

Tese de  
Doutorado

# Ondas Eletromagnéticas e Fótons em Cenários de Eletrodinâmicas Pós-Maxwellianas

Pedro Augusto Lima Mourão

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Rio de Janeiro - RJ

Janeiro de 2026



Pedro Augusto Lima Mourão

# Ondas Eletromagnéticas e Fótons em Cenários de Eletrodinâmicas Pós-Maxwellianas

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física Teórica.

Orientador:  
Prof. José Abdalla Helayël-Neto

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF  
COORDENAÇÃO COSMO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rio de Janeiro - RJ  
Janeiro de 2026

"ONDAS ELETROMAGNÉTICAS E FÓTONS EM CENÁRIOS DE  
ELETRODINÂMICAS PÓS-MAXWELLIANAS"

**PEDRO AUGUSTO LIMA MOURÃO**

Tese de Doutorado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes  
professores:



José Abdalla Helayël-Junior - Orientador/CBPF



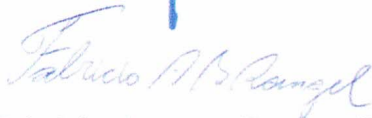
Philippe Osório de Fabritiis – CBPF



Patricio Gaete Durán – UTFSM-CHILE



Van Sergio Alves – UFPA



Fabrício Augusto Barone Rangel - UNIFEI

Rio de Janeiro, 12 de fevereiro de 2026.

Dedico este trabalho aos meus pais, **Carlos Mourão** e **Elnir Mourão**, e aos meus avós, **Juarez Mourão** e **Dionéa Mourão** (*in memoriam*). Sem eles, eu não teria chegado até aqui.

# Agradecimentos

Gostaria de registrar minha sincera gratidão a **Deus**, cuja presença e força foram fundamentais para que eu atravessasse momentos pessoais de grande dificuldade ao longo desta trajetória acadêmica, permitindo-me manter a clareza, a disciplina e a perseverança necessárias para concluir este trabalho. Procurei sempre relembrar do princípio ensinado pelo apóstolo Paulo, de que devemos fazer tudo de todo o coração, como se fosse para o Senhor e não para os homens (Colossenses 3:23), orientação que guiou meu compromisso ético e intelectual diante dos desafios da pesquisa científica. Acredito profundamente que a ciência constitui também uma forma de servir ao Deus Criador, ao revelar, por meio da investigação rigorosa, aspectos da ordem, da racionalidade e da beleza presentes no mundo — convicção compartilhada por muitos grandes cientistas do passado e ainda viva entre pesquisadores que veem na busca pelo conhecimento um ato de reverência ao Criador. Como disse o famoso cientista Louis Pasteur: “Quanto mais estudo a natureza, mais fico maravilhado com as obras do Criador.” A Ele, expresso minha sincera e respeitosa gratidão.

- Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao **professor Helayël** pela excelente orientação durante o doutorado. Sua postura humana e acolhedora para com os alunos — algo que não se encontra tão facilmente — marcou minha trajetória de uma forma que levarei para sempre comigo, e sua paciência e compreensão diante dos diversos problemas pessoais que enfrentei foram fundamentais para que eu conseguisse seguir adiante. Admiro imensamente sua grande competência como físico e como orientador, e seu modo de tratar as pessoas, assim como sua extraordinária capacidade de trabalho, serão inspirações permanentes para mim, tanto na vida acadêmica quanto pessoal. Muito obrigado por tudo;
- Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao professor **Ulisses Barres de Almeida**, que me orientou durante o primeiro ano do doutorado e transmitiu diversos conceitos fundamentais sobre astrofísica de altas energias, conhecimentos que pude levar adiante como herança e aplicar em parte significativa do trabalho acadêmico que se seguiu. Agradeço também por sua grande compreensão e motivação no momento em que precisei mudar de área de pesquisa, demonstrando sempre apoio, paciência e generosidade;
- Gostaria de agradecer ao **Gustavo Levy**, um grande amigo que conheci durante esta jornada acadêmica, apresentado pelo professor Helayël. Com sua experiência, o professor Helayël me proporcionou um excelente companheiro de pesquisa — parece que Gustavo veio exatamente como eu precisava. Ele esteve presente em todos os meus textos acadêmicos, e sua colaboração foi fundamental para o desenvolvimento do meu trabalho;
- Gostaria de agradecer ao professor **Paulo Renato**, meu orientador no mestrado na UFPI, pela sua orientação, apoio e paciência, fundamentais para que eu concluísse com sucesso esta etapa da minha formação. Em um momento de dúvida sobre minha capacidade de ingressar no doutorado em uma instituição de alto nível, ele afirmou, durante uma aula,

que um professor nunca deve desanimar um aluno que almeja estudar em um ambiente de excelência, pois todo estudante é capaz de se superar. Essas palavras me incentivaram a pleitear uma vaga e a realizar o sonho de estudar no CBPF;

- Gostaria de agradecer aos meus pais, **Carlos Mourão** e **Elnir Mourão**, pelo amor tão claramente manifestado no cuidado e pela enorme paciência comigo ao longo desta jornada acadêmica, durante a qual enfrentei diversas dificuldades pessoais. Sou profundamente grato pelo respeito que sempre tiveram pelas minhas escolhas profissionais. Sempre me apoiaram e nunca me negaram ajuda; o objetivo deles sempre foi e sempre será o meu crescimento humano, espiritual e profissional. Sem eles, jamais teria chegado até aqui;
- Gostaria de agradecer aos meus avós paternos, **in memoriam**, aos meus avós **Juarez Mourão** e **Dionéia Mourão**, que me criaram da infância ao início da adolescência e, junto com meus pais, foram minhas primeiras referências de amor, carinho e cuidado. Eles me amaram profundamente, e eu também os amei muito. Deram-me uma educação de base excelente, a melhor que estava ao alcance deles, e sei que, sem o apoio, a dedicação e os valores que me transmitiram, eu não teria chegado até aqui;
- Agradeço profundamente aos meus avós maternos, que foram fundamentais na minha formação. Minha avó **Maria de Jesus**, mesmo sem saber ler ou escrever, possuía uma sabedoria imensa e sempre oferecia palavras de esperança, apesar de suas próprias dores. Ela não teve oportunidade de estudar, mas me ensinou, com firmeza e amor, o valor da educação e da busca por um futuro digno, sendo uma grande inspiração em minha trajetória. Meu avô **Boaventura Lima** foi um verdadeiro vaqueiro piauiense, que aboiava e usava chapéu de couro. Dele herdei exemplos de trabalho, disciplina e integridade, que levarei por toda a vida;
- Gostaria de agradecer aos meus irmãos, **Pablo Mourão** e **Priscilla Mourão**, que, apesar de nossas diferenças de personalidade e temperamento, sempre mantiveram comigo um vínculo muito forte, baseado em ajuda mútua e incentivo constante. Com suas brincadeiras, bom humor e companheirismo, tornaram os desafios do doutorado muito mais leves e agradáveis, tornando esta jornada mais divertida e suportável, e por isso serei eternamente grato;
- Gostaria de agradecer ao meu sobrinho, **Luquinhas**. Ele é uma criança linda e inteligente de apenas sete aninhos. Sempre que eu precisava, ele baixava o som da televisão com seus filminhos para que eu pudesse me reunir com o professor Helayël. Amo muito o Lucas; ainda não sei exatamente como é o amor de pai, pois não sou pai, mas acredito que o que sinto por ele seja o mais próximo desse amor;
- Gostaria de agradecer ao meu grande amigo **Marcos Paulo**, uma das pessoas e físicos mais inteligentes que conheci. Com ele aprendi a ser mais crítico, mais corajoso e mais ousado, tanto na pesquisa quanto nos desafios da vida, que ele enfrenta com grande determinação. Sua inteligência surpreendente, sua confiança em me ouvir, seu ótimo senso de humor e

seu interesse em longas conversas produtivas fizeram dele uma presença extremamente importante em minha vida, influenciando de forma significativa meu crescimento pessoal e acadêmico;

- Gostaria de agradecer a **Janielton Oliveira de Andrade** pela fiel amizade e por compartilhar comigo o interesse pela ciência, especialmente pela física, sempre nos motivando mutuamente. Acompanhar de perto todo o meu trabalho, ler tudo o que desenvolvi com meus parceiros de pesquisa, oferecer sugestões e até apontar pequenos erros demonstra não apenas seu cuidado, mas também sua grande admiração pelo que conquistamos durante o doutorado. Seu apoio, incentivo e olhar crítico foram fundamentais, fazendo dele um grande amigo e um excelente físico;
- Gostaria de agradecer ao meu amigo **Lom Rossman** pela profunda amizade, como se nos conhecêssemos há décadas, e pela admiração mútua. Ele me admira muito por eu ser físico, e temos uma grande conexão por compartilharmos a mesma fé em Jesus. Aprendi muito com seu caráter forte, sua generosidade, sua experiência de vida e sua coragem. Lom sempre esteve ao meu lado, compartilhando momentos importantes comigo, e posso dizer a ele aquilo que ele sempre diz sobre mim: que sua amizade foi um verdadeiro presente de Deus em minha vida;
- Gostaria de agradecer à **Bete** e à **Larissa** pelo trabalho responsável e eficiente, e pela excelente relação que mantêm com os alunos. Durante todo esse tempo, trocamos inúmeros e-mails de trabalho, e fui sempre atendido da melhor forma, com atenção, cordialidade e profissionalismo;
- Gostaria de agradecer a todas as pessoas que compõem o **Diracstão**. Não quero citar nomes para não ser injusto com ninguém, pois são muitos — alunos de pós-graduação, pós-doutorandos e professores —, mas quero expressar minha gratidão a todos que fazem parte desta “República”, que se mostrou um ambiente maravilhoso para trabalhar, oferecendo leveza, colaboração e incentivo mútuo;
- Gostaria de agradecer à **CAPES** pelo apoio financeiro, que me proporcionou a bolsa de doutorado. Sem essa ajuda, não teria condições de realizar todo este trabalho acadêmico. A CAPES é uma instituição de enorme importância para o nosso país e que merece ser cada vez mais valorizada. Espero que continue se fortalecendo e realizando os sonhos de muitos alunos, assim como tornou possível a realização do meu;
- Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao **Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)**, que considero uma das melhores instituições de pesquisa da América Latina e que me proporcionou todos os recursos necessários para a realização da minha pesquisa. Espero que as políticas públicas de investimento em ciência reconheçam a grandeza do CBPF, de seus fundadores e dos pesquisadores atuais, e que continuem a investir de forma significativa nesta instituição.

"Porque dEle, e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém!"

Romanos 11:36

# Resumo

Nossa compreensão física indica que o vácuo deve flutuar fortemente na escala de Planck em consequência de efeitos quânticos. Este fenômeno fundamenta a hipótese de um meio dinâmico — a que nos referimos como *spin foam* — capaz de afetar a propagação e as interações de ondas eletromagnéticas e gravitacionais, fótons, neutrinos, elétrons e outras partículas altamente energéticas, em cenários com violação da simetria de Lorentz. Nesta tese de doutorado, nossa contribuição é adotar este cenário com foco específico nos efeitos da gravitação quântica de laços (LQG) no setor eletromagnético do Modelo Padrão. Partindo da versão pós-Maxwelliana do eletromagnetismo induzida por efeitos da LQG, revisamos a propagação de ondas eletromagnéticas e as propriedades óticas do vácuo da QED, investigando também o efeito conjunto da LQG e de um campo magnético homogêneo de fundo sobre as relações de dispersão e índices de refração do vácuo.

Consideramos a atenuação de raios gama pela luz de fundo extragaláctica (EBL) e pela radiação cósmica de fundo (CMB) via o processo de Breit–Wheeler, obtendo vínculos astrofísicos sobre possível violação da simetria de Lorentz. Utilizamos a eletrodinâmica de De Broglie–Proca para estabelecer um limite cinemático relacionado à opacidade do Universo associado à massa de repouso do fóton, empregando o invariante de Mandelstam. Por fim, analisamos a distribuição cosmológica de fótons massivos no contexto da teoria quântica de campos e estatística de Bose–Einstein, investigando sua densidade e comportamento no Universo.

**Palavras-chave:** Eletromagnetismo Pós-Maxwelliano, Gravidade Quântica em Laços, Violação da Invariância de Lorentz, Efeito Breit-Wheeler, Limite Cinemático.

# Abstract

Our physical understanding indicates that the vacuum should fluctuate strongly on the Planck scale as a consequence of quantum effects. This phenomenon underlies the hypothesis of a dynamic medium—which we refer to as spin foam—capable of affecting the propagation and interactions of electromagnetic and gravitational waves, photons, neutrinos, electrons, and other highly energetic particles, in scenarios with Lorentz symmetry violation. In this doctoral thesis, our contribution is to adopt this scenario with a specific focus on the effects of loop quantum gravity (LQG) in the electromagnetic sector of the Standard Model. Starting from the post-Maxwellian version of electromagnetism induced by LQG effects, we review the propagation of electromagnetic waves and the optical properties of the vacuum in QED, also investigating the combined effect of LQG and a homogeneous background magnetic field on dispersion relation and refractive indices of the vacuum.

We consider the attenuation of gamma rays by the extragalactic background light (EBL) and by the cosmic microwave background (CMB) via the Breit–Wheeler process, obtaining astrophysical constraints on possible Lorentz symmetry violation. We employ De Broglie–Proca electrodynamics to establish a kinematic bound related to the opacity of the Universe associated with the photon rest mass, using Mandelstam invariant. Finally, we analyze the cosmological distribution of massive photons within the framework of quantum field theory and Bose–Einstein statistics, investigating their density and behavior throughout the Universe.

**Keywords:** Post-Maxwellian Electromagnetism, Loop Quantum Gravity, Lorentz Violation Invariance, Breit-Wheeler Effect, Kinematic Bound.

---

# Produção Acadêmica do Mestrado

---

- **Squeezing as a probe of the universality hypothesis**

- Este artigo foi publicado na revista International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 19 (2022) 11, 2250169;
- arXiv: 2211.08846 [hep-th];
- DOI: 10.1142/S0219887822501699;
- Autores:
  - \* Pedro Augusto Lima Mourão;
  - \* Helder Alexander Santos e Costa;
  - \* Paulo Renato Silva de Carvalho.

---

# Produção Acadêmica do Doutorado

---

- **Reassessing aspects of the photon's LQG-modified dispersion relations**
  - Este artigo foi publicado pela revista Chinese Physics C;
  - arXiv: 2501.09370v2 [hep-th];
  - DOI: 10.1088/1674-1137/ae265a;
  - Autores:
    - \* Pedro Augusto Lima Mourão;
    - \* Gustavo Lourenço Lopes Weiterschan Levy;
    - \* José Abdalla Helajel-Neto.
- **LQG-modified dispersion relations and the problem of cosmic photons threshold anomalies**
  - Este artigo encontra-se em preparação para submissão;
  - arXiv:2502.14927v1 [gr-qc];
  - Autores:
    - \* Pedro Augusto Lima Mourão;
    - \* Gustavo Lourenço Lopes Weiterschan Levy;
    - \* José Abdalla Helajel-Neto.
- **Correções da Gravidade Quântica em Laços na Cinemática do Efeito Compton e nas Relações de Dispersão com Campo Magnético de Fundo**
  - Artigo em preparação para submissão à Revista Brasileira de Ensino de Física;
  - Autores:
    - \* Pedro Augusto Lima Mourão;
    - \* Gustavo Lourenço Lopes Weiterschan Levy;
    - \* José Abdalla Helajel-Neto.

---

# Lista de Figuras

---

Figura 1	– Interpretação de Compton. Um fóton de comprimento de onda $\lambda$ incide sobre um elétron livre em repouso. Na colisão, o fóton é espalhado com um ângulo $\theta$ , aumentando o seu comprimento de onda $\lambda'$ , enquanto o elétron move-se em um ângulo $\phi$ . . . . .	31
Figura 2	– Resultado de Compton: $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ . . . . .	31
Figura 3	– Experimento de Compton (1923): comprimento de onda de raios X espalhados por grafite em ângulo reto em comparação com os raios X primários. . . . .	32
Figura 4	– Diagrama do processo de produção de pares $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ . . . . .	46
Figura 5	– Representação esquemática da relação entre o parâmetro LIV $\xi$ e a função $f(k)$ . A linha pontilhada indica o <b>Caso I</b> e uma possível linha que intercepta dois pontos da função representa o <b>Caso II</b> . . . . .	48
Figura 6	– Efeito das colisões na função de distribuição do espaço de fase para a partícula (1). O termo de colisão $C[f_1(x, p, t)]$ ocorre em um espaço unidimensional. Todas as colisões ocorrem localmente, ou seja, na posição fixada $x$ . Para simplificar o caso, não incluímos os termos para emissão estimulada ou bloqueio de Pauli. . . . .	62

---

# Sumário

---

<b>Produção Acadêmica</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>Produção Acadêmica</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>1 Introdução e Contextualização</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1 Eletromagnetismo . . . . .	14
1.2 Eletrodinâmica Massiva de De Broglie-Proca . . . . .	16
1.3 Eletrodinâmica Corrigida pela Gravidade Quântica em Laços . . . . .	20
1.4 Estrutura e Contextualização da Tese de Doutorado . . . . .	26
<b>2 Correções da Gravidade Quântica em Laços na Cinemática do Efeito Compton</b> . . . . .	<b>30</b>
2.1 Correções do Efeito Compton pela Gravidade Quântica em Laços . . . . .	33
2.2 Análise Numérica do Efeito Compton sob a Gravidade Quântica em Laços . . . . .	34
2.3 Comparação entre os Desvios do Comprimento de Onda da Radiação Espalhada . . . . .	35
2.4 Conclusões Parciais . . . . .	36
<b>3 Relações de Dispersão Modificadas com Campo Magnético de Fundo</b> . . . . .	<b>38</b>
3.1 Método do Determinante da Matriz $M_{ij}$ . . . . .	39
3.2 Relações de Dispersão Modificadas . . . . .	40
3.3 Índice de Refração . . . . .	41
3.4 Relações Energia-Momento . . . . .	41
3.5 Conclusões Parciais . . . . .	42
<b>4 Anomalias de Limiar Induzidas por Violação da Invariância de Lorentz e a Gravidade Quântica em Laços</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1 Anomalias de Limiar . . . . .	44
4.2 LIV e Relações de Dispersão Modificadas na Discussão sobre Anomalias de Limiar . . . . .	46
4.3 Efeitos Combinados de LIV e Relação de Dispersão Modificada pela LQG nas Anomalias de Limiar . . . . .	48
4.4 Análise das interações $\gamma$ -CMB e $\gamma$ -EBL sob efeitos da Gravidade Quântica em Laços . . . . .	49

4.5	Conclusões Parciais . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Eletrodinâmica Massiva de De Broglie–Proca e LQG: Vínculo de Consistência e Hierarquia de Escalas . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1	De Broglie–Proca: Vínculo de Consistência . . . . .	54
5.2	De Broglie–Proca e LQG: Hierarquia de Escalas . . . . .	57
5.3	Conclusões Parciais . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Termos de Colisão: Efeito Compton para Fótons Cósmicos Massivos . . . . .</b>	<b>60</b>
6.1	Termos de Colisão . . . . .	60
6.2	Efeito Compton para Fótons Cósmicos Massivos . . . . .	62
6.3	Conclusões Parciais . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>68</b>
7.1	Impressões e Perspetivas do Autor . . . . .	68
7.2	Autocrítica em Relação ao Desenvolvimento do Trabalho . . . . .	76
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>78</b>

---

## Capítulo 1

---

---

# Introdução e Contextualização

---

No presente trabalho, abordaremos duas extensões da eletrodinâmica induzidas por física além do Modelo Padrão: a eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca e a eletrodinâmica com correções provenientes da gravidade quântica em laços (LQG, em inglês).

A eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca será apresentada com a finalidade de culminar na famosa relação de De Broglie–Proca, que considera a não nulidade da massa do fóton. Tal relação de dispersão será a expressão primordial utilizada na resolução de problemas específicos no contexto da astrofísica e da cosmologia. Antes disso, faremos uma abordagem do eletromagnetismo convencional, a fim de fornecer o embasamento teórico necessário para as novas abordagens citadas no parágrafo anterior.

Estudaremos o eletromagnetismo (EM) e a gravidade quântica em laços de forma unificada. Com isso, nosso objetivo é resolver problemas específicos situados na interseção dessas duas grandes áreas: uma já bem consolidada e outra ainda em fase de confirmação experimental, respectivamente. Costuma-se abordar tais áreas separadamente por razões didáticas e disciplinares; no entanto, a necessidade de estudá-las dentro de um quadro teórico unificado torna-se cada vez mais evidente.

Dessa forma, nesta introdução iniciaremos abordando o eletromagnetismo, seguido da eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca e, posteriormente, estudaremos as extensões do eletromagnetismo que incorporam efeitos da gravidade quântica em laços, resultando nas equações de Maxwell modificadas. Finalmente, apresentaremos uma seção de Estrutura e Contextualização desta tese de doutorado. Somente então serão apresentados os problemas específicos a serem analisados, dos Capítulos 2 ao 6, seguidos de um capítulo sobre a Conclusão Final, contendo impressões, perspectivas e autocrítica do próprio autor em relação ao trabalho desenvolvido.

## 1.1 Eletromagnetismo

O Eletromagnetismo de Maxwell é uma das teorias mais bem-sucedidas da física. Os estudos que levaram à sua formulação revelaram questões fundamentais da natureza. A partir das investigações experimentais de Faraday sobre eletricidade e magnetismo e das experiências de Ørsted, observou-se que uma corrente elétrica passando por um condutor desviava uma agulha magnética colocada em sua vizinhança, fazendo com que ela assumisse uma posição diferente do plano definido pelo fio e pelo centro da agulha, evidenciando que eletricidade e magnetismo são fenômenos de natureza relacionada. Contudo, essa constatação revela-se apenas como uma evidência do eletromagnetismo. A partir desses estudos, os desenvolvimentos matemáticos de Maxwell, em 1873, mostraram que a luz é composta por campos elétricos e magnéticos que se retroalimentam, produzindo o que hoje é chamado de segunda grande unificação da Física.

Como toda aplicação prática é precedida pela pesquisa fundamental, o eletromagnetismo maxwelliano possui atualmente profunda aplicação tecnológica. Desde 1904, quando Guglielmo Marconi criou o primeiro sistema prático de telegrafia sem fio (TSF), até os dias atuais na medicina e em diversas engenharias, são tantas as áreas da ciência aplicada que tem a teoria eletromagnética como base que é difícil conceber seu alcance (ver, por exemplo, [1–3]).

Nas conhecidas equações de Maxwell em um espaço-tempo quadridimensional, a ação é escrita de forma a preservar a invariância de Lorentz e a invariância de calibre, permitindo a utilização do tensor de campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.1)$$

sendo  $A_\mu(x)$  o potencial quadridimensional. Podemos também utilizar a forma não-manifesta de Lorentz em termos das componentes de  $F_{\mu\nu}$ , onde os campos elétricos e magnéticos trivetoriais  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são componentes do tensor. Introduzindo essa notação e esses elementos, podemos discutir as equações de Maxwell com maior clareza e fluidez [4].\*

A ação pode ser escrita como:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x (\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (1.2)$$

Os campos elétricos  $\vec{E}$  e magnéticos  $\vec{B}$  podem ser expressos em termos de índices como:

- $E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ ;
- $B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}$ ;
- $\mu, \nu = (0, i)$ ;
- $i, j, k = 1, 2, 3$ .

---

\*As constantes utilizadas com frequência, como a velocidade da luz  $c$ , a permissividade do vácuo  $\varepsilon_0$  e a constante de Planck  $\hbar$ , são geralmente tomadas como iguais a unidade.

As equações de Maxwell, incluindo as identidades de Bianchi, podem ser escritas como:

- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ;
- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ ;
- $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ .

Ou, de forma mais familiar:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.6)$$

Contudo, como toda boa teoria, o eletromagnetismo de Maxwell apresenta limitações, não conseguindo abranger diversas questões da física contemporânea. Nas últimas décadas, surgiram várias novas abordagens para as teorias eletromagnéticas, visando preencher lacunas da física moderna. Por que o eletromagnetismo é a teoria para a qual os físicos propõem tantas extensões, novas abordagens e relações com outras áreas da física? Justamente por ser uma teoria extremamente bem-sucedida, construída sobre bases matemáticas sólidas e com evidências experimentais de altíssima precisão. Dessa forma, relacioná-la a teorias emergentes permite buscar confirmações e explorar novos horizontes. Assim, atualmente, seu estudo pode ser realizado isoladamente por questões disciplinares, mas, principalmente, em conexão com diversas teorias contemporâneas e na busca por abordagens alternativas à formulação maxwelliana.

