

Eletrodinâmica não-linear em cosmologia: uma análise de um universo quase-magnético



Alan de Gois Cesar

Rio de Janeiro – 2026

Alan de Gois Cesar

**Eletrodinâmica não-linear em cosmologia: uma análise de
um universo quase-magnético**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito à obtenção do título de Doutor.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Programa de Pós-Graduação em Física

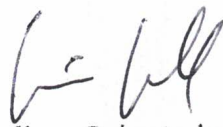
Orientador: Mario Novello
Coorientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Rio de Janeiro
2026


ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR EM COSMOLOGIA: A ANÁLISE DE UM
UNIVERSO QUASE-MAGNÉTICO"

ALAN DE GÓIS CESAR


Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:




Mario Novello - Orientador/CBPF

Documento assinado digitalmente
 **VITORIO ALBERTO DE LORENCI**
Data: 16/04/2026 15:50:49-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>


Vitorio Alberto de Lorenci – UNIFEI

Documento assinado digitalmente
 **LEO GOUVEA MEDEIROS**
Data: 16/04/2026 17:38:39-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Leo Gouvea Medeiros – UFRN

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO**
Data: 17/04/2026 18:43:34-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Carlos Augusto Romero Filho - UFPB

Documento assinado digitalmente
 **RODRIGO ROCHA CUZINATTO**
Data: 27/04/2026 10:16:20-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Rodrigo Rocha Cuzinato – UNIFAL

Rio de Janeiro, 27 de março de 2026.

À todos aqueles que presenciaram esta pesquisa ser construída.

Agradecimentos

- Agradeço à todos que contribuíram com este trabalho. Em particular, aos professores Mario Novello e Eduardo Bittencourt por todos os comentários e discussões, sem eles este trabalho não seria realizado.
- Agradeço aos meus amigos que ouviam minhas ideias, reclamações e com sua presença fazem o ambiente de trabalho muito mais leve. Também agradeço aqueles amigos que estão longe geograficamente, mas nunca se deixaram afastar afetuosamente.
- Agradeço à minha companheira, Luísa, que leu meus textos, me apoiou, e garantiu que eu não espiralasse em meio a falta de perspectiva.
- Agradeço aos meus pais, Rosalina e Julio, por garantir que minha jornada fosse possível. Me apoiaram durante a graduação, mestrado, doutorado e nos momentos mais difíceis de minha vida.
- Agradeço ao CBPF pela estrutura, pelo ambiente, e por todas as oportunidades. Agradeço aos seus professores, e pelos cursos que fortaleceram em muito minha formação.
- Agradeço à CAPES pela apoio financeiro.

*"Man,
he took his time in the sun,
had a dream to understand a single grain of sand.
He gave birth to poetry, but one day'll cease to be.
Greet the last light of the library."*

- Marco Hietala e Tuomas Holopainen, Nightwish.

Resumo

Nós investigamos a dinâmica cosmológica induzida por uma eletrodinâmica não-linear em um universo homogêneo e isotrópico, dando enfoque ao papel de campos eletromagnéticos primordiais com orientações espaciais aleatórias. Partindo de uma generalização do procedimento de médias de Tolman-Ehrenfest, nós derivamos um tensor momento-energia consistente com as simetrias do espaço-tempo, incorporando a influência do invariante dual G e suas contribuições estatísticas. Considera-se um modelo de eletrodinâmica não-linear particular em que se realizam correções quadráticas à Lagrangeana de Maxwell, avaliando situações puramente magnéticas e configurações estatisticamente nulas. Nós analisamos a dinâmica cosmológica resultante por meio de métodos qualitativos. A partir da construção de um sistema dinâmico planar é possível identificar pontos de equilíbrio, analisar sua estabilidade e estudar o comportamento das soluções para diferentes escolhas da curvatura espacial. O estudo qualitativo é complementado pela análise da dinâmica de perturbações escalares geradas a partir do formalismo de Jordan-Ehlers-Kundt e utilizando as equações quasi-Maxwellianas. Para a análise das perturbações é construída uma base escalar de harmônicos esféricos que permite a construção de um sistema dinâmico planar não-autônomo para a evolução de perturbações no cisalhamento e parte elétrica do tensor de Weyl. As soluções obtidas apresentam a possibilidade de soluções de ricochete, soluções cíclicas e cenários de expansão acelerada. É dada atenção especial aos dois casos limitantes, em que ambos exibem retratos de fase qualitativamente distintos, assim como apresentam comportamentos diferentes para as condições de energia nula e forte. A mesma estrutura é utilizada para avaliar a evolução das perturbações escalares, discutindo sua atenuação/crescimento durante as possíveis fases de expansão cosmológica, simultaneamente apresentando uma comparação entre o modelo não-linear e o modelo linear. Este trabalho permite compreender a influência de campos eletromagnéticos não-lineares em um universo primordial e dá abertura para explorar suas consequências observacionais.

Palavras-chave: Eletrodinâmica não-linear; média de Tolman-Ehrenfest; cosmologia; teoria qualitativa das equações diferenciais; teoria de perturbações; equações quasi-Maxwellianas.

Abstract

We investigate the cosmological dynamics induced by nonlinear electrodynamics in a homogeneous and isotropic universe, focusing on the role of primordial electromagnetic fields with random spatial orientations. Building upon a generalization of the Tolman–Ehrenfest averaging procedure, we derive a modified energy-momentum tensor consistent with the spacetime symmetries, incorporating the influence of the dual invariant G and its statistical contributions. A specific nonlinear electrodynamics model with quadratic corrections to Maxwell’s Lagrangian is considered, giving rise to what we define as a quasi-magnetic universe, interpolating between purely magnetic and statistically null field configurations. We analyze the resulting cosmological dynamics through qualitative methods. By casting the equations into an autonomous dynamical system, we identify the equilibrium points, determine their stability, and study the behavior of solutions under various spatial curvatures. The qualitative study is complemented by the analysis of the dynamics of scalar perturbations introduced through the Jordan-Ehlers-Kundt formalism and using the quasi-maxwellian equations. To analyze the perturbations, a scalar basis is built for spherical harmonics that allows the construction of a planar non-autonomous dynamical system for the evolution of the shear and the electric part of the Weyl tensor. Our findings reveal the existence of bouncing and cyclic solutions, regions where energy conditions are violated, and scenarios of accelerated expansion. Special attention is given to two limiting cases, both of which exhibit qualitatively distinct phase portraits and energy-condition behavior. The same structure is used to evaluate the evolution of scalar perturbations, discussing its attenuation/growth through possible phases of cosmological expansion, simultaneously presenting a comparison between the nonlinear model and the linear model. This work provides a comprehensive framework for understanding the influence of nonlinear electromagnetic fields in the early universe and opens avenues for exploring their observational consequences.

Keywords: Nonlinear electrodynamics; Tolman-Ehrenfest averaging; cosmology; qualitative theory of differential equations; perturbation theory; quasi-maxwellian equations.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	O PROCEDIMENTO DE TOLMAN-EHRENFEST REVISITADO	20
2.1	Utilizando uma eletrodinâmica não-linear como fonte para uma geometria homogênea e isotrópica.	20
2.2	Aplicando correções quadráticas a uma eletrodinâmica linear	22
3	A ANÁLISE QUALITATIVA DE UM UNIVERSO QUASE-MAGNÉTICO	26
3.1	O sistema dinâmico e seus equilíbrios	26
3.2	Diagramas de fase e a evolução qualitativa das soluções	30
3.2.1	Uma rápida discussão do caso em que $\tilde{\alpha} < 0$	35
3.3	O universo magnético e o universo estatisticamente nulo	37
4	ANÁLISE PERTURBATIVA	42
4.1	Projeções do lado esquerdo da divergência do tensor de Weyl	42
4.1.1	Primeira projeção	44
4.1.2	Segunda projeção	49
4.1.3	Terceira projeção	52
4.1.4	Quarta projeção	55
4.2	Projeções sobre os elementos da fonte material	57
4.2.1	Primeira projeção	57
4.2.2	Segunda projeção	62
4.2.3	Terceira projeção	64
4.2.4	Quarta projeção	67
4.3	As equações de evolução perturbadas	70
4.3.1	Equações de evolução dos parâmetros cinemáticos perturbadas	71
4.3.2	Equações de conservação do tensor energia-momento perturbadas	74
4.3.3	Equações das projeções da divergência do tensor de Weyl perturbadas	75
4.3.4	A decomposição das equações termos de uma base de harmônicos esféricos	77
4.4	A construção de um sistema dinâmico não-autônomo	81
4.4.1	O parâmetro da equação de estado e a velocidade do som	82
4.4.2	A evolução das perturbações	84
4.4.2.1	O universo quase-magnético	84
4.4.3	Aproximação de campos fracos	91
4.4.4	Universo magnético e o universo estatístico nulo	94

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
---	--------------------------------	----

APÊNDICES	100
------------------	------------

APÊNDICE A – A EQUIVALÊNCIA ENTRE O FORMALISMO JEK E O DE EINSTEIN	101
---	------------

A.1	As equações quasi-Maxwellianas	102
------------	---	------------

A.2	Demonstrando a equivalência entre os formalismos	105
------------	---	------------

Referências	107
------------------------------	------------

REFERÊNCIAS	107
------------------------------	------------

Lista de Figuras

Figura 1 – Retrato de fase do caso I. As linhas ponto-tracejadas verticais B_1 (preto), B_2 (azul), e B_3 (vermelho) são as separatrizes. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó) e B_{P_3} (sela). B_{P_2} não está presente. A curva preta e sólida indica a possibilidade de universos planos, separando o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura. Para este diagrama, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, sem perda de generalidade, e $w = -1$ 31

Figura 2 – Retrato de fase do caso II. As linhas verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio agora são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (sela). Novamente, as soluções de universo plano representadas pela curva sólida preta separam o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/2$ 32

Figura 3 – Retrato de fase do caso III. As linhas verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (sela (veja a região ampliada no painel à direita)), e B_{P_3} (“centro”). Novamente, as soluções de universo plano representadas pela curva sólida preta separam o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura, mas agora existe um ramo à direita de B_3 . Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/8$ 33

- Figura 4 – Retrato de fase do caso IV. As verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (“centro”). A região amplificada também mostra o surgimento de dois pontos de sela (azul) sobre B_2 cujas separatrizes delineiam a bacia de atração de B_{P_3} . Novamente, as soluções de universo plano separam o diagrama em regiões disjuntas, e os ramos a direita de B_3 se mantém. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/24$. 34
- Figura 5 – Retrato de fase do caso V. As verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (sela). As soluções de universo plano continuam separando o diagrama em regiões disjuntas, mas agora órbitas fechadas são impossíveis à direita de B_3 . Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = 1/8$ 36
- Figura 6 – Retrato de fase do caso VI. A única diferença do caso anterior é a ausência de B_2 que foi levada ao infinito. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = 3/4$ 37
- Figura 7 – Retratos de fase para $\tilde{\alpha} < 0$. Esquerda: Para o caso I ($w = -1$), os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (“centro”) e B_{P_2} (centro). Centro: Para o caso II ($w = 0$), o único ponto de equilíbrio é a origem (nó). Direita: Para o caso III ($w = 1/2$), o único equilíbrio é novamente a origem (nó), mas agora existe uma separatriz. Para todos os diagramas de fase foi escolhido $\tilde{\alpha} = -1$, e, $\sigma = 1/2$ 38
- Figura 8 – Retratos de fase para o caso do UM. Esquerda: plano (B, \dot{B}) , mostrando os pontos de equilíbrio B_{P_1} (nó) e B_{P_2} (centro). Direita: plano (a, \dot{a}) , com o ponto de equilíbrio P_{UM} (centro). Novamente, a curva preta sólida indica a solução com universo plano, separando o diagrama em duas regiões disjuntas em termos da curvatura. Aqui, foi utilizado que $\tilde{\alpha} = 1$ 39
- Figura 9 – Retratos de fase para o caso do UEN. Esquerda: plano (B, \dot{B}) , mostrando os pontos de equilíbrio P_1 (nó) e P_2 (centro). Direita: plano (a, \dot{a}) , com o ponto de equilíbrio P_{UEN} (centro). Novamente, a curva preta sólida indica a solução com universo plano, que separa o diagrama em duas regiões disjuntas em termos da curvatura. Para estes diagramas, foi escolhido $\tilde{\beta} = 1$ 41
- Figura 10 – Velocidade do som ao quadrado (esquerda) e parâmetro da equação de estado (direita) em termos do campo magnético. Os parâmetros do modelos escolhidos são $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, e $\sigma = 0$ (azul), $\sigma = 0.85$ (laranja) e $\sigma = 1$ (verde). As horizontais tracejadas indicam os valores $\lambda = c_s^2 = 1/3$ e $\lambda = c_s^2 = -1$ 83

- Figura 11 – Retrato de fase para o caso I em que $w = -1$. Escolhendo $B_0 = 0.22 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon = 0$ com $a_0 = 1.0$ e à direita o retrato de fase para $\epsilon > 0$ com $a_0 = 25$. A curva sólida vermelha indica o sistema com uma ENL e a tracejada azul indica a eletrodinâmica linear usual. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 84
- Figura 12 – Retrato de fase para o caso I em que $w = -1$. Escolhendo a região em que $B_0 = 0.22 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$ em uma ENL e à direita para uma eletrodinâmica linear. As três curvas apresentadas são feitas para valores de $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 85
- Figura 13 – Retrato de fase para o caso II em que $w = -1/3$. Escolhendo a região em que $B_3 < B_0 = 0.75$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 2.09$ em uma ENL e à direita para uma eletrodinâmica linear. As três curvas apresentadas são feitas para valores de $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 86
- Figura 14 – Retratos de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Todos os gráficos foram feitos para $B_0 = 0.27 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$ e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 87
- Figura 15 – Retrato de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Curvas para $\epsilon > 0$, escolhendo a região em que $B_2 < B_0 = 0.42 < B_{P_2}$ com $a_0 = 6.95$ (esquerda) e a região em que $B_{P_2} < B_0 = 0.46 < B_3$ com $a_0 = 7.2$ (direita). Tem-se que $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$ em ambos diagramas. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 88
- Figura 16 – Retratos de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Curvas para $B_2 < B_0 = 0.45 < B_3$ e $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 89

- Figura 17 – Retratos de fase para a transição entre II e III em que $w = -1/4$. Curvas para $B_2 < B_0 = 0.4 < B_3$ e $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Todos avaliados na região em que $B_0 < B_2$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 90
- Figura 18 – Retratos de fase para o caso V em que $w = 1/8$. Curvas para $B_0 = 0.45 < B_3$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 91
- Figura 19 – Evolução das perturbações na aproximação de campos fracos com $\epsilon = 0$. O primeiro é o retrato de fase $\Sigma \times \mathcal{E}$, segundo a evolução de Σ em função do tempo, e o terceiro a evolução de \mathcal{E} em função do tempo. As diferentes curvas apresentam diferentes valores de σ . Para $\sigma=0$ a curva sólida azul, para $\sigma = 0.25$ a curva verde tracejada, para $\sigma = 0.5$ a curva vermelha ponto-tracejada, para $\sigma = 0.75$ a curva roxa pontuada, e para $\sigma = 1$ a curva sólida laranja. Os círculos nas curvas indicam o instante em que $B = B_*$, e similarmente, as retas verticais no segundo e terceiro gráfico indicam este mesmo instante. As curvas foram feitas para $B_0 = 1.0$ e $a_0 = 1.0$ com $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (1.0, 1.0)$ 93
- Figura 20 – Retratos de fase para todos os casos com $\epsilon < 0$ em uma aproximação de campos fracos. O primeiro para $w = -1$, o segundo para $w = -1/2$, o terceiro para $w = -1/8$, o quarto para $w = -1/24$, o quinto para $w = 1/8$ e o sexto para $w = 3/4$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). Os círculos nas curvas indicam o instante em que $B = B_*$. Todas as curvas são feitas tal que $B_0 = 1.0$ e $a_0 = 1.0$, e a condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (1.0, 1.0)$ 94

Figura 21 – Retratos de fase para o universo magnético com $\sigma = 0$ e $\alpha = 0.5$. Todos os retratos de fase são para $B_0 = 0.25$, e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 100.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 95

Figura 22 – Retratos de fase para o universo estatisticamente nulo com $\sigma = 1$ e $\beta = 1.0$. Todos os retratos de fase são para $B_0 = 1.0$, e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 0.689$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$ 97

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Posição relativa das linhas de divergência, pontos de equilíbrio, e a estabilidade associada para diferentes valores de w tomando $\tilde{\alpha} > 0$. . . 28

Tabela 2 – Existência da linha de divergência e do ponto de equilíbrio (com sua estabilidade associada) para diferentes valores de w e $\tilde{\alpha} < 0$ 35

Lista de abreviaturas e siglas

CMB	- <i>Cosmic Microwave Background</i> ou radiação cósmica de fundo.
Λ CDM	- Λ - <i>Cold Dark Matter</i> ou Λ - matéria escura fria.
ENL	- Eletrodinâmica Não-linear.
EQM	- Equações quasi-Maxwellianas.
UM	- Universo magnético.
UEN	- Universo estatisticamente nulo.
UQM	- Universo quase-magnético.
NEC	- <i>Null Energy Condition</i> ou Condição de Energia Nula.
SEC	- <i>Strong Energy Condition</i> ou Condição de Energia Forte.
RG	- Relatividade Geral.
JEK	- Jordan-Ehlers-Kundt.

Lista de símbolos

α	- Parâmetro livre com dimensões apropriadas acompanhado do termo F^2 da lagrangeana.
β	- Parâmetro livre com dimensões apropriadas acompanhado do termo G^2 da lagrangeana.
γ	- Parâmetro livre com dimensões apropriadas acompanhado do termo FG na lagrangeana.
σ	- Parâmetro adimensional que relaciona o quadrado da intensidade do campo elétrico, E^2 com o quadrado da intensidade do campo magnético, B^2 .
$\tilde{\alpha}$	- Renormalização paramétrica dada por $4\alpha(1 - \sigma)$.
$\tilde{\beta}$	- Renormalização paramétrica dada por $\frac{16\beta\sigma}{3}$.
w	- Renormalização paramétrica dada por $\frac{\tilde{\beta} - 2\tilde{\alpha}\sigma}{4\alpha(1+\sigma)}$.
ϵ	- Tri-curvatura espacial na métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, com valores $\epsilon = 0, \pm 1$.
c_s^2	- Velocidade do som ao quadrado.
λ	- Parâmetro da equação de estados, relacionando pressão e densidade de energia.
κ	- Parâmetro de gravitação universal atuando como fator de proporcionalidade entre o lado geométrico e material da equação de Einstein.
m	- Parâmetro livre que caí com o quadrado do comprimento de onda das perturbações.
k	- Comprimento de onda das perturbações.

1 Introdução

O modelo cosmológico Λ CDM apresenta diversos sucessos, tais como a radiação cósmica de fundo (CMB), a estrutura de grande escala, e a aceleração aparente do universo. No entanto, apresenta desafios significativos quando confrontado com diferentes conjuntos de dados [1]. Alguns destes desafios são recentes, como as incertezas sobre a natureza da matéria escura e energia escura [2, 3], assim como a persistente tensão de Hubble [4, 5]. Outros desafios são antigos, incluindo dificuldades apresentadas pela presença de uma singularidade inicial, tais como os problemas do horizonte e da planicidade.

Estes desafios demonstram a necessidade de exploração e refinamento dos modelos cosmológicos, introduzindo propostas que se estendem além do paradigma Λ CDM. Por exemplo, em modelos cosmológicos com ricochete [6, 7] ou cíclicos [8, 9, 10, 11], a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo são preservadas, enquanto a singularidade inicial e seus problemas associados são evitados, frequentemente através da incorporação de princípios da mecânica quântica [12, 13, 14]. Em contraste, modelos cosmológicos com inomogeneidades [15, 16, 17, 18] se afastam do princípio cosmológico, resultando em uma estrutura mais complexa e diversa, com mais graus de liberdade, contudo ao custo do aumento da complexidade técnica. Além disso, modificações às equações de campo de Einstein são utilizadas por uma ampla gama de teorias alternativas, como modelos de gravitação $f(R)$ [19, 20, 21, 22], $f(T)$ [23, 24, 25, 26], e $f(Q)$ [27, 28, 29, 30], assim como a gravidade teleparalela [31], a teoria de Horndeski [32], e outros [33, 34, 35, 36, 37], oferecendo um conjunto rico e variado de possibilidades para explorações teóricas.

Neste trabalho, nós exploramos uma abordagem alternativa ao investigar como campos eletromagnéticos primordiais, governados por uma equação de movimento não-linear, influenciam a dinâmica do universo primordial. A eletrodinâmica não-linear (ENL) surge em vários contextos visando discutir desafios presentes na eletrodinâmica clássica, tais como limites para os campos [38], predições de correções de campos fortes [39, 40], birrefringência do vácuo [41, 42, 43], e a natureza da propagação da luz [44, 45, 46]. As diferentes características dos modelos não-lineares resultam em diferentes efeitos cosmológicos [47, 48, 49, 50], incluindo modelos com fases de expansão acelerada [51, 52, 53, 54, 55], modelos não-singulares [6, 10, 11, 52, 56, 57], e numerosos estudos examinando as implicações para a dinâmica de buracos negros [58, 59, 60, 61, 62, 63].

Em contraste com os trabalhos anteriores que examinaram universos puramente magnéticos ou modelos de ENL particulares [64, 44, 52, 56, 65, 66], este trabalho desenvolve uma descrição dinâmica unificada. Aqui apresenta-se a (i) generalização do procedimento de médias de Tolman-Ehrenfest para incluir sistematicamente efeitos não-lineares, (ii) incorpora-se um campo elétrico não-nulo, que significativamente enriquece os ramos da

dinâmica cósmica primordial, mesmo que os dados observacionais atuais sugiram que o campo seja negligenciável, (iii) analisa-se a estrutura do espaço de fase do sistema dinâmico autônomo resultante, incluindo os pontos fixos, separatrizes entre regiões de comportamento qualitativo diferente, e limites das condições de energia, e (iv) apresenta-se a evolução de perturbações escalares invariantes de calibre a partir do formalismo de Jordan-Ehlers-Kundt (JEK) e da utilização das equações quasi-Maxwellianas (EQM), comparando a atenuação/crescimento das perturbações entre uma ENL e a eletrodinâmica linear de Maxwell.

A análise de perturbações dentro da cosmologia sempre foi uma área de extrema relevância teórica ([67, 68, 69]) e observacional ([70, 71, 72, 73, 74]), sendo relevante para explicar a formação de estruturas de grande e pequena escala ([75, 76, 77, 78]), a geração de ondas-gravitacionais ([79, 80, 81]) e a presença de anisotropias ([82, 83, 84, 85]) no conjunto de dados observacionais atuais. A análise mais amplamente utilizada para estudar a sua evolução é construída a partir de grandezas que dependem de uma escolha de calibre ([86, 87, 69, 88, 68]), levando a incertezas sobre o caráter físico do resultado obtido a partir das equações de campo da relatividade geral (RG). Nossa escolha de utilizar o formalismo JEK é devido à possibilidade de analisar um sistema dinâmico fechado não-autônomo que determina a evolução de perturbações escalares para grandezas que são nulas na geometria homogênea e isotrópica de fundo, e, portanto, independentes de calibre ([89, 90, 81, 91, 92]). Este trabalho discute a evolução destas perturbações a partir do comportamento qualitativo de uma cosmologia gerada por ENL na perspectiva de um procedimento de Tolman-Ehrenfest generalizado.

Para cobrir esta lacuna na literatura, o foco deste trabalho será o setor quadrático de ENL. Os termos quadráticos surgem naturalmente como as correções dominantes na ação efetiva de Euler-Heisenberg [41] e as expansões de campo fraco da teoria de Born-Infeld [38], tornando-os pontos de partida bem estabelecidos para um estudo dinâmico qualitativo. Para esclarecer o posicionamento deste trabalho dentro dos estudos em cosmologia modificada, nós enfatizamos que nossa abordagem é construída com base em modificações no setor material das equações de campo, ou seja, efeitos de uma ENL em um fundo homogêneo e isotrópico, sem realizar modificações no setor gravitacional. Além disso, nossas suposições são fisicamente razoáveis, uma vez que a fase quente e densa de um universo primordial podia naturalmente excitar correções não-lineares no eletromagnetismo.

O trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 2, nós discutimos a generalização do procedimento de Tolman-Ehrenfest na presença de ENL em um fundo homogêneo e isotrópico, além de introduzir uma lagrangeana de ENL específica para analisar as implicações cosmológicas deste procedimento, assim como apresentamos uma relação entre os campos elétricos e magnéticos que permite tratar o sistema univocamente. No capítulo 3, nós aplicamos a teoria de equações diferenciais para explorar a dinâmica

completa do universo nesta construção: primeiro identificamos os pontos de equilíbrio e examinamos sua estabilidade, então impomos a equação de Friedmann como vínculo e discutimos as soluções físicas para diferentes valores para a curvatura da seção espacial, também analisamos os casos limite em que o campo elétrico é nulo, universo magnético (UM) e o caso em que estatisticamente ambos os invariantes eletromagnéticos são nulos, universo estatisticamente nulo (UEN), e estudamos seu comportamento. No capítulo 4, apresentamos o formalismo JEK para o estudo da evolução dos campos em RG, construímos as equações de evolução para as perturbações escalares a partir de uma base escalar de harmônicos esféricos e avaliamos qualitativamente a dinâmica de um sistema planar não-autônomo formado pelo cisalhamento e pela parte elétrica do tensor de Weyl, comparando os resultados da evolução destas perturbações à obtida por uma eletrodinâmica linear.

2 O procedimento de Tolman-Ehrenfest revisitado

Neste capítulo será apresentada a forma de introduzir uma eletrodinâmica não-linear (ENL) como fonte para uma cosmologia homogênea e isotrópica. Apresenta-se uma generalização para o procedimento de Tolman-Ehrenfest ([93, 94]) e as condições para recuperar o procedimento original. Também será discutido o caso particular de uma densidade lagrangeana, $\mathcal{L}(F, G)$, que incorpora correções quadráticas à lagrangeana de uma eletrodinâmica linear.

2.1 Utilizando uma eletrodinâmica não-linear como fonte para uma geometria homogênea e isotrópica.

Um universo homogêneo e isotrópico é descrito por uma métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

em que $f(\chi) = (\chi, \text{sen}(\chi), \text{senh}(\chi))$ respectivamente para as escolhas do sinal do parâmetro de curvatura espacial, $\epsilon = 0, +1, -1$ [1]. Esta métrica representa a estrutura geométrica gerada por uma fonte material, neste trabalho uma ENL realiza este papel. O tensor energia-momento que descreve este tipo de modelo é dado por

$$T^{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_F F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - (\mathcal{L} - G\mathcal{L}_G)g^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday, decomposto em termos dos vetores campo elétrico, E_μ , e campo magnético, B_μ , através de um campo de observadores, v_μ , da seguinte maneira

$$F_{\mu\nu} = E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta, \quad (2.3)$$

definindo \mathcal{L}_F e \mathcal{L}_G como as derivadas parciais da densidade lagrangeana $\mathcal{L}(F, G)$ em relação aos invariantes eletromagnéticos, F e G . Os invariantes são definidos como $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$, e, a partir da operação dual $G = F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4(E^\mu B_\mu)$. Note que se faz necessário o uso do tensor dual $\eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ definido como [95]:

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

em que $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o pseudo-tensor puramente antissimétrico de Levi-Civita e $g = \det(g_{\mu\nu})$. Utilizando o campo de observadores, e definindo um projetor $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$, é possível obter os elementos independentes do fluido como [95]:

$$\rho = -\mathcal{L} + \mathcal{L}_G G - 4\mathcal{L}_F E^2, \quad (2.5)$$

$$p = \mathcal{L} - \mathcal{L}_G G - \frac{4}{3}\mathcal{L}_F (F + E^2), \quad (2.6)$$

$$q_\lambda = -4\mathcal{L}_F \eta_{\lambda\gamma\rho\sigma} v^\rho B^\sigma E^\gamma, \quad (2.7)$$

$$\pi_{\mu\nu} = 4\mathcal{L}_F (E_\mu E_\nu + B_\mu B_\nu) + \frac{4}{3}\mathcal{L}_F (E^2 + B^2) h_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

em que ρ é a densidade de energia, p é a pressão isotrópica, q_λ é o fluxo de calor e $\pi_{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica. A intensidade dos campos E^2 e B^2 podem ser escritas como [96]

$$E^2 \equiv -E^\mu E_\mu, \quad B^2 \equiv -B^\mu B_\mu. \quad (2.9)$$

A presença de termos não-diagonais em um modelo de ENL geral não é compatível com uma cosmologia homogênea e isotrópica. Note que as equações dinâmicas que definem como um fluido pode gerar uma estrutura geométrica, em RG, são dadas pelas equações de campo de Einstein ([1]) na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

e, como o lado esquerdo das equações, escrito em termos do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e do escalar de Ricci, R , descreve uma estrutura diagonal quando considera-se a métrica (2.1), tem-se que apenas um fluido perfeito poderia gerar a estrutura geométrica desejada. Uma alternativa a esta característica foi dada por Tolman-Ehrenfest, estabelecendo médias espaciais sobre células cosmológicas da seguinte maneira

$$\langle X \rangle(t) = \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int_V X \sqrt{-g} d^3x, \quad (2.11)$$

em que V_0 é o volume da célula cosmológica ([93]). Utilizando esta definição é possível impor sobre o fluido generalizado condições de homogeneidade e isotropia, ou seja, condições tais que em uma média espacial, a fonte se comporte como um fluido perfeito. Para isso, tomam-se as condições

$$\langle \mathcal{L}_F B^\mu E^\nu \rangle = 0, \quad (2.12)$$

e

$$\langle \mathcal{L}_F E^\mu E^\nu \rangle + \langle \mathcal{L}_F B^\mu B^\nu \rangle = -\frac{1}{3}\langle \mathcal{L}_F \rangle (E^2 + B^2) h^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

construídas de forma que $\langle q_\lambda \rangle$ e $\langle \pi_{\mu\nu} \rangle$ sejam nulas. Diferentemente do proposto a partir dos trabalhos de Tolman-Ehrenfest, nas condições (2.12) e (2.13) levam-se em consideração a possibilidade de uma dependência espacial dentro das derivadas \mathcal{L}_F e \mathcal{L}_G . As variáveis aleatórias utilizadas são os vetores campo elétrico e magnético, e as suas médias representadas como $\langle E_\mu \rangle$ e $\langle B_\mu \rangle$. Desta forma, a dependência de G nas grandezas físicas, também

deve ser tomada como uma variável aleatória, uma vez que o ângulo entre os campos é uma variável aleatória.

Ao estabelecer que $\langle G \rangle \neq G$ surgem modificações na estrutura usual de um fluido perfeito, a densidade de energia e a pressão isotrópica devem ter suas médias calculadas e, portanto, apresentadas como

$$\langle \rho \rangle = -\langle \mathcal{L} \rangle + \langle \mathcal{L}_G G \rangle - 4E^2 \langle \mathcal{L}_F \rangle, \quad (2.14)$$

$$\langle p \rangle = \langle \mathcal{L} \rangle - \langle \mathcal{L}_G G \rangle - \frac{4}{3}(F + E^2) \langle \mathcal{L}_F \rangle. \quad (2.15)$$

Adicionalmente, a partir das equações de movimento de uma ENL [95]

$$\partial_\nu (\mathcal{L}_F F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_G^* F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.16)$$

se estabelecem vínculos que precisam ser identicamente obedecidos. Utilizando a definição de médias espaciais e a decomposição (2.3) obtém-se que

$$\langle \mathcal{L}_F E^\mu \rangle = -\langle \mathcal{L}_G B^\mu \rangle, \quad \text{e} \quad \langle \mathcal{L}_G E^\mu \rangle = \langle \mathcal{L}_F B^\mu \rangle. \quad (2.17)$$

Existem condições sobre $\mathcal{L}(F, G)$ que permitem recuperar as condições originais de Tolman-Ehrenfest. Em particular, quando $\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}(F) + \mathcal{L}(G)$, tem-se que $\mathcal{L}_F = f(F)$. Sem dependência em G , a derivada parcial pode ser retirada das médias nas condições (2.12) e (2.13), e, tomando como condição a independência das variáveis aleatórias, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle E^\mu \rangle &= 0, & \langle B^\mu \rangle &= 0, & \langle B^\mu E^\nu \rangle &= 0, \\ \langle E^\mu E^\nu \rangle &= -\frac{E^2}{3} h^{\mu\nu}, & \text{and} & & \langle B^\mu B^\nu \rangle &= -\frac{B^2}{3} h^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Note que estas condições também são válidas para toda lagrangeana da forma $\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}(F)$.

2.2 Aplicando correções quadráticas a uma eletrodinâmica linear

O modelo de ENL utilizado aplica correções quadráticas a uma eletrodinâmica linear através dos invariantes eletromagnéticos, F e G . A forma mais geral deste tipo de correção pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(F, G) = -\frac{1}{4}F + \alpha F^2 + \beta G^2 + \gamma FG, \quad (2.18)$$

em que α, β e γ são parâmetros livres do modelo com a dimensão apropriada. Modelos com $\beta, \gamma = 0$ foram estudados minuciosamente na literatura, estabelecendo uma receita

para construir modelos cosmológicos cíclicos, com ricochete do fator de escala e eras inflacionárias (veja [10, 11, 52, 56] e suas referências). Sabe-se que em uma eletrodinâmica quântica padrão, os valores numéricos dos coeficientes de Euler-Heisenberg são suprimidos por potências inversas da massa do elétron:

$$\alpha = \frac{21\alpha^2}{45m_e^4}, \quad \beta = \frac{147\alpha^2}{45m_e^4}, \quad \gamma = 0, \quad (2.19)$$

em que m_e é a massa do elétron e α^2 é a constante de estrutura fina [96]. Portanto, estas contribuições são muito pequenas em escala cosmológica; conseqüentemente, as correções quadráticas de uma eletrodinâmica quântica não produziriam efeitos intensos em um universo primordial. Neste trabalho será discutido como a mudança destes parâmetros pode mudar qualitativamente o comportamento do sistema dinâmico construído a partir das equações de Friedmann, e também se é possível identificar diferenças na evolução de perturbações de grandezas tensoriais devido às não-linearidades do modelo. Em primeiro lugar é necessário avaliar as condições para se obter um fluido perfeito médio. Aplicando a condição (2.12), obtém-se

$$\left(-\frac{1}{4} + 2\alpha F\right) \langle G \rangle + \gamma \langle G^2 \rangle = 0. \quad (2.20)$$

Da relação (2.20) percebe-se uma dependência direta entre as médias $\langle G^2 \rangle$ e $\langle G \rangle$. Não há argumento físico para estabelecer estas médias sem resolver as equações médias de movimento (2.17). Em geral, resolver estas equações é necessário, no entanto, este modelo pode ser simplificado utilizando que $\gamma = 0$. Sob esta escolha, note que a condição (2.12) implica que $\langle G \rangle = 0$, e a condição para $\langle G^2 \rangle$ pode ser obtida a partir de argumentos de independência das variáveis aleatórias. Note que

$$\langle G^2 \rangle = 16 \langle E^\mu B^\nu E^\alpha B^\beta \rangle g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} = 16 \langle E^\mu E^\alpha \rangle \langle B^\nu B^\beta \rangle g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (2.21)$$

utilizando que $\langle E_\mu \rangle$ e $\langle B_\mu \rangle$ são variáveis aleatórias independentes. Com o mesmo argumento também é possível separar as condições (2.13) da maneira estabelecida por Tolman. E, utilizando as definições e as definições 2.9, obtêm-se que

$$\langle G^2 \rangle = \frac{16}{3} E^2 B^2. \quad (2.22)$$

Esta média é a principal forma sob a qual o procedimento generalizado das médias pode influenciar a evolução dinâmica do modelo. Calculando a densidade de energia e pressão isotrópica para a lagrangeana (2.18) com $\gamma = 0$, tem-se

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{4} F - \alpha F^2 + \beta \langle G^2 \rangle + E^2 (1 - 8\alpha F), \quad (2.23)$$

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{4} F + \alpha F^2 - \beta \langle G^2 \rangle + \frac{1}{3} (F + E^2) (1 - 8\alpha F). \quad (2.24)$$

É importante perceber que $\langle F \rangle = F$ pois este invariante depende apenas do tempo, e não há razão para se esperar flutuações devido à distribuição utilizada ao se calcular as médias sobre a célula cosmológica. Para que o sistema possa ser integrado completamente, ou seja, obter, a partir das equações de Friedmann, a evolução temporal do fator de escala e dos elementos das fontes, $B(t)$ e $E(t)$, é necessário vincular um destes elementos. Para isso, estabelece-se a seguinte relação entre os campos

$$E^2 = \sigma B^2, \quad (2.25)$$

em que σ é uma variável adimensional delimitada no intervalo $0 < \sigma < 1$. A escolha $\sigma = 0$ retorna o universo magnético (UM) estudado extensivamente em trabalhos anteriores ([10, 11]), e com $\sigma = 1$ tem-se o limite superior nomeado universo estatisticamente nulo (UEN), uma vez que $F = 0$ em conjunto com a condição anterior $\langle G \rangle = 0$. Utilizando então a relação (2.25), e o resultado (2.22), é possível escrever as médias da densidade de energia e pressão isotrópicas como

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2}(1 + \sigma)B^2 + [\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}(1 + 3\sigma)] B^4, \quad (2.26)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{6}(1 + \sigma)B^2 - \left[\tilde{\beta} + \frac{1}{3}\tilde{\alpha}(5 - \sigma) \right] B^4, \quad (2.27)$$

em que $\tilde{\beta} = \frac{16\beta\sigma}{3}$ e $\tilde{\alpha} = 4\alpha(1 - \sigma)$. A partir destas relações é possível calcular as condições de energia nula (NEC) e forte (SEC), a partir das relações

$$\langle \rho \rangle + \langle p \rangle = \frac{2}{3} [1 - 4\tilde{\alpha}B^2] (1 + \sigma) B^2 \geq 0, \quad \text{para NEC}, \quad (2.28)$$

$$\langle \rho \rangle + 3\langle p \rangle = (1 + \sigma) B^2 - 2 [\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}(3 + \sigma)] B^4 \geq 0, \quad \text{para SEC}. \quad (2.29)$$

A partir das relações (2.28) e (2.29) é possível discutir as primeiras características do modelo. Note que $B^2 > \frac{1}{4\tilde{\alpha}}$ indica a violação da NEC. No entanto, como $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$ quando $\sigma \rightarrow 1$, esta condição nunca é violada no UEN. A SEC pode ser violada para toda escolha de σ . Note que esta é uma condição necessária para obter uma expansão acelerada para o fator de escala.

