

TESE DE MESTRADO

Aspectos Peculiares da
Quiralidade e da Propagação de
Férmions em Teorias com
Derivadas Superiores

José Luis Chauca Murga

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

CBPF/MCT. Rio de Janeiro - 2005.

Conteúdo

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
Introdução	1
1 Quiralidade e propagação na equação de Dirac com derivadas superiores	5
1.1 Solução para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = \Psi_1(x; t)$	10
1.2 Solução para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = \Psi_2(x; t)$	12
1.3 Relação entre as soluções $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ e $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$	15
2 Estudo dos efeitos do operador \square^2	19
2.1 Solução para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = \Psi_1(x; t)$	23

2.2	Solução para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = \Psi_2(x; t)$	31
2.3	Simplificação das soluções e comprovação da independência com respeito ao parâmetro a	36
2.4	Verificação das soluções	40
3	Discussão e comparação dos modos de propagação	47
3.1	Comparações gerais	49
3.2	Comparação de três casos	51
3.3	Comparação de dois casos	59
3.4	Outra comparação de dois casos	67
	Conclusões	76
	A Método de D'Alembert para a equação da corda	78
	B Algumas identidades úteis de análise matemática	81
	C Código em Maple	83
	Bibliografia	84

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao Professor José. A. Helayël-Neto, por aceitar orientar esta tese com toda a atenção e paciência. Por toda ajuda, principalmente nos momentos em que me encontrava atrapalhado e sem conseguir avançar em nada. Espero que este trabalho, ainda que modesto mas interessante, possa servir como motivação para outros trabalhos.

Também, quero agradecer a todos os professores e colegas que, de alguma forma, me ajudaram em minha formação e preparação, permitindo que agora eu tenha mais confiança e determinação, assim como humildade o bastante para encarar o vasto, complexo, porém fascinante, mundo da Física.

Agradeço também a todo o pessoal do CBPF, CCP, CFC, CAT e, em particular da Biblioteca por toda atenção e carinho.

Aos meus amigos e colegas, por terem compartilhado seu valioso tempo comigo, trocando idéias e, em muitas oportunidades, me ajudando. Deixo um agradecimento particular aos amigos de várias nacionalidades que tive a oportunidade de conhecer nessa linda e progressista cidade do Rio de Janeiro.

Igualmente agradeço ao CNPq pela valiosa bolsa de estudo. Ao povo brasileiro, por levar no sangue essa contagiante alegria e cordialidade.

Finalmente, quero agradecer à minha família pelo apoio moral e material e lhe dedico esta tese com muito afeto.

Resumo

Este trabalho esclarece, através da obtenção de soluções exatas para condições de contorno gerais, a quebra da relação entre quiralidade (conceito de natureza algébrica) e sentido de propagação (propriedade de origem cinemática) para férmions governados por equações de campo do tipo-Dirac com derivadas superiores.

Abstract

The main goal of the work presented in this thesis is to clarify the breakdown of the association between chirality and left/right-propagation modes, typical of 2D fermionic theories, once higher-derivative operators are present. The issue is discussed by means of exact solutions for the field equations worked out under general boundary conditions.

Lista de Figuras

3.1	Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1 ^a linha para Ψ_{A1} , Ψ_{A2} ; 2 ^a linha para Ψ_{B1} , Ψ_{B2} ; 3 ^a linha para Ψ_{C1} , Ψ_{C2}	52
3.2	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 0$	52
3.3	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 1$	53
3.4	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 2$	53
3.5	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 3$	54
3.6	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 4$	54
3.7	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 5$	55
3.8	$\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}$, $t = 15$	55
3.9	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 0$	56
3.10	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 1$	56
3.11	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 2$	57
3.12	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 3$	57
3.13	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 4$	58
3.14	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}$, $t = 5$	58

3.15	$\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 15$	59
3.16	Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1 ^a linha para Ψ_{B1} , Ψ_{B2} ; 2 ^a linha para Ψ_{C1}, Ψ_{C2}	60
3.17	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 0$	60
3.18	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 1$	61
3.19	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 2$	61
3.20	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 3$	62
3.21	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 4$	62
3.22	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 5$	63
3.23	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 15$	63
3.24	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 0$	64
3.25	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 1$	64
3.26	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 2$	65
3.27	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 3$	65
3.28	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 4$	66
3.29	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 5$	66
3.30	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, \quad t = 15$	67
3.31	Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1 ^a linha para Ψ_{B1} , Ψ_{B2} ; 2 ^a linha para Ψ_{C1}, Ψ_{C2}	68
3.32	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 0$	68
3.33	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, \quad t = 1$	69

3.34	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 2$	69
3.35	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 3$	70
3.36	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 4$	70
3.37	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 5$	71
3.38	$\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 15$	71
3.39	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 0$	72
3.40	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 1$	72
3.41	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 2$	73
3.42	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 3$	73
3.43	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 4$	74
3.44	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 5$	74
3.45	$\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 15$	75

Introdução

Sabe-se que a maior parte dos sistemas físicos descritos por funções Lagrangeanas não incluem outras derivadas que as de primeira ordem nas variáveis dinâmicas. Isto acontece principalmente porque nas teorias com derivadas superiores (derivadas temporais de terceira ordem ou maiores nas equações de movimento, derivadas temporais de segunda ordem ou maiores no Lagrangeano), tanto ao nível clássico quanto ao nível quântico, não se tem um limite inferior para a energia [1]. Além disso, as teorias quânticas de campo que contêm derivadas das funções do campo superiores à primeira ordem geralmente apresentam estados-fantasma, com norma negativa, e, como consequência, paga-se o preço da violação da unitariedade [2, 3, 4, 5].

Porém, a utilização das derivadas superiores tem algumas propriedades atrativas no contexto da teoria quântica de campos; em particular, a convergência dos diagramas de Feynman é aprimorada. É assim que teorias de calibre com derivadas superiores [6, 7, 8, 9] e modelos da gravitação com correções quadráticas e ainda de ordens maiores à curvatura, na ação de Einstein- Hilbert [10, 11, 12, 13, 14], têm sido consideradas. Estas teorias são descritas por Lagrangeanos singulares ou

degenerados com derivadas superiores. Tais Lagrangeanos foram usados também em alguns modelos de cordas [15, 16].

Além dos já mencionados anteriormente, outros sistemas físicos cujas equações contêm derivadas superiores à segunda ordem aparecem numa diversidade de contextos [17]. Por exemplo, na mecânica clássica, a equação de Korteweg-de Vries, que descreve ondas superficiais de água, faz uso de derivadas de terceira ordem [18]. Nas teorias de gravitação clássica, as derivadas de ordens superiores a dois foram introduzidas por Weyl [19] e usadas também em alguns modelos cosmológicos [20, 21]. Em gravitação quântica, existem modelos com derivadas superiores que resultaram ser renormalizáveis [22] e livres assintoticamente [23]. Em física de partículas, os modelos de Nambu-Jona-Lasinio [24], Schwinger [25] e Skyrme [26, 27] incluem termos com derivadas superiores. Também, há trabalhos onde as derivadas superiores são consideradas no formalismo canônico em teorias de campo [28, 29, 30], em aspectos de simetrias e leis de conservação [31, 32, 33, 34], num princípio de ação [35], num modelo de Eletrodinâmica [8] e de Eletrodinâmica Quântica [36], em modelos fermiônicos [37, 38] e bosônicos [39], em aplicações na supersimetria [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46], na cosmologia [47, 48, 49, 50], em teorias de gravitação [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61], em modelos com Lagrangeanos efetivos [62, 46] (onde os problemas comuns das teorias com derivadas superiores, tais como graus de liberdade adicionais, energia sem limite inferior, etc., não aparecem porque as equações de movimento podem ser usadas para eliminar todas as derivadas tem-

porais de ordens superiores do termo de interação efetiva), usadas também como mecanismos de renormalização e regula-rização [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 42, 43], incluídas em modelos com integrais de caminho [72], em modelos-sigma [73, 74, 44, 45], em teorias de cordas cósmicas [75, 76, 77] e outros trabalhos. Vale observar que muitos destes temas justapõem-se em torno da utilização das derivadas superiores, e tudo isso dá-nos uma boa idéia da utilidade e versatilidade das derivadas superiores nos modelos físicos e físico-matemáticos, apesar dos possíveis inconvenientes mencionados anteriormente.

O tema de nosso trabalho é baseado numa Tese de Mestrado anterior [78] que aborda, entre outras coisas, a resolução de certas equações de onda com derivadas superiores, implementadas mediante fatores D'Alembertianos, em $(1+1)$ dimensões, pois neste caso é possível resolver exatamente as equações [79]. Vamos estudar o comportamento da quiralidade e dos modos de propagação de um modelo fermiônico $(1+1)$ -dimensional, não-massivo, e analisar o efeito da utilização das derivadas superiores, neste caso, também, na forma de fatores D'Alembertianos. No Capítulo 1, começamos considerando o caso simples da equação de Dirac em $(1+1)$ dimensões, para uma partícula sem massa, onde os setores da quiralidade se correspondem biunivocamente com os modos de propagação. Inserimos, então, um fator D'Alembertiano, e resolvemos a equação resultante mediante o método de D'Alembert (transformando a equação espinorial original em dois sistemas não-acoplados de equações diferenciais de terceira ordem, que logo resolvemos usando

técnicas de álgebra e análise matemática), obtendo a solução geral em função das condições iniciais, e vemos que se produz a quebra na correspondência biunívoca entre os sectores da quiralidade e os modos de propagação. No Capítulo 2, procedemos similarmente, só que agora inserimos um fator D'Alembertiano quadrático, obtendo um sistema de equações de quinta ordem nas derivadas, que resolvemos detalhadamente, usando o mesmo procedimento que no capítulo precedente. Obtém-se, também, a solução geral em função das condições iniciais, e percebe-se um maior grau de complexidade na quebra da correspondência biunívoca entre os setores de quiralidade e os modos de propagação. No Capítulo 3, analisamos com mais detalhe as soluções consideradas nos capítulos precedentes, fazendo as comparações correspondentes que subsidiam as Conclusões, que apresentamos no capítulo final. Seguem-se os Apêndices A e B, com resultados auxiliares à leitura dos capítulos desta tese.

Capítulo 1

Quiralidade e propagação na equação de Dirac com derivadas superiores

Para começar a desenvolver o tema do presente capítulo, que continuaremos no seguinte, consideremos primeiro o caso simples de uma uma partícula sem massa, em (1+1) dimensões, descrita pela equação de Dirac usual (com $\hbar = c = 1$):

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x; t) = 0. \tag{1.1}$$

Agora, usando a representação para as matrizes γ^μ :

$$\gamma^0 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

e supondo que o espinor Ψ é da forma:

$$\Psi(x; t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x; t) \\ \Psi_2(x; t) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t \quad (1.4)$$

mediante o uso da Regra da Cadeia para esta mudança de variáveis, o que caracteriza o método de D'Alembert (denominado assim por ser similar ao método usado no Apêndice A para resolver a equação da corda, obtendo-se a solução geral conhecida como *fórmula de D'Alembert*), a equação (1.1) transforma-se na seguinte equação:

$$-2 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) \end{pmatrix} = 0.$$

Então, supondo a condição inicial

$$\Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

obtemos, por simples inspeção, a solução mais geral para (1.1):

$$\tilde{\Psi}(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\eta) \end{pmatrix} = \Psi(x, t) = \begin{pmatrix} A(x - t) \\ B(x + t) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

A este ponto, cabe esclarecermos a relação que queremos discutir entre as componentes de quiralidade e os modos de propagação do férmion.

Com a escolha adotada de representação para as matrizes- γ^μ (a norma é a representação de Weyl em (1+1) dimensões), o operador de quiralidade resulta em:

$$\gamma_3 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_z. \quad (1.7)$$

Assim, os projetores

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma_3}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1 - \gamma_3}{2}, \quad (1.8)$$

indicam que Ψ_1 corresponde à quiralidade “left” e Ψ_2 à quiralidade “right”, respectivamente. O que pretendemos, agora, é relacionar este conceito meramente algébrico das representações espinoriais das álgebras de Clifford a uma informação de natureza cinemática: os modos de propagação para a direita ($\xi \equiv x - t$) e para a esquerda ($\eta \equiv x + t$), conceito, aliás, invariante de Lorentz exclusivamente em 2 dimensões.

A partir das transformações de Lorentz em (1+1) dimensões, chega-se a:

$$\xi' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \xi, \quad \eta' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \eta, \quad (1.9)$$

onde β é a velocidade relativa.

O que resulta dado na solução (1.6) da equação de Dirac é que o férmion com quiralidade “left” propaga-se sempre para a direita, $\Psi_1 = A(x - t)$, enquanto que a correspondente quiral “right” propaga-se exclusivamente para a esquerda, $\Psi_2 = B(x + t)$. Estas são afirmações invariantes de Lorentz e muito usadas em vários estudos ligados ao estudo das teorias de cordas, em cujo contexto é muito relevante o estudo da teoria de campos definida sobre a superfície-mundo que uma corda

define.

O que pretendemos ao longo do prosequimento desta tese é analisar o quanto a introdução de derivadas superiores na equação de Dirac em (1+1) dimensões afeta a relação entre quiralidade e modos de propagação.

Agora vamos considerar o caso de uma equação de Dirac com derivadas superiores, resultado de agregar um fator D'Alembertiano de primeiro grau:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \square \Psi(x; t) = 0 \quad (1.10)$$

Logo, usando as mesmas notações que no caso anterior, contidas nas equações (1.3)

e (1.4), mediante a Regra da Cadeia, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x; t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x; t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x; t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta). \quad (1.14)$$

E também:

$$\square \Psi(x; t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x; t) = -4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta). \quad (1.15)$$

Agora, usando a representação (1.2) para as matrizes- γ^μ conjuntamente com as equações (1.11), (1.12), e (1.15), a equação original (1.10) transforma-se em:

$$-4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) \end{pmatrix} = 0.$$

Deste modo, (1.10) equivale ao seguinte par de equações não-acopladas:

$$\frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = 0, \quad (1.17)$$

cujas soluções mais gerais são:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) \quad (1.18)$$

e

$$\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta) \quad (1.19)$$

Agora, vamos impor as condições iniciais que determinarão f_i, g_i, h_i , $i = 1, 2$:

$$\Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} H(x) \\ J(x) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Então, usando estas condições iniciais nas equações (1.3), (1.11) e (1.13), obtemos:

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) + g_1(x) + x h_1(x) \\ f_2(x) + g_2(x) + x h_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\begin{pmatrix} H(x) \\ J(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) - xh_1'(x) \\ -f_2'(x) + g_2'(x) - h_2(x) + xh_2'(x) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1''(x) + g_1''(x) - 2h_1'(x) + xh_1''(x) \\ f_2''(x) + g_2''(x) - 2h_2'(x) + xh_2''(x) \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

1.1 Solução para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = \Psi_1(x; t)$

Das primeiras componentes das equações(1.23), (1.24) e (1.25), temos:

$$F(x) = f_1(x) + g_1(x) + xh_1(x) \quad (1.26)$$

$$H(x) = -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) - xh_1'(x) \quad (1.27)$$

$$R(x) = f_1''(x) + g_1''(x) - 2h_1'(x) + xh_1''(x). \quad (1.28)$$

Isolando $f_1(x)$ em (1.26) e logo diferenciando uma e duas vezes, chega-se a:

$$f_1(x) = F(x) - g_1(x) - xh_1(x) \quad (1.29)$$

$$f_1'(x) = F'(x) - g_1'(x) - h_1(x) - xh_1'(x) \quad (1.30)$$

$$f_1''(x) = F''(x) - g_1''(x) - 2h_1'(x) - xh_1''(x). \quad (1.31)$$

Substituindo (1.31) em (1.28):

$$h_1'(x) = \frac{1}{4}F''(x) - \frac{1}{4}R(x).$$

Logo, integrando esta equação, temos:

$$h_1(x) = \frac{1}{4}F'(x) - \frac{1}{4} \int_a^x dy R(y) + C_1. \quad (1.32)$$

Substituindo (1.30) em (1.27):

$$g_1'(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}H(x) - h_1(x). \quad (1.33)$$

Agora, substituindo (1.32) em (1.33):

$$g_1'(x) = \frac{1}{4}F'(x) + \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{4} \int_a^x dy R(y) - C_1.$$

Integrando:

$$g_1(x) = \frac{1}{4}F(x) + \frac{1}{2} \int_a^x dy H(y) + \frac{1}{4} \int_a^x dy \int_a^y dz R(z) - C_1 x + C_2. \quad (1.34)$$

Logo, substituindo (1.34) e (1.32) em (1.29), determinamos $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{3}{4}F(x) - \frac{1}{4}xF'(x) - \frac{1}{2} \int_a^x dy H(y) + \frac{1}{4}x \int_a^x dy R(y) \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_a^x dy \int_a^y dz R(z) - C_2. \end{aligned}$$

Substituindo esta equação junto com (1.34) e (1.32) em (1.18), e simplificando:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) &= \frac{3}{4}F(\xi) + \frac{1}{4}F(\eta) - \frac{1}{4}(\xi - \eta)F'(\xi) + \frac{1}{2} \int_\xi^\eta dy H(y) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\xi - \eta) \int_a^\xi dy R(y) + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz R(z). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}(\xi - \eta) \int_a^\xi dy R(y) + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz R(z) \\
&= \frac{1}{4} \left(- \int_\xi^\eta dy \right) \int_a^\xi dz R(z) + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz R(z) \\
&= -\frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^\xi dz R(z) + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz R(z) \\
&= \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_\xi^a dz R(z) + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz R(z) \\
&= \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \left[\int_\xi^a dz R(z) + \int_a^y dz R(z) \right] \\
&= \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz R(z).
\end{aligned}$$

Então, finalmente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) &= \frac{3}{4}F(\xi) + \frac{1}{4}F(\eta) - \frac{1}{4}(\xi - \eta)F'(\xi) + \frac{1}{2} \int_\xi^\eta dy H(y) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz R(z).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

1.2 Solução para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = \Psi_2(x; t)$

Das segundas componentes das equações (1.23), (1.24) e (1.25), temos o seguinte conjunto de três equações:

$$G(x) = f_2(x) + g_2(x) + xh_2(x) \tag{1.36}$$

$$J(x) = -f_2'(x) + g_2'(x) - h_2(x) + xh_2'(x) \tag{1.37}$$

$$S(x) = f_2''(x) + g_2''(x) - 2h_2'(x) + xh_2''(x). \tag{1.38}$$

Agora, isolando $g_2(x)$ em (1.36), e diferenciando uma e duas vezes, ontém-se:

$$g_2(x) = G(x) - f_2(x) - xh_2(x) \quad (1.39)$$

$$g_2'(x) = G'(x) - f_2'(x) - h_2(x) - xh_2'(x) \quad (1.40)$$

$$g_2''(x) = G''(x) - f_2''(x) - 2h_2'(x) - xh_2''(x). \quad (1.41)$$

Substituindo (1.41) em (1.38), e isolando $h_2'(x)$ obtemos:

$$h_2'(x) = \frac{1}{4} G''(x) - \frac{1}{4} S(x).$$

Então, integrando esta equação:

$$h_2(x) = \frac{1}{4} G'(x) - \frac{1}{4} \int_a^x dy S(y) + C_1. \quad (1.42)$$

Também, substituindo (1.40) em (1.37) e isolando $f_2'(x)$, temos:

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} G'(x) - \frac{1}{2} J(x) - h_2(x). \quad (1.43)$$

Agora, substituindo (1.42) em (1.43), e simplificando:

$$f_2'(x) = \frac{1}{4} G'(x) - \frac{1}{2} J(x) + \frac{1}{4} \int_a^x dy S(y) - C_1.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{4} G(x) - \frac{1}{2} \int_a^x dy J(y) + \frac{1}{4} \int_a^x dy \int_a^y dz S(z) \\ &\quad - C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Logo, substituindo (1.44) e (1.42) em (1.39), obtemos:

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= \frac{3}{4}G(x) - \frac{1}{4}xG'(x) + \frac{1}{2}\int_a^x dy J(y) + \frac{1}{4}x\int_a^x dy S(y) \\
&\quad - \frac{1}{4}\int_a^x dy \int_a^y dz S(z) - C_1 x - C_2.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Agora, usando as equações (1.44), (1.45) e (1.42) na equação (1.19), e simplificando:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi - \eta)G'(\eta) + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta dy J(y) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\xi - \eta)\int_a^\eta dy S(y) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^y dz S(z).
\end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}(\xi - \eta)\int_a^\eta dy S(y) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^y dz S(z) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_\xi^\eta dy\right)\int_a^\eta dz S(z) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^y dz S(z) \\
&= \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^\eta dz S(z) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^y dz S(z) \\
&= -\frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_\eta^a dz S(z) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_a^y dz S(z) \\
&= -\frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \left[\int_\eta^a dz S(z) + \int_a^y dz S(z) \right] \\
&= -\frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_\eta^y dz S(z).
\end{aligned}$$

Então, obtemos, finalmente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi - \eta)G'(\eta) + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta dy J(y) \\
&\quad - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_\eta^y dz S(z).
\end{aligned} \tag{1.46}$$

1.3 Relação entre as soluções $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ e $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$

Entre as soluções para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ e $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, dadas pelas equações (1.35) e (1.46), existe uma espécie de “dualidade” no sentido que explicamos a seguir. Se na expressão para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, que depende das funções de uma variável, F, H e R , fizermos as transformações:

$$\xi \mapsto \eta, \quad \eta \mapsto \xi, \quad F \mapsto G, \quad H \mapsto -J, \quad R \mapsto S \quad (1.47)$$

então, vamos obter uma nova expressão, que depende das funções G, J e S , e que denotamos por $\tilde{\Psi}_1^{\mathcal{D}}(\xi; \eta)$. Concretamente, então, aplicando as transformações (1.47) sobre o lado direito da equação (1.35), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1^{\mathcal{D}}(\xi; \eta) &= \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}G(\xi) - \frac{1}{4}(\eta - \xi)G'(\eta) + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} dy[-J(y)] \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} dy \int_{\eta}^y dz S(z) \\ &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi - \eta)G'(\eta) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} dy J(y) \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz S(z). \end{aligned}$$

Comparando este resultado com a equação (1.46), vemos que:

$$\tilde{\Psi}_1^{\mathcal{D}}(\xi; \eta) = \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta).$$

Em outros termos, a partir da expressão para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, mediante as transformações (1.47), obtemos a expressão para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$.

