Tese de Doutorado

Campos Magnéticos de Larga Escala num Universo não Singular

Nilton de Souza Medeiros

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Agosto de 2011

Orientador: Dr. José Martins Salim

Dedico essa tese aos meus pais

Francisco Alves de Medeiros (in memoriam),

Etiennette Maria de Souza de Medeiros e a

minha esposa Marta Cristina Silva Medeiros

Agradecimentos

O conhecimento científico é o resultado do trabalho de gerações de pesquisadores que dedicaram anos de suas vidas à difícil tarefa de entender como a natureza funciona. Sem o trabalho dessas pessoas não seria possível a realização dessa tese. A todos os homens e mulheres que contribuíram para o aprimoramento da ciência humana deixo registrados minha homenagem e mais profundo reconhecimento.

Ao orientador José Martins Salim, expresso minha dívida de gratidão, não apenas por ter me acolhido como seu aluno desde a época da iniciação científica, mas pela amizade, paciência no trabalho de orientação e compreensão quando não pude dedicar tempo integral à atividade científica. Seu espírito crítico e suas reflexões foram importantes fontes de inspiração. Sem a sua competência e postura humana esse trabalho dificilmente seria concluído a contento.

Ao professor Mário Novello pelo apoio, incentivo e importante colaboração em minha formação científica, sou grato e torno pública a admiração pelo seu trabalho, que vai muito além da obrigação profissional. O seu entusiasmo, constante dedicação à cosmologia e principalmente o espírito investigativo e questionador têm sido um grande exemplo para várias gerações de estudantes e pesquisadores.

Agradeço a todos os integrantes e colaboradores do ICRA - BR, principalmente aos professores Nelson Pinto, Luiz Alberto, Martím Makler, Nami Fux Svaiter, Sergio Joffily, Herman Mosquera e Sérgio Jorás, pelas discussões e debates nos pequenos seminários das sextas-feiras, assim como pela participação e organização de escolas, cursos, minicursos e seminários que são de suma importância na formação dos alunos, principalmente daqueles dedicados à pesquisa em cosmologia e gravitação.

Agradeço aos professores que puderam contribuir diretamente com a elaboração dessa tese, com destaque especial para o professor Santiago Bergliaffa pela importante contribuição em nossos artigos, e os professores Bartolomeu Figueiredo e Lea Jaccoud pelo auxílio com as funções de Heun.

Aos demais professores ainda não citados, que participaram direta ou indiretamente na minha formação profissional, fica registrado o devido reconhecimento.

Aos amigos que iniciaram o mestrado comigo, Emanuel Pinho, Érico Goulart e Felipe Tovar (hoje pesquisador do CBPF), agradeço pelo apoio e pelas intensas discussões acadêmicas. Essa rica convivência tornou possível amadurecer e aprimorar o conhecimento sobre cosmologia, relatividade geral e outras áreas da física.

Aos colegas pós graduandos que foram ingressando no CBPF/ICRA-BR ao longo desses anos, manifesto minha satisfação pela agradável convivência e pela troca de conhecimentos. Em especial aos colegas e amigos, Eduardo Rodrigues, Rafael Perez, Marcela Campista, Felipe Poulis, Maria Borba, Aline Nogueira, Rafael Aranha, Vicente Antunes, Grasiela e Eduardo, bem como nosso saudoso Paulo Israel.

Agradeço o incentivo e a grande amizade do prof. Henrique Saitovitch, prof. Paulo Roberto e Thadeu Cavalcante, integrantes do laboratório de Cor-

relação Angular, e da professora Elisa Saitovitch, por terem proporcionado o primeiro contato com o CBPF, onde comecei a ter admiração e gosto pelo universo da pesquisa em ciência básica. Não posso deixar de citar o prof. Roberto Moreira, que, além da amizade, me despertou para o mundo da história e filosofia da ciência.

Ao meu querido irmão Luiz Carlos El-Huaik de Medeiros, sou profundamente grato, pelo incentivo e pela iniciativa em conseguir uma residência próxima do CBPF. Agradeço ao seu amigo, por ter me cedido seu apartamento, proporcionando o conforto e a tranquilidade necessária à pesquisa científica.

Aos meus pais, que sempre se dedicaram à minha educação e fizeram de tudo para que eu alcançasse o sucesso em meus objetivos, não tenho palavras para expressar meu carinho e reconhecimento.

À minha querida esposa, agradeço por ter sido compreensiva e por ter aceitado minha amante, a física, que tem dividido minha atenção e consumido um certo tempo de nossas vidas.

Aos amigos não citados que de alguma forma contribuíram indiretamente para a conclusão dessa tese.

Às secretárias do ICRA, Elisete e Luciene, e aos funcionários da CFC, Ricardo, Myriam e Elisabete, bem como aos demais funcionários que através de seus trabalhos tornam possível o funcionamento do ICRA e do CBPF.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Foram apresentados os principais aspectos da geometria de Weyl e da geometria de Weyl integrável. Foi construído um modelo fenomenológico de universo não singular com radiação a partir da geometria de Weyl.

Investigou-se a produção de um campo magnético primordial, através do acoplamento exponencial do campo escalar da geometria, com a Lagrangeana do eletromagnetismo. Esse campo serve como semente para o processo de formação dos campos magnéticos observados em estruturas de larga escala do universo.

Foi mostrado que o campo primordial gerado é fonte para as perturbações tensoriais de 1^a ordem da métrica de fundo, produzindo uma densidade de energia de ondas gravitacionais.

São discutidos métodos para determinar limites à intensidade do campo magnético semente. O mais restritivo é baseado na nucleossíntese e, portanto, foi aplicado ao modelo desenvolvido na tese. A presença de uma densidade de energia gravitacional intensifica em várias ordens de grandeza o limite calculado.

Abstract

The principal aspects of Weyl geometry and integrable Weyl geometry (WIST) were presented. It was constructed a non-singular phenomenological model of universe with radiation, based on Weyl geometry.

It was investigated the production of a primordial magnetic field, through the exponential coupling of the scalar field from the geometry, with the lagrangian of the electromagnetism. This field works as a seed to the formation of magnetic field observed in large scale structures of the universe.

