Dissertação de

Mestrado

Considerações de Mecânica Supersimétrica e um novo cenário para a Carga Central

Leonardo Ospedal Prestes Rosas

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Março de 2013.

Aos meus familiares.

Agradecimentos

- Inicialmente agradeço à DEUS pelas maravilhosas bençãos que tenho recebido em minha vida.

- Aos meus familiares pelo apoio incondicional, torcida e carinho de sempre. Em especial, meus pais Lucinei e Jaqueline e aos irmãos Daniel, Netto e Henrique.

- Ao meu orientador, prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto, um exemplo de pessoa e pesquisador, por compartilhar seu tempo comigo, pela motivação e discussões esclarecedoras. Além disso, destaca-se o empenho, junto com o prof. Dr. Sebastião Alves Dias, em fornecer uma formação acadêmica de uma "escola"na área de física de altas energias.

- Ao prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli pela dedicação e incentivo durante a minha iniciação científica na UFSC, o qual forneceu um conhecimento relevante para o prosseguimento no mestrado.

- Aos professores Dr(s).: Antonio José Accioly, Francesco Toppan, Luiz Paulo Colatto e Maria Emília Xavier Guimarães. Por gentilmente aceitarem o convite para participar da banca e pelas sugestões e críticas construtivas, as quais foram incorporadas nessa versão final.

- Aos colegas da UFSC: Gabriel Fernandes, André, Gabriel Ferrari, Alisson, Ana, Diego, Renan, Gerson, Luis, Gustavo, Thiago, William e Lucas. Aos "patrões"e parceiros do futebol: João, Ubiratãn, Rafael Berg, Guilherme, Rodrigo, Luís (pilha), Franco, Fabian e Rodrigo Maia.

- Aos novos amigos do Rio de Janeiro, pela agradável companhia nos momentos de lazer e também em discussões de física. Em especial: Enrique, Helmunt, Juan Guillermo, Martin, Ederson, Elvis, Alain, Cleonice, Roberto, Elaina, Camila, Carlos, Fellipa, Juan, Ramaton, Virginia, Edgar, Max, Nilo, Leonardo, Luis, Thamys, Bruno, Alejandro, Wilmar, Sadi, Linneu, Phillip, Saulo, Rodrigo, Bruno, Grasiele, Gabriel, Eduardo e Jefferson.

- Aos colegas do "grupo de estudo" no CBPF: Ricardo, Felipe, Pedro e Cristofher, pela disposição em ajudar e a colaboração no desenvolvimento da minha formação acadêmica ao longo do mestrado.

- Ao CBPF pela infra-estrutura fornecida, aos funcionários, em especial, ao Ricardo e a Bete da CFC e a Cris do LAFEX, pela atenção e dedicação de sempre.

- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

A discussão de aspectos da mecânica quântica de partículas carregadas em cenários com supersimetria (SUSY) é bem estabelecida no que concerne o setor magnético. Os graus de liberdade fermiônicos inerentes a uma formulação supersimétrica são naturalmente associados às coordenadas de spin e, por conseguinte, ao momento de dipolo magnético. Desta forma, a supersimetria naturalmente toca as eventuais propriedades magnéticas de partículas carregadas. A carga elétrica, por outro lado, não sendo um número quântico de natureza espaço-temporal, não aparece como uma típica coordenada em uma descrição supersimétrica. Este fato responde pela dificuldade de se associar supersimetria a propriedades elétricas de partículas carregadas. Por essa razão, dedicamos parte da nossa atenção ao estudo da SUSY na equação de Pauli, em uma situação de sistema planar consistindo de partículas carregadas sob a ação de um campo eletromagnético externo. Os aspectos especiais desta supersimetria parecem ter uma origem geométrica bastante particular, provavelmente uma geometria do tipo-Kähler. Motivados em continuar respeitando os requerimentos da estrutura supersimétrica deste problema, introduzimos uma nova interação, cuja origem remete a potenciais de natureza grassmaniana, e discutimos seu papel na mecânica pseudoclássica e quântica. Por último, apresentamos duas abordagens para a extensão da SUSY $N = 2$ através da introdução de um operador de Carga Central.

Abstract

The discussion about the quantum mechanics aspects of charged particles, in scenarios with supersymmetry (SUSY) is well established concerning the magnetic sector of these systems. The fermionic degrees of freedom, inherent in a supersymmetric formulation, are naturally associated with the coordinates of spin and therefore with the magnetic dipole moment. Thus, magnetic properties naturally fells the supersymmetry aspects of charged particles. On the other hand, the electrical charge not being a quantum number of space-time nature, does not appear as a typical coordinate in a supersymmetric description. This fact accounts for the difficulty of associating supersymmetry with electrical properties of charged particles. Therefore, we dedicate part of our attention to the study of SUSY in the Pauli equation in a planar situation, the system consisting of charged particle under the action of an external electromagnetic field. The special aspects of this supersymmetry seem to have a very particular geometric origin, probably a Kähler type geometry. Motivated to continue respecting the requirements of the supersymmetric structure of this problem, we introduce a new interaction, whose origin dates back to potentials of Grassmann nature. We discuss the role of this new interaction in the pseudo-classical and quantum mechanics. Finally, we present two approaches to extend the SUSY $N = 2$ by introducing a central charge operator.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em meados da década de 70, a *supersimetria* (SUSY) foi sendo estabelecida na teoria de campos, como sendo a única extensão não-trivial da álgebra de Poincaré, contendo comutadores e anti-comutadores, com o propósito de contornar os obstáculos impostos pelo *teorema no-go de Coleman-Mandula* e os requerimentos da matriz S na teoria quântica de campos [1].

Do ponto de vista teórico, a SUSY pode unificar as partículas com diferentes spin, denominadas de férmions e bósons, em um supermultiplete e permitir que simetrias internas, tais como isospin ou $SU(3)$, fossem incorporadas em um supermultiplete, produzindo uma mistura entre a simetria interna e espaço-temporal. Além de sua elegância conceitual, a SUSY produziu algumas teorias de campo renormalizáveis com um comportamento melhor no regime ultravioleta, e foi explorada como possível solução ao problema da hierarquia de gauge em teorias unificadoras, conforme [2].

Apesar do sucesso teórico, a SUSY ainda não foi observada experimentalmente. Como existe na natureza uma distinção entre férmions e bósons, devemos ter a quebra da SUSY em qualquer teoria de campos realística. A questão da quebra da SUSY permanece atualmente. Existe um modelo padrão minimamente supersimétrico, cujas predições estão na escala de energia do LHC, o qual até agora não evidenciou nenhuma comprovação. A grande dificuldade está na descrição da escala em que a mesma é quebrada.

Os principais mecanismos e cenários da quebra da SUSY, como por exemplo, a discussão da quebra espontânea e dinâmica, podem ser encontrados no livro do J. Terning [2]. Alguns trabalhos abordam a possibilidade da quebra da SUSY associada a violação da simetria de Lorentz, como discutido em [3], e outros por efeitos não-pertubativos. Na literatura percebe-se que a última discussão foi essencial para o estabelecimento da *mecânica quântica supersimétrica* como objeto de investigação científica. Historicamente, Nicolai [4] introduziu a SUSY na mecânica não-relativística[1], mas foi a partir dos trabalhos de Witten [5] que a mesma foi sendo abordada. Neste trabalho, ele estudou os instantons como efeitos não-pertubativos, resultando na quebra dinâmica da SUSY em um protótipo de mecânica quântica para, posteriormente, tentar acomodar essas idéias na teoria de campos.

A mecânica quântica supersimétrica tem sido muito utilizada na compreensão das degenerescências e simetrias de sistemas físicos e como uma ferramenta poderosa em cálculos de espectro de operadores; na monografia [6] existe uma excelente discussão de suas aplicações e também nos trabalhos [7] e [8].

No contexto em que temos um número pequeno de cargas de SUSY[2] (nessa dissertação até $N = 2$), existem duas principais abordagens para a mecânica quântica supersimétrica: a formulação em componentes e a de superespaço. A primeira é construída diretamente no contexto da mecânica quântica, com a hamiltoniana satisfazendo uma álgebra imposta pela supersimetria. A segunda é inicialmente formulada em uma denominada mecânica pseudoclássica (ou pseudodinâmica), em que a álgebra da supersimetria é relacionada ao conceito de superespaço e, após a quantização canônica, obtém-se a versão quântica. O termo "pseudoclássico" significa que não estamos em uma formulação pura da mecânica clássica, pois utilizaremos variáveis anti-comutantes de Grassmann.

[1] é importante ressaltar que outros trabalhos na mesma época também indicavam a existência da SUSY em alguns modelos pseudoclássicos; discutiremos isso em maiores detalhes no apêndice.

[2] a mecânica quântica supersimétrica com N estendido foi estudado sistematicamente por F. Toppan et al, por exemplo, na tese de doutorado [9].

A mecânica quântica supersimétrica aparece também como um contra-exemplo de que as simetrias na teoria clássica podem não ser conduzidas para a teoria quântica. Apenas para casos particulares é possível mostrar explicitamente a equivalência entre as duas abordagens, como descrito por [6] para o caso unidimensional, onde demonstra-se que a quantização canônica de uma mecânica clássica supersimétrica é equivalente a uma versão da mecânica quântica supersimétrica construída por Witten.

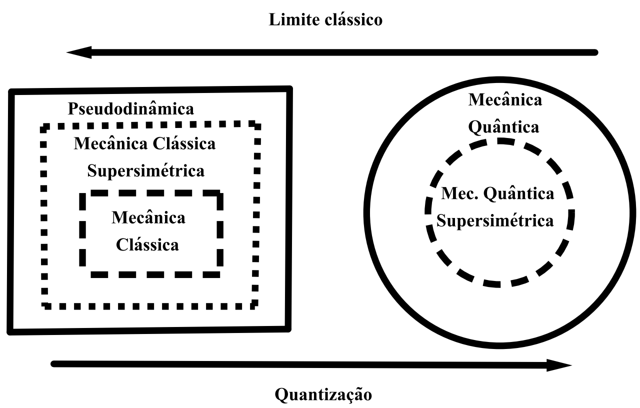

Figura 1.1: Esquema de teorias clássicas, pseudoclássicas e quânticas.

Na Figura 1.1, apresentamos uma visão a respeito das teorias para a mecânica da partícula. A mecânica clássica ordinária seria um caso particular da mecânica clássica supersimétrica, na situação em que não levamos em conta os graus de liberdade fermiônicos; ao passo que, a pseudodinâmica seria a teoria mais geral, pois ela não precisa ter necessariamente uma formulação construída a partir da álgebra da SUSY. Com relação a teoria quântica, tomamos a mecânica quântica supersimétrica como um caso particular da mecânica quântica, pelo fato de que nem todas as teorias podem ser "hamiltonizadas"e, em caso positivo, as mesmas não precisam satisfazer uma álgebra imposta pela SUSY.

A quantização das três teorias "clássicas"é possível a priori, pelo menos do ponto de vista canônico, que será nossa abordagem. Entretanto, o limite clássico, que não trata-se simplesmente tomar $\hbar \to 0$ do ponto de vista matemático, é uma longa discussão, conforme Bolivar [10]. No decorrer deste trabalho, mostraremos algumas situações em que a pseudodinâmica pode ser interpretada como uma teoria efetiva, entre a mecânica clássica ordinária e a mecânica quântica. Portanto, a Figura 1.1 apenas mostra a estrutura de graus de liberdade sem levar em conta uma discussão conceitual por completo. Além disso, recentemente o próprio conceito de pseudodinâmica tem sido revisado: ela não engloba somente situações em que temos variáveis de Grassmann, mas também aquelas em que o número de variáveis observáveis no espaço de configuração é menor que o número de graus de liberdade físicos, conforme discutido por [11].

Nessa dissertação, utilizaremos a abordagem em que partimos de uma mecânica clássica supersimétrica, com um superespaço construído de acordo com o número de supersimetrias e, após a quantização canônica dos modelos, obtemos uma mecânica quântica. Por essa razão, não estaremos interessados na discussão de qual é a melhor teoria para o limite clássico, mas sim no fato de que os graus de liberdade associados as variáveis de Grassmann são facilmente relacionados com os operadores de spin, assim, a pseudodinâmica seria no mínimo um modelo consistente e útil na construção de teorias quânticas.

O desenvolvimento da dissertição está organizada da seguinte maneira. No segundo capítulo, apresentaremos a mecânica com SUSY $N = 1$ e $N = 2$ na formulação de superespaço. No terceiro capítulo, estudaremos a SUSY da equação de Pauli, para um sistema planar consistindo de uma partícula carregada sob a atuação de um campo eletromagnético externo. Ainda no mesmo capítulo, seguindo alguns trabalhos desenvolvidos no grupo de pesquisa [12], introduziremos uma nova interação de natureza grassmaniana, que respeitará a estrutura supersimétrica do tipo-Kähler do problema anterior. Neste cenário, discutiremos o papel do potencial de interação na mecânica quântica e pseudoclássica.

Por fim, no capítulo 4, apresentaremos uma contribuição original referente a generalização da SUSY $N = 2$, quando introduzimos um operador de *Carga Central* e uma nova variável v no superespaço. Neste contexto, abordaremos algumas possíveis aplicações.

No apêndice, encontra-se uma breve revisão da álgebra de Grassmann, contendo as notações e convenções a serem utilizadas ao longo da dissertação, e também uma discussão da formulação hamiltoniana na descrição pseudoclássica.

Capítulo 2

Modelos de Mecânica Supersimétrica

Neste capítulo, faremos uma revisão da formulação da SUSY no superespaço, mostrando a construção de supercampos, derivadas covariantes e suas transformações. Essa abordagem está inserida no contexto de mecânica pseudoclássica. Assim, para fixação dos conceitos de derivadas, integração e paridade de Grassmann, consulte o apêndice.

Na primeira seção, será discutida a SUSY $N = 1$ de uma maneira mais intuitiva e comumente apresentada nos livros e na tese [12]. Entretanto, na segunda seção, estudaremos uma abordagem mais formal de grupos ou super-grupos, em que a partir da álgebra da SUSY é possível construir todas as propriedades do superespaço. Tal apresentação é normalmente realizada na teoria de campos, mas, sua construção pode também ser feita em uma mecânica clássica, conforme [13].

2.1 Mecânica Clássica com SUSY $N = 1$

Comecemos com o caso de apenas uma supersimentria ($N = 1$), ou seja, com o superespaço mais simples (t, θ), onde t denota o tempo e θ um parâmetro pertecente a álgebra de Grassmann, ou seja, com paridade $\eta(\theta) = 1$.

A fim de deixar invariante o elemento de linha diferencial,

$$dt' - i\,\theta'\,d\theta' \;\to dt - i\,\theta\,d\theta\,, \tag{2.1}$$

a transformação de SUSY, parametrizada por ε $\;(\eta(\varepsilon) = 1)$, é definida como

$$\theta' = \theta + \varepsilon\;,\;\; t' = t + i\,\varepsilon\,\theta\,. \tag{2.2}$$

Note que tal transformação é apenas uma translação no superespaço $(t;\theta)$, onde o fator imaginário i foi introduzido com o propósito de que a translação no tempo seja real.

A partir da formulação de superespaço, é possível definir a estrutura de supercampos. Seja $F(\theta)$ uma função analítica de θ, i.e., que pode expandida em série de Taylor. Devido a álgebra de Grassmann, as ordens superiores a primeira se anulam automaticamente, assim, a mesma poderá ser escrita na forma geral

$$F(\theta) = a + \beta\,\theta\,, \tag{2.3}$$

onde a, β são constantes com $\eta(a) = 0$ e $\eta(\beta) = 1$ para que $\eta(F) = 0$.

Logo, ao substituirmos as constantes a e β por funções $x(t)$ e $\lambda(t)$, podemos construir um supercampo (escalar) bosônico e real,

$$X(t;\theta) = x(t) + i\,\theta\,\lambda(t)\,. \tag{2.4}$$

Nas situações em que esse supercampo é interpretado como supercoordenada, $x(t)$ será a coordenada de posição e $\lambda(t)$ o seu parceiro supersimétrico. De modo análogo, podemos contruir um supercampo fermiônico,

$$\Psi(t,\theta) = \psi(t) + \theta f(t)\,, \tag{2.5}$$

com $\eta(\psi) = 1$, $\eta(f) = 0$, implicando $\Psi^2 \equiv 0$.

A transformação de SUSY aplicada no supercampo X,

$$X(t;\theta) \to X(t',\theta') = X(t + i\,\varepsilon\,\theta; \theta + \varepsilon)\,, \tag{2.6}$$

resulta, após a expansão de Taylor em torno de $(t;\theta)$,

$$X(t + i\,\varepsilon\,\theta; \theta + \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\delta\theta\,\frac{\partial}{\partial\,\theta} + \delta t\,\frac{\partial}{\partial t}\right)^n X\bigg|_{(t\,;\,\theta)} = X(t;\theta) + \delta X(t\,;\,\theta)\,, \tag{2.7}$$

onde $\delta t \equiv i\varepsilon\theta$, $\delta\theta \equiv \varepsilon$ e

$$\delta X(t\,;\,\theta) = \varepsilon\,(\partial_\theta + i\,\theta\,\partial_t)\,X(t\,;\,\theta)\,. \tag{2.8}$$

A variação acima pode ser escrita em uma notação mais sucinta,

$$\delta^{SUSY} X \equiv \delta X = \varepsilon\, \delta^Q X(t\,;\,\theta)\,, \tag{2.9}$$

$$\delta^Q \equiv \partial_\theta + i\,\theta\,\partial_t\,. \tag{2.10}$$

O operador diferencial δ^Q é denominado gerador da transformação, o qual junto com o operador diferencial associado a hamiltoniana, $\delta^H = i\partial_t$, satisfazem a álgebra

$$\left(\delta^Q\right)^2 = \frac{1}{2}\,\left\{\delta^Q, \delta^Q\right\} = i\,\partial_t = \delta^H\ ,\ [\delta^Q, \delta^H] = 0\,. \tag{2.11}$$

Ao trocamos $i \leftrightarrow -i$ na expressão do gerador δ^Q, obtemos

$$D\ \equiv \partial_\theta - i\,\theta\,\partial_t\,, \tag{2.12}$$

que é chamada de derivada covariante. Sua importância está no fato de que, ao contrário de $\partial_\theta X$, DX é um supercampo, ou seja, sua transformação é dada por

$$\delta(D\,X) = \varepsilon\,\delta^Q\,(D\,X)\,. \tag{2.13}$$

Do mesmo modo que $X(t;\theta)$, sua derivada $\dot{X}$ se transforma como um supercampo e também para o produto de supercampos.

Na formulação de supercampos, a ação com derivadas de primeira ordem,

$$S[x,\dot{x}] = \int dt\, L(x,\dot{x};t) \tag{2.14}$$

possui uma lagrangiana, dependente de um dado supercampo $\widetilde{X}$,

$$L = \int d\theta\, F(\widetilde{X}, \dot{\widetilde{X}}, D\widetilde{X})\,. \tag{2.15}$$

De acordo com essa construção, a ação será invariante sob SUSY $N = 1$, pois, a função dos supercampos $F(\widetilde{X}, \dot{\widetilde{X}}, D\widetilde{X})$ poderá ser escrita em termos de um dado supercampo $X(t;\theta)$. Para ser mais específico, (2.9) é equivalente a

$$\delta X = \delta x + i\,\theta\,\delta\lambda\ \Rightarrow\ \delta x = i\,\varepsilon\,\lambda\ ,\ \delta\lambda = -\varepsilon\,\dot{x}\,, \tag{2.16}$$

assim

$$\delta S=\delta\int dt\,d\theta\,X=\int dt\,d\theta\,\delta X=\int dt\,i\delta\lambda=-i\varepsilon\int dt\,\frac{d}{dt}\,(\dot{x})=0\,, \tag{2.17}$$

ou seja, a variação da lagrangeana poderá ser igual a uma derivada total e exigimos que as funções anulam-se nos extremos da integração.

Nos cálculos anteriores, foi usado o fato de que a medida fica inalterada pelas transformações. De fato, o jacobiano

$$J=\begin{pmatrix}\partial_t t' & \partial_\theta t'\\ \partial_t\theta' & \partial_\theta\theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -i\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

possui determinante igual a 1.

O modelo mais simples, de uma partícula livre,[1] é fornecido pela ação

$$S=\frac{i\,m}{2}\int dt\,d\theta\,\dot{X}\,DX\,, \tag{2.19}$$

a qual, em componentes, resulta na lagrangeana

$$L=\frac{m}{2}\,\dot{x}^2+i\frac{m}{2}\,\lambda\,\dot{\lambda}\,. \tag{2.20}$$

O primeiro termo desta refere-se a parte cinética bosônica usual e o segundo a parte cinética fermiônica. Além disso, através dos momentos canônicos,

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\,\dot{x}\ ,\ p_\lambda=\frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}}=-i\,\frac{m}{2}\,\lambda\,, \tag{2.21}$$

obtemos a seguinte hamiltoniana

$$H=\dot{x}\,p_x+\dot{\lambda}\,p_\lambda-L=\frac{m}{2}\,\dot{x}^2\,, \tag{2.22}$$

concluindo, que o termo cinético fermiônico não contribui para a mesma.

A partir da estrutura desenvolvida nessa seção, em particular, da ação (2.19) e utilizando um multiplete de supercampos $\Phi=(X_i,A_i(X))$, mostraremos mais adiante a formulação de SUSY para uma partícula não-relativística de spin 1/2.

[1] na formulação de SUSY $N=1$ não é possível introduzir um potencial $U(X)$ sozinho, pois, após expansão e integração, $\int d\theta\,U(X)=i\lambda\partial_x U(x)$, o mesmo resultará num termo com paridade contrária à lagrangeana.

