

TESE DE DOUTORADO

Turbulência como um sistema
vinculado e imersão simplética de
sistemas de segunda classe

por

Albert Carlo Rodrigues Mendes

Orientador:

Flávio Iassuo Takakura

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
MAIO 2003

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como parte dos créditos para obtenção do título de *Doutor em Física* por ALBERT CARLO RODRIGUES MENDES.

Dedicatória

À minha esposa Stela e aos meus filhos Victória e Lucas.

Agradecimentos

- Ao meu Orientador, Flávio Iassuo Takakura, pela dedicação na sua tarefa como orientador.
- A Francisco Caruso Neto pela co-orientação e ao CBPF, que propiciou todas as condições para a conclusão deste trabalho.
- Aos meus pais, que sempre apoiaram a minha escolha pela Física, aos meus amigos e professores do Departamento de Física da UFJF, em especial ao professor Wilson Oliveira e ao professor Cliford Neves Pinto que participaram ativamente neste trabalho.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

A presença de simetrias de calibre, sem ou com o auxílio de campos de Wess-Zumino(WZ), em sistemas que, originalmente, não as apresentam, será investigada. Para tanto, serão utilizados os métodos de Dirac, simplético e de projetores.

Primeiro a turbulência hidrodinâmica será investigada, serão aplicados os métodos de Dirac e simplético para sistemas vinculados invariantes de calibre com o objetivo de determinar a dinâmica do modelo. Além disso, o método dos projetores será aplicado, o que permitirá a obtenção de uma interpretação geométrica da simetria de calibre existente[1].

Segundo, uma nova forma de revelar simetrias em sistemas vinculados não invariantes de calibre será abordada. Este novo método denomina-se método simplético de imersão, baseia-se no método simplético e na introdução das variáveis de WZ. Uma forma de ilustrar e permitir a comparação com outros métodos de imersão(BFFT e iterativo) será aplicado no modelo Schwinger quiraral bosonizado [2]. Depois, será tratado um importante caso: o modelo mecânico do fluido. Este é obtido através de uma redução dimensional de uma teoria relativística de membrana. Neste sentido, a simetria de calibre da teoria de membranas relativística, eliminada no processo de redução ao modelo de fluido d -dimensional, será restaurada. Isto permitirá uma nova interpretação das simetrias do modelo de fluido [3].

Abstract

The presence of the gauge symmetries, without or with the help of the Wess-Zumino(WZ) fields, in noninvariant systems will be investigated. For this, will be utilized the Dirac, symplectic and the projectors methods.

First, the hydrodynamic turbulence will be treated. In this context, will be applied the Dirac and symplectic methods for constrained system gauge invariant with the purpose of establish the dynamics of the model. Further, the projectors methods will be applied, what will allow a geometrical interpretation of the gauge symmetry existency.

Second, a new way of disclose symmetries in constrained systems gauge noninvariant will be treated. This new method called symplectic embedding formalism is based on the symplectic method and with the introduction of the WZ variable. In order to illustrate and allows to put in perspective with others embedding methods (BFFT and iterativo), this new formalism will be applied in the bosonized chiral Schwinger model. After that, will be treated an important case: the fluid mechanics model. This model was obtained through a dimensional reduction of a relativistic membrane theory. In this context, a gauge symmetry of relativistic membrane theory, losted after the reduction process to a d -dimensional fluid model, will be recovered. This will allow a new interpretation of the symmetries of fluid model.

Índice

1	Turbulência hidrodinâmica	4
1.1	Introdução	4
1.2	A dinâmica metafluida	10
1.3	Abordagem Lagrangeana da dinâmica metafluida	16
1.4	Análise simplética	24
1.5	Análise via método de Dirac	32
1.6	Análise geométrica	40
1.7	Conclusão	46
2	Formalismo de imersão simplética via variáveis de Wess-Zumino	48
2.1	Introdução	48
2.2	Formalismo simplético de imersão I	51
2.3	Formalismo simplético de imersão II	55
2.4	Aplicação no modelo de Schwinger quirar bosonizado	61
2.5	Conclusão	71
3	Simetrias escondidas no modelo de fluido	73
3.1	Introdução	73

3.2	O modelo de dinâmica de fluidos	74
3.3	Análise simplética	78
3.4	O modelo de fluido invariante de calibre	79
3.5	Simetria escondida	93
3.6	Conclusão	95
4	Conclusão geral	100
A	Sistemas vinculados	102
A.1	Formalismo simplético	104
A.2	Formalismo de Dirac	106

Introdução

A presença de simetrias em teorias de campos tem um papel importante, uma vez que elas estão relacionadas com interações físicas fundamentais na Natureza. Estas simetrias são definidas por algumas relações chamadas, na linguagem de Dirac, de vínculos de primeira classe [4, 5, 6, 7, 8]. Assim, a aplicação de qualquer processo de quantização nestas teorias necessita de cuidados especiais, porque a presença de simetrias de calibre indica que existe algum grau de liberdade supérfluo.

Nosso objetivo nesta tese é investigar as simetrias e seu respectivo papel nos diferentes sistemas que iremos tratar. Em um primeiro momento, devido a uma analogia com o eletromagnetismo de Maxwell, estudaremos turbulência hidrodinâmica como um sistema vinculado (teoria de calibre). Com o objetivo de determinar a dinâmica do modelo, aplicaremos os métodos de Dirac e simplético para sistemas vinculados invariantes de calibre, obtendo-se os parênteses de Dirac do modelo. Além disso, o método dos projetores é usado para uma análise dos aspectos geométricos do modelo calibrado.

Em um segundo momento, apresentaremos um formalismo que permite a imersão, via formalismo simplético e variáveis de WZ, em teorias de calibre, razão pela qual é denominado formalismo simplético de imersão. Ele é aplicado no modelo de Schwinger quiral bosonizado e no modelo mecânico de fluido. Veremos que os resultados encontrados

estão de acordo com aqueles obtidos por outros formalismos de imersão, como o BFFT e o iterativo. Veremos que um ponto muito positivo neste novo método de imersão é que podemos escolher a simetria de calibre que o modelo mergulhado terá, já que é o modo-zero o gerador de tais simetrias de calibre. Nos outros métodos, a simetria de calibre não se manifesta naturalmente.

A fim de tornarmos esta tese auto consistente, a organizamos como segue: No capítulo 1, seção 1.1, apresentamos uma introdução sobre turbulência hidrodinâmica. Na seção 1.2, uma breve revisão da dinâmica metafluida, as quantidades físicas e notações pertinentes são apresentadas. Na seção 1.3, a formulação Lagrangeana e Hamiltoniana para a dinâmica metafluida é proposta e algumas considerações sobre a taxa de dissipação de energia são discutidas. Na seção 1.4, a nova descrição para a dinâmica metafluida é estudada usando-se o método simplético e na seção 1.5 o método de Dirac, o qual conduz à revelação da simetria de calibre do modelo. Além disso, analisamos a simetria do modelo e mostramos que a invariância de calibre é preservada somente no intervalo inercial, e também identificamos as quantidades físicas que são invariantes de calibre nesta região. Na seção 1.6, a interpretação geométrica das simetrias de calibre é dada e discutida. Na seção 1.8, apresentamos as conclusões sobre este capítulo. No capítulo 2, o formalismo simplético invariante de calibre é sistematizado, onde enfatizamos os passos principais e vantagens para duas versões diferentes dadas nas seções 2.2 e 2.3, respectivamente. Este formalismo é desenvolvido a partir do método simplético [9, 10, 11], que é um modo moderno de se lidar com sistemas vinculados, e com a introdução de variáveis de WZ. Em seguida, na seção 2.4, faremos uma aplicação para ilustrar o formalismo simplético de

Imersão ao modelo de Schwinger quirial bosonizado, que tem atraído muita atenção nas últimas décadas, principalmente no contexto de teoria de cordas [12, 13]. No capítulo 3, estudamos um caso mais importante, onde faremos uma investigação completa das simetrias de calibre escondidas em um modelo de mecânica de fluido. Mostraremos que este modelo não tem apenas uma descrição invariante, mas uma família de representações invariantes de calibre dinamicamente equivalentes. E para finalizar, no capítulo 4, apresentamos nossas conclusões gerais e discussões finais.

Capítulo 1

Turbulência hidrodinâmica

1.1 Introdução

Há uma grande variedade de fenômenos que ocorrem na Natureza que podem ser classificados como turbulência hidrodinâmica. A turbulência hidrodinâmica ocorre no escoamento de líquidos e gases que vão desde a simples mistura de um coquetel ao comportamento da atmosfera, do escoamento sanguíneo ao escoamento em tubos, rios, mares e oceanos, da convecção térmica em uma panela quando uma sopa é preparada à convecção térmica nas estrelas [14]. Entretanto, a sua compreensão tem sido um grande desafio ao longo dos séculos. O fenômeno de turbulência foi anteriormente estudado, aproximadamente há mais de 500 anos por Leonardo da Vinci[15], que brilhantemente observou a geração de vórtices em certo intervalo de escala de comprimento nos escoamentos turbulentos de jatos d'água passando por um obstáculo ou através de um orifício. Estas observações podem ser consideradas como uma antecipação de algumas idéias relativamente recentes [16, 17, 18].

Há um grande intervalo de tempo entre os estudos de Leonardo da Vinci até o início matemático da mecânica de fluidos com Leonard Euler [19, 20]. Na busca de tentar

compreender as leis que regem o movimento dos fluidos, Euler em 1755 escreveu as leis de Newton da mecânica para um fluido, mais tarde chamada de equação de Euler, como

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \nabla p(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

onde $\vec{u}(\vec{x}, t)$ é o campo de velocidade, $p(\vec{x}, t)$ é a pressão e $\rho(\vec{x}, t)$ é a densidade do fluido. A equação de Euler, eq.(1.1), essencialmente representa a segunda lei de Newton do movimento $\vec{F} = m\vec{a}$ (ou melhor $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$) [21] que, quando aplicada para um meio contínuo, expressa a conservação do momento para um elemento de volume do fluido. O termo $-\nabla p(\vec{x}, t)$ é a força total atuando sobre o volume devido à superfície limite do volume, que é igual ao produto da massa por unidade de volume (ρ) e a aceleração

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}(\vec{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (1.2)$$

O operador derivada D/Dt na eq.(1.2) é chamado *derivada substantiva* ou *derivada material*. Significa não a taxa de variação da velocidade do fluido em um ponto fixo no espaço, mas a taxa de variação da velocidade de uma dada partícula-fluido quando esta se move no espaço. A derivada substantiva representa a relação entre uma formulação Lagrangeana na qual uma quantidade depende do tempo e uma formulação Euleriana na qual a quantidade depende da posição \vec{x} e do tempo t .

Para um fluido ideal, como o considerado por Euler, além da equação de movimento, eq.(1.1), temos também a conservação da massa do fluido, ou seja, a densidade ρ é constante, que se traduz na condição de fluido incompressível, isto é, o campo de velocidade não é divergente, a saber

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.3)$$

que é o tipo de escoamento que estamos interessados em estudar.

Algum tempo mais tarde, o trabalho de Euler serviu como um guia para L.M.H. Navier [22] e G.G. Stokes [23], que apresentaram a equação dinâmica de movimento para um fluido viscoso. A eq.(1.1) modificada, chamada de equação de Navier-Stokes(NS), é reescrita como

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{x}, t) = \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t), \quad (1.4)$$

onde ν é a viscosidade cinemática (viscosidade usual dividida pela densidade) e o termo $\nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t)$ representa a força dissipativa devida à viscosidade (ν).

Podemos escrever eq.(1.4) de uma forma mais conveniente, usando a identidade $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\vec{w} \times \vec{u} - \frac{1}{2} \nabla u^2$ onde $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ é o campo de vorticidade, da seguinte forma

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{w}(\vec{x}, t) \times \vec{u}(\vec{x}, t) - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (1.5)$$

O termo entre parênteses na eq.(1.5) é a função energia de Bernoulli [20] dada por

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}. \quad (1.6)$$

O próximo passo no desenvolvimento da hidrodinâmica foi dado por O. Reynolds [24]. Ele provou experimentalmente que o caráter do escoamento de um fluido não depende da sua velocidade e viscosidade separadamente. Sob certas condições de fronteira e inicial, o caráter do escoamento depende da razão adimensional $Re = [\text{termo não linear na eq.(1.4)}] / [\text{termo de viscosidade na eq.(1.4)}]$, que é o número de Reynolds

$$Re = \frac{uL}{\nu}, \quad (1.7)$$

onde L é a escala de comprimento (escala integral) característica do campo de velocidade $\vec{u}(\vec{x}, t)$. O termo $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$, na eq.(1.4), é da ordem de u^2/L e a quantidade $\nu \nabla^2 \vec{u}$ é da ordem de $\nu u/L^2$. Assim, a razão entre estes dois termos é exatamente o número de Reynolds, eq.(1.7). Com isso, o termo $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ pode ser negligenciado se o número de Reynolds for pequeno, assim a eq.(1.4) torna-se uma equação de difusão

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.8)$$

onde a viscosidade ν faz o papel do coeficiente de difusão. Assim, como estamos interessados em tratar o escoamento turbulento, devemos considerar números de Reynolds altos, quando o termo não linear é fundamental, e onde as soluções das equações de NS tornam-se instáveis, com o fluido assumindo um regime de movimento muito complexo, com a velocidade variando aleatoriamente e sem qualquer ordem notável, conhecido como regime turbulento totalmente desenvolvido [18]. Descobrir exatamente o que acontece quando o fluido assume tal regime é de fundamental importância tanto para a física teórica quanto para física experimental.

O conceito moderno de turbulência hidrodinâmica totalmente desenvolvida surgiu com o modelo de cascata de Richardson [25]. De acordo com a representação de escoamento turbulento proposta por ele, os grandes vórtices, gerados em grandes escalas (escala integral), induzem vórtices menores que, por sua vez, induzem vórtices menores ainda e assim transferem a energia, fornecida ao fluido por uma força externa, pela não linearidade do movimento do fluido, até ser dissipada (escala de dissipação de energia η) pela viscosidade em pequenas escalas.

Uma contribuição importante para a teoria de turbulência totalmente desenvolvida foi

dada por Kolmogorov e Obukhov em 1941 [26, 27]. Eles supuseram que no processo de cascata, a transferência de energia entre vórtices de diferentes escalas é local, e todas as informações sobre a fonte de energia na escala integral são perdidas, exceto a informação sobre a taxa de injeção de energia ϵ , que é igual ao fluxo de energia (e também à taxa de dissipação).

Podemos ver isso melhor a partir da equação de balanço de energia. Da eq.(1.4), modificada pela adição da força externa \vec{f} , tomando-se o produto escalar com \vec{u} e integrando o resultado no espaço, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} u^2 = -\nu \int (\nabla \vec{u})^2 + \int \vec{f} \cdot \vec{u}, \quad (1.9)$$

que expressa o balanço de energia: a derivada total no tempo da energia do lado esquerdo é igual a diferença entre a taxa de injeção de energia $\int \vec{f} \cdot \vec{u}$ e a taxa de dissipação de energia $\nu \int (\nabla \vec{u})^2$. Tomando a média no estado estacionário, quando as características estatísticas do escoamento turbulento são independentes do tempo, obtém-se

$$\langle \vec{u} \cdot \vec{f} \rangle = \langle \frac{\nu}{2} (\nabla \vec{u})^2 \rangle \equiv \epsilon. \quad (1.10)$$

A taxa de injeção de energia em grandes escalas (L) é balanceada pela taxa de dissipação de energia em pequenas escalas (η), e são iguais ao fluxo de energia ϵ das grandes para as pequenas escalas do escoamento no chamado “intervalo inercial”:

$$\eta \ll \text{Intervalo Inercial} \ll L,$$

introduzido por Kolmogorov na derivação da lei dos 4/5 [26] e por Obukhov [27] e antecipado, em parte, por Richardson [28], onde a taxa de transferência de energia $\int \vec{f} \cdot \vec{u}$ e a taxa

de dissipação $\nu \int (\nabla \bar{u})^2$ são essencialmente nulas. Esta situação nos lembra a teoria de transição de fase. Existe uma frequência de corte e uma representação universal no meio. Sendo que no nosso caso, são duas frequências de corte naturais [29, 30], a frequência de corte infravermelha e ultravioleta, dadas por $1/L$ e $1/\eta$, respectivamente.

Desde o seu descobrimento, um enorme esforço tem sido feito para se estudar turbulência, muitas aproximações e novas propostas tem sido feitas. Nos últimos anos, a investigação da turbulência hidrodinâmica têm experimentado um renovado otimismo sobre a possibilidade da solução do problema de turbulência. Isto se deve não a algum excepcional desenvolvimento no estudo teórico ou experimental de turbulência por si só, mas sim ao desenvolvimento em áreas vizinhas, como por exemplo, no estudo da analogia entre turbulência e a teoria de fenômenos críticos e o esforço combinado de teoria quântica de campos e física da matéria condensada [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] entre outros, o que tem tornado a turbulência um campo de pesquisa muito promissor.

Juntamente com os resultados obtidos com a unificação de idéias, conceitos e noções físicas de áreas totalmente diferentes para se estudar o escoamento de fluidos turbulentos com número de Reynolds alto, surgiu uma nova teoria de turbulência proposta por H. Marmanis [38]. Ele apresenta uma nova dinâmica para descrever o comportamento de quantidades médias de um fluido incompressível em regime turbulento totalmente desenvolvido chamado de *dinâmica metafluida*. Nesta nova dinâmica para turbulência hidrodinâmica, ele obtém um conjunto de equações lineares semelhantes às equações de Maxwell [39] para o eletromagnetismo. Com isso tornou possível descrever o comportamento dinâmico de quantidades médias do escoamento em fluidos incompressíveis de

número de Reynolds elevados. O primeiro passo para essa nova teoria é reconhecer a *vorticidade* ($\vec{w}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}$) e o vetor *Lamb* ($\vec{l}(\vec{x}, t) = \vec{w} \times \vec{u}$) como os centros de uma teoria dinâmica de turbulência, com a introdução dos conceitos de *carga turbulenta* e *corrente turbulenta*. A principal característica dessa nova teoria para fluidos turbulentos é a estrutura linear das equações de movimento, transformando o problema de completude em turbulência em um estudo de fontes turbulentas para diferentes geometrias de interesse [38].

1.2 A dinâmica metafluida

O estudo da turbulência consiste em encontrarmos as propriedades médias das soluções da eq.(1.5) sob a restrição da condição de incompressibilidade, eq.(1.3). As eq.(1.5) e (1.3) formam um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, complementadas com condições iniciais e de fronteira. Entretanto, os escoamentos turbulentos são caracterizados pelo grande número de escalas de movimento dinamicamente significativas produzidas e sustentadas por uma transferência contínua de energia das grandes escalas até as pequenas escalas. Sob estas circunstâncias, vemos a necessidade de se conhecer as propriedades das quantidades médias que estão relacionadas com o escoamento. Para isto, Reynolds [40] introduziu a decomposição dos campos em uma parte média e uma flutuante. Esta é a famosa decomposição de Reynolds, que aplicada às equações de movimento conduz ao problema de completude. O último é uma característica comum de equações não lineares médias, onde a não linearidade introduz momentos de alta ordem das flutuações.

Uma maneira de se evitar este tipo de dificuldade seria encontrar um conjunto de

variáveis dinâmicas em termos das quais as equações de movimento tornam-se lineares, porém, tais variáveis em geral não existem. Neste caso, uma alternativa é tomar partes destas não-linearidades como fontes do modelo, de tal forma que estas não-linearidades tenham um significado físico especial, ou seja, que tenham uma clara conexão com quantidades fundamentais do escoamento e cujas propriedades e distribuições possam ser estudadas no espaço físico [38], como é o caso com as fontes do campo eletromagnético. Em mecânica de fluidos este tipo de aproximação é encontrado no trabalho de Lighthill [41] sobre som gerado aerodinamicamente, onde ele introduz a noção de tensões aplicadas externamente como as fontes do modelo.

Partindo desta idéia, H. Marmanis [38] propôs uma nova teoria física para turbulência onde identifica certas quantidades do escoamento como as fontes do movimento turbulento (o equivalente ao tensor das tensões de Lighthill). Estas novas quantidades do escoamento, identificadas como a *carga turbulenta* (\mathbf{n}) e a *corrente turbulenta* (\vec{j}), possuem estrutura espacial e temporal e podem ser aplicadas ao modelo, no sentido de que a sua distribuição pode depender somente da geometria do escoamento [38]. Isto resulta em uma nova dinâmica para escoamentos turbulentos, onde a turbulência se apresenta como uma interação entre a vorticidade \vec{w} e o vetor Lamb \vec{l} , chamada de *dinâmica metafluida*. Essencialmente, com esta proposta, transforma-se o problema de completudeza em um estudo de fontes turbulentas para diferentes geometrias de interesse descrito pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{w}(\vec{x}, t) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{w}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{l}(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{w}(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{l}(\vec{x}, t) = n(\vec{x}, t),$$

$$\frac{\partial \vec{l}(\vec{x}, t)}{\partial t} = u^2 \nabla \times \vec{w}(\vec{x}, t) - \vec{j}(\vec{x}, t) + \nu \nabla n(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{l}(\vec{x}, t),$$

onde a corrente turbulenta é dada por

$$\vec{j} = \vec{u}n + \nabla \times (\vec{u}\vec{w}) \cdot \vec{u} + \vec{w} \times \nabla(\Phi + u^2) + 2(l \cdot \nabla)\vec{u}. \quad (1.12)$$

Estas equações são análogas às chamadas equações de Maxwell microscópicas [39] (com uma correção devido à viscosidade na segunda e quarta equações na eq.(1.11)) que podem ser escritas da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \vec{b}(\vec{x}, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{b}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \times \vec{e}(\vec{x}, t), \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{e}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t),$$

$$\frac{\partial \vec{e}(\vec{x}, t)}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{b}(\vec{x}, t) - 4\pi\vec{i}(\vec{x}, t),$$

onde $\vec{b}(\vec{x}, t)$ é o campo magnético microscópico, $\vec{e}(\vec{x}, t)$ é o campo elétrico microscópico, $\rho(\vec{x}, t)$ é a densidade de carga microscópica e $\vec{i}(\vec{x}, t)$ é a corrente microscópica [39].

Os dois sistemas compartilham uma característica comum, que é a de ter seus campos variando extremamente rápido no espaço e no tempo. Pode-se argumentar que no eletromagnetismo a carga e a corrente são dadas, ao passo que na hidrodinâmica elas fazem parte do problema. De fato, não é bem assim: as variações espaciais dos campos eletromagnéticos microscópicos ocorrem em distâncias da ordem $\leq 10^{-8}$ cm, e suas flutuações temporais ocorrem em períodos de 10^{-13} s para vibrações nucleares e 10^{-17} s para movimento orbitais eletrônicos. Medidas macroscópicas levam a médias em intervalos muito

maiores que estes. Portanto, todas as flutuações microscópicas são “mediadas”, dando variações de quantidades macroscópicas relativamente suaves e lentas. Estas quantidades macroscópicas são determinadas experimentalmente e esta é a razão pelas quais são consideradas como um espécie de “insumo” nas equações de Maxwell macroscópicas. O quadro qualitativo resultante para as fontes eletromagnéticas é análogo ao das fontes turbulentas na formulação da dinâmica metafluida.

Obtidas as equações “microscópicas” fundamentais, eq.(1.11), toma-se as médias de todas as quantidades sobre o espaço, aplicando um método de filtragem devido a Ruskoff [42]. As fontes médias obtidas deverão ser determinadas experimentalmente ou numericamente, e devem ser consideradas como um “insumo” nas equações da dinâmica metafluida. No método de filtragem, a média espacial de uma função $A(\vec{x}, t)$ com respeito a uma função teste $f(\vec{x})$ é definida por

$$\langle A(\vec{x}, t) \rangle = \int f(\vec{x}') A(\vec{x} - \vec{x}') d^3x'. \quad (1.14)$$

onde $f(\vec{x}) > 0$ em alguma vizinhança de $\vec{x} = \vec{0}$, e $\int f(\vec{x}') d^3x' = 1$.

Note que há uma distinção entre a filtragem espacial, eq.(1.14), com a função teste $f(\vec{x})$ - denominada “truncamento” (do espectro de números de onda) - e a média da mecânica estatística sobre os diversos tipos de conjuntos [39].