It was shown that the generated primordial field is source to first order tensor perturbations of the background, producing an energy density from gravitational waves.

Methods to obtain limits on seed magnetic field intensity are discussed. The most restrictive is based on nucleosynthesis, therefore it is applied on the developed model in this thesis. The presence of the gravitational energy density, intensifies in many orders the calculated limit.

Sumário

Dedicatória i
Agradecimentos ii
Resumo v
Abstract vi

Introdução **1**

1 Espaços métricos de Riemann, Weyl e Wist **6**
1.1 Geometria de Riemann - Conceitos Básicos 7
1.2 Geometria de Weyl 11
1.3 Geometria de Weyl Integrável 13
1.4 Teoria da gravitação em Wist 15
1.5 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker 16
1.6 Tensor Momento-Energia 17
1.7 Universo não Singular sem Matéria 19
1.8 Universo não Singular com Radiação 24
1.9 Modelo Padrão com Matéria e Radiação 31
1.10 Modelo Cosmológico não singular com Matéria e Radiação . . 33

2 Eletromagnetismo em Espaços Curvos **36**
2.1 Campo Eletromagnético em Riemann 38

2.2 Campo Eletromagnético na métrica de FRW em Riemann . . 40
2.3 Campo Eletromagnético em Weyl 44
2.4 Tensor Momento-Energia do campo Eletromagnético 46
2.5 Campo Magnético Observável 48
2.6 Campo Eletromagnético em meios ionizados 49
2.6.1 Neutralidade elétrica de um plasma 50
2.6.2 Oscilação de plasma 51
2.6.3 Campo eletromagnético num meio condutivo 52
2.6.4 Condutividade do universo 54
2.6.5 Oscilações Hidromagnéticas 57
2.6.6 Frequência de Corte de um Plasma 62

3 Campos magnéticos de larga escala 69
3.1 Técnicas Observacionais 70
3.1.1 Efeito Zeeman 70
3.1.2 Radiação Síncroton 71
3.1.3 Rotação de Faraday 72
3.2 Possíveis origens dos campos magnéticos de larga escala 73
3.3 Geração de Campo Magnético num universo com ricochete . . 75
3.3.1 Geração quântica de campo magnético primordial . . . 80
3.4 Comprimento de coerência do campo 87
3.5 Modelos de amplificação de campos pré-galáticos 89
3.5.1 Contração adiabática 90
3.5.2 Dínamo Galático 90

4 Perturbações gravitacionais induzidas por um campo magnético cosmológico 95
4.1 Fonte de perturbações tensoriais 96

4.2 Ondas gravitacionais geradas de um campo magnético primordial101

5 Restrições à intensidade dos Campos Magnéticos Cosmológicos108

5.1 Restrições via nucleossíntese 109

6 Conclusões 116

Referências 118

Introdução

Campos magnéticos estão presentes na natureza desde as distâncias subatômicas até as escalas cosmológicas. No universo, campos com intensidade de μG têm sido detectados em galáxias e aglomerados, tanto em nossa galáxia, quanto naquelas com alto desvio para o vermelho. A origem desses campos é objeto de intensas pesquisas e, mesmo assim, parece que um relativo consenso ainda está distante. A grande parte dos especialistas sustenta que esses campos existiam antes das estruturas de larga escala se costituirem no universo, na forma de um campo magnético semente bastante tênue, que teria sofrido um processo de amplificação durante a evolução das galáxias, até atingir as intensidades observadas atualmente. O campo semente pode ter sido gerado por algum mecanismo de separação de cargas, em épocas mais recentes, ou ter surgido no universo primordial. Contudo a quase totalidade dos pesquisadores desenvolve seus modelos, subordinados ao chamado modelo padrão cosmológico.

A cosmologia moderna e o modelo padrão, como é conhecido hoje, foram sendo desenvolvidos ao longo do século XX, com base na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Apesar de formar um quadro, em grande medida, compatível com os dados observacionais, o modelo padrão cosmológico em vários momentos faz uso de campos e teorias ainda não comprovadas em

laboratório. Isso tem servido de argumento a favor de outras representações de universo, umas mais semelhantes ao modelo padrão, outras bem mais distintas como é o caso do universo estacionário [1]. Esses modelos, assim como o padrão, em algum momento recorrem a teorias físicas fenomenológicas, ou mesmo um tanto especulativas.

Algumas dificuldades teóricas do modelo padrão são bem conhecidas da cosmologia, por exemplo, os problemas da singularidade, do horizonte de causalidade e da planura.

No final da década de 1970, surgiu a solução inflacionária, que consiste num aumento exponencial do fator de escala da métrica de Friedmann (em torno de 10^{30} vezes), num intervalo de tempo bastante curto (da ordem de 10^{-15} s), na época em que o universo era muito quente. O objetivo era resolver o problema do horizonte e da planura. Em relação à singularidade, argumenta-se, em geral, que não se constitui um problema do modelo padrão, pois ela resulta da extrapolação do mesmo para um período no qual a validade da Teoria da Relatividade Geral não está garantida.

Em contrapartida, a inflação pressupõe a existência de um campo escalar (o *inflaton*), com características muito particulares, condições iniciais e um potencial adequado, para desencadear a inflação conforme o esperado. Embora pareça dar uma origem para o espectro de perturbações cosmológicas e consiga resolver as questões da planura e do horizonte, o modelo inflacionário cria o problema do reaquecimento após o período inflacionário [2]. Em outras palavras, a inflação substitui algumas dificuldades teóricas por um *inflaton*, com características e condições iniciais bastante específicas e ainda cria a necessidade de um reaquecimento [3]. Até o presente, não há um campo escalar, com existência comprovada em experimentos, capaz de desempenhar o papel de *inflaton* [4].

Uma alternativa competitiva à inflação são os modelos não singulares com ricochete (*bounce*). Esta categoria é constituída dos modelos de universo eterno onde, num tempo infinito passado, o fator de escala da métrica de fundo, assintoticamente plana, se contrai até atingir um valor mínimo (o ricochete) e, a partir de então, entra na fase expansiva até os dias de hoje.

