

Ministério da Ciência e Tecnologia

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Tese de Doutorado

Teoria Quântica de Campos Generalizada: Um Modelo Fenomenológico Para Partículas Compostas

Autor: César Isidoro Dos Santos Ribeiro Silva

Orientador: Marco Aurélio Rego Monteiro

Co-orientador: Evaldo M. F. Curado

29 de abril de 2008

À minha família.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Álgebras e Teoria Quântica de Campos	5
1.1.1	Quantização Canônica	6
1.2	Uma Interpretação Física das Álgebras deformadas de Heisenberg	10
1.3	Álgebra de Heisenberg Generalizada	12
1.3.1	Caso Linear	16
1.3.2	Caso não-Linear	20
1.3.3	Caso Geral	24
1.4	Superposição de duas álgebras de Heisenberg Generalizadas	25
1.5	AHG e Espectro Molecular Vibracional	26
1.5.1	Caso Linear (q -oscilador)	26
1.5.2	Aplicação à molécula de CO	27
1.5.3	Caso não-linear	28
2	Uma Teoria Quântica de Campos Generalizada	35
2.1	Realização Física da AHG	35
2.2	Teoria Quântica de Campos Escalar Generalizada	41

2.2.1	Caso Linear	44
2.2.2	Caso Quadrático	47
2.3	Teoria $\lambda\phi^4$ Generalizada: Cálculo Perturbativo	51
2.3.1	Caso Linear	51
2.3.2	Expansão de Wick e Cálculo Perturbativo de Segunda ordem	54
2.3.3	Caso Quadrático	60
2.3.4	Comparação dos Casos Linear e Quadrático	60
3	Eletrodinâmica quântica Generalizada	64
3.1	Espalhamento de Fótons por uma Partícula Composta	70
3.1.1	Cálculo Perturbativo e Covariância de Lorentz	70
3.1.2	Invariância de Calibre	79
3.2	Processo de Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$	79
3.2.1	Seção de choque $2\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	81
3.2.2	Análise dos Resultados	84
4	Renormalização do Modelo Generalizado	87
4.1	Divergências em $(\lambda\phi^4)$	87
4.2	Discussão Sobre os Dois Casos: Linear e Quadrático	88
4.2.1	Caso Linear	88
4.2.2	Caso Quadrático	93
5	Comentários Finais e Perspectivas	95
A	A Álgebra dos q-Osciladores	100

A.1	Oscilador Harmônico	100
A.2	A álgebra dos q-Osciladores	104
B	Expansão de Wick para quatro campos	108
C	Contribuição do Campo $\rho(x)$ para Matriz S	110
C.1	Elemento de Matriz do Produto dos Campos na Ordem Temporal	112

Lista de Figuras

1.1	Iterações de uma função linear	17
1.2	$\Delta < 0$: Não existe pontos fixos	21
1.3	$\Delta = 0$. Apenas 1 Ponto Fixo	22
1.4	$\Delta > 0$, Existem dois pontos fixos α_+^* e α_-^*	23
2.1	Comparação entre o espectro do caso linear e quadrático	48
2.2	Análise gráfica do caso quadrático (a) $\Delta > 0$ (b) $\Delta = 0$ e (c) $\Delta < 0$	49
2.3	A constante redefinida versus α_0 para o caso quadrático	62
3.1	Comparação com Dados Experimentais	83

Lista de Tabelas

1.1	valores dos parâmetros usados no modelo	32
1.2	Espectro vibracional da molécula de CO.	33
1.3	Valores das energias de dissociação calculadas para cada modelo.	34

Resumo

Considerando como ponto de partida a interpretação existente na literatura que usa as álgebras deformadas como uma possível ferramenta para se estudar partículas compostas, argumentamos que uma maneira de construir uma teoria de campos que descreva fenomenologicamente as interações entre partículas compostas poderia ser baseada na modificação das relações de comutação da teoria de campos convencional. Para modificar as relações de comutação usamos a álgebra de Heisenberg generalizada (AHG). Essa álgebra possui três geradores e as relações de comutação são generalizadas com uma função $f(J_0)$, sendo J_0 um dos geradores da AHG, associado ao Hamiltoniano. Se $f(J_0) = qJ_0 + 1$, esta álgebra se transforma na álgebra dos q -osciladores que, no limite $q \rightarrow 1$, recupera a álgebra de Heisenberg (AH). Quando f é uma função não linear, as relações algébricas tornam-se mais gerais que a AH e a álgebra dos q -osciladores.

Utilizando a AHG mostramos que é possível construir uma teoria de campos que descreva fenomenologicamente a interação entre partículas compostas que são criadas e/ou aniquiladas pelos respectivos operadores de criação/aniquilação da AHG. Nessa teoria de campos a contração de Dyson-Wick não é mais um número complexo e este fato introduz algumas modificações no teorema de Wick. Calculamos o processo de espalhamento, $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ com um Hamiltoniano de interação $\lambda\phi^4$, até a segunda ordem levando em consideração uma função característica $f(J_0)$ linear e quadrática.

Com a finalidade de dar uma descrição fenomenológica da interação entre o fóton e partículas escalares compostas, contruímos uma eletrodinâmica escalar generalizada onde os bósons escalares são criados e/ou aniquilados pelos operadores da álgebra de Heisenberg

generalizada e os fótons são descritos de maneira semelhante à teoria convencional. Dentro do formalismo da eletrodinâmica escalar generalizada calculamos o processo $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$ até a segunda ordem da constante de acoplamento, onde P representa uma partícula escalar composta e γ o fóton.

Calculamos a seção de choque para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ mostrando um melhor ajuste da eletrodinâmica quântica generalizada com os dados experimentais que a eletrodinâmica usual e a QCD na região considerada (0.5 a 0.7 GeV).

Finalmente investigamos a renormalizabilidade da teoria quântica de campos generalizada com interação do tipo $\lambda\phi^4$ para o caso em que a função característica é linear e quadrática.

Abstract

The interpretation of deformed Heisenberg algebras as describing phenomenologically composite particles has been explored in the literature in the last 15 years. The basic argument is that the step operators representing composite particles become different from Heisenberg algebra due to the internal degree of freedom of the corresponding point-like particles.

Since the standard quantum field theory (QFT) is constructed within the framework of Heisenberg algebra (HA), where the ladder operators a and $a^\dagger$ are interpreted as annihilating and creating point particles, a possible way to generalize the quantum field theory in order to describe a composite particle, following the above suggestion, is to construct a field theory based on a deformed Heisenberg algebra.

A generalized Heisenberg algebra (GHA) has recently been proposed. This algebra has a characteristic function which depends on one of its generators. When this function is linear, $qx + 1$, this algebra can be mapped into the q -oscillator algebra

We show that it is possible to construct a scalar generalized quantum field theory (GQFT) which describes at the space-time a spinless composite particle. Perturbative computation was done considering a $\lambda\phi^4$ interaction

We discuss the scalar quantum electrodynamics with the standard $U(1)$ as the gauge group and use a quantization procedure where a deformed Heisenberg algebra describes the scalar particles and the photons are quantized in the standard way. We introduce a parameter η in those terms of the interaction Hamiltonian which have derivatives. We use this formalism to evaluate a photon-induced process of composite particles up to second

order in the coupling constant. We also analyse the gauge and Lorentz symmetries of the photon-induced process. The requirement of these symmetries in the photon-induced process implies relations among the parameters of the algebra and η , leaving only one free parameter. We compare the cross-section for the scattering $2\gamma \rightarrow q\text{-boson} + q\text{-boson}$ with the experimental data for $2\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, where $\pi^\pm$ are the charged pions, obtaining a good agreement in the region 0.55-0.7 GeV. Finally, we analyze the renormalizability of the theory

Capítulo 1

Introdução

Em 1692, o astrônomo Richer realizou em Caiena, Guiana Francesa, medidas cuidadosas do período de um pêndulo de segundos, observando que ele oscilava mais lentamente do que em Paris, sendo necessário reduzir seu comprimento de uma linha¹ e um quarto para voltar a oscilar em um segundo[1]. Esse Resultado conflitava com observações anteriores feitas por Picard, que observava exatamente o mesmo período para pêndulos de igual comprimento, 440 1/2 Linhas, em diferentes regiões da Europa. Com a chegada da notícia de Richer a Paris, Picard e De la Hire fizeram novas medições do comprimento do pêndulo de segundos em regiões da Europa, sempre encontrando o mesmo valor de 440 1/2 linhas francesas.

Várias sugestões foram apontadas para explicar as diferenças de comprimentos: temperatura de Caiena, variação na densidade do ar, etc. Newton e Huygens, independentemente, propuseram a explicação para o fenômeno: a redução da atração gravitacional pela rotação da Terra, que é mais sensível próxima ao Equador terrestre. Ambos tira-

¹1 linha francesa = 1/12 de polegada = 0.2256 cm

ram também como consequência que a terra não é perfeitamente esférica mas sim uma esfera deformada. Na tentativa de reprodução dos resultados observados surgira uma das primeiras idéias de deformação na física. Posteriormente, chegou-se a conclusão que a gravidade varia em função da latitude λ e é dada pela *fórmula internacional da aceleração da gravidade* no nível do mar

$$g = 9.780318(1 + a \sin^2 \lambda - b \sin^2 2\lambda) \quad (1.1)$$

onde a e b são parâmetros relacionados com a rotação e a deformação da terra e valem respectivamente, 0.005302 e 0.0000059 [2, 4]. Sem a deformação ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$) a gravidade seria constante na superfície terrestre. Essa pode ser considerada a pré história de sistemas deformados na Física.

Próxima da era atual, um paradoxo proveniente dos experimentos de Michelson e Morley (1887) foi resolvido, aparentemente sem conhecimento desse experimento, em 1905 por Albert Einstein com a teoria da relatividade restrita. No limite quando a velocidade da luz $c \rightarrow \infty$, Einstein mostrou que a relatividade de Galileu é recuperada. Pode-se, então considerar que o grupo de Poincaré é uma deformação do grupo geométrico de simetria da mecânica Newtoniana sendo c^{-1} o parâmetro de deformação, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Após 1900, devido a impossibilidade de explicar a radiação do corpo negro, surgiu a necessidade de quantização com o postulado de Planck: *A radiação não é emitida continuamente mas sim em “quanta” proporcional a sua frequência.* Este postulado teve embasamento teórico após 1905, quando Einstein elaborou a teoria do efeito fotoelétrico. Por volta de 1925 o Príncipe Louis de Broglie, publicou o princípio da dualidade partícula-

onda dando origem ao que ele chamou de *mecânica ondulatória*. Físicos como: Hermann, Weyl, Werner Heisenberg, Erwin Schroedinger, Jordan, Dirac, Niels Bohr entre outros, transformaram o formalismo de De Broglie no que chamamos hoje de *Mecânica Quântica*.

Intuitivamente, a mecânica quântica pode ser vista como uma deformação da mecânica clássica em que o parâmetro de deformação é a constante de planck h . A mecânica clássica é recuperada no limite em que $h \rightarrow 0$. Essa passagem não é tão óbvia, uma vez que a mecânica quântica lida com operadores e a clássica com funções, ela é melhor entendida no formalismo de Weyl [5] em que todo observável clássico $u(p, q)$ (uma função no espaço de fase R^{2l}) é associado a um operador correspondente, $\Omega(u)$ no espaço de Hilbert $L^2(R^l)$ pela seguinte transformação:

$$u \rightarrow \Omega_\omega(u) = \int_{R^{2l}} \bar{u}(\zeta, \eta) \frac{\exp(i(P \cdot \zeta + Q \cdot \eta))}{h} \omega(\zeta, \eta) d^l \zeta d^l \eta \quad (1.2)$$

onde $\bar{u}$ é a transformada de Fourier inversa de u , P_α e Q_α são operadores que satisfazem as relações canônicas $[P_\alpha, Q_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, l$) e ω uma função de ponderação. Uma transformação inversa, que associa um operador quântico a uma função, foi encontrada, posteriormente, por Wigner [6].

Nos três exemplos indicados, a “deformação ” aparece como aprimoramento das teorias que existiam em virtude das discrepâncias com resultados experimentais. Em paralelo com a idéia de deformação na física, foi desenvolvido o formalismo matemático da deformação. É interessante notar que um dos primeiros exemplos matemáticos da deformação apareceu com a teoria de superfície de Riemann e foi posteriormente sistematizada pelos trabalhos importantes de Kodaira e Spencer [7] sobre deformações em estruturas analíticas complexas, e Gerstenhaber [8] que estudou deformações de anéis e álgebras. Segundo

Gerstenhaber:

DEFINIÇÃO : A deformação de uma álgebra A sobre um campo K é uma $K[[\nu]]$ -álgebra $\tilde{A}$ tal que $\tilde{A}/\nu\tilde{A} \simeq A$. Duas deformações $\tilde{A}$ e $\tilde{A}'$ são equivalentes se são isomórficas sobre $K[[\nu]]$ -álgebra e $\tilde{A}$ é trivial se esta é isomórfica a álgebra original não deformada. Uma formulação detalhada da teoria das deformações de Gerstenhaber pode ser encontrada na Ref. [9].

As álgebras deformadas tornaram-se importantes recentemente na física mediante o estudo de modelos integráveis e das equações de Yang-Baxter por Kulish e Reshetikin [10] e, independentemente, por V. G. Drinfel'd [11] e M. Jimbo [12]. Do ponto de vista matemático as álgebras deformadas são álgebras de Hopf quase-triangulares [13].

Associado ao oscilador harmônico (Ver Apêndice A.1), existe uma classe de álgebra chamada *Álgebra de Heisenberg-Weyl* definida pelas relações

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1 \\ [a, a^\dagger a] &= a \\ [a^\dagger, a^\dagger a] &= -a^\dagger \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde a e $a^\dagger$ representam os operadores de criação e aniquilação. A conexão da álgebra de Heisenberg e álgebras deformadas aparece como a necessidade da generalização da álgebra de Heisenberg para a construção da álgebra $su_q(2)$ através da aplicação das técnicas usadas por Schwinger na composição de dois osciladores [14, 15]. Emergiu dessa conexão as

álgebras dos q -osciladores definidos por exemplo como (Ver Apêndice A.2):

$$AA^\dagger - q^{1/2} A^\dagger A = q^{-N/2}, \quad (1.4)$$

$$[A, A^\dagger A] = A, \quad (1.5)$$

$$[A^\dagger, A^\dagger A] = -A^\dagger, \quad (1.6)$$

Estas álgebras têm sido utilizadas na modelagem fenomenológica de vários sistemas em muitas áreas da física. Na teoria da superfluidez foi mostrado que os fónons em ^4He podem ser estudados usando uma relação de dispersão definida pela álgebra deformada de Heisenberg [16]. Em física nuclear as álgebras q -deformadas encontraram várias aplicações, como o emparelhamento de núcleons [17] e descrição das propriedades de Kaons produzidos em colisões de íons pesados [18]. Em física estatística várias aplicações foram feitas, entre elas o estudo termoestatístico de bosons e fermions q -deformados [19, 29] e o estudo das propriedades termodinâmicas de um sólido cujos modos coletivos são descritos por uma álgebra logística q -deformada [30]. Vários autores relacionaram as álgebras deformadas com potenciais finitos, sistemas ligados e sistemas de várias partículas [31, 33].

1.1 Álgebras e Teoria Quântica de Campos

Será feito aqui uma breve descrição da importância das álgebras de Heisenberg na formulação da teoria quântica de campos. O desenvolvimento foi baseado nas referências [35, 36].

1.1.1 Quantização Canônica

A densidade Lagrangeana, $\mathcal{L}$, de um campo livre escalar $\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t)$ com massa m é dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2, \quad (1.7)$$

em unidades naturais, $\hbar = c = 1$ onde $\hbar$ é a constante de Planck, c a velocidade da luz no vácuo e ∂^μ e ∂_μ são as derivadas parciais em relação a x^μ e x_μ respectivamente. Convém ressaltar que a Lagrangeana (1.7) descreve partículas clássicas pontuais.

A equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \quad (1.8)$$

leva a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (1.9)$$

onde $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ representa o operador Laplaciano quadridimensional. O campo conjugado canonicamente é dado por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi} \quad (1.10)$$

onde $\dot{\phi}$ é a derivada temporal de ϕ .

Utilizando a equação anterior podemos escrever a densidade Hamiltoniana como sendo

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi} - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\pi(x)^2 + (\nabla \phi(x))^2 + m^2 \phi(x)^2) \quad (1.11)$$

onde ∇ é o operador gradiente e a Hamiltoniana é obtida integrando a densidade Hamiltoniana

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(x) \quad (1.12)$$

Nesse formalismo as equações de movimento são dadas por,

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi}. \quad (1.13)$$

que podem ser obtidos variando-se a Eq.(1.11) em relação ao campo

$$\delta \mathcal{H} = \delta \pi \dot{\phi} + \pi \delta \dot{\phi} + cc. - \delta \mathcal{L} = \delta \pi \dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \delta(\nabla \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi)} \quad (1.14)$$

A última equação mostra que as variáveis naturais de $\mathcal{H}$ são $\pi, \phi, \nabla \phi$. Com a ajuda da Eq.(1.14) pode-se calcular a derivada funcional de H

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \phi)} \quad (1.15)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \pi)} \quad (1.16)$$

finalmente podemos introduzir o conceito de parênteses de Poisson na teoria clássica de campos. Dado dois funcionais $F[\phi, \pi]$ e $G[\phi, \pi]$ define-se como parênteses de Poisson a relação

$$\{F, G\}_{PB} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \right) \quad (1.17)$$

Usando as equações de Hamilton (1.13) pode-se escrever a equação da evolução temporal de um funcional como:

$$\dot{F}(t) = \int d^3x \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi(x)} \dot{\phi}(x) + \frac{\delta F(t)}{\delta \pi(x)} \dot{\pi}(x) \right) \quad (1.18)$$

Usando essas definições pode-se calcular o parênteses de Poisson entre os campos $\phi(x)$ e $\pi(x)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \{\phi(x, t), \pi(x', t)\}_{PB} &= \int d^3x'' \frac{\delta \phi(x, t)}{\delta \phi(x'', t)} \frac{\delta \pi(x', t)}{\delta \pi(x'', t)} \\ &= \int d^3x'' \delta^3(x - x'') \delta^3(x' - x'') \\ &= \delta^3(x - x') \end{aligned} \quad (1.19)$$

A quantização usual é feita substituindo os campos $\phi(x, t)$ e $\pi(x, t)$ por operadores $\hat{\phi}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$ e substituindo os parênteses de Poisson (1.19) por comutadores

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t) \right] &= i\delta^3(x - x') \\ \left[\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t) \right] &= \left[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Usando o operador Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2} (\hat{\pi}(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}(x))^2 + m^2 \hat{\phi}(x)^2) \quad (1.21)$$

e as relações de comutação (1.20) podemos mostrar através de um cálculo simples que

$$\dot{\hat{\phi}}(x, t) = -i \left[\hat{\phi}(x, t), \hat{H} \right] = \hat{\pi}(x, t) \quad (1.22)$$

e

$$\dot{\hat{\pi}}(x, t) = -i \left[\hat{\pi}(x, t), \hat{H} \right] = (\nabla^2 - m^2) \hat{\phi}(x, t) \quad (1.23)$$

Podemos, então, encontrar as equações de movimento do campo quantizado,

$$\ddot{\hat{\phi}}(x, t) = (\nabla^2 - m^2) \hat{\phi}(x, t). \quad (1.24)$$

Pode-se concluir que a forma da equação anterior é igual ao caso clássico. Para simplificar a notação representaremos um operador $\hat{O}$ simplesmente por O .

A expansão de Fourier dos campos ϕ em base plana é dada por

$$\phi(x, t) = \int d^3p N_p (a_p e^{i(p \cdot x - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(p \cdot x - \omega_p t)}), \quad (1.25)$$

e a expansão do $\pi(x, t)$ pode ser calculada usando a relação $\pi = \dot{\phi}$,

$$\pi(x, t) = \int d^3p N_p (-i\omega_p) (a_p e^{i(p \cdot x - \omega_p t)} - a_p^\dagger e^{-i(p \cdot x - \omega_p t)}), \quad (1.26)$$

Finalmente as relações de comutação entre os operadores a e $a^\dagger$ podem ser obtidas,

$$[\phi(x, t), \pi(x, t)] = \int d^3p \int d^3p' N_p N_{p'} (-i\omega_{p'}) \quad (1.27)$$

$$\times ([a_p, a_{p'}] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot x')} - [a_p, a_{p'}^\dagger] e^{-i(p \cdot x + p' \cdot x')}) \quad (1.28)$$

$$+ [a_p^\dagger, a_{p'}] e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} - [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] e^{i(p \cdot x + p' \cdot x')} \quad (1.29)$$

onde $N_p = 1/\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}$. Para que essa equação seja igual a Eq. (1.20) os operadores devem satisfazer as relações seguintes:

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta^3(p - p'), \quad (1.30)$$

e ainda

$$[a_p, a_{p'}] = [a_p', a_{p'}] = 0 \quad (1.31)$$

Essas relações são iguais às do oscilador harmônico e são conhecidas como álgebra de Heisenberg. Portanto, em analogia com o oscilador harmônico podemos interpretar os coeficientes de Fourier $a^\dagger$ e a como sendo operadores de criação e aniquilação respectivamente.

É importante notar, que toda a teoria quântica de campos baseia-se na analogia com a mecânica clássica e com o oscilador harmônico. Porém, a teoria clássica de campos em que se baseia descreve uma partícula pontual. Sabemos ainda que a a teoria quântica de campos que emerge desse desenvolvimento descreve quanticamente uma partícula pontual. Uma possibilidade para alterar esse quadro acima exposto seria alterar a relação de comutação (1.30) o que levaria a um esquema de quantização diferente do convencional. Isto será analisando mais na frente no contexto de partículas compostas. Embora existam na literatura teorias clássicas de campos que descrevam partículas compostas [40], até

hoje parece não existir nenhuma tentativa bem sucedida de quantização de tais teorias. Podemos pensar simplesmente em alterar a relação de comutação dada por (1.30) e verificar se esta nova relação conduz a uma teoria quântica de campos consistente que possa descrever, fenomenologicamente, uma partícula composta.

As álgebras deformadas fornecem várias alternativas para a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação. Além disso, existem alguns trabalhos relacionando as álgebras deformadas com sistemas compostos como átomos e moléculas, pares de férmions, etc. mostrando que estas descrevem melhor esses sistemas que as álgebras de Heisenberg.

1.2 Uma Interpretação Física das Álgebras deformadas de Heisenberg

Discutiremos, nesta seção, uma possível interpretação das álgebras deformadas de Heisenberg.

A álgebra de Heisenberg é uma ferramenta importante na segunda quantização, uma vez que os seus geradores podem ser interpretados como criadores e aniquiladores de partículas pontuais. Em [60] foi mostrado que pares de férmions com momento angular zero podem ser descritos, aproximadamente, por uma álgebra de q -oscilator. No modelo de camadas do movimento coletivo nuclear, os pares de Férmions com momento angular $J = 0$ são criados pelos operadores

$$B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{m>0} (-1)^{j+m} f_{j,m}^\dagger f_{j,-m}^\dagger, \quad (1.32)$$

com $-j \leq m \leq j$, onde $f_{j,m}^\dagger$ são os operadores de criação dos férmions e $2\Omega = 2j + 1$ é a degenerescência da camada. Esses operadores de criação dos pares de férmions obedecem a álgebra dada por

$$[B, B^\dagger] = 1 - \frac{N_F}{\Omega}, \quad (1.33)$$

Onde, $N_F = \sum_{m>0} (f_{j,m}^\dagger f_{j,m} + f_{j,-m}^\dagger f_{j,-m})$, é o operador número dos férmions. O Hamiltoniano do emparelhamento é dado por $H = -G\Omega B^\dagger B$. Foi mostrado em [60] que a álgebra dos q-osciladores é uma aproximação da álgebra descrita pela eq. (1.33) fazendo $q = \exp(-1/\Omega)$ e o Hamiltoniano dos q-osciladores, $H = -G\Omega[N]_{q^2}$, é, então, uma aproximação do Hamiltoniano de emparelhamento. Por essa razão podemos assumir que os operadores de criação das álgebras de Heisenberg deformada podem ser interpretados como operadores que criam partículas compostas. Torna-se, então, razoável explorar as consequências de uma teoria de campos baseada nas álgebras deformadas de Heisenberg

Em 2001 foi apresentada, por E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, um tipo de álgebra deformada que será estudada na seção subsequente. Essa álgebra tem como caso particular a álgebra dos q-osciladores e além disso oferece uma gama maior de possibilidades como uma deformação multiparamétrica. Está álgebra foi utilizada para criar uma teoria de campos fenomenológica que poderia descrever no espaço tempo uma partícula composta. Foi demonstrado que é possível criar uma teoria de campos escalar consistente onde cálculos perturbativos com a interação $\lambda\phi^4$ e a renormalização foi estudado. Mostramos nessa tese algumas particularidades da teoria de campos baseada na álgebra não linear de Heisenberg, construímos uma eletrodinâmica quântica deformada que descreve uma partícula composta carregada e aplicamos na descrição do processo de espalhamento $P^+ + \gamma \rightarrow P' + \gamma$, onde P representa uma partícula composta e γ um fóton. Estudamos a

invariância de calibre e de Lorentz e finalmente a aplicamos na descrição do processo de fotoprodução de um par de pions, $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, onde o pion é considerado uma partícula composta. O resultado desse último cálculo foi comparado com resultados experimentais, numa região de energia onde a eletrodinâmica convencional e a QCD não descrevem bem os resultados experimentais, e achamos uma boa descrição dos dados. Por esse cálculo influenciar diretamente a produção de pares de pions na colisão periférica de ions pesados, calculamos a correção para a seção de choque prevista usando o modelo de equivalência de fótons.

1.3 Álgebra de Heisenberg Generalizada

Foi recentemente proposto [37] uma álgebra denominada *álgebra de Heisenberg Generalizada (AHG)*. Esta álgebra depende de um funcional $f(x)^2$ chamado de *função característica da álgebra*. Para uma função característica linear, $f(x) = qx + 1$, obtemos uma álgebra de Heisenberg deformada em que q é o parâmetro de deformação. O caso geral, $f(x) = \sum_i^n a_i x^i$ representa uma álgebra de Heisenberg deformada (ou não) multiparamétrica. Vários sistemas já foram estudados com auxílio da AHG como por exemplo, o poço de potencial infinito [38], o oscilador harmônico num círculo [39] e o espectro vibracional da molécula diatômica CO [33]. Em geral a AHG descreve uma classe de sistemas quânticos em que auto-estados sucessivos possuem autovalores que obedecem a relação $\epsilon_{n+1} = f(\epsilon_n)$

Esta álgebra é gerada por três operadores J_0 , A e $A^\dagger$, onde os dois últimos representam

²Ao invés de um único parâmetro, como no caso do q-oscilador.

operadores de criação e aniquilação, satisfazendo às seguintes relações:

$$J_0 A^\dagger = A^\dagger f(J_0), \quad (1.34)$$

$$A J_0 = f(J_0) A, \quad (1.35)$$

$$[A, A^\dagger] = f(J_0) - J_0, \quad (1.36)$$

onde † designa o hermitiano conjugado, $(A^\dagger)^\dagger = A$, J_0 é um operador hermitiano e $f(J_0)$ é uma função real bem comportada de J_0 , denominada função característica da álgebra.