Aplicando o método de filtragem às eqs.(1.11), os campos de Lamb e vorticidade, na escala macroscópica (\vec{l} e \vec{w}), são definidos como as médias espaciais dos campos na escala microscópica (\vec{l} e \vec{w}), dados por

$$\begin{aligned} \vec{l}(\vec{x}, t) &= \langle \vec{l}(\vec{x}, t) \rangle \\ \vec{w}(\vec{x}, t) &= \langle \vec{w}(\vec{x}, t) \rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Como as operações de derivação em relação ao espaço e ao tempo comutam com a operação de filtragem [39], temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle A(\vec{x}, t) \rangle = \int f(\vec{x}') \frac{\partial A}{\partial x_i}(\vec{x} - \vec{x}') d^3 x' = \left\langle \frac{\partial A}{\partial x_i} \right\rangle$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A(\vec{x}, t) \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle.$$

Logo, as eqs.(1.11) podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \vec{w}(\vec{x}, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{w}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l}(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{w}(\vec{x}, t), \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{l}(\vec{x}, t) = n(\vec{x}, t),$$

$$\frac{\partial \vec{l}(\vec{x}, t)}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{w}(\vec{x}, t) - \vec{J}(\vec{x}, t) + \nu \nabla n(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{l}(\vec{x}, t).$$

Note que $c^2 = \langle u^2 \rangle$, que é a média espacial do quadrado da velocidade e que pode ser tomada como a raiz quadrada da energia cinética total por unidade de massa e volume filtrado[38]. As quantidades \vec{J} e n são respectivamente as médias espaciais das fontes \vec{j} e n .

A dinâmica metafluida é um modelo para a turbulência, que fornece um sistema de equações no qual os campos médios aparecem em uma interrelação contínua e respondem como ondas às fontes turbulentas (n , \vec{J}). A carga turbulenta está relacionada com a função energia de Bernoulli, eq.(1.6), através da relação [38]

$$n(\vec{x}, t) = -\nabla^2 \Phi(\vec{x}, t). \quad (1.17)$$

As eq.(1.16) nos lembram mais o eletromagnetismo [39] do que a hidrodinâmica tradicional. Esta analogia é a base da teoria proposta por Marmanis [38].

Além das equações para os campos, eq.(1.16) , a partir das equações de NS podemos escrever o vetor Lamb em termos do campo de velocidade e da função energia de Bernoulli, como

$$\vec{l}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (1.18)$$

onde $\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle$ e $\phi = \langle \Phi \rangle$.

Das equações da dinâmica metafluida, eq.(1.16), podemos tirar uma relação entre as densidades de carga n e \vec{J} . Aplicando a divergência na última das equações eq.(1.16), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{l} &= c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) - \nabla \cdot \vec{J} + \nu \nabla \cdot \nabla n - \nu \nabla \cdot \nabla^2 \vec{l} \\ &= -\nabla \cdot \vec{J} + \nu \nabla^2 n - \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{l}). \end{aligned}$$

O uso da relação $\nabla \cdot \vec{l} = n$, fornece

$$\frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.19)$$

que é a equação da continuidade para a densidade de carga da dinâmica metafluida.

Comparando as eq.(1.16), no caso particular de fluido sem viscosidade ($\nu = 0$), com as equações de Maxwell para o eletromagnetismo [39] com fontes no vácuo, observamos que elas são as mesmas se o campo magnético \vec{B} corresponder à vorticidade \vec{w} e o campo elétrico \vec{E} corresponder ao vetor Lamb \vec{l} . Para os potenciais, a analogia nos mostra que, comparando a eq.(1.18) com a equação do campo elétrico escrito em termos dos potenciais,

que o potencial vetor corresponde ao campo de velocidade \vec{u} e o potencial escalar com a função energia de Bernoulli, ϕ .

Apesar de toda similaridade supracitada entre a teoria de turbulência hidrodinâmica e a dinâmica dos campos eletromagnéticos, há uma diferença conceitual entre os dois sistemas na identificação dos entes físicos. No eletromagnetismo clássico os potenciais físicos são apenas artifícios matemáticos utilizados para facilitar os cálculos, já na dinâmica metafluida, os potenciais considerados são entes físicos fundamentais.

Ainda é cedo para se falar de resultados e benefícios que a dinâmica metafluida possa trazer para o estudo da teoria de turbulência hidrodinâmica, entretanto, considerando que este é realmente um novo caminho nas pesquisas em turbulência, vamos explorar mais esta analogia usando o eletromagnetismo como um guia para o estudo de turbulência.

Essa analogia com o eletromagnetismo sugere que a turbulência hidrodinâmica pode ser compreendida como um sistema vinculado e, portanto, tratada como uma teoria de calibre. Este sistema vinculado será investigado usando os formalismos simplético de Faddeev-Jackiw e Dirac com o objetivo de determinamos parênteses de Poisson entre os campos do modelo e, subseqüentemente, obter a dinâmica e as simetrias dessa versão da turbulência hidrodinâmica. Porém, antes de aplicarmos estes formalismos, precisamos primeiramente encontrar uma Lagrangeana para este novo modelo.

1.3 Abordagem Lagrangeana da dinâmica metafluida

A partir da interpretação geométrica para escoamentos de Euler (NS com $\nu = 0$), Arnold [43, 44] mostrou, usando métodos de álgebra de Lie, que este tipo de escoamento pode

ser descrito em um formalismo Lagrangeano em qualquer dimensão. Isto tem muitas consequências interessantes para a mecânica de fluidos, e foi ativamente estudado [45, 46, 47, 48, 49]. A aplicação do princípio variacional em escoamentos de fluidos incompressíveis sem viscosidade é muito usado no estudo do movimento de fluidos oceânicos e atmosféricos em grandes escalas, conhecidos como escoamentos quasigeostróficos [49, 50, 51].

Associado a estas formulações Lagrangeanas da equação de Euler, eq.(1.1), existe uma estrutura simplética e várias formulações Hamiltonianas. Isto não é novo no estudo deste tipo de sistema. Em hidrodinâmica, Clebsh introduziu variáveis canônicas[52] para descrever o movimento de um fluido ideal(sem viscosidade) em uma classe particular, mas fisicamente importante, de escoamentos nos quais as linhas de vórtice são as linhas de interseção de duas famílias de superfícies $\lambda(\vec{x}, t)$ e $\mu(\vec{x}, t)$ [53]. As variáveis de Clebsh podem descrever a turbulência resultante da instabilidade do escoamento plano-paralelo ou escoamentos de Couette axialmente simétricos. Este é um exemplo de uma descrição contínua. Uma outra descrição Hamiltoniana de fluidos turbulentos é dada pela teoria de ondas de turbulência que estuda os estados estacionários do sistema estatístico clássico, que consiste de ondas que apresentam uma pequena interação [54, 55]. A Hamiltoniana neste caso pode ser escrita como a soma de duas partes: a Hamiltoniana não perturbada mais a Hamiltoniana perturbada. A descrição por vórtices pontuais também forma um sistema Hamiltoniano [56], porém discreto, para escoamentos de fluidos turbulentos. Uma outra representação Hamiltoniana, que é apropriada quando tratamos com escoamentos hélicos, é devida a Kuz'min [57] e Oseledets [58] (veja também Gama and Frisch [59]).

Entretanto, embora haja uma grande variedade de formulações Lagrangeanas para

a equação de Euler, eq.(1.1), em nenhum destes casos as descrições Lagrangeanas (ou Hamiltonianas) permitem obter a equação de movimento de NS, eq.(1.4), para o escoamento de fluidos viscosos. Não é óbvio que tais descrições possam ser estendidas para escoamentos viscosos, isto é, para a descrição verdadeira da turbulência. Naturalmente uma pergunta que se pode fazer é se existe um formalismo Lagrangeano (ou Hamiltoniano) cujas variáveis canônicas nos conduzam às equações de movimento de um escoamento com viscosidade. Neste ponto é que entra a dinâmica metafluida, nos apontando um caminho para contornar estas dificuldades e, portanto, encontrar um formalismo Hamiltoniano (ou Lagrangeano) para tratar escoamentos turbulentos com viscosidade. Estenderemos a analogia que existe entre as equações de movimento da dinâmica metafluida, eq.(1.16), e as equações de Maxwell do eletromagnetismo para obtermos um formalismo Lagrangeano para o sistema que permitirá, mais tarde, discutir os vínculos e as simetrias presentes do escoamento turbulento.

No eletromagnetismo clássico, a densidade Lagrangeana é dada pela diferença entre o quadrado do campo elétrico (\vec{E}) e o quadrado do campo magnético (\vec{B}), a saber,

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (1.20)$$

Usando a analogia estabelecida entre eletromagnetismo e turbulência e a correspondência entre as entidades físicas apresentadas anteriormente, propomos a seguinte Lagrangeana para a teoria de turbulência

$$L = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2}(\vec{l}^2 - c^2\vec{w}^2), \quad (1.21)$$

que pode também ser escrita em termos do campo de velocidade e da função energia de

Bernoulli. Usando a eq.(1.18), e pelo fato de que $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nu\nabla^2\vec{u} \right)^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{u})^2. \quad (1.22)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange [60] na Lagrangeana (1.22) e considerando a equação canônica para a coordenada ϕ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}\phi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} = -2(-\partial_i\phi - \dot{u}_i + \nu\partial^2u_i)\delta_{ij}, \\ \partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} - \partial_{jk} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{l}(\vec{x}, t) = 0, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade dada na eq.(1.18). Agora, considerando a equação canônica para a coordenada \vec{u} , a identidade dada na eq.(1.18) e $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}_i} = -2c^2(-\partial_i\phi - \dot{u}_i + \nu\partial^2u_i)\delta_{il}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_ju_i)} = 2c^2(\partial_lu_j - \partial_ju_l), \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}u_i)} = -2\nu(-\partial_i\phi - \dot{u}_i + \nu\partial^2u_i)\delta_{jk}\delta_{il}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} = 0; \\ \partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}_i} + \partial_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_ju_i)} - \partial_{jk} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{jk}u_i)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\vec{l}(\vec{x}, t)}{\partial t} = c^2\nabla \times \vec{w}(\vec{x}, t) - \nu\nabla^2\vec{l}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Deste modo, a Lagrangeana, eq.(1.22), gera corretamente as duas últimas equações de movimento para a dinâmica metafluida, eq.(1.16), para o caso em que não existem fontes turbulentas ($n = \vec{J} = 0$), com as coordenadas generalizadas sendo a função energia de Bernoulli ϕ e o campo de velocidade \vec{u} . As outras duas equações são obtidas devido ao modo como \vec{w} e \vec{l} são definidos. Para obter a primeira equação na eq.(1.16) basta tomar a divergência de $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ e para a segunda, tomar o rotacional da eq.(1.18).

Consideremos agora a situação em que os termos de fonte estão presentes nas equações de movimento. Para isto, vamos somar a \mathcal{L} a densidade Lagrangeana de interação \mathcal{L}_{int}

postulada como sendo

$$\mathcal{L}_{int} = \vec{J} \cdot \vec{u} - n\phi - \nu \vec{u} \cdot \nabla n, \quad (1.23)$$

que traz um termo de correção devido à viscosidade. Neste caso, a densidade Lagrangeana total é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \vec{u} \right)^2 - \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 + \vec{J} \cdot \vec{u} - n\phi - \nu \vec{u} \cdot \nabla n. \quad (1.24)$$

Este é sem dúvida um resultado interessante da dinâmica metafluida, que nos permite encontrar um formalismo Lagrangeano para o movimento de fluidos viscosos incompressíveis. As equações da dinâmica metafluida, eq.(1.16), podem ser derivadas da densidade Lagrangeana (1.24) (da mesma forma que para o caso sem fontes) a partir das equações de Euler-Lagrange [60], com o campo de velocidade \vec{u} e a função energia de Bernoulli ϕ sendo as variáveis canônicas. Um resultado importante que se pode derivar dessa descrição Lagrangeana para o escoamento de fluidos incompressíveis com viscosidade, é a possibilidade de obtermos a equação de Navier-Stokes, eq.(1.5). Para tanto, vamos calcular o momento conjugado ao campo de velocidade \vec{u} , dado por

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(\vec{x}, t) &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{u}(\vec{x}, t)} \\ &= \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \phi(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Comparando com eq.(1.18), temos que

$$\vec{\pi}(\vec{x}, t) = -\vec{l}(\vec{x}, t).$$

Podemos então escrever que

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \phi(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t) = -\vec{l}(\vec{x}, t) \quad (1.26)$$

ou

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{w}(\vec{x}, t) \times \vec{u}(\vec{x}, t) - \nabla \phi(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t), \quad (1.27)$$

que é a equação de Navier-Stokes, eq.(1.5), para os campos filtrados, onde usamos $\vec{l}(\vec{x}, t) = \vec{w} \times \vec{u}$.

Vamos agora derivar a Hamiltoniana do sistema fazendo uma transformação de Legendre da Lagrangeana, eq.(1.24), que é obtida como

$$H = \int d^3\vec{x} \left(\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{u}} - \mathcal{L} \right). \quad (1.28)$$

Mas, do momento conjugado dado na eq.(1.25), temos $\dot{\vec{u}} = \vec{\pi} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{u}$. Desta forma, a densidade Hamiltoniana para o escoamento de um fluido viscoso incompressível é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla \phi + \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 + \nu \vec{u} \cdot \nabla n - \vec{u} \cdot \vec{J} + \phi n. \quad (1.29)$$

As equações Hamiltonianas de movimento [60] são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta \vec{\pi}} = \vec{\pi}(\vec{x}, t) - \nabla \phi(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{x}, t), \\ -\frac{\partial \vec{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta \vec{u}} = \nu \nabla^2 \vec{\pi}(\vec{x}, t) + c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u}(\vec{x}, t) + \nu \nabla n(\vec{x}, t) - \vec{J}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1.30)$$

A primeira destas equações é a eq.(1.25), que é a equação de NS, e que nos leva a concluir que $l(\vec{x}, t) = -\vec{\pi}(\vec{x}, t)$. Então, a segunda equação na eq.(1.30) concorda com a quarta equação da dinâmica metafluida, eq.(1.16), já que $\vec{w}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}$. A primeira e a segunda das equações, (1.16), são satisfeitas tomando-se o divergente de $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ e o rotacional da eq.(1.18), respectivamente. A terceira das equações da dinâmica metafluida não pode ser obtida como uma equação Hamiltoniana baseada na eq.(1.29). Podemos,

contudo, dizer que devemos considerar as soluções das equações Hamiltonianas para as quais $\nabla \cdot \vec{l} - n = 0$ ou $\nabla \cdot \vec{\pi} + n = 0$, em algum instante de tempo definido. Se então pudermos mostrar que esta restrição é mantida para todos os instantes, as soluções obtidas formam um conjunto consistente e satisfatório. A derivada no tempo de $\nabla \cdot \vec{\pi} + n = 0$ é encontrada a partir da segunda eq.(1.30). Tomando a divergência da equação e usando a equação da continuidade, eq.(1.19), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{\pi} &= \nu \nabla^2 \nabla \cdot \vec{\pi} + c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{u}) + \nu \nabla^2 n - \nabla \cdot \vec{J} \\ &= \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\pi} + n) - \nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial n}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\pi} + n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Já que as equações de campo são de primeira ordem na derivada temporal, mostramos que a restrição de que $\nabla \cdot \vec{\pi} + n = 0$ em um instante do tempo é equivalente à validade da terceira equação (1.16) ao longo do tempo.

Uma característica importante dessa descrição Hamiltoniana para escoamentos turbulentos de fluidos incompressíveis em $3D$, é o caráter geral desse formalismo obtido. Obtivemos um formalismo Hamiltoniano para o escoamento mais geral sem a necessidade da introdução de novos parâmetros ou de trabalhar com um outro conjunto de variáveis [52, 61].

Consideremos agora o caso particular no qual podemos desprezar a viscosidade ($\nu = 0$), como no intervalo inercial. Neste caso, a densidade Lagrangeana que nos fornece a dinâmica do fluido dentro do intervalo inercial é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 + \vec{J} \cdot \vec{u} - n \phi. \tag{1.32}$$

Esta densidade Lagrangeana permite que se faça uma outra analogia entre a turbulência hidrodinâmica e o eletromagnetismo. Podemos observar que o campo \vec{l} , eq.(1.18), e $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ são componentes de um tensor de segunda ordem anti-simétrico (assim como os campos elétrico e magnético). O tensor intensidade do campo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu, \quad (1.33)$$

pode ser escrito explicitamente em termos de \vec{l} e \vec{w} como ($\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -l_x & -l_y & -l_z \\ l_x & 0 & -w_z & w_y \\ l_y & w_z & 0 & -w_x \\ l_z & -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

onde introduzimos o quadri-vetor potencial e o quadri-vetor corrente,

$$\begin{aligned} V^\nu &= (\phi, c\vec{u}), \\ J^\nu &= (cn, \vec{J}), \end{aligned} \quad (1.35)$$

respectivamente. Portanto, podemos reescrever a eq.(1.32) em termos de $F^{\mu\nu}$, J^μ e V^μ como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu V^\mu, \quad (1.36)$$

onde $c = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em (1.36), obtemos a seguinte equação de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^\nu, \quad (1.37)$$

que nos dá as equações de movimento da dinâmica metafluida não-homogêneas (terceira e quarta equações em (1.16)) na forma covariante de um fluido sem viscosidade.

As equações de movimento homogênea (primeira e segunda equações em (1.16)) são obtidas, definindo-se um tensor dual de $F^{\mu\nu}$ dado por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (1.38)$$

como no eletromagnetismo. Tomando a divergência da eq.(1.38), temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

pois a contração de um tensor antisimétrico $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ com um tensor simétrico $\partial_\mu F_{\alpha\beta}$ é zero, o que gera as equações de movimento homogêneas.

1.4 Análise simplética

Agora vamos aplicar o método simplético (veja apêndice seção 1.1) à dinâmica metafluida descrita pela densidade Lagrangeana, eq.(1.24). Primeiramente, vamos reescrever a eq.(1.24) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{\vec{u}}^2 + \dot{\vec{u}}\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla\times\vec{u})^2 - \nu\dot{\vec{u}}\cdot\nabla^2\vec{u} - \nu(\nabla^2\vec{u})\cdot(\nabla\phi) + \\ &+ \frac{\nu^2}{2}(\nabla^2\vec{u})^2 + \vec{u}\cdot\vec{J} - \nu\vec{u}\cdot\nabla n - \phi n. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Conforme o método simplético, deve-se reduzir a densidade Lagrangeana de segunda-ordem para primeira-ordem na velocidade. Para tanto, usa-se o próprio momento conjugado à velocidade como campo auxiliar, que ao ser inserido na Lagrangeana, eq.(1.40), gera a seguinte Lagrangeana de primeira-ordem,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \vec{\pi}\cdot\dot{\vec{u}} - U^{(0)}, \quad (1.41)$$

onde (0) indica iteração zero e onde o potencial simplético é

$$U^{(0)} = \frac{1}{2}\bar{\pi}^2 - \bar{\pi} \cdot \nabla \phi + \nu \bar{\pi} \cdot \nabla^2 \bar{u} - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \bar{u})^2 + \nu \bar{u} \cdot \nabla n - \bar{u} \cdot \vec{J} + \phi n, \quad (1.42)$$

que pode ser identificado com a densidade Hamiltoniana eq.(1.29). O conjunto inicial de variáveis simpléticas é $\xi_i^{(0)} = (u_i, \pi_i, \phi)$, permite identificar, comparando a eq.(1.41) com a eq.(A.5), as quantidades

$$\begin{aligned} A_i^{(0)\bar{u}} &= \pi_i, \\ A_i^{(0)\bar{\pi}} &= 0, \\ A_i^{(0)\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.43)$$

o que nos leva às seguintes quantidades não nulas (veja eq.(A.7))

$$f_{ij}^{(0)\bar{u}\bar{\pi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta a_j^{(0)\bar{\pi}}(\vec{y})}{\delta u_i(\vec{x})} - \frac{\delta a_i^{(0)\bar{u}}(\vec{x})}{\delta \pi_j(\vec{y})} = \delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = -f_{ij}^{(0)\bar{\pi}\bar{u}}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (1.44)$$

A matriz simplética correspondente $f^{(0)}$ é então dada por

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.45)$$

que obviamente é singular e, portanto, possui vínculos, de acordo com o método simplético.

Vamos, então, encontrar estes vínculos para produzir uma deformação na estrutura geométrica e chegar a um novo tensor não-singular.

Como a matriz, eq.(1.45), é singular ela tem um modo-zero, obtido a partir da eq.(A.10), a saber

$$\tilde{v}^{(0)} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad v^\phi), \quad (1.46)$$

onde \tilde{v} é a matriz transposta de v , $\mathbf{0}$ representa uma matriz (1×3) e v^ϕ é diferente de zero. Logo, contraindo este modo-zero com o gradiente do potencial $U^{(0)}$, tem-se

$$\int d^3\vec{y} \nu^\phi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{x})} U^{(0)}(\vec{y}) = 0, \quad (1.47)$$

onde, usando eq.(1.42), encontra-se

$$\int d^3\vec{y} \nu^\phi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} U^{(0)}(\vec{y}) = \int d^3\vec{y} \nu^\phi(\vec{x}) \{ \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{y}) + n(\vec{y}) \} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = 0. \quad (1.48)$$

Como ν^ϕ é uma função diferente de zero, o seguinte vínculo é obtido,

$$\Omega_1 \equiv \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}, t) + n(\vec{x}, t), \quad (1.49)$$

que é equivalente à lei de Gauss no eletromagnetismo.

Segundo o método simplético, este vínculo deve ser introduzido no setor cinético da densidade Lagrangeana, eq.(1.41), por meio de um multiplicador de Lagrange λ logo, a Lagrangeana de primeira-iteração é obtida como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{u}} + \lambda(\nabla \cdot \vec{\pi} + n) - \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 - \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{u} \\ & + \vec{J} \cdot \vec{u} - \nu \vec{u} \cdot \nabla n - \phi n + \vec{\pi} \cdot \nabla \phi. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Agora, tomando o vínculo, dada na eq.(1.49), fortemente no setor potencial da Lagrangeana, eq.(1.50), temos

$$\int d^3\vec{x} (\vec{\pi} \cdot \nabla \phi - \phi n) = \int d^3\vec{x} (\nabla \cdot (\vec{\pi} \phi) - (\nabla \cdot \vec{\pi} + n) \phi) = 0.$$

Desta forma, a densidade Lagrangeana de primeira ordem pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{u}} + \lambda(\nabla \cdot \vec{\pi} + n) - U^{(1)}, \quad (1.51)$$

onde o potencial simplético é dado por

$$U^{(1)} = U^{(0)} |_{\Omega_1=0} = \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 + \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{J} + \nu \vec{u} \cdot \nabla n. \quad (1.52)$$

Note que, ao tomar o vínculo fortemente igual a zero no potencial simplético, o campo ϕ naturalmente desaparece.

Considerando agora que o novo conjunto de variáveis simpléticas é dado na seguinte ordem, $\xi_i^{(1)} = (u_i, \pi_i, \lambda)$, temos os momentos canônicos uma-forma,

$$\begin{aligned} A_i^{(1)\bar{u}} &= \pi_i, \\ A_i^{(1)\bar{\pi}} &= 0, \\ A^{(1)\lambda} &= \nabla \cdot \bar{\pi} + n, \end{aligned} \quad (1.53)$$

e a matriz simplética,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & \partial_i^y \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\bar{x} - \bar{y}). \quad (1.54)$$

Como podemos observar, a matriz $f^{(1)}$ é singular. Precisamos, então, continuar procurando vínculos na teoria para encontrarmos um tensor não-singular. Aqui, o modo-zero, usando a eq.(A.10), é dado por

$$\bar{v}^{(1)} = (v_i^{\bar{u}} \quad \mathbf{0} \quad v^\lambda) \quad (1.55)$$

que deve satisfazer à condição

$$v_i^{\bar{u}} - \partial_i v^\lambda = 0, \quad (1.56)$$

que são expressões totalmente arbitrárias. Contraindo o modo-zero $v^{(1)}$ com o gradiente do potencial $U^{(1)}$, temos

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= v_i^{(1)\bar{u}}(\bar{x}) \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta u_i(\bar{x})} \int d^3\bar{y} (\nabla \times \bar{u}(\bar{y}))^2 - \nu \frac{\delta}{\delta u_i(\bar{x})} \int d^3\bar{y} \bar{\pi}(\bar{y}) \cdot \nabla^2 \bar{u}(\bar{y}) \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\delta}{\delta u_i(\bar{x})} \int d^3\bar{y} \bar{u}(\bar{y}) \cdot \nabla n(\bar{y}) - \frac{\delta}{\delta u_i(\bar{x})} \int d^3\bar{y} \bar{u}(\bar{y}) \cdot \bar{J}(\bar{y}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Combinando a eq.(1.56) e a eq.(1.57), temos

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \int d^3\bar{y} v_i^{(1)\bar{u}}(\bar{y}) J_i(\bar{y}) \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}) = -v^{(1)\lambda}(\bar{x}) \partial_i J_i(\bar{x}) \\ &= v^{(1)\lambda}(\bar{x}) \dot{n}(\bar{x}) \\ &= v^{(1)\lambda}(\bar{x}) \nabla^2 \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde foram usadas as eq.(1.17) e eq.(1.19).

