

Tese de Doutorado

A Radiação Eletromagnética em Teorias Estendidas do Eletromagnetismo

Washington Inacio de Souza Soares

Orientador: Sérgio B. Duarte

Co-Orientador: Rodrigo Turcati

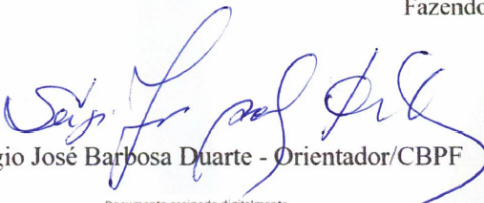
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Março de 2025

"A RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA EM TEORIAS ESTENDIDAS DO
ELETROMAGNETISMO"

WASHINGTON INÁCIO DE SOUZA SOARES

Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:


Sergio José Barbosa Duarte - Orientador/CBPF

Documento assinado digitalmente
 **RODRIGO TURCATI**
Data: 16/07/2025 19:02:54-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Rodrigo Turcati – Coorientador/ UFRGS

Documento assinado digitalmente
 **HENRIQUE BOSCHI FILHO**
Data: 07/05/2025 22:37:46-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Henrique Boschi Filho - UFRJ

Documento assinado digitalmente
 **IARLEY PEREIRA LOBO**
Data: 10/05/2025 09:45:51-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Iarley Pereira Lobo - UFPB

Documento assinado digitalmente
 **SILVIO PAOLO SORELLA**
Data: 16/07/2025 10:36:25-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Silvio Paolo Sorella - UERJ

Documento assinado digitalmente
 **MARCELO CHIAPPARINI**
Data: 14/07/2025 16:34:08-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Marcelo Chiapparini – UERJ

Rio de Janeiro, 09 de abril de 2025

Agradecimentos

Gostaria de agradecer

- inicialmente a DEUS,
- a minha esposa Taisa Gomes Mattos Brandão Soares e meu filho Rafael Inacio pelo apoio e pela luz
- a todos os meus familiares pelo carinho e apoio. Em especial, à minha tia Celma Salete pelo amor e consideração
- ao Orientador, Prof. Sérgio B. Duarte, pelo acolhimento, confiança e postura humana;
- ao Co-Orientador Rodrigo Turcatti, pelo apoio e confiança;
- ao CBPF - através da COEDU e da COSMO, pela infraestrutura fornecida - e aos seus funcionários;

Resumo

O objetivo dessa tese de Doutorado é discutir a radiação eletromagnética em teorias eletromagnéticas que são extensões do eletromagnetismo de Maxwell. Para isto, serão abordados três formalismos distintos, a saber: teorias não-lineares do eletromagnetismo, modelos com dimensões espaciais extras e a propagação eletromagnética em cenários de fenomenologia de Gravitação Quântica. Serão, então, construídos distintos formalismos matemáticos que permitam o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas nos contextos acima citados. Eventuais modificações na distribuição de frequências de Planck, nas leis de deslocamento de Wien e de Rayleigh-Jean, além da lei de Stefan-Boltzmann, serão estudadas. Questões ligadas às propriedades termodinâmicas em equilíbrio térmico, tais como a pressão, densidade, entropia e calor específico, serão igualmente contempladas. Será estudada também a propagação de ondas não-lineares em um espaço-tempo com grandes dimensões infinitamente espaciais adicionais. Efeitos de uma fenomenologia de gravidade quântica no espectro da radiação serão estudados. Futuras aplicações serão discutidas para próximos trabalhos.

Abstract

The objective of this PhD thesis is to discuss electromagnetic radiation in electromagnetic theories that are extensions of Maxwell's electromagnetism. To this end, three distinct formalisms will be addressed, namely: nonlinear theories of electromagnetism, models with extra spatial dimensions and electromagnetic propagation in scenarios of Quantum Gravity phenomenology. Different mathematical formalisms will then be constructed that allow the study of the propagation of electromagnetic waves in the contexts mentioned above. Possible modifications in the Planck frequency distribution, in the Wien and Rayleigh-Jean displacement laws, in addition to the Stefan-Boltzmann law, will be studied. Issues related to thermodynamic properties in thermal equilibrium, such as pressure, density, entropy and specific heat, will also be contemplated. The propagation of nonlinear waves in a space-time with large, infinitely large additional spatial dimensions will also be studied. Effects of a quantum gravity phenomenology on the radiation spectrum will be studied. Future applications will be discussed for future work.

Sumário

1	Introdução	4
2	Teorias Eletromagnéticas Não Lineares	9
2.1	Formalismo Geral	9
2.2	Propagação de fótons em um campo eletromagnético de fundo	11
2.3	Tensor Energia Momento	13
2.4	Relação de Dispersão Modificada	15
2.5	Conclusão Parcial	18
3	A Radiação de Corpo Negro em Teorias Eletrodinâmicas Não Lineares	19
3.1	A Função de Partição e a Densidade de Energia Espectral	20
3.2	Radiância e a Lei de Stefan-Boltzmann Modificada	23
3.3	A Energia Livre de Helmholtz e as Variáveis Termodinâmicas	24
3.4	Modificações da Radiação de Corpo Negro devido a Modelos Não Lineares	25
3.4.1	A Lagrangiana Efetiva de Euler-Heisenberg	25
3.4.2	Eletrodinâmica de Born-Infeld	27
3.4.3	Eletrodinâmica Logarítmica	28
3.4.4	Propagação de Onda Eletromagnética Perpendicular ao Campo Magnético de Fundo	28
3.5	Considerações Adicionais	31
3.6	Conclusão Parcial	32

4	A Propagação Não Linear de Ondas Eletromagnéticas em Dimensões Espaciais Extras	34
4.1	Introdução	34
4.2	A Propagação de Ondas Não Lineares em Dimensões Espaciais Extras . . .	35
4.2.1	Relações de Dispersão na Presença de Campos Eletromagnéticos Externos	38
4.3	A Radiação do Corpo Negro em Dimensões Extras	43
4.3.1	A Distribuição de Radiância Espectral	45
4.3.2	A Lei de Stefan-Boltzmann Generalizada	48
4.3.3	O Regime de Comprimento de Onda Longo e a Lei de Deslocamento de Wien	49
4.4	Propriedades Termodinâmicas do Gás de Fótons	50
4.5	Observações Adicionais	51
4.6	Conclusão Parcial	53
5	Fenomenologia da Gravitação Quântica e a Radiação do Corpo Negro	54
5.1	Introdução	54
5.2	Relação de Dispersão Modificada e a Mecânica Estatística	56
5.3	O Espectro de Planck Deformado	60
5.4	Correções de Gravitação Quântica em Baixa Temperatura	62
5.4.1	Termodinâmica na Presença de Relações de Dispersão Modificadas .	64
5.5	Conclusão Parcial	66
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	69
	Referências Bibliográficas	72

Capítulo 1

Introdução

O eletromagnetismo é uma das teorias mais bem sucedidas da física, possuindo medidas extremamente precisas em inúmeros processos físicos[1]. Classicamente, os fenômenos eletromagnéticos são descritos em termos dos campos elétrico e magnético, os quais satisfazem às equações de Maxwell. No contexto do Modelo Padrão da Física de Partículas, por sua vez, a estrutura de gauge abeliana do eletromagnetismo nos diz que a interação eletromagnética é descrita por uma partícula de massa zero, o fóton, ente este responsável pela mediação da interação entre partículas com carga elétrica não nula. Embora o eletromagnetismo seja uma teoria consolidada, atualmente, a radiação eletromagnética desempenha também um papel central na investigação e na compreensão de aspectos ligados a teorias físicas mais fundamentais[2]. Sua importância reside em ser uma ferramenta poderosa para testar-se princípios físicos bem estabelecidos, como a simetria de Lorentz, por exemplo [3]. O estudo da estrutura da matéria em escalas atômicas e cósmicas, assim como a exploração de diversos fenômenos no universo, podem ser investigados a partir da análise da radiação eletromagnética advindas destas fontes[4].

Alguns processos físicos em determinados regimes, por sua vez, sugerem que o próprio eletromagnetismo tenha que ser modificado. Da perspectiva teórica, a possibilidade de uma teoria eletromagnética além de Maxwell tem como motivação teorias físicas mais fundamentais, tais como a teoria de cordas, *loop quantum gravity*, geometria não-comutativa, entre outros [5]. No que diz respeito à observação de fenômenos além do paradigma

de Maxwell, a detecção de campos magnéticos em objetos compactos sugere que a não-linearidade seja um componente essencial na descrição física destes entes [6, 7]. Efeitos não-lineares também incluem o espalhamento fóton-fóton na presença de campos magnéticos intensos em colisões $Pb + Pb$ no Grande Colisor de Hádrons (LHC) [8]. A propagação eletromagnética em certos materiais [9, 10], assim como feixes de laser de alta intensidade [11, 12, 13, 14], também pedem por uma extensão do formalismo eletromagnético.

No que diz respeito a natureza quântica do eletromagnetismo, ao longo dos séculos XIV a XX, vários fenômenos físicos levaram a conclusões empíricas de uma relação direta entre a temperatura de um objeto e a radiação emitida por ele [15]. Inúmeros cientistas propuseram-se a pensar em como retratar a situação em um modelo matemático que permitisse explicar a física por trás destes fenômenos observados. Foi, então, adotado o pressuposto de que toda a radiação emitida por um determinado objeto advém de sua energia interna e de que não há reflexão, ou seja, a energia incidente sobre o objeto é por ele totalmente absorvida, aumentando a energia interna e reemitindo-a como radiação eletromagnética, tendo, desta forma, um espectro característico[16]. A esse espectro observado, denominou-se de Espectro de Radiação de Corpo Negro. Entretanto, para um objeto real, observa-se que existe um determinado percentual de reflexão, dependente do material de composição do objeto e de sua temperatura superficial. Por outro lado, para temperaturas altas, a radiação emitida pelo objeto é muito maior que a refletida, podendo-se desprezá-la. Na natureza, não existem corpos negros ideais. Contudo, alguns fenômenos físicos podem ser aproximados por um corpo negro, o que inclui a emissão de radiação eletromagnética da superfície de objetos estelares, a radiação cósmica de fundo e a emissão oriunda da atmosfera de planetas[17].

O modelo clássico de Rayleigh-Jeans foi um dos primeiros modelos a tentar descrever a radiação eletromagnética de um corpo negro para todos os comprimentos de onda. O modelo leva em conta a equipartição de energia, onde a energia média por grau de liberdade da partícula apresenta-se como $E = \frac{1}{2}kT$ com intervalos de valores de energia

possível contínuos e dependentes da temperatura, ajustados pela constante de Boltzmann (k). A relação propunha que a densidade de energia emitida pelo objeto era uma relação diretamente proporcional à temperatura e variava inversamente ao comprimento de onda da emissão elevado na quarta potência, dada pela fórmula:

$$R(\lambda, T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \quad (1.1)$$

Vale a pena notar que o comportamento da relação acima nos mostra que para pequenos comprimentos de onda, a energia diverge, o que ficou conhecido na literatura como a Catástrofe Ultravioleta.

Na tentativa de solucionar esta dificuldade, Planck postulou que as moléculas da parede da cavidade formavam osciladores que absorviam ou emitiam energia apenas em quantidades discretas (ou, quantizada). A estes pacotes de energia denominou-se a terminologia de *quanta*. No formalismo de Planck, o espectro de emissão de um corpo negro assumia a seguinte forma:

$$R(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (1.2)$$

a qual fornece a distribuição de densidade de energia em termos do comprimento de onda, relação esta também conhecida como a Lei de Planck.

Obtém-se então uma equação que não diverge mais para pequenos valores de comprimento de onda. Além disso, o que se observa ainda é que para grandes valores de λ , a distribuição de Planck reduz-se à Lei de Rayleigh-Jeans.

A partir da intensidade da luz emitida de um corpo negro, é possível, então, obter-se a potência emitida por unidade de área, a qual é obtida integrando-se sobre uma semi-esfera, o que nos fornece

$$P = \sigma T^4, \quad (1.3)$$

onde P é a potência total irradiada por unidade de área do corpo negro, σ é a constante de Steffan-Boltzmann e T é a temperatura do corpo negro.

A partir da lei de distribuição espectral de um corpo negro, é possível encontrar o comprimento de onda associado ao pico de emissão, o qual é dado pela expressão:

$$\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}, \quad (1.4)$$

sendo α a constante de Wien e tendo o valor de $2,898.10^{-3}m.K$. A relação acima é conhecida como a lei de deslocamento de Wien, e nos diz que as curvas associadas a radiação de corpo negro para diferentes temperaturas terá seu pico de emissão em comprimentos de onda que são inversamente proporcional a temperatura do objeto em questão. O sucesso do modelo proposto por Planck em sua explicação para o fenômeno da catástrofe do ultravioleta levou ao nascimento da teoria quântica, levando, assim, a uma compreensão mais profunda da natureza em pequenas escalas de comprimento.

Atualmente, a radiação de corpo negro é objeto de estudo em distintos cenários nos campos da astrofísica e da cosmologia. Com relação à astrofísica, existem intensas pesquisas na modelagem do espectro de emissão de magnetares na região dos raios X de baixa frequência. Magnetares são estrelas de nêutrons com campos magnéticos intensos na ordem de $10^{11}T$ [6, 7]. Campos desta magnitude superam o limite de Schwinger $B_c \approx 10^9T$ [18], e correções não-lineares ao eletromagnetismo não podem mais ser negligenciadas. Com relação ao espectro de emissão, o mesmo é modelado levando-se em consideração a superposição de duas componentes de corpo negro ou de um corpo negro mais uma lei de potências. Além disso, o vácuo quântico da matéria densa estelar sob a influência de campos magnéticos intensos pode apresentar-se polarizada devido a não-linearidade, levando ao fenômeno da birrefringência da luz e, por consequência, modificar as quantidades termodinâmicas associadas ao gás de fótons [19]. Assim, a equação de estado da matéria nuclear precisa ser revista nestes cenários astrofísicos e eventuais contribuições advindas de teorias estendidas do eletromagnetismo podem ser então consideradas. Nesse âmbito, o estudo do espectro de emissão de magnetares pode ser extremamente valioso para a compreensão de propriedades físicas de tais objetos. Ademais, eventuais assinaturas na radiação cósmica de fundo advindas de teorias além do modelo padrão da cosmologia,

efeitos estes originários de formulações alternativas do eletromagnetismo, são também de interesse.

Levando em conta a motivação acima descrita, o objetivo da presente tese reside no estudo da Radiação Eletromagnética advindas de formulações alternativas do eletromagnetismo. No Capítulo 2, estabeleceremos os aspectos teóricos de uma formulação de um eletromagnetismo não-linear. No Capítulo 3, utilizaremos os fundamentos definidos no capítulo anterior para estudar a Radiação de Corpo Negro sob a ótica de teorias eletrodinâmicas não-lineares. No Capítulo 4, estudaremos a propagação de ondas eletromagnéticas não-lineares em dimensões espaciais extras e notaremos a contribuição destas dimensões extras para a radiação de um corpo negro. No Capítulo 5, será a vez de analisar a fenomenologia da Gravitação Quântica e sondar a sua contribuição para o espectro de Radiação de Corpo Negro. No Capítulo 6, faremos as conclusões necessárias com o presente estudo e lançaremos novas perspectivas para o futuro.

Capítulo 2

Teorias Eletromagnéticas Não Lineares

O objetivo deste capítulo é apresentar, de maneira geral, a propagação de ondas eletromagnéticas em teorias não lineares do eletromagnetismo. A Eletrodinâmica de Maxwell é a teoria para se descrever, de maneira mais bem sucedida, as propriedades de interações eletromagnéticas nas escalas clássica e quântica. Entre eles, o espalhamento fóton-fóton, uma questão teórica aberta desde 1933. O LHC, o Colisor de Fótons na Alemanha (Vacuum Hohlraum) e o LASER super-intenso de Shanghai (SULF) estarão desenvolvendo testes experimentais sobre a proposta de fótons em auto-interação direta. Além disso, o estudo de magnetares, estrelas de nêutrons sob fortes campos magnéticos, são laboratórios para o teste de modelos eletromagnéticos que possam comportar fenômenos não-lineares. O capítulo presente se baseia no artigo [20] já publicado.

2.1 Formalismo Geral

Nesta seção, será apresentado o formalismo geral para a obtenção das equações de campo de teorias não-lineares do eletromagnetismo.

A densidade de lagrangiano de teorias não-lineares do eletromagnetismo pode ser des-

crita pelos seguintes invariantes:

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \quad (2.1)$$

$$\mathcal{G} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

onde o tensor de Maxwell e seu dual são dados, respectivamente, por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

A densidade de lagrangiano é, então, dada por:

$$\mathcal{L}_{NL} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}). \quad (2.5)$$

A descrição completa do sistema consiste na equação dinâmica do campo eletromagnético

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = 0, \quad (2.6)$$

junto com a identidade de Bianchi

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (2.7)$$

Levando em consideração as formas bilineares invariantes (2.1) e (2.2), a equação de campo para o modelo eletromagnético não-linear assume a seguinte forma:

$$c_1 \partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.8)$$

onde o tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ fica expresso como:

$$M^{\mu\nu\alpha\beta} = d_1 F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + d_2 \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} + d_3 (F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}) + c_2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.9)$$

tal que os coeficientes são:

$$c_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}, \quad c_2 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}, \quad d_1 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}, \quad d_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}, \quad d_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}} \quad (2.10)$$

O tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ é simétrico em relação à troca dos pares de índices $\mu\nu$ e $\alpha\beta$, e antissimétrico em relação à troca de índices dentro de cada par. Além disso, quando se insere o tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ na equação de movimento, a contribuição do tensor Levi-Civita desaparece devido à identidade de Bianchi, enquanto as partes restantes reproduzem a equação dinâmica dos fótons no âmbito do eletromagnetismo não-linear. Observe também que os coeficientes c_1 , c_2 , d_1 , d_2 e d_3 são todos avaliados nos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. O resultado é geral para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, que dependem do espaço-tempo.

2.2 Propagação de fótons em um campo eletromagnético de fundo

O objetivo desta seção é o estudo das relações de dispersão do presente modelo e, então, obter-se a expressão da função de partição para um gás de fótons em equilíbrio térmico, a qual permitirá a derivação das respectivas quantidades termodinâmicas.

Para o cálculo da relação de dispersão, adotamos a linearização do modelo em questão, o qual consiste em expressar o campo magnético $F^{\mu\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = F_B^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

onde $F_B^{\mu\nu}$ descreve um campo eletromagnético externo clássico e $f^{\mu\nu}$ é uma perturbação ao redor deste campo de fundo. Inserindo (2.11) em (2.6), e assumindo que o campo de fundo satisfaz as equações de campo, temos

$$\partial_\nu (\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) = 0, \quad (2.12)$$

onde

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu} \partial F_{\alpha\beta}} \right|_B. \quad (2.13)$$

O tensor acima mantém as mesmas simetrias que o tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$, e o subscrito B significa que $\Omega^{\mu\nu\alpha\beta}$ é avaliado nos campos eletromagnéticos de fundo.