2.2 Mecânica Clássica com SUSY $N = 2$

Na SUSY $N = 2$ o espaço é estendido para um superespaço $(t, \theta, \bar{\theta})$, com duas variáveis de Grassmann.[2] A mesma discussão que foi feita na seção anterior, poderia ser repetida nesse caso. No entanto, faremos uma outra abordagem, comumente introduzida na teoria de campos. Como já foi comentado, para desviar dos obstáculos colocados pelo teorema *no-go* de Coleman-Mandula, é necessário uma alteração na estrutura algébrica, através da super-álgebra.

Apesar dessa abordagem ser mais longa, requerendo a introdução de novos conceitos, para produzir os mesmos resultados, acreditamos que ela tem um papel fundamental para estudar as generalizações da SUSY $N = 2$ com *Carga Central*, pois, a mesma focaliza a estrutura de grupo, permitindo a partir desta derivar: as transformações do superespaço, representação das cargas como operadores diferenciais, derivadas covariantes e representações dos supercampos. Nossa discussão tem sua motivação em [13] e [14]. Comecemos definindo algumas estruturas básicas.

Definição 1 (Grupo) *Um grupo* $(\mathcal{M}, \bullet)$ *é definido como sendo um conjunto* $\mathcal{M}$ *com uma operação binária, denotada por* $\bullet$*, tal que* $\forall\, a, b, c \in \mathcal{M}$*,*

1) $a \bullet b \in \mathcal{M}\,,$

2) $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c\,,$

3) $\exists\, e \in \mathcal{M} \,:\, a \bullet e = a\,,$

4) $\exists\, a^{-1} \in \mathcal{M} \,:\, a \bullet a^{-1} = e\,.$

Definição 2 (Álgebra de Lie) *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathcal{V}$ *sobre um corpo* $\mathbb{F}$ *(aqui* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*)*[3] *junto com uma operação binária de multiplicação* $\odot$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$*, que possui as seguintes propriedades, dado* $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$*,*

[2]nessa dissertação adotaremos a convenção de trabalhar com parâmetros grassmanianos complexos, $\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2$ e $\bar{\theta} \equiv \theta_1 - i\theta_2$, ao invés de reais θ_1 e θ_2.

[3]note que tomamos apenas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, caso permitissemos $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = (\bar{0}, \bar{1}; +)$ então a propriedade 3) deverá ser alterada para $v_1 \odot v_1 = 0$.

1) $v_1 \odot v_2 \in \mathcal{V}\,,$

2) $v_1 \odot (v_1 + v_3) = v_1 \odot v_2 + v_1 \odot v_3\,,$

3) $v_1 \odot v_2 = -v_2 \odot v_1\,,$

4) $v_1 \odot (v_2 \odot v_3) + v_2 \odot (v_3 \odot v_1) + v_3 \odot (v_1 \odot v_2) = 0\,,$

De um modo não formal podemos, a partir da álgebra de Lie e um mapeamento exponencial, construir os elementos

$$\Lambda(t) = e^{t\,v}\,, \tag{2.23}$$

onde $t \in \mathbb{F}$ e $v \in \mathcal{V}$, que formam um grupo, denominado de *Grupo de Lie.* Além disso, os elementos de uma dada base da álgebra de Lie serão chamados de geradores do correspondente Grupo de Lie.

Definição 3 (Super-álgebra de Lie) *Uma super-álgebra de Lie é considerada uma Álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduada, que consiste da soma direta de dois espaços vetoriais, $\mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$, junto com um produto $\odot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, com as seguintes propriedades, dado $x_i \in \mathcal{V}_i$ ($i \equiv deg(\mathcal{V}_i) = 0, 1$),* [4]

1) $x_i \odot x_j \in \mathcal{V}_{(i+j)mod2}\,,$

2) $x_i \odot x_j = -(-1)^{ij}\, x_j \odot x_i\,,$

3) $x_i \odot (x_j \odot x_k)\,(-1)^{ik} + x_j \odot (x_k \odot x_i)\,(-1)^{ji} + x_k \odot (x_i \odot x_j)\,(-1)^{kj} = 0\,.$

A super-álgebra de Lie não é uma álgebra de Lie, pois, em geral o produto não é anti-simétrico. Apenas o subespaço $\mathcal{V}_0$, denominado parte par ou bosônica de $\mathcal{V}$, pode formar

[4] o grau do espaço vetorial $\mathcal{V}_i$, denotado por $\deg(\mathcal{V}_i)$, faz um papel análogo ao da paridade $\eta(\Omega)$ na álgebra de Grassmann, assim, daqui por diante utilizaremos uma única notação.

uma ordinária álgebra de Lie, enquanto, $\mathcal{V}_1$, chamado de parte ímpar ou fermiônica de $\mathcal{V}$, não é fechado sob $\odot$,

$$x_1 \odot y_1 \in \mathcal{V}_{(1+1)\text{mod}2} = \mathcal{V}_0 \;, \forall\; x_1, y_1 \in \mathcal{V}_1 \,,$$

assim, o mesmo não é uma álgebra.

Vamos agora fixar uma determinada operação $\odot$ na super-álgebra. Seja $\mathcal{V} = \text{Span}\,\{X_a\}$, sendo a soma direta de $\mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}_1$, onde

$$\mathcal{V}_0 = \text{Span}\,\{H_b\} \;, b = 1, ..., \text{dim}\mathcal{V}_0 \;, \; \eta(H_b) = 0 \,,$$

$$\mathcal{V}_1 = \text{Span}\,\{Q_c\} \;, c = 1, ..., \text{dim}\mathcal{V}_1 \;, \; \eta(Q_c) = 1 \,.$$

Definindo o produto $\odot$ como

$$X_a \odot X_{a'} \equiv [[X_a, X_{a'}]] = X_a\, X_{a'} - (-1)^{\eta(X_a)\,\eta(X_{a'})}\, X_{a'}\, X_a \,, \tag{2.24}$$

é possível mostrar que os requerimentos **1)** até **3)** são satisfeitos. No caso de $\eta(X_a)\,\eta(X_{a'}) = 0$ então o mesmo reduz para o comutador usual, caso contrário, para o anti-comutador. Por essas razões, muitas vezes na literatura, esse produto é denominado de super-comutador (ou super-colchetes, comutador generalizado, comutador-graduado).

Para contornar o obstáculo de não termos uma álgebra de Lie na super-álgebra (completa), definimos o *Envelope de Grassmann* $A(G_n)$ de $\mathcal{V}$, o qual consiste de todas as combinações lineares $\sum_i \sigma_i\, v_i$, onde v_i é base de $\mathcal{V}$ e $\sigma_i \in G_n(\mathbb{C})$, tal que, para $\forall\, i$, σ_i e v_i são ambos bosônicos ou fermiônicos, ou seja, possuem a mesma paridade $\eta(\sigma_i) = \eta(v_i) \equiv \eta_i$.

Deste modo, tomando dois elementos arbitrários

$$X = \sum_i \sigma_i\, v_i \;, \; Y = \sum_j \sigma'_j\, v_j \,, \tag{2.25}$$

podemos, a partir do super-comutador, definir o seguinte comutador

$$[X, Y] = \sum_{i,j} (-)^{\eta_i \eta_j}\, \sigma_i\, \sigma'_j\, [[v_i, v_j]] \,, \tag{2.26}$$

A importância dessa construção está no fato de que esse comutador confere a $A(G_n)$ uma estrutura de álgebra de Lie, como discutido formalmente em [15], através do produto tensorial entre uma superálgebra supercomutativa e uma superálgebra de Lie. Nessa dissertação, omitiremos o produtor tensorial $\sigma_i \otimes v_i \equiv \sigma_i\, v_i$. Ressalta-se ainda que existe uma outra definição para o comutador acima, para maiores detalhes [16].

De maneira análoga ao que ocorre com o Grupo de Lie, podemos através desse envelope, introduzir o *Super-Grupo* associado a super-álgebra $\mathcal{V}$, como sendo o mapeamento exponencial do envelope de Grassmann $A(G_n)$ de $\mathcal{V}$. Nessa situação, os geradores bosônicos (resp. fermiônicos) da super-álgebra estão associados aos parâmetros bosônicos (resp. fermiônicos) da álgebra de Grassmann, de modo que, a partir do comutador definido acima, podemos formalmente utilizar a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff nas manipulações com as exponenciais.

É interessante frisar que a mesma discussão vale para a supersimetria na teoria de campos, i.e., na extensão supersimétrica da álgebra do grupo de Poincaré, onde consideramos a álgebra de Lie de Poincaré, descrita em termos dos geradores de transformações de Lorentz $M_{\mu\nu}$ e geradores de translação P_μ, como sendo o espaço vetorial $\mathcal{V}_0$ e sua graduação (cargas da SUSY) como o espaço vetorial $\mathcal{V}_1 = \text{Span}\,\{Q_a\}$.

Uma vez abordado o necessário das estruturas matématicas, iniciemos o estudo da SUSY $N = 2$ na pseudodinâmica. Com duas supersimetrias,[5] temos $\mathcal{V}_1 = \text{Span}\left\{\bar{Q}, Q\right\}$ e $\mathcal{V}_0 = \text{Span}\,\{H\}$, assim, a álgebra formada pelos elementos $(Q, \bar{Q}, H)$ é dada por

i) $\left\{Q, \bar{Q}\right\} = 2H\,,$

ii) $[Q, H] = 0 = \left[\bar{Q}, H\right]\,,$

iii) $\{Q, Q\} = 0 = \left\{\bar{Q}, \bar{Q}\right\}\,.$

[5] nessa dissertação, trabalharemos com cargas complexas, $Q \sim Q_1 + iQ_2$, $\bar{Q} \sim Q_1 - iQ_2$, ao invés de cargas reais Q_1 e Q_2.

Note que existe uma simetria interna,[6] denominado de *R-symmetry*, pois, multiplicando Q e $\bar{Q}$ por uma fase,

$$Q \to e^{i\rho}\, Q \ , \ \bar{Q} \to e^{-i\rho}\, \bar{Q} \,, \tag{2.27}$$

a álgebra fica inalterada.

Conforme [13], podemos associar uma carga adicional para esse automorfismo, estendendo a álgebra com mais um gerador R, o qual satisfaz

$$[R, Q] = Q \ , \ [R, \bar{Q}] = -\bar{Q} \ , \ [R, H] = 0 \,, \tag{2.28}$$

induzindo a seguinte transformação no superespaço

$$(t, \theta, \bar{\theta}) \to \left(t, e^{i\rho}\, \theta, e^{-i\rho}\, \bar{\theta}\right) \ . \tag{2.29}$$

Com a super-álgebra (sem R) podemos, a partir do envelope de Grassmann associado, formar o seguinte elemento de grupo

$$G\left(t, \theta, \bar{\theta}\right) \equiv e^{itH + i\theta Q + i\bar{Q}\bar{\theta}} \,, \tag{2.30}$$

cuja lei de multiplicação ou composição (pela esquerda) é dada por

$$G(t', \theta', \bar{\theta}')\, G(t, \theta, \bar{\theta}) = G\left(t + t' + i(\theta'\bar{\theta} + \bar{\theta}'\theta) \,,\, \theta + \theta' \,,\, \bar{\theta} + \bar{\theta}'\right) \ . \tag{2.31}$$

A equação (2.31) tem um papel destacado nessa abordagem, pois, a partir dela interpretamos a transformação de SUSY como *translação* no superespaço,

$$(t, \theta, \bar{\theta}) \to \left(t + t' + i(\theta'\bar{\theta} + \bar{\theta}'\theta) \,,\, \theta + \theta' \,,\, \bar{\theta} + \bar{\theta}'\right) \tag{2.32}$$

e obteremos as representações dos operadores e derivadas covariantes.

Definimos o supercampo real bosônico como

$$X(t, \theta, \bar{\theta}) = x(t) + i\theta\psi(t) + i\bar{\theta}\bar{\psi}(t) + \theta\bar{\theta}W(t) \tag{2.33}$$

[6] nesse caso a simetria é $U(1)$, mas, em geral, um $U(\mathcal{N})$ quando tivermos estudando a SUSY com mais cargas, ou na teoria de campos.

e, também um fermiônico

$$\Psi(t,\theta,\bar{\theta}) = \alpha(t) + \theta f(t) + \bar{\theta}\bar{f}(t) + \theta\bar{\theta}\beta(t)\,. \tag{2.34}$$

É interessante nesse momento demonstrar a lei de composição (2.31), observando o papel da super-álgebra. Tal discussão será útil mais adiante na introdução da Carga Central.

Desde que a hamiltoniana H comuta com os demais geradores,

$$G(t',\theta',\bar{\theta}')\,G(t,\theta,\bar{\theta}) = e^{i(t+t')H}\,e^{i(\theta' Q+\bar{Q}\bar{\theta}')}\,e^{i(\theta Q+\bar{Q}\bar{\theta})}\,, \tag{2.35}$$

assim, o problema a ser resolvido está no produto das duas últimas exponenciações.

Faremos uso da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, dada por

$$e^{A}\,e^{B} = e^{A+B}\,e^{(1/2)\,[A,B]}\,, \tag{2.36}$$

o qual é válida se e somente se $[[A,B],A] = 0 = [[A,B],B]$.

Através do comutador (2.26), temos, tomando $A = i(\theta' Q + \bar{Q}\bar{\theta}')$ e $B = i(\theta Q + \bar{Q}\bar{\theta})$,

$$-[A,B] = -\theta'\theta\,\{Q,Q\} + \theta'\bar{\theta}\,\left\{Q,\bar{Q}\right\} + \bar{\theta}'\theta\,\left\{\bar{Q},Q\right\} - \bar{\theta}'\bar{\theta}\,\left\{\bar{Q},\bar{Q}\right\}\,. \tag{2.37}$$

Destacamos que a estrutura (2.26) é equivalente a exigência de que, do ponto de vista da álgebra abstrata, ou seja, sem utilizarmos ainda a representação dos geradores como operadores diferencias, tenhamos

$$\theta\,Q = -Q\,\theta\ ,\ \theta\,\bar{Q} = -\bar{Q}\,\theta\ ,\ \bar{\theta}\,Q = -Q\,\bar{\theta}\ ,\ \bar{\theta}\,\bar{Q} = -\bar{Q}\,\bar{\theta}\,, \tag{2.38}$$

$$t\,H = H\,t\ ,\ t\,Q = Q\,t\ ,\ t\,\bar{Q} = \bar{Q}\,t\,. \tag{2.39}$$

A equação (2.37) pode ser simplificada pelo uso da propriedade **iii)** da álgebra da SUSY, resultando em

$$-[A,B] = 2(\theta'\bar{\theta} + \bar{\theta}'\theta)\,H\,. \tag{2.40}$$

Logo, como $[A,B] \sim H$ e H comuta com todos os geradores, a fórmula (2.36) pode ser utilizada para deduzirmos (2.31).

Um supercampo $X(t,\theta,\bar{\theta})$, cujas propriedades de transformação sob $H, Q, \bar{Q}$ podem ser determinadas pela translação do superespaço, é definido como

$$X \equiv X(t,\theta,\bar{\theta}) = G(t,\theta,\bar{\theta})\, X(0,0,0)\, G^{-1}(t,\theta,\bar{\theta})\,, \tag{2.41}$$

pois, da lei de composição,

$$G(t',\theta',\bar{\theta}')\, X(t,\theta,\bar{\theta})\, G^{-1}(t',\theta',\bar{\theta}') \;=$$

$$=\; X\left(t + t' + i(\theta'\bar{\theta} + \bar{\theta}'\theta)\,,\, \theta + \theta', \bar{\theta} + \bar{\theta}'\right)\;. \tag{2.42}$$

Com esta relação podemos obter a representação das cargas $Q, \bar{Q}$ como operadores diferenciais. Para isso, sob transformações infinitesimais, $(t',\theta',\bar{\theta}') = (\epsilon,\varepsilon,\bar{\varepsilon})$, o lado esquerdo de (2.42) produz

$$G(\epsilon,\varepsilon,\bar{\varepsilon})\, X(t,\theta,\bar{\theta})\, G^{-1}(\epsilon,\varepsilon,\bar{\varepsilon}) = X + i\,\epsilon\,[H,X] + i\,\varepsilon\,[Q,X] - i\,\bar{\varepsilon}\,[\bar{Q},X]\,, \tag{2.43}$$

ao passo que, após a expansão de Taylor do lado direito,

$$X\left(t + \epsilon + i(\bar{\varepsilon}\theta + \varepsilon\bar{\theta})\,,\, \theta + \varepsilon\,,\, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}\right) = X + \varepsilon\,(\partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t)X + \bar{\varepsilon}\,(\partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t)X + \epsilon\,\partial_t X\,. \tag{2.44}$$

Ao compararmos os dois resultados acima, concluímos que

$$i[Q,X] = (\partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t)X \equiv \delta^Q X\,, \tag{2.45}$$

$$i[\bar{Q},X] = -(\partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t)X \equiv -\delta^{\bar{Q}} X\,, \tag{2.46}$$

$$i[H,X] = \partial_t X \equiv -i\delta^H X\,. \tag{2.47}$$

É fácil mostrar que todos os geradores, na representação escolhida acima, satisfazem a mesma álgebra de SUSY $N = 2$:

$$[\delta^Q,\delta^H] = [\delta^{\bar{Q}},\delta^H] = \left\{\delta^Q,\delta^Q\right\} = \left\{\delta^{\bar{Q}},\delta^{\bar{Q}}\right\} = 0\,,\; \left\{\delta^Q,\delta^{\bar{Q}}\right\} = 2\delta^H\,. \tag{2.48}$$

Através das transformações infinitesimais discutidas anteriormente, podemos, por exemplo, obter a variação do supercampo real (2.33). Como

$$\delta X \equiv X(t+\delta t, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) - X(t,\theta,\bar{\theta}) = \left(\varepsilon\,\delta^Q + \bar{\varepsilon}\,\delta^{\bar{Q}} - i\epsilon\,\delta^H\right)\, X \tag{2.49}$$

e, por outro lado,

$$\delta X = \delta x + i\theta\delta\psi + i\bar{\theta}\delta\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}\,\delta W\,, \tag{2.50}$$

temos as seguintes transformações para as coordenadas bosônicas e fermiônicas:

$$\delta x = i\varepsilon\psi + \epsilon\dot{x} + i\bar{\varepsilon}\bar{\psi}\ ,\ \delta\psi = \epsilon\dot{\psi} - i\bar{\varepsilon}W - \bar{\varepsilon}\dot{x}\,,\ \delta W = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon\psi + \epsilon W - \bar{\varepsilon}\bar{\psi}\right)\,. \tag{2.51}$$

Esse resultado mostra que se formularmos uma ação em termos de supercampos reais, ela já seria invariante por construção, pois

$$\delta S = \delta\int dt\,d\theta\,d\bar{\theta}\,X\ = \int dt\,d\theta\,d\bar{\theta}\,(\delta X) = \int dt\,\delta W = 0\,, \tag{2.52}$$

onde supomos que as coordenadas se anulam nos extremos de integração e utilizamos o fato de que a medida não é alterada pela variação (módulo do determinante da matriz jacobiana é igual a 1).

Por convenção, costuma-se interpretar as transformações de SUSY, como sendo as translações associadas apenas aos parâmetros ε e $\bar{\varepsilon}$, assim, basta tomarmos $\epsilon = 0$ para não levar em conta a termo de translação associado ao gerador H. Note que isso não altera a última conclusão, pois estamos num caso particular da variação geral discutida acima. Logo, a variação de SUSY $N = 2$ é dada por

$$\delta^{SUSY} \equiv \varepsilon\,\delta^{Q} + \bar{\varepsilon}\,\delta^{\bar{Q}}\,. \tag{2.53}$$

Passemos agora a obtenção das derivadas covariantes. Novamente, explorando a estrutura da lei de composição (2.31), temos que as mesmas são construídas a partir de uma translação alternativa no espaço dos parâmetros; com a multiplicação de elementos do grupo pela direita:

$$G(t,\theta,\bar{\theta})\,G(t',\theta',\bar{\theta}') = G\left(t + t' + i(\theta\bar{\theta}' + \bar{\theta}\theta')\,,\,\theta + \theta'\,,\,\bar{\theta} + \bar{\theta}'\right)\,. \tag{2.54}$$

Definimos $\varphi(t,\theta,\bar{\theta}) = G^{-1}(t,\theta,\bar{\theta})\,X(0,0,0)\,G(t,\theta,\bar{\theta})$, o qual implica, devido a inversão $G^{-1} \leftrightarrow G$ com relação a X,

$$\varphi \equiv \varphi(t,\theta,\bar{\theta}) = X(-t,-\theta,-\bar{\theta})\,. \tag{2.55}$$

Desse modo, repetindo o mesmo procedimento para parâmetros infinitesimais $(\epsilon, \varepsilon, \bar{\varepsilon})$, teremos

$$G^{-1}(\epsilon, \varepsilon, \bar{\varepsilon})\, \varphi(t, \theta, \bar{\theta})\, G(\epsilon, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) = \varphi\left(t + \epsilon + i(\theta\bar{\varepsilon} + \bar{\theta}\varepsilon)\,,\, \theta + \varepsilon, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}\right)\,, \tag{2.56}$$

que pode ser reescrito como

$$\varphi - i\,\epsilon\,[H, \varphi] - i\,\varepsilon\,[Q, \varphi] - i\,\bar{\varepsilon}\,[\bar{Q}, \varphi] = \varphi + \epsilon\,\partial_t\varphi + \varepsilon\,(\partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t)\varphi + \bar{\varepsilon}\,(\partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t)\varphi\,. \tag{2.57}$$

Ao comparar os dois lados da equação acima,

$$-i[Q, \varphi] = (\partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t)\varphi \equiv D\varphi\,, \tag{2.58}$$

$$-i[\bar{Q}, \varphi] = (\partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t)\varphi \equiv \bar{D}\varphi\,, \tag{2.59}$$

$$-i[H, \varphi] = \partial_t\varphi \equiv -i\delta^H\varphi\,. \tag{2.60}$$

Repare que, para obter as derivadas covariantes, basta trocarmos $i \leftrightarrow -i$ nos operadores δ^Q e $\delta^{\bar{Q}}$. Além disso, tais derivadas satisfazem

$$\left\{\delta^Q, D\right\} = \left\{\delta^{\bar{Q}}, D\right\} = \left\{\delta^Q, \bar{D}\right\} = \left\{\delta^{\bar{Q}}, \bar{D}\right\} = 0\,, \tag{2.61}$$

$$\left\{D, D\right\} = \left\{\bar{D}, \bar{D}\right\} = 0\ ,\ \left\{D, \bar{D}\right\} = -2\delta^H\,. \tag{2.62}$$

A partir das derivadas covariantes podemos construir as representações irredutíveis da álgebra da SUSY, através da imposição:

$$\bar{D}\Phi = 0\,, \tag{2.63}$$

$$D\bar{\Phi} = 0\,, \tag{2.64}$$

onde os supercampos Φ e $\bar{\Phi}$ serão denominados de quiral e anti-quiral, respectivamente.