Note que a análise simplética abre a possibilidade de investigarmos a dinâmica metafluida dentro e fora do intervalo inercial. Por enquanto, o conteúdo físico por trás da dinâmica metafluida no intervalo inercial será investigada. A dinâmica metafluida fora deste intervalo será investigada em um trabalho futuro. É importante considerarmos que no intervalo inercial, apesar da existência de viscosidade, não existe dissipação de energia, então a função energia de Bernoulli (ϕ) é constante. Devido a isto, Ω_2 é igual a zero e, conseqüentemente, a simetria de calibre escondida na teoria metafluida é revelada. Isso ocorre devido ao modo-zero não gerar um novo vínculo, ou seja, quando ϕ é constante, a eq.(1.58) é identicamente nula. Assim, conforme o método simplético, quando um modo-zero não gera um novo vínculo, temos a presença de uma simetria.

Antes de prosseguirmos com a análise simplética da dinâmica metafluida, vamos analisar a presença da simetria na dinâmica metafluida. Para fazermos esta análise da simetria, é necessário obtermos as transformações de calibre infinitesimais. No contexto simplético, as transformações de calibre são geradas pelo modo-zero que não produzem um novo vínculo. Neste caso, o modo-zero $\tilde{v}^{(1)}$, dado pela eq.(1.55), e que pode ser reescrito como $\tilde{v}^{(1)} = (-\partial_i \quad 0 \quad 1)$, não gera um novo vínculo, conseqüentemente, ele é o gerador das seguintes transformações de calibre infinitesimais ($\delta\xi_i = \epsilon v^{(1)}$),

$$\begin{aligned}\delta u_i &= \partial_i \epsilon, \\ \delta \pi_i &= 0, \\ \delta \phi &= -\dot{\epsilon},\end{aligned}\tag{1.59}$$

onde $\phi \rightarrow \dot{\lambda}$ e ϵ é um parâmetro infinitesimal dependente do tempo. Aplicando estas

transformações na Hamiltoniana, dada na eq.(1.42), encontra-se

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} &= -(\partial_i\pi_i + n)\dot{\epsilon} - (\partial_i\pi_i + n)\nu\partial^2\epsilon - J_i\partial_i\epsilon \\ &= -\Omega_1\dot{\epsilon} - \Omega_1\nu\partial^2\epsilon = \epsilon\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t},\end{aligned}\quad (1.60)$$

onde a equação da continuidade dada na eq.(1.19) foi usada. Observe que a variação da Hamiltoniana está diretamente relacionada com a condição de que se esteja no intervalo inercial, onde a energia de Bernoulli é conservada, ou seja, fora do intervalo inercial a simetria é quebrada.

Para obtermos os parênteses de Dirac entre os campos do espaço de fase, temos que fixar a simetria de calibre. Isto é feito introduzindo uma condição de calibre no setor cinético da Lagrangeana de primeira-ordem, eq.(1.51), através de um multiplicador de Lagrange .

Seguindo a analogia entre o eletromagnetismo e a turbulência, vamos escolher o “calibre de Coulomb” ,

$$\chi_2 \equiv \nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (1.61)$$

Este calibre vem da condição de incompressibilidade do fluido. Neste caso, obtemos a seguinte Lagrangeana,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{u}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + n) + \dot{\eta}(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{u})^2 - \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{J}. \quad (1.62)$$

Tomando o vínculo χ_2 fortemente no setor do potencial simplético, eq.(1.62), tem-se

$$\int d^3\vec{x} (\nabla \times \vec{u})^2 = - \int d^3\vec{x} (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}).$$

Assim, a Lagrangeana de segunda iteração é dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{u}} + \dot{\lambda}(\nabla \cdot \vec{\pi} + n) + \dot{\eta}(\nabla \cdot \vec{u}) - U^{(2)}, \quad (1.63)$$

onde o potencial é

$$U^{(2)} = U^{(1)}|_{\chi_2=0} = \frac{1}{2}\pi^2 + c^2\vec{u}\cdot\nabla^2\vec{u} + \nu\vec{\pi}\cdot\nabla^2\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{J}. \quad (1.64)$$

Sendo o novo conjunto de variáveis simpléticas dado na ordem $\xi_i^{(2)} = (u_i, \pi_i, \lambda, \eta)$,

temos

$$\begin{aligned} A_i^{(2)\vec{u}} &= \pi_i, \\ A_i^{(2)\vec{\pi}} &= 0, \\ A^{(2)\lambda} &= \nabla\cdot\vec{\pi} + n, \\ A^{(2)\eta} &= \nabla\cdot\vec{u}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

com a correspondente matriz simplética $f^{(2)}$ escrita como

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \partial_i^y \\ \delta_{ij} & 0 & \partial_i^y & 0 \\ 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.66)$$

que é uma matriz não-singular. Segundo o método simplético, a inversa de $f^{(2)}$ gera os parênteses de Dirac entre os campos físicos,

$$(f^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\nabla^2} \\ -\delta_{ij} + \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_i^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} \\ -\frac{\partial_i^x}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.67)$$

Sendo assim, a partir da matriz $(f^{(2)})^{-1}$ identificamos os seguintes colchetes de Dirac,

$$\begin{aligned} \{u_i(\vec{x}), \vec{\pi}_j(\vec{y})\}^D &= \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{u_i(\vec{x}), u_j(\vec{y})\}^D &= \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}^D = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Estes são nada menos que o parêntese de Dirac da teoria de turbulência no calibre $\nabla\cdot\vec{u} = 0$.

Para mostrarmos a consistência do nosso formalismo, vamos mostrar que as equações da dinâmica metafluida, eq.(1.16), podem ser obtidas a partir das equações de Hamilton.

Usando os parênteses de Dirac dados acima e a Hamiltoniana dada na eq.(1.29), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3\vec{y} \{ \vec{u}(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{y}, t) \}^D \\ &= \vec{\pi}(\vec{x}, t) - \nabla\phi(\vec{x}, t) + \nu\nabla^2\vec{u}(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (1.69)$$

que pode ser obtida com o uso da eq.(1.17). E, também podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3\vec{y} \{ \vec{\pi}(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{y}, t) \}^D \\ &= -\nu\nabla^2\vec{\pi}(\vec{x}, t) - c^2\nabla \times \nabla \times \vec{u}(\vec{x}, t) - \nu\nabla n(\vec{x}, t) + \vec{J}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Note que, estas são as mesmas equações obtidas na seção 1.3, eq.(1.30), onde mostramos que a partir destas equações podemos obter as equações da dinâmica metafluida, eq.(1.16).

A primeira equação, como já foi visto antes, é a equação de Navier-Stokes para os campos filtrados.

O próximo passo seria a quantização da teoria vinculada, que pode ser obtida pela regra de quantização canônica $\{ , \}^D \rightarrow -i[,]$. Fazendo isso, obtemos os comutadores da teoria

$$\begin{aligned} [u_i(\vec{x}), u_j(\vec{y})] &= 0 = [\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})], \\ [u_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})] &= -i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

onde os campos u_i e π_j passam a desempenhar o papel de operadores quânticos.

Obtidas as regras de quantização canônica, pode-se implementar técnicas de Teoria Quântica de Campos para encontrar o funcional gerador e, conseqüentemente as funções de correlação e todas as quantidades físicas [62, 63] que desejarmos. Apesar de termos dado uma prescrição para a quantização da dinâmica metafluida, não a discutiremos com mais detalhe, já que, no momento, não é nosso objetivo principal.

1.5 Análise via método de Dirac

Com o objetivo de verificarmos os resultados obtidos na seção anterior com o método simplético, vamos nos restringir ao cálculo dos parênteses de Dirac para o escoamento turbulento dentro do intervalo inercial. Neste intervalo, como já foi discutido antes, não há dissipação de energia, apenas uma transferência contínua de energia entre as escalas do escoamento, onde a dinâmica é dada pela Lagrangeana eq.(1.36).

A passagem para o formalismo Hamiltoniano a partir do formalismo Lagrangeano é feita introduzindo-se os momentos canônicos

$$\pi^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{V}_\mu}. \quad (1.72)$$

Desta forma, o momento conjugado de \dot{V}^μ é dado por

$$\pi^\nu = -F^{0\nu}, \quad (1.73)$$

que nos fornece imediatamente o vínculo primário (matriz Hessiana singular)

$$T_1 \equiv \pi^0(\vec{x}, t) \approx 0, \quad (1.74)$$

onde π^0 é o momento conjugado ao campo ϕ . Entretanto, π^0 , pode não ser o único vínculo da teoria.

Precisamos verificar se há vínculos secundários, que são obtidos através da condição de consistência de que vínculos não devem possuir evolução temporal, eq.(A.17). Para tal, precisamos construir a Hamiltoniana primária, dada por

$$H_p(\vec{x}, t) = H_c + \int d^3\vec{x} \lambda_1 \pi^0, \quad (1.75)$$

onde λ_1 é o multiplicador de Lagrange enquanto H_c é a Hamiltoniana canônica, a saber,

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3\vec{x} (\pi^\mu \dot{V}_\mu - \mathcal{L}) = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_c \\ &= \int d^3\vec{x} \left(\pi^0 \dot{V}_0 - \pi^i \dot{V}_i + \frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{c} J^0 V_0 - \frac{1}{c} J^i V_i \right), \end{aligned} \quad (1.76)$$

que ao se usar as eq.(1.33)-eq.(1.36), torna-se

$$H_c = \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} c^2 (\nabla \times \vec{u})^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla \phi + \pi^0 \dot{\phi} + n\phi - \vec{J} \cdot \vec{u} \right). \quad (1.77)$$

Assim, a Hamiltoniana primária pode ser escrita como

$$H_p = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_p(\vec{x}, t), \quad \text{com} \quad \mathcal{H}_p(\vec{x}, t) = \mathcal{H}_c + \lambda_1 \pi^0. \quad (1.78)$$

Vamos verificar agora se existem vínculos secundários. Para tanto, usa-se a relação de consistência para o vínculo primário T_1 , dado por

$$\dot{T}_1 = \int d^3\vec{y} \{ \pi^0(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{x}', t) \} \approx 0. \quad (1.79)$$

Usando os parênteses fundamentais de Poisson, dados por¹

$$\begin{aligned} \{V^\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{x}')\} &= \eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{V^\mu(\vec{x}), V^\nu(\vec{x}')\} &= \{\pi^\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{x}')\} = 0, \end{aligned} \quad (1.80)$$

o vínculo secundário é encontrado como

$$T_2 \equiv \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}, t) + n(\vec{x}, t) \approx 0. \quad (1.81)$$

Este vínculo é exatamente umas das equações da dinâmica metafluida pois, pela relação dada na eq.(1.25), $\vec{\pi} = -\vec{l}$.

¹Os campos nos parênteses estão em tempos iguais, por isso o argumento temporal é omitido

Precisamos continuar procurando vínculos secundários. Para isso, escrevemos a Hamiltoniana total, que leva em consideração todos os vínculos da teoria até o presente momento, como

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int d^3\vec{x} & \left(\frac{1}{2}\vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}c^2(\nabla \times \vec{u})^2 + \vec{\pi} \cdot \nabla\phi + \pi^0\dot{\phi} \right. \\ & \left. + n\phi - \vec{J} \cdot \vec{u} + \lambda_1\pi^0 + \lambda_2(\nabla \cdot \vec{\pi} + n) \right). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Conforme o método de Dirac, deve-se impor a condição de consistência sobre o vínculo secundário, a saber

$$\begin{aligned} \dot{T}_2 & = \{ \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}, t) + n(\vec{x}, t), \tilde{H}(\vec{x}', t) \} \\ & = \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}', t) = -\frac{\partial n(\vec{x}', t)}{\partial t} = \nabla'^2 \frac{\partial \phi(\vec{x}', t)}{\partial t} \approx 0. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Como estamos no intervalo inercial, a condição de consistência acima se anula identicamente ($0 \approx 0$), pois a energia de Bernoulli é conservada no intervalo inercial, não fornecendo novos vínculos terciários. Como o parêntes de Poisson entre os vínculos T_1 e T_2 é identicamente igual a zero, estes são denominados vínculos de primeira classe e, portanto, o modelo apresenta uma simetria de calibre onde estes vínculos são identificados como sendo os geradores da simetria.

Segundo o método de Dirac, a dinâmica do modelo pode ser obtida através do processo de fixação de calibre. Isto significa que, ao procedermos a fixação de calibre, teremos apenas dois graus de liberdade. No eletromagnetismo, isto significa que, ao procedermos à fixação de calibre, teremos para o campo do fóton apenas dois graus de liberdade, o que está de acordo com a natureza. Estes dois graus de liberdade podem ser associados aos dois estados de polarização do fóton. Assim, em analogia com o eletromagnetismo,

podemos dizer que estes dois graus de liberdade estão associados a vorticidade.

Como mencionado acima, o fato de existirem dois vínculos de primeira classe significa que são necessários dois vínculos que fixem a simetria. À primeira vista, isto pode parecer um tanto estranho, pois, o nosso sistema é invariante sob a transformação de calibre

$$V_\mu \rightarrow V_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (1.84)$$

onde vemos que só dispomos da liberdade de escolher uma certa função escalar $\Lambda(\vec{x})$. Não é muito claro que seja realmente possível, com isto, fazer duas fixações de gauge. Com o objetivo de esclarecer este ponto, deve-se discuti-lo com mais detalhe.

A equação de movimento, obtida da densidade Lagrangeana, eq.(1.36), é dada por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^\nu. \quad (1.85)$$

Substituindo a expressão de $F^{\mu\nu}$, dada pela eq.(1.33), na relação acima, obtemos

$$\square V^\nu - \partial^\nu \partial_\mu V^\mu = \frac{1}{c} J^\nu, \quad (1.86)$$

que é invariante frente à transformação de calibre do tipo $V_\mu \rightarrow V_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Entretanto, podemos escolher a função escalar Λ tal que

$$\partial_\nu V^\nu = 0. \quad (1.87)$$

Esta condição é conhecida como *calibre de Lorentz*. Com isto, a eq.(1.86), torna-se

$$\square V^\nu = \frac{1}{c} J^\nu. \quad (1.88)$$

Deve-se lembrar que as simetrias de calibre do escoamento turbulento só são preservadas no intervalo inercial, onde há apenas uma transferência de energia entre as escalas

do escoamento. Assim, como a função energia de Bernoulli, eq.(1.6), é constante no intervalo inercial

$$V^0(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) = \text{constante} = \mathcal{C}(\vec{x}), \quad (1.89)$$

que é o “calibre Temporal” da dinâmica metafluida.

Susbtituindo a eq.(1.89) na eq.(1.87) encontramos

$$\partial_0 V^0 - \partial_i V^i \equiv \partial_i V^i = 0, \quad (1.90)$$

ou seja

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.91)$$

que é a condição de fluido incompressível, dada na eq.(1.3), ou, o “calibre de Coulomb”. As eq.(1.89) e eq.(1.91) são as expressões que devem ser usadas como condições de fixação de calibre.

Como os vínculos dados na eq.(1.74), eq.(1.81), eq.(1.89) e eq.(1.91) tem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero,

$$\begin{aligned} \{\pi^0(\vec{x}'), \phi(\vec{x}) - \mathcal{C}\} &= -\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}), \\ \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}'), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} &= \partial_i^x \partial_x^i \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}), \\ \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}'), \phi(\vec{x}) - \mathcal{C}\} &= 0, \\ \{\nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}'), \phi(\vec{x}) - \mathcal{C}\} &= 0, \\ \{\pi^0(\vec{x}'), \nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}')\} &= 0, \\ \{\pi^0(\vec{x}'), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}')\} &= 0, \end{aligned} \quad (1.92)$$

os vínculos são de segunda classe e, portanto, não existem outros vínculos na teoria. O

conjunto de vínculos da teoria é, então, dado por

$$\begin{aligned} T_1 &= \phi - \mathcal{C} \approx 0, \\ T_2 &= \pi^0 \approx 0, \\ T_3 &= \nabla \cdot \vec{u} \approx 0, \\ T_4 &= \nabla \cdot \vec{\pi} + n \approx 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Tendo-se encontrado os vínculos da teoria, podemos passar à construção dos parênteses de Dirac. Para isso, precisamos da construção da matriz C de Dirac, eq.(A.12), dos parênteses de Poisson dos vínculos dados na eq.(1.93). Há entretanto uma propriedade dos parênteses de Dirac que nos permite contruí-los iterativamente [4].

Usando primeiramente os vínculos T_1 e T_2 , encontramos a matriz de Dirac, a saber

$$C(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.94)$$

a inversa de $C(\vec{x}, \vec{x}')$ é

$$C^{-1}(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.95)$$

A partir da definição dos parênteses de Dirac, eq.(A.12), construímos os seguintes parênteses preliminares (para sistemas contínuos)

$$\begin{aligned} \{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^* &= \{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\} + \\ &- \int d^3\vec{y} d^3\vec{z} \{V^\mu(\vec{x}), T_a(\vec{y})\} C_{ab}^{-1}(\vec{y}, \vec{z}) \{T_b(\vec{z}), \pi_\nu(\vec{x}')\}, \end{aligned} \quad (1.96)$$

onde $(a, b = 1, 2)$

$$\{V^\mu(\vec{x}), T_a(\vec{y})\} = \begin{pmatrix} \{V^\mu(\vec{x}), \pi_0(\vec{y})\} \\ \{V^\mu(\vec{x}), \phi(\vec{y}) - \mathcal{C}\} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \delta_0^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.97)$$

sendo $()^t$ a matriz transposta, e

$$\{T_b(\vec{z}), \pi_\nu(\vec{x}')\} = \begin{pmatrix} \{\pi_0(\vec{z}), \pi_\nu(\vec{x}')\} \\ \{\phi(\vec{z}) - \mathcal{C}, \pi_\nu(\vec{x}')\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_\nu^0 \delta^3(\vec{z} - \vec{x}'). \quad (1.98)$$

Substituindo, então, as eq.(1.95), (1.97) e (1.98) na eq.(1.96), temos

$$\{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^* = (\delta_\nu^\mu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.99)$$

sendo os demais parênteses nulos,

$$\{V^\mu(\vec{x}), V_\nu(\vec{x}')\}^* = \{\pi^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^* = 0. \quad (1.100)$$

Agora, para os vínculos T_3 e T_4 temos

$$\tilde{C}(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} \{T_3, T_3\}^* & \{T_3, T_4\}^* \\ \{T_4, T_3\}^* & \{T_4, T_4\}^* \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

onde, de acordo com a eq.(1.96), temos

$$\begin{aligned} \{T_3(\vec{x}), T_4(\vec{x}')\}^* &= \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} + \\ &- \int d^3\vec{y} d^3\vec{z} \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}), T_a(\vec{y})\} C_{ab}^{-1} \{T_b(\vec{z}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} \end{aligned} \quad (1.102)$$

sendo ($a, b = 3, 4$)

$$\{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}), T_a(\vec{y})\} = \begin{pmatrix} \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}), \nabla \cdot \vec{u}(\vec{y})\} \\ \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{y}) + n(\vec{y})\} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \nabla^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.103)$$

$$\{T_b(\vec{z}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} = \begin{pmatrix} \{\nabla \cdot \vec{u}(\vec{z}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} \\ \{\nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{z}) + n(\vec{z}), \nabla \cdot \vec{\pi}(\vec{x}') + n(\vec{x}')\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta^3(\vec{z} - \vec{x}') \quad (1.104)$$

e

$$C(\vec{y}, \vec{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta^3(\vec{y} - \vec{z}). \quad (1.105)$$

A inversa da matriz C é dada por

$$C^{-1}(\vec{y}, \vec{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi|\vec{y} - \vec{z}|}. \quad (1.106)$$

Assim, substituindo a eq.(1.103), (1.104) e (1.106) na eq.(1.102), temos

$$\{T_3(\vec{x}), T_4(\vec{x}')\}^* = \nabla^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.107)$$

Logo, a matriz \tilde{C} , eq.(1.101), para os vínculos T_3 e T_4 fica

$$\tilde{C}(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.108)$$

A inversa de \tilde{C} é

$$\tilde{C}^{-1}(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.109)$$

Partindo dos parênteses eq.(1.99) e eq.(1.100), podemos construir os parênteses de Dirac da dinâmica metafluida

$$\begin{aligned} \{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^D &= \{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^* + \\ &- \int d^3\vec{y} d^3\vec{z} \{V^\mu(\vec{x}), T_a(\vec{y})\}^* \tilde{C}_{ab}^{-1}(\vec{y}, \vec{z}) \{T_b(\vec{z}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^* \end{aligned} \quad (1.110)$$

que nos leva a

$$\{V^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^D = (\delta_\nu^\mu - \delta_0^\mu \delta_\nu^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\nabla^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.111)$$

sendo os demais parênteses nulos,

$$\{V^\mu(\vec{x}), V_\nu(\vec{x}')\}^D = 0 = \{\pi^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{x}')\}^D. \quad (1.112)$$

Porém, um resultado importante deste tratamento de Dirac para sistemas vinculados é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente nos parênteses de Dirac. Sendo $\phi - C$ e π^0 nulos, somente a parte espacial das eq.(1.111) e eq.(1.112) são diferentes de zero, ficando

$$\begin{aligned} \{u^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{x}')\}^D &= \left(\delta_j^i - \frac{\partial_x^i \partial_j^x}{\nabla^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{u^i(\vec{x}), u_j(\vec{x}')\}^D &= 0 = \{\pi^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{x}')\}^D, \end{aligned} \quad (1.113)$$

que correspondem aos parênteses de Dirac obtidos anteriormente pelo método simplético.

1.6 Análise geométrica

Nesta seção, daremos uma interpretação geométrica das simetrias presentes no modelo calibrado (Dinâmica metafluida como um sistema calibrado). A descrição das interações de partículas fundamentais com o auxílio da teoria de campos de calibre introduz graus de liberdade extras na teoria, que se manifestam na natureza singular da respectiva Lagrangeana ou na presença de vínculos de primeira classe no formalismo Hamiltoniano [64]. O espaço de fase, neste caso, é maior que o físico, que é uma hipersuperfície determinada pelos vínculos da teoria. No subespaço físico, um sistema Hamiltoniano usual pode ser definido sem quaisquer simetrias de calibre e vínculos.

Devido à invariância de calibre, os objetos básicos da teoria de calibre, os potenciais de calibre, formam uma base supercompleta, enquanto os campos de calibre, que podem ser conectados por uma transformação, descrevem um mesmo estado físico. Deste modo, os potenciais de calibre são separados em classes equivalentes com relação à ação do grupo de calibre, onde cada um representa uma órbita no espaço de configurações do campo de calibre. Transições (verticais) ao longo das órbitas correspondem simplesmente a uma transformação de calibre, conseqüentemente, estas trajetórias não têm nenhum significado físico. Por outro lado, as trajetórias perpendiculares (horizontais) às órbitas [65], descrevem a evolução temporal do sistema físico, logo, são fisicamente importantes para a teoria. Portanto, encontrar as equações de movimento para os campos físicos consiste em resolvermos o problema da construção das trajetórias horizontais que são

calculadas através da definição correta da métrica no espaço das órbitas. Para tanto, seguiremos o processo desenvolvido em [66], onde os autores demonstram que o espaço físico (espaço das órbitas) está equipado com uma métrica projetiva.