Supondo a validade da TRG para qualquer tensor momento-energia de valores finitos e um fluido perfeito constituído com os campos de matéria conhecida (cuja equação de estado satisfaz $\rho + 3p > 0$), a singularidade é inevitável [5]. Uma solução com ricochete só pode existir se, na sua vizinhança, a TRG não valer mais, ou se o fluido de matéria violar a condição $\rho + 3p > 0$. Por outro lado, o limite de validade da TRG não está determinado. Talvez, em altas energias, mas ainda muito mais baixas que as necessárias às teorias de grande unificação, a gravitação apresente uma dinâmica diferente da tradicional.

A Teoria da Relatividade Geral considera que a estrutura do espaço-tempo tem um caráter Riemanniano. No entanto, Ehlers et al. [6] demonstraram, a partir de uma teoria axiomática, que a estrutura geométrica mais geral do espaço-tempo é uma geometria de Weyl na qual o espaço Riemanniano constitui um caso particular.

Uma alternativa para modificar a teoria da gravitação de Einstein consiste em supor que o espaço-tempo possui uma geometria do tipo Weyl. Esse caminho tem sido explorado pelo grupo de cosmologia do CBPF há mais de 40 anos. M. Novello, em 1969, publicou um artigo sobre a equação de Dirac na geometria de Weyl [7]. Gilvan A. Alves, em 1986, defendeu uma tese onde obteve um modelo de universo não singular numa geometria do tipo Weyl Integrável, que surge naturalmente devido a um acoplamento não mínimo do eletromagnetismo com a gravitação [8]. Uma tese específica so-

bre a geometria de Weyl foi apresentada em 1988 por L. A. de Oliveira no CBPF [9]. Posteriormente, num artigo publicado em 1993, Novello et al. [10] construíram um modelo não singular de universo usando apenas um campo escalar da geometria de Weyl Integrável; nesse artigo, foi citada a possibilidade de criação de matéria a partir de flutuações quânticas do vácuo, durante o ricochete. Com base nessa geometria, J. M. Salim e S. Sautu [11], em 1996, desenvolveram uma teoria para descrever os fenômenos gravitacionais. Esses artigos e teses foram sucedidos por diversos outros envolvendo cosmologia e geometria de Weyl, como por exemplo [12], [13], [14], [15] e [16].

Na tese proposta um campo magnético é gerado num modelo de universo não singular, desenvolvido na referência [10], com base na geometria de Weyl Integrável. Em uma solução exata deste modelo, foi calculada a produção de fótons, que ocorre na passagem do universo pelo ricochete, sem que o sistema entre em um regime de energias extremamente altas (na escala de Planck), onde a física é desconhecida. A simetria conforme é quebrada através do acoplamento exponencial do campo escalar da geometria de Weyl com o campo eletromagnético.

No primeiro capítulo, há uma introdução sobre a origem, os principais aspectos da geometria de Weyl e alguns conceitos básicos de cálculo tensorial, com o objetivo de estabelecer a notação empregada. Discute-se também a geometria de Weyl integrável (Wist), que consiste num caso particular da geometria de Weyl. Foi apresentado um resumo do modelo cosmológico discutido na referência [10].

Para tornar possível a comparação dos resultados desenvolvidos nessa tese com os dados obtidos experimentalmente, foi desenvolvido um aprimoramento do referido modelo, com a introdução de um fluido de radiação. Obteve-se uma expressão analítica para o fator de escala, com parâmetros

que são ajustados para que, antes do início da nucleossíntese, o modelo proposto seja indistinguível da representação cosmológica padrão.

O capítulo 2 aborda o eletromagnetismo em espaços curvos, bem como um breve resumo de alguns tópicos sobre a física dos plasmas, relacionados ao trabalho. Recebem destaque as oscilações magnetohidrodinâmicas e a atenuação dos campos magnéticos semente devido a viscosidade do plasma cosmológico.

São discutidos, no terceiro capítulo, alguns aspectos dos campos magnéticos de larga escala, como técnicas de detecção, possíveis origens e principais linhas de pesquisa sobre o tema, bem como alguns mecanismos de amplificação. A geração de campo magnético no modelo proposto, durante o ricochete, é determinada após o processo de quantização canônica. A atenuação do espectro gerado é levada em consideração no cálculo da densidade de energia magnética.

As componentes anisotrópicas do tensor momento energia servem de fonte para as perturbações gravitacionais de 1^a ordem. Tais perturbações geram uma densidade de energia gravitacional, que pode provocar variações significativas na taxa de evolução do fator de escala. O quarto capítulo implementa esses cálculos.

Por fim, no capítulo 5, são discutidos métodos para limitar o campo semente. A técnica mais restritiva, baseada na nucleossíntese, é aplicada ao campo magnético gerado no ricochte. Alguns resultados que não aparecem na cosmologia padrão são discutidos na conclusão.

Capítulo 1

Espaços métricos de Riemann, Weyl e Wist

Neste capítulo serão apresentados inicialmente dois modelos não singulares de universo construídos a partir da geometria de Weyl integrável. O primeiro representa um universo sem qualquer forma de matéria ou radiação, e possui apenas o campo escalar oriundo da geometria; o segundo apresenta campo escalar e radiação.

A vantagem do modelo sem matéria é que sua simplicidade produz resultados analíticos que servem como referência para o estudo dos campos magnéticos galácticos no modelo de universo com matéria.

O conteúdo do segundo modelo consiste num fluido perfeito que representa a radiação e outro provém do campo escalar da geometria de Weyl, sem interação entre ambos*.

*O fluido de radiação é composto por neutrons, neutrinos, prótons, elétrons e campo eletromagnético. Deve haver interação do campo escalar da geometria com esses campos que preenchem o universo primordial. No entanto, será considerado que variações na evolução do fator de escala decorrentes desses possíveis acoplamentos podem ser tratadas como perturbações. Contudo, essa análise não ocorrerá pois não contribui para os objetivos dessa tese.

