva hierarquia, criamos a ilustração apresentada na figura 6.2. Na escala logarítmica sinalizamos as posições inicial e final de cada hierarquia. Por exemplo, na figura 6.1(a), os sítios que surgem na hierarquia  $n = 2$  ocupam as posições de 7 (início) até 54 (fim); lembrando que os sítios que precedem o início de uma nova hierarquia são provenientes das ligações do



**Figura 6.1:** Ilustração do mapeamento da rede hierárquica PWT. (a) Mapeamento completo da rede onde a posição de cada sítio é obtida seguindo os números em ordem crescente. (b) Mapeamento parcial, seguindo os números em ordem crescente teremos a posição de cada sítio ao longo de um caminho ligando os sítios  $\mu$  e  $\nu$ ; assim estamos tratando apenas uma pequena parte da rede. Números com mesma cor pertencem à mesma hierarquia.

quadrado.

Em todas as simulações realizadas utilizamos a distribuição exponencial esticada [Eq. 4.12)] (representando a distribuição de ponto fixo) para os acoplamentos iniciais. Para uma única amostra, apresentamos o perfil de  $\{q_i^{EA}\}$  para diferentes temperaturas na hierarquia de ordem 7. Na figura 6.3, exibimos partes do perfil (cada parte correspondendo a 40000 sítios da rede PWT) para a temperatura  $k_B T/J = 0.6$  (fase VS); observa-se que os  $q_i^{EA}$  apresentam valores variando entre 0 e 1, distribuídos aparentemente de forma uniforme até a hierarquia  $n = 6$  [figuras 6.3(a)–(c)]; na sétima hierarquia esta distribuição de valores torna-se irregular [figuras 6.3(d), (e)], apresentando uma redução nos valores dos  $q_i^{EA}$ . Isso ocorre pois, quanto maior a hierarquia, menor será a influência das condições de contorno aplicadas aos sítios raízes da hierarquia  $n = 0$ .



**Figura 6.2:** Esquema indicando a posição inicial e final dos sítios em cada hierarquia, quando realizamos o mapeamento completo da rede.

Na figura 6.4, mostramos partes do perfil para a temperatura  $k_B T/J = 0.95$  (temperatura crítica); neste caso, já observamos uma redução nos valores de  $q_i^{EA}$ , principalmente para a hierarquia  $n = 7$  [figuras 6.4(d), (e)]. Note que, sítios oriundos das ligações do quadrado [figuras 6.4(c), (e)], apresentam valores não muito maiores que 0.5, o que permite identificá-los facilmente na figura 6.4(c); isso ocorre pois os sítios raízes neste caso são os sítios do quadrado da célula básica, para os quais  $|\langle S_i \rangle| < 1$ .

Na figura 6.5, apresentamos partes do perfil para a temperatura  $k_B T/J = 1.40$  (fase P); neste caso, em algumas regiões os valores de  $q_i^{EA}$  são da ordem  $10^{-3}$  [figuras 6.5(c)–(e)], enquanto que outras regiões apresentam valores da ordem 1; estas últimas regiões são influenciadas pelas condições de contorno adotadas.

Na figura 6.6, exibimos o mapeamento parcial que conecta os sítios raízes por um caminho partindo do sítio da raiz superior, passando pelos sítios do quadrado, até alcançar o sítio da raiz inferior (como exemplificado na figura 6.1(b)), para as três temperaturas consideradas no mapeamento completo. Novamente, para  $k_B T/J = 1.4$  podemos observar que os sítios raízes influenciam os sítios mais próximos, impedindo que todos os  $q_i^{EA}$  sejam nulos.

Em seguida consideramos médias sobre 400 amostras e exibimos o perfil de um mapeamento completo da rede hierárquica. Na figura 6.7, para a temperatura  $k_B T/J = 0.6$  (fase VS); neste caso, observa-se que os  $q_i^{EA}$  até a hierarquia  $n = 5$  apresentam valores em torno de 0.6 [figuras 6.7(a), (b)] e com o aumento da hierarquia ocorre uma redução nestes valores [figuras 6.7(c)–(e)]. Na figura 6.7(a), os valores  $q_i^{EA} \sim 0.8$  correspondem a

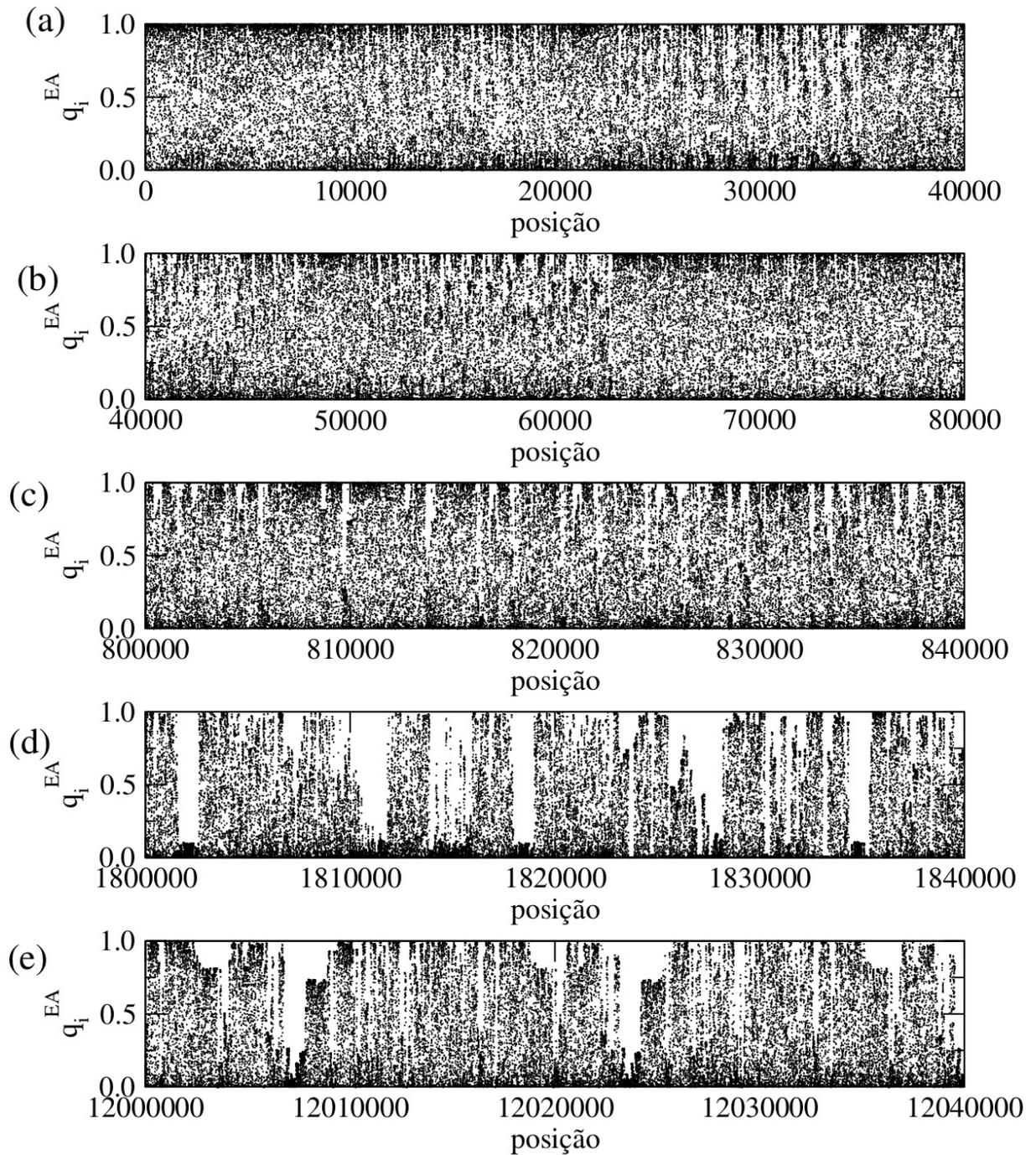
sítios próximos dos sítios raízes.

Na figura 6.8, nas proximidades da temperatura crítica, um comportamento parecido ao da figura 6.7 é observado, porém, com uma significativa redução nos valores de  $q_i^{EA}$ . Na figura 6.9, para a temperatura  $k_B T/J = 1.40$  (fase P), nota-se que para uma grande parcela dos sítios,  $q_i^{EA}$  aproxima-se de zero [figuras 6.9(c)–(e)]; entretanto, as condições adotadas para os sítios raízes impedem que sítios próximos a estes apresentem  $q_i^{EA} \cong 0$ , como observado nas figuras 6.9(a) e (b).

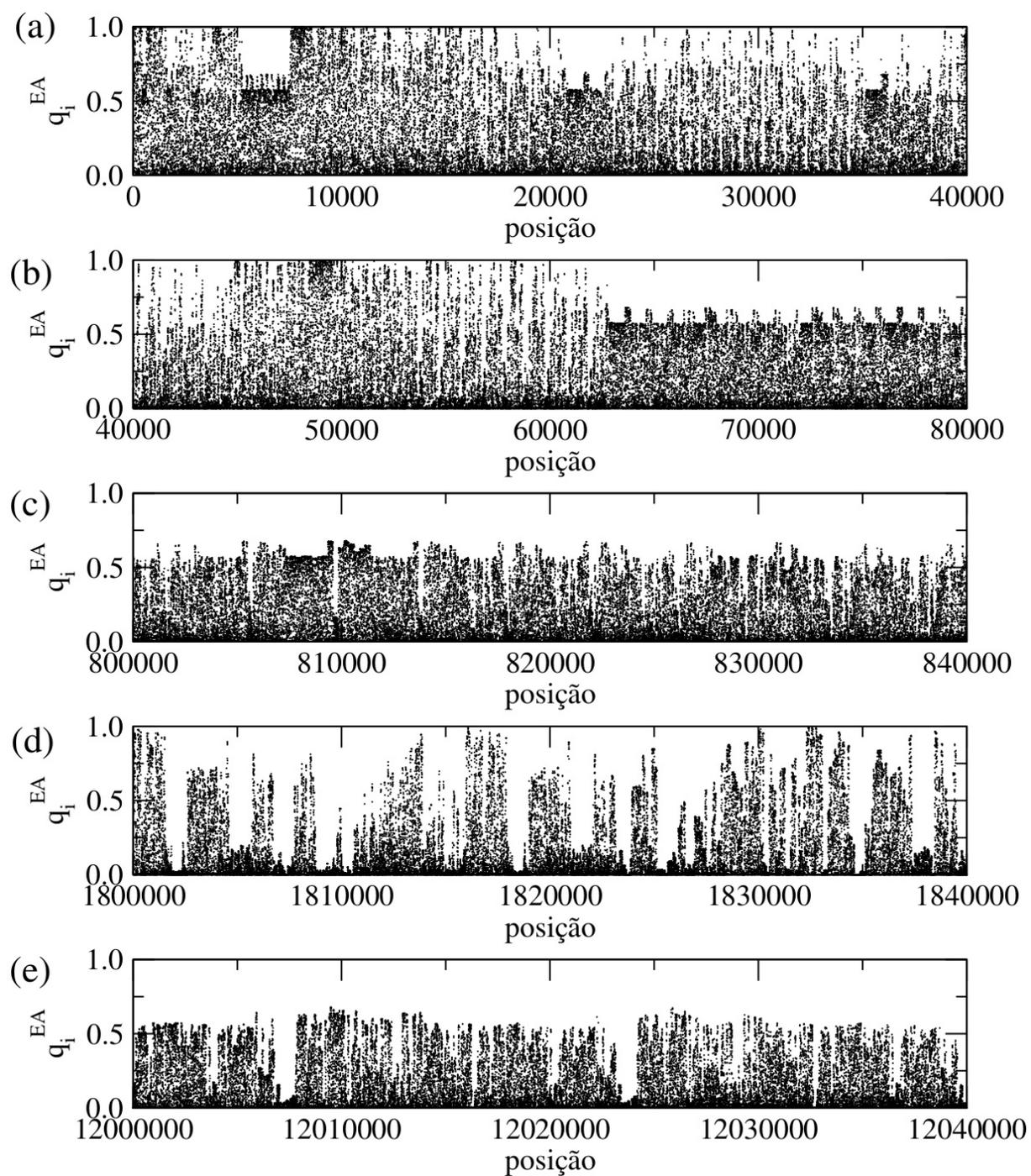
O mapeamento que permite a conexão mais rápida entre os sítios raízes é exibido na figura 6.10 para 400 amostras e as mesmas temperaturas consideradas no mapeamento completo. Neste caso, observa-se uma redução nos valores de  $q_i^{EA}$  com o aumento da temperatura do sistema.