Contam-se, na literatura física atual, 60 extensões não-Maxwellianas da eletrodinâmica, agrupadas por afinidade em quatro categorias: **a) extensões imediatas, sem nova física (Maxwell mais 14 extensões)**: ED como a introdução de monopólos magnéticos de Dirac (monopólos magnéticos em gelos de spin e em BECs) [5], ED com a introdução de monopólos magnéticos de Nambu [6]; ED de portadores de carga escalares (ED escalar: Majorana-Weisskopf–Pauli–Salam) [7], por exemplo; **b) extensões induzidas por nova física além do Modelo Padrão (14 extensões)**: Dirac’s New Aether Electrodynamics (Nature, 1951) [8], ED com violação da simetria de Lorentz segundo o SME (Standard Model Extension, SME) proposto por Kostelecký e Colladay (Origem em cordas fundamentais; birrefringência do vácuo) [9], ED da matéria quiral  $\sim$  ED com violação da simetria de Lorentz (Semi-metais de Weyl e plasmas de quarks-glúons) [10], ED Axiônica (Isolantes e supercondutores topológicos) [11] e mais 10 extensões; **c) extensões não-lineares (22 extensões)**: ED não-linear com termo de Euler-Heisenberg (efeitos de polarização do vácuo) [12], ED não-linear de Born–Infeld (redescoberta em cenário de supercordas) [13]; ED ModMax [14] e ED Logarítmica [15], para citar algumas; **d) extensões por dimensionalidade (11 extensões)**: ED tensorial emergente

em líquidos-U(1) de spin [16], ED (planar) de Maxwell–Chern–Simons (EHQ, Spintrônica, High-Tc) [17], ED planar T-simétrica de Chern-Simons (Fractional Topological Insulators ou Chern Insulators) [18] e ED planar quiral para o grafeno (Jackiw – Pi) [19], por exemplo.

Neste capítulo, apresentaremos uma abordagem da eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca e da eletrodinâmica corrigida pela gravidade quântica em laços, respectivamente. Encerraremos com a seção de estrutura e contextualização.

## 1.2 Eletrodinâmica Massiva de De Broglie-Proca

A partir de agora, nossa introdução se dedicará à eletrodinâmica massiva de De Broglie-Proca, formulada em 1936 para descrever a evolução de partículas vetoriais massivas [20]. Essa teoria tornou-se essencial para descrever partículas como o bóson  $Z$  e o bóson  $W$ , responsáveis pela força fraca, ou seja, campos de spin-1 cujas partículas mediadoras possuem massa diferente de zero. Aqui, usaremos essa teoria para descrever campos eletromagnéticos com massa [21–23].

Iniciamos com a definição da lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu - J_\mu A^\mu, \quad (1.7)$$

onde:

- $A^\mu$  é o campo vetorial;
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor de campo;
- $m$  é a massa do campo;
- $J^\mu$  é a corrente externa (fonte).

Aplicando as equações de Euler-Lagrange para campos:

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0, \quad (1.8)$$

temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = m^2 A^\mu - J^\mu. \quad (1.9)$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange (1.8), obtemos:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu = J^\mu, \quad (1.10)$$

que corresponde à equação de De Broglie-Proca, discutida em seu trabalho original [20].

Tomando a divergência da equação acima, temos:

$$\partial_\mu \left( \partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu \right) = \partial_\mu J^\mu. \quad (1.11)$$

O primeiro termo se anula devido à antissimetria de  $F^{\nu\mu}$  e à simetria das derivadas:

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (1.12)$$

Restando:

$$m^2 \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu J^\mu. \quad (1.13)$$

Se  $J^\mu$  for conservada ( $\partial_\mu J^\mu = 0$ ), então:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.14)$$

Essa é uma condição subsidiária, que surge da dinâmica das equações e não como uma escolha de calibre [24]. Dessa forma, podemos afirmar que  $m \neq 0$ .

Dadas as conhecidas equações de Maxwell, podemos escrever as equações de campo de De Broglie-Proca de maneira semelhante, agora incluindo os termos de massa. A motivação dessa teoria para modificar as equações de Maxwell foi derivar equações de campo relativísticas análogas à equação de Klein-Gordon para partículas massivas [25, 26]. A variável de campo dinâmico é o potencial tetravetorial  $A_\mu = (\varphi, \vec{A})$ , onde  $\varphi$  e  $\vec{A}$  são os potenciais elétrico (escalar) e magnético (vetorial), respectivamente.

Esses termos de massa foram adicionados às duas equações de campo principais, denominadas equação de De Broglie-Proca-Gauss e equação de De Broglie-Proca-Âmpere, enquanto as demais permaneceram inalteradas [20, 26, 27]:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) - m^2 \vec{A}(\vec{r}, t); \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) - m^2 \varphi(\vec{r}, t); \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (1.18)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (1.19)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (1.20)$$

A partir dessas equações, pode-se demonstrar, utilizando o procedimento para potenciais de radiação [28, 29], que os problemas do potencial escalar e vetorial se desacoplam, resultando nas equações de campo:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\vec{r}, t) - m^2 \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (1.21)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r}, t) - m^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t). \quad (1.22)$$

Observa-se que as equações (1.21) e (2.21) possuem a mesma forma da equação de Klein-Gordon para campos massivos:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) - m^2 \psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.23)$$

que representa a equação relativística de segunda ordem mais simples para partículas materiais. Assumindo uma solução de onda  $\psi(\vec{r}, t) = \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , aplica-se (1.23) para obter a relação de dispersão de De Broglie-Proca:

$$E_f^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m_f^2 c^4, \quad (1.24)$$

onde  $f$  indica o fóton e  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  é o trimomento. Para  $m_f = 0$ , recupera-se a energia do fóton na cinemática relativística usual [20, 26].

Uma diferença fundamental em relação ao eletromagnetismo de Maxwell é a condição de calibre de Lorenz:

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.25)$$

por vezes chamada de "restrição de Proca", necessária para garantir a autoconsistência das equações de campo. Isso implica que a teoria de De Broglie-Proca não é invariante de calibre local, ao contrário das equações de Maxwell [25, 30].

A apresentação da eletrodinâmica massiva culmina na relação de dispersão (1.24), que define uma massa de repouso para o fóton. Ao longo das últimas décadas, diversas técnicas laboratoriais, astrofísicas e cosmológicas têm sido empregadas para estabelecer limites superiores para a massa do fóton. A seguir, apresentamos uma síntese desses métodos e estimativas, conforme Goldhaber e Martin Nieto [31], resultados anteriores a 2008.

### - Experimento Elétrico ("Cavendish")

Esse experimento laboratorial ainda é uma grande referência na literatura científica moderna, pois experimentos pequenos e locais como esse, são os mais limpos que se pode realizar. A capacidade de serem reproduzidos muitas vezes pode eliminar incertezas sistematicamente, ou seja, o tamanho do experimento limita a medição da massa de um fóton, assim como a engenhosidade dos experimentalistas. O limite estimado é

$$m_f \lesssim 10^{-14} \text{ eV} \equiv 2 \times 10^{-50} \text{ kg}. \quad (1.26)$$

Esse ainda é um experimento laboratorial insuperável, resultado do trabalho de Williams, Faller, e Hill [32].

### - Efeito de Temperatura

De Broglie investiu muito tempo tentando estimar um limite para a massa do fóton. Ele tentou usar, inicialmente, a dispersão da luz óptica das estrelas. A massa calculada, em 1940,

foi de  $m_f \lesssim 10^{-50} \text{ kg}$  [33]. Contudo, houve um erro numérico de  $10^5$  [34], que nos forneceu a correção:

$$m_f \lesssim 4 \times 10^{-7} \text{ eV} \equiv 0.8 \times 10^{-42} \text{ kg}. \quad (1.27)$$

Sobre efeitos de temperatura, o segundo ponto a ser considerado é que a atmosfera, entre duas camadas condutoras, têm uma condutividade muito menor que a do plasma interestelar. Observando um limite realmente baixo nas frequências, até 8 Hz, pode-se obter um limite onde a densidade eletrônica móvel na atmosfera é consideravelmente maior do que no plasma estelar. Contudo, a contribuição dos elétrons para a condutividade atmosférica são extinguidas pela condição elétron-átomo. Isso faz com que a contribuição dos íons, mesmo que dominante, ainda seja pequena, até mesmo para ondas cuja distância de viagem seja menor que a circunferência da Terra. Baseado nesse fenômeno, Kroll deduziu o limite

$$m_f \lesssim 3 \times 10^{-13} \text{ eV} \equiv 4 \times 10^{-49} \text{ kg}. \quad (1.28)$$

Füllekrug [35] afirmou um resultado três ordens de magnitude melhor que Kroll, adaptando seu método a novos dados e mais refinados sobre as ressonâncias de Schumann e a altura da ionosfera.

### - Campo Magnético Planetário

Schrödinger teve a ideia de medir a massa do fóton através do campo magnético da Terra [36, 37]. Isso levou ao caso inverso da situação de Cavendish, onde aparelhos grandes tem menos precisão. Isso é um paradigma do laboratório. Porém, várias melhorias foram feitas para no método de Schrödinger para a Terra [38, 39].

O melhor resultado atual veio do uso desse método para Júpiter, através do trabalho de Pioneer (uma descrição mais detalhada desse método pode ser encontrada na ref. [40]). A estimativa é

$$m_f \lesssim 4 \times 10^{-16} \text{ eV} \equiv 7 \times 10^{-52} \text{ kg}. \quad (1.29)$$

### - Vento Solar

Geometricamente, o maior campo magnético do sistema solar é aquele associado ao vento solar. Ryutov usou equações da magnetohidrodinâmica para uma massa de Proca finita e um limite superior generoso para o campo magnético do vento solar. Recentemente, ele conseguiu usar dados mais completos sobre o plasma e o campo magnético, estendendo-se até a borda do sistema solar, para uma melhoria adicional considerável [41]. A massa considerada é dada por

$$m_f \lesssim 10^{-18} \text{ eV} \equiv 2 \times 10^{-54} \text{ kg}. \quad (1.30)$$

Ryutov descobriu há algum tempo um fator um pouco melhor do que o que Júpiter deveria seguir [42].

### - Campos em Escalas Galácticas

A estimativa da massa do fóton pode ter chegado à outro nível a partir dos novos resultados de vento solar [42], ou seja, podemos ter chegado ao fim da era em que experimentos locais eram usados para estabelecer esse limite. Os novos sistemas de observações usam satélites para campos magnéticos e campos de plasma no sistema solar. Pesquisas futuras devem se basear em observações de regiões remotas, principalmente sobre campos magnéticos. Argumenta-se que se o campo magnético de Proca estiver em seu regime de "quebra de simetria de calibre", então a existência de um campo em larga escala significaria que o limite de Yamaguchi-Chibisov [43] é válido, embora a estimativa da massa seja ligeiramente menor:

$$m_f \lesssim 6 \times 10^{-27} \text{ eV} \equiv 10^{-62} \text{ kg}. \quad (1.31)$$

Esse estimativa tem uma certa limitação. Campos magnéticos galácticos não possuem afirmações precisas ainda, mas podem ter no futuro. Se fosse possível confirmações detalhadas sobre o plasma e o campo magnético, teríamos um resultado bem estabelecido.

### - Método de Lakes

Lakes observou o que talvez seja o método mais criativo para o cálculo da massa do fóton [44]. Se um campo magnético  $\vec{B}$  for quase uniforme sobre uma região de dimensão  $L$ , então, em um ponto aleatório típico, o potencial vetorial é da ordem de  $LB$  em magnitude. O termo  $-\mu^2 \vec{A}^2/2$  leva a uma interação de momento toroidal entre um solenóide toroidal de momento e o "campo vetorial potencial ambiente"  $\mu^2 \vec{A}_{amb}$ , análogo ao torque em um *loop* de corrente elétrica de uma campo magnético ambiente. Em outras palavras, a massa diferente de zero do fóton, torna o potencial vetorial observável.

Tem-se as estimativas [45–47]  $L \lesssim 1.5 \times 10^{22} \text{ m}$  e  $B \gtrsim 10^{-10} \text{ T}$ . A densidade de elétrons livres do plasma no espaço interestelar satisfaz  $\rho \lesssim 10^4/m^3$  e a temperatura do plasma  $T \lesssim 10 \text{ KeV}$ . É necessário assumir que a velocidade do elétron em uma corrente coerente poderia ser tão grande quanto a velocidade térmica eficaz. Dessa forma, obtém-se o limite  $\mu^2 \langle A \rangle \lesssim 10^{-13} \text{ T/m}$ , duas ordens de magnitude menor que o resultado experimental de laboratório. Assim, a estimativa de Lakes é dada por

$$m_f \lesssim 7 \times 10^{-20} \text{ eV} \equiv 10^{-55} \text{ kg}. \quad (1.32)$$

Um tratamento mais complexo dos métodos usados para as estimativas superiores da massa do fóton (anteriores à 2005) são apresentados por Tu, Luo e Gillies na ref. [27]. Uma compilação dessas estimativas, que sempre pode ser atualizada, é dada na referência [48].

## 1.3 Eletrodinâmica Corrigida pela Gravidade Quântica em Laços

Em tempos recentes, uma das teorias mais discutidas e estudadas nas diversas abordagens da gravidade quântica é a gravidade quântica em laços. Trata-se de uma tentativa de formular

uma teoria quântica da gravidade atuando diretamente sobre a geometria do espaço-tempo da relatividade geral de Albert Einstein, em vez de tratar a gravidade como uma força. Assim, a LQG incorpora a matéria do Modelo Padrão na estrutura de uma gravidade quântica intrínseca.

Como teoria, a gravidade quântica em laços propõe o conceito de rede de spin, ou seja, uma estrutura do espaço-tempo composta por laços finitos entrelaçados, conhecidos como *spin foams*. A evolução dessa rede ocorre em escalas da ordem do comprimento de Planck,  $\ell_p \sim 10^{-35}$  m, não descrevendo fenômenos em escalas menores. Dessa forma, tanto a matéria quanto o próprio espaço-tempo são quantizados, justificando o termo “granularidade do espaço-tempo”. Diferentemente de teorias como a das cordas ou D-branes, a LQG não busca a unificação das interações fundamentais, mas sim a quantização da gravidade.

A LQG é formalmente independente de plano de fundo, isto é, suas equações não dependem de um espaço-tempo pré-existente, exceto por sua topologia invariante. Espera-se que, a partir dessa formulação, surjam conceitos de espaço e tempo em escalas aproximadamente dez vezes o comprimento de Planck. Nessa abordagem, o espaço-tempo deixa de ser interpretado como um “recipiente” para a física; em vez disso, a interação gravitacional é apenas um dos campos que constituem o mundo físico. Essa visão é conhecida como *interpretação relacional do espaço-tempo*.

Devido às limitações energéticas dos aceleradores terrestres, os efeitos da gravidade quântica só podem ser observados em fenômenos astrofísicos extremamente energéticos. Nessa escala, a invariância de Lorentz, um dos pilares da física moderna, pode ser violada. Explosões de raios-gama (GRBs, em inglês) e núcleos galácticos ativos (AGNs, em inglês) fornecem partículas ultra-energéticas, como fótons e neutrinos cósmicos, que podem apresentar efeitos observáveis associados à granularidade do espaço-tempo, conhecidos como violação da invariância de Lorentz (LIV, em inglês). Ver sobre os fundamentos da LQG em [49–51].

Neste trabalho, nosso foco são os fótons cósmicos. Para isso, é necessário desenvolver uma eletrodinâmica incorporando correções da LQG e calcular as equações que descrevem os fótons na escala de Planck. O caminho para obter a hamiltoniana do setor eletromagnético envolve o cálculo do valor esperado do operador  $U(1)$  da hamiltoniana quântica restrita em relação ao estado  $|W, \vec{E}, \vec{B}\rangle$ . A expansão é feita em torno dos vértices relevantes da triangulação dos segmentos  $s_L^a(\Delta)$ , cujos tamanhos são da ordem de  $\ell_p \approx 1,6 \times 10^{-35}$  m. Adota-se a aproximação  $\ell_p \ll \mathcal{L} < \lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda de De Broglie do fóton.

O estado  $|W\rangle$ , denominado estado de entrelaçamento plano, possui comprimento característico  $\mathcal{L}^\dagger$ . Ele é construído a partir de uma coleção de círculos orientados aleatoriamente na escala de Planck. Para círculos separados por  $d \gg \mathcal{L}$ , recupera-se um espaço contínuo plano; para  $d \ll \mathcal{L}$ , o espaço apresenta estrutura discreta de laços quânticos [52].

---

<sup>†</sup>Para um momento  $\vec{k}$ , pode-se associar  $\mathcal{L} \approx 1/|\vec{k}|$  como valor máximo.

A hamiltoniana do setor eletromagnético é então expressa como:

$$\begin{aligned}
 H_{EM} = \frac{1}{Q^2} \int d^3\vec{x} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} \right] \frac{1}{2} (\underline{\vec{B}}^2 + \underline{\vec{E}}^2) + \theta_3 \ell_p^2 (B^a \nabla^2 B_a + E^a \nabla^2 E_a) \right. \\
 \left. + \theta_2 \ell_p^2 \underline{E}^a \partial_a \partial_b \underline{E}^b + \theta_8 \ell_p [\underline{\vec{B}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{B}}) + \underline{\vec{E}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{E}})] \right. \\
 \left. + \theta_4 \mathcal{L}^2 \ell_p^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2\Upsilon} (\underline{\vec{B}}^2)^2 + \dots \right\}. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

A hamiltoniana de Thiemann, que fornece a dinâmica da gravidade na LQG, envolve a incorporação do operador volume, cuja ação sobre os estados de rede de spin é bem definida e finita. Essas redes de spin constituem uma base ortonormal do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  [53–55]. Nessa hamiltoniana de Alfaro et al. [52] estendida para o regime semiclássico da gravidade, a medida  $\mu_0$  é inteiramente caracterizada por suas projeções cilíndricas. Os parâmetros  $\theta_i$  são ângulos de rotação e possuem valores da ordem de grandeza de 1 ou são extremamente próximos de zero. O termo  $\Upsilon$  está relacionado à contribuição de ordem da conexão gravitacional para o valor esperado, podendo também ser determinado por análise fenomenológica, ou seja, pode depender da helicidade da partícula considerada.

Para deduzirmos as equações de Maxwell corrigidas pela gravidade quântica em laços através da hamiltoniana efetiva  $H_{EM}$ , devemos considerar as equações de evolução de Hamilton, dadas por

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{B}}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{E}}, \quad (1.35)$$

que são análogas às equações de Ampere-Maxwell e Faraday-Lenz, respectivamente. Vamos considerar que

$$A_\gamma = 1 + \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon}. \quad (1.36)$$

Assim, iniciaremos com a variação funcional da hamiltoniana em relação ao campo  $\vec{B}$ . Considere o seguinte termo:

$$H_1 = \int d^3x B^a \nabla^2 B_a. \quad (1.37)$$

Com a variação do funcional, temos

$$\delta H_1 = \int d^3x [(\delta B^a) \nabla^2 B_a + B^a \nabla^2 (\delta B_a)]. \quad (1.38)$$

Integrando o segundo termo por partes duas vezes e desprezando os termos de superfície,<sup>‡</sup>

$$\int d^3x (\nabla^2 B^a) \delta B_a. \quad (1.39)$$

<sup>‡</sup>Os dois termos de superfície que surgem como resultado das duas integrações por partes são dados por  $\oint_{\partial V} [B^a \partial_i (\delta B_a) - (\partial_i B^a) \delta B_a] n_i dS$ . Esses termos são zerados porque  $B \rightarrow 0$  no infinito e  $\delta B = 0$ .

Assim, a variação torna-se

$$\delta H_1 = \int d^3x [(\delta B^a)\nabla^2 B_a + (\nabla^2 B^a)\delta B_a]. \quad (1.40)$$

Como o operador  $\nabla^2$  é auto-adjunto, ou seja,

$$\int f\nabla^2 g = \int g\nabla^2 f, \quad (1.41)$$

podemos escrever

$$\delta H_1 = \int d^3x 2(\nabla^2 B^a)\delta B_a. \quad (1.42)$$

Isso é possível porque o espaço é euclidiano e os índices “a” sobem e descem trivialmente, sem afetar a física do problema. Dessa forma, vamos aplicar a variação do funcional em relação ao campo magnético.

$$\delta H_1 = \int d^3x \frac{\delta H_1}{\delta B_a} \delta B_a. \quad (1.43)$$

Isso implica que

$$\frac{\delta H_1}{\delta B_a} = 2\nabla^2 B^a. \quad (1.44)$$

Agora, com os coeficientes, temos

$$\nabla \times \frac{\delta H_1}{\delta \vec{B}} = 2\theta_3 \ell_p^2 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}). \quad (1.45)$$

Nosso próximo passo é calcular o termo quiral, dado por

$$H_2 = \int d^3x \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \quad (1.46)$$

Escrevendo em termos de componentes,

$$H_2 = \int d^3x B_i \epsilon_{ijk} \partial_j B_k. \quad (1.47)$$

Fazendo a variação funcional, segue que

$$H_2 = \int d^3x [(\delta B_i)\epsilon_{ijk}\partial_j B_k + B_i\epsilon_{ijk}\partial_j(\delta B_k)]. \quad (1.48)$$

Integrado o segundo termo por partes e desprezando os termos de superfície, encontramos

$$- \int d^3x (\partial_j B_i)\epsilon_{ijk}\delta B_k = - \int d^3x (\nabla \times B)_k \delta B_k. \quad (1.49)$$

Agora, a integral  $H_2$  torna-se

$$\delta H_2 = \int d^3x (\delta B_i)(\nabla \times B)_i - \int d^3x (\nabla \times B)_k \delta B_k. \quad (1.50)$$

Como os índices são mudos, podemos renomeá-los:

$$(\delta B_i)(\nabla \times B)_i = (\nabla \times B)_i \delta B_i, \quad (1.51)$$

de maneira que

$$\delta H_2 = 2 \int d^3x (\nabla \times \vec{B}) \cdot \delta \vec{B}. \quad (1.52)$$

Com a variação funcional da hamiltoniana em relação ao campo magnético,

$$\frac{\delta H_2}{\delta \vec{B}} = \int d^3x \frac{\delta H_2}{\delta \vec{B}} \delta \vec{B}, \quad (1.53)$$

encontramos

$$\frac{\delta H_2}{\delta \vec{B}} = 2(\nabla \times \vec{B}). \quad (1.54)$$

Dessa forma,

$$\nabla \times \frac{\delta H_2}{\delta \vec{B}} = \nabla \times [2(\nabla \times \vec{B})]. \quad (1.55)$$

Usaremos a identidade vetorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ . Como  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , temos que  $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B}$ . Dado isso, com os coeficientes:

$$\nabla \times \frac{\delta H_2}{\delta \vec{B}} = -2\theta_8 \ell_p \nabla^2 \vec{B}. \quad (1.56)$$

A seguir, resolveremos o termo não-linear, dado por

$$H_3 = \int d^3x (\vec{B}^2)^2 = \int d^3x (B_a B_a)^2. \quad (1.57)$$

Aplicando a variação funcional:

$$\delta H_3 = \int d^3x 4B^2 B_a \delta B_a. \quad (1.58)$$

Variando o funcional em relação ao campo magnético:

$$\frac{\delta H_3}{\delta B} = \int d^3x \frac{\delta H_3}{\delta B_a} \delta B_a, \quad (1.59)$$

isso implica que

$$\frac{\delta H_3}{\delta B} = 4B^2 B_a. \quad (1.60)$$

Considerando o rotacional e os coeficientes, temos

$$\nabla \times \frac{\delta H_3}{\delta \vec{B}} = 4\theta_4 \mathcal{L}^2 \ell_p^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2\gamma} \nabla \times (\vec{B}^2 \vec{B}). \quad (1.61)$$

Agora, para  $H_4$ :

$$H_4 = \int d^3x \frac{1}{2} A_\gamma \vec{B}^2 = \int d^3x \frac{1}{2} A_\gamma B_a B_a. \quad (1.62)$$

Fazendo a variação funcional:

$$\delta H_4 = \int d^3x \frac{1}{2} A_\gamma \delta(B_a B_a) = \int d^3x \frac{1}{2} A_\gamma \cdot 2B_a \delta B_a. \quad (1.63)$$

Segue que

$$\delta H_4 = \int d^3x A_\gamma B_a \delta B_a. \quad (1.64)$$

Considerando a variação do funcional em relação ao campo,

$$\frac{\delta H_4}{\delta B} = \int d^3x \frac{\delta H_4}{\delta B_a} \delta B_a. \quad (1.65)$$

Assim,

$$\frac{\delta H_4}{\delta \vec{B}_a} = A_\gamma B_a. \quad (1.66)$$

Aplicando o rotacional,

$$\nabla \times \frac{\delta H_4}{\delta \vec{B}} = A_\gamma (\nabla \times B). \quad (1.67)$$

Substituindo todos esses termos na relação (1.34), finalmente encontramos

$$A_\gamma (\nabla \times \vec{B}) - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2\theta_3 \ell_p^2 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}) - 2\theta_8 \ell_p \nabla^2 \vec{B} + 4\theta_4 \ell_p^2 \mathcal{L}^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2\Upsilon} \nabla \times (\vec{B}^2 \vec{B}) = 0, \quad (1.68)$$

que é a equação de Àmpere-Maxwell corrigida pela LQG.