Posteriormente será apresentado o modelo padrão cosmológico com matéria, radiação e sem constante cosmológica. A partir dos modelos expostos, o capítulo é finalizado com a expressão do fator de escala, empregado nessa tese, de um universo não singular com radiação e matéria. Os parâmetros livres são ajustados aos dados cosmológicos disponíveis, de forma a ser possível uma confrontação entre a construção teórica e os dados observacionais.

Nesse trabalho será adotada a convenção de soma de Einstein e o formalismo covariante, onde o espaço geométrico de 4 dimensões representará o espaço-tempo físico (uma dimensão temporal e 3 dimensões espaciais). Os índices latinos variam de 1 a 3 e indicam as coordenadas espaciais; os índices gregos variam de 0 a 4, o valor 0 correspondendo à coordenada temporal.

Para facilitar o entendimento da notação empregada, nas primeiras seções encontra-se uma breve introdução à geometria de Riemann, Weyl e WIST, bem como à teoria da gravitação em Weyl, que dá origem aos modelos cosmológicos estudados nessa tese. A métrica de Friedmann Robertson Walker (FRW) empregada tem assinatura (+,-,-,-).

1.1 Geometria de Riemann - Conceitos Básicos

Dada uma Variedade Diferenciável M^4 de dimensão 4, formada por um conjunto P de infinitos pontos, cuja união das vizinhanças desses pontos recobre a variedade, é possível estabelecer um mapeamento biunívoco com o espaço $\Re^4$ das coordenadas $x_{(P)}$ de um ponto P arbitrário $x_{(P)} = (x^\alpha) = (x^0, x^j) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Se na variedade estiver definida uma conexão afim ou afinidade $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, essa é denominada variedade afim [9].

Os objetos geométricos, tais como escalares, vetores e tensores, definidos

em uma variedade diferenciável M, podem ser caracterizados pela forma com que se transformam frente a uma mudança de coordenadas. Optou-se pelos termos "vetor covariante" e "vetor contravariante" ou simplesmente "vetor" para designar as componentes de um campo de 1-formas ou de um campo vetorial, expressas em uma determinada base de coordenadas. O termo "tensor" também se refere às componentes de um campo tensorial.

Quando uma variedade afim é dotada de um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, é denominada um espaço métrico. O elemento de linha desse espaço é dado pelas diferenciais dx^μ e pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$: $\qquad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

Nas geometrias de Riemann e Weyl, a conexão é simétrica com respeito à troca dos índices covariantes, o que representa uma variedade afim sem torção: $\Gamma^\beta_{\mu\alpha} = \Gamma^\beta_{\alpha\mu}$.

A derivada simples de escalares vetores e tensores é comumente expressa pela aplicação do operador $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ no objeto geométrico em questão:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \phi \qquad \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha V^\beta \qquad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\nu\ldots}{}_{\sigma\lambda\ldots} = \partial_\alpha T^{\mu\nu\ldots}{}_{\sigma\lambda\ldots}$$

Aplicando o operador ∇_α em escalares, vetores ou tensores obtém-se a derivada covariante.

Vetores Contravariantes: $\quad \nabla_\alpha V^\beta \equiv \partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\alpha} V^\mu$

Vetores covariantes: $\quad \nabla_\alpha V_\beta \equiv \partial_\alpha V_\beta - \Gamma^\mu_{\beta\alpha} V_\mu$

Tensores: $\quad \nabla_\alpha T^{\mu\ldots}{}_{\sigma\ldots} \equiv \partial_\alpha T^{\mu\ldots}{}_{\sigma\ldots} + T^{\gamma\ldots}{}_{\sigma\ldots}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + \ldots - T^{\mu\ldots}{}_{\gamma\ldots}\Gamma^\gamma_{\sigma\alpha} - \ldots$

Escalares: $\quad \nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi$

A partir da derivada covariante da métrica é fácil mostrar que:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{1.1}$$

onde $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ é conhecido como símbolo de Christofell:

$$\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{1.2}$$

Quando a derivada covariante do tensor métrico é nula, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, os vetores podem mudar de direção num transporte afim, todavia seus comprimentos permanecem invariantes. Portanto, é possível estabelecer um padrão de comprimentos válido em todo o espaço métrico. Neste caso a conexão é identificada com o símbolo de Christofell: $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$.

Um espaço métrico onde a derivada covariante da métrica se anula possui uma estrutura geométrica Riemanniana, e frequentemente é referida na literatura como uma variedade Riemanniana.

A partir de um campo vetorial X^α define-se o tensor de curvatura $R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}$:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu X^\alpha - \nabla_\mu \nabla_\nu X^\alpha \equiv R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} X^\lambda \tag{1.3}$$

A contração dos índices do tensor de curvatura resulta no tensor e no escalar de Ricci:

$$R_{\lambda\nu} \equiv R^\alpha{}_{\lambda\alpha\nu} \qquad R \equiv R_{\lambda\nu} g^{\lambda\nu} \tag{1.4}$$

Com $R_{\lambda\nu}$ e R constrói-se o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

Na geometria de Riemann ou de Weyl, a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ pode ser decomposta em um vetor tipo tempo u_μ e na métrica $h_{\mu\nu}$ de um hiperplano tipo espaço, localmente normal ao vetor u_μ. O campo de vetores u^μ representa a quadri-velocidade em cada ponto de um campo de observadores distribuídos no hiperplano.

$$g_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu + h_{\mu\nu} \qquad u^\mu u_\mu = 1 \qquad h_{\mu\nu} u^\nu = 0 \tag{1.6}$$

Na geometria de Riemann é possível definir quantidades cinemáticas associadas a um dado referencial de quadri-velocidade u_μ:

A aceleração é dada por:

$$\alpha_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu \tag{1.7}$$

Os objetos θ, α_μ, $\sigma_{\mu\nu}$ e $\Omega_{\mu\nu}$ são componentes da representação irredutível da derivada covariante de u_μ:

$$\nabla_\nu u_\mu = \theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu} + \alpha_\mu u_\nu \quad \text{onde} \quad \theta_{\mu\nu} = \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

$$\theta = \theta^\mu{}_\mu = \nabla_\mu u^\mu \tag{1.9}$$

$\sigma_{\mu\nu}$ é o tensor que quantifica o cisalhamento, $\Omega_{\mu\nu}$ é o tensor que quantifica a rotação e θ indica a variação específica de um elemento de volume do espaço-tempo, ou a variação de volume por unidade de volume.