Em virtude disto, nossa tarefa consiste em obtermos uma Lagrangeana singular, dinamicamente equivalente a eq.(1.24), para governar a dinâmica metafluida. Isto é alcançado eliminando a função energia de Bernoulli (ϕ) a partir da densidade Lagrangeana, eq.(1.24), o que pode ser feito, já que este campo não tem dinâmica, como demonstrado nas seções anteriores. Para eliminarmos este campo da Lagrangeana, usa-se a equação de movimento de Euler-Lagrange para o campo ϕ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{ik}\phi)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -n, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} = (\partial_j \phi + \dot{u}_j - \nu \partial^2 u_j) \delta_{ij}; \\ \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} - \partial_{ik} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{ik} \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \\ \partial^2 \phi(\vec{x}, t) + \partial_i \dot{u}_i(\vec{x}, t) - \nu \partial^2 (\partial_i u_i(\vec{x}, t)) + n(\vec{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Explicitando ϕ , temos

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{\partial_i \dot{u}_i + n}{\partial^2} + \nu \partial_i u_i \quad (1.115)$$

Inserindo este resultado na Lagrangeana, eq.(1.24), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{u}_i^2 - \phi \partial^2 \left(\frac{\partial_i \dot{u}_i + n}{\partial^2} - \nu \partial_i u_i \right) - \frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi - \frac{1}{2} c^2 (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k)^2 \\ - \nu \dot{u}_i \partial^2 u_i + \frac{\nu^2}{2} (\partial^2 u_i)^2 + u_i J_i - \nu u_i \partial_i n, \end{aligned} \quad (1.116)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{u}_i^2 - \left(\frac{\partial_i \dot{u}_i + n}{\partial^2} - \nu \partial_i u_i \right) \partial^2 \left(-\frac{\partial_i \dot{u}_i + n}{\partial^2} + \nu \partial_i u_i \right) \\ - \frac{1}{2} c^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \partial_j u_k \partial_l u_m - \nu \dot{u}_i \partial^2 u_i + \frac{\nu^2}{2} (\partial^2 u_j)^2 + u_i J_i - \nu u_i \partial_i n. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Ao se usar a relação

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \partial_j u_k(\vec{x}) \partial_l u_m(\vec{x}) &= \int d^3\vec{x} (\partial_j u_k(\vec{x}) \partial_j u_k(\vec{x}) - \partial_j u_k(\vec{x}) \partial_k u_j(\vec{x})) \\ &= - \int d^3\vec{x} \partial^2 u_k(\vec{x}) \left(\delta_{kj} - \frac{\partial_k \partial_j}{\partial^2} \right) u_j(\vec{x}), \end{aligned} \quad (1.118)$$

a densidade Lagrangeana, eq.(1.117), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{u}_i M_{ij} \dot{u}_j + (\partial_i \dot{u}_i) \frac{n}{\partial^2} + \frac{1}{2} \frac{n^2}{\partial^2} - \nu (\partial^2 \dot{u}_i) M_{ij} u_j \\ &+ \frac{\nu^2}{2} (\partial^4 u_i) M_{ij} u_j + \frac{1}{2} c^2 (\partial^2 u_i) M_{ij} u_j + u_i J_i \end{aligned} \quad (1.119)$$

onde

$$M_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2}, \quad (1.120)$$

é a métrica do espaço de configuração. Deste modo, fazendo uma analogia com a ação da partícula livre, a maneira natural para definirmos a distância quadrática infinitesimal no espaço das órbitas [66] é

$$\delta s^2 = \delta u_i M_{ij} \delta u_j, \quad (1.121)$$

mostrando que o espaço das órbitas é dotado com uma métrica natural M_{ij} .

O operador M é um operador de projeção já que $M^2 = M$ e também alto-adjunto.

Além disso, ele satisfaz às seguintes relações

$$\partial_i M_{ij} = M_{ij} \partial_i = 0, \quad (1.122)$$

ou seja, M_{ij} é uma matriz singular ($\det M_{ij} = 0$) que tem ∂_i como autovetor com autovalor nulo.

Como as órbitas de calibre δu_i são ortogonais à superfície física (definida pela métrica M_{ij}), ou seja

$$M_{ij} \delta u_i = 0, \quad (1.123)$$

as transformações de calibre infinitesimais podem ser escritas como

$$\delta u_i = \partial_i \epsilon, \quad (1.124)$$

onde ϵ é o parâmetro das transformações de calibre infinitesimais. Note que esta transformação também é obtida no contexto simplético e de Dirac.

Neste ponto, gostaríamos de fazer alguns comentários sobre a geometria associada à simetria de calibre. À partir da densidade Lagrangeana, eq.(1.119), identifica-se uma métrica projetiva singular que define uma superfície física (espaço das órbitas) da teoria metafluida. Uma vez que esta métrica não depende dos campos do espaço de fase, o tensor de curvatura é nulo, deste modo, o espaço das órbitas é plano.

À partir daqui, investigaremos a teoria metafluida descrita pela densidade Lagrangeana, eq.(1.119), usando o método do projetor [66, 67]. Da densidade Lagrangeana, eq.(1.119), o momento canônico conjugado ao campo de velocidade u_i é dado por

$$\pi_i(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{u}_i(\vec{x}, t)} = M_{ij} \dot{u}_j(\vec{x}, t) - \frac{\partial_i n(\vec{x}, t)}{\partial^2} - \nu M_{ij} \partial^2 u_j(\vec{x}, t). \quad (1.125)$$

Ao se contrair este momento canônico com o autovetor ∂_i , que é o modo-zero da matriz singular M_{ij} , eq.(1.122), obtém-se imediatamente o vínculo primário, dado por

$$\chi \equiv \partial_i \pi(\vec{x}, t) + n(\vec{x}, t), \quad (1.126)$$

que concorda com o resultado obtido anteriormente via método simplético e de Dirac. A evolução temporal do vínculo primário χ deve ser analisado. Logo, precisa-se obter a correspondente Hamiltoniana do modelo. Assim, reduzindo a densidade Lagrangeana, eq.(1.119), para a primeira ordem na velocidade, a saber

$$\mathcal{L} = \pi_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} \pi_i M_{ij} \pi_j - \frac{1}{2} c^2 \partial_k u_i M_{ij} \partial_k u_j - \nu \pi_i M_{ij} \partial^2 u_j + \frac{1}{2} \frac{n^2}{\partial^2} + u_i J_i, \quad (1.127)$$

a densidade Hamiltoniana canônica pode ser obtida através da transformação de Legendre como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_i M_{ij}\pi_j + \frac{1}{2}c^2\partial_k u_i M_{ij}\partial_k u_j + \nu\pi_i M_{ij}\partial^2 u_j - \frac{1}{2}\frac{n^2}{\partial^2} - u_i J_i. \quad (1.128)$$

Perfazendo, a evolução temporal do vínculo primário, dada por

$$\dot{\chi} = \int d^3\vec{x}' \{\chi(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{x}', t)\} \approx 0, \quad (1.129)$$

$$-\nu M_{ij}\partial_j\partial^2\pi_i(\vec{x}, t) - c^2 M_{ij}\partial_j\partial^2 u_i(\vec{x}, t) + \partial_j J_j(\vec{x}, t) \approx 0,$$

então

$$\partial_j J_j(\vec{x}, t) \approx 0, \quad (1.130)$$

onde usou-se a eq.(1.122). Logo, o vínculo primário, eq.(1.126), gera um segundo vínculo, dado na eq.(1.130).

A partir da densidade Lagrangeana, eq.(1.119), o vetor de Euler-Lagrange [60, 66] pode ser escrito como

$$E_k = M_{kj}\ddot{u}_j - c^2 M_{kj}\partial^2 u_j - J_k - \frac{\partial_k \dot{n}}{\partial^2} - \nu^2 M_{kj}\partial^4 u_j. \quad (1.131)$$

Como o vetor de Euler-Lagrange é um modo-zero do projetor [66], então

$$M_{ij}E_j = 0, \quad (1.132)$$

isto é, as equações de movimento que satisfazem os vínculos são projetadas pela métrica singular M_{ij} . Desta forma, aplicando a métrica na eq.(1.131), temos

$$M_{ik}E_k = M_{ik}M_{kj}\ddot{u}_j - c^2 M_{ik}M_{kj}\partial^2 u_j - M_{ik}J_k - M_{ik}\frac{\partial_k \dot{n}}{\partial^2} - \nu^2 M_{ik}M_{kj}\partial^4 u_j = 0 \quad (1.133)$$

ou

$$M_{ij}E_j = M_{ij}\ddot{u}_j - c^2 M_{ij}\partial^2 u_j - M_{ij}J_j - \nu^2 M_{ij}\partial^4 u_j = 0, \quad (1.134)$$

que pode ainda ser reescrita como

$$M_{ij}\ddot{u}_j - c^2 M_{ij}\partial^2 u_j - M_{ij}J_j - \nu^2 M_{ij}\partial^4 u_j = 0, \quad (1.135)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^\perp(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{u}^\perp(\vec{x}, t) - \bar{J}^\perp(\vec{x}, t) - \nu^2 \nabla^4 \bar{u}^\perp(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.136)$$

A equação acima é a equação de onda para o campo de velocidade transversal (veja [38], ela não depende do campo ϕ que foi eliminado), o que mostra o forte caráter ondulatório da dinâmica metafluida. Este caráter ondulatório pode ser sustentado por trabalhos experimentais, refs.[68, 69, 70, 71, 72]. Há também trabalhos teóricos relevantes ref.[73, 74, 75].

Esta equação juntamente com o vínculo, eq.(1.126), define a dinâmica metafluida com campos transversos. Com a definição do campo transversal, a condição de incompressibilidade é satisfeita automaticamente, isto é

$$\partial_i u_i^\perp = \partial_i M_{ij} u_j = 0. \quad (1.137)$$

Uma outra consequência da geometria plana do espaço das órbitas é verificada contraindo o modo-zero (∂_i) com o vetor de Euler-Lagrange, eq.(1.131), a saber,

$$\partial_k E_k = \partial_k (M_{kj} \ddot{u}_j) - \partial_k (M_{kj} \partial^2 u_j) - \partial_k J_k - \partial_k \frac{\partial_k \dot{n}}{\partial^2} - \nu^2 \partial_k (M_{kj} \partial^4 u_j) \quad (1.138)$$

ou

$$\partial_k E_k = \dot{n} + \partial_k J_k = 0. \quad (1.139)$$

Como $n = -\nabla^2 \phi$, a equação acima pode ser reescrita como

$$-\nabla^2 \dot{\phi} + \partial_k J_k = 0. \quad (1.140)$$

Desta forma, usando a eq.(1.130), vemos que a equação acima nos remete novamente à condição de que a energia de Bernoulli seja constante, ou seja, que estamos no intervalo inercial.

1.7 Conclusão

Neste capítulo, propusemos investigar a turbulência hidrodinâmica incompressível no contexto da dinâmica metafluida para abrir a possibilidade de aplicarmos todas as ferramentas bem conhecidas na teoria quântica de campos. Esta investigação foi possível devido à analogia de turbulência hidrodinâmica incompressível com eletromagnetismo de Maxwell [38]. Explorando esta analogia, desenvolvemos uma descrição Hamiltoniana para o escoamento turbulento de um fluido viscoso. Este formalismo Hamiltoniano, além da equação de Navier-Stokes, eq.(1.4), também nos fornece um caminho para a transição da descrição clássica para a descrição quântica do sistema. A partir deste formalismo Hamiltoniano calculamos os parênteses de Dirac do sistema através do formalismo simplético e de Dirac, revelando uma simetria escondida presente na dinâmica de calibre metafluida. As transformações de simetria são obtidas, eq.(1.59), e verificamos que a simetria é preservada somente dentro do intervalo inercial. Desta forma, a invariância de calibre do Hamiltoniano

do sistema, eq.(1.42), está diretamente relacionada à condição de que não há dissipação de energia dentro do intervalo inercial. O vínculo, eq.(1.49), pode ser identificado como sendo o gerador destas transformações de simetria. Também apresentamos uma interpretação geométrica para a simetria de calibre revelada na teoria metafluida. Como a métrica, eq.(1.120), não depende dos campos do espaço de fase, o espaço das órbitas é plano (como no eletromagnetismo). Além disso, a Lagrangeana obtida, eq.(1.119), escrita em termos dos campos transversos (que são fisicamente importantes para a teoria), descrevem agora um sistema Hamiltoniano sem vínculos. Além disso, a contração da métrica, eq.(1.120), com o vetor de Euler, eq.(1.132), nos dá uma equação de onda, revelando o forte caráter de onda da teoria metafluida. Esta equação de onda é obtida também em [38], mas escrita em termos do campo de velocidade com ambas as componentes, horizontais (invariante de calibre) e vertical (variante de calibre).

Capítulo 2

Formalismo de imersão simplética via variáveis de Wess-Zumino

2.1 Introdução

Teorias de calibre têm desempenhado um papel importante em teorias de campos já que elas estão relacionadas com interações físicas fundamentais na Natureza. De um modo mais geral, estas teorias têm simetrias de calibre definidas por algumas relações chamadas, na linguagem de Dirac, de vínculos de primeira classe [4, 5, 6, 7, 8]. A quantização dessas teorias necessita de cuidados especiais pois, devido a presença de simetrias de calibre, existem graus de liberdade supérfluos, os quais devem ser eliminados (antes ou depois) da implementação de um processo de quantização válido. A quantização de sistemas de primeira classe foi formulado sob o ponto de vista de Dirac [4, 5, 6, 7, 8] e integrais de trajetórias [64]. Mais tarde, a análise por integrais de trajetórias foi estendida por Batalin, Fradkin e Vilkovisky [76, 77] para preservar a simetria BRST [78].

Por outro lado, a quantização de sistemas de segunda classe é, em geral, uma tarefa difícil, pois os parênteses de Poisson são substituídos pelos parênteses de Dirac. No nível quântico, as variáveis tornam-se operadores e os parênteses de Dirac tornam-se

comutadores. Devido a isto, o processo de quantização canônico sofre alguns problemas, como problemas de ordenamento de operadores [79] e anomalias [80] no contexto de sistemas vinculados não lineares e teorias de calibre quirais, respectivamente. Em vista disto, parece que é mais natural e seguro trabalhar a quantização de sistema de segunda classe sem invocar os parênteses de Dirac. De fato, foi a estratégia seguida por muitos autores nas últimas décadas [81, 82, 83, 84]. O sistema não invariante tem sido mergulhado em um espaço de fase estendido a fim de mudar a natureza de segunda classe dos vínculos para primeira classe. Deste modo, todo o mecanismo para a quantização de sistema de segunda classe pode muito bem ser usado [78, 85]. Para implementar esta concepção, Faddeev e Shatashivilli [86] sugerem a extensão do espaço de fase com a introdução de novas variáveis para linearizar o sistema, chamadas variáveis de WZ. Esta idéia tem sido adotada por muitos autores [87, 88] e alguns métodos foram propostos e alguns formalismos de conversão de vínculos, baseados no método de Dirac [4, 5, 6, 7, 8], foram desenvolvidos. Entre eles, os métodos de Batalin-Fradkin-Fradikina-Tyutin (BFFT) [89] e o iterativo [90], poderoso o suficiente para ser aplicado em um grande número de sistemas físicos importantes. Embora estas técnicas compartilhem da mesma base conceitual [86] e se fundamentem na estrutura de Dirac [4, 5, 6, 7, 8], estes métodos de conversão de vínculos foram implementados seguindo diferentes direções. Historicamente, ambos os métodos, o BFFT e o iterativo foram aplicados em sistemas lineares tais como teoria de campos quirais [90, 91] a fim de eliminar a anomalia quiral que impede o processo de quantização. Apesar do grande sucesso alcançado por estes métodos, eles têm um problema de ambiguidade [84]. Este problema surge naturalmente quando os vínculos de

segunda classe são convertidos para primeira classe com a introdução das variáveis de WZ. Devido a isto, o processo de conversão de vínculos pode tornar-se uma difícil tarefa, como mostrado em [84]. Para contornar este tipo de problema propomos uma nova abordagem que implemente a reformulação invariante de calibre, baseada no formalismo simplético. Chamaremos esta abordagem de Formalismo Simplético de Imersão.

A motivação neste capítulo é esclarecer e sistematizar o uso do formalismo simplético no processo de imersão de WZ e, também, dar uma interpretação geométrica para as simetrias de WZ, o que de acordo com o nosso julgamento não foi ainda propriamente investigado. Devido a isto, introduz-se um esquema alternativo de imersão de WZ para dar um tratamento geométrico para as simetrias induzidas de WZ. Isto parece importante porque as simetrias de WZ induzidas por outras técnicas de imersão, como BFFT e iterativo, foram estudadas a partir de um ponto de vista algébrico. Neste cenário, propomos explicar o significado dos problemas de arbitrariedades presentes nos esquemas de conversão de vínculos. Assim, esperamos explorar estes aspectos de um modo positivo.

O formalismo simplético de imersão é desenvolvido para lidar com sistemas vinculados não invariantes de calibre, portanto fundamenta-se no método simplético e na introdução das variáveis de WZ. O ponto fundamental por trás do formalismo simplético é a matriz simplética: se esta matriz é singular, o modelo apresenta uma simetria; caso contrário, os parênteses de Dirac são obtidos. Em virtude disto, o processo por trás do formalismo de imersão simplético é transformar uma matriz simplética não singular em uma singular, o que, conseqüentemente, permite revelar a simetria de calibre. Para tanto, introduz-se uma função arbitrária (G), que depende das variáveis originais e de WZ, na Lagrangeana de

primeira-ordem. Nas próximas seções o formalismo simplético de imersão será apresentado em duas formulações: Formalismo simplético de imersão I e II. Depois, ilustraremos a aplicação das idéias discutidas anteriormente no modelo de Schwinger quiral bosonizado, que tem atraído muita atenção nas últimas décadas, principalmente no contexto de teorias de cordas [12, 13] e também devido ao vasto progresso na compreensão do significado físico das anomalias em teoria quântica de campos.

A fim de sistematizar o formalismo simplético invariante de calibre, consideramos um modelo mecânico não invariante cuja dinâmica é governada pela Lagrangeana dada na eq.(A.5). Iniciando com a introdução de duas funções arbitrárias dependentes do espaço de fase original e das variáveis de WZ, isto é, $\Psi(a_i, p_i)$ e $G(a_i, p_i, \eta)$, em uma primeira versão onde Ψ é uma função qualquer e em uma segunda versão onde Ψ é o momento conjugado à variável de WZ η .

2.2 Formalismo simplético de imersão I

Considere a Lagrangeana de primeira-ordem, como sendo

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = A_\alpha^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\alpha} + \Psi \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (2.1)$$

onde

$$\tilde{U}^{(0)} = U^{(0)} + G(a_i, p_i, \eta). \quad (2.2)$$

A função arbitrária, $G(a_i, p_i, \eta)$, é expressa como uma expansão em termos do campo de WZ, dada por

$$G(a_i, p_i, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \eta), \quad \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \eta) \sim \eta^n \quad (2.3)$$

e satisfaz à seguinte condição de fronteira

$$G(a_i, p_i, \eta = 0) = 0. \quad (2.4)$$

As variáveis simpléticas foram estendidas para conterem também as variáveis de WZ, sendo assim, $\tilde{\xi}^{(1)\tilde{\alpha}} = (\xi^{(0)\alpha}, \eta)$ (com $\tilde{\alpha} = 1, 2, \dots, 2N + 1$). O potencial simplético de iteração-zero é reescrito como

$$\tilde{U}^{(0)}(a_i, p_i, \eta) = U^{(0)}(a_i, p_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \eta). \quad (2.5)$$

Os momenta canônicos uma forma serão designados por

$$\tilde{A}_{\tilde{\alpha}}^{(0)} = \begin{cases} A_{\alpha}^{(0)}, & \text{com } \tilde{\alpha} = 1, 2, \dots, 2N \\ \Psi, & \text{com } \tilde{\alpha} = 2N + 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

e o novo tensor simplético é dado por

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{A}_{\tilde{\beta}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}}} - \frac{\partial \tilde{A}_{\tilde{\alpha}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\beta}}}, \quad (2.7)$$

onde

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = \begin{pmatrix} f_{\alpha\beta}^{(0)} & f_{\alpha\eta}^{(0)} \\ f_{\eta\beta}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A implementação do esquema simplético invariante de calibre segue dois passos: o primeiro é dedicado ao cálculo de $\Psi(a_i, p_i)$ enquanto o segundo é dedicado ao cálculo de $G(a_i, p_i, \eta)$. Para iniciarmos o primeiro passo, impõe-se que o novo tensor simplético ($\tilde{f}^{(0)}$) seja singular, então,

$$\tilde{\nu}^{(0)\tilde{\alpha}} \tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = 0. \quad (2.9)$$

Supondo que este modo-zero genérico é

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (\mu^\alpha \quad 1), \quad (2.10)$$

onde μ^α é arbitrário e usando a relação dada na eq.(2.9) junto com a eq.(2.8), obtem-se um conjunto de equações, a saber

$$\mu^\alpha f_{\alpha\beta}^{(0)} + f_{\alpha\eta}^{(0)} = 0, \quad (2.11)$$

onde

$$f_{\alpha\eta}^{(0)} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi^{(0)\alpha}} - \frac{\partial A_\alpha^{(0)}}{\partial\eta}. \quad (2.12)$$

Observe que os elementos de matriz μ^α são escolhidos de modo a revelar a simetria de calibre desejada. Note que neste formalismo o modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)\bar{\alpha}}$ é o gerador da simetria de calibre. Neste ponto, devemos mencionar que esta característica é importante porque ela abre a possibilidade de revelarmos as simetrias de calibre escondidas desejadas a partir do modelo não-invariante. Isto garante ao formalismo simplético de imersão a capacidade de lidar com sistemas não-invariantes de calibre. A partir da eq.(2.9), algumas equações diferenciais envolvendo $\Psi(a_i, p_i)$ são obtidas, eqs.(2.11), e após alguns cálculos diretos, $\Psi(a_i, p_i)$ pode ser determinada.

Para calcular $G(a_i, p_i, \eta)$, impõe-se que nenhum vínculo surja da contração do modo-zero ($\tilde{\nu}^{(0)\bar{\alpha}}$) com o gradiente do potencial $\tilde{U}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)$. Esta condição gera uma equação diferencial geral, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^{(0)\bar{\alpha}} \frac{\partial\tilde{U}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial\xi^{(0)\bar{\alpha}}} &= 0, \\ \mu^\alpha \frac{\partial U^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial\xi^{(0)\alpha}} + \mu^\alpha \frac{\partial\mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial\xi^{(0)\alpha}} + \mu^\alpha \frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial\xi^{(0)\alpha}} + \dots \\ + \frac{\partial\mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial\eta} + \dots &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que permite calcular todos os termos de correção $\mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \eta)$ em termos de η . Note que esta expansão polinomial em termos de η é igual a zero, subsequentemente, todos

os coeficientes para cada ordem em η deve ser nulo identicamente. Em vista disto, cada correção em η é determinado. Para termos de correção linear, tem-se

$$\mu^\alpha \frac{\partial U^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0. \quad (2.14)$$

Para termos de correção quadrático, obtém-se

$$\mu^\alpha \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0. \quad (2.15)$$

A partir destas equações, uma equação recursiva para $n \geq 2$ é proposta como sendo

$$\mu^\alpha \frac{\partial \mathcal{G}^{(n-1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0, \quad (2.16)$$

que permite calcular cada termo de correção em η . Este processo iterativo é sucessivamente repetido até que a eq.(2.13) torne-se identicamente nula. Consequentemente, o termo extra $G(a_i, p_i, \eta)$ é obtido explicitamente. Então, a Hamiltoniana invariante de calibre, identificada como sendo o potencial simplético, é obtido como

$$\tilde{\mathcal{H}}(a_i, p_i, \eta) = U^{(0)}(a_i, p_i) + G(a_i, p_i, \eta), \quad (2.17)$$

e o modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)\tilde{\alpha}}$ é identificado como sendo o gerador de uma transformação de calibre infinitesimal, dado por

$$\delta \tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}} = \varepsilon \tilde{\nu}^{(0)\tilde{\alpha}}, \quad (2.18)$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal.

2.3 Formalismo simplético de imersão II

A sistematização do formalismo simplético de imersão começa supondo que a versão invariante de calibre da Lagrangeana geral ($\tilde{\mathcal{L}}(a_i, \dot{a}_i, t)$) é dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}(a_i, \dot{a}_i, \varphi_p, t) = \mathcal{L}(a_i, \dot{a}_i, t) + \mathcal{L}_{WZ}(a_i, \dot{a}_i, \varphi_p), \quad (p = 1, 2), \quad (2.19)$$

onde $\varphi_p = (\eta, \dot{\eta})$ e o termo extra (\mathcal{L}_{WZ}) depende das variáveis originais (a_i, \dot{a}_i) e configuração de WZ (φ_p). De fato, esta Lagrangeana de WZ pode ser expressa como uma expansão da variável de WZ (φ_p) como

$$\mathcal{L}_{WZ}(a_i, \dot{a}_i, \varphi_p) = \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)}(a_i, \dot{a}_i, \varphi_p), \quad \text{com } v^{(n)}(\varphi_p) \sim \varphi_p^n, \quad (2.20)$$

que satisfaz à seguinte condição de fronteira,

$$\mathcal{L}_{WZ}(\varphi_p = 0) = 0. \quad (2.21)$$

A redução da Lagrangeana, eq.(2.19), para a sua forma de primeira-ordem precede o começo do processo de conversão, deste modo

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = A_{\tilde{\alpha}}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}} + \pi_{\eta} \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (2.22)$$

onde π_{η} é o momento conjugado às variáveis de WZ, isto é,

$$\pi_{\eta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{WZ}}{\partial \dot{\eta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v^{(n)}(a_i, \dot{a}_i, \varphi_p)}{\partial \dot{\eta}}. \quad (2.23)$$

As variáveis simpléticas expandidas são $\tilde{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}} \equiv (a_i, p_i, \varphi_p)$ e o novo potencial simplético torna-se

$$\tilde{U}^{(0)} = U^{(0)} + G(a_i, p_i, \lambda_p), \quad (p = 1, 2), \quad (2.24)$$

onde $\lambda_p = (\eta, \pi_{\eta})$. A função arbitrária $G(a_i, p_i, \lambda_p)$ é expressa como uma expansão em termos dos campos de WZ, isto é

$$G(a_i, p_i, \lambda_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p), \quad (2.25)$$

com

$$\mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p) \sim \lambda_p^n. \quad (2.26)$$

Neste contexto, os momenta canônicos de ordem zero são dados por

$$\tilde{A}_{\tilde{\alpha}}^{(0)} = \begin{cases} A_{\alpha}^{(0)}, & \text{com } \tilde{\alpha} = 1, 2, \dots, N, \\ \pi_{\eta}, & \text{com } \tilde{\alpha} = N + 1, \\ 0, & \text{com } \tilde{\alpha} = N + 2. \end{cases} \quad (2.27)$$

O tensor simplético correspondente, obtido a partir da seguinte relação geral

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{A}_{\tilde{\beta}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}}} - \frac{\partial \tilde{A}_{\tilde{\alpha}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\beta}}}, \quad (2.28)$$

é

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = \begin{pmatrix} f_{\alpha\beta}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

que deve ser uma matriz singular.