Fazendo o mesmo procedimeto para a evolução temporal da hamiltoniana em relação ao campo  $\vec{E}$ , encontraremos a equação de Faradey-Lenz, mas primeiro precisamos tratar do termo longitudinal:

$$H_5 = \int d^3x E^a \partial_a \partial_b E^b. \quad (1.69)$$

Fazendo a variação,

$$\delta H_5 = \int d^3x [(\delta E^a) \partial_a \partial_b E^b + E^a \partial_a \partial_b (\delta E^b)]. \quad (1.70)$$

Integrando o segundo termo por parte duas vezes e desprezando os termos de superfície,

$$\delta H_5 = \int d^3x \partial_b (\partial_a E^a) \delta E^b. \quad (1.71)$$

A integral inicial torna-se

$$\delta H_5 = \int d^3x [(\delta E^a) \partial_a \partial_b E^b + \partial_b (\partial_a E^a) \delta E^b]. \quad (1.72)$$

Renomeando os índices e colocando os termos na mesma forma,

$$(\delta E^a) \partial_a \partial_b E^b = (\delta E^b) \partial_b \partial_a E^a. \quad (1.73)$$

Dessa maneira,

$$\delta H_5 = \int d^3x 2\partial_b (\partial_a E^a) \delta E^b. \quad (1.74)$$

Fazendo a variação da hamiltoniana em relação ao campo magnético,

$$\frac{\delta H_5}{\delta B} = \int d^3x \frac{\delta H_5}{\delta B_a} \delta B_a. \quad (1.75)$$

Temos que

$$\frac{\delta H_5}{\delta B} = 2\partial_b (\partial_a E^a). \quad (1.76)$$

Aplicando o rotacional:

$$\nabla \times \frac{\delta H_5}{\delta \vec{B}} = -2\nabla \times \nabla (\nabla \cdot \vec{E}). \quad (1.77)$$

Dada a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla = 0, \quad (1.78)$$

e a condição física

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.79)$$

concluimos que o termo longitudinal é igual a zero. Como todos os outros fatores são deduzidos de forma semelhante a equação de Ampere-Maxwell, a equação de Faraday-Lenz corrigida pela LQG é dada por

$$A_\gamma (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + 2\theta_3 \ell_p^2 \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}) - 2\theta_8 \ell_p \nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (1.80)$$

As equações (1.68) e (1.80) são suplementadas pela condição livre de fontes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.81)$$

Os parâmetros  $\theta_i$  ( $i = 3, 4, 7, 8$ ) e  $\Upsilon$  serão determinados posteriormente.

Importa ressaltar que as equações de Ampere-Maxwell (1.68) e de Faraday-Lenz (1.80), corrigidas no contexto da LQG, reduzem-se às equações da eletrodinâmica de Gambini-Pullin no regime caracterizado pela escala de Planck,  $\ell_p$  [56, 57].

## 1.4 Estrutura e Contextualização da Tese de Doutorado

Percebemos que a estrutura e a contextualização de uma tese, ao final da introdução, possuem uma relação muito íntima, que pode ser explorada pelo autor não apenas para informar o que será desenvolvido ao longo do trabalho, mas também para conectar o desenvolvimento da presente tese de doutorado aos principais trabalhos acadêmicos correlatos ou profundamente relacionados aos temas investigados. Por esse motivo, discutimos a seguir a estrutura e a contextualização desta tese acadêmica.

### – Capítulo 1: Introdução e Contextualização

A introdução deste trabalho foi apresentada no Capítulo 1, culminando neste tópico de estruturação e contextualização da tese, deixando claro, de início, que se trata de uma tese sobre eletrodinâmica além do Modelo Padrão. Nesta introdução, foram apresentados as bases teóricas fundamentais para a resolução dos problemas nos cinco capítulos que se seguem. Como são cinco problemas correlatos, mas diferentes, apresentamos uma introdução específica para cada capítulo, terminando com as considerações parciais. Isso confere certo grau de independência teórica à cada capítulo, cuja discussão dos resultados será corroborada nas Considerações Finais, apresentada no último capítulo desta tese. Este trabalho é desenvolvido, estruturado e contextualizado como segue abaixo.

## – Capítulo 2: Correções da Gravidade Quântica em Laços na Cinemática do Efeito Compton

Dada a importância do efeito Compton para a teoria quântica, e considerando que ele descreve a física do fóton, no Capítulo 2 deste trabalho realizaremos a análise das correções provenientes da gravidade quântica em laços na equação de Compton. Investigaremos como os parâmetros da LQG podem interferir no  $\Delta\lambda$ , o Compton *shift* bem como se eles afetam o ângulo de espalhamento do fóton.

Essa análise será conduzida seguindo o mesmo procedimento de dedução teórica originalmente realizado por Compton em 1923, conforme detalhado na Ref. [58], no qual são utilizadas as leis de conservação da energia e do momento (para uma demonstração em um livro moderno, ver Ref. [59]). Contudo, em vez de utilizarmos a relação de energia usual para o fóton, aplicaremos uma relação de dispersão modificada pela gravidade quântica em laços, deduzida por Alfaro e Urrutia na Ref. [52] e empregada recentemente por Li e Ma em [60] para estimar variações na velocidade de fótons e neutrinos cósmicos.

Posteriormente, utilizaremos os mesmos dados teóricos apresentados por Compton em [58] e os aplicaremos ao efeito Compton modificado pela LQG, com o objetivo de compará-lo ao experimento de Compton realizado em 1923. Em seguida, avaliaremos como o Compton *shift* usual e a correção proveniente da LQG competem entre si, considerando comprimentos de onda nas regiões de raios X e raios gama. Nosso trabalho sobre esse tema pode ser encontrado na Ref. [61].

## – Capítulo 3: Relações de Dispersão Modificadas com Campo Magnético de Fundo

Com as equações modificadas (1.68) e (1.80), no Capítulo 3 calcularemos grandezas como relações de dispersão, índices de refração e relações energia–momento das excitações propagadoras, comparando nossos resultados com pesquisas que empregaram métodos semelhantes para a estimativa dessas quantidades físicas, como em [62]. De posse desses resultados, investigaremos o vácuo sob a influência dos efeitos da gravidade quântica em laços, incluindo a não linearidade da (1.68) e a presença de um campo magnético de fundo atuando sobre o fóton.

Dessa forma, poderemos verificar se o vácuo se comporta como um meio material ou metamaterial, analisando a presença ou ausência de fenômenos como dicroísmo e birrefringência (discutidos em detalhes na Ref. [63]) e suas implicações para o vácuo quântico. Tais fenômenos podem ser investigados experimentalmente em experimentos com lasers de altíssima potência, como os descritos nas Refs. [64, 65]. Esse trabalho também está desenvolvido na Ref. [61].

## – Capítulo 4: Anomalias de Limiar Induzidas por Violação da Invariância de Lorentz e a Gravidade Quântica em Laços

No Capítulo 4, obteremos uma relação *on-shell* para o elétron a partir do efeito Breit–

Wheeler, considerando a relação de dispersão modificada pela gravidade quântica em laços, utilizada no capítulo anterior e apresentada em [52,60]. Compararemos essa relação de dispersão com outra, modificada por um termo genérico  $\xi$ , que viola a invariância de Lorentz. Essa equação é desenvolvida em detalhes no trabalho de Li e Ma, Ref. [66], utilizando também a cinemática do efeito Breit–Wheeler; mais detalhes conceituais podem ser encontrados em [67].

Além disso, ambos os trabalhos discutem estratégias observacionais para a atenuação de fótons cósmicos devido à LIV, por meio do detector LHAASO [68]. Ao comparar as duas relações de dispersão, encontraremos um fator de violação da invariância de Lorentz,  $\xi^{LQG}$ , que é intrínseco à gravidade quântica em laços.

A equação obtida com um fator LIV genérico apresenta um valor máximo  $\xi_c$ , que permite analisar os efeitos de LIV associados à luz de fundo extragaláctica (EBL, em inglês) e à radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB, em inglês), por meio de suas energias características. Ao comparar os fatores  $\xi^{LQG}$  e  $\xi_c$  associados à EBL e à CMB, será possível determinar se os fótons gama se encontram em um regime de transparência óptica ( $\xi^{LQG} > \xi_c$ ), no qual se propagam sem interagir com as luzes de fundo; em um regime de reparação de fótons de ultra-alta energia (UHE, em inglês), ( $0 < \xi^{LQG} < \xi_c$ ), no qual os fótons gama interagem com os fótons do fundo, havendo limites superior e inferior para o processo; ou no caso de redução do limiar ( $\xi_c < 0$ ), em que existe apenas um limite inferior e o processo ocorre conforme a cinemática relativística padrão.

As implicações físicas de cada um desses cenários serão discutidas nas considerações parciais. Nosso trabalho sobre esse tema foi desenvolvido em [69].

## – Capítulo 5: Eletrodinâmica Massiva de De Broglie–Proca e LQG: Vínculo de Consistência e Hierarquia de Escalas

A estimativa da massa do fóton pode impor limites superiores extremamente restritivos, como os discutidos na Seção 1.2. O objetivo do Capítulo 5 não é competir com as melhores estimativas disponíveis na literatura [27,31,48], mas estabelecer um vínculo de consistência fenomenológica por meio da relação de dispersão de De Broglie–Proca (1.24). Para isso, consideramos uma massa de repouso associada a ambos os fótons — tanto o fóton gama, de alta energia, quanto o fóton da radiação de fundo — assegurando um tratamento consistente em que todos os fótons são descritos como bósons vetoriais idênticos [21–23].

O método empregado baseia-se na cinemática do efeito Breit–Wheeler, conforme utilizado no capítulo anterior e em [66,67], sendo aqui formulado em termos do invariante de Mandelstam [70].

A escolha dessa abordagem se justifica pelo fato de não termos identificado, até o momento, esse tratamento específico na literatura científica. Enquanto os métodos mais restritivos usualmente se baseiam em campos estáticos e macroscópicos, exploramos aqui a

dinâmica do efeito Breit–Wheeler no vácuo quântico. Para isso, utilizamos o fóton de 1,42 PeV, detectado pelo observatório LHAASO, atualmente o fóton de maior energia já registrado [71]. Esse cenário permite estabelecer um “teto cinemático” que impõe um limite superior para a opacidade do universo, acima do qual o processo de produção de pares elétron–pósitron torna-se cinematicamente proibido.

Além disso, introduzimos na relação de dispersão de De Broglie–Proca uma correção proveniente da gravidade quântica em laços, conforme discutido no Capítulo 4. Isso nos permite investigar a existência de uma hierarquia de escalas e identificar qual contribuição é dominante: aquela associada à massa do fóton ou a oriunda da LQG.

Por fim, este capítulo tem como objetivo principal analisar o papel da eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca na transparência do Universo a fótons de ultra-alta energia, estabelecendo vínculos de consistência fenomenológica relacionados a fenômenos na escala de PeV.

## – Capítulo 6: Termos de Colisão: Efeito Compton para Fótons Cósmicos Massivos

No Capítulo 6 desenvolvemos uma solução para o último problema abordado nesta tese, o qual se situa na interseção entre a física de partículas e a cosmologia. Trata-se de determinar uma expressão para o efeito Compton, no contexto da teoria quântica de campos (QFT, em inglês), por meio da função de distribuição de Bose–Einstein, considerando um fóton massivo. Esse efeito Compton atua como termo-fonte na equação de Boltzmann para a distribuição de fótons, uma vez que interações partícula–partícula não podem ser negligenciadas. Contudo, o efeito Compton, por si só, já permite uma análise aprofundada da distribuição de fótons no Universo, mesmo sem estar explicitamente acoplado à equação de Boltzmann.

Inicialmente, realizaremos uma análise genérica das interações, que podem corresponder à criação e aniquilação de pares ou ao decaimento de partículas. Essas interações genéricas são apresentadas em [72]. Em seguida, aplicaremos esse formalismo ao efeito Compton; entretanto, para a energia dos fótons, utilizaremos a relação de dispersão do tipo De Broglie–Proca [20, 26]. Por fim, obteremos uma expressão analítica e, a partir dela, investigaremos a influência da distribuição de fótons massivos no Universo, bem como seu comportamento nos regimes acoplado e desacoplado ao fluxo de elétrons.

## – Capítulo 7: Considerações Finais

Finalmente, nas Considerações Finais, apresentaremos as impressões e perspectivas do autor, bem como uma autocrítica acerca do desenvolvimento do trabalho.

---

## Capítulo 2

---

# Correções da Gravidade Quântica em Laços na Cinemática do Efeito Compton

---

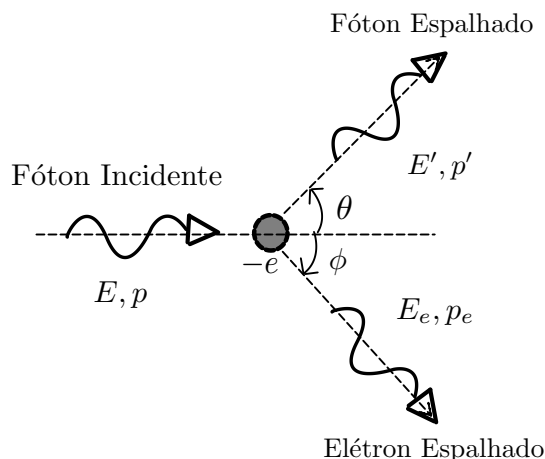
O efeito Compton é resultado de um longo processo de investigação do espalhamento dos raios X pela matéria, que culminou, em 1927, com a concessão do Prêmio Nobel de física ao físico norte-americano Arthur Holly Compton. Nas últimas décadas, o efeito Compton tem encontrado aplicações importantes na radiologia médica, em detectores de partículas e em diversas outras áreas da tecnologia contemporânea.

Embora a imagem de Compton esteja fortemente associada à mecânica quântica — uma vez que a descoberta desse efeito trouxe contribuições decisivas para a consolidação dessa teoria —, seu programa de pesquisa passou por diferentes fases e conjecturas até alcançar a formulação quântica do fenômeno. É fundamental considerar o contexto científico no qual Arthur Compton estava inserido, a fim de evitar interpretações anacrônicas. Não é surpreendente, portanto, a hesitação inicial de Compton, dado que ele e seus colaboradores ainda vivenciavam os primórdios da teoria quântica.

Em 1918, Compton propôs uma explicação clássica para o fenômeno, baseada no chamado modelo do grande elétron, confiando que a teoria clássica seria capaz de esclarecer as questões relativas à interação entre radiação e matéria. Antes de chegar à formulação do que hoje se conhece como efeito Compton, ele também desenvolveu uma abordagem semiclássica para explicar o fenômeno. Contudo, diante das limitações dessas tentativas, Compton reformulou seu programa de pesquisa, abandonando progressivamente as explicações clássicas e semiclássicas e adotando uma abordagem quântica.

Para uma análise detalhada do desenvolvimento histórico do efeito Compton, pode-se consultar a referência apresentada em [73]. Além disso, a própria evolução intelectual de Compton pode ser acompanhada diretamente em seus trabalhos originais, disponíveis em [58, 74–76].

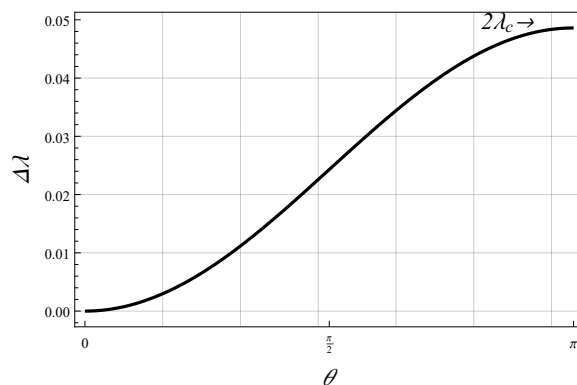
Fonte: Autor (2025)



**Figura 1** – Interpretação de Compton. Um fóton de comprimento de onda  $\lambda$  incide sobre um elétron livre em repouso. Na colisão, o fóton é espalhado com um ângulo  $\theta$ , aumentando o seu comprimento de onda  $\lambda'$ , enquanto o elétron move-se em um ângulo  $\phi$ .

Hoje, a partir da abordagem quântica proposta por Compton [58], considera-se a colisão entre um fóton e um elétron livre inicialmente em repouso, conforme ilustrado na Fig. 1. No diagrama, à esquerda, tem-se um fóton com energia relativística total  $E$  e momento  $p$ , incidindo sobre um elétron estacionário, cuja energia corresponde à sua energia de repouso  $m_e c^2$ . À direita do diagrama, o fóton é espalhado com energia relativística total  $E'$  e momento  $p'$ , enquanto o elétron recua com energia cinética  $E_e$  e momento  $p_e$ . Compton aplicou as leis de conservação da

Fonte: Autor (2025)



**Figura 2** – Resultado de Compton:  $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta)$ .

energia relativística total e do momento linear para resolver esse problema. Relações relativísticas foram empregadas, uma vez que o fóton se desloca sempre a velocidades relativísticas e, em muitas situações, o elétron recuante também adquire velocidades relativísticas. Seguindo esse procedimento de dedução — cuja derivação detalhada pode ser encontrada em [59] — obtém-se

a seguinte relação:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (2.1)$$

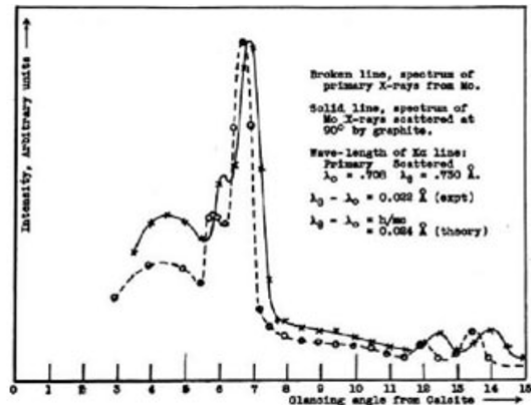
onde  $h$  é a constante de Planck,  $m_e$  é a massa de repouso do elétron e  $c$  é a velocidade da luz. Essa diferença define o deslocamento Compton, cujo comprimento de onda característico é dado por

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,42 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0242 \text{ \AA}. \quad (2.2)$$

O comprimento de onda  $\lambda$  é dado em angstroms. É importante notar na Fig. 2 que  $\Delta\lambda$ , o Compton *shift*, depende apenas do ângulo  $\theta$  e não do comprimento de onda inicial do fóton  $\lambda$ .

Compton decidiu testar qualitativamente seus estudos usando raios X emitidos por molibdênio espalhados em ângulo reto. Ele esboçou a radiação espalhada em comparação com a radiação primária no gráfico da Fig. 3, onde a linha sólida refere-se ao espectro de raios X espalhados e as linhas pontilhadas à radiação primária incidida sobre o grafite, conforme descrito em [58]. Para Compton, era evidente que o comprimento de onda dos raios X espalhados

**Fonte:** Compton (1923)



**Figura 3** – Experimento de Compton (1923): comprimento de onda de raios X espalhados por grafite em ângulo reto em comparação com os raios X primários.

era maior que o dos raios X primários. A linha  $K_\alpha$  de molibdênio, que excitava os elétrons, possuía comprimento de onda  $\lambda_0 = 0,708 \text{ \AA}$ , enquanto os raios X espalhados apresentavam  $\lambda_\theta = 0,730 \text{ \AA}$ . Assim, o deslocamento observado foi

$$\Delta\lambda = \lambda_\theta - \lambda_0 = 0,730 - 0,708 = 0,022 \text{ \AA}. \quad (2.3)$$

Usando a equação (2.1) e substituindo as constantes  $h$ ,  $m_e$  e  $c$ , realizando algumas transformações trigonométricas, obtém-se a forma da equação utilizada por Compton neste caso:

$$\lambda_\theta = \lambda_0 + 0,0484 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.4)$$

Realizando o experimento para  $\theta = 90^\circ$ , obteve-se concordância teórica:

$$\lambda_\theta - \lambda_0 = 0,0484 \sin^2 45^\circ = 0,024 \text{ \AA}. \quad (2.5)$$

## 2.1 Correções do Efeito Compton pela Gravidade Quântica em Laços

Neste capítulo, trataremos das correções do efeito Compton devido à gravidade quântica em laços. Por meio das equações estendidas (1.68) e (1.80), com o auxílio da condição livre de fontes (1.81), deduziremos uma relação de dispersão para o fóton incluindo os efeitos da LQG. Neste caso, desconsideraremos a parte não linear em (1.68) e assumiremos que as soluções podem ser consideradas como superposições de ondas planas. Assim, substituindo

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad k := |\vec{k}|, \quad (2.6)$$

nas relações (1.68) e (1.80), obtemos

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) [A_\gamma - 2\theta_3(\ell_p k)^2] - 2i\theta_8 \ell_p k^2 \vec{E}_0 - \omega \vec{B}_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$(\vec{k} \times \vec{B}_0) [A_\gamma - 2\theta_3(\ell_p k)^2] - 2i\theta_8 \ell_p k^2 \vec{B}_0 + \omega \vec{E}_0 = 0, \quad (2.8)$$

o que implica a seguinte relação de dispersão:

$$\omega = ck [A_\gamma - 2\theta_3(k\ell_p)^2 \pm 2\theta_8(k\ell_p)]. \quad (2.9)$$

Usando (2.9) na dedução do efeito Compton [59, 73], através da conservação da energia e do momento, a diferença de comprimento de onda entre o fóton espalhado e o incidente, considerando os efeitos da LQG, é

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \lambda_c (1 - \cos \theta) \\ &- \theta_7 \ell_p^{2+2\Upsilon} \lambda_c \left\{ \left[ \frac{\lambda'}{\lambda} \left( \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} + \frac{\lambda}{\lambda'} \left( \frac{1}{\mathcal{L}'} \right)^{2+2\Upsilon} \right] \right. \\ &- \left[ \left( \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} + \left( \frac{1}{\mathcal{L}'} \right)^{2+2\Upsilon} \right] \\ &\left. + \frac{1}{\lambda_c} \left[ \lambda' \left( \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} + \lambda \left( \frac{1}{\mathcal{L}'} \right)^{2+2\Upsilon} \right] \right\} \\ &- 8\pi^2 \theta_3 \ell_p^2 \lambda_c \left[ \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} \right) - \left( \frac{\lambda'}{\lambda^3} + \frac{\lambda}{\lambda'^3} \right) - \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} - \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) \right] \\ &\pm 4\pi \theta_8 \ell_p \lambda_c \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) + \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right]. \end{aligned}$$

Se anularem-se todos os parâmetros  $\theta_i$  ( $i = 3, 7, 8$ ), o efeito Compton retorna ao seu estado original, sem influência da gravidade quântica.

Desconsiderando termos de segunda ordem em  $\ell_p$  e adotando a escala móvel  $\mathcal{L} = k^{-1}$ , a expressão simplificada do efeito Compton com correções LQG é

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \lambda_c(1 - \cos \theta) \\ &- \theta_7 \lambda_c \left\{ \frac{\lambda'}{\lambda} (\ell_p k)^{2+2\Upsilon} + \frac{\lambda}{\lambda'} (\ell_p k')^{2+2\Upsilon} - (\ell_p k)^{2+2\Upsilon} - (\ell_p k')^{2+2\Upsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_c} [\lambda' (\ell_p k)^{2+2\Upsilon} + \lambda (\ell_p k')^{2+2\Upsilon}] \right\} \\ &\pm 4\pi \theta_8 \ell_p \lambda_c \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) + \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Considerando  $\Upsilon = -1/2$  e  $k = 2\pi/\lambda$ , a equação torna-se

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \lambda_c(1 - \cos \theta) \\ &- 2\pi \theta_7 \ell_p \lambda_c \left[ \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) - \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] \\ &\pm 4\pi \theta_8 \ell_p \lambda_c \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) + \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

O termo  $\theta_8$  leva a efeitos de birrefringência, e o ângulo de rotação total entre dois fótons opostos polarizados pode ser escrito como [77–79]:

$$|\Delta\theta(E, z)| \simeq \frac{2\theta_8 \ell_p E^2}{H_0} \int_0^z \frac{(1+z') dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.12)$$

Considerando as restrições experimentais [78], temos  $\theta_8 \leq 10^{-16}$ , implicando que o termo multiplicado por  $\theta_8 \ell_p \lambda_c$  é desprezível. Consequentemente, a expressão final do efeito Compton com correções LQG é

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta) - 2\pi \theta_7 \ell_p \lambda_c \left[ \left( \frac{\lambda'}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda'^2} \right) - \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + \frac{1}{\lambda_c} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right]. \quad (2.13)$$

## 2.2 Análise Numérica do Efeito Compton sob a Gravidade Quântica em Laços

Usando o resultado obtido na Seção anterior, calcularemos o comprimento de onda espalhado  $\lambda'$ . Para fornecer um exemplo concreto, utilizaremos os dados experimentais de Compton, publicados em 1923, nos quais ele incidiu raios X primários em ângulo reto sobre grafite, comparando os resultados teóricos com os experimentais.