É importante destacar que nos casos onde realizamos um mapeamento completo da rede hierárquica, exibimos nas figuras apresentadas somente 2% das posições. Observa-se que no caso com apenas uma amostra ocorre o aumento da estrutura desordenada do parâmetro de ordem de EA com a redução da temperatura. Por outro lado, no caso onde é realizado uma média sobre amostras surge uma estrutura mais uniforme, onde em alguns casos como nas figuras 6.7(a) e 6.8(a), assim como 6.7(b) e 6.8(b), nota-se uma certa semelhança decorrente da estrutura da rede hierárquica; nestas figuras são exibidos sítios pertencentes às hierarquias  $n = 0$  até  $n = 5$  [figuras 6.7(a) e 6.8(a)], e apenas da hierarquia  $n = 5$  [figuras 6.7(b) e 6.8(b)]. Deve-se notar que os perfis dos  $\{q_i^{EA}\}$  na rede hierárquica PWT apresentam semelhanças com aqueles observados na rede hierárquica de MK com  $D = 3$  [34].

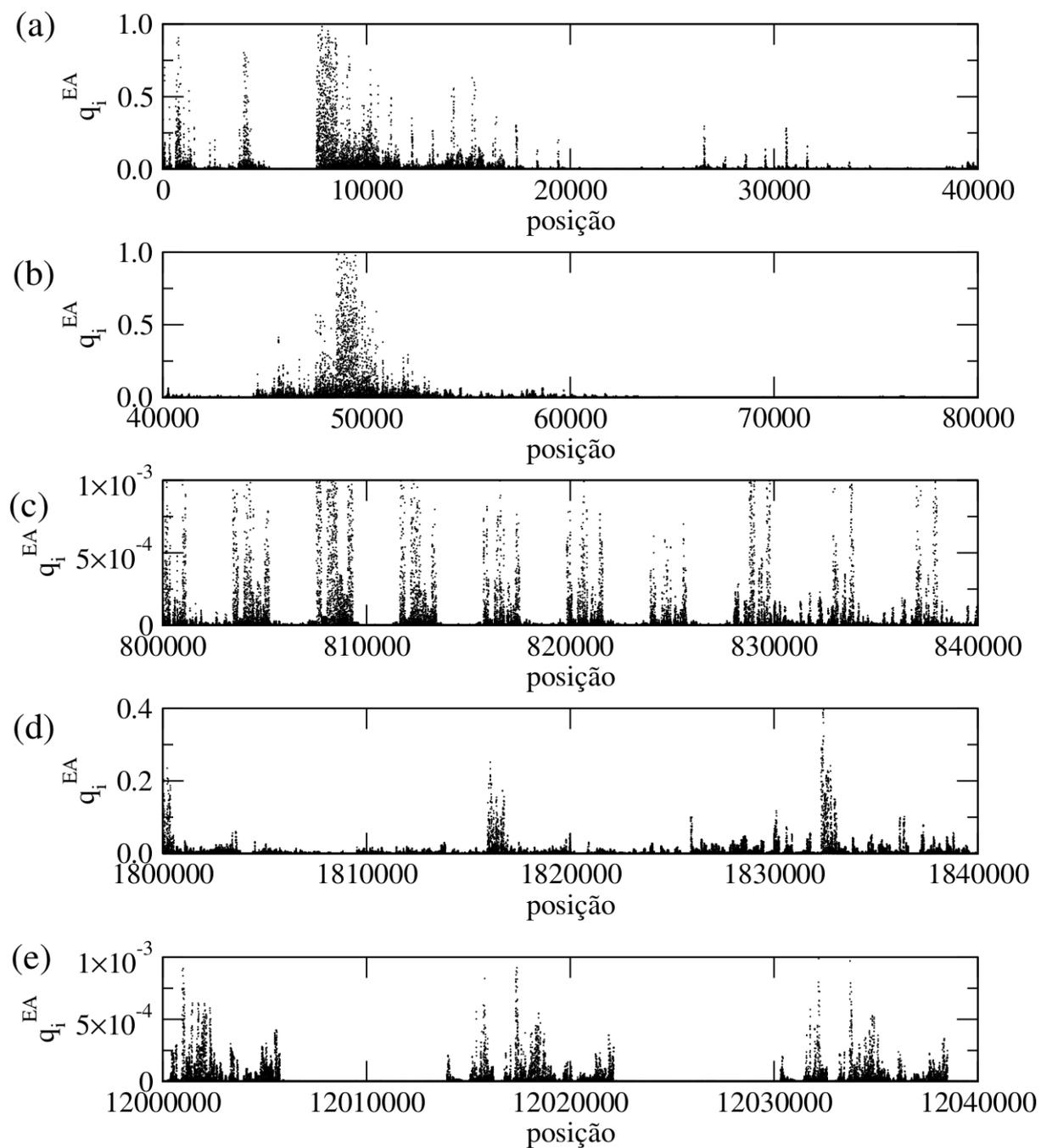
Devido à rica estrutura exibida nos perfis, realizaremos a seguir uma análise multifractal do parâmetro de ordem de EA sobre a rede hierárquica PWT.



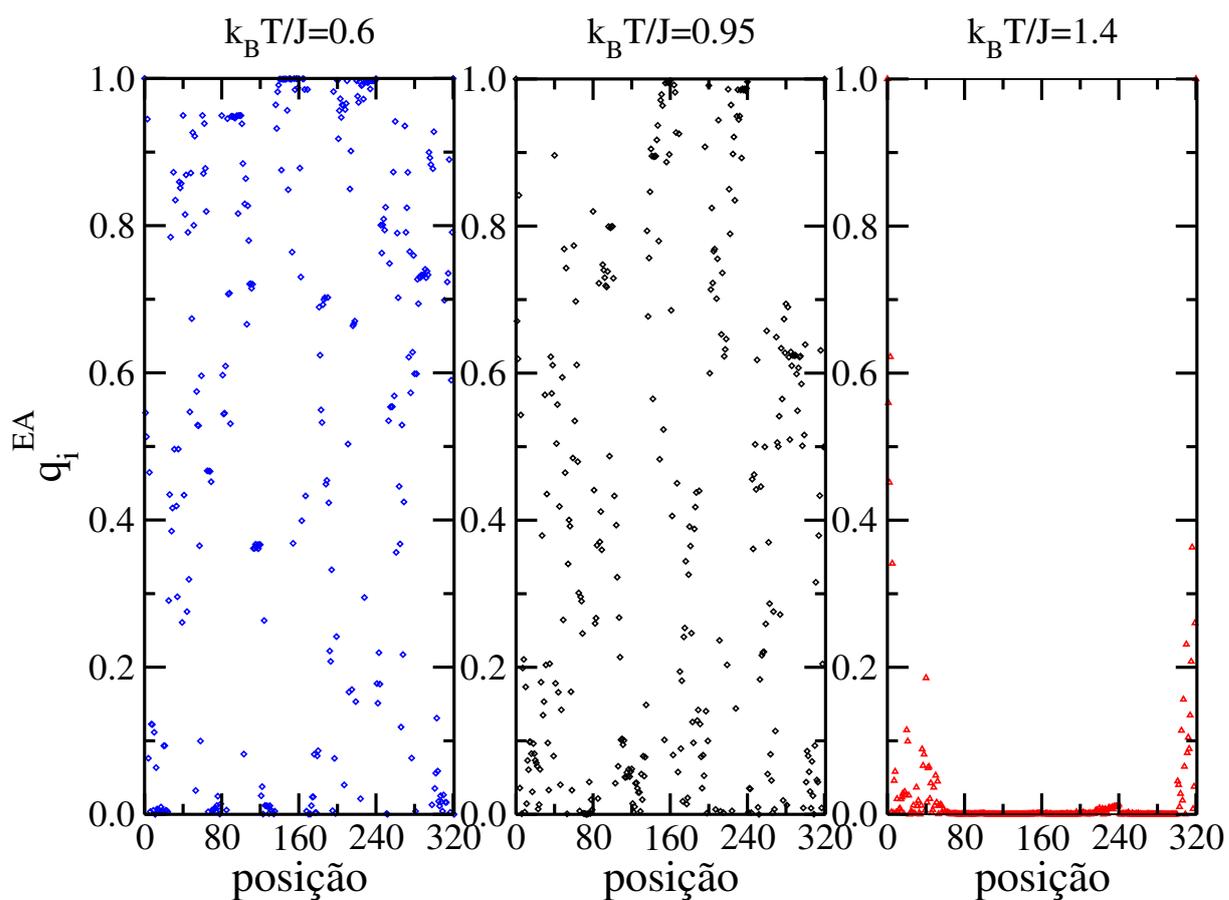
**Figura 6.3:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 0.6$ ; cada parte corresponde a 40000 sítios da rede PWT. Em (a) exibimos as primeiras 40 mil posições, contendo sítios da hierarquia  $n = 0$  até a hierarquia  $n = 5$ ; (b) apenas sítios da hierarquia  $n = 5$ ; (c) sítios da hierarquia  $n = 6$  oriundos das ligações do quadrado; em (d) os sítios pertencem ao início da hierarquia  $n = 7$ ; (e) sítios da sétima hierarquia que são oriundos das ligações do quadrado.



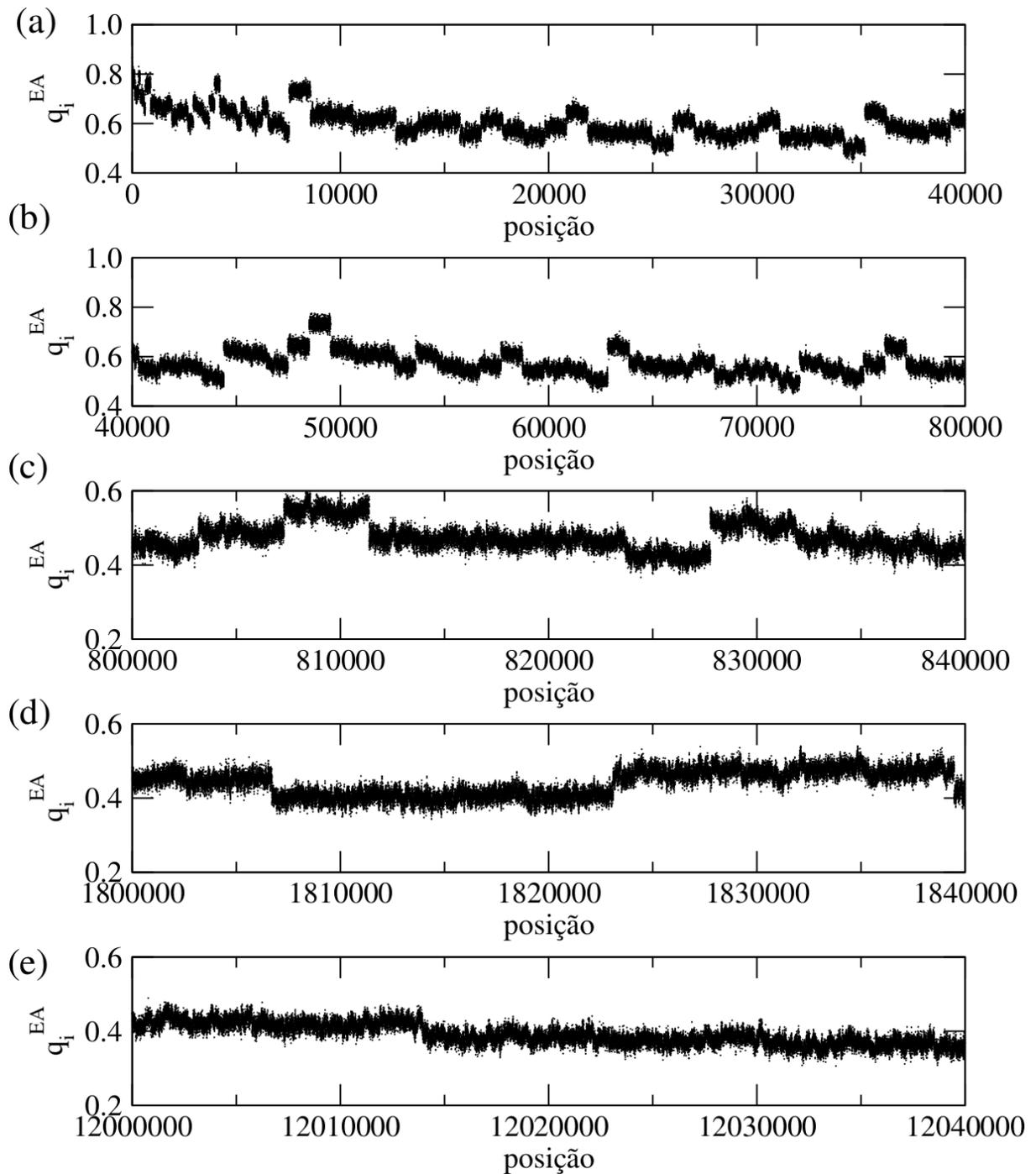
**Figura 6.4:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 0.95$ . As posições mostradas são as mesmas da figura 6.3.