Similarmente, podemos obter a expressão para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ a partir da expressão para

$\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, fazendo as mesmas transformações, em sentido oposto.

Agora vamos dar uma justificativa para este fato, que também será de utilidade no próximo capítulo.

Primeiro, reescrevemos as equações (1.18) e (1.19):

$$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta).$$

Aqui, observamos que, se fizermos as transformações

$$\xi \mapsto \eta, \quad \eta \mapsto \xi, \quad f_1 \mapsto g_2, \quad g_1 \mapsto f_2, \quad h_1 \mapsto h_2 \quad (1.48)$$

sobre o lado direito da primeira destas equações, resultado que denotamos por $\tilde{\Psi}_1^T(\xi; \eta)$, então, obtemos a expressão do lado direito da segunda equação:

$$\tilde{\Psi}_1^T(\xi; \eta) = g_2(\eta) + f_2(\xi) + \xi h_2(\eta) = \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta). \quad (1.49)$$

Assim, a partir da solução mais geral para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, expressa em termos de ξ , η , f_1 , g_1 , e h_1 , obtemos, mediante as transformações (1.48), a solução mais geral para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, expressa em termos de ξ , η , f_2 , g_2 , e h_2 .

Agora, reescrevemos, por comodidade na comparação a seguir, os dois sistemas independentes de equações, considerados nas seções precedentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = f_1(x) + g_1(x) + xh_1(x) \\ H(x) = -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) - xh_1'(x) \\ R(x) = f_1''(x) + g_1''(x) - 2h_1'(x) + xh_1''(x) \end{array} \right. \quad (1.50)$$

$$\begin{cases} G(x) = f_2(x) + g_2(x) + xh_2(x) \\ J(x) = -f_2'(x) + g_2'(x) - h_2(x) + xh_2'(x) \\ S(x) = f_2''(x) + g_2''(x) - 2h_2'(x) + xh_2''(x). \end{cases} \quad (1.51)$$

Então, aplicando as transformações (1.48) (considerando que quando $t = 0$, temos $\xi = \eta = x$), sobre os lados direitos do sistema de equações (1.50), que dependem de x, f_1, g_1, h_1 , obtemos três novas expressões, dependentes agora de x, f_2, g_2, h_2 , que denotamos, respectivamente, por, $F^T(x), H^T(x), R^T(x)$:

$$\begin{cases} F^T(x) = g_2(x) + f_2(x) + xh_2(x) \\ H^T(x) = -g_2'(x) + f_2'(x) + h_2(x) - xh_2'(x) \\ R^T(x) = g_2''(x) + f_2''(x) - 2h_2'(x) + xh_2''(x). \end{cases}$$

Comparando estas equações com as contidas em (1.51), obtemos:

$$F^T(x) = G(x), \quad H^T(x) = -J(x), \quad R^T(x) = S(x).$$

Em outros termos, devido a que x é uma variável arbitrária:

$$F \mapsto F^T = G, \quad H \mapsto H^T = -J, \quad R \mapsto R^T = S \quad (1.52)$$

Então, aplicar as transformações “ \mathcal{T} ”, dadas por (1.48) na solução geral para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, dada pela equação (1.18), o qual produz a solução geral para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, dada pela equação (1.19), como já observamos em (1.49), equivale completamente a fazer as transformações (1.52), juntamente com a substituições $\xi \mapsto \eta, \eta \mapsto \xi$, ou seja,

equivale completamente a fazer as transformações (1.47), sobre $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, quando ela vem dada por (1.35). Em conclusão, ficam justificadas as transformações de “dualidade”, (1.47), que permitem obter a solução $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, diretamente a partir da solução $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$.

Capítulo 2

Estudo dos efeitos do operador \square^2

Neste capítulo, continuamos o estudo da equação de Dirac com derivadas superiores, considerando, como antes, por simplicidade, uma partícula sem massa em (1+1) dimensões, porém, agregando um fator D'Alembertiano de segundo grau:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \square^2 \Psi(x; t) = 0. \quad (2.1)$$

Vamos usar a mesma representação para as matrizes- γ^μ que no capítulo anterior, $\gamma^0 = \sigma_y$, $\gamma^1 = i\sigma_x$, e também, supor que:

$$\Psi(x; t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x; t) \\ \Psi_2(x; t) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

onde:

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t. \quad (2.3)$$

Usando o mesmo procedimento que na parte inicial do capítulo anterior, temos, no lugar da equação (2.1):

$$16 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) \end{pmatrix} = 0,$$

de onde obtemos o seguinte par de equações não acopladas:

$$\frac{\partial^5}{\partial \eta^3 \partial \xi^2} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^5}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = 0, \quad (2.5)$$

cujas soluções mais gerais são:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) + \xi k_1(\eta) + \eta^2 l_1(\xi) \quad (2.6)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \eta h_2(\xi) + \xi k_2(\eta) + \xi^2 l_2(\eta). \quad (2.7)$$

Vamos impor as seguintes condições iniciais que determinarão f_i, g_i, h_i, k_i, l_i , $i = 1, 2$:

$$\Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} C(x) \\ D(x) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} H(x) \\ J(x) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi(x; 0) = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Agora, mediante a Regra da Cadeia, considerando (2.2) e (2.3), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x; t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi(x; t) &= -\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + 3\frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \\ &\quad - 3\frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi(x; t) &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) + 6\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) \\ &\quad - 4\frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} \tilde{\Psi}(\xi; \eta) - 4\frac{\partial^4}{\partial \eta^3 \partial \xi} \tilde{\Psi}(\xi; \eta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Logo, usando estas equações em (2.6) e (2.7), e lembrando (2.2), obtemos as equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(x; t) &= -f_1'(\xi) + g_1'(\eta) + h_1(\xi) - k_1(\eta) + 2\eta l_1(\xi) \\ &\quad - \eta h_1'(\xi) + \xi k_1'(\eta) - \eta^2 l_1'(\xi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2(x; t) &= -f_2'(\xi) + g_2'(\eta) + h_2(\xi) - k_2(\eta) - 2\xi l_2(\eta) \\ &\quad - \eta h_2'(\xi) + \xi k_2'(\eta) + \xi^2 l_2'(\eta) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_1(x; t) &= f_1''(\xi) + g_1''(\eta) + \eta h_1''(\xi) + \eta^2 l_1''(\xi) + \xi k_1''(\eta) \\ &\quad - 2h_1'(\xi) - 4\eta l_1'(\xi) - 2k_1'(\eta) + 2l_1(\xi)\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_2(x; t) &= f_2''(\xi) + g_2''(\eta) + \eta h_2''(\xi) + \xi k_2''(\eta) + \xi^2 l_2''(\eta) \\ &\quad - 2h_2'(\xi) - 4\xi l_2'(\eta) - 2k_2'(\eta) + 2l_2(\eta)\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Psi_1(x; t) &= -f_1'''(\xi) + g_1'''(\eta) - \eta h_1'''(\xi) - \eta^2 l_1'''(\xi) + \xi k_1'''(\eta) \\ &\quad + 3h_1''(\xi) - 3k_1''(\eta) + 6\eta l_1''(\xi) - 6l_1'(\xi)\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Psi_2(x; t) &= -f_2'''(\xi) + g_2'''(\eta) - \eta h_2'''(\xi) + \xi k_2'''(\eta) + \xi^2 l_2'''(\eta) \\ &\quad + 3h_2''(\xi) - 3k_2''(\eta) - 6\xi l_2''(\eta) + 6l_2'(\eta)\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Psi_1(x; t) &= f_1''''(\xi) + g_1''''(\eta) + \eta h_1''''(\xi) + \xi k_1''''(\eta) + \eta^2 l_1''''(\xi) \\ &\quad - 4h_1'''(\xi) - 4k_1'''(\eta) - 8\eta l_1'''(\xi) + 12l_1''(\xi)\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Psi_2(x; t) &= f_2''''(\xi) + g_2''''(\eta) + \eta h_2''''(\xi) + \xi k_2''''(\eta) + \xi^2 l_2''''(\eta) \\ &\quad - 4h_2'''(\xi) - 4k_2'''(\eta) - 8\xi l_2'''(\eta) + 12l_2''(\eta).\end{aligned}\quad (2.24)$$

Agora, usando estas equações junto con as equações (2.6) e (2.7) nas condições iniciais (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), vamos obter dois sistemas independentes de equações diferenciais, a serem tratadas separadamente nas seguintes seções deste capítulo, que fornecerão as soluções para $\Psi_1(x; t)$ e $\Psi_2(x; t)$.

2.1 Solução para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = \Psi_1(x; t)$

Nosso primeiro sistema de equações resulta de aplicar as condições iniciais (2.8) a (2.12) nas equações (2.6), (2.17), (2.19), (2.21) e (2.23):

$$A(x) = f_1(x) + g_1(x) + xh_1(x) + xk_1(x) + x^2l_1(x) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} C(x) = & -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) + 2xl_1(x) - k_1(x) \\ & -xh_1'(x) - x^2l_1'(x) + xk_1'(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} F(x) = & f_1''(x) + g_1''(x) + xh_1''(x) + x^2l_1''(x) + xk_1''(x) \\ & -2h_1'(x) - 4xl_1'(x) - 2k_1'(x) + 2l_1(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} H(x) = & -f_1'''(x) + g_1'''(x) - xh_1'''(x) - x^2l_1'''(x) + xk_1'''(x) \\ & + 3h_1''(x) - 3k_1''(x) + 6xl_1''(x) - 6l_1'(x) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} R(x) = & f_1''''(x) + g_1''''(x) + xh_1''''(x) + xk_1''''(x) + x^2l_1''''(x) \\ & -4h_1'''(x) - 4k_1'''(x) - 8xl_1'''(x) + 12l_1''(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Agora, de (2.25), isolando $f_1(x)$:

$$f_1(x) = A(x) - g_1(x) - xh_1(x) - xk_1(x) - x^2l_1(x). \quad (2.30)$$

Logo, derivando repetidamente:

$$\begin{aligned} f_1'(x) = & A'(x) - g_1'(x) - xh_1'(x) - h_1(x) - xk_1'(x) \\ & -k_1(x) - x^2l_1'(x) - 2xl_1(x) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
f_1''(x) &= A''(x) - g_1''(x) - xh_1''(x) - 2h_1'(x) - xk_1''(x) \\
&\quad - 2k_1'(x) - x^2l_1''(x) - 4xl_1'(x) - 2l_1(x)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
f_1'''(x) &= A'''(x) - g_1'''(x) - xh_1'''(x) - 3h_1''(x) - xk_1'''(x) \\
&\quad - 3k_1''(x) - x^2l_1'''(x) - 6xl_1''(x) - 6l_1'(x)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
f_1''''(x) &= A''''(x) - g_1''''(x) - xh_1''''(x) - 4h_1'''(x) - xk_1''''(x) \\
&\quad - 4k_1'''(x) - x^2l_1''''(x) - 8xl_1'''(x) - 12l_1''(x).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Agora, substituindo (2.34) em (2.29), e simplificando:

$$R(x) = A''''(x) - 8h_1'''(x) - 8k_1'''(x) - 16xl_1'''(x). \tag{2.35}$$

Logo, substituindo (2.33) em (2.28), e simplificando, obtemos:

$$H(x) = -A'''(x) + 2g_1'''(x) + 6h_1''(x) + 2xk_1'''(x) + 12xl_1''(x). \tag{2.36}$$

Em seguida, (2.32) em (2.27), e simplificando:

$$F(x) = A''(x) - 4h_1'(x) - 4k_1'(x) - 8xl_1'(x). \tag{2.37}$$

Agora, (2.31) em (2.26), e simplificando:

$$C(x) = -A'(x) + 2g_1'(x) + 2h_1(x) + 2xk_1'(x) + 4xl_1(x). \tag{2.38}$$

Então, agora, as equações (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38) constituem um sistema de quatro equações diferenciais com as quatro funções incógnitas $g_1(x)$, $h_1(x)$, $l_1(x)$ e

$k_1(x)$.

Agora, isolando $h_1(x)$ em (2.38):

$$h_1(x) = \frac{1}{2}C(x) + \frac{1}{2}A'(x) - g_1'(x) - xk_1'(x) - 2xl_1(x). \quad (2.39)$$

Derivando repetidamente:

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= \frac{1}{2}C'(x) + \frac{1}{2}A''(x) - g_1''(x) - xk_1''(x) - k_1'(x) \\ &\quad - 2xl_1'(x) - 2l_1(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} h_1''(x) &= \frac{1}{2}C''(x) + \frac{1}{2}A'''(x) - g_1'''(x) - xk_1'''(x) - 2k_1''(x) \\ &\quad - 2xl_1''(x) - 4l_1'(x) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} h_1'''(x) &= \frac{1}{2}C'''(x) + \frac{1}{2}A''''(x) - g_1''''(x) - xk_1''''(x) - 3k_1'''(x) \\ &\quad - 2xl_1'''(x) - 6l_1''(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Agora, substituindo (2.40) em (2.37), e simplificando:

$$F(x) = -A''(x) - 2C'(x) + 4g_1''(x) + 4xk_1''(x) + 8l_1(x). \quad (2.43)$$

Logo, substituindo (2.41) em (2.36), e simplificando:

$$\begin{aligned} H(x) &= 2A'''(x) - 4g_1'''(x) + 3C''(x) - 4xk_1'''(x) \\ &\quad - 12k_1''(x) - 24l_1'(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Em seguida, substituindo (2.42) em (2.35), e simplificando:

$$\begin{aligned} R(x) &= -3A''''(x) - 4C'''(x) + 8g_1''''(x) + 8xk_1''''(x) \\ &\quad + 16k_1'''(x) + 48l_1''(x). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Então, agora, as equações (2.43), (2.44) e (2.45) constituem um sistema de três equações diferenciais com as três funções incógnitas $g_1(x)$, $l_1(x)$ e $k_1(x)$.

Agora, isolando $l_1(x)$ em (2.43):

$$l_1(x) = \frac{1}{8}F(x) + \frac{1}{8}A''(x) + \frac{1}{4}C'(x) - \frac{1}{2}g_1''(x) - \frac{1}{2}xk_1''(x). \quad (2.46)$$

Derivando uma e duas vezes esta equação:

$$\begin{aligned} l_1'(x) &= \frac{1}{8}F'(x) + \frac{1}{8}A'''(x) + \frac{1}{4}C''(x) - \frac{1}{2}g_1'''(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}xk_1'''(x) - \frac{1}{2}k_1''(x) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} l_1''(x) &= \frac{1}{8}F''(x) + \frac{1}{8}A''''(x) + \frac{1}{4}C'''(x) - \frac{1}{2}g_1''''(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}xk_1''''(x) - k_1'''(x). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Agora, substituindo (2.47) em (2.44), e simplificando:

$$H(x) = -A'''(x) + 8g_1'''(x) - 3C''(x) + 8xk_1'''(x) - 3F'(x). \quad (2.49)$$

Logo, substituindo (2.48) em (2.45), e simplificando:

$$\begin{aligned} R(x) &= 3A''''(x) + 8C'''(x) - 16g_1''''(x) - 16xk_1''''(x) \\ &\quad - 32k_1''' + 6F''(x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Então, agora, as equações (2.49) e (2.50) constituem um sistema de duas equações diferenciais com as duas funções desconhecidas $g_1(x)$ e $k_1(x)$, que procedemos a resolver abaixo.