A implementação do formalismo de imersão simplético consiste em calcularmos a função arbitrária ($G(a_i, p_i, \lambda_p)$). Para isto, os termos de correção em ordem de λ_p ($\mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)$), devem ser calculados. Se a matriz simplética, eq.(2.29), é singular, ela tem um modo-zero $\tilde{\varrho}$ e, conseqüentemente, tem-se

$$\tilde{\varrho}^{(0)\tilde{\alpha}} \tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(0)} = 0, \quad (2.30)$$

onde assume-se que este modo-zero é

$$\tilde{\varrho}^{(0)} = (\gamma^{\alpha} \quad 0 \quad 0), \quad (2.31)$$

onde γ^{α} , é uma matriz linha genérica. Usando a relação dada na eq.(2.30) junto com a eq.(2.29) e a eq.(2.31), obtém-se

$$\gamma^{\alpha} f_{\alpha\beta}^{(0)} = 0. \quad (2.32)$$

Desta forma, o modo-zero é obtido e, de acordo com o formalismo simplético, este modo-zero deve ser contraído com o gradiente do potencial simplético, isto é,

$$\tilde{\varrho}^{(0)\tilde{\alpha}} \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}}} = 0, \quad (2.33)$$

como consequência, surge um vínculo, a saber,

$$\Omega = \gamma^\alpha \left[\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right]. \quad (2.34)$$

Devido a isto, a Lagrangeana de primeira-ordem é reescrita como

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} = A_{\tilde{\alpha}}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}} + \pi_\eta \dot{\eta} + \Omega \dot{\zeta} - \tilde{U}^{(1)}, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{U}^{(1)} = U^{(0)}$. Note que as variáveis simpléticas agora são $\tilde{\xi}^{(1)\tilde{\alpha}} \equiv (a_i, p_i, \zeta, \lambda_p)$ (com $\tilde{\alpha} = 1, 2, \dots, N+3$) e a matriz simplética correspondente torna-se

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{\alpha\beta}^{(0)} & f_{\alpha\zeta} & 0 & 0 \\ f_{\eta\beta} & 0 & f_{\zeta\eta} & f_{\zeta\pi_\eta} \\ 0 & f_{\eta\zeta} & 0 & -1 \\ 0 & f_{\pi_\eta\zeta} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\zeta\eta} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\gamma^\alpha \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right) \right], \\ f_{\zeta\pi_\eta} &= -\frac{\partial}{\partial \pi_\eta} \left[\gamma^\alpha \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right) \right], \\ f_{\alpha\zeta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(0)\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \left[\gamma^\alpha \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi^{(0)\alpha}} + \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Já que o nosso objetivo é revelar uma simetria de WZ, este tensor simplético deve ser singular, conseqüentemente, ele tem um modo-zero, isto é,

$$\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)} = (\mu_{(\nu)}^\alpha \quad 1 \quad a \quad b), \quad (2.38)$$

a qual satisfaz à relação

$$\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}} \tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(1)} = 0. \quad (2.39)$$

Note que os parâmetros (a, b) podem ser 0 ou 1 e ν indica o número de escolhas para

$\tilde{\nu}^{(1)\tilde{\alpha}1}$. Como consequência, há dois conjuntos independentes de modos-zero, dados por

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{(\nu)(0)}^{(1)} &= (\mu_{(\nu)}^\alpha \quad 1 \quad 0 \quad 1), \\ \tilde{\nu}_{(\nu)(1)}^{(1)} &= (\mu_{(\nu)}^\alpha \quad 1 \quad 1 \quad 0).\end{aligned}\tag{2.40}$$

Note que os elementos de matriz $\mu_{(\nu)}^\alpha$ apresentam algumas arbitrariedades, as quais podem ser fixadas para revelarmos a simetria de calibre de WZ desejada. Além disso, no formalismo, o modo-zero $\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}}$ é o gerador da simetria de calibre, o que nos permite apresentar as simetrias a partir do ponto de vista geométrico. Neste ponto chamamos a atenção para o fato de que esta é uma característica importante, uma vez que ela abre a possibilidade de revelarmos a simetria de calibre escondida desejada a partir do modelo não invariante. Diferentes escolhas do modo-zero geram diferentes versões invariantes de calibre do sistema de segunda classe. Contudo, estas descrições são dinamicamente equivalentes, isto é, há a possibilidade de relacionarmos estes conjuntos de modos-zero, eq.(2.40), através de uma transformação canônica $(\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)}) = T \cdot \tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)}$ onde a barra significa matriz transposta. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} \mu_{(\nu)}^\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{(\nu)}^\alpha \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{2.41}$$

No contexto do formalismo BFFT, diferentes escolhas para a matriz degenerada X conduz à diferentes versões invariantes de calibre do modelo de segunda classe [84]. Agora, torna-se claro que a arbitrariedade presente nos métodos de conversão iterativo e BFFT tem sua origem na escolha do modo-zero.

A partir da relação, eq.(2.39), junto com a eq.(2.36) e a eq.(2.38), algumas equações

¹É importante notarmos que ν não é um parâmetro fixo

diferenciais envolvendo $G(a_i, p_i, \lambda_p)$ são obtidas, isto é,

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_{(\nu)}^\alpha f_{\alpha\beta}^{(0)} + f_{\zeta\beta}, \\
 0 &= \mu_{(\nu)}^\alpha f_{\alpha\zeta}^{(0)} + a f_{\eta\zeta} + b f_{\pi\eta\zeta}, \\
 0 &= f_{\zeta\eta}^{(0)} + b, \\
 0 &= f_{\zeta\pi\eta}^{(0)} - a.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Resolvendo as relações acima, alguns termos de correção, $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}^{(m)}(a_i, p_i, \lambda_p)$, podem ser determinados, incluindo também as condições de fronteira ($\mathcal{G}^{(0)}(a_i, p_i, \lambda_p = 0)$).

Para calcularmos os termos de correção restantes de $G(a_i, p_i, \lambda_p)$, impõe-se que mais nenhum vínculo surja da contração do modo-zero ($\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}}$) com o gradiente do potencial $\tilde{U}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p)$. Esta condição gera uma equação diferencial, dada por

$$\begin{aligned}
 0 &= \tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}} \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \tilde{\xi}^{(1)\tilde{\alpha}}} \\
 &= \mu_{(\nu)}^\alpha \left[\frac{\partial U^{(1)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} + \frac{\partial G(a_i, p_i, \eta, \pi_\eta)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} \right] + a \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \eta} + b \frac{\partial G(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \pi_\eta} \\
 &= \mu_{(\nu)}^\alpha \left[\frac{\partial U^{(1)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{G}^{(m)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} \right] + a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \eta} \\
 &+ b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{G}^{(m)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \pi_\eta}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

A última relação permite calcular todos os termos de correção para λ_p , $\mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)$. Note que esta expansão polinomial em termos de λ_p é igual a zero, conseqüentemente, todos os coeficientes para cada ordem nestas variáveis de WZ devem ser identicamente nulos. Devido a isto, cada termo de correção em termos de λ_p podem ser determinados.

Para um termo de correção linear, tem-se

$$0 = \mu_{(\nu)}^\alpha \left[\frac{\partial U^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(1)\alpha}} \right] + a \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \eta} + b \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \pi_\eta}, \tag{2.44}$$

onde a relação $U^{(1)} = U^{(0)}$ foi usada. Para um termo de correção quadrático, tem-se

$$0 = \mu_{(\nu)}^{\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right] + a \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \eta} + b \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \pi_{\eta}}. \quad (2.45)$$

A partir destas relações, uma equação recursiva para $n \geq 2$ é proposta, a saber,

$$0 = \mu_{(\nu)}^{\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{G}^{(n-1)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \right] + a \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \eta} + b \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)}{\partial \pi_{\eta}}, \quad (2.46)$$

que nos permite calcular os termos de correção restantes para η e π_{η} . Este processo iterativo é sucessivamente repetido até que a eq.(2.43) torne-se identicamente nula(caso *i*) ou quando um termo extra $\mathcal{G}^{(n)}(a_i, p_i, \lambda_p)$ não pode ser calculado(caso *ii*). Então, o novo potencial simplético é escrito como

$$\tilde{U}^{(1)}(a_i, p_i, \lambda_p) = U^{(0)}(a_i, p_i) + G(a_i, p_i, \lambda_p). \quad (2.47)$$

Para o caso *i*, o novo potencial simplético é invariante de calibre. Para o caso *ii*, devido a alguns termos de correção $G(a_i, p_i, \lambda_p)$ que ainda não foram determinados, este novo potencial simplético não é invariante de calibre. Como consequência, há alguns contra termos de WZ no novo potencial simplético, os quais podem ser fixados usando as equações de Hamilton de movimento para as variáveis de WZ (η , π_{η}) junto com a relação de momento conjugado canônico para η , dada na eq.(2.23). Devido a isto, a Hamiltoniana invariante de calibre é obtida explicitamente e o modo-zero $\tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}}$ é identificado como sendo o gerador das transformações de calibre infinitesimais, dadas por

$$\delta \tilde{\xi}_{(\nu)(a)}^{\tilde{\alpha}} = \varepsilon \tilde{\nu}_{(\nu)(a)}^{(1)\tilde{\alpha}}, \quad (2.48)$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal.

Na próxima seção, aplicaremos o formalismo simplético de imersão II no modelo de Schwinger quiral bosonizado.

2.4 Aplicação no modelo de Schwinger quiral bosonizado

Tem sido mostrado nas últimas décadas que teorias de calibre anômalas em duas dimensões podem ser consistentemente e unitariamente quantizadas, tanto Abelianas [80, 92, 93, 94, 95] quanto não Abelianas [96, 97]. Neste cenário, o modelo bi-dimensional que tem sido estudado é o modelo de Schwinger quiral bosonizado. Iniciamos com a seguinte densidade Lagrangeana do modelo com $a > 1$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + q (g^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi A_\nu + \frac{1}{2} q^2 a A_\mu A^\mu. \quad (2.49)$$

Aqui, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1)$ e $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = \epsilon_{10} = 1$. O método simplético será aplicado para quantizar o modelo de segunda classe original e, então, os parênteses de Dirac e a sua respectiva Hamiltoniana reduzida será determinada. A fim de implementar o método simplético, a Lagrangeana de segunda-ordem na velocidade, dada na eq.(2.49), é reduzida a primeira-ordem, a saber,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi^1 \dot{A}_1 - U^{(0)}, \quad (2.50)$$

onde o potencial simplético de iteração de ordem zero, $U^{(0)}$, é

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= \frac{1}{2} (-\pi_1 \pi^1 + \pi_\phi^2 + \partial_1 \phi \partial^1 \phi) + A_0 (\partial_1 \pi^1 + q^2 (1-a) A^0 + q^2 A^1 - q \pi_\phi - q \partial_1 \phi) \\ &+ A_1 (q \pi_\phi - \frac{1}{2} q^2 (a+1) A^1 - q \partial^1 \phi) - \frac{1}{2} q^2 (1-a) A^0 A_0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

As variáveis simpléticas de ordem-zero são $\xi^{(0)\alpha} = (\phi, \pi_\phi, A_0, A^1, \pi^1)$ com os seguintes momenta canônicos uma-forma $A_\alpha^{(0)}$,

$$A_\phi^{(0)} = \pi_\phi,$$

$$A_{A^1}^{(0)} = \pi^1, \quad (2.52)$$

$$A_{\pi_\phi}^{(0)} = A_{A_0}^{(0)} = A_{\pi^1}^{(0)} = 0.$$

O tensor simplético da iteração de ordem zero é obtido como

$$f^{(0)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (2.53)$$

Esta matriz é obviamente singular, deste modo, ela tem um modo-zero que gera um vínculo quando contraído com o gradiente do potencial $U^{(0)}$, dado por,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \int d^3x \nu_\alpha(y) \frac{\delta U^{(0)}(x)}{\delta \xi^\alpha(y)} \\ &= -\partial^1 \pi_1 + q^2(1 - a)A^0 + q^2 A^1 - q\pi_\phi - q\partial_1 \phi, \end{aligned} \quad (2.54)$$

que é identificado como sendo a lei de Gauss, o qual satisfaz à seguinte algebra de Poisson

$$\{\Omega_1(x), \Omega_1(y)\} = 0. \quad (2.55)$$

Substituindo de volta o vínculo Ω_1 no setor canônico da Lagrangeana de primeira-ordem através de um multiplicador de Lagrange ζ , obtém-se a Lagrangeana de primeira iteração $\mathcal{L}^{(1)}$, isto é,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi^1 \dot{A}_1 + \Omega_1 \zeta - U^{(1)}, \quad (2.56)$$

onde o potencial simplético de primeira iteração é

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{(0)} |_{\Omega_1=0} \\ &= \frac{1}{2}(-\pi^1 \pi_1 + \pi_\phi^2 - \partial_1 \phi \partial^1 \phi) + A_1(q\pi_\phi - \frac{1}{2}q^2(a+1)A^1 - \partial^1 \phi) - \frac{1}{2}q^2(1-a)A^0 A_0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Deste modo, as variáveis simpléticas tornam-se $\xi^{(1)\alpha} = (\phi, \pi_\phi, A_0, A^1, \pi^1, \zeta)$ com os seguintes momenta canônico uma-forma $A_\alpha^{(1)}$,

$$\begin{aligned} A_\phi^{(1)} &= \pi_\phi, \\ A_{A^1}^{(1)} &= \pi^1, \\ A_{A_0}^{(1)} = A_{\pi_\phi}^{(1)} = A_{\pi^1}^{(1)} &= 0, \\ A_\zeta^{(1)} &= -\partial^1 \pi_1 + q^2(1-q)A^0 + q^2 A^1 - q\pi_\phi - q\partial_1 \phi. \end{aligned} \quad (2.58)$$

A matriz correspondente $f^{(1)}$ é então

$$f^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & q\partial_y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \partial_y \\ -q\partial_x & -q & -q^2(a-1) & -q^2 & -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y), \quad (2.59)$$

que é uma matriz não singular. A inversa de $f^{(1)}(x, y)$ gera os parênteses de Dirac entre os campos físicos, dados por

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y)\}^* &= 0, \\ \{\phi(x), \pi_\phi(y)\}^* &= \delta^{(3)}(x-y), \\ \{\phi(x), A_0(y)\}^* &= -\frac{1}{q(a-1)} \delta^{(3)}(x-y), \\ \{\phi(x), A_1(y)\}^* &= 0, \\ \{\phi(x), \pi_1(y)\}^* &= 0, \\ \{\pi_\phi(x), \pi_\phi(y)\}^* &= 0, \\ \{\pi_\phi(x), A_0(y)\}^* &= \frac{1}{q(a-1)} \partial_y \delta^{(3)}(x-y), \\ \{\pi_\phi(x), A_1(y)\}^* &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\pi_\phi(x), \pi_1(y)\}^* &= 0, \\
 \{A_1(x), A_0(y)\}^* &= -\frac{1}{q^2(a-1)} \partial_y \delta^{(3)}(x-y), \\
 \{A_1(x), A_1(y)\}^* &= 0, \\
 \{A_1(x), \pi_1(y)\}^* &= \delta^{(3)}(x-y), \\
 \{\pi_1(x), A_0(y)\}^* &= \frac{1}{(a-1)} \delta^{(3)}(x-y), \\
 \{\pi_1(x), \pi_1(y)\}^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Isto significa que o modelo não é uma teoria invariante de calibre.

Para iniciarmos o formalismo simplético de imersão, alguns contra-termos de WZ, dentro de \mathcal{L}_{WZ} , são introduzidos na Lagrangeana original, conduzindo a uma Lagrangeana invariante de calibre, a saber,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{WZ}. \tag{2.61}$$

De acordo com o formalismo simplético de imersão, a Lagrangeana acima, eq.(2.61), deve ser reduzida para a primeira-ordem, dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi^1 \dot{A}_1 + \pi_\eta \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \tag{2.62}$$

com

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(-\pi_1 \pi^1 + \pi_\phi^2 - \partial_1 \phi \partial^1 \phi) + A_0 \Omega_{(1)} + A_1 (q \pi_\phi - \frac{1}{2} q^2 (a+1) A^1 - q \partial^1 \phi) \\
 &- \frac{1}{2} q^2 (1-a) A_0 A^0 + G(\phi, \pi_\phi, A^1, \pi^1, A_0, \lambda_p),
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

onde a função arbitrária G é

$$G(\phi, \pi_\phi, A^1, \pi^1, A_0, \lambda_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(\phi, \pi_\phi, A^1, \pi^1, A_0, \lambda_p), \tag{2.64}$$

e $\mathcal{G}^{(n)}$ é expandida em termos das variáveis de WZ ($\lambda_p = (\eta, \pi_\eta)$),

$$\mathcal{G}^{(n)} \sim (\lambda_p)^n. \quad (2.65)$$

O vetor simplético é dado por $\tilde{\xi}^{(0)\tilde{\alpha}} = (\phi, \pi_\phi, A^1, \pi^1, A_0, \lambda_p)$ e seus momentos correspondentes são

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\phi^{(0)} &= \pi_\phi, \\ \tilde{A}_{A_1}^{(0)} &= \pi_1, \\ \tilde{A}_{A_0}^{(0)} = \tilde{A}_{\pi_\phi}^{(0)} = \tilde{A}_{\pi_1}^{(0)} = \tilde{A}_{\pi_\eta}^{(0)} &= 0, \\ \tilde{A}_\eta^{(0)} &= \pi_\eta. \end{aligned} \quad (2.66)$$

A matriz simplética correspondente $\tilde{f}^{(0)}$ é

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta(x-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Como a matriz é singular, ela tem um modo-zero,

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (2.68)$$

o qual gera o seguinte vínculo

$$\Omega = -\partial^1 \pi_1 + q^2(1-a)A^0 + q^2 A^1 - q\pi_\phi - q\partial_1 \phi + \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \quad (2.69)$$

após a contração com o gradiente do potencial simplético.

Seguindo o formalismo simplético de imersão, este vínculo é introduzido no setor cinético da Lagrangeana, eq.(2.62), através de um multiplicador de Lagrange (ζ), que conduz a Lagrangeana de primeira iteração, dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi^1 \dot{A}_1 + \Omega \dot{\zeta} - U^{(1)}, \quad (2.70)$$

onde $\tilde{U}^{(1)} = \tilde{U}^{(0)}$. O vetor simplético muda para $\tilde{\xi}^{(1)\bar{\alpha}} = (\phi, \pi_\phi, A^1, \pi^1, A_0, \zeta, \lambda_p)$, com a respectiva matriz simplética,

$$\tilde{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & f_{\phi\zeta}^{(1)} & 0 & 0 \\ \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{\pi_\phi\zeta}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 & f_{A^1\zeta}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta(x-y) & 0 & 0 & f_{\pi^1\zeta}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{A^0\zeta}^{(1)} & 0 & 0 \\ f_{\zeta\phi}^{(1)} & f_{\zeta\pi_\phi}^{(1)} & f_{\zeta A^1}^{(1)} & f_{\zeta\pi^1}^{(1)} & f_{\zeta A^0}^{(1)} & 0 & f_{\zeta\eta}^{(1)} & f_{\zeta\pi_\eta}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{\eta\zeta}^{(1)} & 0 & -\delta(x-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{\pi_\eta\zeta}^{(1)} & \delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

com

$$\begin{aligned} f_{\zeta\phi}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= q\partial_1^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta\pi_\phi}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= q\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta\pi_\phi(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta A^0}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= -q^2(1-a)\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta A^0(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta A^1}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= -q^2\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta A^1(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta\pi^1}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= \partial_1^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta\pi^1(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta\theta}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{\delta}{\delta\theta(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\ f_{\zeta\pi_\theta}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{\delta}{\delta\pi_\theta(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora, para revelarmos a simetria de calibre, um modo-zero genérico é definido como

$$\tilde{\nu}^{(1)\bar{\alpha}} = (\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ \nu_4 \ \nu_5 \ \nu_6 \ \nu_7 \ \nu_8). \quad (2.73)$$

A contração deste modo-zero e o tensor simplético é, então, identicamente nulo, isto é,

$$\int d^3x \tilde{\nu}^{(1)\bar{\alpha}}(\vec{x}) \tilde{f}_{\bar{\alpha}\beta}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (2.74)$$

O que nos conduz a sete equações diferenciais, dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x [\nu_2(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta\phi}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x [-\nu_1(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta\pi_\phi}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x [-\nu_4(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta A^1}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x [\nu_3(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta\pi^1}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x \nu_6(\vec{x})f_{\zeta A^0}(\vec{x}, \vec{y}), \\ 0 &= \int d^3x [\nu_1(\vec{x})f_{\phi\zeta}(\vec{x}, \vec{y}) + \nu_2(\vec{x})f_{\pi_\phi\zeta}(\vec{x}, \vec{y}) + \nu_3(\vec{x})f_{A^1\zeta}(\vec{x}, \vec{y}) \\ &\quad + \nu_4(\vec{x})f_{\pi^1\zeta}(\vec{x}, \vec{y}) + \nu_7(\vec{x})f_{\eta\zeta}(\vec{x}, \vec{y}) + \nu_8(\vec{x})f_{\pi_\eta\zeta}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x [\nu_8(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta\eta}(\vec{x}, \vec{y})], \\ 0 &= \int d^3x [-\nu_7(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \nu_6(\vec{x})f_{\zeta\pi_\eta}(\vec{x}, \vec{y})]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para colocar nosso trabalho em perspectiva com outros, escolhemos convenientemente, o modo-zero como sendo

$$\tilde{\nu}^{(1)\bar{\alpha}} = (q \ q\partial_x^1 \ \partial_x^1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \Delta \ -q^2/\Delta\partial_1^x), \quad (2.76)$$

com $\Delta^2 = q^2(1 - a)$. Devido a isto, o conjunto de equações diferenciais acima torna-se

$$0 = \int d^3x \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)},$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int d^3x \frac{\delta}{\delta\pi_\phi(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\
 0 &= \int d^3x \left[-q^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta A^1(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right], \\
 0 &= \int d^3x \frac{\delta}{\delta\pi^1(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)}, \\
 0 &= - \int d^3x q^2 / \Delta \partial_1^x \left[q^2(1-a) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta A^0(y)} \int d\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right], \quad (2.77) \\
 0 &= \int d^3x \left[-q^2 \partial_1^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_x^1 \frac{\delta}{\delta A^1(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right. \\
 &\quad \left. - \Delta \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} + \frac{q^2}{\Delta} \partial_1^x \frac{\delta}{\delta\pi_\eta(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right], \\
 0 &= \int d^3x \left[\frac{q^2}{\Delta} \partial_1^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta\theta(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right], \\
 0 &= \int d^3x \left[\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta}{\delta\pi_\eta(y)} \int_\omega \frac{\delta G(\omega)}{\delta A^0(x)} \right].
 \end{aligned}$$

A partir da terceira e quinta relação acima, obtemos a condição de fronteira, que é escrita como

$$\mathcal{G}^{(0)} = -\frac{1}{2} \Delta A^0 A_0 - q^2 A^1 A^0. \quad (2.78)$$

Assim, o termo de correção de ordem zero é

$$\mathcal{G}^{(0)} = -\frac{1}{2} \Delta^2 A^0 A_0 - q^2 A^1 A^0 + \mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1). \quad (2.79)$$

Enquanto a partir da sexta e sétima relação acima, o termo de correção de primeira-ordem, é obtido parcialmente com sendo

$$\mathcal{G}^{(1)} = -\frac{q^2}{\Delta} \partial_1 \eta A_0 + \Delta \pi_\eta A_0. \quad (2.80)$$

É importante notarmos que a relação acima não pode envolver todos os termos de primeira-ordem, por que alguns deles podem não depender da componente temporal do

campo(A^0). Desta forma, vamos reescreve-lo como

$$\mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, A^0, \lambda_p) = -\frac{q^2}{\Delta} \partial_1 \eta A_0 + \Delta \pi_\eta A_0 + \mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, \lambda_p). \quad (2.81)$$

Assim, o potencial simplético pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(1)} &= \frac{1}{2}(-\pi_1 \pi^1 + \pi_\phi^2 - \partial_1 \phi \partial^1 \phi) + A_0(-\partial_1 \pi^1 - q\pi_\phi - q\partial_1 \phi - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1 \eta + \Delta \pi_\eta) \\ &+ A_1(q\pi_\phi - \frac{1}{2}q^2(a+1)A^1 - q\partial^1 \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(A^1, \pi^1, \lambda_p) + \mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Agora, torna-se necessário garantir que mais nenhum vínculo surja. Para isto, impõe-se que a contração do modo-zero, eq.(2.76), com o gradiente do potencial simplético, eq.(2.82), não produza um novo vínculo, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \tilde{v}^{(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi^{(1)}(x)} \tilde{U}^{(0)}(y) dy, \\ &= \int d^3x \left[q^2(1-a)A_1(\vec{x}) \partial_x^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_x^1 \frac{\delta \mathcal{G}^{(n)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta A^1(\vec{x})} \right. \\ &+ \partial_x^1 \frac{\delta \mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1)(\vec{y})}{\delta A^1(\vec{x})} - \Delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta \mathcal{G}^{(n)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \\ &\left. - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta \mathcal{G}^{(n)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \pi_\eta(\vec{x})} \right]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Que é uma expressão polinomial para os campos de WZ (λ_p). Para a relação de ordem zero nos campos de WZ, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \left[q^2(1-a)A_1(\vec{x}) \partial_x^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_x^1 \frac{\delta \mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1)(\vec{y})}{\delta A^1(\vec{x})} \right. \\ &\left. - \Delta \frac{\delta \mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1^x \frac{\delta \mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \pi_\eta(\vec{x})} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Neste ponto, é importante notarmos que algumas degenerescências aparecem, já que não podemos resolver as relações acima levando a um resultado único, isto é, esta relação tem

solução mas não é única. A princípio, isto pode soar mal, entretanto, isto mostra quão poderoso o formalismo simplético de imersão pode ser: a partir desta relação podemos obter todos os termos de correção para os campos de WZ, o que nos dá o potencial simplético (Hamiltoniana) como uma relação invariante de calibre sob as transformações de calibre infinitesimais geradas pelo modo-zero dado na eq.(2.77). Então, há diferentes descrições invariantes de calibre para o modelo não invariante com a mesma simetria de calibre, que é possível devido à eq.(2.84). Por outro lado, esta relação pode nos levar a um cálculo difícil do potencial simplético invariante de calibre ao se supor uma solução ruim para $\mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1)$ e $\mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)$.

