Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Cosmologia, Astrofísica e
Interações Fundamentais

A Anomalia de Calibre na Eletrodinâmica Quiral em 1+1 Dimensões

Gabriel de Lima e Silva.

Tese de Doutorado

Orientador: **Sebatião Alves Dias**

Maio de 2024
Rio de Janeiro - RJ

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, **CBPF**, como requisito parcial para obtenção do Título de **doutor em Física**.

Silva, Gabriel de Lima e

A Anomalia de Calibre na Eletrodinâmica Quiral em 1+1 Dimensões.

Gabriel Silva – Rio de Janeiro, 2024.

Orientador: Sebastião Alves Dias

Tese (Doutorado em Física) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, Coordenação de Cosmologia, Astrofísica e Interações Fundamentais - COSMO

Banca examinadora:

Dr. Sebastião Alves Dias (Orientador) (CBPF)

Dr. Antônio Duarte Pereira Junior - UFF

Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza - UFF

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida - UFC

Dr. Nami Fux Svaiter - CBPF

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

"A ANOMALIA DE CALIBRE NA ELETRODINÂMICA QUIRAL EM (1 + 1) DIMENSÕES"

GABRIEL DE LIMA E SILVA

Tese de Doutorado em Física apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação. Fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:

Documento assinado digitalmente
SEBASTIAO ALVES DIAS
Data: 13/05/2024 20:36:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Sebastião Alves Dias - Orientador/CBPF

Documento assinado digitalmente
ANTONIO DUARTE PEREIRA JUNIOR
Data: 09/05/2024 17:43:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Antônio Duarte Pereira Junior – UFF

Documento assinado digitalmente
REINALDO FARIA DE MELO E SOUZA
Data: 10/05/2024 10:35:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Reinaldo Faria de Melo e Souza – UFF

Documento assinado digitalmente
CARLOS ALBERTO SANTOS DE ALMEIDA
Data: 13/05/2024 07:31:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Carlos Alberto Santos de Almeida – UFC

Nami Fux Svaiter

Nami Fux Svaiter – CBPF

Rio de Janeiro, 07 de maio de 2024.

Dedico este trabalho à minha família
e aos meus amigos.

Agradecimentos

Ao professor Sebastião Alves Dias, pelos anos de convivência e compartilhamento de seu conhecimento, bem como pelas proveitosas e quase intermináveis conversas sobre política, sociedade, história, cotidiano e ciência.

Aos professores e servidores do CBPF, pelo enorme aprendizado.

Aos amigos da *Sala Dirac*.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM e à Universidade do Estado do Amazonas - UEA, pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos teorias com anomalias na simetria de calibre em d dimensões e demonstramos explicitamente a invariância da medida bosônica, que leva diretamente ao cancelamento da anomalia de calibre. Para mostrar isso, utilizamos argumentos advindos da integração funcional, além de resultados conhecidos sobre a renormalizabilidade das teorias de Yang-Mills. Em seguida, procuramos ilustrar nossos resultados com o exemplo concreto da Eletrodinâmica Quântica Quiral em 2 dimensões, onde demonstramos o cancelamento da anomalia de calibre, a sua (não) anulação quando inserida em funções de Green de operadores (não) invariantes de calibre e a realização explícita das identidades de Ward-Takahashi anômalas.

Palavras-chave: Teorias de calibre; anomalias de calibre; férmions quirais; 2 dimensões

Abstract

We consider gauge theories with anomalies in gauge symmetry in d dimensions and we demonstrate explicitly the invariance of the bosonic measure, which implies directly the canceling of the gauge anomaly. To show that, we use arguments coming from functional integration, along with known results on the renormalizability of Yang-Mills theories. Then, we illustrate our results with the concrete example of Quantum Chiral Electrodynamics in 2 dimensions, where we demonstrate the canceling of the gauge anomaly, its (non) vanishing when inserted in Green's functions of operators (non) gauge invariant and the explicit realization of anomalous Ward-Takahashi identities.

Keywords: Gauge theories; gauge anomalies; chiral fermions; 2 dimensions

Sumário

Introdução

As interações eletrofracas e fortes são bem descritas, atualmente, pelo modelo padrão de Glashow, Salam and Weinberg [1]. Este modelo é formulado, em sua fase anterior à quebra espontânea de simetria, em termos de léptons e quarks quirais, acoplados a campos de calibre abelianos e não-abelianos. É bem conhecido que tais acoplamentos induzem anomalias de calibre [2], que deixam as questões sobre renormalizabilidade e unitaridade em aberto. O procedimento usual é escolher cuidadosamente as representações onde se acomodam os campos de matéria, de modo que as anomalias de calibre sejam canceladas [3]. Uma das consequências observacionais deste procedimento é a igualdade entre o número de famílias de léptons e de quarks.

A despeito de todo o sucesso obtido com o cancelamento das anomalias de calibre, podemos questionar legitimamente se uma teoria com este tipo de anomalia pode ser consistente ou não. Durante os anos de 1980 vários autores importantes abordaram esta questão [4, 5, 6, 7], obtendo resultados promissores, que apontaram na direção da restauração da simetria de calibre na teoria completa, vista não-perturbativamente. Mais recentemente, foi mostrado que a anomalia de calibre, como um operador agindo no espaço de Hilbert, tem valor esperado no vácuo (VEV) nulo e inserções nulas em funções de correlação envolvendo apenas operadores invariantes de calibre [8]. Esta foi mais uma evidência de restauração quântica da simetria de calibre, na linha do que mencionamos acima. Contudo, uma questão importante permanece sem resposta: seria também nula a inserção da anomalia de calibre em funções de correlação envolvendo operadores não invariantes de calibre? Se este fosse o caso, a única conclusão possível é de que a própria anomalia de calibre seria o operador nulo, o que poderia significar que o próprio campo de calibre também deveria ser nulo, resultando na trivialidade das teorias de calibre quirais. Esta questão é difícil de ser investigada em 4 dimensões, por envolver teoria de perturbações para teorias com anomalias de calibre, técnica que não está definida neste contexto.

Outro trabalho recente [9] buscou verificar o impacto sobre a renormalização da anulação do VEV da anomalia de calibre. Este trabalho concluiu que, apesar desta anulação, havia modificação nas identidades de Ward-Takahashi. Tal modificação no entanto, mantinha a relação entre as constantes de renormalização de função de onda fermiônica e de carga, embora um fator multiplicativo de $1/2$ aparecesse. Este fato representa um desafio para o estabelecimento de condições de renormalização compatíveis com o nível de árvore da teoria e se mostrou outra questão a ser considerada no futuro.

Em 2 dimensões, contudo, um modelo simples foi bastante importante para esclarecer questões e fornecer inspiração quanto a direções a seguir. Trata-se da eletrodinâmica quiral em 2 dimensões (EDQQ2), estudada originalmente por Jackiw and Rajaraman [4]. O modelo é exatamente solúvel e unitário e foi discutido desde muitos pontos de vista [10, 11, 12]. Ele contém divergências não-perturbativas, que podem ser tratadas e removidas [13, 14, 15]. Devido à sua solubilidade (entendida aqui como a possibilidade de calcular exatamente qualquer função de correlação), o modelo provê o cenário ideal para investigar o comportamento de inserções da anomalia de calibre em funções de correlação arbitrárias. Mais ainda, podemos observar diretamente as identidades de Ward-Takahashi e verificar com precisão o que está acontecendo neste caso particular. Temos a intenção, nesta tese, de realizar este estudo em detalhe.

Organizamos a tese da seguinte maneira: no capítulo 1, revisamos brevemente a questão do cancelamento das anomalias de calibre demonstrando, explicitamente, a invariância da medida funcional associada ao campo de calibre (mais brevemente mencionada como "medida bosônica"). No capítulo 2, apresentamos a EDQQ2, mostrando resultados que confirmam as conclusões apresentadas anteriormente em [8]. Ainda neste capítulo, abordamos as identidades de Ward-Takahashi, revisando os resultados obtidos em [9] e mostramos que, no contexto da EDQQ2, há moficações que excluem, apenas em 2 dimensões, o fator 1/2 mencionado acima. Em seguida checamos as identidades de Ward-Takahashi com o cálculo explícito das funções de Green relevantes. Finalizamos apresentando nossas conclusões e perspectivas de futuros estudos.

Os resultados originais contidos nesta tese estão contidos em um trabalho publicado [16] (análise do Jacobiano associado à medida bosônica) e outro em preparação [17] (obtenção das identidades de Ward-Takahashi anômalas de calibre em 2 dimensões).

Capítulo 1

A anomalia de calibre e a invariância da medida bosônica

Neste capítulo, revisamos alguns dos principais resultados da referência [8], de forma a fixar nossas convenções e definir precisamente o problema sob análise. Além disso, também recordamos o que foi obtido na referência [9] em relação às identidades de Ward-Takahashi no caso em que há anomalia na simetria de calibre.

1.1 Teorias de calibre quirais

Chamamos as teorias descritas pela ação

$$\begin{aligned} S\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] &= S_G\left[A_\mu\right] + S_F\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] \\ &= \int dx\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int dx\,\bar{\psi}D\psi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

de *teorias de calibre quirais*. Na expressão acima, dx indica integração sobre um espaço de Minkowski d-dimensional. O operador D é chamado de *operador de Dirac* da teoria e é dado por

$$D = i\gamma^\mu\left(\partial_\mu \mathbf{1} - ieA_\mu P_+\right) \equiv i\gamma^\mu D_\mu. \tag{1.2}$$

Os campos ψ são espinores de Dirac. A presença do projetor $P_+ = \left(1+\gamma_5\right)/2$ faz com que o termo $\bar{\psi}D\psi$ seja equivalentemente escrito como

$$\bar{\psi}D\psi = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\left(\partial_\mu\mathbf{1} - ieA_\mu\right)\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R, \tag{1.3}$$

onde $\psi_L = P_+\psi$ e $\psi_R = P_-\psi$ (com $P_- = \left(1-\gamma_5\right)/2$). Portanto, a ação (1.1) descreve, efetivamente, um férmion de Weyl ψ_L ($\gamma_5\psi_L = \psi_L$), carregando a representação fundamental de $SU\left(N\right)$ e interagindo minimamente com um campo A_μ, não-abeliano, em geral. Este campo A_μ toma valores na álgebra de Lie do mesmo $SU\left(N\right)$ de forma que,

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^a T_a, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\left[A_\mu, A_\nu\right], \end{aligned} \tag{1.4}$$

e os geradores T_a satisfaçam

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \qquad \mathrm{tr}\ (T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{1.5}$$

Considerando

$$g = \exp(i\theta^a\,(x)\,T_a), \tag{1.6}$$
$$g_\pm = \exp(i\theta^a\,(x)\,T_a P_\pm), \tag{1.7}$$

e mudanças simultâneas dos campos ψ e A_μ como

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= g A_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\,(\partial_\mu g)\,g^{-1}, \\ \psi^g &= g_+ \psi, \\ \bar{\psi}^g &= \bar{\psi} g_-^{-1}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

vemos que a ação S é classicamente invariante de calibre:

$$S[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu^g] = S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]. \tag{1.9}$$

1.2 A anomalia de calibre e seu cancelamento

A teria quântica é definida pelo funcional gerador, dado por

$$Z[\eta, \bar{\eta}, j_a^\mu] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\int dx[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + j_a^\mu A_\mu^a]\right). \tag{1.10}$$