Multiplicando (2.49) por 2, derivando, e logo somando com a equação (2.50) produz:

$$2H'(x) + R(x) = A''''(x) + 2C'''(x) - 16k_1'''(x).$$

Logo, isolando $k_1'''(x)$:

$$k_1'''(x) = -\frac{1}{8}H'(x) - \frac{1}{16}R(x) + \frac{1}{16}A''''(x) + \frac{1}{8}C'''(x). \quad (2.51)$$

Agora, substituindo (2.51) em (2.49), e simplificando:

$$\begin{aligned} H(x) &= -A'''(x) - 3C''(x) - 3F'(x) + 8g_1'''(x) - xH'(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}xR(x) + \frac{1}{2}xA''''(x) + xC'''(x). \end{aligned}$$

Logo, isolando $g_1'''(x)$:

$$\begin{aligned} g_1'''(x) &= \frac{1}{8}H(x) + \frac{1}{8}xH'(x) + \frac{1}{8}A'''(x) - \frac{1}{16}xA''''(x) + \frac{3}{8}C''(x) \\ &\quad - \frac{1}{8}xC'''(x) + \frac{3}{8}F'(x) + \frac{1}{16}xR(x). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Agora, integrando repetidamente a equação (2.51), temos:

$$k_1''(x) = -\frac{1}{8}H(x) - \frac{1}{16} \int_a^x dy R(y) + \frac{1}{16}A''''(x) + \frac{1}{8}C''(x) + \alpha_1 \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} k_1'(x) &= -\frac{1}{8} \int_a^x dy H(y) - \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz R(z) + \frac{1}{16}A'''(x) \\ &\quad + \frac{1}{8}C'(x) + \alpha_1 x + \alpha_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\frac{1}{8} \int_a^x dy \int_a^y dz H(z) - \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z du R(u) \\ &\quad + \frac{1}{16}A''(x) + \frac{1}{8}C(x) + \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Logo, vamos fazer um procedimento similar com a equação (2.52), porém, primeiro vamos lhe dar uma forma mais conveniente:

$$g_1'''(x) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \{xH(x)\} + \frac{3}{16} A'''(x) - \frac{1}{16} \frac{d}{dx} \{xA'''(x)\} + \frac{1}{2} C''(x) - \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \{xC''(x)\} + \frac{3}{8} F'(x) + \frac{1}{16} xR(x).$$

Então, integrando:

$$g_1''(x) = \frac{1}{8} xH(x) + \frac{3}{16} A''(x) - \frac{1}{16} xA'''(x) + \frac{1}{2} C'(x) - \frac{1}{8} x C''(x) + \frac{3}{8} F(x) + \frac{1}{16} \int_a^x dy yR(y) + \beta_1. \quad (2.56)$$

Agora, reescrevemos esta equação de forma mais conveniente:

$$g_1''(x) = \frac{1}{8} xH(x) + \frac{1}{4} A''(x) - \frac{1}{16} \frac{d}{dx} \{xA''(x)\} + \frac{5}{8} C'(x) - \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \{xC'(x)\} + \frac{3}{8} F(x) + \frac{1}{16} \int_a^x dy yR(y) + \beta_1.$$

Logo, integrando:

$$g_1'(x) = \frac{1}{8} \int_a^x dy yH(y) + \frac{1}{4} A'(x) - \frac{1}{16} xA''(x) + \frac{5}{8} C(x) - \frac{1}{8} x C'(x) + \frac{3}{8} \int_a^x dy F(y) + \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz zR(z) + \beta_1 x + \beta_2. \quad (2.57)$$

De novo, reescrevemos esta equação, de forma conveniente para o seguinte passo:

$$g_1'(x) = \frac{1}{8} \int_a^x dy yH(y) + \frac{5}{16} A'(x) - \frac{1}{16} \frac{d}{dx} \{xA'(x)\} + \frac{3}{4} C(x) - \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \{xC(x)\} + \frac{3}{8} \int_a^x dy F(y) + \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz zR(z) + \beta_1 x + \beta_2.$$

Logo, integrando a equação anterior, temos:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{8} \int_a^x dy \int_a^y dz zH(z) + \frac{5}{16}A(x) - \frac{1}{16}xA'(x) \\
&+ \frac{3}{4} \int_a^x dy C(y) - \frac{1}{8}xC(x) + \frac{3}{8} \int_a^x dy \int_a^y dz F(z) \\
&+ \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z du uR(u) + \frac{1}{2}\beta_1x^2 + \beta_2x + \beta_3.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Agora, de acordo com a equação (2.46), temos que

$$l_1(x) = \frac{1}{8}F(x) + \frac{1}{8}A''(x) + \frac{1}{4}C'(x) - \frac{1}{2}g_1''(x) - \frac{1}{2}xk_1''(x).$$

Então, substituindo nesta equação as equações (2.56) e (2.53), e simplificando:

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= -\frac{1}{16}F(x) + \frac{1}{32}A''(x) + \frac{1}{32}x \int_a^x dy R(y) \\
&- \frac{1}{32} \int_a^x dy yR(y) - \frac{1}{2}x\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Também, segundo a equação (2.39), sabemos que

$$h_1(x) = \frac{1}{2}C(x) + \frac{1}{2}A'(x) - g_1'(x) - xk_1'(x) - 2xl_1(x).$$

Logo, substituindo aqui as equações (2.57), (2.54) e (2.59), e simplificando:

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= -\frac{1}{8}C(x) + \frac{1}{8}xF(x) + \frac{1}{4}A'(x) - \frac{1}{16}xA''(x) \\
&- \frac{3}{8} \int_a^x dy F(y) + \frac{1}{8}x \int_a^x dy H(y) - \frac{1}{8} \int_a^x dy yH(y) \\
&+ \frac{1}{16}x \int_a^x dy yR(y) - \frac{1}{16}x^2 \int_a^x dy R(y) \\
&+ \frac{1}{16}x \int_a^x dy \int_a^y dz R(z) - \frac{1}{16} \int_a^x dy \int_a^y dz zR(z) \\
&\alpha_2x - \beta_2.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Agora, da equação (2.30), temos que

$$f_1(x) = A(x) - g_1(x) - xh_1(x) - xk_1(x) - x^2l_1(x).$$

Logo substituindo aqui as equações (2.58), (2.60), (2.55) e (2.59), que fornecem, respectivamente, as expressões para $h_1(x)$, $k_1(x)$ e $l_1(x)$, e após várias simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} f_1(x) = & \frac{11}{16}A(x) + \frac{1}{8}x C(x) - \frac{1}{4}x A'(x) + \frac{1}{32}x^2A''(x) - \frac{1}{16}x^2F(x) \\ & - \frac{3}{4}\int_a^x dy C(y) + \frac{1}{32}x^3\int_a^x dy R(y) - \frac{1}{32}x^2\int_a^x dy yR(y) \\ & - \frac{1}{16}x^2\int_a^x dy \int_a^y dz R(z) + \frac{1}{16}x\int_a^x dy \int_a^y dz z R(z) \\ & + \frac{1}{16}x\int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z du R(u) - \frac{1}{16}\int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z du uR(u) \\ & - \frac{1}{8}x^2\int_a^x dy H(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dy y H(y) \\ & + \frac{1}{8}x\int_a^x dy \int_a^y dz H(z) - \frac{1}{8}\int_a^x dy \int_a^y dz zH(z) \\ & - \alpha_3 x - \beta_3. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Agora, segundo a equação (2.6) temos:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) + \xi k_1(\eta) + \eta^2 l_1(\xi).$$

Então, usando nesta equação as formas explícitas das funções f_1 , g_1 , h_1 , k_1 e l_1 , dadas, respectivamente pelas equações (2.61), (2.58), (2.60), (2.55) e (2.59), simplificando e reordenando, obtemos finalmente a expressão explícita para $\Psi_1(\xi; \eta)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = & \frac{1}{16} [11 A(\xi) + 5 A(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [C(\xi) + C(\eta)] \\
& - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 F(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [4 A'(\xi) - A'(\eta)] \\
& + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 A''(\xi) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy C(y) \\
& + \frac{3}{8} \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\xi} dy F(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz F(z) \right\} \\
& + \frac{1}{8} \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\xi} dy y H(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz z H(z) \right\} \\
& - \frac{1}{8} \xi \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\xi} dy H(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz H(z) \right\} \\
& - \frac{1}{16} \xi \left\{ \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz \int_a^z du R(u) + (\xi - \eta) \int_a^{\xi} dy \int_a^y dz R(z) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\xi - \eta)^2 \int_a^{\xi} dy R(y) \right\} + \frac{1}{16} \left\{ \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz \int_a^z du u R(u) \right. \\
& \left. + (\xi - \eta) \int_a^{\xi} dy \int_a^y dz z R(z) - \frac{1}{2} (\xi - \eta)^2 \int_a^{\xi} dy y R(y) \right\}. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

2.2 Solução para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = \Psi_2(x; t)$

Nosso segundo sistema de equações resulta de aplicar as condições iniciais (2.8) a

(2.12) nas equações (2.7), (2.18), (2.20), (2.22) e (2.24):

$$B(x) = f_2(x) + g_2(x) + xh_2(x) + xk_2(x) + x^2l_2(x) \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}
D(x) = & -f_2'(x) + g_2'(x) + h_2(x) - 2xl_2(x) - k_2(x) \\
& -xh_2'(x) + x^2l_2'(x) + xk_2'(x) \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= f_2''(x) + g_2''(x) + xh_2''(x) + x^2l_2''(x) + xk_2''(x) \\
&\quad - 2h_2'(x) - 4xl_2'(x) - 2k_2'(x) + 2l_2(x)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
J(x) &= -f_2'''(x) + g_2'''(x) - xh_2'''(x) + x^2l_2'''(x) + xk_2'''(x) \\
&\quad + 3h_2''(x) - 3k_2''(x) - 6xl_2''(x) + 6l_2'(x)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= f_2''''(x) + g_2''''(x) + xh_2''''(x) + xk_2''''(x) + x^2l_2''''(x) \\
&\quad - 4h_2'''(x) - 4k_2'''(x) - 8xl_2'''(x) + 12l_2''(x).
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Agora, como já temos a forma explícita da solução $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, dada pela equação (2.62), vamos usar o método das transformações desenvolvido na Seção (1.3), que nos permitirá abreviar os cálculos, para o qual precisamos primeiro achar as transformações apropriadas, similares as transformações (1.48) da referida seção.

Então, começamos reescrevendo as equações (2.6) e (2.7):

$$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) + \xi k_1(\eta) + \eta^2 l_1(\xi)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \eta h_2(\xi) + \xi k_2(\eta) + \xi^2 l_2(\eta).$$

Aqui, vemos que, se aplicamos as transformações

$$\xi \mapsto \eta, \quad \eta \mapsto \xi, \quad f_1 \mapsto g_2, \quad g_1 \mapsto f_2, \quad h_1 \mapsto k_2, \quad k_1 \mapsto h_2, \quad l_1 \mapsto l_2 \tag{2.68}$$

na expressão do lado direito da primeira destas equações, resultado que denotamos por $\tilde{\Psi}_1^T(\xi; \eta)$, então, obtemos a expressão do lado direito da segunda equação:

$$\tilde{\Psi}_1^T(\xi; \eta) = g_2(\eta) + f_2(\xi) + \xi k_2(\eta) + \eta h_2(\xi) + \xi^2 l_2(\eta) = \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta). \tag{2.69}$$

Assim, a partir da solução mais geral para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, expressa em termos de ξ , η , f_1 , g_1 , h_1 , k_1 e l_1 , obtemos, mediante as transformações (2.68), a solução mais geral para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, expressa em termos de ξ , η , f_2 , g_2 , h_2 , k_2 e l_2 . Mas, $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, segundo (2.62), depende de ξ , η , A , C , F , H e R , os quais, estão relacionados com ξ , η , f_1 , g_1 , h_1 , k_1 e l_1 , mediante nosso primeiro sistema independente de equações, (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29).

Então, as transformações (2.68) induzem outras transformações sobre o conjunto ξ , η , A , C , F , H e R , que agora vamos a determinar. Para isso, reescrevemos, por comodidade nas comparações a seguir, nossos dois sistemas independentes de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = f_1(x) + g_1(x) + xh_1(x) + xk_1(x) + x^2l_1(x) \\ C(x) = -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) + 2xl_1(x) - k_1(x) \\ \quad -xh_1'(x) - x^2l_1'(x) + xk_1'(x) \\ F(x) = f_1''(x) + g_1''(x) + xh_1''(x) + x^2l_1''(x) + xk_1''(x) \\ \quad -2h_1'(x) - 4xl_1'(x) - 2k_1'(x) + 2l_1(x) \\ H(x) = -f_1'''(x) + g_1'''(x) - xh_1'''(x) - x^2l_1'''(x) + xk_1'''(x) \\ \quad +3h_1''(x) - 3k_1''(x) + 6xl_1''(x) - 6l_1'(x) \\ R(x) = f_1''''(x) + g_1''''(x) + xh_1''''(x) + xk_1''''(x) + x^2l_1''''(x) \\ \quad -4h_1'''(x) - 4k_1'''(x) - 8xl_1'''(x) + 12l_1''(x) \end{array} \right. \quad (2.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
B(x) = f_2(x) + g_2(x) + xh_2(x) + xk_2(x) + x^2l_2(x) \\
D(x) = -f_2'(x) + g_2'(x) + h_2(x) - 2xl_2(x) - k_2(x) \\
\quad -xh_2'(x) + x^2l_2'(x) + xk_2'(x) \\
G(x) = f_2''(x) + g_2''(x) + xh_2''(x) + x^2l_2''(x) + xk_2''(x) \\
\quad -2h_2'(x) - 4xl_2'(x) - 2k_2'(x) + 2l_2(x) \\
J(x) = -f_2'''(x) + g_2'''(x) - xh_2'''(x) + x^2l_2'''(x) + xk_2'''(x) \\
\quad +3h_2''(x) - 3k_2''(x) - 6xl_2''(x) + 6l_2'(x) \\
S(x) = f_2''''(x) + g_2''''(x) + xh_2''''(x) + xk_2''''(x) + x^2l_2''''(x) \\
\quad -4h_2'''(x) - 4k_2'''(x) - 8xl_2'''(x) + 12l_2''(x).
\end{array} \right. \quad (2.71)$$

Logo, aplicando as transformações (2.68) sobre os lados direitos de nosso primeiro conjunto de equações, (2.70), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l}
A^T(x) = g_2(x) + f_2(x) + xk_2(x) + xh_2(x) + x^2l_2(x) \\
C^T(x) = -g_2'(x) + f_2'(x) + k_2(x) + 2xl_2(x) - h_2(x) \\
\quad -xk_2'(x) - x^2l_2'(x) + xh_2'(x) \\
F^T(x) = g_2''(x) + f_2''(x) + xh_1''(x) + x^2l_1''(x) + xk_1''(x) \\
\quad -2k_2'(x) - 4xl_2'(x) - 2h_2'(x) + 2l_2(x) \\
H^T(x) = -g_2'''(x) + f_2'''(x) - xk_2'''(x) - x^2l_2'''(x) + xh_2'''(x) \\
\quad +3k_2''(x) - 3h_2''(x) + 6xl_2''(x) - 6l_2'(x) \\
R^T(x) = g_2''''(x) + f_2''''(x) + xk_2''''(x) + xh_2''''(x) + x^2l_2''''(x) \\
\quad -4k_2'''(x) - 4h_2'''(x) - 8xl_2'''(x) + 12l_2''(x),
\end{array} \right. \quad (2.72)$$

onde A^T , C^T , F^T , H^T e R^T , são as transformações de A , C , F , H e R , respectivamente, induzidas pelas transformações (2.68). Agora, comparando (2.72) com (2.71), obtemos: $A^T = B$, $C^T = -D$, $F^T = G$, $H^T = -J$ e $R^T = S$. Logo, nossa procurada transformação, que nos permitirá achar a forma explícita da solução $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, consiste em:

$$\xi \mapsto \eta, \quad \eta \mapsto \xi, \quad A \mapsto B, \quad C \mapsto -D, \quad F \mapsto G, \quad H \mapsto -J, \quad R \mapsto S \quad (2.73)$$

Então, aplicando este conjunto de transformações sobre a solução explícita para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, equação (2.62), obtemos a solução para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = & \frac{1}{16} [5B(\xi) + 11B(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [D(\xi) + D(\eta)] \\ & - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 G(\eta) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [B'(\xi) - 4B'(\eta)] \\ & + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 B''(\eta) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy D(y) \\ & - \frac{3}{8} \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\eta} dy G(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz G(z) \right\} \\ & + \frac{1}{8} \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\eta} dy y J(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz z J(z) \right\} \\ & - \frac{1}{8} \eta \left\{ (\xi - \eta) \int_a^{\eta} dy J(y) + \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz J(z) \right\} \\ & + \frac{1}{16} \eta \left\{ \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz \int_a^z du S(u) + (\xi - \eta) \int_a^{\eta} dy \int_a^y dz S(z) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\xi - \eta)^2 \int_a^{\eta} dy S(y) \right\} - \frac{1}{16} \left\{ \int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^y dz \int_a^z du u S(u) \right. \\ & \left. + (\xi - \eta) \int_a^{\eta} dy \int_a^y dz z S(z) + \frac{1}{2} (\xi - \eta)^2 \int_a^{\eta} dy y S(y) \right\}. \quad (2.74) \end{aligned}$$

2.3 Simplificação das soluções e comprovação da independência com respeito ao parâmetro a

Nesta seção, vamos simplificar a expressão para a solução $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, equação (2.62), e mostrar que o parâmetro real a é arbitrário, e para isso vamos lhe dar uma forma onde não apareça o dito parâmetro. Então, como consequência, devido ao exposto na Seção 2.2, onde as transformações que levam de $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$ são completamente independentes do parâmetro a , então, a expressão para a solução $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, equação (2.74), tampouco vai depender do a .

Na equação (2.62), os termos que envolvem o parâmetro a são os que estão dentro das chaves. A primeira expressão entre chaves, que denotamos por T_1 , é:

$$T_1 = (\xi - \eta) \int_a^\xi dy F(y) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz F(z)$$

Fazendo algumas transformações sobre T_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(- \int_\xi^\eta dy \right) \int_a^\xi dz F(z) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz F(z) \\ &= - \int_\xi^\eta dy \int_a^\xi dz F(z) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz F(z) \\ &= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^a dz F(z) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz F(z) \\ &= \int_\xi^\eta dy \left[\int_\xi^a dz F(z) + \int_a^y dz F(z) \right] \\ &= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz F(z). \end{aligned} \tag{2.75}$$

As duas seguintes expressões que aparecem entre chaves, da equação (2.62), que denotamos por T_2 e T_3 , são dadas por:

$$T_2 = (\xi - \eta) \int_a^\xi dy y H(y) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz z H(z)$$

$$T_3 = (\xi - \eta) \int_a^\xi dy H(y) + \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz H(z).$$

Estas expressões têm a mesma forma que a forma inicial de T_1 ; então, por comparação, temos:

$$T_2 = \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz z H(z) \tag{2.76}$$

$$T_3 = \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz H(z). \tag{2.77}$$

A seguinte expressão que necessitamos considerar, e que denotamos por T_4 , é dada por:

$$T_4 = \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz \int_a^z du R(u) + (\xi - \eta) \int_a^\xi dy \int_a^y dz R(z) - \frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 \int_a^\xi dy R(y).$$

Mas, agora, temos:

$$\begin{aligned} (\xi - \eta) \int_a^\xi dy \int_a^y dz R(z) &= (\eta - \xi) \int_\xi^a dy \int_a^y du R(u) \\ &= \left(\int_\xi^\eta dy \right) \int_\xi^a dz \int_a^z du R(u) \\ &= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^a dz \int_a^z du R(u). \end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 \int_a^\xi dy R(y) &= \frac{1}{2} [(\eta - \xi)^2 - (\xi - \xi)^2] \int_\xi^a du R(u) \\
&= \left(\int_\xi^\eta dy (y - \xi) \right) \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy (y - \xi) \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^a du R(u).
\end{aligned}$$

Então, usando estes dois resultados na expressão previa para T_4 , obtemos:

$$\begin{aligned}
T_4 &= \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz \int_a^z du R(u) + \int_\xi^\eta dy \int_\xi^a dz \int_a^z du R(u) \\
&\quad + \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy \left(\int_a^y dz \int_a^z du R(u) + \int_\xi^a dz \int_a^z du R(u) \right) \\
&\quad + \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy \left(\int_\xi^y dz \int_a^z du R(u) \right) + \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_a^z du R(u) + \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^a du R(u) \\
&= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \left(\int_a^z du R(u) + \int_\xi^a du R(u) \right) \\
&= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \left(\int_\xi^z du R(u) \right) \\
&= \int_\xi^\eta dy \int_\xi^y dz \int_\xi^z du R(u). \tag{2.78}
\end{aligned}$$

A última expressão a considerar, que denotamos por T_5 , é:

$$\begin{aligned}
T_5 &= \int_\xi^\eta dy \int_a^y dz \int_a^z du uR(u) + (\xi - \eta) \int_a^\xi dy \int_a^y dz zR(z) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 \int_a^\xi dy yR(y).
\end{aligned}$$

Vemos que esta equação tem a mesma forma que a forma inicial de T_4 . Então, comparando com (2.78), podemos escrever:

$$T_5 = \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du u R(u). \quad (2.79)$$

Assim, devido a que estas expressões, T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 , em sua forma simplificada final, não dependem do parâmetro a , $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ tampouco depende de a .

Logo, usando estes resultados, (2.75), (2.76), (2.77), (2.78) e (2.79), na equação (2.62), obtemos a expressão mais simples para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, que é também independente do parâmetro a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) = & \frac{1}{16} [11 A(\xi) + 5 A(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [C(\xi) + C(\eta)] \\ & - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 F(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [4 A'(\xi) - A'(\eta)] \\ & + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 A''(\xi) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy C(y) + \frac{3}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) \\ & - \frac{1}{8} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz H(z) + \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz z H(z) \\ & - \frac{1}{16} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du R(u) \\ & + \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du u R(u). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Podemos fazer um procedimento similar sobre a equação (2.74) para obter uma expressão mais simples para $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$, porém, aqui resulta mais direto aplicar as

transformações (2.73) sobre a equação (2.80), com que obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta) = & \frac{1}{16} [5B(\xi) + 11B(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [D(\xi) + D(\eta)] \\
& - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 G(\eta) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [B'(\xi) - 4B'(\eta)] \\
& + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 B''(\eta) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy D(y) - \frac{3}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz G(z) \\
& - \frac{1}{8} \eta \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz J(z) + \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz z J(z) \\
& + \frac{1}{16} \eta \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du S(u) \\
& - \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du u S(u). \tag{2.81}
\end{aligned}$$

2.4 Verificação das soluções

Queremos verificar que as funções $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ e $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$ satisfazem às equações diferenciais (2.4) e (2.5) junto com as condições iniciais (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12).