Adotaremos o comprimento de onda de Compton  $\lambda_c \approx 0,0242 \text{ \AA}$ , o comprimento de onda do raio X primário  $\lambda = 0,708 \text{ \AA}$  e o ângulo de espalhamento  $\theta = 90^\circ$ . Consideraremos também que  $\frac{1}{\theta_7 \ell_p} = -3,6 \times 10^{17} \text{ GeV}$  e que  $|\theta_7| = 33,9$ , um valor consistente com estimativas numéricas da ordem  $\mathcal{O}(1)$  [60].

Dessa forma, obtemos

$$\lambda' \approx 0,732 \text{ \AA}. \quad (2.14)$$

O deslocamento de Compton (Compton *shift*) é então

$$\lambda' - \lambda = 0,732 - 0,708 = 0,024 \text{ \AA}. \quad (2.15)$$

Este resultado coincide com o valor teórico encontrado por Compton em 1923. Isso demonstra que os efeitos da gravidade quântica em laços são extremamente pequenos para os parâmetros utilizados neste cálculo.

A razão para a introdução detalhada do trabalho teórico e experimental de Compton deve-se à dificuldade de encontrar, na literatura moderna, experimentos tão simples e diretos quanto este. Por isso, decidimos utilizar seus resultados como referência para comparar com o efeito Compton corrigido pela LQG. Além disso, revisitar o estudo de Compton nos permite desmistificar seu trabalho — que, embora muitas vezes considerado relativamente simples, envolveu anos de investigação e a superação de diversos paradigmas.

## 2.3 Comparação entre os Desvios do Comprimento de Onda da Radiação Espalhada

Para extrair uma estimativa da contribuição da LQG à cinemática do efeito Compton, observemos que, a partir da Eq. (2.13), o deslocamento no comprimento de onda do fóton,  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , pode ser dividido em duas partes. Denotemos por  $\Delta_c\lambda$  o deslocamento Compton usual, enquanto  $\Delta_{LQG}\lambda$  representa a contribuição da LQG, de modo que

$$\Delta\lambda = \Delta_c\lambda + \Delta_{LQG}\lambda. \quad (2.16)$$

A razão  $\Delta_{LQG}\lambda/\Delta_c\lambda$  permite avaliar a relevância relativa da correção LQG.

De acordo com a análise de Li e Ma [60], o fator  $\theta_7\ell_p$ , em unidades naturais, é negativo e estimado como

$$\theta_7\ell_p \sim -2.8 \times 10^{-18} \text{ GeV}^{-1}. \quad (2.17)$$

Em unidades de comprimento, isso corresponde a

$$\theta_7\ell_p \sim -5.49 \times 10^{-32} \text{ cm}. \quad (2.18)$$

Substituindo  $\lambda'$  por  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$  na Eq. (2.13) e considerando que  $\Delta_{LQG}\lambda \ll \lambda$  (ou seja, desconsiderando termos de ordem superior), obtemos

$$\frac{\Delta_{LQG}\lambda}{\Delta_c\lambda} \simeq -4\pi \frac{\theta_7\ell_p}{\lambda}. \quad (2.19)$$

Ressaltamos que este resultado não depende do comprimento de onda Compton da partícula que espalha a radiação. A contribuição da LQG é, portanto, mais sensível a altas frequências ou a comprimentos de onda curtos. Para radiações típicas de raios X, estima-se

$$\Delta_{LQG}\lambda\Big|_X \sim 10^{-21} \Delta_c\lambda\Big|_X, \quad (2.20)$$

enquanto para radiação gama profunda ( $\nu \sim 10^{25}$  Hz), a estimativa é

$$\Delta_{LQG}\lambda\Big|_\gamma \sim 10^{-14} \Delta_c\lambda\Big|_\gamma. \quad (2.21)$$

Outro ponto relevante é que o ângulo  $\theta$  de deflexão do fóton não sofre influência significativa dos parâmetros da LQG. O caráter anisotrópico da relação de dispersão (2.9) pode fornecer uma explicação qualitativa para este comportamento.

## 2.4 Conclusões Parciais

Uma das questões em aberto mais importantes da física contemporânea é o problema da quantização da gravidade. Diversas abordagens e teorias buscam uma formulação consistente e experimentalmente testável. Considerando a relevância desse tema, neste trabalho investigamos, por meio da incorporação de efeitos da gravidade quântica em laços no setor eletromagnético, como a radiação eletromagnética se comporta e de que maneira os efeitos decorrentes da LQG podem modificar fenômenos eletromagnéticos bem estabelecidos em comparação com a teoria maxwelliana.

Para contextualizar a análise, optamos por reavaliar a cinemática do efeito Compton, levando em conta a extensão do eletromagnetismo tradicional por meio de termos de correção provenientes da gravidade quântica em laços. Essa abordagem introduz maior complexidade, uma vez que passamos a lidar com colisões na escala de Planck, como processos de espalhamento entre fótons de alta energia e elétrons, por exemplo. O objetivo específico desta investigação é calcular o deslocamento nos comprimentos de onda dos fótons e, assim, identificar possíveis assinaturas de nova física.

Reexaminamos a cinemática do efeito Compton incluindo as correções da LQG no setor eletromagnético. Como não se tratava de um fator crítico — desde que o efeito Compton fosse adequadamente considerado — desconsideramos o termo não linear no campo magnético, o que simplificou significativamente a relação de dispersão. Essa simplificação permitiu determinar a diferença nos comprimentos de onda e, conseqüentemente, estabelecer certas condições para os parâmetros presentes na expressão. Tal abordagem é justificada pelo fato de que o trabalho teórico e experimental original sobre o efeito Compton exigia apenas precisão de três casas decimais para alcançar resultados satisfatórios — um feito realizado há cerca de cem anos.

No entanto, o principal desafio na realização de cálculos numéricos para o efeito Compton corrigido pela LQG decorre das escalas de comprimento extremamente pequenas e das escalas

de energia extremamente elevadas envolvidas em modelos de gravidade quântica. Por essa razão, nas escalas acessíveis aos cálculos numéricos realizados neste trabalho, as correções associadas à LQG mostram-se desprezíveis.

Contudo, um aspecto relevante emerge das relações (2.20) e (2.21), nas quais se observa que, na relação com espectro gama, a correção da LQG atinge uma ordem de grandeza de  $10^7$  maior que a correção dos raios X. Esse resultado é significativo e sugere que, à medida que se acessam energias cada vez mais elevadas no regime de raios gama, torna-se possível atingir um domínio no qual as correções de gravidade quântica ao efeito Compton passam a ser potencialmente relevantes.

No que diz respeito às detecções experimentais, seriam necessários detectores modernos de altíssima sensibilidade, capazes de resolver tais correções e confrontá-las com previsões teóricas. Adicionalmente, o ambiente astrofísico, por meio de observatórios e satélites dedicados à detecção de raios gama, pode fornecer condições adequadas para a obtenção de dados que permitam testar as previsões do efeito Compton corrigido pela LQG frente a medições experimentais e observações astrofísicas.

O desenvolvimento detalhado deste capítulo encontra-se apresentado na Ref. [61].

No próximo capítulo, com base no desenvolvimento realizado sobre as relações de dispersão modificadas pela LQG, investigaremos o comportamento do vácuo quântico incluindo agora os termos não lineares. Serão calculadas propriedades como índices de refração e relações energia–momento das excitações propagadoras, buscando compreender se o vácuo quântico se comporta de maneira análoga a um meio material convencional ou, alternativamente, a um metamaterial. Dessa forma, ampliaremos a compreensão sobre os efeitos do setor eletromagnético da gravidade quântica em laços e suas possíveis implicações físicas.

## Capítulo 3

# Relações de Dispersão Modificadas com Campo Magnético de Fundo

A equação de Maxwell (1.68), corrigida pela gravidade quântica em laços, apresenta um termo não linear cujas implicações devem ser exploradas. Para isso, decompondo os campos, consideramos um campo magnético do fóton  $\vec{b}$  e um campo magnético de fundo constante  $\vec{B}_0$ , enquanto mantemos apenas o campo elétrico do fóton  $\vec{e}$ . Essa escolha se justifica pelo fato de que, em ambientes astrofísicos, apenas os campos magnéticos emitidos por corpos celestes — como estrelas de nêutrons, núcleos galácticos ativos e planetas — são significativos, enquanto os campos elétricos são desprezíveis.

Além disso, essa decomposição prepara o caminho para testes experimentais com lasers de altíssima potência, como o **SULF (Shanghai Ultra-Laser Facilities)** [64] e o **SEL (Station of Extreme Light, Shanghai, 2023)** [65], nos quais campos magnéticos intensos incidem sobre o vácuo, permitindo investigar o cruzamento entre os termos não lineares e aqueles que violam a invariância de Lorentz [52]. Dessa forma, escrevemos:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad \vec{E} = \vec{e}. \quad (3.1)$$

Substituindo (3.1) nas equações de Maxwell modificadas (1.68) e (1.80), obtemos:

$$A_\gamma \left( \nabla \times \vec{b} \right) - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + 2\theta_3 \ell_p^2 \nabla^2 \left( \nabla \times \vec{b} \right) - 2\theta_8 \ell_p \nabla^2 \vec{b} + 4\theta_4 \ell_p^2 \mathcal{L}^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2\Upsilon} \nabla \times \left( \vec{B}^2 \vec{B} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Linearizando o termo não linear em relação ao campo magnético do fóton, temos:

$$\vec{B}^2 \vec{B} \simeq \vec{B}_0^2 \vec{b} + 2 \left( \vec{B}_0 \cdot \vec{b} \right) \vec{B}_0. \quad (3.3)$$

Substituindo (4.7) em (3.2), obtemos a equação modificada para o campo magnético do fóton. De forma análoga, a equação para o campo elétrico do fóton é:

$$A_\gamma \left( \nabla \times \vec{e} \right) + \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + 2\theta_3 \ell_p^2 \nabla^2 \left( \nabla \times \vec{e} \right) - 2\theta_8 \ell_p \nabla^2 \vec{e} = 0. \quad (3.4)$$

Essas equações são suplementadas pela condição de vácuo livre de fontes:

$$\nabla \cdot \vec{e} = \nabla \cdot \vec{b} = 0. \quad (3.5)$$

Os parâmetros  $\theta_i$  ( $i = 3, 4, 7, 8$ ) e  $\Upsilon$  serão determinados posteriormente.

### 3.1 Método do Determinante da Matriz $M_{ij}$

Neste capítulo, exploramos algumas implicações do termo não linear na equação de Maxwell (1.68), induzido pelas correções da gravidade quântica em laços. Além disso, como discutido na introdução, nas relações de Maxwell decompondo o campo magnético em um campo magnético do fóton  $\vec{b}$  e um campo magnético de fundo constante  $\vec{B}_0$ , consideraremos apenas o campo elétrico do fóton  $\vec{e}$ . Assumindo novamente soluções na forma de ondas planas, temos:

$$\vec{e} = \vec{e}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{b} = \vec{b}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad k := |\vec{k}|. \quad (3.6)$$

Substituindo estas expressões nas equações (3.2) e (3.4), obtemos:

$$(\vec{k} \times \vec{e}_0) [A_\gamma - 2\theta_3(\ell_p k)^2] - 2i\theta_8 \ell_p k^2 \vec{e}_0 - \omega \vec{b}_0 = 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (\vec{k} \times \vec{b}_0) [A_\gamma - 2\theta_3(\ell_p k)^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 \vec{B}_0^2] - 2i\theta_8 \ell_p k^2 \vec{b}_0 \\ + 8\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (\vec{k} \times \vec{B}_0) (\vec{B}_0 \cdot \vec{b}_0) + \omega \vec{e}_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\bar{\theta}_4 = \theta_4 \mathcal{L}^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2\Upsilon}$ . A relação acima leva à seguinte relação de dispersão:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2) \vec{e}_0 - 2\theta_7 k^2 \left( \frac{\mathcal{L}}{\ell_p} \right)^{2+2\Upsilon} \vec{e}_0 + 4\theta_3 k^4 \ell_p^2 \vec{e}_0 - 4i\theta_8 k^2 \ell_p (\vec{k} \times \vec{e}_0) \\ - 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 [k^2 \vec{B}_0^2 \vec{e}_0 + 2(\vec{k} \times \vec{B}_0) ((\vec{k} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{e}_0)] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considerando soluções de ondas planas, a relação entre a frequência  $\omega$  e o vetor de onda  $\vec{k}$  pode ser escrita na forma matricial [62]:

$$M_{ij} e_{0j} = 0, \quad (3.10)$$

onde  $e_{0j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) são os componentes da amplitude do campo elétrico  $\vec{e}_0$ . Os elementos da matriz  $M_{ij}$  podem ser expressos como:

$$M_{ij} = a\delta_{ij} + bu_i u_j + c\epsilon_{ijk} v_k. \quad (3.11)$$

O determinante associado é:

$$\det M_{ij} = \det (a\delta_{ij} + bu_i u_j + c\epsilon_{ijk} v_k) = 0, \quad (3.12)$$

levando a:

$$a^3 + a^2b(\vec{u} \cdot \vec{u}) + ac^2(\vec{v} \cdot \vec{v}) + bc^2(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 0. \quad (3.13)$$

Rearranjando a relação de dispersão (3.9) na forma matricial (3.10), temos:

$$\begin{aligned} & \left[ \omega^2 - k^2 - 2\theta_7 k^2 \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} + 4\theta_3 k^4 \ell_p^2 - 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 k^2 B_0^2 \right] \delta_{ij} e_{0j} \\ & + 8\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (\vec{k} \times \vec{B}_0)_i (\vec{k} \times \vec{B}_0)_j e_{0j} - 4i\theta_8 k^2 \ell_p \epsilon_{ijm} k_m e_{0j} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comparando (3.14) com a matriz  $M_{ij}$  em (3.11), podemos identificar os seguintes parâmetros:

- $a = \omega^2 - k^2 - 2\theta_7 k^2 \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} + 4\theta_3 k^4 \ell_p^2 - 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 k^2 B_0^2;$
- $b = 8\bar{\theta}_4 \ell_p^2;$
- $c = -4i\theta_8 k^2 \ell_p;$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2;$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = k^2;$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{k} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{k} = 0.$

Dessa forma, a equação (3.14) admite duas soluções possíveis:

$$a = 0, \quad (3.15)$$

$$a^2 + ab(\vec{u} \cdot \vec{u}) + c^2(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0. \quad (3.16)$$

## 3.2 Relações de Dispersão Modificadas

Para a solução (3.15), temos  $\omega_1(k)^{(\pm)} = \pm\omega_1(k)$ :

$$\omega_1(k) = |k| \left[ 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 \right]. \quad (3.17)$$

Para a solução (3.16), temos  $\omega_2(k)^{(\pm)} = \pm\omega_2(k)$ :

$$\omega_2(k) = |k| \left[ 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) + 2i\theta_8 (k\ell_p) \right]. \quad (3.18)$$

Temos também  $\omega_3(k)^{(\pm)} = \pm\omega_3(k)$ :

$$\omega_3(k) = |k| \left[ 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) - 2i\theta_8 (k\ell_p) \right]. \quad (3.19)$$

### 3.3 Índice de Refração

O índice de refração do vácuo magnetizado é dado pelo inverso da velocidade de fase,  $\omega_i/|k|$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$n_1^{-1} = 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2, \quad (3.20)$$

$$n_2^{-1} = 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) + 2i\theta_8 (k\ell_p), \quad (3.21)$$

$$n_3^{-1} = 1 + \theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 2\theta_3 (k\ell_p)^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 2\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) - 2i\theta_8 (k\ell_p). \quad (3.22)$$

### 3.4 Relações Energia-Momento

Pela correspondência de De Broglie, as relações energia-momento das excitações propagadoras são:

$$E_1^2(k) = \vec{p}^2 \left[ 1 + 2\theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 4\theta_3 (k\ell_p)^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 \right], \quad (3.23)$$

$$E_2^2(k) = \vec{p}^2 \left[ 1 + 2\theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 4\theta_3 (k\ell_p)^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) + 4i\theta_8 (k\ell_p) \right], \quad (3.24)$$

$$E_3^2(k) = \vec{p}^2 \left[ 1 + 2\theta_7 k \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - 4\theta_3 (k\ell_p)^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 B_0^2 + 4\bar{\theta}_4 \ell_p^2 (B_0^2 k^2 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2) - 4i\theta_8 (k\ell_p) \right]. \quad (3.25)$$

Onde  $i = 1, 2, 3$ .

Na LQG, geralmente são necessárias energias extremamente altas para acessar diretamente os efeitos quânticos da geometria. Por essa razão, a hamiltoniana de Alfaro et al. [52], apresentada em (1.33), é considerada no regime semiclassico, no qual é possível conectar a teoria a observáveis físicos. Nesse regime, os campos eletromagnéticos permanecem tratados classicamente, enquanto a estrutura do espaço-tempo preserva suas correções quânticas.

Efeitos de dispersão, anisotropia e dissipação emergem naturalmente das relações de dispersão modificadas deduzidas acima. Tais correções introduzem uma estrutura efetiva no vácuo quântico. Nos experimentos SULF e SEL, mencionados na introdução deste capítulo, essas possíveis assinaturas da LQG são investigadas por meio de medições de altíssima precisão do índice de refração, de variações no estado de polarização e de atrasos de fase. Esses experimentos baseiam-se na incidência de feixes de laser de alta intensidade em cavidades ópticas submetidas a campos magnéticos intensos. Nesse contexto, efeitos como a birrefringência do vácuo são inferidos a partir da comparação entre diferentes modos de propagação, enquanto o dicroísmo é identificado por meio de medidas de atenuação diferencial entre modos de polarização.

A questão central desses experimentos é que todos eles investigam essencialmente o mesmo ponto: se o vácuo quântico é realmente neutro ou se apresenta propriedades ópticas emergentes

em escalas efetivas. As equações aqui derivadas indicam que o vácuo não é estritamente neutro, mas responde, ainda que de forma extremamente sutil, à energia, à direção de propagação e a campos externos aplicados.

### 3.5 Conclusões Parciais

A partir de soluções de ondas planas monocromáticas, obtemos uma equação matricial para o campo elétrico da onda propagante. Como discutido anteriormente, consideramos dois campos para o fóton: o campo elétrico e o campo magnético. Contudo, optamos por utilizar apenas o campo magnético de fundo constante, uma vez que o campo elétrico que atua sobre os fótons cósmicos pode ser negligenciado devido à neutralidade das estruturas astrofísicas.

Substituímos esses campos nas equações de Maxwell modificadas pela gravidade quântica em laços, levando em conta a não linearidade da equação (1.68), e obtivemos uma relação de dispersão modificada. Essa relação foi transformada em uma matriz  $M_{ij}$ , cujo determinante forneceu três soluções para a dispersão modificada pela LQG, todas em primeira ordem nos parâmetros  $\theta_i$ .

Com essas relações, conseguimos calcular o índice de refração (magnetizado) do vácuo, que é dado pelo inverso da velocidade de fase  $\omega_i/|k|$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Como esperado, nesta teoria, o fenômeno da *birrefringência* está presente. A birrefringência é a propriedade da luz de viajar a velocidades diferentes dependendo de sua direção de polarização. Esse efeito ocorre devido às flutuações quânticas, sendo que a presença de três índices de refração distintos no vácuo evidencia a birrefringência associada aos efeitos da gravidade quântica em laços.

Além da birrefringência, observamos a presença de outra propriedade óptica no vácuo quântico: o *dicroísmo*. O dicroísmo é uma propriedade óptica de materiais que absorvem luz com diferentes polarizações de maneira distinta ou que dividem um feixe de luz em dois feixes com comprimentos de onda diferentes. Nos índices de refração e frequências calculados, é possível observar que há uma parte imaginária, que descreve a evanescência da onda, ou seja, a onda "morre" após um intervalo de tempo. Para uma descrição mais aprofundada sobre os fenômenos de birrefringência e dicroísmo, recomenda-se consultar o Capítulo 8 da Ref. [63].

Por fim, consideramos que os resultados analíticos obtidos são satisfatórios. Como no capítulo anterior, este trabalho está desenvolvido na Ref. [61].

No próximo capítulo, daremos seguimento à influência da gravidade quântica em laços nas anomalias de limiar induzidas pela violação da invariância de Lorentz, por meio da cinemática convencional do efeito Breit–Wheeler, utilizando relações de dispersão modificadas pela LQG e comparando os resultados com as anomalias de limiar na cinemática relativística usual.

---

## Capítulo 4

---

# Anomalias de Limiar Induzidas por Violação da Invariância de Lorentz e a Gravidade Quântica em Laços

---

A invariância de Lorentz é um dos pilares fundamentais das teorias quânticas de campos relativísticas, da física de partículas elementares e, mais recentemente, de sistemas de matéria condensada que exibem uma simetria de Lorentz emergente [80, 81]. A dinâmica do Modelo Padrão das Interações Fundamentais e da Física de Partículas não permite a quebra dessa simetria. No entanto, em seu artigo seminal de 1951 publicado na *Nature*, intitulado “*Is There an Aether?*” [82], Paul Dirac contemplou um cenário físico no qual efeitos de violação da simetria de Lorentz poderiam tornar-se relevantes, argumentando que “somos forçados a ter um éter”.

Desde então, a discussão acerca da violação da simetria de Lorentz (LSV) tem se fortalecido na literatura física, com uma atividade particularmente intensa nas últimas três décadas. Tal interesse é motivado pelo fato de que efeitos que violam a invariância de Lorentz são previstos por uma série de modelos contemporâneos desenvolvidos no contexto da física além do Modelo Padrão. Em especial, teorias de gravidade quântica preveem possíveis quebras dessa simetria, como a teoria das cordas [83–85], a gravidade quântica em laços [52, 57, 69, 86–88] e propostas que incorporam desvios da relatividade especial, como a relatividade duplamente especial [89–91], entre outros modelos amplamente discutidos na literatura recente.

Até o momento, a LSV ainda não foi confirmada experimentalmente, apesar dos experimentos de alta precisão atualmente realizados [92]. No entanto, é importante considerar a possibilidade de sua detecção à medida que as buscas experimentais se tornam cada vez mais refinadas. Como os aceleradores terrestres ainda não foram capazes de detectar os diminutos efeitos associados à LSV, os ambientes astrofísicos — nos quais ocorre a produção de fenômenos de ultra-alta energia — tornam-se um campo privilegiado de investigação para sondar possíveis

sinais dessa violação [66, 93–96].

O comportamento de anomalias de limiar pode, por exemplo, ser analisado a partir de observações astrofísicas de raios cósmicos de altíssima energia (VHE), isto é, com energias  $\gtrsim 100$  GeV, em particular raios gama. De acordo com a relatividade especial e a eletrodinâmica quântica, fótons de VHE que se propagam a partir de fontes distantes podem ser absorvidos pela luz de fundo do Universo, resultando na produção de pares elétron–pósitron [97]. Como consequência, o espectro de fótons cósmicos pode apresentar cortes significativos, tornando menos provável a observação de fótons com energias acima do limiar previsto.

Por outro lado, a violação da invariância de Lorentz pode induzir anomalias de limiar, como aquelas previstas por uma classe de relações de dispersão modificadas (MDR, em inglês). Essas anomalias indicam novos efeitos nas propriedades de propagação dos fótons de VHE, podendo levar à interpretação de um Universo mais transparente do que o previsto pelos modelos convencionais. Assim, a violação da invariância de Lorentz pode ser investigada por meio da busca de suas assinaturas em observações astrofísica [98, 103].

De modo geral, tanto a **luz de fundo cósmica de micro-ondas (CMB)** quanto a **luz de fundo extragaláctica (EBL)** contribuem para a atenuação dos fótons de VHE. Neste trabalho, consideramos ambas as contribuições: os fótons da EBL, mais relevantes para fótons na escala de TeV, e os fótons da CMB, que desempenham um papel dominante na atenuação de fótons na escala de PeV [79].

No presente capítulo, somos motivados a situar os efeitos da LQG no estudo de fótons cósmicos, mais especificamente no contexto das anomalias de limiar. Para isso, adotamos o mesmo conjunto de equações de Maxwell modificadas, Eqs. (1.68) e (1.80), utilizadas no Capítulo 2 para a dedução do efeito Compton corrigido pela gravidade quântica em laços. Essas equações conduzem a um conjunto de equações de campo que descrevem a propagação da radiação eletromagnética na escala de Planck.