Usando as relações anteriores é fácil ver que o operador Casimir da álgebra é dado por

$$C = A^\dagger A - J_0 = A A^\dagger - f(J_0) \quad (1.37)$$

Supondo a existência de um estado de vácuo representado por $|0\rangle$ e definido por: $A|0\rangle = 0$, $J_0|0\rangle = \alpha_0|0\rangle$, podemos estudar as possíveis representações para a álgebra. O operador $A^\dagger$ atuando sobre o estado de vácuo $|0\rangle$ produz um outro estado $|k\rangle$:

$$A^\dagger|0\rangle = |k\rangle, \quad (1.38)$$

Tomando o seu hermitiano conjugado, $\langle k| = \langle 0|A$, e fazendo o produto interno com o vácuo, $|0\rangle$, tem-se:

$$\langle k|0\rangle = \langle 0|A|0\rangle = 0. \quad (1.39)$$

Assim, o novo vetor $|k\rangle$ é ortogonal ao estado de vácuo $|0\rangle$. Representando o vetor $|k\rangle$ por $M_0|1\rangle$, onde $\langle 1|1\rangle = 1$, tem-se:

$$A^\dagger|0\rangle = M_0|1\rangle, \quad (1.40)$$

A constante M_0 pode ser calculada fazendo o produto interno do vetor $|k\rangle$ com seu hermitiano conjugado e usando a relação de comutação dada pela eq (1.34-1.36), assim

sendo:

$$\langle k|k \rangle = \langle 0|AA^\dagger|0 \rangle = \langle 0|A^\dagger A + f(J_0) - J_0|0 \rangle = M_0^2 = f(\alpha_0) - \alpha_0. \quad (1.41)$$

Aplicando a eq. (1.36) no vácuo $|0\rangle$ e usando $J_0|0\rangle = \alpha_0|0\rangle$ sabendo que $A|0\rangle = 0$ obtemos

$$A|1\rangle = M_0|0\rangle, \quad (1.42)$$

O autovalor de J_0 pode ser determinado usando a relação :

$$J_0|1 \rangle = J_0 \frac{A^\dagger}{M_0}|0 \rangle = \frac{A^\dagger(f(J_0))}{M_0}|0 \rangle = \frac{A^\dagger}{M_0}(f(\alpha_0))|0 \rangle = (f(\alpha_0))|1 \rangle. \quad (1.43)$$

e portanto,

$$J_0|1 \rangle = \alpha_1|1 \rangle \equiv (f(\alpha_0))|1 \rangle. \quad (1.44)$$

Admitindo que a ação do operador $A^\dagger$ sobre vetor $|1\rangle$ possa ser escrita seguindo o mesmo procedimento da Eq (1.40) ou seja,

$$A^\dagger|1\rangle = M_1|2\rangle; \quad (1.45)$$

podemos calcular o valor de M_1 de maneira semelhante,

$$M_1^2 \langle 2|2 \rangle = \langle 1|AA^\dagger|1 \rangle = \langle 1|A^\dagger A + f(J_0) - J_0|1 \rangle \quad (1.46)$$

e, como $\langle 2|2 \rangle = 1$, tem-se:

$$M_1^2 = f(\alpha_1) - \alpha_0. \quad (1.47)$$

Analogamente ao procedimento usado para calcular o autovalor de J_0 aplicado ao auto-estado $|1 \rangle$, podemos encontrar o autovalor do mesmo quando aplicado ao auto-estado $|2 \rangle$, fazendo:

$$J_0|2 \rangle = J_0 \frac{A^\dagger}{M_1}|1 \rangle = \frac{A^\dagger(f(J_0))}{M_1}|1 \rangle = \frac{A^\dagger}{M_1}f(\alpha_1)|2 \rangle = f(\alpha_1)|2 \rangle, \quad (1.48)$$

Assim,

$$\alpha_2 = f(\alpha_1). \quad (1.49)$$

De maneira geral pode-se chegar as seguintes relações [37]:

$$J_0 |m\rangle = f^{(m)}(\alpha_0) |m\rangle, m = 1, 2, \dots, \quad (1.50)$$

$$A^\dagger |m\rangle = M_m |m+1\rangle, \quad (1.51)$$

$$A |m\rangle = M_{m-1} |m-1\rangle, \quad (1.52)$$

onde

$$M_{m-1}^2 = f^{(m)}(\alpha_0) - \alpha_0, \quad (1.53)$$

α_0 é o menor autovalor de J_0 (autovalor do vácuo) e $f^{(m)}(\alpha_0)$ é a m -ésima iteração de α_0 através da função f . Esta álgebra descreve sistemas quânticos os quais têm os autovalores de energia dados por:

$$\alpha_m = f(\alpha_{m-1}), \quad (1.54)$$

onde α_m e α_{m-1} são dois autovalores sucessivos.

Note que se $f(x) = \lambda x(1-x)$ a equação (1.54) representa um mapa logístico

$$\alpha_{m+1} = \lambda \alpha_m (1 - \alpha_m) \quad (1.55)$$

Foi estudado em [30] um sólido baseado nessa álgebra em que os modos coletivos são descrito por um Hamiltoniano cujos autovalores obedecem a mesma dinâmica do mapa logístico (1.55); verificou-se que dependendo dos parâmetros, o sólido possui comportamento semelhante a um sistema quântico ou clássico (na região caótica).

Usando os conhecimentos provenientes do estudo de sistemas dinâmicos pode-se verificar que a Eq (1.54) pode apresentar pontos fixos determinados por $\alpha^* = f(\alpha^*)$. Se esses

pontos fixos, para os casos ($\alpha^* > \alpha_0$), forem estáveis, eles podem ser associados a energia de dissociação de um determinado sistema, como o caso de um átomo ou molécula. Outras aplicações foram feitas como por exemplo, para o funcional $f(J_0) = \left(\sqrt{J_0} + \sqrt{b}\right)^2$, onde $b = \pi^2/2mL^2$, sendo m e L a massa e o comprimento do poço, respectivamente, é obtida a AHG para o poço potencial quadrado infinito unidimensional [38], com os autovalores α_n dados por $\alpha_n + 1 = bn^2$, com $n \geq 1$. Nas duas seções seguintes, serão descritos os casos em que a uma função é linear e um polinômio de 2^{a} grau, consecutivamente.

1.3.1 Caso Linear

Para o caso linear, $f(J_0) = qJ_0 + s$, é fácil ver que

$$f^{(m)}(\alpha_0) = q^m \alpha_0 + s \frac{1 - q^m}{1 - q} \quad (1.56)$$

assim,

$$M_{m-1}^2 = f^{(m)}(\alpha_0) - \alpha_0 = [m]_q M_0^2 \quad (1.57)$$

sendo $[m]_q \equiv \frac{1-q^m}{1-q}$, conhecido como o número de Gauss de m , e $M_0^2 = \alpha_0(q-1) + s$

As equações (1.34)-(1.36) tornam-se:

$$[J_0, A^\dagger]_q = s A^\dagger; \quad (1.58)$$

$$[J_0, A]_{q^{-1}} = -\frac{s}{q} A; \quad (1.59)$$

$$[A, A^\dagger] = (q-1) J_0 + s, \quad (1.60)$$

relembrando que $[a, b]_q \equiv ab - qba$ é o q -comutador dos operadores a e b .

Portanto, as equações (1.58)-(1.60) descrevem a AHG estudada em [37] e podem ser

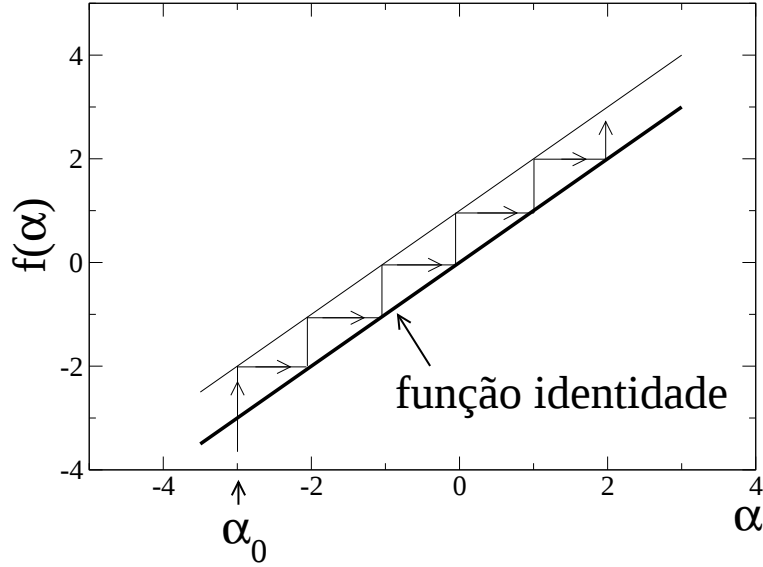


Figura 1.1: Iterações de uma função linear

mapeadas na álgebra de q -osciladores fazendo:

$$J_0 = q^N \alpha_0 + [N]_q, \quad (1.61)$$

$$\frac{A^\dagger}{M_0} = a^\dagger q^N, \quad (1.62)$$

$$\frac{A}{M_0} = q^N a. \quad (1.63)$$

Quando $q = 1$, a álgebra de Heisenberg não deformada é recuperada. O parâmetro s pode ser eliminado pela transformação: $b = A/\sqrt{s}$, $b^\dagger = A^\dagger/\sqrt{s}$ e $N = J_0/s$. O gráfico da função $f(\alpha) = q\alpha + 1$ juntamente com $f(\alpha_0) = \alpha$ está mostrada na figura 1.1. A interseção dos dois é identificada como o ponto fixo da equação de recorrência $\alpha_n = q\alpha_{n-1} + 1$. Para $0 < q < 1$ e $\alpha_0 < \frac{1}{1-q}$, as iterações são sempre crescentes e apresentam, para esses valores, um limite superior dado por:

$$\alpha^* = \frac{1}{1-q}. \quad (1.64)$$

Este comportamento é similar a sistemas com espectros limitados, como por exemplo o de moléculas diatômicas. Como já foi dito, ponto fixo α^* pode ser relacionado à energia de dissociação do sistema: $D_q \equiv \alpha^* - \alpha_0$. Esta associação credencia a AHG para o estudo fenomenológico de sistemas com espectros limitados, tais como moléculas diatômicas. Similar abordagem foi usada em trabalhos anteriores, utilizando-se q -osciladores [42, 43], os quais podem ser obtidos como caso particular via AHG. Porém, a AHG permite a escolha de outros tipos de funcionais que podem gerar as estruturas algébricas mais complexas que q -osciladores.

Vamos estudar as representações de dimensões finitas da AHG para o caso linear. Para tal, partiremos do estado de vácuo $|0\rangle$ e aplicaremos repetidamente o operador $A^\dagger$; Eventualmente, dados os parâmetros algébricos q e α_0 poderemos chegar a equação $A^\dagger|m-1\rangle = 0$, o que corresponderá a uma representação de dimensão m . Da eq.(1.57) vemos que, para uma representação de dimensão m , vale:

$$M_{m-1}^2 = [m]_q M_0^2 = 0. \quad (1.65)$$

Como $M_0^2 > 0$, as soluções $[m]_q = 0$ são dadas por $q = \exp(2\pi i k/m)$ para $k = 1, 2, \dots, m-1$ ($k = 0$ corresponde à álgebra de Heisenberg, que não estaremos considerando aqui), as quais correspondem à raiz primitiva da unidade, já que $q^l \neq 1$ para $1 \leq l < m$ com l inteiro.

Por outro lado, podemos obter soluções de dimensão infinita. Nestes casos, temos que resolver a seguinte equação

$$M_{m-1}^2 > 0 \quad \forall m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.66)$$

que, de acordo com (1.57), possui as seguintes soluções

$$q > 1, \quad \alpha_0 > \frac{1}{1-q} \quad (1.67)$$

e

$$-1 < q < 1, \quad \alpha_0 < \frac{1}{1-q} \quad (1.68)$$

que chamaremos de soluções Tipo I e Tipo II, respectivamente. Note que para as soluções do Tipo I, dadas pela eq.(1.67), os autovalores de J_0 , que podem ser computados da eq.(1.54), tendem ao infinito quando consideramos autoestados $|m\rangle$ com valores de m crescentes. Por outro lado, nas soluções do Tipo II, dadas pela eq.(1.68), os autovalores tendem para $1/(1-q)$, o ponto fixo de f , $\alpha^* = f(\alpha^*)$, quando m cresce.

A razão deste comportamento assintótico dos autovalores de J_0 pode ser vista de outra maneira; das eqs.(1.50) e (1.54) vemos que os autovalores de J_0 são dados pelas iterações funcionais de $f(\alpha) = q\alpha + 1$ a partir de α_0 . Além disso, a estabilidade dos pontos fixos de $f(\alpha)$ está diretamente relacionada com o comportamento assintótico dos autovalores de J_0 . Se o ponto fixo de $f(\alpha)$ é estável, i.e., $|(\partial f / \partial \alpha)_{\alpha=\alpha^*}| < 1$, para $-1 < q < 1$, ou instável, i.e., $|(\partial f / \partial \alpha)_{\alpha=\alpha^*}| > 1$, para $q > 1$, os autovalores de J_0 tendem para o ponto fixo $\alpha^* = 1/(1-q)$ ou para infinito respectivamente, já que são dados pela iteração de α_0 através de f .

1.3.2 Caso não-Linear

O caso não-linear mais simples da AHG, é obtido com a função quadrática do tipo $px^2 + qx + s$. Para este caso as equações (1.34-1.36) se tornam:

$$[J_0, J_+]_q = p J_+ J_0^2 + s J_+ \quad , \quad (1.69)$$

$$[J_0, J_-]_{q^{-1}} = -\frac{p}{q} J_0^2 J_- - \frac{s}{q} J_- \quad , \quad (1.70)$$

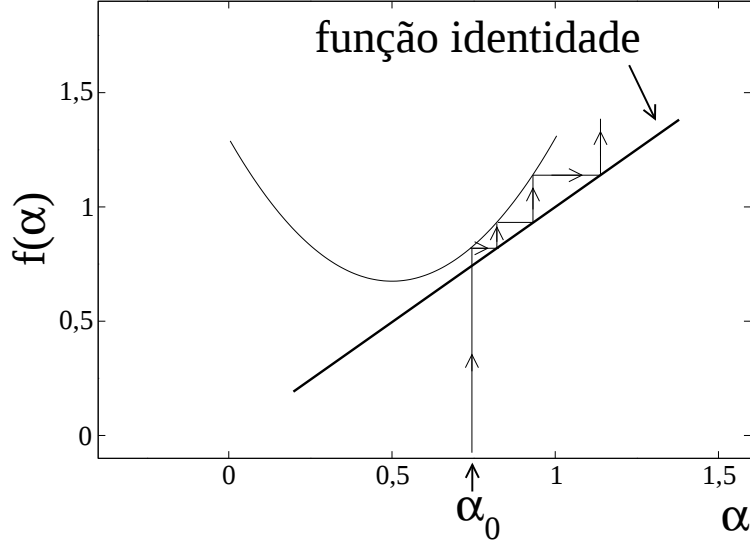
$$[J_+, J_-] = -p J_0^2 + (1 - q) J_0 - s \quad . \quad (1.71)$$

Para o caso em que $p = 0$, a álgebra deformada de Heisenberg linear é recuperada, assim como a álgebra de Heisenberg padrão para $p = 0$, $q = 1$ e $s = 1$.

Podemos, então, analisar a estabilidade dos pontos-fixos da função característica, $f(J_0)$, das equações (1.69)-(1.71). Como no caso linear vamos representar graficamente a função $y = f(x)$ juntamente com $y = x$, os pontos-fixos são os pontos onde as duas curvas se interceptam ($x = y = f(x)$). Para se determinar graficamente a evolução de um ponto inicial qualquer x_0 , diferente do ponto fixo, mediante iteração da função f , procede-se da seguinte maneira, partindo se do ponto $x = x_0$:

1. desloca-se verticalmente até o gráfico de $f(x)$;
2. desloca-se horizontalmente até o gráfico de $y = x$;
3. repete-se os passos (1) e (2) para o novo ponto x .

Este processo está ilustrado nas figuras 1.2, 1.3 e 1.4. Os pontos-fixos são as soluções de $f(x^*) = x^*$. Há três casos a serem estudados: (I) $\Delta < 0$, (II) $\Delta = 0$ e (III) $\Delta > 0$, onde $\Delta = (q-1)^2 - 4ps$. No primeiro caso não existem pontos-fixos e existem representações de

Figura 1.2: $\Delta < 0$: Não existe pontos fixos

dimensão infinita ($M_m^2 \neq 0, \forall m, m \in \mathbb{Z}^+$), que tem α_0 como menor valor da representação, somente quando $p > 0$. Assim, o caso (I), Fig. 1.2, fornece representações infinitas sendo α_0 sempre o menor valor da representação :

$$p > 0 \quad , \quad (q - 1)^2 - 4ps < 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 \in \mathfrak{R} \quad (1.72)$$

No caso (II), Fig. 1.3, quando $p > 0$ existe um ponto-fixo dado por $\alpha^* = (1 - q)/2p$. Este ponto fixo corresponde a uma representação uni-dimensional trivial da álgebra para $\alpha_0 = \alpha^*$, pois $M_0 = 0$. Além desta representação, também existe, para o caso (II), representações infinitas, com α_0 sendo o menor valor para os autovalores da representação, quando os parâmetros forem tais que:

$$p > 0 \quad , \quad (q - 1)^2 - 4ps = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 \in \mathfrak{R}, \alpha_0 \neq (1 - q)/2q. \quad (1.73)$$

No caso (III), Fig 1.4, podem existir, no espaço dos parâmetros (p, q, s, α_0) , atratores

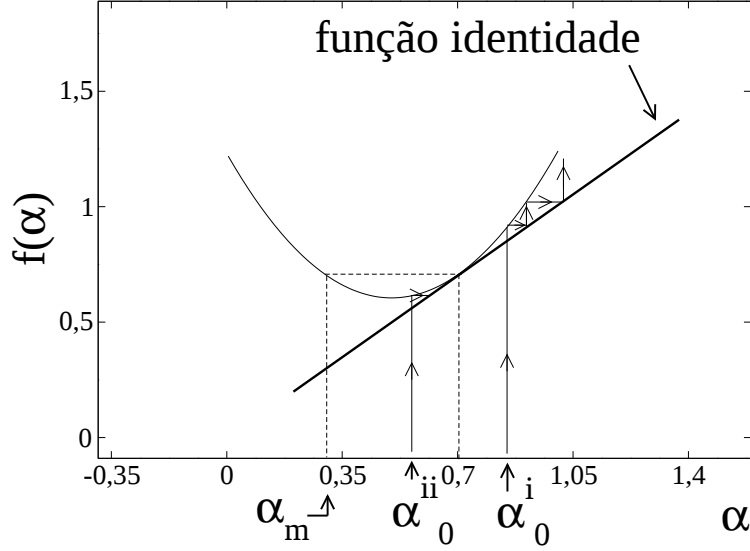


Figura 1.3: $\Delta = 0$ existe apenas um ponto fixo que corresponde a uma representação trivial

de período 1, 2, 4, $\dots$ e regiões caóticas. Assim, há regiões neste espaço associadas as representações de dimensão finita e infinita. Vamos analisar os exemplos dos atratores de período 1 e 2. A análise é feita considerando $p > 0$ o comportamento é similar para $p < 0$. Relembrando que um ponto-fixo α^* é estável se $|(f')_{\alpha=\alpha^*}| \equiv |(\frac{\partial f}{\partial \alpha})_{\alpha=\alpha^*}| < 1$ e instável se este for maior que um. Para o caso (III), os pontos fixos são

$$\alpha_{\pm}^* = \frac{1 - q \pm \sqrt{\Delta}}{2p} . \quad (1.74)$$

O ponto fixo α_+^* é sempre instável e, calculando-se f' em α_-^* , encontra-se que α_-^* é estável para valores de (p, q, s) tais que $0 < \Delta < 4$. As regiões onde os valores de $\alpha_n > \alpha_0 \forall n$ são dadas por: i) $\alpha^m < \alpha_0 < \alpha_-^*$ quando, α_n evolui para α_-^* e ii) $-\infty < \alpha_0 < \alpha^m$ ou $\alpha_+^* < \alpha_0 < \infty$, quando α_n tende ao infinito, onde α^m é dado por $\alpha^m = \frac{-1-q-\sqrt{\Delta}}{2p}$ e é obtido fazendo $f(\alpha^m) = \alpha_+^*$. A região $\alpha_-^* < \alpha_0 < \alpha_+^*$ não corresponde a uma representação onde

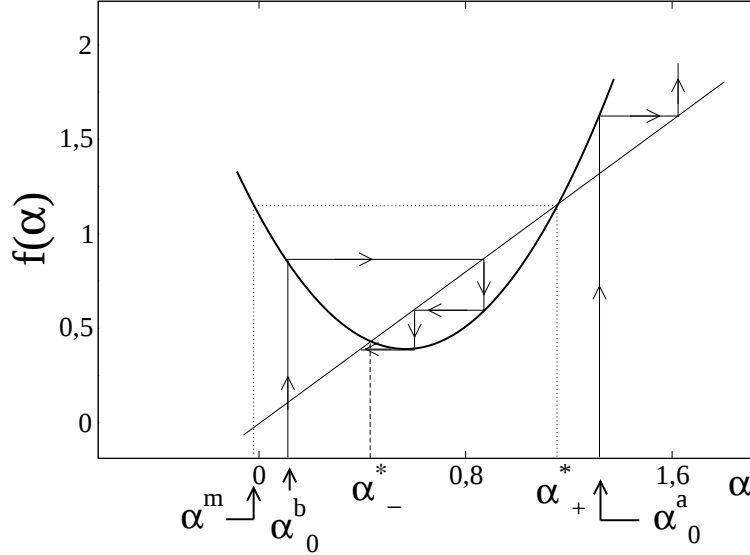


Figura 1.4: $\Delta > 0$, Existem dois pontos fixos α_+^* e α_-^*

α_0 é o menor valor da sequência $\{\alpha_m\}$ e portanto deve ser descartada. Além disso, $\Delta > 0$ e $\alpha_0 = \alpha_-^*$ ou $\alpha_0 = \alpha_+^*$, correspondem à uma representação finita unidimensional trivial.

Quando o conjunto de parâmetros (p, q, s, α_0) forem tais que a função $f(\alpha) = p\alpha^2 + q\alpha + s$ tem um atrator do período 2, podem ser obtidas representações de dimensão infinita onde o comportamento assintótico dos autovalores de J_0 tende a um atrator de período 2. Além disso, quando α_0 for o menor valor da representação, existe um conjunto de parâmetros (p, q, s) que correspondem a representação bidimensional.

Para analisar a estabilidade dos pontos fixos vamos calcular $f^{(2)}(\beta) \equiv f(f(\beta))$, para encontrar os pontos que satisfazem $\beta^* = f^{(2)}(\beta^*)$ e excluindo os casos de ciclo 1 anteriores (atratores de período 1). Estes pontos são dados por:

$$\beta_{\pm}^* = \frac{-1 - q \pm \sqrt{\Delta_1}}{2p}, \quad (1.75)$$

onde $\Delta_1 = -3 - 2q + q^2 - 4ps$. Os pontos-fixos de $f^{(2)}$, $\beta_{\pm}^*$ têm a mesma tangente,

portanto, é suficiente analisar a região de estabilidade para apenas um deles. Esta região é formada pelos valores (p, q, s) tais que $4 < \Delta < 6$. Portanto, os valores permitidos de α_0 são tais que: *iii)* $-\infty < \alpha_0 < \alpha^m$ ou $\alpha_+^* < \alpha_0 < \infty$, quando os autovalores de J_0 vão ao infinito e *iv)* $\alpha^m < \alpha_0 < \beta_-^*$ quando os autovalores de J_0 tendem a um ciclo estável de período 2. Pode-se obter ainda uma representação bidimensional para α_0 igual a

$$\alpha_0 = \beta_-^* = \frac{-1 - q - \sqrt{\Delta_1}}{2p} , \quad (1.76)$$

para $\Delta > 4$.

1.3.3 Caso Geral

O caso geral pode ser obtido para uma função característica polinomial geral $f(J_0) = \sum_{i=0}^n a_i J_0^i$. Assim as relações de comutação são dadas por:

$$[J_0, J_+]_{a_1} = a_0 J_+ + \sum_{i=2}^n a_i J_+ J_0^i , \quad (1.77)$$

$$[J_0, J_-]_{a_1^{-1}} = -\frac{a_0}{a_1} J_- - \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{a_1} J_0^i J_- , \quad (1.78)$$

$$[J_+, J_-] = -\sum_{i=2}^n a_i J_0^i + (1 - a_1) J_0 - a_0 . \quad (1.79)$$

É importante notar que α_0 deve ser sempre o menor autovalor, pois este representa o autovalor do vácuo. Nem todas as representações do caso geral satisfazem essa condição. Uma análise nesse caso é muito complexa e ainda não foi realizada.

1.4 Superposição de duas álgebras de Heisenberg Generalizadas

Considere dois operadores independente A e B , ou seja,

$$[A, B^\dagger] = [A^\dagger, B^\dagger] = [A^\dagger, B] = [A, B] = 0. \quad (1.80)$$

e que satisfazem a AHG,

$$J_0^A A^\dagger = A^\dagger f(J_0^A) \quad (1.81)$$

$$A J_0^A = f(J_0^A) A \quad (1.82)$$

$$[A, A^\dagger] = f(J_0^A) - J_0^A \quad (1.83)$$

sendo similar a relação para o operador B . A atuação no espaço de Fock da superposição dessas duas álgebras pode ser representada pelas relações³,

$$J_0^A |m_A, m_B\rangle = f^{(m_A)}(\alpha_0) |m_A, m_B\rangle, \quad (1.84)$$

$$A^\dagger |m_A, m_B\rangle = M_{m_A} |m_A + 1, m_B\rangle, \quad (1.85)$$

$$A |m_A, m_B\rangle = M_{m_A-1} |m_A - 1, m_B\rangle, \quad (1.86)$$

$$J_0^B |m_A, m_B\rangle = f^{(m_B)}(\alpha_0) |m_A, m_B\rangle, \quad (1.87)$$

$$B^\dagger |m_A, m_B\rangle = M_{m_B} |m_A, m_B + 1\rangle, \quad (1.88)$$

$$B |m_A, m_B\rangle = M_{m_B-1} |m_A, m_B - 1\rangle, \quad (1.89)$$

onde $m_{A/B} = 0, 1, 2, \dots$ e $A|0, m_B\rangle = B|m_A, 0\rangle = 0$.

Essa superposição de duas álgebras será útil na realização do campo escalar complexo discutido no capítulo 3

³Assumindo que, $J_0^A|0, 0\rangle = J_0^B|0, 0\rangle = \alpha_0|0, 0\rangle$

1.5 AHG e Espectro Molecular Vibracional

Utilizamos a álgebra que acabamos de apresentar no estudo de vibrações moleculares[33].