A partir das equações (2.5) e (2.6) também é possível avaliar a equação de continuidade para um fluido perfeito médio, escrita da forma

$$\langle \dot{\rho} \rangle + 3\frac{\dot{a}}{a} (\langle \rho \rangle + \langle p \rangle) = 0, \quad (2.30)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala deste universo. A expressão (2.30) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle + \langle p \rangle} \frac{d\langle \rho \rangle}{dB} dB = -3\frac{da}{a},$$

e integrada analiticamente quando $\langle \rho \rangle + \langle p \rangle \neq 0$, obtendo

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left(\frac{1 - 4\tilde{\alpha}B^2}{1 - 4\tilde{\alpha}B_0^2} \right)^w, \quad (2.31)$$

em que $w = \frac{\tilde{\beta} - 2\tilde{\alpha}\sigma}{4\tilde{\alpha}(1+\sigma)}$ e $B = B(t)$ é a intensidade do campo magnético. A expressão acima se reduz exatamente ao que foi obtido para o UM quando $\sigma = 0$, obtendo

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{B_0}{B}}. \quad (2.32)$$

Mas note que quando $\sigma \rightarrow 1$ a definição do parâmetro w não é válida. É possível obter, como limite da relação (2.31), quando $\sigma \rightarrow 1$, a seguinte expressão

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{B_0}{B}} e^{-\frac{8}{3}\beta(B^2 - B_0^2)}, \quad (2.33)$$

relação que também pode ser obtida integrando-se diretamente a equação (2.30) com $\sigma = 1$. As relações (2.31), (2.32) e (2.33) serão utilizadas para realizar a análise qualitativa do sistema dinâmico formado pelas equações de Friedmann.

3 A análise qualitativa de um universo quase-magnético

Neste capítulo, são apresentadas a estrutura matemática e argumentos físicos que permitem construir um sistema dinâmico a partir das equações de campo de Einstein para um universo homogêneo e isotrópico. Também discute-se o comportamento qualitativo das soluções na vizinhança dos equilíbrios, verificando a presença de bifurcações, comportamento singular e a violação das condições de energia.

3.1 O sistema dinâmico e seus equilíbrios

Para uma geometria dada por (2.1), e utilizando as equações de campo de Einstein, obtém-se a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{\langle\rho\rangle}{3}, \quad (3.1)$$

relacionando o fator de escala $a(t)$ com a fonte material $\langle\rho\rangle$ e a curvatura da seção espacial $\epsilon = 0, \pm 1$. Em conjunto com a equação (2.30) é possível escrever esta equação como a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} (\langle\rho\rangle + 3\langle p\rangle), \quad (3.2)$$

chamada de equação da aceleração. Pelo lado direito de (3.2) fica clara a necessidade da SEC ser violada para que haja uma expansão acelerada do fator de escala ($\ddot{a} > 0$). A partir desta equação é possível escrever um sistema dinâmico, reescrevendo uma equação de segunda ordem como duas equações de primeira ordem autônomas. A maior dificuldade neste procedimento ocorre devido a $\langle\rho\rangle$ e a $\langle p\rangle$ dependerem apenas do campo magnético $B(t)$, e a irreversibilidade da equação (2.31) para valores de σ arbitrários. Esta dificuldade pode ser resolvida utilizando a equação (2.31) para escrever as equações (3.1) e (3.2) em termos do campo magnético e suas derivadas, tem-se que

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{(1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2)\dot{B}}{2B(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)}, \quad (3.3)$$

e, calculando a segunda derivada

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{d}{dt} \left[\frac{(1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2)}{2B(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)} \right] \dot{B} - \frac{(1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2)}{2B(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)} \ddot{B}, \quad (3.4)$$

ou, a partir da mudança de variáveis $y = \dot{B}$

$$\dot{B} = y, \quad \dot{y} = \frac{f_2(B)y^2 + f_3(B)}{f_1(B)}, \quad (3.5)$$

em que as funções auxiliares têm a seguinte definição

$$f_1(B) = \frac{1}{2}B(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)[1 - 4(1 - 4w)\tilde{\alpha}B^2], \quad (3.6)$$

$$f_2(B) = \frac{3}{4}(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)^2 + 64w(w - 1)\tilde{\alpha}^2B^4, \quad (3.7)$$

$$f_3(B) = \frac{(1 + \sigma)(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)^2B^4 [1 - 2\tilde{\alpha}(4w + 3)B^2]}{6}. \quad (3.8)$$

Quando $f_1(B) \rightarrow 0$, o sistema dinâmico apresenta verticais nas coordenadas

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{1}{2\sqrt{(1 - 4w)\tilde{\alpha}}}, \quad \text{ou} \quad B_3 = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}, \quad (3.9)$$

indicando comportamento singular do sistema dinâmico. Estas verticais devem ser interpretadas como singularidades paramétricas no sistema dinâmico, note que é possível fazer uma reparametrização temporal da forma $\tau \rightarrow \int \frac{dt}{f_1}$, de forma a regularizar o sistema dinâmico, ou seja

$$\frac{dB}{d\tau} = yf_1(B), \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\tau} = f_2(B)y^2 + f_3(B). \quad (3.10)$$

Note que apenas na situação apresentada em (3.10) é possível perceber equilíbrios com $y \neq 0$, em particular quando $y = \pm\sqrt{-\frac{f_3}{f_2}}$. Perceba que $f_3 \rightarrow 0$ quando $B \rightarrow B_3$, portanto esta coordenada não indica um novo equilíbrio no sistema renormalizado, no entanto, quando $B \rightarrow B_2$ existe um par de valores de y que indicam equilíbrios no sistema dinâmico, estes pontos apenas existem para valores de w no intervalo $(-\frac{1}{12}, 0)$. Também é importante apontar que as grandezas $\langle \rho \rangle$ e $\langle p \rangle$ nem sempre divergem nas coordenadas das verticais, divergem apenas se existir a divergência do campo magnético, vide eq. (2.26) e (2.27). Os equilíbrios do sistema dinâmico original são dados por

$$B_{P_1} = 0, \quad B_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\alpha}(4w + 3)}}, \quad \text{e} \quad B_{P_3} = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}. \quad (3.11)$$

Os equilíbrios em (3.11) são obtidos tomando $y = 0$ em (3.20), e avaliando os valores do campo magnético em que $f_3(B) \rightarrow 0$. Perceba que $B_{P_3} = B_3$ para toda escolha de parâmetros do modelo, e que também indica o limite superior para que a NEC não seja violada, ver (2.28). Para entender o comportamento qualitativo das soluções em torno dos equilíbrios definidos em (3.11) é preciso realizar uma linearização do sistema dinâmico (3.5) [97, 98], obtendo a seguinte matriz Jacobiana

$$\mathcal{J}\Big|_{\text{pts. eq.}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{f_3'}{f_1} - \frac{f_3 f_1'}{f_1^2} & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.12)$$

em que $y = 0$. Note que a matriz (3.12) indica os coeficientes do sistema linearizado na vizinhança de um ponto de equilíbrio, ou seja, existem coeficientes diferentes para cada escolha em (3.11). As matrizes tomam a forma

$$\mathcal{J}|_{B_{P_1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{J}|_{B_{P_2}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(1+4w)(1+\sigma)}{3\tilde{\alpha}(4w+3)(1+12w)} & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{J}|_{B_{P_3}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(1+4w)(1+\sigma)}{48w\tilde{\alpha}} & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Os autovalores destas matrizes podem ser obtidos a partir da raiz quadrada do elemento abaixo da diagonal. A estabilidade de um sistema dinâmico nos arredores de um equilíbrio pode ser determinada a partir do sinal da parte real do autovalor, se $\text{Re}(\lambda) < 0$ as soluções são estáveis dirigindo-se ao equilíbrio, se $\text{Re}(\lambda) > 0$ as soluções são instáveis, e caso $\text{Re}(\lambda) = 0$, não se pode afirmar a estabilidade das soluções diretamente sem análises das ordens superiores do sistema dinâmico, uma vez que estes equilíbrios são não-hiperbólicos. O comportamento dos equilíbrios B_{P_2} e B_{P_3} está resumido na tabela (1).

Caso	valor de w	hierarquia	B_{P_2}	B_{P_3}
I	$w < -\frac{3}{4}$	$B_1 < B_2 < B_3$	\nexists	sela
II	$-\frac{3}{4} < w < -\frac{1}{4}$	$B_1 < B_2 < B_3 < B_{P_2}$	centro	sela
III	$-\frac{1}{4} < w < -\frac{1}{12}$	$B_1 < B_2 < B_{P_2} < B_3$	sela	centro
IV	$-\frac{1}{12} < w < 0$	$B_1 < B_{P_2} < B_2 < B_3$	centro	centro
V	$0 < w < \frac{1}{4}$	$B_1 < B_{P_2} < B_3 < B_2$	centro	sela
VI	$w > \frac{1}{4}$	$B_1 < B_{P_2} < B_3, \nexists B_2$	centro	sela

Tabela 1 – Posição relativa das linhas de divergência, pontos de equilíbrio, e a estabilidade associada para diferentes valores de w tomando $\tilde{\alpha} > 0$.

Observando a tabela (1) é evidente a presença de bifurcações no sistema dinâmico. Note que há o surgimento de equilíbrios com a evolução de w , assim como a mudança do comportamento das soluções nos arredores dos equilíbrios. Para B_{P_1} é necessário analisar o sistema dinâmico com mais cuidado. Primeiro perceba que é possível avaliar o sistema ao se aproximar de $B = 0$, as equações auxiliares se tornam $f_1(B) \approx \frac{1}{2}B$, $f_2(B) \approx \frac{3}{4}$ e $f_3(B) \approx 0$, de forma que é possível escrever que

$$\dot{B} = y, \quad \dot{y} = \frac{3y^2}{2B},$$

indicando que o sistema não é estável por Lyapunov, uma vez que existe uma divergência quando $B \rightarrow 0$, o que impede a utilização dos teoremas de linearização clássicos [97, 98]. No entanto, é possível obter informações sobre a estabilidade do sistema dinâmico a partir do teorema das variedades centrais [99]. Primeiramente, é preciso reduzir o sistema bidimensional a um sistema unidimensional utilizando a função auxiliar

$$y = h(B), \quad (3.14)$$

em que $h(0) = 0$ e $h'(0) = 0$, uma vez que $h'(B) = \frac{dh}{dB}$, a função é tangente ao equilíbrio. Tomando uma aproximação desta função como uma série de potências

$$h(B) = aB^2 + \mathcal{O}(B^3),$$

em que os termos lineares e constantes são nulos para que as condições de tangência sejam válidas, e a é um parâmetro a determinar. Aqui mantêm-se apenas a primeira ordem não nula, e será suficiente para a discussão a seguir. Em termos desta função, é possível escrever que

$$\dot{y} = \frac{f_2(B)[h(B)]^2 + f_3(B)}{f_1(B)}.$$

Desta forma, usando a regra da cadeia é possível escrever $\dot{y} = h'(B)h(B)$, com $h'(B) = \frac{dh}{dB}$ e $\dot{B} = y = h(B)$. Como $h'(B) = 2aB$, o sistema reduzido se torna

$$\frac{3a^2B^3}{2} + \frac{1+\sigma}{3}B^3 = 2a^2B^3, \quad (3.15)$$

em que se faz necessário considerar os termos dominantes em cada função auxiliar, ou seja, tomar $f_3(B) \approx \frac{(1+\sigma)}{6}B^4$, assim evitando a divergência quando $B \rightarrow 0$. A relação (3.15) permite determinar o parâmetro a como

$$a = \pm \sqrt{\frac{2(1+\sigma)}{3}}.$$

Ou seja, a equação de primeira ordem que aproxima o comportamento deste sistema é tal que

$$y = \pm \sqrt{\frac{2(1+\sigma)}{3}}B^2. \quad (3.16)$$

A relação (3.16) garante que se $y < 0$ as soluções são estáveis, pois as curvas se aproximam da origem, e analogamente, para o caso $y > 0$ as soluções são instáveis pois as curvas se afastam da origem. É possível mostrar que as soluções (3.16) estão relacionadas à escolha de $\epsilon = 0$. A partir da equação (3.1), a escolha $\epsilon = 0$ leva a um conjunto de curvas idêntico à (3.16), e com $\epsilon < 0$ obtêm-se um conjunto de curvas com comportamento análogo, mas que alcançam a (se afastam da) origem mais rapidamente. No entanto, antes de apresentar o vínculo, é de interesse analisar o equilíbrio que surge devido à renormalização do sistema dinâmico. Note que

$$P_{\pm} = \left(B_2, \pm \frac{1}{4\tilde{\alpha}(1-4w)^2} \sqrt{\frac{-w(1+\sigma)(1+12w)}{3}} \right), \quad (3.17)$$

existente no intervalo $-\frac{1}{12} < w < 0$. O que equilíbrio (3.17) é obtido a partir do sistema dinâmico renormalizado (3.10). É possível linearizar o sistema renormalizado nos arredores

deste equilíbrio, obtendo a seguinte matriz Jacobiana para os coeficientes do sistema dinâmico

$$\mathcal{J}(P_{\pm}) = \begin{vmatrix} \frac{4w}{1-4w}y_{\pm} & 0 \\ f'_2 y_{\pm}^2 + f'_3 & \frac{-8w}{1-4w}y_{\pm} \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Perceba que os autovalores aqui são obtidos como

$$\lambda_{P_{\pm},1} = \frac{4w}{1-4w}y_{\pm} \quad \lambda_{P_{\pm},2} = \frac{-8w}{1-4w}y_{\pm},$$

ou seja, a escolha de sinal em y_{\pm} não altera a estabilidade dos equilíbrios, que sempre se comportam como um par de selas. Na próxima seção serão apresentados os diagramas de fase e a equação de vínculo que permite observar o comportamento das soluções tendo em vista diferentes escolhas de condições iniciais.

3.2 Diagramas de fase e a evolução qualitativa das soluções

Os campos vetoriais para o sistema (3.5) são apresentados nas figuras desta seção, organizados caso a caso como indicado na tabela (1). As soluções podem ser integradas a partir de uma escolha das condições iniciais, em particular $B(t=0) = B_0$ e $\dot{B}(t=0) = \dot{B}_0 = y_0$. No entanto, como a equação da aceleração (3.2) tem uma primeira integral bem definida a partir da equação (3.1), é possível vinculá-las por meio da relação

$$\frac{[1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2]^2 y^2}{4B^2(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)^2} + \frac{\epsilon B}{a_0^2 B_0} \left(\frac{1 - 4\tilde{\alpha}B_0^2}{1 - 4\tilde{\alpha}B^2} \right)^{2w} = \frac{(1 + \sigma)B^2}{6} [1 - 2\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2]. \quad (3.19)$$

Note que agora é possível utilizar os parâmetros B_0 e a_0 para selecionar a curva que será integrada. A figura (1) apresenta o primeiro caso.

No caso I, a SEC nunca é violada, o que é evidenciado pela ausência de B_{P_2} , uma vez que este equilíbrio ocorre no valor do campo magnético tal que $\langle \rho \rangle + 3\langle p \rangle = 0$. A violação da NEC ocorre indicada pela vertical B_3 , sendo violada sempre que $B > B_3$. Existem três regiões estabelecidas entre as verticais B_1 , B_2 e B_3 com comportamento qualitativo diferente para as soluções. Para $B < B_2$ percebe-se que as curvas com $\epsilon \leq 0$ representam campos magnéticos que diminuem (aumentam) em intensidade uma vez que tenham condições iniciais com derivada negativa (positiva). As curvas com $\epsilon < 0$ caem (crescem) mais rapidamente do que as curvas para $\epsilon = 0$, as curvas com $\epsilon > 0$ não caem a zero, em vez disso, atingem um mínimo em um tempo finito e voltam a crescer rapidamente. Todas as soluções nesta região crescem rapidamente até o máximo assintótico dado por B_2 , em que \dot{B} diverge.

A região entre B_2 e B_3 apresenta o mesmo comportamento qualitativo para todas as soluções independentemente da escolha de ϵ , todas as curvas se afastam de B_2 e atingem um valor máximo do campo magnético tal que $B < B_3$ antes de voltar a se aproximar de

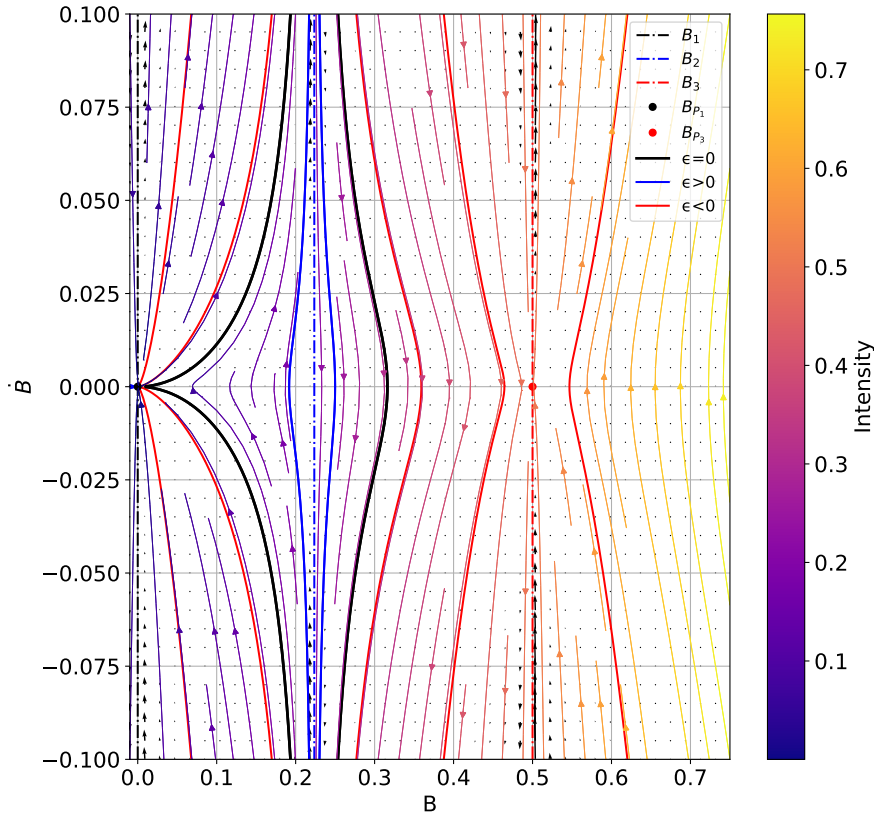


Figura 1 – Retrato de fase do caso I. As linhas ponto-tracejadas verticais B_1 (preto), B_2 (azul), e B_3 (vermelho) são as separatrizes. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó) e B_{P_3} (sela). B_{P_2} não está presente. A curva preta e sólida indica a possibilidade de universos planos, separando o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura. Para este diagrama, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, sem perda de generalidade, e $w = -1$.

B_2 . Para a região em que $B > B_3$, existem apenas soluções para $\epsilon < 0$, isso se dá devido a um valor máximo estabelecido devido à condição $\frac{\langle \rho \rangle}{3} - \frac{\epsilon}{a^2} \geq 0$ em (3.1), que leva todas as soluções com $\epsilon \geq 0$ a alcançarem um valor máximo com $B < B_3$, em particular $\epsilon = 0$ indica o valor mínimo da densidade de energia quando $B = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\alpha}(1-4w)}}$, valor sempre maior do que B_2 , e igual a B_3 quando $w = -\frac{1}{4}$. A pressão isotrópica pode se tornar negativa quando o campo magnético ultrapassa o valor $B = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\alpha}(5+12w)}}$. Também para a região em que $B > B_3$ tem-se que as curvas alcançam mínimos para o campo magnético e não apresentam um máximo em tempo finito.

A evolução do campo magnético fornece informações diretas sobre como o fator de escala se comporta a partir da relação (2.31). Note que, para a escolha de parâmetros da figura (1), $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$ e $w = -1$, esta relação pode ser escrita como

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left(\frac{1 - 4B_0^2}{1 - 4B^2} \right).$$

Perceba que as soluções em que $B \rightarrow 0$ fazem com que o fator de escala cresça rapidamente, perceba que isso também ocorre quando $B \rightarrow B_3$. No entanto, é perceptível pela dinâmica do campo magnético observada em (1) que nestas escolhas dos parâmetros, isso não ocorre para todas as soluções, sendo possível apenas para curvas com $\epsilon < 0$ capturadas por B_3 . Note também que a escolha $w > 0$ em (2.31) levaria a um universo singular quando $B \rightarrow B_3$, uma vez que esta escolha leva à $a/a_0 \rightarrow 0$ pela equação (2.31)e. A posição relativa da solução às verticais B_2 e B_3 também fornecem informações sobre se o colapso do universo ocorre com o aumento da intensidade do campo magnético ($\dot{B} > 0$) ou a sua atenuação ($\dot{B} < 0$), vide (3.3). A seguir discute-se o caso II representado na figura (2).

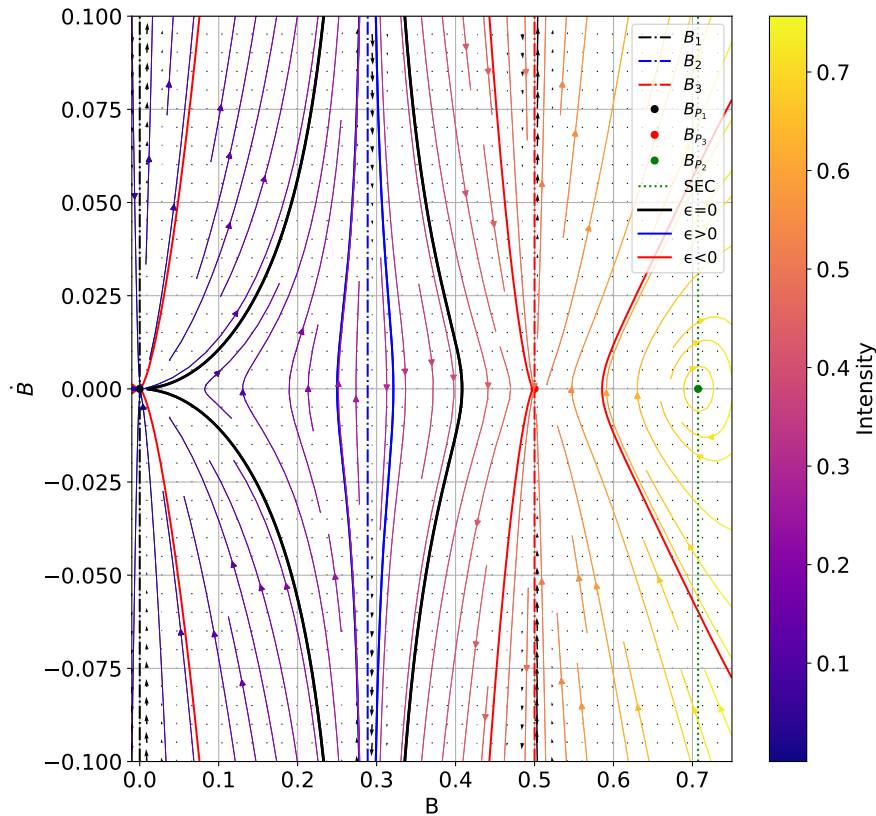


Figura 2 – Retrato de fase do caso II. As linhas verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio agora são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (sela). Novamente, as soluções de universo plano representadas pela curva sólida preta separam o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/2$.

Para o caso II há o surgimento do ponto de equilíbrio B_{P_2} , assim como a diminuição

da região entre as verticais B_2 e B_3 . Com o estreitamento desta região as soluções são capturadas mais facilmente por B_3 levando ao crescimento rápido do fator de escala. A presença do ponto de equilíbrio permite o surgimento de curvas fechadas para $\epsilon < 0$, todas violando eventualmente a SEC, além de violarem a NEC uma vez que estas curvas surgem para $B > B_3$. Curvas fechadas indicam que o campo magnético apresenta mínimos e máximos em tempo finito, ou seja, um comportamento cíclico para a evolução do fator de escala. As outras regiões têm o mesmo comportamento qualitativo, mudando apenas a taxa na qual o campo magnético evolui.

Para o caso III (3) tem-se que a região entre as verticais é mais estreita, evidenciando que existe um valor no qual ambas coincidem e eventualmente trocam de posição, isso ocorre pois a vertical B_2 ocorre sempre para valores maiores do campo magnético para diferentes escolhas de w e a posição de B_3 depende apenas do parâmetro $\tilde{\alpha}$. O ponto de equilíbrio B_{P_2} é agora uma sela posicionada entre as duas verticais, e portanto, indicando que a SEC é violada antes da NEC. Perceba que agora a violação da NEC ocorre até mesmo para densidades de energia positivas, possibilitando que as curvas com $\epsilon \geq 0$ existam após a vertical B_3 , e nestas condições não existem soluções cujo campo magnético cresce indefinidamente.

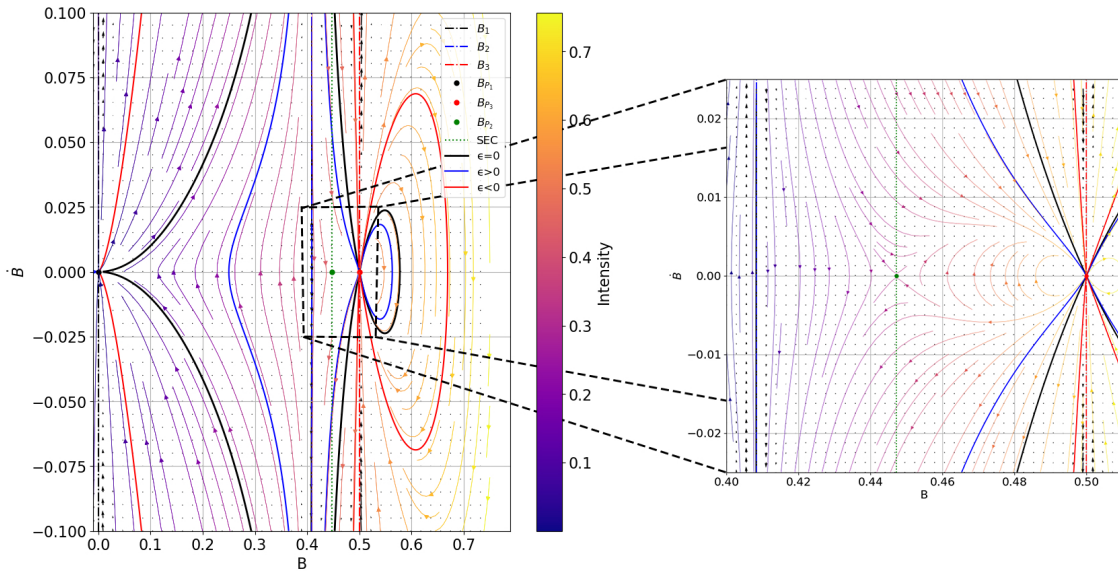


Figura 3 – Retrato de fase do caso III. As linhas verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (sela (veja a região ampliada no painel à direita)), e B_{P_3} (“centro”). Novamente, as soluções de universo plano representadas pela curva sólida preta separam o diagrama em regiões disjuntas em termos da curvatura, mas agora existe um ramo à direita de B_3 . Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/8$.

Para o caso IV (4), o ponto de equilíbrio B_{P_2} surge em valores menores que B_2 , ou seja, a SEC pode ser violada na primeira região, e soluções nas quais o campo magnético é atenuado deixam de violar a SEC eventualmente. Também surgem curvas fechadas para

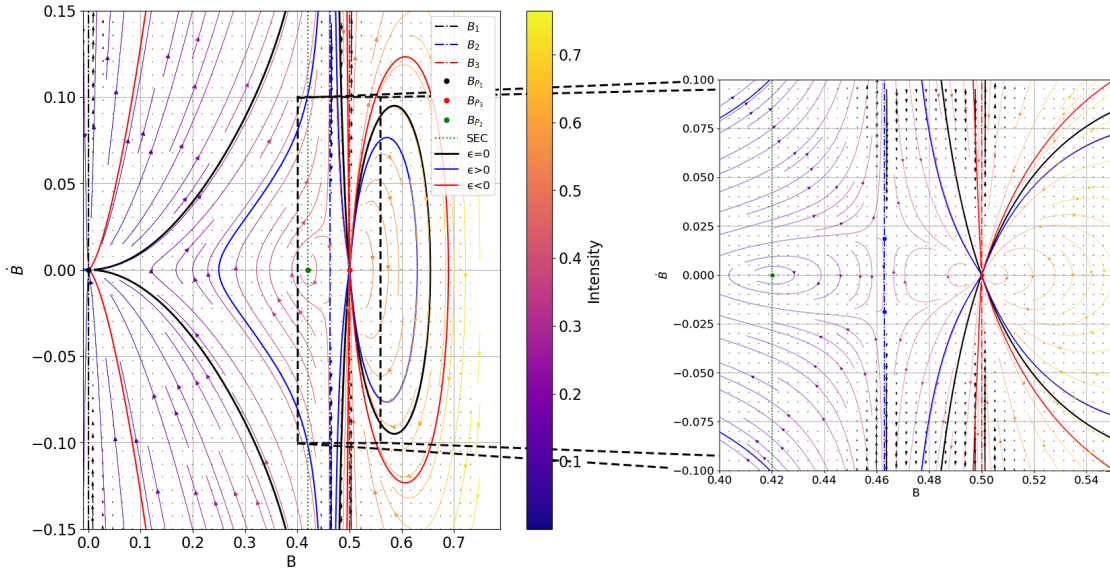


Figura 4 – Retrato de fase do caso IV. As verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (“centro”). A região ampliada também mostra o surgimento de dois pontos de sela (azul) sobre B_2 cujas separatrizes delineiam a bacia de atração de B_{P_3} . Novamente, as soluções de universo plano separam o diagrama em regiões disjuntas, e os ramos a direita de B_3 se mantém. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = -1/24$.

$\epsilon > 0$, diferentemente do que era indicado nos casos anteriores, note que estas curvas fechadas agora também não violam a NEC, no entanto, o restante das curvas na primeira região se comportam da maneira usual levando o campo magnético a zero ou a B_2 . Para a região entre B_2 e B_3 existem dois tipos de comportamento, soluções com $\epsilon > 0$ que atingem um mínimo antes de seguirem a B_3 , e soluções que tendem a (se afastam de) B_3 sem nenhum ponto crítico intermediário. Estas regiões surgem devido à presença das selas sobre a vertical B_2 , vide região ampliada à direita em (4), estas selas representam os equilíbrios P_{\pm} do sistema renormalizado. Para a região em que $B > B_3$ o comportamento não é afetado pela presença dos equilíbrios, se comportamento analogamente aos casos II e III.

Os casos V e VI estão representados nas figuras (5) e (6), sendo situações nas quais $w > 0$, ou seja, a evolução do fator de escala em termos do campo magnético pode levar a universos singulares. Note que

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left(\frac{1 - 4B^2}{1 - 4B_0^2} \right)^{\frac{1}{8}},$$

é a relação quando $w = 1/8$ e $\tilde{\alpha} = 1$ (caso V), ou seja, quando $B \rightarrow B_3$, o fator de escala toma um valor singular. Em ambos os casos também é notável que $B_3 < B_2$, em que B_2 continua sendo um valor máximo assintótico para o campo magnético, mas causa um

grande crescimento para os valores de \dot{B} . Nos arredores de B_1 o comportamento é análogo ao discutido anteriormente, com B_{P_2} agindo como um centro e capturando as curvas com $\epsilon > 0$ e criando curvas fechadas, gerando universos cíclicos. No entanto, as curvas que se afastam de B_1 eventualmente atingem um universo singular em B_3 . Se as soluções são selecionadas com condições iniciais $B_0 > B_2$, todas as soluções alcançam um máximo rapidamente e recaem em B_2 . A principal diferença qualitativa entre as soluções do caso VI e para o caso V é a ausência de B_2 , e portanto, as soluções com $B_0 > B_3$ podem crescer indefinidamente.

As soluções de universo plano são representadas como fronteiras nos retratos de fase, separando as regiões de curvatura espacial apropriadas. No entanto, esta divisão não afeta fortemente os cenários permitidos com curvatura espacial não nula, como fica evidente nas figuras (3-5), em que soluções cíclicas e de ricochete podem ocorrer tanto para $\epsilon < 0$ quanto para $\epsilon > 0$. Então, mesmo que as observações mais recentes favoreçam um universo quase plano [100], isso não deve ser tomado como uma limitação severa à dinâmica de um universo primordial.

3.2.1 Uma rápida discussão do caso em que $\tilde{\alpha} < 0$

Para uma análise completa é preciso discutir rapidamente as possibilidades do modelo caso sejam admitidos valores negativos para $\tilde{\alpha}$. Analogamente ao feito anteriormente; nesta seção apresenta-se na tabela de bifurcações (2), que resume o comportamento do sistema (3.5), e apresentam-se os retratos de fase dos diferentes casos possíveis na figura (7).

Caso	valor de w	B_2	B_{P_2}
I	$w < -\frac{3}{4}$	\nexists	centro
II	$-\frac{3}{4} < w < \frac{1}{4}$	\nexists	\nexists
III	$w > \frac{1}{4}$	\exists	\nexists

Tabela 2 – Existência da linha de divergência e do ponto de equilíbrio (com sua estabilidade associada) para diferentes valores de w e $\tilde{\alpha} < 0$.

A primeira diferença notável é a ausência de B_3 e B_{P_3} . Esta vertical e este equilíbrio estavam relacionados à violação da NEC, situações de crescimento do fator de escala ou de situações singulares, ver (2.28) e (2.31), uma vez que $\tilde{\alpha} < 0$, a NEC nunca será violada independentemente do valor do campo magnético, e não existe valor positivo do campo magnético que possa levar o fator de escala a zero. O restante do comportamento é bastante similar ao discutido anteriormente, e será discutido caso a caso.