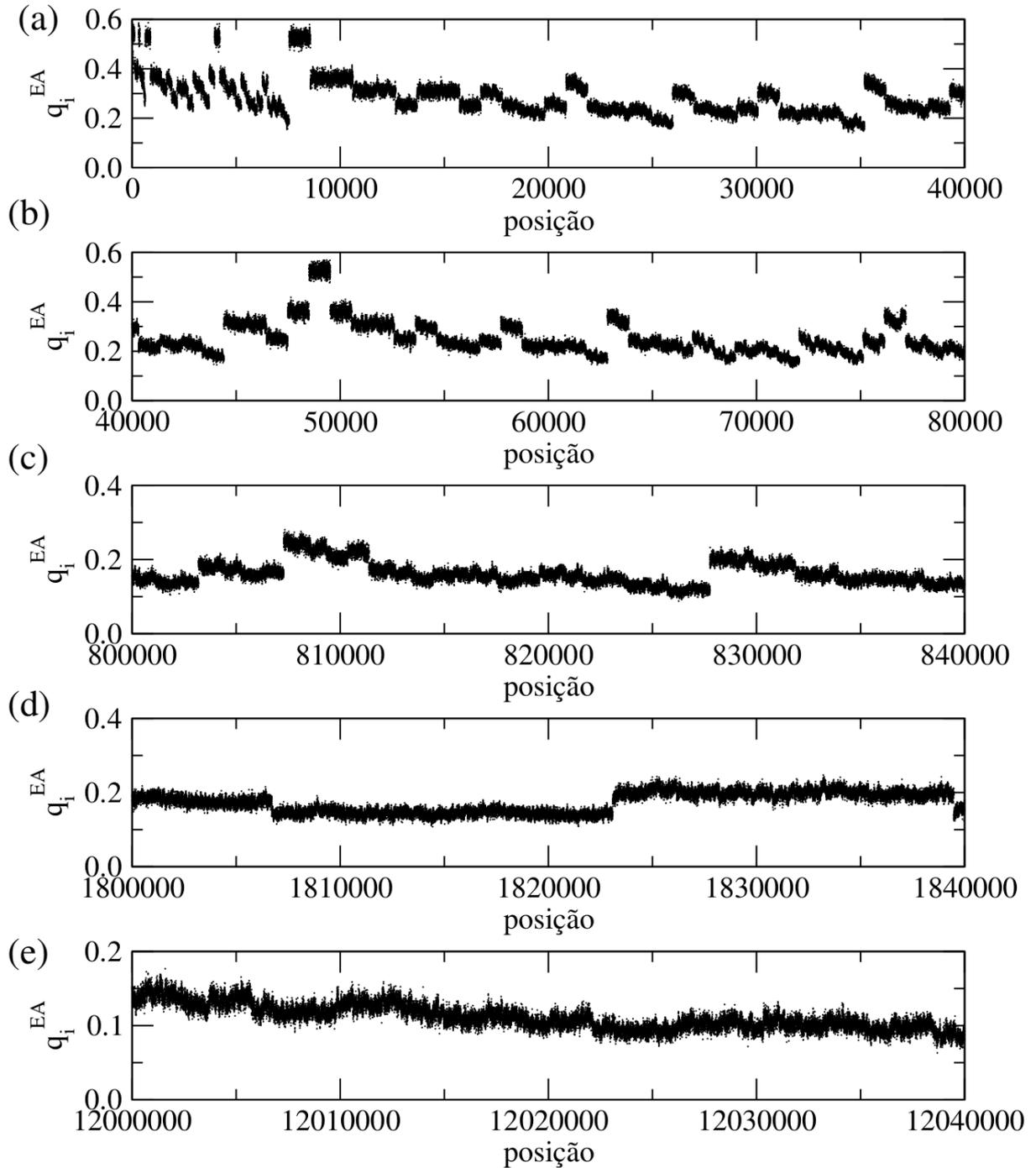
**Figura 6.5:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para para uma única amostra à temperatura  $k_B T/J = 1.40$ . As posições são as mesmas exibidas na figura 6.3.



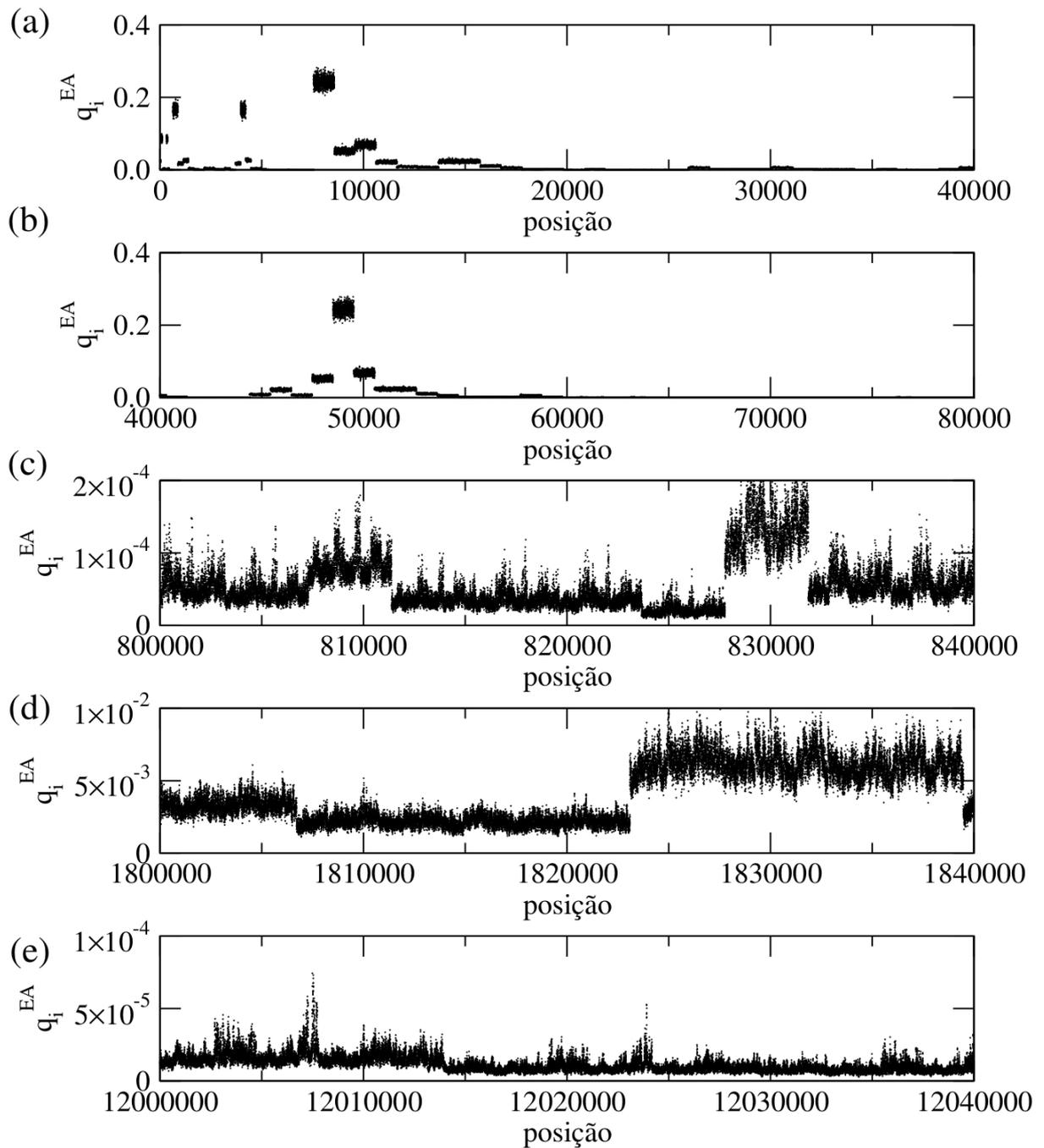
**Figura 6.6:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos perfis dos parâmetros de ordem de EA locais de uma única amostra, para três temperaturas diferentes. Neste caso, adotamos o caminho que conecta os sítios raízes passando pelo menor número de células básicas possível; em cada célula necessariamente passamos pelos quatro sítios internos [ver figura 6.1(b)].



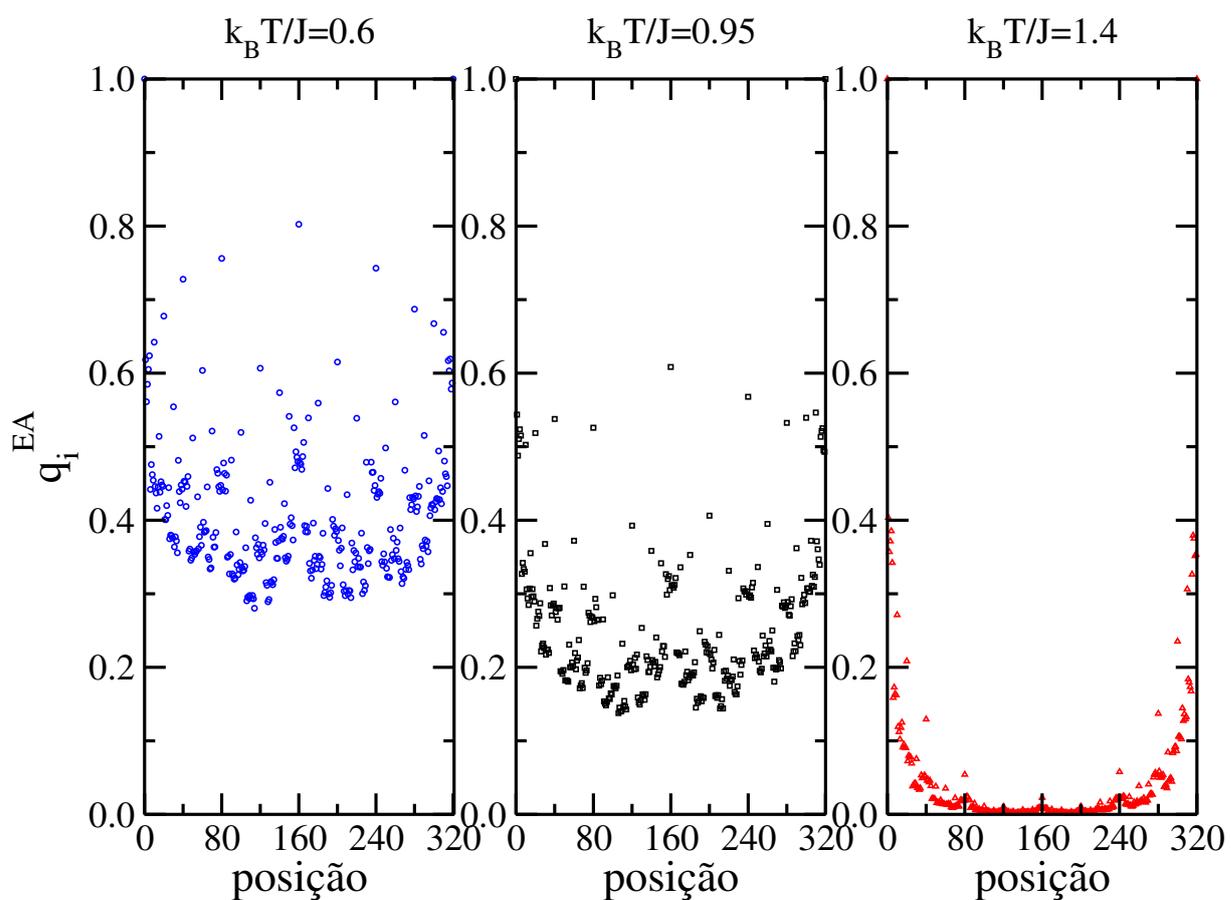
**Figura 6.7:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 0.6$ ; cada parte corresponde a 40000 sítios da rede PWT. Em (a) exibimos as primeiras 40 mil posições, contendo sítios da hierarquia  $n = 0$  até a hierarquia  $n = 5$ ; (b) apenas sítios da hierarquia  $n = 5$ ; em (c) mostramos sítios da hierarquia  $n = 6$  oriundos das ligações do quadrado; (d) sítios do início da hierarquia  $n = 7$ ; (e) sítios da sétima hierarquia oriundos das ligações do quadrado.



**Figura 6.8:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 0.95$ . As posições são as mesmas consideradas na figura 6.7.



**Figura 6.9:** Para a hierarquia de ordem  $n = 7$  exibimos partes do perfil dos parâmetros de ordem de EA locais para 400 amostras à temperatura  $k_B T/J = 1.40$ . As regiões são as mesmas consideradas na Fig. 6.7.



**Figura 6.10:** Perfis dos parâmetros de ordem de EA locais para a hierarquia de ordem  $n = 7$ , 400 amostras e três temperaturas diferentes. Neste caso, adotamos um caminho que conecta os sítios da raízes passando pelo menor número de células básicas possível; em cada célula necessariamente passamos pelos quatro sítios internos.