Nas próximas sub-seções discutiremos como a álgebra de Heisenberg generalizada pode ser associada ao espectro vibracional puro de uma molécula diatômica

1.5.1 Caso Linear (q -oscilador)

Para se estudar o espectro vibracional de moléculas diatômicas através do formalismo da AHG, vamos partir do Hamiltoniano bastante geral desenvolvido nas referências [61, 62]:

$$H = \hbar\omega(c_1 AA^\dagger + c_2 A^\dagger A + c_3), \quad (1.90)$$

onde A e $A^\dagger$ obedecem as relações (1.34-1.36) e c_1 , c_2 e c_3 são números reais. Escolhendo $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$ e usando as equações (1.50-1.52) obtém-se [61]:

$$H = \hbar\omega(f(J_0) + J_0 - 2\alpha_0). \quad (1.91)$$

Assim, para o caso linear, $f(J_0) = qJ_0 + 1$ ($q < 1$), tem-se:

$$H = \hbar\omega((q+1)J_0 + 1 - 2\alpha_0). \quad (1.92)$$

Aplicando o Hamiltoniano dado pelas equações (1.92) nos auto-estados $|\nu\rangle$ de J_0 , lembrando que $J_0|\nu\rangle = \alpha_\nu|\nu\rangle$, onde $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n) = f^{\nu+1}(\alpha_0)$ obtemos $H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle$, onde os autovalores de energia são dados por

$$E_\nu = \hbar\omega[(q+1)f^{(\nu)}(\alpha_0) + 1 - 2\alpha_0], \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.93)$$

onde $f^{(\nu)}(\alpha_0) = q^\nu \alpha_0 + \frac{q^\nu - 1}{q-1}$. Após um pouco de álgebra obtém-se:

$$E_\nu = \hbar\omega(M_q - L_q q^{\nu+1/2}), \quad (1.94)$$

com $L_q = \frac{1+q}{q^{1/2}} \left(\frac{1}{1-q} - \alpha_0 \right) = \frac{1+q}{q^{1/2}} (\alpha^* - \alpha_0)$ e $M_q = 2 \left(\frac{1}{1-q} - \alpha_0 \right) = 2(\alpha^* - \alpha_0)$, onde $\alpha^* = \frac{1}{1-q}$ (equação (1.64)).

A energia máxima ($\nu \rightarrow \infty$) para este sistema é dada por ($q < 1$):

$$E_\infty = \hbar\omega M_q = 2\hbar\omega(\alpha^* - \alpha_0).$$

A energia de dissociação ($E_\infty - E_0$) pode, então, ser escrita como:

$$D_q = \hbar\omega(1+q)(\alpha^* - \alpha_0). \quad (1.95)$$

1.5.2 Aplicação à molécula de CO

Motivado pela existência de uma grande quantidade de dados disponíveis na literatura escolhemos a molécula de CO para aplicar o formalismo que acabamos de apresentar. Além disso, o estudo espectroscópico desta molécula encontra aplicação em muitas áreas da ciência.

Vamos agora aplicar os resultados acima ao estudo do espectro da molécula do monóxido de carbono e vamos compará-lo com os dados experimentais e com o espectro obtido usando-se o potencial de Morse. Os dados experimentais foram obtidos através da base de dados HITRAN⁴ [41]. Foram escolhidas as linhas nas quais as moléculas estão no estado fundamental eletrônico. Foram selecionadas então as linhas cujos números quânticos rotacionais são zero. Assim, restam apenas as linhas espectrais que representam as primeiras 21 transições puramente vibracionais da molécula do CO. Para ajustar os parâmetros (q e α_0) aos valores experimentais, notamos que o logaritmo da diferença entre dois níveis

⁴Os dados podem ser obtidos gratuitamente, mediante cadastro e a base é atualizada constantemente.

sucessivos da equação (1.94), em função de ν , é uma linha reta com inclinação $\ln q$:

$$\Delta E_\nu = E_{\nu+1} - E_\nu = \hbar\omega L_q q^{\nu+1/2} (1 - q) \quad (1.96)$$

Tomando-se o logaritmo da diferença entre dois valores experimentais sucessivos, nós obtemos o parâmetro q calculando-se a inclinação da reta $\log q$ por regressão linear. Os parâmetros ajustados são mostrados na tabela (1.1).

Pode-se observar que o espectro da AHG linear está em bom acordo com os dados experimentais da molécula de CO (veja a tabela (1.2)), principalmente para o caso das primeiras transições experimentais. Entretanto, o valor de D calculado pela equação (1.95) é bastante diferente do valor experimental como pode ser visto na tabela (1.2). Isto significa que, embora os erros relativos do q -oscilador ($\Delta E_{nu} = \frac{E_{teor.} - E_{exp.}}{E_{exp.}}$) sejam menores do que os erros relativos obtidos pelo modelo de Morse para a maioria dos 20 primeiros níveis vibracionais experimentais, a aproximação baseada no q -oscilador não é capaz de ajustar níveis vibracionais altamente excitados.

1.5.3 Caso não-linear

Como nós acabamos de ver, o AHG linear (isto é o q -oscilador) funciona bem somente para os primeiros níveis vibracionais da molécula de CO. Para tentar ajustar os níveis de energia e obter a energia de ionização correta, foi necessário usar um funcional $f(x)$ não-linear na AHG dada pelas equações (1.34)-(1.36). Após testar vários polinômios concluímos que o funcional que melhor descreve o espectro é o de quarta ordem:

$$f(x) = p x^4 + q x + 1, \quad (1.97)$$

além de ajustar bem os dados experimentais fornece a correta energia de ionização. Devido ao baixo valor numérico de p , este funcional representa o funcional linear (q -oscilador) mais um pequeno termo de quarta ordem. É importante notar que o espectro gerado por esta AHG não-linear, não tem uma expressão analítica fechada como a equação (1.94), do caso dos q -osciladores. Neste caso o espectro pode somente ser calculado numericamente.

Por simplicidade, partiremos do Hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega(A^\dagger A + \alpha_0) = \hbar\omega J_0, \quad (1.98)$$

o qual é derivado do Hamiltoniano descrito pelas equações (1.90) com $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $c_3 = \alpha_0$. Substituindo $f(J_0)$ dado pela equação (1.97) nas relações dadas pelas equações (1.34)-(1.36) e aplicando H nos auto-estados de J_0 , obtém-se:

$$E_\nu = \hbar\omega f^{(\nu)}(\alpha_0), \quad (1.99)$$

onde $f^{(\nu)}(\alpha_0) = \alpha_\nu$ é dado por:

$$\alpha_{\nu+1} = f^{(\nu+1)}(\alpha_0) = p\alpha_\nu^4 + q\alpha_\nu + 1. \quad (1.100)$$

Foram usados os valores gerados pela equação (1.99) com $f^\nu(\alpha_0)$ dado pela equação (1.100) para ajustar os parâmetros q , p e α_0 com os dados experimentais. A energia de dissociação é dada por:

$$D_{AHG} = E_\infty - E_0 = \hbar\omega(\alpha^* - \alpha_0), \quad (1.101)$$

onde α^* é o ponto-fixo estável da equação de recorrência dada pela equação (1.100) e é encontrado pela solução da equação: $\alpha^* = p(\alpha^*)^4 + q\alpha^* + 1$. Os parâmetros ajustados são mostrados na tabela (1.1). O ajuste foi realizado fazendo-se, primeiro, a diferença entre dois níveis experimentais consecutivos $(\nu + 1)$ e (ν) e depois a diferença entre os níveis

$(\nu + 2)$ e $(\nu + 1)$. O sistema formado por estas duas diferenças é linear nos parâmetros p e q como mostra a equação abaixo:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu} = p(\alpha_{\nu}^4 - \alpha_{\nu-1}^4) + q(\alpha_{\nu} - \alpha_{\nu-1}); \quad (1.102)$$

$$\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = p(\alpha_{\nu+1}^4 - \alpha_{\nu}^4) + q(\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}), \quad (1.103)$$

uma vez que os α 's são dados pelos valores experimentais. Este procedimento foi adotado para cada um dos conjuntos de três pontos consecutivos dos níveis experimentais, onde por meio da solução do sistema de equações lineares dado pelas equações (1.102)-(1.103), foram calculados os p 's e q 's para cada conjunto e finalmente foi extraída a média sobre os conjuntos de p 's e q 's. A energia de dissociação é mostrada na tabela (1.3). Na tabela (1.2) são comparados os níveis de energia obtidos com os diferentes modelos estudados neste trabalho. Podemos observar que a AHG não-linear com o funcional dados pela equação (1.97) fornece um melhor ajuste com os dados experimentais do que o q -oscilador, o modelo de Morse e o Morse perturbado[44]. Além disso, a AHG não-linear fornece a correta energia de dissociação, mostrando também que este pode ser um bom método para se obter os níveis de energia mais elevados da molécula do CO.

Como o parâmetro p é muito pequeno (tabela (1.1)), se α_0 for também pequeno, as primeiras iterações da equação (1.100) serão dominadas pelo termo linear. O termo não-linear torna-se relevante quando o número das iterações aumenta. A diferença entre dois níveis de energia sucessivos diminui até zero na medida que a função dada pela equação (1.100) é iterada. Além do mais, o parâmetro p é negativo, o que faz com que a diferença entre dois níveis de energia sucessivos tenda a zero rapidamente. Assim, o termo não-linear faz a curva da energia tender a um valor constante mais rapidamente do que no

caso linear, mas ligeiramente mais lento do que o modelo de Morse.

modelo	parâmetros	valores
Morse	χ_e	0.0062
q -oscilador (AHG linear)	q	0.9864
	α_0	36.98
AHG não-linear	α_0	0.9235
	q	0.9872
	p	-1.43×10^{-7}
Morse perturbado (Huffaker)	σ	77.21317
	τ	83769.28
	b_4	0.036067
	b_5	0.017505
	b_6	0.014945
	b_7	0.010770
	b_8	0.008142

Tabela 1.1: valores dos parâmetros usados no modelo

Valores dos parâmetros usados em cada modelo estudado neste trabalho.

As constantes σ e τ são dadas por $\sigma = \frac{\sqrt{2\mu D}}{a\hbar}$ e $\tau = \frac{D}{\hbar\omega}$.

transição	energia(cm^{-1})				
linha	exp.	Morse	AHG-nl	AHG linear	Morse perturbado
1 $\rightarrow$ 0	2143.24	2143.30	2144.56	2152.46	2143.27
2 $\rightarrow$ 1	2116.76	2116.39	2117.10	2123.32	2116.79
3 $\rightarrow$ 2	2090.34	2089.48	2089.99	2094.57	2090.37
4 $\rightarrow$ 3	2064.00	2062.57	2063.19	2066.21	2064.02
5 $\rightarrow$ 4	2037.72	2035.66	2036.68	2038.23	2037.73
6 $\rightarrow$ 5	2011.51	2008.75	2010.44	2010.63	2011.51
7 $\rightarrow$ 6	1985.38	1981.84	1984.43	1983.41	1985.35
8 $\rightarrow$ 7	1959.32	1954.93	1958.62	1956.55	1959.26
9 $\rightarrow$ 8	1933.33	1928.01	1932.97	1930.06	1933.24
10 $\rightarrow$ 9	1907.43	1901.10	1907.43	1903.93	1907.29
11 $\rightarrow$ 10	1881.61	1874.19	1881.99	1878.15	1881.40
12 $\rightarrow$ 11	1855.85	1847.28	1856.58	1852.72	1855.59
13 $\rightarrow$ 12	1830.19	1820.37	1831.18	1827.63	1829.84
14 $\rightarrow$ 13	1804.61	1793.46	1805.74	1802.89	1804.16
15 $\rightarrow$ 14	1779.11	1766.55	1780.23	1778.48	1778.55
16 $\rightarrow$ 15	1753.69	1739.64	1754.61	1754.39	1753.00
17 $\rightarrow$ 16	1728.36	1712.73	1728.85	1730.64	1727.53
18 $\rightarrow$ 17	1703.12	1685.82	1702.90	1707.21	1702.13
19 $\rightarrow$ 18	1677.96	1658.91	1676.75	1684.09	1676.79
20 $\rightarrow$ 19	1652.88	1632.00	1650.37	1661.29	1651.53

Tabela 1.2: Espectro vibracional da molécula de CO. Comparação dos dados experimentais com os modelos de Morse, q -oscilador, Morse perturbados e AHG. Dados experimentais da base de dados HITRAN.

modelo	energia dissociação (cm^{-1})
Experimental	89591.35
Morse	86426.44
q -oscilador	158970.48
Morse perturbado (ref. [44])	94476.01
Morse perturbado (ref. [45])	95394.23
AHG não-linear	89987.76

Tabela 1.3: Valores das energias de dissociação calculadas para cada modelo.

Capítulo 2

Uma Teoria Quântica de Campos Generalizada

Nesse capítulo discutiremos uma teoria de campos baseada na AHG apresentada no capítulo 1. De acordo com os argumentos já apresentados, uma teoria quântica de campos (TQC) baseada na AHG poderia descrever, fenomenologicamente, partículas compostas.

2.1 Realização Física da AHG

O primeiro passo é a realização física dos operadores A , $A^\dagger$ e J_0 como é feito para o caso do oscilador harmônico e para o caso do poço de potencial quadrado em [39]. Para isso vamos rever brevemente o formalismo do cálculo integral e diferencial numa rede unidimensional desenvolvido em [46] e [47].

Considere uma rede unidimensional no espaço dos momentos onde os momentos podem

assumir apenas valores discretos, $p_0, p_0 + a, p_0 + 2a, p_0 + 3a$ etc, sendo $a > 0$. O cálculo diferencial não comutativo é baseado na expressão

$$[p, dp] = dp a, \quad (2.1)$$

o que implica que,

$$f(p) dg(p) = dg(p) f(p + a), \quad (2.2)$$

Para qualquer função f e g .

Introduzindo as derivadas parciais

$$d f(p) = dp (\partial_p f)(p) = (\bar{\partial}_p f)(p) dp, \quad (2.3)$$

onde as derivadas discretas esquerda e direita, $(\partial_p f)(p)$ e $(\bar{\partial}_p f)(p)$ respectivamente, são dadas pela expressão,

$$(\partial_p f)(p) = \frac{1}{a} [f(p + a) - f(p)], \quad (2.4)$$

$$(\bar{\partial}_p f)(p) = \frac{1}{a} [f(p) - f(p - a)]. \quad (2.5)$$

A regra de Leibniz, para a derivada discreta esquerda, pode ser escrita como,

$$(\partial_p fg)(p) = (\partial_p f)(p)g(p) + f(p + a)(\partial_p g)(p). \quad (2.6)$$

Para o caso da derivada discreta direita a fórmula é similar .

Vamos introduzir os operadores deslocamento do momento,

$$T = 1 + a \partial_p \quad (2.7)$$

$$\bar{T} = 1 - a \bar{\partial}_p, \quad (2.8)$$

esses operadores têm a função de aumentar o momento de p para $p + a$ ou diminuir de p para $p - a$,

$$(Tf)(p) = f(p + a) \quad (2.9)$$

$$(\bar{T}f)(p) = f(p - a) \quad (2.10)$$

e satisfazem

$$T\bar{T} = \bar{T}T = \hat{1}, \quad (2.11)$$

onde $\hat{1}$ é a identidade.

Introduzindo, agora, o operador momento P [38] tal que

$$(Pf)(p) = pf(p), \quad (2.12)$$

temos finalmente,

$$TP = (P + a)T \quad (2.13)$$

$$\bar{T}P = (P - a)\bar{T}. \quad (2.14)$$

Podemos também definir a integração nesse formalismo. Foi mostrado na referência[46] que a propriedade da integral indefinida,

$$\int df = f + \text{função periódica} \quad , \quad (2.15)$$

é suficiente para calcular a integral definida numa rede arbitrária. Pode-se demonstrar que, para uma função arbitrária f

$$\int d\bar{p} f(\bar{p}) = \begin{cases} a \sum_{k=1}^{[p/a]} f(p - ka), & \text{se } p \geq a \\ 0, & \text{se } 0 \leq p < a \\ -a \sum_{k=0}^{[p/a]-1} f(p + ka), & \text{se } p < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

onde $[p/a]$ é por definição o maior inteiro $\leq p/a$.

A integração definida de uma função f de p_d a p_u ($p_u = p_d + Ma$, onde M é um inteiro positivo) é portanto,

$$\int_{p_d}^{p_u} dp f(p) = a \sum_{k=0}^M f(p_d + ka). \quad (2.17)$$

Usando a eq. (2.17), o produto interno de duas funções complexas f e g pode ser definida como,

$$\langle f, g \rangle = \int_{p_d}^{p_u} dp f(p)^* g(p), \quad (2.18)$$

onde $*$ indica o complexo conjugado da função f . O produto interno, $\langle f, f \rangle$, é sempre positivo ou zero se f é identicamente nula.

O conjunto de classes de equivalência¹ de funções normalizáveis f (onde $\langle f, f \rangle$ é finito) é um espaço de Hilbert.

Pode ser mostrado que [46]

$$\langle f, Tg \rangle = \langle \bar{T}f, g \rangle, \quad (2.19)$$

tal que

$$\bar{T} = T^\dagger, \quad (2.20)$$

onde $T^\dagger$ é o adjunto conjugado do operador T . Eqs. (2.11) e (2.20) mostram que T é um operador unitário. Além disso, é fácil ver que P , definido na eq. (2.12), é um operador Hermitiano e a partir de (2.20) tem-se

$$(i\partial_p)^\dagger = i\bar{\partial}_p. \quad (2.21)$$

¹Duas funções estão na mesma classe de equivalência se os seus valores coincidem em todos os pontos de uma rede.

Voltando a realização da álgebra generalizada de Heisenberg em termos de operadores físicos, podemos, agora, associar a álgebra generalizada com a rede unidimensional que acabamos de apresentar. Por hipótese, vamos escrever o operador J_0 , da álgebra generalizada, em função de P ,

$$J_0 = f(P/a, \alpha_0) \quad (2.22)$$

Onde P é dado pela eq.(2.12) e a aplicação deste no auto-estado $|m\rangle$ resulta em

$$P |m\rangle = m a |m\rangle, m = 0, 1, \dots, \quad (2.23)$$

onde podemos, ainda, definir o operador número, $N = P/a$ sendo $N|m\rangle = m|m\rangle$. Além disso,

$$\bar{T} |m\rangle = |m+1\rangle, m = 0, 1, \dots, \quad (2.24)$$

onde $\bar{T}$ e $T = \bar{T}^\dagger$ estão definidos nas eqs. (2.7-2.11).

Com a definição de J_0 dada pela eq. (2.22) podemos ver que $\alpha_n \equiv f^{(n)}(\alpha_0)$ é autovalor do operador no estado $|n\rangle$. Podemos, então definir em função do operador P , os operadores A e $A^\dagger$, usando as relações (1.50-1.52), como sendo

$$A^\dagger = S(P) \bar{T}, \quad (2.25)$$

$$A = T S(P), \quad (2.26)$$

onde,

$$S(P)^2 = J_0 - \alpha_0, \quad (2.27)$$

sendo α_0 o menor autovalor do operador J_0 .

As relações (2.13-2.14) podem ainda ser escritas como

$$TN = (N+1)T \quad (2.28)$$

$$\bar{T}N = (N-1)\bar{T} . \quad (2.29)$$

É fácil demonstrar que os operadores, A , $A^\dagger$ e J_0 definidos nas eqs. (2.22, 2.25-2.27), satisfazem a álgebra generalizada de Heisenberg descrita no capítulo 1 pelas relações (1.50-1.52). Fazendo o uso dessas relações, considere inicialmente a relação entre J_0 e $A^\dagger$,

$$J_0 A^\dagger = \alpha_N S(P) \bar{T} = A^\dagger \alpha_{N+1} , \quad (2.30)$$

onde a ação do operador α_N no estado $|n\rangle$ é definido como:

$$\alpha_N |n\rangle \equiv \alpha_n |n\rangle = f^{(n)}(\alpha_0) |n\rangle \quad (2.31)$$

Na primeira igualdade da equação (2.30) usamos a realização e na segunda usamos a eq. (2.29). Como da (1.54) podemos deduzir que $\alpha_{N+1} = f(\alpha_N) = f(J_0)$ então obtemos,

$$J_0 A^\dagger = A^\dagger f(J_0) , \quad (2.32)$$

ou seja, eq. (1.50) para um $f(x)$ arbitrária. Eq. (1.51) é o conjugado Hermitiano da eq. (1.50), então de maneira similar podemos provar a partir da eq. (2.26) e (2.22) esta relação. Usando agora

$$A^\dagger A = S(P)^2 = J_0 - \alpha_0 , \quad (2.33)$$

$$A A^\dagger = T S(P)^2 \bar{T} = f(J_0) - \alpha_0 , \quad (2.34)$$

para uma função arbitrária $f(x)$, que tem as propriedades dadas pelas eq.(1.54), obtemos a eq. (1.52) e a prova está completa

É importante notar que a realização descrita pelas equações (2.25, 2.26 e 2.22), é qualitativamente diferente da realização do oscilador harmônico convencional.

2.2 Teoria Quântica de Campos Escalar Generalizada

Como a teoria quântica de campos generalizada que vamos descrever tem como base a álgebra generalizada de Heisenberg discutida no Capítulo anterior, podemos esperar que tenha, como herança, todas as propriedades dessa álgebra. Portanto, a energia de n partículas idênticas não é igual a n vezes o valor da energia de uma única partícula, como no caso da teoria de campos comum. Essa não aditividade da energia nos permite considerar que as álgebras generalizadas podem ser interpretadas como descrevendo fenomenologicamente partículas compostas. Além disso, a vantagem dessa construção reside no fato da possibilidade de podermos fazer contato, a qualquer momento, com o caso padrão desde que os parâmetros da álgebra generalizada tendam à unidade ou anulem-se.

No espaço de momento, apropriado para a realização da álgebra generalizada de Heisenberg, além do operador P pode-se definir, também, dois operadores auto-adjuntos

$$\chi \equiv -i(S(P)(1 - a\bar{\partial}_p) - (1 + a\partial_p)S(P)) = -i(A - A^\dagger), \quad (2.35)$$

$$Q \equiv S(P)(1 - a\bar{\partial}_p) + (1 + a\partial_p)S(P) = A + A^\dagger, \quad (2.36)$$

onde ∂_p e $\bar{\partial}_p$ são as derivadas esquerda e direita definidas nas eqs. (2.4, 2.5). Podemos demonstrar que os operadores P , χ e Q satisfazem a seguinte álgebra :

$$[\chi, P] = iaQ, \quad (2.37)$$

$$[P, Q] = ia\chi, \quad (2.38)$$

$$[\chi, Q] = 2iS(P)(S(P+a) - S(P-a)). \quad (2.39)$$

Com o objetivo de construir uma teoria quântica de campos baseada nesses operadores

vamos introduzir uma rede discreta tridimensional no $\vec{k}$ -espaço,

$$k_i = \frac{2\pi l_i}{L_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.40)$$

com $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sendo L_i o comprimento dos lados de uma caixa retangular de volume Ω . Introduzimos para cada ponto desse $\vec{k}$ -espaço uma cópia independente do oscilador harmônico q -generalizada construído no último capítulo de maneira que os operadores relativos a pontos diferente comutem entre si. Introduzimos também uma cópia independente da rede unidimensional de momentos descrita na seção anterior para cada ponto da $\vec{k}$ -rede tal que $P_{\vec{k}}^\dagger = P_{\vec{k}}$, $T_{\vec{k}}$, $\bar{T}_{\vec{k}}$ e $S_{\vec{k}}$ sejam os operadores definidos pelas eqs. (2.7-2.8 e 2.27), através da substituição $P \rightarrow P_{\vec{k}}$.

Portanto temos que,

$$A_{\vec{k}}^\dagger = S_{\vec{k}} \bar{T}_{\vec{k}}, \quad (2.41)$$

$$A_{\vec{k}} = T_{\vec{k}} S_{\vec{k}}, \quad (2.42)$$

$$J_0(\vec{k}) = q^{2P_{\vec{k}}/a} \alpha_0 + [P_{\vec{k}}/a]_{q^2}, \quad (2.43)$$

satisfazem as equações eqs. (1.77-1.79) para cada ponto da $\vec{k}$ -rede e os operadores $A_{\vec{k}}^\dagger$, $A_{\vec{k}}$ e $J_0(\vec{k})$ comutam entre si para diferentes pontos da rede.

Agora, podemos definir o operador χ e Q para cada ponto dessa rede tridimensional como

$$\chi_{\vec{k}} \equiv -i(T_{-\vec{k}} S_{-\vec{k}} - S_{\vec{k}} \bar{T}_{\vec{k}}) = -i(A_{-\vec{k}} - A_{\vec{k}}^\dagger), \quad (2.44)$$

$$Q_{\vec{k}} \equiv T_{\vec{k}} S_{\vec{k}} + S_{-\vec{k}} \bar{T}_{-\vec{k}} = A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger, \quad (2.45)$$

tal que $\chi_{\vec{k}}^\dagger = \chi_{-\vec{k}}$ e $Q_{\vec{k}}^\dagger = Q_{-\vec{k}}$, como no caso da construção do campo de spin-0 convencional[35].

Por intermédio do operador $\chi_{\vec{k}}$ e do $Q_{\vec{k}}$ podemos definir dois campos $\phi(\vec{r}, t)$ e $\Pi(\vec{r}, t)$ como

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega\omega(\vec{k})}} \left(A_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \quad (2.46)$$

$$\Pi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{i\omega(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega\omega(\vec{k})}} \left(A_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \quad (2.47)$$

onde $\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, m são parâmetros reais e Ω é o volume de uma caixa retangular.

Existe, ainda, a possibilidade de definir um outro campo similar ao momento como

$$\wp(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\Omega}} S_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.48)$$

Com um pouco de cálculo podemos mostrar que o Hamiltoniano

$$H = \int d^3r \left(\Pi(\vec{r}, t)^2 + u |\wp(\vec{r}, t)|^2 + \phi(\vec{r}, t)(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(\vec{r}, t) \right), \quad (2.49)$$

onde u é um parâmetro arbitrário, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \left(A_{\vec{k}}^{\dagger} A_{\vec{k}} + A_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger} + u S_{\vec{k}} (N)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \left(S_{\vec{k}} (N+1)^2 + (1+u) S_{\vec{k}} (N)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde

$$S_{\vec{k}}(N)^2 = q^{2N_{\vec{k}}} \alpha_0 + [N_{\vec{k}}]_{q^2} - \alpha_0. \quad (2.51)$$

Para que a energia do vácuo seja zero podemos reescrever a equação acima como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \left(S_{\vec{k}} (N+1)^2 + (1+u) S_{\vec{k}} (N)^2 - (q^2 - 1)\alpha_0 - 1 \right). \quad (2.52)$$

Note que no limite em que $q \rightarrow 1$ ($\alpha_0 \rightarrow 0$), o Hamiltoniano acima é proporcional ao operador número. Além disso, como pode ser comprovado pelas eqs.(2.51) e (2.52) a

energia desses sistemas não é aditiva. A não aditividade é associada a idéia de uma partícula composta, como o caso de dois férmions correlacionados[42]

Os auto-estados de H no espaço de Hilbert são

$$|0\rangle, A_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle, A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}'}^\dagger|0\rangle \text{ for } \vec{k} \neq \vec{k}', (A_{\vec{k}}^\dagger)^2|0\rangle, \dots, \quad (2.53)$$

onde o estado $|0\rangle$ satisfaz a relação usual $A_{\vec{k}}|0\rangle = 0$ (veja eq. (1.39)) para todo $\vec{k}$ e $A_{\vec{k}}$, $A_{\vec{k}}^\dagger$ que satisfaz a álgebra q -deformada de Heisenberg eqs. (1.77-1.79).