De modo a forçar o aparecimento da anomalia, fazemos as fontes externas nulas e promovemos a mudança de variáveis $A_\mu \longrightarrow A_\mu^g$:

$$\begin{aligned} Z\,[0,0,0] &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu^g \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^g]\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

É um fato bem conhecido [3] que a medida fermiônica não é invariante sob $\psi \longrightarrow \psi^g$, $\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}^g$. No entanto, no que diz respeito à medida bosônica, a sua invariância de calibre é universalmente aceita,

$$dA_\mu^g = dA_\mu. \tag{1.12}$$

Mostramos abaixo que, considerando (1.12), mostramos facilmente que a corrente de Noether associada à simetria de calibre (1.8) é covariantemente conservada. Para ver isso, suponhamos que $g = 1 + i\theta^a\,(x)\,T_a$, com θ^a infinitesimal, e lembremos que

$$A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e}\mathcal{D}_\mu\theta, \tag{1.13}$$

com

$$\mathcal{D}_\mu \theta = T_a \left(\partial_\mu \delta^a_b + e f_{abc} A^c_\mu\right) \theta^b \equiv T_a \left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \theta^b. \tag{1.14}$$

Usando essa expressão para A^g_μ (1.12) obtemos:

$$\begin{aligned} Z\left[0,0,0\right] &= \int d\psi d\bar{\psi} dA^g_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A^g_\mu]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + \int dx\, \theta^a\left(x\right)\left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi\right)\right) \\ &= Z\left[0,0,0\right] + \int dx\, \theta^a\left(x\right) \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left[\left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi\right)\right] \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Isto implica

$$\begin{aligned} &\int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left[\left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi\right)\right] \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\ &= \langle 0| \left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T^b P_+ \psi\right) |0\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Poderíamos ter seguido um caminho diferente quando consideramos a dependência original de Z em A^g_μ, absorvendo a dependência do calibre nos férmions e *usando novamente a invariância da medida bosônica*:

$$\begin{aligned} Z\left[0,0,0\right] &= \int d\psi d\bar{\psi} dA^g_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A^g_\mu]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi^{g^{-1}},\bar{\psi}^{g^{-1}},A_\mu]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] - i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right), \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde $\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]$ está relacionado ao Jacobiano para transformações de calibre da medida fermiônica como,

$$d\psi d\bar{\psi} = \exp(-i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]) d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}}. \tag{1.18}$$

Sob uma transformação de calibre infinitesimal,

$$\alpha_1\left(A_\mu, -\theta\right) = i\int dx\, \theta^a \mathcal{A}^a(A_\mu) + ..., \tag{1.19}$$

com $\mathcal{A}_a(A_\mu)$ sendo o operador correspondente à anomalia de calibre, como é bem sabido [3]. Seguindo este caminho, chegamos a

$$\begin{aligned} &Z\left[0,0,0\right] = Z\left[0,0,0\right] \\ &- i\int dx\, \theta^a \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}^a(A_\mu) \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\ &\Rightarrow \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(A_\mu) \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]\right) \\ &= \langle 0| \mathcal{A}^a(A_\mu) |0\rangle = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Se a integração sobre os campos de calibre não tivesse sido feita seria fácil verificar que o resultado obtido através de cada um dos caminhos acima seria

$$\langle 0| \left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi\right) |0\rangle_{A_\mu} = \mathcal{A}^a(A_\mu), \tag{1.21}$$

onde

$$\langle 0| \left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b \psi\right) |0\rangle_{A_\mu} = \int d\psi d\bar{\psi} \left[\left(\mathcal{D}_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi\right)\right] \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right), \tag{1.22}$$

corresponde ao valor esperado da corrente de Noether considerando o campo A_μ como um campo externo fixo.

Isso significa que, *com todos os campos sendo quantizados*, não há anomalia de calibre impedindo a conservação da corrente de calibre $J^\mu_a = \bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+ \psi$. Podemos chamar este resultado de "versão quântica" do teorema de Noether. No entanto, precisamos ressaltar que este resultado não está em contradição com a existência e interpretação topológica da anomalia de calibre (veja, por exemplo, [18, 19]), pois ela está presente quando a integração sobre os campos de calibre A^a_μ não for feita. Além disso, mostramos apenas que o seu valor esperado no vácuo é nulo e não que o operador é identicamente zero. Este tópico será abordado mais à frente nessa tese.

1.3 Uma objeção vinda da renormalização algébrica

Um argumento baseado na técnica de renormalização algébrica [20] poderia, em princípio, questionar os resultados encontrados acima. Começamos com uma versão de (1.1) com o calibre fixado,

$$S_{\mathrm{FP}}\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, B, c, \bar{c}\right] = S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + S_{\mathrm{gf}}\left[A_\mu, B, c, \bar{c}\right], \tag{1.23}$$

onde

$$S_{\mathrm{gf}}\left[A_\mu, B, c, \bar{c}\right] = \int dx \,\mathrm{tr}\left(B\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2 - \bar{c}\partial^\mu\left(i\partial_\mu + ie\left[c, A_\mu\right]\right)\right), \tag{1.24}$$

com B sendo um campo auxiliar (o campo de Lautrup-Nakanishi) e c, $\bar{c}$ sendo campos de fantasmas, todos tomando valores na álgebra de Lie de $SU(N)$. A ação (1.23) seria obtida de (1.1) pelo uso do procedimento de Faddeev-Popov para fixar o calibre. Em seguida, define-se o operador linearizado de Slavnov-Taylor [21], que irá testar a invariância de calibre da ação efetiva quântica em cada ordem de teoria de perturbações. Quando se resolve o problema de cohomologia associado com este operador nilpotente, encontra-se uma solução não trivial, que reflete a inescapabilidade da anomalia de calibre e, portanto, da perda irremediável da invariância de calibre da teoria (cujo reflexo mais imediato é a anomalia de calibre). Isto significa que termos não invariantes de calibre são dinamicamente gerados em cada ordem de teoria de perturbações e não podem ser absorvidos por contratermos invariantes de calibre adequadamente escolhidos. Isto contradiz frontalmente o que encontramos anteriormente e põe a renormalizabilidade da teoria em risco.

O problema desta linha de raciocínio é o seu ponto de partida. Fixar o calibre é essencial para a definição perturbativa de uma teoria de calibre, mas não é possível fazer isso numa teoria anômala da mesma forma que se faz no caso convencional. Se começamos com a ação sem calibre fixado (1.1) e insistimos na inserção da identidade, através do método de Faddeev-Popov, terminamos com um funcional gerador dado por [6]

$$\begin{aligned} Z\left[0,0,0\right] &= \int d\theta d\psi d\bar{\psi} dA_\mu dB dc d\bar{c} \\ &\quad \times \exp\left(iS_{\mathrm{FP}}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,B,c,\bar{c}\right] + i\alpha_1\left(A_\mu,\theta\right)\right) \\ &= \int d\theta d\psi d\bar{\psi} dA_\mu dB dc d\bar{c} \exp\left(iS_{\mathrm{full}}\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu,B,c,\bar{c},\theta\right]\right), \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde α_1 foi definido em (1.18) e é chamado de *ação de Wess-Zumino*. Os campos θ^a, contidos em $\theta = \theta^a T_a$ são chamados de campos de Wess-Zumino e representam novos graus de liberdade, que aparecem apenas no nível quântico. A ação S_{full} é o verdadeiro ponto de partida de onde deveríamos reiniciar a análise da cohomologia do operador linearizado de Slavnov-Taylor. A ação é invariante de calibre e, graças à técnica de Faddeev-Popov, dá origem a um propagador bosônico bem definido. Infelizmente, como os campos θ^a tem dimensão de massa nula, não há restrições sobre os contratermos de renormalização envolvendo θ^a e, então, não se sabe como resolver o problema de cohomologia do operador linearizado de Slavnov-Taylor até hoje, neste caso. Se não quisermos conviver com a presença dos campos de Wess-Zumino, não podemos fixar o calibre. Mas, ao não fixá-lo, não há simetria BRST para definir um problema de cohomologia.

Assim, até onde se sabe, a renormalização algébrica não parece ser útil para decidir se as teorias de calibre quirais são verdadeiramente anômalas na simetria de calibre (e, logo, potencialmente inconsistentes). Como apontamos na seção anterior, há indicações fortes de que o caso seja exatamente o oposto.

1.4 Sobre a invariância de calibre da medida bosônica

Se a medida bosônica dA_μ não fosse invariante de calibre, deveríamos levar em conta a contribuição do Jacobiano da transformação de calibre dos campos A_μ, o que iria estragar a conservação covariante da corrente obtida anteriormente. Vamos agora investigar em detalhe esta invariância de calibre. Notemos que a ausência de invariância de calibre da medida fermiônica não tem importância na obtenção da conservação covariante da corrente, ao contrário do que é usualmente afirmado. A anulação do VEV da anomalia de calibre deve ser vista como um requerimento de consistência ao considerarmos o caso de uma teoria com todos os campos completamente quantizados.

Vamos mostrar, a seguir, que podemos obter informação sobre um possível Jacobiano associado à medida bosônica a partir de um argumento oriundo da integral funcional. Para isso, vamos considerar o funcional gerador para funções de correlação de operadores invariantes de calibre,

$$O_i\left(A_\mu^g\right) = O_i\left(A_\mu\right), \tag{1.26}$$

numa teoria de Yang-Mills pura, sem férmions. As funções de correlação são obtidas através de derivadas funcionais deste funcional gerador

$$\left.\frac{\delta^n}{\delta\lambda^1\left(x_1\right)...\delta\lambda^n\left(x_n\right)} Z\left[\lambda^i\right]\right|_{\lambda^i=0} = \left\langle 0\right| T\left(O_1\left(A_\mu\right)\left(x_1\right)...O_n\left(A_\mu\right)\left(x_n\right)\right)\left|0\right\rangle, \tag{1.27}$$

com

$$Z\left[\lambda^i\right] = \int dA_\mu \exp i \int \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda^i O_i\left[A_\mu\right]\right). \tag{1.28}$$

Consideremos a integração funcional sobre a versão transformada de calibre A_μ^g:

$$\begin{aligned} Z\left[\lambda^i\right] &= \int dA_\mu \exp i \int \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda^i O_i\left(A_\mu\right)\right) \\ &= \int dA_\mu^g \exp i \int \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^g + \lambda^i O_i\left(A_\mu^g\right)\right) \\ &= \int dA_\mu J\left[A_\mu, g\right] \exp\left(i \int \operatorname{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda^i O_i\left(A_\mu\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde permitimos a presença (possível) de um Jacobiano para a transformação de calibre da medida. É fácil ver, então, que

$$\begin{aligned} &\langle 0| T\left(J\left[A_\mu, g\right] O_1\left(A_\mu\right)(x_1) \ldots O_n\left(A_\mu\right)(x_n)\right) |0\rangle \\ &= \langle 0| T\left(O_1\left(A_\mu\right)(x_1) \ldots O_n\left(A_\mu\right)(x_n)\right) |0\rangle, \end{aligned} \tag{1.30}$$

o que significa que todas as funções de correlação envolvendo $J\left[A_\mu, g\right]$ com operadores invariantes de calibre são as mesmas que aquelas envolvendo a identidade. Assim, no espaço de Hilbert físico da teoria, os dois operadores são iguais,

$$J\left[A_\mu, g\right] = 1. \tag{1.31}$$

Este argumento não se generaliza para operadores arbitrários, não necessariamente invariantes de calibre. Contudo, um cálculo explícito pode resolver a questão. Vamos usar a prescrição usual para definir a medida bosônica, por meio de um conjunto completo de funções ortonormais $\{\phi_n\}$ de um operador hermitiano $\bar{D}$:

$$\begin{aligned} &\bar{D}\phi_n = \lambda_n \phi_n, \\ &\int dx \phi_n^\dagger \phi_m = \delta_{nm}, \quad \sum_n \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) = \delta(x-y), \\ &A_\mu^a(x) = \sum_n a_{\mu,n}^a \phi_n(x) \rightarrow dA_\mu = \prod_{a,\mu,n} da_{\mu,n}^a. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por uma transformação de calibre infinitesimal (1.13) obtemos