### 6.3 Análise multifractal

Multifractais estão diretamente relacionados com a distribuição estatística de medidas sobre um suporte geométrico, ou seja, uma linha, área, volume, ou até mesmo um fractal [132]. Considerando que um sistema seja dividido em  $N$  caixas de comprimento linear  $r$ , a probabilidade normalizada para medidas na  $i$ -ésima caixa é dada por

$$p_i(r) = \frac{N_i(r)}{N}, \quad (6.3)$$

onde  $N_i(r)$  é o número de pontos na  $i$ -ésima caixa. Quando consideramos um fractal não uniforme, cuja distribuição apresenta infinitas singularidades, no limite  $r \ll 1$ , temos uma probabilidade  $p(r)$  que escala como

$$p(r) \sim r^\alpha, \quad (6.4)$$

onde  $\alpha$  pode assumir vários valores em um intervalo, correspondendo a diferentes regiões da medida [133, 134]. O expoente  $\alpha$ , também conhecido como expoente de Hölder [135], está associado à intensidade da singularidade local da medida. Embora  $\alpha$  dependa da posição no fractal, existem muitas caixas que compartilham o mesmo índice  $\alpha$ . Em geral, o número de tais caixas escala com  $r$  como

$$N_\alpha(r) \sim r^{-f(\alpha)}, \quad (6.5)$$

onde  $f(\alpha)$  é conhecido como espectro de singularidades, sendo este a dimensão fractal do subconjunto de caixas caracterizadas pelo expoente  $\alpha$ . O expoente  $\alpha$  pode assumir valores no intervalo  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  [134], e  $f(\alpha)$  é usualmente uma função côncava com um máximo,

$$\max_{\alpha} f(\alpha) = D, \quad (6.6)$$

onde  $D$  representa uma dimensão fractal definida a seguir.

De forma resumida, segundo Mandelbrot [135]:

“A multifractal measure can be represented as the union of a continuous infinity of addends. Each addend is an infinitesimal ‘unifractal measure’. It is characterised by a single value of  $\alpha$ , and is supported by a fractal set having the fractal dimension  $f(\alpha)$ . The sets corresponding to the different  $\alpha$ ’s are intertwined.”

O espectro de singularidades  $f(\alpha)$  encontra-se associado a propriedades locais, porém através de uma transformada de Legendre o mesmo está conectado a propriedades globais (dimensões fractais) [133],

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha - f(\alpha)], \quad (6.7)$$

$$\alpha = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q], \quad (6.8)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = q, \quad (6.9)$$

onde  $D_q$  é denominada dimensão fractal generalizada, definida como

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^q}{\log r}. \quad (6.10)$$

Basicamente, para cada  $q$  existe uma dimensão associada, e algumas amplamente conhecidas são:  $D_0 = D$ , a dimensão fractal do suporte da medida,  $D_1$  representa a dimensão de informação, que nos dá a probabilidade de um ponto estar em uma determinada caixa e  $D_2$  corresponde à dimensão de correlação, que nos diz como a função de correlação do conjunto escala com  $r$ . Para  $q = 3, 4, \dots$  temos um conjunto infinito de dimensões associadas às funções de correlação superiores [136]. A função  $f(\alpha)$  é côncava,  $d^2 f/d\alpha^2 < 0$  [133]; a dimensão  $D$  da Eq. (6.6) representa na verdade a dimensão fractal do suporte da medida, ou seja,  $D_0 = D = \max[f(\alpha)]$  e para o caso simples de fractais uniformes com distribuição

uniforme, todas as  $D_q$ 's são iguais a  $D$ . Então, o fractal ideal, com auto-similaridade perfeita, é caracterizado por um único expoente de singularidade  $\alpha$ ; portanto, o gráfico  $f(\alpha)$  *versus*  $\alpha$  é representado por um único ponto. No gráfico  $f(\alpha)$  *versus*  $\alpha$  a reta tangente à curva  $f(\alpha)$  no ponto  $f(\alpha) = \alpha = D_1$  passa pela origem e apresenta inclinação igual a 1.

Nosso objetivo é investigar o comportamento da função  $f(\alpha)$  associada ao conjunto de parâmetros locais  $\{q_i^{EA}\}$  obtidos na rede hierárquica PWT. Para o cálculo de  $\alpha$  e  $f(\alpha)$  utilizamos o método introduzido por Chhabra e Jensen [137], onde o espectro é obtido variando o parâmetro  $q$  e calculando

$$\alpha(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, r) \log p_i(r), \quad (6.11)$$

$$f(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\log r} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, r) \log \mu_i(q, r), \quad (6.12)$$

com

$$\mu_i(q, r) = \frac{p_i^q(r)}{\sum_i^N p_i^q(r)}. \quad (6.13)$$

O parâmetro  $q$  pode variar, permitindo investigar regiões com diferentes expoentes  $\alpha$ . Regiões com valores pequenos do expoente  $\alpha$  são acessadas através de grandes valores positivos de  $q$ , enquanto altos valores de  $\alpha$  são acessados com grandes valores negativos de  $q$ .

Para realizar a análise multifractal, definimos nossa medida como

$$p_i = \frac{[\langle S_i \rangle^2]_c}{\sum_{i=1}^{N_s} [\langle S_i \rangle^2]_c}, \quad (6.14)$$

de tal forma que iremos analisar o comportamento multifractal levando em consideração todos os sítios de uma rede hierárquica na ordem 7, e para cada temperatura realizamos médias sobre 400 amostras.

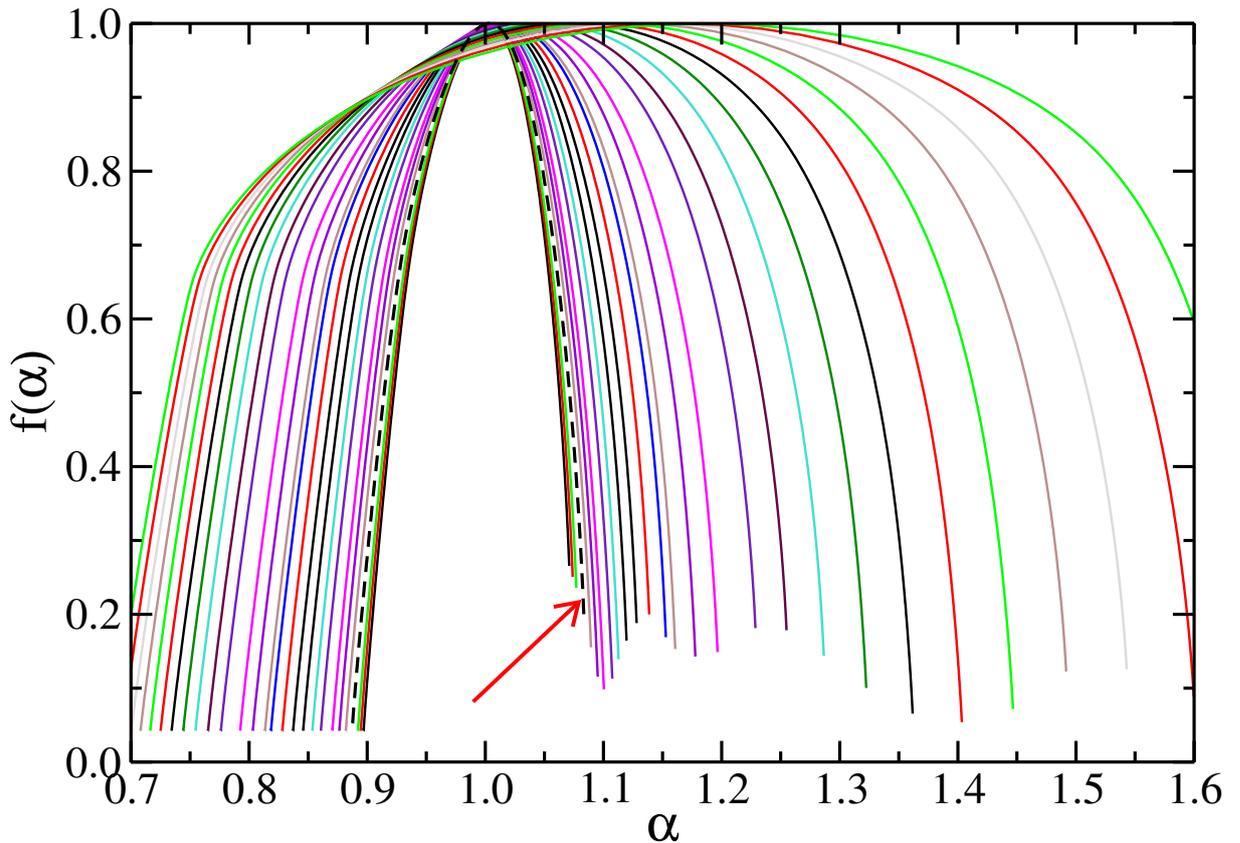
Exibimos na figura 6.11 o comportamento do espectro  $f(\alpha)$  para temperaturas que va-

riam de  $k_B T/J = 0.91$  a  $k_B T/J = 1.42$ , as quais alargam com o aumento da temperatura; a seta vermelha indica a curva associada à temperatura crítica. Para  $T < T_c$  observa-se uma lenta diminuição na largura das curvas, com a redução da temperatura, enquanto para  $T > T_c$  existe um rápido alargamento das curvas. Na fase P o parâmetro de ordem de EA anula-se (com exceção dos dois valores associados à condição de contorno adotada), e assim o comportamento esperado nesta situação seria a observação de apenas um ponto no gráfico; porém, como observado na figura 6.11, isso não ocorre. Na prática observa-se uma curva, e atribuímos tal comportamento a dois motivos: (i) os sítios localizados nas proximidades dos sítios raízes são influenciados pelas condições de contorno, impossibilitando que os mesmos apresentem parâmetros de ordem locais nulos; (ii) o método de Chhabra e Jensen, em algumas situações, pode introduzir pontos espúrios ao longo da curva [138]. Este comportamento da curva  $f(\alpha)$  versus  $\alpha$  também foi observado na rede hierárquica de MK com  $D = 3$  [34].

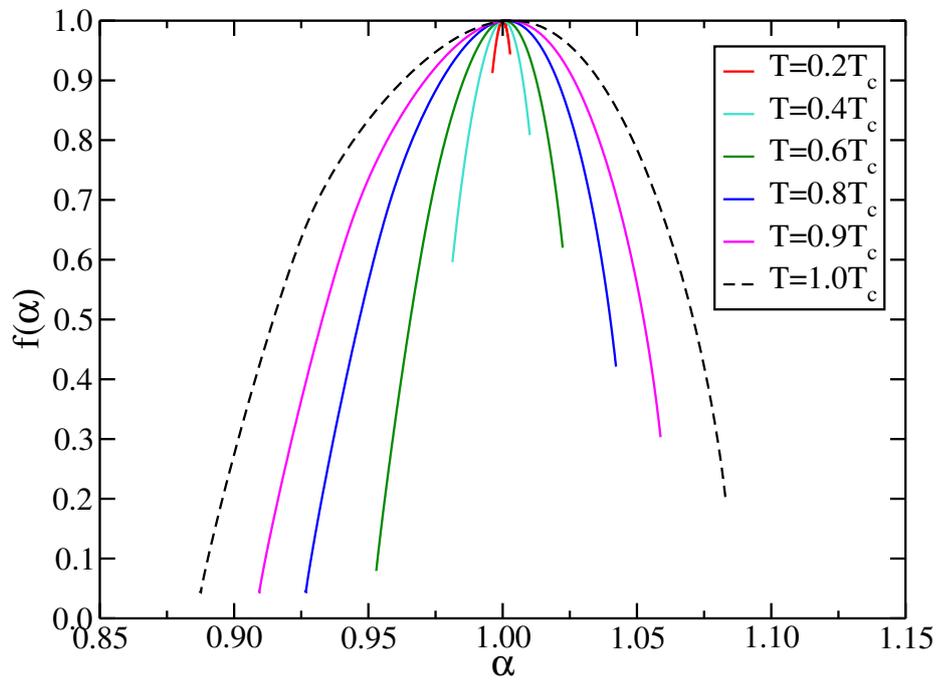
Para  $T < T_c$ , apresentamos na figura 6.12 o comportamento do espectro de singularidades. Observa-se que ocorre um estreitamento do espectro com a redução da temperatura, com clara tendência de convergência para uma delta, ou seja, um único  $\alpha$  para todo  $q$ , tornando-se um monofractal no limite  $T \rightarrow 0$ . Este resultado é coerente com o comportamento termodinâmico esperado quando  $T \rightarrow 0$ , onde todos os sítios estão fortemente correlacionados com as grandezas locais  $\{q_i^{EA}\}$  apresentando valores tipicamente unitários, que não sofrem alterações quando mudamos a escala de observação do sistema.