Um cálculo simples mostra que a solução de (2.63) e (2.64) é dada por

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i\theta\bar{\theta}\partial_t}\Phi(t, \theta, 0)\ ,\ \bar{\Phi}(t, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta\bar{\theta}\partial_t}\bar{\Phi}(t, 0, \bar{\theta})\,, \tag{2.65}$$

assim,

$$\Phi = z(t) +\ \theta\,\xi(t) - i\,\theta\,\bar{\theta}\,\dot{z}(t)\,, \tag{2.66}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{z}(t) - \bar{\theta}\,\bar{\xi}(t) + i\,\theta\,\bar{\theta}\,\dot{\bar{z}}(t)\,. \tag{2.67}$$

Note que esses supercampos são complexos e distintos, com um sendo o conjugado do outro. É interessante ressaltar que poderíamos também construí-los diretamente através de outras parametrizações dos elementos de grupo:[7]

$$G_1(t,\theta,\bar{\theta}) = e^{i(tH+\theta Q)}\, e^{i\bar{Q}\bar{\theta}}\ ,\ G_2(t,\theta,\bar{\theta}) = e^{i(tH+\bar{Q}\bar{\theta})}\, e^{i\theta Q}\,. \tag{2.68}$$

Os supercampos quiral e anti-quiral têm uma importância significativa nos modelos que abordaremos mais adiante, em particular, na descrição supersimétrica da equação de Pauli, pois, a partir deles construímos o potencial de Kähler, que faz o papel de descrever o campo eletromagnético externo. Portanto, é prudente conhecermos a transformação desses supercampos. De modo análogo ao feito para o supercampo real,

$$\delta^{SUSY}\Phi = (\varepsilon\,\delta^{Q} + \bar{\varepsilon}\,\delta^{\bar{Q}})\Phi = \delta z + \theta\,\delta\xi - i\theta\bar{\theta}\,\delta\dot{z}\,, \tag{2.69}$$

$$\delta^{SUSY}\bar{\Phi} = (\varepsilon\,\delta^{Q} + \bar{\varepsilon}\,\delta^{\bar{Q}})\bar{\Phi} = \delta\bar{z} - \bar{\theta}\,\delta\bar{\xi} + i\theta\bar{\theta}\,\delta\dot{\bar{z}}\,, \tag{2.70}$$

os quais implicam as seguintes transformações nas coordenadas

$$\delta z = \varepsilon\xi\ ,\ \delta\xi = -2i\,\bar{\varepsilon}\,\dot{z}\ ,\ \delta\dot{z} = \frac{d}{dt}\,\delta z\,, \tag{2.71}$$

$$\delta\bar{z} = -\bar{\varepsilon}\bar{\xi}\ ,\ \delta\bar{\xi} = 2i\,\varepsilon\,\dot{\bar{z}}\ ,\ \delta\dot{\bar{z}} = \frac{d}{dt}\,\delta\bar{z}\,. \tag{2.72}$$

Para nossos objetivos, a revisão apresentada aqui é suficiente no que diz respeito a construção dos modelos e generalizações da SUSY $N = 2$, que serão discutidos nos próximos capítulos.

[7] para maiores detalhes consulte [13].

Capítulo 3

Aplicações da SUSY $N = 1$ e $N = 2$

Como já é bem discutido na literatura [17], o limite não-relativístico da equação de Dirac fornece a comumente denominada equação de Pauli, a qual, por exemplo, elucidou a introdução do termo de spin 1/2 na Mecânica Quântica em conexão com o experimento de Stern-Gerlach, como sendo uma "herança"mais relativística do que quântica. Maiores detalhes envolvendo as teorias para a partícula com spin, bem como uma introdução histórica, podem ser encontrados em [18].

Nesse capítulo, abordaremos a equação de Pauli no contexto de supersimetria em $(2 + 1)D$. A motivação está no fato de que no espaço planar uma partícula apresenta certa peculiaridade no modo com que ela interage, devido a existência de um acoplamento não-mínimo. Por essa razão, e também pela possibilidade de investigar efeitos na matéria condensada, estudaremos o papel da supersimetria em "coordenar"a interação, impondo alguns vínculos nos campos e/ou potenciais eletromagnéticos.

Em $(3+1)D$ e $(2+1)D$ é conhecida a existência de uma SUSY exata para equação de Pauli com acoplamento mínimo, como discutido por [8] e [19], respectivamente, via uma formulação diretamente em componentes, ou seja, sem usar a estrutura de superespaço e supercampos. Outros trabalhos, dos quais destacamos [20], têm explorado a SUSY da equação de Pauli em espaços não-comutativos, através da mesma abordagem.

Para objetivos de obtenção do espectro de energia, a formulação em componentes é mais conveniente do que a de superespaço. Entretanto, a última é mais vantajosa no que diz respeito a introdução de novas interações respeitando a SUSY. De fato, todas as referências citadas acima e as demais encontradas até então na literatura, que utilizam uma formulação em componentes, abordam apenas o acoplamento mínimo. Por isso, seguindo alguns trabalhos desenvolvidos no grupo de pesquisa [12], discutiremos a SUSY para equação de Pauli em uma formulação de superespaço, com a idéia de acomodar o acoplamento não-mínimo e, em seguida, introduzir novas interações, cuja origem remete a potenciais de natureza grassmaniana.

3.1 Limite não-relativístico da equação de Dirac em $(2+1)D$

Nesta seção, como ponto de partida, deduziremos a equação de Schrödinger de uma partícula pontual em $(2+1)D$, sob a interação com o campo eletromagnético, via um acoplamento não-mínimo.

Como normalmente discutido no caso $(3+1)D$, podemos, a partir do hamiltoniano livre, obter o hamiltoniano interagente se utilizarmos a derivada covariante mínima

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \, . \tag{3.1}$$

Repare que nessa situação, o dual $\widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$ é um tensor de segunda ordem. No entanto, em $(2+1)D$, ele é um vetor, dado por[1] $\widetilde{F}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$, de modo que a derivada covariante mínima pode ser generalizada para uma derivada covariante não-mínima,

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + ig\widetilde{F}_\mu \, , \tag{3.2}$$

onde q é a carga elétrica e g será interpretado mais adiante como o análogo planar do momento de dipolo magnético.

Para nossos objetivos é mais conveniente escrevê-la em componentes,

$$\mathcal{D}_0 \equiv \partial_t + iq\phi - igB \, , \tag{3.3}$$

[1]utilizamos as unidades em que $\hbar = c = 1$ e a definição do dual de um 2-vetor, descrito por $\widetilde{\vec{v}}_i = \epsilon_{ij}\vec{v}_j$, onde $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{0ij}$, com $\epsilon^{\mu\kappa\lambda}$ sendo o tensor de Levi-Civita tal que $\epsilon^{012} = \epsilon_{012} = +1$. A métrica é escolhida como $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$. Logo, $\widetilde{F}^{\mu} = (-B, -E_y, E_x)$.

$$\mathcal{D}_i \equiv \partial_i + iq\vec{A}_i + ig\widetilde{E}_i\,. \tag{3.4}$$

A fim de obter tal equação de Schrödinger procedemos de maneira parecida com a prescrição mínima, ou seja, trocamos $\partial_0 \equiv \partial_t$ e ∂_i por $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_i$, respectivamente, ou, equivalentemente, soma-se o termo $q\,\phi - gB$ ao hamiltoniano e substitui-se o momento $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ por $\vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,$.

Portanto, pela prescrição acima,

$$i\partial_t\psi = \left\{ q\phi + \frac{(\,\vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,)^2}{2M} - gB \right\}\psi\,, \tag{3.5}$$

onde $\psi(x,y,t)$ é a função de onda e M a massa da partícula.

Note que os mesmos resultados seriam obtidos caso utilizassemos a prescrição mínima, com as seguintes mudanças

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{g}{q}\,B\ ,\ \vec{A}_i \rightarrow \vec{A}'_i = \vec{A}_i - \frac{g}{q}\,\widetilde{E}_i\,, \tag{3.6}$$

as quais, devido as definições do campo magnético e elétrico, implicam que

$$B \rightarrow B' = B - \frac{g}{q}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\ ,\ \vec{E} \rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{g}{q}\,(\vec{\nabla}B + \partial_t\widetilde{\vec{E}})\,. \tag{3.7}$$

Passemos agora a obtenção do limite não-relativístico da equação de Dirac em $(2+1)D$ com a derivada covariante não-mínima e, em seguida, a comparação com a equação de Schrödinger (3.5). Com isso, verificaremos uma semelhança ao que ocorre em $(3+1)D$, com o aparecimento do termo de Pauli.

Usando a derivada covariante (3.2), a equação de Dirac fica

$$(i\,\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - M)\Psi = 0\,, \tag{3.8}$$

onde γ^μ são matrizes pertencentes a álgebra de Clifford, as quais em $(2+1)D$ satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}_{2\times 2}\ ,\ \gamma^\mu\,\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\mathbb{I}_{2\times 2} - i\epsilon^{\mu\nu\kappa}\gamma_k\,. \tag{3.9}$$

Uma possível representação desta álgebra é obtida através das matrizes de Pauli, que possuem a seguinte propriedade

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij}\,\mathbb{I}_{2\times 2} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k \ \ , \ \ (i,j,k=1,2,3)\,, \tag{3.10}$$

assim, podemos, por exemplo, escolher $\gamma^0 = \sigma_z\,,\ \gamma^1 = i\sigma_x\,,\ \gamma^2 = i\sigma_y$.

Devido a dimensão da representação (matrizes 2×2) o espinor de Dirac Ψ possuirá duas componentes. Além disso, no limite não-relativístico, assumimos que a energia de repouso M, nas unidades em que $c=1$, é superior as demais e que as componentes não variam muito com o tempo, de modo que possamos escrever

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = e^{-iMt}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Pela representação escolhida para as matrizes γ^μ, a equação de Dirac toma a forma

$$i\sigma_z\mathcal{D}_0\Psi - \sigma_x\mathcal{D}_x\Psi - \sigma_y\mathcal{D}_y\Psi - M\Psi = 0. \tag{3.12}$$

Por simplificação, utilizaremos a seguinte notação

$$\vec{\pi} \equiv \vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\ ,\ \widetilde{\vec{\pi}} = (\widetilde{\pi}_x, \widetilde{\pi}_y) = (\pi_y, -\pi_x)\,. \tag{3.13}$$

O cálculo do primeiro termo de (3.12) fornece

$$i\sigma_z\mathcal{D}_0\Psi = (M - q\phi + gB)e^{-iMt}\begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} + e^{-iMt}\,i\partial_t\begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

ao passo que, para o segundo,

$$-\sigma_x\mathcal{D}_x = -i\pi_x\,e^{-iMt}\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = i\widetilde{\pi}_y\,e^{-iMt}\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

e, finalmente, para o terceiro,

$$-\sigma_y\mathcal{D}_y\Psi = \pi_y\,e^{-iMt}\begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix} = \widetilde{\pi}_x\,e^{-iMt}\begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Retornando com esses resultados em (3.12) obtemos

$$i\partial_t\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = (q\phi - gB)\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2M\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} + \widetilde{\pi}_x\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + i\widetilde{\pi}_y\begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

No limite de campos fracos $(2M, \widetilde{\pi}_i >> i\partial_t, q\phi, gB)$, a segunda componente desta resulta

$$\chi = \frac{\widetilde{\pi}_+ \varphi}{2M}\,, \tag{3.18}$$

onde foi usado $\widetilde{\pi}_\pm \equiv \widetilde{\pi}_x \pm i\widetilde{\pi}_y$.

Repare que χ torna-se desprezível em comparação com φ. A substituição da equação acima na primeira componente de (3.17) elimina χ, fornecendo

$$i\partial_t \varphi = (q\phi - gB + \frac{\widetilde{\pi}_- \widetilde{\pi}_+}{2M})\varphi\,. \tag{3.19}$$

Um cálculo simples mostra que $\widetilde{\pi}_- \widetilde{\pi}_+ \,\varphi = \vec{\pi}^2 \varphi + i(\pi_x\,\pi_y - \pi_y\,\pi_x)\varphi\,.$ Por outro lado, ao utilizar $[p_i, f] = -i\partial_i f$, temos

$$(\pi_x\,\pi_y - \pi_y\,\pi_x) = iqB + ig\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.20}$$

Portanto, a equação (3.19) pode ser escrita como

$$i\partial_t \varphi = \left\{ q\phi + \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,)^2}{2M} - \frac{gB}{2M} - gB - \frac{g}{2M}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \right\}\varphi\,, \tag{3.21}$$

que é o chamado limite não-relativístico da equação de Dirac em $(2{+}1)D$ (ou simplesmente equação de Pauli) com o acoplamento não-mínimo. O mesmo resultado poderia também ser obtido via uma redução dimensional da situação análoga em $(3+1)D$.

É relevante discutirmos a interpretação física de cada termo presente na hamiltoniana para compreendermos melhor de que modo uma partícula não-relativística pode interagir em situações planares:

1) $q\phi$ refere-se a energia elétrica usual do tipo carga-potencial.

2) $(\vec{p}{-}q\vec{A}{+}g\widetilde{\vec{E}}\,)^2/2M$ é a generalização da energia cinética, com momento cinético dado por $\vec{p}{-}q\vec{A}{+}g\widetilde{\vec{E}}$. Na referência [21] mostra-se que o termo envolvendo $g\widetilde{\vec{E}}$ pode resultar numa fase de Aharonov-Casher e o termo $-q\vec{A}$, como bem conhecido, gera uma fase de Aharanov-Bohm.

3) $-gB/2M$ é o análogo do termo de Pauli em $(2+1)D$.

4) $-gB$ é uma contribuição de energia associada ao momento de dipolo magnético, como descrito em [22].

5) $-g(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})/2M$ corresponde a uma interação de quadrupolo elétrico, mesmo que estejamos tratando a partícula como puntiforme. Essa é uma das peculiaridades que surgem quando trabalhamos com $(2+1)D$.

Note que não fizemos $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ no quinto termo da equação (3.21), pois, podemos utilizar uma teoria com contribuição não-trivial no vácuo, como por exemplo, a teoria de Maxwell-Chern-Simons em $(2+1)D$, onde $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=mB$, com m sendo o coeficiente de massa topológica de Chern-Simons.

3.2 SUSY $N=1$ da Equação de Pauli

Uma partícula em $(2+1)D$, com massa M e carga q, não-minimamente acoplada ao campo eletromagnético é descrita por meio da seguinte ação supersimétrica $N=1$,

$$S=\frac{i\,M}{2}\int dt\,d\theta\,(D\vec{X})\cdot\dot{\vec{X}}+iq\int dt\,d\theta\,(D\vec{X})\cdot\vec{A}'(\vec{X})\,, \tag{3.22}$$

com $\vec{X}(t;\theta)$ sendo um supercampo (vetorial) real, cujas componentes

$$X_j(t,\theta)=x_j(t)+i\,\theta\lambda_j(t)\ \ ,\ (j=1,2) \tag{3.23}$$

contêm as coordenadas planares da partícula x_j e seus parceiros supersimétricos λ_j . Além disso, $\vec{A}'(\vec{X})$ representa o superpotencial vetorial em um esquema de acoplamento não-mínimo,[2] tal que, após a expansão em torno de $\vec{x}$, tenhamos

$$\vec{A}'(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})-\frac{g}{q}\,\tilde{\vec{E}}(\vec{x})\,. \tag{3.24}$$

[2]nessa descrição usamos apenas campos estacionários, de modo que $\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})$ e $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})$.

O primeiro termo da ação (3.22) fornecerá na lagrangeana a parte cinética,

$$\frac{iM}{2}\int d\theta\,(D\vec{X})\cdot\dot{\vec{X}} = \frac{M}{2}\,\dot{\vec{x}}^{2} - \frac{iM}{2}\,\dot{\vec{\lambda}}\cdot\vec{\lambda}\,, \tag{3.25}$$

enquanto, o segundo a parte de interação,

$$i\,q\int d\theta(D\vec{X})\cdot\vec{A}'(\vec{X}) = q\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}) - g\,\vec{x}\cdot\widetilde{\vec{E}} - i\,\frac{q}{2}\,(\vec{\lambda}\times\vec{\lambda})\,B+$$

$$-i\,\frac{g}{2}\,(\vec{\lambda}\times\vec{\lambda})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.26}$$

Note que, para obtenção do segundo termo, foi realizada uma expansão do superpotencial em torno das coordenadas, $X_j = x_j + \delta x_j$, com $\delta x_j \equiv i\,\theta\,\lambda_j$, e usado a definição do campo magnético B e do dual $\widetilde{\vec{E}}$.

Portanto, a lagrangeana associada a ação (3.22), separada em componentes, resulta

$$L_1 \equiv \frac{M}{2}\,\dot{\vec{x}}^{2} - i\,\frac{M}{2}\,\dot{\vec{\lambda}}\cdot\lambda + q\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}) - g\,\vec{x}\cdot\widetilde{\vec{E}} - i\,\frac{q}{2}\,(\vec{\lambda}\times\vec{\lambda})\,B+$$

$$-i\,\frac{g}{2}\,(\vec{\lambda}\times\vec{\lambda})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.27}$$

Com o propósito de falicitar o tratamento de quantização canônica de Bohr-Dirac desse modelo, é conveniente efetuarmos uma mudança de variável,

$$\psi \equiv \sqrt{\frac{M}{2}}(\lambda_1 + i\,\lambda_2)\,,\ \ \bar{\psi} \equiv \sqrt{\frac{M}{2}}(\lambda_1 - i\,\lambda_2)\,, \tag{3.28}$$

assim, a lagrangeana pode ser reescrita como

$$L_1 = \frac{M}{2}\,\dot{\vec{x}}^{2} - \frac{i}{2}\,\left(\dot{\psi}\,\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\,\psi\right) + q\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}) - g\,\vec{x}\cdot\widetilde{\vec{E}}+$$

$$+\frac{q}{2M}\,\left[\psi,\bar{\psi}\right]\,B + \frac{g}{2M}\,\left[\psi,\bar{\psi}\right]\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.29}$$

Para implementação da quantização canônica, devemos utilizar a formulação hamiltoniana. Passemos então a sua construção.

Pela definição dos momentos canônicos,

$$\Pi \equiv \frac{\partial L_1}{\partial\dot{\psi}} = -\frac{i}{2}\,\bar{\psi}\,, \tag{3.30}$$

$$\bar{\Pi} \equiv \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2}\,\psi\,, \tag{3.31}$$

$$p_j \equiv \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_j} = M\,\dot{x}_j + qA_j(\vec{x}) - g\,\widetilde{E}_j\,, \tag{3.32}$$

concluímos, segundo a terminologia de Dirac [23], que esse modelo enquadra-se nas chamadas teorias singulares (ou vinculadas), pois, nem todas as velocidades puderam ser escritas como função das demais variáveis (momentos e posições) e, por conseguinte, eliminadas via transformação de Legendre.

Os vínculos primários, i.e., aqueles que surgem das equações de movimento, resultando em relações entre posições e momentos, são obtidos através de (3.30) e (3.31);

$$\chi_1 \equiv \Pi + \frac{i}{2}\,\bar{\psi} = 0\,, \tag{3.33}$$

$$\chi_2 \equiv \bar{\Pi} + \frac{i}{2}\,\psi = 0\,. \tag{3.34}$$

A equação (3.32) permite isolar algumas velocidades

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{M}\left(\vec{p} - q\,\vec{A} + g\,\widetilde{\vec{E}}\right)\,. \tag{3.35}$$

A partir desta e dos vínculos, construímos a denominada hamiltoniana total

$$H_T = \dot{\vec{x}}\cdot\vec{p} + \dot{\psi}\,\Pi + \dot{\bar{\psi}}\,\bar{\Pi} - L_1 = H_c + \chi_1\,\mu_1 + \chi_2\,\mu_2\,, \tag{3.36}$$

com $\mu_1 \equiv \dot{\psi}$ e $\mu_2 \equiv \dot{\bar{\psi}}$ sendo os multiplicadores de Lagrange e, como definição, H_c referindo-se a hamiltoniana canônica (sem os vínculos),

$$H_c \equiv \frac{1}{2M}\left(\vec{p} - q\,\vec{A} + g\,\widetilde{\vec{E}}\right)^2 - \frac{q}{2M}\,\left[\psi,\bar{\psi}\right]\,B - \frac{g}{2M}\,\left[\psi,\bar{\psi}\right]\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.37}$$

Daqui em diante, utilizaremos os colchetes de Poisson generalizados e suas propriedades, apresentados no apêndice. Logo, conforme tais discussões, neste modelo os colchetes fundamentais são

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}\ ,\ \{\psi,\Pi\} = \{\Pi,\psi\} = -1\ ,\ \left\{\bar{\psi},\bar{\Pi}\right\} = \left\{\bar{\Pi},\bar{\psi}\right\} = -1 \tag{3.38}$$

e os demais nulos.