No caso I (painel à esquerda na figura (7)), para $\epsilon \leq 0$, as trajetórias se aproximam de B_{P_1} , indicando um crescimento indefinido do fator de escala. Da mesma forma, o ramo em que o campo magnético cresce leva à diminuição do fator de escala a um valor singular

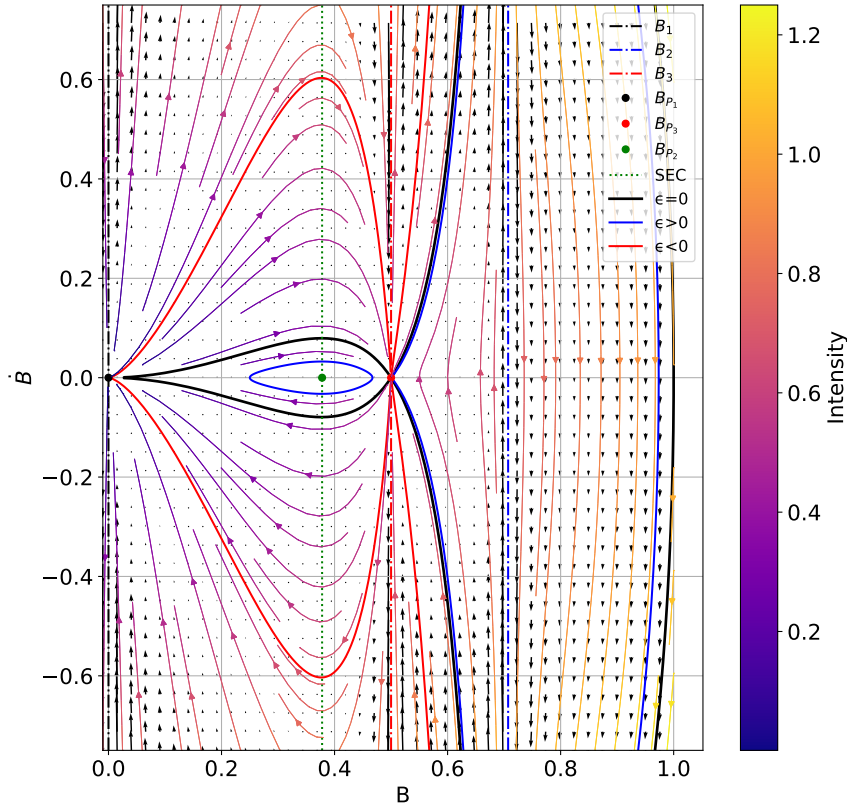


Figura 5 – Retrato de fase do caso V. As verticais ponto-tracejadas são como no caso anterior. Os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (nó), B_{P_2} (centro), e B_{P_3} (sela). As soluções de universo plano continuam separando o diagrama em regiões disjuntas, mas agora órbitas fechadas são impossíveis à direita de B_3 . Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = 1/8$.

assintótico. E como anteriormente, para $\epsilon > 0$ a presença de máximos e mínimos cria um comportamento cíclico para a evolução do fator de escala.

Para o caso II (painel central), o equilíbrio em B_{P_2} deixa de existir, e juntamente à bacia de atração que possibilitava as curvas fechadas para $\epsilon > 0$. Desta forma, todas as soluções crescem indefinidamente levando a uma singularidade assintótica. Assim como nos casos anteriores ainda se percebe que o campo magnético apresenta um mínimo quando $\epsilon > 0$, portanto existe um tamanho máximo para o universo após o qual ele retorna a colapsar.

No caso III (painel à direita), para pequenos valores do campo magnético, o crescimento do campo magnético corresponde à diminuição do fator de escala. No entanto, a partir de um valor $B = B_2$, este comportamento muda, e o fator de escala começa a crescer juntamente ao campo magnético, comportamento semelhante ao que ocorria entre as verticais B_2 e B_3 no caso geral. Esta mudança de comportamento ocorre exatamente

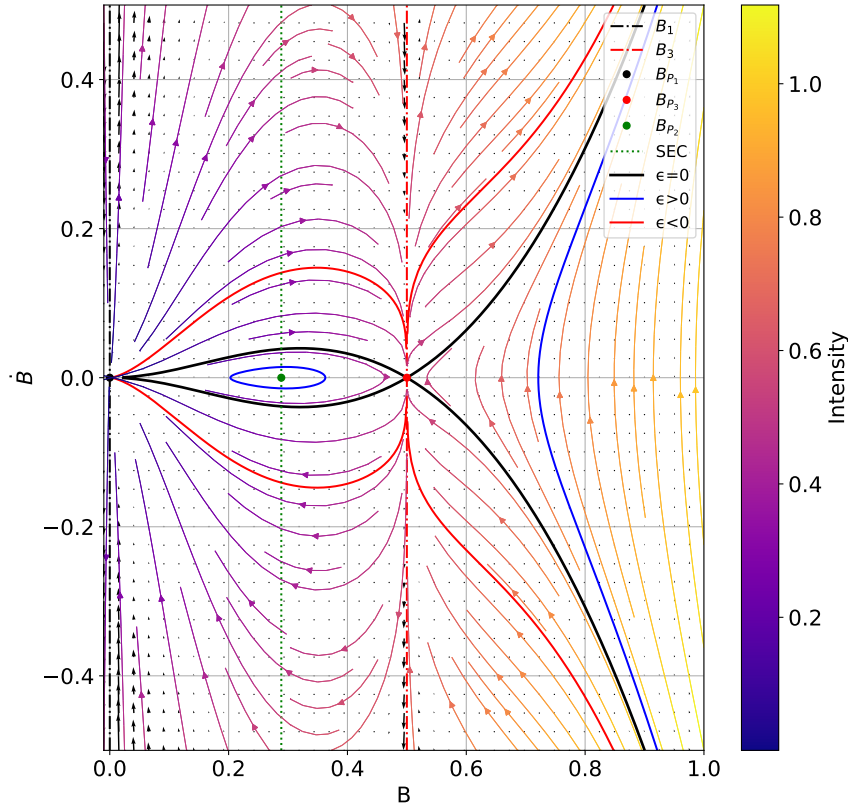


Figura 6 – Retrato de fase do caso VI. A única diferença do caso anterior é a ausência de B_2 que foi levada ao infinito. Para este diagrama de fase, foi escolhido $\tilde{\alpha} = 1$, $\sigma = 1/2$, e $w = 3/4$.

no mínimo dado pela equação (2.31) para esta escolha de parâmetros. A linha vertical no espaço de fase marca um limite superior para o campo magnético, ou seja, o fator de escala atinge um mínimo não singular. Para $B > B_2$, o campo magnético atinge um máximo em tempo finito para toda escolha de ϵ , de forma que o fator de escala também atinge um máximo correspondente.

3.3 O universo magnético e o universo estatisticamente nulo

O UM pode ser obtido a partir de (3.5) com $\sigma = 0$, ou seja, com campo elétrico nulo (vide (2.25)). O sistema dinâmico sob estas condições toma a forma

$$\dot{B} = y, \quad \dot{y} = \frac{B^3}{3} (1 - 6\tilde{\alpha}B^2) + \frac{3y^2}{2B}. \quad (3.20)$$

Este sistema tem como equilíbrios os pontos

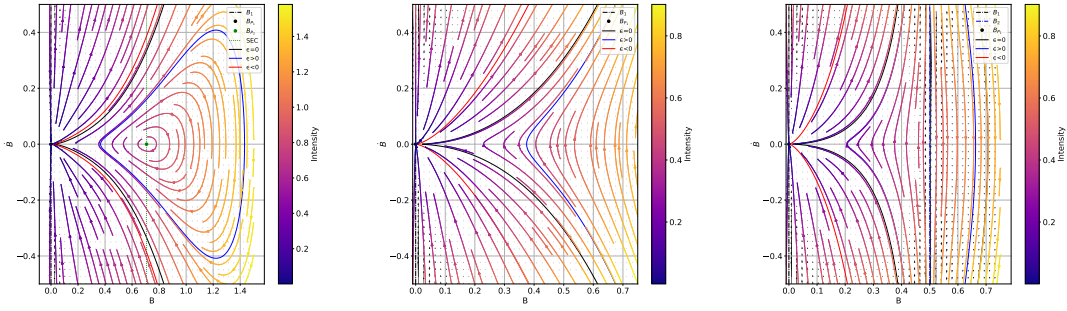


Figura 7 – Retratos de fase para $\tilde{\alpha} < 0$. Esquerda: Para o caso I ($w = -1$), os pontos de equilíbrio são B_{P_1} (“centro”) e B_{P_2} (centro). Centro: Para o caso II ($w = 0$), o único ponto de equilíbrio é a origem (nó). Direita: Para o caso III ($w = 1/2$), o único equilíbrio é novamente a origem (nó), mas agora existe uma separatriz. Para todos os diagramas de fase foi escolhido $\tilde{\alpha} = -1$, e, $\sigma = 1/2$.

$$P_1 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6\tilde{\alpha}}}, 0 \right). \quad (3.21)$$

É possível realizar a linearização do sistema dinâmico nos arredores deste equilíbrio e perceber que existem formações de curvas fechadas em torno de um centro, como pode ser observado no painel esquerdo da figura (8). Os autovalores da matriz Jacobiana desta linearização são tais que $r_{\pm} = \pm i\sqrt{6\tilde{\alpha}}$, ou seja, para todo $\tilde{\alpha} > 0$, o equilíbrio se comporta como um centro. Uma vez que $E^2 = 0$, é perceptível que todos os fatores de $\tilde{\beta}$ desaparecem, reforçando que nestas condições o invariante G é identicamente nulo. Para o UM também é possível inverter a relação (2.32), obtendo que

$$\frac{B}{B_0} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^2, \quad (3.22)$$

ou seja, é possível escrever o sistema dinâmico em termos do fator de escala sem precisar realizar uma análise indireta de sua evolução. O sistema tem a forma

$$\dot{a} = z, \quad \dot{z} = -\frac{a_0^4 B_0^2}{6a^3} \left(1 - \frac{6\tilde{\alpha} a_0^4 B_0^2}{a^4} \right), \quad (3.23)$$

e a equação de vínculo pode ser escrita como

$$\left(\frac{z}{a} \right)^2 + \frac{\epsilon}{a^2} = -\frac{1}{6} \frac{a_0^4 B_0^2}{a^4} \left(1 - 2\tilde{\alpha} \frac{a_0^4 B_0^2}{a^4} \right). \quad (3.24)$$

Nesta formulação, existe apenas um equilíbrio, obtido para $z = 0$, e o seguinte valor crítico do fator de escala

$$a_{P_{UM}} = a_0 (2\tilde{\alpha} B_0^2)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.25)$$

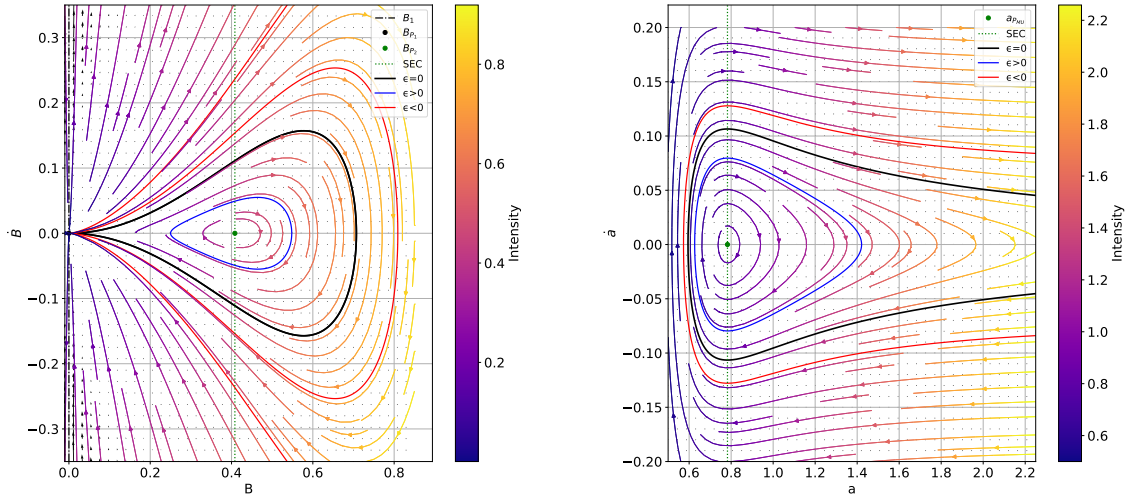


Figura 8 – Retratos de fase para o caso do UM. Esquerda: plano (B, \dot{B}) , mostrando os pontos de equilíbrio B_{P_1} (nó) e B_{P_2} (centro). Direita: plano (a, \dot{a}) , com o ponto de equilíbrio P_{UM} (centro). Novamente, a curva preta sólida indica a solução com universo plano, separando o diagrama em duas regiões disjuntas em termos da curvatura. Aqui, foi utilizado que $\tilde{\alpha} = 1$.

Este equilíbrio também se comporta como um centro, e a linearização do sistema dinâmico corrobora essa afirmação, no entanto, percebe-se que diferentemente do campo magnético, agora apenas as curvas com $\epsilon > 0$ são capturadas pela bacia de atração do centro e formam curvas fechadas, observe o painel à direita da figura (8).

Analogamente ao UM, é possível reescrever o sistema dinâmico para o limite superior em que $\sigma \rightarrow 1$, ou seja, para o UEN. Nesta situação temos que a relação entre o fator de escala e o campo magnético é dada por (2.33), e o sistema dinâmico (3.5) se reduz a

$$\dot{B} = y, \quad \dot{y} = \frac{2B^3 (1 - \tilde{\beta}B^2)}{3 (1 + 2\tilde{\beta}B^2)} + \frac{y^2 [(1 + 2\tilde{\beta}B^2)(3 + 2\tilde{\beta}B^2) - 8\tilde{\beta}B^2]}{2B(1 + 2\tilde{\beta}B^2)}. \quad (3.26)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico são dados por

$$P_1 = (0, 0), \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}}}, 0 \right). \quad (3.27)$$

Note que a permanência do parâmetro $\tilde{\beta}$ indica a relevância da média $\langle G^2 \rangle$, e a ausência de $\tilde{\alpha}$ indica o fato de que a equivalência dos campos leva o invariante F a zero. Assim como o caso geral e no caso do UM, P_1 não pode ser linearizado pelos métodos usuais, e o seu comportamento deve ser avaliado nas proximidades de $B = 0$ a partir do teorema de variedades centrais. Também pode-se afirmar que P_2 se comporta como um centro. No entanto, a bacia de atração deste equilíbrio só é capaz de capturar curvas com $\epsilon > 0$, vide

o painel esquerdo da figura (9). Da mesma forma que no caso anterior, é possível inverter a expressão (2.33) para obter o campo magnético em função do fator de escala, tem-se que

$$B(a) = \sqrt{\frac{W\left[\frac{2\tilde{\beta}B_0^2a_0^4e^{2\tilde{\beta}B_0^2}}{a^4}\right]}{2\tilde{\beta}}}. \quad (3.28)$$

em que W é a função Lambert W . O sistema dinâmico escrito em termos do fator de escala é dado por

$$\dot{a} = z, \quad \dot{z} = -\frac{a}{6\tilde{\beta}} W\left[\frac{2\tilde{\beta}B_0^2a_0^4e^{2\tilde{\beta}B_0^2}}{a^4}\right] \left(1 - \frac{W\left[\frac{2\tilde{\beta}B_0^2a_0^4e^{2\tilde{\beta}B_0^2}}{a^4}\right]}{2}\right), \quad (3.29)$$

em que o vínculo da equação de Friedmann pode ser escrito como

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{W\left[\frac{2\tilde{\beta}B_0^2a_0^4e^{2\tilde{\beta}B_0^2}}{a^4}\right]}{6\tilde{\beta}} \left(1 + \frac{W\left[\frac{2\tilde{\beta}B_0^2a_0^4e^{2\tilde{\beta}B_0^2}}{a^4}\right]}{2}\right). \quad (3.30)$$

O único equilíbrio é dado pela relação

$$P_{UEN} = \left(a_0\sqrt{B_0}\tilde{\beta}^{1/4}e^{\frac{\tilde{\beta}B_0^2-1}{2}}, 0\right), \quad (3.31)$$

com $z = 0$. Este equilíbrio também se comporta como um centro, como pode ser observado no painel à direita na figura (9).

O comportamento qualitativo do fator de escala no UEN é semelhante àquele observado para o caso do UM. Como pode ser observado no painel direito da figura (9), quando $\epsilon < 0$, o fator de escala atinge uma taxa constante de crescimento assintoticamente, enquanto para $\epsilon = 0$ esta taxa se reduz a zero. No entanto, para $\epsilon > 0$ o universo apresenta um tamanho máximo a partir do qual volta a colapsar. Todas as soluções possíveis apresentam um ricochete do fator de escala, partindo de uma era de colapso para uma era de expansão acelerada do fator de escala, mas apenas $\epsilon > 0$ indica um universo cíclico.

Para o campo magnético existe uma diferença significativa no comportamento qualitativo entre UM e UEN, note os painéis esquerdos nas figuras (8 e 9). No caso UEN observa-se que a curva de $\epsilon = 0$ indica uma taxa de aceleração constante para o crescimento do campo magnético, e uma aceleração que aumenta com o tempo para $\epsilon < 0$. Para o caso de $\epsilon > 0$ o UEN se comporta como no UM, e o campo magnético apresenta um valor máximo e um valor mínimo em tempos finitos, indicando um comportamento periódico.

Toda a discussão realizada até este ponto pode ser encontrada de maneira mais sucinta no trabalho "*Qualitative analysis of a quasi-magnetic universe*"[101].

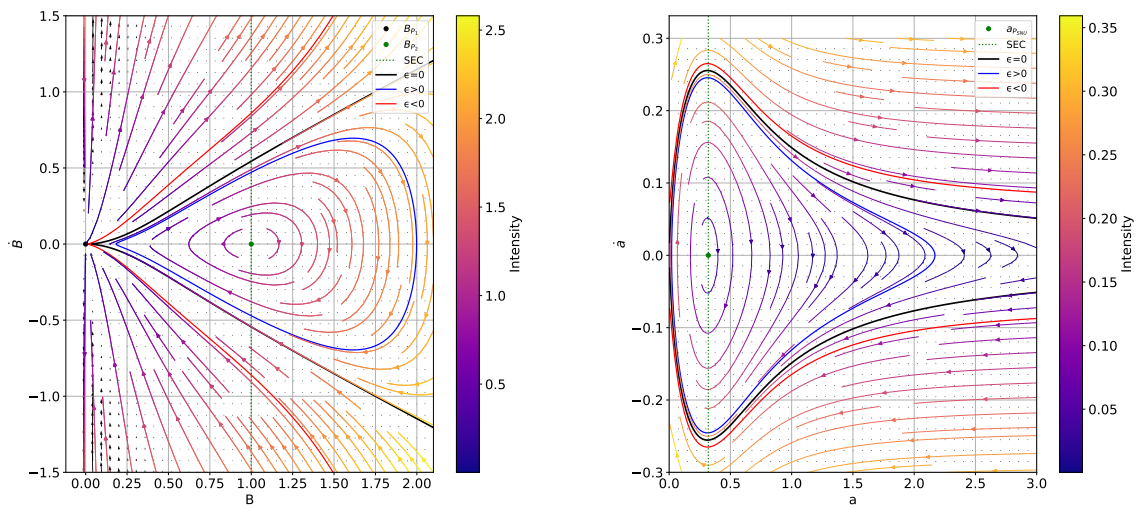


Figura 9 – Retratos de fase para o caso do UEN. Esquerda: plano (B, \dot{B}) , mostrando os pontos de equilíbrio P_1 (nó) e P_2 (centro). Direita: plano (a, \dot{a}) , com o ponto de equilíbrio P_{UEN} (centro). Novamente, a curva preta sólida indica a solução com universo plano, que separa o diagrama em duas regiões disjuntas em termos da curvatura. Para estes diagramas, foi escolhido $\tilde{\beta} = 1$.

4 Análise perturbativa

Neste capítulo será analisada a evolução de perturbações tensoriais em uma base escalar a partir das EQM. As EQM representam um formalismo equivalente a RG construído a partir das identidades de Bianchi. Aqui está apresentada a estrutura básica necessária para realizarmos a análise da evolução das perturbações. Os procedimentos detalhados para obter as equações dinâmicas estão presentes nas próximas seções. Divide-se em duas seções, a primeira focada nas projeções independentes para o lado esquerdo da divergência do tensor de Weyl, obtendo os elementos geométricos e cinemáticos relevantes. A segunda seção foca-se nos elementos independentes do lado direito, relacionados à fonte material da geometria. Além disso, apresenta-se uma breve discussão sobre a equivalência dos formalismo de JEK e Einstein no apêndice A.

4.1 Projeções do lado esquerdo da divergência do tensor de Weyl

Antes de realizar as projeções é necessário escrever a decomposição do tensor de Weyl em termos de sua parte elétrica e magnética, definidas por

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu} v^\mu v^\nu, \quad (4.1)$$

e, para a parte magnética

$$H_{\alpha\beta} = -W^*_{\alpha\mu\beta\nu} v^\mu v^\nu, \quad (4.2)$$

em que $W^*_{\alpha\mu\beta\nu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu\sigma\gamma} W^{\sigma\gamma}_{\beta\nu}$ e v^μ é um campo de observadores do tipo tempo, tal que:

$$v^\mu v_\mu = 1, \quad (4.3)$$

e, a partir destes observadores e da métrica quadridimensional é possível construir o projetor como:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu. \quad (4.4)$$

O tensor $h_{\mu\nu}$ obedece as seguintes propriedades:

$$h^2 = h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h, \quad (4.5)$$

$$h_{\mu\nu} v^\mu = 0, \quad (4.6)$$

permitindo que o objeto possa ser tratado como uma métrica do tri-espaco ortogonal ao observador v^μ . Ambos os tensores definidos nas relações (4.1) e (4.2) são simétricos,

de traço nulo e pertencem ao tri-espaço ortogonal ao observador, ou seja, obedecem às relações

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad (4.7)$$

$$E_{\mu\nu}v^\mu = 0, \quad (4.8)$$

$$E_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.9)$$

e, analogamente, para a parte magnética

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}, \quad (4.10)$$

$$H_{\mu\nu}v^\mu = 0, \quad (4.11)$$

$$H_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0. \quad (4.12)$$

A decomposição deve também obedecer às mesmas simetrias do tensor de Weyl, ou seja, simétrico na troca de pares e antissimétrico na troca de dois índices, da seguinte maneira:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu} = W^{\mu\nu\alpha\beta} = -W^{\nu\mu\alpha\beta} = W^{\nu\mu\beta\alpha}. \quad (4.13)$$

Uma construção que obedece a todas estas simetrias e é obtida invertendo as definições (4.1) e (4.2) e pode ser escrita como

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = -2v^{[\mu}v_{[\alpha}E^{\nu]}_{\beta]} + \delta^{[\mu}_{[\alpha}E^{\nu]}_{\beta]} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}v^\gamma v^{[\mu}H^{\nu]\epsilon}, \quad (4.14)$$

em que $A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$, ou seja, um indicador de antissimetrização nos índices. Expandindo a relação, é possível obter doze termos independentes

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = & -2v^\mu v_\alpha E^\nu_\beta + 2v^\mu v_\beta E^\nu_\alpha + 2v^\nu v_\alpha E^\mu_\beta - 2v^\nu v_\beta E^\mu_\alpha + \\ & + \delta^\mu_\alpha E^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta E^\nu_\alpha - \delta^\nu_\alpha E^\mu_\beta + \delta^\nu_\beta E^\mu_\alpha + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon} + \\ & - \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon} + \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon} - \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}v_\gamma v_\beta H_{\alpha\epsilon}. \end{aligned}$$

Calculando a divergência do tensor obtém-se a relação

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = & -2(v^\mu v_\alpha E^\nu_\beta)_{;\nu} + 2(v^\mu v_\beta E^\nu_\alpha)_{;\nu} + 2(v^\nu v_\alpha E^\mu_\beta)_{;\nu} - 2(v^\nu v_\beta E^\mu_\alpha)_{;\nu} + \\ & + \delta^\mu_\alpha E^\nu_{\beta;\nu} - \delta^\mu_\beta E^\nu_{\alpha;\nu} - \delta^\nu_\alpha E^\mu_{\beta;\nu} + \delta^\nu_\beta E^\mu_{\alpha;\nu} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} + \\ & - \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} + \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon})_{;\nu} - \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\beta H_{\alpha\epsilon})_{;\nu}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A derivada covariante utilizada para calcular a divergência é definida em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte maneira

$$A_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = A_{\mu}^{\nu}{}_{,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} A_{\rho}^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\rho\nu} A_{\mu}^{\rho}, \quad (4.16)$$

aqui A_{μ}^{ν} é um tensor de ordem dois com simetria arbitrária. A partir da definição (4.16), a estrutura de uma geometria sem torção, como a da RG, leva à seguinte afirmação [95, 1]:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (4.17)$$

Existem quatro projeções independentes que podem ser feitas para obter o lado esquerdo das equações (4.121), (4.122), (4.123) e (4.124). Elas serão feitas individualmente nas próximas subseções.

4.1.1 Primeira projeção

A primeira projeção é dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho},$$

em que v^{μ} e $h_{\mu\nu}$ são definidos como nas equações (4.3) e (4.4). Será necessário realizar as contrações adequadas em cada um dos doze termos na relação (4.15), apresentadas a seguir. Para o primeiro termos tem-se

$$-2(v^{\mu} v_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta})_{;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} = -2v^{\mu}{}_{;\nu} v_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} - 2v^{\mu} v_{\alpha;\nu} E^{\nu}{}_{\beta} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} - 2v^{\mu} v_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho}.$$

Note que $E^{\nu}{}_{\beta} v^{\beta} = 0$, assim como $h^{\alpha\rho} v_{\alpha} = 0$, ou seja, o primeiro termo da projeção é

$$-2(v^{\mu} v_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta})_{;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} = 0.$$

Agora, para o segundo termo:

$$2(v^{\mu} v_{\beta} E^{\nu}{}_{\alpha})_{;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} = 2v^{\mu}{}_{;\nu} v_{\beta} E^{\nu}{}_{\alpha} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} + 2v^{\mu} v_{\beta;\nu} E^{\nu}{}_{\alpha} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho} + 2v^{\mu} v_{\beta} E^{\nu}{}_{\alpha;\nu} v^{\beta} v_{\mu} h^{\alpha\rho},$$

em que $v_{\beta} v^{\beta} = 1$. Uma vez que $E^{\nu}{}_{\alpha} v^{\alpha} = 0$ é sempre possível escrever que

$$E^{\nu}{}_{\alpha} h^{\alpha\rho} = E^{\nu\rho}, \quad (4.18)$$

utilizando-se a relação (4.4) e a propriedade (4.6). Estas afirmações são independentes do observador e serão utilizadas ao longo de todas as projeções. Neste termo existe apenas um fator identicamente nulo, para vermos isso é necessário lembrar a seguinte decomposição para a derivada covariante do campo de observadores [95]

$$v_{\alpha;\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + a_{\alpha} v_{\beta}, \quad (4.19)$$

em que $\theta = v^\nu{}_{;\nu}$ é o fator de expansão, $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h^\mu{}_{(\alpha}h_{\beta)}^\lambda v_{\mu;\lambda} - \frac{\theta}{3}h_{\alpha\beta}$ é o tensor de cisalhamento com $A_{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$ indicando a simetria nos índices, $\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h^\mu{}_{[\alpha}h_{\beta]}^\lambda v_{\mu;\lambda}$ é o tensor de vorticidade e $a_\alpha = v_{\alpha;\nu}v^\nu = \dot{v}_\alpha$ é o vetor aceleração. Perceba, no entanto, que as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}v^\beta &= 0, \\ \omega_{\alpha\beta}v^\beta &= 0,\end{aligned}$$

a partir da propriedade (4.6). E, como é possível escrever

$$a_\mu v^\mu = \dot{v}_\mu v^\mu = (v_\mu \dot{v}^\mu) - v_\mu \dot{v}^\mu,$$

a relação $a_\mu v^\mu = -v_\mu a^\mu$ é válida, ou seja, $a_\mu v^\mu = 0$. Procedimentos análogos serão realizados ao longo das diferentes projeções, e note que no segundo termo podemos identificar que para os dois primeiros fatores isso resulta em $v_{\beta;\nu}v^\beta = 0$. O fator restante pode ser escrito como

$$2v^\mu v_\beta E^\nu{}_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 2E^\nu{}_{\alpha;\nu} h^{\alpha\rho}.$$

O procedimento para reescrever a expressão acima também será utilizado em outras projeções. Note que $h_{\mu\nu}$ é a métrica no tri-espaço ortogonal ao campo de observadores v_μ tendo em vista a propriedade (4.6) do projetor. No entanto, as equações são construídas em um espaço quadridimensional arbitrário, portanto, mesmo que $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ por definição, o mesmo não pode ser dito para $h_{\mu\nu;\alpha}$. Tendo esta afirmação em mente, é possível utilizar a regra da cadeia para obter

$$2E^\nu{}_{\alpha;\nu} h^{\alpha\rho} = 2(E^\epsilon{}_\alpha h^\nu{}_\epsilon)_{;\nu} h^{\alpha\rho} = 2E^\epsilon{}_{\alpha;\nu} h^\nu{}_\epsilon h^{\alpha\rho} + 2E^\epsilon{}_\alpha h^\nu{}_{\epsilon;\nu} h^{\alpha\rho},$$

em que utiliza-se as definições (4.17) e (4.4) para obter $h^\nu{}_{\epsilon;\nu} = -(v_\epsilon v^\nu)_{;\nu}$, resultando na seguinte relação para o segundo termo da projeção

$$2E^\nu{}_{\alpha;\nu} h^{\alpha\rho} = 2E^\epsilon{}_{\alpha;\nu} h^\nu{}_\epsilon h^{\alpha\rho} - 2a_\epsilon E^\epsilon{}_\alpha h^{\alpha\rho},$$

ou seja, tem-se

$$2(v^\mu v_\beta E^\nu{}_\alpha)_{;\nu} v^\beta v_\mu = 2E^\epsilon{}_{\alpha;\nu} h^\nu{}_\epsilon h^{\alpha\rho} - 2a_\epsilon E^\epsilon{}_\alpha h^{\alpha\rho}. \quad (4.20)$$

Usando os mesmos argumentos do primeiro termo, é possível mostrar que o terceiro termo é:

$$2(v^\nu v_\alpha E^\mu{}_\beta)_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 0.$$

Para o quarto termo, o único fator não nulo é dado por $-2(v^\nu v_\beta E^\mu_\alpha)_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = -2v^\nu E^\mu_{\alpha;\nu} v_\mu h^{\alpha\rho}$. Note que é possível demonstrar que $E^\mu_{\alpha;\nu} v_\mu = -E^\mu_\alpha v_{\mu;\nu}$. Portanto, tem-se que

$$-2v^\nu E^\mu_{\alpha;\nu} v_\mu h^{\alpha\rho} = 2a_\mu E^\mu_\alpha h^{\alpha\rho}.$$

E, o quarto termo é dado por

$$-2(v^\nu v_\beta E^\mu_\alpha)_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 2a_\mu E^\mu_\alpha v_\mu h^{\alpha\rho}. \quad (4.21)$$

O quinto termo é dado por $\delta^\mu_\alpha E^\nu_{\beta;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho}$, utilizando-se a propriedade da delta de Kronecker $\delta^\mu_\alpha v_\mu = v_\alpha$, obtêm-se a contração $v_\alpha h^{\alpha\rho} = 0$, de forma que

$$\delta^\mu_\alpha E^\nu_{\beta;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 0.$$

A propriedade da delta de Kronecker aplicada acima será utilizada para obter a forma final dos próximos termos. O sexto termo é dado por

$$-\delta^\mu_\beta E^\nu_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\rho\alpha} = -E^\nu_{\alpha;\nu} h^{\rho\alpha}.$$

E, tomando um procedimento semelhante ao realizado no segundo termo, é possível mostrar que

$$-E^\nu_{\alpha;\nu} h^{\rho\alpha} = -E^\epsilon_{\alpha;\nu} h_\epsilon{}^\nu h^{\alpha\rho} + a_\epsilon E^\epsilon_\alpha h^{\alpha\rho},$$

ou simplesmente,

$$-\delta^\mu_\beta E^\nu_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\rho\alpha} = -E^\epsilon_{\alpha;\nu} h_\epsilon{}^\nu h^{\alpha\rho} + a_\epsilon E^\epsilon_\alpha h^{\alpha\rho}. \quad (4.22)$$

Para o sétimo termo:

$$-\delta^\nu_\alpha E^\mu_{\beta;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = -E^\mu_{\beta;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho}.$$

Alternando a derivada covariante, é possível mostrar que $E^\mu_{\beta;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 0$, utilizando-se a projeção $E^\mu_{\beta} v_\mu$. Ou seja,

$$-\delta^\nu_\alpha E^\mu_{\beta;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = 0.$$

O oitavo termo é

$$\delta^\nu_\beta E^\mu_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho}.$$

Utilizando a definição $\dot{A} = A_{;\nu} v^\nu$, tem-se que $\delta^\nu_\beta E^\mu_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = E^\mu_{\alpha} v_\mu h^{\alpha\rho}$ ou, alternando a derivada,

$$\delta^\nu{}_\beta E^\mu{}_{\alpha;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = -a_\mu E^\mu{}_\alpha h^{\alpha\rho}. \quad (4.23)$$

Desta forma, a parte elétrica está completa, e agora iremos aplicar as projeções à parte magnética da decomposição (4.14). O nono termo é dado por

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} (v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\mu{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma H^{\nu\epsilon}{}_{;\nu} v^\beta h^{\alpha\rho}.$$

Os dois últimos termos são identicamente nulos, devido à projeção $\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta$. Note que $\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta = \eta_{\alpha\gamma\beta\epsilon} v^\beta v^\gamma$, e uma vez que os índices contraídos podem ser rotulados livremente, a antissimetria na troca de quaisquer dois índices em $\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}$ garante que $\eta_{\alpha\gamma\beta\epsilon} v^\beta v^\gamma = -\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta$, como esta propriedade implica em $\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta = -\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta$, é necessário que $\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma v^\beta = 0$. Desta maneira, sempre que o tensor dual for contraído com dois campos de observadores, o termo será identicamente nulo. Resta-se apenas o fator

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho}.$$

Aplicando a relação (4.19), escreve-se

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} &= \frac{\theta}{3} \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} h^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \\ &+ \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \omega^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} a^\gamma v_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho}. \end{aligned}$$

O último fator é identicamente nulo uma vez que $H^{\nu\epsilon} v_\nu = 0$. O primeiro fator também é identicamente nulo, uma vez que $h^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} = H^{\gamma\epsilon}$, obtém-se que $\eta_{\alpha\beta\nu\epsilon} H^{\nu\epsilon}$. Como $H^{\nu\epsilon}$ é simétrico em seus índices e o tensor dual é antissimétrico na troca de dois índices, esta contração é identicamente nula. Os fatores restantes são

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \omega^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho}.$$

O primeiro fator já está em uma forma conveniente para o trabalho. Para o segundo fator é necessário introduzir a relação

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \omega^\mu v^\nu. \quad (4.24)$$

Aplicando a relação (4.24), é possível escrever que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \eta^{\gamma\nu\mu\sigma} \omega_\mu v_\sigma H_\nu{}^\epsilon v^\beta h^{\alpha\rho}.$$

Para continuar expandindo esta relação é necessário introduzir as contrações do tensor dual, escritas como

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\epsilon\lambda} = -\delta_{\rho\sigma\epsilon\lambda}^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (4.25)$$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\lambda}\eta_{\rho\sigma\epsilon\lambda} = -\delta_{\rho\sigma\epsilon}^{\alpha\beta\mu}, \quad (4.26)$$

$$\eta^{\alpha\beta\epsilon\lambda}\eta_{\rho\sigma\epsilon\lambda} = -2\delta_{\rho\sigma}^{\alpha\beta}, \quad (4.27)$$

$$\eta^{\alpha\sigma\epsilon\lambda}\eta_{\rho\sigma\epsilon\lambda} = -6\delta_{\rho}^{\alpha}, \quad (4.28)$$

$$\eta^{\rho\sigma\epsilon\lambda}\eta_{\rho\sigma\epsilon\lambda} = -24. \quad (4.29)$$

Note que as deltas generalizadas podem ser expandidas a partir da expansão de Laplace como [102, 103]:

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \delta_{\nu_p}^{\mu_k} \delta_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}}^{\mu_1 \dots \widehat{\mu_k} \dots \mu_p} = \delta_{\nu_p}^{\mu_p} \delta_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}}^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} - \sum_{k=1}^{p-1} \delta_{\nu_p}^{\mu_k} \delta_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \mu_{k+1} \dots \mu_p} \quad (4.30)$$

Em particular ao longo das projeções neste trabalho serão utilizadas as relações (4.25), (4.26) e (4.27). A ordem dos índices é muito importante, pois pode resultar na mudança de um sinal global nos fatores calculados. Como as relações são construídas com os últimos índices contraídos é sempre necessário escrever as contrações com a mesma estrutura. Para a projeção atual isso não resulta em uma troca de sinal global, e, tem-se que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^{\gamma}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^{\gamma}_{\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} - \delta_{\alpha\beta\epsilon}^{\nu\mu\sigma} \omega_{\mu} v_{\sigma} H_{\nu}{}^{\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho},$$

em que a delta generalizada resultante pode ser expandida em termos de deltas de Kronecker simples. Como tem-se três pares de índices livres é necessário realizar duas etapas na expansão, primeiro, obtém-se três fatores

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^{\gamma}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^{\gamma}_{\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} - [\delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta\epsilon}^{\mu\sigma} - \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha\epsilon}^{\mu\sigma} + \delta_{\epsilon}^{\nu} \delta_{\alpha\beta}^{\mu\sigma}] \omega_{\mu} v_{\sigma} H_{\nu}{}^{\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho},$$

perceba que o primeiro índice superior (γ) foi fixado enquanto os inferiores alternam e tem sinal positivo ou negativo devido à um fator da forma $(-1)^{i+j}$ com $i, j = 1, 2, 3$. Em particular, neste termo os índices são tais que $(\nu, \mu, \sigma) = (1, 2, 3)$ e $(\alpha, \beta, \epsilon) = (1, 2, 3)$ devido à ordem que aparecem no tensor dual antes de ser contraído. Os índices nulos são omitidos uma vez que os objetos contraídos aos tensores duais são pertencentes ao espaço tri-dimensional. O único fator não nulo é

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^{\gamma}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^{\gamma}_{\nu} H^{\nu\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho} - \delta_{\beta\epsilon}^{\mu\sigma} \omega_{\mu} v_{\sigma} H_{\alpha}{}^{\epsilon} v^{\beta} h^{\alpha\rho},$$

em que $H^{\mu}_{\mu} = 0$. É preciso repetir o procedimento para a delta generalizada uma segunda vez. Agora, obtém-se dois fatores

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} v^\gamma{}_{;\nu} H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} - [\delta_\beta^\mu \delta_\epsilon^\sigma - \delta_\epsilon^\mu \delta_\beta^\sigma] \omega_\mu v_\sigma H_\alpha{}^\epsilon v^\beta h^{\alpha\rho}.$$

Como $\omega_\mu v^\mu = 0$, o primeiro fator do segundo termo do lado direito se anula, restando apenas

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} (v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + \omega_\epsilon H^{\rho\epsilon}. \quad (4.31)$$

Por argumentos análogos aos usados no cálculo do termo anterior, mostramos que o décimo termo é:

$$-\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} (v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} = 0.$$

Para o décimo-primeiro termo:

$$\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} (v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon})_{;\nu} = 0.$$

O único fator não nulo no termo final é

$$-\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} v_{\gamma;\nu} H_{\alpha\epsilon} v_\mu h^{\alpha\rho}.$$

Utilizando a relação (4.19), e lembrando que a contração de tensores simétricos com tensores antissimétricos é identicamente nula, tem-se

$$-\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} v_{\gamma;\nu} H_{\alpha\epsilon} v_\mu h^{\alpha\rho} = -\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} \omega_{\gamma\nu} H_{\alpha\epsilon} v_\mu h^{\alpha\rho}.$$

Ao usarmos a relação (4.24) e a relação (4.27), em que é necessário realizar apenas uma expansão da delta generalizada, obtém-se

$$\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} (v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon})_{;\nu} = 2\omega_\epsilon H^{\rho\epsilon}. \quad (4.32)$$

Coletando os fatores não nulos, (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), (4.31) e (4.32), obtém-se

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\rho} = E^\epsilon{}_{\alpha;\nu} h_\epsilon{}^\nu h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + 3\omega_\epsilon H^{\rho\epsilon}. \quad (4.33)$$

As outras projeções são obtidas de maneira análoga. Apenas as manipulações que não foram utilizadas nesta projeção serão discutidas com detalhes nas próximas subseções.