Como estamos interessados em comparar nossos resultados com outros, escolhemos uma solução conveniente que torna o cálculo dos termos de correção nos campos de WZ uma tarefa fácil. As soluções escolhidas para a eq.(2.84) são

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(0)}(A^1, \pi^1) &= \frac{q^4}{2\Delta^2} A_1 A^1, \\ \mathcal{G}^{(1)}(A^1, \pi^1, \lambda_p) &= -\Delta A_1 \partial^1 \eta - \frac{q^2}{\Delta} A_1 \pi_\eta.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Assim, o potencial simplético torna-se

$$\begin{aligned}\tilde{U}^{(1)} &= \frac{1}{2}(-\pi_1 \pi^1 + \pi_\phi^2 - \partial_1 \phi \partial^1 \phi) + A_0(-\partial_1 \pi^1 - q\pi_\phi - q\partial_1 \phi - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1 \eta + \Delta \pi_\eta) \\ &+ A_1(q\pi_\phi - \frac{q^2}{2(1-a)} A^1 - q\partial^1 \phi - \Delta \partial^1 \eta - \frac{q^2}{\Delta} \pi_\eta) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(A^1, \pi^1, \lambda_p).\end{aligned}\quad (2.86)$$

Novamente, usamos a eq.(2.84), que permite calcular o termo de correção quadrático nos campos de WZ

$$\begin{aligned}0 &= \int d^3x \left[-\Delta \partial_1^x \eta(\vec{x}) \partial_x^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{q^2}{\Delta} \pi_\eta(\vec{y}) \partial_x^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \right. \\ &\left. - \Delta \frac{\delta \mathcal{G}^{(2)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1^x \frac{\delta \mathcal{G}^{(2)}(A^1, \pi^1, \lambda_p)(\vec{y})}{\delta \pi_\eta(\vec{x})} \right],\end{aligned}\quad (2.87)$$

que nos leva à seguinte solução,

$$\mathcal{G}^{(2)} = \frac{1}{2} \partial_1 \eta \partial^1 \eta - \frac{1}{2} \pi_\eta^2. \quad (2.88)$$

Como este último termo de correção $\mathcal{G}^{(2)}$ tem dependência somente nos campos de WZ, os termos de correção $\mathcal{G}^{(n)} = 0$ para $n \geq 3$. Devido a isto, o potencial simplético, identificado como sendo a Hamiltoniana invariante de calibre, é

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(1)} &= \frac{1}{2} (-\pi_1 \pi^1 + \pi_\phi^2 - \partial_1 \phi \partial^1 \phi + \partial_1 \eta \partial^1 \eta - \pi_\eta^2) \\ &+ A_0 (-\partial_1 \pi^1 - q \pi_\phi - q \partial_1 \phi - \frac{q^2}{\Delta} \partial_1 \eta + \Delta \pi_\eta) \\ &+ A_1 (q \pi_\phi - \frac{q^2}{2(1-a)} A^1 - q \partial^1 \phi - \Delta \partial^1 \eta - \frac{q^2}{\Delta} \pi_\eta), \end{aligned} \quad (2.89)$$

que é o mesmo resultado obtido na ref.[90, 98].

2.5 Conclusão

Nós reformulamos sistemas não invariantes como teorias invariantes de calibre, usando um formalismo de imersão alternativo, baseado num tratamento geométrico, que nos permite revelar uma simetria escondida em modelos de segunda classe. De fato, estas simetrias pertencem a um conjunto independente de modos-zero, o qual é uma agradável característica deste formalismo, já que o modelo mergulhado apresentará uma simetria de calibre previamente escolhida.

Para sistematizar o formalismo de imersão, ele foi aplicado ao modelo de Schwinger quiral bosonizado para ilustrar e tornar mais claro alguns pontos obscuros. Fomos capazes de reproduzir uma versão invariante de calibre bem conhecida do modelo e, além disso, a possibilidade de obtermos diferentes, mas dinamicamente equivalentes, descrições

invariantes de calibre para este modelo foi aberta. Como consequência, conclui-se que a solução bem conhecida não é única.

Capítulo 3

Simetrias escondidas no modelo de fluido

3.1 Introdução

Após o trabalho de Bordemann e Hoppe [99], o estudo da teoria de campo de fluido escalar tem atraído muita atenção [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105] nos últimos anos. Na ref. [99], os autores demonstraram que a teoria relativística de membranas são sistemas integráveis, reduzindo o problema a uma dinâmica de fluido 2-dimensional. Este assunto é de grande interesse uma vez que ele oferece conexão com a descrição hidrodinâmica de mecânica quântica [106, 107], modelo de parton [100], cosmologia de buraco negro [108], hidrodinâmica de sistemas superfluido [109]. Muitas destas investigações são dedicadas a encontrar a solução deste sistema invariante de Galileu em d -dimensões em conexão com as soluções do sistema d -brane relativístico em $(d+1)$ -dimensões [99, 102], o qual é de interesse direto para teoria de física de partículas.

Recentemente, uma simetria escondida de teoria de campos de fluido foi discutida no contexto de WZ [110]. Em outro trabalho [111], foi examinada a simetria de calibre no espaço de fase original, onde campos de WZ não foram usados. Apesar destes estudos,

uma investigação completa das simetrias de calibre escondidas presentes no modelo de mecânica de fluido não foi feita ainda. Para isto, propomos neste capítulo fazermos uma completa investigação das simetrias de calibre escondidas existentes no modelo de dinâmica de fluido, usando o formalismo simplético de imersão.

3.2 O modelo de dinâmica de fluidos

Neste capítulo a Lagrangeana que determina a dinâmica de fluido de interesse será derivada. Para tanto, seguiremos o desenvolvido em [102]. Iniciamos com a Lagrangeana da teoria de Schrödinger (linear ou não linear) definida em um espaço (\vec{r}) d-dimensional evoluindo no tempo (t) , dada por

$$L_S = \int d^d r \left\{ i\psi^* \dot{\psi} - \frac{1}{2} (\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi) - \bar{U}(\psi^* \psi) \right\}, \quad (3.1)$$

com \bar{U} determinando qualquer interação não linear. Inserindo a representação em termos de densidade de massa ($\rho \equiv \rho(t, \vec{r})$) e o potencial de velocidade ($\theta \equiv \theta(t, \vec{r})$) como apresentado na ref.[109], isto é,

$$\psi = \rho^{1/2} e^{i\theta}, \quad (3.2)$$

na Lagrangeana de Schrödinger, obtém-se o modelo de dinâmica de fluido [20] descrito pela seguinte Lagrangeana em um espaço (\vec{r}) d-dimensional

$$L = \int d^d \vec{r} \left(\theta \dot{\rho} - \frac{1}{2} \rho \nabla \theta \cdot \nabla \theta - U(\rho) \right), \quad (3.3)$$

com

$$U(\rho) = \bar{U}(\rho) + \frac{1}{8} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho}, \quad (3.4)$$

que é a forma hidrodinâmica da teoria de Schrödinger [106, 107]. Neste ponto, é importante notar que existe uma *interação* não trivial, mesmo na ausência de \bar{U} . Este resultado pode ser obtido também a partir de uma formulação de fixação de calibre de uma membrana no espaço de Minkowski [99], através de uma mudança de variáveis dependentes dos campos, para o caso especial $d = 2$ com o seguinte potencial,

$$U(\rho) = \frac{g}{\rho}. \quad (3.5)$$

O mesmo resultado foi obtido a partir de uma redução dimensional de uma teoria de campo relativística [100]. Na sequência, é obvio que o modelo de fluido descrito pela Lagrangeana, eq.(3.3), com algumas restrições sobre $U(\rho)$, apresenta simetria de Galileu. As simetrias manifestadas e os correspondentes geradores estão listados:

1. Invariância sob translações no espaço e tempo,

(a) Energia

$$H = \int d^d r \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \nabla \theta \cdot \nabla \theta + U(\rho). \quad (3.6)$$

(b) Momento

$$\vec{P} = \int d^d r \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{\mathcal{P}} = \rho \nabla \theta = \vec{j}. \quad (3.7)$$

2. Invariância sob rotação

(a) Momento Angular

$$J^{ij} = \int d^d r (r^i \mathcal{P}^j - r^j \mathcal{P}^i). \quad (3.8)$$

3. Boost de Galileu

(a) Gerador Boost

$$\vec{B} = t\vec{P} - \int d^d r \vec{r} \rho. \quad (3.9)$$

4. Invariância sob translações globais do potencial de velocidade, $\theta \rightarrow \theta + \alpha$, com α uma constante, que reflete a arbitrariedade de fase em (3.2).

(a) Carga

$$M = \int d^d r \rho. \quad (3.10)$$

Fisicamente, a conservação da carga $M = \int d^3 x \rho$ (massa total) significa que o centro de massa do fluido, $\vec{X} = \int d^3 x \vec{x} \rho / M$ move-se com velocidade constante,

$$M \frac{d\vec{X}}{dt} = \int d^3 x \vec{p}, \quad (3.11)$$

onde \vec{p} denota o momento total do fluido.

Inesperadamente, simetrias extras foram encontradas nas refs.[100, 101, 102] e demonstrado que elas estão presentes no modelo com um potencial específico ($U(\rho) = g/\rho$), assim como para o caso livre. Estas simetrias extras são:

1. Invariância sob reescalonamento temporal $t \rightarrow e^\omega t$:

(a) Dilatação do tempo

$$D = tH - \int d^d r \rho \theta, \quad (3.12)$$

com os campos transformando-se como

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{r}) &\rightarrow \rho_\omega(t, \vec{r}) = e^{-\omega} \rho(e^\omega t, \vec{r}), \\ \theta(t, \vec{r}) &\rightarrow \theta_\omega(t, \vec{r}) = e^\omega \theta(e^\omega t, \vec{r}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

2. Antiboost de Galileu,

(a) Gerador Antiboost

$$\vec{G} = \int d^d r \left(\vec{r} \mathcal{E} - \frac{1}{2} \rho \nabla \theta^2 \right), \quad (3.14)$$

levando a

$$\begin{aligned} t &\rightarrow T(t, \vec{r}) = t + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r} + \vec{R}(t, \vec{r})), \\ \vec{r} &\rightarrow \vec{R}(t, \vec{r}) = \vec{r} + \vec{\omega} \theta(T, \vec{R}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde os campos mudam como

$$\begin{aligned} \rho(T, \vec{R}) &= \rho(t, \vec{r}) \frac{1}{|J|}, \\ \theta(T, \vec{R}) &= \theta(t, \vec{r}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

com o Jacobiano J dado por

$$J = \left(1 - \vec{\omega} \cdot \nabla \theta(T, \vec{R}) - \frac{1}{2} \omega^2 \dot{\theta}(T, \vec{R}) \right)^{-1}. \quad (3.17)$$

Nas refs.[101, 102] foi mostrado que somente para um potencial muito específico dependente da densidade, eq.(3.5), a conexão entre o sistema invariante de Galileu apresentado nesta seção, definido em $d=2$ ou em um espaço d -dimensional, e membrana relativística e suas generalizações para o sistema d-brane em $d=3$ ou espaço $(d+1)$ -dimensões aparece. Devido a isto, é importante notarmos que as simetrias adicionais presentes no sistema invariante de Galileu no espaço de dimensões $d \geq 1$ com o potencial de interação $U(\rho) = g/\rho$ estão também presentes na membrana relativística e suas generalizações para o sistema d-brane no espaço $d \geq 2$ dimensões.

3.3 Análise simplética

Nesta seção, o modelo de fluido será analisado a partir do ponto de vista simplético. Note que esta Lagrangeana já é de primeira-ordem, assim podemos escrevê-la como

$$\mathcal{L}^{(0)} = \theta \dot{\rho} - U^{(0)}, \quad (3.18)$$

onde o potencial simplético é

$$U^{(0)} = \frac{1}{2} \rho \partial_i \theta \partial^i \theta + U(\rho). \quad (3.19)$$

Os campos simpléticos são $\xi^{(0)\beta} = (\rho, \theta)$ com os correspondentes momentos canônicos uma-forma dados por

$$\begin{aligned} A_\rho^{(0)} &= \theta, \\ A_\theta^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A matriz simplética de iteração-zero é

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

que é uma matriz não singular e, conseqüentemente, o modelo não é uma teoria de campo invariante de calibre. Como colocado pelo formalismo simplético [9, 10], os parênteses de Dirac entre os campos do espaço de fase são obtidos a partir da inversa da matriz simplética, isto é,

$$\begin{aligned} \{\rho(\vec{r}), \theta(\vec{r}')\}^* &= \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\}^* &= 0, \\ \{\theta(\vec{r}), \theta(\vec{r}')\}^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Isto completa a análise não invariante.

3.4 O modelo de fluido invariante de calibre

Neste ponto, a versão invariante de calibre da teoria de fluido será obtida usando o formalismo de imersão simplético I. De acordo com este formalismo de imersão, duas funções arbitrárias, Ψ e G , dependentes dos campos do espaço de fase original e do campo de WZ (η) deve ser adicionada no modelo. A primeira é introduzida no setor cinético e a última no setor potencial da Lagrangeana de primeira-ordem. O processo começa com o cálculo de Ψ e termina com o cálculo de G .

Para reformularmos o modelo como uma teoria de campo invariante de calibre, vamos começar com a Lagrangeana de primeira-ordem $\mathcal{L}^{(0)}$, eq.(3.18), somado os termos arbitrários (Ψ, G), dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = \theta \dot{\rho} + \Psi \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.23)$$

com

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2} \rho \partial_i \theta \partial^i \theta + U(\rho) + G, \quad (3.24)$$

onde $\Psi \equiv \Psi(\rho, \theta)$ e $G \equiv G(\rho, \theta, \eta)$ são funções arbitrárias a serem determinadas. Os campos simpléticos são $\tilde{\xi}^{(0)\bar{\beta}} = (\rho, \theta, \eta)$ enquanto a matriz simplética é

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') & \frac{\delta \Psi_{\vec{r}'}}{\delta \rho(\vec{r})} \\ \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') & 0 & \frac{\delta \Psi_{\vec{r}'}}{\delta \theta(\vec{r})} \\ -\frac{\delta \Psi_{\vec{r}}}{\delta \rho(\vec{r}')} & -\frac{\delta \Psi_{\vec{r}}}{\delta \theta(\vec{r}')} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde $\Psi_{\vec{r}} \equiv \Psi(\vec{r})$ e $\Psi_{\vec{r}'} \equiv \Psi(\vec{r}')$.

Como estabelecido pelo formalismo simplético invariante de calibre, o correspondente modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)}(\vec{r})$, satisfaz à relação dada na eq.(2.9), que é reescrita como

$$\int d^d \vec{r}' \tilde{\nu}^{(0)\bar{\beta}}(\vec{r}) \tilde{f}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad (3.26)$$

o qual produz um conjunto de equações que permite determinar Ψ explicitamente. Neste ponto, é muito importante notarmos que o formalismo de imersão simplético revela as simetrias de calibre $U(1)$ escondidas no modelo físico, pois o modo-zero não gera um novo vínculo. Pelo contrário, ele determina a função arbitrária Ψ e, conseqüentemente, garante a reformulação invariante de calibre do modelo. Depois disso, a função G será calculada usando eq.(2.13). Uma característica da técnica do mergulho simplético é que ela abre a possibilidade de implementar uma investigação completa das simetrias de calibre escondidas existentes no modelo. No presente caso, propuzemos oito modo-zeros distintos para explorarmos, aparentemente, oito simetrias diferentes. Com esta estratégia, obteremos oito versões invariante de calibre dinamicamente equivalentes do model de fluido dado em [110] e podemos também elevar uma simetria global(simetria de fase) para uma local, de fato, obtemos uma Lagrangeana onde estas simetrias podem ser obtidas de um modo fácil.

1. A primeira simetria escondida

Iniciamos com a simetria de calibre relacionada com o seguinte modo-zero

$$\vec{\nu}^{(0)} = (1 \quad 1 \quad -1). \quad (3.27)$$

Uma vez que este modo-zero e a matriz simplética, eq.(3.25), devem satisfazer à condição de simetria de calibre, dada na eq.(3.26), um conjunto de equações diferenciais é obtida, isto é,

$$\begin{aligned} \int d^d \vec{r} \left(\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \rho(\vec{r}')} \right) &= 0, \\ \int d^d \vec{r} \left(-\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \theta(\vec{r}')} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\int d^d \vec{r} \left(\frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \rho(\vec{r}')} + \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \theta(\vec{r}')} \right) = 0.$$

Após um processo de integração, Ψ é determinada como

$$\Psi(\vec{r}) = \theta(\vec{r}) - \rho(\vec{r}). \quad (3.29)$$

Em vista disso, a matriz simplética torna-se

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.30)$$

que é singular por construção. Devido a isto, a Lagrangeana de primeira-ordem é

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = \theta \dot{\rho} + (\theta - \rho) \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.31)$$

com $\tilde{U}^{(0)}$ dado na eq.(3.24). Agora, vamos começar com o segundo passo para reformularmos o modelo como uma teoria de calibre. O modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)}$ não produz um vínculo quando contraído com o gradiente do potencial simplético, isto é,

$$\int d^d \vec{r}' \tilde{\nu}^{(0)\tilde{\beta}}(\vec{r}) \frac{\delta \tilde{U}^{(0)}(\vec{r}')}{\delta \tilde{\xi}^{\tilde{\beta}}(\vec{r})} = 0, \quad (3.32)$$

de fato, ele produz uma equação geral que permite o cálculo de todos os termos de correção para η em $G(\rho, \theta, \eta)$, dado na eq.(2.3). Para calcular o primeiro termo de correção para η , $\mathcal{G}^{(1)}$, usamos a relação dada na eq.(2.14), escrita como

$$\begin{aligned} & \int d^d \vec{r}' \left[\frac{1}{2} \partial'_i \theta(\vec{r}') \partial'^i \theta(\vec{r}') \delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) + \frac{\delta U(\rho(\vec{r}'))}{\delta \rho(\vec{r})} \right. \\ & \left. + \rho(\vec{r}') \partial'_i \theta \partial'^i \delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) - \frac{\delta \mathcal{G}^{(1)}(\vec{r}')}{\delta \eta(\vec{r})} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial \vec{r}'^i}$. Após um cálculo direto, o termo de correção linear para η é obtido como

$$\mathcal{G}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta \partial_i \theta \partial^i \theta + \eta \frac{\delta}{\delta \rho} \int d^d \vec{r}' U(\rho(\vec{r}')) + \rho \partial_i \theta \partial^i \eta. \quad (3.34)$$

Levando de volta este resultado no potencial simplético, eq.(3.24), obtemos

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2}\rho\partial_i\theta\partial^i\theta + U(\rho) + \frac{1}{2}\eta\partial_i\theta\partial^i\theta + \eta\frac{\delta}{\delta\rho}\int d^d\vec{r}'U(\rho(\vec{r}')) + \rho\partial_i\theta\partial^i\eta. \quad (3.35)$$

Entretanto, a formulação invariante do modelo não foi ainda obtida por que a contração do modo-zero, eq.(3.27), com o potencial simplético acima não gera um valor nulo. Devido a isto, termos de correção de ordem superior para η devem ser calculados. Para o termo quadrático usamos a equação dada na eq.(2.15), escrita como

$$\int d^d\vec{r}' \left[\eta(\vec{r}')\frac{\delta^2 U(\rho(\vec{r}'))}{\delta\rho^2(\vec{r})} + \partial'_i\theta(\vec{r}')\partial'^i\eta(\vec{r}')\delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) + \eta(\vec{r}')\partial'_i\theta(\vec{r}')\partial'^i\delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) + \rho(\vec{r}')\partial'^i\eta(\vec{r}')\partial'_i\delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) - \frac{\delta\mathcal{G}^{(2)}(\vec{r}')}{\delta\eta(\vec{r})} \right] = 0, \quad (3.36)$$

a qual após um cálculo direto, gera o seguinte resultado,

$$\mathcal{G}^{(2)} = \frac{1}{2}\eta^2\frac{\delta^2}{\delta\rho^2}\int d^d\vec{r}'U(\rho(\vec{r}')) + \eta\partial_i\theta\partial^i\eta + \frac{1}{2}\rho\partial^i\eta\partial_i\eta. \quad (3.37)$$

Como o termo de correção de segunda-ordem é expresso em termos dos campos (ρ, θ) , a contração do modo-zero com o gradiente do potencial simplético (somado com os termos de correção de primeira e segunda-ordem) ainda gera um novo vínculo, consequentemente, o próximo termo de correção deve ser calculado para revelar a simetria. O termo de correção de terceira-ordem ($\mathcal{G}^{(3)}$) é obtido através da seguinte relação,

$$\int d^d\vec{r}' \left[\frac{1}{2}\eta^2(\vec{r}')\frac{\delta^3 U(\rho(\vec{r}'))}{\delta\rho^3(\vec{r})} + \frac{1}{2}\partial'^i\eta(\vec{r}')\partial'_i\eta(\vec{r}')\delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) + \eta(\vec{r}')\partial'_i\eta(\vec{r}')\partial'^i\delta^{(d)}(\vec{r}' - \vec{r}) - \frac{\delta\mathcal{G}^{(3)}(\vec{r}')}{\delta\eta(\vec{r})} \right] = 0, \quad (3.38)$$

o qual após um cálculo simples, gera

$$\mathcal{G}^{(3)} = \frac{1}{6}\eta^3\frac{\delta^3}{\delta\rho^3}\int d^d\vec{r}'U(\rho(\vec{r}')) + \frac{1}{2}\eta\partial_i\eta\partial^i\eta. \quad (3.39)$$

A formulação invariante do modelo ainda não foi obtida porque a contração do modo-zero, eq.(3.27), com o gradiente do potencial simplético (somado com os termos de correção de primeira, segunda e terceira-ordem) não gera um valor nulo. Devido a isto, termos de ordem superior em η devem ser calculados. Para o termo de correção de quarta-ordem usamos a equação dada na eq.(2.16), escrita como

$$\int d^d \vec{r}' \left[\frac{1}{6} \eta^3(\vec{r}') \frac{\delta^4 U(\rho(\vec{r}'))}{\delta \rho^4(\vec{r}')} - \frac{\delta \mathcal{G}^{(4)}(\vec{r}')}{\delta \eta(\vec{r}')} \right] = 0, \quad (3.40)$$

que após solução, é dada por

$$\mathcal{G}^{(4)} = \frac{1}{24} \eta^4 \frac{\delta^4}{\delta \rho^4} \int d^d \vec{r}' U(\rho(\vec{r}')). \quad (3.41)$$

Como $\mathcal{G}^{(4)}$ está escrito em termos de $U(\rho)$, a formulação invariante de calibre do modelo requer um número infinito de termos de WZ, os quais são expressos de um modo geral para $n > 3$ como

$$\mathcal{G}^{(n)} = \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \vec{r}' U(\rho(\vec{r}')). \quad (3.42)$$

Então, a Lagrangeana de primeira-ordem invariante de calibre é escrita como

$$\tilde{\mathcal{L}} = \theta \dot{\rho} + (\theta - \rho) \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.43)$$

onde o potencial simplético é

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta)^2 + \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \eta)^2 + (\rho + \eta) \partial_i \theta \partial^i \eta \\ &+ U(\rho) + \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \vec{r}' U(\rho). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Note que os dois últimos termos do lado direito da equação acima pode ser reescrito como

$$U(\rho) + \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \vec{r}' U(\rho(\vec{r}')) = U(\rho) + \frac{1}{n!} \eta^n \partial_\rho^n U(\rho)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n!} \eta^n \partial_\rho^n\right) U(\rho) = e^{\eta \partial_\rho^n} U(\rho) = U(\rho + \eta). \quad (3.45)$$

Como consequência, o potencial simplético torna-se

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta + \partial_i \eta)^2 + U(\rho + \eta). \quad (3.46)$$

Por construção, a contração do modo-zero ($\tilde{\nu}^{(0)}$) com o potencial simplético acima não produz um novo vínculo, consequentemente, a simetria escondida é revelada.