Seja $A = A(\vec{x}, \vec{p}, \psi, \Pi, \bar{\psi}, \bar{\Pi})$ uma variável dinâmica com paridade definida. Suponha também que a mesma não dependa explicitamente do tempo. Para nossos objetivos, tal hipótese é suficiente, pois, os vínculos obtidos também não dependem explicitamente do tempo. Desse modo, sua evolução temporal fica

$$\dot{A} = \{A, H_T\} = \{A, H_c\} + \{A, \chi_1\, \mu_1\} + \{A, \chi_2\, \mu_2\}\ , \tag{3.39}$$

mas, pelas propriedades dos colchetes, o segundo termo pode ser reescrito como

$$\{A, \chi_1\, \mu_1\} = (-)^{\eta(\chi_1)\,\eta(\mu_1)}\, \chi_1\, \{A, \mu_1\} + \{A, \chi_1\}\ \mu_1 \approx \{A, \chi_1\}\ \mu_1 \tag{3.40}$$

e analogamente para o terceiro, onde usamos a notação " $\approx$ " para denotar o fato de que os vínculos foram utilizados, i.e., tais equações serão válidas apenas em uma hipersuperfície (no espaço de fase) definida pelos mesmos. Logo,

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \{A, \chi_i\}\ \mu_i\, . \tag{3.41}$$

Impondo a condição de que os vínculos devem ser preservados no tempo (condição de consistência), temos, ao escolhermos A em (3.41) como sendo os próprios vínculos,

$$0 \approx \dot{\chi}_j = \{\chi_j, H_c\} + \{\chi_j, \chi_i\}\ \mu_i\, . \tag{3.42}$$

Esse sistema de equações para os multiplicadores pode ser resolvido se a matriz $\triangle$, com elementos $\triangle_{ij} \equiv \{\chi_i, \chi_j\}$, for inversível.

Um cálculo imediato fornece $\{\chi_1, \chi_2\} = -i$, assim,

$$\triangle = \begin{pmatrix} \{\chi_1, \chi_1\} & \{\chi_1, \chi_2\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & \{\chi_2, \chi_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\, . \tag{3.43}$$

Como $\det \triangle = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \triangle^{-1}$, dada por

$$\triangle^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\, . \tag{3.44}$$

Uma vez que a condição de consistência não produziu novos vínculos e a matriz $\triangle$ foi inversível, todos os multiplicadores de Lagrange podem ser completamente determinados e, em seguida, os colchetes de Dirac (generalizados) construídos. De fato, mutiplicando (3.42) por $\triangle^{-1}_{kj}$ obtemos $\mu_k \approx -\triangle^{-1}_{kj}\ \{\chi_j, H_c\}$ e, substituindo-o em (3.41),

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \chi_i\}\ \triangle^{-1}_{ij}\ \{\chi_j, H_c\}\ . \tag{3.45}$$

Através desta podemos definir os colchetes de Dirac, entre duas variáveis dinâmicas A e B, como sendo

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_i\}\ \triangle^{-1}_{ij}\ \{\chi_j, B\} \tag{3.46}$$

e, como consequência,

$$\dot{A} = \{A, H_c\}_D\ . \tag{3.47}$$

Note que trocamos $\approx$ por igualdade, pois os vínculos podem ser feitos identicamente nulos aos utilizarmos a estrutura desses colchetes. Abaixo listamos algumas de suas propriedades, as quais podem ser demonstradas a partir dos colchetes de Poisson.

1) anti-simetria generalizada: $\{A, B\}_D = -(-1)^{\eta(A)\,\eta(B)}\ \{B, A\}_D$.

2) linearidade: $\{A, B + C\}_D = \{A, B\}_D + \{A, C\}_D$.

3) regra envolvendo o produto: $\{A, B\,C\}_D = \{A, B\}_D\ C + (-1)^{\eta(A)\,\eta(B)}\, B\ \{A, C\}_D$.

Por último, temos os colchetes de Dirac fundamentais:

$$\{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}\ ,\ \left\{\psi, \bar{\psi}\right\}_D = -i\ ,\ \left\{\Pi, \bar{\Pi}\right\}_D = \frac{i}{4}\ ,\ \{\psi, \Pi\}_D = \left\{\bar{\psi}, \bar{\Pi}\right\}_D = -\frac{1}{2}\,, \tag{3.48}$$

com os demais sendo nulos.

Conforme discutido no apêndice, no procedimento de quantização, os colchetes envolvendo duas variáveis fermiônicas é substituído pelo anti-comutador e os demais por comutadores, assim, obtemos a seguinte álgebra para os operadores

$$[x_i, p_j] = i\,\delta_{ij}\ ,\ \left\{\psi, \bar{\psi}\right\} = 1\ ,\ \left\{\Pi, \bar{\Pi}\right\} = -\frac{1}{4}\ ,\ \{\psi, \Pi\} = \left\{\bar{\psi}, \bar{\Pi}\right\} = -\frac{i}{2}\,, \tag{3.49}$$

além de $\Pi^2 = \bar{\Pi}^2 = \psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0$.

Uma possível realização desta é obtida através das matrizes de Pauli. Definindo $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ e usando

$$[\sigma_+, \sigma_-] \equiv \sigma_+\,\sigma_- - \sigma_-\,\sigma_+ = \sigma_z \ , \ \{\sigma_+, \sigma_-\} \equiv \sigma_+\,\sigma_- + \sigma_-\,\sigma_+ = \mathbb{I}_{2\times 2}\,, \tag{3.50}$$

podemos, por exemplo, inferir

$$\Pi = -\frac{i}{2}\,\sigma_- \ , \ \bar{\Pi} = -\frac{i}{2}\,\sigma_+ \ , \ \psi = \sigma_+ \ , \ \bar{\psi} = \sigma_-\,. \tag{3.51}$$

Substituindo esses resultados em (3.37) teremos a versão quantizada da hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2M}\left[\vec{p} - q\,\vec{A} + g\,\widetilde{\vec{E}}\right]^2 - \frac{qB}{2M}\,\sigma_3 - \frac{g\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{2M}\,\sigma_3\,. \tag{3.52}$$

Conforme as referências [24], que discutem questões gerais para partículas em $(2{+}1)D$, a hamiltoniana acima descreve uma partícula não-relativística de spin 1/2 com momento de dipolo magnético $q\sigma_3/2M$ e fator giromagnético 2.

Ao compararmos esta hamiltoniana com aquela obtida no limite não-relativístico da equação de Dirac em $(2+1)D$ com acoplamento não-mínimo, (3.21), observamos que não é possível manter a invariância sob SUSY $N = 1$ ou supersimetrizar tal modelo, a menos que seja imposta a seguinte exigência

$$gB = q\phi\,, \tag{3.53}$$

de modo que, com essa condição (3.21) se reduz a

$$H = \frac{(\,\vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,)^2}{2M} - \frac{gB}{2M} - \frac{g}{2M}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,. \tag{3.54}$$

De imediato observa-se que esta corresponde a (3.52) projetada no auto-estado de spin para cima da partícula. O mesmo aconteceria com relação a auto-estado de spin para baixo caso trocássemos σ_+ por σ_- (e vice-versa) no procedimento de quantização.

A condição (3.53) altera uma das componentes da derivada covariante (3.2), especificamente em (3.3), onde agora temos $\mathcal{D}_0 = \partial_t$.

Na teoria de Maxwell-Chern-Simons, o último termo de (3.52) pode ser relacionado ao campo magnético, fornecendo um fator giromagnético efetivo

$$\gamma_{\text{efe}} = \left(\frac{gm}{q} - 1 \right) + 2 \,, \tag{3.55}$$

onde m é o parâmetro de massa topológica de Chern-Simons. A fim de manter seu valor padrão igual a 2, é necessário que $gm/q = 1$. A interpretação física dessa condição foi amplamente discutida na literatura em trabalhos de teoria de campo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12].

3.3 SUSY $N = 2$ da Equação de Pauli

Na seção anterior, foi mostrado que a equação de Pauli, em $(2+1)D$ e com esquema de acoplamento não-mínimo, restrita a condição (3.53) possui uma SUSY $N = 1$. Vamos agora apresentar uma nova estrutura, a qual permitirá demonstrarmos que o mesmo modelo também possui uma SUSY com $N = 2$, sob a mesma exigência.

Neste caso, conforme [25], introduziremos uma formulação de supercampos quiral e anti-quiral, bem como o super(pre)potencial de Kähler. Novamente, consideraremos situações de campos estacionários.

O prepotencial de Kähler $K(x, y)$, dará origem ao potencial vetor $\vec{A}(\vec{x})$, satisfazendo

$$\vec{A}_i = \epsilon_{ij} \partial_j K \,, \tag{3.56}$$

e, como consequência,

$$B = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ij} \partial_j \vec{A}_j = -\nabla^2 K \,. \tag{3.57}$$

Na construção da ação supersimétrica é importante conhecermos como implementar a prescrição não-mínima nessa formulação. Para isso, utilizando o fato de que no caso estacionário $\vec{E}_j = -\partial_j \phi$, temos

$$\vec{A}'_i = \vec{A}_i - \frac{g}{q} \widetilde{E}_i = \epsilon_{ij} \, \partial_j K - \frac{g}{q} \, \epsilon_{ij} \, \vec{E}_j = \epsilon_{ij} \, \partial_j \left(K + \frac{g}{q} \, \phi \right) \equiv \epsilon_{ij} \, \partial_j K' \,, \tag{3.58}$$

assim, com o uso de (3.53), a prescrição pode ser considerada como

$$K \rightarrow K' = K + \frac{g}{q}\,\phi = K + \left(\frac{g}{q}\right)^2 B = K - \left(\frac{g}{q}\right)^2 \nabla^2 K\,. \tag{3.59}$$

De acordo com a convenção introduzida em capítulos anteriores, o superespaço com SUSY $N = 2$ é constituído pelas variáveis $(t, \theta, \bar{\theta})$. Um dos primeiros trabalhos que explorou a estrutura de Kähler visando a descrição do campo eletromagnético foi [13]. O modelo baseava-se num esquema de acoplamento mínimo, conduzindo a descrição de uma partícula não-relativística de spin 1/2 e fator giromagnético igual a 2, sob a interação com um campo magnético estacionário, mas dependente da posição.

No trabalho [25] foi desenvolvido o caso do acoplamento não-mínimo, o qual permitiu a introdução da interação elétrica no contexto supersimétrico. Passemos a discussão detalhada desse modelo.

A ação supersimétrica introduzida,[3]

$$S_2 = \frac{M}{8}\int dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, D\bar{\Phi}\,\bar{D}\Phi + q\int dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, K'(\Phi, \bar{\Phi})\,, \tag{3.60}$$

está formulada em termos dos supercampos quiral e anti-quiral,

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) \equiv z(t) + \theta\xi(t) - i\theta\bar{\theta}\dot{z}(t)\ ,\ \bar{\Phi}(t, \theta, \bar{\theta}) \equiv \bar{z}(t) - \bar{\theta}\bar{\xi}(t) + i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}}(t)\,, \tag{3.61}$$

onde o termo de interação foi implementado no super(pre)potencial de Kähler $K'(\Phi, \bar{\Phi})$, o qual, após a expansão em torno de z e $\bar{z}$, carrega a informação da prescrição não-mínima (3.59).

Um cálculo simples mostra que o primeito termo da ação fornece, para a lagrangeana associada, a parte cinética

$$\frac{M}{8}\int d\theta\, d\bar{\theta}\, D\bar{\Phi}\,\bar{D}\Phi = \frac{M}{2}\,\dot{z}\,\dot{\bar{z}} - i\frac{M}{8}\,(\dot{\xi}\bar{\xi} + \dot{\bar{\xi}}\xi)\,, \tag{3.62}$$

onde interpretamos $z(t) \equiv x(t) + iy(t)$ e $\bar{z}(t) \equiv x(t) - iy(t)$, com $x(t), y(t)$ sendo as coordenadas planares da partícula.

[3]a estrutura de supercampos quiral, anti-quiral e potencias de Kähler, também aparece com $N = 1$ e $(3+1)D$, mas nesse caso a mesma está associada ao setor de matéria. Já para $N = 2$ e $(2+1)D$ associamos isso de maneira não-trivial ao campo eletromagnético.

Já para o segundo termo, procedemos de maneira análoga aquela feita para o super-potencial vetor no modelo da seção anterior. Assim, a expansão do super(pre)potencial em torno de z e $\bar{z}$ resulta em

$$K'(\Phi,\bar{\Phi}) = K'(z,\bar{z}) + (\theta\xi - i\theta\bar{\theta}\dot{z})\partial_z K' + (-\bar{\theta}\bar{\xi} + i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}})\partial_{\bar{z}} K' + \theta\bar{\theta}\xi\bar{\xi}\,\partial_z\partial_{\bar{z}}\,K'\,. \tag{3.63}$$

Integrando a última com relação as variáveis de Grassmann e acrescentando o termo cinético anterior, obtemos, finalmente, a lagrangeana L_2 associada a ação (3.60),

$$L_2 = \frac{M}{2}\,\dot{z}\,\dot{\bar{z}} - i\frac{M}{8}\,(\dot{\xi}\bar{\xi} + \dot{\bar{\xi}}\xi) + iq(\dot{z}\,\partial_z K' - \dot{\bar{z}}\,\partial_{\bar{z}} K') - \frac{q}{2}\,[\xi,\bar{\xi}\,]\,\partial_z\partial_{\bar{z}} K'\,. \tag{3.64}$$

Utilizando as variações das coordenadas associadas aos campos quiral e anti-quiral, (2.71) e (2.72), verificamos que ela transforma-se como uma derivada total

$$\delta L_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{4}\,\varepsilon\xi\dot{\bar{z}} - \frac{M}{4}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\xi}\dot{z} + iq\varepsilon\,\xi\partial_z K' + iq\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\xi}\partial_{\bar{z}} K'\right)\,. \tag{3.65}$$

Para escrever L_2 em termos dos campos e potenciais, basta usarmos a prescrição (3.58) e (3.59), de modo que

$$\dot{z}\,\partial_z K' - \dot{\bar{z}}\,\partial_{\bar{z}} K' = \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}' = \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A} - \frac{g}{q}\,\dot{\vec{x}}\cdot\widetilde{\vec{E}}\,, \tag{3.66}$$

$$\partial_z\partial_{\bar{z}} K' = \frac{1}{4}\,\nabla^2 K' = -\frac{1}{4}\,\partial_i(\epsilon_{ij}\vec{A}_j + \frac{g}{q}\,\vec{E}_i) = -\frac{1}{4}\,B - \frac{g}{4q}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.67}$$

Ao substituir $z, \bar{z}$ em termos de x, y e pelos resultados acima, a lagrangiana pode ser reescrita como

$$L_2 = \frac{M}{2}\dot{\vec{x}}^2 - i\frac{M}{8}\,(\dot{\xi}\bar{\xi} + \dot{\bar{\xi}}\xi) + q\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A} - g\,\dot{\vec{x}}\cdot\widetilde{\vec{E}} + \left(\frac{q}{8}B + \frac{g}{8}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\,[\xi,\bar{\xi}\,]\,. \tag{3.68}$$

Através da mudança de variável $\xi = (2/\sqrt{M})\,\psi$ é imediato concluir que (3.68) é equivalente a (3.29) e, portanto, atestando o fato de que a equação de Pauli em $(2+1)D$ também possui uma SUSY $N = 2$, contato que $gB = q\phi$ seja satisfeita.

3.4 Nova interação na Mecânica Quântica

A partir da estrutura dos supercampos quiral e anti-quiral, podemos acrescentar a ação (3.60) uma nova interação, que continuará preservando a SUSY $N = 2$. Tal interação é formulada da seguinte maneira

$$S_{\text{int}} \equiv \int dt\, d\theta\, \Gamma(\Phi) + \int dt\, d\bar{\theta}\, \bar{\Gamma}(\bar{\Phi})\,, \tag{3.69}$$

onde $\Gamma(\Phi)$ e $\bar{\Gamma}(\bar{\Phi})$ são superpotenciais escalares de origem grassmaniana, ou seja, com $\eta(\Gamma) = \eta(\bar{\Gamma}) = 1$.

Após a expansão dos superpotenciais, a contribuição deles à lagrangiana (3.68) é, a menos de uma derivada total, dada por

$$L_3 = L_2 + \xi\, \partial_z \Gamma - \bar{\xi}\, \partial_{\bar{z}} \bar{\Gamma}\,. \tag{3.70}$$

O termo acrescentado não depende das velocidades então, com a mudança de variável $\xi = (2/\sqrt{M})\,\psi$, os momentos canônicos e os vínculos, obtidos no modelo anterior, ficam inalterados. Logo, o procedimento de quantização conduzirá aos mesmos resultados na estrutura dos colchetes de Dirac e, por conseguinte, nos colchetes fundamentais.

A evolução temporal de uma variável dinâmica $A(x_j, p_j, \psi, \bar{\psi}, \Pi, \bar{\Pi})$, que independe explicitamente do tempo, continuará sendo descrita por $\dot{A} = \{A, H_c\}_D$, com a substituição

$$H_c \rightarrow H_c + \frac{2}{\sqrt{M}} \left(\bar{\psi}\, \partial_{\bar{z}} \bar{\Gamma} - \psi\, \partial_z \Gamma \right)\,. \tag{3.71}$$

Uma vez que as relações de comutação e anti-comutação para os operadores são as mesmas, podemos escolher a mesma representação (matrizes de Pauli 2×2) para as coordenadas e momentos. Entretanto, os potenciais Γ e $\bar{\Gamma}$, devido sua natureza grassmaniana, devem anti-comutar com as coordenadas ψ, $\bar{\psi}$ e entre eles próprios. Tal exigência impõe muitas condições, implicando que a única representação possível é a matriz nula.

Com o propósito de não obter uma contribuição trivial de Γ e $\bar{\Gamma}$ ao hamiltoniano quantizado, escolhemos uma nova representação 4×4, obtida via o produto tensorial da identidade com a antiga representação,[4]

$$\psi = \mathbb{I} \otimes \sigma_+ \ , \ \bar{\psi} = \mathbb{I} \otimes \sigma_- \ . \tag{3.72}$$

De fato, tomando, por exemplo,

$$\partial_z \Gamma = \Gamma'(z) \equiv \begin{pmatrix} f(z) & g(z) & h(z) & i(z) \\ j(z) & k(z) & l(z) & m(z) \\ n(z) & o(z) & p(z) & q(z) \\ r(z) & s(z) & t(z) & u(z) \end{pmatrix} , \tag{3.73}$$

temos as seguintes condições

1) $\psi \, \Gamma' = -\Gamma' \, \psi \Rightarrow j = l = r = t = 0 \, , k = -f, m = -h, s = -n, u = -p \, ;$

2) $\bar{\psi} \, \Gamma' = -\Gamma' \, \bar{\psi} \ \Rightarrow \ g = i = q = o = 0 \, ;$

3) $\Gamma'^{\,2} = 0 \ \Rightarrow \ p = -f \ , \ n = -f^2/h \ , \ h \neq 0$

e, analogamente, para $\bar{\Gamma}'(\bar{z})$ trocando-se $f(z) \rightarrow \bar{f}(\bar{z}), ..., u(z) \rightarrow \bar{u}(\bar{z})$.

Por último, a condição de anti-comutação entre os potencias,

4) $\Gamma' \, \bar{\Gamma}' = -\bar{\Gamma}' \, \Gamma' \ \Rightarrow \ 2f\bar{f}h\bar{h} - h^2\bar{f}^2 = \bar{h}^2 f^2 \, .$

Essa última condição não foi observada pelos autores em [25], onde foi introduzida tal interação, e ela desempenha um papel importante, pois vincula as funções da matriz.

Nessa representação, a hamiltoniana quantizada toma a forma

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,)^2}{2M} \, \mathbb{I}_{4\times 4} - \frac{qB}{2M} \, \sigma_3 \otimes \mathbb{I} - \frac{g(\,\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\,)}{2M} \, \sigma_3 \otimes \mathbb{I} + I \, , \tag{3.74}$$

com

$$I = \frac{2}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & h \\ \bar{f} & 0 & \bar{h} & 0 \\ 0 & -f^2/h & 0 & -f \\ -\bar{f}^2/\bar{h} & 0 & -\bar{f} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

e as funções $f, h, \bar{f}, \bar{h}$ satisfazendo a condição 4).

[4] utilizando as propriedades do produto tensorial, $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, é possível mostrar que $\{\mathbb{I} \otimes \sigma_+ \, , \, \mathbb{I} \otimes \sigma_-\} = \mathbb{I} \otimes \{\sigma_+, \sigma_-\} = \mathbb{I}_{4\times 4}$ e, como consequência, satisfazer as relações de comutação e anti-comutação para os operadores.

Na representação 4×4 a função de onda possui 4 componentes. O mesmo ocorre na introdução de férmions massivos em teoria de campos com $(2+1)D$, mas, com uma outra motivação, a de tornar a massa compatível com a simetria de paridade, como descrito, por exemplo, em [26].

Uma das configurações mais simples para a interação I, satisfazendo 4), é escolher $f = h$ e $\bar{f} = \bar{h}$, assim, temos que a mesma acopla-se com as quatro componentes da função de onda; entretanto, para outra situação, em que $f = \bar{f} = 0$, apenas um dublete da função de onda é afetado, enquanto, o outro continua sendo descrito pela equação de Pauli (com $gB = q\phi$).