4.1.2 Segunda projeção

Nesta subseção realiza-se a segunda projeção independente, dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta}.$$

Novamente, é necessário reescrever todos os doze termos independentes na relação (4.15). Para o primeiro termo:

$$-2(v^\mu v_\alpha E^\nu_\beta)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = -2v_{\alpha;\nu} E^\nu_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta}.$$

Utilizando (4.19) para deixar evidente os parâmetros cinemáticos, restam-se dois fatores não nulos dados por

$$-2(v^\mu v_\alpha E^\nu_\beta)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = -2\sigma_{\alpha\nu} E^\nu_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} - 2\omega_{\alpha\nu} E^\nu_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta},$$

em que o termo proporcional a θ em (4.19) é eliminado uma vez que $h_{\alpha\nu} E^\nu_\beta = E_{\alpha\beta}$, resultando na contração de um tensor simétrico com o tensor dual. Agora, utilizando a relação (4.24) e a contração (4.26), é possível obter que

$$-2(v^\mu v_\alpha E^\nu_\beta)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = -2\sigma_{\alpha\nu} E^\nu_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} - 2\omega_\beta E_\rho^\beta. \quad (4.34)$$

O segundo termo segue-se a partir de argumentos idênticos, temos que

$$2(v^\mu v_\beta E^\nu_\alpha)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = 2\sigma_{\beta\nu} E^\nu_\alpha v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} - 2\omega_\beta E_\rho^\beta. \quad (4.35)$$

Os termos 3 à 6 são todos idênticamente nulos após a primeira expansão, isto é

$$\begin{aligned} 2(v^\nu v_\alpha E^\mu_\beta)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} &= 0, \\ -2(v^\nu v_\beta E^\mu_\alpha)_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} &= 0, \\ \delta^\mu_\alpha E^\nu_\beta v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} &= 0, \\ -\delta^\mu_\beta E^\nu_\alpha v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Para o sétimo termo, utilizando (4.19), os argumentos de simetria aplicados anteriormente e a contração (4.26), tem-se

$$\delta^\nu_\alpha E^\mu_{\beta;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = \sigma_{\mu\alpha} E^\mu_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} - \omega_\gamma E_\rho^\gamma. \quad (4.36)$$

Para o oitavo termo tem-se

$$\delta^\nu_\beta E^\mu_{\alpha;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = \sigma_{\mu\beta} E^\mu_\alpha v^\lambda \eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} - \omega_\alpha E_\rho^\alpha. \quad (4.37)$$

Estes são todos os elementos para a segunda projeção da parte elétrica. Agora, faz-se a projeção dos termos relativos à parte magnética. Para o nono termo é conveniente realizar primeiro a contração do tensor dual a partir de (4.27), obtendo-se

$$\eta^{\gamma\epsilon\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda\alpha\beta} (v_\gamma v^\mu H^\nu_\epsilon)_{;\nu} v^\lambda = -2\delta^{\gamma\epsilon}_{\rho\lambda} (v_\gamma v^\mu H^\nu_\epsilon)_{;\nu} v^\lambda.$$

Expandindo a delta generalizada e a derivada covariante, restam-se apenas os seguintes fatores

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} = 2v_{\gamma;\nu} H^\nu{}_\rho v^\gamma + 2v^\mu{}_{;\nu} H^\nu{}_\rho v_\mu - 2v_\rho H^\nu{}_{\gamma;\nu} v^\gamma + 2H^\nu{}_{\rho;\nu}.$$

Os dois primeiros fatores se anulam devido à relação entre os elementos de (4.19) e o campo de observadores. Os termos restantes devem ser reescritos utilizando a regra da cadeia e a definição de $h_{\mu\nu}$ em (4.4). Note que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} = 2v_\rho H^\nu{}_\gamma v^\gamma{}_{;\nu} + 2(H_{\alpha\beta} h^{\alpha\nu} h^\beta{}_\rho)_{;\nu}.$$

Ao distribuir a derivada covariante no segundo fator, e lembrar que a derivada covariante da métrica quadridimensional é nula por definição, como indicado em (4.17), a relação torna-se

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} &= \\ &= 2v_\rho H^\nu{}_\gamma v^\gamma{}_{;\nu} + 2H_{\alpha\beta;\nu} h^{\alpha\nu} h^\beta{}_\rho - 2H_{\alpha\beta} a^\alpha h^\beta{}_\rho - 2H_{\alpha\beta} h^{\alpha\nu} v^\beta{}_{;\nu} v_\rho. \end{aligned}$$

Perceba que o primeiro e último fator são idênticos, portanto tem-se

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} = 2H_{\alpha\beta;\nu} h^{\alpha\nu} h^\beta{}_\rho - 2H_{\alpha\beta} a^\alpha h^\beta{}_\rho. \quad (4.38)$$

Para o décimo termo tem-se de maneira análoga que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} = -2\dot{H}^\mu{}_\rho v_\mu = 2H^\mu{}_\rho a_\mu, \quad (4.39)$$

em que se usa a regra da cadeia na passagem final. Os dois últimos termos são identicamente nulos após a expansão da derivada covariante, ou seja, tem-se

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} &= 0, \\ -\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\beta H_{\alpha\epsilon})_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Pode-se então escrever a forma final da segunda projeção combinando os fatores (4.34), (4.35), (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39) obtendo

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\lambda v_\mu \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} = 2(H_{\alpha\beta;\nu} h^{\alpha\nu} h^\beta{}_\rho - \sigma_{\alpha\nu} E^\nu{}_\beta v^\lambda \eta_{\rho\lambda}{}^{\alpha\beta} - 3\omega_\alpha E_\rho{}^\alpha). \quad (4.40)$$

Reforça-se que muitos dos argumentos para anular os fatores após expandir as projeções são análogos aos realizados durante a primeira projeção. Desta forma recomenda-se obter primeiro a relação (4.33) antes de iniciar o procedimento para (4.40). A terceira projeção será realizada a seguir.

4.1.3 Terceira projeção

A terceira projeção é dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda}.$$

Resultando em doze termos independentes a partir da equação (4.15). O primeiro e segundo termos são identicamente nulos após a expansão dos elementos independentes da derivada covariante, ou seja

$$\begin{aligned} -2(v^{\mu}v_{\alpha}E^{\nu}{}_{\beta})_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} &= 0, \\ 2(v^{\mu}v_{\beta}E^{\nu}{}_{\alpha})_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Para o terceiro termo:

$$2(v^{\nu}v_{\alpha}E^{\mu}{}_{\beta})_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} = 2v^{\nu}v_{\alpha;\nu} E^{\mu}{}_{\beta} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda},$$

e, utilizando a decomposição (4.19), tem-se

$$2(v^{\nu}v_{\alpha}E^{\mu}{}_{\beta})_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} = 2a_{\alpha} E^{\mu}{}_{\beta} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda}. \quad (4.41)$$

Da mesma maneira obtém-se para o quarto termo:

$$-2(v^{\nu}v_{\beta}E^{\mu}{}_{\alpha})_{;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} = -2a_{\beta} E^{\mu}{}_{\alpha} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda}. \quad (4.42)$$

A princípio pode-se pensar que o terceiro e quarto termos se eliminam, no entanto, como o tensor dual é antissimétrico na troca de dois índices, os termos (4.41) e (4.42) serão somados ao final. O quinto e sexto termo são identicamente nulos, no entanto, a partir de um argumento diferente dos apresentados anteriormente. O quinto termo é dado por

$$\delta^{\mu}{}_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda}.$$

Ao aplicar a propriedade da delta de Kronecker é possível obter a expressão $h_{\alpha}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda}$. No entanto, como a contração do tensor dual com dois campos de observadores é nula, essa relação se resume a $\eta^{(\rho\lambda\sigma)\beta} v_{\lambda}$, ou seja, há uma simetrização de um tensor antissimétrico, de maneira que a expressão é identicamente nula, ou simplesmente

$$\delta^{\mu}{}_{\alpha} E^{\nu}{}_{\beta;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} = 0.$$

Da mesma forma, tem-se que

$$-\delta^{\mu}{}_{\beta} E^{\nu}{}_{\alpha;\nu} h_{\mu}^{(\sigma\eta\rho)\lambda\alpha\beta} v_{\lambda} = 0.$$

O sétimo e oitavo termos necessitam apenas da aplicação da delta de Kronecker, tem-se que

$$-\delta^\nu_\alpha E^\mu_{\beta;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -E^\mu_{\beta;\alpha} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda, \quad (4.43)$$

$$\delta^\nu_\beta E^\mu_{\alpha;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = E^\mu_{\beta;\alpha} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda. \quad (4.44)$$

Os termos relativo à parte magnética da decomposição são mais extensos devido à necessidade de expandir fatores da delta generalizada utilizando a relação (4.30). O nono termo é dado por

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda.$$

Este termo apresenta apenas um fator não nulo. Note que após contrair o tensor dual pode-se utilizar a relação (4.27), levando à

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = 2v^\mu_{;\nu} h_\mu^{(\sigma} H^{\nu\rho)}.$$

Utilizando então a decomposição (4.19), obtém-se que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = \frac{4}{3}\theta H^{\sigma\rho} + 2\sigma_\nu^{(\sigma} H^{\nu\rho)} + 2\omega_\nu^{(\sigma} H^{\nu\rho)}, \quad (4.45)$$

em que é necessário utilizar que $H^{(\rho\sigma)} = 2H^{\rho\sigma}$. Para o décimo termo, é necessário utilizar a contração (4.27), resultando nos fatores

$$-\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -2(v^\gamma v^\nu H^{\mu(\rho)})_{;\nu} h_\mu^{\sigma)} v_\gamma + 2(v^{(\rho} v^\nu H^{\mu\gamma)})_{;\nu} h_\mu^{\sigma)} v_\gamma,$$

após expandir as derivadas, os termos restantes são dados por

$$-\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -4\theta H^{\rho\sigma} - 2\dot{H}^{\mu(\rho} h_\mu^{\sigma)} + 2v^{(\rho} \dot{H}^{\mu\gamma} h_\mu^{\sigma)} v_\gamma.$$

É necessário realizar algumas manipulações para deixarmos a projeção no formato desejado. Utilizando a definição do projetor em (4.4), é possível escrever que

$$-\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -4\theta H^{\rho\sigma} - 4\dot{H}^{\rho\sigma} - 2a_\mu H^{\mu(\rho} v^{\sigma)} + 2v^{(\rho} \dot{H}^{\sigma)\gamma} v_\gamma.$$

Agora, expandindo a relação $\dot{H}^{\rho\sigma} = (h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{H}_{\alpha\beta})$, é possível notar que os fatores restantes são

$$-\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -4\theta H^{\rho\sigma} - 4h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{H}_{\alpha\beta}. \quad (4.46)$$

No décimo primeiro termo, o único fator não nulo é dado por

$$\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon});_\nu h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = -\eta_{\mu\nu\gamma\epsilon}\eta^{\alpha\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda.$$

Note que deve-se mudar o sinal global, pois alterna-se a ordem dos índices de forma que ρ seja o último no produto dos tensores duais. Esta é uma escolha conveniente para utilizar as simetrias do problema e eliminar fatores durante a projeção. Este é o primeiro caso em que nenhum dos índices dos tensores duais estão contraídos entre si, ou seja, é preciso usar a relação (4.25). A delta generalizada é quadridimensional, de forma que inicialmente haverá quatro termos escritos da forma

$$\begin{aligned} -\eta_{\mu\nu\gamma\epsilon}\eta^{\alpha\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda &= \delta_{\mu\nu\gamma\epsilon}^{\alpha\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda = \\ &= \delta_\mu^\alpha \delta_{\nu\gamma\epsilon}^{\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda - \delta_\nu^\alpha \delta_{\mu\gamma\epsilon}^{\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda + \\ &\quad + \delta_\gamma^\alpha \delta_{\mu\nu\epsilon}^{\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda - \delta_\epsilon^\alpha \delta_{\mu\nu\gamma}^{\beta\lambda(\rho}v^\gamma v_\alpha{}^{;\nu}H_\beta{}^\epsilon h^{\mu\sigma)}v_\lambda. \end{aligned}$$

Após aplicar a propriedade da delta de Kronecker será necessário expandir cada uma das deltas tridimensionais restantes em três fatores independentes, e após repetir o processo para as deltas bidimensionais em dois fatores. Obtém-se

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon});_\nu h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda &= \\ &= v_\alpha{}^{;\beta}H_\beta{}^{(\rho}h^{\alpha\sigma)} - \theta H_\beta{}^{(\rho}h^{\beta\sigma)} - a_\alpha v^{(\rho}H_\beta{}^\alpha h^{\beta\sigma)} + v_\alpha{}^{;\rho}H_\beta{}^\alpha h^{\beta\sigma} - v_\alpha{}^{;\beta}H_\beta{}^\alpha h^{(\rho\sigma)}, \end{aligned}$$

e, após utilizar a decomposição (4.19), tem-se

$$\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon});_\nu h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = -\frac{2}{3}\theta H^{\sigma\rho} + 2\sigma_\alpha{}^{(\rho}H^{\sigma)\alpha} - 2\sigma_\alpha{}^\beta H_\beta{}^\alpha h^{\rho\sigma}. \quad (4.47)$$

O décimo segundo termo pode ser obtido de maneira idêntica ao anterior, tal que

$$-\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}(v_\gamma v_\beta H_{\alpha\sigma});_\nu h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = -2\theta H^{\rho\sigma} + 2\sigma_\beta{}^{(\rho}H^{\sigma)\beta} - 2\sigma_\beta{}^\alpha H_\alpha{}^\beta h^{\rho\sigma}. \quad (4.48)$$

Coletando então todos os fatores não nulos dados pelas equações (4.41), (4.42), (4.43), (4.44), (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48), pode-se escrever

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda &= -4(-a_\alpha E^\mu{}_\beta h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda + \frac{1}{2}E^\mu{}_{\beta;\alpha} h_\mu^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}v_\lambda + \theta H^{\rho\sigma} + \\ &\quad - \frac{3}{2}\sigma_\nu{}^{(\sigma}H^{\rho)\nu} - \frac{1}{2}\omega^{(\sigma}{}_\nu H^{\rho)\nu} + h^{\rho\epsilon}h^{\sigma\gamma}\dot{H}_{\epsilon\gamma} + \sigma_\beta{}^\alpha H_\alpha{}^\beta h^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Este é o termo mais extenso das quatro projeções da divergência da decomposição do tensor de Weyl. A última projeção está apresentada na próxima subseção.

4.1.4 Quarta projeção

A projeção final é dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha}.$$

Note que os argumentos utilizados nesta seção já foram apresentados nas projeções anteriores, portanto as passagens serão mais diretas nesta seção. Da mesma maneira iremos expandir os doze termos em (4.15). O primeiro termo é identicamente nulo, note que

$$-2(v^\mu v_\alpha E^\nu{}_\beta)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 0,$$

em que apenas basta expandir as derivadas. Para o segundo termo, resta-se apenas um fator não nulo dado por

$$2(v^\mu v_\beta E^\nu{}_\alpha)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 2v^\mu{}_{;\nu} E^\nu{}_\alpha h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha},$$

em que utilizando (4.19), obtém-se

$$2(v^\mu v_\beta E^\nu{}_\alpha)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = \frac{4}{3}\theta E^{\rho\sigma} + 2\sigma^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)} + 2\omega^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)}. \quad (4.50)$$

Para o terceiro termo basta expandir a derivada covariante para mostrar que todos os termos se anulam:

$$2(v^\nu v_\alpha E^\mu{}_\beta)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 0.$$

Para o quarto termo:

$$-2(v^\nu v_\beta E^\mu{}_\alpha)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -2\theta E^{(\rho\sigma)} - 2\dot{E}^\mu{}_\alpha h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha},$$

e utilizando a definição de $h_{\mu\nu}$, obtém-se

$$-2(v^\nu v_\beta E^\mu{}_\alpha)_{;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -4\theta E^{\rho\sigma} - 4h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{E}_{\alpha\beta}. \quad (4.51)$$

Para o quinto termo, basta utilizar a decomposição (4.19), e, escrever:

$$\delta^\mu{}_\alpha E^\nu{}_{\beta;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -2E^\nu{}_\beta \sigma^\beta{}_\nu h^{\rho\sigma}. \quad (4.52)$$

Para o sexto termo, é possível mostrar que

$$-\delta^\mu{}_\beta E^\nu{}_{\alpha;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 0,$$

em que utilizou-se a propriedade da delta de Kronecker. Para o sétimo termo:

$$-\delta^\nu{}_\alpha E^\mu{}_{\beta;\nu} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = E^\mu{}_{\beta;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\rho} h^{\sigma)\alpha}.$$

Após alternar a derivada covariante na expressão acima, é possível utilizar a decomposição (4.19). Obtém-se

$$-\delta^\nu{}_\alpha E^\mu{}_{\beta;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = \frac{2}{3} \theta E^{\rho\sigma} + E^\rho{}_\beta \sigma^{\beta\sigma} + E^\rho{}_\beta \omega^{\beta\sigma}. \quad (4.53)$$

Para o oitavo termo, será necessário utilizar a definição do projetor em (4.4), e expandir os fatores que apresentam derivadas temporais, resultando em

$$\delta^\nu{}_\beta E^\mu{}_{\alpha;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 2h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{E}_{\alpha\beta}. \quad (4.54)$$

O nono termo é identicamente nulo, uma vez que expandindo a derivada covariante, obtém-se

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} (v^\gamma v^\mu H^{\nu\epsilon})_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 0.$$

Para o décimo termo:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} (v^\gamma v^\nu H^{\mu\epsilon})_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -a^\gamma H^{\epsilon(\rho} \eta^{\sigma)}{}_{\beta\gamma\epsilon} v^\beta. \quad (4.55)$$

O décimo primeiro termo é identicamente nulo, avaliando as contrações depois de expandir a derivada covariante obtendo que

$$\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} (v_\gamma v_\alpha H_{\beta\epsilon})_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = 0.$$

O último termo requer a utilização da decomposição (4.19), mostrando que grande parte de seus fatores são nulos. Utiliza-se argumentos de simetria que já empregamos anteriormente. Em particular, para resolver o fator $\omega_{\lambda\nu} H_\epsilon^{(\sigma} h^{\rho)}{}_\mu \eta^{\mu\nu\gamma\epsilon}$ utiliza-se a relação (4.24), e a contração (4.27), restando apenas

$$-\eta^{\mu\nu\gamma\epsilon} (v_\gamma v_\beta H_{\alpha\epsilon})_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} = -H_\epsilon^{(\sigma} \eta^{\rho)\nu\gamma\epsilon} a_\gamma v_\nu - H_{\alpha\epsilon;\nu} h^{\alpha(\sigma} \eta^{\rho)\nu\gamma\epsilon} v_\gamma. \quad (4.56)$$

Coletando os fatores (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55) e (4.56), tem-se

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} &= -2(h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{E}_{\alpha\beta} + \theta E^{\rho\sigma} + E^\nu{}_\beta \sigma^{\beta\nu} h^{\rho\sigma} - \frac{3}{2} \sigma^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)} + \frac{1}{2} H_{\alpha\epsilon;\nu} h^{\alpha(\sigma} \eta^{\rho)\nu\gamma\epsilon} v_\gamma + a_\gamma H^{\epsilon(\rho} \eta^{\sigma)}{}_{\beta\gamma\epsilon} v^\beta. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Finalizamos, assim, as projeções da divergência da decomposição do tensor de Weyl em suas partes elétricas e magnéticas. Desta forma, é possível escrever o lado esquerdo das equações da representação JEK da RG.

4.2 Projeções sobre os elementos da fonte material

Agora, faremos as quatro projeções independentes que resultam no lado direito das equações (4.121), (4.122), (4.123) e (4.124). É necessário projetar a divergência dos tensores associados a fonte material, obtida a partir do tensor energia-momento como

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{\kappa}{2}T^{\mu}{}_{\alpha;\beta} + \frac{\kappa}{2}T^{\mu}{}_{\beta;\alpha} + \frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}{}_{\alpha}T_{,\beta} - \frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}{}_{\beta}T_{,\alpha}, \quad (4.58)$$

em que a relação de referência pode ser encontrada no apêndice A na expressão (A.15). Tomando a forma de um fluido arbitrário com densidade de energia ρ , pressão isotrópica p , fluxo de calor q^{μ} e pressão anisotrópica $\pi^{\mu\nu}$, é possível escrever que [95]

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \rho v^{\mu}v_{\nu} - ph^{\mu}{}_{\nu} + q^{\mu}v_{\nu} + q_{\nu}v^{\mu} + \pi^{\mu}{}_{\nu}. \quad (4.59)$$

Calculando o traço da relação (4.59), e utilizando-o na expressão (4.58). Uma vez que o fluxo de calor é ortogonal ao campo de velocidades, $q_{\mu}v^{\mu} = 0$ e a pressão anisotrópica tem traço nulo, $\pi^{\mu}{}_{\mu} = 0$, esta expressão se reduz à

$$T = \rho - 3p, \quad (4.60)$$

nos levando a uma expressão com quatorze termos, dados por:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = & -\frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta} + \frac{\kappa}{2}(ph^{\mu}{}_{\alpha})_{;\beta} - \frac{\kappa}{2}(q^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta} - \frac{\kappa}{2}(q_{\alpha}v^{\mu})_{;\beta} - \frac{\kappa}{2}\pi^{\mu}{}_{\alpha;\beta} \\ & + \frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\beta})_{;\alpha} - \frac{\kappa}{2}(ph^{\mu}{}_{\beta})_{;\alpha} + \frac{\kappa}{2}(q^{\mu}v_{\beta})_{;\alpha} + \frac{\kappa}{2}(q_{\beta}v^{\mu})_{;\alpha} + \frac{\kappa}{2}\pi^{\mu}{}_{\beta;\alpha} \\ & + \frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\rho_{,\beta} - \frac{\kappa}{2}\delta^{\mu}{}_{\alpha}p_{,\beta} - \frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}{}_{\beta}\rho_{,\alpha} + \frac{\kappa}{2}\delta^{\mu}{}_{\beta}p_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nas próximas seções apresentam-se as passagens relevantes para o entendimento de como as projeções são realizadas sobre estes catorze termos, e quais argumentos são utilizados para reescrevê-los individualmente.

4.2.1 Primeira projeção

A primeira projeção é da forma

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^{\beta}v_{\mu} h^{\alpha\sigma}. \quad (4.62)$$

É necessário avaliar termo a termo, e portanto, o primeiro termo é dado por

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta} v^{\beta}v_{\mu} h^{\alpha\sigma}.$$

Assim como na seção anterior, é necessário expandir a derivada covariante, e analisar as simetrias de cada fator projetado. Note que

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2}\rho_{,\beta} v^\mu v_\alpha v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} - \frac{\kappa}{2}\rho v^\mu_{;\beta} v_\alpha v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} - \frac{\kappa}{2}\rho v^\mu v_{\alpha;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Os dois primeiros termos apresentam a projeção $v_\alpha h^{\alpha\sigma}$, portanto, são identicamente zero, restando o fator

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2}\rho v^\mu v_{\alpha;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma},$$

em que pode-se reescrever a expressão utilizando que $v_\mu v^\mu = 1$ e $v_{\alpha;\beta} v^\beta = a_\alpha$, obtendo

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2}\rho a_\alpha h^{\alpha\sigma}.$$

Como $a_\mu v^\mu = 0$, então

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2}\rho a^\sigma. \quad (4.63)$$

Para o segundo termo:

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2}p_{,\beta} h^\mu{}_\alpha v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} + \frac{\kappa}{2}ph^\mu{}_{\alpha;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Utiliza-se o mesmo argumento que para o termo anterior, obtendo

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2}ph^\mu{}_{\alpha;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Expandindo a derivada covariante do projetor $h^\mu{}_\alpha$, é possível simplificar essa expressão, obtendo que

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2}pa^\sigma \quad (4.64)$$

O terceiro termo é identicamente nulo após realizar as projeções do campo de velocidades com o fluxo de calor q^μ , e o projetor $h^{\alpha\sigma}$, obtendo que

$$-\frac{\kappa}{2}(q^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = 0.$$

Para o quarto termo:

$$-\frac{\kappa}{2} (q_\alpha v^\mu)_{;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2} \dot{q}_\alpha h^{\alpha\sigma}. \quad (4.65)$$

Para o quinto termo, é possível alternar a derivada covariante, causando a mudança do sinal global, uma vez que $\pi^\mu_{\alpha;\beta} v_\mu = -\pi^\mu_{\alpha} v_{\mu;\beta}$. Como $\pi^\mu_{\alpha} v^\alpha = 0$, tem-se

$$-\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\alpha;\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2} \pi^{\mu\sigma} a_\mu. \quad (4.66)$$

Para o sexto termo:

$$\frac{\kappa}{2} (\rho v^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2} \rho_{;\alpha} h^{\alpha\sigma}, \quad (4.67)$$

em que os demais termos se anulam devido à projeção $v_{\mu;\nu} v^\nu = 0$.

Para o sétimo termo:

$$-\frac{\kappa}{2} (p h^\mu_{\beta})_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Após a expansão da derivada covariante resta-se

$$-\frac{\kappa}{2} (p h^\mu_{\beta})_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2} p h^\mu_{\beta;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Utilizando a definição do projetor mostra-se que

$$-\frac{\kappa}{2} (p h^\mu_{\beta})_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = 0.$$

Para o oitavo termo:

$$\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2} q^\mu_{;\alpha} v_\mu h^{\alpha\sigma}.$$

Alternando a derivada covariante, obtém-se

$$\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{2} q^\mu v_{\mu;\alpha} h^{\alpha\sigma}.$$

Utilizando a decomposição (4.19), escreve-se

$$\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{6} \theta q^\sigma - \frac{\kappa}{2} q^\mu (\sigma_\mu^\sigma + \omega_\mu^\sigma). \quad (4.68)$$

O nono termo pode ser tratado de maneira semelhante, mostra-se que

$$\frac{\kappa}{2} (q_\beta v^\mu)_{;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{6} \theta q^\sigma - \frac{\kappa}{2} q_\beta (\sigma^{\beta\sigma} + \omega^{\beta\sigma}). \quad (4.69)$$

Para o décimo termo:

$$\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\beta;\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = 0,$$

uma vez que $\pi^\mu_{\beta;\alpha} v^\beta v_\mu = -\pi^\mu_{\beta} v^\beta_{;\alpha} v_\mu = 0$.

Para o décimo primeiro termo tem-se

$$\frac{\kappa}{6} \delta^\mu_{\alpha} \rho_{,\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = 0,$$

utilizando a propriedade da delta de Kronecker. E, da mesma forma, tem-se para o décimo segundo termo:

$$-\frac{\kappa}{2} \delta^\mu_{\alpha} p_{,\beta} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = 0.$$

Para o décimo terceiro termo, temos que

$$-\frac{\kappa}{6} \delta^\mu_{\beta} \rho_{,\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = -\frac{\kappa}{6} \rho_{,\alpha} h^{\alpha\sigma}. \quad (4.70)$$

Da mesma forma, o último termo é tal que

$$\frac{\kappa}{2} \delta^\mu_{\beta} p_{,\alpha} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{2} p_{,\alpha} h^{\alpha\sigma}. \quad (4.71)$$

Juntando todos os termos não nulos obtém-se que

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} &= \frac{\kappa}{2} \rho_{,\alpha} h^{\alpha\sigma} - \frac{\kappa}{3} \theta q^\sigma - \frac{\kappa}{2} (\rho + p) a^\sigma - \frac{\kappa}{2} \dot{q}_\alpha h^{\alpha\sigma} + \frac{\kappa}{2} \pi^{\mu\sigma} a_\mu \\ &\quad - \kappa q^\mu (\sigma_\mu{}^\sigma + \omega_\mu{}^\sigma) - \frac{\kappa}{6} \rho_{,\alpha} h^{\alpha\sigma} + \frac{\kappa}{2} p_{,\alpha} h^{\alpha\sigma}. \end{aligned}$$

Para escrever esta expressão da maneira desejada é preciso utilizar a seguinte lei de conservação para um fluido generalizado

$$(\rho + p) a^\sigma - p_{,\mu} h^{\mu\sigma} + \dot{q}_\mu h^{\mu\sigma} + \theta q^\sigma + q^\nu \theta^\sigma{}_\nu + q^\nu \omega^\sigma{}_\nu + \pi^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + \pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} v^\sigma = 0, \quad (4.72)$$

em que os seguintes termos

$$-\frac{\kappa}{2} [(\rho + p) a^\sigma + \dot{q}_\alpha h^{\alpha\sigma} - p_{,\alpha} h^{\alpha\sigma}],$$

estão presentes na expressão final obtida anteriormente. A partir da relação (4.72), vincula-se

$$-\frac{\kappa}{2} [(\rho + p) a^\sigma + \dot{q}_\alpha h^{\alpha\sigma} - p_{,\alpha} h^{\alpha\sigma}] = \frac{-\kappa}{2} [-\theta q^\sigma - q^\nu \theta^\sigma{}_\nu - q^\nu \omega^\sigma{}_\nu - \pi^{\sigma\nu}{}_{;\nu} - \pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} v^\sigma].$$

De forma que a primeira projeção é escrita como

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{3} \rho_{;\alpha} h^{\alpha\sigma} + \frac{\kappa}{3} \theta q^\sigma + \frac{\kappa}{2} \pi^{\mu\sigma} a_\mu + \\ - \frac{\kappa}{2} q^\mu (\sigma_\mu{}^\sigma + 3\omega_\mu{}^\sigma) + \frac{\kappa}{2} \pi^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + \frac{\kappa}{2} \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} v^\sigma.$$

É preciso utilizar que

$$h^{\sigma\mu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = g^{\sigma\nu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu} - v^\sigma v^\mu \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu}$$

alternando a derivada covariante no segundo termo, e utilizando a relação (4.19), obtém-se

$$h^{\sigma\mu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = \pi^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + v^\sigma \left(\frac{\theta}{3} h^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + a^\mu v_\nu \right) \pi_\mu{}^\nu,$$

em que o primeiro e último termos se anulam. Note que a pressão anisotrópica tem traço nulo, a relação $\pi_{\mu\nu} v^\nu = 0$ é válida. O fator de vorticidade se anula pois a pressão anisotrópica é um tensor simétrico contraído à um tensor antissimétrico. Restando apenas que

$$h^{\sigma\mu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = \pi^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + v^\sigma \sigma^\mu{}_\nu \pi_\mu{}^\nu.$$

Isolando a relação para a derivada covariante da pressão anisotrópica, e reescrevendo a primeira projeção, tem-se

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta v_\mu h^{\alpha\sigma} = \frac{\kappa}{3} \rho_{;\alpha} h^{\alpha\sigma} + \frac{\kappa}{3} \theta q^\sigma + \frac{\kappa}{2} \pi^{\mu\sigma} a_\mu + \\ - \frac{\kappa}{2} q^\mu (\sigma_\mu{}^\sigma - 3\omega_\mu{}^\sigma) + \frac{\kappa}{2} h^{\sigma\mu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu}. \quad (4.73)$$

Obtemos assim a primeira projeção no formato desejado. Nas próximas seções estão apresentadas as projeções restantes.

4.2.2 Segunda projeção

A segunda projeção é dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda}. \quad (4.74)$$

Para o primeiro termo:

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = -\frac{\kappa}{2}\rho v^{\mu}v_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda},$$

em que é necessário lembrar que a contração do tensor dual com dois campos de observadores é nula. Usando a decomposição (4.19), e argumentos de simetria, obtém-se

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = -\frac{\kappa}{2}\rho\omega_{\alpha\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\lambda}.$$

Uma vez que o vetor vorticidade é definido como

$$\omega^{\tau} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\rho\tau}\omega_{\alpha\beta}v_{\rho}. \quad (4.75)$$

Pode-se usar a definição para reescrever o fator de interesse, mas com uma mudança de sinal global, devido à ordem dos índices na contração com o tensor dual. Note que a definição tem o quarto índice do tensor dual livre, os dois primeiros contraídos com o tensor de vorticidade, e o terceiro índice contraído com o campo de velocidades. Obtém-se

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = \kappa\rho\omega^{\sigma}. \quad (4.76)$$

Para o segundo termo, uma vez que a derivada covariante da métrica quadridimensional é nula, o procedimento é idêntico ao caso anterior. Escreve-se que

$$\frac{\kappa}{2}(ph^{\mu}{}_{\alpha})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = \kappa p\omega^{\sigma}. \quad (4.77)$$

Para o terceiro termo, tem-se

$$-\frac{\kappa}{2}(q^{\mu}v_{\alpha})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = 0.$$

Para o quarto termo, resta apenas um fator

$$-\frac{\kappa}{2}(q_{\alpha}v^{\mu})_{;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu}v_{\lambda} = -\frac{\kappa}{2}q_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\lambda}, \quad (4.78)$$

já no formato desejado. Para o quinto termo:

$$-\frac{\kappa}{2}\pi^\mu_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = \frac{\kappa}{2}\pi^\mu_\alpha\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_{\mu;\beta}v_\lambda.$$

Utiliza-se a relação (4.19), restando

$$-\frac{\kappa}{2}\pi^\mu_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = \frac{\kappa}{2}\pi^\mu_\alpha\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}(\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta})v_\lambda. \quad (4.79)$$

Para o sexto termo, utilizando argumentos similares ao primeiro termo, tem-se

$$\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\beta)_{;\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = \kappa\rho\omega^\sigma, \quad (4.80)$$

em que utilizou-se a relação (4.75).