Diante do conflito entre teorias fundamentais e resultados experimentais, a fenomenologia associada à LIV surge como um elemento-chave para a compreensão das teorias subjacentes [67]. Detalhes adicionais sobre LIVs induzidas por anomalias de limiar podem ser encontrados nas Refs. [66, 92–96]. O procedimento cinemático adotado nesta seção é apresentado em detalhes por Li e Ma na Ref. [66].

## 4.1 Anomalias de Limiar

Consideremos o processo  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ , que contribui de forma dominante para a atenuação de fótons de altíssima energia, em particular para energias inferiores a alguns PeV. De acordo com a relatividade especial, existe um limiar cinemático inferior para esse processo, o qual pode ser determinado da seguinte forma. Como na relatividade especial a invariância de Lorentz é preservada, concluímos que esse limiar ocorre quando os dois fótons incidentes colidem

frontalmente, isto é, quando o ângulo entre seus momentos satisfaz  $\theta = \pi$ . Essa configuração é naturalmente identificada ao se analisar o processo no referencial do centro de massa.

Dessa forma, podemos considerar a seguinte configuração limite para os quadrimomentos:

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \quad (4.1)$$

$$p_2 = (\epsilon_b, 0, 0, -\epsilon_b), \quad (4.2)$$

$$p_3 = p_4 = \left( \frac{E + \epsilon_b}{2}, 0, 0, \frac{E - \epsilon_b}{2} \right), \quad (4.3)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os quadrimomentos dos fótons incidentes, enquanto  $p_3$  e  $p_4$  correspondem aos quadrimomentos do elétron e do pósitron produzidos. Assumimos que o fóton com energia  $\epsilon_b$  pertença à luz de fundo, de modo que  $\epsilon_b \ll E$ .

A condição *on-shell* para o elétron (ou pósitron) é então dada por

$$m_e^2 \equiv p_3^2 = \left( \frac{E + \epsilon_b}{2} \right)^2 - \left( \frac{E - \epsilon_b}{2} \right)^2, \quad (4.4)$$

o que conduz imediatamente à condição de limiar para o processo  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ :

$$E \geq E_{\text{th}} = \frac{m_e^2}{\epsilon_b}. \quad (4.5)$$

Assim, se a energia do fóton incidente exceder o limiar  $E_{\text{th}}$ , o fóton pode ser absorvido, dependendo da configuração cinemática. As assinaturas desse processo manifestam-se por meio da supressão do espectro de fótons acima desse limite. Por outro lado, se a energia do fóton for inferior a  $E_{\text{th}}$ , o processo é cinematicamente proibido e o fóton pode propagar-se livremente.

Para obter uma estimativa quantitativa, calculemos os valores típicos do limiar para fótons da luz de fundo cósmica de micro-ondas (CMB) e da luz de fundo extragaláctica (EBL), utilizando a Eq. (4.5). A energia característica de um fóton da CMB é  $\epsilon_b^{\text{CMB}} \simeq 6.5 \times 10^{-4}$  eV, enquanto para a EBL a energia típica situa-se aproximadamente no intervalo entre  $10^{-3}$  eV e 1 eV.

A energia da EBL não é tão bem definida quanto a da CMB, pois resulta da superposição de diversas fontes, tais como galáxias distantes, núcleos galácticos ativos (AGNs), poeira aquecida, galáxias *starburst* e populações estelares antigas, refletindo o acúmulo histórico da luz estelar no Universo [104–106]. Os valores adotados para a EBL e a CMB foram extraídos do gráfico apresentado na Fig. 2 da Ref. [66].

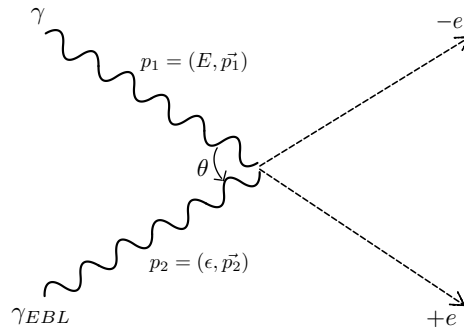
Para fótons da CMB, obtemos

$$E_{\text{th}}^{\text{CMB}} \simeq 411 \text{ TeV}.$$

Portanto, fótons gama com energias acima desse valor são absorvidos pela CMB, resultando na produção de pares elétron–pósitron. Para a EBL, o limiar encontra-se no intervalo

$$E_{\text{th}}^{\text{EBL}} \simeq 261 \text{ GeV a } 261 \text{ TeV}.$$

Fonte: Autor (2025)



**Figura 4** – Diagrama do processo de produção de pares  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ .

Isso implica que fótons com energias superiores a aproximadamente 261 GeV podem ser absorvidos pela EBL. Observa-se, portanto, que fótons com energias inferiores a  $E_{\text{th}}^{\text{CMB}}$  ainda podem ser significativamente atenuados pela EBL. Embora a estimativa associada à EBL seja menos precisa do que aquela da CMB, ela é suficiente para uma análise qualitativa do processo de absorção.

## 4.2 LIV e Relações de Dispersão Modificadas na Discussão sobre Anomalias de Limiar

Como discutido anteriormente, a violação da invariância de Lorentz emerge em diversas abordagens à gravidade quântica. Praticamente todos os modelos que incorporam LIV predizem relações de dispersão modificadas, as quais desempenham um papel central no estudo fenomenológico dessas violações. No entanto, independentemente da natureza da teoria fundamental subjacente, é sempre possível adotar uma formulação efetiva e independente de modelo para a MDR de fótons cujas energias estejam bem abaixo da escala de Planck,  $E_{\text{Planck}}$  [77, 78, 98].

Adotaremos uma relação de dispersão modificada na qual termos de ordem superior são fortemente suprimidos pela escala de Planck, podendo ser desprezados com segurança sem introduzir alterações significativas. Dessa forma, obtemos a seguinte expressão simplificada [92, 99, 100]:

$$\omega^2 = k^2 - \xi k^3, \quad (4.6)$$

onde introduzimos o parâmetro  $\xi \equiv -s/E_{\text{LV}}$ , por conveniência, sendo  $s = +1$  para fótons superluminais e  $s = -1$  para fótons subluminais. Essa é a relação de dispersão adotada ao longo deste trabalho para a análise das anomalias de limiar induzidas por LIV.

Consideremos novamente o processo  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ , apresentado na introdução. Adotaremos a mesma configuração cinemática das Eqs. (4.1) e (4.2), mas agora utilizando a relação de dispersão modificada para o fóton gama, Eq. (4.6):

$$p_1 = (\omega(k), 0, 0, k). \quad (4.7)$$

Inserimos, de modo análogo, a relação de dispersão modificada no fóton gama incidente. Para os fótons da luz de fundo, assumimos que suas energias são suficientemente baixas para que efeitos de LIV sejam desprezíveis. Além disso, supomos que as relações de dispersão do elétron e do pósitron permanecem inalteradas, conforme a relatividade especial, apoiados em argumentos teóricos [101] e em evidências experimentais [102, 103].

Um possível obstáculo reside no fato de que, em certos cenários, a relação energia-momento dos férmions também pode ser modificada. No entanto, como não pretendemos privilegiar um modelo específico, adotamos a suposição razoável de que, ao menos em alguns referenciais, a condição *on-shell* para o elétron possa ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 m_e^2 \equiv p_3^2 &= \left( \frac{\omega + \epsilon_b}{2} \right)^2 - \left( \frac{k - \epsilon_b}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{\omega^2 - k^2 + 2\epsilon_b(\omega + k)}{4} \\
 &= \frac{-\xi k^3 + 2\epsilon_b \left( 2k - \frac{1}{2}\xi k^3 \right)}{4} + \mathcal{O}(\xi^2) \\
 &= \frac{-\xi k^3 + 4\epsilon_b k}{4} + \mathcal{O}(\xi^2) + \mathcal{O}(\xi\epsilon_b).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Evidenciando o parâmetro LIV  $\xi$ , para  $k > 0$ , obtemos:

$$\xi \equiv f(k) = \frac{4\epsilon_b}{k^2} - \frac{4m_e^2}{k^3}, \tag{4.9}$$

onde definimos a função  $f(k)$ . A seguir, estabelecemos algumas propriedades relevantes dessa função no domínio  $k > 0$ :

- Existe um único zero da função em

$$k_0 = \frac{m_e^2}{\epsilon_b},$$

o qual corresponde ao limiar inferior no caso da relatividade especial;

- A função apresenta um máximo em um ponto crítico

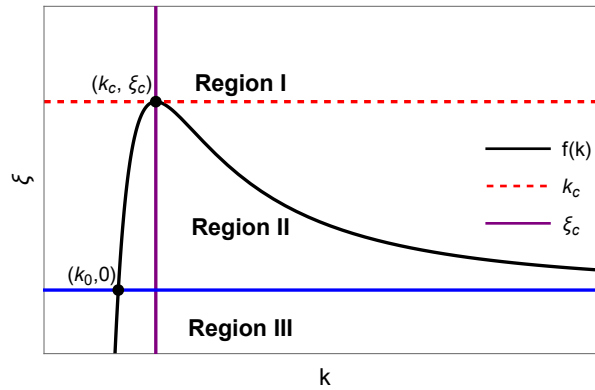
$$k_c = \frac{3m_e^2}{2\epsilon_b},$$

com valor máximo

$$\xi_c = \max f(k) = f(k_c) = \frac{16\epsilon_b^3}{27m_e^4}.$$

Com essas propriedades estabelecidas, representamos esquematicamente o parâmetro LIV  $\xi$  e a imagem da função  $f(k)$  na Fig. 5. Seguindo a classificação introduzida por Li e Ma [66], a análise pode ser dividida nas seguintes regiões:

Fonte: Autor (2025)



**Figura 5** – Representação esquemática da relação entre o parâmetro LIV  $\xi$  e a função  $f(k)$ . A linha pontilhada indica o **Caso I** e uma possível linha que intercepta dois pontos da função representa o **Caso II**.

- **Região I:**  $\xi > \xi_c$ , correspondente ao **Caso I** (transparência óptica);
- **Região II:**  $0 < \xi < \xi_c$ , correspondente ao **Caso II** (reparição de fótons de ultra-alta energia);
- **Região III:**  $\xi < 0$ , correspondente ao **Caso III** (redução do limiar).

Por fim, reconstruiremos o processo  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$  incorporando a relação de dispersão modificada induzida por termos da gravidade quântica em laços, aplicada exclusivamente ao fóton gama de ultra-alta energia. As mesmas considerações adotadas no início desta seção quanto à conservação de energia e momento serão mantidas. Em seguida, discutiremos detalhadamente cada um dos casos acima no contexto desse problema específico.

### 4.3 Efeitos Combinados de LIV e Relação de Dipersão Modificada pela LQG nas Anomalias de Limiar

Como discutido anteriormente, ao considerarmos quadros de referência em gravidade quântica nos quais a conservação da relação energia–momento é preservada, refazemos toda a análise cinemática da seção anterior, agora empregando uma relação de dispersão modificada induzida por termos da gravidade quântica em laços, dada pela MDR da Eq. (2.9), adotando  $c = 1$ . A partir dessa abordagem, obtemos a seguinte condição *on-shell* para o elétron:

$$m_e^2 = \left[ \frac{1}{2}\theta_7 \left( \frac{\ell_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon} - \theta_3(k\ell_p)^2 \pm \theta_8(k\ell_p) \right] k(k + \epsilon_b) + k\epsilon_b. \quad (4.10)$$

Assim como no Capítulo 2, desprezamos o termo proporcional a  $\theta_3$ , uma vez que ele é quadrático na escala de Planck. Ademais, restrições presentes na literatura indicam que  $\theta_8 \lesssim 10^{-16}$  [78], o que implica  $\theta_8\ell_p \lesssim 10^{-51}$ . Dessa forma, esse termo também pode ser

negligenciado com segurança. Obtemos, então,

$$m_e^2 = \frac{1}{2}\theta_7(k\ell_p) k(k + \epsilon_b) + k\epsilon_b. \quad (4.11)$$

Como  $\epsilon_b \ll k$ , a expressão acima pode ser simplificada para

$$m_e^2 = \frac{1}{2}\theta_7\ell_p k^3 + k\epsilon_b. \quad (4.12)$$

Comparando as Eqs. (4.8) e (4.12), identificamos o parâmetro efetivo de violação da invariância de Lorentz induzido pela LQG, aplicado ao fóton gama de ultra-alta energia, como

$$\xi^{\text{LQG}} = -2\theta_7\ell_p, \quad (4.13)$$

onde se utiliza o valor

$$\frac{1}{\theta_7\ell_p} = -3.6 \times 10^{17} \text{ GeV}.$$

Adotando  $|\theta_7| = 33.9$ , um valor numericamente consistente e da ordem  $\mathcal{O}(1)$  [60], obtemos

$$\xi^{\text{LQG}} \simeq 5.6 \times 10^{-26} \text{ eV}. \quad (4.14)$$

Recordando o parâmetro crítico  $\xi_c$ , definido anteriormente como

$$\xi_c = \frac{16\epsilon_b^3}{27m_e^4}, \quad (4.15)$$

podemos agora calcular seus valores característicos para a CMB e para EBL. Utilizando as energias típicas dessas radiações, obtemos, para a CMB,

$$\xi_c^{\text{CMB}} \simeq 2.3 \times 10^{-33} \text{ eV}.$$

Para a EBL, cuja distribuição espectral é mais complexa do que a da CMB, encontramos

$$\xi_c^{\text{EBL}} \simeq 8.7 \times 10^{-33} \text{ eV a } 8.7 \times 10^{-24} \text{ eV}.$$

Reiteramos que os valores adotados para as energias da EBL e da CMB foram extraídos da Fig. 2 da Ref. [66].

#### 4.4 Análise das interações $\gamma$ -CMB e $\gamma$ -EBL sob efeitos da Gravidade Quântica em Laços

Com os resultados obtidos anteriormente, estamos agora em posição de analisar em detalhe os **Casos I, II e III** representados no gráfico da Fig. 5, interpretando-os à luz do parâmetro efetivo  $\xi^{\text{LQG}}$ , derivado de uma relação de dispersão modificada induzida pela gravidade quântica em laços e aplicada ao fóton gama de ultra-alta energia. A análise de cada caso é apresentada a seguir:

- **Interação  $\gamma$ -CMB:** Para a interação entre fótons gama e fótons da CMB, verificamos que

$$\xi^{\text{LQG}} > \xi_c^{\text{CMB}},$$

o que situa esse cenário no **Caso I (transparência óptica)**. Em termos do gráfico da Fig. 5, isso implica que não há solução para a Eq. (4.11), de modo que não existe um limiar inferior análogo ao da Eq. (4.5). Consequentemente, fótons gama subluminais não interagem com os fótons da CMB, atravessando esse meio praticamente sem atenuação.

- **Interação  $\gamma$ -EBL:** O caso da interação entre fótons gama e dos fótons da EBL é mais sutil, uma vez que a distribuição espectral da EBL não é tão bem definida quanto a da CMB. Assim, realizamos a análise considerando os limites inferior e superior da energia característica da EBL.

Para valores tais que  $\xi^{\text{LQG}} > \xi_c^{\text{EBL}(1)}$ , o sistema novamente se enquadra no **Caso I**, conforme discutido acima. Por outro lado, para o limite superior da EBL, quando

$$0 < \xi^{\text{LQG}} < \xi_c^{\text{EBL}(2)},$$

o sistema situa-se no **Caso II (reaparição de fótons de ultra-alta energia)**. Como uma linha paralela ao eixo  $k$ , na Fig. 5, que intercepta a função em dois pontos. Nesse caso, a equação que determina o limiar possui duas soluções,  $k_<$  e  $k_>$ . A primeira corresponde a um limite inferior de energia, enquanto a segunda pode ser interpretada como um limite superior, conforme demonstrado pelos teoremas apresentados na Ref. [93].

Concluimos, portanto, que apenas fótons com energias compreendidas no intervalo

$$\omega(k_<) \leq \omega \leq \omega(k_>)$$

podem ser absorvidos pelos fótons da EBL, resultando na produção de pares elétron-pósitron. Dada a ampla faixa energética associada à EBL, inferimos a existência de um valor crítico inferior  $\epsilon_x$ , situado em algum ponto entre  $10^{-3}$  eV e 1 eV, tal que  $\epsilon_x > 10^{-3}$  eV. Para todos os valores de energia  $\epsilon_b$  da EBL pertencentes ao intervalo  $\epsilon_x \leq \epsilon_b \leq 1$  eV, o sistema encontra-se na Região II, exibindo tanto um limite inferior quanto um limite superior para o processo de produção de pares.

Para que esse valor crítico  $\epsilon_x$  gere um parâmetro  $\xi_c^{\text{EBL}(x)}$  que posicione  $\xi^{\text{LQG}}$  na Região II, deve ser satisfeita a condição

$$\xi^{\text{LQG}} < \frac{16\epsilon_x^3}{27m_e^4}. \quad (4.16)$$

Daí segue que

$$\epsilon_x > \left( \frac{27}{16} m_e^4 \xi^{\text{LQG}} \right)^{1/3}. \quad (4.17)$$

Substituindo o valor obtido para  $\xi^{\text{LQG}}$ , encontramos

$$\epsilon_x > 1.9 \times 10^{-1} \text{ eV}. \quad (4.18)$$

Assim, concluímos que a faixa de energia da EBL compreendida entre  $1.9 \times 10^{-1} \text{ eV}$  e  $1 \text{ eV}$  posiciona o parâmetro  $\xi^{\text{LQG}}$  na Região II, na qual o processo de Breit–Wheeler apresenta tanto um limiar inferior quanto um limiar superior. Esse resultado é significativamente mais geral do que aquele obtido ao considerar apenas o valor máximo da energia da EBL ( $1 \text{ eV}$ ). A possibilidade da existência de um limite superior para o espalhamento  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$  já havia sido apontada anteriormente por Kluźniak [107]. Ademais, no limite  $\xi \rightarrow 0$ , observa-se que  $k \rightarrow \infty$ , recuperando-se o comportamento previsto pela relatividade especial.

- **Ausência do Caso III:** No contexto da LQG considerada neste trabalho, não ocorre o **Caso III**. Caso esse regime estivesse presente, haveria apenas uma solução para a Eq. (4.9), implicando a existência de um único limiar inferior. Essa solução seria necessariamente menor que  $k_0$ , de modo que o comportamento do limiar seria qualitativamente semelhante ao da relatividade especial, conforme a Eq. (4.5), diferindo apenas no valor exato de  $k_0$ .

## 4.5 Conclusões Parciais

A análise cuidadosa descrita nos **Casos I e II** é de grande importância, uma vez que a observação desses fenômenos pode servir como sinal definitivo de violação da invariância de Lorentz. Novos efeitos além da relatividade especial podem emergir se a LIV estiver presente. Por exemplo, se observarmos um excesso no número de fótons com energia acima de  $k_0 = 411 \text{ TeV}$ , associado a fontes extragalácticas distantes, como indicam os Casos I e II, tais observações podem ser interpretadas como suporte às propriedades LIV dos fótons previstas teoricamente.

Para este estudo, sugerimos o uso de detectores terrestres, como o *Large High Altitude Air Shower Observatory (LHAASO)* [68], atualmente um dos detectores mais sensíveis, capaz de detectar raios gama na escala TeV e PeV (como utilizado em [66, 95, 96]). Outros detectores terrestres relevantes incluem o *Major Atmospheric Gamma Imaging Cherenkov Telescopes (MAGIC)* [108] e o *High Energy Stereoscopic System (HESS)* [109]. Além disso, destacam-se observatórios espaciais, como o *Fermi Gamma-ray Space Telescope (FermiLAT)* [110], em operação desde 2008, e o *Cherenkov Telescope Array (CTA)* [111], ainda em desenvolvimento, que ampliará significativamente a capacidade de detecção de raios gama de energia ultra alta (UHE, em inglês).

É relevante notar que diversos cenários de anomalias de limiar já foram extensivamente estudados (ver, por exemplo, [93, 112]). Na seção 2.1, apresentamos uma breve revisão de algumas dessas estratégias, detalhadas por Li e Ma [66], adotando um modelo simplificado. Em geral, recomenda-se a consulta à Ref. [93] para formulações rigorosas e discussões sistemáticas

de anomalias de limiar em LIV. A fenomenologia das anomalias de limiar induzidas por LIV também foi analisada em profundidade (ver [107, 112, 113]), inclusive para espectros de núcleos galácticos ativos.

Neste trabalho, nosso objetivo foi inserir uma relação de dispersão modificada pela gravidade quântica em laços na cinemática simplificada apresentada na seção de introdução, com a finalidade de obter uma condição *on-shell* para o elétron. Com isso, comparamos os resultados com o modelo geral para LIV com anomalias de limiar dado em (4.8), extraindo o parâmetro LIV do fóton gama  $\xi^{LQG}$  e comparando-o com os parâmetros críticos  $\xi_c^{EBL}$  e  $\xi_c^{CMB}$  obtidos da equação (4.15).

Concluimos que os fótons sob influência da LQG podem se encontrar na região de transparência óptica, onde não são absorvidos pelos fótons de baixa energia. Posteriormente, analisamos os fótons gama que são absorvidos dentro de um limite inferior e superior (região II). Finalmente, examinamos a região III, correspondente a fótons superluminais, onde a equação (4.9) retorna ao caso da relatividade especial. É notável a diferença ao comparar a absorção dos fótons gama considerando o parâmetro LIV  $\xi^{LQG}$  com a expressão (4.5), obtida pela cinemática relativística, que prevê apenas um limite inferior.

Como observação final, mantendo-nos conectados ao problema da anomalia do limiar de fótons cósmicos, afirmamos que, ao considerarmos fótons massivos em associação com o espalhamento de Breit–Wheeler, agora formulado em termos do invariante de Mandelstam, podemos estabelecer um vínculo de consistência fenomenológica para a transparência do Universo a fótons de ultra-alta energia. Para isso, utilizaremos o maior valor de energia de fótons já registrado experimentalmente. No próximo capítulo, também incorporaremos os efeitos da LQG a fim de determinar qual correção da relação de dispersão modificada afeta mais significativamente a propagação de fótons na escala de PeV: os efeitos associados à massa de repouso do fóton na teoria de De Broglie–Proca ou aqueles decorrentes da discretização do espaço-tempo.

É importante ressaltar que o trabalho discutido neste capítulo está desenvolvido na Ref. [69].

---

## Capítulo 5

---

# Eletrodinâmica Massiva de De Broglie–Proca e LQG: Vínculo de Consistência e Hierarquia de Escalas

---

O arquétipo da teoria quântica de campos é a eletrodinâmica quântica (QED). No âmbito dessa teoria de calibre abeliana, o fóton — portador do campo eletromagnético que se propaga no vácuo à velocidade da luz — é uma partícula de spin 1, descrita por um campo vetorial  $A_\mu$ , cuja massa de repouso é rigorosamente nula. Essa propriedade é essencial para a preservação da invariância de calibre  $U(1)$ , garantindo, entre outros aspectos, a consistência teórica e a renormalizabilidade da teoria [28, 29].

Contudo, como discutido na introdução, é possível considerar extensões da teoria eletromagnética nas quais o fóton adquire uma pequena massa. Embora tal modificação seja simples do ponto de vista formal, suas implicações físicas e teóricas são profundas. Em particular, as equações de Maxwell são substituídas pelas equações de De Broglie–Proca, derivadas da lagrangiana correspondente (cf. Eqs. (1.15)–(1.20)). A introdução de um termo de massa explícito quebra a invariância de calibre local, o que, por sua vez, impacta propriedades fundamentais da teoria, incluindo sua estrutura de renormalização [20, 26].

Uma das consequências físicas mais relevantes dessa modificação é a alteração do alcance das interações eletromagnéticas. Para um fóton massivo, o potencial eletrostático assume a forma de Yukawa,

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} e^{-m_\gamma cr/\hbar}, \quad (5.1)$$

onde  $r$  representa a escala característica de observação (que pode atingir, por exemplo, distâncias cosmológicas da ordem de  $10^5$  anos-luz). Nesse cenário, os campos elétricos passam a decair exponencialmente com a distância. A observação de campos eletromagnéticos estáveis em grandes escalas impõe, portanto, limites superiores rigorosos à massa do fóton [21–23]. Essa

estratégia fundamenta diversos métodos discutidos na introdução e nas referências [27, 31, 48].

Entretanto, o presente trabalho não tem como objetivo competir diretamente com os limites mais restritivos disponíveis na literatura — como aqueles derivados de campos magnéticos galácticos ( $m_\gamma \lesssim 10^{-27}$  eV) (1.31) ou de observações do vento solar ( $m_\gamma \lesssim 10^{-18}$  eV) (1.30). Em vez disso, propomos uma abordagem distinta, baseada na dinâmica de De Broglie–Proca aplicada a anomalias de limiar no processo de Breit–Wheeler no vácuo extragaláctico.