A evolução temporal dos campos podem ser estudadas através das equações de Heisenberg para $A_{\vec{k}}^\dagger$, $A_{\vec{k}}$ e $S_{\vec{k}}$.

2.2.1 Caso Linear

Para o estudo da evolução temporal dos operadores, $A_{\vec{k}}^\dagger$, $A_{\vec{k}}$ e $S_{\vec{k}}$, vamos inicialmente considerar o caso em que a função característica da álgebra é linear do tipo $f(x) = qx + 1$, considerando $0 < q < 1$. Podemos, então, definir

$$E(N_{\vec{k}}) \equiv J_0(\vec{k}) = q^{2N_{\vec{k}}} \alpha_0 + [N_{\vec{k}}]_{q^2} \quad (2.54)$$

e

$$h(N_{\vec{k}}) \equiv \frac{1}{2}(1 + u + r) (E(N_{\vec{k}} + 1) - E(N_{\vec{k}})) . \quad (2.55)$$

Usando as eqs. (2.50 ou 2.52) e (1.58-1.60) obtemos

$$[H, A_{\vec{k}}^\dagger] = \omega(\vec{k}) A_{\vec{k}}^\dagger h(N_{\vec{k}}) . \quad (2.56)$$

Resolvendo essas equações , para o caso q -deformado obtemos

$$A_{\vec{k}}^\dagger(t) = A_{\vec{k}}^\dagger(0) e^{i\omega(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) t} . \quad (2.57)$$

Note que para $q \rightarrow 1$ e $u = 0$ temos $h(N_{\vec{k}}) \rightarrow 1$ e eq. (2.57) fornece o resultado correto para o caso não deformado.

Tomando o Hermitiano conjugado da eq. (2.57) temos

$$A_{\vec{k}}(t) = e^{-i \omega(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) t} A_{\vec{k}}(0) , \quad (2.58)$$

que também no limite o caso não deformado é recuperado. Além disso, é fácil ver que os operadores $P_{\vec{k}}$ e $S_{\vec{k}}$ são independentes do tempo. O termo extra, $h(N_{\vec{k}})$, que aparece na exponencial depende do operador número, sendo essa a diferença principal em relação ao caso convencional. A expansão de Fourier eq. (2.46) pode ser escrita, com ajuda das duas últimas equações, como

$$\phi(\vec{r}, t) = \alpha(\vec{r}, t) + \alpha(\vec{r}, t)^\dagger , \quad (2.59)$$

onde

$$\alpha(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega\omega(\vec{k})}} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i q^{-2} \omega(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) t} , \quad (2.60)$$

$A_{\vec{k}}$ na eq. (2.60) é independente do tempo e $\alpha(\vec{r}, t)^\dagger$ é o conjugado Hermitiano de $\alpha(\vec{r}, t)$.

A contração de Dyson-Wick, $D_F^N(x_1, x_2)$, definida como no caso convencional, como sendo a contração entre ² $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$, pode ser calculada usando as eqs. (1.58-1.60 e 2.59-2.60) sendo

$$D_F^N(x_1, x_2) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{12}}}{2\Omega\omega(\vec{k})} \left(S_{\vec{k}}(N+1)^2 e^{\mp i\omega(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) \Delta t_{12}} - S_{\vec{k}}(N)^2 e^{\mp i\omega(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}-1) \Delta t_{12}} \right) , \quad (2.61)$$

onde $\Delta t_{12} = t_1 - t_2$, $\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, o sinal é negativo no expoente quando $t_1 > t_2$ e positivo quando $t_2 > t_1$. Note que quando $q \rightarrow 1$, $h(N_{\vec{k}}) \rightarrow 1$ e $S_{\vec{k}}(N+1)^2 - S_{\vec{k}}(N)^2 \rightarrow 1$,

² $x_i \equiv (\vec{r}_i, t_i)$

o caso padrão é recuperado. De maneira similar ao caso convencional podemos obter a representação na forma integral

$$D_F^N(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{S_{\vec{k}}(N+1)^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i k_0 h(N_{\vec{k}})t} d^4k}{k^2 + m^2} - (N \rightarrow N-1), \quad (2.62)$$

onde a segunda parte do membro direito da equação pode ser obtida do primeiro simplesmente fazendo a substituição $N \rightarrow N-1$. No limite, $q \rightarrow 1$, cai na representação integral do propagador de Feynman. Importante notar que nesse caso o propagador não é mais um número complexo como no convencional pois depende do operador N

Nessa quantização, admitindo a expansão de Fourier (2.46)-(2.47) e a equação de Heisenberg é fácil demonstrar que

$$\Pi(\vec{r}, t) = \partial_0 \phi(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t), \quad (2.63)$$

onde ∂_0 é a derivada temporal e

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{i w(\vec{k}) M_1^k}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (A_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + A_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (2.64)$$

sendo,

$$M_1^k = (1 - h(N_k)) e^{i w(\vec{k}) h(N_k) t}. \quad (2.65)$$

$$(2.66)$$

A eq. (2.63) é diferente do seu análogo clássico $\pi = \dot{\phi}$. Fazendo-se a passagem para a descrição lagrangeana, como ficará mais claro no próximo capítulo, podemos verificar através da teoria de perturbação que o termo adicional ρ não dá nenhuma contribuição adicional.

2.2.2 Caso Quadrático

Vamos, agora, considerar o caso de uma teoria de campos baseada na AHG com uma função característica quadrática.

Como podemos ver na Eq (1.50), α_0 é o autovalor do vácuo do operador J_0 . Mostraremos adiante que o Hamiltoniano livre é proporcional ao operador J_0 o que implica que a energia mínima do sistema, a energia do vácuo, seja proporcional a α_0 . Isso significa que α_0 deve ser o menor autovalor do operador J_0 . Porém, como mostramos na Seção 1.3.2 nem sempre o α_0 é o menor autovalor. Por essa razão, algumas restrições devem ser impostas aos parâmetros (p,q) para que α_0 seja o menor autovalor do espectro da álgebra. Além disso, como mostra a Fig 2.1, dependendo dos parâmetros da álgebra, p, q e α_0 podemos obter vários espectros diferentes. É conveniente nos restringirmos a um tipo de espectro em que o α_0 é o menor autovalor e a medida que iteramos a função os autovalores crescem monotonamente aproximando-se de um ponto fixo. O objetivo é representar fenomenologicamente um sistema composto que dissocia após sucessivas excitações

Como já explicamos no capítulo 1, para o estudo dos pontos fixos considerando uma função quadrática, $p\alpha_0^2 + q\alpha_0 + 1$, temos três casos para analisar (veja 1.3.2): (a) $\Delta > 0$ (b) $\Delta = 0$ e (c) $\Delta < 0$, para $\Delta = (q - 1)^2 - 4p$ (veja Fig. 2.2). O primeiro caso (a) é menos trivial nesse caso podemos ter atratores de período 1,2,4... e até região caótica. o segundo (b) tem um único ponto fixo dado por $\alpha^* = (1 - q)/2p$ que corresponde a uma representação trivial unidimensional da álgebra para $\alpha_0 = \alpha^*$ uma vez que $M_0 = (q - 1)\alpha_0 + 1 = 0$ (Eq.(1.57)). O último caso (c) não tem nenhum ponto fixo e portanto deve ser descartado. No entanto, vamos considerar somente valores dos parâmetros que

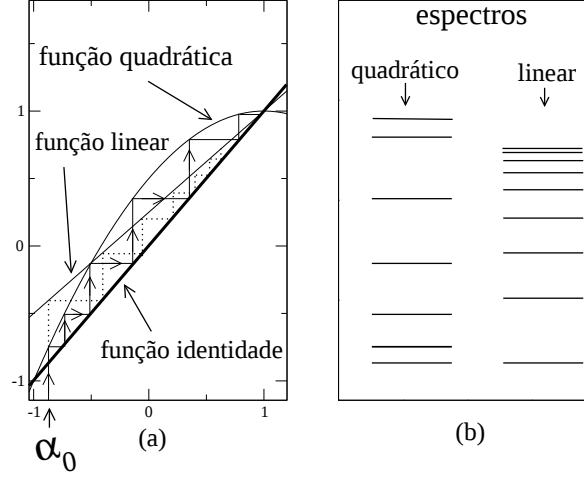


Figura 2.1: Comparação entre o espectro do caso linear e quadrático. Em (a) representamos as interações para os dois casos e em (b) esboçamos o espectro de energia correspondente.

resultem em um espectro que satisfaça as condições e características citadas acima ou seja α_0 é o menor autovalor e a medida que iteramos a função os autovalores crescem monotonamente aproximando-se de um ponto fixo. Vamos então analisar para que valores dos parâmetros da álgebra temos um espectro de autovalores que possa ser associado a uma partícula composta. Assumindo o caso (a) para $p < 0$ temos dois pontos fixos

$$\alpha_{\pm}^* = \frac{1 - q \pm \sqrt{\Delta}}{2p}. \quad (2.67)$$

Como mostramos no capítulo 1, o ponto cuja ordenada é menor é instável e o de maior ordenada é estável. Portanto, devemos tomar $p < 0$ uma vez que espectro deve ter um limite superior. Para garantir a estabilidade do ponto fixo os parâmetros da álgebra devem satisfazer a seguinte condição

$$0 < \Delta < 1. \quad (2.68)$$

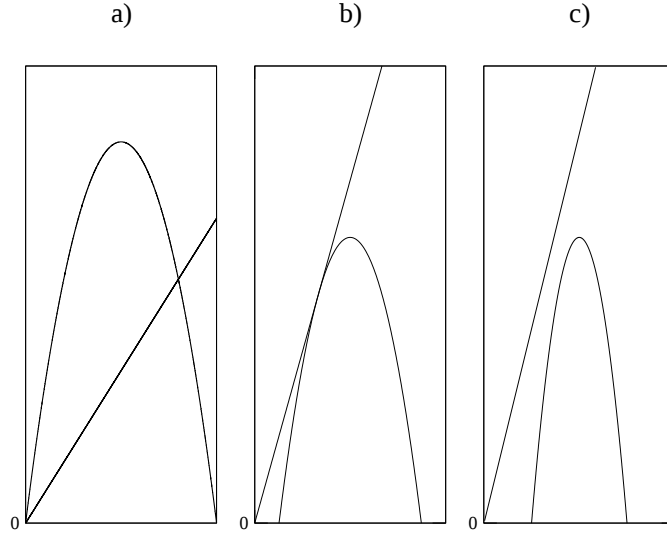


Figura 2.2: Análise gráfica do caso quadrático (a) $\Delta > 0$ (b) $\Delta = 0$ e (c) $\Delta < 0$

A condição (2.68) é satisfeita para certos valores dos parâmetros escolhidos dentro do intervalo

$$1 - 2\sqrt{|p|} < q < 1 + 2\sqrt{|p|} \quad (2.69)$$

A Fig 2.1 mostra uma comparação entre o espectro do caso linear e quadrático. Podemos ver que no caso linear o espaçamento entre os níveis tem uma relação simples, ou seja quando n cresce o espaçamento entre os níveis sempre decresce o que pode tornar o caso linear menos propício para ajustar dados experimentais como o espectro de uma molécula diatômica[33].

Para este caso pode-se demonstrar que o Hamiltoniano livre, com ajuda das relações de comutação , pode ser dado por,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \left[pf(N, \alpha_0)^2 + (q + 1)f(N, \alpha_0) \right]. \quad (2.70)$$

onde $f(N, \alpha_0)$ está definido na eq. (2.22). No limite em que $p \rightarrow 0$ e $q \rightarrow 1$, o Hamiltoniano é proporcional ao operador número.

A evolução temporal, nesse caso é dada por

$$\left[H, A_k^\dagger \right] = w(\vec{k}) A_k^\dagger h(N_{\vec{k}}) \quad (2.71)$$

onde,

$$h(N_{\vec{k}}) = \frac{1}{2} \Delta E \left[p(S_{\vec{k}}^2(N+1) + S_{\vec{k}}^2(N)) + 2p\alpha_0 + 1 + q \right], \quad (2.72)$$

com $\Delta E = S_{\vec{k}}^2(N+1) - S_{\vec{k}}^2(N)$. Para o uso futuro vamos calcular o valor esperado no vácuo do operador (2.72)

$$h(N_{\vec{k}})|0\rangle = \frac{1}{2} M_0^2 (pM_0^2 + 2p\alpha_0 + q + 1)|0\rangle \quad (2.73)$$

onde M_0 é dado pela relação

$$M_0^2 = p\alpha_0^2 + q\alpha_0 + 1 \quad (2.74)$$

Para o caso de uma função arbitrária, $f(\alpha_0) = \sum_{j=0}^n a_j \alpha_0^j$, temos

$$h(N_{\vec{k}}) = \frac{1}{2} \Delta E \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \left[a_j (S_{\vec{k}}^2(N) + \alpha_0)^{j-1} \chi(N_{\vec{k}})^i \right] + (u+1) \quad (2.75)$$

sendo

$$\chi(N) = \frac{S_{\vec{k}}^2(N+1) + \alpha_0}{S_{\vec{k}}^2(N) + \alpha_0}. \quad (2.76)$$

Resolvendo a equação (2.71), nós temos

$$A_k^\dagger = A_k^\dagger(0) e^{i w(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) t} \quad (2.77)$$

Podemos então como no caso linear escrever a expansão de Fourier como sendo $\phi(\vec{r}, t) = \alpha(\vec{r}, t) + \alpha^\dagger(\vec{r}, t)$,³ onde

$$\alpha^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} A_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i w(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}) t}. \quad (2.78)$$

A contração de Dyson-Wick, $D_F^N(x_1, x_2)$, entre $(x_i \equiv (r_i, t_i))$ $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ pode ser calculada usando (3.22). Na representação integral é dada como

$$\begin{aligned} D_F^N(x) &= \frac{-iM_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{[N+1]_G e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i k_0 h(N_{\vec{k}}) t}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \\ &+ (N \rightarrow N-1), \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde $[N+1]_G$ representa o número geral de Gauss e é definido como

$$[N+1]_G = \frac{f(N, \alpha_0) - \alpha_0}{f(\alpha_0) - \alpha_0} \quad (2.80)$$

2.3 Teoria $\lambda\phi^4$ Generalizada: Cálculo Perturbativo

Podemos agora analisar, perturbativamente, um processo de espalhamento determinado por um Hamiltoniano de interação. Discutiremos nessa seção os cálculos para o caso de uma teoria de campos com base na álgebra generalizada de Heisenberg com uma função característica linear e posteriormente o caso não linear evidenciando a diferença entre eles.

2.3.1 Caso Linear

Vamos analisar o processo de espalhamento entre duas partículas compostas, $1+2 \rightarrow 1'+2'$ com estado inicial,

$$|1, 2\rangle \equiv \frac{A_{p_1}^\dagger A_{p_2}^\dagger}{M_0^2} |0\rangle, \quad (2.81)$$

³Para simplificar $A_{\vec{k}}^\dagger(t=0) \equiv A_{\vec{k}}^\dagger$

e o final

$$|1', 2'\rangle \equiv \frac{A_{p_1}^\dagger A_{p_2}^\dagger}{M_0^2} |0\rangle, \quad (2.82)$$

onde A_{p_i} e $A_{p_i}^\dagger$ satisfazem a relações da álgebra generalizada (1.58-1.60) e no contexto esses operadores aniquilam e criam partículas compostas e $M_0^2 = (q-1)\alpha_0 + 1$. Supondo que esse processo é descrito pelo Hamiltoniano da partícula livre (2.49) com a interação $\lambda_0 \int : \phi(\vec{r}, t)^4 : d^3r$, o primeiro termo da expansão da série perturbativa da Matriz-S é dado por

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle = -i\lambda_0 \int d^4x \langle 1', 2' | : \phi^4(x) : | 1, 2 \rangle. \quad (2.83)$$

Usando a eq. (2.59) em eq. (4.2) e colocando na forma normal e levando em consideração que o exponencial depende do operador número que não comuta com os operadores dentro do elemento de matriz obtemos

$$\begin{aligned} \langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle = \frac{-6i\lambda_0}{4\Omega^2} \int d^4x \sum_{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_4} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}_1} \dots \omega_{\vec{k}_4}}} \langle 0 | A_{\vec{p}_1} A_{\vec{p}_2} A_{\vec{k}_1}^\dagger A_{\vec{k}_2}^\dagger A_{\vec{k}_3} A_{\vec{k}_4} A_{\vec{p}_1}^\dagger A_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\ e^{-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \cdot \vec{r} + iW(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4)t}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde

$$\begin{aligned} W(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) = \omega(\vec{k}_1) h_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) + \omega(\vec{k}_2) h_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) - \\ \omega(\vec{k}_3) h_3(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) - \omega(\vec{k}_4) h_4(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4), \end{aligned} \quad (2.85)$$

e

$$\begin{aligned}
h_1(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) &= h \left(\delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}^3 - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}^3 - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4}^3 + \delta_{\vec{k}_1, \vec{p}_1}^3 + \delta_{\vec{k}_1, \vec{p}_2}^3 \right), \\
h_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) &= h \left(-\delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3}^3 - \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}^3 + \delta_{\vec{k}_2, \vec{p}_1}^3 + \delta_{\vec{k}_2, \vec{p}_2}^3 \right), \\
h_3(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) &= h \left(-1 - \delta_{\vec{k}_3, \vec{k}_4}^3 + \delta_{\vec{k}_3, \vec{p}_1}^3 + \delta_{\vec{k}_3, \vec{p}_2}^3 \right), \\
h_4(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) &= h \left(-1 + \delta_{\vec{k}_4, \vec{p}_1}^3 + \delta_{\vec{k}_4, \vec{p}_2}^3 \right). \tag{2.86}
\end{aligned}$$

O elemento de matriz na eq. (2.84) pode ser simplificado fazendo o uso das relações de comutação (1.58-1.60). Só então a integral na eq. (2.84) pode ser calculada dando

$$\begin{aligned}
\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle &= \frac{-24(2\pi)^4 i h(0)^2 \lambda_0}{\Omega^2 (1+u+q^2)^4 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \left(h(0)^2 \delta^4(P_{1,a} + P_{2,a} - P'_{1,a} - P'_{2,a}) + \right. \\
&h(0) h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3) \delta^4(P_{1,b} + P_{2,b} - P'_{1,b} - P'_{2,b}) + h(0) h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3) \delta^4(P_{1,c} + P_{2,c} - P'_{1,c} - P'_{2,c}) + \\
&\left. h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3) h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3) \delta^4(P_{1,d} + P_{2,d} - P'_{1,d} - P'_{2,d}) \right), \tag{2.87}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
P_{1,a} &= (\vec{p}_1, \omega_{\vec{p}_1} h(0)), P_{2,a} = (\vec{p}_2, \omega_{\vec{p}_2} h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3)), P'_{1,a} = (\vec{p}'_1, \omega_{\vec{p}'_1} h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3)), P'_{2,a} = (\vec{p}'_2, \omega_{\vec{p}'_2} h(0)); \\
P_{1,b} &= (\vec{p}_1, \omega_{\vec{p}_1} h(0)), P_{2,b} = (\vec{p}_2, \omega_{\vec{p}_2} h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3)), P'_{1,b} = (\vec{p}'_1, \omega_{\vec{p}'_1} h(0)), P'_{2,b} = (\vec{p}'_2, \omega_{\vec{p}'_2} h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3)); \\
P_{1,c} &= (\vec{p}_1, \omega_{\vec{p}_1} h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3)), P_{2,c} = (\vec{p}_2, \omega_{\vec{p}_2} h(0)), P'_{1,c} = (\vec{p}'_1, \omega_{\vec{p}'_1} h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3)), P'_{2,c} = (\vec{p}'_2, \omega_{\vec{p}'_2} h(0)); \\
P_{1,d} &= (\vec{p}_1, \omega_{\vec{p}_1} h(\delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^3)), P_{2,d} = (\vec{p}_2, \omega_{\vec{p}_2} h(0)), P'_{1,d} = (\vec{p}'_1, \omega_{\vec{p}'_1} h(0)), P'_{2,d} = (\vec{p}'_2, \omega_{\vec{p}'_2} h(\delta_{\vec{p}'_1, \vec{p}'_2}^3)). \tag{2.88}
\end{aligned}$$

Essa expressão simplifica sabendo que $\vec{p}'_2 \neq \vec{p}'_1 \neq \vec{p}_2 \neq \vec{p}_1$ e finalmente obtemos para a primeira ordem da expansão da série perturbativa da Matriz-S

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle = \frac{-6(2\pi)^4 i M_0^6 \lambda_0}{Q \Omega^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2), \tag{2.89}$$

onde

$$P_i = (\vec{p}_i, \omega_{\vec{p}_i}), \quad P'_i = (\vec{p}'_i, \omega_{\vec{p}'_i}) \quad (2.90)$$

e $Q = (1 + u + q^2)/2$. Quando $q \rightarrow 1$ temos $M_0 \rightarrow 1$, $u = 0$, $Q \rightarrow 1$ e eq. (2.89) transforma-se no resultado da teoria de campos convencional [35].

2.3.2 Expansão de Wick e Cálculo Perturbativo de Segunda ordem

Para cálculo do termo de segunda ordem precisamos usar o teorema de Wick. Porém, uma vez que a contração de Dyson-Wick não é um número complexo, como no caso convencional, esse teorema apresenta algumas modificações em relação ao padrão. As conseqüências do propagador não ser um número complexo pode ser vista no caso mais simples, expansão de Wick para três campos,

$$\begin{aligned} T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3) : \\ &+ : \phi(x_1)\overline{\phi(x_2)\phi(x_3)} : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3) : , \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde $: \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) :$ é a ordenação normal do produto de três campos e

$$: \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3) := D_F^N(x_1, x_2) \phi(x_3) , \quad (2.92)$$

$$: \phi(x_1)\overline{\phi(x_2)\phi(x_3)} := \phi(x_1)D_F^N(x_2, x_3) , \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)} &:= D_F^N(x_1, x_3)\alpha(x_2) + \\ &+ \alpha^\dagger(x_2)D_F^N(x_1, x_3) . \end{aligned} \quad (2.94)$$

Note que

$$\phi(x_2)D_F^N(x_1, x_3) \neq D_F^N(x_1, x_3)\phi(x_2) \neq D_F^N(x_1, x_3)\alpha(x_2) + \alpha^\dagger(x_2)D_F^N(x_1, x_3) , \quad (2.95)$$

uma vez que o propagador não é um número complexo. Como será demonstrado no apêndice B, para o caso de quatro campos algumas diferenças adicionais aparecem.

Vamos, agora, calcular o processo de espalhamento da seção precedente. Analisaremos a contribuição de segunda ordem em λ_0

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2 = \frac{(-i)^2}{2} \lambda_0^2 \int \int d^4x d^4y \langle 1', 2' | T(: \phi^4(x) :: \phi^4(y) :) | 1, 2 \rangle , \quad (2.96)$$

onde T denota a ordenação temporal. Para converter a ordenação temporal em ordenação normal usaremos a expansão de Wick, levando em consideração que o propagador não é mais um número complexo. Isso foi feito usando um programa de computação simbólica. Proveniente da expansão de Wick de $T(: \phi^4(x) :: \phi^4(y) :)$ temos três termos representativos que contribuem para a segunda ordem do processo de espalhamento da eq. (2.96), são eles:

$$\alpha^\dagger(x)\alpha^\dagger(x)\alpha(y)\alpha(y)D_F^N(x, y)D_F^N(x, y) , \quad (2.97)$$

$$\alpha^\dagger(y)\alpha^\dagger(y)\alpha(x)\alpha(x)D_F^N(x, y)D_F^N(x, y) , \quad (2.98)$$

$$\alpha^\dagger(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(x)\alpha(y)D_F^N(x, y)D_F^N(x, y) . \quad (2.99)$$

Os outros termos que contribuem são diferentes dos acima apenas na posição do operador contração de Wick-Dyson (2.97-2.99) ou por um deslocamento do tipo $N_{\vec{k}_i} \rightarrow N_{\vec{k}_i} + \delta_{\vec{k}_i, \vec{p}_j}$ no propagador das eqs. (2.97-2.99).

Vamos primeiramente analisar a contribuição do primeiro termo da eq. (2.97). Como podemos ver na eq. (2.62) a contração de Dyson-Wick tem dois termos. Vamos inicialmente considerar somente o primeiro termo uma vez que, como mostraremos, o segundo termo não dá nenhuma contribuição. Portanto, colocando o termo representativo da eq. (2.97) na eq. (2.96), e tirando do elemento de matriz as exponenciais que são proporcionais ao operador número e os $S(N)$, usando

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_{\vec{p}'_2} A_{\vec{p}'_1} A_{\vec{k}_1}^\dagger A_{\vec{k}_2}^\dagger A_{\vec{k}_3} A_{\vec{k}_4} A_{\vec{p}_1}^\dagger A_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle &= M_0^4 \left(M_0^4 \delta_{\vec{k}_3 \vec{p}_1} \delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_2} \delta_{\vec{k}_1 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_2} + \right. \\ &M_0^2 \Delta E(\delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_2}) \delta_{\vec{k}_3 \vec{p}_1} \delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_2} \delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{k}_1 \vec{p}'_2} + M_0^2 \Delta E(\delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_2}) \delta_{\vec{k}_3 \vec{p}_2} \delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_1} \delta_{\vec{k}_1 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_2} + \\ &\left. \Delta E(\delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_2}) \Delta E(\delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_2}) \delta_{\vec{k}_3 \vec{p}_2} \delta_{\vec{k}_4 \vec{p}_1} \delta_{\vec{k}_2 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{k}_1 \vec{p}'_2} \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

podemos somar em $\vec{k}$'s provenientes das expansão de Fourier de $\alpha(x)$, dado na eq. (2.60) obtendo, depois da redefinição do tempo como $t \rightarrow t/h(0)$,

$$\begin{aligned} \langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^a &= \frac{M_0^4 \lambda_0^2}{2\Omega^2 Q^2 (2\pi)^8 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \int \frac{d^4 x d^4 y d^4 k_1 d^4 k_2}{(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2)} \\ &S(1 + \delta_{\vec{k}_1, \vec{p}_1} + \delta_{\vec{k}_1, \vec{p}_2})^2 S(1 + \delta_{\vec{k}_2, \vec{p}_1} + \delta_{\vec{k}_2, \vec{p}_2})^2 \exp[i(\kappa_1 + \kappa_2 - P'_1 - P'_2).x \\ &\quad + i(P_1 + P_2 - \kappa_1 - \kappa_2).y] , \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde

$$\kappa_i = \left(\vec{k}_i, h_{i,0} k_i^0 \right) , i = 1, 2 , \quad (2.102)$$

$$k_i = \left(\vec{k}_i, k_i^0 \right) , \quad (2.103)$$

$$h_{i,0} = h \left(\delta_{\vec{k}_i, \vec{p}_1} + \delta_{\vec{k}_i, \vec{p}_2} \right) / h(0) . \quad (2.104)$$

Usando a propriedade $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x + \delta_{x,x_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ podemos integrar a eq. (2.101) sobre x, y . Finalmente, usando as propriedades convencionais da função delta

podemos, também integrar sobre k_1 ou k_2 obtendo

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^a = \frac{M_0^8 \lambda_0^2}{2\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2) I, \quad (2.105)$$

onde I é a integral divergente de um loop que aparece no caso convencional da teoria $\lambda\phi^4$,

$$I = \int d^4k \frac{1}{(k^2 + m^2) [(-k + s)^2 + m^2]}, \quad (2.106)$$

e $s = P_1 + P_2$. Como no caso usual a parte finita da integral pode ser calculada usando o método de regularização dimensional [48] dando o resultado padrão.