Para o sétimo termo, de maneira similar ao termo anterior, mostra-se que

$$-\frac{\kappa}{2}(ph^\mu_\beta)_{;\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = \kappa p\omega^\sigma. \quad (4.81)$$

Para o oitavo termo, tem-se que

$$\frac{\kappa}{2}(q^\mu v_\beta)_{;\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 0.$$

O nono termo é obtido da mesma forma que o quarto termo desta seção. Tem-se que

$$\frac{\kappa}{2}(q_\beta v^\mu)_{;\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = -\frac{\kappa}{2}q_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\lambda. \quad (4.82)$$

Para o décimo termo, utilizando argumentos análogos aos feitos para o quinto termo, obtém-se

$$\frac{\kappa}{2}\pi^\mu_{\beta;\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = \frac{\kappa}{2}\pi^\mu_\alpha\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}(\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta})v_\lambda \quad (4.83)$$

O décimo primeiro termo se anula devido à contração do campo de velocidades e o dual. Ou seja,

$$\frac{\kappa}{6}\delta^\mu_{\alpha}\rho_{,\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 0.$$

Da mesma forma, o décimo segundo termo que pode ser escrito como

$$-\frac{\kappa}{2}\delta^\mu_{\alpha}p_{,\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 0.$$

E, analogamente, tanto o décimo terceiro termo

$$-\frac{\kappa}{6}\delta^\mu{}_\beta\rho_{,\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 0,$$

e, o décimo quarto termo

$$\frac{\kappa}{2}\delta^\mu{}_\beta p_{,\alpha}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 0,$$

são nulos devido à contração com dual. Agora, coletando todos os quatorze termos obtém-se

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\mu v_\lambda = 2(\kappa(\rho+p)\omega^\sigma - \frac{\kappa}{2}q_{\alpha;\beta}\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}v_\lambda + \frac{\kappa}{2}\pi^\mu{}_\alpha\eta^{\sigma\lambda\alpha\beta}(\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta})v_\lambda). \quad (4.84)$$

O fator global 2 também está presente na projeção do lado esquerdo da divergência do tensor de Weyl, ou seja, a relação está no formato desejado. Agora, passe-se à terceira projeção.

4.2.3 Terceira projeção

A terceira projeção é da forma

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}h_\mu^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda.$$

Para o primeiro termo:

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta}h_\mu^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = 0.$$

Nulo devido às contrações com o tensor dual e o projetor. De maneira análoga, para o segundo termo:

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta}h_\mu^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = 0,$$

em que deve-se lembrar que a simetrização do tensor dual é nula pois este é um tensor antissimétrico. Para o terceiro termo:

$$-\frac{\kappa}{2}(q^\mu v_\alpha)_{;\beta}h_\mu^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = -\frac{\kappa}{2}q^\mu v_{\alpha;\beta}h_\mu^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda.$$

Note que a derivada covariante do campo de velocidades está contraída com o dual, de forma que toda a sua parte simétrica leva a um fator nulo, restando a parte antissimétrica

e o termo sem simetria definida. O termo de aceleração será anulado uma vez que está acompanhado de um campo de velocidades. Tem-se que

$$-\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\alpha)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q^\mu \omega_{\alpha\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda.$$

Devido à ortogonalidade do fluxo de calor com o campo de velocidades, e a definição do projetor, tem-se que

$$-\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\alpha)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q^{(\sigma} \omega_{\alpha\beta} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda.$$

Utilizando a definição (4.75), obtém-se

$$-\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\alpha)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = \kappa q^{(\sigma} \omega^{\tau)}. \quad (4.85)$$

Para o quarto termo:

$$-\frac{\kappa}{2} (q_\alpha v^\mu)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q_\alpha v^\mu_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda.$$

Usando a decomposição (4.19), mostra-se que

$$-\frac{\kappa}{2} (q_\alpha v^\mu)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q_\alpha \sigma_\beta^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \frac{\kappa}{2} q_\alpha \omega_\beta^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda.$$

Para o termo de vorticidade é necessário utilizar a relação (4.24) e a contração (4.27), para escrever a relação em termos da delta generalizada tridimensional. Desta forma, o segundo fator do lado direito da equação acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2} q_\alpha \eta_\beta^{(\sigma\mu\nu} \omega_\mu v_\nu \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda &= \kappa g^{\sigma\tau} q_\nu \omega^\mu v^\nu v_\mu + \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma} \omega^{\tau)} v^\nu v_\nu + \frac{\kappa}{2} q_\mu \omega^\mu v^{(\tau} v^{\sigma)} \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma} \omega^\mu v^{\tau)} v_\mu - \frac{\kappa}{2} q_\nu \omega^{(\tau} v^\nu v^{\sigma)} - \kappa g^{\tau\sigma} q_\mu \omega^\mu v^\nu v_\nu. \end{aligned}$$

Utilizando propriedades da simetrização e de ortogonalidade do fluxo de calor, simplifica-se a expressão para

$$\frac{\kappa}{2} q_\alpha \eta_\beta^{(\sigma\mu\nu} \omega_\mu v_\nu \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma} \omega^{\tau)} + \kappa q_\mu \omega^\mu v^\tau v^\sigma - \kappa g^{\tau\sigma} q_\mu \omega^\mu.$$

A partir da definição de projetor, tem-se que

$$\frac{\kappa}{2} q_\alpha \eta_\beta^{(\sigma\mu\nu} \omega_\mu v_\nu \eta^{\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma} \omega^{\tau)} - \kappa q_\mu \omega^\mu h^{\tau\sigma},$$

ou seja, o quarto termo toma a forma

$$-\frac{\kappa}{2} (q_\alpha v^\mu)_{;\beta} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q_\alpha \sigma_\beta^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma\omega^\tau)} - \kappa q_\mu \omega^\mu h^{\tau\sigma}. \quad (4.86)$$

Para o quinto termo,

$$-\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\alpha;\beta} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda, \quad (4.87)$$

não é necessário realizar nenhuma modificação, já que está no formato desejado.

Para o sexto termo:

$$\frac{\kappa}{2} (\rho v^\mu v_\beta)_{;\alpha} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = 0,$$

a partir da expansão da derivada covariante. Da mesma forma, o sétimo termo:

$$-\frac{\kappa}{2} (p h^\mu_\beta)_{;\alpha} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = 0.$$

O oitavo termo, assim como os nono e décimo termos são exatamente os mesmos que o terceiro, quarto e quinto respectivamente. Alternando os índices $\alpha\beta$ e mudando o sinal de maneira adequada, tem-se que

$$\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\beta)_{;\alpha} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = \kappa q^{(\sigma\omega^\tau)}, \quad (4.88)$$

$$\frac{\kappa}{2} (q_\beta v^\mu)_{;\alpha} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} q_\alpha \sigma_\beta^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \frac{\kappa}{2} q^{(\sigma\omega^\tau)} - \kappa q_\mu \omega^\mu h^{\tau\sigma}, \quad (4.89)$$

e,

$$\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\beta;\alpha} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = -\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\alpha;\beta} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda. \quad (4.90)$$

Os quatro termos restantes são nulos, tem-se que

$$\frac{\kappa}{6} \delta^\mu_{\alpha} \rho_{,\beta} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = 0,$$

pois a propriedade da delta de Kronecker leva a simetrização do tensor dual. Da mesma forma,

$$-\frac{\kappa}{2} \delta^\mu_{\alpha} p_{,\beta} h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta} v_\lambda = 0.$$

O décimo terceiro termo é análogo, com a delta de Kronecker atuando em um índice diferente, mas como

$$-\frac{\kappa}{6}\delta^\mu{}_\beta\rho_{,\alpha}h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = 0,$$

o argumento se mantém o mesmo. Novamente, tem-se que

$$\frac{\kappa}{2}\delta^\mu{}_\beta p_{,\alpha}h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = 0.$$

Organizando os termos não nulos, tem-se que

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda = -4\left(-\frac{3}{4}\kappa q^{(\sigma\omega^\tau)} + \frac{1}{2}\kappa q_\mu\omega^\mu h^{\tau\sigma} + \frac{1}{4}\kappa q_\alpha\sigma_\beta^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda + \frac{1}{4}\kappa\pi^\mu{}_{\alpha;\beta}h_\mu^{(\sigma\eta^\tau)\lambda\alpha\beta}v_\lambda\right). \quad (4.91)$$

O fator -4 , que é global, também está presente na projeção do lado esquerdo, portanto, a forma desejada foi obtida. Agora, resta apenas a projeção final.

4.2.4 Quarta projeção

A última projeção é dada por

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha}. \quad (4.92)$$

Para o primeiro termo tem-se

$$-\frac{\kappa}{2}(\rho v^\mu v_\alpha)_{;\beta}v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = 0.$$

Basta expandir a derivada covariante.

Para o segundo termo,

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta}v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{2}p_{,\beta}h^\mu{}_\alpha v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha}.$$

Utilizando que $h^\mu{}_\alpha h_\mu{}^\tau = h_\alpha{}^\tau$, escreve-se

$$\frac{\kappa}{2}(ph^\mu{}_\alpha)_{;\beta}v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \kappa\dot{p}h^{\tau\sigma}. \quad (4.93)$$

Para o terceiro termo,

$$-\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = -\frac{\kappa}{2} q^\mu v_{\alpha;\beta} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha}.$$

Devido à ortogonalidade do campo de velocidades com o fluxo de calor e com o vetor aceleração, assim como à definição do projetor (4.4), reescreve-se este termo como

$$-\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\alpha)_{;\beta} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = -\frac{\kappa}{2} q^{(\tau a^\sigma)}. \quad (4.94)$$

O quarto termo é equivalente ao anterior. Note que, após as expansões tem-se

$$-\frac{\kappa}{2} (q_\alpha v^\mu)_{;\beta} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = -\frac{\kappa}{2} q^{(\tau a^\sigma)}. \quad (4.95)$$

A única propriedade notável no quinto termo é que devido à simetria da pressão anisotrópica, e à simetrização dos índices livres, um fator 2 é obtido durante a simetrização. Ou seja,

$$-\frac{\kappa}{2} \pi^\mu_{\alpha;\beta} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = -\kappa \dot{\pi}^\mu_{\alpha} h_\mu^{\tau h^\sigma\alpha}. \quad (4.96)$$

Para o sexto termo:

$$\frac{\kappa}{2} (\rho v^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{2} \rho v^\mu_{;\alpha} h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha}.$$

A partir da decomposição (4.19), e lembrando que a simetrização de tensores simétricos gera um fator 2, e a simetrização de tensores antissimétricos leva a zero, tem-se que

$$\frac{\kappa}{2} (\rho v^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{3} \theta \rho h^{\tau\sigma} + \kappa \rho \sigma^{\tau\sigma}. \quad (4.97)$$

Para o sétimo termo, realizando um procedimento análogo ao realizado para o sexto termo, mostra-se que

$$-\frac{\kappa}{2} (p h^\mu_{\beta})_{;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{3} \theta p h^{\tau\sigma} + \kappa p \sigma^{\tau\sigma}. \quad (4.98)$$

Para o oitavo termo:

$$\frac{\kappa}{2} (q^\mu v_\beta)_{;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{2} q^\mu_{;\alpha} h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha}. \quad (4.99)$$

O nono termo é identicamente nulo,

$$\frac{\kappa}{2} (q_\beta v^\mu)_{;\alpha} v^\beta h_\mu^{(\tau h^\sigma)\alpha} = 0.$$

Para o décimo termo, pode-se alternar a derivada entre a pressão anisotrópica e o campo de velocidades, invertendo o sinal global. Utilizando o projetor, pode-se escrever

$$\frac{\kappa}{2}\pi^{\mu}_{\beta;\alpha}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = -\frac{\kappa}{2}\pi_{\beta}^{(\tau}v^{\beta}_{;\alpha}h^{\sigma)\alpha}.$$

Utilizando a decomposição (4.19), obtém-se

$$\frac{\kappa}{2}\pi^{\mu}_{\beta;\alpha}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = -\frac{\kappa}{3}\theta\pi^{\sigma\tau} - \frac{\kappa}{2}\pi_{\beta}^{(\tau}\sigma^{\sigma)\beta} + \frac{\kappa}{2}\pi_{\beta}^{(\tau}\omega^{\sigma)\beta}. \quad (4.100)$$

Aplicando a delta de Kronecker, e simetrizando o projetor, para escrever o décimo primeiro termo:

$$\frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}_{\alpha}\rho_{,\beta}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = \frac{\kappa}{3}\dot{\rho}h^{\sigma\tau}. \quad (4.101)$$

Da mesma forma, para o décimo segundo termo:

$$-\frac{\kappa}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}p_{,\beta}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = -\kappa\dot{p}h^{\sigma\tau}. \quad (4.102)$$

Os dois últimos termos são identicamente nulos. Aplicando a propriedade da delta de Kronecker, e expandindo a derivada covariante, obtém-se

$$-\frac{\kappa}{6}\delta^{\mu}_{\beta}\rho_{,\alpha}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = 0.$$

Da mesma forma

$$\frac{\kappa}{2}\delta^{\mu}_{\beta}p_{,\alpha}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} = 0.$$

Coletando todos os termos não nulos, tem-se que

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}{}_{;\nu}v^{\beta}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} &= -\kappa q^{(\tau}a^{\sigma)} - \kappa\dot{\pi}^{\mu}_{\alpha}h_{\mu}^{\tau}h^{\sigma\alpha} + \frac{\kappa}{3}[\dot{\rho} + \theta(\rho + p)]h^{\tau\sigma} + \kappa(\rho + p)\sigma^{\tau\sigma} \\ &\quad + \frac{\kappa}{2}q^{\mu}_{;\alpha}h_{\mu}^{(\tau}h^{\sigma)\alpha} - \frac{\kappa}{3}\theta\pi^{\sigma\tau} - \frac{\kappa}{2}\pi_{\beta}^{(\tau}\sigma^{\sigma)\beta} + \frac{\kappa}{2}\pi_{\beta}^{(\tau}\omega^{\sigma)\beta}. \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte lei de conservação

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^{\mu}v_{\mu} + q^{\alpha}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0, \quad (4.103)$$

reorganiza-se os fatores para escrever que

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} v^\beta h_\mu{}^{(\tau} h^{\sigma)\alpha} = -2 \left(\frac{\kappa}{2} q^{(\tau} a^{\sigma)} + \frac{\kappa}{2} \dot{\pi}^\mu{}_\alpha h_\mu{}^\tau h^{\sigma\alpha} + \frac{\kappa}{6} [\dot{q}^\mu v_\mu + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}] h^{\tau\sigma} + \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{2} (\rho + p) \sigma^{\tau\sigma} - \frac{\kappa}{4} q^\mu{}_{;\alpha} h_\mu{}^{(\tau} h^{\sigma)\alpha} + \frac{\kappa}{6} \theta \pi^{\sigma\tau} + \frac{\kappa}{4} \pi_\beta{}^{(\tau} \sigma^{\sigma)\beta} - \frac{\kappa}{4} \pi_\beta{}^{(\tau} \omega^{\sigma)\beta} \right), \quad (4.104)$$

em que o fator de -2 é eliminado pela projeção do lado esquerdo. Assim, completam-se as quatro projeções e se demonstra o formato das equações para o formalismo de JEK para a RG.

4.3 As equações de evolução perturbadas

Nesta seção, obtém-se as equações de evolução das perturbações relevantes para este trabalho, em particular, a equação do cisalhamento e da parte elétrica do tensor de Weyl, bem como o vínculo para a perturbação do vetor aceleração. Aqui também é apresentado como reduzir o sistema de equações para um sistema bidimensional não autônomo para a evolução destas perturbações por meio de uma decomposição em uma base escalar de harmônicos esféricos.

As perturbações das grandezas relevantes são sempre escritas como $A_{\text{perturbado}} = A_{\text{fundo}} + \delta A$. Uma vez que utiliza-se uma cosmologia homogênea e isotrópica dada pela geometria (2.1), muitas das grandezas analisadas apresentam $A_{\text{fundo}} = 0$. As grandezas que não são nulas na cosmologia de fundo são as seguintes

$$\begin{aligned} \theta^{(p)} &= \theta^{(0)} + \delta\theta, \\ \rho^{(p)} &= \rho^{(0)} + \delta\rho, \\ p^{(p)} &= p^{(0)} + \delta p, \end{aligned}$$

em que o índice (0) e (p) indicam, respectivamente, a grandeza de fundo e a grandeza perturbada. Note também que δA é a perturbação de primeira ordem realizada da grandeza. Outras grandezas de relevância não apresentam valores de fundo, por exemplo

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^{(p)} &= \delta\sigma_{\mu\nu}, \\ \omega_{\mu\nu}^{(p)} &= \delta\omega_{\mu\nu}, \\ a_\mu^{(p)} &= \delta a_\mu, \end{aligned}$$

para os parâmetros cinemáticos, e também para os elementos do tensor de Weyl, tem-se que

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu}^{(p)} &= \delta E_{\mu\nu}, \\ H_{\mu\nu}^{(p)} &= \delta H_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Perceba que estas grandezas são identicamente nulas na métrica de fundo, portanto, toda perturbação pode ser tomada como uma perturbação física e não uma escolha de calibre. Neste trabalho não se discute a evolução de todas as perturbações, mas focamos, em particular, na evolução da perturbação de $\delta E_{\mu\nu}$, $\delta\sigma_{\mu\nu}$, pois a partir destas perturbações forma-se um conjunto mínimo necessário para avaliar um sistema dinâmico não-autônomo para as perturbações ([90, 81, 91, 92]). Além disso, é necessário escrever um vínculo para a perturbação δa_μ .

4.3.1 Equações de evolução dos parâmetros cinemáticos perturbadas

Um exemplo de equação dinâmica que pode ser perturbada é a equação de Raychaudhuri [104, 95], dada por

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 + 2\omega^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} = R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu, \quad (4.105)$$

em que $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ e $\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$. Usando as equações (A.9) e (A.14) com $\kappa = 1$, é possível escrever que

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 + 2\omega^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} = -T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}v^\mu v^\nu.$$

É possível notar que $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \rho$, e que $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1$, tem-se também que $T = \rho - 3p$, portanto a expressão se torna

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 + 2\omega^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p).$$

Para escrever a equação perturbada, é preciso substituir toda grandeza presente por sua versão com o índice (p) e então separada em fundo e perturbação, por exemplo

$$(\theta^{(p)})^2 = (\theta^{(0)} + \delta\theta)^2 \approx (\theta^{(0)})^2 + 2\theta^{(0)}\delta\theta + \mathcal{O}(2),$$

em que $\mathcal{O}(2)$ indica as ordens superiores que são omitidas. A partir deste ponto não se indica a presença destas ordens superiores, mas lembre-se que todo fator de ordem superior é omitido. No entanto, apenas conhecemos perturbações das grandezas e não de suas derivadas, para contornar este problema, será preciso usar a definição $\dot{\theta} = (v^\mu{}_{;\mu})_{;\nu}v^\nu$. A grandeza relevante aqui é $(v^\mu)^{(p)} = (v^\mu)^{(0)} + \delta v^\mu$, que substituída na definição leva à

$$\dot{\theta}^{(p)} = (((v^\mu)^{(0)} + \delta v^\mu)_{;\mu})_{;\nu}((v^\nu)^{(0)} + \delta v^\nu) \approx \dot{\theta}^{(0)} + \theta^{(0)}_{;\nu}\delta v^\nu + \delta v^\mu{}_{;\mu;\nu}(v^\nu)^{(0)}.$$

Devido ao caráter temporal do observador e a definição de θ tem-se que $\theta = \theta(t)$, pode-se dizer que $\theta^{(0)}_{;\nu}\delta v^\nu = \dot{\theta}^{(0)}\delta v^0$, e usando que $\delta v^\mu{}_{;\mu;\nu}(v^\nu)^{(0)} \equiv \delta\dot{\theta}$, pode-se escrever que

$$\dot{\theta}^{(p)} \approx \dot{\theta}^{(0)} + \dot{\theta}^{(0)}\delta v^0 + \delta\dot{\theta}.$$

Os termos restantes são mais simples, note que como $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são nulos na geometria de fundo, os termos σ^2 e ω^2 são apenas termos quadráticos que podem ser eliminados, e o termo de aceleração $a^\mu{}_{;\mu} = \delta a^\mu{}_{;\mu}$ pelo mesmo raciocínio. Para o lado direito da equação (4.105) precisamos apenas escrever as relações em suas partes de fundo e perturbações, obtendo finalmente que

$$\dot{\theta}^{(0)} + \dot{\theta}^{(0)}\delta v^0 + \delta\dot{\theta} + \frac{1}{3}(\theta^{(0)})^2 + \frac{2}{3}\theta^{(0)}\delta\theta - \delta a^\mu{}_{;\mu} = -\frac{1}{2}(\rho^{(0)} + 3p^{(0)}) - \frac{1}{2}(\delta\rho + 3\delta p).$$

Como a igualdade $\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)$ é válida em nossa métrica de fundo, a expressão se torna simplesmente

$$\delta\dot{\theta} + \dot{\theta}^{(0)}\delta v^0 + \frac{2}{3}\theta^{(0)}\delta\theta - \delta a^\mu{}_{;\mu} = -\frac{1}{2}(\delta\rho + 3\delta p). \quad (4.106)$$

Agora, para a equação de evolução do cisalhamento [89, 95]

$$h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}(-2\omega^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda{}_{;\lambda}) + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu (a_{\mu;\nu} + a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu}\sigma^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta = R_{\alpha\epsilon\beta\nu}v^\epsilon v^\nu - \frac{1}{3}R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu h_{\alpha\beta}. \quad (4.107)$$

Alguns termos podem ser omitidos uma vez que gerariam apenas perturbações quadráticas, outros podem ser reescritos usando argumentos semelhantes aos que já foram discutidos anteriormente. A partir daqui os índices (0) e (p) serão omitidos por simplicidade. Considere que os termos sem δ referem-se ao fundo. O primeiro fator é da forma

$$h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} \approx (h_\alpha{}^\mu + \delta h_\alpha{}^\mu)(h_\beta{}^\nu + \delta h_\beta{}^\nu)\delta\dot{\sigma}_{\mu\nu} \approx h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \delta\dot{\sigma}_{\mu\nu} = \delta\dot{\sigma}_{\alpha\beta},$$

em que é preciso usar a definição do projetor e lembrar que $\sigma_{\mu\nu}v^\nu = 0$. Perceba que $\delta h_\alpha{}^\mu \delta\dot{\sigma}_{\mu\nu} \approx 0$ pois é um fator de segunda ordem; este argumento será utilizado ao longo de todas as expressões. Portanto, podemos resumir o lado esquerdo da expressão (4.107) como

$$\delta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\delta a^\lambda{}_{;\lambda} - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \delta a_{(\mu;\nu)} + \frac{2}{3}\theta\delta\sigma_{\alpha\beta}.$$

Para o lado direito é necessário reescrever as projeções dos tensores de Riemann e Ricci. A projeção do Ricci foi apresentada enquanto realizamos a perturbação da equação (4.105), explicitamente

$$-\frac{1}{3}R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu h_{\alpha\beta} = \frac{1}{6}(\rho + 3p)h_{\alpha\beta}.$$

Agora, para projetar o tensor de Riemann é preciso lembrar das definições (A.11) e (4.1). Convenientemente, ao realizar a projeção nos resta os seguintes fatores

$$R_{\alpha\epsilon\beta\nu}v^\epsilon v^\nu = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}(\rho + 3p)h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta},$$

portanto, o lado direito pode ser escrito simplesmente como

$$-E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta},$$

em que foi necessário utilizar também a definição (4.59). Ambas as grandezas são nulas na geometria de fundo, portanto, a equação perturbada é simplesmente

$$\delta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\delta a^\lambda{}_{;\lambda} - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \delta a_{(\mu;\nu)} + \frac{2}{3}\theta\delta\sigma_{\alpha\beta} = -\delta E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta\pi_{\alpha\beta}. \quad (4.108)$$

Esta equação será uma das que formam o nosso sistema dinâmico bidimensional. Outra equação que deve ser avaliada é a equação da vorticidade, dada por

$$h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta - \sigma_{\beta\mu}\omega^\mu{}_\alpha = 0. \quad (4.109)$$

A forma perturbada não requer argumentos novos em relação ao que foi feito para a equação (4.107). Portanto pode-se escrever simplesmente que

$$\delta\dot{\omega}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \delta a_{[\mu;\nu]} + \frac{2}{3}\theta\delta\omega_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.110)$$

Agora, é preciso analisar as equações de vínculo sobre os parâmetros cinemáticos. Primeiro, temos que

$$\frac{2}{3}\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha}h^\gamma{}_\lambda - a^\nu(\sigma_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) = R_{\mu\nu}v^\mu h^\nu{}_\lambda. \quad (4.111)$$

Vamos analisar o primeiro termo, note que a expressão perturbada é tal que

$$\frac{2}{3}(\theta + \delta\theta)_{,\mu}(h^\mu{}_\lambda + \delta h^\mu{}_\lambda) \approx \frac{2}{3}\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda + \frac{2}{3}\theta_{,\mu}\delta h^\mu{}_\lambda + \delta\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda.$$

A perturbação do projetor pode ser escrita como $\delta h^\mu{}_\lambda = -\delta v^\mu v_\lambda - v^\mu \delta v_\lambda$, assim é possível reescrever o segundo fator da expressão acima, obtendo então

$$\frac{2}{3}(\theta + \delta\theta)_{,\mu}(h^\mu{}_\lambda + \delta h^\mu{}_\lambda) \approx \frac{2}{3}\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda - \frac{2}{3}\dot{\theta}\delta v_\lambda - \dot{\theta}\delta v^0\delta^0{}_\lambda + \delta\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda,$$

em que é necessário levar em consideração que θ é uma função apenas do tempo e que $v^\mu = \delta^\mu_0$. Para o lado direito da equação (4.111), é necessário realizar a expansão utilizando (A.9) e (4.59), obtendo que

$$R_{\mu\nu}v^\mu h^\nu{}_\lambda = -q_\lambda,$$

de forma que a perturbação pode ser obtida trivialmente. Todos os outros fatores também são triviais, e obtém-se

$$\delta\theta_{,\mu}h^\mu{}_\lambda - \frac{2}{3}\dot{\theta}\delta v_\lambda - \dot{\theta}\delta v^0\delta^0{}_\lambda - (\delta\sigma^\alpha{}_\gamma + \delta\omega^\alpha{}_\gamma)h^\gamma{}_\lambda = -\delta q_\lambda. \quad (4.112)$$

Note que, o termo do fundo é simplesmente zero, uma vez que estamos em uma geometria homogênea e isotrópica. Agora, para o segundo vínculo tem-se a seguinte equação

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0. \quad (4.113)$$

cuja equação perturbada é trivialmente obtida como

$$\delta\omega^\alpha{}_{;\alpha} = 0. \quad (4.114)$$

O terceiro vínculo é dado por

$$-\frac{1}{2}h_\tau{}^\epsilon h_\lambda{}^\alpha \eta_\epsilon{}^{\beta\gamma\nu} v_\nu (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{;\gamma} + a_{(\tau}\omega_{\lambda)} = H_{\tau\lambda}, \quad (4.115)$$

em que argumentos adicionais aos já utilizados não precisam ser discutidos. A equação perturbada é dada por

$$-\frac{1}{2}h_\tau{}^\epsilon h_\lambda{}^\alpha \eta_\epsilon{}^{\beta\gamma\nu} v_\nu (\delta\sigma_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta})_{;\gamma} = \delta H_{\tau\lambda}. \quad (4.116)$$

Todas as equações discutidas nesta seção são presentes em discussões usuais na temática cosmologia relativística, mais detalhes sobre a sua derivação podem ser encontradas em [89, 95, 1].

4.3.2 Equações de conservação do tensor energia-momento perturbadas

Também é necessário avaliar como as equações de conservação do tensor energia-momento restringem a evolução das perturbações, para isso, é necessário avaliar duas projeções independentes da relação

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

As projeções levam à equação de continuidade e à equação de Euler para um fluido generalizado. Começando com a equação da continuidade [95]

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^\mu v_\mu + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0, \quad (4.117)$$

obtida da projeção $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} v_\mu$ e em que $\theta_{\mu\nu} \equiv \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$. Basta coletar os fatores de primeira ordem nas perturbações e eliminar os termos de ordem superior, obtendo

$$\delta\dot{\rho} + (\rho + p)\delta\theta + (\delta\rho + \delta p)\theta + \dot{q}^\mu\delta v_\mu + \delta\dot{q}^\mu v_\mu + \delta q^\alpha{}_{;\alpha} = 0. \quad (4.118)$$

Agora, a equação de Euler generalizada é obtida a partir da projeção $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^\alpha$, resultando em [95]

$$(\rho + p)a_\alpha - p_{,\mu}h^\mu_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu_\alpha + \theta q_\alpha + q^\nu \theta_{\alpha\nu} + q^\nu \omega_{\alpha\nu} + \pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu} + \pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} v_\alpha = 0. \quad (4.119)$$

A partir do mesmo argumento usado para obter a relação (4.114), e coletando os termos de primeira ordem, obtém-se

$$(\rho + p)\delta a_\alpha + p_{,0}\delta v^0 \delta^0_\alpha + \dot{p}\delta v_\alpha - \delta p_{,\beta}h^\beta_\alpha + \delta \dot{q}_\mu h^\mu_\alpha + \theta \delta q_\alpha + \frac{\theta}{3}h_{\alpha\nu}\delta q^\nu + \delta \pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu} = 0. \quad (4.120)$$

Esta última equação permitirá vincular a perturbação da aceleração dentro do sistema dinâmico de interesse. Na próxima seção, apresenta-se a dinâmica das perturbações do tensor de Weyl.

4.3.3 Equações das projeções da divergência do tensor de Weyl perturbadas

Nas seções anteriores foram obtidas as seguintes projeções independentes para a divergência do tensor de Weyl

$$E^\epsilon_{\alpha;\nu} h_\epsilon{}^\nu h^{\alpha\rho} + \eta_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \sigma^\gamma{}_\nu H^{\nu\epsilon} v^\beta h^{\alpha\rho} + 3\omega_\epsilon H^{\rho\epsilon} = \frac{\kappa}{3}\rho_{;\alpha} h^{\alpha\rho} + \frac{\kappa}{3}\theta q^\rho + \frac{\kappa}{2}\pi^{\mu\rho} a_\mu + \\ - \frac{\kappa}{2}q^\mu (\sigma^\rho{}_\mu - 3\omega^\rho{}_\mu) + \frac{\kappa}{2}h^{\rho\mu} \pi_\mu{}^\nu{}_{;\nu}, \quad (4.121)$$

$$H_{\alpha\beta;\nu} h^{\alpha\nu} h^{\beta\rho} - \sigma_{\alpha\nu} E^\nu{}_\beta v_\lambda \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} - 3\omega_\alpha E^{\rho\alpha} = \kappa(\rho + p)\omega^\rho - \frac{\kappa}{2}q_{\alpha;\beta} \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \\ + \frac{\kappa}{2}\pi^\mu{}_\alpha \eta^{\rho\lambda\alpha\beta} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) v_\lambda, \quad (4.122)$$

$$\frac{1}{2}E^\mu{}_{\beta;\alpha} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda - a_\alpha E^\mu{}_\beta h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \theta H^{\rho\sigma} - \frac{3}{2}\sigma_\nu{}^{(\sigma} H^{\rho)\nu} + \\ - \frac{1}{2}\omega^{(\sigma}{}_\nu H^{\rho)\nu} + h^{\rho\sigma} h^{\sigma\gamma} \dot{H}_{\epsilon\gamma} + \sigma_\beta{}^\alpha H_\alpha{}^\beta h^{\rho\sigma} = -\frac{3}{4}\kappa q^{(\sigma} \omega^{\rho)} + \frac{1}{2}\kappa q_\mu \omega^\mu h^{\rho\sigma} + \\ + \frac{1}{4}\kappa q_\alpha \sigma_\beta{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda + \frac{1}{4}\kappa \pi^\mu{}_{\alpha;\beta} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\rho)\lambda\alpha\beta} v_\lambda, \quad (4.123)$$

$$h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} \dot{E}_{\alpha\beta} + \theta E^{\rho\sigma} + E^\nu{}_\beta \sigma^\beta{}_\nu h^{\rho\sigma} - \frac{3}{2}\sigma^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)} - \frac{1}{2}\omega^{(\rho}{}_\nu E^{\nu\sigma)} + \frac{1}{2}H_{\alpha\epsilon;\nu} h^{\alpha(\sigma} \eta^{\rho)\nu\gamma\epsilon} v_\gamma + \\ + a_\gamma H^{\epsilon(\rho} \eta^{\sigma)\beta\gamma\epsilon} v^\beta = \frac{\kappa}{2}q^{(\rho} a^{\sigma)} + \frac{\kappa}{2}\dot{\pi}^\mu{}_\alpha h_\mu{}^\rho h^{\sigma\alpha} + \frac{\kappa}{6}[\dot{q}^\mu v_\mu + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}] h^{\rho\sigma} + \\ - \frac{\kappa}{2}(\rho + p)\sigma^{\rho\sigma} - \frac{\kappa}{4}q^\mu{}_{;\alpha} v_\beta v^\beta h_\mu{}^{(\rho} h^{\sigma)\alpha} + \frac{\kappa}{6}\theta \pi^{\rho\sigma} + \frac{\kappa}{4}\pi_\beta{}^{(\rho} \sigma^{\sigma)\beta} - \frac{\kappa}{4}\pi_\beta{}^{(\rho} \omega^{\sigma)\beta}. \quad (4.124)$$

Similarmente ao realizado nas seções anteriores, é possível perturbar estas equações. Não é necessário apresentar novos argumentos para reescrever as expressões. O formato das equações é dado por

$$h_\mu^\epsilon h_\nu^\lambda \delta \dot{H}^{\mu\nu} + \theta \delta H^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} \delta H_\nu^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu v^{\mu;\nu} + \frac{\theta}{3} \eta^{\lambda\nu\mu\gamma} \eta^{\epsilon\beta\tau\alpha} v_\mu v_\tau h_{\nu\beta} \delta H_{\alpha\gamma} + \\ + \delta E_{\beta}{}^\mu{}_{;\alpha} h_\mu^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} v_\gamma = \frac{1}{4} h^{\nu(\epsilon} \eta^{\lambda)\alpha\beta\mu} v_\mu \delta \pi_{\nu\alpha;\beta}, \quad (4.125)$$

para a parte magnética do tensor de Weyl. Para a parte elétrica do tensor de Weyl escreve-se que

$$\delta \dot{E}^{\epsilon\lambda} + \theta \delta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} \delta E_\nu^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu v^{\mu;\nu} + \frac{\theta}{3} \eta^{\lambda\nu\mu\gamma} \eta^{\epsilon\beta\tau\alpha} v_\mu v_\tau \delta E_{\alpha\gamma} h_{\nu\beta} + \\ - \frac{1}{2} \delta H_{\beta}{}^\mu{}_{;\alpha} h_\mu^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} v_\gamma = -\frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{6} h^{\epsilon\lambda} \delta q^\mu{}_{;\mu} + \\ - \frac{1}{4} h^{\mu(\epsilon} h^{\lambda)\alpha} \delta q_{\mu;\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha^\epsilon h_\mu^\lambda \delta \dot{\pi}^{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \delta \pi^{\epsilon\lambda},$$

em que é possível simplificar a expressão se utilizarmos a contração (4.25), e a decomposição (4.19), obtendo

$$\delta \dot{E}^{\epsilon\lambda} + \theta \delta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{6} \theta \delta E_\nu^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu h^{\mu\nu} + \frac{\theta}{3} \delta E^{\lambda\epsilon} + \\ - \frac{1}{2} \delta H_{\beta}{}^\mu{}_{;\alpha} h_\mu^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} v_\gamma = -\frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{6} h^{\epsilon\lambda} \delta q^\mu{}_{;\mu} + \\ - \frac{1}{4} h^{\mu(\epsilon} h^{\lambda)\alpha} \delta q_{\mu;\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha^\epsilon h_\mu^\lambda \delta \dot{\pi}^{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \delta \pi^{\epsilon\lambda}. \quad (4.126)$$

Esta equação fornece uma das equações do sistema dinâmico desejado. Agora, para a terceira equação tem-se que

$$h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} \delta E_{\alpha\lambda;\gamma} = \frac{1}{3} h^{\epsilon\alpha} \delta \rho_{,\alpha} - \frac{1}{3} \dot{\rho} \delta v^\epsilon - \frac{1}{3} \dot{\rho} \delta v^0 \delta^\epsilon{}_0 + \frac{\theta}{3} \delta q^\alpha + \frac{1}{2} h^{\epsilon\alpha} \delta \pi_{\alpha}{}^\nu{}_{;\nu}. \quad (4.127)$$

E, por fim a equação

$$h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} \delta H_{\alpha\lambda;\gamma} = (\rho + p) \delta \omega^\epsilon - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} q_{\alpha;\beta} \delta v_\lambda - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} v_\lambda \delta q_{\alpha;\beta}. \quad (4.128)$$

Assim finalizam-se as equações perturbadas. Na próxima seção trabalham-se as equações (4.126), (4.108) e (4.120) em termos de uma base escalar de harmônicos esféricos e forma-se o sistema dinâmico bidimensional não autônomo para a evolução das perturbações.