O objetivo deste capítulo é investigar como um limite superior não nulo para a massa de repouso do fóton,  $m_\gamma$ , pode impactar a produção de pares elétron–pósitron via a cinemática do processo de Breit–Wheeler, formulada em termos dos invariantes de Mandelstam [70]. Em particular, analisamos como tais modificações podem alterar o limiar de opacidade do universo para fótons de ultra-alta energia. Para isso, utilizamos dados recentes da astrofísica de altas energias, notadamente observações do observatório LHAASO.

A fim de manter uma formulação consistente e simétrica, adotamos a relação de dispersão de De Broglie–Proca para ambos os fótons envolvidos no processo, permitindo a determinação de um “teto cinemático” para a propagação de fótons na escala de PeV.

Adicionalmente, consideramos uma generalização da relação de dispersão que incorpora não apenas os efeitos associados à massa do fóton, mas também possíveis correções decorrentes da granularidade do espaço-tempo, conforme previstas em cenários de gravidade quântica em laços. Dessa forma, além de estabelecer novos vínculos fenomenológicos para  $m_\gamma$ , investigamos qual desses efeitos — massa do fóton ou modificações induzidas pela estrutura discreta do espaço-tempo — desempenha um papel dominante na transparência do universo.

Assim, este capítulo busca não apenas estabelecer uma hierarquia de escalas em cenários de nova física além do Modelo Padrão, mas também demonstrar que os vínculos fenomenológicos associados à eletrodinâmica massiva podem permanecer consistentes com observações astrofísicas de ponta.

## 5.1 De Broglie–Proca: Vínculo de Consistência

No processo de produção de pares elétron–pósitron via efeito Breit–Wheeler, discutido no capítulo anterior, é conveniente introduzir o invariante de Mandelstam associado ao estado inicial das partículas,

$$s = (k_1 + k_2)^2. \quad (5.2)$$

No contexto do Modelo Padrão, em que o fóton é estritamente sem massa, tem-se  $k_1^2 = k_2^2 = 0$ , de modo que o invariante se reduz a

$$s = 2 k_1 \cdot k_2. \quad (5.3)$$

No referencial do centro de massa, esse invariante corresponde ao quadrado da energia

total do sistema,

$$s = E_{\text{CM}}^2. \quad (5.4)$$

A condição de limiar para a produção de pares elétron–pósitron é então dada por

$$s \geq 4m_e^2. \quad (5.5)$$

Consideremos agora a generalização para o caso em que o fóton possui uma massa de repouso não nula,  $m_\gamma \neq 0$ , conforme descrito pela eletrodinâmica de De Broglie–Proca. Nesse cenário, ambos os fótons envolvidos — o fóton de alta energia ( $E$ ) e o fóton de fundo ( $\epsilon_b$ ), por exemplo da radiação cósmica de fundo (CMB) — satisfazem a relação de dispersão de De Broglie–Proca,

$$E^2 = p^2 + m_\gamma^2, \quad (5.6)$$

(em unidades naturais,  $c = \hbar = 1$ ).

O invariante de Mandelstam passa então a ser

$$s = (k_1 + k_2)^2 = 2m_\gamma^2 + 2(E\epsilon_b - |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta), \quad (5.7)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de colisão entre os fótons.

Utilizando a relação de dispersão, os módulos dos momentos são dados por

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m_\gamma^2}. \quad (5.8)$$

Substituindo, obtemos

$$s = 2m_\gamma^2 + 2E\epsilon_b \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{m_\gamma^2}{E^2}} \sqrt{1 - \frac{m_\gamma^2}{\epsilon_b^2}} \cos \theta \right]. \quad (5.9)$$

Para colisões frontais ( $\theta = \pi$ ), resulta

$$s = 2m_\gamma^2 + 2 \left( E\epsilon_b + \sqrt{E^2 - m_\gamma^2} \sqrt{\epsilon_b^2 - m_\gamma^2} \right). \quad (5.10)$$

A condição de limiar  $s \geq 4m_e^2$  implica

$$m_\gamma^2 + E\epsilon_b + \sqrt{E^2 - m_\gamma^2} \sqrt{\epsilon_b^2 - m_\gamma^2} \geq 2m_e^2. \quad (5.11)$$

No limite de Maxwell ( $m_\gamma = 0$ ), recupera-se o resultado usual,

$$E \geq \frac{m_e^2}{\epsilon_b}. \quad (5.12)$$

Assumindo  $m_\gamma^2 \ll E^2, \epsilon_b^2$ , expandimos as raízes em série de Taylor até primeira ordem em  $m_\gamma^2$ ,

$$\sqrt{E^2 - m_\gamma^2} \approx E \left( 1 - \frac{m_\gamma^2}{2E^2} \right), \quad \sqrt{\epsilon_b^2 - m_\gamma^2} \approx \epsilon_b \left( 1 - \frac{m_\gamma^2}{2\epsilon_b^2} \right). \quad (5.13)$$

Substituindo as expansões (5.13) em (5.10) e mantendo termos até ordem  $m_\gamma^2$ , obtemos

$$s \approx 4E\epsilon_b + 2m_\gamma^2 - m_\gamma^2 \left( \frac{E}{\epsilon_b} + \frac{\epsilon_b}{E} \right). \quad (5.14)$$

No regime astrofísico relevante ( $E \gg \epsilon_b$ ), o termo dominante é

$$s \approx 4E\epsilon_b + 2m_\gamma^2 - \frac{E}{\epsilon_b} m_\gamma^2. \quad (5.15)$$

Impondo a condição de limiar  $s = 4m_e^2$ , segue

$$4m_e^2 \approx 4E\epsilon_b + m_\gamma^2 \left( 2 - \frac{E}{\epsilon_b} \right). \quad (5.16)$$

Como  $E/\epsilon_b \gg 1$ , obtemos

$$m_\gamma^2 \approx \frac{4(E\epsilon_b - m_e^2)}{E/\epsilon_b}. \quad (5.17)$$

Para uma estimativa numérica, consideramos um fóton de energia  $E \simeq 1,42$  PeV, detectado pelo observatório LHAASO [71], e  $\epsilon_b \simeq 6,5 \times 10^{-4}$  eV [66] para a CMB, com  $m_e = 0,511$  MeV. O limiar padrão (caso de Maxwell) é

$$E_{\text{th}} \approx \frac{m_e^2}{\epsilon_b} \approx 411 \text{ TeV}. \quad (5.18)$$

Como  $1,42 \text{ PeV} \gg E_{\text{th}}$ , o fóton deveria sofrer atenuação significativa. No entanto, a observação de fótons nessa faixa de energia sugere uma possível modificação do limiar cinemático. Com os valores fornecidos, temos

$$m_\gamma^2 \approx 1,21 \times 10^{-6} \text{ eV}^2. \quad (5.19)$$

A estimativa resultante fornece

$$m_\gamma \approx 1,10 \times 10^{-3} \text{ eV}. \quad (5.20)$$

Esse resultado não compete com os limites experimentais mais restritivos existentes, mas estabelece um limite de consistência cinemática: trata-se de um valor máximo para o qual fótons ultraenergéticos ainda podem se propagar sem atenuação significativa devido à interação com o fundo difuso.

Assim, esse valor define um “teto cinemático” para a propagação de fótons na escala de PeV no contexto da eletrodinâmica de De Broglie–Proca. Na próxima seção, estenderemos essa análise incluindo correções provenientes da granularidade do espaço-tempo, conforme descritas por cenários de gravidade quântica em laços, permitindo uma comparação direta entre os efeitos de massa do fóton e modificações na relação de dispersão induzidas por nova física.

## 5.2 De Broglie–Porca e LQG: Hierarquia de Escalas

Embora a massa  $m_\gamma$  estimada na seção anterior estabeleça um parâmetro cinemático consistente, nesta seção exploramos a inserção de nova física além do Modelo Padrão, incluindo termos de violação da invariância de Lorentz, conforme previstos em cenários de gravidade quântica em laços (LQG). Dessa forma, consideramos uma relação de dispersão modificada que incorpora simultaneamente um fóton massivo e correções suprimidas pela escala de Planck, discutidas no Capítulo 4.

O objetivo desta seção é análogo ao da anterior: analisar o deslocamento do limiar no processo de Breit–Wheeler levando em conta tanto a massa de repouso do fóton quanto correções oriundas da LQG. Para isso, adotamos uma relação de dispersão unificada da forma

$$\omega^2 = k^2 + m_\gamma^2 + \theta_7 \ell_p k^3, \quad (5.21)$$

onde  $m_\gamma$  representa a massa de repouso do fóton e o termo  $\theta_7 \ell_p k^3$  codifica a correção de LQG.

No regime de altas energias, consideramos  $E \simeq k$ , de modo que

$$E^2 = p^2 + m_\gamma^2 + \theta_7 \ell_p E^3. \quad (5.22)$$

Isolando o momento e utilizando  $\ell_p = 1/E_{Pl}$ , obtemos

$$p = E \sqrt{1 - \left( \frac{m_\gamma^2}{E^2} + \frac{\theta_7 E}{E_{Pl}} \right)} \approx E \left( 1 - \frac{m_\gamma^2}{2E^2} - \frac{\theta_7 E}{2E_{Pl}} \right), \quad (5.23)$$

onde foi utilizada uma expansão de primeira ordem.

Assim, para o fóton gama de energia  $E$  e o fóton de fundo com energia  $\epsilon_b$ , temos

$$p_1 \approx E - \frac{m_\gamma^2}{2E} - \frac{\theta_7 E^2}{2E_{Pl}}, \quad (5.24)$$

$$p_2 \approx \epsilon_b - \frac{m_\gamma^2}{2\epsilon_b} - \frac{\theta_7 \epsilon_b^2}{2E_{Pl}}. \quad (5.25)$$

Para uma colisão frontal entre os fótons  $(E, p_1)$  e  $(\epsilon_b, p_2)$ , o invariante de Mandelstam é dado por

$$s = (E + \epsilon_b)^2 - (p_1 - p_2)^2. \quad (5.26)$$

Reescrevendo,

$$s = 2E\epsilon_b + 2p_1 p_2 + (E^2 - p_1^2) + (\epsilon_b^2 - p_2^2). \quad (5.27)$$

Substituindo  $p^2 = E^2 - m_\gamma^2 - \theta_7 E^3/E_{Pl}$ , obtemos

$$s = 2E\epsilon_b + 2p_1 p_2 + 2m_\gamma^2 + \frac{\theta_7}{E_{Pl}} (E^3 + \epsilon_b^3). \quad (5.28)$$

Expandindo o termo  $2p_1 p_2$  até primeira ordem:

$$2p_1 p_2 \approx 2E\epsilon_b - \frac{\epsilon_b m_\gamma^2}{E} - \frac{E m_\gamma^2}{\epsilon_b} - \frac{\theta_7 E^2 \epsilon_b}{E_{Pl}} - \frac{\theta_7 \epsilon_b^2 E}{E_{Pl}}. \quad (5.29)$$

No regime  $E \gg \epsilon_b$ , o invariante assume a forma aproximada \*

$$s \approx 4E\epsilon_b - m_\gamma^2 \left( \frac{E}{\epsilon_b} \right) - \theta_7 \frac{E^2 \epsilon_b}{E_{Pl}}. \quad (5.30)$$

É fundamental analisar a contribuição relativa de cada termo. Considerando  $E = 1,42 \text{ PeV}$ ,  $\epsilon_b = 6,5 \times 10^{-4} \text{ eV}$ ,  $\theta_7 \approx 33,9$  [52, 60] e  $E_{Pl} \approx 1,22 \times 10^{28} \text{ eV}$ , obtemos:

- Termo de Maxwell:  $4E\epsilon_b \approx 3,69 \times 10^{12} \text{ eV}^2$ ;
- Termo de De Broglie–Proca:  $m_\gamma^2 \left( \frac{E}{\epsilon_b} \right) \approx 10^{12} \text{ eV}^2$ ;
- Correção de LQG:  $\theta_7 \frac{E^2 \epsilon_b}{E_{Pl}} \approx 3,64 \text{ eV}^2$ .

Observa-se uma clara hierarquia de escalas. O fator cinemático  $E/\epsilon_b \sim 10^{18}$  amplifica significativamente o termo massivo, enquanto a correção de LQG permanece fortemente suprimida pela escala de Planck. Como resultado, a contribuição da LQG torna-se desprezível no regime considerado.

Isolando o termo de massa do fóton, temos

$$m_\gamma^2 \approx \frac{4(E\epsilon_b - m_e^2) - \theta_7 \frac{E^2 \epsilon_b}{E_{Pl}}}{\left( \frac{E}{\epsilon_b} \right)}, \quad (5.31)$$

resultando em

$$m_\gamma^2 \approx 1,21 \times 10^{-6} \text{ eV}^2, \quad (5.32)$$

e, portanto,

$$m_\gamma \lesssim 1,10 \times 10^{-3} \text{ eV}. \quad (5.33)$$

Esse resultado coincide com o obtido no caso puramente de De Broglie–Proca, indicando que as correções de LQG — mesmo para um parâmetro efetivo relativamente elevado no regime semiclássico ( $\theta_7 = 33,9$ ) — não são suficientes para produzir um deslocamento significativo no limiar de produção de pares. Isso evidencia que, no regime de energias da ordem de PeV, o termo massivo domina sobre os efeitos de granularidade do espaço-tempo.

### 5.3 Conclusões Parciais

O efeito Breit–Wheeler, inserido no contexto da teoria de De Broglie–Proca, estabelece um vínculo de consistência cinemática fundamental para a massa do fóton. A partir do invariante de Mandelstam, assumindo uma formulação simétrica em que o fóton é massivo tanto para a radiação gama de energia  $E$  quanto para a radiação de fundo  $\epsilon_b$ , obtivemos um limite superior

---

\*O cancelamento do termo  $E^3$  ocorre devido à conservação do quadrimomento no invariante de Mandelstam. O que resta é o termo de interação cruzada  $E^2 \epsilon_b$ .

para a massa do fóton utilizando o fóton gama de maior energia já registrado (1,42 PeV), detectado pelo observatório LHAASO. Nesse regime de colisão frontal, impõe-se um “teto cinemático” dado por

$$m_\gamma \lesssim 1,10 \times 10^{-3} \text{ eV}. \quad (5.34)$$

Valores de massa acima desse limite tornam o processo de Breit–Wheeler cinematicamente proibido.

Em seguida, investigamos a produção de pares elétron–pósitron em um cenário unificado, considerando uma relação de dispersão modificada que incorpora, além da massa de repouso do fóton, correções oriundas da gravidade quântica em laços. No regime semiclássico, parametrizado por  $\theta_7$ , encontramos uma contribuição extremamente pequena,

$$\sim 3,64 \text{ eV}^2, \quad (5.35)$$

quando comparada ao fator cinemático dominante  $E/\epsilon_b \sim 10^{18}$ , o qual amplifica significativamente os efeitos associados à massa do fóton. Como consequência, o termo massivo domina o deslocamento do limiar de opacidade, em contraste com os efeitos subdominantes associados à discretização do espaço-tempo.

Por fim, o parâmetro de massa obtido mostra-se robusto frente aos efeitos de granularidade do espaço-tempo, uma vez que o vínculo de consistência fenomenológica permanece inalterado mesmo na presença de correções de LQG. Esse resultado reforça a eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca como uma ferramenta teórica eficaz para testes de consistência em cenários além do Modelo Padrão.

No próximo capítulo, continuaremos a explorar relações de dispersão para fótons massivos. Em particular, investigaremos como o efeito Compton, no contexto da teoria quântica de campos e da distribuição de Bose–Einstein, influencia a distribuição de fótons massivos no Universo.

---

## Capítulo 6

---

# Termos de Colisão: Efeito Compton para Fótons Cósmicos Massivos

---

Na cosmologia, o principal interesse não reside no estudo de partículas individuais, mas no comportamento estatístico de grandes conjuntos de partículas. Dessa forma, este estudo considera um conjunto de partículas em uma determinada região do espaço, definindo uma função de distribuição e relacionando-a a um pequeno elemento do espaço de fase em torno de  $(\vec{x}, \vec{p})$ . Ao definir uma função de distribuição  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ , torna-se desnecessário o rastreamento de partículas individuais, uma vez que ela descreve o estado coletivo do sistema no limite de um grande número de partículas contidas no elemento de volume considerado.

Neste trabalho, consideramos apenas o termo-fonte da equação de Boltzmann associado ao efeito Compton. As interações fotônicas mediadas pelo espalhamento Compton revelam diversos aspectos relevantes acerca da distribuição de fótons no Universo. Optamos por abordar esse tema por já ter sido discutido no Capítulo 2, porém sob o ponto de vista cinemático e no contexto da gravidade quântica em laços. Aqui, adotamos uma abordagem distinta, baseada na teoria quântica de campos e utilizando a relação de dispersão de De Broglie–Proca.

Inicialmente, realizamos um estudo de termos de colisão genéricos, que atuam como termos-fonte na equação de Boltzmann. Em seguida, especializamos a análise para o caso particular do espalhamento Compton.

### 6.1 Termos de Colisão

O volume das partículas que se movem dentro do espaço de fase deve ser conservado. O problema é que essas partículas se movem através do espaço de fase de maneiras muito complicadas em geral. Esse problema se torna mais relevante a partir da equação a seguir:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_x f + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla}_p f. \quad (6.1)$$

Um termo-fonte do lado direito da equação pode resolver esse problema, principalmente se as interações partícula-partícula forem relevantes. Esse termo deve ser de colisão, que descreve como as partículas são movidas de um elemento do espaço de fase para o outro na mesma posição  $\vec{x}$ , tal como

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (6.2)$$

No âmbito de Boltzmann, as interações partículas-partículas são chamadas de colisões. Um dos processos mais comuns é quando reações entre partículas do tipo (1) e (2) interagem para formar partículas do tipo (3) e (4):

$$(1)_p + (2)_q \longleftrightarrow (3)_{p'} + (4)_{q'}, \quad (6.3)$$

onde os índices são os momentos das partículas. Além disso, todos os processos físicos microscópicos conservam momento e energia, onde tal conservação de energia é imposta pela função delta de Dirac.

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}' + \vec{q}'; \quad E_1(\vec{p}) + E_2(\vec{q}) = E_3(\vec{p}') + E_4(\vec{q}'). \quad (6.4)$$

Essa interação é local no espaço e no tempo, basta analisar a Fig. 6, onde  $x$  e  $t$  permanecem os mesmos, mas há mudanças nos argumentos dos momentos das partículas. Por exemplo, para  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ , significa que temos que subtrair as partículas do tipo (1) para longe do momento  $\vec{p}$  pela reação direta e adicionar as partículas do tipo (1) que são espalhadas pelo momento  $\vec{p}$  pela reação reversa. Assim, devemos somar todos os outros momentos  $(\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}')$  que afetam  $f(\vec{p})$ . Dessa forma, o termo de colisão é

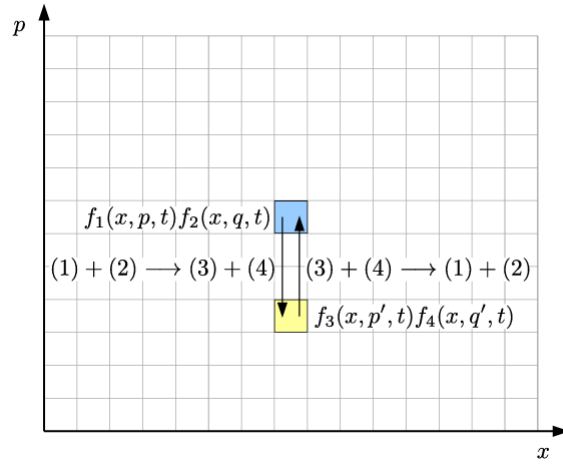
$$\begin{aligned} C[f_1(\vec{p})] &= \sum_{\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}'}^{\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}' + \vec{q}'} \delta_D^{(1)}(E_1(p) + E_2(q) - E_3(p') - E_4(q')) |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \left\{ f_3(\vec{p}') f_4(\vec{q}') - f_1(\vec{p}) f_2(\vec{q}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $|\mathcal{M}|^2$  é a amplitude de espalhamento ao quadrado e depende dos detalhes microfísicos da interação. Importante ressaltar que como lidamos com uma interação de duas partículas, a taxa de espalhamento depende do produto das funções de distribuição  $f_1 f_2$  (reação direta) e  $f_3 f_4$  (reação reversa). Como falamos anteriormente, dispensamos alguns efeitos quânticos: emissão estimulado (ou aprimoramento de Bose) e os blocos de Pauli. Para incluí-los, devemos apresentar fatores como

$$[1 \pm f_1][1 \pm f_2], \quad (6.6)$$

onde o sinal de mais é para bósons e o sinal de menos é para férmions. A partir de agora não usaremos mais o argumento  $(\vec{x}, t)$  nas funções de distribuição, uma vez que eles são calculados no mesmo  $\vec{x}$  e  $t$ . Agora, devemos usar os fatores apropriados para realizar a soma sobre o espaço de fase.

Fonte: Dodelson e Schimdt (2021)



**Figura 6** – Efeito das colisões na função de distribuição do espaço de fase para a partícula (1). O termo de colisão  $C[f_1(x, p, t)]$  ocorre em um espaço unidimensional. Todas as colisões ocorrem localmente, ou seja, na posição fixada  $x$ . Para simplificar o caso, não incluímos os termos para emissão estimulada ou bloqueio de Pauli.

Nesse contexto, o elemento de volume é dado por  $d^3p/(2\pi)^3$ . Seque que as integrais do espaço de fase são quadridimensionais sobre as três componentes do momento e da energia, segundo o cenário relativístico. Contudo a energia é restringida por um cenário *on-shell* que requer  $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$ . A integral segue como

$$\int d^3p \int_0^\infty dE \delta_D^{(1)}(E^2 - p^2 - m^2) = \int d^3p \int_0^\infty dE \frac{\delta_D^{(1)}(E - \sqrt{p^2 + m^2})}{2E}. \quad (6.7)$$

Por meio da função delta, o elemento infinitesimal de volume do espaço de fase de cada partícula  $i$  é dado por  $d^3p_i/[(2\pi)^3 2E_i(p_i)]$ . Através desse resultado, o termo de colisão torna-se

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{2E_1(p)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_2(q)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_3(q')} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_4(q')} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}[\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}'] \delta_D^{(1)}[E_1(p) + E_2(q) - E_3(p') - E_4(q')] \\ &\times \left\{ f_3(\vec{p}') f_4(\vec{q}') [1 \pm f_1(\vec{p})] [1 \pm f_2(\vec{q})] \right. \\ &\quad \left. - f_1(\vec{p}) f_2(\vec{q}) [1 \pm f_3(\vec{p}')] [1 \pm f_4(\vec{q}')] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Novamente, a conservação da energia e do momento são impostas pela função delta. A expressão acima é válida para qualquer interação entre duas partículas tal como na relação (6.3). Essa seção é desenvolvida em detalhes em [72].

## 6.2 Efeito Compton para Fótons Cósmicos Massivos

A partir do tratamento geral dado às interações partícula–partícula descritas na Seção 6.1, utilizaremos um exemplo concreto desse tipo de interação, a saber, o espalhamento Compton atuando sobre a função de distribuição dos fótons cósmicos. Consideraremos a relação de

dispersão de De Broglie–Proca, dada por

$$E = \sqrt{p^2 + m^2},$$

onde  $p$  e  $m$  correspondem, respectivamente, ao momento e à massa do fóton [20, 26]. Em seguida, será necessário introduzir perturbações nas funções de distribuição e abandonar as hipóteses de equilíbrio químico e cinético, com o objetivo de acompanhar de forma mais precisa a evolução da distribuição dos fótons ao longo do processo de recombinação.