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu} \qquad h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0 \tag{1.11}$$

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} (\nabla_\nu u_\mu - \nabla_\mu u_\nu) \tag{1.12}$$

$$\Omega^\beta = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \Omega_{\mu\nu} u_\alpha \tag{1.13}$$

O tensor $\eta_{\mu\nu\alpha\beta}$ é definido como:

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{-1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1.14}$$

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1.15}$$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\delta\lambda\theta\varphi} = \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\lambda\theta\varphi} \tag{1.16}$$

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi Civita e $\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\lambda\theta\varphi}$ o delta de Kronecker generalizado.

1.2 Geometria de Weyl

Em 1918, Herman Weyl propôs um espaço métrico de 4 dimensões, comumente denominado geometria de Weyl, dotado de um campo vetorial de natureza geométrica, o chamado vetor de Weyl $\vec{\omega}(x)$ [17].

A principal propriedade que caracteriza essa geometria é o fato da derivada covariante da métrica $g_{\mu\nu}$ não ser nula, mas igual ao produto da métrica pelo vetor de Weyl ω^{β}:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \omega_{\lambda} g_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

Isto implica que o comprimento de um vetor paralelamente transportado deve variar pontualmente ao longo do transporte, ou de forma equivalente que as unidades de medida se modificam em cada ponto. Da mema forma, o produto escalar entre vetores varia num transporte paralelo. No entanto, as relações angulares na geometria de Weyl são preservadas.

A partir das eq.(1.1) e (1.17) obtém-se a expressão da derivada covariante em Weyl:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} \left[\omega_{\mu} \delta^{\alpha}_{\nu} + \omega_{\nu} \delta^{\alpha}_{\mu} - g_{\mu\nu} \omega^{\alpha} \right] \tag{1.18}$$

Nos casos em que o vetor de Weyl é nulo $\omega_{\mu}(x) = 0$, obtém-se uma geometria Riemanniana. Isso mostra que a geometria Riemanianna constitui um caso particular da geometria de Weyl.

Neste trabalho, será adotada como notação a barra para designar derivação simples, ponto e vírgula para a derivação covariante em Weyl e duas barras para designar derivada covariante na geometria Riemanniana. Derivada covariante em Weyl ou Riemann significa que a conexão afim empregada na derivação será a conexão da geometria de Weyl $\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}$ ou o símbolo de Christofell no caso Riemanniano $\left\{ {\beta \atop \gamma\mu} \right\}$.

Derivação simples: $\omega_{|\mu} = \partial_\mu \omega$

Derivação covariante em Riemann: $V^\beta{}_{\|\mu} = \partial_\mu V^\beta + V^\gamma \left\{ {\beta \atop \gamma\mu} \right\}$

Derivação covariante em Weyl: $V^\beta{}_{;\mu} = \partial_\mu V^\beta + V^\gamma \Gamma^\beta_{\gamma\mu}$

Outras convenções serão definidas ao longo dos capítulos conforme a necessidade.

Substituindo as derivadas covariantes em Riemann pelas derivadas covariantes em Weyl na expressão (1.3), obtém-se o tensor de curvatura na geometria de Weyl: $X^\alpha{}_{;\mu;\nu} - X^\alpha{}_{;\nu;\mu} \equiv \tilde{R}^\alpha_{\lambda\mu\nu} X^\lambda$, onde X^α é um dado campo vetorial.

$$\tilde{R}^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\lambda\mu|\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu|\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\nu} \tag{1.19}$$

O tensor e o escalar de Ricci assim como o tensor de Einstein na geometria de Weyl são definidos da mesma forma que no caso Riemanniano.

$$\tilde{R}_{\lambda\nu} \equiv \tilde{R}^\alpha{}_{\lambda\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha|\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu|\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\nu}$$

$$\tilde{R} \equiv \tilde{R}_{\lambda\nu} g^{\lambda\nu}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R} g_{\mu\nu}$$

O tilda ($\tilde{}$) nos termos das equações acima, denota que esses termos são objetos geométricos definidos na geometria de Weyl, ou seja, construídos com a conexão afim de Weyl. Objetos sem o tilda são Riemannianos, ou seja, construídos com o símbolo de Christofell. De agora em diante será adotada essa notação.

Os objetos geométricos definidos numa variedade Weyliana podem ser expressos em função de objetos análogos da geometria Riemanniana adicionados de termos que dependem do vetor de Weyl. Exemplos:

Derivada covariante de um campo vetorial X^α :

$$X^{\alpha}{}_{;\mu} = X^{\alpha}{}_{\|\mu} - \frac{1}{2}\left[\omega_{\mu}X^{\alpha} + \omega_{\nu}X^{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} - X_{\mu}\omega^{\alpha}\right] \tag{1.20}$$

Tensores de curvatura e de Ricci, bem como o escalar de Ricci, são também dados pelas expressões:

$$\tilde{R}_{\mu\beta\gamma\lambda} = R_{\mu\beta\gamma\lambda} + \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta}\omega_{[\lambda\|\gamma]} + \omega_{\beta\|[\gamma}g_{\lambda]\mu} + \omega_{\mu\|[\lambda}g_{\gamma]\beta}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(g_{\mu[\lambda}\omega_{\gamma]}\omega_{\beta} + g_{\beta[\gamma}\omega_{\lambda]}\omega_{\mu} + g_{\mu[\gamma}g_{\lambda]\beta}\omega_{\nu}\omega^{\nu}\right) \tag{1.21}$$

$$\tilde{R}_{\beta\lambda} = R_{\beta\lambda} - \frac{3}{2}\omega_{\beta\|\lambda} + \frac{1}{2}\left\{\omega_{\lambda\|\beta} - \omega_{\beta}\omega_{\lambda} - g_{\beta\lambda}\left[\omega^{\mu}{}_{\|\mu} - \omega_{\mu}\omega^{\mu}\right]\right\} \tag{1.22}$$

$$\tilde{R} = R - 3\omega^{\beta}{}_{\|\beta} + \frac{3}{2}\omega_{\beta}\omega^{\beta} \tag{1.23}$$

Onde [ ] significa operação de antisimetrização, por exemplo: $\omega_{[\lambda\|\gamma]} = \omega_{\lambda\|\gamma} - \omega_{\gamma\|\lambda}$.