4.3.4 A decomposição das equações termos de uma base de harmônicos esféricos

A base de harmônicos esféricos escalares $Q(x^k)$ é suficiente uma vez que restringimos-nos a perturbações irrotacionais. A base deve obedecer a relação

$$\nabla^2 Q \equiv \gamma^{ik} Q_{,i||k} = mQ, \quad (4.129)$$

com $\dot{Q} = 0$, em que $m = 1/k^2$ trazendo a informação do comprimento de onda das perturbações. Note que a operação é construída utilizando a métrica tridimensional γ^{ik} , e utiliza a derivada covariante no mesmo recorte tridimensional, $A_{||k}$. A partir destas definições, descrevem-se grandezas vetoriais e tensoriais dadas pelas construções

$$Q_i \equiv Q_{,i} \quad \text{e} \quad Q_{ij} \equiv Q_{,i;j}. \quad (4.130)$$

E, a partir destas definições é possível definir o seguinte operador sem traço

$$\bar{Q}_{ij} = \frac{1}{m} Q_{ij} - \frac{1}{3} Q \gamma_{ij}, \quad (4.131)$$

com a sua divergência dada por

$$\bar{Q}^{ik}{}_{||k} = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) Q^i. \quad (4.132)$$

Para este trabalho interessa-nos trabalhar com as equações (4.126) e (4.108) pois é a partir destas relações que é possível construir um sistema bidimensional fechado. Para a equação (4.126) iremos primeiro desconsiderar fatores rotacionais, como a parte magnética do tensor de Weyl, $H_{\mu\nu}$, e o fluxo de calor q_μ , uma vez que eles não afetam o sistema dinâmico construídos utilizando os outros elementos, e geram perturbações que não estamos interessados neste trabalho. Resta-se

$$\delta \dot{E}^{\epsilon\lambda} + \theta \delta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} \delta E_\nu{}^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu v^{\mu;\nu} + \frac{\theta}{3} \delta E^{\lambda\epsilon} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^\epsilon h_\mu{}^\lambda \delta \dot{\pi}^{\alpha\mu} + \frac{1}{6} \theta \delta \pi^{\epsilon\lambda}. \quad (4.133)$$

Note que as perturbações que precisam ser decompostas na base escalar são $\delta E^{\epsilon\lambda}$, $\delta \sigma^{\epsilon\lambda}$ e $\delta \pi^{\epsilon\lambda}$. Todas estas grandezas são ortogonais ao campo de observadores v^μ , e portanto, são tomadas como grandezas pertencentes ao espaço tridimensional e adequadamente decompostas na base $Q(x^k)$. Em particular, pode-se realizar a decomposição a partir das relações

$$\delta E^{ij} = \mathcal{E}(t) \bar{Q}^{ij}(x^k), \quad (4.134)$$

$$\delta \sigma^{ij} = \Sigma(t) \bar{Q}^{ij}(x^k), \quad (4.135)$$

em que $\mathcal{E}(t)$ e $\Sigma(t)$ determinam a evolução temporal das perturbações. Perceba que na decomposição utiliza-se o operador sem traço, \bar{Q}_{ij} , uma vez que o cisalhamento e a parte elétrica do tensor de Weyl são grandezas sem traço. Para a pressão anisotrópica, π_{ij} é necessário utilizar argumentos de uma termodinâmica causal que relaciona esta grandeza ao cisalhamento pela expressão [95]

$$\tau \dot{\pi}_{ij} + \pi_{ij} = \xi \sigma_{ij},$$

com τ indicando o tempo de relaxamento e ξ uma constante de viscosidade do fluido. Tomando que o fluido é incompressível e o fator de τ pode ser desprezado, uma vez que o tempo de relaxamento é muito pequeno. A relação se resume à $\pi_{ij} = \xi \sigma_{ij}$, ou seja, a relação perturbada é dada por

$$\delta \pi_{ij} = \xi \delta \sigma_{ij} = \xi \Sigma(t) \bar{Q}_{ij}. \quad (4.136)$$

Utilizando as decomposições (4.134), (4.135) e (4.136) na equação (4.133), escreve-se que

$$\dot{\mathcal{E}} \bar{Q}^{ij} + \theta \mathcal{E} \bar{Q}^{ij} - \frac{1}{3} \theta \mathcal{E} \bar{Q}^{ij} + \frac{\theta}{3} \mathcal{E} \bar{Q}^{ij} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \Sigma \bar{Q}^{ij} + \frac{1}{2} \xi \dot{\Sigma} \bar{Q}^{ij} + \frac{1}{6} \theta \xi \Sigma \bar{Q}^{ij},$$

em que utilizou-se o projetor $h^{\mu\nu}$ para levantar os índices de grandezas do espaço ortogonal. Como \bar{Q}^{ij} é um fator comum em todos os elementos pode-se igualar seus componentes. Portanto, após algumas simplificações, tem-se que

$$\dot{\mathcal{E}} + \theta \mathcal{E} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \Sigma + \frac{\xi}{2} \dot{\Sigma} + \frac{\xi}{6} \theta \Sigma.$$

Para obter a relação de $\dot{\Sigma}$ é necessário aplicar o mesmo procedimento sobre a relação (4.108). Neste momento, é necessário decompor a perturbação do vetor aceleração na base esférica, obtendo

$$\delta a^i = \Psi(t) Q^i(x^k), \quad (4.137)$$

em que $\Psi(t)$ é a componente espacial da aceleração. Ao realizar procedimento análogo ao apresentado anteriormente, agora sobre a relação (4.108) e utilizando a expressão (4.137), tem-se

$$\dot{\Sigma} \bar{Q}_{ij} + \frac{1}{3} h_{ij} \Psi Q^k{}_{;k} - \frac{\Psi}{2} \delta_i{}^l \delta_j{}^k Q_{(l;k)} + \frac{2}{3} \theta \Sigma \bar{Q}_{ij} = -\mathcal{E} \bar{Q}_{ij} - \frac{\xi}{2} \Sigma \bar{Q}_{ij},$$

em que os projetores se comportam como deltas, uma vez que o campo de observadores é definido tal que $v^\mu = \delta_0^\mu$. É preciso retrabalhar o fator $Q_{l;k}$ para comparar todas as componentes da decomposição, isso é realizado utilizando a relação (4.131). Obtém-se

$$-\frac{\Psi}{2} \delta_i{}^l h_j{}^k Q_{(l;k)} \equiv -\Psi Q_{ij} = -m \Psi \bar{Q}_{ij} - \frac{m}{3} \Psi Q \gamma_{ij},$$

e, da mesma forma

$$\frac{1}{3}h_{ij}\Psi Q^k{}_{;k} = \frac{m}{3}\gamma_{ij}\Psi\bar{Q}^k{}_k + \frac{m}{9}\gamma^k{}_k Q.$$

Note que $\gamma^k{}_k = 3$, uma vez que é a métrica tridimensional. Também tem-se que $\bar{Q}^k{}_k = 0$, já que o operador não tem traço. Desta forma é possível simplificar as relações, e obter que

$$\dot{\Sigma}\bar{Q}_{ij} - m\Psi\bar{Q}_{ij} + \frac{2}{3}\theta\Sigma\bar{Q}_{ij} = -\mathcal{E}\bar{Q}_{ij} - \frac{\xi}{2}\Sigma\bar{Q}_{ij},$$

ou simplesmente,

$$\dot{\Sigma} = -\mathcal{E} - \left(\frac{2}{3}\theta + \frac{\xi}{2}\right)\Sigma + m\Psi. \quad (4.138)$$

A relação (4.138) é utilizada na relação para $\dot{\mathcal{E}}$, de forma que

$$\dot{\mathcal{E}} = -\left(\theta + \frac{\xi}{2}\right)\mathcal{E} - \frac{\xi}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2}\right)\Sigma - \frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma + \frac{\xi}{2}m\Psi. \quad (4.139)$$

As equações (4.138) e (4.139) formam o sistema bidimensional não autônomo estudado neste trabalho. Note que é necessário obter um vínculo para o parâmetro Ψ , obtido utilizando a equação (4.120). Tem-se

$$(\rho + p)\delta a_i + \dot{p}\delta v_i - \delta p_{,i} + \delta\pi_i{}^k{}_{;k} = 0,$$

em que se tomou apenas a equação indexada espacialmente $i = 1, 2, 3$. Novamente, são introduzidas novas decomposições em termos da base escalar. Escrevendo a perturbação da componente espacial do campo de velocidades como

$$\delta v^i = V(t)Q^i(x^k), \quad (4.140)$$

em que $V(t)$ é definido analogamente as variáveis apresentadas anteriormente. A relação se torna

$$(\rho + p)\Psi Q_i = -\dot{p}VQ_i + \delta p_{,i} - \xi\Sigma Q_i{}^k{}_{;k},$$

lembrando que $\bar{Q}_i{}^k{}_{;k} = g_{ij}\bar{Q}^{jk}{}_{;k} = -a^{-2}\gamma_{ij}\bar{Q}^{jk}{}_{;k}$, ou, utilizando a relação (4.132), tem-se que $\bar{Q}_i{}^k{}_{;k} = -2a^{-2}\gamma_{ij}\left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m}\right)Q^j$. De forma que a relação do vínculo é dada por

$$(\rho + p)\psi Q_i = -\dot{p}VQ_i + \delta p_{,i} + 2\xi\left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m}\right)a^{-2}\xi\Sigma Q_i.$$

Ainda resta a perturbação da pressão isotrópica $\delta p_{,i}$. Por conveniência, define-se esta perturbação em termos da perturbação da densidade de energia $\delta\rho$ e da velocidade do som ao quadrado, c_s^2 . Tem-se a seguinte definição

$$c_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}, \quad (4.141)$$

Desta maneira, é possível afirmar que $\delta p = c_s^2 \delta \rho$, e introduzindo a decomposição da densidade de energia como

$$\delta \rho = N(t)Q(x^k) + \mu(t), \quad (4.142)$$

a variável $N(t)$ é a componente da perturbação, e $\mu(t)$ é um fator dependente de calibre que é eliminado a partir de uma escolha adequada de sistemas de coordenadas. O fator $\mu(t)$ surge uma vez que existe uma densidade de energia não nula na geometria de fundo. Mesmo que exista uma liberdade de calibre na escolha desta função, não é preciso realizar esta escolha, uma vez que o vínculo que está sendo trabalhado apresenta apenas derivadas espaciais. Utilizando a relação (4.142), tem-se que o vínculo toma a forma

$$(\rho + p)\psi = c_s^2(N - \dot{\rho}V) + 2\xi \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) a^{-2}\xi\Sigma,$$

em que se usou que $\dot{p} = c_s^2 \dot{\rho}$. A princípio aparenta-se que o vínculo introduz dois novos parâmetros ao modelo, $N(t)$ e $V(t)$. No entanto, é possível utilizar a relação (4.127) para eliminar esta dependência. Note que

$$\delta E^{ik}_{;k} = \frac{1}{3}\delta\rho^i - \frac{1}{3}\dot{\rho}\delta v^i + \frac{1}{2}\delta\pi^{ik}_{;k}.$$

Utilizando as relações (4.132), (4.134), (4.136) e (4.142), tem-se

$$2\mathcal{E} \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) Q^i = \frac{1}{3}NQ^i - \frac{1}{3}\dot{\rho}VQ^i + \xi\Sigma \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) Q^i,$$

ou, simplesmente

$$N - \dot{\rho}V = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) (2\mathcal{E} - \xi\Sigma). \quad (4.143)$$

A relação (4.143) é utilizada para escrever que

$$(\rho + p)\psi = \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) \left(3c_s^2 (2\mathcal{E} - \xi\Sigma) + 2\xi a^{-2}\Sigma \right). \quad (4.144)$$

Assim, vinculam-se os parâmetros N e V em termos de \mathcal{E} e Σ , ou seja, a variável $\Psi = \Psi(B, \mathcal{E}, \Sigma)$. O sistema dinâmico se torna planar e sua dependência temporal é dada a partir do campo magnético $B(t)$. Na próxima seção são tomadas as condições suficientes para que as equações (4.139), (4.138) e (4.144), formem um sistema dinâmico planar não-autônomo.

4.4 A construção de um sistema dinâmico não-autônomo

O sistema dinâmico será construído a partir das equações à seguir

$$\dot{\Sigma} = -\mathcal{E} - \Sigma \left(\frac{2}{3}\theta + \frac{\xi}{2} \right) + m\Psi, \quad (4.145)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma - \mathcal{E} \left(\theta + \frac{\xi}{2} \right) - \frac{\xi}{2} \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2} \right) \Sigma + \frac{\xi}{2} m\Psi, \quad (4.146)$$

$$(4.147)$$

em que a perturbação da aceleração, Ψ , pode ser vinculada a partir da expressão

$$(\rho + p)\Psi = \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) \left[3c_s^2 (2\mathcal{E} - \xi\Sigma) + 2\xi a^{-2}\Sigma \right]. \quad (4.148)$$

Note que esta equação é válida apenas para $\rho + p \neq 0$. Esta condição não é respeitada quando $B(t) \rightarrow 0$ ou $B(t) \rightarrow B_3$, como pode ser observado a partir das equações (2.28) e (3.9). Para avaliar os casos singulares nestas perspectivas é necessário introduzir outros elementos perturbativos nas equações, fugindo do aspecto de fluido perfeito médio do modelo. Também considera-se a simplificação, $\xi = 0$, eliminando a presença de uma perturbação proveniente da pressão anisotrópica. As equações se tornam

$$\dot{\Sigma} = -\mathcal{E} - \frac{2}{3}\theta\Sigma + m\Psi, \quad (4.149)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma - \theta\mathcal{E}. \quad (4.150)$$

com o vínculo dado por

$$(\rho + p)\Psi = 6c_s^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{m} \right) \mathcal{E}. \quad (4.151)$$

É necessário escrever a expressão para θ , obtida a partir da expressão (2.31) como

$$\theta = -\frac{3(1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2)\dot{B}}{2B(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)}, \quad (4.152)$$

em que \dot{B} é dado pela equação de Friedmann (3.1), ou de forma mais direta

$$\begin{aligned} \dot{B}^2 = & \frac{4B^2(1 - 4\tilde{\alpha}B^2)^2}{[1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2]^2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{6}(1 + \sigma)B^2 + \frac{1}{3}[\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}(1 + 3\sigma)]B^4 - \frac{\epsilon B}{a_0^2 B_0} \left(\frac{1 - 4\tilde{\alpha}B_0^2}{1 - 4\tilde{\alpha}B^2} \right)^{2w} \right]. \end{aligned} \quad (4.153)$$

A escolha de sinal em (4.153) é feita tal que $\theta > 0$ em (4.152), ou seja, a evolução das perturbações será analisada para condições iniciais em que o universo está em expansão.

Note que a escolha de sinal não é sempre negativa ou positiva. É necessário avaliar a posição relativa de B_0 às retas estabelecidas para os campos magnéticos $B_2 = \frac{1}{2\sqrt{(1-4w)\tilde{\alpha}}}$ e $B_3 = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}$, definidos em (3.9), e presentes nas figuras (1-6). As regiões entre as retas têm soluções com $\theta > 0$ com o crescimento do campo magnético ($\dot{B} > 0$), e quando fora das retas a expansão ocorre com a diminuição do campo magnético ($\dot{B} < 0$).

4.4.1 O parâmetro da equação de estado e a velocidade do som

Para analisar as equações (4.149) e (4.151), é necessário utilizar a definição da velocidade do som ao quadrado, obtida a partir da densidade de energia (2.5) e pressão isotrópica (2.6). Uma vez que p e ρ são funções unicamente do campo magnético, $B(t)$, é possível utilizar as definições

$$c_s^2 = \frac{dp/dB}{d\rho/dB} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{p}{\rho}. \quad (4.154)$$

em que λ é o parâmetro da equação de estado. As relações são dadas por

$$\lambda = \frac{1}{3} \frac{[1 - 2\tilde{\alpha}(12w + 5)B^2]}{[1 - 2\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2]}, \quad (4.155)$$

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{[1 - 4\tilde{\alpha}(12w + 5)B^2]}{[1 - 4\tilde{\alpha}(1 - 4w)B^2]}. \quad (4.156)$$

Estas equações são equivalentes tanto no limite de campos fracos, quanto no limite de campos fortes. Quando é possível desprezar o termo de B^2 , obtém-se que

$$\lambda = c_s^2 = \frac{1}{3}. \quad (4.157)$$

em que este é o valor de λ usual para um universo dominado por radiação em uma eletrodinâmica linear. Quando o termo de B^2 é mais relevante do que o fator constante, o limite é tal que

$$\lambda = c_s^2 = \frac{12w + 5}{1 - 4w}. \quad (4.158)$$

Ou seja, também há um limite superior constante para estas relações. No entanto, a transição entre os dois limites não é sempre suave e depende da condição inicial escolhida e se o campo magnético evolui em direção as seguintes divergências

$$B_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\alpha}(1 - 4w)}} \quad \text{e} \quad B_{c_s^2} = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}(1 - 4w)}}. \quad (4.159)$$

A divergência para c_s^2 ocorre para campos magnéticos menores do que λ por um fator de $\sqrt{2}/2$. Também é necessário avaliar a condição $c_s^2 > 0$, para evitar instabilidades dentro do sistema dinâmico. Para isso, também é importante discutir o sinal do numerador em (4.156), que se anula quando

$$B_{\text{num},c_s^2} = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}(12w+5)}}. \quad (4.160)$$

O intervalo delimitado entre B_{num,c_s^2} e B_2 indica quando $c_s^2 < 0$, gerando a amplificação das perturbações. Nesta análise não serão consideradas regiões em que c_s^2 é sempre negativo. Alguns valores de interesse são $w = -1/4$ para a igualdade $B_{\text{num},c_s^2} = B_2$, $w = -1/3$ quando $B_{\text{num},c_s^2} = B_3$, e $w < -5/12$, quando $B_{\text{num},c_s^2} \rightarrow \infty$.

A transição entre os limites de campos fracos e campos fortes não ocorre suavemente para toda escolha de σ . Avaliando as relações (4.155) e (4.156), pode-se notar que para $w > \frac{1}{4}$ as divergência de ambos os parâmetros deixa de existir. Ou seja, fixando os parâmetros do modelo α e β , existe uma quantidade mínima de campo elétrico $E(t)$ médio necessária para que a transição entre os limites seja suave, observe a figura (10).

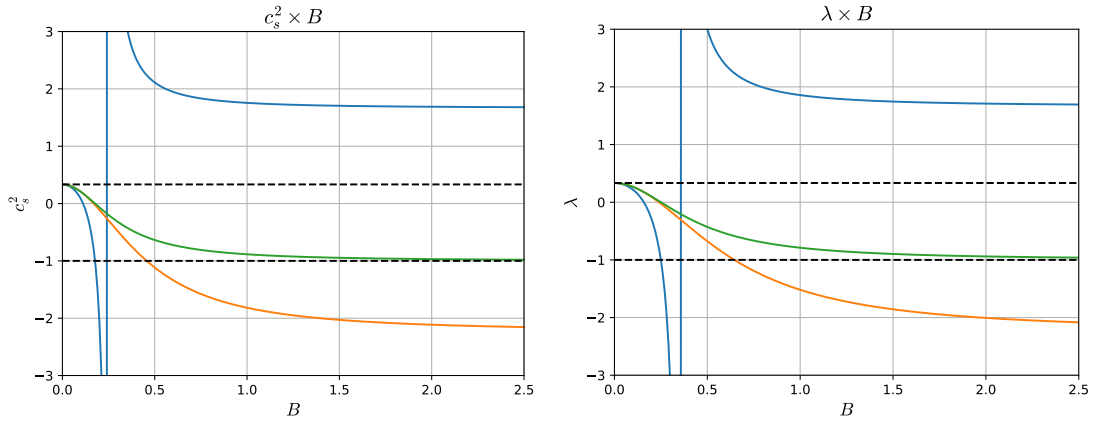


Figura 10 – Velocidade do som ao quadrado (esquerda) e parâmetro da equação de estado (direita) em termos do campo magnético. Os parâmetros dos modelos escolhidos são $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, e $\sigma = 0$ (azul), $\sigma = 0.85$ (laranja) e $\sigma = 1$ (verde). As horizontais tracejadas indicam os valores $\lambda = c_s^2 = 1/3$ e $\lambda = c_s^2 = -1$.

Note que para $\sigma = \frac{1}{9}(1 + 2\sqrt{7})$, tem-se que $w = \frac{1}{4}$ quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Desta forma, todas as escolhas de σ maiores do que este limite apresentam uma transição suave entre os limites de campo fraco e forte. É relevante apontar que quando $\sigma = 1$, o limite de campos fortes tem uma equação de estado linear, $\lambda = -1$, parâmetro comumente utilizado para estabelecer modelos inflacionários, ou com a presença de uma constante cosmológica. A presença de uma velocidade do som imaginária pode gerar instabilidades primordialmente e na evolução das perturbações. No entanto, a presença formal desta possibilidade aparece em trabalhos no contexto de teoria de campos efetivas, e no contexto de uma hiperinflação [105, 106].

4.4.2 A evolução das perturbações

A evolução das perturbações será avaliada caso a caso tendo em vista as informações apresentadas nas tabelas (1) e (2). Também é de interesse avaliar como estes casos evoluem para o UM ($\sigma = 0$) e o UEN ($\sigma \rightarrow 1$). Em particular, o foco desta análise será em regiões que $\theta > 0$.

4.4.2.1 O universo quase-magnético

Inicialmente, apresentam-se as diferenças qualitativas na análise para os casos individuais discutidos na situação generalizada do universo quase-magnético (UQM). Em particular, a evolução das perturbações será analisada nas regiões disjuntas dos diagramas de fase de cada caso. Estas regiões são estabelecidas pelas verticais B_2 e B_3 , e pelas bacias de atração do ponto de equilíbrio $B_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\alpha}(4w+3)}}$.

- Caso I

O caso I é obtido quando se considera $w < -3/4$. Nestas condições $B_{\text{num},c_s^2} \rightarrow \infty$, portanto, a única região na qual c_s^2 pode ser positivo, é aquela em que as condições iniciais são escolhidas no intervalo $B_0 < B_2$. O comportamento das perturbações pode ser observado na figura (11) e (12).

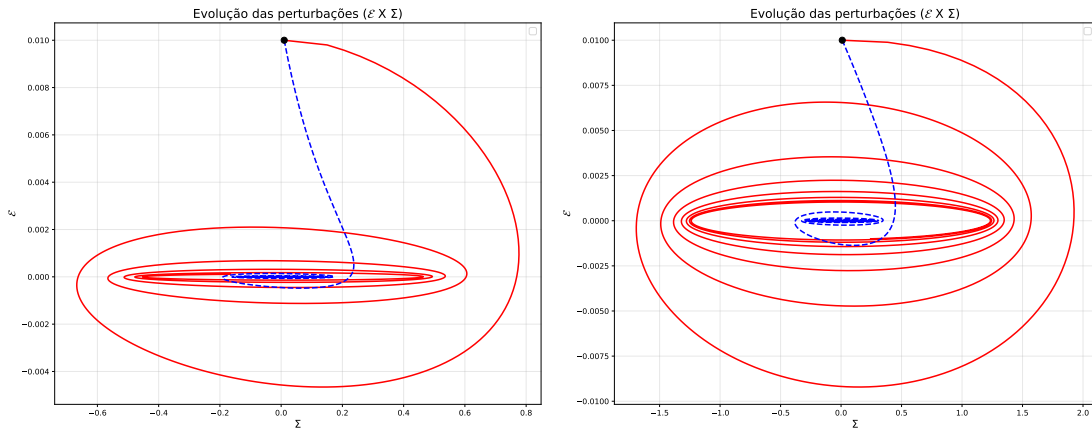


Figura 11 – Retrato de fase para o caso I em que $w = -1$. Escolhendo $B_0 = 0.22 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon = 0$ com $a_0 = 1.0$ e à direita o retrato de fase para $\epsilon > 0$ com $a_0 = 25$. A curva sólida vermelha indica o sistema com uma ENL e a tracejada azul indica a eletrodinâmica linear usual. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Na figura (11) percebe-se que as não-linearidades do modelo fazem com que as perturbações sejam amortecidas mais lentamente do que se esperaria para um eletromagnetismo linear. O crescimento inicial mais acentuado se dá devido aos valores muito altos de c_s^2 que impelem o crescimento de Σ a partir de Ψ . Ocorrendo devido à proximidade do instante em que c_s^2 diverge. As perturbações são amortecidas

enquanto $B \rightarrow 0$, levando o sistema ao limite de campos fracos de uma eletrodinâmica linear. Note que, $\rho + p \rightarrow 0$ não é um problema se $\mathcal{E} \rightarrow 0$ mais rapidamente, avaliando o limite de campos fracos na próxima seção indica que este é o caso.

Para a escolha em que $\epsilon = 0$, o campo magnético assintoticamente aproxima-se de zero levando à oscilação das perturbações em torno do equilíbrio em $(\Sigma, \mathcal{E}) = (0, 0)$. Este comportamento não é perceptível quando $\epsilon > 0$. Note que estas curvas apresentam valores mínimos para campos magnéticos diferentes de zero, fazendo com que as perturbações sejam amortecidas apenas até o campo alcançar este mínimo, sendo amplificadas durante uma fase de colapso. Devido a este comportamento é necessário escolher a_0 tal que quando $B = B_0$, o radicando em (4.153) seja sempre positivo, ou seja, antes do campo magnético alcançar o seu valor mínimo.

Para analisar o caso em que $\epsilon < 0$ é preciso tomar um cuidado adicional com o sinal obtido para a perturbação da aceleração. Observe a dependência do fator $m + 3\epsilon$, e o controle que a escolha de m tem sobre seu sinal. Portanto, se $\epsilon < 0$, como $m \propto 1/k^2$, existe uma relação entre a escala das perturbações e o seu crescimento. Observe a figura 12).

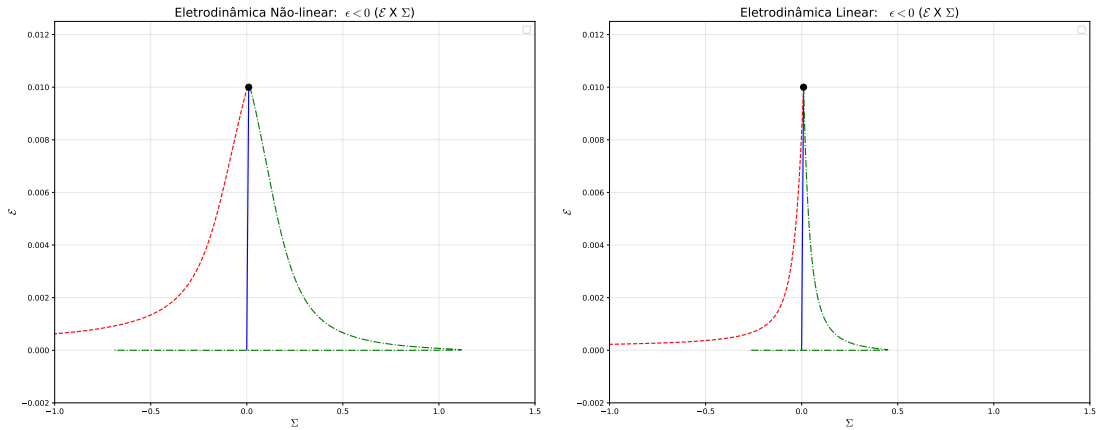


Figura 12 – Retrato de fase para o caso I em que $w = -1$. Escolhendo a região em que $B_0 = 0.22 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$ em uma ENL e à direita para uma eletrodinâmica linear. As três curvas apresentadas são feitas para valores de $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Se $m - 3|\epsilon| < 0$, o crescimento de Σ não é amortecido durante a fase de expansão, e o seu crescimento é muito amortecido se $m = 3|\epsilon|$. Agora, o campo magnético tende a zero mais rapidamente do que quando $\epsilon = 0$, suprimindo o comportamento oscilatório presente na figura (11), novamente, as perturbações são amortecidas mais lentamente do que em uma eletrodinâmica linear.

- Caso II

Aqui ocorre o surgimento do ponto de equilíbrio B_{P_2} como um centro em regiões com $B > B_3$, ou seja, $\rho + p < 0$. As únicas curvas que têm acesso a esta região são para $\epsilon < 0$, como pode ser observado na figura (2). No entanto, com a escolha $w = -1/2$, utilizada para apresentar a figura (2), ainda não há região com $c_s^2 > 0$ para valores de $B_0 > B_2$. Analisa-se esta região para o caso em que $w = -1/3$, quando $B_{\text{num},c_s^2} = B_3$, e assim, toda a região à direita de B_3 apresenta positividade da velocidade do som garantida. O comportamento pode ser observado na figura (13).

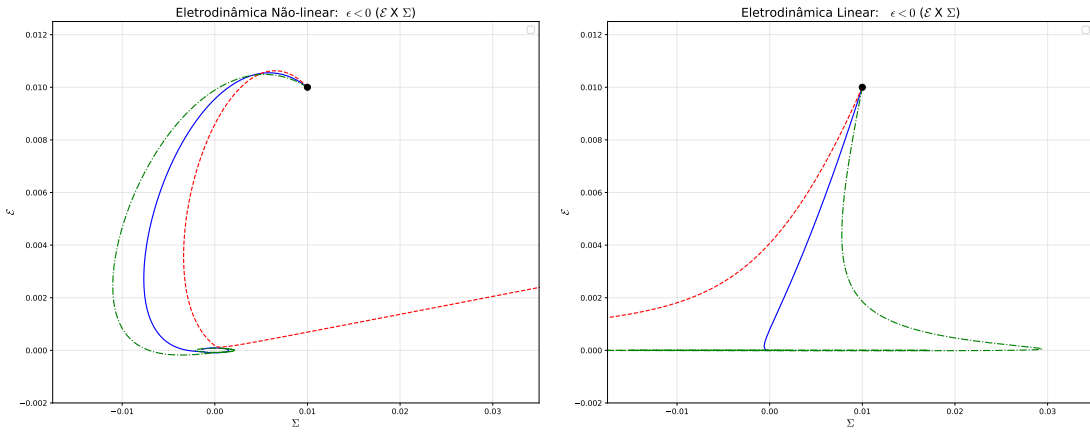


Figura 13 – Retrato de fase para o caso II em que $w = -1/3$. Escolhendo a região em que $B_3 < B_0 = 0.75$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. À esquerda o retrato de fase para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 2.09$ em uma ENL e à direita para uma eletrodinâmica linear. As três curvas apresentadas são feitas para valores de $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Note que o campo magnético nesta região segue curvas fechadas, portanto, existe um valor mínimo acima de B_3 . Desta forma evitando as instabilidades devido ao crescimento de Ψ , e restringindo os valores possíveis para a_0 . Novamente, as perturbações são atenuadas até uma elipse mínima no caso em que $\epsilon > 0$, se $m < 3|\epsilon|$ o crescimento das perturbações é inevitável. Em particular neste caso, as perturbações são amortecidas mais rapidamente do que em uma eletrodinâmica linear.

- Caso III

Para o caso III, tem-se que $B_{P_2} < B_3$, ou seja, o equilíbrio surge em regiões em que $\rho + p > 0$. O comportamento do campo magnético pode ser observado na figura (3). Note que, para esta escolha $B_{\text{num},c_s^2} < B_2 < B_3$. Ou seja, podemos analisar regiões em que $c_s^2 > 0$ para $B_0 < B_{\text{num},c_s^2}$ ou $B_0 > B_2$. A região na qual $B_0 < B_2$ se comporta da mesma forma observada anteriormente, no entanto, devido à presença de uma região com $c_s^2 < 0$, as instabilidades resultam em um crescimento das perturbações, como observado na figura (14).

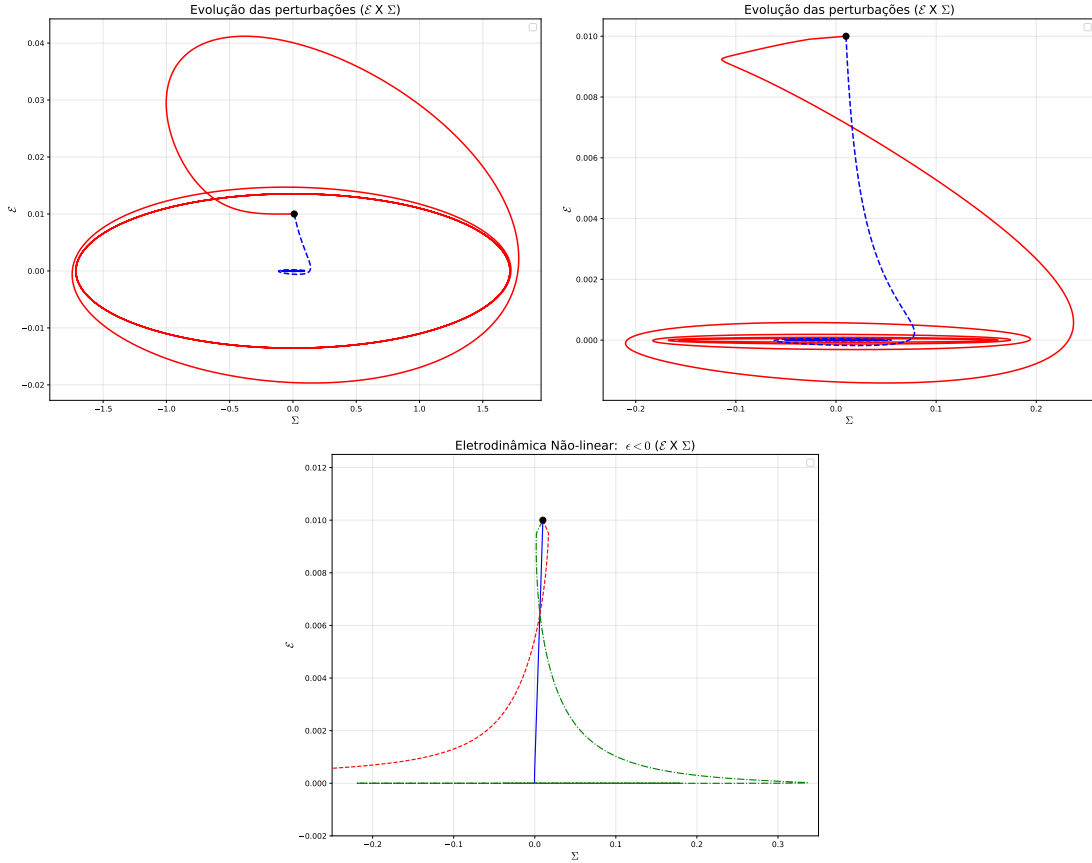


Figura 14 – Retratos de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Todos os gráficos foram feitos para $B_0 = 0.27 < B_2$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$ e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Note a instabilidade gerada quando $c_s^2 < 0$, e a recuperação do comportamento usual enquanto $B \rightarrow 0$. À medida que os casos avançam, a região na qual $c_s^2 > 0$ se torna cada vez menores, uma vez que o intervalo $[B_{\text{num}, c_s^2}, B_2]$ se torna cada vez maior.

Ao avaliar a região em que $B_2 < B_0 < B_3$ é preciso avaliar o comportamento em diferentes situações. Note que para $\epsilon > 0$ existem duas regiões adicionais, uma na qual as curvas alcançam um máximo anterior ao valor de B_{P_2} , e outra que parte de um mínimo com valores maiores que B_{P_2} levando a B_3 . O comportamento das soluções de $\epsilon > 0$ nestas duas regiões podem ser observadas na figura (15).