Relembrando que o propagador (veja eq. (2.62)) tem dois termos e que nos cálculos acima consideramos somente o primeiro, vamos agora discutir as consequências do segundo termo da eq. (2.62).

Após um cálculo similar ao realizado considerando o primeiro termo do propagador obtemos,

$$\frac{M_0^6 S(0)^2 \lambda_0^2}{2\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2) I, \quad (2.107)$$

que fornece um resultado trivial uma vez que $S(0)^2 = 0$. Temos sempre esse resultado trivial todas as vezes que o segundo termo da contração for incluído nos cálculos.

É importante notar que a principal diferença com relação a teoria de campos comum, para o campo de spin-0, é devido às constantes da álgebra, M_0^8/Q^2 , que tem como limite a unidade quando $q \rightarrow 1$.

Vamos calcular a contribuição proveniente do termo mostrado em (2.98). Esse cálculo é análogo ao anterior e o resultado é

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^b = \frac{M_0^8 \lambda_0^2}{2\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2) I', \quad (2.108)$$

onde $I' = I(s \rightarrow -s)$.

E finalmente discutiremos a contribuição do último termo (2.99). O primeiro passo é colocar o termo representativo dentro do elemento de matriz (2.96), em seguida seguir os passos:

1. Tirar os exponenciais e $S(N)$ do elemento de matriz,
2. usar eq. (2.100),
3. somar sobre os $\vec{k}$'s proveniente da expansão de Fourier dos $\alpha(x)$,
4. redefinir $t \rightarrow t/h(0)$,
5. usar a propriedade dada em (2.104),
6. integrar sobre d^4x e d^4y ,

obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^c &= \frac{M_0^8 \lambda_0^2}{8\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2)} \\
 &\quad \left[\delta^4(k_1 + k_2 + P_1 - P'_1) \delta^4(-k_1 - k_2 + P_2 - P'_2) + \right. \\
 &\quad \delta^4(k_1 + k_2 + P_2 - P'_2) \delta^4(-k_1 - k_2 + P_1 - P'_1) + \\
 &\quad \delta^4(k_1 + k_2 + P_1 - P'_2) \delta^4(-k_1 - k_2 + P_2 - P'_1) + \\
 &\quad \left. \delta^4(k_1 + k_2 + P_2 - P'_1) \delta^4(-k_1 - k_2 + P_1 - P'_2) \right] .
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

Repare que os dois primeiros termos entre os parênteses principais correspondem a contribuição no canal t enquanto que os dois últimos a contribuição do canal u . Considerando

separadamente a contribuição dos dois canais temos

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^{c,t} = \frac{M_0^4 \lambda_0^2}{8\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2) I'' , \quad (2.110)$$

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle_2^{c,u} = \frac{M_0^4 \lambda_0^2}{8\Omega^2 Q^2 \sqrt{\omega_{\vec{p}_1} \omega_{\vec{p}_2} \omega_{\vec{p}'_1} \omega_{\vec{p}'_2}}} \delta^4(P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2) I''' , \quad (2.111)$$

onde $I'' = I(s \rightarrow t)$ e $I''' = I(s \rightarrow u)$ com $t = P_1 - P'_1$ e $t = P_1 - P'_2$.

Em conclusão, acabamos de calcular a contribuição de segunda ordem do processo de espalhamento, $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$, de duas partículas compostas, proveniente dos termos representativos dados pelas eqs. (2.97- 2.99). Os outros termos que aparecem com a expansão generalizada de Wick de $T(: \phi^4(x) :: \phi^4(y) :)$ que contribuem diferem das eqs. (2.97-2.99) apenas pela posição do propagador. Além disso esses termos têm o operador N modificado pelo deslocamento $N_{\vec{q}_i} \rightarrow N_{\vec{q}_i} + n_1 \delta_{\vec{q}_i, \vec{k}_1} + n_2 \delta_{\vec{q}_i, \vec{k}_2} + n_3 \delta_{\vec{q}_i, \vec{k}_3} + n_4 \delta_{\vec{q}_i, \vec{k}_4}$, onde $n_j = 0, 1, 2, 3$ ($j=1..4$), $\vec{q}_i$ é o momento associado com o propagador e $\vec{k}_j$ o momento associado ao campo. No entanto, como existe um número finito de deltas nas funções $S(x)$ e $h(x)$ é possível, usando a propriedade descrita acima (3.69), excluir essas deltas e o resultado final independe da posição do propagador e dos deslocamentos de N . Portanto o processo de espalhamento, $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ para $p_1 \neq p_2 \neq p'_1 \neq p'_2$, com os estado final e inicial dados pelas eqs. (2.81, 2.82) respectivamente, onde A_{p_i} , $A_{p_i}^\dagger$ satisfazem a álgebra de Heisenberg generalizada com uma função geratriz linear e as partículas são supostamente descritas pelo Hamiltoniano da eq. (2.49) com interação dada por $\lambda_0 \int : \phi(\vec{r}, t)^4 : d^3r$ até a segunda ordem no constante de acoplamento, λ_0 , é dado por

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle = \frac{\lambda_0 M_0^2}{Q} A_1 + \frac{\lambda_0^2 M_0^4}{Q^2} (A_2^s + A_2^t + A_2^u) , \quad (2.112)$$

onde A_1 , A_2^s , A_2^t e A_2^u são as mesmas contribuições do caso padrão $\lambda\text{-}\phi^4$ (não-deformado) correspondente ao nível de árvore aos canais s , t e u em um loop respectivamente.

A contribuição adicional encontrada na série perturbativa é devido a estrutura da partícula composta descrita fenomenologicamente pela álgebra generalizada de Heisenberg.

2.3.3 Caso Quadrático

O caso quadrático difere pouco, na estrutura dos cálculos, do caso linear uma vez que podemos escrever de forma geral o comutador entre A e $A^\dagger$ como sendo

$$[A, A^\dagger] = f(J_0) - J_0 \quad (2.113)$$

Embora o $f(J_0)$ seja diferente, os cálculos da expansão perturbativa da matriz-S podem ser feitos de maneira similar ao caso linear e o resultado pode ser obtido do resultado anterior apenas substituindo o $h(0)$ pela equação dada em 2.73 obtendo-se como resultado final:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{\lambda_0 M_0^2}{(1 + q + p(M_0^2 + 2\alpha_0))} A_1 + \\ &+ \frac{\lambda_0^2 M_0^4}{(1 + q + p(M_0^2 + 2\alpha_0))^2} (A_2^s + A_2^t + A_2^u) \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde A_1, A_2^s, A_2^t e A_2^u são as contribuições idênticas às convencionais e $M_0^2 = p\alpha_0^2 + (q - 1)\alpha_0 + 1$.

2.3.4 Comparação dos Casos Linear e Quadrático

As eqs (2.114) mostra que a matriz-S calculada para o caso em que a função característica da álgebra generalizada é linear e quadrática diferem do caso convencional apenas pelos parâmetros da álgebra que são interpretados como sendo uma maneira de descrever fenomenologicamente a estrutura da partícula composta.

Para uma teoria quântica de campos baseada numa álgebra generalizada de Heisenberg

com uma função linear a constante é redefinida para [38]

$$\lambda'_0 \rightarrow \frac{2\lambda_0((q-1)\alpha_0 + 1)}{1+q} \quad (2.115)$$

e no caso quadrático, como

$$\lambda'_0 \rightarrow \frac{2\lambda_0(p\alpha_0^2 + (q-1)\alpha_0 + 1)}{1+q+p(p\alpha_0^2 + (q+1)\alpha_0 + 1)}. \quad (2.116)$$

No caso linear se considerarmos $0 \leq \alpha_0 \leq \epsilon^*$ e $0 \leq q \leq 1$, sendo $\epsilon^* = 1/(1-q)$ o ponto fixo podemos concluir que

$$0 \leq \lambda'_0 \leq \frac{2\lambda_0}{q+1} \quad (2.117)$$

portanto, a parte não perturbativa dessa teoria de campos pode ocorrer a uma ordem de magnitude superior ao caso convencional. No entanto, como pode-se ver analisando (2.115), $\lambda'_0 < 0$ somente se $\lambda_0 < 0$ o que implicaria a não existência de vácuo para o Hamiltoniano.

Considerando agora a teoria quântica de campos (TQC) baseada numa função não linear. A constante é redefinida para λ'_0 dada pela eq (2.116).

Examinando o denominador da eq. (2.116) podemos ver que temos uma divisão por zero para um determinado conjunto de parâmetros obedecendo a relação

$$p^2\alpha_0^2 + p(q+1)\alpha_0 + q+1+p = 0 \quad (2.118)$$

este caso nos dá um resultado não físico. Para excluir essa possibilidade temos duas alternativas:

- **(A)** Impor a condição (o Δ_1 da equação de segundo grau (2.118) menor que zero)

$$p^2(q+1)^2 - 4p^2(q+1+p) < 0, \quad (2.119)$$

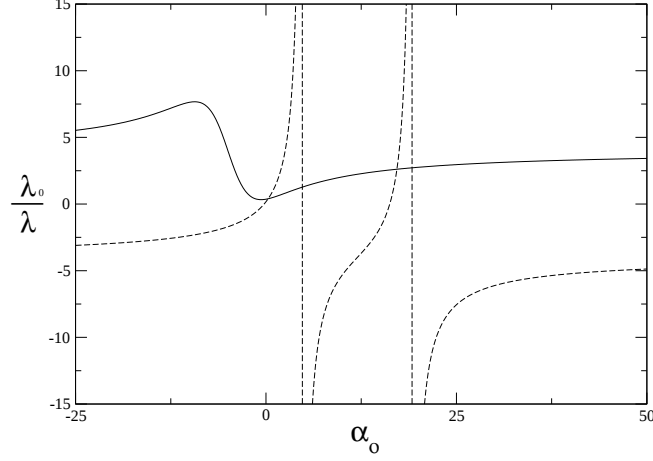


Figura 2.3: A constante redefinida versus α_0 para o caso quadrático. O gráfico representado com a linha sólida foi obtido para $p = -1/4$ e $q = -1/4$ (caso A) e a linha tracejada para $p = -1/4$ e $q = 5$ (caso B)

o que implica que a equação (2.118) não tem zeros reais. Eq.(2.119) pode ser resolvida dando

$$1 - 2\sqrt{1+p} < q < 1 + 2\sqrt{1+p} \quad (2.120)$$

pode-se concluir que, escolhendo q dentro do intervalo (2.120) com $-1 < p < 0$ elimina o pólo da matriz-S no caso quadrático.

- **(B)** Evitar somente a região próximo ao pólo do denominador (2.118).

A Fig 2.3 mostra o gráfico λ'_0 obtido segundo o caso (A), em que os parâmetros satisfazem a condição (2.120) e o caso (B), onde o λ'_0 pode ser tanto negativo quanto positivo mantendo $\lambda_0 > 0$. Em outras palavras se considerarmos positiva a constante

convencional λ_0 , no caso quadrático, dependendo dos parâmetros da álgebra, a constante redefinida pode ser positiva ou negativa.

Capítulo 3

Eletrodinâmica Quântica Generalizada

Nesse capítulo estudaremos a eletrodinâmica escalar generalizada [34] baseada na superposição de duas álgebras deformadas de Heisenberg estudadas, na Sec 1.4. O objetivo é construir um tratamento fenomenológico para descrever as interações entre partículas compostas escalares e o fóton. Consideraremos somente a eletrodinâmica quântica generalizada baseada na álgebra de Heisenberg generalizada com uma função característica linear.

Vamos considerar o espaço de Fock definido pela superposição de duas álgebras de Heisenberg generalizada discutida na seção 1.4. Nesse espaço podemos definir os operadores número N_A e N_B tal que

$$N^A|m_A, m_B\rangle = m_A|m_A, m_B\rangle, \quad (3.1)$$

e

$$N^B|m_A, m_B\rangle = m_B|m_A, m_B\rangle, \quad (3.2)$$

pode se definir o operador, $f(N^{A/B}, \alpha_0)$, de maneira que

$$f(N^{A/B}, \alpha_0)|m_A, m_B\rangle = f^{(m_{A/B})}(\alpha_0)|m_A, m_B\rangle, \quad (3.3)$$

onde $f^{(m_{A/B})}(\alpha_0)$ é a m -ésima iteração da função $f(x)$. Para uma função característica linear, $f(x) = qx+1$, podemos escrever, Usando (1.84-1.89), o operador $J_0^{A/B}$ (previamente defenido na seção 1.4) como:

$$J_0^{A/B} \equiv f(N_{A/B}, \alpha_0) = [N^{A/B}]_q M_0^2 + \alpha_0. \quad (3.4)$$

onde

$$[N^{A/B}]_q = \frac{q^{N^{A/B}} - 1}{q - 1} \quad (3.5)$$

é o número de Gauss convencional e $M_0 = (q-1)\alpha_0 + 1$. Como no caso escalar, descrito no capítulo anterior, podemos considerar uma rede unidimensional no espaço dos momentos. Seguindo a mesma linha de raciocínio do capítulo anterior podemos, então, definir o operador deslocamento, $T_{A/B}$, com $T_{A/B} = \bar{T}_{A/B}^\dagger$, obedecendo as seguintes relações:

$$\bar{T}_A |m_A, m_B\rangle = |m_A + 1, m_B\rangle, \quad (3.6)$$

$$T_A |m_A, m_B\rangle = |m_A - 1, m_B\rangle, \quad (3.7)$$

e

$$\bar{T}_B |m_A, m_B\rangle = |m_A, m_B + 1\rangle, \quad (3.8)$$

$$T_B |m_A, m_B\rangle = |m_A, m_B - 1\rangle, \quad (3.9)$$

podemos, agora reescrever o operador de criação e aniquilação, da álgebra generalizada,

como

$$A^\dagger = S(N^A) \bar{T}_A, \quad (3.10)$$

$$A = T_A S(N^A), \quad (3.11)$$

$$B^\dagger = S(N^B) \bar{T}_B, \quad (3.12)$$

$$B = T_B S(N^B), \quad (3.13)$$

onde

$$S(N^{A/B})^2 = [N^{A/B}]_q M_0^2. \quad (3.14)$$

Em analogia ao capítulo anterior podemos introduzir duas redes discretas tridimensionais no espaço k e em cada ponto desta podemos associar uma cópia da rede unidimensional que acabamos de apresentar. Seguindo o procedimento usual [35] podemos definir os campos complexos

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (A_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}), \quad (3.15)$$

$$\phi^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (A_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}), \quad (3.16)$$

$$\Pi^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{i w(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (-A_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}), \quad (3.17)$$

$$\Pi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{i w(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (-A_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}), \quad (3.18)$$

onde os coeficientes satisfazem as relações (1.58-1.60), $\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ é um parâmetro real e Ω o volume de uma caixa retangular. Inserindo a expansão de Fourier dos campos no Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{KG} = & \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \quad (\quad \Pi^\dagger(\vec{r}, t) \Pi(\vec{r}, t) + \\ & + \quad \vec{\nabla} \phi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) + m^2 \phi^\dagger(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

podemos, com um pouco de álgebra, chegar na expressão:

$$\mathcal{H}_0^{KG} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} w(\vec{k}) M_0^2 \{ [N_{\vec{k}}^A + 1]_q + [N_{\vec{k}}^A]_q + [N_{\vec{k}}^B + 1]_q + [N_{\vec{k}}^B]_q \}, \quad (3.20)$$

onde $[N^{A/B}]_q$ é o número de Gauss. No limite em que $q \rightarrow 1$ o Hamiltoniano torna-se proporcional ao operador número. A evolução temporal pode ser estudada através da equação de Heisenberg, $A_{\vec{k}}^\dagger, A_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^\dagger, B_{\vec{k}}$, cujas soluções são:

$$A_{\vec{k}}^\dagger = A_{\vec{k}}^\dagger(0) e^{-i w(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}^A) t} \quad (3.21)$$

$$B_{\vec{k}}^\dagger = B_{\vec{k}}^\dagger(0) e^{-i w(\vec{k}) h(N_{\vec{k}}^B) t}, \quad (3.22)$$

onde

$$h(N_{\vec{k}}^{A/B}) = \frac{1}{2} \Delta E M_0^2 (1 + q), \quad (3.23)$$

e $\Delta E = [N_{\vec{k}}^{A/B} + 1]_q - [N_{\vec{k}}^{A/B}]_q$. Para uso futuro, vamos definir o valor esperado do vácuo da equação anterior como sendo:

$$h(0) = \langle 0 | h(N_{\vec{k}}^{A/B}) | 0 \rangle = \zeta M_0^2, \quad (3.24)$$

onde,

$$\zeta = \frac{1}{2}(q + 1). \quad (3.25)$$

Para preservar a invariância de Lorentz é necessário introduzir o seguinte vínculo

$$h(0) = 1; \quad (3.26)$$

é fácil ver que as soluções dessa equação é $\alpha_0 = -1/(q + 1)$. Pode-se verificar que esta solução não satisfaz a equação (1.67) somente a (1.68) onde $-1 < q < 1$.

Podemos, com ajuda das equações (3.21-3.22), reescrever a expansão de Fourier dos campos como: ($x \equiv (\vec{r}, t)$)

$$\phi(x) = \alpha(x) + \beta^\dagger(x) \quad (3.27)$$

onde,

$$\alpha(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i w(\vec{k}) h(N_k^A) t} A_{\vec{k}}(0) \quad (3.28)$$

e

$$\beta^\dagger(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} B_{\vec{k}}^\dagger(0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i w(\vec{k}) h(N_k^B) t} . \quad (3.29)$$

O delta generalizado de Pauli-Jordan pode ser definido como o comutador entre os operadores $\phi(x, x_0)$ e $\phi^\dagger(y, y_0)$ para tempos arbitrários x_0 e y_0 .

$$\Delta^N(x - y) := [\phi(x), \phi^\dagger(y)] . \quad (3.30)$$

o valor esperado no vácuo da equação (3.30) preserva todas as propriedades da função delta de Pauli-Jordan convencional, como por exemplo a propriedade fundamental da teoria de campos,

$$\langle 0 | \Delta^N(x - y) | 0 \rangle = 0 , \quad (3.31)$$

fora do cone de luz, ou seja, para distâncias $(x - y)^2 < 0$. Podemos encontrar uma expressão explícita para o operador $\Delta^N(x - y)$ inserindo a expansão de Fourier do campo ϕ (3.15) e o seu Hermitiano conjugado (3.16) em (3.30). A expressão resultante pode ser simplificada com auxílio das relações de comutação (1.58) e (1.60):

$$i\Delta^N(x - y) = i(f(J_0^A) - J_0^A)\Delta_{(+)}^N + i(f(J_0^B) - J_0^B)\Delta_{(-)}^N , \quad (3.32)$$

onde

$$\Delta_{(\pm)}^N(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega(\vec{p})} e^{\pm i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \mp i w(\vec{k}) h(N) t} \quad (3.33)$$

e o valor esperado no vácuo é dado por:

$$\langle 0 | \Delta^N(x-y) | 0 \rangle = M_0^2 \langle 0 | \Delta(x-y) | 0 \rangle, \quad (3.34)$$

sendo $\Delta(x-y)$ a função delta de Pauli-Jordan convencional.

O próximo passo é calcular a contração de Dyson-Wick entre $(x_i \equiv (r_i, t_i))$ $\phi(x_1)$ e $\phi^\dagger(x_2)$. Ela é dada por:

$$\begin{aligned} {}_i\Delta_F^{(N_{\vec{k}}^A, N_{\vec{k}}^B)}(x) &= \frac{{}_iM_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{F(N_{\vec{k}}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i k_0 H(N_{\vec{k}})t}}{k^2 - m^2} \\ &- (N \rightarrow N-1). \end{aligned} \quad (3.35)$$

sendo,

$$F(N_{\vec{k}}) = \left[N_{\vec{k}}^A + 1 \right]_q \theta(k_{0x}) + \left[N_{\vec{k}}^B + 1 \right]_q \theta(-k_{0x}) \quad (3.36)$$

e

$$H(N_{\vec{k}}) = \left[h(N_{\vec{k}}^A) \theta(k_{0x}) + h(N_{\vec{k}}^B) \theta(-k_{0x}) \right], \quad (3.37)$$

onde $\theta(x)$ é a função Heaviside. Obviamente a contração de Dyson-Wick, nesse caso, não é um número complexo e portanto não comuta com ϕ

$$[\Delta_F^N(x), \phi(x)] \neq 0, \quad (3.38)$$

como no caso convencional. O propagador é definido como o valor esperado da equação (3.35)

$$\Delta_F^0(x) = \frac{M_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i k_0 h(0)t}}{k^2 - m^2}. \quad (3.39)$$

usando (3.26) temos

$$\Delta_F^0(x) = M_0^2 \Delta_F(x), \quad (3.40)$$

onde $\Delta_F(x)$ é o propagador de Feynman.

O operador carga da teoria deve obedecer as relações de comutação seguinte:

$$[Q, \phi(x)] = -\phi(x), [Q, \phi^\dagger(x)] = \phi^\dagger(x), \quad (3.41)$$

uma vez que $\phi^\dagger$ deve aumentar em uma unidade a carga de um determinado estado e igualmente ϕ deve reduzir a carga em uma unidade. Por essa razão o operador carga pode ser definido como:

$$Q = \int d^3k (N_k^A - N_k^B). \quad (3.42)$$

3.1 Espalhamento de Fótons por uma Partícula Composta

3.1.1 Cálculo Perturbativo e Covariância de Lorentz

Usando o formalismo que acabamos de apresentar podemos, agora, analisar o processo de espalhamento envolvendo uma partícula escalar carregada e fótons. O Hamiltoniano de interação de uma partícula carregada com fótons é dada por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^{KG} + \mathcal{H}_0^{em} + \mathcal{H}_{int}, \quad (3.43)$$

onde $\mathcal{H}^{KG}$ foi previamente discutido no capítulo 1, $\mathcal{H}_0^{em}$ é o Hamiltoniano do campo de Maxwell e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} &= ie\phi^\star(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_k\phi(x)C^k(x) + ie(\pi^\star(x)\phi^\star(x) - \pi(x)\phi(x))C^0(x) \\ &- e^2\phi^\star(x)\phi(x)C_\mu(x)C^\mu(x) + e^2\phi^\star(x)\phi(x)C^0(x)^2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

é o Hamiltoniano de interação onde o campo eletromagnético é o convencional e representado por $C_\mu(x)$ e $\phi^\star(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_k\phi(x) \equiv -\partial_k\phi^\star(x)\phi(x) + \phi^\star(x)\partial_k\phi(x)$.

Na representação de interação é fácil ver, usando (3.15-3.18) e (3.21-3.22) que

$$\pi^\dagger(\vec{r}, t) = \partial_0\phi(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t) , \quad (3.45)$$

onde

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{iw(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} (M_1^k A_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B_{\vec{k}}^\dagger M_2^k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (3.46)$$

e

$$M_1^k = (1 - h(N_k^A)) e^{i w(\vec{k}) h(N_k^A) t} , \quad (3.47)$$

$$M_2^k = (1 - h(N_k^B)) e^{-i w(\vec{k}) h(N_k^B) t} . \quad (3.48)$$

Note que para $q \rightarrow 1$ temos $h(N) \rightarrow 1$, e portanto $\rho(\vec{r}, t) = 0$ obtendo o resultado padrão. Usando agora, a equação (3.45-3.48) o Hamiltoniano de interação, no formalismo de interação pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & i : e \phi^\dagger(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi(x) C^\mu : - e^2 : \phi^\dagger(x) \phi(x) C_\mu C^\mu : \\ & + e^2 : \phi^\dagger(x) \phi(x) (C^0)^2 : + i e : (\rho(x) \phi^\dagger(x) - \rho^\dagger(x) \phi(x)) C^0 : , \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde os símbolos $::$ significa a ordem normal. Por hipótese a partícula composta é gerada pelos operadores da AHG enquanto que o fóton é supostamente sem estrutura e neutro. Analisaremos o seguinte processo:

$$P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma' , \quad (3.50)$$

com o estado inicial

$$|i\rangle \equiv |k, p\rangle = \frac{a_{k\lambda}^\dagger A_p^\dagger}{M_0} |0\rangle \quad (3.51)$$

e final

$$|f\rangle \equiv |k', p'\rangle = \frac{a_{k'\sigma}^\dagger A_{p'}^\dagger}{M_0} |0\rangle \quad (3.52)$$

onde $A^\dagger$, A cria e aniquila partículas compostas, respectivamente e $a_{\vec{k}_1\lambda}^\dagger$, $a_{\vec{k}_1\lambda}$ são os coeficientes da expansão de Fourier do campo do fóton dado por

$$C^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 (a_{\vec{k}\lambda} \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{ik \cdot x} + a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x}), \quad (3.53)$$

sendo $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ o vetor de polarização e M_0 dado pela equação (1.57). Para simplificar a notação usamos o ket $|k, p\rangle$, onde k representa o momento do fóton, p o da partícula composta e no lugar de $|0, 0\rangle$ usamos $|0\rangle$, representando o vácuo.

Como explicado anteriormente, essa quantização implementada com auxílio da álgebra generalizada pode ser utilizada para descrever, fenomenologicamente, interações de partículas compostas. Além disso, devido a extensão das partículas compostas é razoável supor que os termos do Hamiltoniano fenomenológico que são proporcionais às derivadas diferem do convencional por um fator constante η satisfazendo a condição

$$\lim_{q \rightarrow 1} \eta = 1. \quad (3.54)$$

Por esta razão, podemos esperar que a interação das partículas compostas e o fóton seja

descrita fenomenologicamente pelo Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{int} = & \quad ie\eta : \left[\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \phi(x)^\dagger \phi(x) \right] C^\mu : \\
 & - e^2 : \phi^\dagger(x) \phi(x) C_\mu C^\mu : + e^2 : \phi^\dagger(x) \phi(x) (C^0)^2 : \\
 & + ie : (\rho(x) \phi^\dagger(x) - \rho^\dagger(x) \phi(x)) C^0 : .
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Analisando (3.55) pode-se achar que os dois últimos termos da equação anterior destroem a convariância de Lorentz. Com efeito, calculando o termo de segunda ordem da expansão da série perturbativa da matriz- S observa-se que o propagador do bóson também contém uma parte não covariante que cancela a contribuição do termo proporcional a e^2 . Veremos como esse mecanismo é preservado nessa teoria. Além disso uma vez que $h(0) = 1$ como podemos ver através da equação (3.26), o último termo da mesma não contribui.