Lembremos que $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$ foi obtida a partir de $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ mediante as transformações (2.73) e, por conseguinte, a comprovação da validade da solução $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ implicará a comprovação da validade da solução $\tilde{\Psi}_2(\xi; \eta)$. Consideremos, então, a solução para

$\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ dada pela equação (2.80):

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta) &= \frac{1}{16} [11 A(\xi) + 5 A(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [C(\xi) + C(\eta)] \\
&\quad - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 F(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [4 A'(\xi) - A'(\eta)] \\
&\quad + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 A''(\xi) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy C(y) + \frac{3}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) \\
&\quad - \frac{1}{8} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz H(z) + \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz z H(z) \\
&\quad - \frac{1}{16} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du R(u) \\
&\quad + \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du u R(u).
\end{aligned}$$

Usando (2.2) e (2.3), temos que:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x; 0) = \tilde{\Psi}_1(x; x) &= \frac{1}{16} [11 A(x) + 5 A(x)] + 0 - 0 - 0 + 0 \\
&\quad + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 \\
&= A(x)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

isto é, $\Psi_1(x; t) = \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ satisfaz a primeira condição inicial (2.8).

Agora, fazendo operações de derivação parcial na expressão anterior para $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$,

usando as identidades do Apêndice B e após algumas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi} &= \frac{7}{16} A'(\xi) + \frac{1}{16} A'(\eta) - \frac{3}{16} (\xi - \eta) A''(\xi) + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 A'''(\xi) \\
&\quad - \frac{5}{8} C(\xi) + \frac{1}{8} C(\eta) + \frac{1}{8} (\xi - \eta) C'(\xi) + \frac{1}{4} (\xi - \eta) F(\xi) \\
&\quad - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 F'(\xi) - \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz H(z) \\
&\quad - \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du R(u).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}A'(\xi) + \frac{1}{4}A'(\eta) - \frac{1}{16}(\xi - \eta)A''(\xi) + \frac{1}{16}(\xi - \eta)A''(\eta) \\
&\quad - \frac{1}{8}C(\xi) + \frac{5}{8}C(\eta) + \frac{1}{8}(\xi - \eta)F(\xi) + \frac{3}{8}\int_{\xi}^{\eta} dz F(z) \\
&\quad - \frac{1}{8}\xi \int_{\xi}^{\eta} dz H(z) + \frac{1}{8}\int_{\xi}^{\eta} dz z H(z) \\
&\quad - \frac{1}{16}\xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz R(z) + \frac{1}{16}\int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz z R(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4}A''(\xi) - \frac{1}{8}(\xi - \eta)A'''(\xi) + \frac{1}{32}(\xi - \eta)^2 A''''(\xi) \\
&\quad - \frac{1}{2}C'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi - \eta)C''(\xi) + \frac{1}{4}F(\xi) + \frac{1}{8}(\xi - \eta)F'(\xi) \\
&\quad - \frac{1}{16}(\xi - \eta)^2 F''(\xi) - \frac{1}{8}(\xi - \eta)H(\xi) + \frac{1}{32}(\xi - \eta)^2 R(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{16}A''(\xi) + \frac{3}{16}A''(\eta) + \frac{1}{16}(\xi - \eta)A'''(\eta) + \frac{1}{2}C'(\eta) \\
&\quad + \frac{1}{8}(\xi - \eta)C''(\eta) - \frac{1}{8}F(\xi) + \frac{3}{8}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi - \eta)H(\eta) \\
&\quad - \frac{1}{16}\xi \int_{\xi}^{\eta} dz R(z) + \frac{1}{16}\int_{\xi}^{\eta} dz z R(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{3}{16}A''(\xi) + \frac{1}{16}A''(\eta) - \frac{1}{16}(\xi - \eta)A'''(\xi) - \frac{1}{8}C'(\xi) \\
&\quad + \frac{1}{8}C'(\eta) - \frac{1}{4}F(\xi) + \frac{1}{8}(\xi - \eta)F'(\xi) - \frac{1}{8}\int_{\xi}^{\eta} dz H(z) \\
&\quad - \frac{1}{16}\int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz R(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{8}A'''(\xi) - \frac{1}{16}(\xi - \eta)A''''(\xi) + \frac{1}{32}(\xi - \eta)^2 A'''''(\xi) \\
&\quad - \frac{3}{8}C''(\xi) + \frac{1}{8}(\xi - \eta)C'''(\xi) + \frac{3}{8}F'(\xi) \\
&\quad - \frac{1}{16}(\xi - \eta)^2 F'''(\xi) - \frac{1}{8}H(\xi) - \frac{1}{8}(\xi - \eta)H'(\xi) \\
&\quad + \frac{1}{16}(\xi - \eta)R(\xi) + \frac{1}{32}(\xi - \eta)^2 R'(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta^3} &= \frac{1}{8} A'''(\eta) + \frac{1}{16} (\xi - \eta) A''''(\eta) + \frac{3}{8} C''(\eta) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi - \eta) C'''(\eta) + \frac{3}{8} F'(\eta) - \frac{1}{8} (\xi - \eta) H'(\eta) \\ &\quad + \frac{1}{8} H(\eta) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) R(\eta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} &= \frac{1}{8} A'''(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) A''''(\xi) - \frac{1}{8} C'''(\xi) - \frac{1}{8} F'(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi - \eta) F''(\xi) + \frac{1}{8} H(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) R(\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} &= \frac{1}{16} A'''(\xi) + \frac{1}{16} A'''(\eta) + \frac{1}{8} C''(\eta) - \frac{1}{8} F'(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{8} H(\eta) - \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dz R(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi^4} &= \frac{1}{16} A''''(\xi) + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 A''''''(\xi) - \frac{1}{4} C'''(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi - \eta) C''''(\xi) + \frac{3}{8} F''(\xi) - \frac{1}{8} (\xi - \eta) F'''(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 F''''(\xi) - \frac{1}{4} H'(\xi) - \frac{1}{8} (\xi - \eta) H''(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{16} R(\xi) + \frac{1}{8} (\xi - \eta) R'(\xi) + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 R''(\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta^4} &= \frac{1}{16} A''''(\eta) + \frac{1}{16} (\xi - \eta) A''''''(\eta) + \frac{1}{4} C'''(\eta) \\ &\quad + \frac{1}{8} (\xi - \eta) C''''(\eta) + \frac{3}{8} F''(\eta) + \frac{1}{4} H'(\eta) \\ &\quad - \frac{1}{8} (\xi - \eta) H''(\eta) + \frac{1}{16} R(\eta) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) R'(\eta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta \partial \xi^3} &= \frac{1}{16} A''''(\xi) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) A''''''(\xi) - \frac{1}{8} C'''(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{8} (\xi - \eta) F'''(\xi) + \frac{1}{8} H'(\xi) - \frac{1}{16} R(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{16} (\xi - \eta) R'(\xi)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta^3} = \frac{1}{16} A''''(\eta) + \frac{1}{8} C'''(\eta) - \frac{1}{8} H'(\eta) - \frac{1}{16} R(\eta)$$

$$\frac{\partial^4 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} = \frac{1}{16} A''''(\xi) - \frac{1}{8} F''(\xi) + \frac{1}{16} R(\xi)$$

Derivando a equação anterior respeito de η vemos imediatamente que

$$\frac{\partial^5 \tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)}{\partial \eta^3 \partial \xi^2} = 0, \quad (2.83)$$

que é idêntica à equação (2.4), o qual queríamos verificar.

Agora, usando os valores anteriores para as diversas derivadas parciais de $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$ nas equações (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), logo avaliando em $t = 0$, e lembrando que quando $t = 0$ então $\xi = \eta = x$, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x; 0) &= -\left\{ \frac{7}{16} A'(x) + \frac{1}{16} A'(x) - 0 + 0 - \frac{5}{8} C(x) + \frac{1}{8} C(x) \right. \\ &\quad \left. + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{4} A'(x) + \frac{1}{4} A'(x) - 0 + 0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} C(x) + \frac{5}{8} C(x) + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 \right\} \\ &= C(x) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x; 0) &= \left\{ \frac{1}{4} A''(x) - 0 + 0 - \frac{1}{2} C'(x) + 0 + \frac{1}{4} F(x) + 0 - 0 \right. \\
&\quad \left. - 0 + 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{16} A''(x) + \frac{3}{16} A''(x) + 0 + \frac{1}{2} C'(x) \right. \\
&\quad \left. + 0 - \frac{1}{8} F(x) + \frac{3}{8} F(x) - 0 - 0 + 0 \right\} - 2 \left\{ \frac{3}{16} A''(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} A''(x) - 0 - \frac{1}{8} C'(x) + \frac{1}{8} C'(x) - \frac{1}{4} F(x) + 0 \right. \\
&\quad \left. - 0 - 0 \right\} \\
&= F(x)
\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi(x; 0) &= - \left\{ \frac{1}{8} A'''(x) - 0 + 0 - \frac{3}{8} C''(x) + 0 + \frac{3}{8} F'(x) - 0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} H(x) - 0 + 0 + 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{8} A'''(x) + 0 + \frac{3}{8} C''(x) + 0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} F'(x) - 0 + \frac{1}{8} H(x) - 0 \right\} + 3 \left\{ \frac{1}{8} A'''(x) - 0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} C''(x) - \frac{1}{8} F'(x) + 0 + \frac{1}{8} H(x) - 0 \right\} - 3 \left\{ \frac{1}{16} A'''(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} A'''(x) + \frac{1}{8} C''(x) - \frac{1}{8} F'(x) - \frac{1}{8} H(x) - 0 \right\} \\
&= H(x)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi(x; 0) &= \left\{ \frac{1}{16} A''''(x) + 0 - \frac{1}{4} C'''(x) + 0 + \frac{3}{8} F''(x) - 0 - 0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} H'(x) - 0 + \frac{1}{16} R(x) + 0 + 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{16} A''''(x) + 0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} C'''(x) + 0 + \frac{3}{8} F''(x) + \frac{1}{4} H'(x) - 0 + \frac{1}{16} R(x) - 0 \right\} \\
&\quad + 6 \left\{ \frac{1}{16} A''''(x) - \frac{1}{8} F''(x) + \frac{1}{16} R(x) \right\} - 4 \left\{ \frac{1}{16} A''''(x) \right. \\
&\quad \left. - 0 - \frac{1}{8} C'''(x) - 0 + \frac{1}{8} H'(x) - \frac{1}{16} R(x) - 0 \right\} \\
&\quad - 4 \left\{ \frac{1}{16} A''''(x) + \frac{1}{8} C'''(x) - \frac{1}{8} H'(x) - \frac{1}{16} R(x) \right\} \\
&= R(x) \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Sumarizando, os resultados (2.83), (2.82), (2.84), (2.85), (2.86) e (2.87), indicam que a função $\tilde{\Psi}_1(\xi; \eta)$, dada pela equação (2.80), satisfaz a equação diferencial (2.4) e as condições iniciais (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), o qual queríamos comprovar.

Capítulo 3

Discussão e comparação dos modos de propagação

Neste capítulo, comparamos os resultados e soluções para diferentes casos da equação

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \square^n \Psi(x; t) = 0, \tag{3.1}$$

onde n pode tomar os valores 0, 1, 2, considerados nos dois capítulos prévios.

A idéia é ter uma visão gráfica e comparativa de como a potência da derivada influencia no modo de propagação (direita ou esquerda) de uma certa componente de quiralidade.

No caso em que $n=0$, a quiralidade “left” e “right” propagam-se única e exclusivamente para a direita e esquerda, respectivamente.

Com $n=1,2$ esta relação é quebrada. Queremos, com os gráficos aqui apresentados,

justamente evidenciar o quanto a associação quiralidade-modo de propagação é violada.

No que segue, vamos adotar a seguinte notação: $\Psi_A(x; t)$, $\Psi_B(x; t)$ e $\Psi_C(x; t)$, correspondem, respectivamente, às soluções da equação (3.1) para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$. Ou seja:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_A(x; t) = 0, \quad (3.2)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \square \Psi_B(x; t) = 0, \quad (3.3)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \square^2 \Psi_C(x; t) = 0. \quad (3.4)$$

Também, adicionalmente, usamos as seguintes notações:

$$\Psi_A(x; t) = \begin{pmatrix} \Psi_{A1}(x; t) \\ \Psi_{A2}(x; t) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}_A(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{A1}(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_{A2}(\xi; \eta) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\Psi_B(x; t) = \begin{pmatrix} \Psi_{B1}(x; t) \\ \Psi_{B2}(x; t) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}_B(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{B1}(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_{B2}(\xi; \eta) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\Psi_C(x; t) = \begin{pmatrix} \Psi_{C1}(x; t) \\ \Psi_{C2}(x; t) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}_C(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{C1}(\xi; \eta) \\ \tilde{\Psi}_{C2}(\xi; \eta) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

3.1 Comparações gerais

Por comodidade, reescrevemos as soluções consideradas nos dois capítulos prévios, usando agora as novas notações:

$$\tilde{\Psi}_{A_1}(\xi; \eta) = A(\xi) \quad (3.8)$$

$$\tilde{\Psi}_{A_2}(\xi; \eta) = B(\eta) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{B_1}(\xi; \eta) &= \frac{3}{4}F(\xi) + \frac{1}{4}F(\eta) - \frac{1}{4}(\xi - \eta)F'(\xi) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} dy H(y) \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz R(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{B_2}(\xi; \eta) &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi - \eta)G'(\eta) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} dy J(y) \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz S(z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{C_1}(\xi; \eta) &= \frac{1}{16} [11A(\xi) + 5A(\eta)] + \frac{1}{8}(\xi - \eta) [C(\xi) + C(\eta)] \\ &\quad - \frac{1}{16}(\xi - \eta)^2 F(\xi) - \frac{1}{16}(\xi - \eta) [4A'(\xi) - A'(\eta)] \\ &\quad + \frac{1}{32}(\xi - \eta)^2 A''(\xi) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy C(y) + \frac{3}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) \\ &\quad - \frac{1}{8} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz H(z) + \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz z H(z) \\ &\quad - \frac{1}{16} \xi \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du R(u) \\ &\quad + \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du u R(u) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{C2}(\xi; \eta) = & \frac{1}{16} [5 B(\xi) + 11 B(\eta)] + \frac{1}{8} (\xi - \eta) [D(\xi) + D(\eta)] \\
& - \frac{1}{16} (\xi - \eta)^2 G(\eta) - \frac{1}{16} (\xi - \eta) [B'(\xi) - 4 B'(\eta)] \\
& + \frac{1}{32} (\xi - \eta)^2 B''(\eta) + \frac{3}{4} \int_{\xi}^{\eta} dy D(y) - \frac{3}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz G(z) \\
& - \frac{1}{8} \eta \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz J(z) + \frac{1}{8} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz z J(z) \\
& + \frac{1}{16} \eta \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du S(u) \\
& - \frac{1}{16} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du u S(u). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Agora, destas soluções, lembrando que $\xi = x - t$ e $\eta = x + t$, tiramos as seguintes observações:

As duas primeiras soluções, equações (3.8) e (3.9), correspondentes ao caso da equação de Dirac normal, que representam os dois setores da quiralidade do sistema, e que têm modos de propagação, respectivamente, para a direita e para a esquerda, o que se mantém todo o tempo.

Por outro lado, as seguintes duas soluções, equações (3.10) e (3.11), correspondentes ao caso da equação de Dirac modificada por um fator D'Alembertiano, que representam os dois setores da quiralidade deste sistema, têm modos de propagação para a direita e para a esquerda, misturados em certo grau, que inclusive variam no tempo. Também, as duas últimas soluções, equações (3.12) e (3.13), correspondentes ao caso da equação de Dirac modificada por um fator D'Alembertiano quadrático, que representam os dois setores da quiralidade deste sistema, também com modos de propagação para a direita e para a esquerda, misturados num maior grau de com-

plexidade que no caso anterior. Os termos com fatores $(\xi - \eta)$, $(\xi - \eta)^2$, ξ e η são responsáveis pelo aparecimento de possíveis fantasmas, entre outros termos que podem vir das integrações. Cabe discutir se é possível escolher combinações apropriadas, não-triviais, das funções associadas às condições iniciais, de tal forma que eliminemos esses fantasmas, e, caso seja assim, estudar suas características, tais como estabilidade.

A seguir, apresentamos seções de comparações gráficas, para algumas funções de prova. Os gráficos foram elaborados com ajuda do programa Maple V (ver, por exemplo, [84], [85]).

3.2 Comparação de três casos

Aqui, comparamos graficamente as soluções $\Psi_A(x; t)$, $\Psi_B(x; t)$ e $\Psi_C(x; t)$ para vários valores de t , com a seguinte escolha das condições iniciais :

$$\Psi_A(x; 0) = \Psi_B(x; 0) = \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_B(x; 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_B(x; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_C(x; 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_C(x; 0) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi_C(x; 0) = \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 3.1: Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1ª linha para Ψ_{A1}, Ψ_{A2} ; 2ª linha para Ψ_{B1}, Ψ_{B2} ; 3ª linha para Ψ_{C1}, Ψ_{C2}