Note que o comportamento ao atingir um máximo para o campo magnético é muito semelhante ao que ocorre ao atingir um mínimo, estabelecendo uma elipse limite para o valor das perturbações. As perturbações voltam a evoluir se for permitido que o campo magnético volte a colapsar. É perceptível também que ao alcançar B_3 , as perturbações em Σ começam a aumentar, como indicado pelo achatamento

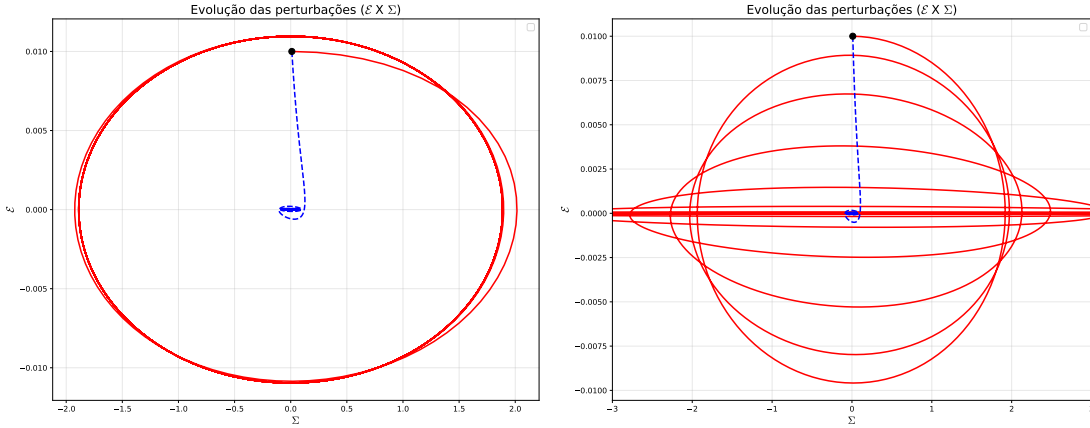


Figura 15 – Retrato de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Curvas para $\epsilon > 0$, escolhendo a região em que $B_2 < B_0 = 0.42 < B_{P_2}$ com $a_0 = 6.95$ (esquerda) e a região em que $B_{P_2} < B_0 = 0.46 < B_3$ com $a_0 = 7.2$ (direita). Tem-se que $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$ em ambos diagramas. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

horizontal das elipses. Eventualmente, as perturbações se tornam instáveis devido ao limite $\rho + p = 0$. Como \mathcal{E} sempre é rapidamente atenuada, isso controla o crescimento de Ψ , e desta forma o crescimento de Σ , mas, a indeterminação no valor B_3 ainda se mantém. A figura (16) mostra o comportamento da terceira região relevante entre as duas verticais, em que todas as curvas alcançam B_3 , ficando evidente a instabilidade neste limite superior.

A região em que $B_0 > B_3$ não apresenta comportamento qualitativo diferente do que o já discutido, o campo magnético diminui levando a B_3 , e à instabilidade das perturbações. Para o caso III ainda é possível acessar a escolha $w = -1/4$, indicando a transição entre casos. Tem-se que $B_{\text{num}, c_s^2} = B_2$, em que não existe região para $c_s^2 < 0$, uma vez que para esta escolha a velocidade do som torna-se simplesmente $c_s^2 = 1/3$ como pode ser verificado a partir da equação (4.156). Nesta escolha, $B_{P_2} = B_3$, e, portanto, o comportamento qualitativo entre B_2 e B_3 é diferente, o que pode ser observado na figura (17).

Perceba que as curvas não sentem a instabilidade ao se aproximar de B_3 , devido à mudança do comportamento qualitativo do equilíbrio B_3 . Agora, repelindo as curvas de $\epsilon > 0$ e desacelerando a aproximação das curvas com $\epsilon \leq 0$.

- Caso IV

Nesta situação, o intervalo em que $c_s^2 < 0$ aumenta, de forma que a instabilidade observada no caso II para as perturbações na região $B_0 < B_2$ aumenta, mas o comportamento qualitativo é similar ao observado anteriormente. No entanto, as curvas fechadas permitidas quando $\epsilon > 0$ estão totalmente imersas na região $c_s^2 < 0$, nunca alcançando uma região de estabilidade, levando à divergência das perturbações.

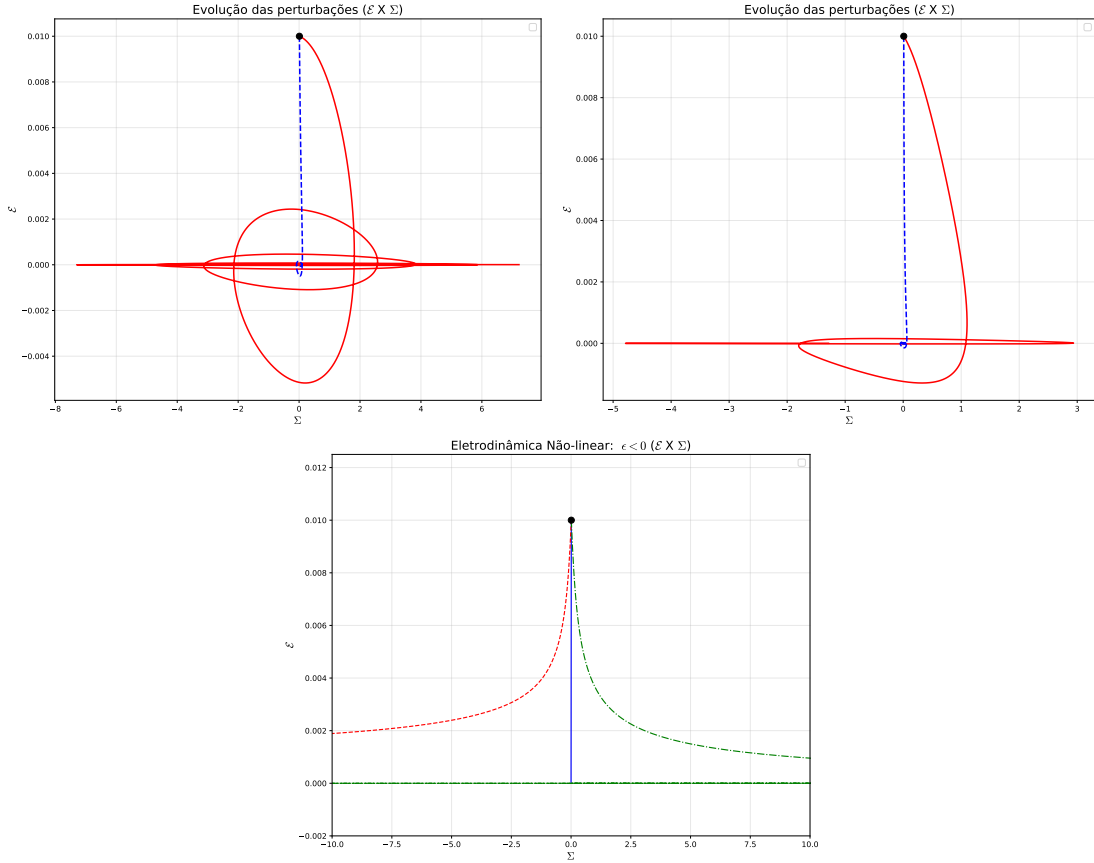


Figura 16 – Retratos de fase para o caso III em que $w = -1/8$. Curvas para $B_2 < B_0 = 0.45 < B_3$ e $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Em todas as outras regiões, as curvas eventualmente alcançam B_3 , e sem a presença de B_{P_2} para desacelerar a aproximação das curvas, a instabilidade observada nos outros casos se mantém. A única mudança relevante na transição entre casos é que $B_{P_2} = B_2$, de forma que não existem mais curvas fechadas para $\epsilon > 0$ ou a bacia de atração das selas sobre B_2 observadas na figura (4).

- Caso V

O comportamento qualitativo do campo magnético pode ser observado na figura (5). Agora, a vertical B_2 está presente em campos magnéticos maiores do que B_3 , em uma região em que $\rho + p < 0$. Todas as curvas com condições iniciais entre B_3 e B_2 têm $c_s^2 < 0$, e divergem ao alcançar B_2 com o aumento do campo magnético. Se escolhermos curvas além de B_2 , elas rapidamente recaem em direção a B_2 causando a divergência das perturbações, uma vez que $c_s^2 \rightarrow \infty$. As soluções com $B_0 < B_3$ se comportam similarmente ao caso II, no entanto, como c_s^2 não apresenta valores tão

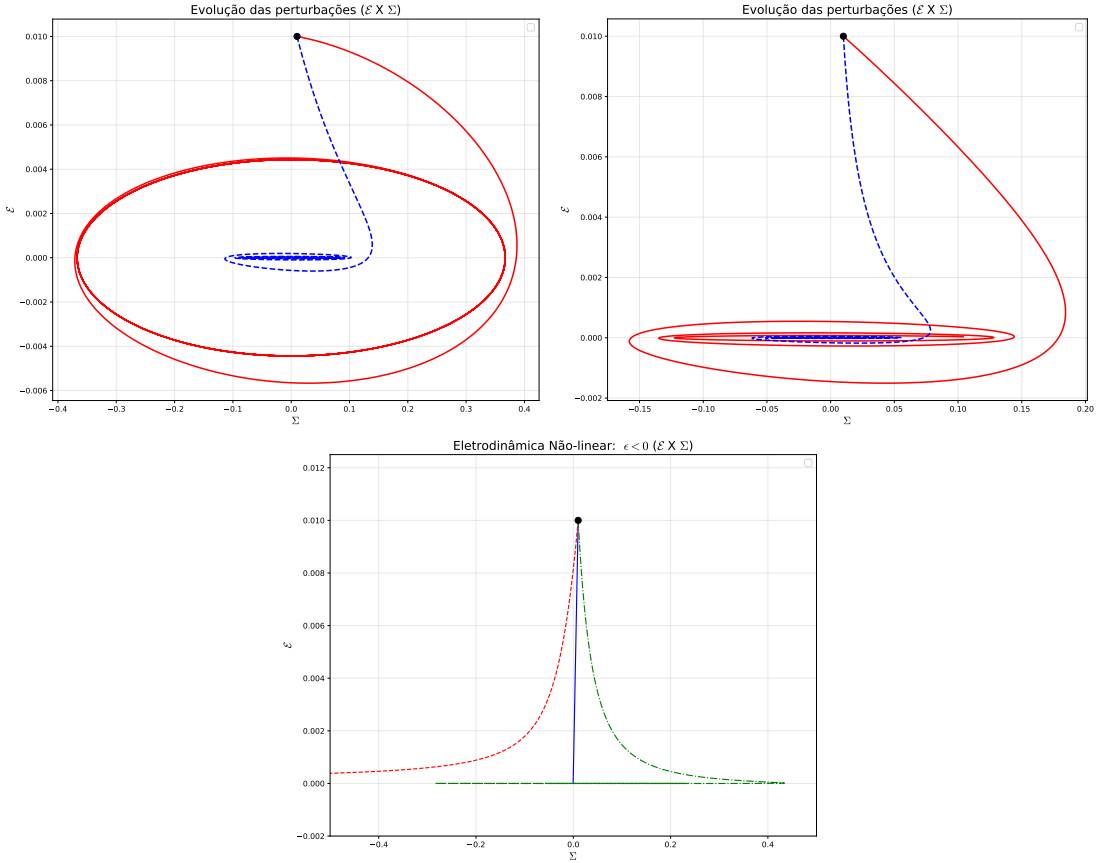


Figura 17 – Retratos de fase para a transição entre II e III em que $w = -1/4$. Curvas para $B_2 < B_0 = 0.4 < B_3$ e $\dot{B} > 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Todos avaliados na região em que $B_0 < B_2$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

elevados próximo de B_3 . O crescimento das instabilidades não é tão acentuada para as curvas de $\epsilon < 0$, mas o tempo em que as curvas passam em regiões com $c_s^2 < 0$ causa a amplificação das perturbações. Observe a figura (18).

- Caso VI

A diferença chave entre o caso V e VI ocorre devido a $B_2 \rightarrow \infty$, ocasionando a diminuição das regiões em que podemos analisar uma evolução física das perturbações. Agora, B_{num, c_s^2} é muito pequeno e B_2 é muito grande, portanto, a maior parte do diagrama de fase (6) apresenta $c_s^2 < 0$. Este também é o primeiro caso em que $w > 1/4$, ou seja, não há a divergência de λ ou c_s^2 . As instabilidades aqui ocorrem devido à presença de B_3 , levando ao crescimento das perturbações a partir de Ψ . Para evitar estas instabilidades seria necessário avaliar casos em que $\alpha < 0$, eliminando a presença da vertical B_3 , estes casos não foram analisados perturbativamente neste

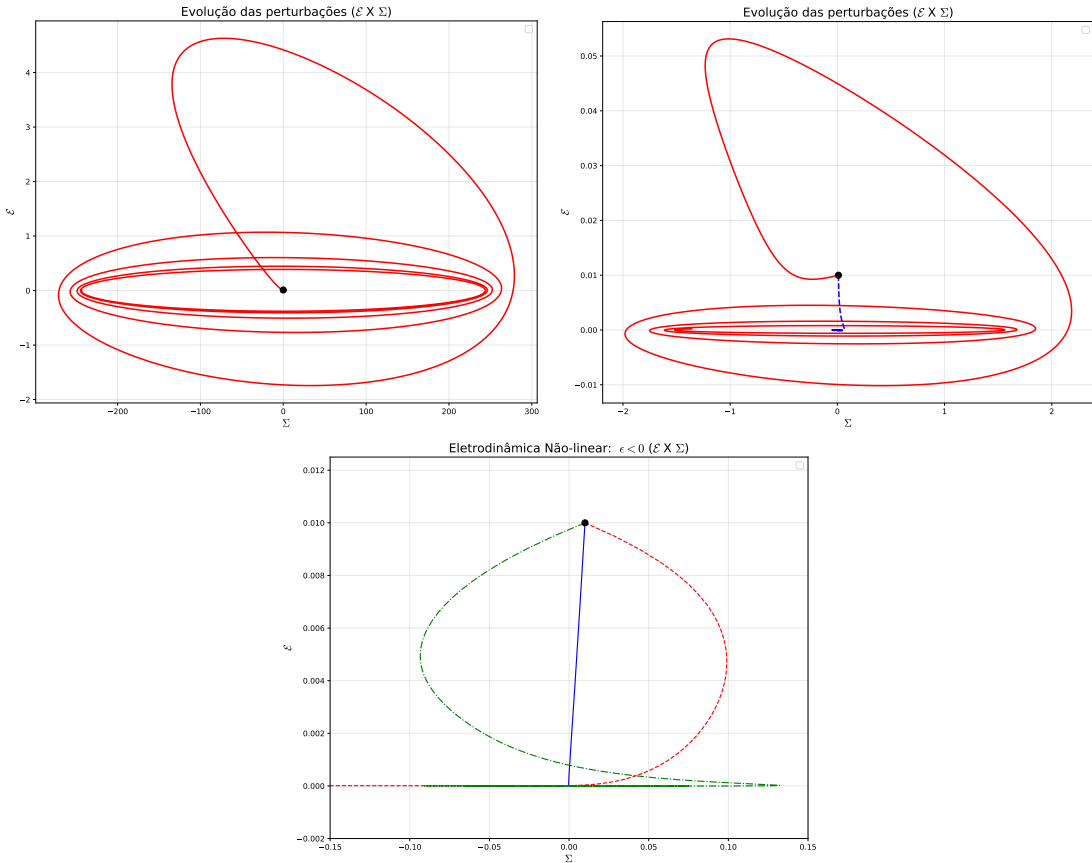


Figura 18 – Retratos de fase para o caso V em que $w = 1/8$. Curvas para $B_0 = 0.45 < B_3$ e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama de fase é para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 10.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

trabalho, mas, o comportamento qualitativo do campo magnético pode ser observado na figura (7). Outra possibilidade surge ao avaliar $\sigma \rightarrow 1$ de forma que $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$, e $B_3 \rightarrow \infty$. Esta discussão será realizada nas próximas seções, no entanto, é de interesse avaliar primeiro o limite de campos fracos.

4.4.3 Aproximação de campos fracos

Uma vez que as perturbações são mais comportadas enquanto o campo magnético se aproxima de $B \rightarrow 0$, é de interesse avaliar a aproximação de campos fracos das equações dinâmicas e buscar informações qualitativas sobre o sistema dinâmico. Estas aproximações são válidas apenas para $\epsilon \leq 0$. Note que $\epsilon > 0$, apresenta mínimos maiores do que zero em todos os diagramas de fase. No limite em que $B \approx 0$ é possível simplificar as relações para se obter

$$\rho + p \approx \frac{2}{3}(1 + \sigma)B^2, \quad (4.161)$$

e, como $c_s^2 \approx 1/3$, o vínculo para a perturbação na aceleração se torna simplesmente

$$\Psi \approx \frac{2(m + 3\epsilon)}{3m(1 + \sigma)} \frac{\mathcal{E}}{B^2}. \quad (4.162)$$

Mesmo que $B \rightarrow 0$, é possível que Ψ não cresça se \mathcal{E} decair mais rapidamente do que um fator de $1/B^2$. A equação de \dot{B} deve ser avaliada para $\epsilon = 0$ e $\epsilon < 0$ separadamente, pois o fator dominante nas equações é diferente. Para $\epsilon = 0$ tem-se que

$$\dot{B} \approx \pm 2B^2 \sqrt{\frac{1 + \sigma}{6}}, \quad (4.163)$$

e, para $\epsilon < 0$

$$\dot{B} \approx \pm 2|1 - 4\tilde{\alpha}B_0^2| \sqrt{\frac{-\epsilon}{a_0^2 B_0}} B^{3/2}. \quad (4.164)$$

Estas relações podem ser integradas analiticamente obtendo uma lei de potência para a evolução do campo magnético. Da relação (4.163) percebe-se que a aproximação depende apenas da intensidade do campo elétrico em relação ao campo magnético, ou seja, do valor de σ . Uma vez que considera-se o fator de ϵ , a dependência no valor de w reaparece.

$$\dot{\Sigma} = \left(-1 + \frac{2(m + 3\epsilon)}{3(1 + \sigma)} \frac{1}{B^2} \right) \mathcal{E} - \frac{2}{3} \theta \Sigma, \quad (4.165)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{1}{3}(1 + \sigma)B^2 \Sigma - \theta \mathcal{E}. \quad (4.166)$$

Nesta aproximação, o sinal negativo para \dot{B} deve ser escolhido para que $\theta > 0$. Desta forma, existem dois fatores de amortecimento em ambas as equações. Note que, não existe fator que proporcione o crescimento de \mathcal{E} justificando sua diluição em um universo em expansão. Note que $\dot{\Sigma}$ cresce enquanto $B > B_*$, em que B_* é o valor crítico no qual o fator proporcional a \mathcal{E} muda de sinal. Isso causa um balanceamento, e atenua sua divergência. No entanto, se $m + 3\epsilon < 0$, a derivada será sempre negativa, e, portanto a perturbação irá atingir valores cada vez mais negativos. Esta propriedade justifica a razão das curvas para $m < 3|\epsilon|$ sempre apresentarem um crescimento de Σ . O caso em que $\epsilon = 0$ depende apenas de σ , portanto, o comportamento das perturbações pode ser observado para diferentes intensidades. Observe a figura (19).

Em quanto $\mathcal{E} \rightarrow 0$, é possível notar a mudança de sinal no primeiro fator de $\dot{\Sigma}$, de forma que no qual Σ começa a crescer. O aumento de Σ intensifica o amortecimento, e as perturbações passam a ser diluídas novamente. Agora, o caso em que $\epsilon < 0$ é dependente do valor de w , e o comportamento é bastante similar ao que observamos nas análises anteriores, uma vez que para curvaturas negativas, o campo cai a zero rapidamente, observe a figura (20).

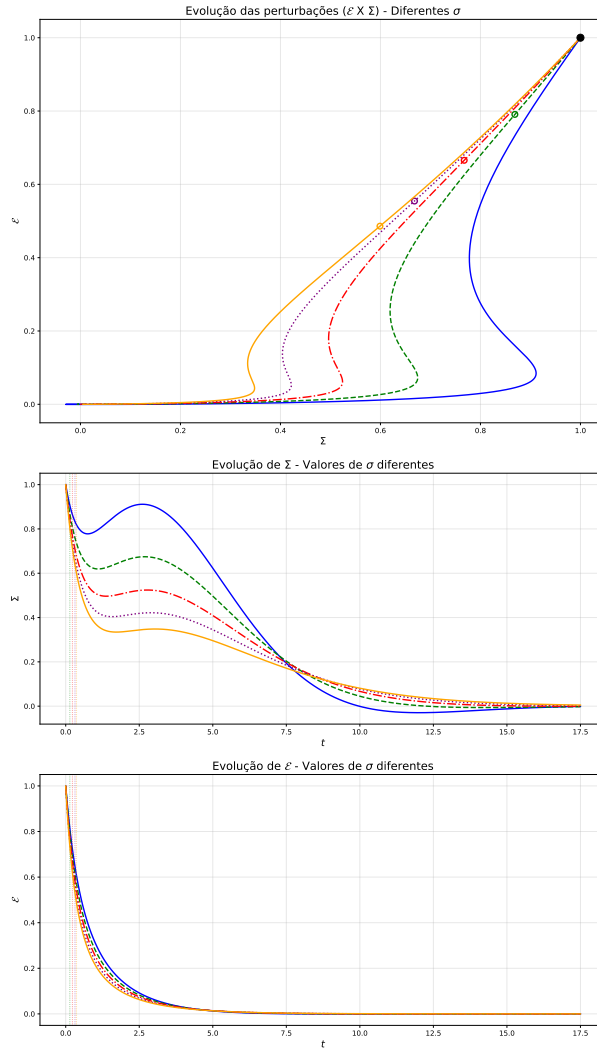


Figura 19 – Evolução das perturbações na aproximação de campos fracos com $\epsilon = 0$. O primeiro é o retrato de fase $\Sigma \times \mathcal{E}$, segundo a evolução de Σ em função do tempo, e o terceiro a evolução de \mathcal{E} em função do tempo. As diferentes curvas apresentam diferentes valores de σ . Para $\sigma=0$ a curva sólida azul, para $\sigma = 0.25$ a curva verde tracejada, para $\sigma = 0.5$ a curva vermelha ponto-tracejada, para $\sigma = 0.75$ a curva roxa pontuada, e para $\sigma = 1$ a curva sólida laranja. Os círculos nas curvas indicam o instante em que $B = B_*$, e similarmente, as retas verticais no segundo e terceiro gráfico indicam este mesmo instante. As curvas foram feitas para $B_0 = 1.0$ e $a_0 = 1.0$ com $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (1.0, 1.0)$.

Note que a instabilidade das perturbações parece aumentar com a velocidade com a qual $\mathcal{E} \rightarrow 0$, ou seja, com o quão rápido o campo magnético se anula, isso deve-se ao fato de que Ψ cresce muito rapidamente, de forma que o decaimento de \mathcal{E} não é suficiente para manter a estabilidade das perturbações quando temos curvas de $\epsilon < 0$. Agora, analisemos os limites nos quais $\sigma = 0$ e $\sigma = 1$, respectivamente UM e UEN.

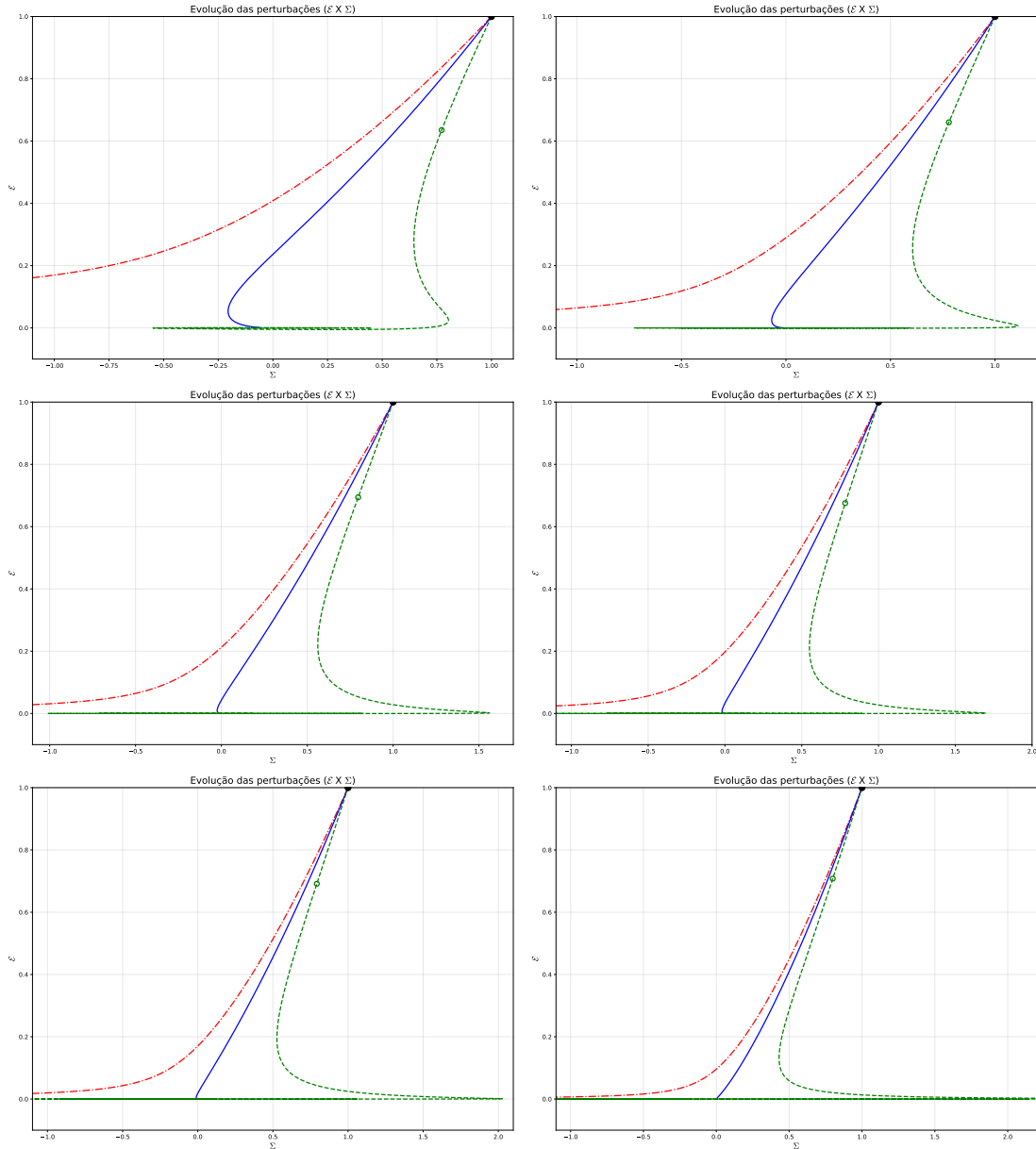


Figura 20 – Retratos de fase para todos os casos com $\epsilon < 0$ em uma aproximação de campos fracos. O primeiro para $w = -1$, o segundo para $w = -1/2$, o terceiro para $w = -1/8$, o quarto para $w = -1/24$, o quinto para $w = 1/8$ e o sexto para $w = 3/4$. Para o diagrama em que $\epsilon < 0$ são apresentadas curvas para $m < 3|\epsilon|$ (tracejada vermelha), $m = 3|\epsilon|$ (sólida azul) e $m > 3|\epsilon|$ (verde ponto-tracejada). Os círculos nas curvas indicam o instante em que $B = B_*$. Todas as curvas são feitas tal que $B_0 = 1.0$ e $a_0 = 1.0$, e a condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (1.0, 1.0)$.

4.4.4 Universo magnético e o universo estatístico nulo

O universo magnético é obtido a partir do limite em que $\sigma = 0$. O sistema dinâmico que controla o campo magnético não apresenta divergências, ou seja, as verticais B_2 e B_3 não exercem efeito sobre a dinâmica. No entanto, ainda é possível obter regiões em que

$c_s^2 < 0$ e a sua divergência amplificando as perturbações. Note que

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{1 - 80\alpha B^2}{1 - 16\alpha B^2}. \quad (4.167)$$

O ponto de equilíbrio é um centro em $B = \frac{1}{2\sqrt{6\alpha}}$, e gera curvas com máximo para o campo magnético para toda curvatura espacial, vide figura (8). Escolher $B_0 > \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}$ levará eventualmente à divergência de c_s^2 , e valores no intervalo $\frac{1}{4\sqrt{5\alpha}} < B_0 < \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}$ iniciam-se em uma região com $c_s^2 < 0$. Realizar a escolha $B_0 < \frac{1}{4\sqrt{5\alpha}}$ leva a uma dinâmica mais estável, para $\epsilon \leq 0$ atinge-se rapidamente o limite de campos fracos estudados anteriormente, e, para $\epsilon > 0$ a dinâmica ocorre rapidamente até alcançar um mínimo para o campo magnético. O comportamento pode ser observado na figura (21).

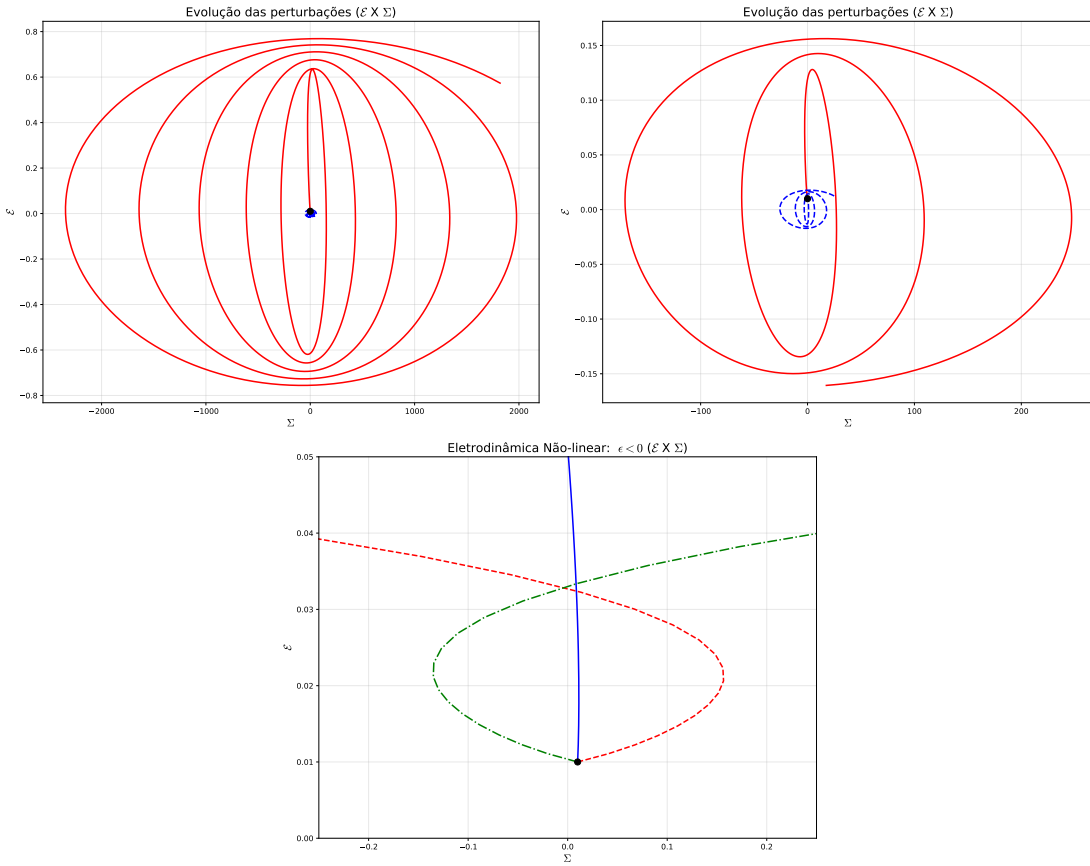


Figura 21 – Retratos de fase para o universo magnético com $\sigma = 0$ e $\alpha = 0.5$. Todos os retratos de fase são para $B_0 = 0.25$, e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 100.0$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

Observando a figura (21), é perceptível que $\epsilon < 0$ gera o rápido crescimento das perturbações, uma vez que é necessário que $\mathcal{E} \rightarrow 0$ mais rapidamente do que B , desta forma o crescimento de Σ é amplificado devido à divergência de Ψ . Para $\epsilon \geq 0$ as perturbações são amplificadas devido à região em que $c_s^2 < 0$, no entanto, ao sair desta

região a amplificação é desacelerada. Perceba que devido ao valor mínimo para o campo magnético, as perturbações são mais amplificadas em um universo com curvatura espacial positiva.

Para o limite superior de intensidade do campo elétrico, $\sigma \rightarrow 1$, a relação entre o fator de escala e o campo magnético é dado pela relação (2.33). As equações dinâmicas devem ser estudadas utilizando $\tilde{\alpha} = 0$, e a definição do parâmetro w não é válida. Para descrever a dinâmica das perturbações é necessário avaliar as relações

$$\dot{B}^2 = \frac{4B^2}{\left(1 + \frac{32}{3}\beta B^2\right)^2} \left(\frac{B^2}{3} \left(1 + \frac{16\beta}{3}B^2\right) - \frac{\epsilon B}{a_0^2 B_0} e^{\frac{16\beta}{3}(B^2 - B_0^2)} \right), \quad (4.168)$$

$$\theta = -\frac{3\dot{B}}{2B} \left(1 + \frac{32}{3}\beta B^2\right). \quad (4.169)$$

A evolução de B pode ser observada a partir do diagrama em (9). A velocidade do som pode ser escrita como

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{1 - 32\beta B^2}{1 + \frac{32}{3}\beta B^2}. \quad (4.170)$$

Para evitar a divergência de c_s^2 , o valor de β será tomado como $\beta > 0$. Note que $\beta < 0$ cria uma região para valores de B_0 maiores em que $c_s^2 > 0$, no entanto, todas estas soluções levam rapidamente para a divergência, apresentando um comportamento analítico ao observado na figura (5) para valores $B_0 > B_3$. Se $\beta > 0$, deve-se preocupar apenas com o sinal do numerador, ou seja, o limite $B = \frac{1}{4\sqrt{2\beta}}$. O ponto de equilíbrio nesta situação é sempre um centro em $B = \frac{1}{4\sqrt{\beta/3}}$, ou seja, a situação do universo magnético se repete, para observar a dinâmica completa, inevitavelmente, ultrapassa-se uma região em que $c_s^2 < 0$. O comportamento pode ser observado na figura (22).

Para os casos em que $\epsilon \leq 0$ as perturbações são muito menos amplificadas do que para um eletromagnetismo linear, isso se dá devido ao fato do campo magnético cair lentamente a zero. Para $\epsilon > 0$, as perturbações em Σ são muito amplificadas em relação ao caso linear, isso se dá devido ao período com $c_s^2 < 0$. Note também que o caso linear tem a evolução do campo magnético mais restrita do que o caso não-linear para esta escolha. É importante apontar que o caso em que $\sigma = 1$, indica uma transição suave entre o limite de campos fracos e o limite de campos fortes. Nestes limites é observado que um universo com parâmetro da equação de estado $\lambda = -1$, é levado para um universo com parâmetro $\lambda = 1/3$. Ou seja, existe uma transição suave entre a equação de estado $p = -\rho$ e a situação usual de um universo dominado por radiação. Este universo também apresenta um crescimento acelerado para o fator de escala, a partir de um fator exponencial, vide a equação (2.33). Não deve ser ignorada a potencialidade de um UEN ser posto a teste como modelo inflacionário devido a estas características.