Vamos agora considerar o elemento da matriz $S_{fi}^1 = \langle f | \hat{S}^1 | i \rangle$, onde $\hat{S}^1$ é a primeira ordem da expansão perturbativa da matriz S , $\hat{S}^1 = -i \int d^4x \mathcal{H}_{int}$, com $\mathcal{H}_{int}$ dado pela equação (3.55) e os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$ pelas equações (3.51) e (3.52) respectivamente. Os termos que dão valores diferente de zero de S_{fi}^1 são:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^1 = & \quad ie^2 \int d^4x \langle f | : \phi^\dagger(x) \phi(x) C_\mu(x) C^\mu(x) : | i \rangle \\
 & + ET ,
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

onde

$$ET = -ie^2 \int d^4x \langle f | : \phi(x)^\dagger \phi(x) (C^0)^2 : | i \rangle . \tag{3.57}$$

Para calcular o termo de primeira ordem devemos inicialmente introduzir em (3.15), (3.16) e (3.53) e a expansão dos campos (3.15-3.18) e os estados (3.51-3.52) levando em

consideração a relação

$$[a_{\vec{k}'\lambda}, a_{\vec{k}_3\sigma}^\dagger] = \delta_{\vec{k}', \vec{k}_3} \delta_{\lambda, \sigma} , \quad (3.58)$$

e também

$$\langle 0 | A_{\vec{p}'} A_{\vec{k}_1}^\dagger A_{\vec{k}_2} A_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = M_0^4 \delta_{\vec{p}', \vec{k}_1} \delta_{\vec{p}, \vec{k}_2} \quad (3.59)$$

e que $[N, A^\dagger] = A^\dagger$. Obtemos

$$S_{fi}^1 = \frac{ie^2 M_0^2 \epsilon(k', \sigma) \cdot \epsilon(k, \lambda)}{2\Omega^2 \sqrt{\omega_p \omega_{p'} \omega_k \omega_{k'}}} \int d^4x e^{i(\omega(p') - \omega(p))h(0)t + (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{r}} \cdot e^{i(k - k') \cdot x} + ET , \quad (3.60)$$

fazendo uso de (3.26), $h(0) = 1$ e integrando obtemos

$$\mathcal{S}_{fi}^1 = \frac{ie^2 M_0^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{4\pi^2 \sqrt{\omega_p \omega_{p'} \omega_k \omega_{k'}}} \delta^{(4)}(p + k - p' - k') + ET , \quad (3.61)$$

onde:

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_\mu(k', \sigma) \epsilon^\mu(k, \lambda). \quad (3.62)$$

Existe uma contribuição adicional para o termo em e^2 . Este termo vem do termo de segunda ordem da expansão perturbativa da matriz- S dada por

$$\mathcal{S}_{fi}^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y < f | T(\mathcal{H}_{int}(x) \mathcal{H}_{int}(y)) | i > , \quad (3.63)$$

$< f |$ e $| i >$ são dados pelas equações (3.51) e (3.52) respectivamente. Inserindo o Hamiltoniano dado por (3.55), na equação (3.63) e usando o teorema de Wick generalizado

(ver apêndice C) obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{fi}^2 &= \frac{e^2 \eta^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle f | \left(\overline{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} \right. \\
&+ \overline{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} - \overline{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(y)} \\
&+ \overline{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y)} + \overline{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} \\
&+ \overline{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} + \overline{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y)} \\
&\left. + \overline{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y)} \right) : C^\mu(x) C^\nu(y) : |i\rangle .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Note que já descartamos a contribuição do último termo do Hamiltoniano de interação (para mais detalhes ver o apêndice C), uma vez que esse termo não fornece nenhuma contribuição. Além disso, como a contração não é um número complexo, cada termo deve ser considerado separadamente.

Para determinar explicitamente a equação (3.64) devemos, em primeiro lugar calcular a ação dos operadores gradiente na contração de Dyson-Wick dos campos dos dois bósons.

$$\begin{aligned}
i\Delta_F^N(x-y) = \overline{\phi(x) \phi^\dagger(y)} &= [\alpha(x), \alpha^\dagger(y)] \theta(x_0 - y_0) + \\
&+ [\beta(y), \beta^\dagger(x)] \theta(y_0 - x_0) .
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Portanto, a ação de um único operador gradiente na contração de Dyson-Wick resulta em

$$i\partial_\nu^y \Delta_F^N(x-y) = \overline{\phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} - g_{\nu 0} \Delta^N(x-y) \delta(x_0 - y_0) \tag{3.66}$$

onde $\Delta^N(x-y)$ é o delta de Pauli-Jordan generalizada definida na equação (3.30). O último termo da equação anterior não fornece nenhuma contribuição quando inserido no elemento de matriz- S . Por exemplo, o cálculo de

$$\delta(x_0 - y_0) \langle f | \Delta^N(x-y) | i \rangle , \tag{3.67}$$

onde os estados são dados pelas equações (3.51) e (3.52),

$$\delta(x_0 - y_0)\Delta^{(\delta_{k,p})}(x - y) = M_0^2\delta(x_0 - y_0)\Delta(x - y) = 0, \quad (3.68)$$

onde $\Delta(x - y)$ é a função de Pauli-Jordan usual e $\vec{k}$ e $\vec{p}$ são os momentos na representação integral do delta de Pauli-Jordan generalizada e o momento inicial da partícula composta.

A primeira igualdade na equação acima é obtida usando a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x + \delta_{x,x_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \quad (3.69)$$

na definição da função generalizada de Pauli-Jordan equação (3.33). No entanto quando um segundo operador gradiente age

$$\begin{aligned} i\partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_F^N(x - y) &= \overline{\partial_\mu^x \phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} + \\ &+ g_{\mu 0} \partial_\nu^y \Delta^N(x - y) \delta(x_0 - y_0), \end{aligned} \quad (3.70)$$

contrariamente a equação (3.66) o último termo da equação anterior não se anula. Das equações (3.65, 3.66, 3.70) concluímos que:

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x) \phi^\dagger(y)} &= \Delta_F^N(x - y) \\ \overline{\phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} &= i\partial_\nu^y \Delta_F^N(x - y) + g_{\nu 0} \Delta^N(x - y) \delta(x_0 - y_0), \end{aligned} \quad (3.71)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \overline{\phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} &= i\partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_F^N(x - y) - \\ &- ig_{\mu 0} \partial_\nu^y \Delta^N(x - y) \delta(x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Voltando ao cálculo da equação (3.64), como demonstrada no apêndice C uma vez que as contrações não são números complexos, o teorema de Wick tem algumas complicações

adicionais e as expressões explícitas da ordem temporal são menos triviais neste caso. No entanto como demonstrada no apêndice, tomando o elemento de matriz da ordenação temporal do produto dos campos e das suas derivadas e usando a propriedade descrita em (3.69) recuperamos a expansão de Wick com as seguintes modificações

$$\begin{aligned}\Delta_F^N(x-y) &\longrightarrow \Delta_F^0(x-y) = M_0^2 \Delta_F(x-y), \\ \Delta^N(x-y) &\longrightarrow \Delta^0(x-y) = M_0^2 \Delta(x-y),\end{aligned}\tag{3.73}$$

onde $\Delta_F(x-y)$ e $\Delta(x-y)$ representam o propagador de Feynman e a função de Pauli-Jordan respectivamente. Portanto $\mathcal{S}_{fi}^2$ torna-se

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{fi}^2 &= ie^2 \eta^2 \int d^4x d^4y \langle f | : \left[\partial_\mu^x \Delta_F^0(x-y) \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) \right. \\ &- \Delta_F^0(x-y) \partial_\mu^x \phi^\dagger(x) \partial_\nu^y \phi(y) - \partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_F^0(x-y) \phi^\dagger(x) \phi(y) \\ &+ \left. \partial_\nu^y \Delta_F^0(x-y) \partial_\mu^x \phi^\dagger(x) \phi(y) \right] :: C^\mu(x) C^\nu(y) : | i \rangle \\ &+ ie^2 \eta^2 \int d^4x d^4y \langle f | : \delta(x_0 - y_0) \partial_\nu^y \Delta_F^0(x-y) \phi^\dagger(x) \phi(y) : \\ &\quad \left. : C_0(x) C^\nu(y) : | i \rangle .\end{aligned}\tag{3.74}$$

Uma vez que $i\delta(x_0 - y_0) \partial_\nu^y \Delta^0(x-y) = iM_0^2 g_{\nu 0} \delta^4(x-y)$ o último termo da equação anterior resulta em

$$\begin{aligned}ie^2 \eta^2 M_0^2 \int d^4x d^4y \langle f | : \phi^\dagger(x) \phi(y) (C_0(x))^2 : \delta^4(x-y) | i \rangle \\ = ie^2 \eta^2 M_0^2 \int d^4x \langle f | : \phi^\dagger(x) \phi(y) (C_0(x))^2 : | i \rangle .\end{aligned}\tag{3.75}$$

Condição de covariância de Lorentz:

Podemos ver que se escolhermos,

$$\eta^2 = \frac{1}{M_0^2}\tag{3.76}$$

o último termo da equação (3.74) cancela o termo chamado ET na equação (3.57). Assim com essa escolha mostramos que até ordem e^2 que o espalhamento do fóton por uma partícula composta descrita em (3.50)-(3.52) é invariante de Lorentz. Dos termos restantes na equação (3.74) resulta o termo adicional em ordem e^2 que se somará a equação (3.74).

Vamos inicialmente considerar o primeiro termo da equação (3.74),

$$T_1 = \frac{\imath e^2 \eta^2}{M_0^2} \int d^4x d^4y \quad \partial_\mu^x \quad \Delta_F^0(x-y) \langle 0 | A_{p'} : \phi^\dagger(x) \partial_\nu^y \phi(y) : A_p^\dagger | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \quad a_{k'\sigma} : C^\mu(x) C^\nu(y) : a_{k\lambda}^\dagger | 0 \rangle. \quad (3.77)$$

A única parte que difere do caso convencional é o elemento de matriz $\langle 0 | A_{p'} : \phi^\dagger(x) \partial_\nu^y \phi(y) : A_p^\dagger | 0 \rangle$. Usando Eqs. (3.15), (3.16), (3.26) e (3.59) podemos facilmente encontrar

$$\langle 0 | A_{p'} : \phi^\dagger(x) \partial_\nu^y \phi(y) : A_p^\dagger | 0 \rangle = e^{\imath \vec{k}_3 \cdot \vec{x} - \imath \omega(k_3) h(-1 + \delta_{\vec{p}, \vec{k}_3}) t_x}$$

$$\partial_\nu^y e^{-\imath \vec{k}_4 \cdot \vec{y} + \imath \omega(k_4) h(-1 + \delta_{\vec{p}, \vec{k}_4}) t_y} \langle 0 | A_{p'} A_{k_3}^\dagger A_{k_4} A_p^\dagger | 0 \rangle =$$

$$-\imath M_0^4 p_\nu e^{\imath(p' \cdot x - p \cdot y)} \delta_{\vec{p}', \vec{k}_3} \delta_{\vec{p}, \vec{k}_4}. \quad (3.78)$$

O restante dos cálculos são similares ao caso padrão e o resultado final é:

$$T_1 = \frac{-\imath e^2 \eta^2 (2\pi)^4 M_0^4 \epsilon^\mu(k', \sigma) \epsilon^\nu(k, \lambda)}{4\Omega^2 \omega(p) \omega(p') \omega(k) \omega(k')} \left[\frac{p_\nu(p+k)_\mu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{p_\mu(p'-k)_\nu}{(p'-k)^2 - m^2} \right] \delta^{(4)}(p' + k' - p - k). \quad (3.79)$$

Procedendo da mesma maneira no cálculo dos outros termos da equação (3.74) podemos calcular a expansão da matriz- S até a segunda ordem em e^2 ,

$$\mathcal{S}_{fi} = \frac{\imath e^2 M_0^2 \epsilon^\mu(k', \sigma) \epsilon^\nu(k, \lambda)}{16\pi^2 \sqrt{\omega(p) \omega(p') \omega(k) \omega(k')}} T_{\mu\nu} \delta^4(p + k - p' - k'), \quad (3.80)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \left[\frac{M_{\mu\nu}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{N_{\mu\nu}}{(p'-k)^2 - m^2} \right] + 2g_{\mu\nu} \quad (3.81)$$

e

$$M_{\mu\nu} = -[p_\nu + (p+k)_\nu] [(p+k)_\mu + p'_\mu] , \quad (3.82)$$

$$N_{\mu\nu} = -[p_\mu + (p'-k)_\mu] [(p'-k)_\nu + p'_\nu] . \quad (3.83)$$

Onde usamos a condição de invariância de Lorentz $\eta^2 = 1/M_0^2$.

3.1.2 Invariância de Calibre

O Hamiltoniano com o parâmetro η (ver equação (3.19)) não é invariante de calibre. É interessante notar que a amplitude que acabamos de calcular (3.80)-(3.83) é invariante de calibre se os parâmetros forem escolhidos de maneira a satisfazer a invariância de Lorentz. Se a amplitude não muda quando o potencial é re-calibrado $\epsilon_\mu(k) \rightarrow \epsilon_\mu(k) + k_\mu \Lambda(k)$ ou seja

$$T_{\mu\nu} k^\nu = k'^\mu T_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.84)$$

Reescrevendo o denominador em (3.81) como

$$(p+k)^2 - m^2 = p^2 + 2k \cdot p + k^2 - m^2 = 2k \cdot p ,$$

$$(p'-k)^2 - m^2 = p'^2 + 2k \cdot p' - k^2 - m^2 = -2k \cdot p' ,$$

e calculando $M_{\mu\nu} k_\nu$ e $N_{\mu\nu} k_\nu$ obtemos facilmente que a condição dada pela equação (3.84) é trivialmente satisfeita.

3.2 Processo de Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$

No espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ se considerarmos que o comprimento de onda dos fótons é muito grande para interagir com os quarks constituintes do pion, podemos usar o teorema

de baixas energias [68]-[69] para descrever aproximadamente esse espalhamento. Nesse formalismo o pion é rigorosamente tratado como uma partícula pontual que interage com a luz via eletrodinâmica quântica escalar convencional. Porém, a seção de choque prevista por esse formalismo não reproduz os dados experimentais na faixa de energia do centro de massa, $\sqrt{s} > 380$ Mev[75, 76] o que indica que a eletrodinâmica escalar não é suficiente para explicar os dados. Além disso, [70] mostraram que mesmo considerando interações puramente Hadrônicas, descritas por um potencial entre os pions no estado final, a correção obtida é praticamente desprezível, pelo menos na faixa de energia $\sqrt{s} < 1$ Gev. Essa discrepância permite supor que o pion, para essa faixa de energia, não pode ser considerado uma partícula pontual porém o fóton não tem energia suficiente para interagir com os quarks.

Uma outra maneira de resolver esse problema é multiplicar a amplitude do espalhamento, calculado com o formalismo de eletrodinâmica quântica escalar (EQe), por um fator de forma $F_\pi(s)$ [71, 73]. Para uma partícula pontual $F_\pi(0) = 1$. Esse formalismo é muito utilizado na literatura e respeita a invariância de calibre e é renormalizável[74].

Nessa seção mostraremos que a eletrodinâmica baseada na álgebra de Heisenberg generalizada também pode ser utilizada como uma alternativa para estudar a produção de pares de pion na região de energia $\sqrt{s} < 1$ Gev, conduzindo a um resultado melhor que o resultado obtido usando simplesmente a eletrodinâmica convencional. A intenção não é explicar os dados experimentais mas sim testar a aplicabilidade dessa teoria e acumular experiência para futuramente procurar uma possível relação entre os parâmetros da álgebra e a estrutura das partículas compostas ou o potencial efetivo de interação. Nesse primeiro contato com dados experimentais mostramos que a eletrodinâmica escalar generalizada

descreve com grande acuidade os resultados experimentais do processo $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ na faixa de energia $\sqrt{s} < 1$.

3.2.1 Seção de choque $2\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$

Motivados pelos resultados experimentais[75] e pela insuficiência da eletrodinâmica escalar convencional em explicar os dados experimentais, vamos estudar o processo de produção de pares pions

$$2\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

onde π^- e π^+ são pions com estrutura descritos como q-bosons estudados nas seções anteriores.

A seção de choque pode ser facilmente calculada dos resultados do capítulo anterior simplesmente mudando as variáveis de Mandelstam,

$$\sigma = \frac{1}{\omega(k)\omega(k')} \int \frac{dp}{2\omega(p)} \int dp' 2\omega(k') \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} |T^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu}|^2 \quad (3.85)$$

fixando os vetores de polarização $\epsilon_1 = (0, \vec{\epsilon}_1, 0)$ e $\epsilon_2 = (0, \vec{\epsilon}_2, 0)$ como em[67] obtemos a seção de choque paralela e transversal aos vetores de polarização

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}). \quad (3.86)$$

Usando a teoria de campos baseada na álgebra de Heisenberg generalizada com uma

função característica linear, estudada nas seções anteriores e a Eq.(3.76) pode se obter

$$\begin{aligned}
\sigma_{\parallel} &= \frac{4M_0^4}{\omega(k)\omega(k')} \int \frac{dp}{2\omega(p)} \int dp' 2\omega(k') \\
&\times \delta^4(p - k + p' - k') \frac{2e^4}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} \\
&\times 2(k \cdot p)^2 (k' \cdot p) (k' \cdot p) [(k \cdot p) + (k' \cdot p)] p_{\perp}^2 \\
&+ [(k \cdot p) + (k' \cdot p)]^2 (p_x^4 + p_y^4)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_{\perp} &= \frac{4M_0^4}{\omega(k)\omega(k')} \int \frac{dp}{2\omega(p)} \int dp' 2\omega(k') \\
&\times \delta^4(p - k + p' - k') \frac{2e^4}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} [(k \cdot p) \\
&+ (k' \cdot p)]^2 p_x^2 p_y^2,
\end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $M_0^2 = (q - 1)\alpha_0 + 1$. Integrando (3.87-3.88), a seção de choque é então dada por

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}) = \\
&= \frac{\pi M_0^2 \alpha^2}{m_{\pi}^2} [2x\sqrt{1-x} - x^2(2-x)\ln(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}})]
\end{aligned} \tag{3.89}$$

sendo $x \equiv 4m_{\pi}^2/s$, $s = E_{c.m.}^2$ a Variável de Mandelstam, e m a massa do pion.

Para comparação com dados experimentais devemos levar em consideração que o detector somente recebe partículas espalhadas dentro de um determinado ângulo sólido. Portanto, é necessário integrar Eq. (3.89) sobre um ângulo sólido limitado por ($|\cos\theta| < Z$) dando

$$\begin{aligned}
\sigma_{ac} &= \frac{\pi M_0^2 \alpha^2}{m_{\pi}^2} [2Zx\sqrt{1-x}(\frac{x^2}{1-(1-x)Z^2} + 1) \\
&- x^2(2-x)\ln(\frac{1+\sqrt{1-x}Z}{1-\sqrt{1-x}Z})].
\end{aligned} \tag{3.90}$$

A eq. (3.90) pode ser comparado com os dados experimentais e os valores dos parâmetros da AHG obtidos pelo método de mínimos quadrados.

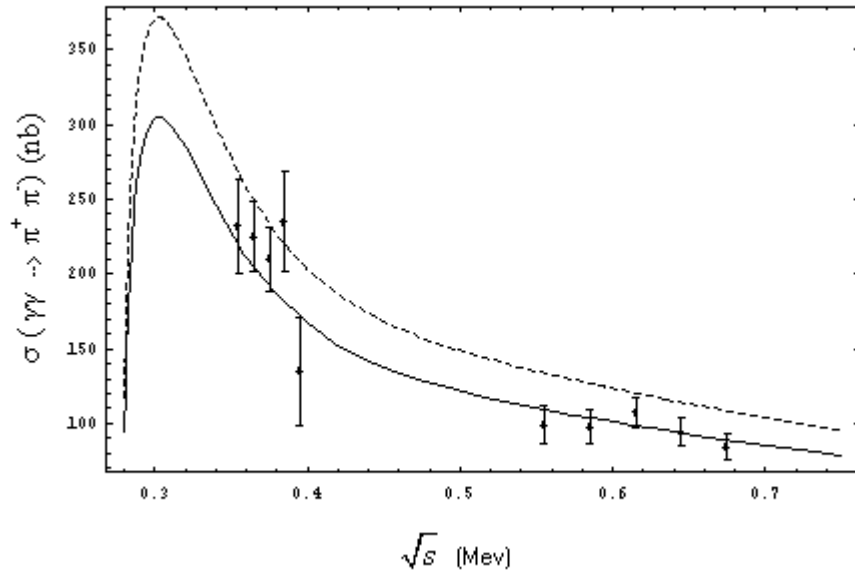


Figura 3.1: Comparação entre a seção de choque obtido com a eletrodinâmica escalar convencional (linha tracejada) e generalizada (linha sólida). Os dados experimentais são da referência [75] e o ajuste foi obtido com $\zeta^2 = 0.82$

A Fig.3.1 mostra a comparação entre a seção de choque prevista pela eletrodinâmica quântica escalar convencional e a generalizada para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ e os dados experimentais[75, 76]. Pode-se ver pela figura que a eletrodinâmica escalar descreve bem os dados experimentais para energia mais baixas uma vez que nessa faixa os pions podem ser considerados como sendo pontuais. Aumentando a energia pode-se ver uma discrepância com os dados experimentais. Cálculos, usando a QCD perturbativa nessa região, apresentam um ajuste insatisfatório com os dados experimentais[77]. Podemos então concluir que na região $0.55 - 0.7$ GeV o pion não deve ser considerada uma partícula pontual porém o fóton não tem energia suficiente para interagir com os quarks. Portanto, os pions nessa faixa de energia comportam-se como partículas estendidas.

3.2.2 Análise dos Resultados

Em suma, contruímos uma eletrodinâmica escalar generalizada onde os bósons escalares são criados e/ou aniquilados pelos operadores da álgebra de Heisenberg generalizada descrita no capítulo 1 e os fótons são descritos de maneira semelhante a teoria convencional. Seguindo a sugestão das referências ([60] - [62]) interpretamos os operadores de criação e aniquilação dessa álgebra como operadores que criam e aniquilam partículas compostas. O Hamiltoniano de interação é parcialmente modificado, introduzindo uma constante, η , nos termos que possuem derivadas. Essa constante é introduzida para descrever fenomenologicamente a interação da partícula não pontual. Encontramos que o espalhamento $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$ para $\eta = 1/M_0$ preserva as simetrias de Lorentz e calibre. Dentro do formalismo da eletrodinâmica escalar generalizada calculamos o processo $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$

até a segunda ordem da constante de acoplamento com estado inicial

$$|i\rangle \equiv |k, p\rangle = \frac{a_{k\lambda}^\dagger A_p^\dagger}{M_0} |0\rangle \quad (3.91)$$

e final

$$|f\rangle \equiv |k', p'\rangle = \frac{a_{k'\sigma}^\dagger A_{p'}^\dagger}{M_0} |0\rangle, \quad (3.92)$$

onde os bósons, representado por P^+ e P'^+ , são criados pela AHG e os fótons, denotado por γ são os convencionais.

Os cálculos mencionados acima podem ser resumidos da seguinte maneira: Considerando um parâmetro η , que aparece no termo de interação, satisfazendo a relação $\eta^2 = 1/M_0^2$ onde M_0 é definida na equação (1.57) o espalhamento descrito acima é invariante de Lorentz e calibre. Temos duas soluções possíveis mas somente a solução positiva $\eta^{(+)} = 1/M_0$ satisfaz (3.54). Portanto, o Hamiltoniano de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} &= \frac{ie}{M_0} : [\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \phi(x)^\dagger \phi(x)] C^\mu : \\ &- e^2 : \phi^\dagger(x) \phi(x) C_\mu C^\mu : , \end{aligned} \quad (3.93)$$

pode ser usado com o teorema de Wick padrão com as seguintes modificações

$$\begin{aligned} \Delta_F^N(x-y) &\longrightarrow \Delta_F^0(x-y) = M_0^2 \Delta_F(x-y), \\ \Delta^N(x-y) &\longrightarrow \Delta^0(x-y) = M_0^2 \Delta(x-y), \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde $\Delta_F(x-y)$ e $\Delta(x-y)$ representam o propagador de Feynman e a função de Pauli-Jordan respectivamente. Além disso convém notar que o elemento de matriz foi calculado usando as relações da AHG (1.58-1.60). É importante notar, ainda, que o Hamiltoniano clássico modificado pelo parâmetro η não é invariante de calibre. No entanto, mostramos

que o processo de espalhamento $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$, é invariante de calibre se considerarmos que η satisfaz a condição de invariância de Lorentz $\eta = 1/M_0$.

Calculamos a seção de choque para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ mostrando um melhor acordo da eletrodinâmica quântica generalizada no ajuste dos dados experimentais que a electrodinâmica usual e QCD na região considerada. É importante notar que este é o primeiro ajuste com os dados experimentais mas acreditamos que poderá ser possível inferir a partir dos dados experimentais alguma particularidade da estrutura da partícula composta ou do potencial efetivo.

Capítulo 4

Renormalização da teoria de campos Generalizada

É possível demonstrar que as divergências UV em teoria quântica de campos, ou seja os infinitos da teoria, podem ser removidos pela renormalização dos parâmetros da Lagrangeana[49, 50]. É conveniente fazer as seguintes definições:

- Uma teoria quântica de campos é dita renormalizável, se for finita após a remoção das divergências UV pelo ajuste dos coeficientes da Lagrangeana.
- Uma teoria é dita não renormalizável, se não for renormalizável independente do método de abordagem: métodos perturbativos ou não perturbativos.

4.1 Divergências em $(\lambda\phi^4)$

Um elemento importante no estudo da renormalizabilidade é a contagem do grau de divergência $\Delta(\Gamma)$ de um determinado gráfico, que consiste simplesmente em contar os expoente

das potência de um loop quando o momento vai a infinito. O loop é divergente se $\Delta(\Gamma) \geq 0$ e convergente se $\Delta(\Gamma) < 0$.

Na teoria $\lambda\phi^4$ em quatro dimensões é fácil ver que $\Delta = 4$ —número de linhas externas. Por essa razão a função de 4 pontos é logaritmicamente divergente e a auto-energia tem grau de divergência $\Delta = 2$. Diferenciando o gráfico de auto-energia três vezes em relação ao momento externo obtemos uma integral convergente com $\Delta = -1$.

4.2 Discussão Sobre os Dois Casos: Linear e Quadrático

4.2.1 Caso Linear

Nessa seção usaremos um procedimento análogo à referência [49] para mostrar que a TQC deformada que estudamos no capítulo 2 é renormalizável, para o caso linear e quadrático, até a segunda ordem.

No capítulo 2 estudamos o processo de espalhamento de duas partículas compostas, $1+2 \rightarrow 1' + 2'$, usando a teoria de perturbação até a segunda ordem, para $p_1 \neq p_2 \neq p'_1 \neq p'_2$ com estado inicial $|1, 2\rangle \equiv \frac{1}{M_0^2} A_{p_1}^\dagger A_{p_2}^\dagger |0\rangle$ e final $|1', 2'\rangle \equiv \frac{1}{M_0^2} A_{p'_1}^\dagger A_{p'_2}^\dagger |0\rangle$, onde A_{p_i} e $A_{p_i}^\dagger$ satisfazem as relações algébricas dada pelas Eqs. (1.58) e (1.60). Estas partículas supostamente são descritas pelo Hamiltoniano de interação $H_I = \frac{\lambda_0}{4!} \int \phi_0(\vec{r}, t)^4 d^3r$.