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= \sum_n \bar{a}_{\mu,n}^a T_a \phi_n(x) = \sum_n a_{\mu,n}^a T_a \phi_n(x) - \frac{i}{e}\mathcal{D}_\mu \theta \\ &= \left(\sum_n \left(a_{\mu,n}^a + i a_{\mu,n}^b f_{abc}\theta^c\right)\phi_n(x) - \frac{i}{e}\partial_\mu \theta^a\right) T_a. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Decompondo θ^a em termos das mesmas autofunções de $\bar{D}$,

$$-\frac{i}{e}\partial_\mu \theta^a(x) = \sum_n \tilde{a}_{\mu,n}^a \phi_n(x), \tag{1.34}$$

chegamos a

$$\bar{a}^a_{\mu,n} = \sum_m \left(\delta_{ab}\delta_{nm} + \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \, \phi_m (x) \right) a^b_{\mu,m} + \tilde{a}^a_{\mu,n}, \tag{1.35}$$

de modo que

$$\prod_{a,\mu,n} d\bar{a}^a_{\mu,n} = \det \left[\delta_{ab}\delta_{nm} + \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \, \phi_m (x) \right] \prod_{a,\mu,n} da^a_{\mu,n}. \tag{1.36}$$

O termo $\tilde{a}^a_{\mu,n}$ não contribui devido à invariância translacional de cada medida $da^a_{\mu,n}$. Seguindo os passos de Fujikawa [3], obtemos a seguinte expressão para o Jacobiano:

$$J [A_\mu, \theta] = \exp \left(\sum_n \left(\mathrm{tr} \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \, \phi_n (x) \right) \right), \tag{1.37}$$

onde "tr" se refere aos índices de álgebra de Lie. É imediato ver que a expressão para $J [A_\mu, \theta]$ é indefinida:

$$\begin{aligned} \sum_n \left(\mathrm{tr} \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \, \phi_n (x) \right) &= \mathrm{tr} \int dx i f_{abc} \theta^c (x) \sum_n \phi_n (x) \, \phi^\dagger_n (x) \\ &= \int dx i f_{aac} \theta^c (x) \, \delta (0) = 0 \times \infty. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Portanto, a expressão acima deve ser regularizada de modo a fazer sentido. É natural escolher os autovalores do operador $\bar{D}$ para regularizar o Jacobiano:

$$\begin{aligned} J [A_\mu, \theta] &\equiv \exp \left(\lim_{M^2 \to \infty} \sum_n \left(\mathrm{tr} \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \exp \left(- \frac{\lambda^2_n}{M^\alpha} \right) \phi_n (x) \right) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{M^2 \to \infty} \sum_n \left(\mathrm{tr} \int dx \phi^\dagger_n (x) \, i f_{abc} \theta^c (x) \exp \left(- \frac{\bar{D}^2}{M^\alpha} \right) \phi_n (x) \right) \right), \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde α é escolhido de modo que o argumento da exponencial seja adimensional. A escolha do operador $\bar{D}$ é guiada pelos requisitos de que a) ele apareça naturalmente na teoria; b) ele seja invariante de calibre; e c) seus autovalores sejam reais. Além disso, nossa escolha de que os coeficientes $a^a_{\mu,n}$ carreguem toda a dependência em μ e a implica serem os ϕ_n autofunções de um operador escalar e sem cor. Uma boa escolha é

$$\bar{D} = \mathrm{tr} \, (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu), \tag{1.40}$$

com o traço sendo tomado apenas sobre os índices de cor. Sob estas condições, vemos que a soma é regularizada e, como não há dependência adicional dos índices de cor proveniente de $\exp \left(-\bar{D}^2 / M^4 \right)$, o traço pode ser calculado imediatamente, com o resultado

$$\begin{aligned} J [A_\mu, \theta] &= \exp \left(\lim_{M^2 \to \infty} \sum_n \left(i f_{aac} \int dx \phi^\dagger_n (x) \, \theta^c (x) \exp \left(- \frac{\bar{D}^2}{M^4} \right) \phi_n (x) \right) \right) \\ &= \exp (0) = 1. \end{aligned} \tag{1.41}$$

É claro que poderíamos escolher outras estratégias e obter um resultado diferente de 1. Mas a “anomalia de calibre” obtida deste Jacobiano “não-trivial” poderia, então, ser removida por uma escolha adequada de contratermos. Mais precisamente, podemos usar o fato de que as teorias de Yang-Mills são renormalizáveis. De fato, a prova de ’t Hooft [22] mostra que é possível preservar a invariância de calibre em todas as ordens em teoria de perturbações e isto é crucial para demonstrar que a teoria é renormalizável. Resultados de renormalização algébrica confirmam isso, através da trivialidade da cohomologia do operador de Slavnov-Taylor para uma teoria de Yang-Mills [23]. Então, mesmo se regularizássemos a teoria com reguladores não-invariantes de calibre (que nos dariam um Jacobiano não-trivial), uma mudança no esquema de renormalização poderia restaurar a invariância de calibre e colocar o Jacobiano como 1.

Gostaríamos de observar que deve haver diversas formas de provar a invariância de calibre da medida bosônica. Uma delas é, certamente, considerar a teoria na rede, onde se pode definir a medida bosônica como uma medida de Haar, que é naturalmente invariante de calibre (veja, por exemplo, a fórmula (7.12) de [24]). Em seguida, deveríamos considerar cuidadosamente o limite de espaçamento de rede nulo, para provar esta invariância na teoria no contínuo. Contudo, essa discussão (nem outras, utilizando argumentações diferentes) não é vista costumeiramente na literatura e isso nos motivou a apresentá-la explicitamente, por meio da abordagem de Fujikawa.

1.5 E a anomalia axial?

Uma pergunta importante seria: poderíamos usar as mesmas técnicas para cancelar também a anomalia axial? Ela é definida através da violação da conservação da corrente axial,

$$\langle 0| \, \partial_\mu J_5^\mu \, |0\rangle_{A_\mu} = \langle 0| \, \partial_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\right) |0\rangle_{A_\mu} = \mathcal{A}_5 \left(A_\mu\right). \tag{1.42}$$

A corrente axial é classicamente conservada em virtude da simetria axial

$$\psi^{g_5} = e^{\alpha\gamma_5}\psi \equiv g_5\psi, \tag{1.43}$$

que é exata, no nível da ação, no caso em que os férmions não tem massa. Já a anomalia de calibre aparece como a violação da conservação covariante da corrente de calibre

$$\langle 0| \left(D_\mu\right)^a{}_b J_b^\mu \, |0\rangle_{A_\mu} = \langle 0| \left(D_\mu\right)^a{}_b \left(\bar{\psi}\gamma^\mu T_b P_+\psi\right) |0\rangle_{A_\mu} = \mathcal{A}^a \left(A_\mu\right), \tag{1.44}$$

cuja conservação clássica é uma consequência da simetria de calibre

$$\psi^g = e^{i\theta^a T_a P_+}\psi \equiv g_+\psi. \tag{1.45}$$

Enquanto a transformação de calibre (1.45) pode ser transferida dos férmions para os campos de calibre (como todos eles considerados como quânticos)

$$S\left[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu\right] = S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}\right], \tag{1.46}$$

o mesmo não pode ser feito com a transformação axial sob as mesmas circunstâncias:

$$S\left[\psi^{g_5}, \bar{\psi}^{g_5}, A_\mu\right] = S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right], \tag{1.47}$$

o que significa que os campos de calibre não desempenham papel análogo, em relação à simetria axial, ao que têm na simetria de calibre. Consequentemente, não podemos fazer as mesmas manipulações na integral funcional e, portanto, não podemos mostrar que a anomalia axial se cancela também. A anomalia axial é muito bem-vinda, pois é responsável pela explicação do decaimento observado do méson π^0 em dois fótons. Por outro lado, a anomalia de calibre é indesejada e deve ser cancelada (na construção do modelo padrão) de modo a não arruinar a renormalizabilidade explícita da teoria. Podemos afirmar que o papel dinâmico da anomalia axial não é tocado em nossa abordagem. Ela continua aparecendo e influenciando ações efetivas derivadas da Cromodinâmica Quântica (CDQ) em baixas energias, por exemplo. Nossa abordagem, contudo, oferece alguma esperança de que a anomalia de calibre não seja necessariamente catastrófica.

1.6 As identidades de Ward-Takahashi

Vamos agora nos restringir ao caso em que a simetria da ação é abeliana (mais especificamente, simetria $U(1)$), mas ainda em d dimensões. Neste contexto, vamos analisar em detalhe as identidades de Ward-Takahashi, que são relações entre funções de Green, implicadas pela invariância de calibre da teoria. É de se esperar que haja modificações nessas identidades devido à presença da anomalia de calibre. De fato, este é um dos argumentos mais citados para o descarte das teorias com anomalia de calibre, pois a modificação das identidades de Ward-Takahashi acabaria com as relações entre constantes de renormalização, necessária para a prova da renormalização perturbativa de uma teoria de calibre. Nesta seção, vamos deduzir essas identidades no caso anômalo de calibre. Esta seção se baseia nos resultados obtidos na referência [9].