A seguir, considerando as formas bilineares invariantes (2.1) e (2.2), e impondo que os campos variem lentamente no espaço e no tempo, as equações de campo associadas ao tensor $f_{\mu\nu}$ são dadas por:

$$c_1 \partial_\nu f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M_B^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu f_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.14)$$

Após, considerando a decomposição em modos de Fourier do campo $f_{\mu\nu}$, a Eq. (2.14) assume a seguinte forma:

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu f_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.15)$$

A identidade de Bianchi, por sua vez, fica escrita em termos do campo $f_{\mu\nu}$, isto é,

$$\partial_\alpha f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\alpha} + \partial_\nu f_{\alpha\mu} = 0, \quad (2.16)$$

o que restringe o campo de onda $f^{\mu\nu}$ a ter a seguinte forma:

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu, \quad (2.17)$$

onde a^μ é o campo de calibre associado ao tensor de intensidade de campo $f_{\mu\nu}$.

Em termos do campo de calibre a^μ , a Eq. (2.15) pode ser escrita como:

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu k_\beta a_\alpha = 0, \quad (2.18)$$

onde a quantidade tensorial $\Omega^{\mu\nu\alpha\beta}$ é dada por:

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} = c_1 (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) - M_B^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

a qual contém uma parte isotrópica mais uma contribuição anisotrópica $M_B^{\mu\nu\alpha\beta}$, contribuição esta que é advinda da não-linearidade do campo eletromagnético.

2.3 Tensor Energia Momento

Para analisarmos o tensor energia momento para modelos de eletrodinâmica não-linear, vamos utilizar o fato de que a identidade de Bianchi (2.16) é mantida e podemos contrair as equações de campo já derivadas (2.14) com $f_{\nu\alpha}$ e, utilizando Bianchi, obter a equação de continuidade

$$\partial_\mu (\Theta^{\mu\alpha}) = h^\alpha, \quad (2.20)$$

onde o tensor energia momento para o campo é dado por:

$$\Theta^{\mu\alpha} = c_1 f^{\mu\nu} f_\nu^\alpha - \frac{1}{2} Q_F^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} f_\nu^\alpha + \eta^{\mu\alpha} \left(\frac{1}{4} c_1 f_{\rho\sigma}^2 - \frac{1}{8} Q_F^{\rho\sigma\omega\tau} f_{\rho\sigma} f_{\omega\tau} \right), \quad (2.21)$$

e o tensor h^α é dado por

$$h^\alpha = -(\partial^\mu G_{F\mu\nu}) f^{\mu\alpha} + \frac{1}{4} (\partial^\alpha c_1) f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} (\partial^\alpha c_2) \tilde{f}_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \left(\partial^\alpha Q_F^{\mu\nu\kappa\lambda} \right) f_{\mu\nu} f_{\kappa\lambda} \quad (2.22)$$

com as definições de tensores:

$$G_F^{\mu\nu} = c_1 f_F^{\mu\nu} + c_2 \tilde{f}_F^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

$$Q_F^{\mu\nu\kappa\lambda} = d_1 f_F^{\mu\nu} f_F^{\kappa\lambda} + d_2 f_F^{\mu\nu} \tilde{f}_F^{\kappa\lambda} + d_3 f_F^{\mu\nu} \tilde{f}_F^{\kappa\lambda} + d_3 \tilde{f}_F^{\mu\nu} f_F^{\kappa\lambda}. \quad (2.24)$$

O resultado acima é importante e necessita de algumas considerações. A primeira é que o termo topológico[21], que é acompanhado pelo coeficiente c_2 , é cancelado na expressão e não contribui para o tensor energia-momento pela sua natureza topológica. Outra questão é o tensor h^α . Os campos de fundo que constituem sua expressão no caso geral não são homogêneos e dependem do tempo. Mas pela conservação de energia e momento:

$$\partial_\alpha \partial_\mu (\Theta^{\mu\alpha}) = 0, \quad (2.25)$$

o que é obtida com a condição $\partial_\alpha h^\alpha = 0$. Para que a condição seja satisfeita, podemos impor uma restrição na qual os campos de fundo devem ser constantes e uniformes.

Sendo assim, a densidade de energia será fornecida pela expressão:

$$\begin{aligned}\Theta_{00} = & \frac{1}{2}c_1 \left(\vec{e}^2 + \vec{b}^2 \right) + \frac{1}{2}d_1 \left(\vec{e} \cdot \vec{E}_F \right)^2 + \frac{1}{2}d_2 \left(\vec{e} \cdot \vec{B}_F \right)^2 - \frac{1}{2}d_1 \left(\vec{b} \cdot \vec{B}_F \right)^2 - \frac{1}{2}d_2 \left(\vec{b} \cdot \vec{E}_F \right)^2 + \\ & + d_3 \left(\vec{e} \cdot \vec{E}_F \right) \left(\vec{e} \cdot \vec{B}_F \right) + d_3 \left(\vec{b} \cdot \vec{E}_F \right) \left(\vec{b} \cdot \vec{B}_F \right),\end{aligned}\quad (2.26)$$

onde os coeficientes dependem dos campos de fundo $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Recuperamos o limite de Maxwell se os campos de fundo forem nulos e c_1 for zero.

Analisando a Eq.(2.26), vemos que alguns coeficientes negativos. A expressão pode ser escrita como:

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2}K_{ij}e_ie_j + \frac{1}{2}\Lambda_{ij}b_ib_j, \quad (2.27)$$

onde K_{ij} e Λ_{ij} são definidas respectivamente, por:

$$K_{ij} = c_i\delta_{ij} + d_1E_iE_j + d_2B_iB_j + d_3(E_iB_j + E_jB_i) \quad (2.28)$$

e

$$\Lambda_{ij} = c_i\delta_{ij} - d_1B_iB_j - d_2E_iE_j + d_3(E_iB_j + E_jB_i) \quad (2.29)$$

A densidade de energia Eq.(2.26) é positiva-definida sempre que os autovalores das matrizes simétricas K_{ij} e Λ_{ij} são não negativos. Vamos contemplar o caso $d_3 = 0$ e assumir um campo de fundo puramente magnético, ou seja, $E_i = 0$. Portanto, com essas suposições, os autovalores de K_{ij} são c_1 , $c_1 + (d_2 - |d_2|)B^2/2$ e $c_1 + (d_2 + |d_2|)B^2/2$, e os autovalores de Λ_{ij} são c_1 , c_1 e $c_1 - d_1B^2$, respectivamente. Se $d_2 < 0$ ou $d_2 > 0$, para garantir autovalores positivos, as seguintes condições devem ser cumpridas:

$$c_1 > 0, c_1 - d_1B^2 > 0 \quad \text{e} \quad c_1 + d_2B^2 > 0. \quad (2.30)$$

As condições acima devem ser analisadas para cada modelo não-linear aplicado, e serem verificadas as possíveis restrições.

2.4 Relação de Dispersão Modificada

Conforme visto na seção anterior, a equação de movimento associada ao campo $f_{\mu\nu}$ é linear e dependente dos coeficientes (2.10). Para uma melhor compreensão da propagação das ondas nesta situação, e levando em conta o cenário físico que desejamos discutir, será, então, considerada a propagação de ondas eletromagnéticas na presença somente de campos magnéticos de fundo, isto é, o campo elétrico será negligenciado na nossa abordagem.

Para encontrar os modos propagantes, temos, então, que resolver o sistema de equações

$$A^{\mu\alpha}\epsilon_\alpha = 0, \quad (2.31)$$

onde $A^{\mu\alpha}$ é definido como:

$$A^{\mu\alpha} = \Omega^{\mu\nu\alpha\beta}k_\nu k_\beta, \quad (2.32)$$

e o tensor de polarização normalizado é dado por $\epsilon_\mu = a_\mu/\sqrt{a^2}$.

Conforme a relação (4.15), o tensor $A^{\mu\alpha}$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$A^{\mu\alpha} \equiv c_1 (\eta^{\mu\alpha} k^2 - k^\mu k^\alpha) - M^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu k_\beta. \quad (2.33)$$

A teoria correspondente é invariante de calibre, o que significa que existem modos espúrios e uma fixação de calibre torna-se necessária para a obtenção dos modos propagantes. Uma escolha possível é adotar o gauge temporal $a^0 = 0$, a qual possui a vantagem de remover imediatamente 1 grau de liberdade do campo de calibre a^μ .

No gauge temporal, o sistema de equações lineares fica decomposto em

$$A^{0i}\epsilon_i = 0, \quad (2.34)$$

mais o sistema de equações reduzido

$$A^{ij}\epsilon_j = 0. \quad (2.35)$$

Os estados de polarização dinâmica são dados por soluções linearmente independentes do problema de autovalor (2.35) sob as soluções não triviais da condição $\det A^{ij} = 0$, que, de acordo com (2.36), nos fornece quatro soluções. Por outro lado, devido à invariância *CPT*, se $k = (-w, \mathbf{k})$ é uma solução, então $-k = (w, -\mathbf{k})$ também é uma solução. Portanto, temos um espaço bidimensional de estados de polarização.

Até o momento, o formalismo é totalmente geral, isto é, os campos magnético e elétrico estão incluídos. Contudo, como comentado anteriormente, estamos interessados em processos físicos no qual somente o campo magnético de fundo se faz presente. Nesse caso particular, vamos tomar $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Com esta simplificação, apenas os coeficientes c_1 , d_1 e d_2 são diferentes de zero.

O polinômio obtido é de quarta ordem $\mathcal{P}_4(k)$ nas variáveis w e k , a frequência angular e o número de onda, respectivamente, que é explicitamente dado por

$$\mathcal{P}_4(k) = Pw^4 + Qw^2 + R, \quad (2.36)$$

onde

$$P = \frac{1}{c^4} \left(1 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2 \right), \quad (2.37)$$

$$Q = \frac{1}{c^2} \left[-2\mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^2 - \frac{d_2}{c_1} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2] + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^2 \mathbf{B}^2 \right], \quad (2.38)$$

$$R = \mathbf{k}^4 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{k}^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^2 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{k}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \frac{d_1 d_2}{c_1^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^2. \quad (2.39)$$

As frequências associadas às ondas eletromagnéticas no cenário em discussão, portanto, assumem a seguinte forma:

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}, \quad (2.40)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_2 (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}. \quad (2.41)$$

As frequências acima estão associadas à propagação de ondas em um meio magnetizado do ponto de vista da eletrodinâmica não-linear. Além disso, essas relações de dispersão

são distintas, o que leva ao fenômeno da birrefringência[22]. Observamos também que $d_1 \rightarrow 0$ e $d_2 \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, sempre que $\mathbf{B} \rightarrow 0$, as relações de dispersão reduzem-se ao caso usual de ondas eletromagnéticas. As condições $c_1 > d_1 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right)^2$ e $c_1 + d_2 \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} \right)^2 > 0$ garantem que as frequências (2.40) e (2.41) são reais e positivo-definidas.

As frequências correspondentes podem ser escritas em termos do ângulo θ entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo magnético de fundo $\mathbf{B}$, o que nos dá

$$w_1(k) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} B^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.42)$$

e

$$w_2(k) = ck \sqrt{1 - \frac{d_2 B^2}{c_1 + d_2 B^2} \sin^2 \theta}. \quad (2.43)$$

Aqui nota-se que sempre que o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo magnético de fundo $\mathbf{B}$ são perpendiculares entre si, as frequências reduzem-se para as seguintes expressões:

$$w_1(k) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} B^2}, \quad (2.44)$$

$$w_2(k) = ck \sqrt{1 + \frac{d_2}{c_1} B^2}, \quad (2.45)$$

respectivamente.

As velocidades de grupo [23], definidas por $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ por sua vez, relacionadas às frequências acima, são dadas por[24]

$$\mathbf{v}_g^{(1)} = c \frac{\left[c_1 \hat{\mathbf{k}} - d_1 \mathbf{B} \times \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right) \right]}{c_1 \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right)^2}}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{v}_g^{(2)} = c \frac{\left[c_1 \hat{\mathbf{k}} + d_2 \mathbf{B} \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} \right) \right]}{(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2) \sqrt{1 - \frac{d_2 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right)^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}}, \quad (2.47)$$

as quais possuem componentes nas direções de $\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{B}$. Além disso, sempre que $B \rightarrow 0$, recupera-se a teoria de Maxwell, e a velocidade do grupo reduz-se à:

$$\mathbf{v}_g = \frac{w}{k} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.48)$$

2.5 Conclusão Parcial

Gostaríamos de salientar que as características não-lineares do vácuo quântico foram tratadas como um meio clássico. Uma descrição alternativa implica considerar as modificações no vácuo como uma geometria efetiva para a propagação de fótons[22, 25]. Nesse caso, os fótons se propagam como geodésicas nulas em uma métrica de fundo que se desvia da métrica de Minkowski devido às não linearidades do campo eletromagnético. Embora esses formalismos descrevam situações distintas, ambas as abordagens são descritas na aproximação de fótons suaves e fornecem exatamente os mesmos resultados para os modos de frequência. Neste ponto, talvez valha a pena observar que existem três situações diferentes onde a métrica efetiva emerge na eletrodinâmica não linear, que se devem a G. Boillat[25], Bialynicki-Birula[22], e Novello e colaboradores[26]. As métricas efetivas em Boillat e Bialynicki-Birula são inteiramente equivalentes, enquanto a métrica efetiva de Novello é apenas conformemente equivalente às mencionadas[27], ou seja, as métricas são equivalentes por uma diferença de um fator conforme. A diferença entre as duas abordagens se deve ao procedimento esquemático adotado pelos autores para obtenção da geometria efetiva. Enquanto as estruturas de Boillat-Birula levam em conta a aproximação eikonal, a geometria Novello é derivada considerando a teoria de Hadamard, que fornece coeficientes distintos quando comparados com as métricas de Boillat-Birula. Contudo, essas métricas efetivas podem ser conectadas através de um fator conforme, que pode desaparecer em alguns casos especiais[27].

Para concluir este capítulo, gostaríamos de enfatizar que a nossa abordagem é equivalente aos quadros Boillat-Birula. Porém, diferentemente desses trabalhos, aqui exploramos a estrutura de calibre do sistema para obter as frequências da onda eletromagnética não-linear[28].

Capítulo 3

A Radiação de Corpo Negro em Teorias Eletrodinâmicas Não Lineares

O objetivo neste capítulo é utilizar as técnicas da mecânica estatística para derivar o espectro de frequência e as quantidades termodinâmicas de um gás de fótons no âmbito da eletrodinâmica não-linear. O objeto fundamental para esta análise é a função de partição $\mathcal{Z}$. Nesta abordagem, serão consideradas temperaturas abaixo da massa de repouso do elétron m_e , ou seja, $k_B T \ll m_e c^2$, o que nos permitirá usar o formalismo de teoria de campos efetiva para o cálculo da energia livre de um gás de fótons no presente cenário. De fato, no regime de temperaturas bem abaixo da massa de repouso do elétron, a concentração elétron-pósitron é exponencialmente pequena, ou seja, proporcional a $\exp(-m_e c^2/k_B T)$, e as contribuições para as propriedades termodinâmicas da radiação do corpo negro vêm principalmente do setor de gauge [29, 30]. Além disso, a função de partição será formulada no potencial grande canônico, onde assumiremos que o potencial químico do gás de fótons é nulo. Na derivação da função partição será utilizada a estatística de Bose-Einstein [31, 32]. O capítulo presente se baseia no artigo [20] já publicado.

3.1 A Função de Partição e a Densidade de Energia Espectral

Como afirmado acima, precisamos encontrar a função de partição para derivar a radiação do corpo negro e as grandezas termodinâmicas em equilíbrio térmico. Para isso, observa-se que o número de estados disponíveis N para um determinado sistema é dado por:

$$N = \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (3.1)$$

Em coordenadas esféricas, a relação acima pode ser escrita como

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty dk k^2, \quad (3.2)$$

onde V é o volume do reservatório e $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido.

Para encontrar o número de estados N para os quais a frequência do fóton está entre ν e $\nu + d\nu$, é necessário transformar a integral k acima para o espaço de frequências ω . Para que isso seja possível, tem-se que levar em conta as respectivas velocidades de fase $v_p = \omega_p/|\vec{k}|$ nas Eq.(2.42) e Eq.(2.43) e de grupo v_g na Eq.(2.46) derivadas na capítulo anterior.

Contudo, no caso geral, a integral é de difícil resolução. Para contornar este problema, consideramos a aproximação de campo fraco, que é obtida impondo as seguintes condições:

$$c_1 \gg d_1 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right)^2 \quad (3.3)$$

$$c_1 \gg -d_2 \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} \right)^2, \quad (3.4)$$

onde estes coeficientes foram definidos pelas condições na equação Eq.(2.10), e que dependem apenas dos campos de fundo.

Esta condição significa que nosso formalismo ficará restrito a situações em que haja pequenos desvios da teoria de Maxwell. Neste regime, as velocidades de fase e grupo para cada modo de excitação são iguais e dados, respectivamente, por[22]

$$v_p^{(1)} = v_g^{(1)} = c \left[1 - \frac{d_1}{2c_1} \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

e

$$v_p^{(2)} = v_g^{(2)} = c \left[1 - \frac{d_1 (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{2(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2)} \right]. \quad (3.6)$$

Substituindo, então, k^2 pelas relações de dispersão (2.40) e (2.41), na aproximação de campo fraco, obtemos

$$dk_{1,2} = \frac{2\pi}{c} \frac{d\nu}{\Lambda_{1,2}} \quad (3.7)$$

para cada modo, onde $\Lambda_{1,2}$ são definidos como

$$\Lambda_1 = 1 - \frac{d_1}{2c_1} B^2 \sin^2 \theta, \quad (3.8)$$

$$\Lambda_2 = 1 - \frac{d_2 B^2 \sin^2 \theta}{2(c_1 + d_2 B^2)}. \quad (3.9)$$

O número de estados disponíveis N é, portanto lido como

$$N = N_1 + N_2 = \frac{V}{c^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\nu \nu^2 \Delta\Lambda(B, \theta), \quad (3.10)$$

onde $\Delta\Lambda(B, \theta)$ é dado por

$$\Delta\Lambda(B, \theta) \equiv \left(\frac{1}{\Lambda_1^3} + \frac{1}{\Lambda_2^3} \right) \approx 2 + \epsilon \sin^2 \theta, \quad (3.11)$$

e

$$\epsilon = \frac{3d_1 B^2}{2c_1} \left[1 + \frac{(d_2/d_1)}{1 + (d_2/c_1) B^2} \right]. \quad (3.12)$$

Observe que $\Delta\Lambda(B, \theta)$ depende da magnitude do campo magnético de fundo B e do ângulo θ entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$. No caso especial em que a propagação do fóton é perpendicular ao campo magnético, o fator $\Delta\Omega(B)$ depende apenas da magnitude do campo magnético. Além disso, sempre que $B \rightarrow 0$, $\Delta\Lambda = 2$, e o número de estados disponíveis de um gás fóton na teoria de Maxwell são recuperados. Observamos também que quando a propagação do fóton é paralela ao campo magnético de fundo ($\theta = 0$), $\Delta\Lambda = 2$, e o fóton se propaga na velocidade da luz.