Até a segunda ordem em λ_0 , temos

$$\begin{aligned} \langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle &= -i \frac{\lambda_0}{4!} \int d^4x \langle 1', 2' | \phi_0^4(x) | 1, 2 \rangle \\ &+ \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{\lambda_0}{4!} \right)^2 \int \int d^4x d^4y \langle 1', 2' | T(\phi_0^4(x) \phi_0^4(y)) | 1, 2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde na equação acima S é o elemento de matriz convencional. Uma vez que o propagador não é um número complexo nós modificamos a expansão de Wick convencional e levando em consideração essas modificações, calculamos o processo $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ e obtemos o seguinte resultado

$$\langle 1', 2' | S | 1, 2 \rangle = \frac{\lambda_0 M_0^2}{Q_u} A_1 + \frac{\lambda_0^2 M_0^4}{Q_u^2} (A_2^s + A_2^t + A_2^u) , \quad (4.2)$$

onde $Q_u = (1 + u + q^2)/2$, A_1 , A_2^s , A_2^t e A_2^u são as mesmas contribuições da teoria $\lambda\phi^4$ não deformada que correspondem em nível de árvore aos canais s , t e u para um loop, respectivamente.

Por essa razão, as contribuições que a teoria quântica de campos deformada introduz na série perturbativa que interpretamos como descerevendo fenomenologicamente a estrutura da partícula composta, podem ser interpretadas do ponto de vista da teoria de campos padrão como uma redefinição da constante de acoplamento, λ , que aparece no Hamiltoniano para $\lambda'_0 = M_0^2 \lambda_0 / Q_u$, sendo λ'_0 a nova constante efetiva de acoplamento.

Como mencionado anteriormente A_1 , A_2^s , A_2^t e A_2^u são as mesmas contribuições que encontramos no modelo $\lambda\phi^4$ não deformado. É fácil ver que na teoria de campos deformada, podemos expressar a constante de acoplamento nua λ_0 em termos da constante de acoplamento finita como:

$$\lambda_0 = \lambda \mu^{4-n} \left[1 - \frac{3\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u} \frac{1}{n-4} \right] , \quad (4.3)$$

onde n é a dimensão do espaço - tempo e μ é o parâmetro auxiliar usado para obter a dimensão correta para um n arbitrário.

Podemos notar que a diferença em relação ao caso convencional é dada pelo fator M_0^2/Q_u dentro do parênteses. Vamos, agora, calcular a função de correlação de dois pontos

$\langle \Omega | T \phi_0(x) \phi_0(y) | \Omega \rangle$ onde $|\Omega\rangle$ é o vácuo da teoria interagente. Seguindo o procedimento padrão [51] temos:

$$\langle \Omega | T \phi_0(x) \phi_0(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_0(x) \phi_0(y) \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}. \quad (4.4)$$

Para uma teoria livre, obtemos:

$$\langle 0 | T \phi_0(x) \phi_0(y) | 0 \rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4} M_0^2 \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - i Q_u M_0^2 k^0 (x^0 - y^0)} d^4 k}{k^2 + m^2}. \quad (4.5)$$

É conveniente definir

$$\langle \Omega | T \phi_0(x) \phi_0(y) | \Omega \rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4} M_0^2 \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - i k^0 Q_u M_0^2 (x^0 - y^0)} G_0(k) d^4 k \quad (4.6)$$

e a energia-própria $\Sigma_0(k)$ que é relacionada como o propagador por:

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + m_0^2 + \Sigma_0(k)}. \quad (4.7)$$

Expandindo o numerador da eq. (4.4) até a primeira ordem em λ_0 , temos para $x^0 > y^0$

$$\langle 0 | U_1(T, x^0) \phi_0(x) \phi_0(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_0(x) U_1(x^0, y^0) \phi_0(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_0(x) \phi_0(y) U_1(y^0, -T) | 0 \rangle, \quad (4.8)$$

onde $U_1(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1)$. Vamos analisar a ordem normal e temporal de seis campos $\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi(x_5) \phi(x_6)$. É possível ver que temos seis termos que tem valor esperado no vácuo diferente de zero. Eles São os seguintes:

$$\begin{aligned} & D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_2}}(x_3, x_4) \left(D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_1}}(x_2, x_5) D^N(x_1, x_6) + D^N(x_1, x_5) D^N(x_2, x_6) \right) + \\ & D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_1}}(x_2, x_4) D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_1}}(x_3, x_5) D^N(x_1, x_6) + D^N(x_1, x_4) D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_2}}(x_3, x_5) D^N(x_2, x_6) + \\ & D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_1}}(x_2, x_4) D^N(x_1, x_5) D^N(x_3, x_6) + D^N(x_1, x_4) D^N(x_2, x_5) D^N(x_3, x_6) \quad , \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $D^{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_i}}$ deve ser entendido como uma substituição de $N_{\vec{k}}$ por $N_{\vec{k}} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i}$ na expressão do propagador, onde $\vec{k}$ é o momento a ser integrado (veja Eq. (2.62)).

Levando em consideração a última equação e descartando só termos desconectados, obtemos o resultado para expansão de Wick que corresponde aos primeiros três termos da eq (4.8)

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{D}^{(0)}(x - x_1) \left[3\mathcal{D}^{(0)}(0) + 2\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1})}(0) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1}+\delta_{\vec{k}_2})}(0) \right] + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(x - x_1) \right. \\ & \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(0) + \left[\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(x - x_1) + 2\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_2})}(x - x_1) \right] \mathcal{D}^{(0)}(0) \\ & + \left. \left[\mathcal{D}^{(0)}(x - x_1) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1})}(x - x_1) \right] \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1})}(0) \right\} \mathcal{D}^{(0)}(x_1 - y), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}^{(0)}(x - x_1) \left[5\mathcal{D}^{(0)}(0) + 3\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1})}(0) + 2\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_2})}(0) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(0) + \right. \\ & \left. \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1}+\delta_{\vec{k}_2})}(0) \right] \mathcal{D}^{(0)}(x_1 - y), \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}^{(0)}(x - x_1) \left\{ \left[3\mathcal{D}^{(0)}(0) + 2\mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(0) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_x}+\delta_{\vec{k}_y})}(0) \right] \mathcal{D}^{(0)}(x_1 - y) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(0) \right. \\ & \left. \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_y})}(x_1 - y) + \left[3\mathcal{D}^{(0)}(0) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_1})}(0) + \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_x}+\delta_{\vec{k}_y})}(0) \right] \mathcal{D}^{(0+\delta_{\vec{k}_x})}(x_1 - y) \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

respectivamente, sendo $\delta_{\vec{k}_i} \equiv \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(0+\Delta)}(x) \equiv \langle 0 | D^{N+\Delta}(x) | 0 \rangle &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{S(\Delta + 1)^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - ik_0 h(\Delta) t} d^4 k}{k^2 + m^2} \\ &- (\Delta \rightarrow \Delta - 1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $\Delta = 0, \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i}, \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_j}$, sendo $S(x)$ e $h(x)$ definidos na Eqs. (2.27) e (2.55), respectivamente.

Vamos integrar sobre dx_1 cada termo da equação (4.10)-(4.12). Uma análise das integrais aparecendo nessas equações mostram que elas são divergentes. Para contornar esse problema usaremos o procedimento padrão descrito na regularização dimensional, reduzindo a dimensão de 4 para $4 - \epsilon$ sendo ϵ um parâmetro pequeno, $\epsilon > 0$. Fazendo isso a integral passa a ser convergente e usando a propriedade (3.69) obtemos,

$$N^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda_0}{2} \int d^4 x_1 \mathcal{D}^{(0)}(x - x_1) \mathcal{D}^{(0)}(0) \mathcal{D}^{(0)}(x_1 - y). \quad (4.14)$$

Usando a eq (4.5) podemos então reescrever a equação (4.14) depois da redifinição $x_1^0 \rightarrow Q_u M_0^2 x_1^0$ como

$$N^{(1)}(x, y) = -\frac{i\lambda_0 M_0^4}{2Q_u (2\pi)^{12}} \int \frac{d^4 x_1 d^4 p d^4 k_1 d^4 k_2}{(p^2 + m^2)(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2)} \exp[ix_1 \cdot (-k_1 + k_2)] \\ \exp\left(i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - iQ_u M_0^2 k_1^0 x^0\right) \exp\left(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{y} + iQ_u M_0^2 k_2^0 y^0\right). \quad (4.15)$$

Integrando sobre $d^4 x_1$, obtemos

$$N^{(1)}(x, y) = -\frac{iM_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \exp\left[i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - iQ_u M_0^2 k^0 (x^0 - y^0)\right] N^{(1)}(k), \quad (4.16)$$

onde

$$N^{(1)}(k) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_0 M_0^2}{Q_u} \Delta(0) \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}, \quad (4.17)$$

e $\Delta(0) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 + m^2}.$

Comparando as últimas duas equações com a eq (4.6) e (4.7), obtemos a correção de primeira ordem para a auto-energia

$$\Sigma_0^{(1)}(k) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 M_0^2}{Q_u} \Delta(0) \quad (4.18)$$

e a correção da massa é dada por

$$m_0^2 = m^2 \left[1 - \frac{\lambda M_0^2}{(2\pi)^4 Q_u} \frac{1}{n-4} \right]. \quad (4.19)$$

Podemos, agora, calcular o termo de segunda ordem em λ para a função de correlação de dois pontos. Podemos esperar que o resultado seja semelhante ao caso convencional com as alterações apropriada devido aos parâmetros da álgebra. Não é difícil concluir que até a segunda ordem a renormalização da massa é dada por

$$m_0^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u^2} \frac{1}{n-4} + \left[\frac{\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u^2} \right]^2 \left[\frac{2}{(n-4)^2} + \frac{5}{12} \frac{1}{n-4} \right] \right\}, \quad (4.20)$$

e a função de onda renormalizada é dada por:

$$\phi_0(x) = z_1 \phi(x). \quad (4.21)$$

onde z_1 é dada pela equação

$$z_1^2 = 1 + \frac{1}{12} \left[\frac{\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u^2} \right]^2 \frac{1}{n-4}, \quad (4.22)$$

4.2.2 Caso Quadrático

Matematicamente o caso quadrático é obtido de forma análoga ao linear. Repetindo os cálculos da seção anterior pode-se demonstrar após a renormalização que a constante de acoplamento é dada por

$$\lambda_0 = \mu^{4-n} \left[\lambda + \frac{3\lambda^2 M_0^2}{(4\pi)^2 (1 + q + p(M_0^2 + 2\alpha_0))} \frac{1}{(4-n)} \right] \quad (4.23)$$

onde n é a dimensão de espaço-tempo, λ_0 é a constante de acoplamento nua e λ a constante renormalizada. O limite $n \rightarrow 4$ deve ser tomada de forma crescente. Portanto, quando n

se aproxima de 4 o denominador da eq (4.23) zero para

$$n = 4 - \frac{3\lambda(p\alpha_0^2 + (q-1)\alpha_0 + 1)}{(4\pi)^2(1+q+p(M_0^2 + 2\alpha_0))} \quad (4.24)$$

para uma teoria quântica de campos baseada na álgebra GHA quadrática. tomando $p \rightarrow 0$ recuperamos o caso linear

$$n = 4 - \frac{3\lambda((q-1)\alpha_0 + 1)}{(4\pi)^2(1+q)} \quad (4.25)$$

e se ainda fizermos $q \rightarrow 1$ recuperamos o caso convencional

$$n = 4 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \quad (4.26)$$

A função de dois pontos pode ser calculada, também, de maneira semelhante ao caso linear e a massa nua após renormalização é dada por

$$m_0^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u^2} \frac{1}{n-4} + \left[\frac{\lambda M_0^2}{(4\pi)^2 Q_u^2} \right]^2 \left[\frac{2}{(n-4)^2} + \frac{5}{12} \frac{1}{n-4} \right] \right\}, \quad (4.27)$$

Capítulo 5

Comentários Finais e Perspectivas

Motivado pelo fato de que a álgebra dos pares de férmions com momento angular nulo pode ser aproximado a uma álgebra de q-osciladores conjecturamos que as álgebras deformadas podem descrever fenomenologicamente uma partícula quântica composta escalar. Além disso, vários trabalhos na literatura apontam para uma relação entre sistemas compostos e as álgebras deformadas [17]-[33]. Como exemplo, mostramos que um modelo baseado em álgebras deformadas pode ser utilizada para descrever uma molécula de CO apresentando uma ótima concordância com os dados experimentais.

Tomando como ponto de partida a relação entre as álgebras deformada e os sistemas compostos, argumentamos que uma possível maneira de escrever uma teoria de campos que descreve fenomenologicamente as interações entre partículas compostas, é modificar as relações de comutação da teoria de campos convencional.

Para modificar as relações de comutação usamos a álgebra de Heisenberg generalizada. Essa álgebra possui três geradores e as relações de comutação são generalizadas com uma função $f(J_0)$, sendo J_0 um dos geradores da AHG. As relações de comutação padrão da

álgebra de Heisenberg são recuperadas quando $f(J_0) = J_0 + 1$. Esta função, chamada função característica, permite-nos obter estruturas algébricas mais gerais. Por exemplo, se $f(J_0) = qJ_0 + 1$, esta álgebra se transforma na álgebra dos q -osciladores que, no limite $q \rightarrow 1$, recuperamos a álgebra de Heisenberg (AH). Quando f é uma função não linear, vimos que as relações algébricas tornam-se mais gerais que a AH e a álgebra dos q -osciladores. Foi mostrado que dois auto-valores sucessivos de J_0 estão relacionados por $\varepsilon_n = f(\varepsilon_{n-1})$, sendo que ε_n é o auto-valor correspondente a um autoestado geral, $|n\rangle$, de J_0 . Como vimos, um auto-valor ε_n de J_0 pode ser escrito como $\varepsilon_n = f^{(n)}(\alpha_0)$, onde $f^{(n)}(\alpha_0)$ é a n -ésima iteração da função f em α_0 (auto-valor de vácuo). Assim, as representações da AHG foram estudadas analisando a estabilidade dos atratores da função característica f e de suas funções compostas. Os autovalores do operador J_0 podem apresentar os mais variados comportamentos. Portanto uma restrição nos parâmetros da álgebra deve ser feita para que o autovalor do vácuo seja o menor autovalor do espectro da álgebra.

Utilizando essa álgebra mostramos que é possível construir uma teoria de campos consistente que cria em qualquer ponto do espaço-tempo, partículas compostas descritas fenomenologicamente por essa álgebra. Reescrevemos a expansão de Fourier dos campos, $\phi(x)$ e $\pi(x)$, em função dos operadores de criação e aniquilação que satisfazem as relações de comutação da álgebra deformada de Heisenberg.

Usamos o Hamiltoniano de Klein-Gordon para descrever uma partícula de spin zero e resolvemos as equações de Heisenberg. Foram estudadas a contração de Dyson-Wick entre dois campos $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ para a teoria livre e observamos que esta depende de um operador número. Nessa teoria de campos a contração de Dyson-Wick não é mais um número complexo e este fato introduz algumas modificações no teorema de Wick como

explicadas nessa tese.

Calculamos o processo de espalhamento $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ até a segunda ordem e o resultado mostra que as contribuições que a teoria quântica de campos deformada introduz na série perturbativa (que interpretamos como descrevendo fenomenologicamente os efeitos da estrutura da partícula composta) podem ser interpretadas do ponto de vista da teoria de campos padrão como uma redefinição da constante de acoplamento, λ , que aparece no Hamiltoniano para $\lambda'_0 = M_0^2 \lambda_0 / Q_u$, sendo λ'_0 a nova constante efetiva de acoplamento. As modificações que encontramos são devidas ao nosso tratamento fenomenológico do espalhamento de partículas compostas.

Desenvolvemos, nessa tese, uma teoria de campos escalar real para o caso em que a função característica da álgebra de Heisenberg generalizada é linear e para uma função quadrática. Mostramos que em ambos casos a constante de acoplamento da teoria convencional é redefinida com auxílio dos parâmetros da álgebra. Comparação entre os dois casos mostra que no caso quadrático a constante de acoplamento redefinida λ'_0 pode ser tanto negativo quanto positivo mantendo a constante convencional $\lambda_0 > 0$.

Com a finalidade de estudar a interação com o fóton, contruímos uma eletrodinâmica escalar deformada onde os bósons escalares são criados e/ou aniquilados pelos operadores da álgebra de Heisenberg generalizada e os fótons são descritos de maneira semelhante a teoria convencional.

O Hamiltoniano de interação é parcialmente modificado, introduzindo uma constante, η , nos temos que possuem derivadas. Essa constante é introduzida para descrever fenomenologicamente a interação da partícula não pontual.

Dentro do formalismo da eletrodinâmica escalar generalizada calculamos o processo

$P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$ até a segunda ordem da constante de acoplamento com estado inicial

$$|i\rangle \equiv |k, p\rangle = \frac{a_{k\lambda}^\dagger A_p^\dagger}{M_0} |0\rangle \quad (5.1)$$

e final

$$|f\rangle \equiv |k', p'\rangle = \frac{a_{k'\sigma}^\dagger A_{p'}^\dagger}{M_0} |0\rangle, \quad (5.2)$$

onde o bóson, representado por P^+ , são criados pela AHG e os fótons, denotado por γ são os convencionais. Encontramos que o espalhamento $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$ para $\eta = 1/M_0$ preserva as simetrias de Lorentz e calibre no nível quântico.

É importante notar, ainda, que o Hamiltoniano modificado pelo parâmetro η não é invariante de calibre. No entanto, mostramos que o processo de espalhamento $P^+ + \gamma \rightarrow P'^+ + \gamma'$, é invariante de calibre se considerarmos que η satisfaz a condição de invariância de Lorentz $\eta = 1/M_0$.

Calculamos a seção de choque para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ mostrando uma maior acuidade da eletrodinâmica quântica deformada no ajuste dos dados experimentais que a electrodinâmica usual e QCD na região considerada. É importante notar que este é o primeiro contato com os dados experimentais mas acreditamos que poderá ser possível inferir a partir dessa comparação com a experiência estudada nessa tese e de outros dados experimentais alguma particularidade da estrutura da partícula composta ou do potencial efetivo.

Finalmente investigamos a renormalizabilidade da teoria $\lambda\phi^4$ para o caso em que a função característica é linear e quadrática. Obtemos a correção para a auto-energia, massa e função de onda até segunda ordem na constante de acoplamento e mostramos que a teoria

quântica de campos baseada na álgebra de Heisenberg generalizada é renormalizável até essa ordem. O procedimento adotado é estritamente o do caso não deformado uma vez que a teoria pode ser vista como uma redefinição da constante de acoplamento de λ para $\lambda' = M_0^2 \lambda / Q_u$.

Futuramente esperamos calcular as equações do grupo de renormalização dessa teoria de campos generalizada, usar os resultados dessa tese para corrigir a seção de choque de colisões periféricas de íons pesados[78]-[88] e interpretar fisicamente os parâmetros da álgebra generalizada.

Apêndice A

A Álgebra dos q -Osciladores

A.1 Oscilador Harmônico

Iniciaremos nossa discussão com o método do operador de Dirac, a partir do qual obtaremos os autovalores e autovetores do oscilador harmônico (OH) simples [89].

A hamiltoniana do oscilador harmônico (OH) é dada por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (\text{A.1})$$

sendo ω a frequência angular do oscilador clássico; x e p são os operadores hermitianos momento e posição que satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[x, p] = i\hbar. \quad (\text{A.2})$$

Define-se dois operadores não-hermitianos a e $a^\dagger$ como,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right). \quad (\text{A.4})$$

Usando a relação de comutação (A.2), obtemos

$$[a, a^\dagger] = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)(-i[x, p] + i[p, x]) = 1. \quad (\text{A.5})$$

Definindo agora o operador número,

$$N \equiv a^\dagger a, \quad (\text{A.6})$$

obtemos uma relação importante entre o operador número e o operador Hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.7})$$

Chamando um autoestado de N de $|n\rangle$, sendo n o autovalor associado, obtemos:

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle, \quad (\text{A.8})$$

e assim os autovalores de H do OH são dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{A.9})$$

Da definição de N podemos ver que

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] \quad (\text{A.10})$$

$$= a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a \quad (\text{A.11})$$

$$= -a. \quad (\text{A.12})$$

Analogamente:

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (\text{A.13})$$

Assim, os operadores $a^\dagger$, a e N geram uma álgebra descrita pelas seguintes relações de comutação:

$$[N, a] = -a \quad (\text{A.14})$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (\text{A.15})$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (\text{A.16})$$

que é conhecida como álgebra de Heisenberg, ou álgebra do oscilador harmônico.

Agora, procuraremos uma representação da álgebra descrita pelas relações de comutação (A.14-A.16). Da eq.(A.15) podemos ver que

$$Na^\dagger = a^\dagger(N+1). \quad (\text{A.17})$$

Aplicando a eq.(A.17) a um autoestado $|n\rangle$ de N obtemos

$$N(a^\dagger|n\rangle) = a^\dagger(N+1)|n\rangle = (n+1)(a^\dagger|n\rangle). \quad (\text{A.18})$$

Podemos notar que $a^\dagger|n\rangle$ é também um autoestado do operador N com um autovalor acrescido de uma unidade em relação ao autovalor de $|n\rangle$. Por esse motivo o operador $a^\dagger$ é chamado de operador levantamento. Analogamente, o operador a é conhecido como operador abaixamento.

Supondo que exista um autovetor de “vácuo” $|0\rangle$ tal que $a|0\rangle = 0$, ou $N|0\rangle = 0$, podemos obter uma representação da álgebra de Heisenberg dada por

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (\text{A.19})$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (\text{A.20})$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (\text{A.21})$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$. Podemos ver também que um autovetor $|n\rangle$ pode ser obtido da seguinte maneira:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \quad (\text{A.22})$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

Neste ponto, é interessante relembrar a associação proposta por M. Planck entre unidades de energias discretas e radiação de osciladores que conduziu ao nascimento dos conceitos quânticos [89]. Como mostramos, a atuação do operador $a^\dagger$ em um vetor $|n\rangle$ faz o sistema ir de um autovetor $|n\rangle$ para um outro autovetor $|n+1\rangle$, que possui um autovalor de energia do operador Hamiltoniano H acrescido de uma quantidade $\hbar\omega$ em relação ao autovalor de $|n\rangle$. Assim, podemos associar o surgimento de *partículas pontuais* e independentes (*fótons*), criadas nas paredes de um corpo negro em equilíbrio a uma certa temperatura e possuindo uma energia igual a $\hbar\omega$, com a ação do operador $a^\dagger$ em um espaço de Fock, que seria, então, um operador de *criação*, neste caso, de partículas pontuais. Analogamente, podemos ver que o operador a pode ser interpretado como um operador de *aniquilação* de partículas pontuais. Podemos notar, também, que uma consequência direta do fato das partículas serem independentes é que $E_n = nE_1$, i.e., a energia de n partículas é n vezes a energia de uma única partícula, ou seja, a energia é aditiva.

Esta propriedade do espectro de energia do oscilador harmônico foi discutida quando estudamos a Álgebra de Heisenberg Generalizada (AHG), no que concerne à interpretação fenomenológica.

A.2 A álgebra dos q -Osciladores

Uma vez introduzida a álgebra de Heisenberg, ou álgebra do oscilador harmônico, iremos introduzir a álgebra dos q -osciladores. É importante frisar que existem outras versões de álgebras deformadas de osciladores (veja, por exemplo [90]-[91]), mas, elas são equivalentes e podem ser acomodadas dentro de uma mesma classe de álgebra deformada de oscilador ([92],[93]).

De um ponto de vista histórico, essa álgebra foi introduzida por Arik e Coon [94]. Apesar disto, a álgebra dos q -osciladores só se tornou bem difundida quando Macfarlane [15] e Biedenharn [14], onde em um cenário em que já existiam álgebras quânticas, como por exemplo o $su_q(2)$, realizam a álgebra do $su_q(2)$ de maneira semelhante à realização da álgebra do $su(2)$, através da álgebra de dois osciladores harmônicos independentes, como feito por Jordan e Schwinger [89]. Eles percebem que para fazer tal realização é necessário uma álgebra diferente (deformada) daquela apresentada pelos osciladores harmônicos. A diferença entre a álgebra do oscilador (álgebra de Heisenberg) e a álgebra deformada introduzida por Macfarlane e Biedenharn, também chamada de q -osciladores, é um parâmetro de deformação q a partir do qual podemos obter a álgebra do oscilador harmônico quando q tende à unidade.

Essa álgebra deformada de Heisenberg, ou álgebra dos q -osciladores, é gerada por três

operadores $b^\dagger$, b e N satisfazendo às seguintes relações de comutação:

$$[N, b] = -b \quad (\text{A.23})$$

$$[N, b^\dagger] = b^\dagger \quad (\text{A.24})$$

$$[b, b^\dagger]_{q^\pm} = q^{\mp N}, \quad (\text{A.25})$$

sendo $b = (b^\dagger)^\dagger$; $[b, b^\dagger]_{q^\pm} \equiv bb^\dagger - q^\pm b^\dagger b$ é o $(q^\pm)$ -comutador e q um número real chamado de parâmetro de deformação. Note que quando $q \rightarrow 1$ as relações de comutação acima recuperam as relações de comutação da álgebra de Heisenberg, eqs.(A.14-A.16). Como uma consequência imediata da eq.(A.25), obtemos

$$b^\dagger b = [N], \quad (\text{A.26})$$

e

$$bb^\dagger = [N + 1], \quad (\text{A.27})$$

onde

$$[x] \equiv \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}. \quad (\text{A.28})$$

De maneira análoga ao feito no caso da álgebra de Heisenberg, procuraremos uma representação para a álgebra dos q -osciladores. Da equação (A.24) podemos ver que

$$Nb^\dagger = b^\dagger(N + 1). \quad (\text{A.29})$$

Aplicando a eq.(A.29) a um autoestado de N obtemos

$$N(b^\dagger|n\rangle) = b^\dagger(N + 1)|n\rangle = (n + 1)(b^\dagger|n\rangle). \quad (\text{A.30})$$

Podemos notar, também, que o estado $b^\dagger|n\rangle$ é um autoestado do operador N com um autovalor acrescido de uma unidade em relação ao autovalor de $|n\rangle$. Assim o operador $b^\dagger$ é o operador levantamento da álgebra dos q -osciladores. Analogamente, o operador b é o operador abaixamento. Da eq.(A.30) podemos escrever que $b^\dagger|n\rangle = c|n+1\rangle$. A constante c pode ser calculada impondo que os autoestados de N sejam normalizados, i.e.,

$$|c|^2 \langle n+1|n+1\rangle = |c|^2 = \langle n|bb^\dagger|n\rangle \quad (\text{A.31})$$

e utilizando a eq.(A.27) obtemos, para valores de c positivos, $c = \sqrt{[n+1]}$. De maneira similar podemos deduzir como o operador b atua nos autoestados de N .

A base no espaço de Fock é definida por aplicações sucessivas do operador $b^\dagger$ no vácuo, que é aniquilado por b , $b|0\rangle = 0$, da seguinte maneira:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (b^\dagger)^n |0\rangle, \quad (\text{A.32})$$

sendo $[n]! \equiv [n][n-1]\dots[1]$ e n um número inteiro.

Com isso, podemos exibir uma representação da álgebra dos q -osciladores como se segue:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (\text{A.33})$$

$$b^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle \quad (\text{A.34})$$

$$b|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle \quad (\text{A.35})$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$.