Abaixo listamos algumas possíveis aplicações para essa formulação:

- Na física do grafeno, pois, conforme [27], a estrutura de rede é hexagonal e para uma descrição via teoria de gauge quiral foi utilizado uma função de onda (espinor) de quatro componentes.

- Na interação de uma partícula com spin 3/2. Para ser mais específico, de acordo com [12], alguns sistemas na matéria condensada podem apresentar "buracos"com spin efetivo 3/2, assim, o termo matricial I, produzido pela introdução de Γ e $\bar{\Gamma}$, poderia explicar à interação spin-órbita, na qual cada "buraco"interage com o campo magnético devido ao movimento dos demais.

3.5 Nova interação na Mecânica Clássica

Uma vez discutido a introdução dessa nova interação na Mecânica Quântica, vamos estudar seu papel na Mecânica Clássica Supersimétrica, pois, isso ainda não foi abordado na literatura. Nessa situação, como os potenciais Γ' e $\bar{\Gamma}'$ não possuem dinâmica, eles serão considerados como campos externos (pseudo-)clássicos, do mesmo modo que o prepotencial de Kähler $K'(z, \bar{z})$.

Iniciemos o estudo de como esses potenciais influenciam na dinâmica da partícula. A partir dos colchetes de Dirac e suas propriedades, obtidos na seção anterior, é possível mostrar que as equações de movimento são dadas por

$$\dot{\psi} = \{\psi, H_c\}_D = i\,\mathcal{D}(\vec{x})\,\psi - i\,\frac{(\partial_1 + i\partial_2)}{\sqrt{M}}\,\bar{\Gamma}(x_1 - ix_2)\,, \tag{3.76}$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \left\{\bar{\psi}, H_c\right\}_D = -i\,\mathcal{D}(\vec{x})\,\bar{\psi} + i\,\frac{(\partial_1 - i\partial_2)}{\sqrt{M}}\,\Gamma(x_1 + ix_2)\,, \tag{3.77}$$

$$\dot{x}_j = \frac{1}{M}(\,p_j - q\,A_j + g\widetilde{E}_j\,)\,, \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_j = &\frac{1}{M}\,(\,\vec{p} - q\vec{A} - g\widetilde{\vec{E}}\,)\cdot\partial_j\,(q\,\vec{A} + g\widetilde{\vec{E}}\,)\; - \;\partial_j\mathcal{D}(\vec{x})\,\psi\,\bar{\psi} + \\ +&\frac{2}{\sqrt{M}}\,\left(\psi\,\partial_j\frac{(\partial_1 - i\partial_2)}{2}\,\Gamma(x_1 + ix_2) - \bar{\psi}\,\partial_j\frac{(\partial_1 + i\partial_2)}{2}\,\bar{\Gamma}(x_1 - ix_2)\right)\,,\end{aligned} \tag{3.79}$$

onde, como definição,

$$\mathcal{D}(\vec{x}) = -\frac{q}{M}\,B - \frac{g}{M}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,. \tag{3.80}$$

Para facilitar as próximas discussões, é conveniente no lugar de (3.76) e (3.77), utilizarmos as equações de movimento para λ_1 e λ_2,

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2M}}\,\left(\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\right) = -\mathcal{D}(\vec{x})\,\lambda_2 + \frac{\sqrt{2}}{M}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\,\bar{\Gamma}(x_1 - ix_2)\,, \tag{3.81}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{-i}{\sqrt{2M}}\,\left(\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\right) = \mathcal{D}(\vec{x})\,\lambda_1 - \frac{\sqrt{2}}{M}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\Gamma(x_1 + ix_2)\,. \tag{3.82}$$

De agora em diante vamos analisar dois casos particulares para os campos e potencias e, em seguida, dar uma interpretação à nova interação.

3.5.1 Ausência de campos eletromagnéticos

Comecemos com a situação em que $\vec{A} = 0$ e $\phi = 0$, ou seja, desligamos o campo eletromagnético, $\mathcal{D}(\vec{x}) = 0$. Além disso, tomemos o caso mais simples para os potencias grassmanianos,

$$\Gamma(z) = \alpha\, z^2 + \beta\, z \ , \ \bar{\Gamma}(\bar{z}) = \alpha\, \bar{z}^2 + \beta\, \bar{z}\, , \tag{3.83}$$

com α, β sendo parâmetros de Grassmann reais, ou seja, pertencentes a $G(\mathbb{R})$.

Nesse caso as equações de movimento (3.78) − (3.82) fornecem

$$\dot{x}_j = \frac{1}{M}\, p_j \ \ , \ \dot{p}_1 = -4\,\sqrt{2}\, i\, \alpha\, \lambda_2 \ , \ \dot{p}_2 = -4\,\sqrt{2}\, i\, \alpha\, \lambda_1 \ , \tag{3.84}$$

$$\dot{\lambda}_1 = -4\, \frac{\sqrt{2}}{M}\, \alpha\, x_2 \ , \ \dot{\lambda}_2 = -4\, \frac{\sqrt{2}}{M}\, \alpha\, x_1 - 2\, \frac{\sqrt{2}}{M}\, \beta\, . \tag{3.85}$$

Eliminando p_j em termos de x_j e desacoplando o sistema de equações para $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ e suas derivadas, obtemos a seguinte lei de força (de Newton) para a partícula:

$$\ddot{x}_1 = \frac{16}{M^2}\, (i\alpha\beta)\, t - \frac{4\sqrt{2}}{M}\, i\, \alpha\, \lambda_2^{(0)}\, , \tag{3.86}$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{M}\, i\, \alpha\, \lambda_1^{(0)} \tag{3.87}$$

onde as condições iniciais, $\lambda_1(t = 0) \equiv \lambda_1^{(0)}$ e $\lambda_2(t = 0) \equiv \lambda_2^{(0)}$, foram utilizadas.

As equações acima podem ser facilmente integradas e impondo as condições iniciais restantes, $x_j(0)$ e $\dot{x}_j(0) = p_i(0)/M$, o problema de Cauchy tem solução única; como esperado, pelo fato de que todos os multiplicadores de Lagrange foram determinados.

A partir de (3.86) e (3.87) é possível dar um significado a introdução dos potenciais Γ e $\bar{\Gamma}$. Eles podem resultar em forças externas, tanto uniforme quanto dependente explicitamente do tempo, que atuam no setor bosônico das coordenadas da partícula. Note que, para existência de forças uniformes, é necessário que as condições iniciais às coordenadas fermiônicas λ_1 e λ_2 não sejam nulas. Além disso, com relação ao termo dependente do tempo, interpretamos como uma "fonte externa", acelerando ou desacelerando a partícula.

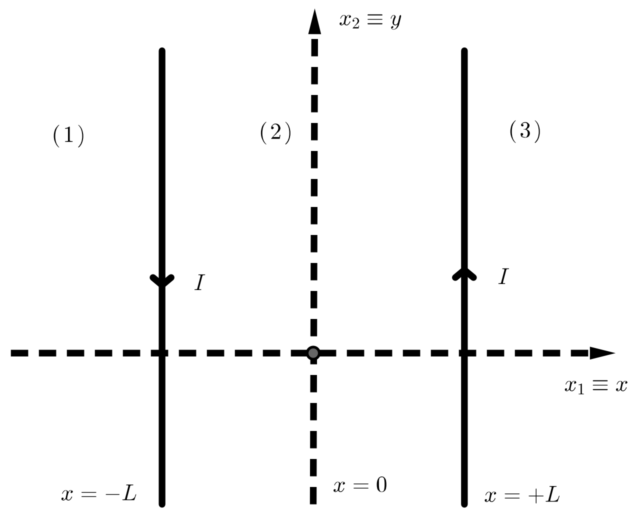

Figura 3.1: Esquema de um solenóide em $(2+1)D$, formado por duas correntes estacionárias I em sentidos opostos, fornecendo, pela teoria de Maxwell, um campo magnético resultante nulo nas regiões (1) e (3), e constante $B = \mu_0 I$ em (2).

3.5.2 Campo magnético constante

Vamos agora analisar o caso de campo magnético constante e com os mesmos potenciais Γ e $\bar{\Gamma}$ utilizados anteriormente. Uma idealização física para um campo magnético constante no mundo planar seria, por exemplo, a partícula dentro do "solenóide"em $(2+1)D$, como descrito pela Figura 3.1. Com o propósito de facilitar a resolução, é mais conveniente usarmos o formalismo lagrangeano,[5] pois todas as equações podem ser escritas apenas em termos de ϕ, que por sua vez, está relacionado diretamente com B através de $gB = q\phi$.

Utilizaremos a lagrangeana

$$L_3 = L_1 + \frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)}{\sqrt{2}} (\partial_1 - i\partial_2)\Gamma(x_1 + ix_2) + \frac{(\lambda_1 - i\lambda_2)}{\sqrt{2}} (\partial_1 + i\partial_2)\bar{\Gamma}(x_1 - ix_2)\,, \quad (3.88)$$

onde L_1 sendo descrita por (3.27).

As equações de Euler-Lagrange para x_1 e x_2 são dadas por

$$M\ddot{x}_1 - \left(\frac{q^2}{g}\,\phi\, - g\,\nabla^2\phi\right)\dot{x}_2 + i\left(\frac{q^2}{g}\,\partial_1\phi - g\,\partial_1\nabla^2\phi\right)\lambda_1\,\lambda_2 +$$

[5]apesar da teoria ser vinculada, mostraremos que, nesse formalismo, as equações possuem solução única para o problema de Cauchy.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\lambda_1+i\lambda_2)\,(\partial_1^2-i\partial_1\partial_2)\Gamma(x_1+ix_2)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\lambda_1-i\lambda_2)\,(\partial_1^2+i\partial_1\partial_2)\bar{\Gamma}(x_1-ix_2)=0\,, \tag{3.89}$$

$$M\ddot{x}_2+\left(\frac{q^2}{g}\,\phi\,-g\,\nabla^2\phi\right)\,\dot{x}_1+i\left(\frac{q^2}{g}\,\partial_2\phi-g\,\partial_2\nabla^2\phi\right)\,\lambda_1\,\lambda_2+$$

$$-\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\lambda_1+i\lambda_2)\,(\partial_1\partial_2-i\partial_2^2)\Gamma(x_1+ix_2)+$$

$$+\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\lambda_1-i\lambda_2)\,(\partial_1\partial_2+i\partial_2^2)\bar{\Gamma}(x_1-ix_2)=0\,, \tag{3.90}$$

enquanto que, para λ_1 e λ_2, correspondem a (3.81) e (3.82), respectivamente. Nesse problema, como $\mathcal{D}(\vec{x})=-q^2\,\phi/(gM)$, tais equações resultam em

$$M\ddot{x}_1-\frac{q^2}{g}\,\phi\,\dot{x}_2-4\sqrt{2}\,i\,\lambda_2\,\alpha=0\ ,\ M\ddot{x}_2+\frac{q^2}{g}\,\phi\,\dot{x}_1-4\sqrt{2}\,i\,\lambda_1\,\alpha=0\,, \tag{3.91}$$

$$\dot{\lambda}_1=\frac{q^2}{gM}\,\phi\,\lambda_2-\frac{4\sqrt{2}}{M}\,x_2\,\alpha\ ,\ \dot{\lambda}_2=-\frac{q^2}{gM}\,\phi\,\lambda_1-\frac{4\sqrt{2}}{M}\,x_1\,\alpha-\frac{2\sqrt{2}}{M}\,\beta\,. \tag{3.92}$$

As equações acima podem ser desacopladas, fornecendo, por exemplo, para x_1 e x_2:

$$M\ddot{x}_1+\frac{1}{M}\,\left(\frac{q^2\,\phi}{g}\right)^2 x_1+\frac{16}{M}\,i\,\beta\,\alpha\,t-4\sqrt{2}\,i\,\lambda_2^{(0)}\,\alpha=0\,, \tag{3.93}$$

$$M\ddot{x}_2+\frac{1}{M}\,\left(\frac{q^2\,\phi}{g}\right)^2 x_2-4\sqrt{2}\,i\,\lambda_1^{(0)}\,\alpha=0\,, \tag{3.94}$$

onde foi usada a condição inicial de que a partícula estava em repouso na origem.

Uma equação diferencial do tipo $a\,\ddot{x}(t)+b\,x(t)+c\,t+d=0$, com a,b,c e d constantes $(a,b>0)$, sujeita as condições iniciais $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=0$, possui solução dada por

$$x(t)=\frac{1}{b^{3/2}}\,\left[-\sqrt{b}(d+c\,t)+\sqrt{b}\,d\,\cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\right)+\sqrt{a}\,c\,\sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\right)\right]\,. \tag{3.95}$$

Portanto, em (3.94) fica evidente uma estrutura de um oscilador harmônico, mas, o mesmo já não ocorre para (3.93), devido ao termo dependente explicitamente do tempo. Somente quando $\beta=0$, a partícula também oscila na direção x_1 e, como consequência, existiria a possibilidade de confinamento dentro do solenóide, desde que o comprimento L (veja Figura 3.1) satisfaça

$$L > 8\sqrt{2}\,|i\lambda_2^{(0)}\,\alpha|\,M\,\left(\frac{g}{q^2\,\phi}\right)^2 . \tag{3.96}$$

Novamente aparece as condições iniciais $\lambda_1^{(0)}$ e $\lambda_2^{(0)}$ acopladas com α nas equações (3.93) e (3.94). No caso de $\beta = 0$, o papel dos potenciais Γ e $\bar{\Gamma}$ seria apenas mudar o centro de oscilação.

3.6 Conclusões Parciais

Nesse capítulo, verificamos a existência da SUSY $N = 1$ e $N = 2$ para a equação de Pauli em $(2+1)D$ com acoplamento não-mínimo, quando a condição $gB = q\phi$ é satisfeita. Em seguida, motivados em continuar preservando a segunda supersimetria, introduzimos uma nova interação produzida por potenciais grassmanianos Γ e $\bar{\Gamma}$.

Ao estudarmos isso na contexto da mecânica pseudoclássica, observamos alguns resultados bastante exóticos: primeiro, no exemplo em que retiramos o campo eletromagnético (potenciais $\vec{A} = \vec{0}$ e $\phi = 0$) e ficamos apenas com um caso particular para os potenciais grassmanianos (3.83), concluímos que as condições iniciais associadas aos graus de liberdade fermiônicos afetam diretamente a dinâmica da partícula, como se os potenciais grassmanianos tivessem uma "memória"de como o sistema, no caso a partícula, foi preparado. Diferentes condições iniciais $\lambda_1(0)$ e $\lambda_2(0)$ produzem diferentes forças uniformes, tanto em módulo quanto em sentido, para percepção disso veja as equações de movimento (3.86) e (3.87). No mesmo modelo, apareceu a possibilidade desses potenciais, independentemente das condições iniciais, resultarem numa força que depende explicitamente do tempo.

Em seguida, no segundo exemplo, onde temos os mesmos potenciais grassmanianos e um campo magnético constante, observamos a possibilidade de descrever desvios no centro de oscilação da partícula ou até um comportamento mais radical em que a mesma deixa de oscilar.

Uma questão importante, ou melhor, uma crítica a esses modelos é a falta do poder de previsão. Conforme discutido no apêndice, os parâmetros de Grassmann não podem ser números reais, pois eles são anti-comutativos. Entretanto, a seguinte combinação deles

$$i\alpha\beta\,,$$

que comparece na equação de movimento (3.86) ou em (3.93), pode ser um número real. Logo, como essa combinação é um parâmetro livre (real) que deve ser fixado, concluímos que o modelo seria uma teoria efetiva.

Além disso, acontece também outra situação bastante peculiar nas equações de movimento $(3.86)-(3.87)$ e $(3.93)-(3.94)$, no qual o problema matemático foi resolvido, ou seja, dadas as equações e as condições iniciais obtivemos a solução. No entanto, o problema físico permanece em aberto. Para ser mais específico, o parâmetro de Grassmann α acopla-se com as condições iniciais $\lambda_1^{(0)}$ e $\lambda_2^{(0)}$ produzindo termos (reais) do tipo

$$i\lambda_1^{(0)}\,\alpha\ ,\ i\lambda_2^{(0)}\,\alpha\ ,$$

mas, tais condições não são observáveis físicos[6], assim, nesses modelos podemos estar perdendo a idéia de uma trajetória bem definida.

Por último, com relação ao papel de Γ e $\bar{\Gamma}$ na mecânica quântica, a situação é bem diferente. Com a introdução desses potenciais, fomos conduzidos a duplicar a representação para matrizes 4×4 a fim de obter a interação não-trivial (3.74), a qual, por sua vez, não coloca nenhum parâmetro grassmaniano livre, mas sim funções bosônicas $f(z), \bar{f}(\bar{z}), h(z)$ e $\bar{h}(\bar{z})$, que acoplam as componentes da função de onda. Essa descrição, não apresenta os problemas do caso pseudoclássico e, como comentado ao longo desse capítulo, existem perspectivas de aplicações em modelos da matéria condensada.

[6] uma maneira de tentar contornar esse problema seria considerar os valores médios das variáveis de Grassmann, que são números reais. Para isso deveríamos introduzir uma função distribuição. No entanto, encaminhamentos com essa perspectiva ainda permanecem incompletos. Deixaremos maiores detalhes sobre isso, bem como as referências, para serem discutidos nos apêndices.

Capítulo 4

SUSY $N = 2$ com Carga Central

Na teorias de campos com $(3+1)D$, a generalização mais geral da álgebra de Poincaré, respeitando os requerimentos da matriz S, leva em conta a possibilidade de termos operadores hermitianos pertencentes ao centro da super-álgebra, denominados de *Cargas Centrais* [28], os quais normalmente estão associados ao setor topológico da teoria. A utilização desses operadores evita a ploriferação de representações massivas. Por essa razão, eles possuem um papel importante em teorias de Super Yang-Mills com quebra espontânea do grupo de Yang-Mills, mas sem quebrar a SUSY. Cargas centrais também aparecem em supermultipletes nos modelos de supergravidade, onde as mesmas estão associadas as simetrias de gauge.

Além disso, de acordo com [29], a introdução de cargas centrais afeta a R-symmetry na álgebra da SUSY, fazendo com que a teoria possua uma simetria relacionada agora a algum subgrupo de $U(N)$.

Na Mecânica Quântica a SUSY estendida com carga central já foi discutida sob uma formulação em componentes, como apresentada por [30], com aplicações para os problemas de Coulomb, Aharonov-Bohm-Colomb (ABC), Aharanov-Casher e outros. A maneira com que eles introduziram a carga central, Z_{ab}, somente é válido para $N \geq 4$,

$$\left\{Q_a, \bar{Q}_b\right\} = 2\delta_{ab}H + Z_{ab} \ , a, b = 1, ..., n \, , \tag{4.1}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \left\{\bar{Q}_a, \bar{Q}_b\right\} = 0 \, , \tag{4.2}$$

com $N = 2n$ e N sendo o número de supersimetrias (cargas da SUSY).

Como foi amplamente abordado aqui a SUSY $N = 2$, estaremos interessados na sua generalização. Na literatura, existem dois trabalhos [31], explorando uma dualidade entre a Teoria de Cordas e Mecânica Quântica Supersimétrica. A maneira com que eles introduziram a carga central Z é dada por

i) $\{Q, \bar{Q}\} = 2H$,

ii) $[Q, H] = 0 = [\bar{Q}, H]$,

iii) $Q^2 = Z$,

iv) $\bar{Q}^2 = \bar{Z} = Z$.

A partir desta álgebra verificamos

$$[Q, Z] = [\bar{Q}, Z] = [H, Z] = 0 . \tag{4.3}$$

É importante ressaltar que as condições **i)** e **ii)** são válidas independentemente de **iii)**. Além disso, para o caso de $Z \neq \bar{Z}$ devemos exigir também que $[Z, \bar{Z}] = 0$.

Nessa dissertação, o objetivo inicial é análogo ao realizado no caso dos potenciais $\Gamma(\Phi)$ e $\bar{\Gamma}(\bar{\Phi})$, ou seja, implementar a SUSY $N = 2$ com uma carga central Z, generalizando a ação (3.60) com a introdução de novos acoplamentos provenientes de Z e observar, após a quantização, se a mesma está associada com alguma estrutura de momento de dipolo magnético, carga topológica ou como campo de fundo.

Há que se ressaltar que não encontramos na literatura uma discussão da SUSY $N = 2$ com Z sob a perspectiva de um super-grupo associado à super-álgebra, assim fomos conduzidos inicialmente ao estudo dessa questão. Mostraremos, ao longo do capítulo, que isso pode estar associado a existência de um problema de representar as cargas de SUSY univocamente. Além disso, apresentaremos uma contribuição nossa relacionada a uma outra formulação, onde introduzimos uma variável para a carga central com o propósito de manter a estrutura do envelope de Grassmann e, por conseguinte, a aplicabilidade do super-grupo.

Nesse momento é conveniente retornarmos a uma discussão do segundo capítulo, precisamente à equação (2.37). Pela álgebra acima, temos que $[A, B] \sim a_1 Z + a_2 H$ (com a_1 e a_2 sendo parâmetros não-nulos), assim, como Z e H comutam entre si e com os demais geradores, a fórmula de Baker-Campbel-Hausdorff (2.36) pode ser utilizada. O problema é que na exponenciação os termos envolvendo Z não se cancelam e, portanto, não podemos a priori definir uma lei de composição análoga a (2.31) a fim de relacionar as transformações de SUSY com translações no superespaço e, posteriormente, deduzir as representações das cargas e derivadas covariantes, como feito no segundo capítulo.