Tendo caracterizado o regime de validade do nosso formalismo, estamos agora prontos para obter a função de partição $\mathcal{Z}$ nesta situação. Seguindo a metodologia padrão, o logaritmo da função de partição $\mathcal{Z}$ é lido como

$$\log \mathcal{Z} = -\frac{V}{c^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\nu \nu^2 \Delta\Lambda(B, \theta) \log(1 - e^{-\beta h\nu}). \quad (3.13)$$

A partir da relação (3.13), pode-se derivar o espectro de frequências e as grandezas termodinâmicas relacionadas.

A densidade de energia espectral u , por unidade de volume, em equilíbrio térmico à temperatura T , é então dada por

$$u(\nu, T) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \right) \frac{h\nu}{(e^{\beta h\nu} - 1)}. \quad (3.14)$$

O espectro de emissão acima nos mostra claramente que a contribuição proveniente da não-linearidade está codificada no parâmetro ϵ . No limite $\epsilon = 0$, ou seja, sempre que $B \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, $d_1 \rightarrow 0$ e $d_2 \rightarrow 0$, a energia interna a densidade $u(\nu, T)$ se reduz à distribuição de Planck na temperatura T , como esperado. Além disso, o número 3 em $\epsilon/3$ tem origem geométrica, pois é oriundo da integração angular do fator $\Delta\Lambda(B, \theta)$ in (3.13).

Em baixas frequências, a distribuição de frequência (3.14) assume a forma

$$u(\nu, T) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \right) (k_B T). \quad (3.15)$$

Da relação acima, chegamos à conclusão de que a lei de Rayleigh-Jeans é modificada devido a um campo magnético de fundo. Por outro lado, a lei de deslocamento de Wien não é alterada neste contexto.

Integrando (3.14) sobre todas as frequências, a densidade de energia total obtida é

$$u(T) = aT^4, \quad (3.16)$$

com

$$a = \frac{4}{c} \left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \right) \quad (3.17)$$

sendo um coeficiente efetivo que retém as modificações não lineares.

No que diz respeito à dependência angular, a contribuição da densidade de energia para cada elemento de ângulo sólido é dada por

$$u(T, \Omega) d\Omega = \left(\frac{2\pi^4 \kappa_B^4}{15h^3 c^3} \right) T^4 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (3.18)$$

Assim, a distribuição de energia angular induz o aparecimento de um termo quadrupolo ($l = 2$) no espectro angular de potência, o que dá uma contribuição anisotrópica ao espectro de frequência. Além disso, poderíamos ter expandido o fator (3.11) em ordens superiores na aproximação binomial, o que daria contribuições adicionais ao espectro angular de potência da ordem $l = 2n$. Para conseguir isso, teríamos que impor novas restrições à magnitude do campo magnético B . Este resultado pode desempenhar um papel importante nas anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas.

3.2 Radiância e a Lei de Stefan-Boltzmann Modificada

A radiância é definida como a energia total emitida por unidade de tempo e por unidade de área através da superfície da cavidade. Para um gás de fótons na teoria de Maxwell, a radiância espectral $B(\nu, T)$ emitida da superfície do corpo negro é isotrópica e depende apenas da frequência ν e da temperatura T . Aqui, por outro lado, a radiância espectral

$$B(\nu, \theta, T) = \frac{\nu^2}{c^2} \left(\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \right) \Delta\Lambda(B, \theta), \quad (3.19)$$

depende também do campo magnético de fundo B e do ângulo θ entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo magnético externo.

Em relação à radiância, a forma explícita pode ser encontrada resolvendo-se a seguinte integral

$$R(T) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta \int_0^\infty B(\nu, \theta, T) d\nu. \quad (3.20)$$

A solução desta integral fornece como resultado a lei de Stefan-Boltzmann, a qual fica expressa como:

$$R(T) = \sigma_{eff} T^4, \quad (3.21)$$

onde

$$\sigma_{eff} = \sigma \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right), \quad (3.22)$$

é a constante efetiva de Stefan-Boltzman e $\sigma = (2\pi^5 k_B^4 / 15h^3 c^2)$ é a constante de Stefan-Boltzman usual. Novamente, observamos que o fator ϵ carrega as modificações não lineares do eletromagnetismo.

Como é bem conhecido, a radiância e a densidade de energia são proporcionais entre si, estando relacionadas por fatores puramente geométricos. Por outro lado, no presente contexto, esta relação não é mais preservada, e parece haver uma dependência do modelo não linear específico, como pode-se verificar avaliando as relações (3.17) e (3.22). Isto acontece devido ao surgimento da dependência angular na radiância espectral (3.19), o qual altera a integral do ângulo sólido da radiância (3.20), e a conexão entre a densidade de energia e a radiância através de fatores geométricos é então perdida. Especificamente, é o aparecimento do momento quadrupolo no espectro de frequências induzido pela não-linearidade que quebra a relação entre as quantidades mencionadas.

3.3 A Energia Livre de Helmholtz e as Variáveis Termodinâmicas

Agora, pretende-se investigar os efeitos de campos magnéticos intensos nas quantidades termodinâmicas associadas ao corpo negro. Nesse sentido, primeiro obtemos a energia livre $F = -k_B T \log \mathcal{Z}$, a saber,

$$F = -V \left(\frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{45h^3 c^3} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \right). \quad (3.23)$$

A partir da energia livre (3.23), a pressão p , a energia u , a entropia s e a capacidade térmica c_V a volume constante são, respectivamente, dadas por

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \quad s = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad c_V = \frac{\partial E}{\partial T}, \quad (3.24)$$

que nos dão

$$p = \frac{a}{3}T^4, \quad u = aT^4, \quad s = \frac{4}{3}aT^3, \quad c_V = 4aT^3, \quad (3.25)$$

com a sendo definida na relação (3.17).

As relações (3.23) e (3.25) nos mostram que um gás de fótons imerso em um meio magnetizado leva a desvios das grandezas termodinâmicas associadas, no sentido que os parâmetros (3.17) e (3.12) não dependem da temperatura, mas carregam as informações de uma eletrodinâmica não linear, pois dependem dos campos eletromagnéticos externos. Por outro lado, inspecionando a equação de estado que relaciona a densidade de energia e a pressão, nota-se que a mesma reproduz o mesmo resultado que o caso de Maxwell, ou seja, $p = u/3$.

3.4 Modificações da Radiação de Corpo Negro devido a Modelos Não Lineares

O intuito desta seção é averiguar como a não-linearidade do campo eletromagnético modifica a distribuição de frequências de Planck. Para isso, serão considerados três modelos eletrodinâmicos distintos, a saber: a eletrodinâmica de Euler-Heisenberg, a teoria generalizada de Born-Infeld e a eletrodinâmica Logarítmica.

3.4.1 A Lagrangiana Efetiva de Euler-Heisenberg

A teoria de Euler-Heisenberg é uma teoria efetiva que descreve os efeitos da polarização do vácuo da eletrodinâmica quântica advindos de correções radiativas em primeira ordem [33, 34]. Essas correções tornam-se relevantes acima do campo crítico $\mathcal{E}_c$,

o chamado limite de Schwinger, onde a produção de pares elétron-pósitron não pode ser negligenciada.

A densidade lagrangiana do modelo de Euler-Heisenberg é dada por:

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \times \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\mathcal{R} \cosh(es\sqrt{-\mathcal{F} + i\mathcal{G}})}{\mathcal{I} \cosh(es\sqrt{-\mathcal{F} + i\mathcal{G}})} + \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} - 1 \right], \quad (3.26)$$

onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$ estão relacionados às partes real e imaginária, respectivamente.

No limite de campo fraco, a densidade lagrangiana acima reduz-se à [35, 36]

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{F} + \frac{2\alpha^2 \hbar^3}{45m_e^4 c^5} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2), \quad (3.27)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c$, obtida inicialmente por Euler-Kockel, conforme [33].

O limite de campo fraco da eletrodinâmica de Euler-Heisenberg é justificado se o parâmetro de expansão adimensional $4\pi\alpha\hbar^3|F|^2/(m_e^4 c^4)$ é muito menor que a unidade [22]. Este é o caso, por exemplo, de campos magnéticos fortes em estrelas de nêutrons, os quais podem possuir uma intensidade de 10^{12} Gauss [37].

Conforme nosso formalismo desenvolvido anteriormente, a relação de dispersão na presença de um campo magnético de fundo uniforme assume a forma [24]

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \left[1 - \frac{8\alpha^2 \hbar^3}{45m_e^4 c^5} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2 \right], \quad (3.28)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck \left[1 - \frac{14\alpha^2 \hbar^3}{45m_e^4 c^5} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2 \right]. \quad (3.29)$$

Aqui, o fator $\Delta\Lambda$ é dado por

$$\Delta\Lambda \approx 2 + \frac{22\alpha^2 \hbar^3}{15m_e^4 c^5} B^2 \sin^2\theta, \quad (3.30)$$

enquanto o sigma efetivo obtido é

$$\sigma_{eff} = \left(1 + \frac{11\alpha^2 \hbar^3}{30m_e^4 c^5} B^2 \right) \sigma. \quad (3.31)$$

3.4.2 Eletrodinâmica de Born-Infeld

A principal motivação de Born e Infeld para propor sua teoria foi garantir a finitude da autoenergia do campo elétrico [38]. Recentemente, tem havido um interesse renovado na teoria de Born-Infeld no contexto da teoria das cordas, modelos de gravidade quântica e teorias com monopolos magnéticos [6, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45].

A densidade lagrangiana de Born-Infeld é dada por [46, 47]

$$\mathcal{L}_{BI}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = b^2 \left[1 - \left(1 - 2\frac{\mathcal{F}}{b^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{b^4} \right)^p \right], \quad (3.32)$$

onde b é um parâmetro de escala e p é um número real $0 < p < 1$. A eletrodinâmica padrão de Born-Infeld é recuperada quando $p = 1/2$.

Seguindo o procedimento descrito na Seção 2.4, a relação de dispersão assume a seguinte forma [24]

$$w_1(k) = ck \sqrt{1 - 2(1-p) \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{\mathbf{B}^2 + b^2}}, \quad (3.33)$$

$$w_2(k) = ck \sqrt{1 - \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{\mathbf{B}^2 + b^2}}. \quad (3.34)$$

O caso particular para o qual $p = 1/2$, tem-se que as frequências w_1 e w_2 reduzem, no limite do campo fraco ($b \gg B$), à:

$$w(k) = ck \sqrt{1 - \frac{B^2}{b^2} \sin^2 \theta}. \quad (3.35)$$

As frequências acima são sempre reais. O fator $\Delta\Lambda$ assume a forma

$$\Delta\Lambda \approx 2 + 3 \frac{B^2}{b^2} \sin^2 \theta. \quad (3.36)$$

O sigma efetivo, por sua vez, é dado por

$$\sigma_{eff} = \left(1 + \frac{3B^2}{4b^2} \right) \sigma. \quad (3.37)$$

3.4.3 Eletrodinâmica Logarítmica

Outro modelo que pretendemos explorar é o da eletrodinâmica logarítmica [48], onde a densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{ln}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = -\beta^2 \ln \left[1 - \frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{2\beta^4} \right]. \quad (3.38)$$

Vale salientar que o eletromagnetismo de Maxwell é recuperado no limite $\beta \rightarrow \infty$. Vale salientar que existem outras propostas de eletrodinâmica logarítmica, como em [49]

A relação de dispersão para cada modo produz [24]

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{2(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{2\beta^2 + \mathbf{B}^2}}, \quad (3.39)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}{\mathbf{B}^2 + \beta^2}}. \quad (3.40)$$

Para garantir que a densidade de energia seja positiva definida, a condição $B < \sqrt{2}\beta$ deve ser satisfeita [24]. No limite de campo fraco ($\beta \gg B$), ambas as frequências são reduzidas para (3.35), o que fornece os mesmos modos de frequência que a teoria de Born-Infeld. Assim como a teoria de Born-Infeld, a eletrodinâmica logarítmica não apresenta birrefringência no regime mencionado. Além disso, $\Delta\Lambda$ e σ_{eff} são dados pelas relações (3.36) e (3.37), respectivamente.

3.4.4 Propagação de Onda Eletromagnética Perpendicular ao Campo Magnético de Fundo

A seguir, levaremos em consideração o caso especial em que as ondas eletromagnéticas propagam-se perpendicularmente ao campo magnético. Nesta configuração, temos $\theta = \pi/2$, e os coeficientes $\Lambda_{1,2}$ nas relações (3.8) e (3.9) reduzem-se a

$$\Lambda_1 = \sqrt{1 - \frac{d_1 B^2}{c_1}}, \quad (3.41)$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{1 - \frac{d_2 B^2}{c_1 + d_2 B^2}}. \quad (3.42)$$

Como consequência, o fator $\Delta\Lambda$ depende apenas da magnitude do campo magnético de fundo B e assume a forma

$$\Delta\Lambda(B) = \left(1 - \frac{d_1}{c_1}B^2\right)^{-3/2} + \left(1 - \frac{d_2B^2}{c_1 + d_2B^2}\right)^{-3/2}. \quad (3.43)$$

Com as suposições acima mencionadas, a dependência angular do espectro de emissão é ausente. Nesse caso, a distribuição espectral de densidade de energia fica:

$$u(\nu, T) = \left(\frac{4\pi\nu^2\Delta\Lambda(B)}{c^3}\right) \frac{h\nu}{(e^{\beta h\nu} - 1)}. \quad (3.44)$$

Em um laboratório, é viável organizar o sistema físico de tal forma que se tenha uma onda eletromagnética propagando-se perpendicularmente a um campo magnético externo uniforme. Por outro lado, no que diz respeito às observações astronômicas, onde a luminosidade proveniente de objetos compactos pode ser medida, por exemplo, esta condição é muito restritiva.

Chamamos também a atenção para o fato de que no regime de campos muito além do limite de Schwinger, o que na teoria de Born-Infeld é dada pela condição $B \gg b$ e por $B \gg \beta$ na eletrodinâmica logarítmica, as frequências não dependem da magnitude do campo magnético externo, sendo uma função apenas da variável angular θ [24]. Neste regime, o nosso formalismo não pode ser aplicado.

Teoria de Born-Infeld

Vamos então calcular o fator $\Delta\Lambda$ para a teoria de Born-Infeld nas condições acima mencionadas. Levando em consideração o lagrangiano (3.32), ambas as frequências para $p = 1/2$ são lidas como

$$w(k) = ck\sqrt{1 - \frac{B^2}{B^2 + b^2}}, \quad (3.45)$$

o que nos fornece

$$\Delta\Lambda = 2\frac{(B^2 + b^2)^{3/2}}{b^3}. \quad (3.46)$$

Em relação ao fator $\Delta\Lambda$, se assumirmos, em unidades de $\hbar = c = k_B = 1$, uma intensidade de campo magnético $B = 3MeV^2$ e $b = 3MeV^2$, obtém-se $\Delta\Lambda \approx 5,65$. O número de estados acessíveis, por outro lado, permite $\Delta\Lambda/2 \approx 2.82$ mais fótons para cada modo de frequência.

Eletrodinâmica Logarítmica

A eletrodinâmica logarítmica é induzida por correções radiativas no regime de campos variando lentamente no espaço, e que aumenta de forma logarítmica com as intensidades do campo mesmo no regime de intensidades de campo fortes. Como consequência, o lagrangiano logarítmico é válido para valores de campos elétricos e magnéticos mais fortes que o valor crítico.

Realizando o cálculo das frequências para cada modo, obtemos [24]

$$w_1(k) = ck\sqrt{1 - \frac{2B^2}{2\beta^2 + B^2}}, \quad (3.47)$$

$$w_2(k) = ck\sqrt{1 - \frac{B^2}{B^2 + \beta^2}}. \quad (3.48)$$

A partir das frequências acima, fica claro que a eletrodinâmica de Born-Infeld e a eletrodinâmica logarítmica diferem no regime de campos fortes. Na eletrodinâmica logarítmica ocorre o aparecimento da birrefringência, fenômeno ausente na teoria de Born-Infeld.

A seguir, seguindo o mesmo procedimento anterior, o fator $\Delta\Lambda$ assume a forma

$$\Delta\Lambda = \left(\frac{2\beta^2 - B^2}{2\beta^2 + B^2}\right)^{-3/2} + \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + B^2}\right)^{-3/2}. \quad (3.49)$$

Considerando então um campo magnético $B = 3MeV^2$ e $\beta = 3MeV^2$. Esses valores nos fornecem um fator $\Delta\Lambda \approx 8$.

Gostaríamos de destacar que para campos magnéticos B com intensidade superior a $\sqrt{2}\beta$, haverá o surgimento de termos imaginários nos modos de frequência. Neste limite, as ondas eletromagnéticas serão atenuadas e não contribuirão para o processo de termalização.

Antes de concluir esta seção, gostaríamos também de salientar que os cálculos das frequências na eletrodinâmica de Euler-Heisenberg no regime de campo magnético forte são mais complicados, pois envolvem a ação efetiva não perturbativa completa (3.26) e não serão considerados aqui.

3.5 Considerações Adicionais

Vamos agora discutir algumas consequências adicionais da não linearidade no eletromagnetismo na termodinâmica da radiação do corpo negro. Nas seções anteriores, mostramos que o parâmetro que carrega informações sobre a não linearidade do campo magnético, $\Delta\Lambda$, é sempre maior que 2 nos modelos analisados, levando a uma modificação no valor da constante de Stefan-Boltzmann (3.22). Como consequência, a densidade de energia do gás fóton (3.16), por exemplo, terá mais energia armazenada do que na eletrodinâmica de Maxwell. Fisicamente, a propagação do fóton no campo magnético de fundo leva a uma transferência de energia para o gás fóton, aumentando, desta forma, a sua energia. Analogamente, as densidades de pressão, entropia e capacidade térmica associadas ao gás ideal do fóton nas equações (3.25) também aumentarão.

No que diz respeito aos desvios de densidade espectral devido à não linearidade, plotamos, na Fig. 3.1, o espectro de frequências proveniente da teoria de Maxwell e da eletrodinâmica de Born-Infeld e logarítmica quando a propagação do fóton é perpendicular ao fundo magnético campo. O gráfico mostra que, para uma determinada temperatura, os modelos não lineares apresentam um aumento na curva de corpo negro em comparação à distribuição padrão de Planck. Este fato pode ser entendido avaliando a densidade de estados $g(\nu, B)$, que é dada por

$$g(\nu, B) = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} \Delta\Lambda(B). \quad (3.50)$$

Segundo a relação (3.50), as não linearidades do campo magnético levam a mais estados acessíveis para o gás de fótons e provocam um aumento no número de fótons para cada frequência.