Ressalta-se que todo esse procedimento será realizado no contexto de um fóton massivo [27, 31, 48]. O próximo passo consiste em expandir a função de distribuição na ordem zero na forma de Bose–Einstein, com uma modificação que pode, à primeira vista, parecer incomum, mas cujas motivações serão devidamente justificadas ao longo da análise.

$$f(\vec{x}, p, \hat{p}, t) = \left\{ \exp \left[ \frac{E(p)}{K_B T(t) [1 + \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)]} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (6.9)$$

Usaremos o sistema de unidades naturais, por isso  $k_b = c = 1$ . Assim, a função de distribuição torna-se

$$f(\vec{x}, p, \hat{p}, t) = \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T(t) [1 + \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)]} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (6.10)$$

Em um universo suave, os fótons têm uma distribuição homogênea e isotrópica, ou seja, eles não dependem de  $\vec{x}$  e da direção de  $\hat{p}$ . No caso acima a temperatura  $T$  depende apenas do tempo  $t$ . Neste problema, uma vez que inserimos uma perturbação na função de distribuição, vamos considerar um universo não homogêneo e não isotrópico, dependente de  $\vec{x}$  e de  $\hat{p}$ . Observe que essa perturbação na temperatura não depende do módulo  $p$ , apenas do vetor direcional  $\hat{p}$  que é a direção de chegada do fóton. Dessa forma, essa função é representada como um funcional de temperatura em um  $\vec{x}_{Terra}$  fixo na Terra e no tempo  $t_0$  dado pela perturbação fracional  $\Theta(\hat{p}) = \delta T(\hat{p})/T$ . Uma vez que consideramos a perturbação  $\Theta$  pequena, vamos expandir a função (6.10) na primeira ordem em  $\Theta$ . Assim,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{p}, t) &\simeq \frac{1}{e^{\sqrt{p^2 + m^2}/T(t)} - 1} + \left( \frac{\partial}{\partial T} \left[ \exp \left\{ \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T(t)} \right\} - 1 \right]^{-1} \right) T(t) \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t) \\ &= f^{(0)}(p, t) - p \frac{\partial f^{(0)}(p, t)}{\partial p} \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t). \end{aligned} \quad (6.11)$$

A última linha é uma função de distribuição de ordem zero do tipo Bose–Einstein com potencial químico zero,

$$f^{(0)} \equiv \left[ \exp \left\{ \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T} \right\} - 1 \right]^{-1}, \quad (6.12)$$

com o fato de que  $T \partial f^{(0)} / \partial T = -p \partial f^{(0)} / \partial p$ . Agora, deixaremos a discussão sobre interações de partículas de forma genérica e vamos considerar o espalhamento Compton e sua importância na distribuição dos fótons massivos no universo. Ele será o termo fonte da equação (6.2).

A interação é dada a seguir como

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \longleftrightarrow e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}'). \quad (6.13)$$

Dado que o nosso foco é na distribuição de fótons calculadas no momento  $\vec{p}$ , devemos integrar sobre todos os outros momentos  $(\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}')$  que afetam  $f(\vec{p})$ . Considerando a expressão (6.8), os termos de colisão são expressos como

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{2E(p)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}[\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}'] \delta_D^{(1)}[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ &\times [f_e(\vec{q}')f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})], \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde negligenciamos a emissão estimulada e os blocos de Pauli, que seriam  $[1 + f]$  para fótons e  $[1 - f_e]$  para elétrons. Assumimos o limite não relativístico, que é suficiente no momento da recombinação, onde as energias cinéticas dos elétrons, de ordem  $T$ , são muito menores do que a massa dos elétrons, ou seja,  $m_e/T \gg 1$ . Quanto aos fótons, passamos a considerá-los massivos, usando a equação de De Broglie-Proca na energias  $E(p)$  e  $E(p')$ .

Integrando sobre  $d^3q'$  e usando a função delta  $\delta_D^{(3)}$ , temos

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{2m_e \sqrt{p^2 + m^2}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2m_e} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\sqrt{p'^2 + m^2}} \\ &\times \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} + E_e(q) - E_e(|\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}'|) \right] \\ &\times \sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 \left\{ f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

A característica mais importante desse processo é que pouquíssima energia é transferida ( $\vec{p}' \approx -\vec{p}$ ) e, devido à função  $\delta_D^{(1)}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{p'^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + m^2} = E_e(q) - E_e(|\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}'|) &= \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \\ &\simeq \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e} \\ &\lesssim \frac{2pq}{m_e}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

O espalhamento quase elástico justifica  $\Theta(\vec{x}, \hat{p})$  não depender de  $p$ , apenas de  $\hat{p}$ . A função delta pode ser expandida como

$$\begin{aligned} &\delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} + E_e(q) - E_e(|\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}'|) \right] \\ &\simeq \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] + \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial}{\partial p} \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] \\ &= \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] + \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial}{\partial p'} \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

A segunda igualdade faz uso do fato de que para uma função geral  $f$  com a diferença de duas variáveis, podemos escrever  $\partial f(x - y)/\partial x = -\partial f(x - y)\partial y$ . Em adição, temos que  $f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') \approx f_e(\vec{q})$ . Seque que

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{8m_e^2\sqrt{p^2 + m^2}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_e(\vec{q}) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{p'^2 + m^2}} \sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \left\{ \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] + \frac{(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{q}}{m_e} \frac{\partial}{\partial p'} \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] \right\} \\ &\times \left\{ f(\vec{p}') - f(\vec{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

A expressão  $\frac{\vec{q}}{m_e}$  é igual à velocidade volumétrica dos elétrons  $\vec{u}_b$ , e o índice "b" indica a mesma velocidade dos bárions. Para continuar, precisamos da amplitude ao quadrado para o espalhamento Compton. Então, vamos considerar o spin e ângulo médio da teoria quântica de campos [21–23], dado abaixo por

$$\sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 = 32\pi\sigma_T m_e^2, \quad (6.19)$$

onde  $\sigma_T$  é a seção transversal de Thomson e ignoramos os efeitos de polarização.

Devemos, também, considerar a expansão (6.11),

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{2\pi^2 n_e \sigma_T}{\sqrt{p^2 + m^2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{p'^2 + m^2}} \\ &\times \left\{ \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] + (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{u}_b \frac{\partial \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right]}{\partial p'} \right\} \\ &\times \left\{ f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p) - p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta(\hat{p}') + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

A integral sobre  $d^3q$  fornece  $n_e/2$ , considerando os dois estados de spin do elétron, ou seja,  $g_e = 2$ . Somado a isso, devemos usar o ângulo sólido gerado pela transformação abaixo:

$$\int d^3p' \equiv \int_0^\infty dp' p'^2 \int d\Omega'. \quad (6.21)$$

Substituindo na equação a seguir e rearranjando os termos,

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{n_e \sigma_T}{4\pi\sqrt{p^2 + m^2}} \int_0^\infty \frac{dp' p'^2}{\sqrt{p'^2 + m^2}} \\ &\times \int d\Omega' \left\{ \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] \left( -p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta(\hat{p}') + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right) \right\} \\ &\times \left\{ (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{u}_b \frac{\partial \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right]}{\partial p'} \right\} (f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p)). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Neste fase, é conveniente introduzir o monopolo

$$\Theta_0(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{p}', \vec{x}, t), \quad (6.23)$$

onde esse monopolo  $\Theta_0$  é uma integral da perturbação do fóton em qualquer coordenada dada sobre todas as direções do fóton, mas expressa como uma perturbação da temperatura através da distribuição de Bose-Eintein. Uma vez que a temperatura é constante em todo o espaço, não podemos absorver esse monopolo na definição de temperatura de ordem zero. Notando que  $\int d\Omega' \vec{p}' \cdot \vec{u}_b = 0$ , a integração sobre o ângulo sólido leva à

$$\begin{aligned}
 C[f(\vec{p})] &= \frac{n_e \sigma_T}{\sqrt{p^2 + m^2}} \int_0^\infty \frac{dp' p'^2}{\sqrt{p'^2 + m^2}} \\
 &\times \left\{ \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right] \left( -p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta_0 + p \frac{\partial f^{(0)}(p)}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \vec{p} \cdot \vec{u}_b \frac{\partial \delta_D^{(1)} \left[ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p'^2 + m^2} \right]}{\partial p'} (f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p)) \right\}. \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

O primeiro termo é resolvido simplismente por meio da função delta, já o segundo termo é resolvido através de integração por partes, fornecendo-nos

$$C[f(\vec{p})] = -\sqrt{p^2 + m^2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T \left[ \Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \frac{\hat{p} \cdot \vec{u}_b}{\sqrt{1 + m^2/p^2}} \right], \quad (6.25)$$

que é a equação de Compton para fótons cósmicos massivos através da função de distribuição de Bose-Einstein.

### 6.3 Conclusões Parciais

Primeiramente, é importante considerar que quando levamos o limite da massa do fóton  $m$  à zero, retornamos a equação onde a energia do fóton é  $E(p) = p$ , em unidades naturais. Ela é dada por

$$C[f(\vec{p})] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{u}_b]. \quad (6.26)$$

Mesmo sem deduzir em detalhes a equação de Boltzmann, já podemos usar o espalhamento Compton para descrever a distribuição de fótons. Agora, devemos analisar duas situações peculiares. Na primeira, a velocidade volumétrica (*bulk velocity*) dos elétrons é igual a zero ( $\vec{u}_b = 0$ ). Quando o espalhamento Compton é forte, apenas um monopolo sobrevive, eliminando todas as anisotropias em cada ponto  $(\vec{x}, t)$ , ou seja, o termo de colisão serve para levar os fótons de  $\Theta$  à  $\Theta_0$ . Isso quer dizer que os fóton de todas as direções têm a mesma temperatura, de maneira que o fluxo em qualquer direção é igual ao fluxo médio angular  $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, t) = \Theta_0(\vec{x}, t)$ .

No segundo caso, onde o espalhamento Compton carrega uma velocidade volumétrica dos fótons, a amplitude da velocidade e direção dos elétrons gera um dipolo. Isso leva o espalhamento dos fótons à uma consequência simples: eles passam a se comportar como um fluido. Assim, o acoplamento forte faz com que fótons e elétrons passem a se comportar como um único fluido

livre. Após o desacoplamento fóton-bárion, o efeito Compton deixa de ser eficiente de tal forma que os fótons não se comportam mais como um fluido após a recombinação.

Contudo, é importante lembrar que o efeito Compton serve como um termo fonte para a equação de Boltzmann, conforme representado por (6.2). Essa representação de Boltzmann permanece válida após o desacoplamento, permitindo, também, que os fótons se comportem como um fluxo livre e, após suas longas jornadas, cheguem aos nossos detectores.

Como esse espalhamento Compton se comporta quando consideramos um fóton massivo? A resposta a essa pergunta está profundamente relacionada às interpretações e perspectivas do autor; portanto, optamos por deixá-la para as Considerações Finais, que serão apresentadas no capítulo seguinte.

---

## Capítulo 7

---

# Considerações Finais

---

Esta tese doutoral teve como objeto de estudo eletrodinâmicas além do Modelo Padrão e seus efeitos em diversos contextos físicos. Em particular, investigamos os efeitos da eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca e da eletrodinâmica com correções provenientes da gravidade quântica em laços, aplicadas a diferentes problemas na física teórica.

As considerações finais abordam dois pontos de grande relevância para qualquer tese ou trabalho acadêmico: as impressões e perspectivas do autor, bem como a autocrítica em relação ao desenvolvimento do trabalho.

### 7.1 Impressões e Perspetivas do Autor

A partir de agora, daremos continuidade ao que foi discutido nas conclusões parciais de cada capítulo, com foco nas impressões e perspectivas do autor acerca de cada problema abordado. Para tanto, serão analisadas a Introdução e a Contextualização deste trabalho, bem como os Capítulos 2 a 6, nos quais se desenvolve a presente tese — desta vez sob uma perspectiva pessoal do autor, acompanhada de uma análise do próprio estilo adotado na Conclusão Final.

#### – Capítulo 1: Introdução e Contextualização

##### **Impressões:**

- Um dos pontos mais importantes destacados na introdução foi a constatação, confirmada ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho doutoral, da relevância da eletrodinâmica de Maxwell. O notável sucesso teórico e experimental dessa teoria deu origem à necessidade de se propor extensões ao seu formalismo, como forma de buscar validações em áreas emergentes da física e, conseqüentemente, abrir novos horizontes de investigação. Nesse contexto, existem atualmente cerca de 60 extensões da eletrodinâmica maxwelliana,

agrupadas, por afinidade, em quatro grandes categorias. Apesar dessa riqueza teórica, a realidade é que a maioria dos físicos de outras áreas desconhece a amplitude e a diversidade dessas extensões da eletrodinâmica;

- É comum encontrarmos teses doutorais em física com uma introdução de poucas páginas. Nesta tese, optou-se por uma introdução mais extensa, contemplando de forma detalhada os conceitos e equações necessários à resolução dos problemas apresentados nos capítulos subsequentes, de modo a não deixar lacunas teóricas fundamentais;
- Considera-se que a estrutura da tese, acompanhada de uma contextualização adequada, sustentada por referências clássicas e contemporâneas, constituiu uma combinação eficaz para situar os leitores quanto aos problemas que seriam abordados ao longo do trabalho.

### **Perspectivas:**

- Espera-se que esse estilo de introdução possa servir como modelo para estudantes que ainda não encontram uma forma adequada de introduzir suas dissertações e teses, especialmente no que se refere à Seção de Estrutura e Contextualização, a qual se considera particularmente satisfatória e original.

## **– Capítulo 2: Correções da Gravidade Quântica em Laços na Cinemática do Efeito Compton**

### **Impressões:**

- Consideramos fundamental a inclusão de uma introdução histórica, uma vez que o efeito Compton é abordado em dois capítulos desta tese. Poucos leitores conhecem a trajetória de pesquisa de Arthur Compton e os inúmeros desafios enfrentados até a formulação do efeito que leva seu nome, conforme descrito detalhadamente no início do Capítulo 2;
- Ressaltamos também que poucos físicos reconhecem a importância do efeito Compton nos primórdios da teoria quântica - algo que o autor desse trabalho também desconhecia. O longo processo de investigação teórica e experimental associado a esse fenômeno contribuiu decisivamente para o desenvolvimento da mecânica quântica relativística proposta por Paul Dirac, desempenhando papel central na futura síntese entre a mecânica quântica e a eletrodinâmica. O uso de fontes primárias e secundárias confere solidez conceitual e reforça a relevância do fenômeno como laboratório para investigações fundamentais;
- Após todo o desenvolvimento teórico, utilizando a equação (2.13), esperava-se obter um resultado ainda mais próximo dos dados experimentais do que aquele originalmente encontrado por Compton, em virtude da inclusão dos termos de correção provenientes da gravidade quântica em laços. No entanto, obteve-se exatamente o mesmo resultado teórico

de Compton para o valor de  $\lambda'$ . Esse fato deve-se à magnitude extremamente reduzida dos termos de correção associados à LQG;

- A comparação entre o deslocamento Compton usual e a correção induzida pela gravidade quântica em laços constitui um dos pontos mais relevantes do capítulo. As estimativas quantitativas obtidas para diferentes regimes espectrais, incluindo raios X e radiação gama de alta energia, fornecem uma interpretação física clara da relevância relativa dessas correções. Em particular, observa-se que, ao considerar o espectro de raios gama profundos, a correção associada à LQG é de  $10^7$  vezes maior do que aquela obtida no regime de raios X. Isso indica que, à medida que se acessam energias mais elevadas na faixa gama, aumenta-se a sensibilidade a possíveis efeitos de gravidade quântica no deslocamento Compton, tornando esse regime especialmente promissor para a investigação dessas contribuições;
- Outro ponto de destaque neste capítulo refere-se ao ângulo de espalhamento do fóton,  $\theta$ , o qual não apresentou qualquer modificação em decorrência das correções introduzidas pela LQG.

### Perspectivas:

- Devemos relacionar esses resultados com teorias alternativas de gravidade quântica. Comparar as previsões da LQG com abordagens como teorias de cordas, gravidade emergente ou modelos semiclássicos de espaço-tempo discreto permitirá identificar assinaturas universais da quantização do espaço-tempo ou efeitos específicos de cada teoria;
- Ressalta-se, ainda, a importância do desenvolvimento de ferramentas computacionais e métodos numéricos adequados para a análise do efeito Compton com correções da gravidade quântica em laços. Esse tipo de cálculo envolve escalas de comprimento da ordem do comprimento de Planck e relações de dispersão altamente complexas, o que impõe desafios significativos do ponto de vista computacional. Nesse contexto, o aprimoramento de algoritmos de alta precisão e a implementação de simulações computacionais avançadas tornam-se fundamentais para a investigação de regimes energéticos ainda inacessíveis experimentalmente, bem como para o estudo de fenômenos correlatos associados à propagação de fótons em cenários de gravidade quântica;
- Em síntese, embora os efeitos da LQG sobre o efeito Compton sejam hoje praticamente imperceptíveis experimentalmente, o estudo dessas correções oferece um caminho promissor para testar teorias de gravidade quântica e compreender os limites da física clássica e quântica em escalas extremas;
- É interessante investigar se as correções da gravidade quântica em laços, presentes na relação de dispersão modificada pela LQG, em (2.9), poderiam afetar a fase de partículas carregadas no efeito Aharonov–Bohm. Apesar de pequenas em escalas laboratoriais, essas

correções poderiam induzir sutis alterações de fase e birrefringência, especialmente para partículas de alta energia ou trajetórias longas, oferecendo uma oportunidade de explorar possíveis assinaturas observáveis da estrutura quântica do espaço-tempo;

- A radiação de corpo negro, que descreve a emissão eletromagnética de um corpo em equilíbrio térmico, poderia sofrer pequenas modificações no espectro devido às correções da gravidade quântica em laços presentes na relação de dispersão. Esses efeitos seriam mais perceptíveis em frequências extremamente altas, sugerindo a possibilidade de investigar desvios sutis em espectros térmicos de alta energia ou contextos cosmológicos como uma assinatura de gravidade quântica.

### – Capítulo 3: Relações de Dispersão Modificadas com Campo Magnético de Fundo

#### Impressões:

- O aspecto mais surpreendente foi que, ao considerar um campo magnético de fundo constante e o campo elétrico e magnético do fóton, sem desprezar a não linearidade da equação de Maxwell modificada pela LQG, observou-se que o vácuo quântico, devido às suas flutuações quânticas, apresentou birrefringência e dicroísmo, ou seja, adquiriu propriedades típicas de meios materiais. Tal resultado mostrou-se particularmente surpreendente para o autor desta tese, uma vez que havia certo ceticismo quanto a esse comportamento do vácuo, mas ele se revelou contundente. Lembrando que esse fenômeno não ocorre no vácuo clássico;
- Os resultados obtidos para relações de dispersão, índices de refração e as relações energia-momento evidenciam como a LQG pode influenciar a propagação de ondas eletromagnéticas, sugerindo a existência de efeitos observáveis em contextos astrofísicos ou laboratoriais de alta intensidade;
- De forma geral, o capítulo reforça a relevância do estudo da não linearidade induzida pela LQG e a importância de se considerar o campo magnético de fundo, estabelecendo uma base sólida para futuras análises teóricas, numéricas e experimentais.

#### Perspectivas:

- Uma primeira perspectiva é realizar uma análise numérica das soluções das relações de dispersão modificadas pela LQG. Isso permitiria avaliar com maior precisão a influência do campo magnético de fundo sobre a birrefringência e o dicroísmo do vácuo quântico;
- Uma abordagem promissora envolve o estudo experimental dos efeitos previstos usando lasers de altíssima potência, como SULF e SEL. Ensaios laboratoriais poderiam fornecer

limites experimentais sobre os parâmetros  $\theta_i$  e  $\Upsilon$ , permitindo confrontar previsões da LQG com medições diretas do índice de refração do vácuo magnetizado;

- É de interesse do autor abordar problemas de cosmologia através da eletrodinâmica não linear, utilizando o método que, no Capítulo 3, foi denominado *Método do Determinante da Matriz  $M_{ij}$* . Este método permite tratar de forma sistemática as relações de dispersão de fótons em meios não lineares, considerando efeitos de birrefringência, polarização e interações com campos de fundo, de maneira adequada para aplicações em escala cosmológica.

## – Capítulo 4: Anomalias de Limiar Induzidas por Violação da Invariância de Lorentz e a Gravidade Quântica em Laços

### Impressões:

- A possibilidade da existência de um limite superior para a produção do par elétron-pósitron por dois fótons foi inicialmente proposta por Kluźniak [107] em 1999. Posteriormente, em 2003, Mattingly et al. [93] demonstraram teoremas que identificam esse limite superior para o caso em questão.

Ou seja, apenas fótons com energias entre  $\omega(k_<)$  e  $\omega(k_>)$  podem ser absorvidos ao interagirem com a luz de fundo  $\epsilon_b$  para formar um par elétron-pósitron.

Em 2021 e 2023, Li e Ma publicaram dois trabalhos utilizando uma relação de dispersão modificada genérica com um fator LIV [66, 67]. Eles refizeram toda a cinemática, encontrando uma relação que calcula um fator crítico LIV a partir dos valores das luzes de fundo EBL e CMB. Esses fatores podem ser comparados com outros fatores que violam a invariância de Lorentz em diversas hipóteses além do Modelo Padrão.

Nossa contribuição foi dar continuidade a essas investigações, aplicando-as à LQG como uma forma de testar os resultados dos trabalhos anteriores. Foi surpreendente observar que, assim como os outros pesquisadores sugeriram, no caso da LQG, uma hipótese que viola a invariância de Lorentz comportou-se exatamente como Li e Ma previam utilizando relações de dispersão modificadas de forma genérica;

- Dessa forma, passamos a ter um limite superior e inferior para o caso EBL, em que parte da distribuição de energia situa o fator LIV no caso II, estabelecendo limites para a absorção de fótons gama pela EBL. Isso mostrou que a presença de LIV faz com que as teorias se comportem de forma completamente diferente da cinemática relativística usual, que possui apenas um limiar inferior para a atenuação dos fótons;
- A análise das anomalias de limiar evidencia que mesmo pequenas correções induzidas por LQG podem alterar significativamente os limites de energia para a produção de

pares elétron–pósitron, especialmente na escala de PeV, mostrando que a fenomenologia LIV/LQG é altamente sensível às condições cinemáticas;

- A abordagem adotada, combinando cinemática relativística, relações de dispersão modificadas e efeitos de LQG, fornece um quadro consistente para explorar possíveis sinais de LIV em observações astrofísicas, ao mesmo tempo em que mantém a generalidade necessária para não depender de modelos específicos de teoria fundamental;
- Por fim, a comparação com a cinemática relativística padrão destaca que, mesmo para pequenas modificações, os efeitos de limiar podem se manifestar de maneira qualitativa diferente, indicando que sinais sutis de LIV e LQG podem estar presentes nos dados de fótons cósmicos, ainda que não sejam imediatamente evidentes.

### Perspectivas:

- Refino das relações de dispersão modificadas, incorporando correções de ordem superior na escala de Planck e, eventualmente, alterações nas relações de dispersão de férmions, avaliando seu impacto nos limiares cinemáticos;
- Extensão para outros processos de alta energia, como a produção de pares de múons e tau e a dispersão de neutrinos ultraenergéticos;
- Análise de cenários astrofísicos mais detalhados, considerando a distribuição espectral completa da EBL, diferentes trajetórias cosmológicas para os fótons gama, e efeitos de anisotropias na EBL e na CMB;
- Integração com dados experimentais, comparando os limiares teóricos com espectros observados por detectores como LHAASO, HESS, MAGIC, FermiLAT e CTA, buscando restrições mais precisas para o parâmetro LIV  $\xi$  e a influência da LQG;
- Investigação da compatibilidade com teorias além do Modelo Padrão, incluindo teorias de cordas, modelos supersimétricos, quebras espontâneas de simetria e relatividade duplamente especial, visando desenvolver uma *framework* unificada para efeitos de LIV;
- Contribuição para a construção de subsídios teóricos e experimentais que possam apoiar futuros estudos em gravidade quântica, física além do Modelo Padrão e na fenomenologia de fótons de ultra-alta energia, fornecendo diretrizes para novos experimentos e observações.

## – Capítulo 5: Eletrodinâmica Massiva de De Broglie–Proca e LQG: Vínculo de Consistência e Hierarquia de Escalas

### Impressões:

- Neste capítulo, analisamos uma abordagem moderna de fenomenologia, na qual dados astrofísicos de ponta não são utilizados apenas para comparação direta com previsões teóricas, mas também para estabelecer vínculos de consistência cinemática entre a observação de fótons de ultra-alta energia e extensões da eletrodinâmica, como a teoria de De Broglie–Proca;
- Discutimos que o valor da massa do fóton obtido, da ordem de  $m_\gamma \sim 10^{-3}$  eV, encontra-se muitas ordens de grandeza acima dos limites experimentais mais restritivos disponíveis na literatura. Isso implica que tal resultado não deve ser interpretado como um limite físico realista, mas sim como uma condição de consistência cinemática. Em particular, ele expressa a compatibilidade entre a hipótese de um fóton massivo e a observação de fótons na escala de PeV propagando-se sem atenuação significativa. Dessa forma, os limites experimentais mais rigorosos — sendo muito inferiores a esse valor — permanecem plenamente consistentes com as observações astrofísicas recentes;
- Um dos resultados mais relevantes do capítulo é a identificação de uma hierarquia de escalas, na qual os efeitos associados à massa de repouso do fóton dominam amplamente sobre correções provenientes da gravidade quântica em laços. Esse resultado revela um aspecto conceitual mais profundo: nem todo regime de altas energias é igualmente sensível a efeitos de nova física.