Figura 3.2: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 0$

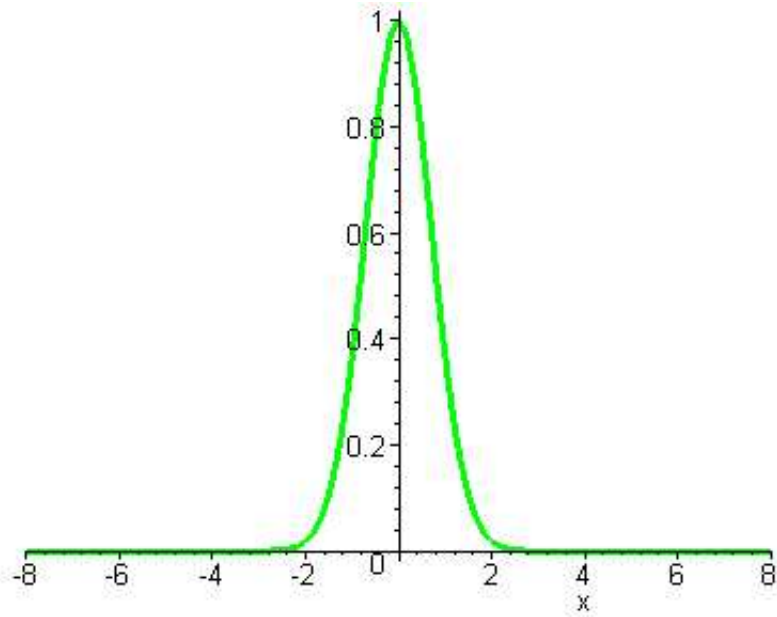


Figura 3.3: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 1$

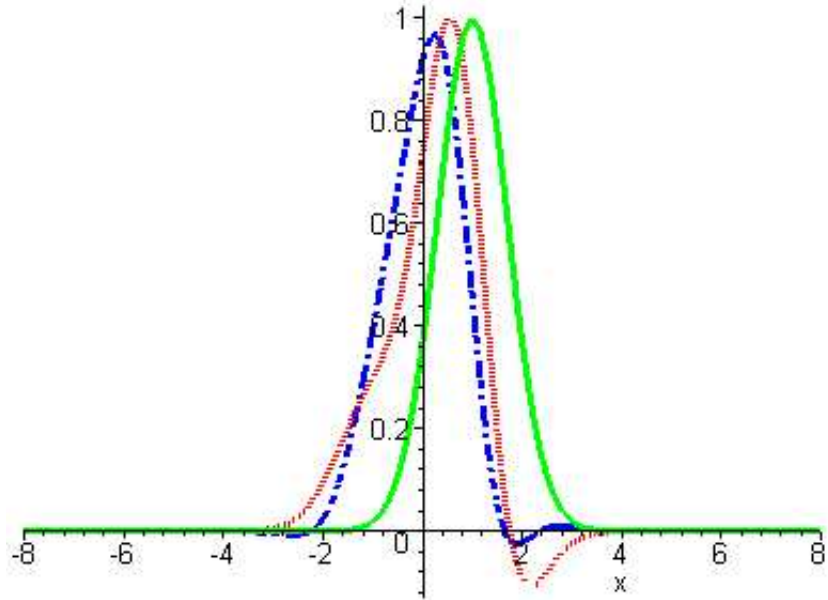


Figura 3.4: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 2$

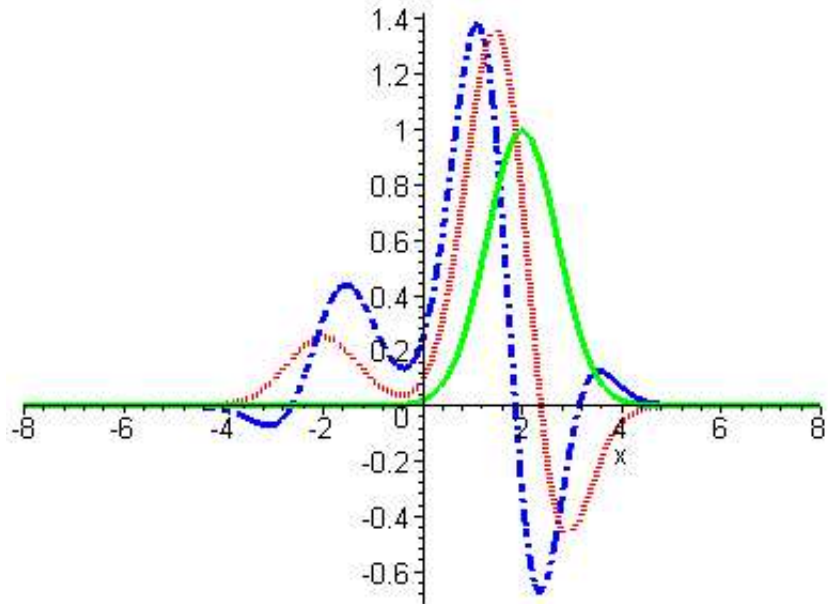


Figura 3.5: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 3$

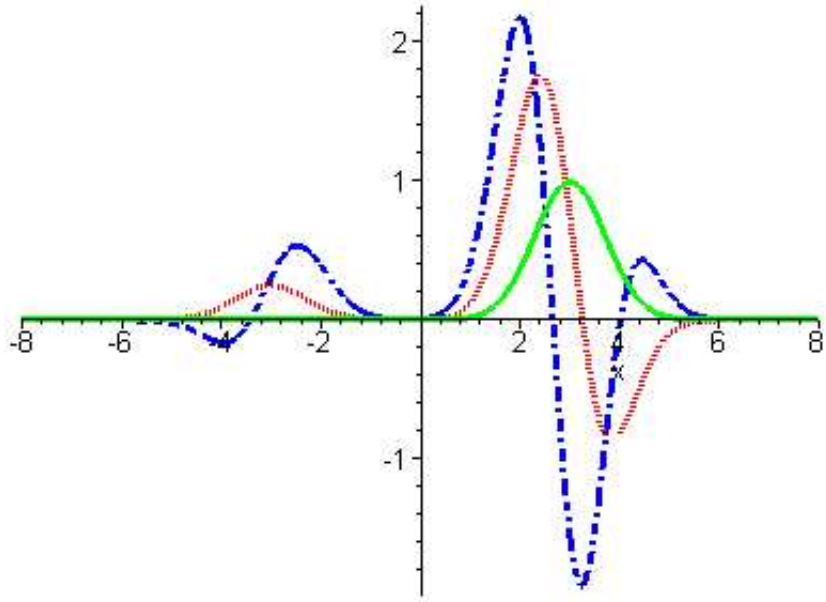


Figura 3.6: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 4$

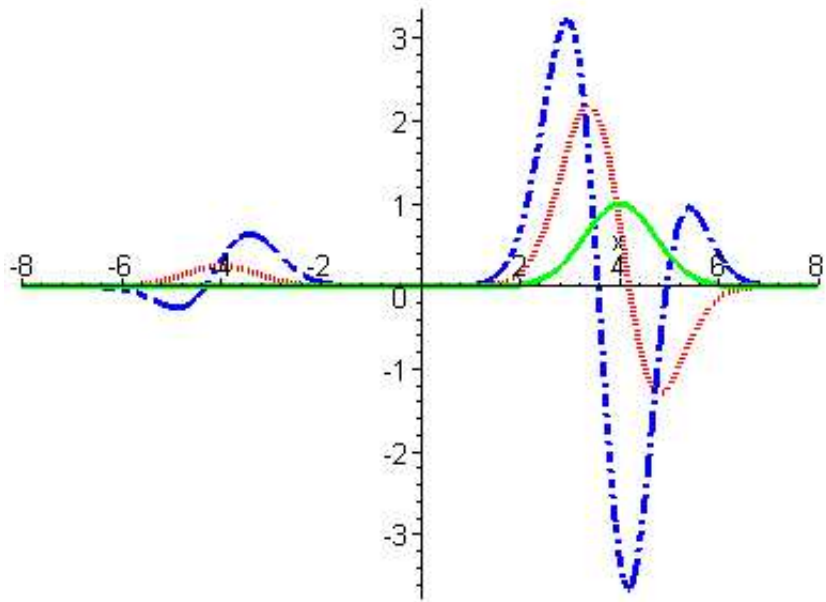


Figura 3.7: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 5$

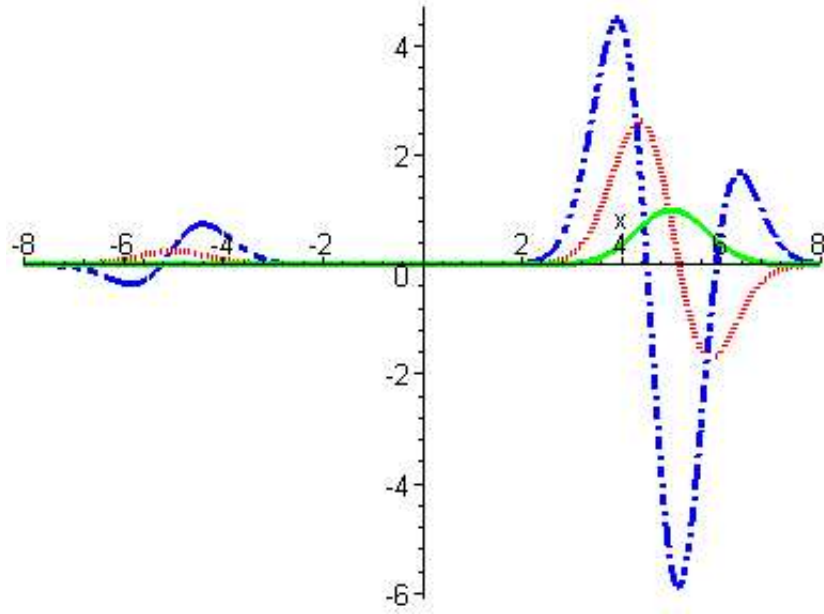


Figura 3.8: $\Psi_{A1}, \Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 15$

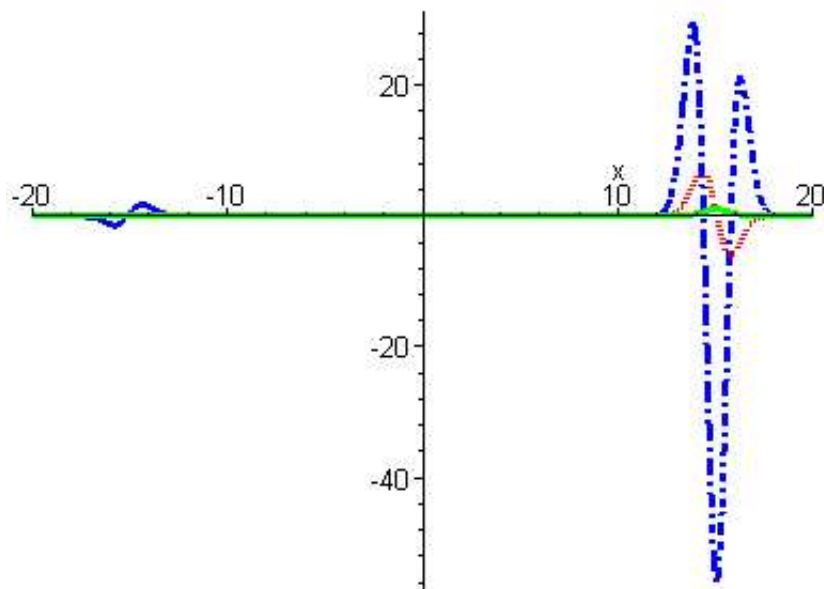


Figura 3.9: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 0$

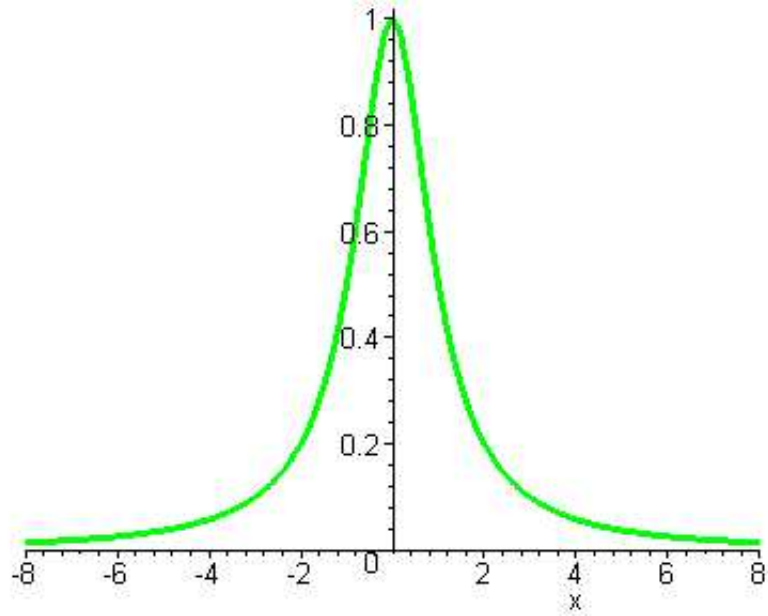


Figura 3.10: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 1$

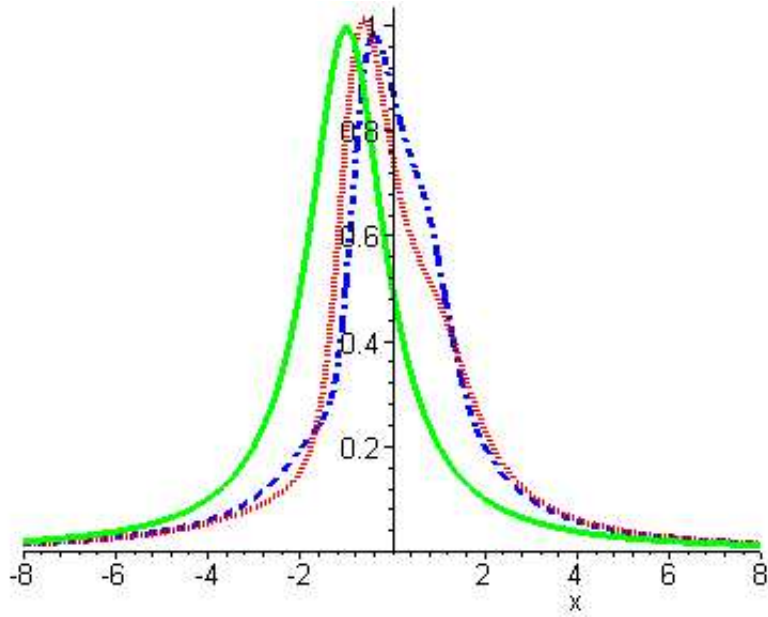


Figura 3.11: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 2$

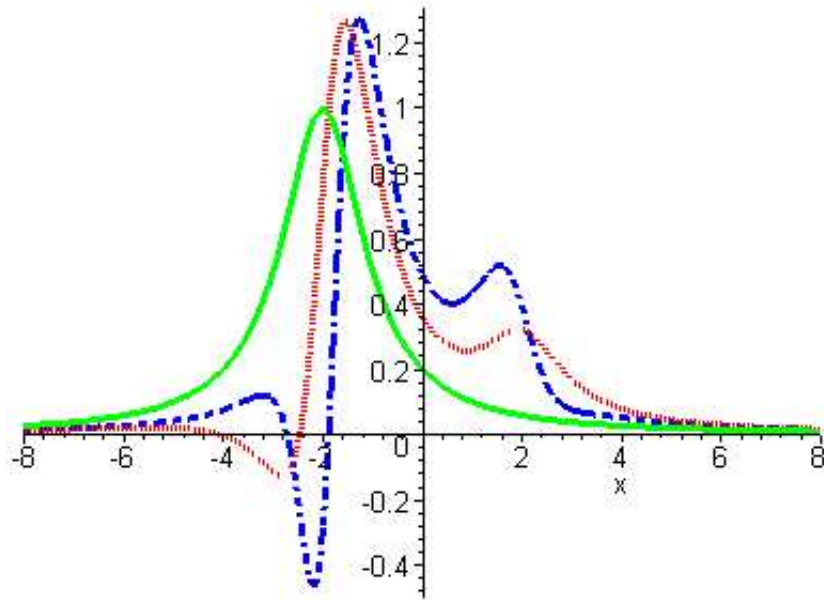


Figura 3.12: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 3$

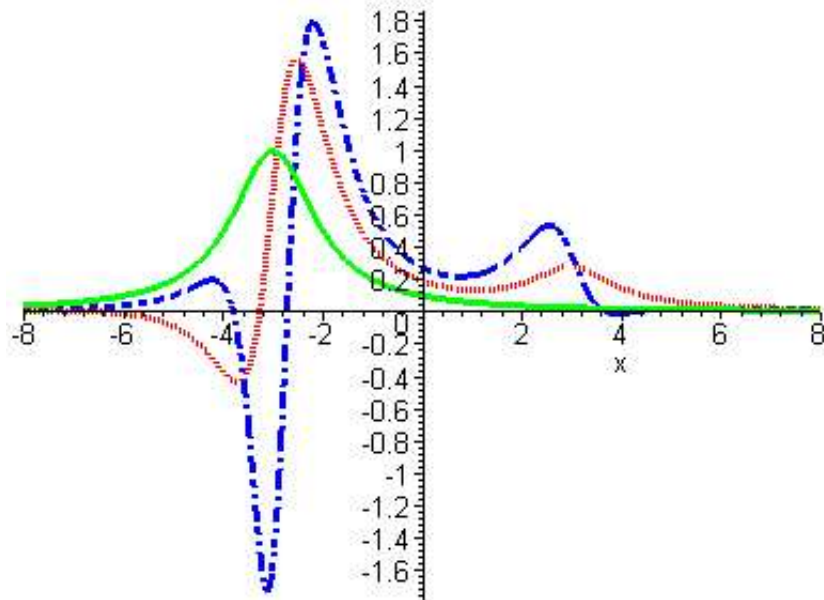


Figura 3.13: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 4$

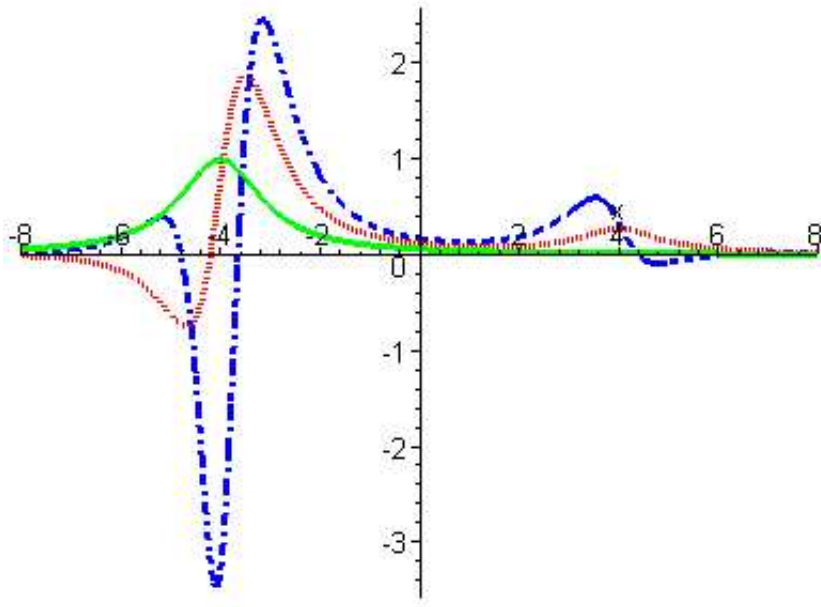


Figura 3.14: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 5$

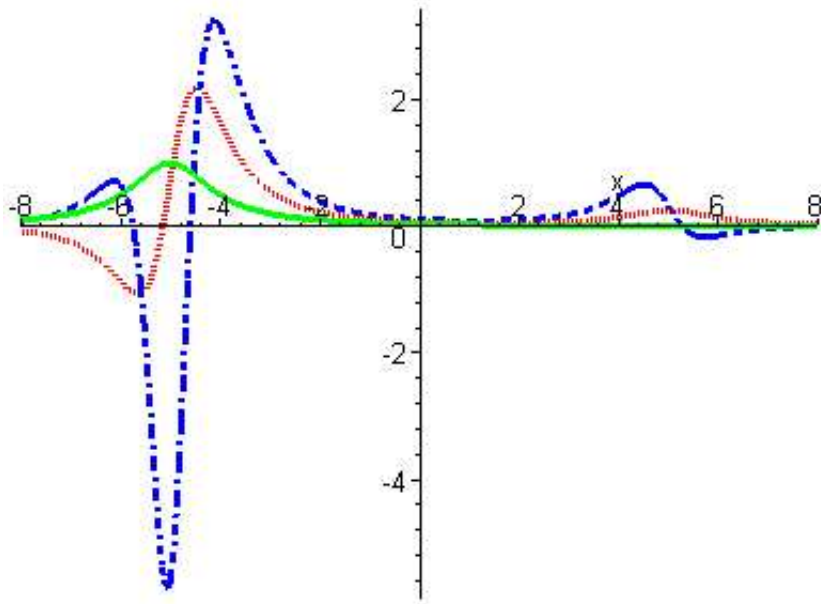
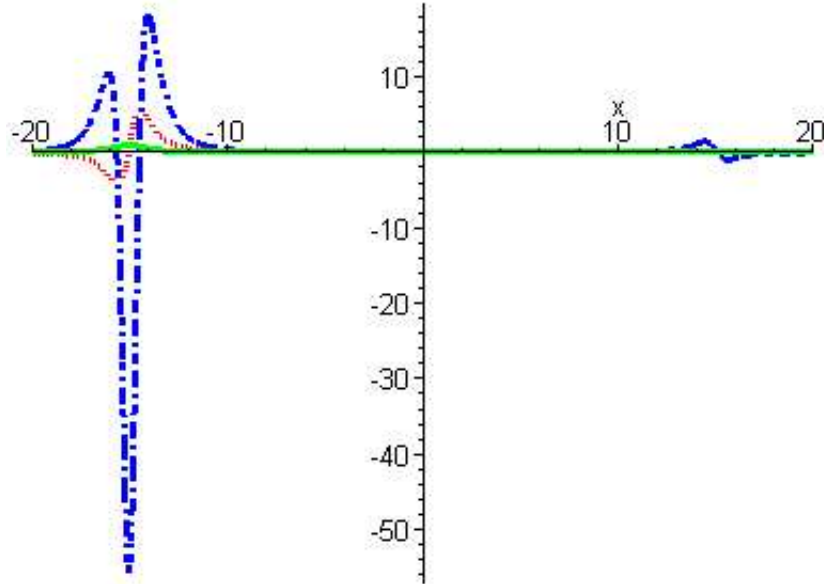


Figura 3.15: $\Psi_{A2}, \Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 15$



3.3 Comparação de dois casos

Aqui comparamos graficamente as soluções $\Psi_B(x; t)$ e $\Psi_C(x; t)$ para varios valores de t , com a seguinte escolha das condiciones iniciais :

$$\Psi_B(x; 0) = \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_B(x; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_B(x; 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi_C(x; 0) = \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 3.16: Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1^a linha para Ψ_{B1} , Ψ_{B2} ; 2^a linha para Ψ_{C1} , Ψ_{C2}