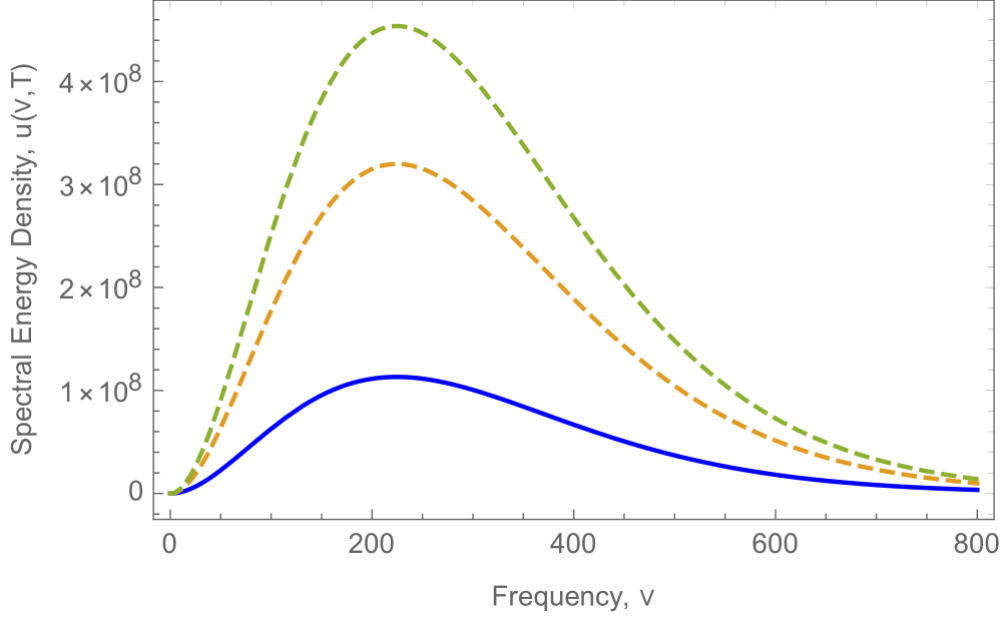


Figura 3.1: Gráfico da distribuição da densidade espectral de energia dos modelos avaliados para $T = 0,5keV$ quando a propagação dos fótons é perpendicular ao campo magnético externo. Aqui, adotamos $c = \hbar = k_B = 1$. A conversão de Tesla T para o sistema natural é $1T = 6,8 \times 10^{-16}GeV^2$. Além disso, em cada modelo, consideramos uma intensidade de campo magnético de fundo $B = 3MeV^2$. Para eletrodinâmica de Born-Infeld e logarítmica, definimos $\beta = 3MeV^2$ e $b = 3MeV^2$. A linha azul corresponde ao espectro de Planck, enquanto o laranja e o verde tracejado estão associados a Born-Infeld e à eletrodinâmica logarítmica, respectivamente. Segundo a lei de Wien, $\nu_{max} \approx 0.45T$, e o pico está localizado em $\nu_{max} \approx 225eV$.

3.6 Conclusão Parcial

Para concluir esta seção, observamos que todos os modelos em consideração se reduzem a uma forma semelhante na aproximação de campo fraco, ou seja, todos os modelos têm correções ao termo usual de Maxwell $\mathcal{F}$ que são proporcionais a $\mathcal{F}^2$ e $\mathcal{G}^2$. Isto garante que as restrições $c_1 \gg d_1 (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2$ e $c_1 \gg -d_2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B})^2$ sejam satisfeitas.

Neste capítulo, investigamos as consequências das ondas eletromagnéticas que se propagam em um meio magnetizado. Especificamente, derivamos as leis de radiação do corpo negro nessa situação, como a distribuição espectral e a lei de Stefan-Boltzmann.

Particularmente, incluímos a dependência angular no espectro de frequência, o que nos mostrou o surgimento de um termo quadrupolo no regime de campos fracos. A fórmula de Rayleigh-Jeans também foi contemplada. Além disso, mostramos que a conexão entre a densidade de energia e a radiância por fatores geométricos é perdida na aproximação de campo fraco, enquanto é restaurada na forte. A energia livre modificada levou a pequenos desvios nas quantidades termodinâmicas. Nós também estudamos a energia livre, bem como as densidades de energia, pressão, entropia e capacidade térmica. Como aplicação, consideramos três eletrodinâmicas não lineares distintas, a saber, a eletrodinâmica de Euler-Heisenberg, a eletrodinâmica generalizada de Born-Infeld e a logarítmica. O regime de campo forte também foi sondado no caso particular quando a propagação da onda é perpendicular ao campo magnético de fundo. Gostaríamos de observar que nossa abordagem pode ser usada com qualquer modelo eletrodinâmico não linear dentro da validade de nossas suposições.

Capítulo 4

A Propagação Não Linear de Ondas Eletromagnéticas em Dimensões Espaciais Extras

4.1 Introdução

Nas últimas décadas, houve um surgimento de modelos físicos envolvendo espaços-tempos com dimensões extras para resolver problemas abertos na física moderna[50, 51, 52]. Essas teorias incluem cenários envolvendo a unificação das interações fundamentais, como as teorias de Kaluza-Klein[53] e supercordas[54, 55]. A dimensionalidade também desempenha um papel importante em outras áreas da física, como formulação de integrais de caminho[56, 57], operadores de espaço de fase e momento[58], defeitos topológicos [59], entre outros[60, 61, 62, 63].

A introdução de dimensões extras na estrutura do espaço-tempo tem o potencial de modificar as leis fundamentais como as conhecemos[64, 65, 66]. Nesse sentido, seria de se esperar pequenos desvios dos resultados bem conhecidos e estabelecidos na física. Teorias como Kaluza-Klein e teorias de cordas propõem dimensões extras compactadas, que podem induzir desvios dos resultados padrão em altas energias. Por outro lado, grandes dimensões infinitamente extras, embora uma situação não física, podem ser muito úteis, da perspectiva teórica, para obter uma visão sobre as leis físicas fundamentais[66].

O propósito do presente capítulo, baseado no artigo já publicado [67] é duplo. Primeiro, estudamos a propagação de ondas em dimensões espaciais infinitamente grandes arbitrárias da perspectiva de teorias não lineares. Nesse sentido, serão consideradas teorias que dependem exclusivamente do invariante $\mathcal{F}$. Segundo, serão contempladas características relacionadas à radiação do corpo negro na presença de um campo elétrico externo e as consequências para as quantidades termodinâmicas neste contexto.

O restante deste artigo é organizado da seguinte forma. Na Sec. (4.2) revisamos as principais características das teorias eletrodinâmicas não lineares invariantes de gauge e Poincaré em grandes dimensões extras espaciais, enquanto a propagação de ondas em campos eletromagnéticos de fundo é derivada na Seção (5.2). Aspectos relacionados à densidade espectral do corpo negro, lei de Stefan-Boltzmann generalizada, regime de comprimento de onda longo e lei de Wien são discutidos nas Seções (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3), respectivamente. As implicações nas quantidades termodinâmicas, como energia, pressão, entropia e densidades de calor específicas, são contempladas na Seção (4.4). Nossas observações e conclusões finais podem ser encontradas nas Seções (4.5) e (4.6).

A seguir, trabalharemos em unidades gaussianas. Em nossas convenções, a assinatura da métrica de Minkowski é $(+, -, -, -)$.

4.2 A Propagação de Ondas Não Lineares em Dimensões Espaciais Extras

Nesta seção, derivaremos a propagação de ondas não lineares em espaços-tempos com dimensões espaciais infinitamente grandes adicionais. Tal descrição pode ser alcançada quando se considera a propagação de ondas em um campo eletromagnético externo como uma perturbação de campo fraco propagando-se em torno de um campo clássico de fundo.

Para começar, consideramos a classe geral de lagrangianas de densidade no espaço-tempo de Minkowski $(d + 1)$ -dimensional M^{d+1} , ou seja, d -dimensões espaciais e di-

mensão única, que é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}), \quad (4.1)$$

onde

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

é uma forma bilinear invariante, $F_{\mu\nu} (\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é a intensidade do campo eletromagnético e A^μ é o campo de calibre associado. Em M^{d+1} , o campo de gauge A^μ tem $(d+1)$ -componentes. Em relação às dimensões do espaço-tempo, é bem conhecido que não há campos magnéticos em $d = 1$, o que impede a existência de ondas eletromagnéticas[65]. Portanto, estamos restritos a considerar dimensões espaciais $d > 1$ para ter propagação de onda. Gostaríamos também de enfatizar o fato de que o tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$, que está relacionado ao símbolo de Levi-Civita, não será considerado aqui porque depende da dimensão do espaço-tempo. Como nosso formalismo pretende incorporar um resultado geral para dimensões arbitrárias do espaço-tempo, o dual do tensor de Maxwell $F^{\mu\nu}$ será então negligenciado.

As equações de campo correspondentes para o sistema podem ser obtidas por meio das equações de Euler-Lagrange, a saber,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = 0. \quad (4.3)$$

A descrição completa do sistema não linear também inclui a identidade de Bianchi,

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (4.4)$$

Em seguida, adotando o procedimento de linearização, o campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ pode ser dividido em um campo de fundo $F_B^{\mu\nu}$ mais uma onda de propagação $f^{\mu\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = F_B^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Introduzindo a relação (4.5) na Eq. (4.3), e assumindo que o campo de fundo satisfaz as equações de Euler-Lagrange, encontra-se

$$\partial_\nu (\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) = 0, \quad (4.6)$$

onde

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu} \partial F_{\alpha\beta}} \right|_B. \quad (4.7)$$

Observamos que o tensor $\Omega^{\mu\nu\alpha\beta}$ é simétrico em relação à troca dos pares de índices $\mu\nu$ e $\alpha\beta$, e antissimétrico em relação à troca de índices dentro de cada par.

Se preferir, é possível trabalhar no nível da lagrangiana de densidade linearizada, que assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} f_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}. \quad (4.8)$$

A partir da densidade lagrangiana (4.1), as equações de campo associadas ao campo de onda $f_{\mu\nu}$ são

$$c_1 \partial_\nu f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M_B^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu f_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.9)$$

onde

$$M^{\mu\nu\alpha\beta} = d_1 F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}, \quad (4.10)$$

e

$$c_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}, \quad d_1 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}. \quad (4.11)$$

O tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ tem o mesmo conjunto de simetrias que $\Omega^{\mu\nu\alpha\beta}$. Além disso, os coeficientes c_1 e d_1 são todos avaliados nos campos externos e carregam a não linearidade do campo eletromagnético.

Considerando o regime de campos eletromagnéticos de fundo de variação lenta, Eq. (4.6) no espaço de Fourier, ou seja, usando o ansatz de ondas planas $a^\mu \approx \tilde{a}^\mu e^{ik \cdot x}$, assume a seguinte forma:

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu f_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.12)$$

onde k^μ é o vetor de quatro ondas associado à direção da onda plana.

Por causa da identidade de Bianchi, o campo de onda $f^{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu, \quad (4.13)$$

onde a^μ é o campo de gauge.

Inserindo (4.13) em (4.12), imediatamente encontramos

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu k_\beta a_\alpha = 0, \quad (4.14)$$

onde

$$\Omega^{\mu\nu\alpha\beta} = c_1 (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) - M_B^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

Para simplificar, negligenciamos o símbolo til em $\tilde{a}$.

O tensor acima contém uma parte isotrópica mais uma contribuição anisotrópica $M_B^{\mu\nu\alpha\beta}$, que está relacionada ao comportamento não linear do campo eletromagnético em M^{d+1} .

4.2.1 Relações de Dispersão na Presença de Campos Eletromagnéticos Externos

Vamos começar nossas considerações derivando os modos de onda para o campo eletromagnético. Para esse propósito, é preciso resolver o sistema de equações lineares

$$A^{\mu\alpha} \epsilon_\alpha = 0, \quad (4.16)$$

onde

$$A^{\mu\alpha} = \Omega^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu k_\beta, \quad (4.17)$$

e $\epsilon_\mu = a_\mu/\sqrt{a^2}$ é o vetor de polarização normalizado. O $a^2 = a_\mu a^\mu$ é o módulo quadrático do campo de gauge a^μ associado ao campo de onda $f^{\mu\nu}$. O quadri-vetor ϵ_μ denota os estados de polarização da onda eletromagnética.

De acordo com a relação (4.15), temos

$$A^{\mu\alpha} \equiv c_1 (\eta^{\mu\alpha} k^2 - k^\mu k^\alpha) - M^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu k_\beta. \quad (4.18)$$

Como a teoria em consideração é invariante de gauge, precisamos consertar o gauge. Por conveniência, adotamos o gauge temporal $a^0 = 0$, que divide o sistema de equações lineares em

$$A^{0i} \epsilon_i = 0, \quad (4.19)$$

e o sistema reduzido

$$A^{ij} \epsilon_j = 0. \quad (4.20)$$

Uma solução não trivial do sistema de equações lineares acima pode ser encontrada se encontrarmos o determinante de desaparecimento de A^{ij} , ou seja,

$$\det(A^{ij}) = 0. \quad (4.21)$$

É importante notar que a abordagem desenvolvida aqui é válida para espaços-tempos planos em $(d+1)$ -dimensões, ou seja, para grandes dimensões infinitamente extras.

Na próxima seção, as frequências de onda correspondentes para campos eletromagnéticos uniformes de fundo serão derivadas. Para simplificar nossa tarefa, os campos magnéticos e elétricos uniformes externos serão avaliados separadamente.

O Caso do Campo Puramente Magnético

O primeiro caso a ser considerado é para um campo magnético uniforme de fundo puro, ou seja, $F_{ij} \neq 0$. Neste caso, o campo elétrico $F_{0i} = E_i$ é zero, e assumindo $k^\mu = (w/c, \mathbf{k})$, a Eq. (4.19) se torna

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0, \quad (4.22)$$

que se reduz ao calibre de Coulomb em M^{d+1} . Portanto, a onda eletromagnética possui $(d - 1)$ -graus de liberdade. Observe que o calibre temporal e o calibre de Coulomb formam o calibre de radiação generalizado em grandes dimensões extras.

Com relação à Eq. (4.20), é preciso tomar o setor espacial puro do operador (4.18), ou seja, o termo A^{ij} , que nos dá a seguinte forma:

$$A_{ij} = \left(\frac{w^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{d_1}{c_1} F_{il} F_{jk} k_l k_k. \quad (4.23)$$

Então, calculando o determinante de A^{ij} , a solução não trivial nos fornece as seguintes frequências angulares de onda:

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{k})^2}, \quad (4.24)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck, \quad (4.25)$$

$\vdots$

$$w_{d-2}(\mathbf{k}) = ck, \quad (4.26)$$

onde definimos $(\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{k})_j \equiv F_{ij} k_j$.

Da relação acima, encontramos $(d - 1)$ frequências de ondas angulares, que estão relacionadas aos modos de propagação física. Além disso, a influência do campo magnético externo altera apenas um dos modos de frequência angular, levando ao aparecimento da birrefringência em grandes dimensões extras. Também observamos que $d_1 \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, sempre que $F_{ij} \rightarrow 0$, a frequência w_1 reduz para $w_1(\mathbf{k}) = ck$. Para garantir que w_1 seja real e positivo-definido, a condição $c_1 > d_1 (\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{k})^2$ deve ser satisfeita.

Um caso interessante é quando $d = 3$, e o campo magnético assume a seguinte forma $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$ no espaço euclidiano, onde B_k é o campo magnético em três dimensões espaciais e ϵ_{ijk} é a parte espacial do símbolo de Levi-Civita, que produz as frequências angulares de onda correspondentes associadas aos dois estados de polarização:

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}, \quad (4.27)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck, \quad (4.28)$$

de acordo com os resultados anteriores[22, 68, 20].

A velocidade de grupo $v_{g(i)} = \partial w / \partial k_i$ relacionada ao conjunto de frequências, por sua vez, é dada por

$$v_g^{(1)}(\mathbf{k}) = c \left[\frac{\hat{k}_i - (d_1/c_1) \left(\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{k} \right)_j F_{ji}}{\sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \left(\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{k} \right)^2}} \right], \quad (4.29)$$

$$v_g^{(2)}(\mathbf{k}) = c\hat{\mathbf{k}}, \quad (4.30)$$

$\vdots$

$$v_g^{(d-2)}(\mathbf{k}) = c\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.31)$$

Os vetores de velocidade de grupo têm componentes nas direções de $\hat{k}$ e do campo magnético externo F_{ij} , que, em $d = 3$, assume a seguinte forma[22, 68, 20]

$$\mathbf{v}_g^{(1)} = c \frac{[c_1 \hat{\mathbf{k}} - d_1 \mathbf{B} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})]}{c_1 \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})^2}}, \quad (4.32)$$

$$v_g^{(2)}(\mathbf{k}) = c\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.33)$$

Além disso, na ausência do campo magnético externo, ou seja, sempre que $F_{ij} \rightarrow 0$, então $v_g^{(1)} = c\hat{\mathbf{k}}$.

Para concluir, gostaríamos de enfatizar que a natureza do campo magnético depende da dimensão do espaço-tempo. No caso $(3+1)-$, o campo magnético é um vetor. Por outro lado, em outras dimensões, F_{ij} não forma mais um vetor. Este aspecto é uma consequência direta da antissimetria do tensor de tensão $F^{\mu\nu}$. O campo elétrico F_{0i} tem d -componentes, que é um campo vetorial para qualquer dimensão do espaço-tempo, enquanto o F_{ij} tem $d(d-1)/2$ componentes e forma um vetor apenas em $d = 3$.

O Caso do Campo Elétrico de Fundo

Agora, para o caso de um campo elétrico uniforme de fundo puro $\mathbf{E}$, a Eq. (4.19) produz

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon = -\frac{d_1}{c_1} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) (\mathbf{E} \cdot \epsilon), \quad (4.34)$$

enquanto o sistema reduzido de equações lineares Eq. (4.20) assume a forma

$$\left[\left(\frac{w^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \delta_{ij} - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) k_i E_j + \frac{d_1}{c_1} \frac{w^2}{c^2} E_i E_j \right] \epsilon_j = 0. \quad (4.35)$$

Um cálculo explícito do determinante do operador A^{ij} nos dá o seguinte frequências:

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1 (\mathbf{E}^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})^2)}{c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}}, \quad (4.36)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck, \quad (4.37)$$

$\vdots$

$$w_{d-2}(\mathbf{k}) = ck. \quad (4.38)$$

Como no caso do campo puramente magnético, o fenômeno da birrefringência aparece aqui. Além disso, existem $(d-1)$ –modos de propagação de onda. A frequência (4.36) é real e definida positiva se a condição $c_1 + d_1 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})^2 > 0$ for satisfeita. No caso particular $d=3$, a relação de dispersão reduz-se a dois modos de frequência, que são dados por

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1 (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^2}{c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}}, \quad (4.39)$$

$$w_2(\mathbf{k}) = ck, \quad (4.40)$$

que, novamente, produz o mesmo resultado que trabalhos anteriores[22].