Na teoria de campos, especificamente no grupo de Lorentz, aparece uma situação semelhante, mas o problema pode ser contornado com uma redefinição dos geradores, pois, os operadores de carga central estão associados à representação projetiva.[1] Na situação em que estamos trabalhando, ou seja, na mecânica supersimétrica, não conseguimos esclarecer essa questão e o mesmo para os demais artigos, que utilizaram um ponto de vista algébrico em uma representação abstrata, sem explorar a estrutura de super-grupo.

Vamos agora apresentar duas abordagens para introdução da carga central na SUSY $N = 2$: primeiro, a formulação algébrica desenvolvida por [31] e, em segundo, nossa idéia de introduzir um parâmetro bosônico v para Z. As vantagens e desvantagens serão discutidas e também as possíveis aplicações.

4.1 Carga Central sem variável v

A partir da álgebra da SUSY $N = 2$ com Z, podemos utilizar a idéia dos artigos [31], que introduziram a carga central através de um ponto de vista algébrico e abstrato, conforme

$$\left\{\delta^{Q}, \delta^{\bar{Q}}\right\} = 2i\partial_t \ , \ \left\{\delta^{Q}, \delta^{Q}\right\} = \left\{\delta^{\bar{Q}}, \delta^{\bar{Q}}\right\} = 2\delta^{Z} \ , \tag{4.4}$$

[1] o estudo da teoria de grupos envolvendo as representações projetivas, bem como a discussão do grupo de Lorentz, pode ser encontrado em [32].

onde os operadores diferenciais são representados por[2]

$$\delta^{Q} = \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t + \theta\delta^{Z} \,, \tag{4.5}$$

$$\delta^{\bar{Q}} = \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t + \bar{\theta}\delta^{Z} \,. \tag{4.6}$$

Note que não especificamos como é o operador δ^Z, ou seja, o mesmo está em uma representação abstrata, assim, conheceremos apenas o resultado de sua aplicação nas coordenandas. Para esclarecer melhor isso, vamos calcular a variação do supercampo real (2.33) perante a transformação de SUSY

$$\delta^{SUSY} \equiv \delta = \varepsilon\delta^{Q} + \bar{\varepsilon}\delta^{\bar{Q}} \,. \tag{4.7}$$

Conhecemos, pelos capítulos anteriores, que a variação pode ser escrita como

$$\delta X = \delta x + i\theta\,\delta\psi + i\bar{\theta}\,\delta\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}\,\delta W, \tag{4.8}$$

de modo que, atuando a transformação acima, obtemos

$$\delta x = i\varepsilon\psi + i\bar{\varepsilon}\bar{\psi} \,, \tag{4.9}$$

$$\delta\psi = i\varepsilon\,(\delta^{Z}x) - i\bar{\varepsilon}W - \bar{\varepsilon}\dot{x} \,, \;\; \delta\bar{\psi} = i\bar{\varepsilon}\,(\delta^{Z}x) + i\varepsilon W - \varepsilon\dot{x} \tag{4.10}$$

$$\delta W = \varepsilon\dot{\psi} + i\varepsilon\,(\delta^{Z}\bar{\psi}) - \bar{\varepsilon}\dot{\bar{\psi}} - i\bar{\varepsilon}\,(\delta^{Z}\psi) \tag{4.11}$$

Através destas variações, concluímos que $\delta^Z\psi$ deve ser uma transformação com paridade (de Grassmann) ímpar e $\delta^Z x$ com paridade par e imaginário puro, a fim de que $\delta\bar{\psi}$ e $\delta\psi$ estejam bem definidas. Uma situação bastante geral é dada por

$$\delta^{Z}x = if_1(x) + if_2(x)\,\psi\bar{\psi} \,, \tag{4.12}$$

$$\delta^{Z}\psi = \frac{d}{dt}\left[f_3(x)\,\psi + f_3(x)\,\bar{\psi} + \sum_{i>3}\alpha_i f_i(x)\right] \,, \tag{4.13}$$

com $f_i(x)\,\forall i$ sendo funções bosônicas arbitrárias e α_i parâmetros fermiônicos.

[2] nessa dissertação, a convenção utilizada para as cargas é diferente dos artigos citados, mas, a abordagem é equivalente.

Há que se ressaltar que as variações acima podem ser generalizadas quando trabalhamos com mais de um supercampo real; por exemplo, poderíamos estender a dependência das funções arbitrárias $f(x) \rightarrow f(x_J)$, onde x_J seriam as coordenadas dos respectivos supercampos X_J. Alguns casos, consistentes com a super-álgebra, estão discutidos nos artigos.

Uma vez fixado a maneira com que δ^Z atua em x e ψ, eles acrescentaram a carga central como "correção"ao seguinte termo de um modelo sigma

$$S = \int dt\, d\theta\, d\bar{\theta} \left[g_{IJ}(X_I, X_J)\, DX_I\, \bar{D}X_J \right] . \tag{4.14}$$

Para ser mais preciso, nessa construção, ao contrário do que ocorre na SUSY ordinária, uma ação formulada em supercampos não será invariante sob SUSY com carga central Z, assim, com o propósito de garantir essa invariância, devemos colocar outros termos na lagrangeana e, em geral, "quebrando"a estrutura de supercampos. Os novos termos surgem devido aos acoplamentos gerados pela carga central.

Essa abordagem não mostra a transformação do superespaço induzida pelos geradores e, portanto, não é possível a priori afirmar que a medida $dt\, d\theta\, d\bar{\theta}$ fica inalterada, ou seja, não conhecemos o jacobiano da transformação. Tal informação é relevante na construção de uma ação invariante. Nos artigos [31], os autores não discutem isso e parece ficar implícito que assumiram a invariância da medida (determinante da matriz jacobiana igual a 1).

Por último, ao aplicarmos essa formulação nos supercampos quiral e anti-quiral, (2.66) e (2.67), respectivamente, com o objetivo de introduzir novos acoplamentos para a hamiltoniana de Pauli, observamos que isso não é possível, pois, esses supercampos implicam que as transformações $\delta^Z z$ e $\delta^Z \xi$ sejam proporcionais a ε ou $\bar{\varepsilon}$, de modo que a contribuição à variação δ^{SUSY} é nula (termos quadráticos nos parâmetros infinitesimais).

4.2 Carga Central com variável v

Nessa descrição, introduzimos um parâmetro v associado a Carga Central Z, assim, a estrutura de álgebra de Lie fica evidente, desde que tomemos o envelope de Grassmann desta super-álgebra. O Super-grupo é construído através do mapeamento exponencial

$$G(t,v,\theta,\bar{\theta}) = e^{itH+ivZ+i\theta Q+i\bar{Q}\bar{\theta}} \,. \tag{4.15}$$

Através de (2.37), podemos verificar uma estrutura de grupo (fechamento, associatividade, elemento inverso e identidade), com lei de multiplicação

$$G(t',v',\theta',\bar{\theta}')\, G(t,v,\theta,\bar{\theta}) =$$

$$= G\left(t+t'+i(\theta'\bar{\theta}+\bar{\theta}'\theta)\,, v+v'-i(\theta'\theta+\bar{\theta}'\bar{\theta})\,,\, \theta+\theta'\,,\, \bar{\theta}+\bar{\theta}'\right)\,, \tag{4.16}$$

o qual induz a seguinte *translação* nesse novo superespaço:

$$(t,v,\theta,\bar{\theta}) \to \left(t+t'+i(\theta'\bar{\theta}+\bar{\theta}'\theta)\,, v+v'-i(\theta'\theta+\bar{\theta}'\bar{\theta})\,,\, \theta+\theta'\,,\, \bar{\theta}+\bar{\theta}'\right)\,. \tag{4.17}$$

Note que, da mesma maneira que o tempo, o parâmetro v sofre uma translação real. A questão a ser respondida mais adiante: qual a interpretação de v ? seria uma variável auxiliar, uma variável associada a coordenada de espaço ou tempo ?

A partir de $G(t,v,\theta,\bar{\theta})$ acima e de sua lei de composição, definimos um supercampo

$$X(t,v,\theta,\bar{\theta}) = G(t,v,\theta,\bar{\theta})\, X(0,0,0,0)\, G^{-1}(t,v,\theta,\bar{\theta})\,. \tag{4.18}$$

Utilizando parâmetros infinitesimais $(t,v,\theta,\bar{\theta}) \sim (\epsilon,\zeta,\varepsilon,\bar{\varepsilon})$, podemos repetir o procedimento feito para a situação sem carga central, construindo

$$G(\epsilon,\zeta,\varepsilon,\bar{\varepsilon})\, X(t,v,\theta,\bar{\theta})\, G^{-1}(\epsilon,\zeta,\varepsilon,\bar{\varepsilon}) =$$

$$= X\left(t+\epsilon+i(\varepsilon\,\bar{\theta}+\bar{\varepsilon}\,\theta), v+\zeta-i(\varepsilon\,\theta+\bar{\varepsilon}\,\bar{\theta})\,,\, \theta+\varepsilon, \bar{\theta}+\bar{\varepsilon}\right)\,, \tag{4.19}$$

o qual induz as seguintes representações para os geradores

$$\delta^{H} = i\partial_t \;,\; \delta^{Z} = -i\partial_v \,, \tag{4.20}$$

$$\delta^{Q} = \partial_{\theta} + i\bar{\theta}\partial_t - i\theta\partial_v \ , \ \delta^{\bar{Q}} = \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t - i\bar{\theta}\partial_v \, . \tag{4.21}$$

Os geradores obedecem a mesma álgebra

$$\left\{\delta^{Q}, \delta^{\bar{Q}}\right\} = 2\delta^{H} \ , \ \left\{\delta^{Q}, \delta^{Q}\right\} = \left\{\delta^{\bar{Q}}, \delta^{\bar{Q}}\right\} = 2\delta^{Z} \tag{4.22}$$

com δ^H e δ^Z comutando com os demais.

Através da multiplicação alternativa dos elementos de grupo pela direita, obtemos as derivadas covariantes

$$D = \partial_{\theta} - i\bar{\theta}\partial_t + i\theta\partial_v \ , \ \bar{D} = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t + i\bar{\theta}\partial_v \, . \tag{4.23}$$

Além delas anti-comutarem com as cargas δ^Q e $\delta^{\bar{Q}}$, as mesmas satisfazem

$$\left\{D, \bar{D}\right\} = -2i\partial_t \ , \ \left\{\bar{D}, \bar{D}\right\} = \{D, D\} = 2i\partial_v \, . \tag{4.24}$$

Retornemos agora à discussão de supercampos, definimos um supercampo real

$$X(t, v, \theta, \bar{\theta}) = f_1(t, v) + i\theta\psi(t, v) + i\bar{\theta}\bar{\psi}(t, v) + f_2(t, v)\,\theta\bar{\theta} \ . \tag{4.25}$$

Observe que, com essa formulação, não estamos mais em uma descrição de mecânica, pois, agora temos campos f_1, f_2, ψ e $\bar{\psi}$ que, em geral, dependem de (t, v).

Passemos à discussão de como os campos do supercampo real se transformam sob esta SUSY. De modo análogo ao feito para a situação sem carga central, i.e., pela expansão de Taylor do lado direito de (4.19) e comparando com

$$\delta X \equiv \delta f_1 + i\theta\, \delta\psi + i\bar{\theta}\, \delta\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}\, \delta f_2 \, , \tag{4.26}$$

temos que as variações ficam dadas por

$$\delta f_1 = i\, \varepsilon\, \psi + i\, \bar{\varepsilon}\, \bar{\psi} + \epsilon \dot{f}_1 + \zeta \partial_v f_1 \, , \tag{4.27}$$

$$\delta\psi = \varepsilon\, \partial_v f_1 - i\, \bar{\varepsilon}\, f_2 - \bar{\varepsilon}\, \dot{f}_1 + \epsilon\dot{\psi} + \zeta\partial_v \psi \, , \tag{4.28}$$

$$\delta f_2 = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon\, \psi - \bar{\varepsilon}\, \bar{\psi} + \epsilon f_2\right) + \frac{d}{dv}\left(\varepsilon\, \bar{\psi} - \bar{\varepsilon}\, \psi + \zeta f_2\right) \ . \tag{4.29}$$

Desde que f_2 se transforma como derivada total de v e t e a medida fica inalterada pelas transformações (determinante da matriz jacobiana é igual a 1), temos que uma ação formulada em termos de supercampos reais, será automaticamente invariante ao impormos que os campos se anulam nos extremos. A transformação de nosso interesse é a de SUSY, assim, basta fixarmos $\zeta = \epsilon = 0$ nas variações acima, para termos

$$\delta^{SUSY} = \varepsilon\, \delta^{Q} + \bar{\varepsilon}\, \delta^{\bar{Q}}\,, \tag{4.30}$$

com δ^{Q} e $\delta^{\bar{Q}}$ sendo dados por (4.21).

É interessante frisar que nessa abordagem os supercampos quiral e anti-quiral não dependem de v e possuem a mesma forma obtida na SUSY sem carga central, não acrescentando nenhuma novidade. No caso de v ser compacto, uma ação formulada em termos destes supercampos também será invariante, pois, sob integração de v aparecerá apenas um fator multiplicativo global na lagrageana.

Vamos agora apresentar dois modelos onde aplicamos essa formulação.

4.2.1 Configurações topológicas em (1+1)D

Utilizando o supercampo real (4.25) e as derivadas covariantes (4.23), construímos a ação

$$S = \int dt\, dv\, d\theta\, d\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}\, DX\, \bar{D}X + U(X) \right] , \tag{4.31}$$

com o termo cinético usual e um superpotencial $U(X)$.

Em componentes essa ação resulta na seguinte densidade lagrangeana

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\,(\dot{f}_1)^2 - \frac{1}{2}\,(\partial_v f_1)^2 + \frac{f_2^2}{2} - f_2\,\frac{\partial U}{\partial f_1} + \\ -\psi\bar{\psi}\,\frac{\partial^2 U}{\partial f_1^2} + \frac{i}{2}\,(\psi\dot{\bar{\psi}} - \dot{\psi}\bar{\psi}) - \frac{i}{2}\,\big((\partial_v\bar{\psi})\bar{\psi} - \psi(\partial_v\psi) \big)\ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

A partir dela fica evidente que a coordenada v é interpretada como uma dimensão espacial e, como consequência, a carga central Z, na representação diferencial, é proporcional ao operador de momento ($\delta^{Z} = -i\partial_v$). Nesse caso, concluímos que o papel da carga central é acomodar uma estrutura de campos em $(1+1)D$.

Sob transformação de SUSY a lagrangeana toma a forma

$$\delta^{SUSY} L = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(i\dot{f}_1\varepsilon\psi + i\dot{f}_1\bar{\varepsilon}\bar{\psi} + f_2\varepsilon\psi - f_2\bar{\varepsilon}\bar{\psi} - if_1\varepsilon\partial_v\bar{\psi} - f_1\bar{\varepsilon}\partial_v\psi\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left(-i(\partial_v f_1)\varepsilon\psi - i(\partial_v f_1)\bar{\varepsilon}\bar{\psi} + f_2\varepsilon\bar{\psi} - f_2\bar{\varepsilon}\psi + if_1\varepsilon\dot{\bar{\psi}} + if_1\bar{\varepsilon}\dot{\psi}\right) +$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\bar{\varepsilon}\bar{\psi}\frac{\partial U}{\partial f_1} - \varepsilon\psi\frac{\partial U}{\partial f_1}\right) + \frac{d}{dv}\left(-\varepsilon\bar{\psi}\frac{\partial U}{\partial f_1} + \bar{\varepsilon}\psi\frac{\partial U}{\partial f_1}\right) . \qquad (4.33)$$

Desde que a variável auxiliar $f_2(t,v)$ não possui dinâmica, ela pode ser eliminada pelo uso da sua equação de movimento, $f_2(t,v) = \partial U/\partial f_1$, resultando

$$L' = \frac{1}{2}(\dot{f}_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_v f_1)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial f_1}\right)^2 - \psi\bar{\psi}\,\frac{\partial^2 U}{\partial f_1^2} +$$

$$+\frac{i}{2}(\psi\dot{\bar{\psi}} - \dot{\psi}\bar{\psi}) - \frac{i}{2}\left((\partial_v\bar{\psi})\bar{\psi} - \psi(\partial_v\psi)\right) . \qquad (4.34)$$

Essa nova lagrageana, equivalente a antiga, exibe claramente uma estrutura interessante. Para isso, calculemos as equações de movimento:

$$\ddot{f}_1 - \partial_v^2 f_1 + U'\,U'' + \psi\bar{\psi}\,U''' = 0\,, \qquad (4.35)$$

$$i\,\dot{\psi} + i\,\partial_v\bar{\psi} + \psi\,U'' = 0\,,\; U' \equiv \partial U/\partial f_1\;. \qquad (4.36)$$

De acordo com [33], percebemos que as equações acima possuem uma configuração topológica de *sóliton*, pois, $f_1(t,v) = f_1^{(1)}(v)$ satisfazendo

$$\frac{d}{dv}f_1^{(1)} = \pm U'(f_1^{(1)}) \qquad (4.37)$$

é uma solução particular das equações acima, com $\psi(t,v) = \psi^{(1)}(t,v) = 0$.

A partir desta solução e das transformações de SUSY (4.27) e (4.28) on-shell, ou seja, com $f_2(t,v) = \partial U/\partial f_1$, podemos obter uma outra solução, não-trivial para os campos fermiônicos e ainda com estrutura topológica para os bosônicos. Para isso, pertubando a solução anterior, construímos

$$f_1^{(2)} = f_1^{(1)} + \delta f_1^{(1)} \equiv f_1^{(1)}\,, \qquad (4.38)$$

$$\psi^{(2)} = \psi^{(1)} + \delta\psi^{(1)} \equiv \delta\psi^{(1)} = \varepsilon\partial_v f_1^{(1)} - i\bar{\varepsilon}U'\,, \qquad (4.39)$$

que são soluções das equações (4.35) e (4.36).

Por exemplo, no caso particular onde tomamos

$$U'(f_1) = \pm \left[\frac{2}{b^2}\,(1-\cos(b\,f_1))\right]^{1/2}\,, \tag{4.40}$$

com b sendo constante, teremos uma versão supersimétrica para o *kink* associado à equação de *sine-Gordon*.

4.2.2 SUSY para o campo complexo de Klein-Gordon

Vamos agora explorar a estrutura da SUSY, com carga central Z e variável v, em supercampos complexos:

$$Y = y(t,v) + \theta\alpha(t,v) + \bar{\theta}\bar{\beta}(t,v) + \theta\bar{\theta}h(t,v)\,, \tag{4.41}$$

$$\bar{Y} = \bar{y}(t,v) - \theta\beta(t,v) - \bar{\theta}\bar{\alpha}(t,v) + \theta\bar{\theta}\bar{h}(t,v)\,. \tag{4.42}$$

Formulemos a seguinte ação

$$S = \int dt\,dv\,d\bar{\theta}\,d\theta \left(a\,DY\bar{D}\bar{Y} + a\,D\bar{Y}\bar{D}Y + c\,Y\bar{Y}\right)\,, \tag{4.43}$$

com a e c sendo constantes, a qual resultará na densidade lagrangeana

$$\begin{aligned} L = {} & 2a\,\dot{y}\,\dot{\bar{y}} + 2a\,h\,\bar{h} + c(y\bar{h} + h\bar{y}) + ai(\beta\dot{\bar{\beta}} - \dot{\beta}\bar{\beta}) + \\ & -ia\left[(\partial_v\bar{\alpha})\bar{\beta} - \beta(\partial_v\alpha)\right] - 2a\,(\partial_v\bar{y})(\partial_v y) + \\ & +ai\,(\alpha\dot{\bar{\alpha}} - \dot{\alpha}\bar{\alpha}) - ai\,\left[(\partial_v\bar{\beta})\bar{\alpha} - \alpha(\partial_v\beta)\right] + c(\alpha\,\bar{\alpha} + \beta\,\bar{\beta})\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Novamente a variável auxiliar h pode ser eliminada pelo de uso de sua equação de movimento, $h = -c\,y/(2a)$, fornecendo uma lagrangeana equivalente L' dada por

$$\begin{aligned} L' = {} & 2a\,\dot{y}\dot{\bar{y}} - 2a\,(\partial_v\bar{y})(\partial_v y) - \frac{c^2}{2a}\,y\bar{y} + ai\left(\alpha\dot{\bar{\alpha}} - \dot{\alpha}\bar{\alpha} + \beta\dot{\bar{\beta}} - \dot{\beta}\bar{\beta}\right) + \\ & - ai\left[(\partial_v\bar{\alpha})\bar{\beta} - \bar{\alpha}(\partial_v\bar{\beta}) + (\partial_v\beta)\alpha - \beta(\partial_v\alpha)\right] + c\,(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})\,. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nessa última fica evidente, pelos primeiros três termos, que a mesma trata-se de uma versão supersimétrica para o campo complexo de Klein-Gordon massivo ($m \equiv c^2/2a$).

Outras estruturas envolvendo supercampos complexos foram também exploradas, mas não forneceram os resultados desejados. Por exemplo, ao trocarmos o termo $cY\bar{Y}$ por um superpotencial $U(cY\bar{Y})$ em (4.41), obtivemos para a variável auxiliar $h = -c^2\, y^2\, \bar{y}/(2a)$ de modo que $h\bar{h}$ não resultará em um termo proporcional a $(y\bar{y})^2$, que seria essencial para outra formulação de kink, como discutido por [34].

4.3 Conclusões Parciais

Neste capítulo, estudamos a extensão da SUSY $N = 2$ através da introdução de um operador de carga central Z. Duas situações foram discutidas: a primeira, baseada nos artigos [31], e a segunda, construída nessa dissertação. Passemos a uma análise crítica das duas abordagens.