As identidades de Ward-Takahashi podem ser obtidas com a ajuda de uma mudança de variáveis infinitesimal que é uma transformação de calibre abeliana, no funcional gerador:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{\delta\theta} &= A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \delta\theta \\
\psi^{\delta\theta} &= (1 - i\delta\theta P_+)\psi, \\
\overline{\psi}^{\delta\theta} &= \overline{\psi}(1 + i\delta\theta P_-).
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

O funcional gerador é escrito, então, como

$$
\begin{aligned}
Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] &= \frac{1}{N}\int dA_\mu^{\delta\theta} d\psi^{\delta\theta} d\bar{\psi}^{\delta\theta} \exp\left(iS\left[\psi^{\delta\theta},\bar{\psi}^{\delta\theta},A_\mu^{\delta\theta}\right] + i\int d^2x\left(\bar{\psi}^{\delta\theta}P_-\eta + \bar{\eta}P_+\psi^{\delta\theta} + J^\mu A_\mu^{\delta\theta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int d^2x(\bar{\psi}P_-\eta + \bar{\eta}P_+\psi + J^\mu A_\mu)\right) \\
&\times \left(1 + \int d^2x\,\delta\theta(x)\,\mathcal{A}(A_\mu)\right)\left(1 - i\int d^2x\,\delta\theta(x)\left(\bar{\eta}P_+\psi - \bar{\psi}P_-\eta - \frac{1}{e}\partial_\mu J^\mu\right)\right) \\
&= \left(1 + \frac{i}{e}\int d^2x\,\theta(x)\left(-ie\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) + \partial_\mu J^\mu\right.\right. \\
&\left.\left. -e\bar{\eta}P_+\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right) + e\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)}\right)P_-\eta\right)\right) Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

A consequência é a *equação master* para as identidades de Ward-Takahashi anômalas:

$$\left(-e\bar{\eta}P_{+}\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right)+e\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\right)P_{-}\eta-ie\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}\left(x\right)}\right)+\partial_{\mu}J^{\mu}\right)Z[J_{\mu},\eta,\bar{\eta}]=0. \tag{1.50}$$

Como a anomalia de calibre $\mathcal{A}$ é, em geral, um operador composto, é conveniente introduzir na discussão uma fonte $\lambda\left(x\right)$ para ela, definindo um novo funcional gerador:

$$Z_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]\equiv\frac{1}{N}\int dA_{\mu}d\psi d\bar{\psi}\exp\left(iS[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}])+i\int d^{2}x(\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi+J^{\mu}A_{\mu}+\lambda\mathcal{A})\right). \tag{1.51}$$

Em termos desta nova fonte, podemos escrever

$$-ie\mathcal{A}\left(-i\frac{\delta}{\delta J^{\mu}\left(x\right)}\right)Z[J_{\mu},\eta,\bar{\eta}]=-ie\left(-i\frac{\delta}{\delta\lambda\left(x\right)}\right)Z_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]\bigg|_{\lambda=0}, \tag{1.52}$$

de modo que a equação master pode ser reescrita como

$$\left(ie\bar{\eta}P_{+}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}+ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}P_{-}\eta+e\frac{\delta}{\delta\lambda\left(x\right)}+\partial_{\mu}J^{\mu}\right)Z_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]_{\lambda=0}=0. \tag{1.53}$$

Em seguida, expressamos a equação master em termos do funcional gerador para as funções de Green conexas, W_{λ}, definido como

$$Z_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]\equiv e^{iW_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]}, \tag{1.54}$$

o que nos conduz a

$$\left(ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}P_{-}\eta\left(x\right)-ie\bar{\eta}\left(x\right)P_{+}\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}+e\frac{\delta}{\delta\lambda\left(x\right)}\right)W_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]\bigg|_{\lambda=0}+\partial_{\mu}J^{\mu}=0. \tag{1.55}$$

Para expressar a equação master em termos da ação efetiva incluindo inserções da anomalia de calibre, fazemos a transformada de Legendre funcional

$$\Gamma_{\lambda}\left[\psi_{c},\bar{\psi}_{c},A_{\mu,c},\lambda\right]=W_{\lambda}[J_{\mu},\eta,\bar{\eta},\lambda]-\int dx\left(\bar{\eta}\psi_{c}+\bar{\psi}_{c}\eta+J^{\mu}A_{\mu,c}\right). \tag{1.56}$$

onde definimos os campos clássicos como,

$$\psi_{c}\left(x\right)=\frac{\overrightarrow{\delta}W_{\lambda}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\bigg|_{\lambda=0},\quad\bar{\psi}_{c}\left(x\right)=W_{\lambda}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\bigg|_{\lambda=0},$$
$$A_{\mu,c}\left(x\right)=\frac{\delta W_{\lambda}}{\delta J^{\mu}\left(x\right)}\bigg|_{\lambda=0}. \tag{1.57}$$

O funcional Γ_λ gera as funções de Green irredutíveis a uma partícula (I1P) com inserções da anomalia de calibre. Observando que

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}\Gamma_\lambda\bigg|_{\lambda=0} &= -\eta(x)\,, \\
\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(x)}\bigg|_{\lambda=0} &= -\bar{\eta}(x)\,, \\
\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}(x)}\Gamma_\lambda\bigg|_{\lambda=0} &= -J^\mu(x)\,, \\
\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(x)}\bigg|_{\lambda=0} &= \frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda(x)}\bigg|_{\lambda=0}\,,
\end{aligned} \tag{1.58}$$

podemos expressar a equação master em termos de Γ_λ:

$$\left(e\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(x)}P_+\psi_c(x)+e\bar{\psi}_c(x)P_-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x)}+i\partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}(x)}+ie\frac{\delta}{\delta\lambda(x)}\right)\Gamma_\lambda\left[\psi_c,\bar{\psi}_c,A_{\mu,c},\lambda\right]_{\lambda=0}=0. \tag{1.59}$$

A partir da equação acima, obtemos identidades envolvendo diferentes funções de Green I1P com inserções da anomalia, simplesmente derivando funcionalmente o lado esquerdo da equação, de acordo com a função de Green que quisermos considerar.

Vamos nos concentrar na relação entre o propagador fermiônico e a função de vértice I1P, uma das que é modificada pela presença da anomalia de calibre. Para isso, derivamos funcionalmente duas vezes a relação acima, com relação a $\bar{\psi}_c(x_1)$ à esquerda e $\psi_c(y_1)$ à direita e pomos todos os campos clássicos como nulos no final. Obtemos, assim,

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\left(ie\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda(x)}+\partial_\mu^x\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta A_{\mu,c}(x)}+e\Gamma_\lambda\delta(x-y_1)-e\Gamma_\lambda\delta(x-x_1)\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\Bigg|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\A_{\mu,c}=\lambda=0}}=0. \tag{1.60}$$

O primeiro termo é o propagador fermiônico com inserção da anomalia de calibre,

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta\lambda(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\Bigg|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\A_{\mu,c}=\lambda=0}}\equiv\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1)=\left\langle 0\right|T\left(\mathcal{A}(x)\,\psi(y_1)\,\bar{\psi}(x_1)\right)\left|0\right\rangle_{1\mathrm{PI}}. \tag{1.61}$$

Os outros três termos são a função de vértice I1P usual,

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\frac{\delta\Gamma_\lambda}{\delta A_c^\mu(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\Bigg|_{\substack{\psi_c=\bar{\psi}_c=0\\A_{\mu,c}=\lambda=0}}\equiv\Gamma^{(3)}_\mu(x,x_1,y_1)=\left\langle 0\right|T\left(A_\mu(x)\,\psi(y_1)\,\bar{\psi}(x_1)\right)\left|0\right\rangle_{1\mathrm{PI}}, \tag{1.62}$$

e a inversa do propagador fermiônico I1P

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c(x_1)}\Gamma_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c(y_1)}\equiv\Gamma^{(2)}(x_1,y_1)=\left(\left\langle 0\right|T\left(\psi(y_1)\,\bar{\psi}(x_1)\right)\left|0\right\rangle_{1\mathrm{PI}}\right)^{-1}. \tag{1.63}$$

Com essas definições, a equação (1.60) se escreve como,

$$ie\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1)+\partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}(x,x_1,y_1)+e\Gamma^{(2)}(x_1,x)\,\delta(x-y_1)-e\Gamma^{(2)}(x,y_1)\,\delta(x-x_1)=0. \tag{1.64}$$

A equação (1.64) é a modificação da identidade correspondente para o caso de acoplamento vetorial. A diferença é a presença do termo $\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1)$. A partir dela, no caso usual (com férmions de Dirac, com acoplamento com ambas as quiralidades e, portanto, sem anomalia de calibre) conclui-se pela igualdade entre a constante de renormalização de função de onda fermiônica e a constante de renormalização de carga, o que é crucial para provar a renormalizabilidade da Eletrodinâmica Quântica em 4 dimensões. A modificação que estamos exibindo coloca esta relação em questão.

Podemos mostrar, no entanto, que há uma relação entre $\Gamma^{(1,2)}$ e $\Gamma^{(2)}$ apenas, que simplifica a equação (1.64) e mantém uma relação possível entre as constantes de renormalização mencionadas acima. Para encontrá-la, retornamos à equação master para W_λ (equação (1.55)), a derivamos funcionalmente à esquerda e à direita, em relação a $\bar{\eta}(x_1)$ e $\eta(y_1)$, respectivamente, fazendo todas as fontes iguais a zero na sequência, o que nos dá:

$$\left(ie\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(x)}P_-\delta(x-y_1)-ie\delta(x-x_1)\,P_+\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\right.$$
$$\left.+e\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\right)\Bigg|_{\substack{\lambda=\eta\\=\bar{\eta}=J^\mu=0}}=0. \tag{1.65}$$

Definindo

$$\begin{aligned}G_c^{(2)}(x_1,y_1)&=\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}W_\lambda\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\Bigg|_{\lambda=\eta=\bar{\eta}=J^\mu=0}\\&=\left\langle 0\right|T\left(\psi(x_1)\,\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle,\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}&G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1)\equiv\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\frac{\delta W_\lambda}{\delta\lambda(x)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(y_1)}\Bigg|_{\lambda=\eta=\bar{\eta}=J^\mu=0}\\&=\left\langle 0\right|T\left(\mathcal{A}(x)\,\psi(x_1)\,\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle-\left\langle 0\right|\mathcal{A}(x)\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|T\left(\psi(x_1)\,\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle\\&=\left\langle 0\right|T\left(\mathcal{A}(x)\,\psi(x_1)\,\bar{\psi}(y_1)\right)\left|0\right\rangle\end{aligned} \tag{1.67}$$

(onde usamos o resultado obtido anteriormente, $\langle 0|\mathcal{A}(x)|0\rangle=0$), notamos, então, que obtivemos a identidade

$$\begin{aligned}&iG_c^{(2)}(x_1,x)\,P_-\delta(x-y_1)-iP_+G_c^{(2)}(x,y_1)\,\delta(x-x_1)\\&=G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1)\,.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Lembrando as relações entre $\Gamma^{(2)}$ e $G_c^{(2)}$ e entre $\Gamma^{(2,1)}$ e $G_c^{(1,2)}$,

$$\int dzG^{(2)}(x,z)\,\Gamma^{(2)}(z,y)=\int dz\Gamma^{(2)}(x,z)\,G^{(2)}(z,y)=i\delta(x-y)\,, \tag{1.69}$$

$$\Gamma^{(1,2)}(z,x,y) = -\int dudv \Gamma^{(2)}(x,u)\, G^{(1,2)}(z,u,v)\, \Gamma^{(2)}(v,y)\,, \tag{1.70}$$

obtemos então, a partir de (1.68),

$$\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1) = i\delta(x-y_1)\, P_- \Gamma^{(2)}(x_1,y) - i\delta(x_1-x)\, \Gamma^{(2)}(x,y_1)\, P_+. \tag{1.71}$$

Substituímos, então, a expressão acima para $\Gamma^{(1,2)}$ na equação (1.64) para obter a relação entre $\Gamma^{(3)}_\mu$ e $\Gamma^{(2)}$, que pode ser comparada (em termos apenas da forma) com a identidade correspondente numa teoria não anômala (para maiores detalhes, veja [9]):

$$\begin{aligned} &P_- \left(\frac{1}{2}\partial^\mu_x \Gamma^{(3)}_\mu(x,x_1,y_1)\right) P_+ \\ &= P_- \big(ie\delta(x-y_1)\, \Gamma^{(2)}(x_1,x) - ie\delta(x_1-x)\, \Gamma^{(2)}(x,y_1)\big)\, P_+. \end{aligned} \tag{1.72}$$

O fator $1/2$ não aparece na identidade correspondente numa teoria não anômala. Ele, potencialmente, é responsável por uma relação alterada entre as constantes de renormalização, pela multiplicação por $1/2$. Não é claro ainda se essa alteração poderia afetar a renormalizabilidade da teoria anômala. Guardamos essa discussão para as conclusões.