Figura 3.17: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 0$

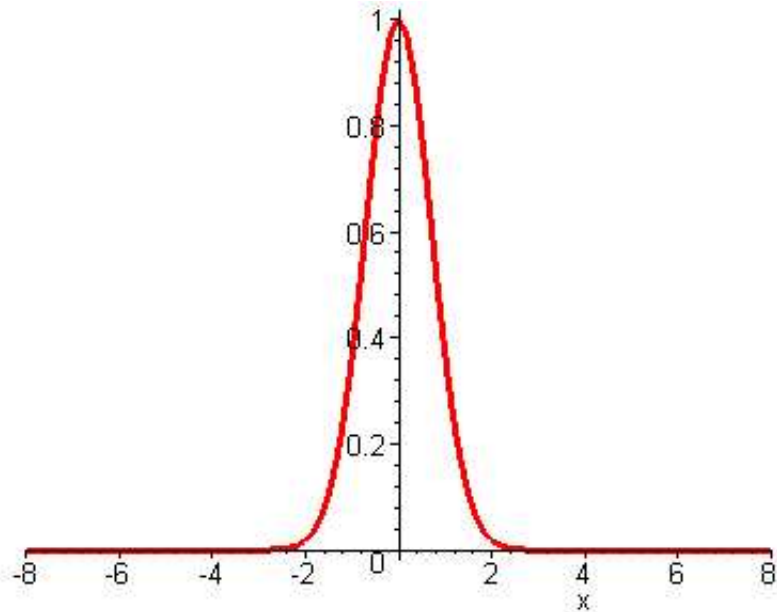


Figura 3.18: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 1$

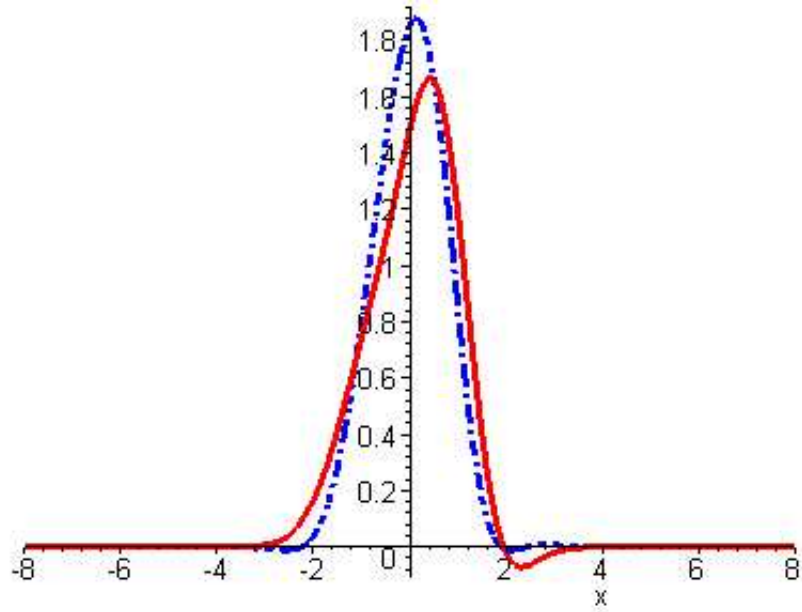


Figura 3.19: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 2$

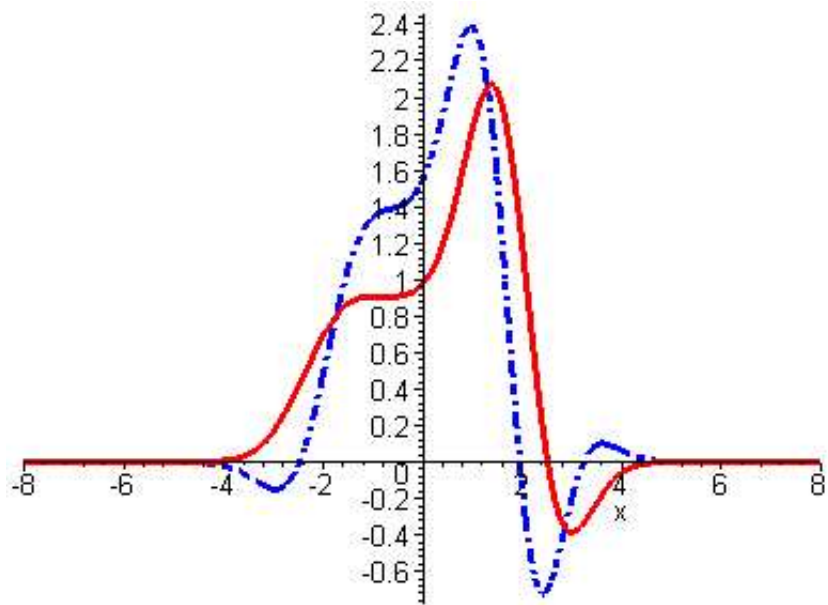


Figura 3.20: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 3$

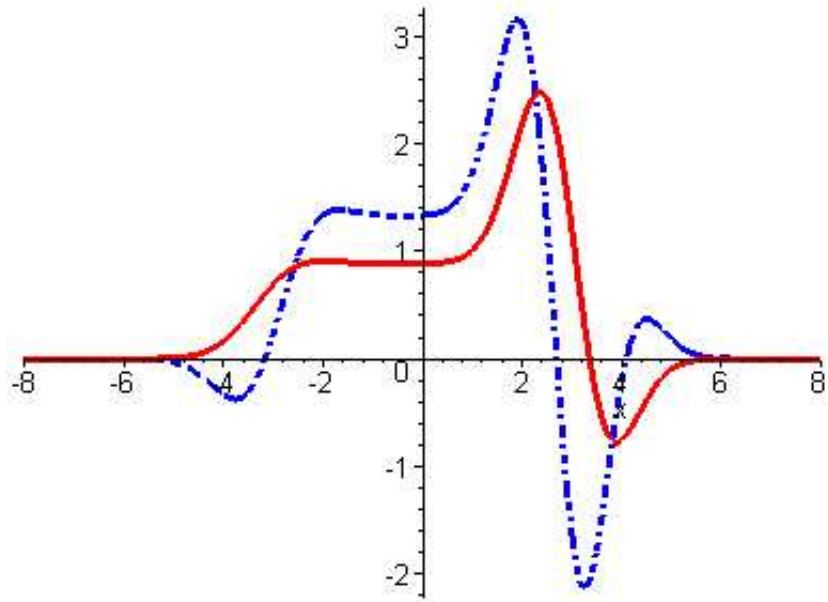


Figura 3.21: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 4$

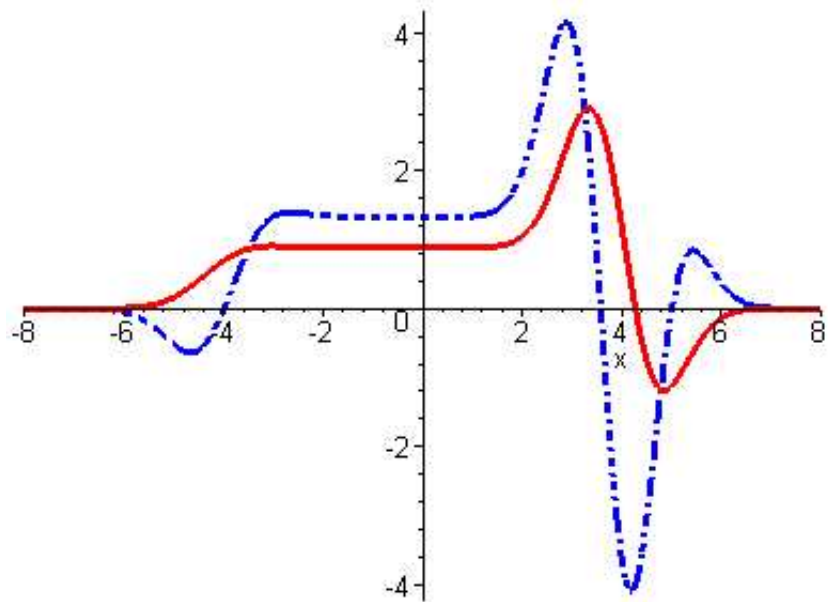


Figura 3.22: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 5$

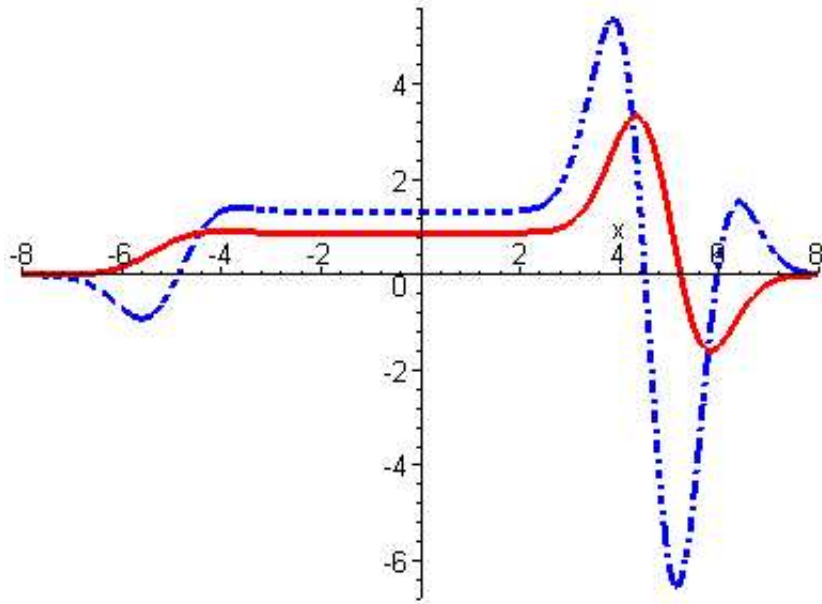


Figura 3.23: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 15$

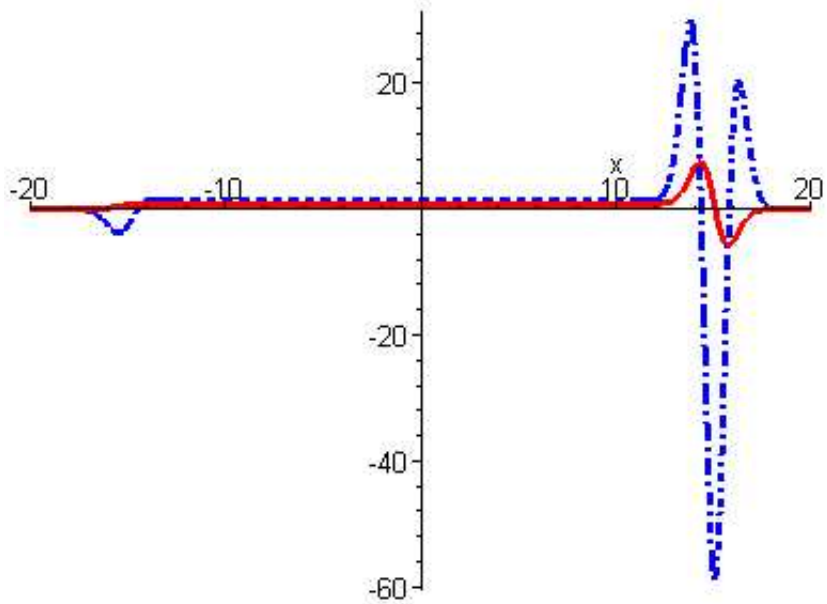


Figura 3.24: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 0$

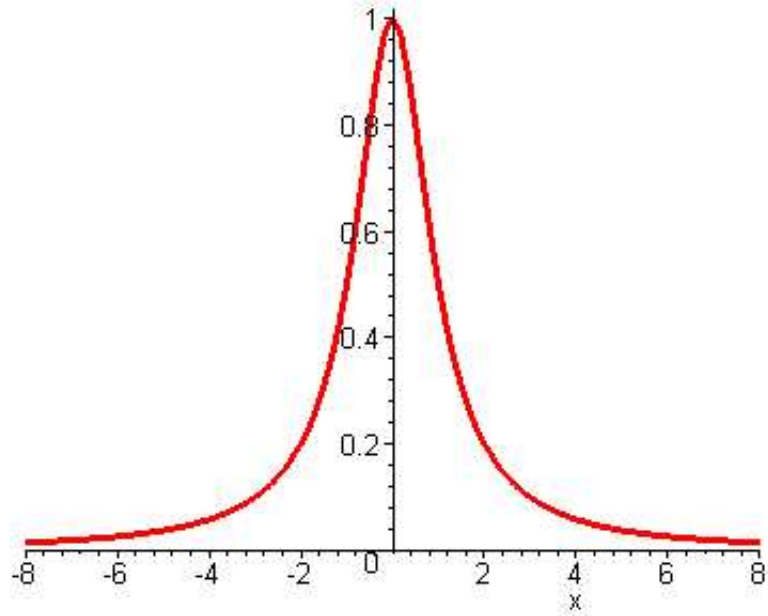


Figura 3.25: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 1$

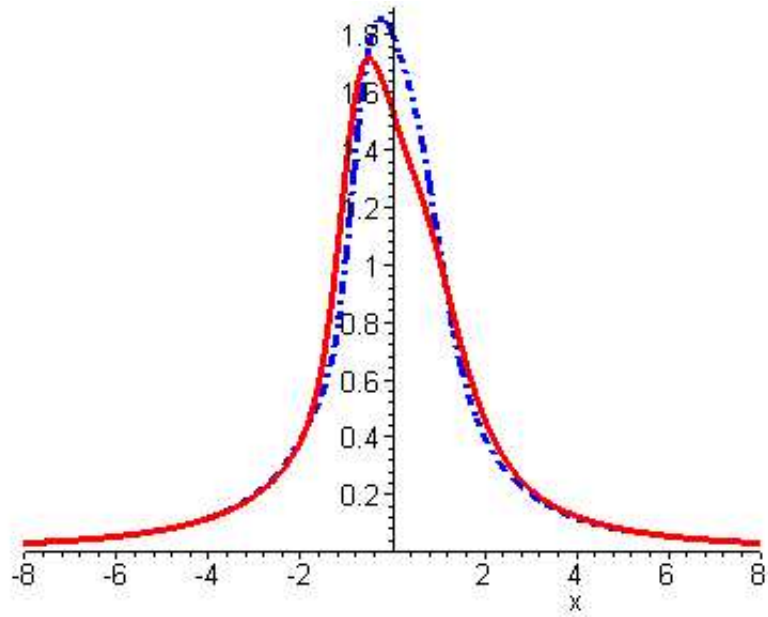


Figura 3.26: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 2$

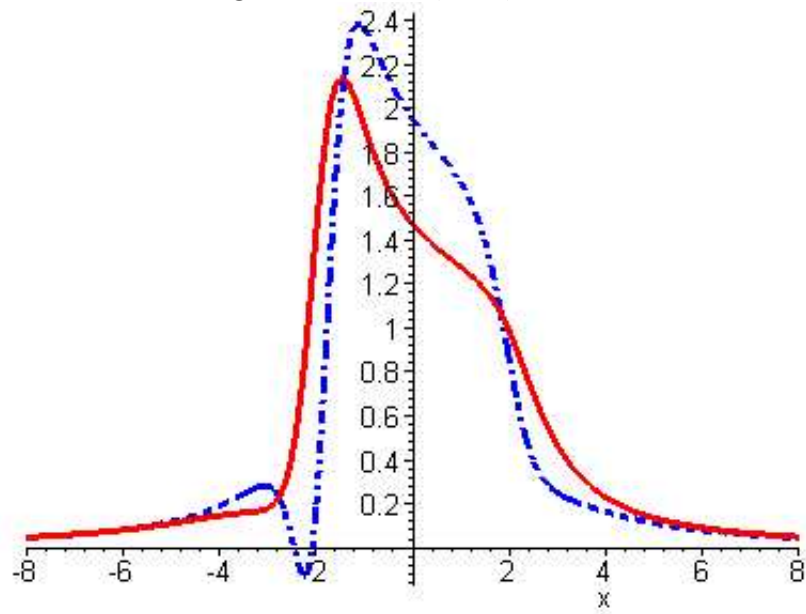


Figura 3.27: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 3$

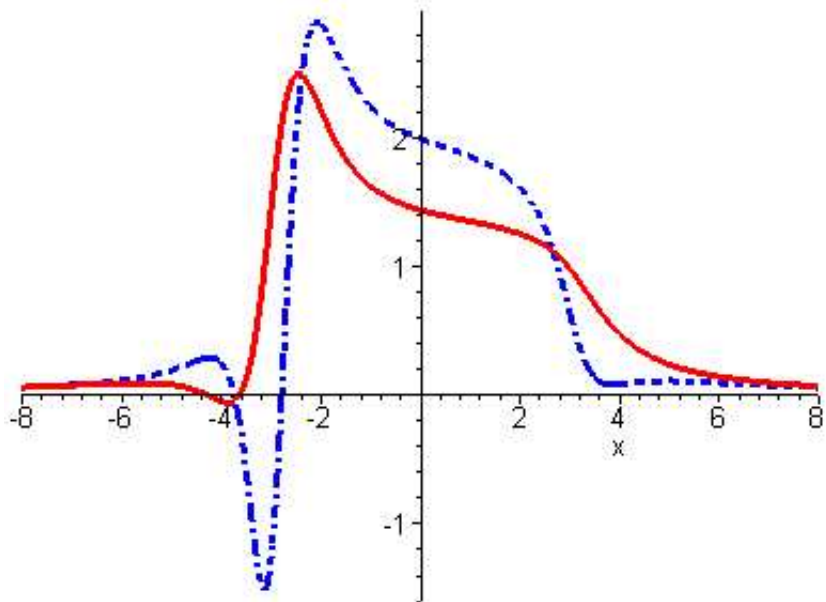


Figura 3.28: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 4$

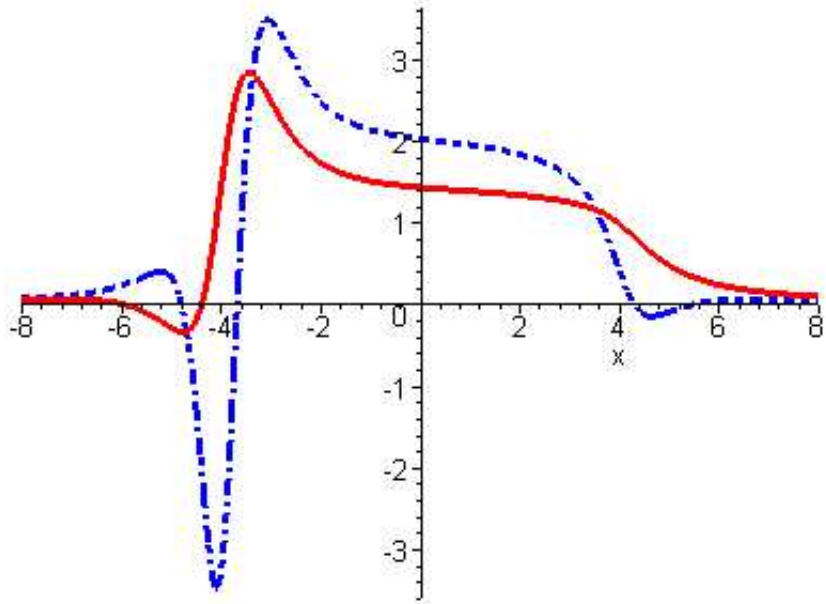


Figura 3.29: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 5$

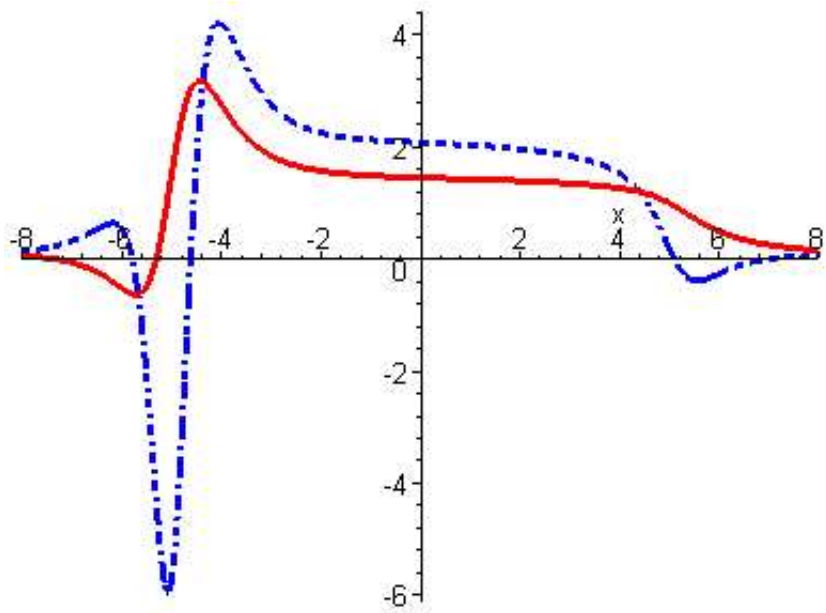
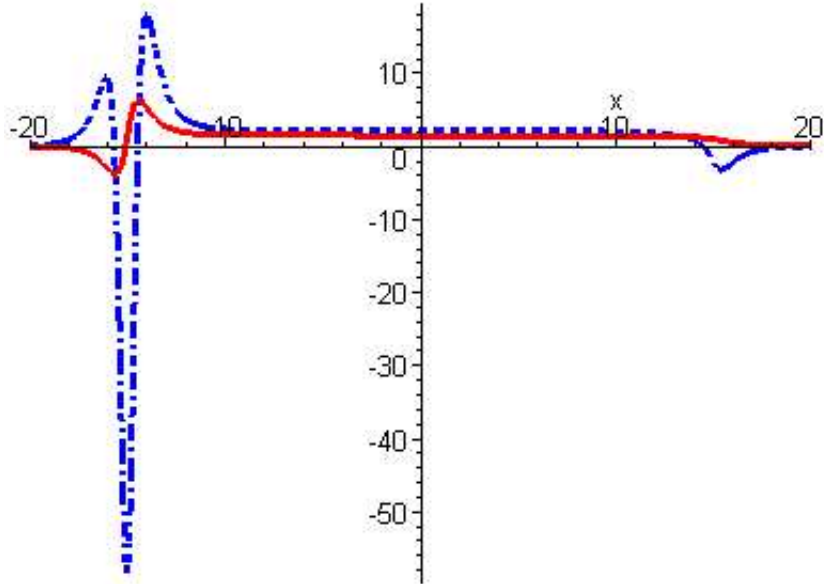