A introdução da carga central, na SUSY $N = 2$ e sem variável v, não conduziu a nenhuma aplicação para a equação de Pauli, a menos que se tenha uma formulação para a mesma em termos de supercampos reais, o que até agora não existe na literatura. Além disso, algumas dificuldades aparecem nessa formulação e que ainda precisam ser esclarecidas. Uma delas está relacionada com a própria abordagem dos artigos citados acima: eles utilizam uma formulação de supercampos, mas não mostram explicitamente qual é a transformação induzida no superespaço pelos geradores. Tal informação é relevante para obter a matriz jacobiana da transformação e, por conseguinte, estudar a variação da ação. A segunda questão está associada a própria implementação desta SUSY estendida. Os modelos pseudoclássicos apresentados quebram a estrutura de supercampos, tornando mais difícil construir uma ação invariante, pois, a mesma deverá ser escrita em componentes.

Na abordagem em que associamos uma variável v para Z, fomos conduzidos naturalmente as derivadas covariantes (4.23). Logo, através desses resultados, podemos acrescentar um outro ponto de vista na situação sem variável v, onde utilizamos as derivadas

$$D = \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t - \theta\delta^Z \ , \ \bar{D} = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t - \bar{\theta}\delta^Z \tag{4.46}$$

no termo cinético usual. Com isso, poderíamos nos perguntar se a ação, formulada em supercampos, ainda seria invariante, como ocorre quando $\delta^Z = -i\partial_v$. A mesma conclusão poderia ser obtida ao lembrarmos do fato de que as derivadas covariantes devem anti-comutar com as cargas de SUSY (4.5) e (4.6). Nos artigos, essa questão não foi abordada ou percebida, pois utilizaram as derivadas "antigas"(2.58) e (2.59). Caso essa discussão fosse verdadeira[3], então seria mais simples construir uma ação invariante para variações mais gerais e, por conseguinte, explorar isso na possível dualidade com a teoria de cordas ou em outros problemas físicos.

Note que a aplicabilidade da segunda questão está condicionada a resolução da primeira.

Na introdução da SUSY $N = 2$, com Z e variável v, temos que a mesma não apresenta os problemas do caso sem v, pois conseguimos uma descrição de super-grupo, permitindo a compreensão do superespaço induzido pela super-álgebra. Logo, foi possível obter explicitamente as representações para as cargas e derivadas covariantes. Tal supersimetria estendida seria aplicável em $(1 + 1)D$ e não mais na mecânica ordinária.

Na teoria de campos supersimétrica ordinária, o anti-comutador das cargas de SUSY é proporcional ao operador de momento junto com um matriz pertencente a álgebra de Clifford, assim, temos que a supersimetria estendida que estamos discutindo seria, de modo informal, em "1.5 - dimensional".

Os exemplos estudados mostraram que a variável v está relacionada com uma dimensão espacial. No primeiro deles, mostramos que configurações topológicas (kink) em $(1+1)D$ podem ser descritas por essa formulação no setor bosônico, implicando numa solução não-trivial para os campos fermiônicos.

Uma observação importante é que essa aplicação não foi discutida completamente, pois, falta construírmos explicitamente as soluções nos dois setores e mostrarmos que elas conduzem uma ação invariante sob SUSY (on-shell). Por exemplo, para soluções

[3]deve ficar claro para o leitor que isso é uma perspectiva. Inicialmente, deveríamos estudar os casos particulares das transformações associadas aos modelos dos artigos [31] e verificar se os "contra-termos"são gerados automaticamente devido as novas derivadas covariantes. Em seguida, demonstrar a validade dessa abordagem para o caso geral.

topológicas não podemos simplesmente impor em (4.33) que os campos se anulem nos extremos. Além disso, deixamos também como perspectiva futura o estudo de uma teoria quântica de campos para essa SUSY com Z e variável v.

Outros trabalhos, dentre os quais destacamos [35], partindo da teoria de campos relativística em $(1+1)D$, obtiveram uma formulação supersimétrica para kink, mas sem usar a carga central. Nessa descrição, a supersimetria também confere uma solução não-trivial aos campos fermiônicos, que satisfazem uma equação do tipo Weyl.

No segundo exemplo, construímos uma versão supersimétrica para o campo complexo de Klein-Gordon.

No âmbito da SUSY com carga central, existe ainda uma outra maneira de contornar os problemas da representação de δ^Z e da medida.[4] Para isso, abandonamos a idéia de superespaço e utilizamos a seguinte álgebra de SUSY estendida:

$$\{Q_1, Q_2\} = Z\,, \tag{4.47}$$

$$Q_1^2 = Q_2^2 = H\,, \tag{4.48}$$

$$[Q_1, H] = [Q_2, H] = 0\,. \tag{4.49}$$

Por exemplo, para uma lagrangeana do tipo

$$L = Q_1\, Q_2\, [M(x,t)]\ , \tag{4.50}$$

verificamos que o papel da carga central Z é, além de satisfazer a álgebra, impor o vínculo

$$Q_2 Z M(x,t) = 0, \tag{4.51}$$

a fim de manter a invariância.

Portanto, o problema agora é encontrar as representações para Z, que satisfazem a relação acima, definindo $M(x,t)$ conforme os multipletes $(1,2,1)$, $(2,2,0)$ ou $(0,2,2)$, classificados de acordo com [36].

Observe que nessa dissertação apenas alguns casos particulares e simples foram abordados, outras possíveis aplicações e perspectivas serão discutidas nas considerações finais.

[4] esse apontamento foi dado por Sadi Khodaee.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Dentre os tópicos tratados ao longo dessa dissertação e aqueles discutidos de modo específico nas conclusões parciais, gostaríamos de mencionar algumas questões mais globais e também alguns problemas deixados em aberto como perspectivas futuras.

No terceiro capítulo, seguindo as argumentações da tese de doutorado [12], revisamos a formulação da SUSY $N = 2$ para a equação de Pauli em $(2+1)D$, com acoplamento não-mínimo, o qual forneceu um conhecimento necessário para dar continuidade ao seguinte problema deixado nesta tese:

• generalizar os resultados obtidos para situações envolvendo campos $\vec{A}$ e ϕ não-estacionários.

Outra questão que apareceu ao longo da realização desse trabalho foi

• investigar a existência da SUSY desse modelo em espaços não-comutativos.

Acreditamos que a abordagem de supercampos possa esclarecer melhor alguns desses problemas. Por exemplo, a solução da primeira questão deve estar associada a uma redefinição da prescrição implementada no potencial de Kähler. Já a segunda questão, ainda não foi discutida na literatura, pelo fato de que a maioria dos trabalhos de mecânica quântica supersimétrica são realizados em uma formulação em componentes, assim, especificamente neste problema [20], somente foi apresentada a situação de acoplamento mínimo e, por conseguinte, não levando em conta a contribuição do momento de dipolo magnético anômalo.

Ainda no terceiro capítulo, ao estudarmos a interação produzida por potencias externos $\Gamma(z)$ e $\bar{\Gamma}(\bar{z})$ de natureza grassmaniana, conforme proposto na tese de doutorado [12] para a mecânica quântica, corrigimos a representação matricial 4×4 da interação obtida pelos autores e observamos a existência de alguns vínculos entre as componentes dessa matriz, que não foram considerados. Ao longo do texto, justificamos a necessidade de uma função de onda com quatro componentes em várias situações de sistemas planares, como, por exemplo: na QED em $(2+1)D$ invariante sob paridade, no estudo do grafeno e em outras teorias envolvendo uma interação de spin 3/2. Com relação a esse assunto, temos a seguinte motivação:

• investigar a possibilidade desse modelo descrever algumas interações em sistemas planares da matéria condensada.

Note que a introdução dos potencias $\Gamma(z)$ e $\bar{\Gamma}(\bar{z})$ foi realizada através da quantização canônica de um modelo na mecânica clássica supersimétrica. Aproveitando tal construção, fizemos um tratamento desses potenciais em nível pseudoclássico, que ainda não tinha sido discutido na literatura. Nessa situação, estudamos apenas as situações mais simples para os potenciais Γ e $\bar{\Gamma}$, os campos eletromagnéticos (com $\vec{E}$ nulo e B constante) e resolvemos analiticamente o sistema de equações desses problemas. Os resultados foram bastante interessantes, mostrando a possibilidade de introduzirmos forças dependentes explicitamente do tempo e outras uniformes, que trazem um acoplamento com as condições iniciais associadas aos graus de liberdade fermiônicos.

Como já existem programas computacionais que podem resolver algebricamente ou simbolicamente alguns sistemas de equações com variáveis de Grassmann, poderíamos

• estudar casos mais gerais para os potencias grassmanianos e com campos eletromagnéticos dependentes da posição.

Acreditamos que a resolução desses casos esclareceria melhor a interpretação dessa descrição como uma teoria efetiva, entre a mecânica clássica ordinária e a mecânica quântica, sem colocar condições iniciais fermiônicas (não-observáveis) no setor bosônico. Por exemplo, estudando $\Gamma(z) = \sum_i \alpha_i \, f_i(z)$, com $f_i(z)$ sendo dada por uma função polinomial ou trigonométrica e α_i parâmetros fermiônicos.

No quarto capítulo, ao discutirmos uma generalização da SUSY $N = 2$, através da introdução de um operador de Carga Central, proposta por [31], nos deparamos com algumas questões não percebidas pelos autores e que não puderam ser resolvidas totalmente nesse trabalho introdutório, resumindo-se no seguinte problema: em um abordagem de supercampos é imprescindível o conhecimento das transformações induzidas no superespaço.

Os artigos formularam a supersimetria através de um ponto de vista algébrico, de modo que não obtiveram uma representação explicíta para os geradores como operadores diferenciais. A solução do problema provavelmente está na construção do super-grupo associado à álgebra estendida. Nesse sentido, ao introduzirmos um parâmetro bosônico para a Carga Central, mostramos que a implementação desta supersimetria é consistente, mas, sua aplicabilidade se restringe à teoria de campos em $(1 + 1)D$.

Portanto, o problema inicial em nível de mecânica ordinária, ou seja, em $(0+1)D$ não foi resolvido. Entretanto, apareceu uma nova linha de investigação em que até agora estudamos apenas alguns casos particulares: utilizando supercampos reais em configurações topológicas e, com supercampos complexos, na versão supersimétrica para o campo complexo de Klein-Gordon. Logo, temos a seguinte perspectiva:

• explorar outras estruturas dessa supersimetria com v relacionado a Z, como, por exemplo, a utilização de supercampos fermiônicos e seu acoplamento com bosônicos.

Por último, ainda na extensão supersimétrica de $N = 2$, fica uma outra motivação:

• estudar a SUSY $N = 2$ na presença de duas Cargas Centrais e com dois parâmetros bosônicos associados.

Essa seria a extensão mais geral que a SUSY $N = 2$ poderia acomodar com a introdução de Cargas Centrais e variáveis associadas. Já temos resultados preliminares de que uma estrutura de super-grupo e superespaço é consistente e obtivemos as representações para os geradores, derivadas covariantes e supercampos. Nessa situação, foi possível obter também supercampos quiral e anti-quiral, permitindo que outras estruturas, como os potencias de Kähler, possam ser explorados. Deixamos a construção de alguns modelos como perspectiva futura.

Apêndice A

Álgebra de Grassmann

Nesse apêndice será feita uma apresentação básica a respeito das estruturas matemáticas associadas à álgebra de Grassmann, como, por exemplo, o conceito de geradores, paridade de Grassmann, derivadas e integrais. Aproveitamos tal abordagem para fixar algumas notações e convenções a serem utilizadas ao longo da dissertação.

Uma álgebra de Grassmann G_n, de dimensão finita n, é definida da seguinte maneira:

i) $G_n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial sob o corpo dos complexos $\mathbb{C}$.

ii) existe um produto definido em G_n, que é bilinear e associativo com

respeito a adição e multiplicação por escalares.

iii) G_n contém o elemento unitário para esse produto.

iv) G_n é gerado por n elementos $\xi_\alpha\,(\alpha = 1, ..., n)$, denominados geradores,

os quais satisfazem

$$\xi_\alpha\,\xi_\beta + \xi_\beta\,\xi_\alpha = 0 \ , \ \ (\alpha\,,\beta = 1, ..., n) \ . \tag{A.1}$$

Uma base simples para tal espaço vetorial é dada por

$$\{1\,,\,\xi_{\alpha_1}\,, ...,\,\xi_{\alpha_n}\,,\,\xi_{\alpha_1}\,\xi_{\alpha_2}\,, ...,\,\xi_{\alpha_1}\,...\,\xi_{\alpha_n}\} \ . \tag{A.2}$$

Através da álgebra $(A.1)$, satisfeita pelos geradores, temos que qualquer elemento $\Omega(\xi) \in G_n$ pode ser escrito na forma[1]

[1]note que estamos utilizando a idéia da soma implícita de Einstein quando dois índices estiverem repetidos.

$$\Omega = w_0 + w_\alpha\, \xi_\alpha + w_{\alpha_1\, \alpha_2}\, \xi_{\alpha_1}\, \xi_{\alpha_2} + ... + w_{\alpha_1\, ...\, \alpha_n}\, \xi_{\alpha_1} \cdots \xi_{\alpha_n}\,, \tag{A.3}$$

com $w_0\,,\, w_\alpha\,,\, ...\,,\, w_{\alpha_1\, ...\, \alpha_n} \in \mathbb{C}$. Isso nada mais é do que a soma de 2^n monômios, onde os coeficientes $w_{\alpha_1\, ...\, \alpha_k}\,,\ (k = 2, ..., n)$ devem ser anti-simétricos com o propósito de que a representação abstrata não seja ambígua.

O espaço vetorial G_n pode ser escrito como a soma de dois subconjuntos:[2]

$$G_n = G_n^{(0)} \oplus G_n^{(1)}\,, \tag{A.4}$$

onde $G_n^{(0)}$ consiste de todos elementos pares de G_n, ou seja, aqueles para o qual a soma $(A.3)$ contém apenas monômios com um número par de geradores ξ. De modo contrário, $G_n^{(1)}$ é formado pelos monômios com número ímpar de geradores. Logo, qualquer elemento $\Omega(\xi)$ pertencente a G_n pode ser escrito na forma $\Omega(\xi) = \Omega^{(0)}(\xi) + \Omega^{(1)}(\xi)$ com

$$\Omega^{(0)}(\xi) = w_0 + w_{\alpha_1\, \alpha_2}\, \xi_{\alpha_1}\, \xi_{\alpha_2} + ... \in G_n^{(0)}, \tag{A.5}$$

$$\Omega^{(1)}(\xi) = w_\alpha\, \xi_\alpha + w_{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3}\, \xi_{\alpha_1}\, \xi_{\alpha_2}\, \xi_{\alpha_3} + ... \in G_n^{(1)}\,. \tag{A.6}$$

Além disso, pela álgebra $(A.1)$, elementos de $G_n^{(1)}$ anti-comutam entre eles próprios e os elementos de $G_n^{(0)}$ comutam com qualquer elemento $\Omega \in G_n$. Para diferenciar os elementos dos dois subconjuntos introduzimos o conceito de paridade, como sendo definido por

$$\eta(\Omega) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & , & \text{se} & \Omega & \in & G^{(0)} \\ 1 & , & \text{se} & \Omega & \in & G^{(1)} \end{array} \right. . \tag{A.7}$$

Muitas vezes os elementos com paridade par $(\eta = 0)$ são chamados, por razões na física, de bosônicos, e aqueles com paridade ímpar $(\eta = 1)$ de fermiônicos.

Em resumo, se $\Omega_1\,,\, \Omega_2 \in G_n$ e possuem paridade definida então

$$\Omega_1\, \Omega_2 = (-1)^{\eta(\Omega_1)\, \eta(\Omega_2)}\, \Omega_2\, \Omega_1\,, \tag{A.8}$$

$$\eta(\Omega_1\, \Omega_2) = [\, \eta(\Omega_1) + \eta(\Omega_2)\,]\, (\text{mod}\, 2)\,.$$

[2] atente ao fato de que $G_n^{(1)}$ não é subespaço vetorial, pois ele não possui a identidade.

Passemos à introdução de derivadas atuando sob essa álgebra. Devido a propriedade de anticomutação dos geradores devemos distinguir dois casos. Considere inicialmente o conceito de derivada ordinária de uma função $f(x_1, ..., x_k)$. Como bem conhecido, sua variação é dada por

$$\delta f = \sum_{i=1}^{k} \delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \,. \tag{A.9}$$

Observe que nessa situação não importa se a variação δx_i está a direita ou a esquerda da derivada parcial. Entretanto, para elementos da álgebra de Grassmann, a ordem tem importância. Existe a seguinte distinção na variação de $\Omega \in G_n$:

$$\delta\Omega(\xi) = \delta\xi_\alpha \frac{\overrightarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi_\alpha} \,, \tag{A.10}$$

$$\delta\Omega(\xi) = \frac{\overleftarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi_\alpha} \delta\xi_\alpha \,. \tag{A.11}$$

Denominaremos a derivada presente na variação $(A.10)$ e $(A.11)$ como derivada direita e esquerda, respectivamente.

Por construção, a atuação da derivada direita em um monômio arbitrário resulta

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_\alpha} (\xi_{\alpha_1} ... \xi_{\alpha_i}) = \delta_{\alpha\alpha_1} \xi_{\alpha_2} ... \xi_{\alpha_i} - \delta_{\alpha\,\alpha_2} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_3} ... \xi_{\alpha_i} + \, ... +$$

$$+(-1)^{i-1} \delta_{\alpha\,\alpha_i} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} ... \xi_{\,\alpha_{i-1}} \,, \tag{A.12}$$

o qual permite demonstrarmos a seguinte propriedade no produto

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_\alpha} (\Omega_1\Omega_2) = \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_\alpha} \Omega_1 \right) \Omega_2 + (-1)^{\eta(\Omega_1)} \Omega_1 \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_\alpha} \Omega_2 \right) . \tag{A.13}$$

Na mudança de variável, $\xi_\alpha \to \xi'_\alpha = a_{\alpha\beta}\, \xi_\beta$, a regra da cadeia fica

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_\alpha} \Omega\,[\xi'(\xi)] = \left(\frac{\overrightarrow{\partial}\,\xi'_\beta}{\partial\xi_\alpha} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi'_\beta} \right) = a_{\beta\alpha} \left(\frac{\overrightarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi'_\beta} \right) . \tag{A.14}$$

Apenas para elementos de $G^{(1)}$ a derivada direita e esquerda são iguais. Em geral,

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi_\alpha} = -(-1)^{\eta(\Omega)} \frac{\overrightarrow{\partial}\,\Omega}{\partial\xi_\alpha} \,, \tag{A.15}$$

assim, basta estudarmos as propriedades de uma delas.

O uso de derivadas direita e esquerda é apenas uma convenção. Nessa dissertação, utilizaremos a derivada direita definida em $(A.10)$. Repare também na notação, comumente usada por DeWitt [37], onde a flecha indica o sentido no qual a derivada vai atuar.[3]

Vamos agora introduzir as integrais, o qual foi feita independentemente por DeWitt [37] e Berezin [38]. Através da exigência

$$d\xi_\alpha \, d\xi_\beta + d\xi_\beta \, d\xi_\alpha = 0 \ , \ \xi_\alpha \, d\xi_\beta + d\xi_\beta \, \xi_\alpha = 0 \, , \tag{A.16}$$

define-se formalmente as integrais fundamentais como

$$\int d\xi_\alpha = 0 \ , \ \int \xi_\alpha \, d\xi_\alpha = 1 \, , \text{ (sem soma sobre} \, \alpha \, \text{)}, \tag{A.17}$$

$$\int (c_1 \, \Omega_1 + c_2 \, \Omega_2) \, d\xi_\alpha = c_1 \int \Omega_1 \, d\xi_\alpha + c_2 \int \Omega_2 \, d\xi_\alpha \, , \tag{A.18}$$

com $c_1 \, , c_2 \ \in \mathbb{C}$. Observe, pelos resultados, que a operação de integração possui uma estrutura equivalente a derivação.

Por último, com relação a operação de complexo conjugado, aparece uma particularidade na álgebra de Grassmann. Ao contrário do que ocorre com números complexos usuais, é necessário convencionar uma ordem: seja $c \in \mathbb{C}$ e $\bar{c}$ seu complexo conjugado, então a operação involutiva $*$ é definida por

$$(c \, \xi_\alpha)^* = \bar{c} \, \xi_\alpha^* \ , \ (\xi_\alpha^*)^* = \xi_\alpha \ , \ (\xi_\alpha \, \xi_\beta)^* = \xi_\beta^* \, \xi_\alpha^* \, . \tag{A.19}$$

Logo, no caso particular de ξ_α e ξ_β reais, i.e., pertencentes a $G_n(\mathbb{R})$, obtemos

$$(\xi_\alpha \xi_\beta)^* \equiv \xi_\beta^* \xi_\alpha^* = \xi_\beta \xi_\alpha = -\xi_\alpha \xi_\beta \, . \tag{A.20}$$

Ao permitimos a existência de geradores complexos devemos exigir que

$$\xi_\alpha \xi_\beta^* + \xi_\beta^* \xi_\alpha = 0 \ , \ \xi_\alpha^* \xi_\beta^* + \xi_\beta^* \xi_\alpha^* = 0 \, . \tag{A.21}$$

[3]com o objetivo de facilitar a leitura das referências nesse assunto, vamos fixar a notação deles com relação à nossa. No livro do Sundermeyer [39] as derivadas são interpretadas como $(\partial/\partial\xi)\big|_R \equiv \overrightarrow{\partial}/\partial\xi$, $(\partial/\partial\xi)\big|_L \equiv \overleftarrow{\partial}/\partial\xi$, já no livro do Henneaux e Teitelboim [40], temos $\partial^L/\partial\xi \equiv \overrightarrow{\partial}/\partial\xi$, $\partial^R/\partial\xi \equiv \overleftarrow{\partial}/\partial\xi$ e, por último, no livro de Gitman e Tyutin [41], $\partial_l/\partial\xi \equiv \overrightarrow{\partial}/\partial\xi$, $\partial_r/\partial\xi \equiv \overleftarrow{\partial}/\partial\xi$.