Apesar do comportamento inesperado acima de  $T_c$ , podemos associar esse rápido alargamento do espectro de singularidades à transição de fases VS–P. Para ilustrar melhor este efeito no espectro de singularidades, apresentamos na figura 6.13 o comportamento de  $\alpha_{\min}$  e  $\alpha_{\max}$ ; estes índices são determinados para  $f(\alpha) = 0$ , ou seja, pelas interseções da curva com a abscissa (aqui obtidos por meio de extrapolações). Para  $T < T_c$  verificamos que  $\alpha_{\max}$  varia pouco, aproximando de um valor constante para baixas temperaturas, enquanto que o  $\alpha_{\min}$  apresenta variações mais pronunciadas do que  $\alpha_{\max}$ . Um pouco acima

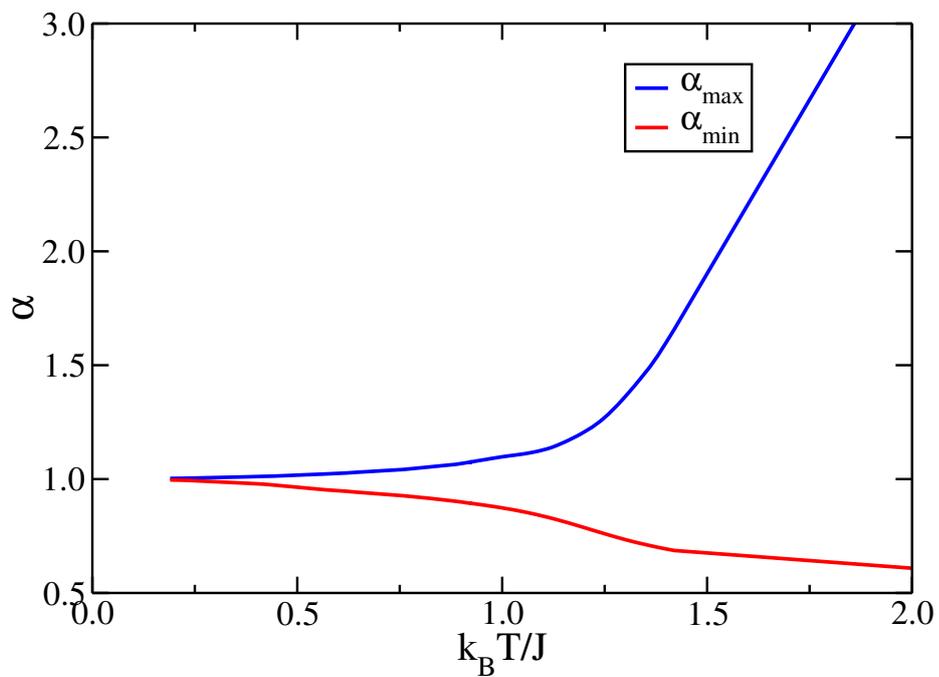
de  $T_c$  observamos uma mudança abrupta no comportamento de  $\alpha_{\max}$ , que cresce a uma taxa muito maior que aquela observada para baixas temperaturas; tal comportamento pode ser associado à transição de fases. Na fase P o parâmetro de ordem de EA tende a zero para grande parcela dos sítios, e esse efeito é captado por  $\alpha_{\max}$ , que caracteriza o conjunto de medidas menores ainda presentes. Por outro lado, para  $T > T_c$ , o expoente  $\alpha_{\min}$  que caracteriza o conjunto das medidas maiores, decai lentamente; tal comportamento está associado ao fato de que sítios próximos aos sítios raízes são influenciados pelas condições de contorno (ver figura 6.9(a)), apresentando valores de  $q_i^{EA}$  diferentes de zero. É importante salientar que um comportamento similar para  $T > T_c$  foi observado na rede hierárquica de MK com  $D = 3$  [34].



**Figura 6.11:** Função  $f(\alpha)$  para várias temperaturas. A seta vermelha indica a curva pontilhada que está associada à temperatura crítica  $(k_B T_c / J) = 0.95(2)$ ; mais estreitas que esta temos em ordem decrescente temperaturas até  $(k_B T_c / J) = 0.91$ , enquanto que as mais largas correspondem a temperaturas crescentes até  $(k_B T_c / J) = 1.42$ .



**Figura 6.12:** Função  $f(\alpha)$  para temperaturas  $T \leq T_c$ . A curva pontilhada está associada à temperatura crítica  $(k_B T_c/J) = 0.95(2)$  e nota-se o estreitamento da função  $f(\alpha)$  com o decréscimo da temperatura até a curva para  $T = 0.2T_c$ , sugerindo uma convergência para um único expoente  $\alpha$  à temperatura nula.



**Figura 6.13:**  $\alpha_{\max}$  e  $\alpha_{\min}$  do perfil médio do parâmetro de EA para diversas temperaturas.

## Capítulo 7

# Conclusões e perspectivas

Ao longo desta tese, apresentamos resultados analíticos e computacionais obtidos para o modelo de vidro de spins de Ising com interações de curto alcance nas redes hierárquicas de Migdal-Kadanoff e ponte de Wheatstone tridimensional caracterizada por uma dimensão fractal  $D \cong 3.58$ ; resumimos a seguir nossas principais conclusões e perspectivas para novos trabalhos.

A natureza caótica da fase vidro de spins foi investigada na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Utilizamos dois procedimentos: (i) a temperatura nula, realizando pequenas perturbações nos acoplamentos; (ii) a temperatura diferente de zero, realizando pequenas variações da temperatura. Verificamos que os resultados independem do procedimento adotado. Determinamos numericamente os expoentes de caos ( $\zeta = 0.969(1)$ ), rigidez ( $y = 0.224(3)$ ), além da dimensão fractal da superfície da gota ( $d_s = 2.2386(2)$ ). O expoente de caos é positivo ( $\zeta > 0$ ), confirmando a natureza caótica da fase vidro de spins, ou seja, pequenas perturbações levam o sistema para um novo estado de equilíbrio, que difere do estado antes das perturbações. A estimativa do expoente de rigidez (realizada de duas formas independentes) apresentou boa concordância com resultados obtidos na rede cúbica. É importante destacar que estes resultados, para um modelo na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional, aproximam-se de resultados obtidos por extensas simulações de Monte Carlo na rede cúbica. Assim como a

rede hierárquica de Migdal-Kadanoff com  $D = 3$ , a ponte de Wheatstone tridimensional poder ser considerada como uma aproximação para a rede cúbica.

Para redes hierárquicas de Migdal-Kadanoff com dimensões fractais variando entre  $D \cong 2.58$  até  $D = 7$ , encontramos duas alternativas para a forma funcional da distribuição de ponto fixo, associada à transição de fases vidro de spins-paramagnética: (i) a distribuição  $q$ -gaussiana, cujo parâmetro  $q$  apresenta uma redução gradual, convergindo para 1, com o aumento da dimensão fractal; (ii) a distribuição exponencial esticada, cujo parâmetro  $\delta$  apresenta um aumento gradual, convergindo para 2, com o aumento da dimensão fractal. Através da análise de histogramas, dos momentos das distribuições e do teste  $\chi^2$ , ambas propostas forneceram bons ajustes para a distribuição de ponto fixo em redes hierárquicas da família de Migdal-Kadanoff com  $2.58 \leq D \leq 7$ . Nestas redes, observou-se que no limite  $p \rightarrow \infty$  (onde  $p$  representa o número de caminhos paralelos da célula básica) a distribuição de ponto fixo converge para uma gaussiana, como esperado pelo teorema do limite central.

Para a rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional, um excelente ajuste para a distribuição de ponto fixo foi obtido com a distribuição exponencial esticada. Outras distribuições foram consideradas, porém, sem proporcionar ajustes aceitáveis. Neste caso, a distribuição exponencial esticada se destaca pelos resultados obtidos: (i) boa concordância nos ajustes dos histogramas; (ii) momentos teóricos da distribuição próximos dos obtidos numericamente; (iii) bons valores fornecidos pelo ajuste no teste  $\chi^2$ .

É importante destacar que a forma funcional da distribuição de ponto fixo manteve-se desconhecida por décadas para estas redes hierárquicas; as presentes propostas representam um avanço nesta área. Especificamente neste trabalho, a proposta de distribuição de ponto fixo para a rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional foi importante no estudo da transição de fases vidro de spins-paramagnética.

O método Morgado-Coutinho-Curado, implementado no presente trabalho para a rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional, possibilitou a determinação de magneti-

zações locais, parâmetro de ordem de Edwards–Anderson, energia interna, calor específico e de termos que contribuem para o comportamento dominante da suscetibilidade magnética não linear. Desta forma, determinamos as relações de recorrência que permitem o cálculo numérico das magnetizações locais e funções de correlação entre pares de spins primeiros e segundos vizinhos. Calculamos o parâmetro de ordem de Edwards–Anderson para diferentes temperaturas e gerações da rede hierárquica; para a hierarquia  $n = 7$  (a maior estudada) a distinção entre a fase vidro de spins ( $q^{EA} > 0$ ) e a fase paramagnética ( $q^{EA} = 0$ ) é clara, porém, efeitos de tamanho finito são observados. Expoentes críticos associados à transição de fases vidro de spins–paramagnética foram obtidos. Através do colapso de dados do parâmetro de ordem, obtemos  $\nu = 2.50(4)$  e  $\beta = 0.82(4)$ ; os demais expoentes,  $\eta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$ , foram extraídos de relações de escala e hiperescala. Nossas simulações foram realizadas na ausência de um campo magnético externo, e utilizamos a distribuição exponencial esticada (representando a distribuição de ponto fixo) para os acoplamentos iniciais.

A curva do calor específico em função da temperatura, obtida a partir de uma derivação numérica da energia interna, apresentou um máximo arredondado nas proximidades da temperatura crítica. Esta é uma característica marcante observada em vidro de spins reais; por não apresentar divergência, o expoente  $\alpha$  deve ser negativo, condizente com o valor obtido através da relação de hiperescala,  $\alpha = -6.95(4)$ .

As funções de correlação entre primeiros e segundos vizinhos (estas apenas no interior de cada célula básica) contribuem para a suscetibilidade não linear. Calculadas para diferentes temperaturas, verificamos um máximo associado à suscetibilidade, o qual desloca-se em direção à temperatura crítica com o aumento da hierarquia. Entretanto, para estimar a suscetibilidade não linear é necessário a obtenção das funções de correlação de cada spin com todos os demais spins da rede, o que não é possível através do método aqui utilizado.

Não podemos afirmar se a relação de hiperescala,  $D\nu = 2 - \alpha$  (com  $D \cong 3.58$ ), usada na determinação do expoente  $\alpha$ , é válida para o modelo de vidro de spins de Ising

na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional. Para isto precisamos avançar principalmente na determinação de pelo menos mais um expoente crítico de forma direta.

O cálculo numérico dos parâmetros de ordem de vidro de spins locais, revelou uma distribuição não trivial de valores ao longo dos sítios da rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional; tal característica foi observada através do perfil completo destes parâmetros. Verificamos que características multifractais estão presentes na distribuição de valores dos parâmetros de ordem locais. Em especial, é possível observar que acima da temperatura crítica, a curva do espectro de singularidades ( $f(\alpha)$ ), apresenta um alargamento com o aumento da temperatura; tal comportamento não é observado para temperaturas abaixo de  $T_c$ . No limite  $T \rightarrow 0$  observamos que a curva do espectro de singularidades está convergindo para uma delta, ou seja, uma distribuição uniforme para os valores dos parâmetros de ordem ao longo da rede, característica de um fractal.

A determinação das relações de recorrência para a obtenção das magnetizações locais na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional, abre possibilidades para investigações futuras. Pretendemos explorar outras regiões do diagrama de fases, como a fronteira crítica entre a fase vidro de spins e a fase paramagnética, calculando o parâmetro de ordem e os expoentes críticos para valores  $J_0 > 0$ . Podemos assim, verificar se a universalidade dos expoentes críticos é preservada ao longo desta fronteira crítica. Outras regiões que investigaremos, e pouco exploradas, são: (i) a fronteira crítica entre a fase vidro de spins e a fase ferromagnética; (ii) proximidades do ponto multicrítico. Além disso, pretendemos implementar este método para o modelo de Ising ferromagnético com campo aleatório, assim como para o modelo de Potts (ambos os casos de ferromagneto em campo aleatório e vidro de spins), definidos na rede hierárquica ponte de Wheatstone tridimensional.