Para completar a reformulação invariante de calibre do modelo, as transformações de calibre infinitesimais serão calculadas. De acordo com o método simplético, o modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)}$ é o gerador das transformações de calibre infinitesimais ($\delta\mathcal{O} = \varepsilon\tilde{\nu}^{(0)}$), dadas por

$$\begin{aligned} \delta\rho(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r}, t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\theta(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r}, t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}, t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde $\varepsilon(\vec{r}, t)$ é um parâmetro infinitesimal dependente do tempo. De fato, sob as transformações infinitesimais acima, a Hamiltoniana invariante, identificada como sendo o potencial simplético $\tilde{U}^{(0)}$, transforma-se como

$$\delta\tilde{U}^{(0)} = 0. \quad (3.48)$$

2. A segunda simetria escondida

Agora, vamos explorar a simetria escondida associada com um outro modo-zero, o qual é dado por

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (1 \quad 0 \quad -1). \quad (3.49)$$

Como a condição de simetria de calibre, eq.(3.26), deve ser satisfeita, o seguinte conjunto de equações diferenciais, dadas por

$$\begin{aligned} \int d^d \vec{r}' \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \rho(\vec{r}')} &= 0, \\ \int d^d \vec{r}' \left(-\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \theta(\vec{r}')} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

que nos leva ao seguinte resultado para Ψ ,

$$\Psi(\vec{r}) = \theta(\vec{r}), \quad (3.51)$$

com a correspondente matriz simplética

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.52)$$

Esta matriz é obviamente singular e a Lagrangeana de primeira-ordem é

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = \theta \dot{\rho} + \theta \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.53)$$

com $\tilde{U}^{(0)}$ dado na eq.(3.24).

O segundo passo do formalismo de imersão começa com a condição que impõe que o modo-zero $\tilde{\nu}^{(0)}$, agora dado pela eq.(3.49), não produz um vínculo quando contraído com o gradiente do potencial simplético, isto é,

$$\int d^d \vec{r}' \tilde{\nu}^{(0)\tilde{\beta}}(\vec{r}) \frac{\delta \tilde{U}^{(0)}(\vec{r}')}{\delta \tilde{\xi}^{\tilde{\beta}}(\vec{r})} = 0. \quad (3.54)$$

Pelo contrário, esta relação gera uma equação diferencial geral, dada na eq.(2.13), que permite o cálculo de todos os termos de correção para η em $G(\rho, \theta, \eta)$. Para determinar o termo de correção linear para η , $\mathcal{G}^{(1)}$, usamos a relação dada na eq.(2.14),

escrita como

$$\int d^d \bar{r}' \left[\frac{1}{2} \partial'_i \theta(\bar{r}') \partial'^i \theta(\bar{r}') \delta^{(d)}(\bar{r}' - \bar{r}) + \frac{\delta U(\rho(\bar{r}'))}{\delta \rho(\bar{r})} - \frac{\delta \mathcal{G}^{(1)}(\bar{r}')}{\delta \eta(\bar{r})} \right] = 0. \quad (3.55)$$

Após um cálculo direto, o primeiro termo de correção para η é obtido

$$\mathcal{G}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta \partial_i \theta \partial^i \theta + \eta \frac{\delta}{\delta \rho} \int d^d \bar{r}' U(\rho(\bar{r}')), \quad (3.56)$$

e, conseqüentemente, o potencial simplético torna-se

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2} \rho \partial_i \theta \partial^i \theta + U(\rho) + \frac{1}{2} \eta \partial_i \theta \partial^i \theta + \eta \frac{\delta}{\delta \rho} \int d^d \bar{r}' U(\rho(\bar{r}')). \quad (3.57)$$

Entretanto, a contração do modo-zero, eq.(3.49), com o gradiente do potencial simplético acima gera um valor não nulo. Devido a isto, termos de correção de alta ordem em η devem ser calculados. Para o termo quadrático nós usamos a equação dada em (2.15), escrita como

$$\int d^d \bar{r}' \left[\eta(\bar{r}') \frac{\delta^2 U(\rho(\bar{r}'))}{\delta \rho^2(\bar{r})} - \frac{\delta \mathcal{G}^{(2)}(\bar{r}')}{\delta \eta(\bar{r})} \right] = 0, \quad (3.58)$$

Após um cálculo, temos

$$\mathcal{G}^{(2)} = \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\delta^2}{\delta \rho^2} \int d^d \bar{r}' U(\rho(\bar{r}')). \quad (3.59)$$

Como $\mathcal{G}^{(2)}$ é expresso em termos de $U(\rho)$, um número infinito de termos de WZ aparecem, que é denotado de um modo geral para $n > 2$ pela seguinte relação,

$$\mathcal{G}^{(n)} = \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \bar{r}' U(\rho(\bar{r}')) \quad (3.60)$$

Desta forma, a Lagrangeana invariante de calibre de primeira-ordem, após uma integração por partes, torna-se

$$\tilde{\mathcal{L}} = -(\rho + \eta) \dot{\theta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.61)$$

onde o potencial simplético, é dado por

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta)^2 + U(\rho) + \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \vec{r}' U(\rho(\vec{r}')), \quad (3.62)$$

que pode ser escrito como

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta)^2 + U(\rho + \eta), \quad (3.63)$$

onde a relação, eq.(3.45), foi usada. Por construção, a contração do modo-zero ($\tilde{\nu}^{(0)}$), eq.(3.46), com o gradiente do potencial simplético acima não produz um novo vínculo, conseqüentemente, a nova simetria de calibre é revelada.

Para finalizar, as transformações de calibre infinitesimais são obtidas como

$$\begin{aligned} \delta \rho(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta \theta(\vec{r}) &= 0, \\ \delta \eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \end{aligned} \quad (3.64)$$

que conduz a uma Hamiltoniana invariante ($\delta \tilde{U}^{(0)} = 0$).

3. A terceira simetria escondida

O formalismo de imersão simplético pode identificar simetrias escondidas de um modo direto como o que foi feito para resolver as equações em $\mathcal{G}^{(0)}$ nas duas simetrias anteriores, além de uma forma geral dada no capítulo anterior, eq.(2.13). Assim, os passos necessários para obtermos a função arbitrária \mathcal{G} não serão repetidos a partir daqui. Apresentaremos o modo-zero e os respectivos resultados.

Para continuarmos com a investigação das simetrias escondidas presentes no modelo de dinâmica de fluido, consideraremos o seguinte modo-zero,

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (0 \quad 1 \quad -1). \quad (3.65)$$

que juntamente com a matriz simplética, eq.(3.25), e a condição de simetria de calibre, dada em (3.26), o seguinte conjunto de equações diferenciais para Ψ é obtido como

$$\begin{aligned} \int d^d \vec{r}' \left(\delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \rho(\vec{r}')} \right) &= 0, \\ \int d^d \vec{r}' \frac{\delta \Psi(\vec{r})}{\delta \theta(\vec{r}')} &= 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

que fornece a seguinte solução para Ψ

$$\Psi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}), \quad (3.67)$$

enquanto a partir da eq.(2.13), o potencial simplético correspondente é calculado, a saber

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2} \rho \partial_i \theta \partial^i \theta + U(\rho) + \rho \partial_i \theta \partial^i \eta \\ &= \frac{1}{2} \rho (\partial_i \theta + \partial_i \eta)^2 + U(\rho). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Deste modo, a Lagrangeana de primeira-ordem invariante de calibre torna-se

$$\tilde{\mathcal{L}} = (\theta + \eta) \dot{\rho} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.69)$$

após uma integração por partes, e o Hamiltoniano, eq.(3.68), é invariante sobre as seguintes transformações de calibre infinitesimal

$$\delta \rho(\vec{r}) = 0,$$

$$\delta\theta(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.70)$$

$$\delta\eta(\vec{r}) = -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}').$$

Neste ponto, é importante notarmos que com esta simetria foi possível levar uma simetria global (simetria de fase) em uma simetria local, mostrando que existe uma invariância sobre translações locais do campo de velocidade, que também preserva a conservação da massa, dada na eq.(3.10).

4. A quarta simetria escondida

Aqui, o seguinte modo-zero é considerado

$$\vec{v}^{(0)} = (1 \quad -1 \quad -1), \quad (3.71)$$

o qual, devido à matriz simplética, eq.(3.25), e a condição de simetria de calibre, dada na eq.(3.26) Ψ e o respectivo potencial simplético são obtidos, a saber,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= \theta(\vec{r}) + \rho(\vec{r}), \\ \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta)^2 + \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \eta)^2 - (\rho + \eta)\partial_i \theta \partial^i \eta \\ &+ U(\rho) + \frac{1}{n!} \eta^n \frac{\delta^n}{\delta \rho^n} \int d^d \vec{r}' U(\rho), \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde o potencial simplético pode ser reescrito como

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho + \eta)(\partial_i \theta - \partial_i \eta)^2 + U(\rho + \eta), \quad (3.73)$$

já que a condição dada na eq.(3.45) é usada.

Desta forma, a Lagrangeana invariante de calibre é dada por

$$\tilde{\mathcal{L}} = \theta \dot{\rho} + (\theta + \rho) \dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.74)$$

e a Hamiltoniana acima é invariante sobre as seguintes transformações infinitesimais,

$$\begin{aligned}
 \delta\rho(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\
 \delta\theta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\
 \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}').
 \end{aligned}
 \tag{3.75}$$

5. A quinta simetria escondida

Neste ponto, a simetria relacionada com o seguinte modo-zero é considerada

$$\vec{\nu}^{(0)} = (-1 \quad 1 \quad -1),
 \tag{3.76}$$

que junto com a matriz simplética, eq.(3.25), devem obedecer à condição de simetria de calibre, eq.(3.26), conduzindo ao seguinte resultado para Ψ e o potencial simplético

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{r}) &= -\theta(\vec{r}) - \rho(\vec{r}), \\
 \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\rho - \eta)(\partial_i\theta + \partial_i\eta)^2 + U(\rho - \eta),
 \end{aligned}
 \tag{3.77}$$

onde a identidade dada na eq.(3.45) foi usada. Assim, a Lagrangeana de primeira-ordem invariante de calibre é escrita como

$$\tilde{\mathcal{L}} = \theta\dot{\rho} - (\theta + \rho)\dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)},
 \tag{3.78}$$

onde as transformações de calibre infinitesimais são dadas por

$$\begin{aligned}
 \delta\rho(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\
 \delta\theta(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\
 \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'),
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

levando a um Hamiltoniano invariante ($\delta\tilde{U}^{(0)} = 0$).

6. A sexta simetria escondida

Agora, simetria relacionada com o seguinte modo-zero

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (-1 \quad 0 \quad -1), \quad (3.80)$$

será explorada. De acordo com os principais passos do formalismo de imersão simplético, Ψ e o potencial simplético invariante de calibre são dados por

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= -\theta(\vec{r}), \\ \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\rho - \eta)(\partial_i\theta)^2 + U(\rho) + \frac{1}{n!}(-\eta)^n \frac{\delta^n}{\delta\rho^n} \int d^d\vec{r}' U(\rho(\vec{r}')), \\ &= \frac{1}{2}(\rho - \eta)(\partial_i\theta)^2 + U(\rho - \eta). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Assim, a Lagrangeana de primeira-ordem invariante de calibre é

$$\tilde{\mathcal{L}} = -(\rho - \eta)\dot{\theta} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.82)$$

que é o resultado obtido na ref.[110], após uma integração por partes.

As transformações de calibre infinitesimais, que deixa a Hamiltoniana invariante ($\tilde{U}^{(0)}$), são

$$\begin{aligned} \delta\rho(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\theta(\vec{r}) &= 0, \\ \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (3.83)$$

7. A sétima simetria escondida

Uma simetria alternativa, associada com o seguinte modo-zero,

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (0 \quad -1 \quad -1), \quad (3.84)$$

será revelada. Novamente, os principais passos do formalismo simplético invariante de calibre serão usados e, como consequência, Ψ e o potencial simplético invariante de calibre são determinados

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}), \\ \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}\rho(\partial_i\theta - \partial_i\eta)^2 + U(\rho). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Assim, a Lagrangeana invariante de calibre é

$$\tilde{\mathcal{L}} = (\theta - \eta)\dot{\rho} - \tilde{U}^{(0)}, \quad (3.86)$$

com as correspondentes transformações de calibre infinitesimais,

$$\begin{aligned} \delta\rho(\vec{r}) &= 0, \\ \delta\theta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \end{aligned} \quad (3.87)$$

que deixam a Hamiltoniana ($\tilde{U}^{(0)}$) invariante ($\delta\tilde{U}^{(0)} = 0$). Esta simetria, a menos de um sinal negativo, é a mesma considerada na terceira simetria.

8. A oitava simetria escondida

Para concluirmos com o processo de investigação das simetrias escondidas presentes na teoria de campo de fluido, consideremos o seguinte modo-zero

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (-1 \quad -1 \quad -1). \quad (3.88)$$

Como antes, os principais passos do formalismo de imersão simplético serão executados. Como consequência, obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= -\theta(\vec{r}) + \rho(\vec{r}), \\ \tilde{U}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\rho - \eta)(\partial_i\theta - \partial_i\eta)^2 + U(\rho - \eta),\end{aligned}\tag{3.89}$$

onde a identidade, dada na eq(3.45), foi usada. Assim, a Lagrangeana de primeira ordem invariante de calibre torna-se

$$\tilde{\mathcal{L}} = \theta\dot{\rho} + (-\theta + \rho)\dot{\eta} - \tilde{U}^{(0)},\tag{3.90}$$

e as transformações de calibre infinitesimais, que deixam a Hamiltoniana invariante, são escritas como

$$\begin{aligned}\delta\rho(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\theta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \delta\eta(\vec{r}) &= -\varepsilon(\vec{r}', t) \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}').\end{aligned}\tag{3.91}$$

3.5 Simetria escondida

Nesta seção, propomos deixar mais claro a questão da origem da simetria adicional encontrada na ref.[101]. Demonstramos que a presença da invariância sobre reescalonamento temporal em [101] e na subseção 4.2, originam-se devido ao processo de fixação de calibre da teoria relativística de membrana [99]. Para deixar este ponto mais claro, o formalismo de imersão simplética será aplicado ao seguinte modo-zero

$$\tilde{\nu}^{(0)} = (-\rho \quad \theta \quad -1),\tag{3.92}$$

o que reproduz as transformações de campo infinitesimais dadas na eq.(3.13). Como antes, os principais passos do formalismo de imersão simplético, Ψ e o potencial simplético invariante de calibre são determinados como

$$\begin{aligned}\Psi &= -\theta\rho, \\ \tilde{V}^{(0)} &= \frac{1}{2}\rho(\partial_i\theta)^2(2 - e^\eta) + \theta\rho(\partial_i\theta)(\partial^i\eta) - \frac{1}{2}\rho\theta^2(\partial_i\eta)^2 + \tilde{V}(\rho - \rho\eta),\end{aligned}\quad (3.93)$$

onde a expansão exponencial, similar a eq.(3.45), foi usada. Note que um novo termo, o exponencial, soa como um termo de Liouville na versão invariante de calibre do modelo de fluido.

Agora, um modo-zero diferente será considerado, conduzindo a uma interessante interpretação para a invariância por antiboost de Galileu. O modo-zero é

$$\tilde{\nu}^{(0)} = \rho\nabla\theta \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (3.94)$$

o que reproduz as transformações de campo infinitesimais, eq.(3.16), dadas por

$$\begin{aligned}\delta\rho(t, \vec{r}) &= -\vec{\omega}\rho\nabla\theta, \\ \delta\theta(t, \vec{r}) &= 0,\end{aligned}\quad (3.95)$$

onde $\vec{\omega}$ é agora um parâmetro infinitesimal, como o parâmetro ε usado em outros momentos nesta tese. Agora, é muito importante mencionarmos que este modo-zero, a menos de um sinal negativo e coeficiente, é o mesmo usado para investigar a simetria no segundo modo-zero da seção anterior. Deste modo, esta formulação invariante de calibre do modelo de fluido, cuja dinâmica é governada pela Lagrangiana, dada na eq.(3.61), e Hamiltoniana, dada na eq.(3.63), são também invariantes sobre as transformações de calibre dadas na

eq.(3.95). Isto revela, de uma maneira linear, a invariância por antiboost de Galileu na versão invariante de calibre do modelo de fluido.

Como mostrado nesta seção, o formalismo de imersão simplética pode selecionar a simetria extra proposta na ref.[101] de um modo linear ampliando o espaço de fase com a introdução dos campos de WZ.

3.6 Conclusão

Nós estudamos, neste capítulo, uma investigação completa das falsas simetrias escondidas na teoria de campo de fluido [20], que é um laboratório teórico para estudar alguns aspectos clássicos da teoria de membrana, mostrado por Bordemann e Hoppe na ref.[99]. Neste artigo, os autores demonstraram que a teoria relativística de membranas são sistemas integráveis através da redução do problema a uma dinâmica de fluido 2-dimensional. Mais tarde, alguns autores [101, 102] dedicaram-se a encontrar soluções deste sistema invariante de Galileu em d-dimensões em conexão com as soluções do sistema d-brane relativístico em (d+1)-dimensões, o que mostrou a presença de uma simetria de Poincaré escondida deste modelo não relativístico realizada pelo difeomorfismo dependente do campo.

Em ref.[110], os autores mostraram que ambos os grupos de Galileu e Poincaré são preservados pela introdução dos campos de WZ e que os grupos de Galileu e Poincaré no modelo calibrado podem ser calculados a partir dos geradores do modelo não calibrado usando a relação $\tilde{\mathcal{O}} = e^{-\eta^{\partial\rho}} \mathcal{O}$. Em nosso estudo, reobtemos o modelo de fluido invariante proposto na ref.[110] e mais sete versões invariantes, dinamicamente invariante, da teoria de fluido. Para deixar este ponto mais claro, demonstraremos que cada simetria escondida

investigada na seção 3.4 pode ser reduzida na simetria obtida na ref.[110] e no sexto modo-zero através de transformações canônicas.

1. A primeira simetria escondida.

Após uma integração parcial e usando a seguinte transformação de campo

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta - \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho - 2\eta,\end{aligned}\tag{3.96}$$

a densidade Lagrangeana (3.43) torna-se

$$\tilde{\mathcal{L}} = -(\rho - \eta)\dot{\theta} - \frac{1}{2}(\rho - \eta)(\partial_i\theta)(\partial^i\theta) - V(\rho - \eta),\tag{3.97}$$

que é o mesmo resultado obtido na ref.[110].

2. A segunda simetria escondida.

Introduzindo as seguintes transformações,

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta, \\ \rho &\rightarrow \rho - 2\eta,\end{aligned}\tag{3.98}$$

a densidade de Lagrangeana (3.61) torna-se a Lagrangeana usual (3.82).

3. A terceira simetria escondida.

Usando as seguintes transformações canônicas,

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta - \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho - \eta,\end{aligned}\tag{3.99}$$

a densidade Lagrangeana, eq.(3.69), muda para eq.(3.82).

4. A quarta simetria escondida.

A partir da eq.(3.74) e usando as seguintes transformações

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho - 2\eta,\end{aligned}\tag{3.100}$$

obtemos a densidade de Lagrangeana dada na eq.(3.82).

5. A quinta simetria escondida.

Inserindo as seguintes transformações de campo,

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta - \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho,\end{aligned}\tag{3.101}$$

na densidade Lagrangeana, dada na eq.(3.78), reproduzimos o resultado usual dado na eq.(3.82).

6. A sétima simetria escondida.

Através das seguintes transformações

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho - \eta,\end{aligned}\tag{3.102}$$

a densidade Lagrangeana, eq.(3.86), torna-se a densidade Lagrangeana dada na eq.(3.82).

7. A oitava simetria escondida.

A partir da Lagrangeana dada em (3.90) e usando as seguintes transformações de campo

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \eta, \\ \rho &\rightarrow \rho,\end{aligned}\tag{3.103}$$

obtemos a Lagrangeana invariante de calibre, eq.(3.82).

Deste modo, mostramos que a teoria de campos de fluido tem uma família dinamicamente equivalente de descrições invariantes de calibre. Como as versões invariantes de calibre do modelo de fluido obtidas neste capítulo são dinamicamente equivalentes e já que elas podem ser reduzidas ao modelo invariante obtido na ref.[110], elas também são invariantes de Galileu e Poincaré. Entretanto, note que no terceiro e sétimo modo-zero, uma simetria óbvia (simetria de fase), descrita na seção 3.5, pode ser identificada de um modo direto. De fato, a simetria de fase (simetria global) tem sua posição elevada para uma local. Além disso, foi demonstrado que esta simetria pertence a uma família de descrições de calibre dinamicamente equivalente do modelo de fluido.

Além disso, este trabalho abre a possibilidade de verificarmos simetrias extras [101] de um modo linear, o que parece mais fácil. Foi possível investigar a simetria relacionada com a conservação do reescalonamento temporal, como foi feito na seção 3.5. De fato, a Lagrangeana e Hamiltoniana, invariante sob as transformações dadas na eq.(3.13), foram apresentadas. Também, com o mergulho do modelo de fluido, foi possível mostrar que os campos se transformam como dado na eq.(3.95), que está associado a uma família particular de simetrias, e é também as transformações infinitesimais dos campos produzidas

pelo gerador antiboost de Galileu, que deixa a Lagrangeana, eq.(3.61), e Hamiltoniana, eq.(3.63), invariantes. Para finalizar, concluímos que após a restauração da simetria, as simetrias extras foram naturalmente obtidas.

Capítulo 4

Conclusão geral

Nesta tese, cujo principal objetivo consiste na investigação de simetrias presentes em alguns modelos, mostramos que, no contexto da dinâmica metafluida, a turbulência hidrodinâmica apresenta uma simetria escondida. Mostramos que esta simetria, revelada através do formalismo simplético e de Dirac, é preservada somente dentro do intervalo inercial. Portanto, a invariância de calibre da Hamiltoniana do sistema, eq.(1.42), está diretamente relacionada à condição de que não exista dissipação de energia dentro do intervalo inercial. Além disso, mostramos que a partir de uma interpretação geométrica para a simetria de calibre revelada, o espaço das órbitas é plano e que a contração da métrica, eq.(1.120) com o vetor de Euler, eq.(1.131), nos dá uma equação de onda, mostrando o forte caráter ondulatório da teoria metafluida.