Uma vez introduzido os elementos básicos da álgebra de Grassmann, passemos a utilização dela na física, a qual será abordada no próximo apêndice.

Apêndice B

Mecânica Pseudoclássica

Nesse apêndice discutiremos a introdução de variáveis de Grassmann na mecânica. Vamos analisar especificamente a formulação hamiltoniana, construindo os colchetes de Poisson generalizados e apresentando a idéia da quantização canônica, a fim de que, ao longo da dissertação, seja desenvolvido a quantização canônica para sistemas vinculados, sob a perspectiva das teorias pseudoclássicas.

Comecemos com uma introdução histórica. A primeira vez que as variáveis anti-comutantes foram utilizadas na física foi no trabalho de Matthews e Salam [42], no estudo de propagadores de campos fermiônicos quantizados, em que para esses campos a integração funcional era sobre funções anti-comutativas. Já o início de uma mecânica com variáveis anti-comutantes foi em 1959 devido aos trabalhos de Martin [43], onde ele apresenta o princípio de Feynman para sistemas envolvendo tais variáveis e uma aplicação ao oscilador fermiônico.

Todavia, apenas na década de 70, essa mecânica começa a ser estudada sistematicamente, devido a Casalbuoni [44] e independentemente por Berezin e Marinov [45]. Destaca-se que as duas abordagens possuem motivações distintas. Na primeira, onde foi introduzido o termo "pseudoclássico" ou "pseudodinâmica", Casalbuoni apresentou a formulação hamiltoniana, os colchetes de Poisson e as transformações canônicas para esses sistemas e ainda interpretou a pseudodinâmica como uma teoria entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. Para ser mais específico, tal descrição estaria relacionada com o limite clássico de uma teoria quântica com férmions e bósons, onde persistimos com os graus de liberdade fermiônicos associados as variáveis de Grassmann. Na segunda abordagem, Berezin e Marinov interpretaram a pseudodinâmica como uma generalização da mecânica clássica, introduzindo uma formulação estatística para os observáveis[1] e discutindo algumas aplicações, como, por exemplo, uma descrição pseudoclássica para a precessão do spin e a interação spin-órbita.

É interessante colocarmos isso no contexto histórico. Na década de 70, a supersimetria começa a ser estabelecida na teoria de campos em $(3+1)D$. Um dos trabalhos que destacamos foi devido a Salam e Strathdee [46], no qual eles introduzem o conceito de superespaço, colocando uma nova perspectiva para o uso da álgebra de Grassmann, agora como um parâmetro do espaço-tempo.[2]

Nessa década a pseudodinâmica começa a se tornar uma linha de investigação científica, cujos primeiros resultados relevantes foram a descrição pseudoclássica da equação de Pauli e de Dirac, conforme [45] e [47]. A motivação inicial estava associada ao fato de que a álgebra de Clifford pode ser obtida via álgebra de Grassmann, ou seja, as coordenadas de Grassmann estariam descrevendo os graus de liberdade do spin. Em seguida, percebe-se um intenso estudo da descrição pseudoclássica de modelos de supergravidade em $(0+1)D$ e nas equações de ondas relativísticas para spin arbitrário, de acordo com o livro do Sundermeyer [39] e na dissertação de Lemos [48], respectivamente.

Passemos agora a discussão da pseudodinâmica e a sua formulação lagrangeana e hamiltoniana.

Para uma teoria pseudoclássica, a lagrangeana dependerá não apenas de variáveis ordinárias (bosônicas) q_i e $\dot{q}_i$, mas também dos geradores ξ_α e suas derivadas. Com isso

[1]desde que a variável de Grassmann não é um número real, ela não pode estar associada a nenhum observável. Entretanto, seu valor médio é um número real e, portanto, pode ser observável. Para isso, os autores introduziram uma função distribuição no espaço de fase generalizado, a qual satisfaz uma determinada equação de Liouville e, em seguida, mostraram para alguns casos particulares que na quantização a função distribuição fornece a matriz densidade do sistema.

[2]essa não-comutatividade dos parâmetros fermiônicos do superespaço poderia ser um reflexo de algum efeito quântico da gravitação.

devemos exigir

$$\xi_\alpha \, \xi_\beta + \xi_\beta \, \xi_\alpha = 0 \ , \ \dot{\xi}_\alpha \, \xi_\beta + \xi_\beta \, \dot{\xi}_\alpha = 0 \ , \ \dot{\xi}_\alpha \, \dot{\xi}_\beta + \dot{\xi}_\beta \, \dot{\xi}_\alpha = 0 \, . \tag{B.1}$$

Note que, ao introduzirmos dinâmica, as variáveis de Grassmann dependem de um parâmetro de evolução, i.e., o tempo. Entretanto, da definição $(A.3)$ as variáveis ordinárias deveriam ser constantes. A sutileza é que agora consideramos as mesmas como função (ou superfunções, como denominado na literatura [37]), cuja imagem é o corpo dos complexos. Desde que estas continuem satisfazendo as mesmas propriedades algébricas discutidas aqui, não será necessário fazer uma distinção e abordar o conceito de supervariedades.

A ação, para teorias com derivadas de primeira ordem, é formulada de modo análogo ao feito para o caso ordinário,

$$S = \int dt \, L(q_i, \dot{q}_i, \xi_\alpha, \dot{\xi}_\alpha, t) \, . \tag{B.2}$$

Utilizando a convenção da derivada direita teremos que o princípio variacional fornecerá as seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{\partial} L}{\partial \dot{\xi}_\alpha}\right) - \frac{\overrightarrow{\partial} L}{\partial \xi_\alpha} = 0 \, . \tag{B.3}$$

Definindo os momentos canônicos

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \ \Pi_\alpha \equiv \frac{\overrightarrow{\partial} L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} \, , \tag{B.4}$$

podemos contruir hamiltoniana,

$$H \equiv \dot{q}_i \, p_i + \dot{\xi}_\alpha \, \Pi_\alpha - L \, , \tag{B.5}$$

eliminando as velocidades em função das demais variáveis.

Devido a nossa convenção, os momentos Π_α, que aparecem na hamiltoniana, ficam à direita dos $\dot{\xi}_\alpha$. Caso utilizassemos a derivada esquerda então os momentos ficariam à esquerda.

As equações de Hamilton são dadas por

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ , \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \tag{B.6}$$

$$\dot{\Pi}_\alpha = -\frac{\overrightarrow{\partial} H}{\partial \xi_\alpha} \ , \ \dot{\xi}_\alpha = -\frac{\overrightarrow{\partial} H}{\partial \Pi_\alpha} \, . \tag{B.7}$$

Note o fato de que aparece um sinal negativo na última.

A estrutura dos colchetes de Poisson pode ser deduzida de maneira similar do que é feito na mecânica clássica. Para isso, considere o espaço de fase formado por $(q_i \, , \, p_i \, , \, \xi_\alpha \, , \Pi_\alpha)$, onde q_i e p_i são tomados como elementos pares da álgebra de Grassmann, $\eta(q_i) = \eta(p_i) = 0$, cujos geradores são ξ_α e Π_α. De acordo com $(A.10)$, a variação de uma variável arbitrária $A(q_i \, , \, p_i \, , \, \xi_\alpha \, , \Pi_\alpha \, , t)$ (com paridade definida) pode ser escrita como

$$\delta A = \delta t \, \frac{\partial A}{\partial t} + \delta q_i \, \frac{\partial A}{\partial q_i} + \delta p_i \, \frac{\partial A}{\partial p_i} + \delta \xi_\alpha \, \frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \xi_\alpha} + \delta \Pi_\alpha \, \frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \Pi_\alpha} \, . \tag{B.8}$$

Logo, utilizando as equações de Hamilton $(B.6)$ e $(B.7)$, temos que

$$\dot{A} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} - \left(\frac{\overrightarrow{\partial} H}{\partial \Pi_\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\overrightarrow{\partial} H}{\partial \xi_\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \Pi_\alpha} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \, . \tag{B.9}$$

Exigindo que a equação acima satisfaça uma estrutura análoga daquela obtida para os colchetes de Poisson da mecânica clássica, ou seja,

$$\dot{A} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \, , \tag{B.10}$$

então podemos inferir que os colchetes de Poisson (generalizados), entre uma variável dinâmica A (com qualquer paridade) e uma outra B com $\eta(B) = 0$, será dado por

$$\{A, B\} = \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} - \left(\frac{\overrightarrow{\partial} B}{\partial \Pi_\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\overrightarrow{\partial} B}{\partial \xi_\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial} A}{\partial \Pi_\alpha} \right) \, . \tag{B.11}$$

Agora, gostaríamos que esses colchetes possuissem as mesmas propriedades de seus análogos quânticos, $\{A, B\} = -\{B, A\}$, pois, a estrutura correta a ser usada na mecânica quântica quando pelo menos uma das variáveis possui paridade par é o comutador, que é anti-simétrico.[3] Para $\eta(A) = 0$ (colchetes entre bóson-bóson) então a imposição de anti-simetria é automaticamente satisfeita. No caso de $\eta(A) = 1$ obtemos, da mesma imposição, uma definição para o colchetes entre bóson-férmion.

Ainda falta discutir uma última questão: qual é a forma dos colchetes de Poisson generalizados quando as duas variáveis dinâmicas F_1 e F_2 têm paridade ímpar ? Sabemos que neste caso os colchetes devem satisfazer as mesmas propriedades de um anti-comutador em mecânica quântica, ou seja,

$$\{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} \ , \ \{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} - \{F_1, F_3\} F_2 \,. \tag{B.12}$$

Através da primeira propriedade e da forma $(B.11)$, obtida para os demais casos, podemos fazer o seguinte ansatz

$$\{F_1, F_2\} = a_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \right) + a_2 \left(\frac{\overrightarrow{\partial} F_1}{\partial \xi_\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial} F_2}{\partial \Pi_\alpha} + \frac{\overrightarrow{\partial} F_2}{\partial \xi_\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial} F_1}{\partial \Pi_\alpha} \right) , \tag{B.13}$$

o qual satisfará a segunda propriedade se $a_1 = 1 = -a_2$.

Pela definição da derivada esquerda, podemos escrever todos os casos acima em uma forma mais compacta,

$$\{A, B\} = \frac{\overleftarrow{\partial} A}{\partial z_I} C_{IJ} \frac{\overrightarrow{\partial} B}{\partial z_J} \,, \tag{B.14}$$

onde z_I é o vetor englobando $(q_i, p_i, \xi_\alpha, \Pi_\alpha)$ e $C_{IJ} \equiv \{z_I, z_J\}$ representa os colchetes fundamentais

$$\{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij} \ , \ \{\xi_\alpha, \Pi_\beta\} = \{\Pi_\beta, \xi_\alpha\} = -\delta_{\alpha\beta} \,. \tag{B.15}$$

Abaixo listamos algumas propriedades destes colchetes.

1) paridade do colchetes: $\eta\left(\{A, B\}\right) = \left[\eta(A) + \eta(B)\right] (\mathrm{mod} 2) \,.$

2) generalização da anti-simetria: $\{A \,,\, B\} = -(-)^{\eta(A)\,\eta(B)} \{B \,,\, A\} \,.$

[3]esses resultados de quantização canônica podem ser resumidos através do seguinte princípio de correspondência de Bohr-Dirac em teorias regulares (não-vinculadas): $\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\,\hbar} \left(\widehat{A}\, \widehat{B} + (-1)^{\eta(A)\eta(B)} \widehat{B}\, \widehat{A} \right)$.

3) linearidade: $\{A\,,\,B+C\}=\{A\,,\,B\}+\{A\,,\,C\}$.

4) generalização da regra do produto:

$$\{A\,,\,B\,C\}=(-)^{\eta(A)\,\eta(B)}\,B\,\{A\,,\,C\}+\{A\,,\,B\}\,C\,.$$

5) generalização da identidade de Jacobi:

$$\{\{A,B\}\,,C\}+(-)^{\eta(A)[\eta(B)+\eta(C)]}\,\{\{B,C\}\,,A\}+$$

$$+(-)^{\eta(C)[\eta(A)+\eta(B)]}\,\{\{C,A\}\,,B\}=0\,.$$

A estrutura desenvolvida até aqui é válida apenas para os modelos pseudoclássicos sem a presença de vínculos (teorias regulares), ou seja, para construir a hamiltoniana, todas as velocidades generalizadas puderam ser escritas como funções das coordenadas e/ou momentos e, por conseguinte, eliminadas através da transformação de Legendre. Entretanto, a maioria dos modelos físicos são teorias singulares (com vínculos).

O tratamento mais geral para teorias pseudoclássicas com vínculos deve levar em conta a possibilidade de vínculos com diferentes paridades, tanto bosônicos quanto fermiônicos, conduzindo na necessidade de introduzir novos elementos matemáticos (álgebra de Berezin, supermatrizes, ...) e, como consequência, novas operações (supertraço, superdeterminante, $T_\lambda-$ transposição, derivadas, integrais de Berezin, superjacobiano, ...). Além disso, existe também a possibilidade dos vínculos dependerem explicitamente do tempo, o que normalmente pode ocorrer em teorias com invariância sob reparametrização. Essa situação acarreta em mudanças na estrutura dos colchetes. O leitor interessado na abordagem geral poderá encontrá-la em [40] e [41].

Na presente dissertação, não apresentaremos essa formulação, pois, os modelos a serem abordados possuem uma estrutura bem simplificada: os vínculos não dependem explicitamente do tempo e possuem apenas paridade ímpar. Assim, para nossos objetivos, a discussão apresentada é suficiente. A partir dos resultados obtidos nesse apêndice é possível, de modo análogo ao feito para a mecânica clássica ordinária, tratar estes casos particulares e construir os chamados colchetes de Dirac ($\{\,,\,\}_D$), os quais generalizam os de Poisson, permitindo que o sistema evolua numa hipersuperfície do espaço de fase e ainda preservando os vínculos. Por último, através de

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\,\hbar}\left(\widehat{A}\,\widehat{B} + (-1)^{\eta(A)\eta(B)}\widehat{B}\,\widehat{A}\right) . \tag{B.16}$$

implemantaremos o procedimento de quantização.

Referências Bibliográficas

[1] S. Coleman, J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967), 1251.

[2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* , Volume III Supersymmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 2000;
J. Terning, *Modern Supersymmetry:Dynamics and Duality* , Oxford University Press, 2006;
Adel Bilal, *Introduction to Supersymmetry*, hep-th/0101055.

[3] Luis Giraldo Durand Bernald, *Uma Discussão do Espectro Fóton-Fotino em Cenários com Condensados Fermiônicos e Violação da Simetria de Lorentz* , Tese de Mestrado, CBPF, 2010;
H. Belich, L. D. Bernald, Patricio Gaete and J. A. Helayël-Neto, hep-th/1303.1108.

[4] H. Nicolai, J. Phys. A. Math. Gen. **9** (1976), 1497.

[5] E. Witten, Nucl. Phys. B **188** (1981), 513;
E. Witten, Nucl. Phys. B **202** (1982), 253.

[6] R. de Lima Rodrigues, *The Quantum Mechanics Susy Algebra: An Introductory Review*, Monografia (2001), CBPF-MO-003/01.

[7] F. Cooper, B. Freedman, Ann. Phys. **146** (1983), 262;
D.Lancaster, Nuovo Cim. ***A*79** (1984), 28;

M. de Grumbrugghe, V. Rittenberg, Ann. Phys. **151** (1983), 99;
A. Khare, J. Maharana, Nucl. Phys. B **244**, (1984), 409.

[8] B.K. Bagchi. *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics v. 116. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[9] Marcelo G. G. Saique, *Supersimetria N-estendida e Modelos Sigma Unidimensionais*, Tese de Doutorado, CBPF, 2012.

[10] A.O. Bolivar, *Quantum-Classical Correspondence*, Springer-Verlag, 2004.

[11] A.A. Deriglazov, Phys. Lett. A **377** (2012), 13-17, hep-th/1203.5697v3.

[12] Ricardo Cardoso Paschoal, *Configurações de Campo e Mecânica Quântica Supersimétrica no contexto de Eletrodinâmica Planar*, Tese de Doutorado, CBPF, 2004.

[13] T.E. Clark, S.T. Love, S.R. Nowling, Nucl. Phys. B **632** (2002), 3, hep-th/0108243;
T.E. Clark, S.T. Love, S.R. Nowling, Mod. Phys. Lett. ***A*15** (2000), 2105, hep-th/0012074.

[14] Johan Alwall, *Supersymmetry and extensions of the Standard Model*, Master of Science thesis, Uppsala, 2001.

[15] Notas de aula de George Svetlichny, *Uma Visão Elementar de Supersimetria* , Tópicos em Matemática Quântica, **22*ᵒ*** Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1999.

[16] L. Frappat, P.Sorba , A. Sciarrino, *Dictionary on Lie Superalgebras* (1996), hep-th/9607161v1.

[17] J.D. Bjorken , S.D. Drell *Relativistic Quantum Mechanics* , McGraw-Hill, 1964.

[18] S. Tomonaga, *The Story of Spin* , University of Chicago Press, 1997;
H.C. Corben, *Classical and quantum theories of spinning particles*, San Francisco, Holden-Day, 1968;
M. Rivas, *Kinematical Theory of Spinning Particles: Classical and Quantum Mechanical Formalism of Elementary Particles*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[19] V.M. Tkachuk, J.Phys. A Math. Gen. **31** (1998) 1859, quant-ph/9709015.

[20] Ashok Das, H. Falomir, J. Gamboa, F. Mendez, Phys. Lett. ***B*670** (2009)407-415, hep-th/0809.1405v2,
E. Harikumar, V. Sunil Kumar, Avinash Khare, Phys. Lett. ***B*589** (2004) 155-161, hep-th/0402064v2,
J. Ben Geloun, F. G. Scholtz, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), hep-th/0812.3289v2,
Pijush K. Ghosh, Eur.Phys.J.C **42** (2005),355-363, hep-th/0403083.

[21] M.E. Carrington, G. Kunstatter, Phys. Rev. D **51** (1995), 1903.

[22] J. Stern, Phys. Lett. B **265** (1991), 119;
I.I. Kogan, Phys. Lett B **262** (1991), 83;
S.M. Latinsky, D.P. Sorokin, JETP Lett. **53** (1991), 187;
S.M. Latinsky, D.P. Sorokin, Mod. Phys. Lett. ***A*6** (1991), 3525.

[23] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications, 2001.

[24] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin, 1996;
J.L. Cortes et al, Int. J. Mod. Phys. ***A*9** (1994), 953, hep-th/9211106;
D.K. Hong, J.Y. Kim, Phys. Lett. B **383** (1996), 327, hep-th/9512054;
C.-h. Chou et al, Phys. Lett. B **304** (1993), 105, hep-th/9301037;
I.I. Kogan, G.W. Semenoff, Nucl. Phys. B **368** (1992), 718;
G. Gat, R. Ray, Phys. Lett. B **340** (1994), 162, hep-th/9408085.

[25] R. C. Paschoal, J. A. Helayël-Neto, L. P. G. de Assis, Phys. Lett. ***A*349** (2006), 67, hep-th/0407109v3.

[26] M.A. De Andrade, O.M. Del Cima, J.A. Helayël-Neto, Il Nuovo Cimento A, **111** (1997), 1145, hep-th/9603054.

[27] R. Jackiw, S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **146** (2007), hep-th/0701760v2.

[28] W. Nahm, Nucl. Phys. B **135** (1978), 149;
S. Ferrara, C.A. Savoy, B. Zumino, Phys. Lett. **100*B*** (1981), 393.

[29] S. Krippendorf, F. Quevedo, O. Schlotterer, *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions* , hep-th/1011.1491.

[30] J. Niederle, A. G. Nikitin, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (2002), Vol. 43, 497.

[31] M. Faux, D. Spector, Phys.Rev. ***D*70** (2004), hep-th/0311095;
M. Faux , D. Kagan, D. Spector, (2004), hep-th/0406152.

[32] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume I Foundations, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[33] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, $\mathbf{2}^{nd}$ edition, 1996.

[34] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, 2002.

[35] P. Di Vecchia, S. Ferrara, Nucl. Phys. B **130** (1977), 93.

[36] A. Pashnev, F. Toppan, J. Math. Phys. **42** (2001), 5257, hep-th/0010135.

[37] B.S. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[38] F.A. Berezin, *The method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

[39] K. Sundermeyer, Lecture Notes in Physics, **169**: *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, 1982.

[40] M. Henneaux , C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1992.

[41] D.M. Gitman , I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, 1990.

[42] P.T. Matthews, A. Salam, Nuovo Cim. , **2** (1955), 120.

[43] J.L. Martin, Proc. Roy. Soc. (London), ***A*251** (1959), 536;
J.L. Martin, Proc. Roy. Soc. (London), ***A*251** (1959), 543.

[44] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **33*A*** (1976), 115;
R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **33*A*** (1976), 389.

[45] F.A. Berezin , M.S. Marinov , Ann. Physics **104** (1977), 336.

[46] A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys. B **76**, (1974), 477.

[47] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vechhia, P. Howe, Phys. Lett. B **64**, (1976), 435;

L. Brink, P. Di Vechhia, P. Howe, Nucl. Phys. B **118**, (1977), 76;

C.A.P. Galvão, C. Teitelboim, J. Math. Phys. **21**, (1980), 1863.

[48] Nivaldo A. Lemos, *Supersimetria e Mecânica Clássica de Partículas com Spin*, Tese de Mestrado, CBPF, 1977.