No capítulo seguinte, vamos considerar o caso particular (ainda abeliano) de 2 dimensões. Observamos que, para esta situação, também não teremos a presença do fator $1/2$, em função da estrutura da anomalia de calibre nesta dimensão, que vamos discutir em detalhe.

Capítulo 2

Eletrodinâmica quântica quiral em 2 dimensões (EDQQ2)

Neste capítulo, vamos detalhar os resultados obtidos anteriormente para o caso abeliano em 2 dimensões. As duas primeiras seções são fortemente baseadas no trabalho realizado na dissertação de Mestrado de Daniel Ribeiro de Pontes [25], enquanto a última seção engloba a análise das identidades de Ward para o caso abeliano em 2 dimensões, uma das contribuições originais desta tese. Este capítulo é a base para um trabalho científico em fase de redação [17]. Uma discussão extensa de teorias quânticas de campos em 2 dimensões pode ser encontrada em [26].

2.1 O modelo e sua solução

A eletrodinâmica quiral em $(1+1)$ dimensões é definida pela ação:

$$S\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]=\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\bar{\psi}D\left[A_\mu\right]\psi\right), \tag{2.1}$$

onde $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ é o tensor de intensidade de campo, ψ é um férmion de Dirac e $D\left[A_\mu\right]$ é

$$D\left[A_\mu\right]\equiv\gamma^\mu\left(i\partial_\mu+eA_\mu P_+\right), \tag{2.2}$$

com $P_\pm=\left(1\pm\gamma_3\right)/2$.[1] A presença de P_+ no operador de Dirac garante que apenas as componentes esquerdas do férmion de Dirac $\psi_L\equiv P_+\psi$, $\bar{\psi}_L=\bar{\psi}P_-$, acoplam-se ao campo

[1]Nossas convenções são:

$$\gamma^0=\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\gamma^1=-i\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad\gamma_3\equiv\gamma^0\gamma^1=\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

com $\eta^{00}=-\eta^{11}=1$. Algumas identidades importantes em 2 dimensões são:

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]=-2\varepsilon^{\mu\nu}\gamma^5,\quad\gamma_\mu\gamma^5=\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu,\quad\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu P_+)=\eta^{\mu\nu}-\varepsilon^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

onde $\varepsilon_{01}=-\varepsilon^{01}=1$. Também definimos, para qualquer vetor v_μ, $\tilde{v}_\mu\equiv\varepsilon_{\mu\nu}v^\nu$.

A_μ. As componentes direitas $\psi_R \equiv P_-\psi$, $\bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_+$ são férmions de Weyl livres. A simetria de calibre da ação é expressa pelas transformações

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= A_\mu - \frac{i}{e}g^{-1}\partial_\mu g = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \\ \psi^g &= e^{-i\theta P_+}\psi = (P_- + gP_+)\,\psi, \\ \bar{\psi}^g &= \bar{\psi}e^{i\theta P_-} = \bar{\psi}\left(P_+ + P_- g^{-1}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

com $g = \exp\left(-i\theta\left(x\right)\right)$. Em termos de ψ_L e ψ_R, a ação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S\left[\psi_L, \bar{\psi}_L, \psi_R, \bar{\psi}_R, A_\mu\right] = \int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right. \\ \left. +\bar{\psi}_L\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi_L + \bar{\psi}_R\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)\psi_R\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ambas as formas (com férmions de Dirac e com férmions de Weyl) descrevem uma teoria interagente de um único férmion de Weyl esquerdo com um campo de calibre abeliano. Contudo, usar férmions de Dirac é preferível, pois iremos considerar $\det D\left[A_\mu\right]$ e apenas neste caso o operador $D\left[A_\mu\right]$ tem um problema de autovalores bem definido [19].

A teoria quântica é definida através do funcional gerador

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\int d^2x(\bar{\psi}P_-\eta + \bar{\eta}P_+\psi + J^\mu A_\mu)\right), \tag{2.7}$$

com $N = N_{A_\mu}N_\psi$ sendo um fator de normalização que implementa $Z\left[0,0,0\right] = 1$ e a presença de $P_\pm$ nos acoplamentos com as fontes garante que apenas os férmions esquerdos aparecem nas funções de correlação. Fazendo a translação

$$\psi \to \psi' = \psi - \int d^2y G\left(A_\mu; x, y\right) P_-\eta(y), \tag{2.8}$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \int d^2y \bar{\eta}\left(y\right) P_+ G\left(A_\mu; y, x\right) \tag{2.9}$$

com $G\left(A_\mu; x, y\right)$ sendo o propagador fermiônico completo na presença de um A_μ arbitrário,

$$D\left[A_\mu\right] G(A_\mu; x, y) = G(A_\mu; x, y) D\left[A_\mu\right] = \delta^2(x-y), \tag{2.10}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \frac{1}{N}\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \\ &\times \exp\left(i\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}D\left[A_\mu\right]\psi + J^\mu A_\mu\right) - i\int d^2x d^2y\, \bar{\eta}P_+G(A_\mu; x, y)P_-\eta\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

A integral funcional acima é quadrática nos férmions. Ela corresponde, formalmente, a

$$\frac{1}{N_\psi}\int d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i\int d^2x\, \bar{\psi}D\left[A_\mu\right]\psi\right) = \frac{1}{N_\psi}\det iD\left[A_\mu\right] \equiv \exp\left(iH\left[A_\mu\right]\right). \tag{2.12}$$

O funcional $H[A_\mu]$ engloba os efeitos dinâmicos dos férmions. Uma boa escolha para N_ψ, que remove as singularidades inerentes ao cálculo do determinante, é

$$N_\psi = \det iD[0] = \det i\left(i\gamma^\mu \partial_\mu\right), \tag{2.13}$$

o que nos dá

$$\exp\left(iH[A_\mu]\right) = \frac{\det D[A_\mu]}{\det\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)}. \tag{2.14}$$

Assim, Z toma a forma:

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\Bigg(i\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + iH[A_\mu] + J^\mu A_\mu \\ -i\int d^2x d^2y\, \bar{\eta}P_+G(A_\mu;x,y)P_-\eta\Bigg). \end{aligned} \tag{2.15}$$

As manipulações acima poderiam ter sido feitas em qualquer número de dimensões. Contudo, em 2 dimensões, somos capazes de calcular exatamente tanto $G(A_\mu;x,y)$ quando $H[A_\mu]$. Em particular, $H[A_\mu]$ será um funcional quadrático de A_μ. Isso nos permitirá escrever

$$\int d^2x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + H[A_\mu] = \int d^2x \frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu, \tag{2.16}$$

com $\Omega^{\mu\nu}$ sendo um operador *inversível*, independente de A_μ,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\Bigg(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) + J^\mu A_\mu \\ -i\int d^2x d^2y\, \bar{\eta}G(A_\mu;x,y)\eta\Bigg). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Então, fazendo a mudança de variáveis

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^2y (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x,y)J^\nu(y), \tag{2.18}$$

chegamos a uma expressão fechada para Z:

$$\begin{aligned} Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x d^2y J_\mu(x)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(x-y)\,J_\nu(y)\right) \\ \times\frac{1}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) - i\int d^2x d^2y\,\bar{\eta}P_+G\left(A_\mu - (\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x,y\right)P_-\eta\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

que indica que devemos escolher o fator N_{A_μ} como

$$N_{A_\mu} = \int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right)\right), \tag{2.20}$$

de forma que $Z[0,0,0] = 1$.

Notamos que não utilizamos o método de Faddeev-Popov para fixar o calibre, mas conseguimos obter um propagador $((\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y))$ para o campo de calibre da mesma forma. Isso mostra que os efeitos quânticos provenientes dos férmions são capazes de dar conta desta tarefa, se conseguirmos informações não perturbativas sobre eles. Tais informações não estão disponíveis em d dimensões, em geral, o que torna o problema extremamente complicado em dimensões superiores.

A fórmula acima para Z é uma solução completa da teoria se for possível obter $G(A_\mu; x, y)$ e se $H[A_\mu]$ puder ser calculado e for quadrático. Este é o caso para a EDQQ2. Ambas as quantidades foram calculadas no passado [27]. Elas são dadas por:

$$G(A_\mu; x, y) = \exp\left[ieP_+ \int d^2z S_\mu(z; x, y) A^\mu(z)\right] G_F(x-y), \tag{2.21}$$

com

$$\begin{aligned} S_\mu(z; x, y) &= [D_F(x-z) - D_F(y-z)]\,(\partial_\mu^z + \tilde{\partial}_\mu^z), \\ G_F(x-y) &= -\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi (x-y)^2}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

e

$$H[A_\mu] = \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x A^\mu \left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_\mu + \tilde{\partial}_\mu\right)\frac{1}{\Box}(\partial_\nu + \tilde{\partial}_\nu)\right) A^\nu = -i \ln \frac{\det D}{\det i\gamma^\mu \partial_\mu}. \tag{2.23}$$

Na fórmula acima para H notamos o aparecimento do parâmetro a, que não estava presente na ação original. Ele foi apresentado originalmente por Jackiw e Rajaraman [4] e está relacionado a ambiguidades de regularização. Conforme mencionamos, H é um funcional quadrático em A_μ, o que permite a definição de $\Omega^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} &\int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + H[A_\mu] \\ &= \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \left(\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu + \frac{e^2}{4\pi}\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu\right)\frac{1}{\Box}(\partial^\nu + \tilde{\partial}^\nu)\right)\right) A_\nu \\ &\equiv \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dada a expressão para $\Omega^{\mu\nu}$, podemos obter a sua inversa sem problemas:

$$(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)}, \tag{2.25}$$

com

$$\begin{aligned} \left(\Omega^{-1}\right)_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\lambda(a-1)\left(k^2 - \lambda\frac{a^2}{a-1}\right)} \\ &\times \left(\left(k^2 - \lambda a\right)\eta_{\mu\nu} + \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu - \lambda \frac{\left(k_\mu + \tilde{k}_\mu\right)(k_\nu + \tilde{k}_\nu)}{k^2}\right), \end{aligned} \tag{2.26}$$

e

$$\lambda = \frac{e^2}{2\pi}. \tag{2.27}$$

A anomalia de calibre está relacionada à não invariância de calibre de $H\left[A_\mu\right]$. O funcional de Wess-Zumino é definido por

$$\alpha_1[A_\mu, g] \equiv W[A_\mu^g] - W[A_\mu]. \tag{2.28}$$

onde, dado que $g = \exp\left(i\theta\right)$,

$$A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \tag{2.29}$$

Sua forma explícita é dada então por

$$\alpha_1[A_\mu, g] = \int d^2x \left(\frac{a-1}{8\pi}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta - \frac{e}{4\pi}A^\mu\left(\left(a-1\right)\partial_\mu\theta - \tilde{\partial}_\mu\theta\right)\right). \tag{2.30}$$