É importante destacar que os tensores de curvatura e de Ricci não possuem todas as simetrias na geometria de Weyl como possuem na geometria Riemanniana. Basta observar, por exemplo, que não existe mais simetria na permutação dos índices β e λ na eq. (1.22), embora a conexão afim de Weyl, eq.(1.18), seja simétrica nos seus índices covariantes, assim como o símbolo de Christofell.

1.3 Geometria de Weyl Integrável

Na geometria de Weyl, a variação de comprimento de um vetor é função não apenas de sua localização, mas do caminho pelo qual o vetor foi transportado na variedade (por exemplo, de sua história), uma vez que seu tamanho depende, em cada ponto, do vetor de Weyl. Pode então ocorrer uma não integrabilidade das variações de comprimento, ou seja, dois vetores idênticos

transportados de um ponto a outro por caminhos diversos apresentarão tamanhos distintos ao fim dos transportes, em função das diferenças do vetor de Weyl ao longo dos caminhos.

A motivação que levou Weyl a propor essa geometria foi a ideia de unificar a gravitação com o eletromagnetismo, onde o vetor de Weyl era identificado com o potencial vetor do campo eletromagnético. Entretanto, a variação das unidades de medida e a não integrabilidade dessas variações mediante transporte paralelo num meio permeado por um campo eletromagnético são facilmente verificaveis em laboratório. O espectro de radiação de um átomo, por exemplo, teria suas frequências modificadas num transporte paralelo. Esse efeito era a base da crítica de Einstein contra essa proposta de Weyl de unificação, uma vez que não se observam desvios espectrais dessa natureza.

Apesar da tentativa de unificar a gravitação com o eletromagnetismo ter falhado, a geometria de Weyl pode ser aplicada assumindo que o campo vetorial $\omega_\mu(x)$ é um campo de natureza puramente geométrica [6] e independente do potencial vetor eletromagnético.

Restringindo o vetor de Weyl a um gradiente de um campo escalar, $\omega_\mu(x) = \nabla_\mu \omega(x)$, as variações de comprimento tornam-se integráveis.

A geometria de Weyl na qual o vetor $\omega_\mu(x)$ é o gradiente de um campo escalar é conhecida como *Weyl-integrable space-time* (Wist). Em Wist, as variações de comprimento devido ao transporte paralelo dependem exclusivamente do valor do campo escalar de Weyl nos pontos inicial e final. Quando o escalar de Weyl é uma constante, é obtida a geometria de Riemann.

Em Wist, o escalar de Ricci e os tensores de Ricci e de Einstein são dados a seguir:

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{2} g^{\lambda\beta} \left(\omega_{|\lambda} \omega_{|\beta} - 2\omega_{|\lambda\|\beta} \right) \tag{1.24}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \omega_{|\mu\|\nu} - \frac{1}{2}\omega_{|\mu}\omega_{|\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\left[\omega_{|\lambda\|\beta} - \omega_{|\lambda}\omega_{|\beta}\right] \tag{1.25}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \omega_{|\mu\|\nu} - \frac{1}{2}\omega_{|\mu}\omega_{|\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\left[2\omega_{|\lambda\|\beta} - \frac{1}{2}\omega_{|\lambda}\omega_{|\beta}\right] \tag{1.26}$$

1.4 Teoria da gravitação em Wist

Tomando como ponto de partida a geometria de Weyl integrável (Wist), é possível construir uma ação para representar a teoria da gravitação:

$$S = \int \left[\tilde{R} + \xi\left(\omega_{|\mu}g^{\mu\nu}\right)_{;\nu}\right]\sqrt{-g}\;\; d^4x \tag{1.27}$$

onde $\tilde{R}$ é o escalar de curvatura em Wist, o 2^o termo consiste num acoplamento adicional do campo gravitacional com o campo escalar $\omega(x)$ e ξ uma constante de acoplamento [10], [11].

A ação acima pode ser reescrita separando os termos riemannianos dos termos dependentes do campo escalar de Weyl. Desconsiderando o termo de divergência total, que não contribui para as equações de movimento, obtém-se:

$$S = \int \left[R - \lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu}g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\;\; d^4x \tag{1.28}$$

onde $\lambda = 2\xi - 3/2$.

O fato do escalar de Ricci na eq.(1.27) ser definido em Wist implica apenas na renormalização do parâmetro ξ na eq.(1.28).

Para simplificar os cálculos, a partir de agora, o universo será tratado como riemanniano e dotado de termos constituídos pelo campo escalar de Weyl.

1.5 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Dados observacionais, como a isotropia da radiação cósmica de fundo e a distribuição de matéria, sugerem a validade do princípio cosmológico, ou seja, as evidências indicam um universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Isso implica que o espaço-tempo pode ser descrito pela métrica de um hiperespaço separada numa componente temporal e uma espacial que representa uma variedade tridimensional homogênea e isotrópica.

Partindo apenas dessas hipóteses, é possível obter a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) representada pelo elemento de linha a seguir:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 - \frac{[a(x^0)]^2}{(1-\frac{1}{4}\epsilon_c r^2)^2}(dX)^2 \qquad (1.29)$$

Em coordenadas esféricas, $(dX)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$, onde r é a coordenada radial, θ e ϕ são as coordenadas angulares, $a(x^0)$ é o fator de escala da métrica. Em coordenadas cartesianas, $(dX)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, e $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. $\epsilon_c < 0$ para um universo com curvatura espacial hiperbólica, $\epsilon_c = 0$ para um universo com curvatura espacial nula e $\epsilon_c > 0$ para um universo com curvatura espacial esférica.

A métrica de FRW dada na eq.(1.29) é comumente expressa no tempo conforme χ ou no tempo cosmológico t, onde $a(\chi)\, d\chi = c\, dt$ e c é a velocidade da luz no vácuo.