Ao fim desta análise fica claro que a evolução das perturbações podem ser amplificadas fortemente pelas não-linearidades do modelo em geral, principalmente devido

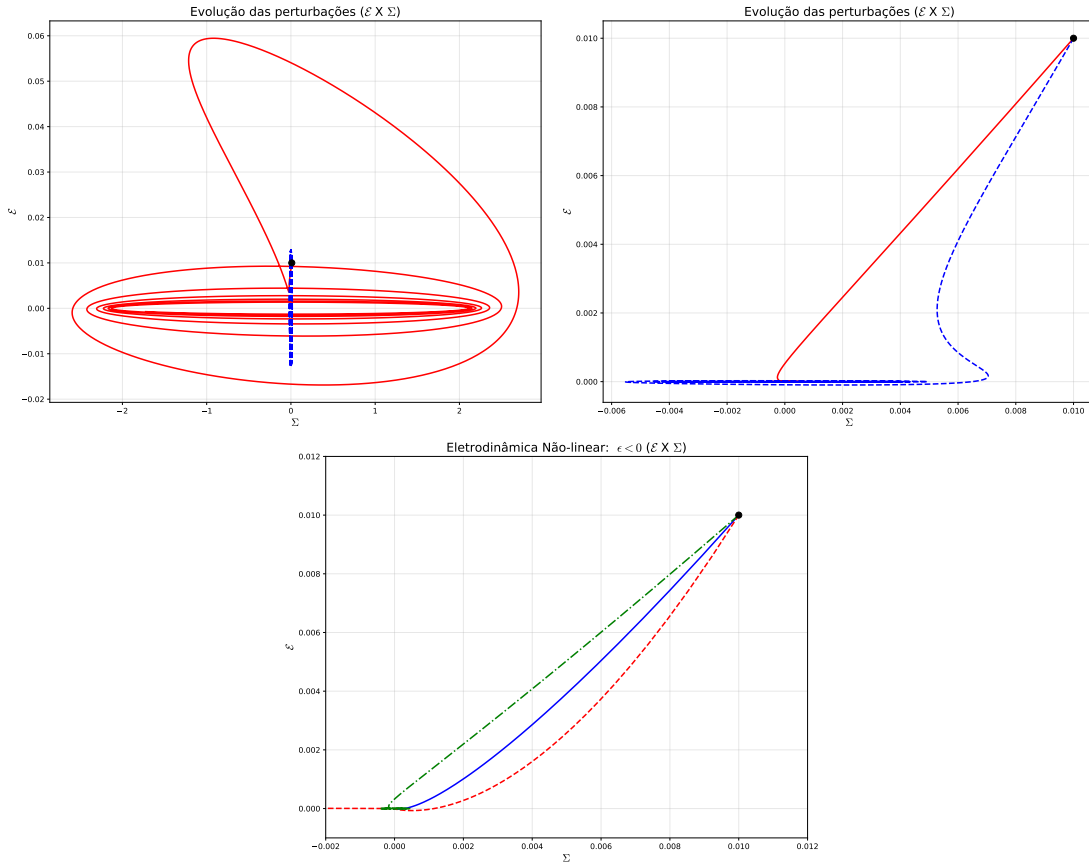


Figura 22 – Retratos de fase para o universo estatisticamente nulo com $\sigma = 1$ e $\beta = 1.0$. Todos os retratos de fase são para $B_0 = 1.0$, e $\dot{B} < 0$ tal que $\theta > 0$. O primeiro diagrama para $\epsilon > 0$ e $a_0 = 0.689$, o segundo para $\epsilon = 0$ e $a_0 = 1.0$, e o terceiro para $\epsilon < 0$ e $a_0 = 1.0$. A condição inicial para as perturbações é $(\Sigma_0, \mathcal{E}_0) = (0.01, 0.01)$.

às instabilidades geradas por $c_s^2 < 0$ e sua divergência. Assim como, é perceptível que as perturbações podem apresentar instabilidades se o campo magnético, ou a relação $\rho + p \rightarrow 0$, vai a zero rapidamente. É perceptível que a presença do campo elétrico pode fornecer estabilidade para a evolução das perturbações, uma vez que se com valor de σ suficiente, é possível que a divergência nos parâmetros da equação de estado e c_s^2 sejam evitadas.

5 Considerações Finais

A discussão apresentada neste trabalho leva à generalização do procedimento de Tolman-Ehrenfest para a tomada de médias espaciais, garantindo a compatibilidade entre uma ENL e um universo homogêneo e isotrópico. Sob condições adequadas, a abordagem usual é recuperada, particularmente para Lagrangeanas dependentes apenas do invariante F . Neste caso, a dependência espacial do invariante G não desempenha papel. Além disso, da forma geral da pressão anisotrópica e do fluxo de calor, as mesmas condições de compatibilidade podem ser obtidas sempre que a Lagrangeana é separável em uma parte dependendo apenas de F e outra dependendo apenas de G .

A análise qualitativa indica a possibilidade de uma fase de expansão acelerada. Sob diferentes escolhas da curvatura espacial, é possível obter universos que expandem indefinidamente para $\epsilon \leq 0$, assim como universos com um tamanho máximo que eventualmente volta a colapsar ao alcançar o limite superior, no caso em que $\epsilon > 0$. O limite superior da NEC (em termos de B) corresponde a uma indeterminação no sistema construído para o caso do UQM. É esperado que esta indeterminação seja removida através da aplicação de técnicas especiais da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos singulares.

Resultados conhecidos relativos ao UM são recuperados e complementados pela análise qualitativa do sistema dinâmico. Neste paradigma, tanto a NEC quanto a SEC podem ser violadas, e soluções apresentando ricochetes do fator de escala e universos cíclicos são obtidas. Também analisamos o regime oposto, quando se toma $F = 0$. Neste limite, a NEC nunca é violada, mas a SEC ainda é, permitindo a existência de fases de expansão acelerada. É válido mencionar que a violação das condições de energia em uma análise de fluido efetivo indica que a dinâmica de fundo permite, em geral, comportamento não usual, mas, por si só, não indica se a teoria de campos é livre de fantasmas ou instabilidades de gradiente. Claramente, no regime de campos fracos, nosso modelo se reduz suavemente à teoria de Maxwell, portanto, herda sua estabilidade.

Durante a análise perturbativa, é perceptível que quando há o decaimento do campo magnético, é possível que as perturbações sejam totalmente diluídas em um universo em expansão. Essa diluição ocorre de maneira mais lenta do que o esperado para um universo cuja fonte seja uma eletrodinâmica linear. Também é possível que resquícios destas perturbações ainda perceptíveis atualmente caso o universo apresente uma curvatura espacial levemente positiva, uma vez que o campo magnético alcança um valor mínimo não-nulo. Outro aspecto importante desta formulação é a imposição de um valor mínimo de σ para o qual a transição entre o limite de campos fortes e fracos seja suave, ou seja, indicando a necessidade de um valor mínimo para o campo elétrico médio nesta formulação.

A violação da NEC implica, para as perturbações, uma região de instabilidade,

causando o crescimento de seus valores. No entanto, caso as perturbações decaiam mais rapidamente do que o campo se aproxima do valor em que $\rho + p \rightarrow 0$, a instabilidade é evitada. Isso pode ser observado durante a análise de campos fracos realizada. Outra causa de instabilidade nas perturbações é a divergência de c_s^2 que ocorre para diferentes valores do campo magnético em cada caso considerado. No entanto, valores muito pequenos de α podem levar esta divergência a valores muito altos para o campo magnético. Para avaliar a relevância da presença desta divergência seria necessário avaliar os dados observacionais para os valores do campo magnético primordial, assim como os valores esperados para os parâmetros α e β . Em geral, as perturbações são diluídas sempre que o campo magnético é diluído pela expansão. Em regiões nas quais percebe-se que o campo magnético cresce em direção a valores maiores, ou a valores singulares, as instabilidades levam ao crescimento das perturbações.

Mesmo que este trabalho seja qualitativo, ele sugere possíveis caminhos observacionais para vincular o espaço de parâmetros do UQM. A força e o espectro dos campos magnéticos primordiais são vinculados pelas anisotropias da CMB [107, 108] e pelas medidas de rotação de Faraday [109, 110], que indiretamente vinculam combinações de α , β , e da magnitude inicial do campo magnético, B_0 . Além disso, desvios na história da expansão primordial induzidas pela NEC/SEC podem deixar resquícios nas perturbações primordiais e na era de reaquecimento inflacionário. Um confronto direto com a CMB e os dados de estrutura de larga-escala, assim como vínculos para os cenários de magneto-geneses, é deixado para trabalhos futuros.

Ao contrário da cosmologia, onde os campos eletromagnéticos são pequenos, espera-se que eles sejam presentes e com grande intensidade no interior de estrelas. Se este modelo é aplicado no contexto do colapso gravitacional, o padrão peculiar seguido pelas condições de energia pode levar a resultados inesperados, possivelmente comportamentos cíclicos ou ricochetes no interior da estrela. Outro objetivo futuro para o desenvolvimento deste trabalho é analisar Lagrangeanas nas quais termos como γFG estejam presentes, o que permitiria a extensão a modelos conhecidos, como o modelo de Born-Infeld. Por fim, deixamos o estudo destes modelos em outras métricas de fundo para trabalhos futuros.

Apêndices

APÊNDICE A – A equivalência entre o formalismo JEK e o de Einstein

Para demonstrar a equivalência entre ambos os formalismos é necessário partir das identidades de Bianchi; tem-se que

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta;\lambda} + R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha;\beta} + R^{\mu\nu}{}_{\beta\lambda;\alpha} = 0, \quad (\text{A.1})$$

ao contrair os índices ν e λ obtém-se a seguinte expressão

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu;\nu} - R^{\nu\mu}{}_{\nu}{}^{\alpha;\beta} + R^{\nu\mu}{}_{\nu}{}^{\beta;\alpha} = 0,$$

em que foram utilizadas simetrias do tensor de Riemann na forma

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} = R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

e, também

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} = -R^{\nu\mu\alpha\beta} = R^{\nu\mu\beta\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Podemos então reescrever a equação (A.1) após a contração, usando a definição do tensor de Ricci

$$R^{\mu\alpha} = R^{\nu\mu}{}_{\nu}{}^{\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

de forma que a primeira contração da identidade de Bianchi é dada por

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = R^{\mu\alpha;\beta} - R^{\mu\beta;\alpha} \equiv R^{\mu[\alpha;\beta]}. \quad (\text{A.5})$$

Também será necessário utilizar a segunda contração da identidade de Bianchi, portanto, contraindo α e μ na equação (A.5), tem-se que

$$R^{\mu\beta}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}{}^{;\beta} - R^{\mu\beta}{}_{;\mu}.$$

Note que a primeira derivada covariante no lado direito se torna uma derivada simples uma vez que temos a definição do escalar de Ricci como

$$R = R^{\mu}{}_{\mu}. \quad (\text{A.6})$$

Usando a equação (A.4) e a expressão (A.6) obtemos a segunda contração como

$$R^{\beta\nu}{}_{;\nu} = R^{;\beta} - R^{\nu\beta}{}_{;\nu}. \quad (\text{A.7})$$

A expressão (A.7) indica uma propriedade importante do formalismo da RG. Note que, usando a métrica para baixar o índice no primeiro termo à direita da equação (A.7) tem-se que

$$R^{\beta\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}R_{,\mu}g^{\mu\beta} = \left(R^{\beta\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\beta\nu}\right)_{;\nu} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Assumindo a validade das equações da RG, é possível afirmar

$$R^{\beta\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\beta\nu} = -\kappa T^{\beta\nu}, \quad (\text{A.9})$$

em que κ é uma constante de proporcionalidade construída usando a velocidade da luz c e a constante de gravitação universal G . Podemos então comparar a equação (A.9) com o resultado obtido, e, assim, garantir a conservação do tensor energia-momento da seguinte forma

$$T^{\beta\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Esta é a base para as equações do formalismo da RG. De forma a mostrarmos a equivalência entre os formalismos é necessário introduzir a representação JEK a partir da decomposição do tensor de Riemann em suas partes irredutíveis, o que é apresentado na próxima seção.

A.1 As equações quasi-Maxwellianas

Para obter as equações desejadas é preciso utilizar a identidade de Bianchi contraída (A.5), mas escrita em termos do tensor de Weyl, $W^{\mu\nu\alpha\beta}$, este tensor é definido de modo que tenha as mesmas simetrias do tensor de Riemann, mas sem traço. Podemos obtê-lo a partir do tensor de Riemann pela seguinte decomposição em partes irredutíveis

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + \frac{1}{2}R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - \frac{1}{2}R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

em que é necessário simplificar a notação da expressão (A.11). Escrevendo a equação (A.11) com todos os índices contravariantes e calculando a sua divergência, tem-se que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}(R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu})_{;\nu} + \frac{1}{2}(R^{\beta\nu}g^{\alpha\mu})_{;\nu} - \frac{1}{2}(R^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})_{;\nu} + \\ - \frac{1}{2}(R^{\beta}{}_{\mu}g^{\alpha\nu})_{;\nu} - \frac{1}{6}(Rg^{\alpha\beta\mu\nu})_{;\nu}.$$

Uma vez que não se considera elementos de torção em nosso formalismo, pode-se considerar que a derivada covariante da métrica é nula por definição, desta forma podem ser retiradas das derivadas, isso inclui os termos com $g^{\alpha\beta\mu\nu}$ pois

$$g^{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}, \quad (\text{A.12})$$

portanto, a divergência do tensor de Riemann pode ser escrita como

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}g^{\beta\nu}R^{\alpha\mu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}R^{\beta}{}_{\mu;\nu} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu}.$$

Esta expressão pode ser simplificada reorganizando fatores, e escrevendo as derivadas em sua forma contravariante, tem-se que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\beta}{}_{\nu}R^{\alpha\mu;\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\nu}R^{\beta\mu;\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu},$$

em que se usa a definição da delta de Kronecker, e aplicando a sua propriedade, tem-se que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\alpha\mu;\beta} - \frac{1}{2}R^{\beta\mu;\alpha} + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu}.$$

Utilizando a definição de anti-simetrização podemos escrever que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu}.$$

Para lidar com o terceiro e quarto termos é possível utilizar a segunda contração da identidade de Bianchi (A.8), obtém-se que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{4}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{;\nu} - \frac{1}{4}g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}R_{;\nu} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu},$$

escrevendo as derivadas de maneira contravariante e utilizando a propriedade das deltas de Kronecker tem-se que

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}R^{;\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\beta}R^{;\alpha} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu}.$$

Aplicando novamente a anti-simetrização

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{4}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\alpha\beta\mu\nu}R_{;\nu}.$$

Agora, para lidar com o termo final é necessário utilizar a definição (A.12), podemos escrever

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{4}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} - \frac{1}{6}(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})R_{;\nu}$$

separando os termos, e levantando o índice da derivada covariante como feito anteriormente, obtemos

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{4}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]},$$

ou seja, podemos obter a divergência do tensor de Weyl como

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{12}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]}. \quad (\text{A.13})$$

Note que é necessário utilizar a equação (A.5) para simplificar a divergência do tensor de Riemann. A equação (A.13) é uma de duas equações que podem ser utilizadas para escrever as EQM em sua forma explícita, mas este formato não é necessário para demonstrar a equivalência do formalismo com a RG, mesmo que a segunda equação se faça necessária. Pode-se escrever a equação (A.13) em termos do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e seu traço T , tomando o traço da equação (A.9), contraindo os índices β e ν em (A.9), é possível obter que

$$R - \frac{1}{2}R\delta^\nu{}_\nu = -\kappa T^\nu{}_\nu,$$

usando que $T^\nu{}_\nu = T$ e, como estamos em um espaço-tempo de dimensão 4, tem-se $\delta^\nu{}_\nu = 4$, de forma que

$$R = \kappa T. \quad (\text{A.14})$$

Utilizando o resultado (A.14) e a equação (A.9) na equação (A.13), podemos escrever que

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} \left(-\kappa T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{2}\kappa g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]} \right) - \frac{\kappa}{12}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]},$$

distribuindo os termos, obtém-se

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{-\kappa}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{\kappa}{6}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]}. \quad (\text{A.15})$$

A partir das equações (A.13) e (A.15) podemos demonstrar a equivalência de ambos os formalismos. É também a partir destas duas equações que obtemos as EQM, sendo elas obtidas através das seguintes projeções independentes

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} v_\beta v_\mu h_\alpha{}^\sigma \quad (\text{A.16})$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} \eta^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta} v_\mu v_\lambda \quad (\text{A.17})$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda}{}_{\alpha\beta} v_\lambda \quad (\text{A.18})$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} v_\beta h_{\mu(\tau} h_{\sigma)\alpha} \quad (\text{A.19})$$

Antes de realizar as projeções, apresenta-se argumentos para demonstrar a equivalência entre a RG e o sistema formado pelas equações (A.13) e (A.15).

A.2 Demonstrando a equivalência entre os formalismos

Uma vez que as equações (A.13) e (A.15) fornecem a mesma informação, pode-se garantir que

$$\frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{12}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} = \frac{-\kappa}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{\kappa}{6}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]},$$

expandindo a antissimetrização, e também, evidenciando as derivadas covariantes em α e β tem-se que

$$\left(R_{\mu\alpha} - \frac{1}{6}g_{\mu\alpha}R + \kappa T_{\mu\alpha} - \frac{\kappa}{3}g_{\mu\alpha}T\right)_{;\beta} - \left(R_{\mu\beta} - \frac{1}{6}g_{\mu\beta}R + \kappa T_{\mu\beta} - \frac{\kappa}{3}g_{\mu\beta}T\right)_{;\alpha} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Uma vez que o traço da equação (A.9) resulta na relação (A.14), podemos mostrar que cada componente em parênteses na expressão (A.20) pode ser identificado como

$$\left(R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\alpha} + \kappa T_{\mu\alpha}\right)_{;\beta} - \left(R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\beta} + \kappa T_{\mu\beta}\right)_{;\alpha} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Para propagar as EQM é preciso estabelecer condições iniciais de segunda ordem para as equações diferenciais de terceira ordem dadas por (A.13) e (A.15). Essa propagação é equivalente à RG se se escolhe como condição inicial em uma superfície tipo espaço Σ em que seja válido o formalismo da RG. Isso é possível por meio da propagação da equação (A.21) temporalmente e espacialmente, fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = l$, em que $l = (1, 2, 3)$, obtém-se

$$\left(R_{\mu 0} - \frac{1}{2}Rg_{\mu 0} + \kappa T_{\mu 0}\right)_{;l} - \left(R_{\mu l} - \frac{1}{2}Rg_{\mu l} + \kappa T_{\mu l}\right)_{;0} = 0.$$

Note que outras escolhas de índice seriam equivalentes àquela, ou soluções triviais do problema. Agora, uma vez que toma-se como condição inicial a validade das equações de Einstein sobre uma superfície tipo espaço, a propagação espacial (termo com derivada covariante em l) é identicamente nula, restando então a seguinte expressão

$$\left(R_{\mu l} - \frac{1}{2}Rg_{\mu l} + \kappa T_{\mu l}\right)_{;0} = 0, \quad (\text{A.22})$$

ou seja, as componentes da equação de Einstein do tipo " μl " se propagam também temporalmente, uma vez que a relação é propagada temporalmente e espacialmente. Mas, ainda é necessário verificar se os componentes do tipo " $\mu 0$ " também se propagam. Para isso, utiliza-se a conservação do tensor momento-energia, tem-se da equação (A.10) que

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu 0}_{;0} + T^{\mu l}_{;l} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Como, na superfície tem-se a validade das equações de Einstein, pode-se escrever que

$$\left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2}g^{\mu 0}R\right)_{;0} = -\left(R^{\mu l} - \frac{1}{2}g^{\mu l}R\right)_{;l}. \quad (\text{A.24})$$

E uma vez que a relação (A.23) pode ser escrita como

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu 0}_{;0} - \frac{1}{\kappa}\left(R^{\mu l} - \frac{1}{2}g^{\mu l}R\right)_{;l} = 0,$$

é possível utilizar o resultado (A.24) para escrever esta expressão como

$$\kappa T^{\mu 0}_{;0} + \left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2}g^{\mu 0}R\right)_{;0} = 0,$$

ou seja, tem-se que

$$\left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2}g^{\mu 0}R + \kappa T^{\mu 0}\right)_{;0} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Desta forma a conservação do tensor momento-energia garante que as componentes da equação de Einstein da forma " $\mu 0$ " também são propagadas temporalmente, e não somente sobre a superfície. Desta forma, a validade das equações da RG sobre uma superfície do tipo espaço e a conservação do tensor energia-momento (que é consequência direta das identidades de Bianchi) garantem que as equações de Einstein são propagadas por todo o espaço tempo pelas EQM.

Referências

- [1] ELLIS, G. F. R. The standard cosmological model: Achievements and issues. *Foundations of Physics*, v. 48, n. 10, p. 1226, 2018.
- [2] GIARÈ, W. et al. *An overview of what current data can (and cannot yet) say about evolving dark energy*. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2502.10264>>.
- [3] SCHUTT, T. et al. *Dark Energy Survey Year 6 Results: Point-Spread Function Modeling*. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2501.05781>>.
- [4] VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the hubble tension—a review of solutions*. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 15, p. 153001, jul 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>>.
- [5] HU, J.-P.; WANG, F.-Y. Hubble tension: The evidence of new physics. *Universe*, v. 9, n. 2, 2023. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/9/2/94>>.
- [6] NOVELLO M. E BERGLIAFFA PEREZ, S. E. Bouncing cosmologies. *Physics Reports*, v. 463, n. 4, p. 127, 2008.
- [7] BRANDENBERGER, R.; PETER, P. Bouncing cosmologies: Progress and problems. *Foundations of Physics*, IOP Publishing, v. 47, n. 6, p. 797, jul 2017.
- [8] STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 126003, May 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.126003>>.
- [9] BAUM, L.; FRAMPTON, P. H. Turnaround in cyclic cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, p. 071301, Feb 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.071301>>.
- [10] NOVELLO, M.; ARAUJO, A. N.; SALIM, J. M. Cyclic magnetic universe. *International Journal of Modern Physics A*, v. 24, n. 30, p. 5639–5658, 2009.
- [11] MEDEIROS, L. G. Realistic cyclic magnetic universe. *International Journal of Modern Physics D*, v. 21, n. 09, p. 1250073, 2012.
- [12] SAKELLARIADOU, M. Quantum gravity and cosmology: an intimate interplay. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 880, n. 1, p. 012003, 2017.

- [13] PINTO-NETO, N.; SANTOS, G.; STRUYVE, W. Quantum-to-classical transition of primordial cosmological perturbations in de Broglie–Bohm quantum theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 85, p. 083506, 2012.
- [14] BISHOP, M.; MARTIN, P.; SINGLETON, D. Quantum gravity, the cosmological constant, and parity transformation. *Physics Letters B*, v. 845, p. 138173, 2023.
- [15] KRASIŃSKI, A. *Inhomogeneous Cosmological Models*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- [16] BOLEJKO, K.; KORZYŃSKI, M. Inhomogeneous cosmology and backreaction: Current status and future prospects. *International Journal of Modern Physics D*, v. 26, n. 06, p. 1730011, 2017.
- [17] BITTENCOURT, E.; GOMES, L.; SANTOS, G. Intrinsically symmetric cosmological model in the presence of dissipative fluids. *International Journal of Modern Physics D*, v. 30, n. 05, p. 2150033, 2021.
- [18] BITTENCOURT, E.; GOMES, L. G.; SANTOS, G. B. On the intrinsically flat cosmological models in a lattice. *Classical and Quantum Gravity*, v. 39, n. 22, p. 225008, 2022.
- [19] SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(r)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>>.
- [20] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom–non-phantom transition model and generalized holographic dark energy. *General Relativity and Gravitation*, v. 38, p. 1285 – 1304, 2006.
- [21] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Covariant generalized holographic dark energy and accelerating universe. *The European Physical Journal C*, v. 77, p. 528, 2017.
- [22] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: From $f(r)$ theory to lorentz non-invariant models. *Physics Reports*, v. 505, n. 2–4, p. 59–144, August 2011. ISSN 0370-1573.
- [23] CAPOZZIELLO, S. et al. Cosmography in $f(t)$ gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 84, p. 043527, Aug 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.043527>>.
- [24] CAI, Y.-F. et al. $f(t)$ teleparallel gravity and cosmology. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 79, n. 10, p. 106901, sep 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/10/106901>>.

- [25] MISHRA, R. K.; SHARMA, R. Comparative study of linear & non-linear $f(t)$ gravity models in bianchi type-iii space-time. *Astrophysics and Space Science*, v. 370, p. 2, 2025.
- [26] MISHRA, R. K.; SHARMA, R. Exploring $f(t)$ gravity dynamics & cosmological parameters. *Romanian Journal of Physics*, v. 70, p. 101, 2025.
- [27] LAZKOZ, R. et al. Observational constraints of $f(q)$ gravity. *Phys. Rev. D*, v. 100, p. 104027, 2019.
- [28] FRUSCIANTE, N. Signatures of $f(q)$ gravity in cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 103, p. 044021, 2021.
- [29] ATAYDE, L.; FRUSCIANTE, N. Can $f(q)$ gravity challenge Λ CDM? *Phys. Rev. D*, v. 104, p. 064052, 2021.
- [30] HEISENBERG, L. Review on $f(q)$ gravity. *Physics Reports*, v. 1066, p. 1–78, 2024.
- [31] BENGOCHEA, G. R.; FERRARO, R. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, p. 124019, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.124019>>.
- [32] KOBAYASHI, T. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, v. 82, n. 8, p. 086901, 2019.
- [33] MODIFIED gravity and cosmology. *Physics Reports*, v. 513, n. 1, p. 1–189, 2012.
- [34] PAVLOVIC, P.; SOSSICH, M. Cyclic cosmology in modified gravity. *Phys. Rev. D*, v. 95, p. 103519, 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.103519>>.
- [35] MOFFAT, J. Modified gravity (mog), cosmology and black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2021, n. 02, p. 017, 2021.
- [36] SARIDAKIS, E. et al. *Modified Gravity and Cosmology: An Update by the CANTATA Network*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2021. ISBN 9783030837150.
- [37] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. K. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. *Physics Reports*, v. 692, p. 1–104, June 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.06.001>>.
- [38] BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934.
- [39] AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Constraining nonlinear corrections to Maxwell electrodynamics using $\gamma\gamma$ scattering. *Physical Review D*, v. 99, 2019.

- [40] BREVIK, I. H.; CHAICHIAN, M. M.; TUREANU, A. Below the schwinger critical magnetic field value, quantum vacuum and gamma-ray bursts delay. *Physics Letters B*, v. 861, p. 139272, 2025.
- [41] HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of the dirac theory of positrons. *Zeitschrift für Physik*, v. 98, 1936.
- [42] DENISOV, V. I.; SOKOLOV, V. A.; VASIL'EV, M. I. Nonlinear vacuum electrodynamics birefringence effect in a pulsar's strong magnetic field. *Physical Review D*, v. 90, 2014.
- [43] KRUGLOV, S. I. Nonlinear electrodynamics with birefringence. *Physics Letters A*, v. 379, n. 7, p. 623–625, 2015.
- [44] GUZMANN-HERRERA, E.; MONTIEL, A.; BRETON, N. Comparative of light propagation in Born-Infeld, Euler-Heisenberg and ModMax nonlinear electrodynamics. *JCAP*, v. 2024, n. 11, p. 002, 2024.
- [45] COSTA, E. G. O.; BERGLIAFFA, S. E. P. A classification of the effective metric in nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 26, n. 13, p. 135015, 2009.
- [46] NOVELLO, M.; SALIM, J. M. Effective electromagnetic geometry. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 63, n. 8, p. 083511, March 2001.
- [47] BRETÓN, N. Nonlinear electrodynamics and cosmology. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 229, n. 1, p. 012006, 2010.
- [48] KRUGLOV, S. I. A model of nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*, v. 353, p. 299, 2015.
- [49] Övgün, Ali et al. Falsifying cosmological models based on a non-linear electrodynamics. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 6, p. 462, 2018.
- [50] SOROKIN, D. P. Introductory notes on non-linear electrodynamics and its applications. *Fortschritte der Physik*, v. 70, n. 7-8, p. 2200092, 2022.
- [51] KRUGLOV, S. I. Universe acceleration and nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 92, p. 123523, 2015.
- [52] NOVELLO, M. et al. Cosmological effects of nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 24, n. 11, p. 3021, 2007.
- [53] NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. E. P.; SALIM, J. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. *Phys. Rev. D*, v. 69, p. 127301, 2004.

- [54] KRUGLOV, S. I. Inflation of universe by nonlinear electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, v. 29, n. 15, 2020.
- [55] BENAOUIM, H. B. et al. Inflation driven by non-linear electrodynamics. *The European Physical Journal C*, v. 83, n. 367, 2023.
- [56] LORENCI, V. A. D. et al. Nonlinear electrodynamics and frw cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 063501, 2002.
- [57] NOVELLO, M.; SALIM, J. M.; ARAÚJO, A. N. Extended Born-Infeld theory and the bouncing magnetic universe. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 023528, 2012.
- [58] CAÑATE, P.; MAGOS, D.; BRETON, N. Nonlinear electrodynamics generalization of the rotating btz black hole. *Physical Review D*, v. 101, 2020.
- [59] BAKOPOULOS, A. et al. Exact black holes in string-inspired Euler-Heisenberg theory. *Physical Review D*, v. 110, 2024.
- [60] MACEDA, M.; MACÍAS, A. Non-commutative inspired black holes in Euler-Heisenberg non-linear electrodynamics. *Physics Letters B*, v. 788, p. 446–452, 2019.
- [61] RUFFINI, R.; WU, Y.; XUE, S. Einstein-Euler-Heisenberg theory and charged black holes. *Physical Review D*, v. 88, 2013.
- [62] GOULART, E.; BITTENCOURT, E. Photon traps in nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 41, n. 19, p. 195026, 2024.
- [63] RAHMATOV, B. et al. Black holes in general relativity coupled with nonlinear electrodynamics surrounded by perfect fluid dark matter: Thermodynamics, particle motion, and black hole shadow. *Chinese Physics C*, Chinese Physical Society, Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences and IOP Publishing Ltd, v. 49, n. 7, p. 075105, 2025.
- [64] BITTENCOURT, E.; SALIM, J. M.; SANTOS, G. B. Magnetic fields and the weyl tensor in the early universe. *General Relativity and Gravitation*, v. 46, p. 1790, 2014.
- [65] GARCÍA-SALCEDO, R. et al. *Power-Law NLED-Based Magnetic Universe Can Mimic Phantom Behavior*. 2010. ArXiv:1006.2274.
- [66] DWIVEDI, S.; ANANDAVIJAYAN, C.; BHAT, P. *Quasi-two-dimensionality of three-dimensional, magnetically dominated, decaying turbulence*. 2024. ArXiv:2401.01965.
- [67] MUKHANOV, V.; FELDMAN, H.; BRANDENBERGER, R. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, v. 215, n. 5–6, p. 203–333, June 1992. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(92\)90044-Z](https://doi.org/10.1016/0370-1573(92)90044-Z)>.

- [68] BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, v. 22, p. 1882, October 1980. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.1882>>.
- [69] BRUNI, M.; DUNSBY, P.; ELLIS, G. Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge-invariant variables. *Astrophysical Journal*, v. 395, n. 1, p. 34–53, 1992.
- [70] FEIX, M.; NUSSER, A.; BRANCHINI, E. Growth rate of cosmological perturbations at $z \sim 0.1$ from a new observational test. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 011301, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.011301>>.
- [71] NESSERIS, S.; TSUJIKAWA, S. Cosmological perturbations and observational constraints on nonlocal massive gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 024070, Jul 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.024070>>.
- [72] STOEGER, W. et al. Observational cosmology. v. solution of the first-order general perturbation equations. *Classical and Quantum Gravity*, v. 9, n. 7, p. 1725, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/7/008>>.
- [73] ARAÚJO, M. E.; ROVEDA, S. R.; STOEGER, W. R. Perturbed spherically symmetric dust solution of the field equations in observational coordinates with cosmological data functions. *The Astrophysical Journal*, v. 560, n. 1, p. 7, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/322507>>.
- [74] ASTASHENOK, A. V.; ODINTSOV, S. D. Confronting dark energy models mimicking Λ CDM epoch with observational constraints: Future cosmological perturbations decay or future rip? *Physics Letters B*, v. 718, n. 4–5, p. 1194–1202, January 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.12.058>>.
- [75] BERNARDEAU, F. et al. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Physics Reports*, v. 367, n. 1–3, p. 1–248, September 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00135-7](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00135-7)>.
- [76] MANZOTTI, A. et al. A coarse grained perturbation theory for the large scale structure, with cosmology and time independence in the uv. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2014, n. 09, p. 047, September 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/09/047>>.
- [77] MCDONALD, P.; VLAH, Z. Large-scale structure perturbation theory without losing stream crossing. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 023508, Jan 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.023508>>.

- [78] NISHIMICHI, T.; BERNARDEAU, F.; TARUYA, A. Response function of the large-scale structure of the universe to the small scale inhomogeneities. *Physics Letters B*, v. 762, p. 247–252, November 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.09.035>>.
- [79] DUNSBY, P. K.; BASSETT, B. A.; ELLIS, G. F. Covariant analysis of gravitational waves in a cosmological context. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 5, p. 1215, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/5/023>>.
- [80] CLARKSON, C. Cosmological density fluctuations and gravity waves: A covariant approach to gauge-invariant nonlinear perturbation theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 103524, Nov 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.103524>>.
- [81] NOVELLO, M. et al. Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. ii. vorticity and gravitational waves. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 52, p. 730–742, Jul 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.730>>.
- [82] PEREIRA, T. S.; PITROU, C.; UZAN, J.-P. Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2007, n. 09, p. 006, September 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2007/09/006>>.
- [83] TALEBIAN-ASHKEZARI, A.; AHMADI, N.; ABOLHASANI, A. δm formalism: a new approach to cosmological perturbation theory in anisotropic inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2018, n. 03, p. 001, March 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/03/001>>.
- [84] BARTOLO, N.; MATARRESE, S.; RIOTTO, A. Non-gaussianity of large-scale cosmic microwave background anisotropies beyond perturbation theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2005, n. 08, p. 010, August 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2005/08/010>>.
- [85] BRUNI, M.; LYTH, D. H. Peculiar velocity, cosmic perturbation theory and the cosmic microwave background anisotropy. *Physics Letters B*, v. 323, n. 2, p. 118–123, March 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)90279-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90279-8)>.
- [86] ELLIS, G. F. R.; BRUNI, M. Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 1804–1818, Sep 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.1804>>.

- [87] ELLIS, G. F. R.; HWANG, J.; BRUNI, M. Covariant and gauge-independent perfect-fluid Robertson-Walker perturbations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 1819–1826, Sep 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.1819>>.
- [88] BRUNI, M.; ELLIS, G.; DUNSBY, P. Gauge-invariant perturbations in a scalar field dominated universe. *Classical and Quantum Gravity*, v. 9, n. 4, p. 921, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/4/010>>.
- [89] NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E.; SALIM, J. The quasi-maxwellian equations of general relativity: Applications to perturbation theory. *Brazilian Journal of Physics*, v. 44, p. 832–894, December 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-014-0239-1>>.
- [90] NOVELLO, M. et al. Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 51, p. 450–461, Jan 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.450>>.
- [91] NOVELLO, M. et al. Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. iii. quantum treatment. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 54, p. 2578–2588, Aug 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.2578>>.
- [92] NOVELLO, M. et al. Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. iv. the anisotropic paradigm. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 61, p. 124025, May 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.124025>>.
- [93] TOLMAN, R. C.; EHRENFEST, P. Temperature equilibrium in a static gravitational field. *Physical Review*, v. 36, n. 12, 1930.
- [94] TOLMAN, R. *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. [S.l.]: Dover Publications, 1987. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486653839.
- [95] NOVELLO, M. *Cosmologia*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. v. 4. (CBPF - Tópicos de Física, v. 4).
- [96] NOVELLO, M.; GOULART Érico. *Eletrodinâmica Não Linear: Causalidade e efeitos cosmológicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. v. 2. (CBPF - Tópicos de Física, v. 2).
- [97] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer, 2001.
- [98] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer Verlag, 2003.

- [99] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3rd. ed. New York: Springer, 2004.
- [100] COLLABORATION, P. Planck 2018 results - VI. cosmological parameters. *A&A*, v. 641, p. A6, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>.
- [101] CESAR, A. G. et al. Qualitative analysis of a quasi-magnetic universe. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 42, n. 20, p. 205009, oct 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/ae0f35>>.
- [102] FRANKEL, T. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3. ed. The Edinburgh Building, Cambridge CB28RU, UK: Cambridge University Press, 2012.
- [103] LOVELOCK, D.; RUND, H. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*. Revised ed. New York: Dover Publications, 1989. (Dover Books on Mathematics). ISBN 978-0486658407.
- [104] RAYCHAUDHURI, A. Relativistic cosmology. i. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 98, p. 1123–1126, May 1955. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.1123>>.
- [105] GARCIA-SAENZ, S.; RENAUX-PETEL, S. Flattened non-gaussianities from the effective field theory of inflation with imaginary speed of sound. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2018, n. 11, p. 005, nov 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/11/005>>.
- [106] FUMAGALLI, J. et al. Hyper-non-gaussianities in inflation with strongly nongeodesic motion. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 123, p. 201302, Nov 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.201302>>.
- [107] COLLABORATION, P. Planck 2015 results. XIX. constraints on primordial magnetic fields. *Astronomy & Astrophysics*, v. 594, p. A19, 2016.
- [108] PAOLETTI, D. et al. Constraints on primordial magnetic fields from their impact on the ionization history with Planck 2018. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 517, n. 3, p. 3916–3927, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stac2947>>.
- [109] KAHNIASHVILI, T.; MARAVIN, Y.; KOSOWSKY, A. Faraday rotation limits on a primordial magnetic field from wilkinson microwave anisotropy probe five-year data. *Physical Review D*, v. 80, n. 2, p. 023009, 2009.
- [110] GIOVANNINI, M. Probing large-scale magnetism with the cosmic microwave background. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 8, p. 084003, mar 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aab17d>>.