A frequência de onda (4.36) também pode ser escrita em termos do ângulo θ_{d-2} entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo elétrico uniforme externo $\mathbf{E}$, que assume a forma

$$w_1(\mathbf{k}) = ck \sqrt{1 - \frac{d_1 E^2}{c_1 + d_1 E^2} \sin^2 \theta_{d-2}}. \quad (4.41)$$

A velocidade de grupo para as frequências (4.36) e (4.38) são, respectivamente, dadas

por

$$v_g^{(1)}(\mathbf{k}) = c \left[\frac{c_1 \hat{k}_i + d_1 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) E_i}{(c_1 + d_1 \mathbf{E}^2) \sqrt{1 - \frac{d_1 (\mathbf{E}^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})^2)}{c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}}} \right], \quad (4.42)$$

$$v_g^{(2)}(\mathbf{k}) = c \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.43)$$

$\vdots$

$$v_g^{(d-2)}(\mathbf{k}) = c \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.44)$$

A velocidade de grupo $v_g^{(1)}$ tem componentes na direção de $\hat{k}$ e E_i . Na ausência de um campo elétrico de fundo, a velocidade do grupo relacionada ao modo $w_1(\mathbf{k})$ reduz para $v_g = c \hat{\mathbf{k}}$.

4.3 A Radiação do Corpo Negro em Dimensões Extras

Agora gostaríamos de entender os efeitos do campo eletromagnético não linear em dimensões extras no gás de fótons em equilíbrio térmico. Para fazer isso, primeiro consideramos ondas eletromagnéticas não lineares presas em uma caixa de volume V em d -espaço dimensional em equilíbrio térmico na temperatura T com o invólucro. A estatística de spin é considerada válida em dimensões superiores[69]. Além disso, cada fóton de massa de repouso zero tem $d - 1$ graus de liberdade. Além disso, como o campo magnético depende da dimensão específica do espaço-tempo, consideraremos apenas um campo elétrico uniforme externo.

O número de estados acessíveis em dimensões arbitrárias é dado por

$$N = \frac{V_d}{(2\pi)^d} \int d^d k, \quad (4.45)$$

onde V_d é o volume do reservatório na d -hiperesfera e $d\Omega_{d-1}$ é o elemento de ângulo sólido.

Para avaliar o elemento infinitesimal $d^d k$, empregaremos as coordenadas hipersféricas, que nos dão $d^d k = d\Omega_{d-1} dk k^{d-1}$. O ângulo sólido diferencial $d\Omega_{d-1}$, por sua vez, assume a forma

$$d\Omega_{d-1} = \prod_{n=1}^{d-1} d\theta_n \sin^n \theta_n. \quad (4.46)$$

Um ponto na hipersfera pode ser especificado por $(d-1)$ -ângulos $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2}, \varphi)$, onde $\{\theta_k\}_{k=1, \dots, d-2} \in [0, \pi]$ são os ângulos polares e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é o ângulo azimutal.

Para obter a distribuição de frequência espectral, é preciso transformar o elemento infinitesimal no espaço de fase para a frequência ν , que envolve tanto a fase v_p quanto as velocidades de grupo v_g , como de costume. Por outro lado, a partir das relações (4.39) e (4.42), nota-se prontamente que o integrando obtido é muito difícil de resolver. Para simplificar nossa tarefa, consideramos então a aproximação de campo fraco para ângulos arbitrários, que é satisfeita pela condição $c_1 + d_1(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})^2 \gg 0$. Sob essa suposição, as velocidades do módulo de grupo e de fase são iguais e dadas por

$$v_g = v_p \approx c \left(1 - \frac{d_1 E^2 \sin^2 \theta_{d-2}}{2(c_1 + d_1 E^2)} \right). \quad (4.47)$$

Portanto, levando em consideração as velocidades de grupo e fase no regime de campo fraco, podemos escrever o número de estados disponíveis N como

$$N = \frac{V_d}{c^d} \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty d\nu \nu^{d-1} \Delta\Lambda(E, \theta_{d-2}), \quad (4.48)$$

onde

$$\Delta\Lambda(E, \theta_{d-2}) \approx (d-1) + \epsilon \sin^2 \theta_{d-2}, \quad (4.49)$$

e

$$\epsilon = \frac{3d_1 E^2}{2(c_1 + d_1 E^2)}. \quad (4.50)$$

O fator $\Delta\Lambda$ depende da intensidade do campo elétrico uniforme de fundo, que é codificado no parâmetro ϵ , e do ângulo θ_{d-2} entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo elétrico $\mathbf{E}$.

Em relação à função de partição $\mathcal{Z}$, seguindo o procedimento padrão da mecânica estatística para a distribuição de partículas bosônicas com potencial químico igual a zero, temos

$$\log \mathcal{Z} = -\frac{V_d}{c^d} \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty d\nu \nu^{d-1} \Delta \Lambda \log(1 - e^{-\beta h\nu}), \quad (4.51)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, h é a constante de Planck e k_B é a constante de Boltzmann.

Agora que temos a função logarítmica da função de partição, podemos obter as quantidades termodinâmicas correspondentes associadas ao gás de fótons, bem como a densidade de energia espectral e a lei de Stefan-Boltzmann no cenário atual.

4.3.1 A Distribuição de Radiância Espectral

A partir da função de partição (4.51), é simples obter a densidade de energia espectral u , por unidade de volume, em equilíbrio térmico na temperatura T , que é dada por

$$u(\nu, T) = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{c} \right)^d \frac{(d-1)}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{h\nu^d}{e^{\beta h\nu} - 1} \right) \left[1 + \frac{\epsilon}{d} \right]. \quad (4.52)$$

Uma rápida olhada na densidade de energia (4.52) nos mostra claramente que as contribuições das não linearidades são codificadas no parâmetro ϵ . No limite $\epsilon = 0$, ou seja, sempre que o módulo do campo elétrico $E \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, o parâmetro $d_1 \rightarrow 0$, a densidade de energia interna $u(\nu, T)$ se reduz à distribuição de Planck em grandes dimensões extras[65]. A fórmula de Planck é recuperada quando $d = 3$ e $\epsilon = 0$, como esperado. Além disso, a dependência dimensional d em ϵ/d tem uma origem geométrica, pois chega da integração angular do fator $\Delta \Lambda(E, \theta_{d-2})$ em (4.51). Na Fig. 4.1, plotamos a densidade de energia espectral normalizada para $d = 2, 3, 4$ e $d = 5$. Observe que a frequência na qual a distribuição atinge o máximo depende da dimensionalidade. Esse recurso, conhecido como lei de Wien, será discutido na próxima seção.

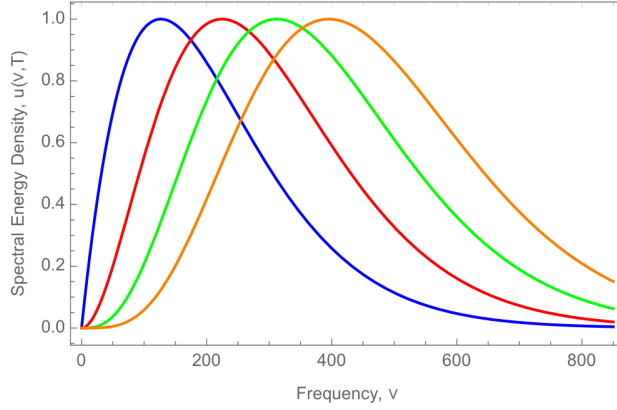


Figura 4.1: Gráfico da distribuição normalizada da densidade de energia espectral para $d = 2$ (linha azul), $d = 3$ (linha vermelha), $d = 4$ (linha verde) e $d = 5$ (linha laranja). Além disso, assumimos uma temperatura de $T = 0.5keV$ e $\epsilon = 0.01$. Aqui, adotamos $c = \hbar = k_B = 1$.

Vamos agora considerar uma dimensão específica e negligenciar por um momento o papel da dimensionalidade para ver de que forma a não linearidade afeta a distribuição de frequência. Nesse caso, levando em consideração a dimensão $(3 + 1)-$, comparamos a distribuição de Planck com nosso modelo, assumindo $\epsilon = 0,01$ (veja a figura 4.2).

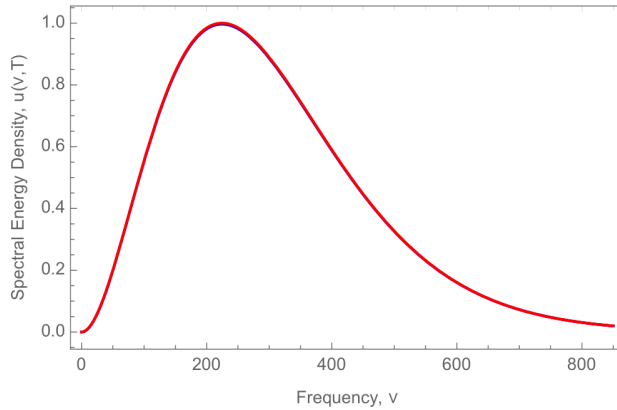


Figura 4.2: Gráfico da distribuição de densidade de energia espectral normalizada para a distribuição de Planck (linha azul) e para o caso em que $\epsilon = 0.001$ (linha vermelha). Além disso, assumimos uma temperatura de $T = 0,5keV$.

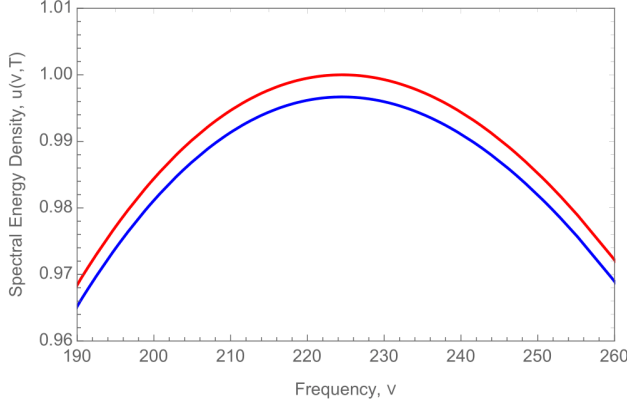


Figura 4.3: Gráfico da distribuição de densidade de energia espectral normalizada para a distribuição de Planck (linha vermelha) e para o caso em que $\epsilon = 0.001$ (linha azul). Além disso, assumimos uma temperatura de $T = 0.5keV$.

Da Fig. 4.2, nota-se prontamente que ambas as curvas estão muito próximas uma da outra na escala em consideração. Portanto, realizando um zoom próximo ao pico da curva (ver Figura 4.3), é possível ver um aumento na intensidade da distribuição para o caso não linear. Ressaltamos o fato de que a não linearidade eletromagnética não altera o ponto em que a distribuição de frequência atinge um máximo[20]. A pequena diferença na intensidade pode ser entendida analisando a densidade de estados. Neste caso, a densidade generalizada de estados $g(\nu)$ assume a seguinte forma:

$$g(\nu) = 2(d-1) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{c} \right)^d \frac{\nu^{d-1}}{\Gamma(d/2)} \left[1 + \frac{\epsilon}{d} \right]. \quad (4.53)$$

A densidade generalizada de estados (4.53) leva a estados mais acessíveis, que aumentam o número de fótons para cada modo. Observe que esse comportamento depende tanto da não linearidade quanto da dimensionalidade. Em outras palavras, os efeitos não lineares do campo eletromagnético induzem estados mais acessíveis em maiores dimensões espaciais.

Em seguida, integrando (4.52) sobre todas as frequências, a densidade total de energia obtida é

$$u(T) = a_d^{eff} T^{d+1}, \quad (4.54)$$

onde

$$a_d^{eff} = \left(\frac{2}{hc}\right)^d (\sqrt{\pi})^{d-1} d(d-1) k_B^{d+1} \times \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1) \left(1 + \frac{\epsilon}{d}\right), \quad (4.55)$$

sendo um coeficiente efetivo que retém as modificações não lineares.

Com relação à dependência angular, a contribuição da densidade de energia para cada elemento de ângulo sólido é dada por

$$u(T, \Omega_{d-1}) d\Omega_{d-1} = \left(\frac{1}{ch}\right)^d [(d-1) + \epsilon \sin^2 \theta_{d-2}] \times k_B^{d+1} T^{d+1} d\Omega_{d-1}. \quad (4.56)$$

Aqui, gostaríamos de enfatizar o fato de que há a aparência de uma dependência angular no espectro de potência, fornecendo um termo anisotrópico para a distribuição de frequência.

4.3.2 A Lei de Stefan-Boltzmann Generalizada

A radiância é obtida realizando a integração da radiância espectral sobre o hemisfério $(d-1)$ -dimensional

$$R(T) = \int d\Omega_{d-1} \cos \theta_{d-2} \int_0^\infty d\nu B(\nu, \theta_{d-2}, T), \quad (4.57)$$

onde a radiância espectral é dada por

$$B(\nu, \theta_{d-2}, T) = \left(\frac{\nu}{c}\right)^{d-1} \left(\frac{h\nu}{e^{h\nu} - 1}\right) \Delta\Lambda(B, \theta). \quad (4.58)$$

Portanto, realizando a integral, prontamente se encontra

$$R(T) = \sigma_d^{eff} T^{d+1}, \quad (4.59)$$

onde

$$\sigma_d^{eff} = \left(\frac{2}{c}\right)^{d-1} (\sqrt{\pi})^{d-2} \frac{k_B^{d+1}}{h^d} d(d-1) \times \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta(d+1) \left[1 + \frac{\epsilon}{d+1}\right], \quad (4.60)$$

que se reduz aos casos anteriores quando $\epsilon = 0$ [65], onde ζ é a função zeta de Riemann.

A relação (4.59) é a lei de Stefan-Boltzmann generalizada em grandes dimensões infinitamente extras na presença de um campo elétrico de fundo, com (4.60) sendo a constante de Stefan-Boltzmann generalizada. Além disso, da relação (4.59), conclui-se que a radiância é uma função crescente monotônica com o número de dimensões espaciais.

4.3.3 O Regime de Comprimento de Onda Longo e a Lei de Deslocamento de Wien

Em baixas frequências, a distribuição de frequência (4.52) assume a forma

$$u(T) = 2\nu^{d-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{c}\right)^d \frac{(d-1)}{\Gamma(d/2)} \left[1 + \frac{\epsilon}{d}\right] (k_B T). \quad (4.61)$$

A relação acima nos mostra que as não linearidades induzidas pelo campo elétrico de fundo em dimensões extras modificam a lei de Rayleigh-Jeans. Por outro lado, a dimensionalidade não influencia a temperatura, que tem o mesmo comportamento que em $D = 3 + 1$.

Em relação à lei de deslocamento de Wien, definimos $x = h\nu_{max}/k_B T$ em (4.52) e realizamos $du(x)/dx = 0$, o que nos dá

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{D}, \quad (4.62)$$

onde D é a dimensão do espaço-tempo.

A solução da equação acima é dada por

$$x = D + W(-De^{-D}), \quad (4.63)$$

onde a função de Lambert W é definida como

$$W(z) + e^{W(z)} = z. \quad (4.64)$$

Portanto, a lei de Wien assume a forma $\nu_{max}/T = \alpha$, onde α é uma constante[65]. É importante ressaltar que as não linearidades eletromagnéticas não alteram a lei de Wien. No entanto, a constante α depende da dimensionalidade do espaço-tempo, que aumenta à medida que o número de dimensões aumenta. Uma inspeção da Fig. 4.1 demonstra o comportamento esperado da lei de Wien em dimensões superiores, que depende do valor de α .

4.4 Propriedades Termodinâmicas do Gás de Fótons

Características relacionadas às não linearidades do setor de spin-1 abeliano em grandes dimensões extras podem ser investigadas mais a fundo avaliando as variáveis termodinâmicas do gás de fótons. Nesse sentido, a maneira direta de obter essas quantidades no equilíbrio térmico é obtendo a energia livre de Helmholtz F nessa situação, a saber,

$$F = -\frac{V_d}{d} \left(\frac{2}{hc} \right)^d (\sqrt{\pi})^{d-1} d(d-1) k_B^{d+1} \times \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1) \left(1 + \frac{\epsilon}{d}\right) T^{d+1}. \quad (4.65)$$

A partir da energia livre (4.65), a pressão p , a energia u , a entropia s e a capacidade térmica c_V a volume constante são, respectivamente, dadas por

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \quad s = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad c_V = \frac{\partial E}{\partial T}, \quad (4.66)$$

que nos dão

$$p = \frac{1}{d} a_d^{eff} T^{d+1}, \quad s = \frac{(d+1)}{d} a_d^{eff} T^d, \quad (4.67)$$

e

$$c_V = (d+1) a_d^{eff} T^d. \quad (4.68)$$

As grandezas termodinâmicas em (4.67) e (4.68) nos mostram que a propagação da onda eletromagnética em um campo elétrico de fundo induz desvios da energia livre e das quantidades de equilíbrio termodinâmico derivadas correspondentes. Além disso, levando em consideração as Eqs. (4.54) e (4.67), a equação de estado assume a forma

$$p = \frac{u(T)}{d}, \quad (4.69)$$

onde d está associado à dimensão espacial em M^{d+1} .

4.5 Observações Adicionais

Vamos agora discutir nossos resultados. Alguns trabalhos anteriores já consideraram a questão da radiação eletromagnética em equilíbrio térmico em grandes dimensões extras[64, 65, 66]. Nestes trabalhos, parece que generalização da lei de Stefan-Boltzmann com uma dependência da dimensão espacial, ou seja, $R \sim T^{d+1}$. Em nossa estrutura, por sua vez, estendemos esses resultados introduzindo o comportamento não linear do campo eletromagnético. Embora exista uma influência da não linearidade, que é codificada no parâmetro ϵ , a dependência da temperatura na radiância apresenta o mesmo comportamento dos trabalhos mencionados. Pode ser facilmente compreendido pelo fato de que a dependência da temperatura na lei de Stefan-Boltzmann, por exemplo, emerge quando se realiza a integral sobre as frequências, que vai para ν^d , como se pode ver pela relação (4.57). O mesmo argumento é válido para a densidade de energia e as grandezas termodinâmicas também. Nesse sentido, podemos concluir que existe um comportamento universal da lei de Stefan-Boltzmann em dimensões extras para teorias eletromagnéticas que mantêm uma dependência linear entre a frequência de onda w e o momento $\mathbf{k}$, que vai para $R \sim T^{d+1}$. Teorias nas quais parece haver uma relação distinta entre os modos de frequência e o vetor de onda, como $w \sim k^n$ com $n \neq 1$, por exemplo, dariam um padrão diferente à lei de Stefan-Boltzman.