Nos tempos conforme e cosmológico temos respectivamente,

$$g_{00}(\chi) = a(\chi)^2 \quad \Rightarrow \quad u_\mu = a(\chi)\delta^0_\mu \qquad ds^2 = a(\chi)^2 d\chi^2 + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (1.30)$$

$$g_{00} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad u_\mu = \delta^0_\mu \qquad ds^2 = c^2dt^2 + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (1.31)$$

onde $h_{\mu\nu} = \delta_\mu{}^i\ \delta_\nu{}^j\ h_{ij}$.

O elemento de linha ds^2 deve possuir dimensão de unidade de comprimento elevado ao quadrado. Será adotada a dimensão de comprimento para as coordenadas x^μ, neste caso, a constante ϵ_c da métrica deverá possuir dimensão de inverso de comprimento ao quadrado.

É importante destacar que em FRW na geometria de Riemann, a aceleração, a rotação e o cisalhamento são nulos, $\alpha_\mu = 0$, $\Omega_{\mu\nu} = 0$ e $\sigma_{\mu\nu} = 0$; no entanto, em Weyl apenas a rotação e o cisalhamento são nulos.

Com a finalidade de tornar as expressões mais simples, convencionou-se a seguinte notação:

-Derivação parcial simples em relação à coordenada x^0 no tempo cosmológico $t = x^0/c$ de uma função escalar $\phi(x)$:

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial}{c\partial t}\phi(x) \tag{1.32}$$

-Derivação parcial em relação ao tempo conforme χ de uma função escalar $\phi(x)$:

$$\phi'(x) = \frac{\partial}{\partial \chi}\phi(x^\mu) \tag{1.33}$$

1.6 Tensor Momento-Energia

O conteúdo de matéria e energia do universo pode ser representado por um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}(x)$ com a seguinte forma [18]:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \Pi_{\mu\nu} \tag{1.34}$$

onde ρ é a densidade de energia, p é a pressão isotrópica, q_μ representa o fluxo de calor e $\Pi_{\mu\nu}$ a pressão anisotrópica.

No caso em que $q_\mu = 0$ e $\Pi_{\mu\nu} = 0$, obtém-se o tensor momento-energia de um fluido perfeito, onde existe choque entre as partículas mas não há troca de calor nem viscosidade:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} \tag{1.35}$$

A pressão e densidade de energia do fluido podem ser obtidas, calculando:

$$T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -3p \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \rho$$

A conservação do tensor momento-energia é dada por[†]:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

A componente temporal dessa equação, no caso particular de um fluido perfeito, na geometria de Riemann, com a métrica de Friedman é dada a seguir:

$$\partial_0 \rho + 3\frac{\partial_0 a}{a}(\rho + p) = 0 \tag{1.36}$$

A pressão p e a densidade de energia ρ[‡] são funções exclusivas do tempo em razão da homogeneidade espacial do universo.

Nas diferentes fases do universo, a equação de estado pode ser aproximada para, $p = w\rho$, onde w é uma constante. Neste caso, a densidade de energia tem a seguinte expressão:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}} \tag{1.37}$$

[†]A geometria na qual vale a lei de conservação do tensor $T^{\mu\nu}$ depende da teoria empregada. Em geral $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ não deve ser válida simultaneamente nas geometrias de Riemann e Weyl.

[‡]Na convenção adotada, ρ tem dimensão de energia por volume e p tem dimensão de força por área, logo ambas possuem dimensões equivalentes. Daí a vantagem de utilizar a densidade de energia ao invés da densidade de matéria nas equações.

1.7 Universo não Singular sem Matéria

No modelo cosmológico padrão, o universo é descrito a partir da Teoria da Relatividade Geral (TRG) que supõe um espaço métrico Riemanniano com uma métrica do tipo Friedman - Robertson - Walker (FRW) e um fluido homogêneo e isotrópico. A equação dinâmica do universo é a equação tensorial de Einstein, que é consistente com dados observacionais.

Apesar dos sucessos da cosmologia moderna, se o modelo padrão for extrapolado, supondo que a Teoria da Relatividade Geral é sempre válida, o universo tende a uma singularidade. Como não se conhece ao certo o limite de validade da TRG, essa questão é evitada, considerando que a teoria clássica da gravitação e o modelo padrão valem a partir de um determinado tempo posterior à singularidade. A física anterior a esse tempo é pouco discutida pela cosmologia padrão.

Um caminho para desenvolver um modelo cosmológico sem singularidade é através da geometria de Weyl Integrável. Num artigo de 1993, Novello et al [10] exploram essa possibilidade e apresentam um modelo não singular de universo. Em 1996, Salim et al [11] estabelecem a teoria da gravitação em Wist, nos artigos [12] e [13] são feitas aplicações cosmológicas dessa teoria. Usando a geometria de Wist, em 2000, Klippert et al [14] discutem a era de radiação de um modelo não singular.

O modelo que se segue foi desenvolvido por Novello et al [10] e servirá como base para uma análise de campos magnéticos de larga escala em universo sem singularidade.

Inicia-se com a ação dada na eq.(1.28), onde as variáveis dinâmicas são

ω e a métrica $g_{\mu\nu}$:

$$S = \int \left[R - \lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu}g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ d^4x$$

Usando a métrica de FRW e o campo escalar de Wist como fonte da gravitação para o universo, é fácil mostrar que o cálculo dos extremos dessa ação resulta nas equações dinâmicas para o fator de escala e para o campo escalar de WIST. Os cálculos serão desenvolvidos como se o universo fosse riemanniano, onde R é o escalar de Ricci, $\omega(x)$ um campo escalar e $\sqrt{-g}$ o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.

Determinando os extremos da ação com respeito às variações do campo ω, obtém-se:

$$\Box\omega = \omega_{|\alpha\|\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\omega_{|\alpha}g^{\alpha\beta}\right)_{|\beta} = 0 \tag{1.38}$$

O símbolo $\Box$ indica o operador dalambertiano em Riemann.