### Perspectivas:

- Realizamos uma análise de consistência fenomenológica sob condições extremas, sem a pretensão de construir uma teoria fundamental completa. Enquanto a filosofia da física tradicionalmente enfatiza o estudo de teorias fundamentais e suas implicações, este trabalho sugere uma perspectiva complementar: avaliar teorias também pela sua capacidade de permanecerem consistentes dentro de domínios bem definidos de energia e escala. Nesse sentido, a consistência interna em regimes físicos específicos torna-se um critério relevante de análise conceitual;
- O fóton que estabelece o “teto cinemático” considerado neste capítulo possui energia da ordem de 1,42 PeV, conforme detectado pelo observatório LHAASO. É razoável esperar que, em um futuro próximo, novos observatórios de ultra-altas energias ampliem esse regime, fornecendo medições ainda mais precisas e possivelmente redefinindo os parâmetros de consistência aqui discutidos. Isso reforça o papel da astrofísica de altas energias como uma das principais ferramentas para sondar possíveis violações ou extensões das leis

conhecidas, conectando o Modelo Padrão, cenários de nova física e dados experimentais em um mesmo arcabouço fenomenológico;

- A hierarquização obtida entre os efeitos associados à massa de repouso do fóton e aqueles provenientes da discretização do espaço-tempo amplia o alcance conceitual do capítulo. Esse resultado sugere que a estrutura da cinemática relativística pode desempenhar um papel seletivo na manifestação de efeitos de nova física, favorecendo determinados tipos de correção em detrimento de outros. Assim, abre-se a possibilidade de que exista um comportamento mais geral na forma como extensões além do Modelo Padrão se acoplam à cinemática relativística, o que merece investigação mais aprofundada em diferentes contextos teóricos.

### – Capítulo 6: Termos de Colisão: Efeito Compton para Fótons Massivos

#### Impressões:

- A extensão do formalismo padrão para fótons massivos, utilizando a relação de dispersão de De Broglie–Proca, constitui um elemento original do capítulo e amplia o alcance da análise tradicional do efeito Compton em cosmologia;
- A introdução da perturbação de temperatura na função de distribuição de Bose–Einstein e sua expansão em primeira ordem são consistentes com o formalismo da cosmologia perturbativa e bem adaptadas ao cenário de fótons massivos;
- A identificação dos papéis do monopolo  $\Theta_0$ , da anisotropia angular  $\Theta(\hat{p})$  e do dipolo associado à velocidade volumétrica dos bárions  $\vec{u}_b$  fornece uma interpretação física clara dos termos que emergem na equação final de Compton;
- Analisando a equação de De Broglie–Proca, temos que a massa do fóton  $m$  é o suficientemente menor que o momento  $p$  para que  $\sqrt{p^2 + m^2} \approx p$  e  $\sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \approx 1$ . Isso implica que a massa do fóton é tão pequena que não altera significativamente os fenômenos descritos nas conclusões parciais do Capítulo 6, com ou sem a velocidade volumétrica dos fótons ( $\vec{u}_b$ ). Dessa forma, no regime de acoplamento forte, os fótons e elétrons continuam a se comportar como um fluido livre. E, na presença da equação de Boltzmann, durante o desacoplamento, um fluido de fótons continua a chegar à Terra — mas com a possibilidade da detecção de uma pequena massa.

#### Perspectivas:

- Atualmente, temos uma boa compreensão de como o espalhamento Compton produz a polarização da CMB [122, 123]. Para estudar esse fenômeno de forma quantitativa, é necessário resolver a equação de Boltzmann, levando em conta os dois estados de polarização

dos fótons e a dependência do espalhamento Compton em relação à polarização, refletida no termo de colisão. Começamos considerando uma única perturbação de onda plana para a distribuição de fótons.

Dito isso, propomos refazer esse caminho de compreensão da polarização da CMB por meio de fótons massivos, utilizando a equação de De Broglie–Proca, com o objetivo de investigar uma cosmologia da CMB além do Modelo Padrão. Essa é uma possibilidade de pesquisa seguindo a metodologia da Ref. [72];

- Outro caminho é deduzir a CMB, com fóton nulo, por meio de eletrodinâmica não linear, através do mesmo formalismo da perspectiva anterior.

## 7.2 Autocrítica em Relação ao Desenvolvimento do Trabalho

Ao longo deste trabalho, procurou-se apresentar as extensões da eletrodinâmica tradicional de forma rigorosa, incluindo a eletrodinâmica massiva de De Broglie–Proca e as correções oriundas da gravidade quântica em laços. Reconhece-se, entretanto, que algumas aproximações e parâmetros efetivos introduzidos dependem de estimativas, enquanto certas derivações matemáticas foram resumidas para preservar a coerência e a fluidez do texto. Essas escolhas impõem limitações à generalidade de algumas conclusões e à exploração detalhada de casos específicos. Ainda assim, o trabalho cumpre seu objetivo de integrar teorias consolidadas e propostas emergentes, fornecendo um panorama consistente para futuras investigações e estimulando reflexões críticas acerca dos limites atuais das teorias apresentadas.

O Capítulo 2 desenvolve uma formulação do efeito Compton com correções provenientes da gravidade quântica em laços, apresentando, contudo, algumas limitações. A análise numérica evidencia que as correções da LQG permanecem extremamente suprimidas em escalas experimentais acessíveis. Não foram utilizados experimentos modernos do efeito Compton devido à dificuldade de obtenção de dados adequados, embora o experimento clássico de 1923 continue relevante tanto do ponto de vista histórico quanto conceitual. A coincidência entre os resultados clássicos e os corrigidos sugere que o efeito Compton não constitui um observável particularmente sensível às modificações induzidas pela gravidade quântica, mesmo em regimes de alta energia. Entretanto, à medida que se acessam faixas energéticas cada vez mais elevadas no espectro gama profundo, aumenta também a possibilidade de que correções associadas à LQG produzam desvios observáveis em relação ao efeito Compton convencional.

O trabalho desenvolvido no Capítulo 3 apresenta, de maneira formalmente consistente, relações de dispersão modificadas na presença de um campo magnético de fundo, incluindo efeitos não lineares associados à gravidade quântica em laços. Contudo, a análise utiliza aproximações restritivas, como a linearização do termo não linear e a ausência de campos elétricos de fundo, embora estes provavelmente produzam apenas modificações secundárias. Além disso, apesar de fenômenos como birrefringência e dicroísmo emergirem naturalmente das relações anisotrópicas

e complexas obtidas, a presença de componentes imaginárias não foi acompanhada por uma análise detalhada de estabilidade ou causalidade. A ausência de estimativas quantitativas para cenários observacionais também limita a avaliação empírica dos resultados, fazendo com que o principal mérito do capítulo resida na construção de um arcabouço teórico para o estudo das propriedades ópticas do vácuo magnetizado no contexto da LQG.

O Capítulo 4 desenvolve uma análise cinemática consistente das anomalias de limiar induzidas por violações da invariância de Lorentz no contexto da LQG, ainda que baseada em aproximações que restringem o alcance quantitativo dos resultados. As estimativas numéricas, particularmente aquelas associadas à luz de fundo extragaláctica (EBL), são afetadas por incertezas significativas devido ao caráter ainda pouco determinado de seu espectro. Dessa forma, os resultados devem ser interpretados principalmente como indicativos qualitativos do possível impacto da LQG sobre anomalias de limiar, ressaltando o caráter exploratório da análise.

O Capítulo 5 estabelece um vínculo de consistência cinemática baseado em uma abordagem fenomenológica bem motivada. Contudo, os resultados obtidos dependem de simplificações analíticas e expansões perturbativas válidas apenas em regimes específicos. Nesse sentido, uma análise computacional mais geral poderia complementar e fortalecer os resultados analíticos e numéricos apresentados. Além disso, a hierarquização de escalas observada no cenário do processo de Breit–Wheeler constitui um resultado conceitualmente interessante, mas não deve ser generalizada para outros regimes físicos, uma vez que depende de uma parametrização bastante específica das relações de dispersão consideradas.

No problema final abordado no Capítulo 6, embora a apresentação tenha buscado rigor formal e detalhamento do efeito Compton para fótons massivos, algumas simplificações foram necessárias, como a negligência de efeitos de polarização, emissão estimulada e bloqueio de Pauli. Essas escolhas implicam que certas características do comportamento real dos fótons podem não estar completamente representadas. Além disso, a expansão em pequenas perturbações e a adoção do limite não relativístico para os elétrons restringem a aplicabilidade direta das equações a regimes específicos, como a era da recombinação, não abrangendo cenários mais gerais envolvendo altas energias ou flutuações extremas. O reconhecimento dessas limitações é importante tanto para a correta interpretação dos resultados quanto para orientar estudos futuros que possam incorporar efeitos adicionais e aproximar-se de uma descrição mais completa do comportamento de fótons massivos no Universo.

Em síntese, o trabalho integra teorias consolidadas e propostas emergentes, apresentando limitações claras quanto à generalidade e à previsibilidade quantitativa de alguns resultados, mas evidenciando, ao mesmo tempo, direções promissoras para futuras investigações em fenomenologia, eletrodinâmica massiva e gravidade quântica.

---

## Referências

---

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 5th ed. Oregon, USA: Reed College, 2023.
- [2] K. D. Machado, *Eletromagnetismo*, vol. 1. São Paulo, Brasil: Editora Todapalavra, 2012.
- [3] J. Schwichtenberg, *No-Nonsense Electrodynamics: A Student Friendly Introduction*. No-Nonsense Books, 2018.
- [4] D. Sorokin, *Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications*, Lecture Notes, Università degli Studi di Padova, 2022.
- [5] C. Castelnovo, R. Moessner, and S. L. Sondhi, “Magnetic monopoles in spin ice,” *Nature*, vol. 451, pp. 42–45, 2008.
- [6] M. Eto, Y. Hamada, and M. Nitta, “Topological structure of a Nambu monopole in two-Higgs-doublet models: Fiber bundle, Dirac’s quantization, and a dyon,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 105018, 2020.
- [7] W. Dittrich, “On the Pauli–Weisskopf anti-Dirac paper,” *Eur. Phys. J. H*, vol. 40, pp. 261–278, 2015.
- [8] K. J. Le Couteur, “Dirac’s new electrodynamics,” *Nature*, vol. 169, pp. 146–147, 1952.
- [9] L. S. Dreissen *et al.*, “Improved bounds on Lorentz violation from composite pulse Ramsey spectroscopy in a trapped ion,” *Nat. Commun.*, vol. 13, p. 7314, 2022.
- [10] A. Gómez and L. Urrutia, “The axial anomaly in Lorentz violating theories,” *Symmetry*, vol. 13, no. 7, p. 1181, 2021.
- [11] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “Topological insulators and superconductors,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 1057–1110, 2011.
- [12] I. Bandos *et al.*, “Nonlinear duality-invariant conformal extension of Maxwell’s equations,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 121703(R), 2020.

- 
- [13] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. N. Pope, and P. K. Townsend, “The Born–Infeld action from conformal invariance of the open superstring,” *Phys. Lett. B*, vol. 188, no. 1, pp. 70–74, 1987.
- [14] S. I. Kruglov, “On generalized ModMax model of nonlinear electrodynamics,” *Phys. Lett. B*, vol. 822, p. 136633, 2021.
- [15] I. Gullu and S. H. Mazharimousavi, “Double-logarithmic nonlinear electrodynamics,” *Phys. Scr.*, vol. 96, p. 045217, 2021.
- [16] C. Hickey and S. Trebst, “Emergence of a field-driven U(1) spin liquid in the Kitaev honeycomb model,” *Nat. Commun.*, vol. 10, p. 530, 2019.
- [17] A. A. Valido, “Quantum dissipation of planar harmonic systems: Maxwell–Chern–Simons theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 016003, 2019.
- [18] I. Neupert *et al.*, “Fractional (Chern and topological) insulators,” *Phys. Scr.*, vol. T164, 2015.
- [19] R. Jackiw and S.-Y. Pi, “Chiral gauge theory for graphene,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 266402, 2007.
- [20] A. Proca, “Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs,” *J. Phys. Radium*, vol. 7, no. 8, pp. 347–353, 1936.
- [21] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [22] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1995.
- [23] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [24] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*. Bristol, UK: IOP Publishing, 2003.
- [25] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Berlin, Germany: Springer, 1996.
- [26] S. Mikki, “Proca metamaterials, massive electromagnetism, and spatial dispersion,” *Ann. Phys. (Berlin)*, vol. 533, p. 2000625, 2021.
- [27] L.-C. Tu, J. Luo, and G. T. Gillies, “The mass of the photon,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 68, pp. 77–130, 2005.
- [28] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York, NY, USA: Wiley, 1999.
- [29] C. Brau, *Modern Problems in Classical Electrodynamics*. New York, NY, USA: Oxford Univ. Press, 2004.

- [30] S. Coleman, *Quantum Field Theory: Lectures of Sidney Coleman*. Singapore: World Scientific, 2019.
- [31] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “Photon and graviton mass limits,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 939–979, 2010.
- [32] E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, “New experimental test of Coulomb’s law,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 26, pp. 721–724, 1971.
- [33] L. de Broglie, *La mécanique ondulatoire du photon*. Paris, France: Hermann, 1940.
- [34] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “Terrestrial and extraterrestrial limits on the photon mass,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 43, pp. 277–296, 1971.
- [35] M. Füllekrug, “Probing the speed of light with radio waves at extremely low frequencies,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 043901, 2004.
- [36] E. Schrödinger, “The Earth’s and the Sun’s permanent magnetic fields in the unitary field theory,” *Proc. R. Irish Acad. A*, vol. 49, pp. 135–148, 1943.
- [37] L. Bass and E. Schrödinger, “Must the photon mass be zero?” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 232, pp. 1–6, 1955.
- [38] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “New geomagnetic limit on the mass of the photon,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 21, pp. 567–569, 1968.
- [39] E. Fischbach *et al.*, “New geomagnetic limits on the photon mass,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, pp. 514–517, 1994.
- [40] L. Davis Jr., A. S. Goldhaber, and M. M. Nieto, “Limit on the photon mass deduced from Pioneer-10 observations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 1402–1405, 1975.
- [41] D. D. Ryutov, “Using plasma physics to weigh the photon,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 49, pp. B429–B438, 2007.
- [42] D. D. Ryutov, “The role of finite photon mass in magnetohydrodynamics of space plasmas,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 39, pp. A73–A82, 1997.
- [43] Y. Yamaguchi, “A composite theory of elementary particles,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 11, pp. 1–36, 1959.
- [44] R. Lakes, “Experimental limits on the photon mass,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 1826–1829, 1998.
- [45] C. L. Carilli and G. B. Taylor, “Cluster magnetic fields,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 40, pp. 319–348, 2002.

- [46] H. Ohno *et al.*, “Probing intercluster magnetic fields with cosmic microwave background,” *Astrophys. J.*, vol. 584, pp. 599–607, 2003.
- [47] T. E. Clarke, P. P. Kronberg, and H. Böhringer, “A new radio–X-ray probe of galaxy cluster magnetic fields,” *Astrophys. J.*, vol. 547, pp. L111–L114, 2001.
- [48] Particle Data Group, “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 110, p. 030001, 2024.
- [49] C. Rovelli, *Quantum Gravity*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [50] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2007.
- [51] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2014.
- [52] J. Alfaro, H. A. Morales-Técotl, and L. F. Urrutia, “Loop quantum gravity and light propagation,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 103509, 2002.
- [53] C. Rovelli and L. Smolin, “Spin networks and quantum gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, no. 10, pp. 5743–5759, 1995.
- [54] J. C. Baez, “Spin networks in nonperturbative quantum gravity,” arXiv:gr-qc/9504036.
- [55] T. Thiemann, “The inverse loop transform,” *J. Math. Phys.*, vol. 39, no. 2, pp. 1236–1248, 1998.
- [56] P. Gaete and J. A. Helayël-Neto, “Gambini-Pullin electrodynamics as a scenario for Cherenkov radiation in QED vacuum,” *Phys. Lett. B*, vol. 847, p. 138312, 2023.
- [57] R. Gambini and J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space–time,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 124021, 1999.
- [58] A. H. Compton, “A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements,” *Phys. Rev.*, vol. 21, p. 483, 1923.
- [59] R. Eisberg and R. Resnick, *Física Quântica: Átomos, Sólidos, Moléculas, Núcleos e Partículas*. Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier, 1985.
- [60] H. Li and B.-Q. Ma, “Speed variations of cosmic photons and neutrinos from loop quantum gravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 836, 2023.
- [61] P. A. L. Mourão, G. L. L. W. Levy, and J. A. Helayël-Neto, “Reassessing aspects of the photon’s LQG-modified dispersion relations,” *Chinese Phys. C*, vol. 50, no. 3, p. 135106, 2026.

- [62] M. J. Neves *et al.*, “Dispersion relations in nonlinear electrodynamics and the kinematics of the Compton effect in a magnetic background,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, p. 015006, 2021.
- [63] E. Hecht, *Optics*, 5th ed. Pearson, 2016.
- [64] Shanghai Ultra-Laser Facilities (SULF). Available: <http://sulf.siom.ac.cn/>
- [65] Station of Extreme Light (SEL), Shanghai, 2023. Available: <https://eli-laser.eu/>
- [66] H. Li and B.-Q. Ma, “Threshold anomalies of ultra-high energy cosmic photons due to Lorentz invariance violation,” *J. High Energy Astrophys.*, vol. 32, p. 1, 2021.
- [67] H. Li and B.-Q. Ma, “Searching Lorentz invariance violation from cosmic photon attenuation,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, p. 193, 2023.
- [68] The Large High Altitude Air Shower Observatory (LHAASO). Available: <http://english.ihep.cas.cn/lhaaso/>
- [69] P. A. L. Mourão, G. L. L. W. Levy, and J. A. Helayël-Neto, arXiv:2502.14927 [gr-qc].
- [70] S. Mandelstam, “Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity,” *Phys. Rev.*, vol. 112, no. 4, pp. 1344–1360, Nov. 1958, doi: 10.1103/PhysRev.112.1344.
- [71] Z. Cao *et al.* (LHAASO Collaboration), “Ultrahigh-energy photons up to 1.42 petaelectronvolts from terrestrial and celestial sources,” *Nature*, vol. 594, pp. 365–369, 2021.
- [72] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern Cosmology*, 2nd ed. Academic Press, 2021.
- [73] I. Silva, O. Freire Jr., and A. P. B. da Silva, “Aspectos históricos do efeito Compton,” *Rev. Bras. Ens. Fís.*, vol. 36, no. 1, 2014.
- [74] A. H. Compton and C. F. Hagenow, *Phys. Rev.*, vol. 18, p. 97, 1921.
- [75] A. H. Compton, *Bull. Natl. Res. Council*, vol. 4, p. 1, 1922.
- [76] A. H. Compton, *Phys. Rev.*, vol. 19, p. 267, 1922.
- [77] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, “Lorentz violation at high energy,” *Ann. Phys.*, vol. 321, p. 150, 2006.
- [78] S. Liberati and L. Maccione, “Lorentz violation: Motivation and new constraints,” *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 59, p. 245, 2009.
- [79] R. Ruffini, G. V. Vereshchagin, and S.-S. Xue, “Cosmic absorption of ultra high energy particles,” *Astrophys. Space Sci.*, vol. 361, p. 82, 2016.
- [80] B. Roy, V. Juričić, and I. F. Herbut, “Emergent Lorentz symmetry near fermionic quantum critical points,” *JHEP*, vol. 04, p. 018, 2016.

- 
- [81] A. V. Kostelecký *et al.*, “Lorentz violation in Dirac and Weyl semimetals,” *Phys. Rev. Research*, vol. 4, p. 023106, 2022.
- [82] P. A. M. Dirac, “Is there an aether?” *Nature*, vol. 168, p. 906, 1951.
- [83] J. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, “Search for quantum gravity,” *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 31, p. 1257, 1999.
- [84] J. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, “Quantum-gravitational diffusion and stochastic fluctuations in the velocity of light,” *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 32, p. 127, 2000.
- [85] J. Ellis *et al.*, “Space–time foam may violate the principle of equivalence,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 19, p. 4413, 2004.
- [86] J. Alfaro and G. Palma, “Loop quantum gravity corrections and cosmic ray decays,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 103516, 2002.
- [87] G. L. L. W. Levy and J. A. Helayël-Neto, *Ann. Phys.*, vol. 473, p. 169892, 2025.
- [88] J. P. S. Melo *et al.*, *Eur. Phys. J. C*, vol. 84, no. 9, p. 938, 2024.
- [89] G. Amelino-Camelia, “Doubly-special relativity,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 11, p. 1643, 2002.
- [90] G. Amelino-Camelia *et al.*, “Phenomenology of doubly special relativity,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 20, p. 6007, 2005.
- [91] J. Kowalski-Glikman, “Introduction to doubly special relativity,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 669, p. 131, 2005.
- [92] D. Mattingly, “Modern tests of Lorentz invariance,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 8, p. 5, 2005.
- [93] D. Mattingly, T. Jacobson, and S. Liberati, *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 124012, 2003.
- [94] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 124011, 2003.
- [95] C. Li and B.-Q. Ma, *Phys. Rev. D*, vol. 104, p. 063012, 2021.
- [96] C. Li and B.-Q. Ma, *Sci. Bull.*, vol. 66, p. 2254, 2021.
- [97] R. J. Gould and G. P. Schreder, *Phys. Rev.*, vol. 155, p. 1408, 1967.
- [98] G. Amelino-Camelia, *Living Rev. Relativ.*, vol. 16, 2013.
- [99] Z. Xiao and B.-Q. Ma, *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 116005, 2009.
- [100] L. Shao and B.-Q. Ma, *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 25, p. 3251, 2010.
- [101] J. Ellis *et al.*, *Phys. Lett. B*, vol. 665, p. 412, 2008.

- [102] L. Maccione *et al.*, *JCAP*, vol. 2007, no. 10, p. 013, 2007.
- [103] J. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, “Probing a possible vacuum refractive index with  $\gamma$ -ray telescopes,” *Phys. Lett. B*, vol. 674, pp. 83–86, 2009.
- [104] M. G. Hauser and E. Dwek, “The cosmic infrared background: Measurements and implications,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 39, pp. 249–307, 2001.
- [105] A. Domínguez *et al.*, “Extragalactic background light inferred from AEGIS galaxy SED-type fractions,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 410, no. 4, pp. 2556–2578, 2011.
- [106] E. Dwek and F. Krennrich, “The extragalactic background light and the gamma-ray opacity of the universe,” *Astropart. Phys.*, vol. 43, pp. 112–133, 2013.
- [107] W. Kluzniak, “Transparency of the universe to TeV photons in some models of quantum gravity,” *Astropart. Phys.*, vol. 11, p. 117, 1999.
- [108] The Major Atmospheric Gamma Imaging Cherenkov Telescopes (MAGIC). Available: <https://magic.mpp.mpg.de/>
- [109] The High Energy Stereoscopic System (HESS). Available: <https://www.mpi-hd.mpg.de/HESS/HESS.shtml>
- [110] The Fermi Gamma-ray Space Telescope (Fermi-LAT). Available: <https://fermi.gsfc.nasa.gov/>
- [111] The Cherenkov Telescope Array (CTA). Available: <https://www.ctao.org/>
- [112] T. Kifune, “Invariance violation extends the cosmic ray horizon?” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 518, p. L21, 1999.
- [113] R. J. Protheroe and H. Meyer, “An infrared background TeV gamma-ray crisis?” *Phys. Lett. B*, vol. 493, pp. 1–6, 2000.
- [114] G. Feinberg, “Possibility of faster-than-light particles,” *Phys. Rev.*, vol. 159, pp. 1089–1105, 1967.
- [115] A. Sen, “Field theory of tachyon matter,” *JHEP*, vol. 07, p. 065, 2002.
- [116] A. Sen, “Tachyon dynamics in open string theory,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 20, pp. 5513–5656, 2005.
- [117] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II: Modern Applications*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [118] E. Witten, “D-branes and K-theory,” *JHEP*, vol. 12, p. 019, 1998.

- 
- [119] G. Leone, “Tachyons and misaligned supersymmetry in orientifold vacua,” *JHEP*, vol. 2023, no. 11, 2023.
- [120] G. García-Jiménez, C. Ramírez, and V. Vázquez-Báez, “Tachyon potentials from a supersymmetric FRW model,” arXiv:230x.xxxxx.
- [121] R. Casero, E. Kiritsis, and A. Paredes, “Chiral symmetry breaking as open string tachyon condensation,” *Nucl. Phys. B*, vol. 787, no. 1–2, pp. 98–134, 2007.
- [122] J. Bond and B. Efstathiou, “Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 285, pp. L45–L48, 1984.
- [123] A. Polnarev, “Polarization and anisotropy induced in the microwave background by cosmological gravitational waves,” *Sov. Astron.*, vol. 29, pp. 607–613, 1985.