Em Ramos[70], um modelo mais atraente fisicamente foi estudado. Em seu trabalho, os autores analisaram a influência de dimensões extras compactas na distribuição de energia do espectro. No regime de baixa temperatura, a radiação do corpo negro se comporta normalmente, enquanto em temperaturas acima do inverso ao tamanho das dimensões compactas, pequenos desvios aparecem na distribuição do espectro, bem como na densidade de energia, que depende da dimensionalidade do espaço-tempo. Aqui, o papel da dimensão extra emerge no regime de altas temperaturas. Por outro lado, neste regime, a dependência da temperatura é a mesma que em dimensões extras não compactas.

Em relação à birrefringência na propagação de ondas, mostramos que a não linearidade, ao considerar campos magnéticos e elétricos externos, percola através de um único modo. Isso ocorre porque consideramos teorias não lineares que dependem exclusivamente do invariante $\mathcal{F}$. No caso $(3+1)-$, por exemplo, teorias como Euler-Heisenberg e Born-Infeld levam em conta invariantes que dependem também do $\mathcal{G}$ $\left(= -(1/4)F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}\right)$. Nesse caso, há o surgimento de dois modos distintos que são dependentes do campo. A extensão do invariante $\mathcal{G}$ para dimensões arbitrárias, por sua vez, não é claramente definida, pois depende da dimensionalidade do espaço-tempo, ou seja, o tensor dual eletromagnético $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é uma função do símbolo de Levi-Civita, que depende da dimensão do espaço-tempo.

Em relação ao papel da estatística de spin e da dimensionalidade do espaço, alguns comentários são necessários. O teorema da estatística de spin afirma que partículas de spin inteiro seguem a distribuição de Bose-Einstein, enquanto partículas de spin meio inteiro obedecem à distribuição de Fermi-Dirac. Este teorema emerge da Teoria Quântica de Campos Relativística em quatro dimensões do espaço-tempo. Para dimensões espaciais diferentes de $d = 3$, esta conexão não é garantida. O papel do spin e da estatística foi investigado por alguns autores. Weinberg[69], por exemplo, estudou a conexão entre spin e estatísticas para partículas massivas e mostrou que a relação entre bósons e férmions é válida para todas as dimensões do espaço-tempo. Boya e Sudarshan[71], por sua vez, investigaram se a simetria do produto escalar bilinear no lagrangiano sob rotações em $d = 3$ pode ser estendida para campos quânticos em dimensões arbitrárias. Eles descobriram

que as conexões padrão entre bósons e férmions são válidas para dimensões específicas. Aqui, adotamos o ponto de vista de que as estatísticas de Bose-Einstein permanecem válidas independentemente da dimensão do espaço-tempo, onde cada modo tem uma energia média $\bar{E}$ dada pela fórmula de Planck, a saber,

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}. \quad (4.70)$$

4.6 Conclusão Parcial

Neste trabalho, estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas não lineares em grandes dimensões extras espaciais. Especificamente, obtivemos as frequências de onda e as velocidades de grupo para campos elétricos e magnéticos de fundo. Além disso, as leis generalizadas de radiação de corpo negro e as quantidades termodinâmicas em equilíbrio térmico para um gás de fótons na presença de um campo elétrico externo constante também foram contempladas.

Também gostaríamos de observar que a configuração estudada neste trabalho parece reproduzir uma situação física não padrão. Isso ocorre porque as dimensões extras espaciais são assumidas como infinitas, enquanto as teorias modernas sugerem que essas dimensões extras espaciais devem ser compactadas até uma escala muito pequena. Por outro lado, modelos teóricos só podem ser descartados por experimentos, o que, neste ponto, não é o caso. Além disso, é a primeira vez, até onde sabemos, que teorias não lineares de eletrodinâmica são contempladas em um formalismo geral que depende de dimensões extras de espaço-tempo. De fato, ele pode nos fornecer informações valiosas sobre algumas características do eletromagnetismo neste cenário.

Capítulo 5

Fenomenologia da Gravitação Quântica e a Radiação do Corpo Negro

5.1 Introdução

A natureza do espaço-tempo é talvez o principal desafio da física moderna. É comumente aceito que na escala de Planck, ou seja, para energias próximas a $10^{19} GeV$, nossas teorias físicas deixam de ser preditivas, e os efeitos da Gravitação quântica devem se tornar relevantes [72, 73, 74].

Por outro lado, nos últimos anos, foi sugerido que os efeitos da gravitação quântica podem induzir pequenos desvios nas previsões padrão, que poderiam ser observáveis, pelo menos em princípio, por meio de observações astronômicas e experimentos terrestres [74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. A possibilidade de observar esses fenômenos inclui oscilações de neutrinos, raios gama, interferometria a laser e violação de CPT, entre outros [82].

A estrutura onde esses fenômenos podem ser investigados é a chamada Fenomenologia da Gravitação Quântica[83]. Este formalismo inclui vários testes, como assinaturas sobre as perturbações cosmológicas iniciais, buracos negros relacionados a dimensões extras e ondulações do espaço-tempo na escala de Planck. Características relacionadas a violações de simetrias fundamentais, como as simetrias de Lorentz e CPT, também são contempladas nesses cenários[82].

Entre as várias maneiras de sondar essas assinaturas decorrentes da gravitação quântica, um papel importante é desempenhado por meio de modificações na relação de dispersão[84, 85, 86, 87]. Desvios das relações de dispersão relativísticas podem ser estudados analisando fótons de alta energia emitidos por fontes astrofísicas a distâncias cosmológicas, o que pode sinalizar efeitos de gravitação quântica ou mesmo a presença de violações de simetria de Lorentz[88]. Em cenários de gravitação quântica em loop, por exemplo, alguns trabalhos sugerem que violações de simetria de Lorentz podem induzir modificações nas equações de Maxwell, levando a efeitos de birrefringência na propagação de fótons[89].

Relações de dispersão modificadas e teorias de campo de derivadas de ordem superior são aspectos comuns de várias abordagens fenomenológicas à gravitação quântica. De fato, na estrutura da fenomenologia da gravitação quântica, modificações da relação de dispersão relativística associada a partículas livres são esperadas na escala de Planck, o que pode lançar alguma luz sobre a teoria quântica subjacente da gravitação. Do ponto de vista fenomenológico, duas possibilidades devem ser distinguidas. O primeiro introduz direções preferenciais na estrutura do espaço-tempo, e a simetria de Lorentz não é preservada. Esta abordagem é definida na estrutura da teoria de campo efetiva, onde vários experimentos e observações nos últimos anos levaram a muitas restrições nos coeficientes responsáveis pela quebra da invariância de Lorentz[90]. O segundo preserva a equivalência de todos os observadores inerciais na chamada relatividade especial deformada, onde é introduzida uma nova escala independente do observador, a energia de Planck[91]. Esta suposição, por sua vez, requer uma deformação das simetrias relativísticas da relatividade especial, que podem ser obtidas adotando uma representação não padrão do gerador de boosts. Por outro lado, espera-se que a escala de Planck suprima as modificações das relações de dispersão relativísticas. Nesse sentido, pode-se perguntar se esses efeitos são significativos e por que considerá-los, afinal. Da perspectiva da cosmologia, os efeitos transplanckianos devem ter afetado a evolução inicial do universo, o que pode ter levado a assinaturas digitais no fundo cósmico de micro-ondas[92, 93].

Além disso, a emissão térmica de buracos negros está associada a modos de energias arbitrariamente altas perto do horizonte, que foram baseados em relações de dispersão modificadas e forneceram insights notáveis com relação à radiação Hawking[94]. Além disso, os efeitos de violação de Lorentz em teorias de campo quântico perturbativas podem ser aprimorados no mecanismo de regularização e renormalização[95].

Estudos fenomenológicos envolvendo propriedades termodinâmicas de um gás de fótons com relações de dispersão modificadas foram investigados em trabalhos anteriores[96, 97, 98, 99, 100, 101, 102], enquanto aspectos termodinâmicos de bósons e férmions aplicados à cosmologia e astrofísica foram discutidos em cenários semelhantes[103, 104]. Assim, existe uma grande literatura associada a esse assunto, que mostra considerável interesse nesse tópico. Nossa abordagem pretende fornecer detalhes sobre as leis térmicas de radiação de corpo negro e sondar as eventuais implicações em estrelas de nêutrons.

A estrutura deste capítulo foi baseada no paper já publicado [105] organizada da seguinte forma: Na Seção (5.2) relações de dispersão modificadas são introduzidas e o formalismo grand-canônico é empregado para essas relações de dispersão. Na Seção (5.3), a radiância espectral e a lei de Stefan-Boltzmann no contexto atual são derivadas. As leis térmicas do corpo negro e as quantidades termodinâmicas no regime de baixas temperaturas são contempladas nas Seções (5.4) e (5.4.1).

5.2 Relação de Dispersão Modificada e a Mecânica Estatística

Motivados pela ideia de que os efeitos da gravitação quântica podem induzir modificações na relação de dispersão [106, 107, 108, 109, 110, 111], consideramos a relação de dispersão geral dependente de energia da seguinte forma:

$$c^2 \mathbf{p}^2 = f(E, m; \lambda_n) \approx E^2 - m^2 c^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E^{(n+2)}, \quad (5.1)$$

onde $f(E, m; \lambda_n)$ é a função que fornece a relação de dispersão exata decorrente de alguma teoria fundamental da gravitação quântica, λ_n são fatores com a dimensão do inverso da

energia, onde seu valor depende do modelo específico da gravitação quântica, e assumimos uma expansão de Taylor para $E \ll 1/\lambda_n$. Além disso, sempre que $\lambda_n \rightarrow 0$, recupera-se a relação de dispersão relativística padrão.

Como estamos considerando o setor de calibre do eletromagnetismo, assumiremos então uma massa de repouso zero. Além disso, concentraremos nossa atenção na correção de primeira ordem, que reduz (5.1) para

$$c^2 \mathbf{p}^2 = E^2 + \lambda_1 E^3, \quad (5.2)$$

onde λ_1 é considerado da ordem do comprimento de Planck l_P . A relação de dispersão modificada (5.2) é a equação fundamental para a dinâmica dos fótons a partir dos quais as propriedades termodinâmicas do corpo negro serão estudadas.

Neste ponto, alguns comentários são necessários.

1. Para λ_1 positivo-definido, o momento p é sempre positivo.
2. λ_1 negativo e $|\lambda_1| < 1/E$ fornece um ramo físico para a partícula.
3. Sempre que $\lambda_1 > 1/E$ para valores negativos de λ_1 , ele corresponde a uma região não física.

Como os efeitos da gravitação quântica são introduzidos por meio de modificações nas relações de dispersão relativísticas, pode-se perguntar quais são as consequências para os sistemas de mecânica estatística. Nesse sentido, é importante ressaltar o fato de que os fundamentos da mecânica estatística são preservados nessa situação[103, 112]. No entanto, haverá modificações na densidade de estados acessíveis, que serão discutidas mais tarde.

Neste ponto, seria interessante nos perguntarmos sobre a razão de fazer pesquisas com relações de dispersão modificadas da forma (5.1) no setor de fótons. O aumento do interesse nos últimos anos neste assunto é motivado principalmente pela possibilidade de detectar o tempo de chegada dependente de energia de explosões de raios gama originadas em distâncias cosmológicas[84, 85]. Neste contexto, relações de dispersão modificadas

com termos de ordem superior na energia levam a uma velocidade dependente de energia de partículas sem massa, dada por $v \approx 1 - \lambda E$. Uma velocidade não constante da luz no vácuo, por sua vez, implica um tempo de retardo (positivo λ) para um sinal que se propaga com alta energia, caracterizando uma propagação subluminal para os fótons. Da perspectiva teórica, a velocidade da luz dependente de energia pode resolver os problemas de horizonte, falta de curvatura e constante cosmológica[113]. Além disso, alguns resultados em gravitação quântica em loop sugerem que relações de dispersão modificadas da forma (5.1) nos setores de fótons e neutrinos podem surgir em conexão com a violação da simetria de Lorentz[114], que fornece uma estrutura consistente para explorar as consequências fenomenológicas das teorias da gravitação quântica. Além disso, relações de dispersão modificadas surgem em teorias onde o princípio da incerteza é generalizado, um aspecto comum de teorias com um comprimento mínimo[115, 116]. Embora algumas estruturas teóricas motivem modificações nas relações de dispersão relativísticas, o fato de que relações de dispersão modificadas são experimentalmente mensuráveis por si mesmas é, portanto, uma razão muito convincente para considerar isso seriamente por si só.

Tendo motivado a relevância física da relação (5.1), vejamos então como a densidade de estados para a energia de um gás de fótons é modificada no cenário atual. Para começar, usamos o conjunto grand-canônico para descrever o gás de fótons em um recipiente de volume V [117]. Para um sistema de N bósons sem massa com espectro de energia $\beta \hbar \omega_i$, temos que cada estado é rotulado por i ($i = 1, 2, \dots$), onde $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Além disso, assumimos que a relação de De Broglie não é modificada, levando a condições de contorno dos fótons com momentos $p_n = n/2L$ [118, 119].

A conexão entre termodinâmica e mecânica estatística é dada pelo potencial grand-canônico,

$$\phi = -\frac{1}{\beta} \log \mathcal{Z}, \quad (5.3)$$

onde o logarítmico da função de partição assume a seguinte forma:

$$\log \mathcal{Z} = - \sum_i \log (1 - e^{-\beta \hbar w_i}) . \quad (5.4)$$

A energia média é então dada por

$$\langle E \rangle = \frac{1}{V} \sum_i \frac{\hbar w_i}{e^{\beta \hbar w_i} - 1} . \quad (5.5)$$

No limite de grande volume, pode-se aproximar a soma por uma integral da seguinte maneira:

$$\sum_i \rightarrow \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 . \quad (5.6)$$

Realizando uma mudança de variável integral do espaço de momentos k para o espaço de frequências w , de forma semelhante à obtida na mecânica estatística[120], através do uso da relação de dispersão (5.2), obtém-se

$$\sum_i \rightarrow \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty dw w^2 g(\lambda_1; w) , \quad (5.7)$$

onde a função $g(\lambda_1; w)$ contém as correções da gravitação quântica e é dada por

$$g(\lambda_1; w) = (1 + \lambda_1 \hbar w)^{3/2} + \left(\frac{\lambda_1 \hbar}{2} \right) w \sqrt{1 + \lambda_1 \hbar w} . \quad (5.8)$$

Da relação acima, nota-se prontamente que a densidade de estados acessíveis mudou do resultado padrão para fótons. Vale ressaltar que a expressão (5.8) codifica os efeitos da gravitação quântica para o gás de fótons. Sempre que $\lambda_1 = 0$, $g = 1$, e as previsões usuais da mecânica estatística são recuperadas. Para valores positivos de λ_1 , a g -função é sempre positiva-definida, enquanto para valores negativos, a restrição $|\lambda| < \hbar w$ deve ser satisfeita.

De acordo com a prescrição padrão, o número N de modos no intervalo de momentos $[k, k + dk]$ é

$$g(k) dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk . \quad (5.9)$$

Ao realizar um cálculo direto e levar em consideração a relação de dispersão modificada (5.2), encontramos prontamente no espaço de frequência w ,

$$g(w) dw = \frac{V w^2}{\pi^2 c^3} g(\lambda_1; w). \quad (5.10)$$

A relação de dispersão modificada (5.9) depende apenas da magnitude do vetor de momento, ou seja, $|\mathbf{p}| = p = \hbar k$. Portanto, a integração no espaço de fase é trivial e produz V . Além disso, a densidade de estados de momento permanece a mesma, uma vez que as condições periódicas não são alteradas. A partir da relação (5.7), fica claro que a relação de dispersão (5.9) modifica a densidade de estados acessíveis, o que pode ser visto na relação (5.10). Como consequência, haverá um aumento ou diminuição no número de fótons para cada modo de frequência dependendo do sinal de λ_1 , o que influenciará o comportamento das grandezas termodinâmicas, como energia, pressão, entropia e calor específico.

O teorema da equipartição clássica, por sua vez, afirma que a energia média para fótons em equilíbrio térmico na temperatura T é $k_B T$. A mecânica quântica, por outro lado, afirma que cada modo de um gás de fótons que satisfaz as estatísticas de Bose-Einstein tem uma energia média dada por $\bar{E} = \hbar w / (e^{\beta \hbar w} - 1)$. Na estrutura atual, os efeitos da gravitação quântica modificam a energia média, que se generaliza para

$$\bar{E} = \left(\frac{\hbar w}{e^{\beta \hbar w} - 1} \right) g(\lambda_1; w). \quad (5.11)$$

5.3 O Espectro de Planck Deformado

Para um gás de fótons não interativos nessa situação, a densidade de energia em equilíbrio térmico na temperatura T no intervalo de frequência $[w, w + dw]$ é dada por

$$\begin{aligned} u(w) dw &= \frac{w^2}{\pi^2 c^3} \left[(1 + \lambda_1 \hbar w)^{3/2} + \left(\frac{\lambda_1 \hbar}{2} \right) w \sqrt{1 + \lambda_1 \hbar w} \right] \\ &\times \left(\frac{\hbar w}{e^{\beta \hbar w} - 1} \right) dw. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Note que sempre que $\lambda_1 \rightarrow 0$, recupera-se a distribuição de Planck. Para ter uma ideia melhor das mudanças induzidas pelos efeitos da gravitação quântica, plotamos, na Fig. (5.1), tanto a distribuição de Planck quanto o espectro deformado. Para realizar tal análise, consideramos $T \approx 1/\lambda_1$. Neste caso, podemos ver que os efeitos da gravitação quântica são relevantes quando lidamos com altas temperaturas no Universo, como a temperatura da época inflacionária, por exemplo, onde a temperatura atinge $T = 10^{13} GeV$.

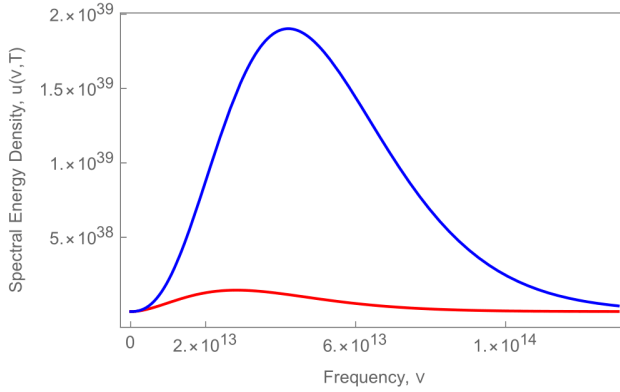


Figura 5.1: Gráfico da distribuição de densidade de energia espectral para o modelo de gravitação quântica sob consideração para $T = 10^{13} GeV$ e $\lambda_1 = 10^{-13} GeV$. Aqui, adotamos $c = \hbar = k_B = 1$. A linha vermelha corresponde ao espectro de Planck, enquanto a azul está associada ao modelo de gravitação quântica.