O Jacobiano de uma transformação de calibre (vista como uma mudança de variáveis) em Z é

$$J\left[A_\mu, g\right] = \exp\left(i\alpha_1\left[A_\mu, g\right]\right). \tag{2.31}$$

Isso nos dá imediatamente a anomalia de calibre [3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(x\right) &\equiv \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0} \\ &= \frac{e}{4\pi}\left(\left(a-1\right)\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right)A^\mu\left(x\right) \equiv h_\mu A^\mu\left(x\right),\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde definimos h_μ como

$$h_\mu = \frac{e}{4\pi}\left(\left(a-1\right)\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right). \tag{2.33}$$

A anomalia de calibre aparece, como é bem sabido, na violação da conservação covariante da corrente de calibre, na presença de um campo *externo* A_μ:

$$\left\langle 0\left|\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi\right)\right|0\right\rangle_{A_\mu} = \mathcal{A}\left(x\right). \tag{2.34}$$

Contudo, o que acontece se o campo A_μ também for quântico? Como vimos anteriormente, a equação acima tem que envolver um valor esperado extra

$$\left\langle 0\left|\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi\right)\right|0\right\rangle = \left\langle 0\right|\mathcal{A}\left(x\right)\left|0\right\rangle. \tag{2.35}$$

Este valor esperado pode ser facilmente calculado a partir dos nossos resultados anteriores e é:

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\left|\mathcal{A}(x)\right|0\right\rangle = \left.\frac{1}{N_{A_\mu}}h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)Z\left[J_\mu, 0, 0\right]\right|_{J^\mu=0} \\ &= \left.\frac{1}{N_{A_\mu}}h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + J^\mu A_\mu\right)\right)\right|_{J_\mu=0} \\ &= \left.h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x d^2y J_\mu\left(x\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x-y\right)J_\nu\left(y\right)\right)\right|_{J_\mu=0} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.36}$$

Assim, no nível quântico completo (todos os campos quantizados), a corrente de calibre é conservada, o que indica restauração da simetria de calibre. Este resultado confirma a análise geral delineada no capítulo anterior. O próximo passo é checar o que acontece com uma função de correlação arbitrária envolvendo a anomalia de calibre. Investigamos esta questão na próxima seção.

2.2 Inserções da anomalia de calibre em funções de correlação

Aproveitando a solubilidade exata da EDQQ2, vamos calcular diversas funções de correlação com uma inserção do operador associado à anomalia de calibre. Vamos começar pelos operadores bosônicos, calculando a inserção da anomalia de calibre na função de Green de 1 ponto do fóton:

$$\begin{aligned}
G_{\nu}^{(1,1)}(x,y) &= \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)A_{\nu}(y)]|\,0\rangle = \langle 0\,|T[h_{\mu}\,(x)\,A^{\mu}(x)A_{\nu}(y)]|\,0\rangle \\
&= h_{\mu}\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^{2}\frac{\delta^{2}}{\delta J_{\mu}(x)\delta J^{\nu}\,(y)}\right)Z[J_{\mu},0,0]\Bigg|_{J_{\mu}=0} \\
&= h_{\mu}\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^{2}\frac{\delta^{2}}{\delta J_{\mu}(x)\delta J^{\nu}\,(y)}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^{2}x'd^{2}y'J_{\alpha}\,(x')\,(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}\,(x'-y')\,J_{\beta}\,(y')\right)\Bigg|_{J_{\mu}=0} \\
&= ih_{\mu}\,(x)\,(\Omega^{-1})^{\mu}{}_{\nu}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Usando a expressão explícita para $(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y)$, obtemos

$$\begin{aligned}
ih_{\mu}\,(x)\,(\Omega^{-1})^{\mu}{}_{\nu}(x-y) &= \frac{i\lambda}{e}\left((a-1)\,\partial_{\mu}-\tilde{\partial}_{\mu}\right)(\Omega^{-1})^{\mu}{}_{\nu}(x-y) \\
&= -\frac{\lambda}{e}\int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}\left((a-1)\,k_{\mu}-\tilde{k}_{\mu}\right)(\Omega^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\,(k)\,e^{ik(x-y)} \\
&= -\frac{1}{e}\int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}k_{\nu}e^{ik(x-y)} \\
&= \frac{i}{e}\partial_{\nu}\delta^{2}\,(x-y)\,.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

O resultado acima pode ser diretamente generalizado para uma inserção da anomalia de calibre numa função de Green de n campos de fóton,

$$G_{\mu_{1}\ldots\mu_{n}}^{(1,n)}(x,x_{1},...,x_{n}) = \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)A_{\mu_{1}}(x_{1})A_{\mu_{2}}(x_{2})...A_{\mu_{n}}(x_{n})]|\,0\rangle\,. \tag{2.39}$$

Se n for par, teremos um número ímpar de derivadas funcionais agindo numa exponencial quadrática, dando um resultado nulo quando a fonte J_{μ} é posta a zero:

$$G_{\mu_{1}\ldots\mu_{n}}^{(1,n)}(x,x_{1}...x_{n}) = 0, \quad n \text{ par}. \tag{2.40}$$

Se n for ímpar, obteremos um resultado não nulo para a função de correlação. Considere, por exemplo, $n=3$:

$$\begin{aligned}
&G^{(1,n)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x,x_1,x_2,x_3)\\
&=\langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)A_{\mu_3}(x_3)]|\,0\rangle\\
&=\langle 0\,|T[h_\mu\,(x)\,A^\mu(x)A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)A_{\mu_3}(x_3)]|\,0\rangle\\
&=h_\mu\,(x)\left(i(\Omega^{-1})^\mu{}_{\mu_1}(x-x_1)\right)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_2\mu_3}(x_2-x_3)\right)\\
&+h_\mu\,(x)\left(i(\Omega^{-1})^\mu{}_{\mu_2}(x-x_2)\right)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_1\mu_3}(x_1-x_3)\right)\\
&+h_\mu\,(x)\left(i(\Omega^{-1})^\mu{}_{\mu_3}(x-x_3)\right)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)\right)\\
&=\frac{i}{e}\partial_{\mu_1}\delta^2\,(x-x_1)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_2\mu_3}(x_2-x_3)\right)\\
&+\frac{i}{e}\partial_{\mu_2}\delta^2\,(x-x_2)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_1\mu_3}(x_1-x_3)\right)\\
&+\frac{i}{e}\partial_{\mu_3}\delta^2\,(x-x_1)\left(i(\Omega^{-1})_{\mu_1\mu_2}(x_1-x_2)\right).
\end{aligned}\tag{2.41}$$

Este resultado pode se facilmente generalizado para um n ímpar arbitrário.

Vamos agora calcular a inserção da anomalia de calibre numa função de correlação de operadores invariantes de calibre. Tomamos, como um exemplo concreto, o caso

$$\begin{aligned}
G^{(1.1)}_{\mu\nu}(x,y)&=\langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)F_{\mu\nu}(y)]|\,0\rangle\\
&=h_\rho\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J_\rho(x)}\left(\partial^y_\mu\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J^\nu(y)}-\partial^y_\nu\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J^\mu(y)}\right)\right)\\
&\times\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y'J_\alpha\,(x')\,(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}\,(x'-y')\,J_\beta\,(y')\right)\Bigg|_{J_\mu=0}\\
&=ih_\rho\,(x)\,\partial^y_\mu(\Omega^{-1})^\rho{}_\nu\,(x-y)-ih_\rho\,(x)\,\partial^y_\nu(\Omega^{-1})^\rho{}_\mu\,(x-y)\,.
\end{aligned}\tag{2.42}$$

Os termos individuais podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
&ih_\rho\,(x)\,\partial^y_\mu(\Omega^{-1})^\rho{}_\nu(x-y)=\frac{i\lambda}{e}\left((a-1)\,\partial^x_\rho-\tilde{\partial}^x_\rho\right)\partial^y_\mu(\Omega^{-1})^\rho{}_\nu(x-y)\\
&=\frac{i\lambda}{e}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left((a-1)\,k_\rho-\tilde{k}_\rho\right)k_\mu(\Omega^{-1})^\rho{}_\nu\,(k)\,e^{ik(x-y)}\\
&=\frac{i}{e}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}k_\mu k_\nu e^{ik(x-y)}\\
&=-\frac{i}{e}\partial_\mu\partial_\nu\delta^2\,(x-y)\,;
\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$ih_\rho\,(x)\,\partial^y_\nu(\Omega^{-1})^\rho{}_\mu(x-y)=-\frac{i}{e}\partial_\nu\partial_\mu\delta^2\,(x-y)\,.\tag{2.44}$$

Assim,

$$G^{(1.1)}_{\mu\nu}(x,y)=0.\tag{2.45}$$

Numa função de correlação geral, envolvendo um produto de n termos do tipo em pontos diferentes, essa anulação vai se repetir para cada pareamento entre $\mathcal{A}(x)$ e $F_{\mu_k\nu_k}(x_k)$, dando um resultado nulo para o correlador:

$$G^{(1,n)}_{(\mu_1\nu_1)...(\mu_n\nu_n)}(x,y) = \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)F_{\mu_1\nu_1}(x_1)...F_{\mu_n\nu_n}(x_n)]|\,0\rangle = 0. \tag{2.46}$$

Vamos, agora, calcular o resultado de uma inserção da anomalia de calibre em funções de correlação fermiônicas. Será conveniente, contudo, calcular primeiramente

$$G^{(2)}_c(x,\bar{x}) = \left\langle 0\left|T\left(\psi_L(x)\bar{\psi}_L(\bar{x})\right)\right|0\right\rangle. \tag{2.47}$$

Usando a expressão para $Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]$ dada por (2.19):

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}_c(x,\bar{x}) = \left\langle 0\left|T\left(\psi_L(x)\bar{\psi}_L(\bar{x})\right)\right|0\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right) Z[0,\eta,\bar{\eta}]\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right)\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}}\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right. \\
&\left.-i\int d^2x'd^2\bar{x}'\,\bar{\eta}\left(x'\right)P_+G(A_\mu;x',\bar{x}')P_-\eta\left(\bar{x}\right)\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right) \\
&= \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu P_+ G\left(A_\mu;x,\bar{x}\right)P_-\exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Inserindo a expressão explícita para $G\left(A_\mu;x,\bar{x}\right)$, eq. (2.21), teremos

$$\begin{aligned}
G^{(2)}_c(x,\bar{x}) = {} & \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) \\
& \times P_+\exp\left(eP_+S^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\left(x'\right)\right)G_F(x-\bar{x})P_-.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Observando que, sendo α uma função escalar arbitrária,

$$\begin{aligned}
\exp\left(P_+\alpha\right) &= 1 + P_+\alpha + \frac{1}{2!}\left(P_+\alpha\right)^2 + ... \\
&= P_- + P_+\left(1+\alpha+\frac{1}{2!}\alpha^2+...\right) \\
&= P_- + P_+\exp\left(\alpha\right),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
G^{(2)}_c(x,\bar{x}) &= \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + eS^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\left(x'\right)\right)P_+G_F(x-\bar{x})P_- \\
&= \exp\left(ie^2\int d^2x'd^2x''S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x})\right)P_+iG_F(x-\bar{x})P_-.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Usando as expressões explícitas para S_μ e Ω^{-1} dadas anteriormente, chegamos a:

$$\begin{aligned}
&\int d^2x'd^2x''S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(x'-x'')\,S_\nu(x'';x,\bar{x}) \\
&= \frac{1}{\lambda\,(a-1)}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\left(2-e^{ik(x-\bar{x})}-e^{-ik(x-\bar{x})}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Este termo vai a zero quando $x\to\bar{x}$, o que indica que as singularidades na diagonal de $G_c^{(2)}(x,\bar{x})$ são exatamente as mesmas que aquelas do propagador livre, $G_F(x-\bar{x})$.