Figura 3.30: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 15$



3.4 Outra comparação de dois casos

Agora comparamos graficamente as soluções $\Psi_B(x; t)$ e $\Psi_C(x; t)$, para varios valores de t , com uma nova escolha das condiciones iniciais :

$$\Psi_B(x; 0) = \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_B(x; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_B(x; 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Psi_C(x; 0) = \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Psi_C(x; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 3.31: Estilos de linha usados nos gráficos desta seção: 1ª linha para Ψ_{B1} , Ψ_{B2} ; 2ª linha para Ψ_{C1} , Ψ_{C2}



Figura 3.32: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 0$

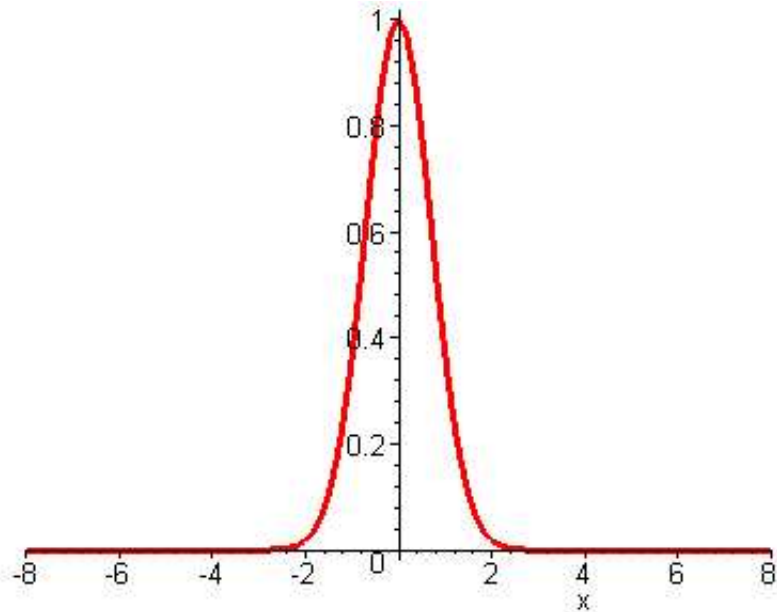


Figura 3.33: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 1$

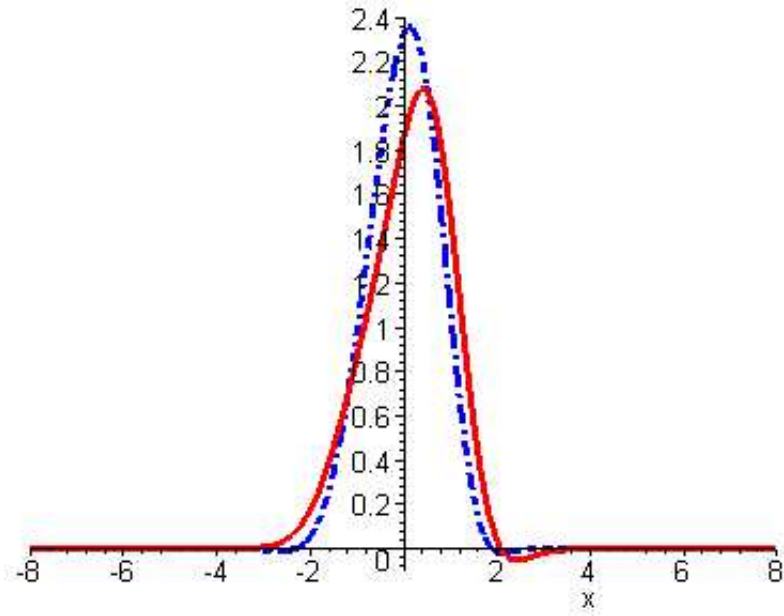


Figura 3.34: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 2$

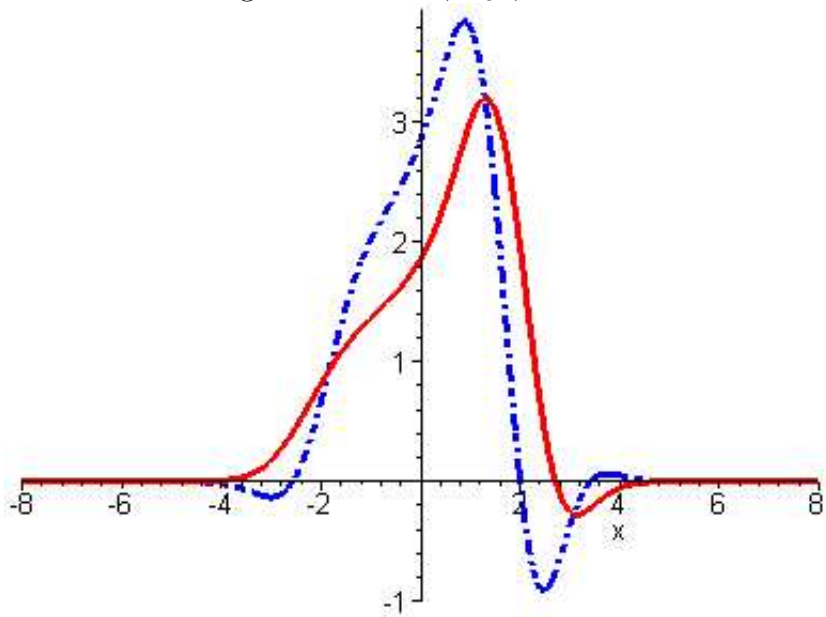


Figura 3.35: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 3$

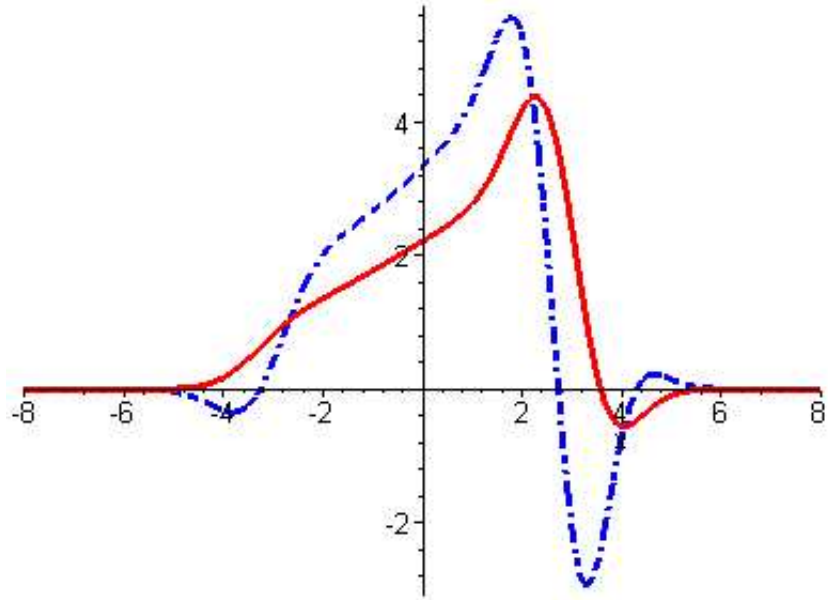


Figura 3.36: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 4$

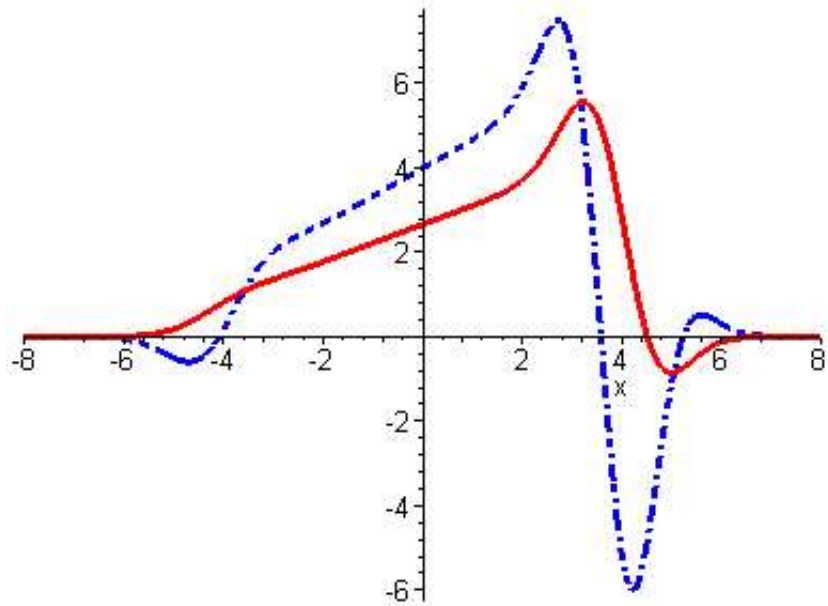


Figura 3.37: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 5$

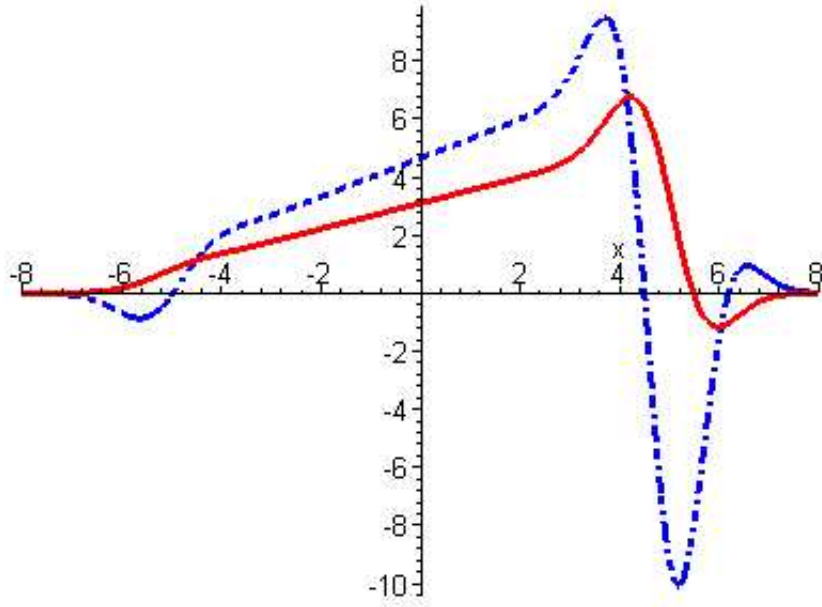


Figura 3.38: $\Psi_{B1}, \Psi_{C1}, t = 15$

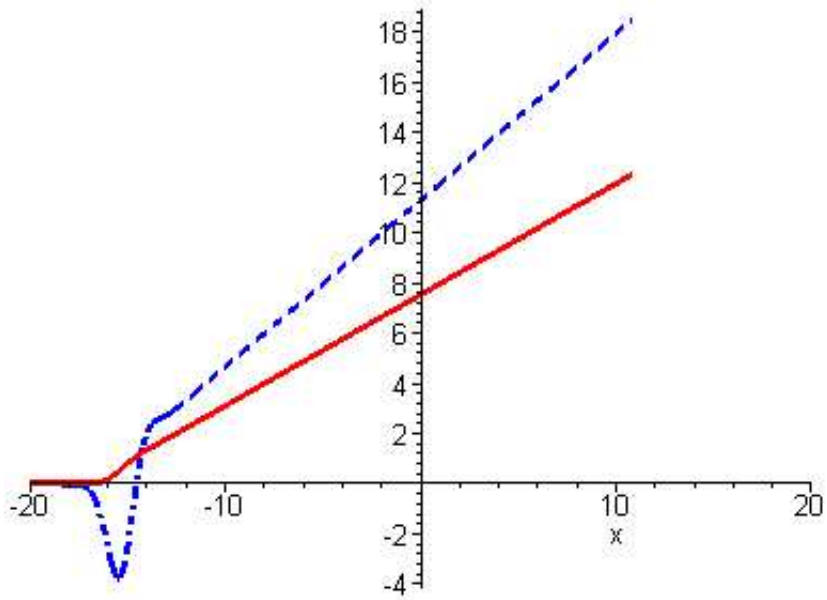


Figura 3.39: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 0$

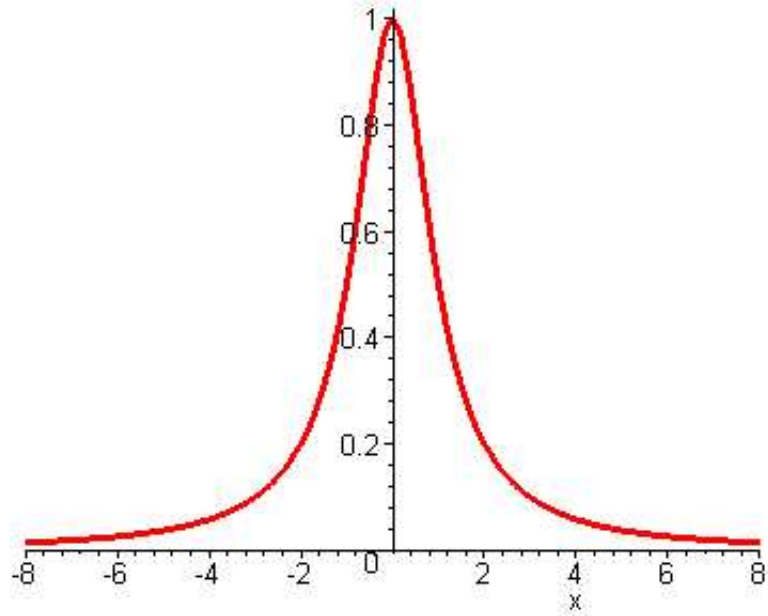


Figura 3.40: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 1$

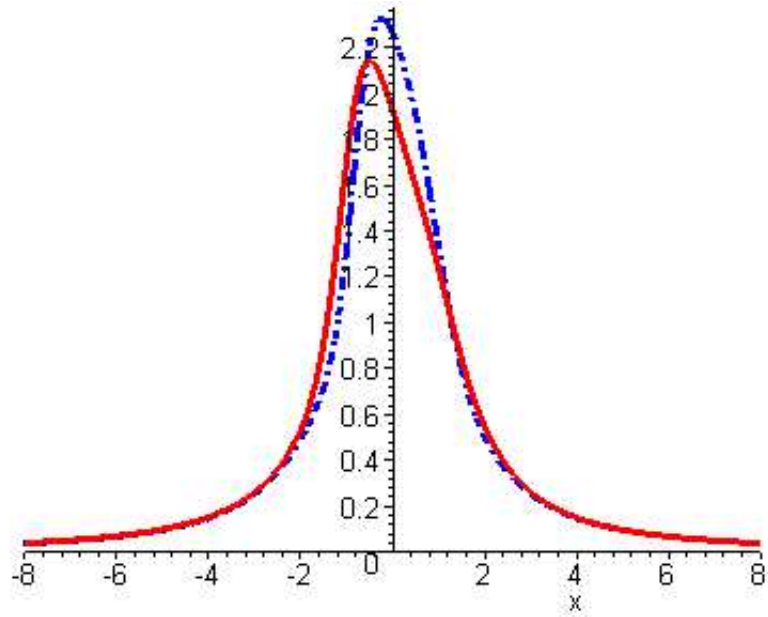


Figura 3.41: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 2$

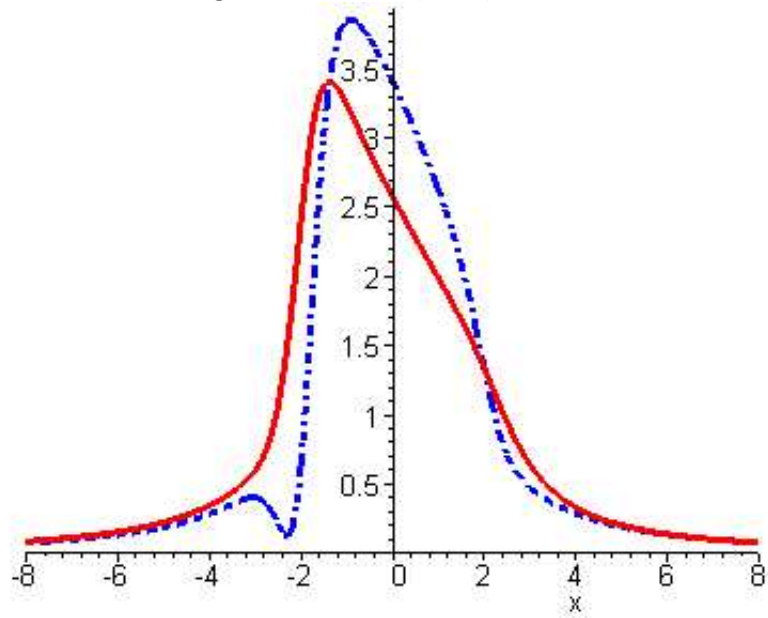


Figura 3.42: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 3$

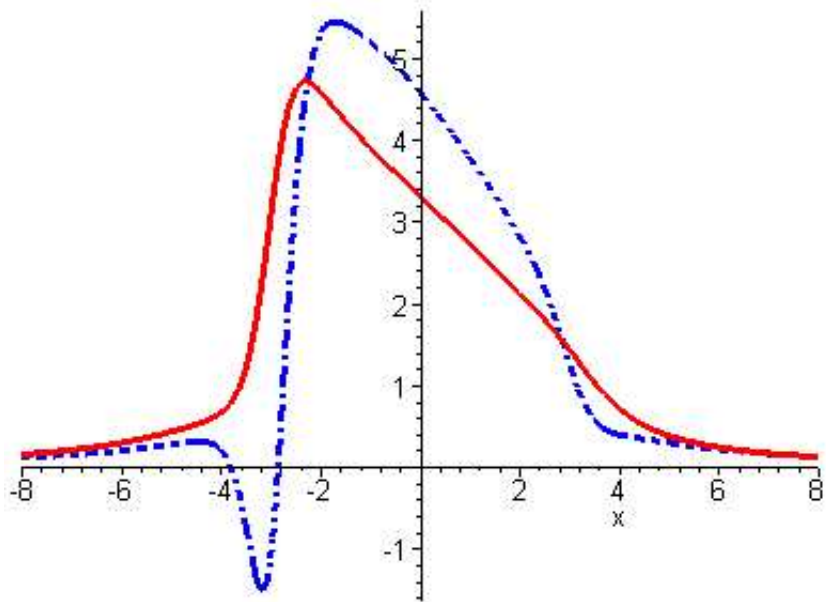


Figura 3.43: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 4$

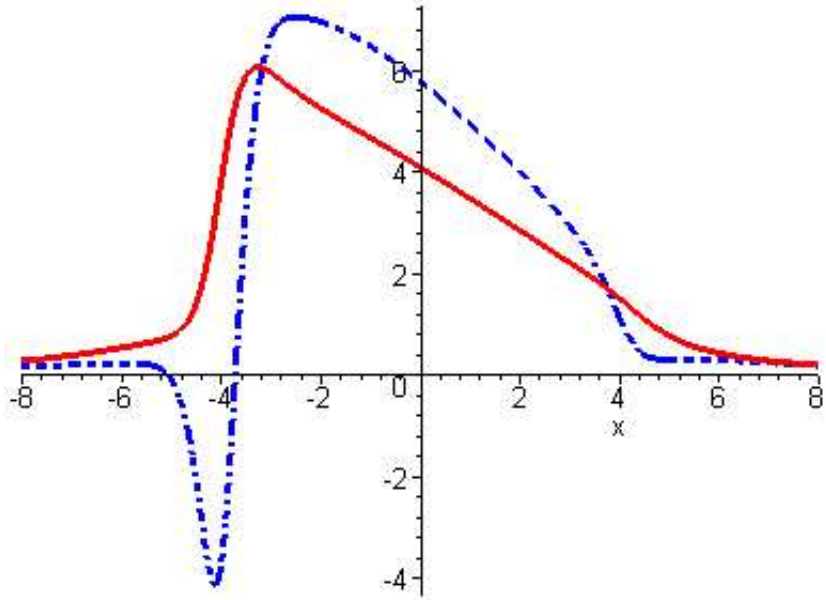


Figura 3.44: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 5$

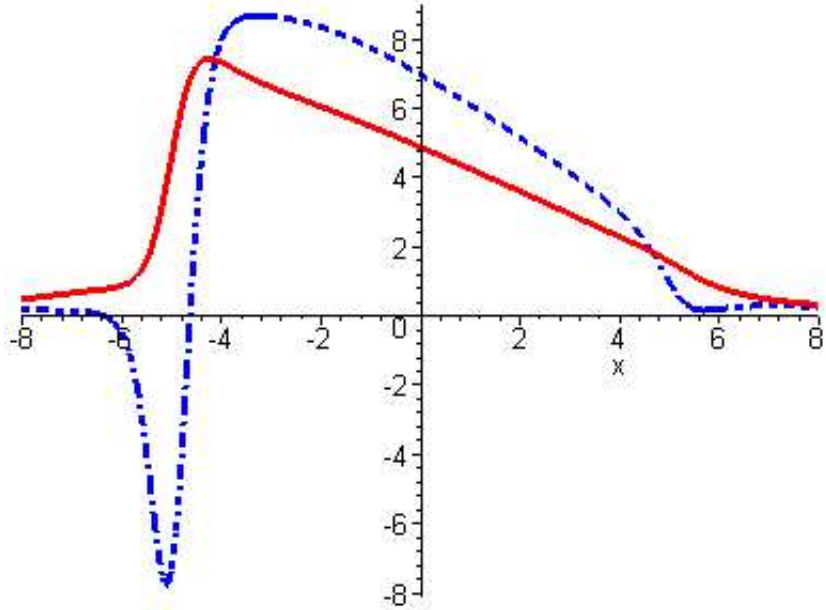
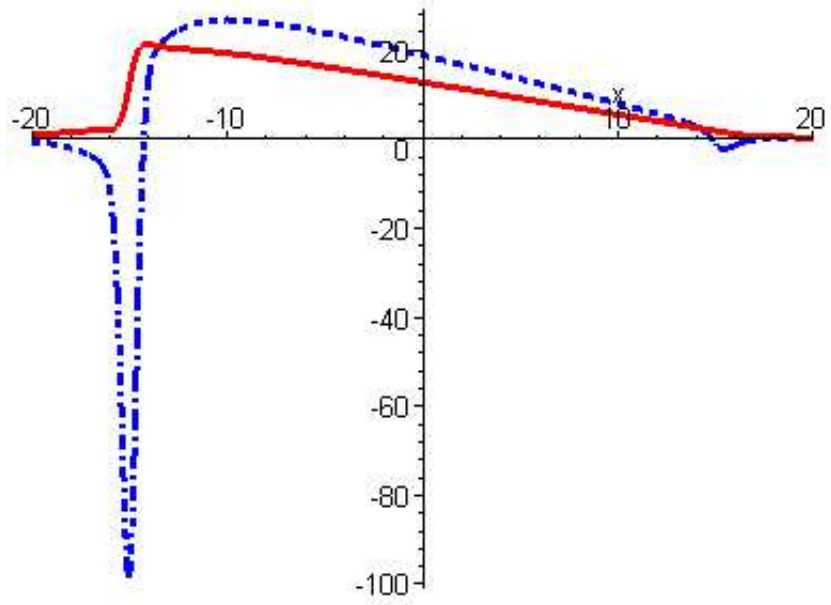


Figura 3.45: $\Psi_{B2}, \Psi_{C2}, t = 15$



Conclusões

Procurou-se elucidar nesta tese a relação entre quiralidade, no sentido espinorial, e modo de propagação para campos fermiônicos em espaços-tempo de (1+1) dimensões. Na teoria usual para férmions, baseada na equação de Dirac, fica clara a relação um-a-um existente entre a quiralidade do férmion e seu modo de propagação para a direita ou esquerda. A introdução de derivadas superiores quebra esta relação, de modo que a quiralidade não mais define o tipo de propagação. Consegue-se, com as soluções exatas que obtivemos nos diferentes casos contemplados, calcular a porcentagem referente aos diferentes modos de propagação para cada setor de quiralidade do férmion.

Os resultados encontrados também nos possibilitam uma visão clara dos modos não-físicos classicamente e que simulam, sempre a nível de teoria clássica, o comportamento dos modos-fantasma presentes em campos com dinâmica governada por derivadas superiores.

Uma possível etapa a ser cumprida posteriormente será a investigação de possíveis fontes externas que sejam capazes de cancelar os efeitos não-físicos dos modos-

fantasma advindos das derivadas superiores. Esta tarefa pode nos abrir a compreensão sobre como o acoplamento de campos com excitações não-físicas a partículas correntes externas pode viabilizar o cancelamento de tais excitações. Esta questão traria uma certa modelagem clássica o que se conhece na literatura como os fantasmas de Faddeev-Popov, e nos propomos a estudá-la como prosseguimento do trabalho desta tese.

Apêndice A

Método de D'Alembert para a equação da corda

Um sistema (1+1) dimensional típico é o da corda distendida infinita (caso usualmente considerado nos textos de física-matemática ou de equações diferenciais parciais, ver por exemplo [80], [81], [82]) que obedece à equação diferencial parcial de tipo hiperbólico:

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{A.1})$$

Agora, utilizando a mudança de variáveis

$$\xi = x - vt, \quad \eta = x + vt \quad (\text{A.2})$$

e adotando a notação

$$u(x; t) = \tilde{u}(\xi; \eta) \quad (\text{A.3})$$

obtemos, usando a Regra da Cadeia, os seguintes resultados

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$$

Logo, a equação original (A.1) transforma-se na seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cuja solução mais geral é, claramente:

$$\tilde{u}(\xi; \eta) = f(\xi) + g(\eta) \tag{A.4}$$

ou, em função das variáveis originais:

$$u(x; t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{A.5}$$

Nesta fórmula, o termo $f(x - vt)$ representa a componente da onda que viaja para a direita (com velocidade v), e, o termo $g(x + vt)$, a que viaja para a esquerda (também com velocidade v).

Agora vamos supor que conhecemos as condições iniciais:

$$u(x; 0) = A(x) \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = B(x) \tag{A.7}$$

Logo, de (A.5) e (A.6) obtemos:

$$A(x) = f(x) + g(x) \tag{A.8}$$

Também, levando em conta que:

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \xi} + v \frac{\partial \tilde{u}(\xi; \eta)}{\partial \eta}$$

e, usando este resultado conjuntamente com (A.4) e (A.7), obtemos:

$$B(x) = -vf'(x) + vg'(x) \tag{A.9}$$

Agora, isolando $f(x)$ em (A.8), e diferenciando, temos:

$$f'(x) = A'(x) - g'(x)$$

Logo, substituindo este resultado na equação (A.9), e logo isolando $g'(x)$, temos:

$$g'(x) = \frac{1}{2}A'(x) + \frac{1}{2v}B(x)$$

Integrando:

$$g(x) = \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2v} \int_a^x dy B(y) + C1$$

onde a e $C1$ são constantes. Substituindo este resultado na equação (A.8), e logo, isolando $f(x)$, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{2}A(x) - \frac{1}{2v} \int_a^x dy B(y) - C1$$

Agora, usando estas últimas duas equações conjuntamente com a equação (A.5), e, após simplificar, temos finalmente, a *fórmula de D'Alembert*:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} \left[A(x - vt) + A(x + vt) \right] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dy B(y). \tag{A.10}$$

Apêndice B

Algumas identidades úteis de análise matemática

A seguir temos alguns resultados úteis da análise matemática (ver por exemplo [83]), usados no Capítulo 2.

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^b dx F(x) = F(b), \quad \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b dx F(x) = -F(a) \quad (\text{B.1})$$

onde a e b são constantes.

$$\frac{d}{d\alpha} \int_p^q dx G(x, \alpha) = \int_p^q dx \frac{\partial}{\partial \alpha} G(x, \alpha) + G(q, \alpha) \frac{dq}{d\alpha} - G(p, \alpha) \frac{dp}{d\alpha} \quad (\text{B.2})$$

onde p e q são funções de α .

Agora, baseandonos em (B.1) e (B.2) obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) = (\xi - \eta)F(\xi) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) = \int_{\xi}^{\eta} dz F(z) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz F(z) = \int_{\xi}^{\eta} dz F(z) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz F(z) = (\xi - \eta)F(\eta) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du F(u) = -\frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 F(\xi) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz \int_{\xi}^z du F(u) = \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\xi}^y dz F(z) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du F(u) = \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz F(z) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi}^{\eta} dy \int_{\eta}^y dz \int_{\eta}^z du F(u) = \frac{1}{2}(\xi - \eta)^2 F(\eta) \quad (\text{B.10})$$

Apêndice C

Código em Maple

Foi usado o programa Maple V, versão 5.1, para elaborar os gráficos desta tese e também como ajuda para detectar possíveis erros nas soluções das equações do Capítulo 2, onde foi particularmente muito útil. A seguir vamos descrever alguns segmentos de código usados para construir funções definidas mediante derivadas e integrais, nas formas utilizadas nas soluções dos Capítulos 1 e 2.

Para definir uma função da forma $F(x) = e^{-x^2}$ podemos usar a seguinte linha:

```
> F:=unapply(exp(-x^2),x);
```