Normalmente, seria de se esperar que as correções da gravitação quântica nos resultados da termodinâmica padrão fossem negligenciadas em baixas temperaturas. Por outro lado, esses efeitos dependerão do valor de λ_1 . Para avaliar se os efeitos de baixa temperatura poderiam ser sondados neste regime, vamos considerar a lei de Stefan-Boltzmann para alguns valores de λ_1 .

Portanto, levando em consideração a lei de Stefan-Boltzmann

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (5.13)$$

onde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \quad (5.14)$$

é a constante de Stefan-Boltzmann, obtemos as seguintes curvas na Fig (5.2). Para $\lambda_1 = 10^{-10} eV^{-1}$ (linha roxa), nota-se prontamente que para temperaturas próximas a $10^8 eV$, pequenos desvios da lei padrão de Stefan-Boltzmann podem ser observados. Para valores de λ_1 em torno de $10^{-10} eV^{-1}$, podemos estudar o regime de baixa temperatura e investigar como a termodinâmica da radiação do corpo negro é afetada.

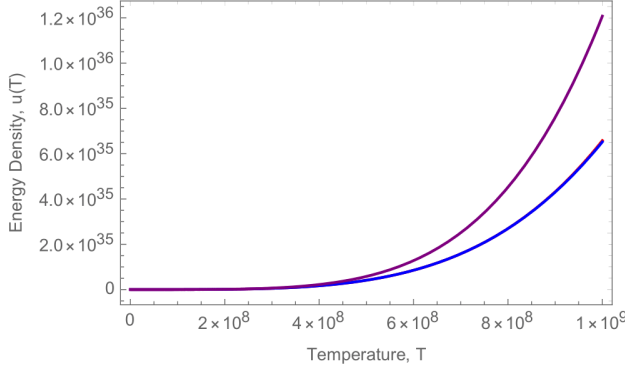


Figura 5.2: Gráfico da densidade de energia vs temperatura. Aqui, adotamos $\lambda_1 = 10^{-10} eV^{-1}$ (linha roxa) e $\lambda_1 = 10^{-13} eV^{-1}$ (linha azul) para o modelo de gravitação quântica em consideração, onde as curvas foram obtidas por meio de integração numérica. A lei padrão de Stefan-Boltzmann está associada à linha vermelha, que é sobreposta pela linha azul. Para avaliar o gráfico acima, assumimos unidades naturais.

5.4 Correções de Gravitação Quântica em Baixa Temperatura

Agora, gostaríamos de identificar a principal correção da gravitação quântica para as quantidades termodinâmicas em baixas temperaturas, ou seja, quando $\beta \ll 1$. Neste regime, o fator $(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^{-1}$ decai exponencialmente, e então pode-se expandir $g(\lambda_1, w)$

em séries de Taylor em torno de zero. Para realizar esta aproximação, a condição $\lambda_1 \ll \beta$ deve ser satisfeita. Para objetos compactos, como estrelas de nêutrons recém-formadas, que mantêm temperaturas em torno de $10^{11} - 10^{12} K$ dentro de seu interior, esta condição é garantida se $\lambda_1 \ll 10 GeV^{-1}$.

Levando em consideração as suposições mencionadas, portanto, a Eq. (5.12) reduz-se a

$$u(w) dw = \frac{w^2}{\pi^2 c^3} (1 + 2\lambda_1 \hbar w) \left(\frac{\hbar w}{e^{\beta \hbar w} - 1} \right) dw. \quad (5.15)$$

O valor máximo da relação acima, como uma função de w , é deslocado, modificando a lei de deslocamento de Wien (Ver Fig. 5.3). No regime de comprimento de onda longo, a distribuição de frequência acima assume a seguinte forma:

$$u(w) = \frac{w^2}{\pi^2 c^3} (1 + 2\lambda_1 \hbar w) k_B T, \quad (5.16)$$

que nos fornece as correções da gravitação quântica para a fórmula de Rayleigh-Jeans.

A energia total, por sua vez, agora pode ser computada. Para fazer isso, deve-se integrar a Eq. (5.15), onde, levando em conta a integral[121]

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x - 1} = \Gamma(n+1) \zeta(n+1), \quad (5.17)$$

nos fornecerá

$$u(T) = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15 c^3 \hbar^3} + \frac{48 \lambda_1 \zeta(5) k_B^5 T^5}{\pi^2 c^3 \hbar^3}, \quad (5.18)$$

com $\Gamma(n+1)$ sendo a função Gamma e $\zeta(n+1)$ sendo a função zeta de Riemann.

Se introduzirmos a constante de Stefan-Boltzmann (5.14) na expressão acima, obtém-se prontamente

$$u(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 + \frac{48 \lambda_1 \zeta(5) k_B^5 T^5}{\pi^2 c^3 \hbar^3}. \quad (5.19)$$

Para $\lambda_1 \rightarrow 0$, recupera-se a lei de Stefan-Boltzmann. A equação (5.21) também pode ser escrita como

$$u(T) = \frac{4}{c} \sigma_{eff}(\lambda_1; T) T^4, \quad (5.20)$$

onde

$$\sigma_{eff}(\lambda_1; T) = \sigma \left(1 + \frac{720\lambda_1 \zeta(5)}{\pi^4} k_B T \right) \quad (5.21)$$

é a constante efetiva de Stefan-Boltzmann.

Para altas temperaturas em estrelas densas, por exemplo, é possível observar desvios da lei de Stefan-Boltzmann.

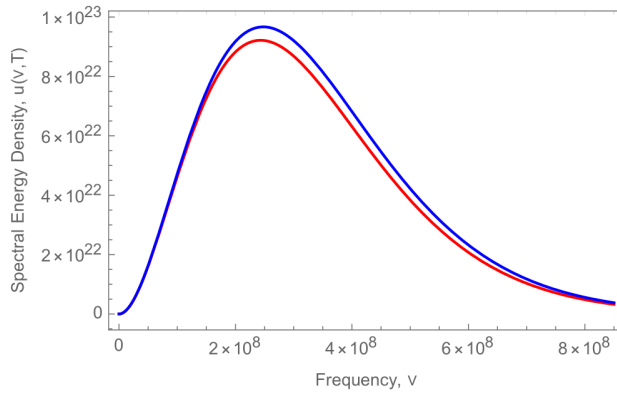


Figura 5.3: Gráfico da distribuição da densidade de energia espectral para o modelo de gravitação quântica sob consideração para $T = 86,17 MeV$ e $\lambda_1 = 10 GeV^{-1}$. Aqui, adotamos $c = \hbar = k_B = 1$. A linha vermelha corresponde ao espectro de Planck, enquanto a azul está associada ao modelo de gravitação quântica.

5.4.1 Termodinâmica na Presença de Relações de Dispersão Modificadas

Um dos resultados mais importantes da modificação da relação de dispersão relativística é a deformação de quantidades termodinâmicas. Para investigar isso, levamos em consideração o grande potencial canônico, que pode ser usado para derivar a pressão, entropia e calor específico para a radiação do corpo negro.

Para a pressão, então encontramos

$$p = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{45 c^3 \hbar^3} + \frac{12 \lambda_1 \zeta(5) k_B^5 T^5}{\pi^2 c^3 \hbar^3}, \quad (5.22)$$

enquanto para as densidades de entropia e capacidade térmica, temos

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45c^3 \hbar^3} + \frac{60\lambda_1 \xi(5) k_B^5 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}, \quad (5.23)$$

e

$$c_V = \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{15c^3 \hbar^3} + \frac{240\lambda_1 \xi(5) k_B^5 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}. \quad (5.24)$$

Gostaríamos de enfatizar que, dependendo do sinal de λ_1 , as quantidades termodinâmicas acima podem aumentar ou diminuir, o que pode influenciar a dinâmica de objetos compactos, como estrelas de nêutrons. Além disso, para temperaturas altas o suficiente, desvios dos resultados padrão da termodinâmica devem ser mensuráveis para esses objetos.

Vamos agora analisar o caso para valores positivos de λ_1 . Neste cenário, a pressão cresce em relação ao gás ideal.

Este resultado sugere que os efeitos da gravitação quântica podem ser medidos como uma interação repulsiva entre os componentes do gás de fótons. Esta interpretação pode ser esclarecida se considerarmos os desvios do gás ideal em termos de expansão virial[120], onde a pressão assume a seguinte forma:

$$\frac{pV}{Nk_B T} = \sum_{l=1}^{\infty} B_l(T) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^{l-1}, \quad (5.25)$$

com $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ sendo o comprimento de onda térmico, N/V denota a densidade de partículas, V é o volume e $B_l(T)$ é o coeficiente virial. Para $l = 1$, $B_1 = 1$, e recuperamos a equação de estado para um gás ideal. Para $l = 2$, o segundo coeficiente virial, B_2 , é uma função genérica do potencial de par entre as partículas do gás. Uma interação repulsiva significa $B_2(T) > 0$, o que aumenta a pressão, enquanto $B_2(T) < 0$ implica uma interação atrativa, levando a uma pressão menor do que o gás ideal.

A análise anterior indica que a gravitação quântica leva a desvios na pressão para o gás ideal. Para λ_1 positivo, a pressão cresce, enquanto para valores negativos de λ_1 , a pressão diminui.

O calor específico (5.24) é outra quantidade mensurável que pode ser usada para a busca de correções de gravitação quântica no nível de configurações experimentais. No entanto, essas modificações aparecem como $\lambda_1 T$, que introduz limites rígidos do ponto de vista experimental.

A equação de estado, por sua vez, pode ser encontrada dividindo a pressão (5.22) pela energia (5.18), o que nos dá

$$\frac{p}{u} = \frac{1}{3} - \frac{1620\lambda_1\xi(5)k_B T}{\pi^4}. \quad (5.26)$$

No limite $\lambda_1 \rightarrow 0$, temos $p = \frac{u}{3}$. A equação de estado é uma função da energia, ou seja, $p = p(u)$. Para eliminar a dependência da temperatura na expressão acima, é preciso expandir a temperatura em séries de potências de λ , até a primeira ordem, como $T = T_0 + \lambda_1 T_1$ e aplicá-la recursivamente na densidade de energia (5.21). Portanto, comparando as potências em λ_1 , encontra-se prontamente para a temperatura a seguinte forma:

$$T = \left(\frac{15\hbar^3 c^3}{\pi^2}\right)^{1/4} \frac{u^{1/4}}{k_B} + \frac{1620\xi(5)}{\pi^5} (15\hbar^3 c^3)^{1/2} \frac{\lambda_1}{k_B} u^{1/2}. \quad (5.27)$$

Inserindo a relação (5.27) em (5.26), temos, até a ordem linear em λ_1 ,

$$p = \frac{u}{3} \left[1 - \frac{540\lambda_1\xi(5)}{\pi^4} \left(\frac{15\hbar^3 c^3}{\pi^2}\right)^{1/4} \lambda_1 u^{1/4} \right]. \quad (5.28)$$

A partir da equação acima, nota-se prontamente o surgimento de efeitos de gravitação quântica na equação de estado padrão da ordem $\lambda_1(\hbar c)^{3/4}u^{1/4}$.

5.5 Conclusão Parcial

Neste trabalho, consideramos o efeito dos efeitos da gravitação quântica na termodinâmica da radiação do corpo negro. Partindo de uma relação de dispersão dependente de energia até a correção da ordem principal, exploramos o comportamento do espectro de emissão em altas e baixas temperaturas. Com relação ao regime de alta temperatura,

a distribuição de Planck deformada e a lei de Stefan-Boltzmann generalizada foram derivadas. No limite de baixa temperatura, por outro lado, as leis de radiação do corpo negro e as propriedades termodinâmicas foram obtidas. Neste regime, mostramos que para valores positivos de λ_1 , a densidade de energia, a pressão, a entropia e o calor específico são maiores do que aqueles da relatividade especial. Em contraste, com um λ_1 negativo, os efeitos da gravitação quântica emergem na direção oposta. No entanto, essas modificações se manifestam significativamente quando a temperatura é maior que $T = 10^{12}K$, o que não pode ser detectado diretamente em configurações de laboratório. Por outro lado, sugere que essas previsões podem desempenhar um papel importante no universo primitivo, como a inflação, e na formação de estrelas de nêutrons.

Em relação ao valor de λ_1 , não há evidências experimentais de desvios da relação de dispersão relativística até a escala de energia TeV[122]. Portanto, valores de $\lambda_1 \ll 10^{-3}GeV^{-1}$ são uma escolha adequada para considerar eventuais efeitos de gravitação quântica no setor fotônico em baixas energias em nossa estrutura. Além disso, medições recentes de explosões de raios gama sugerem fortes restrições na relação de dispersão in vacuo desses fótons de alta energia. Diferentes abordagens para a gravitação quântica levam a resultados semelhantes ao levar em conta a relação de dispersão da forma (5.2), com a velocidade da luz assumindo a seguinte forma:

$$v(E) \approx 1 - \frac{E}{E_{QG}}, \quad (5.29)$$

onde $E_{QG} \approx 3.6 \times 10^{17}GeV$ [123], que fornece um valor estimado em torno de $\lambda_1 < 2.7 \times 10^{-18}(GeV)^{-1}$. Essas estimativas justificam a consideração de pequenos valores para λ_1 , o que dá suporte à ideia de considerar os efeitos da ordem principal da relação de dispersão da forma (5.1).

Em temperaturas muito altas, as leis térmicas de radiação de corpo negro induzidas pela expansão de baixa energia (5.1) não são mais válidas. Assim, fornecemos uma imagem confiável em temperaturas bem abaixo da escala de Planck. Uma relação de dispersão modificada de ordem completa para o setor fotônico da forma $c^2p^2 = E^2 [1 + \mathcal{F}(E/E_{QG})]$,

com E_{QG} sendo a escala de energia da gravitação quântica e $\mathcal{F}$ sendo uma função genérica dependente do modelo, é esperada para emergir para temperaturas $T/E_{QG} \gg 1$, o que supostamente elimina tais divergências.

Gostaríamos também de chamar a atenção do leitor para o *soccer ball problem*[124]. Neste trabalho, começamos com a função de partição no ensemble grand-canônico e então aplicamos a metodologia padrão da mecânica estatística para derivar as leis térmicas do corpo negro correspondentes. Teorias nas quais há modificações não lineares dos momentos da lei de composição, como a relatividade especial deformada, levam a problemas conceituais associados à transformação de estados multipartículas. Em particular, com a adição sucessiva de muitas partículas com energias sub-Planck cada, pode-se acabar com uma enorme contribuição de energia maior do que a energia de Planck ao considerar um objeto macroscópico. Em nossa abordagem, a distribuição de Planck deformada (5.12), que é válida para temperaturas abaixo da escala de Planck, é bem comportada ao longo do espectro de frequência (veja a Fig. (5.1)), o que sugere que o problema mencionado não aparece em nossa estrutura. Para temperaturas muito altas, como comentado acima, espera-se uma relação de dispersão modificada de ordem completa, onde as características relacionadas à transformação dos estados multipartículas podem levar a outras possibilidades. Esta análise está fora do escopo deste artigo.

Algumas outras teorias consideraram termos de ordem superior em relação (5.1). Na Ref. [119], com base em argumentos da termodinâmica do buraco negro, apenas potências pares da energia na relação de dispersão modificada foram consideradas. Aqui, por outro lado, consideramos o termo de ordem líder na expansão mencionada. Termos de ordem superior ($n \geq 2$) levariam a dependências de temperatura da forma $\lambda_n T^{4+n}$ para a lei de Stefan-Boltzmann. Além disso, o perfil do espectro do corpo negro também seria modificado por esses termos.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Apesar do grande sucesso da teoria de Maxwell em explicar os fenômenos eletromagnéticos, a procura por extensões do eletromagnetismo visando incorporar novos processos físicos em determinadas situações extremas têm levado a uma série de modelos que sejam aptos a descrever tais circunstâncias. Dentro deste panorama, esta tese propôs-se a buscar e compreender, nos Capítulos 2 e 3, a radiação eletromagnética na presença de campos magnéticos intensos, no âmbito de teorias não-lineares do eletromagnetismo. Especificamente, focamos nossos esforços em ver como a não-linearidade no campo magnético influenciou a radiação de corpo negro e suas respectivas quantidades termodinâmicas. Nesse sentido, nossos resultados mostraram uma modificação na distribuição de Planck, onde surgiu uma dependência do campo magnético externo e dos parâmetros do específico modelo. Além disso, é interessante notar a dependência angular no espectro de emissão. Eventuais correções na lei de Stefann-Boltzmann e de Rayleigh-Jeans também foram observadas. As quantidades termodinâmicas e a influência devido a não-linearidade do campo eletromagnético também foram consideradas.

Como perspectiva para o proposto no Capítulo 4, gostaríamos de destacar que eventuais desvios das conhecidas leis térmicas de radiação de corpo negro em $(3 + 1)$ –dimensões seriam uma indicação de nova física. Nesse sentido, uma configuração de laboratório na qual um gás de fótons está sob a influência de um campo elétrico externo poderia revelar a existência dessas dimensões extras por meio de desvios da distribuição de

Planck, semelhantes aos presentes nas Figs. 4.1, 4.2 e 4.3. Outra possibilidade de sondar dimensões extras estaria relacionada ao condensado de Bose-Einstein na presença de campos elétricos e magnéticos externos. De fato, foi observado experimentalmente que um processo de termalização para um gás de fótons bidimensional em uma microcavidade óptica preenchida com corante dá origem a um condensado de fótons[125]. A influência de campos eletromagnéticos de fundo, bem como dimensões espaciais extras durante o processo de condensação, poderia induzir modificações na temperatura de transição, por exemplo, o que poderia revelar a existência dessas dimensões extras. Pretendemos explorar essa possibilidade em um futuro próximo. Esperamos que o presente trabalho estimule investigações adicionais sobre o problema.

Como perspectiva para o proposto no Capítulo 5, pretendemos estender nosso formalismo aqui desenvolvido para partículas massivas no setor fermiônico e, então, estudar as consequências do equilíbrio hidrostático de objetos compactos como estrelas de nêutrons. O setor bosônico massivo também pode ser contemplado. Como a densidade de estados acessíveis para partículas bosônicas sem massa é modificada no cenário atual, seria de se esperar o mesmo comportamento para partículas massivas. Nesse sentido, parece sugerir que correções de gravitação quântica devem desempenhar um papel nos fenômenos de condensado de Bose-Einstein, levando a uma modificação na temperatura de condensação, o que pode levar a experimentos mensuráveis em um futuro próximo[126].

Como perspectiva futura, pretende-se compreender aspectos ligados a física de magnetares a partir do uso das quantidades termodinâmicas aqui derivadas. Neste caso, estudaremos uma Lagrangiana que possui a forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_w + \mathcal{L}_{ednl}, \quad (6.1)$$

onde $\mathcal{L}_w$ é a Lagrangiana de Walecka para o modelo QHD-I:

$$\mathcal{L}_w = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma - g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \omega^\mu \quad (6.2)$$

e $\mathcal{L}_{ednl}$ é a Lagrangiana de uma eletrodinâmica não-linear.