## Apêndice A

### Função de Partição $Z_{S_\mu S_\nu}$

Considerando um VS de Ising na rede hierárquica PWT, cujo hamiltoniano é dado pela Eq. (5.1), listamos abaixo os termos  $Z_{S_\mu S_\nu}$  das Eqs. (5.2)–(5.4).

$$Z_{++} = \sum_{i=1}^{16} e^{\mathfrak{A}_i}, \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 - H_2 - H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_2 &= -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 - H_2 - H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_3 &= -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 + H_2 - H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_4 &= +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 + H_2 - H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_5 &= +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_6 &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_7 &= -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 + H_2 + H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_8 &= +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 + H_2 + H_3 - H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_9 &= +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 - H_2 - H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{10} &= -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 - H_2 - H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{11} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 + H_2 - H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{12} &= +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 + H_2 - H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{13} &= +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 - H_2 + H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{14} &= -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 - H_2 + H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{15} &= -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{A}_{16} &= +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_\mu + H_\nu. \end{aligned}$$



$$Z_{-+} = \sum_{i=1}^{16} e^{\mathfrak{D}_i}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 - H_2 - H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_2 &= -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 - H_2 - H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_3 &= -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 + H_2 - H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_4 &= +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 + H_2 - H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_5 &= +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 - H_2 + H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_6 &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 - H_2 + H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_7 &= -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} - H_1 + H_2 + H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_8 &= +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} + K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} - K_{\nu 4} + H_1 + H_2 + H_3 - H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_9 &= +K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 - H_2 - H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{10} &= -K_{12} + K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 - H_2 - H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{11} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 + H_2 - H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{12} &= +K_{12} - K_{23} - K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} + K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} - K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 + H_2 - H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{13} &= +K_{12} - K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 - H_2 + H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{14} &= -K_{12} - K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} + K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} - K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 - H_2 + H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{15} &= -K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{41} + K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} - K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} - H_1 + H_2 + H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu, \\ \mathfrak{D}_{16} &= +K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{\nu 1} + K_{\nu 2} + K_{\nu 3} + K_{\nu 4} + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 - H_\mu + H_\nu. \end{aligned}$$

## Apêndice B

### Termos das relações de recorrência

Os termos  $R_i$ s ( $i = 1, 2, \dots, 64$ ) da subseção 5.3.1 são listados a seguir,

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_2 &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - H_2 - H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_3 &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_4 &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - H_2 - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_5 &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - H_1 - H_2 - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_6 &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} - H_1 - H_2 - H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_7 &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4, \\ R_8 &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4}, \\ R_9 &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - H_1 - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{10} &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3}, \\ R_{11} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - H_1 - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{12} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3}, \\ R_{13} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{14} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + H_2 - H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{15} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + H_4 + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{16} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + H_1 - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + H_3 - H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{17} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - H_1 + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - H_3 + H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{18} &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} - H_4 + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{19} &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{20} &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - H_3 + H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{21} &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - H_1 + H_2 + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} - H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{22} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - H_2 + H_3 + H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{23} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - H_1 + H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} - H_4 + K_{2\nu} + K_{\mu 2}, \\ R_{24} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} + H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - H_2 + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} - H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \\ R_{25} &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - H_1 - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - H_2 - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - H_3 + H_4 + K_{4\nu} + K_{\mu 4}, \\ R_{26} &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} + H_1 + H_2 + H_3 - K_{\mu 4} - K_{4\nu} - H_4 + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1}, \end{aligned}$$





Abaixo listamos os termos  $R'_i$ s ( $i = 1, \dots, 32$ ),  $\Upsilon'_i$  e  $\Lambda'_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) da subseção 5.3.2.

$$\begin{aligned}
 R'_1 &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_2 &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} \\
 R'_3 &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_4 &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} \\
 R'_5 &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_6 &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_7 &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} \\
 R'_8 &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} \\
 R'_9 &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{10} &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} \\
 R'_{11} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{12} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} \\
 R'_{13} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{14} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{\mu 2} - K_{2\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 3} + K_{1\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{15} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} - K_{4\nu} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} \\
 R'_{16} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{1\nu} - K_{\mu 3} - K_{3\nu} + K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{2\nu} + K_{\mu 2} \\
 R'_{17} &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} - K_{1\nu} - K_{2\nu} - K_{3\nu} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{\mu 3} + K_{\mu 2} + K_{\mu 1} \\
 R'_{18} &= K_{12} + K_{23} + K_{41} + K_{34} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{2\nu} + K_{1\nu} \\
 R'_{19} &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{2\nu} + K_{1\nu} \\
 R'_{20} &= K_{12} + K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{1\nu} - K_{2\nu} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{\mu 3} + K_{\mu 2} + K_{\mu 1} \\
 R'_{21} &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - K_{1\nu} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 2} + K_{\mu 1} \\
 R'_{22} &= K_{12} + K_{34} - K_{23} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{3\nu} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{1\nu} \\
 R'_{23} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - K_{1\nu} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 2} + K_{\mu 1} \\
 R'_{24} &= K_{12} + K_{41} - K_{23} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{\mu 2} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{1\nu} \\
 R'_{25} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{3\nu} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{26} &= K_{41} + K_{34} - K_{12} - K_{23} - K_{\mu 1} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} \\
 R'_{27} &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{3\nu} + K_{2\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{28} &= K_{23} + K_{34} - K_{12} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{2\nu} - K_{3\nu} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{\mu 3} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} \\
 R'_{29} &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{\mu 3} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{2\nu} + K_{\mu 1} \\
 R'_{30} &= K_{23} + K_{41} - K_{12} - K_{34} - K_{\mu 1} - K_{2\nu} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{\mu 3} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} \\
 R'_{31} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{\mu 1} - K_{2\nu} - K_{\mu 3} - K_{4\nu} + K_{\mu 4} + K_{3\nu} + K_{\mu 2} + K_{1\nu} \\
 R'_{32} &= -K_{12} - K_{23} - K_{34} - K_{41} - K_{1\nu} - K_{\mu 2} - K_{3\nu} - K_{\mu 4} + K_{4\nu} + K_{\mu 3} + K_{2\nu} + K_{\mu 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon'_1 &= -e^{R'_1} + e^{R'_2} - e^{R'_3} + e^{R'_4} - e^{R'_5} - e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} - e^{R'_9} + e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} + e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_1 &= e^{R'_{17}} - e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} + e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} + e^{R'_{27}} - e^{R'_{28}} + e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} + e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_2 &= e^{R'_1} - e^{R'_2} + e^{R'_3} - e^{R'_4} - e^{R'_5} - e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} - e^{R'_9} + e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} + e^{R'_{13}} + e^{R'_{14}} - e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_2 &= e^{R'_{17}} - e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} + e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} - e^{R'_{25}} + e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} + e^{R'_{30}} + e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_3 &= e^{R'_1} - e^{R'_2} + e^{R'_3} - e^{R'_4} - e^{R'_5} - e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} + e^{R'_9} - e^{R'_{10}} + e^{R'_{11}} - e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} + e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_3 &= e^{R'_{17}} - e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} + e^{R'_{22}} - e^{R'_{23}} + e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} + e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} + e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_4 &= e^{R'_1} - e^{R'_2} - e^{R'_3} + e^{R'_4} + e^{R'_5} - e^{R'_6} + e^{R'_7} - e^{R'_8} + e^{R'_9} - e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} + e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_4 &= e^{R'_{17}} - e^{R'_{18}} + e^{R'_{19}} - e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} + e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} + e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} + e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_5 &= -e^{R'_1} - e^{R'_2} - e^{R'_3} - e^{R'_4} + e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} + e^{R'_9} + e^{R'_{10}} + e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} - e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_5 &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} + e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} + e^{R'_{21}} + e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} + e^{R'_{24}} - e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} - e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_6 &= e^{R'_1} + e^{R'_2} + e^{R'_3} + e^{R'_4} + e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} - e^{R'_9} - e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} - e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} - e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_6 &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} + e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} - e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} - e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} + e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} + e^{R'_{29}} + e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_7 &= e^{R'_1} + e^{R'_2} - e^{R'_3} - e^{R'_4} - e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} - e^{R'_8} + e^{R'_9} + e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} - e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} + e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_7 &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} - e^{R'_{20}} + e^{R'_{21}} + e^{R'_{22}} - e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} + e^{R'_{26}} + e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_8 &= -e^{R'_1} - e^{R'_2} + e^{R'_3} + e^{R'_4} - e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} - e^{R'_8} - e^{R'_9} - e^{R'_{10}} + e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} - e^{R'_{13}} + e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} - e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_8 &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} - e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} + e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} + e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} - e^{R'_{28}} + e^{R'_{29}} + e^{R'_{30}} - e^{R'_{31}} - e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_9 &= -e^{R'_1} - e^{R'_2} - e^{R'_3} - e^{R'_4} + e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} + e^{R'_8} - e^{R'_9} - e^{R'_{10}} - e^{R'_{11}} - e^{R'_{12}} + e^{R'_{13}} + e^{R'_{14}} + e^{R'_{15}} + e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_9 &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} + e^{R'_{19}} + e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} - e^{R'_{23}} - e^{R'_{24}} + e^{R'_{25}} + e^{R'_{26}} - e^{R'_{27}} - e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} + e^{R'_{31}} + e^{R'_{32}} \\
 \Upsilon'_{10} &= e^{R'_1} + e^{R'_2} - e^{R'_3} - e^{R'_4} - e^{R'_5} + e^{R'_6} + e^{R'_7} - e^{R'_8} - e^{R'_9} - e^{R'_{10}} + e^{R'_{11}} + e^{R'_{12}} + e^{R'_{13}} - e^{R'_{14}} - e^{R'_{15}} + e^{R'_{16}} \\
 \Lambda'_{10} &= e^{R'_{17}} + e^{R'_{18}} - e^{R'_{19}} - e^{R'_{20}} - e^{R'_{21}} - e^{R'_{22}} + e^{R'_{23}} + e^{R'_{24}} - e^{R'_{25}} - e^{R'_{26}} + e^{R'_{27}} + e^{R'_{28}} - e^{R'_{29}} - e^{R'_{30}} + e^{R'_{31}} + e^{R'_{32}}
 \end{aligned}$$

## Apêndice C

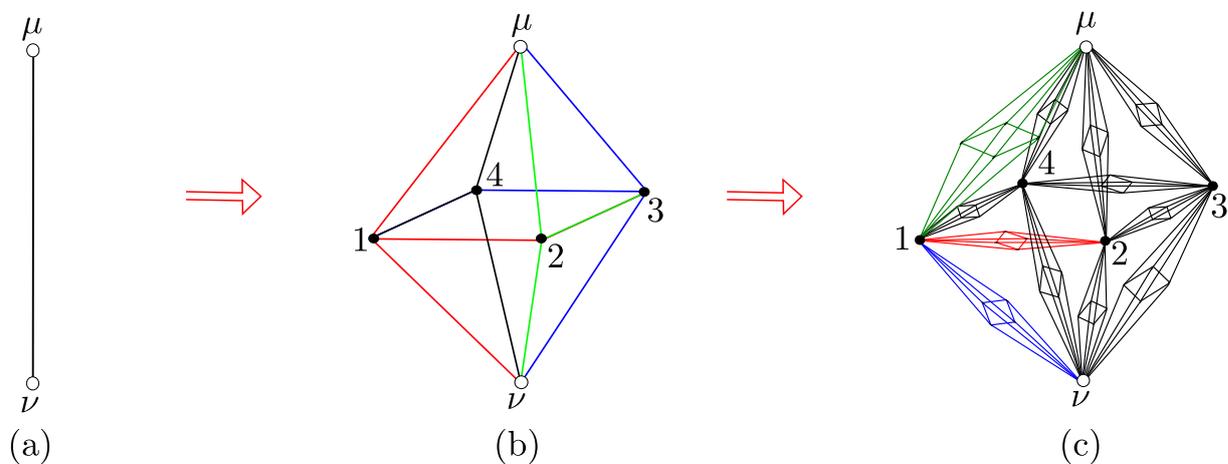
### Endereçamento de sítios e ligações

O endereçamento será realizado através de quatro índices  $(i, j, k, l)$  que permitem a identificação única de cada sítio, ou ligação, sobre a rede hierárquica PWT.

O primeiro índice ( $i$ ) identifica a posição do sítio interno da célula básica, sendo sempre igual a 1 neste caso; no endereçamento das ligações este índice pode assumir os valores  $i = 1$  para a ligação conectada ao sítio superior ( $\mu$ ),  $i = 2$  para a ligação conectada ao sítio inferior ( $\nu$ ) e  $i = 3$  representa uma ligação do quadrado<sup>1</sup> situado à direita das ligações identificadas por  $i = 1$  e  $i = 2$ . Note que dessa forma estamos dividindo a célula básica em quatro partes ou pedaços, onde cada parte contém três ligações; na figura C.1(b) cada parte é identificada por uma cor diferente. O segundo índice ( $j$ ) varia de 1 a  $4^n$  e fornece a posição da esquerda para a direita do pedaço ao qual pertence o sítio ou a ligação; por exemplo, na figura C.1(b),  $j = 1$  identifica a parte vermelha,  $j = 2$  a parte verde,  $j = 3$  a parte azul e  $j = 4$  a parte preta. O terceiro índice ( $k$ ) varia de 1 a  $(b + 1)^{n-1}$  e fornece a posição da célula, para exemplificar, considere a figura C.1(b), para a qual  $k = 1$ ; na figura C.1(c) a célula cujos sítios da raiz são  $\mu$  e 1 é identificada por  $k = 1$  (célula verde), a célula cujos sítios da raiz são 1 e  $\nu$  é identificada por  $k = 2$  (célula azul), enquanto que a célula cujos sítios da raiz são 1 e 2 é identificada por  $k = 3$  (célula vermelha). Na próxima hierarquia note que entre os sítios  $\mu$  e 1 surgirão as células  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$ , entres

---

<sup>1</sup>As ligações do quadrado da célula básica da figura C.1(b) são  $J_{12}$ ,  $J_{23}$ ,  $J_{34}$  e  $J_{41}$ .