Vamos, então, inserir o operador da anomalia de calibre na função de correlação considerada acima:

$$\begin{aligned}
G_c^{(1,2)}(x,x_1,\bar{x}_1) &= \left\langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(\bar{x}_1)\right|0\right\rangle \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\right) \\
&\times\, Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x}_1)}\right)\Bigg|_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right) \\
&\times\left[\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y'J_{\mu'}(x')\,(\Omega^{-1})^{\mu'\nu'}(x'-y')\,J_{\nu'}(y')\right)\right. \\
&\times\,\frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu\exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) \\
&\times\left. G(A_\mu-(\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x_1,\bar{x}_1)\right]_{J_\mu=0}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
&G(A_\mu-(\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x_1,\bar{x}_1) \\
&= \exp\left[-ieP_+\int d^2zd^2yS^\mu(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(z,y)J^\nu(y)\right] \\
&\times G\left(A_\mu;x_1,\bar{x}_1\right),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

vemos que a dependência em A_μ está inteiramente contida em $G\left(A_\mu;x_1,\bar{x}_1\right)$, e isso significa que, fatorizando o termo exponencial independente de A_μ, a integral remanescente se reduz àquela considerada no cálculo de $G_c^{(2)}(\bar{x},x)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
G_c^{(1,2)}(x,x_1,\bar{x}_1) = -ie&\left(\int d^2z\,h_\mu(x)\,S_\alpha(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z,x)\right) \\
&\times P_+G_c^{(2)}(x_1,\bar{x}_1).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Outras funções de correlação como

$$\left\langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(\bar{x}_1)...\psi_L(x_n)\bar{\psi}_L(\bar{x}_n)\right|0\right\rangle \tag{2.56}$$

irão envolver produtos e fatores como o calculado acima. Vamos considerar em mais detalhe o termo que vem antes de $P_+ G_c^{(2)}(x_1, \bar{x}_1)$ em (2.55):

$$
\begin{aligned}
&\int d^2z\, h_\mu(x)\, S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z, x) \\
&= -\frac{\lambda}{e} \int d^2z \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip(x_1-z)}}{p^2 + i\varepsilon} \\
&\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left((a-1)\, k_\mu - \tilde{k}_\mu \right) (k_\alpha + \tilde{k}_\alpha)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k) e^{ik(z-x)} \\
&- (x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1) \\
&= -\frac{1}{e} \left(\delta\left(x_1 - x\right) - \delta\left(\bar{x}_1 - x\right) \right) \\
&\Longrightarrow G_c^{(1,2)}(x, x_1, \bar{x}_1) = i \left(\delta\left(x_1 - x\right) - \delta\left(\bar{x}_1 - x\right) \right) P_+ G_c^{(2)}(x_1, \bar{x}_1). \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Assim, a estrutura de singularidades de $G_c^{(1,2)}(x, x_1, \bar{x}_1)$, quando $x_1 \to \bar{x}_1$, é a mesma que aquela de $G_c^{(2)}(x_1, \bar{x}_1)$. Neste limite, a função de Green

$$
G_c^{(2)}(x_1, x_1) = \left\langle 0 \left| T[\psi_L(x_1) \bar{\psi}_L(\bar{x}_1) \right| 0 \right\rangle \qquad (2.58)
$$

pede uma renormalização extra (renormalização de operador composto [28]), com regularização e subtração de divergências. Contudo, o termo $\delta\left(x_1 - x\right) - \delta\left(\bar{x}_1 - x\right)$ não é divergente, nem precisa de regularização. Quando $x_1 \to \bar{x}_1$ ele simplesmente vai a zero, o que diz que, independente de qualquer renormalização a ser feita sobre $K(x_1, x_1)$,

$$
G_c^{(1,2)}(x, x_1, x_1) = \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x) \psi_L(x_1) \bar{\psi}_L(x_1) \right| 0 \right\rangle = 0. \qquad (2.59)
$$

Observamos que $\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(x_1)$ é um operador invariante de calibre (se os índices espinoriais de $\psi_L(x_1)$ não são contraídos como os de $\bar{\psi}_L(x_1)$).

Assim, no contexto da EDQC2, confirmamos que inserções do operador associado à anomalia de calibre em correladores envolvendo operadores invariantes de calibre dão um resultado nulo, em concordância completa com os resultados gerais obtidos em [8]. Em contrapartida, essas inserções não se anulam, em funções de correlação de operadores não invariantes de calibre, o que confirma que a anomalia de calibre não pode ser o operador nulo e empurra a teoria para longe da trivialidade.

2.3 As identidades de Ward-Takahashi

Nesta seção, vamos checar as identidades de Ward-Takahashi, que obtivemos no capítulo 1 para o caso abeliano quiral em d dimensões, verificando a sua validade no contexto da EDQC2. No entanto, antes de fazer tal verificação, vamos corrigir a equação master das identidades de Ward para o caso em 2 dimensões. Partimos da equação master em termos de Z, sem introduzir uma fonte λ para a anomalia $\mathcal{A} = h^\mu A_\mu$. A razão para isso é que, como vimos diretamente, em 2 dimensões, a anomalia é linear no campo A_μ, não sendo um operador composto e, portanto, não requerendo a introdução de uma fonte independente para ele. A equação master assume a forma abaixo, então:

$$\left(-e\bar{\eta}P_+\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\right)+e\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\right)P_-\eta-ieh^\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(x\right)}\right)+\partial_\mu J^\mu\right)Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]=0. \tag{2.60}$$

Transformamos essa equação numa para W, introduzindo $Z=\exp iW$,

$$\left(ie\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}P_-\eta\left(x\right)-ie\bar{\eta}\left(x\right)P_+\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}+eh^\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu\left(x\right)}\right)\right)W_\lambda[J_\mu,\eta,\bar{\eta},\lambda]\Bigg|_{\lambda=0}+\partial_\mu J^\mu=0. \tag{2.61}$$

Identificamos os campos clássicos,

$$\begin{aligned}\psi_c\left(x\right)=\frac{\overrightarrow{\delta}W}{\delta\bar{\eta}\left(x\right)}\Bigg|_{\lambda=0},\quad \bar{\psi}_c\left(x\right)=W\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta\left(x\right)}\Bigg|_{\lambda=0},\\ A_{\mu,c}\left(x\right)=\frac{\delta W}{\delta J^\mu\left(x\right)}\Bigg|_{\lambda=0},\end{aligned} \tag{2.62}$$

substituímos as correntes por

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}\Gamma\Bigg|_{\lambda=0}&=-\eta\left(x\right),\\ \Gamma\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}\Bigg|_{\lambda=0}&=-\bar{\eta}\left(x\right),\\ \frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)}\Gamma\Bigg|_{\lambda=0}&=-J^\mu\left(x\right),\end{aligned} \tag{2.63}$$

e reescrevemos a equação master para W em termos da equação master para Γ:

$$\left(e\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_c\left(x\right)}P_+\psi_c\left(x\right)+e\bar{\psi}_c\left(x\right)P_-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_c\left(x\right)}+i\partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_{\mu,c}\left(x\right)}\right)\Gamma\left[\psi_c,\bar{\psi}_c,A_{\mu,c}\right]+eh^\mu A_{\mu,c}=0. \tag{2.64}$$

O primeiro termo é idêntico ao do caso não anômalo. Assim, quando tomarmos derivadas funcionais de qualquer ordem em termos de η ou $\bar{\eta}$, o último termo (associado à anomalia) vai sumir e vamos ficar com uma equação idêntica à do caso sem anomalia de calibre. Vemos, assim, que a anomalia não interfere em identidades de Ward associadas a funções I1P fermiônicas.

Temos, assim, basicamente duas equações para verificar:

$$G_c^{(1,2)}\left(x,x_1,y_1\right)=G_c^{(2)}\left(x_1,x\right)P_-\delta\left(x-y_1\right)-P_+G_c^{(2)}\left(x,y_1\right)\delta\left(x-x_1\right), \tag{2.65}$$

e

$$\begin{aligned}&P_-\left(\partial_x^\mu\Gamma_\mu^{(3)}\left(x,x_1,y_1\right)\right)P_+\\ &=P_-\left(ie\delta\left(x-y_1\right)\Gamma^{(2)}\left(x_1,x\right)-ie\delta\left(x_1-x\right)\Gamma^{(2)}\left(x,y_1\right)\right)P_+.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Para isso, vamos calcular cada uma das funções que aparecem acima, substituí-las nas respectivas equações e nos certificar da consistência de nossos resultados.

Vamos começar com a equação (2.65). As expressões para $G_c^{(2)}(x,y)$ e $G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1)$ foram exibidas anteriormente neste capítulo:

$$\begin{aligned}
G_c^{(2)}(x,y) &= \exp\left(\frac{i}{2}e^2 P_+ \frac{1}{\lambda(a-1)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(2-e^{ik(x-y)}-e^{-ik(x-y)}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}\right) \\
&\times iG_F(x-y), \\
G_F(x-y) &= -\frac{\gamma^\mu(x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2},
\end{aligned} \tag{2.67}$$

e

$$\begin{aligned}
G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1) &= \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\psi_L(x_1)\bar{\psi}_L(y_1) \right| 0 \right\rangle \\
&= i\left(\delta(x_1-x)-\delta(y_1-x)\right) P_+ G_c^{(2)}(x_1,y_1).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Notamos que a estrutura de $G_c^{(2)}(x,y)\,P_-$ é

$$\begin{aligned}
G_c^{(2)}(x,y)\,P_- &= -\exp\left(P_+\alpha(x,y)\right) i\gamma^\mu \frac{(x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2} P_- \\
&= -\left[P_- + P_+\left(\exp\left(\alpha(x,y)\right)\right)\right] P_+ i\gamma^\mu \frac{(x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2} \\
&= -P_+\left[P_- + P_+\left(\exp\left(\alpha(x,y)\right)\right)\right] i\gamma^\mu \frac{(x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2} \\
&= P_+ G_c^{(2)}(x,y),
\end{aligned} \tag{2.69}$$

onde

$$\alpha(x,y) = \frac{i}{2}e^2 \frac{1}{\lambda(a-1)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(2-e^{ik(x-y)}-e^{-ik(x-y)}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}. \tag{2.70}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& i\left(G_c^{(2)}(x_1,x)\,P_-\delta(x-y_1) - P_+G_c^{(2)}(x,y_1)\,\delta(x-x_1)\right) \\
&= i\left(\delta(x-y_1)\,P_+G_c^{(2)}(x_1,x) - \delta(x-x_1)\,P_+G_c^{(2)}(x,y_1)\right) \\
&= i\left(\left(\delta(x-y_1)-\delta(x-x_1)\right) P_+G_c^{(2)}(x_1,y_1)\right) \\
&= G_c^{(1,2)}(x,x_1,y_1).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Para finalizar, vamos verificar a equação (2.66). Vamos agora usar a versão I1P da equação (2.65), projetada com P_+ e P_-,

$$P_-\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1)\,P_+ = P_-\left(i\delta(x-y_1)\,\Gamma^{(2)}(x_1,x) - i\delta(x_1-x)\,\Gamma^{(2)}(x,y_1)\right) P_+, \tag{2.72}$$

para eliminar os termos envolvendo $\Gamma^{(2)}$ de (2.66):

$$P_-\left(\partial_x^\mu \Gamma_\mu^{(3)}(x,x_1,y_1)\right) P_+ = P_-\left(e\Gamma^{(1,2)}(x,x_1,y_1)\right) P_+. \tag{2.73}$$