Para um futuro estudo das magnetares, na presença de fortíssimos campos magnéticos, onde calcularemos quantidades como seu diagrama massa-raio e outras grandezas astrofísicas, será necessária uma reformulação da equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff[127] para levar em conta a presença da contribuição dos modelos eletromagnéticos não-lineares e de também da contribuição da temperatura das estrelas, usando teoria quântica de campos a temperatura finita.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview, 1995.
- [2] L. Marcotulli, T. Connor, E. Bañados, and et al, “NuSTAR Observations of a Varying-flux Quasar in the Epoch of Reionization,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 979, 2025.
- [3] D. Mattingly, “Modern Tests of Lorentz Invariance,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 8, 2005.
- [4] Ciabattoni, Hayran, and Monticone, “Observation of broadband superabsorption of electromagnetic waves through space-time symmetry breaking,” *Science Advances*, vol. 11, 2025.
- [5] H. R. Bakhtiarizadeh and H. Golchin, “Rotating black strings beyond Maxwell’s electrodynamics,” *arXiv:2305.03337*, 2023.
- [6] P. Niau Akmansoy and L. G. Medeiros, “Constraining Born–Infeld-like nonlinear electrodynamics using hydrogen’s ionization energy,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, no. 2, p. 143, 2018.
- [7] J. Franklin and T. Geron, “Approximate Born-Infeld effects on the relativistic hydrogen spectrum,” *Phys. Lett. A*, vol. 375, pp. 1391–1395, 2011.

- [8] M. Aaboud *et al.*, “Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC,” *Nature Phys.*, vol. 13, no. 9, pp. 852–858, 2017.
- [9] M. Baggioli and O. Pujolas, “On Effective Holographic Mott Insulators,” *JHEP*, vol. 12, p. 107, 2016.
- [10] S. Bi and J. Tao, “Holographic DC conductivity for backreacted NLED in massive gravity,” *JHEP*, vol. 06, p. 174, 2021.
- [11] F. Karbstein, “Probing vacuum polarization effects with high-intensity lasers,” *Particles*, vol. 3, no. 1, pp. 39–61, 2020.
- [12] M. Marklund and J. Lundin, “Quantum Vacuum Experiments Using High Intensity Lasers,” *Eur. Phys. J. D*, vol. 55, pp. 319–326, 2009.
- [13] R. Battesti and C. Rizzo, “Magnetic and electric properties of quantum vacuum,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 76, no. 1, p. 016401, 2013.
- [14] B. King and T. Heinzl, “Measuring Vacuum Polarisation with High Power Lasers,” *High Power Laser Sci. Eng.*, vol. 4, 2016.
- [15] J. Crepeau, “Josef Stefan: His life and legacy in the thermal sciences,” *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 31, pp. 795–803, 2007.
- [16] R. R. Eisberg, R., *Quantum Physics*. John Wiley and Sons, 1985.
- [17] K. Konar, K. Bose, and R. K. Pau, “Revisiting cosmic microwave background radiation using blackbody radiation inversion,” *Scientific Reports*, vol. 11, 2021.
- [18] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.*, vol. 82, pp. 664–679, 1951.

- [19] B. Agostini, F. A. Barone, F. E. Barone, P. Gaete, and J. A. Helayel-Neto, “Consequences of vacuum polarization on electromagnetic waves in a Lorentz-symmetry breaking scenario,” *Phys. Lett. B*, vol. 708, pp. 212–215, 2012.
- [20] I. Soares, R. Turcati, and S. Duarte, “Thermodynamics of blackbody radiation in nonlinear electrodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, 2024.
- [21] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory*. Academic Press, 1991.
- [22] Z. Bialynicka-Birula and I. Bialynicki-Birula, “Nonlinear effects in Quantum Electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field,” *Phys. Rev. D*, vol. 2, pp. 2341–2345, 1970.
- [23] L. Brillouin, *Wave Propagation And Group Velocity*. New York and London: Academic Press Inc., ISBN 978-0-12-134968-4, 1960.
- [24] M. Neves, J. de Oliveira, L. Ospedal, and J. Helayël-Neto, “Dispersion relations in nonlinear electrodynamics and the kinematics of the Compton effect in a magnetic background,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 1, p. 015006, 2021.
- [25] G. Boillat, “Nonlinear electrodynamics - Lagrangians and equations of motion,” *J. Math. Phys.*, vol. 11, no. 3, pp. 941–951, 1970.
- [26] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim, and R. Klippert, “Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 045001, 2000.
- [27] C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, and P. J. Pompeia, “Causal Structure and Birefringence in Nonlinear Electrodynamics,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 30, no. 06, p. 1550025, 2015.

- [28] S. Liberati, S. Sonego, and M. Visser, “Scharnhorst effect at oblique incidence,” *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 085003, 2001.
- [29] G. Barton, “How Close to Ideal Is the Photon Gas? Corrections to Planck’s Laws at $k_T \ll m_e$,” *Annals Phys.*, vol. 205, pp. 49–69, 1991.
- [30] X. Kong and F. Ravndal, “Quantum corrections to the QED vacuum energy,” *Nucl. Phys. B*, vol. 526, no. 1-3, pp. 627–656, 1998.
- [31] N. Akmansoy, Pierre, and L. Gouvêa Medeiros, “Thermodynamics of a Photon Gas in Nonlinear Electrodynamics,” *Phys. Lett. B*, vol. 738, pp. 317–322, 2014.
- [32] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Maciel, A. Mohammadi, E. Passos, W. O. Santos, and J. R. L. Santos, “Lorentz-violating dimension-five operator contribution to the black body radiation,” *Phys. Lett. B*, vol. 785, pp. 191–196, 2018.
- [33] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of Dirac’s theory of positrons,” *Z. Phys.*, vol. 98, no. 11-12, pp. 714–732, 1936.
- [34] G. V. Dunne, “The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 27, p. 1260004, 2012.
- [35] S. L. Adler, J. N. Bahcall, C. G. Callan, and M. N. Rosenbluth, “Photon splitting in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, pp. 1061–1065, 1970.
- [36] V. I. Ritus, “Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties,” *Annals Phys.*, vol. 69, pp. 555–582, 1972.

- [37] T. Gold, “Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources,” *Nature*, vol. 218, pp. 731–732, 1968.
- [38] M. Born and L. Infeld, “Foundations of the new field theory,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 144, no. 852, pp. 425–451, 1934.
- [39] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings,” *Phys. Lett. B*, vol. 163, pp. 123–130, 1985.
- [40] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. N. Pope, and P. K. Townsend, “The Born-Infeld Action From Conformal Invariance of the Open Superstring,” *Phys. Lett. B*, vol. 188, p. 70, 1987.
- [41] E. Ayon-Beato and A. Garcia, “The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole,” *Phys. Lett. B*, vol. 493, pp. 149–152, 2000.
- [42] G. W. Gibbons, “Aspects of Born-Infeld theory and string / M theory,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 589, no. 1, pp. 324–350, 2001.
- [43] R. Banerjee and D. Roychowdhury, “Critical behavior of Born Infeld AdS black holes in higher dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 104043, 2012.
- [44] S. Gunasekaran, R. B. Mann, and D. Kubiznak, “Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization,” *JHEP*, vol. 11, p. 110, 2012.
- [45] P. Niau Akmansoy and L. G. Medeiros, “Constraining nonlinear corrections to Maxwell electrodynamics using $\gamma\gamma$ scattering,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 11, p. 115005, 2019.
- [46] S. I. Kruglov, “On generalized Born-Infeld electrodynamics,” *J. Phys. A*, vol. 43, p. 375402, 2010.

- [47] P. Gaete and J. Helayël-Neto, “Remarks on nonlinear Electrodynamics,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 74, no. 11, p. 3182, 2014.
- [48] P. Gaete and J. Helayël-Neto, “Finite Field-Energy and Interparticle Potential in Logarithmic Electrodynamics,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 74, no. 3, p. 2816, 2014.
- [49] L. P. R. O. Patricio Gaete, José A. Helayël-Neto, “Coulomb’s law modification driven by a logarithmic electrodynamics,” *EPL*, vol. 125, p. 51001, 2019.
- [50] M. Biesiada and B. Malec, “White dwarf cooling and large extra dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 043008, 2002.
- [51] I. Oda, “Locally localized gravity models in higher dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 026002, 2001.
- [52] M. Bander, “Gravity in dynamically generated dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 105021, 2001.
- [53] R. Coquereaux and A. Jadczyk, *Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza-Klein theories and all that*, vol. 16. 1988.
- [54] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 7 1988.
- [55] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*. 7 1988.
- [56] H. Fukutaka and T. Kashiwa, “Path Integration on Spheres: Hamiltonian Operators From the Faddeev-senjanovic Path Integral Formula,” *Annals Phys.*, vol. 176, p. 301, 1987.

- [57] C. Neves and C. Wotzasek, “Stuckelberg field shifting quantization of free particle on D-dimensional sphere,” *J. Phys. A*, vol. 33, pp. 6447–6456, 2000.
- [58] A. Bashir, R. Delbourgo, and M. Roberts, “Multidimensional phase space and sunset diagrams,” *J. Math. Phys.*, vol. 42, pp. 5553–5564, 2001.
- [59] Y. Jiang and Y.-s. Duan, “A New topological aspect of the arbitrary dimensional topological defects,” *J. Math. Phys.*, vol. 24, p. 6463, 2000.
- [60] N. Arkani-Hamed and S. Dimopoulos, “New origin for approximate symmetries from distant breaking in extra dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 052003, 2002.
- [61] P. Di Francesco and E. Guitter, “Critical and multicritical semirandom (1+d)-dimensional lattices and hard objects in d-dimensions,” *J. Phys. A*, vol. 35, pp. 897–928, 2002.
- [62] M. Ito, “Warped geometry in higher dimensions with an orbifold extra dimension,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 124021, 2001.
- [63] V. D. Ivashchuk and V. N. Melnikov, “Billiard representation for multi-dimensional cosmology with intersecting p-branes near the singularity,” *J. Math. Phys.*, vol. 41, pp. 6341–6363, 2000.
- [64] S. Al-Jaber, “Planck’s Spectral Distribution Law in N Dimensions,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 42, pp. 111–119, 2003.
- [65] T. R. Cardoso and A. S. de Castro, “The Blackbody radiation in D-dimensional universes,” *Rev. Bras. Ens. Fis.*, vol. 27, pp. 559–563, 2005.

- [66] H. Alnes, F. Ravndal, and I. K. Wehus, “Black-body radiation in extra dimensions,” *J. Phys. A*, vol. 40, p. 14309, 2007.
- [67] I. Soares, R. Turcati, and S. Duarte, “Nonlinear wave propagation in large extra spatial dimensions and the blackbody thermal laws,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 57, 2024.
- [68] M. J. Neves, P. Gaete, L. P. R. Ospedal, and J. A. Helayël-Neto, “Considerations on the ModMax electrodynamics in the presence of an electric and magnetic background,” *Phys. Rev. D*, vol. 107, 2023.
- [69] S. Weinberg, “Causality, Anti-particles and the Spin Statistics Connection in Higher Dimensions,” *Phys. Lett. B*, vol. 143, pp. 97–102, 1984.
- [70] R. Ramos and H. B. Filho, “The Blackbody Radiation Laws in the $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ Spacetime,” 9 2014.
- [71] L. J. Boya and E. C. G. Sudarshan, “The Spin-statistics theorem in arbitrary dimensions,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 46, pp. 3285–3293, 2007.
- [72] D. J. Gross and P. F. Mende, “String Theory Beyond the Planck Scale,” *Nucl. Phys. B*, vol. 303, pp. 407–454, 1988.
- [73] M. Maggiore, “A Generalized uncertainty principle in quantum gravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 304, pp. 65–69, 1993.
- [74] A. A. et al, “,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 125948, p. 103, 2022.
- [75] G. Amelino-Camelia, “Are we at the dawn of quantum gravity phenomenology?,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 541, pp. 1–49, 2000.

- [76] S. Das and E. C. Vagenas, “Universality of Quantum Gravity Corrections,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 221301, 2008.
- [77] A. F. Ali, S. Das, and E. C. Vagenas, “A proposal for testing Quantum Gravity in the lab,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 044013, 2011.
- [78] P. Bosso, S. Das, and R. B. Mann, “Potential tests of the Generalized Uncertainty Principle in the advanced LIGO experiment,” *Phys. Lett. B*, vol. 785, pp. 498–505, 2018.
- [79] E. Barausse *et al.*, “Prospects for Fundamental Physics with LISA,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 52, no. 8, p. 81, 2020.
- [80] P. Auclair *et al.*, “Cosmology with the Laser Interferometer Space Antenna,” *Living Rev. Rel.*, vol. 26, no. 1, p. 5, 2023.
- [81] P. Bosso, S. Das, I. Pikovski, and M. R. Vanner, “Amplified transduction of Planck-scale effects using quantum optics,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, no. 2, p. 023849, 2017.
- [82] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 105009, 2004.
- [83] A. F. Ali, S. Das, and E. C. Vagenas, “Discreteness of Space from the Generalized Uncertainty Principle,” *Phys. Lett. B*, vol. 678, pp. 497–499, 2009.
- [84] G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and S. Sarkar, “Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts,” *Nature*, vol. 393, pp. 763–765, 1998.
- [85] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, “Search for quantum gravity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 31, pp. 1257–1262, 1999.

- [86] R. Verma and P. Nandi, “Effect of Non-commutativity of space-time on Thermodynamics of Photon gas,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 51, no. 11, p. 143, 2019.
- [87] S. K. Pal and P. Nandi, “Effect of dynamical noncommutativity on the limiting mass of white dwarfs,” *Phys. Lett. B*, vol. 797, p. 134859, 2019.
- [88] G. Amelino-Camelia and L. Smolin, “Prospects for constraining quantum gravity dispersion with near term observations,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 084017, 2009.
- [89] R. Gambini and J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 124021, 1999.
- [90] V. A. Kostelecky and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 11–31, 2011.
- [91] G. Amelino-Camelia, “Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues,” *Symmetry*, vol. 2, pp. 230–271, 2010.
- [92] R. Easther, B. R. Greene, W. H. Kinney, and G. Shiu, “Inflation as a probe of short distance physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 103502, 2001.
- [93] A. Kempf and J. C. Niemeyer, “Perturbation spectrum in inflation with cutoff,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 103501, 2001.
- [94] T. Jacobson, “Black hole evaporation and ultrashort distances,” *Phys. Rev. D*, vol. 44, pp. 1731–1739, 1991.
- [95] M. Visser, “Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 025011, 2009.

- [96] A. Camacho and A. Macias, “Thermodynamics of a photon gas and deformed dispersion relations,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 39, pp. 1175–1183, 2007.
- [97] X. Zhang, L. Shao, and B.-Q. Ma, “Photon Gas Thermodynamics in Doubly Special Relativity,” *Astropart. Phys.*, vol. 34, pp. 840–845, 2011.
- [98] S. Das and D. Roychowdhury, “Thermodynamics of Photon Gas with an Invariant Energy Scale,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 085039, 2010.
- [99] N. Chandra and S. Chatterjee, “Thermodynamics of Ideal Gas in Doubly Special Relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 045012, 2012.
- [100] M. M. Faruk and M. M. Rahman, “Planck scale effect on the thermodynamics of photon gas,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 10, p. 105018, 2016.
- [101] W. S. Chung, A. M. Gavrilik, and A. V. Nazarenko, “Photon gas at the Planck scale within the doubly special relativity,” *Physica A*, vol. 533, p. 121928, 2019.
- [102] P. Bosso and J. M. L. Vega, “Minimal length phenomenology and the black body radiation,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 39, no. 17, p. 175001, 2022.
- [103] S. Alexander and J. Magueijo, “Noncommutative geometry as a realization of varying speed of light cosmology,” in *13th Rencontres de Blois on Frontiers of the Universe*, pp. 281–297, 2004.
- [104] O. Bertolami and C. A. D. Zarro, “Towards a Noncommutative Astrophysics,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 025005, 2010.

- [105] I. . D. S. B. Turcati, R.; Soares, “Quantum gravity phenomenology and the blackbody radiation ,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 41.
- [106] G. Amelino-Camelia, F. D’Andrea, and G. Mandanici, “Group velocity in noncommutative space-time,” *JCAP*, vol. 09, p. 006, 2003.
- [107] J. Alfaro and G. Palma, “Loop quantum gravity and ultrahigh-energy cosmic rays,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 083003, 2003.
- [108] G. Amelino-Camelia, “Introduction to quantum-gravity phenomenology,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 669, pp. 59–100, 2005.
- [109] J. Alfaro, M. Reyes, H. A. Morales-Tecotl, and L. F. Urrutia, “On alternative approaches to Lorentz violation invariance in loop quantum gravity inspired models,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 084002, 2004.
- [110] J. Magueijo and L. Smolin, “String theories with deformed energy momentum relations, and a possible nontachyonic bosonic string,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 026010, 2005.
- [111] G. Amelino-Camelia, C. Lammerzahl, A. Macias, and H. Muller, “The Search for quantum gravity signals,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 758, no. 1, pp. 30–80, 2005.
- [112] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.
- [113] A. Albrecht and J. Magueijo, “A Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 043516, 1999.
- [114] H. Li and B.-Q. Ma, “Speed variations of cosmic photons and neutrinos from loop quantum gravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 836, p. 137613, 2023.

- [115] S. Hossenfelder, “Self-consistency in theories with a minimal length,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 23, pp. 1815–1821, 2006.
- [116] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, “Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, pp. 1108–1118, 1995.
- [117] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2nd ed. ed., 1996.
- [118] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling, and G. Mandanici, “Black-hole thermodynamics with modified dispersion relations and generalized uncertainty principles,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 23, pp. 2585–2606, 2006.
- [119] K. Nozari and A. S. Sefidgar, “The effect of modified dispersion relations on the thermodynamics of black-body radiation,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 38, pp. 339–347, 2008.
- [120] K. Huang, *Statistical Mechanics, 2nd Ed.* Wiley India Pvt. Limited, 2008.
- [121] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*,. USA: Dover Publications, Inc., 1974.
- [122] C. Amsler *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Lett. B*, vol. 667, pp. 1–1340, 2008.
- [123] G. Amelino-Camelia, G. D’Amico, F. Fiore, S. Puccetti, and M. Ronco, “In Vacuo Dispersion-Like Spectral Lags in Gamma-Ray Bursts,” *Symmetry*, vol. 13, no. 4, p. 541, 2021.

- [124] S. Hossenfelder, “The Soccer-Ball Problem,” *SIGMA*, vol. 10, p. 074, 2014.
- [125] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, “Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity,” *Nature*, vol. 468, p. 4, 2010.
- [126] S. Das and M. Fridman, “Test of quantum gravity in statistical mechanics,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 2, p. 026014, 2021.
- [127] G. M. Oppenheimer, J. R.; Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” *Physical Review*, vol. 55, pp. 374–381, 1939.