**Figura C.1:** Ilustração da construção da rede hierárquica PWT.

os sítios 1 e  $\nu$  surgirão as células  $k = 4$ ,  $k = 5$  e  $k = 6$ , entre os sítios 1 e 2 surgirão as células  $k = 7$ ,  $k = 8$  e  $k = 9$ , e a cada nova hierarquia este caminho que identifica a célula torna-se mais complexo. O último índice ( $l$ ) varia de 0 a  $n$ , indicando em que hierarquia um determinado sítio ou ligação surgiu.

O mapeamento dos sítios inicia-se a partir dos dois sítios da hierarquia de ordem zero [figura C.1(a)], e em seguida inserimos os quatro sítios da hierarquia  $n = 1$ ; na hierarquia de ordem dois surgem 48 novos sítios, de forma que a cada nova hierarquia surgem  $4 \times 12^{n-1}$  novos sítios, e assim sucessivamente até a hierarquia  $n$ . Em cada hierarquia variamos o índice  $j$ , em seguida o índice  $i$  e por último  $k$ . Implementamos este mapeamento através de um programa escrito em Fortran 90.

## Referências Bibliográficas

- [1] D. Stein and C. Newman, *Spin Glasses and Complexity*. Primers in Complex Systems, Princeton University Press, 2013.
- [2] J. A. Mydosh, *Spin Glasses: An Experimental Introduction*. Taylor & Francis, 1993.
- [3] V. Cannella and J. A. Mydosh, “Magnetic ordering in gold-iron alloys,” *Phys. Rev. B*, vol. 6, pp. 4220–4237, 1972.
- [4] C. A. M. Mulder, A. J. van Duynveldt, and J. A. Mydosh, “Susceptibility of the CuMn spin-glass: Frequency and field dependences,” *Phys. Rev. B*, vol. 23, pp. 1384–1396, 1981.
- [5] H. Maletta and W. Felsch, “Insulating spin-glass system  $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$ ,” *Phys. Rev. B*, vol. 20, pp. 1245–1260, 1979.
- [6] L. E. Wenger and P. H. Keesom, “Calorimetric investigation of a spin-glass alloy: CuMn,” *Phys. Rev. B*, vol. 13, pp. 4053–4059, 1976.
- [7] J. L. Tholence and R. Tournier, “Susceptibility and remanent magnetization of a spin glass,” *J. Phys. Colloques*, vol. 35, pp. C4–229–C4–235, 1974.
- [8] K. Binder and A. P. Young, “Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 58, pp. 801–976, 1986.

- [9] E. Vincent, “Ageing, rejuvenation and memory: The example of spin-glasses,” in *Ageing and the Glass Transition* (M. Henkel, M. Pleimling, and R. Sanctuary, eds.), vol. 716 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 7–60, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [10] S. F. Edwards and P. W. Anderson, “Theory of spin glasses,” *J. Phys. F: Met. Phys.*, vol. 5, pp. 965–974, 1975.
- [11] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, “Solvable model of a spin-glass,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 1792–1796, 1975.
- [12] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, “Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model,” *J. Phys. A*, vol. 11, pp. 983–990, 1978.
- [13] G. Parisi, “Infinite number of order parameters for spin-glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 43, pp. 1754–1756, 1979.
- [14] G. Parisi, “The order parameter for spin glasses: a function on the interval 0-1,” *J. Phys. A*, vol. 13, pp. 1101–1112, 1980.
- [15] G. Parisi, “Magnetic properties of spin glasses in a new mean field theory,” *J. Phys. A*, vol. 13, pp. 1887–1895, 1980.
- [16] G. Parisi, “Order parameter for spin-glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, pp. 1946–1948, 1983.
- [17] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, and M. Virasoro, “Nature of the spin-glass phase,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, pp. 1156–1159, 1984.
- [18] W. L. McMillan, “Scaling theory of Ising spin glasses,” *J. Phys. C*, vol. 17, pp. 3179–3187, 1984.

- [19] A. Bray and M. Moore, “Scaling theory of the ordered phase of spin glasses,” in *Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics* (J. Hemmen and I. Morgenstern, eds.), vol. 275 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 121–153, Springer Berlin Heidelberg, 1987.
- [20] D. S. Fisher and D. A. Huse, “Ordered phase of short-range Ising spin-glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 1601–1604, 1986.
- [21] D. S. Fisher and D. A. Huse, “Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase,” *Phys. Rev. B*, vol. 38, pp. 386–411, 1988.
- [22] B. Yucesoy, H. G. Katzgraber, and J. Machta, “Evidence of non-mean-field-like low-temperature behavior in the Edwards-Anderson spin-glass model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 177204, 2012.
- [23] B. Yucesoy, H. Katzgraber, and J. Machta, “Yucesoy, Katzgraber, and Machta reply,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 219702, 2013.
- [24] W. Wang, J. Machta, and H. G. Katzgraber, “Evidence against a mean-field description of short-range spin glasses revealed through thermal boundary conditions,” *Phys. Rev. B*, vol. 90, p. 184412, 2014.
- [25] T. Aspelmeier, A. Billoire, E. Marinari, and M. A. Moore, “Finite-size corrections in the Sherrington–Kirkpatrick model,” *J. Phys. A*, vol. 41, p. 324008, 2008.
- [26] R. A. Baños, A. Cruz, L. A. Fernandez, J. M. Gil-Narvion, A. Gordillo-Guerrero, M. Guidetti, A. Maiorano, F. Mantovani, E. Marinari, V. Martin-Mayor, J. Monforte-Garcia, A. M. Sudupe, D. Navarro, G. Parisi, S. Perez-Gaviro, J. J. Ruiz-Lorenzo, S. F. Schifano, B. Seoane, A. Tarancon, R. Tripiccion, and D. Yllanes, “Nature of the spin-glass phase at experimental length scales,” *J. Stat. Mech.*, p. P06026, 2010.

- [27] A. Billoire, L. Fernandez, A. Maiorano, E. Marinari, V. Martin-Mayor, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, J. Ruiz-Lorenzo, and D. Yllanes, “Comment on “Evidence of non-mean-field-like low-temperature behavior in the Edwards-Anderson spin-glass model”,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 219701, 2013.
- [28] D. Panchenko, “The Sherrington-Kirkpatrick model: An overview,” *J. Stat. Phys.*, vol. 149, pp. 362–383, 2012.
- [29] B. W. Southern and A. P. Young, “Real space rescaling study of spin glass behaviour in three dimensions,” *J. Phys. C*, vol. 10, pp. 2179–2195, 1977.
- [30] E. Gardner, “A spin glass model on a hierarchical lattice,” *J. Physique*, vol. 45, pp. 1755–1763, 1984.
- [31] J. R. Banavar and A. J. Bray, “Chaos in spin glasses: A renormalization-group study,” *Phys. Rev. B*, vol. 35, pp. 8888–8890, 1987.
- [32] E. M. F. Curado and J. L. Meunier, “Spin-glass in low dimensions and the Migdal-Kadanoff approximation,” *Physica A*, vol. 149, pp. 164–181, 1988.
- [33] S. Coutinho, O. D. Neto, J. R. L. de Almeida, E. M. F. Curado, and W. A. M. Morgado, “Multifractality of Ising models on hierarchical lattices: pure and spin glass cases,” *Physica A*, vol. 185, pp. 271–277, 1992.
- [34] E. Nogueira Jr., S. Coutinho, F. D. Nobre, E. M. F. Curado, and J. R. L. de Almeida, “Short-range Ising spin glass: Multifractal properties,” *Phys. Rev. E*, vol. 55, pp. 3934–3941, 1997.
- [35] E. Nogueira Jr., S. Coutinho, F. D. Nobre, and E. M. F. Curado, “Short-range Ising spin glasses: a critical exponent study,” *Physica A*, vol. 257, pp. 365–370, 1998.
- [36] F. D. Nobre, “Real-space renormalization-group approaches for two-dimensional Gaussian Ising spin glass,” *Phys. Lett. A*, vol. 250, pp. 163–169, 1998.

- [37] E. M. F. Curado, F. D. Nobre, and S. Coutinho, “Ground-state degeneracies of Ising spin glasses on diamond hierarchical lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 60, pp. 3761–3770, 1999.
- [38] E. Nogueira Jr., S. Coutinho, F. D. Nobre, and E. M. F. Curado, “Universality in short-range Ising spin glasses,” *Physica A*, vol. 271, pp. 125 – 132, 1999.
- [39] O. R. Salmon and F. D. Nobre, “Spin-glass attractor on tridimensional hierarchical lattices in the presence of an external magnetic field,” *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 051122, 2009.
- [40] T. Jörg and F. Krzakala, “The nature of the different zero-temperature phases in discrete two-dimensional spin glasses: entropy, universality, chaos and cascades in the renormalization group flow,” *J. Stat. Mech.*, p. L01001, 2012.
- [41] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics - Approaching a Complex World*. Springer, 2009.
- [42] C. Forbes, M. Evans, N. Hastings, and B. Peacock, *Statistical Distributions*. John Wiley & Sons, 2011.
- [43] W. A. M. Morgado, S. Coutinho, and E. M. F. Curado, “Multifractal magnetization on hierarchical lattices,” *J. Stat. Phys.*, vol. 61, pp. 913–921, 1990.
- [44] L. P. Kadanoff, “Notes on Migdal’s recursion formulas,” *Ann. Phys.*, vol. 100, pp. 359–394, 1976.
- [45] A. A. Migdal, “Phase transitions in gauge and spin-lattice systems,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 42, pp. 743–746, 1976.
- [46] C. Tsallis and A. de Magalhães, “Pure and random Potts-like models: Real-space renormalization-group approach,” *Phys. Rep.*, vol. 268, pp. 305 – 430, 1996.

- [47] O. R. Salmon, B. T. Agostini, and F. D. Nobre, “Ising spin glasses on Wheatstone–Bridge hierarchical lattices,” *Phys. Lett. A*, vol. 374, pp. 1631–1635, 2010.
- [48] M. Kaufman and R. B. Griffiths, “Exactly soluble Ising models on hierarchical lattices,” *Phys. Rev. B*, vol. 24, pp. 496–498, 1981.
- [49] A. N. Berker and S. Ostlund, “Renormalisation-group calculations of finite systems: Order parameter and specific heat for epitaxial ordering,” *J. Phys. C*, vol. 12, pp. 4961–4975, 1979.
- [50] R. B. Griffiths and M. Kaufman, “Spin systems on hierarchical lattices. Introduction and thermodynamic limit,” *Phys. Rev. B*, vol. 26, pp. 5022–5032, 1982.
- [51] J. R. Melrose, “The Migdal-Kadanoff approximation: optimisation, generalisation, Ising model in external fields and the Migdal-Kadanoff hierarchies,” *J. Phys. A*, vol. 16, pp. 1041–1066, 1983.
- [52] J. R. Melrose, “Duality on planar fractal and hierarchical lattices,” *J. Phys. A*, vol. 16, pp. L407–L411, 1983.
- [53] J. R. Melrose, “Hierarchical lattices: Some examples with a comparison of intrinsic dimension and connectivity and Ising model exponents,” *J. Phys. A*, vol. 16, pp. 3077–3083, 1983.
- [54] M. Kaufman and R. B. Griffiths, “Spin systems on hierarchical lattices. ii. some examples of soluble models,” *Phys. Rev. B*, vol. 30, pp. 244–249, 1984.
- [55] B. Hu, “Problem of universality in phase transitions on hierarchical lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 2316–2319, 1985.
- [56] C. Tsallis, “On the hierarchical lattices approximation of Bravais lattices: Specific heat and correlation length,” *J. Phys. C*, vol. 18, pp. 6581–6587, 1985.