Note que esta representação difere da representação da álgebra de Heisenberg padrão pelo fato de aparecer $[n]$ no lugar de n . Como $[n] \rightarrow n$ quando $q \rightarrow 1$ a álgebra do q -oscilador pode ser deformada continuamente a álgebra de Heisenberg.

É importante frisar que da eq.(A.32), se impusermos a condição de nilpotência $(b^\dagger)^d = 0$ [95] para algum inteiro d , obtemos uma representação com um número finito de estados. Isto ocorre quando o parâmetro q for raiz da unidade $q^d = 1$ já que neste caso teremos $[d] = 0$. Este caso tem sido relacionado com sistemas de ânions (*anions*) [96].

Partindo do Hamiltoniano para o q -oscilador,

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(b^\dagger b + b b^\dagger), \quad (\text{A.36})$$

os seus autovalores, usando as eqs.(A.33-A.35), são

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}([n] + [n + 1]) = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{[n + 1/2]}{[1/2]}, \quad (\text{A.37})$$

sendo $n = 0, 1, 2, \dots$. Podemos facilmente ver que para um dado valor de q real, o espectro de energias difere daquele dado pelo oscilador harmônico em que os níveis de energia são igualmente espaçados. Das eqs.(A.28-A.37) podemos ver que para todo $q > 0$ o espaçamento entre os níveis de energia sempre aumenta à medida em que n cresce.

Por fim, gostaríamos de frisar que muitos autores têm investigado o conteúdo físico dos vários tipos de osciladores deformados, construindo potenciais clássicos que reproduzem espectros de energias similares aos dos q -osciladores correspondentes ([33],[97],[98]-[99]).

Apêndice B

Expansão de Wick para quatro campos

A expansão de Wick para quatro campos é o caso mais simples em que podemos mostrar a diferenças em relação a teoria de campos padrão. Para simplificar a notação definimos os campos $\phi(x_i)$ como nas eqs. (2.59-2.60) com $\vec{k} \rightarrow \vec{k}_i$, e $\vec{k}$ sendo o momento interno do propagador.

Com essa notação obtemos depois de manipulações similares ao caso convencional

$$\begin{aligned} T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) = & \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : \quad (\text{B.1}) \\ & + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : \\ & + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : \\ & + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : + : \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : , \end{aligned}$$

onde

$$: \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) := D_N(x_1, x_2) : \phi(x_3)\phi(x_4) : , \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
 : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : &= D_N(x_1, x_3) \left[\alpha(x_2)\alpha(x_4) + \alpha^\dagger(x_4)\alpha(x_2) \right] \\
 &+ \alpha^\dagger(x_2)D_N(x_1, x_3)\phi(x_4) ,
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : &= D_N(x_1, x_4)\alpha(x_2)\alpha(x_3) + \alpha^\dagger(x_2)D_N(x_1, x_4)\alpha(x_3) + \\
 &+ \alpha^\dagger(x_3)D_N(x_1, x_4)\alpha(x_2) + \alpha^\dagger(x_2)\alpha^\dagger D_N(x_1, x_4) ,
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 : \phi(x_1)\overbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : &= \alpha(x_1)D_N(x_2, x_3)\alpha(x_4) + \alpha^\dagger(x_1)D_N(x_2, x_3)\alpha(x_4) + \\
 &+ \alpha^\dagger(x_4)\alpha(x_1)D_{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_4}}(x_2, x_3) + \alpha^\dagger(x_1)D_N(x_2, x_3)\alpha^\dagger(x_4) ,
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 : \phi(x_1)\overbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : &= \alpha(x_1)D_N(x_2, x_4)\alpha(x_3) + \alpha^\dagger(x_1)D_N(x_2, x_4)\alpha(x_3) + \\
 &+ \alpha^\dagger(x_3)\alpha(x_1)D_N(x_2, x_4) + \alpha^\dagger(x_1)\alpha(x_3)D_N(x_2, x_4) ,
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$: \phi(x_1)\phi(x_2)\overbrace{\phi(x_3)\phi(x_4)} : = : \phi(x_1)\phi(x_2) : D_N(x_3, x_4) , \tag{B.7}$$

$$: \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : = D_N(x_1, x_2)D_N(x_3, x_4) , \tag{B.8}$$

$$: \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} := D_N(x_1, x_3)D_N(x_2, x_4) , \tag{B.9}$$

$$: \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} := D_N(x_1, x_4)D_{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_4}}(x_2, x_3) , \tag{B.10}$$

com $D_{N+\delta_{\vec{k}, \vec{k}_4}}$ das eqs. (B.6) e (B.11) o que significa que substituímos $N_{\vec{k}} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_4}$ por $N_{\vec{k}}$ na expressão do propagador, sendo $\vec{k}$ o momento do propagador a ser integrado

Note que a posição do operador nessa expansão de Wick é importante.

Apêndice C

Contribuição do Campo $\rho(x)$ para Matriz S

Nesse apêndice vamos mostrar que o último termo do Hamiltoniano de interação dado pela Eq. (3.55) não contribui para o processo de espalhamento do fóton por uma partícula composta calculado até o termo de segunda ordem na constante de acoplamento. A contribuição S_{fi}^2 do último termo do Hamiltoniano de interação

$$\begin{aligned} S_{fi}^2 = \frac{(-i)^4 e^2}{2!} \int d^4x d^4y < f | T(: (\rho(x)\phi^\dagger(x) - \rho^\dagger(x)\phi(x)) : \\ : (\rho(y)\phi^\dagger(y) - \rho^\dagger(y)\phi(y)) :: C^0(x)C^0(y) :) | i > , \end{aligned} \quad (C.1)$$

onde $\phi(x)$ é definida pela eqs. (3.27-3.29), $\rho(x) = \rho_A(x) + \rho_{B^\dagger}(x)$,

$$\rho_A(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{iw(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} M_1^k A_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (C.2)$$

$$\rho_{B^\dagger}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{iw(\vec{k})}{\sqrt{2\Omega w(\vec{k})}} B_{\vec{k}}^\dagger M_2^k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (C.3)$$

com M_1^k e M_2^k definido na Eqs. (3.47-3.48) e o estado inicial e final são dados pelas Eqs. (3.51-3.52). Nós vamos considerar a parte do elemento de matriz acima relacionado com

a partícula composta. É fácil verificar que os termos que contribuem para o elemento de matriz são:

$$a) \quad \langle 0|A_{p'}T (: \rho(x)\phi^\dagger(x) :: \rho(y)\phi^\dagger(y) :) A_p^\dagger|0\rangle = \quad (C.4)$$

$$\langle 0|A'_p (\alpha^\dagger(x)\rho_A(x)\alpha^\dagger(y)\rho_A(y) + \rho_A(x)\beta(x)\rho_{B^\dagger}(y)\alpha^\dagger(y)) A_p|0\rangle$$

$$b) \quad \langle 0|A_{p'}T (: \rho(x)\phi^\dagger(x) :: \rho^\dagger(y)\phi(y) :) A_p^\dagger|0\rangle = \quad (C.5)$$

$$\langle 0|A'_p \left(\alpha^\dagger(x)\rho_A(x)\rho_A^\dagger(y)\alpha(y) + \rho_A(x)\beta(x)\rho_A^\dagger(y)\beta^\dagger(y) \right) A_p|0\rangle$$

$$c) \quad \langle 0|A_{p'}T (: \rho^\dagger(x)\phi(x) :: \rho(y)\phi^\dagger(y) :) A_p^\dagger|0\rangle = \quad (C.6)$$

$$\langle 0|A'_p \left(\rho_A^\dagger(x)\alpha(x)\alpha^\dagger(y)\rho_A(y) + \rho_{B^\dagger}^\dagger(x)\rho_{B^\dagger}(y)\alpha(x)\alpha^\dagger(y) \right) A_p|0\rangle$$

$$d) \quad \langle 0|A_{p'}T (: \rho^\dagger(x)\phi(x) :: \rho^\dagger(y)\phi(y) :) A_p^\dagger|0\rangle = \quad (C.7)$$

$$\langle 0|A'_p \left(\rho_A^\dagger(x)\alpha(x)\rho_A^\dagger(y)\alpha(y) + \rho_{B^\dagger}^\dagger(x)\rho_A^\dagger(y)\alpha(x)\beta^\dagger(y) \right) A_p|0\rangle.$$

supondo que $t_x \geq t_y$. Após uma série de cálculos, obtemos para a primeira equação (C.4).

$$\langle 0|A_{p'}\alpha^\dagger(x)\rho_A(x)\alpha^\dagger(y)\rho_A(y)A_p^\dagger|0\rangle = \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \dots k_4} \frac{(i)^2 \omega_{k_2} \omega_{k_4}}{Z_{k_1} \dots Z_{k_4}} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - i\omega_{k_1} h(\delta_{k_1 p'}) t_x} (1 - h(\delta_{k_2 p'} - \delta_{k_1 k_2})) \times \\ & \times e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x} + i\omega_{k_2} h(\delta_{k_2 p'} - \delta_{k_1 k_2}) t_x} \langle 0|A_{p'} A_{k_1}^\dagger A_{k_2} A_{k_3}^\dagger A_{k_4} A_p^\dagger|0\rangle \\ & \times e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{y} - i\omega_{k_3} h(\delta_{k_3 p} - \delta_{k_3 k_4}) t_y} (1 - h(\delta_{k_4 p})) e^{-i\vec{k}_4 \cdot \vec{y} + i\omega_{k_4} h(\delta_{k_4 p}) t_y}, \end{aligned}$$

sendo $Z_k \equiv \sqrt{2\Omega\omega(\vec{k})}$. Mas como $\langle 0|A_{p'} A_{k_1}^\dagger A_{k_2} A_{k_3}^\dagger A_{k_4} A_p^\dagger|0\rangle = M_0^6 \delta_{p'k_1} \delta_{k_2 k_3} \delta_{k_4 p}$ somando sobre k_1 a expressão acima nós temos $h(\delta_{k_2 p'} - \delta_{k_1 k_2}) = h(0) = 1$ e portanto, o termo na, (C.8), é identicamente nulo.

O segundo termo da Eq. (C.4) pode ser separado, para simplificar, em duas partes

envolvendo os operadores A , B e seus adjuntos. A parte envolvendo os operadores A e $A^\dagger$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle 0|A_{p'}\rho_A(x)\alpha^\dagger(y)A_p^\dagger|0\rangle = \\ \sum_{k_1,k_2} \frac{i\omega_{k_1}}{Z_{k_1}Z_{k_2}} e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{x}+i\omega_{k_1}h(\delta_{k_1p'})t_x(1-h(\delta_{k_1p'}))} \times \\ \times e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{y}-i\omega_{k_2}h(\delta_{k_2p})t_y} \langle 0|A_{p'}A_{k_1}A_{k_2}^\dagger A_p^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Uma vez que $\langle 0|A_{p'}A_{k_1}A_{k_2}^\dagger A_p^\dagger|0\rangle = M_0^4\delta_{p'k_2}\delta_{k_1p}$, é fácil ver que esse elemento de matriz anula pois $h(0) = 1$. A parte envolvendo os operadores B e $B^\dagger$ é nula também uma vez que

$$\langle 0|\beta(x)\rho_{B^\dagger}(y)|0\rangle = \sum_{k_3,k_4} \frac{i\omega_{k_4}}{Z_{k_3}Z_{k_4}} e^{-ik_3\cdot x+ik_4\cdot y(1-h(0))} \langle 0|B_{k_3}B_{k_4}^\dagger|0\rangle = 0, \quad (\text{C.10})$$

já que $h(0) = 1$. Calculamos dessa forma todos os outros termo e pela mesma razão ($h(0) = 1$) se anulam.

C.1 Elemento de Matriz do Produto dos Campos na Ordem Temporal

Nesse apêndice mostraremos que a contribuição para o elemento de matriz de produtos de campos e derivadas de campos ordenados temporalmente são dados pela expansão usual de Wick com modificações fornecidas pela Eq. (3.73). Vamos considerar três casos

1) Produto de campos sem derivadas

Começaremos considerando um termo típico ordenado temporalmente

$T\left(\phi(x)\phi^\dagger(x) :: \phi(y)\phi^\dagger(y) : \right)$ onde $\phi(x)$ é dada pela Eqs. (3.27-3.29). Tomando, por exemplo $t_x \geq t_y$ nós temos

$$\begin{aligned} T\left(\alpha^\dagger(x)\alpha(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(y)\right) &= \alpha^\dagger(x)\alpha(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(y) = \\ &= \alpha^\dagger(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(x)\alpha(y) + \alpha^\dagger(x)\Delta_F^N(x-y)\alpha(y). \end{aligned} \quad (C.11)$$

Portanto, tomando o elemento de matriz da equação acima nós temos $\langle i | = A_p^\dagger | 0 \rangle$ e $| f \rangle = A_{p'}^\dagger | 0 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle f | T\left(\alpha^\dagger(x)\alpha(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(y)\right) | i \rangle &= \langle f | \alpha^\dagger(x)\Delta_F^N(x-y)\alpha(y) | i \rangle \\ &= \Delta_F^{(-\delta_{k,k_y} + \delta_{k,p})}(x-y) \langle f | \alpha^\dagger(x)\alpha(y) | i \rangle, \end{aligned} \quad (C.12)$$

onde, na equação acima, k é o momento interno de $\Delta_F^N(x-y)$ (veja Eq. (3.35)) e k_y é o momento da expansão de Fourier do campo $\phi(y)$. Mas usando Eq. (3.59) temos de forma trivial

$$\begin{aligned} \langle f | T\left(\alpha^\dagger(x)\alpha(x)\alpha^\dagger(y)\alpha(y)\right) | i \rangle &= \Delta_F^0(x-y) \langle f | \alpha^\dagger(x)\alpha(y) | i \rangle \\ &= M_0^2 \Delta_F(x-y) \langle f | \alpha^\dagger(x)\alpha(y) | i \rangle. \end{aligned} \quad (C.13)$$

A mesma coisa acontece para os outros termos no elemento de matriz do produto ordenado temporalmente $T\left(\phi(x)\phi^\dagger(x) :: \phi(y)\phi^\dagger(y) : \right)$ e teremos o mesmo resultado que o caso padrão,

$$\Delta_F^N(x-y) \longrightarrow \Delta_F^0(x-y) = M_0^2 \Delta_F(x-y).$$

2) Produto de campos com derivadas

Considerando um termo típico de produto de campos com derivada ordenados temporalmente $T\left(\phi(x)\phi^\dagger(x) :: \phi(y)\partial_\mu^y\phi^\dagger(y) : \right)$ onde $\phi(x)$ é dada pelas Eqs. (3.27-3.29). Tomando

por exemplo $t_x \geq t_y$ nós temos

$$\begin{aligned} T \left(\alpha^\dagger(x) \alpha(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) \right) &= \alpha^\dagger(x) \alpha(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) = \\ &= \alpha^\dagger(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(x) \alpha(y) + \alpha^\dagger(x) \partial_\mu^y \Delta_F^N(x-y) \alpha(y). \end{aligned} \quad (C.14)$$

Portanto, $(|i\rangle = A_p^\dagger|0\rangle$ e $|f\rangle = A_{p'}^\dagger|0\rangle)$

$$\begin{aligned} \langle f| T \left(\alpha^\dagger(x) \alpha(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) \right) |i\rangle &= \langle f| \alpha^\dagger(x) \partial_\mu^y \Delta_F^N(x-y) \alpha(y) |i\rangle \\ &= M_0^2 \partial_\mu^y \Delta_F(x-y) \langle f| \alpha^\dagger(x) \alpha(y) |i\rangle, \end{aligned} \quad (C.15)$$

pela mesma razão do caso prévio. A mesma coisa acontece com os outros termos do elemento de matriz do produto ordenado temporalmente.

3) Dois campos com uma derivada

Considerando o termo $T \left(: \partial_\mu^x \phi(x) \phi^\dagger(x) :: \phi(y) \partial_\mu^y \phi^\dagger(y) : \right)$ e tomando por exemplo $t_x \geq t_y$ nós temos para essa expansão

$$\begin{aligned} T \left(\alpha^\dagger(x) \partial_\mu^x \alpha(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) \right) &= \alpha^\dagger(x) \partial_\mu^x \alpha(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) = \\ &= \alpha^\dagger(x) \partial_\mu^y \alpha^\dagger(y) \partial_\mu^x \alpha(x) \alpha(y) + \alpha^\dagger(x) \overline{\partial_\mu^x \phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} \alpha(y), \end{aligned} \quad (C.16)$$

mas sabemos que

$$\begin{aligned} \overline{\partial_\mu^x \phi(x) \partial_\nu^y \phi^\dagger(y)} &= i \partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_F^N(x-y) - \\ &= i g_{\mu 0} \partial_\nu^y \Delta^N(x-y) \delta(x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (C.17)$$

Portanto, tomando o elemento de matriz (C.16), onde, como antes $|i\rangle = A_p^\dagger|0\rangle$ e $|f\rangle = A_{p'}^\dagger|0\rangle$, usando (C.17) e a Eq. (3.59) temos

$$\begin{aligned} \langle f| T \left(\alpha^\dagger(x) \partial_\mu^x \alpha(x) \partial_\nu^y \alpha^\dagger(y) \alpha(y) \right) |i\rangle &= M_0^2 \partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_F(x-y) \\ \langle f| \alpha^\dagger(x) \alpha(y) |i\rangle &- g_{\mu,0} M_0^2 \partial_\nu^y \Delta(x-y) \langle f| \alpha^\dagger(x) \alpha(y) |i\rangle. \end{aligned} \quad (C.18)$$

A mesma coisa acontece com os outros termos do elemento de matriz.

Referências Bibliográficas

- [1] R. de A. Martins, Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 2, I (2) (1989) 151-184
- [2] P. Mohazzabi, M. James, Am. J. Phys. 68 (2000) 1038-1041
- [3] J. S. Bolemon, Am. J. Phys. 44 (1976) 1125-1128.
- [4] M. Iona, Am. J. Phys. 46 (1978) 790-791.
- [5] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York (1931), translated from *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, (Hirzel Verlag, Leipzig, 1928); *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Z. Physik 46 (1927) 1.
- [6] E. P. Wigner, Phys. Rev. 40 (1932) 749.
- [7] K. Kodaira e D. C. Spencer, Ann. Math. 67 (1958) 328.
- [8] M. Gerstenhaber, Ann. Math. 78 (1963) 267
- [9] M. Gerstenhaber *Algebraic cohomology and Structures and Applications*, eds M. Hazewinkel e M. Gertenhaber, NATO ASI Ser C 247 (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988); *Algebras, quantum groups and algebraic deformations*, in *Deformation Theory*

- and Quantum Groups with applications to Mathematical Physics*, eds. M. Gerstenhaber e J. Stasheff, Contemporary Mathematics 134, 51-92 (American Mathematical Society, Providence, 1992)
- [10] P. Kulish e N. Reshetikhin, Zapiski Nauch. Semin. LOMI, **101** (1980) 112; English translation J. Sov. Math. **23** (1983) 2435.
- [11] V. G. Drinfel'd, Soviet. Math. Dokl. **32** (1985) 254.
- [12] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63.
- [13] M. T. Batchelor, L. Mezincescu, R. I. Nepomechie e V. Rittenberg, J. Phys. A **23** (1990) L141.
- [14] L. C. Biedenharn, J. Phys. A **22** (1989) L873.
- [15] A. J. Macfarlane, J. Phys. A **22** (1989) 4581.
- [16] M. R. Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues e S. Wulck, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1098.
- [17] D. Bonatsos e C. Daskaloyannis, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 537
- [18] Ver, por exemplo, Nucl Phys. B, Proc. Suppl., **102** e **103** (2001) 298-305 e as suas referências
- [19] M. Bortz e S. Sergeev, Arxiv:cond-mat/0603093 (2006)
- [20] A. Lavagno e P. N. Swamy, Arxiv:cond-mat/0111112 (2001)
- [21] G. A. Goldin e D. H. Sharp, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1183.

- [22] S. S. Avancini, A. Eirats, D. Galetti, B. M. Pimentel e C. L. Lima, J. Phys. A 28 (1995) 4915-4923
- [23] E. G. Floratos, J. Phys. A 24 (1991) 4739.
- [24] S. S. Avancini e G. Krein, J. Phys. A 51 (1995) 2410
- [25] Y. J. Ng, J. Phys. A 23 (1990) 1023.
- [26] M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, C. Montonen, J. Phys. A 26, (1993) 4017
- [27] C. R. Lee e J. P. Yu, Phys. Lett. A 150 (1990) 63
- [28] H. S. Song, S. X. Ding e T. An, J. Phys. A 26 (1993) 5197
- [29] M. A. Martin-Delgado, J. Phys. A 24 (1991) L1285
- [30] E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, Phys. Rev. E 61 (2000) 6255.
- [31] A. Ballesteros, O. Civitarese, M. Reboiro, Phys. Rev. C 68 (2003) 044307
- [32] S. S. Sharma, N. K. Shaema, Arxiv:nucl-th/0009048v1 (2000)
- [33] J. de Souza, N. M. Oliveira-Neto, C. I. Ribeiro-Silva, Eur. Phys. J. D 40 (2006) 205
- [34] C. I. Ribeiro-Silva, E. M. F. Curado, M. A. Rego-Monteiro, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 145404.
- [35] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood academic publishers, New York, 1981.
- [36] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996.

- [37] E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, J. Phys. **A 34** (2001) 3253.
- [38] E. M. F. Curado, M. A. Rego-Monteiro, H. N. Nazareno, Phys. Rev. A **64** (2001) 12105; hep-th/0012244.
- [39] M. A. Rego-Monteiro, Eur. Phys. J. C **21** (2001) 749
- [40] veja por exemplo: Marcia J. King, Phys. Rev. D **30** (1984) 399
- [41] L. S. Rothmann, J. Quant. Spectr. Rad. Transfer **82** (2003) 5
- [42] D. Bonatsos, J. Phys. A. **25** (1992) L101
- [43] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis e A. Faessler, J. Phys. A **27** (1994) 1299.
- [44] J. N. Huffaker, J. Chem. Phys. **64**, (1976) 3175.
- [45] M. Dagher, M. Kobersi, H. Kobeissi, J. Comput. Chem. **16** (1995) 723
- [46] A. Dimakis e F. Muller-Hoissen, Phys. Lett. **B 295** (1992) 242.
- [47] A. Dimakis, F. Muller-Hoissen e T. Striker, Phys. Lett. B (1993) 300
- [48] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, Phys. Lett. **B 40** (1972) 566, Nuovo Cim. **B 12** (1972) 20; G. 't Hooft e M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189.
- [49] J. Collins, arxiv:hep-ph/9510276v2 (1995)
- [50] L. S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [51] V. B. Bezerra, E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, Int J. Mod. Phys. A (2003) 2025

- [52] P. Kulish e N. Reshetikhin, Zapiski Nauch. Semin. LOMI, **101** (1980) 112; English translation J. Sov. Math. **23** (1983) 2435.
- [53] V. G. Drinfel'd, Soviet. Math. Dokl. **32** (1985) 254.
- [54] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63.
- [55] I. Ya. Aref'eva e I. V. Volovich, Mod. Phys. Lett. **6** (1991) 893.
- [56] L. Castellani, Phys. Lett. **B 292** (1992) 93.
- [57] M. Fichtmüller, A. Lorek e J. Wess, Z. Phys. **C 71** (1996) 533.
- [58] I. Ya. Aref'eva, R. Parthasarathy, K. S. Viswanathan e I. V. Volovich, Mod. Phys. Lett. **9** (1994) 689.
- [59] A. Sudbery, Phys. Lett. **B 375** (1996) 75.
- [60] D. Bonatsos, J. Phys. **A 25** (1992). L101
- [61] V. B. Bezerra, E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, Phys. Rev. **D 65** (2002) 065020.
- [62] V. B. Bezerra, E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, Phys. Rev. **D 66** (2002) 085013.
- [63] V. B. Bezerra, E. M. F. Curado e M. A. Rego-Monteiro, Phys. Rev. **D69** (2004). 085003
- [64] W. S. C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Oxford University Press (1992) pag. 67

- [65] Veja, por exemplo, A. Klein e E. R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 375.
- [66] C. I. Ribeiro-Silva e N. M. Oliveira-Neto, hep-ph/0409267, aceito para publicação em *Int. J. Mod. Phys.*
- [67] F. E. Low, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1428
- [68] H. Terazawa, *Phys. Rev. Lett* **26** (1971) 1207
- [69] H. Terazawa, *Phys. Rev. D* **51** (1995) R954
- [70] H. G. Blundell, S. Godfrey, G. Hay e S. Swanson, *Phys. Rev. C* **61** (2000) 025203
- [71] A. Hoefer, *Eur. Phys. J C* **24** (2002) 51
- [72] H. Czyz, *Eur. Phys. J. C* **33** (2004) 333
- [73] I. F. Ginzburg, *Eur. Phys. J. C* **18** (2001) 731
- [74] C. Oleari, C. A. Orzalesi e M. Tau, *Lett. Nuov. Cim. Serie 2* (2007) 69.
- [75] J. Boyer et. al, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1350
- [76] J. F. Donoghue e B. R. Holstein, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 137
- [77] B. Enchenard on behalf of the L3 collaboration, *Eur. Phys. J. C* **33** (2004) 566
- [78] C. J. Benech, J. L. Friar, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 1285
- [79] C. J. Benech, A. C. Hayes, J. L. Friar, *Phys. Rev. C* **54** (1996) 1404
- [80] B. Muller, A. J. Schramm, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 3699
- [81] C. A. Bertulani, *Phys. Rep.* **163** (1988) 299

- [82] G. Baur e C. A. Bertulani, Nucl. Phys. **A 505** (1989) 835
- [83] M. Greiner, M. Vidovic e G. Soff, Phys. Rev. **C 47** (1993) 2288
- [84] J. Eichler, Phys. Rep. 193 (1990) 165
- [85] F. Krauss, M. Greiner e G. Soff, Prog. Part. Nucl. Phys. **39** (1997) 503
- [86] N. Baron, G. Baur, Phys. Rev. **C 48**(4) (1993) 1999
- [87] E. Fermi, Z. Phys. 29 (1924) 315
- [88] E. J. Williams, Phys. Rev. 45 (1934) 729
- [89] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Revised Edition) (1993).
- [90] C. P. Sun e H. C. Fu, J. Phys. A **22** (1989) L983.
- [91] R. Chakrabarti e R. Jagannathan, J. Phys. A **24** (1991) L711.
- [92] C. Daskaloyannis, K Kanakoglou e I Tsohantjis, J. Math. Phys. **41** (2) (2000) 652-660.
- [93] C. Daskaloyannis, J. Phys. A **24** (1991) L789.
- [94] M. Arik e D. D. Coon, J. Math. Phys. **17** (1976) 524-527
- [95] J. L. Matheus-Valle, Tese de Doutorado, *Grupos Quânticos e q-Osciladores: Algumas Aplicações* (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF, 1995).
- [96] M. Chaichian e A. Demichev, *Introduction to Quantum Groups* (World Scientific, Singapore, 1996).

- [97] Ver por exemplo, W. G. Sun, W. Y. Ren, S. L. Hou e H. Feng, *Molecular Physics*, **103**, (17) (2005) 2335-2345.
- [98] M. Artoni, J. Zang e J. L. Birman, *Phys. Rev. A* **47** (1993) 2555.
- [99] Th. Ioannidou, Diploma Thesis, U. of Thessaloniki (1993)