Agora, suponhamos que precisamos definir uma função $G(a, b)$ segundo a integral simples, $G(a, b) = \int_a^b dx F(x)$. Então, considerando que já temos definido a função $F(x)$, podemos usar para tal propósito a seguinte linha de código:

```
> G:=unapply(int(F(x),x=a..b),a,b);
```

Agora, se queremos definir uma função da forma $H(a, b) = \int_a^b dy \int_a^y dz F(z)$ podemos usar o seguinte código:

```
> H:=unapply(int(int(F(z),z=a..y),y=a..b),a,b);
```

Similarmente, se queremos definir uma função da forma $I(a, b) = \int_a^b dy \int_a^y dz \int_a^z du F(u)$ podemos usar o seguinte código:

```
> I:=unapply(int(int(int(F(u),u=a..z),z=a..y),y=a..b),a,b);
```

Agora, supohnamos queremos definir uma função $J(x)$ a partir de operações de derivação sobre a função $F(x)$, que já temos definido antes, segundo, por exemplo, $J(x) = F''(x)$. Podemos usar para tal propósito a seguinte linha de código:

```
> J:=unapply(diff(F(x),x,x),x);
```

Similarmente, para definir uma função da forma $K(x) = F''''(x)$ basta usar a linha de código:

```
> K:=unapply(diff(F(x),x,x,x,x),x);
```

Então, usando combinações destes segmentos de código, podemos construir em Maple funções com formatos usados para expresar as soluções das equações consideradas em capítulos prévios. Tais funções construídas para o programa Maple permitem fazer gráficos e outros tipos de operações com ajuda do computador, como verificação de soluções e ainda cálculos analíticos exatos.

Bibliografia

- [1] A.M. Chervyakov and V.V. Nesterenko, hep-th/9305175 v1, 1993.
- [2] S.W. Hawking, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics* vol 2, ed. I.A. Batalin, C.J. Isham and C.A. Vilkovisky (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [3] V.V. Nesterenko, *J. Phys. A: Gen.* **22** 1673 (1989).
- [4] A. Gavrielides, T.K. Kuo, and S.Y. Lee, *Phys. Rev. D* **13**, 2912 (1976).
- [5] B.G Englert, J. Karkowski and J.M. Rayski, *Phys. Lett. B* **83** 399 (1979).
- [6] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory*, New York: Benjamin-Cummings, 1960.
- [7] M. Kaku, *Phys. Rev. D* **27** 2809 (1983).
- [8] B. Podolsky and P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20** 40 (1948).
- [9] S.A. Gogilidze, V.V. Sanadze, Yu.S. Surovtsev and F.G. Tkebuchava, *Theor. Math. Phys.* **102** 40 (1995).

- [10] R. Utiyama and B.S. De Witt, *J. Math. Phys.* **3** 608 (1962).
- [11] K.S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [12] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B* **201** 469 (1982).
- [13] B. Zwiebach, *Phys. Lett. B* **156** 315 (1965).
- [14] D.G. Boulware, *Quantum Theory of Gravity*, Bristol, 1984.
- [15] V.V. Nesterenko and Nguyen Sua Han, *Int. J. Mod. Phys. A* **3** 2315 (1988).
- [16] C. Battle, J. Gomis, J.M. Pons and N. Roman, *Lett. Math. Phys.* **13** 17 (1987).
- [17] J.Z. Simon, *Phys. Rev. D* **41** 3720 (1990).
- [18] G.L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, Wiley Interscience, 1980.
- [19] H. Weyl, *Ann. Phys.* **59** 101 (1919); *Phys. Z.* **22** 473 (1921).
- [20] J.D Barrow and A.C. Ottewill, *J. Phys. A* **16** 2757 (1983).
- [21] M.B. Mijic, M.S. Morris and W.-M. Suen, *Phys. Rev. D* **34** 2934 (1986).
- [22] K.S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [23] F.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B* **201** 469 (1982).
- [24] T. Hamazaki and T. Kugo, *Prog. Theo. Phys.* **92** 645 (1994).
- [25] J. Barcelos-Neto and C.P. Natividade, *Z. Phys. C* **49** 511 (1991).

- [26] S. Dube and L. Marleau, *Phys. Rev. D* **41** 1606 (1990).
- [27] J. Neto, *J. Phys. G* **20** 1527 (1994).
- [28] D. Musicki, *J. Phys. A* **11** 39 (1978).
- [29] T. Nakamura and S. Hamamoto, *Prog. Theor. Phys.* **95** 469 (1995),
hep-th/9511219.
- [30] S. Hamamoto, hep-th/9503177 (1995).
- [31] I. Damian, *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2141 (2000).
- [32] Giovanni Giachetta, math-ph/0304025, 2003.
- [33] M. Borneas and I. Damian, *Int. J. Phys.* **38** 2241 (1999).
- [34] N.P. Chitaya, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** 143 (1997), hep-th/9706202.
- [35] M. Borneas, *Phys. Rev.* **186** 1299 (1969).
- [36] D. Ts. Stoyanov, hep-th/9604060, 1996.
- [37] K. Fujii, *Lett. Math. Phys.* **15** 137 (1988).
- [38] A.D. Mitov, M.N. Stoilov and D.Ts. Stoyanov, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 1651
(1999), hep-th/9707144.
- [39] E.D. Williams, hep-th/9606064, 1996.

- [40] J. Barcelos-Neto and N.R.F. Baga, *Phys. Rev. D* **39** 494 (1989).
- [41] K. Fujii, *Lett. Math. Phys.* **17** 197 (1989).
- [42] A.A. Soloshenko and K.V. Stepanyants, *Theor. Math. Phys.* **131** 558 (2002).
- [43] A.A. Soloshenko and K.V. Stepanyants, hep-th/0203118, 2002.
- [44] S.V. Ketov, *Sov. Phys. J.* **33** 355 (1990).
- [45] A.A. Deriglazov and S.V. Ketov, *Theor. Math. Phys.* **77** 1160 (1988).
- [46] N.V. Krasnikov, A.B. Kyiatkin and E.R. Poppitz, *Phys. Lett. B* **222** 66 (1989).
- [47] S.W. Hawking and J.C. Luttrell, *Nucl. Phys. B* **247** 250 (1984).
- [48] D. Boccaletti, *Nuovo Cim. B* **105** 929 (1990).
- [49] J.Z. Simon, *Phys. Rev. D* **43** 3308 (1991).
- [50] F.D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **45** 2814 (1992).
- [51] A. Gavrielides, T.K. Kuo and S.Y. Lee, *Phys. Rev. D* **12** 1829 (1975)
- [52] K.S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** 353 (1978).
- [53] H.H. Von Borzeszkowsky, Valeri P. Frolov, *Annalen Phys.* **37** 285 (1980).
- [54] S. Kawasaki, T. Kimura and K. Kitago, *Prog. Theor. Phys.* **66** 2085 (1981).
- [55] C. Jankiewicz, *Acta. Phys. Polon. B* **12** 859 (1981).

- [56] S. Kawasaki and T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **68** 1749 (1982).
- [57] S. Kawasaki and T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **69** 1015 (1983).
- [58] I.G. Avramidi, *Yad. Fiz.* **44** 255 (1986).
- [59] I.L. Buchbinder and S.L. Lyakhovich, *Sov. Phys. J.* **28** 951 (1985).
- [60] Z. Simon, *Phys. Rev. D* **43** 3308 (1991).
- [61] K. Lee and W. Siegel, hep-th/0303171, 2003.
- [62] C. Grosse-Knetter, *Phys. Rev. D* **49** 6709 (1994), hep-th/9306321.
- [63] C. Ragiadakos, *Nuovo Cim. A* **49** 175 (1979).
- [64] J. Rayski, *Lett. Nuovo Cim.* **25** 148 (1979).
- [65] M.A. Namazie, *J. Phys. A* **13** 713 (1980).
- [66] M.Day, *Nucl. Phys. B* **213** 501 (1983).
- [67] K.A. Kazakov and P.I. Pronin, *Theor. Math. Phys.* **121** 1585 (1999), *Teor. Mat. Fiz.* **121** 387 (1999).
- [68] E.V. Bagdasarova and K.V. Stepanyants, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **57N3** 13 (2002), *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **57N3** 41 (2002).
- [69] P.I. Pronin, B.A. Rozentul and K.V. Stepeanyants, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **58N5** 13 (2003), *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **58N5** 13 (2003).

- [70] A.A. Soloshenko and K.V. Stepanyants, *Theor. Math. Phys.* **134** 377 (2003),
Teor. Mat. Fiz. **134** 430 (2003).
- [71] A.A. Soloshenko and K.V. Stepanyants, *Theor. Math. Phys.* **140** 1264 (2004),
Teor. Mat. Fiz. **140** 437 (2004), hep-th/0304083.
- [72] J. Barcelos-Neto and C.P. Natividade, *Z. Phys. C* **51** 313 (1991).
- [73] K. Fujii, *Commun. Math. Phys.* **101** 207 (1985).
- [74] S.P. Alwis, *Phys. Rev. D* **34** 3760 (1986).
- [75] T.L. Curtright, G.I. Ghandour and C.K. Zachos, *Phys. Rev. D* **34** 3811 (1986).
- [76] R. Gregory, *Phys. Lett. B* **199** 206 (1988).
- [77] K. Maeda and N. Turok, *Phys. Lett. B* **202** 376 (1988).
- [78] Ricardo Sibanto Simões, *Soluções de D'Alembert Estendidas para Equações de Onda com Derivadas de Ordem Superiores*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.
- [79] L.G. Ferreira Filho, J.A. Helayël Neto, A. William Smith, *Higher-Derivative Wave Equations in (1+1)D: Exact Solutions with External Sources*, CBPF, Notas de Física, Rio de Janeiro, 2004.
- [80] E. Butkov, *Física Matemática*, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Rio de Janeiro, 1988.

- [81] A.N. Tjonov and A.A. Samarski, *Ecuaciones de la Fisica Matematica*, Mir, Chicago, 1972.
- [82] D. Greenspan, *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover, New York, 2000.
- [83] F. Woods, *Advanced Calculus*, Ginn and Company, New York, 1934.
- [84] R. Portugal, *Introdução Ao Maple*, Monografia, CBPF, Rio de Janeiro, 1996.
- [85] Bruce Char, Keith Geddes, Gaston Gonnet, *First Leaves: A Tutorial Introduction To Maple V*, Springer International, Berlin, 1992.