Em seguida, reformulamos sistemas não invariantes como teorias invariantes de calibre usando um novo formalismo de imersão, que nos permite revelar uma simetria escondida em modelos de segunda classe. Iniciamos com o modelo Schwinger quiral bosonizado, onde fomos capazes de reproduzir uma versão invariante de calibre bem conhecida do modelo, além de abrir a possibilidade de se obter diferentes, mas dinamicamente equiva-

lentes, descrições de calibre para este modelo. Esta é uma característica muito importante deste novo formalismo, onde podemos escolher a simetria de calibre para o modelo mergulhado, já que é o modo-zero o gerador de tais simetrias. E para finalizar, estudamos um caso importante, o modelo de mecânica de fluido, onde mostramos que este modelo não tem apenas uma descrição invariante, mas uma família de representações invariante de calibre dinamicamente equivalentes. Mostramos que cada simetria revelada pode ser reduzida na simetria obtida na ref.[110] através de transformações canônicas, e que desta forma elas também são invariantes de Galileu e Poincaré. Além disso, foi possível investigar a simetria relacionada com a preservação do reescalamento temporal (seção 3.5) e que esta formulação invariante de calibre do modelo de fluido, cuja dinâmica é governada pela Lagrangeana, eq.(3.61), e Hamiltoniana, eq.(3.63), é também invariante sob as transformações infinitesimais dadas em (3.95). O que revela, de uma maneira linear, a invariância antiboost de Galileu da versão invariante de calibre do modelo de fluido.

Apêndice A

Sistemas vinculados

Todas as teorias de campo fundamentais em física são invariantes com relação a algum grupo de transformação de simetria local (Yang-Mills: transformações de calibre; Supersimetria: transformações de supersimetria local, etc.). Tais teorias são chamadas de teorias de calibre ou mais geralmente de *sistemas singulares*, ou seja, sistemas com vínculos. A teoria de calibre tem ocupado um papel importante no contexto da teoria de campos. As interações fundamentais conhecidas na natureza são todas governadas pelas teorias de calibre. De um modo mais geral, nós chamamos de teorias de calibre aquelas teorias com vínculos de primeira classe [4, 5]. Sistemas vinculados foram estudados sistematicamente pela primeira vez por Dirac [4, 5] há mais de cinquenta anos, e seu desenvolvimento se fez no formalismo Hamiltoniano.

Sistemas vinculados são caracterizados no espaço de fase pela presença de vínculos, que são funções das coordenadas e momentos, dados por

$$T(q, p) = 0. \tag{A.1}$$

Apesar disso, o parêntese de Poisson desta quantidade com outra qualquer, $A(q, p)$, da

teoria pode não ser nulo, ou seja

$$\{A, T\} \neq 0. \quad (\text{A.2})$$

Por este motivo, em lugar de (A.1), é comum escrevermos

$$T(q, p) \approx 0 \quad (\text{A.3})$$

onde se diz fracamente igual a zero, significando que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson.

Para fazermos a passagem para a mecânica quântica, T e A devem ser transformados em operadores, que chamaremos de \hat{T} e \hat{A} . Em virtude de (A.1), \hat{T} é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo \hat{T} deve ser nulo, ou seja

$$[\hat{A}, \hat{T}] = 0 \quad (\text{A.4})$$

Mas, pela regra geral de quantização canônica $\{ , \} \rightarrow -i[,]$ e (A.2) deveríamos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre \hat{T} e \hat{A} .

Como podemos ver, a regra geral de quantização canônica nos leva a uma inconsistência quando o sistema apresenta vínculos. Estes vínculos podem ser classificados em primários, secundários, etc., ou de primeira e segunda classe [4, 5, 6, 7]. Os vínculos de primeira classe implicam na presença de invariância de calibre da teoria. Por outro lado, em teorias com vínculos de segunda classe não há esta propriedade.

Existem vários métodos para se tratar sistemas vinculados baseando-se na classificação acima. A maioria trabalha com vínculos de primeira classe [6, 7], que estão relacionados à chamada simetria BRST [78], para os de segunda classe existe o método dos parênteses de Dirac [4, 5]. Existe também um método mais recente de Faddeev e Jackiw [9] e Barcelos

e Wotzasek [10, 11], que não segue a classificação acima. Neste método, o formalismo de Dirac pode ser evitado.

Nós consideraremos os formalismos de Faddeev-Jackiw-Barcelos-Wotzasek e Dirac para tratarmos turbulência como um sistema vinculado. Estes procedimentos têm sido usados com grande sucesso em Teoria Quântica de Campos para quantizar alguns modelos [112, 113, 114, 115, 116, 117]. Vamos ver um pouco mais sobre estes dois formalismos, começando com o de Faddeev-Jackiw-Barcelos-Wotzasek.

A.1 Formalismo simplético

No estudo de campos autoduais, Faddeev e Jackiw mostraram como os parênteses de Dirac podem ser obtidos através de um tratamento geométrico usando estruturas simpléticas [9]. Mas, campos autoduais só apresentam vínculos quando tratados no formalismo de Dirac [4]. O que nem sempre ocorre, já que a maioria dos sistemas vinculados no formalismo de Dirac o são, também, no formalismo simplético. A proposta de Faddeev-Jackiw para tais sistemas é que se fizesse, primeiramente, a eliminação dos graus de liberdade supérfluos. Isto, porém, nem sempre é possível. Mesmo assim, o método simplético pode ser convenientemente estendido de tal maneira que os vínculos do sistema possam ser incorporados [10, 11], trabalhando com Lagrangeanas de primeira ordem, do tipo

$$\mathcal{L} = A_\alpha \dot{\xi}^\alpha - U. \quad (\text{A.5})$$

onde $\xi^\alpha(a_i, p_i)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 2N$) são as variáveis simpléticas, A_α são os momenta canônico uma forma e U é o potencial simplético. Os a_i e p_i são as variáveis do espaço e seus momenta conjugados, respectivamente.

As Lagrangeanas quadráticas sempre podem ser transformadas em primeira ordem introduzindo-se campos auxiliares estendendo-se o espaço das configurações. A equação de Euler-Lagrange de (A.5) é

$$f_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\beta = \partial_\alpha U, \quad (\text{A.6})$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi^\beta}. \quad (\text{A.7})$$

Quando os coeficientes $A_\alpha(\xi)$ são tais que $\det(f_{\alpha\beta}) \neq 0$ (sem vínculos), podemos resolver (A.6) para as velocidades, tal que

$$\dot{\xi}^\alpha = f^{\alpha\beta} \partial_\beta U \quad (\text{A.8})$$

onde $f^{\alpha\beta}$, que é a inversa de $f_{\alpha\beta}$, é anti-simétrica e não singular. Ele é chamado de *tensor simplético* (a métrica do espaço simplético), e corresponde aos parênteses de Dirac do sistema descrito pela Lagrangeana (A.5)

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\}^D = f^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.9})$$

Quando a matriz $(f_{\alpha\beta})$ é singular, não podemos identificar $f_{\alpha\beta}$ com o tensor simplético, e os parênteses da teoria não podem ser consistentemente definidos. Para se contornar esta dificuldade, os vínculos da teoria são usados para se produzir uma espécie de deformação na estrutura geométrica, levando ao aparecimento de um novo tensor que pode ser não-singular [11].

Para isto, vamos denotar a quantidade singular acima por $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ e considerar que ela tenha M modos zeros $\nu_m^{(0)}$, $m = 1, 2, \dots, M$, tal que

$$f_{mn}^{(0)} \nu_m^{(0)} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Agora, usando (A.10) na equação (A.6) verificamos que

$$\tilde{v}_m^{(0)} \partial_m U = 0, \quad (\text{A.11})$$

que pode ser um vínculo. Consideremos que (A.11) seja realmente um vínculo (chamado de vínculo verdadeiro). Para produzirmos uma deformação do tensor $f_{\alpha\beta}^{(0)}$, devemos introduzir este vínculo na parte cinética da Lagrangeana por meio de multiplicadores de Lagrange. Isto é feito tomando-se a derivada no tempo do vínculo, ou do próprio multiplicador de Lagrange. O espaço das configurações da teoria é estendido com este processo.

Assim, a partir desta nova Lagrangeana, identificamos novos vetores $A_\alpha^{(1)}$. Em consequência, pode-se identificar novos tensores $f_{\alpha\beta}^{(1)}$. Se o $\det(f_{\alpha\beta}^{(1)}) \neq 0$, os vínculos da teoria foram eliminados, e os elementos da matriz $f^{(1)}$ (não-singular) podem ser identificados como sendo os parênteses de Dirac da teoria. Caso contrário, o procedimento deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias. Porém, pode acontecer do modo zero não conduzir a novos vínculos e a matriz continuar singular. Este é o caso, por exemplo, de teorias de calibre. Neste caso, a saída é fazer a fixação de calibre para se obter um tensor simplético. Vejamos agora um pouco mais sobre o formalismo de Dirac.

A.2 Formalismo de Dirac

Há mais de cinquenta anos Dirac apresentou um tratamento consistente para sistemas vinculados [5]. Este método é conhecido como método de Dirac e desenvolve-se no formalismo Hamiltoniano, tendo como objetivo chegar aos parênteses de Poisson generalizados, os parênteses de Dirac. Para duas quantidades quaisquer A e B , o parêntese de Dirac em

tempos iguais é dado por

$$\{A, B\}^D = \{A, B\} - \{A, T_a\} C_{ab}^{-1} \{T_b, B\}, \quad (\text{A.12})$$

onde $\{ \text{ e } \}$ são parênteses de Poisson, T_a são os vínculos da teoria e $C_{ab} = \{T_a, T_b\}$ são os elementos da matriz C , que é anti-simétrica para vínculos bosônicos [4].

Assim, este resultado sugere que, no caso de sistemas vinculados, temos a seguinte regra de quantização canônica

$$\{A, B\}^D \rightarrow -i[\hat{A}, \hat{B}]. \quad (\text{A.13})$$

A evidência mais importante que sustenta a hipótese dada por (A.13), é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente nos parênteses de Dirac. Isto significa, que se tomarmos os parênteses de Dirac entre um vínculo e uma quantidade qualquer, obtemos zero. Logo, a inconsistência mencionada anteriormente não existe mais.

O caminho natural para aplicarmos o tratamento de Dirac, inicia-se encontrando o formalismo Lagrangeano e, depois, passa-se ao formalismo Hamiltoniano. Entretanto, quando se faz esta passagem, isto implica uma transformação do tipo

$$(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p), \quad (\text{A.14})$$

onde o Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (\text{A.15})$$

chamada de matriz Hessiana. No caso de teorias sem vínculos, o determinante desta matriz é diferente de zero, as transformações são possíveis e a Hamiltoniana pode ser

escrita unicamente em termos de (q, p) . Porém, quando se trata de uma teoria com vínculos a matriz Hessiana é singular, e conseqüentemente nem todas as velocidades \dot{q}_i podem ser unicamente escrita em termos de q e p . Portanto, não podemos escrever a Hamiltoniana unicamente em termos de q e p .

Neste caso, o que se faz é desenvolver o formalismo trabalhando com as variáveis dependentes e com as relações de vínculo. Portanto, a Hamiltoniana que é usada efetivamente no formalismo é a Hamiltoniana clássica somada aos vínculos da teoria através de multiplicadores de Lagrange λ_m , ficando

$$\tilde{H} = H_c + \lambda_m T_m \approx H_c \quad (\text{A.16})$$

onde m é o número de vínculos decorrentes diretamente da relação de definição dos momentos (vínculos primários). Mas podem haver mais vínculos, os vínculos secundários obtidos de relações de consistência, que diz que os vínculos não evoluem no tempo

$$\dot{T}_m = \{T_m, \tilde{H}\} \approx 0. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, a Hamiltoniana total para uma teoria com k vínculos secundários é

$$H = H_c + \lambda_a T_a \quad (\text{A.18})$$

onde $a = 1, 2, \dots, m + k$.

A relação de consistência (A.17) deve ser repetida para todos os vínculos, inclusive os vínculos secundários que vão sendo obtidos. Este processo se estende até não se encontrar nenhum vínculo novo.

Além dos vínculos primários e secundários, podem haver outros vínculos na teoria. Em teorias de calibre, como o eletromagnetismo, eles aparecem com a fixação de calibre.

Referências

- [1] A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and F.I. Takakura, *Braz. J. Phys.* **33**, 346 (2003).
- [2] A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and D.C. Rodrigues, *Nuclear Phys. B- Proceeding Supplements*, (2003) (Submetido)
- [3] A.C.R. Mendes, C. Neves and W. Oliveira, *Phys. Rev. D* (2003) (Submetido).
- [4] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).
- [5] P.A.M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951); *Proc. R. Soc. A* **246**, 326 (1958); *Proc. R. Soc. A* **257**, 32 (1960).
- [6] A.J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboin, *Constrained Hamiltonian Systems*. Academia Nazionale dei Lincei, Rome (1976).
- [7] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, *Lectures Notes in Physics*, vol **169**. Springer-Verlag, New York/Berlin (1982).
- [8] P.G. Bergmann, *Phys. Rev.* **75**, 680 (1949); *Phys. Rev.* **89**, 4 (1953).

- [9] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988);
N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford 1980.
- [10] J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 1737 (1992).
- [11] J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 4981 (1992).
- [12] J. Sonnenschein, *Nucl. Phys. B* **309**, 752 (1988).
- [13] T. Fujiwara, Y. Igarashi and J. Kubo, *Nucl. Phys. B* **341**, 695 (1990).
- [14] C. H. Gibson, *Appl. Mech. Rev.* **49**(5), 299 (1996).
- [15] G. Piumati, *Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci*. Reproduced and published by
Accademia dei Lincei, Ulrico Hoepli, Milan, (1894).
- [16] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New
York, (1983).
- [17] A.S. Monin and A.M. Yagolm, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*.
The MIT Press, Cambridge (1971).
- [18] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press,
Cambridge (1995).
- [19] L. Euler, *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*, *Hist. Acad. Berlin*, **1755**,
217-273 (1757);
Principes généraux du mouvement des fluides, *Hist. Acad. Berlin*, **1755**, 274-315

- (1757);
- Sectio quarta de motu aeri in tubis*, *Novi Comm. Petrop.*, 16, 281-425 (1770).
- [20] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1980).
- [21] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Pemberton, London, 3rd. edition, 1687.
- [22] L.M.H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement de fluides*, *Mém. de l'Acad des Sciences*, 389 (1822).
- [23] G.G. Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion*, *Camb. Trans.* viii, 287-290 (1845).
- [24] O. Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc. London A* 174, 935 (1883).
- [25] L.F. Richardson, *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, Cambridge (1922).
- [26] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30, 9 (1941).
- [27] A. M. Obukhov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32, 22 (1941); *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geogr. Geofiz.*, 5, 443 (1941).
- [28] L.F. Richardson, *Proc. R. Soc. Lond A* 110, 709 (1926), also in *Collected Papers of L.F. Richardson*, vol. 1, ed.P.G. Drazin, Cambridge University Press, 523-551 (1993).
- [29] V. Periwal, *cond-mat/9602123* (1996).
- [30] G.L. Eyink and N. Goldenfeld, *Phys. Rev. E* 50, 4638 (1994).

- [31] S.T. Bramwell, P.C.W. Holdsworth and J.F. Pinton, *Nature*, 552 (December 1998).
- [32] V.S. L'vov, *Nature* **396**, 519 (December 1998).
- [33] A.M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **396**, 367 (1993).
- [34] V. Gurarie, *Field Theory and The Phenomenon of Turbulence*, Proceedings, *Recent progress in statistical mechanics and quantum field theory*, Los Angeles (1994) 131-147.
- [35] M. Nelkin, *Phys. Rev. A* **9**, 388 (1974).
- [36] P.G. de Gennes, *Fluctuation, Instability and Phase Transition*. Proc. NATO Adv. Study Inst., Geilo, Norway. T. Riste. ed. Noordhoff, Leiden, series B (1975), p1.
- [37] H.A. Rose and P.L. Sulem, *J. Phys. France* **39**, 441 (1978).
- [38] H. Marmanis, *Phys. Fluids* **10**, 1428 (1998).
- [39] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. J. Wiley, New York (1983).
- [40] O. Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc. London A* **186**, 123 (1894).
- [41] M.J. Lighthill, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **211**, 564 (1952).
- [42] G. Russakoff, *Am. J. Phys.* **38**, 1188 (1970).
- [43] V.I. Arnold, *Ann. Inst. Fourier*, **16**, 319 (1966).
- [44] V.I. Arnold, *Appl. Math. Mech.*, **36**, 236 (1972).
- [45] V.I. Arnold and B.A. Khesin, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24**, 145 (1992).

- [46] J. Marsden and A. Weinstein, *Physica D* **7**, 305 (1983).
- [47] V. Zeitlin, *J. Phys. A* **25**, L171 (1992).
- [48] V. Zeitlin, *Physics D* **49**, 353 (1991).
- [49] P.J. Morrison, *Hamiltonian description of the ideal fluid,...*, Proceedings GFD 1993, 17-110. Woods-Hole Oceanographic Institute, Woods Hole (WHOI-94-12).
- [50] D.D. Holm and V. Zeitlin, *Phys. Fluids* **10**, 800 (1998).
- [51] D.D. Holm, *Physica D* **98**, 379 (1996).
- [52] H. Lamb, *Hydrodynamics*. Dover, New York (1932).
- [53] A. Clebsch and A. Crelle, *J. reine angew. Math.* **54**, 293 (1857);
A. Clebsch and A. Crelle, *J. reine angew. Math.* **56**, 1 (1859).
- [54] V.E. Zakharov, S.L. Musher and A.M. Rubenchik, *Phys. Rep.* **129**(5), 285 (1985).
- [55] V.E. Zakharov, V.S. L'vov and G. Falkovic, *Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence*. Springer Verlag, New York (1992).
- [56] H. Marmanis, *Proc. R. Soc. London A* **454**, 587 (1998).
- [57] G.A. Kuz'min, *Phys. Lett. A* **96**, 88 (1983).
- [58] V.I. Oseledets, *Russian Math. Surveys* **44**, 210 (1989).
- [59] S. Gama and U. Frish, *Local helicity, a material invariant for the odd-dimensional Euler equations*, in NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos, 115-119, eds M.R.E.

- Proctor, P.C. Mathews and A.M. Rucklidge. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [60] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition. Addison-Wesley, Reading, MA (1980).
- [61] I. Antoniou and G.P. Pronko, hep-th/0106119.
- [62] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Inc., New York (1980).
- [63] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton (1992).
- [64] L.D. Faddeev, *Teor. Mat. Fiz.* **1**, 3 (1969); *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970).
- [65] I.M. Singer, *Commun. Math. Phys.* **60**, 7 (1978).
- [66] M. Grabiak, B. Muller and W. Greiner, *Ann. Phys.* **172**, 213 (1986).
- [67] N. Ilieva, L. Litov, Proceedings, *Selected topics in QFT and mathematical physics*, Liblice (1989) 239-250.
- [68] E.L. Mollo-Christensen, *ASME J. Appl. Mech. Ser. E* **89**, (1967).
- [69] A.K.M.F. Hussain and W.C. Reynolds, *J. Fluid Mech.* **41**(2), 241 (1970).
- [70] P.E. Dimotakis and G.L. Brown, *J. Fluid Mech.* **78**, 535 (1976).
- [71] T.R. Heidrick, S. Banerjee and R.S. Azad, *J. Fluid Mech.* **81**, 137 (1977).

- [72] J. Jimenez, P. Moin, R. Moser and L. Keefe, *Phys. Fluids* **31**, 1311 (1988).
- [73] W. Thomson, *Philos. Mag.* **4**(47), 342 (1887).
- [74] M.T. Landahl, *J. Fluid Mech.* **29**, 441 (1967).
- [75] O.V. Troshkin, *Wave Theory of Turbulence* (VTs Akad. Nauk S.S.S.R., Moscow, 1989).
- [76] E.S. Fradkin, G.A. Vilkovisky; *Phys. Lett. B* **55**, 224 (1975).
- [77] I.A. Batalin, G.A. Vilkovisky; *Phys. Lett. B* **69**, 309 (1977).
- [78] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976);
I.V. Tyutin, *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Mechanics*, Lebedev preprint **39** (1975).
- [79] N. Banerjee, B. Banerjee and S. Ghosh; *Ann. Phys.* **241**, 237-257(1995) and references therein.
- [80] R. Rajaraman, *Phys. Lett. B* **154**, 305 (1985).
- [81] C. Neves and C. Wotzasek, *J. Math. Phys.* **34**, 1807 (1993).
- [82] N. Banerjee, S. Ghosh and R. Banerjee, *Nucl. Phys. B* **417**, 257 (1994).
- [83] J. Barcelos-Neto and W. Oliveira, *Phys. Rev. D* **56**, 2257 (1997).
- [84] J. Barcelos-Neto, *Phys. Rev. D* **55**, 4, 2265 (1997).

- [85] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B* **102**, 27 (1981); *Phys. Lett. B* **120**, 166 (1983); *Phys. Rev. D* **28**, 2587 (1983); *Phys. Rev. D* **30**, 508 (1984); *Nucl. Phys. B* **234**, 106 (1984); *J. Math. Phys.* **26**, 172 (1985).
- [86] L. Faddeev and S.L. Shatashvilli, *Phys. Lett. B* **167**, 225 (1986).
- [87] S.T. Hong, Y. W. Kim and Y.J. Park, *Phys. Rev. D* **59**, 114026 (1999); *Mod. Phys. Lett. A* **15**, 55 (2000).
- [88] C. Neves and C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* **59**, 125018 (1999); *Phys. Rev. C* **62**, 025205 (2000).
- [89] I.A. Batalin and E.S. Fradkin, *Nucl. Phys. B* **279**, 514 (1987); *Int.J. Mod. Phys. A*, 3255(1991).
- [90] C. Wotzasek, *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 1123 (1990).
- [91] M. Moshe and Y. Oz, *Phys. Lett. B* **224**, 145 (1989).
- [92] R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985); *Phys. Rev. E* **54**, 2060 (1985).
- [93] R. Banerjee, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1889 (1986).
- [94] S. Miyake and K. Shizuya, *Phys. Rev. D* **36**, 3781 (1987).
- [95] K. Harada and I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* **171**, 311 (1987).
- [96] R. Rajarama, *Phys. Lett. B* **162**, 148 (1985).

- [97] J. Lott and R. Rajarama, Phys. Lett. B **165**, 321 (1985).
- [98] C. Wotzasek, J. Math. Phys. **32**(2), 540 (1991).
- [99] M. Bordemann and J. Hoppe, Phys. Lett. B **317**, 315 (1993).
- [100] A. Jevicki, Phys. Rev. D **57**, 5955 (1998).
- [101] D. Bazeia, R. Jackiw, Annals Phys. **270** (1998) 246, e-Print Archive: hep-th/9803165
- [102] D. Bazeia, Phys. Rev. D **59**, 085007 (1999).
- [103] R. Jackiw and A.P. Polychronakos, Commun. Math. Phys. **207** (1999) 107-129; e-Print Archive: hep-th/9809123.
- [104] M. Hassaine, P.A. Horvathy, e-Print Archive: math-ph/9904022.
- [105] N. Ogawa, e-Print Archive: hep-th/9801115.
- [106] E. Madelung, Z. Phys. **40**, 322 (1926).
- [107] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1998).
- [108] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Lett. B **487**, 7 (2000).
- [109] A. M. J. Schakel, Mod. Phys. Lett. B **4**, 927 (1990); **5**, 833 (1991); *Proceedings of the Körber Symposium on Superfluid ^3He in Rotation*, Helsinki, 1991, edited by M. M. Salomaa, Physica B **178**, 280 (1992); Int. J. Mod. Phys. B **8**, 2021 (1994).
- [110] C. P. Natividade and H. Boschi-Filho, Phys. Rev. D **62**, 025016 (2000).
- [111] C. Neves and C. Wotzasek, e-Print Archive: hep-th/0109089.

- [112] J. Ananias Neto, W. Oliveira and Emanuel R. de Oliveira, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 1 (2001).
- [113] M.M. Horta-Barreira and C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* **45**, 1410 (1992).
- [114] J. Barcelos-Neto and E.S. Cheb-Terrab, *Z. Phys. C* **54**, 133 (1992).
- [115] J. Barcelos and E. Vasquez, *Z. Phys. C* **61**, 695 (1994).
- [116] C. Wotzasek, *Ann. Phys.* **243**, 76 (1995).
- [117] J. Ananias, C. Neves and W. Oliveira, *Phys. Rev. D* **63**, 085018 (2001).

Turbulência como um sistema vinculado e imersão simplética de sistemas de segunda classe

Albert Carlo Rodrigues Mendes

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
Examinadora os seguintes Professores:

Flavio Lassuo Takakura – Presidente/UFJF

Francisco Caruso Neto – Coorientador/CBPF

Fernando Manuel Ramon – INPE

Clovis José Wotzasek – UFRJ

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira – CBPF

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Suplente: Sebastião Aves Dias – CBPF

Rio de Janeiro, 21 de Maio de 2003