- [57] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture,” *Phys. Rev. B*, vol. 4, pp. 3174–3183, 1971.
- [58] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion,” *Phys. Rep.*, vol. 12, pp. 75–199, 1974.
- [59] D. J. Wallace and R. K. P. Zia, “The renormalisation group approach to scaling in physics,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 41, pp. 1–85, 1978.
- [60] B. Hu, “Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena,” *Phys. Rep.*, vol. 91, pp. 233–295, 1982.
- [61] J. R. Banavar and A. J. Bray, “Heisenberg and Potts spin glasses: A renormalization-group study,” *Phys. Rev. B*, vol. 38, pp. 2564–2569, 1988.
- [62] M. Nifle and H. J. Hilhorst, “New critical-point exponent and new scaling laws for short-range Ising spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 2992–2995, 1992.
- [63] M. A. Moore, H. Bokil, and B. Drossel, “Evidence for the Droplet picture of spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 4252–4255, 1998.
- [64] B. Drossel, H. Bokil, M. A. Moore, and A. J. Bray, “The link overlap and finite size effects for the 3D Ising spin glass,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 13, pp. 369–375, 2000.
- [65] F. D. Nobre, “On the universal behavior of two-dimensional Ising spin glasses,” *Physica A*, vol. 280, pp. 456–464, 2000.
- [66] F. D. Nobre, “Phase diagram of the two-dimensional  $\pm J$  Ising spin glass,” *Phys. Rev. E*, vol. 64, p. 046108, 2001.
- [67] F. D. Nobre, “The two-dimensional  $\pm J$  Ising spin glass: a model at its lower critical dimension,” *Physica A*, vol. 319, pp. 362 – 370, 2003.

- [68] T. Jörg and H. G. Katzgraber, “Evidence for universal scaling in the spin-glass phase,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 197205, 2008.
- [69] M. Ohzeki, H. Nishimori, and A. N. Berker, “Multicritical points for spin-glass models on hierarchical lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, p. 061116, 2008.
- [70] S. T. O. Almeida, E. M. F. Curado, and F. D. Nobre, “Chaos and stiffness exponents for short-range Gaussian Ising spin glasses,” *J. Stat. Mech.*, p. P06013, 2013.
- [71] F. Antenucci, A. Crisanti, and L. Leuzzi, “Critical study of hierarchical lattice renormalization group in magnetic ordered and quenched disordered systems: Ising and Blume–Emery–Griffiths models,” *J. Stat. Phys.*, vol. 155, pp. 909–931, 2014.
- [72] H. Maletta and P. Convert, “Onset of ferromagnetism in  $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$  near  $x = 0.5$ ,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, pp. 108–111, 1979.
- [73] S. Crane and H. Claus, “Disappearance of ferromagnetic order in Au-Fe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, pp. 1693–1695, 1981.
- [74] I. Kondor, “On chaos in spin glasses,” *J. Phys. A*, vol. 22, pp. L163–L168, 1989.
- [75] S. Franz and M. Ney-Nifle, “On chaos in mean-field spin glasses,” *J. Phys. A*, vol. 28, pp. 2499–2513, 1995.
- [76] A. Billoire and E. Marinari, “Overlap among states at different temperatures in the SK model,” *EPL*, vol. 60, pp. 775–781, 2002.
- [77] T. Rizzo and A. Crisanti, “Chaos in temperature in the Sherrington-Kirkpatrick model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 137201, 2003.
- [78] G. Parisi and T. Rizzo, “Chaos in temperature in diluted mean-field spin-glass,” *J. Phys. A*, vol. 43, p. 235003, 2010.

- [79] A. J. Bray and M. A. Moore, “Chaotic nature of the spin-glass phase,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 57–60, 1987.
- [80] H. G. Katzgraber and F. Krzakala, “Temperature and disorder chaos in three-dimensional Ising spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 017201, 2007.
- [81] F. Krzakala and O. Martin, “Chaotic temperature dependence in a model of spin glasses,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 28, pp. 199–208, 2002.
- [82] A. Billoire and E. Marinari, “Evidence against temperature chaos in mean-field and realistic spin glasses,” *J. Phys. A*, vol. 33, pp. L265–L272, 2000.
- [83] K. Jonason, E. Vincent, J. Hammann, J. P. Bouchaud, and P. Nordblad, “Memory and chaos effects in spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 3243–3246, 1998.
- [84] M. Sasaki, V. Dupuis, J.-P. Bouchaud, and E. Vincent, “Deviations from perfect memory in spin glass temperature cycling experiments,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 29, pp. 469–479, 2002.
- [85] M. Ney-Nifle and H. Hilhorst, “Chaos exponents in spin glasses,” *Physica A*, vol. 193, pp. 48–78, 1993.
- [86] M. Ney-Nifle and H. Hilhorst, “Renormalization theory and chaos exponents in random systems,” *Physica A*, vol. 194, pp. 462 – 470, 1993.
- [87] T. Aspelmeier, A. J. Bray, and M. A. Moore, “Why temperature chaos in spin glasses is hard to observe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 197202, 2002.
- [88] M. Sasaki and O. Martin, “Temperature chaos, rejuvenation, and memory in Migdal-Kadanoff spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 097201, 2003.
- [89] F. Krzakala, “On temperature chaos in Ising and XY spin glasses,” *EPL*, vol. 66, pp. 847–853, 2004.

- [90] S. T. O. Almeida, “Comportamento caótico na fase vidro de spins em redes fractais,” Master’s thesis, CBPF, 2009.
- [91] A. J. Bray and M. A. Moore, “Lower critical dimension of Ising spin glasses: a numerical study,” *J. Phys. C*, vol. 17, pp. L463–L468, 1984.
- [92] W. L. McMillan, “Domain-wall renormalization-group study of the two-dimensional random Ising model,” *Phys. Rev. B*, vol. 29, pp. 4026–4029, 1984.
- [93] A. K. Hartmann, A. J. Bray, A. C. Carter, M. A. Moore, and A. P. Young, “Stiffness exponent of two-dimensional Ising spin glasses for nonperiodic boundary conditions using aspect-ratio scaling,” *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 224401, 2002.
- [94] W. L. McMillan, “Domain-wall renormalization-group study of the three-dimensional random Ising model,” *Phys. Rev. B*, vol. 30, pp. 476–477, 1984.
- [95] S. Boettcher, “Stiffness of the Edwards-Anderson model in all dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 197205, 2005.
- [96] Y. Imry and S.-k. Ma, “Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 1399–1401, 1975.
- [97] D. A. Huse, “Monte carlo simulation study of domain growth in an Ising spin glass,” *Phys. Rev. B*, vol. 43, pp. 8673–8675, 1991.
- [98] M. Palassini and A. P. Young, “Triviality of the ground state structure in Ising spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 5126–5129, 1999.
- [99] M. Palassini and A. P. Young, “Nature of the Spin Glass State,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3017–3020, 2000.
- [100] H. G. Katzgraber, M. Palassini, and A. P. Young, “Monte carlo simulations of spin glasses at low temperatures,” *Phys. Rev. B*, vol. 63, p. 184422, 2001.

- [101] A. C. Carter, A. J. Bray, and M. A. Moore, “Aspect-ratio scaling and the stiffness exponent  $\theta$  for Ising spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 077201, 2002.
- [102] S. Boettcher, “Stiffness exponents for lattice spin glasses in dimensions  $d = 3, \dots, 6$ ,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 38, pp. 83–91, 2004.
- [103] F. Krzakala and J.-P. Bouchaud, “Disorder chaos in spin glasses,” *EPL*, vol. 72, pp. 472–478, 2005.
- [104] F. Krzakala and O. C. Martin, “Spin and link overlaps in three-dimensional spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3013–3016, 2000.
- [105] H. G. Katzgraber and A. P. Young, “Monte carlo simulations of spin glasses at low temperatures: Effects of free boundary conditions,” *Phys. Rev. B*, vol. 65, p. 214402, 2002.
- [106] H. G. Katzgraber, M. Körner, and A. P. Young, “Universality in three-dimensional Ising spin glasses: A Monte Carlo study,” *Phys. Rev. B*, vol. 73, p. 224432, 2006.
- [107] S. T. O. Almeida and F. D. Nobre, “Fixed-point distributions of short-range Ising spin glasses on hierarchical lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, p. 032138, 2015.
- [108] O. D. Neto, *Vidros-de-Spins em Redes Hierárquicas: Aspectos Configuracionais, Críticos e Multifractais*. PhD thesis, UFPE, 1999.
- [109] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza, and R. Maynard, “Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 3589–3593, 1995.
- [110] K. Krishnamoorthy, *Handbook of Statistical Distributions with Applications*. Statistics: A Series of Textbooks and Monographs, CRC Press, 2006.

- [111] K. Jacobs, *Stochastic Processes for Physicists: Understanding Noisy Systems*. Cambridge University Press, 2010.
- [112] J. Moré, “The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory,” in *Numerical Analysis* (G. Watson, ed.), vol. 630 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 105–116, Springer Berlin Heidelberg, 1978.
- [113] M. Baity-Jesi, R. A. Baños, A. Cruz, L. A. Fernandez, J. M. Gil-Narvion, A. Gordillo-Guerrero, D. Iñiguez, A. Maiorano, F. Mantovani, E. Marinari, V. Martin-Mayor, J. Monforte-Garcia, A. M. n. Sudupe, D. Navarro, G. Parisi, S. Perez-Gaviro, M. Pivanti, F. Ricci-Tersenghi, J. J. Ruiz-Lorenzo, S. F. Schifano, B. Seoane, A. Tarancon, R. Tripicciono, and D. Yllanes, “Critical parameters of the three-dimensional Ising spin glass,” *Phys. Rev. B*, vol. 88, p. 224416, 2013.
- [114] J. Machta and M. S. Cao, “Differential Migdal-Kadanoff renormalization group for disordered systems,” *J. Phys. A*, vol. 25, pp. 529–541, 1992.
- [115] R. S. Júnior and F. D. Nobre, “A Migdal-Kadanoff renormalization-group approach for the XY spin glass,” *Z. Phys. B*, vol. 101, pp. 455 – 460, 1996.
- [116] M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, “The critical behavior of 3D Ising spin glass models: universality and scaling corrections,” *J. Stat. Mech.*, p. L02001, 2008.
- [117] M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, “Critical behavior of three-dimensional Ising spin glass models,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 214205, 2008.
- [118] T. Jörg and H. G. Katzgraber, “Universality and universal finite-size scaling functions in four-dimensional Ising spin glasses,” *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 214426, 2008.
- [119] J. R. L. de Almeida, “Perturbation study of the linear renormalization group for spin glasses,” *J. Phys. A*, vol. 26, pp. 193–200, 1993.

- [120] L. da Silva, E. M. F. Curado, S. Coutinho, and W. A. M. Morgado, “Criticality and multifractality of the Potts ferromagnetic model on fractal lattices,” *Phys. Rev. B*, vol. 53, pp. 6345–6354, 1996.
- [121] A. Rosas and S. Coutinho, “Random-field Ising model on hierarchical lattices: thermodynamics and ground-state critical properties,” *Physica A*, vol. 335, pp. 115 – 142, 2004.
- [122] K. H. Fischer and J. A. Hertz, *Spin Glasses*. Cambridge University Press, 1993.
- [123] C. Domb and J. L. Lebowitz, eds., *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 8. Academic Press, 1983.
- [124] O. Melchert, “autoscale.py - a program for automatic finite-size scaling analyses: A user’s guide,” *arXiv:0910.5403*, 2009.
- [125] E. Marinari, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, “Phase structure of the three-dimensional Edwards-Anderson spin glass,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 14852–14863, 1998.
- [126] T. Taniguchi, H. Matsuyama, S. Chikazawa, and Y. Miyako, “Linear and non-linear susceptibilities in canonical spin glass AuFe (1.5 at. %Fe),” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 52, pp. 4323–4330, 1983.
- [127] L. Klein, J. Adler, A. Aharony, A. B. Harris, and Y. Meir, “Series expansions for the Ising spin glass in general dimension,” *Phys. Rev. B*, vol. 43, pp. 11249–11273, 1991.
- [128] J. A. Redinz and A. C. N. de Magalhães, “Ising ferromagnet on a fractal family: Thermodynamical functions and scaling laws,” *Phys. Rev. B*, vol. 51, pp. 2930–2936, 1995.

- [129] J. A. Redinz, A. C. N. de Magalhães, and E. M. F. Curado, “Potts antiferromagnetic model on a family of fractal lattices: Exact results for an unusual phase,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, pp. 6689–6697, 1994.
- [130] J. A. Redinz, “Ising ferromagnet in fractal lattices: analytical verification of the hyperscaling law,” *J. Phys. A*, vol. 31, pp. 6921–6927, 1998.
- [131] E. Nogueira Jr., R. Andrade, and S. Coutinho, “Multifractal properties of aperiodic Ising model on hierarchical lattices: role of the geometric fluctuations,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 23, pp. 373–382, 2001.
- [132] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2013.
- [133] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman, “Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets,” *Phys. Rev. A*, vol. 33, pp. 1141–1151, 1986.
- [134] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific, 2 ed., 1992.
- [135] B. Mandelbrot, “Multifractal measures, especially for the geophysicist,” *PAGEOPH*, vol. 131, pp. 5–42, 1989.
- [136] H. Hentschel and I. Procaccia, “The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors,” *Physica D*, vol. 8, pp. 435 – 444, 1983.
- [137] A. Chhabra and R. V. Jensen, “Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, pp. 1327–1330, 1989.
- [138] D. Veneziano, G. E. Moglen, and R. L. Bras, “Multifractal analysis: Pitfalls of standard procedures and alternatives,” *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 1387–1398, 1995.