Isso nos dá uma relação direta entre $\Gamma^{(3)}_{\mu}$ e $\Gamma^{(1,2)}$, que vamos verificar na QED2 quiral. Para isso, vamos usar a expressão de $\Gamma^{(3)}_{\mu}$ em termos de sua função conexa correspondente:

$$\Gamma^{(3)}_{\mu}(x, x_1, y_1) = \int dudzdw \left(\Gamma^{(2)}(x_1, u)\, G^{\nu(3)}(w, u, z)\, \Gamma^{(2)}_{\nu\mu}(w, x)\, \Gamma^{(2)}(z, y_1)\right), \tag{2.74}$$

com $\Gamma^{\mu\nu(2)}$ dada por

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu\nu(2)}(w, x) = {} & \left(\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial^{\nu} + \frac{e^2}{4\pi}a\eta^{\mu\nu}\right)\delta(w - x) \\ & - \frac{e^2}{4\pi}\left(\left(\partial^{\mu} + \tilde{\partial}^{\mu}\right)\frac{1}{\Box}(\partial^{\nu} + \tilde{\partial}^{\nu})\right)\delta(w - x).\end{aligned} \tag{2.75}$$

A dependência em x está toda contida em $\Gamma^{\mu\nu(2)}$, sobre a qual incidirá, então, a derivada:

$$\partial^x_{\mu}\Gamma^{\mu\nu}(w, x) = \frac{e^2}{4\pi}\left((a - 1)\,\partial^{\nu} - \tilde{\partial}^{\nu}\right)_x \delta(w - x) = eh^{\nu}_x\delta(w - x), \tag{2.76}$$

onde lembramos que

$$h_{\mu} = \frac{e}{4\pi}\left((a - 1)\,\partial_{\mu} - \tilde{\partial}_{\mu}\right). \tag{2.77}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\partial^{\mu}\Gamma^{(3)}_{\mu}(x, x_1, y_1) &= \int dudzdw \left(\Gamma^{(2)}(x_1, u)\, G^{\nu(3)}(w, u, z)\left(\partial^{\mu}\Gamma^{(2)}_{\nu\mu}(w, x)\right)\Gamma^{(2)}(z, y_1)\right) \\ &= \int dudzdw \left(\Gamma^{(2)}(x_1, u)\, G^{\nu(3)}(w, u, z)\left(eh^x_{\nu}\delta(w - x)\right)\Gamma^{(2)}(z, y_1)\right) \\ &= e\int dudz \left(\Gamma^{(2)}(x_1, u)\left(h^x_{\nu}G^{\nu(3)}(x, u, z)\right)\Gamma^{(2)}(z, y_1)\right).\end{aligned} \tag{2.78}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1,2)}(x, x_1, y_1) &= -\int dudv\Gamma^{(2)}(x_1, u)\, G^{(1,2)}(x, u, v)\, \Gamma^{(2)}(v, y_1) \\ &= \int dudv \left(\Gamma^{(2)}(x_1, u)\left(h^x_{\nu}G^{\nu(3)}(x, u, v)\right)\Gamma^{(2)}(v, y_1)\right),\end{aligned} \tag{2.79}$$

concluímos que

$$\partial^{\mu}\Gamma^{(3)}_{\mu}(x, x_1, y_1) = e\Gamma^{(1,2)}(x, x_1, y_1). \tag{2.80}$$

o que confirma as identidades WT para o modelo.

Conclusão

Nesta tese, procuramos dar argumentos convincentes de que teorias anômalas não são necessariamente inconsistentes. Como estratégia, após uma revisão de trabalhos anteriores na mesma direção, consideramos a Eletrodinâmica Quântica Quiral, que é uma teoria exatamente solúvel em 2 dimensões. Procedendo desta forma, confirmamos todos os resultados apenas conjecturados para 4 dimensões (ou dimensões superiores): a anulação do valor esperado no vácuo da anomalia de calibre, a anulação de sua inserção em funções de Green envolvendo apenas operadores invariantes de calibre, a sua não anulação em inserções correspondentes com operadores não invariantes de calibre. Em relação às identidades de Ward-Takahashi, encontramos a sua preservação, como uma particularidade do caso de 2 dimensões. Tais resultados nos fazem crer que o programa de quantização de teorias com anomalias de calibre pode vir a ser bem sucedido, em dimensões superiores.

Um ponto importante, em d dimensões, é a modificação, através de um fator $1/2$, da relação entre a auto-energia do férmion e a função de vértice tripla. Este fator vai modificar uma possível relação entre as constantes de renormalização associadas a essas duas funções de Green. Embora isso não ocorra em 2 dimensões (e, se ocorresse, não seria problemático, pois a teoria é super renormalizável) tal questão é crucial para provar a renormalizabilidade perturbativa em dimensões superiores. E aqui aparece um problema adicional: não há uma definição adequada de teoria de perturbações para uma teoria com anomalia de calibre.

Numa teoria de calibre convencional, o procedimento de Faddeev-Popov resolve o problema de definir, sem redundâncias, a integração funcional sobre configurações de campos de calibre não equivalentes fisicamente. Ao fazer isso, também resolve o problema da singularidade do operador $\Delta^{\mu\nu}$, definido abaixo:

$$\int dx \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = \int dx \left(\frac{1}{2}A_\mu \left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right) A_\nu\right) \equiv \int dx \left(\frac{1}{2}A_\mu \Delta^{\mu\nu} A_\nu\right). \tag{2.81}$$

A definição de um propagador para o campo de calibre depende da possibilidade de inversão deste operador, o que viabiliza a definição da abordagem perturbativa. O método de Faddeev-Popov resolve esse problema, levando $\Delta^{\mu\nu}$ num operador não singular:

$$\Delta^{\mu\nu} \to \bar{\Delta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu, \tag{2.82}$$

com α sendo o parâmetro de calibre. No entanto, quando há anomalia de calibre, a aplicação do método de Faddeev-Popov ocasiona a introdução de campos de Wess-Zumino [6], o que, em dimensões maiores que 2 leva a problemas sérios para o estudo da renormalizabilidade da teoria. Afinal, tais campos tem dimensão de massa nula e potências arbitrárias deles podem aparecer como contratermos. Em duas dimensões o problema é resolvido pela expressão explícita da ação efetiva, que fornece os termos necessários para inverter o operador $\Omega^{\mu\nu}$, substituto de $\bar{\Delta}^{\mu\nu}$ nesse caso, conforme pode ser visto na equação (2.24), sem a necessidade de se utilizar o método de Faddeev-Popov. Isso prejudica a definição perturbativa de uma teoria de calibre anômala em dimensões superiores.

Uma possibilidade a ser investigada é introduzir um termo de fixação de calibre arbitrariamente, considerando:

$$Z\left[J_{\mu},\eta,\bar{\eta}\right]=\int DA_{\mu}D\psi D\bar{\psi}\exp\left(iS\left[\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right]+\text{ fontes }+\frac{i\alpha}{2}\int dx\left(\partial_{\mu}A^{\mu}\right)^{2}\right)\Bigg|_{\alpha=0}, \quad (2.83)$$

onde, diferentemente do caso não anômalo, α deve ter um valor fixado ao final como zero. O operador cinético que aparece agora é

$$\bar{\Delta}^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}\square-(1-\alpha)\,\partial^{\mu}\partial^{\nu}, \quad (2.84)$$

e sua inversa nos dá o propagador

$$D_{\mu\nu}^{\alpha}\left(k\right)=-\frac{1}{k^{2}}\left(\eta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^{2}}\right). \quad (2.85)$$

Tal propagador é singular no limite em que α vai para zero (que deve ser tomado, necessariamente), mas isso é esperado. Poderíamos usá-lo como parâmetro regularizador para definir a expansão perturbativa e então tentar remover as divergências em $\alpha=0$ junto com as divergências ultravioletas usuais, que precisarão ser renormalizadas da teoria, fazendo $\alpha=0$ apenas quando tivermos expressões que não sejam singulares em α. Pretendemos investigar essa possibilidade em trabalhos futuros.

Como um resultado acessório, investigamos em detalhe a questão da invariância da medida funcional associada ao campo de calibre, dando argumentos claros que levam à sua invariância. Esta é bem conhecida (e utilizada) na literatura. No entanto, não conseguimos encontrar trabalhos onde esta invariância fosse mostrada de maneira explícita, o que é uma das contribuições desta tese.

Referências Bibliográficas

[1] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford at Clarendon Press, 2006.

[2] M. Lüsher, arXiv:hep-th/0102028v2 (2001).

[3] K. Fujikawa e H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, The International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, 2004.

[4] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219.

[5] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett. B* **167** (1986) 225.

[6] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* **183**, 311 (1987) 311.

[7] O. Babelon, F. Shaposnik e C. Viallet, *Phys. Lett. B* **177** (1986) 385.

[8] G. L. S. Lima, R. Chaves e S. A. Dias, *Annals of Physics* **327** (2012) 1435.

[9] A. P. C. Rodrigues de Lima e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **31** (2016) 1650062.

[10] C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 2501.

[11] H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 514; H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 592.

[12] D. Boyanovsky, *Nucl. Phys. B* **294** (1987) 223.

[13] R. Casana e S. A. Dias, *Jour. Phys. G* **27** (2001) 1501.

[14] R. Casana e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **15** (2000) 4603.

[15] R. Casana e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **17** (2002) 4601.

[16] G. de Lima e Silva, T. J. Girardi e S. A. Dias *Universe* **7** (2021) 283.

[17] D. R. de Pontes, G. de Lima e Silva, A. P. C. Rodrigues de Lima e S. A. Dias, trabalho em preparação.

[18] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **234** (1984) 269-330.

[19] L. Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Annals of Physics* **161** (1985) 423.

[20] O. Piguet and S. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[21] O. Piguet and A. Rouet, *Phys. Rep.* **76** (1981), 1.

[22] G. 't Hooft, *Nuclear Physics* **B33** (1971) 173-199; *Nuclear Physics* **B35** (1971), 167-188.

[23] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Ann. of Phys.* **98** (1976), 287-321.

[24] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, New York, 1983.

[25] Daniel Ribeiro de Pontes, *Comportamento Operatorial da Anomalia de Calibre no Modelo de Jackiw-Rajaraman*, dissertação de Mestrado, CBPF, 2014.

[26] E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, 2$^{\text{nd}}$ edition, World Scientific, 2001

[27] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2162.

[28] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1986.