O cálculo dos extremos da ação com respeito às variações da métrica fornece:

$$G_{\mu\nu} = \lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu} - g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{2}\omega_{|\alpha}\omega_{|\beta}g^{\alpha\beta} \tag{1.39}$$

A eq.(1.39) é equivalente a uma equação de Einstein, onde o gradiente do campo escalar $\omega(x)$ desempenha o papel de fonte da curvatura riemanniana. O lado direito dessa equação pode ser entendido como um tensor-momento energia efetivo associado ao campo escalar, embora o campo $\omega(x)$ tenha uma natureza puramente geométrica:

$$-\kappa T_{(\omega)\mu\nu} = \lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu} - g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{2}\omega_{|\alpha}\omega_{|\beta}g^{\alpha\beta} \tag{1.40}$$

$$\text{onde} \qquad \kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \tag{1.41}$$

O universo em questão é espacialmente homogêneo e isotrópico, isto implica a homogeneidade e isotropia do campo escalar, portanto ω deve ser uma função exclusiva do tempo. Logo,

$$\omega_{|\mu} = \omega_{|\alpha} u^{\alpha} u_{\mu} \tag{1.42}$$

No caso de FRW, as eq.(1.38) e (1.42) resultam em:

$$\left(a^3 \omega_{|\alpha} u^{\alpha}\right)_{|0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{|\alpha} u^{\alpha} = \omega_{0v} \frac{{a_0}^2}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \omega' = \omega_{0v} \frac{{a_0}^2}{a^2} \tag{1.43}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{2} \frac{{\omega_{0v}}^2 {a_0}^4}{a^6} \left(u_{\mu} u_{\nu} - h_{\mu\nu}\right) \tag{1.44}$$

Temos portanto um tensor momento energia efetivo associado ao campo escalar com a equação de estado

$$p_{\omega} = \rho_{\omega} = -\frac{\lambda}{2\kappa} \frac{(\omega')^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad p_{\omega} = \rho_{\omega} = -\frac{\lambda}{2\kappa} \frac{{\omega_{0v}}^2 {a_0}^4}{a^6} \tag{1.45}$$

Uma vez que o campo ω é de natureza geométrica, convém destacar que a quantidade $\rho_{(\omega)}$ não é a rigor uma densidade de energia, por conseguinte não há um estado de mínima energia associado ao campo escalar.

No caso mais geral de um fluido perfeito dado pela eq.(1.35) e a métrica de FRW no tempo cosmológico, a equação de Einstein projetada em $u^{\mu}u^{\nu}$ e $h^{\mu\nu}$ resulta nas equações diferenciais a seguir:

$$\frac{(\dot{a})^2}{a^2} + \frac{\epsilon_c}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho \tag{1.46}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a})^2}{a^2} + \frac{\epsilon_c}{a^2} = -\kappa p \tag{1.47}$$

Subtraindo a eq.(1.46) da eq.(1.47) obtém-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) \tag{1.48}$$

Se $\rho < 0$ a eq.(1.46) só possui solução real para $\epsilon_c < 0$ o que representa um universo de seção espacial hiperbólica. Por outro lado, se $\rho + 3p > 0$, é

fácil ver que o universo sempre terá uma aceleração negativa, o que resulta num universo com singularidade [5].

A constante λ, em princípio, pode assumir qualquer valor real; mas de acordo com seu sinal, a densidade de energia associada ao campo escalar será positiva ou negativa. Se $\lambda > 0$, a densidade de energia e a pressão serão negativas, $\rho_\omega < 0$ e $p_\omega < 0$. Um fluido com $\rho + 3p < 0$ e $p < 0$ resulta num universo hiperbólico e não singular. A partir de agora, a constante λ só poderá assumir valores positivos, pois não se deseja um universo com singularidade.

Será analisada a equação de Einstein com uma métrica de FRW e um fluido do tipo $p_\omega = \rho_\omega = -\frac{\lambda}{2\kappa}\frac{{\omega_{0v}}^2 {a_0}^4}{a^6}$.

Para simplificar a notação, será definida a constante χ_{0v} :

$$\chi_{0v} \equiv \frac{1}{2\sqrt{-\epsilon_c}} \tag{1.49}$$

No tempo conforme existe uma solução analítica para o fator de escala. Transformando as equações (1.46) e (1.47) para o tempo conforme e substituindo $\epsilon_c = -(2\chi_{0v})^{-2}$, tem-se:

$$3\left[\frac{(a')^2}{a^4} + \frac{\epsilon_c}{a^2}\right] = \kappa\rho_\omega \qquad \Rightarrow \qquad 3\left[\frac{(a')^2}{a^4} - \frac{1}{4{\chi_{0v}}^2 a^2}\right] = \kappa\rho_\omega \tag{1.50}$$

$$\left[2\frac{a''}{a^3} - \frac{(a')^2}{a^4} - \frac{\epsilon_c}{a^2}\right] = -\kappa\rho_\omega \;\Rightarrow\; \left[2\frac{a''}{a^3} - \frac{(a')^2}{a^4} - \frac{1}{4{\chi_{0v}}^2 a^2}\right] = -\kappa\rho_\omega \tag{1.51}$$

A solução não trivial das eq.(1.50) e (1.51) é:

$$a(\chi) = a_0\sqrt{\cosh\left[\frac{1}{\chi_{0v}}(\chi - \chi_{b0})\right]} \tag{1.52}$$

$$\text{onde} \qquad \rho_\omega = \frac{-3}{4{\chi_{0v}}^2\kappa}\frac{{a_0}^4}{a^6} \tag{1.53}$$

A constante de integração χ_{b0} é arbitrária e representa o tempo no qual o fator de escala tem um valor mínimo.

Ao substituir a eq.(1.52) e (1.53) na eq.(1.43), eis o resultado:

$$\omega' = \frac{\omega_{0v}}{\cosh\left[\frac{1}{\chi_{0v}}(\chi - \chi_{b0})\right]} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2\lambda}}}{\chi_{0v}\cosh\left[\frac{1}{\chi_{0v}}(\chi - \chi_{b0})\right]} \tag{1.54}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{0v} = \frac{1}{\chi_{0v}}\sqrt{\frac{3}{2\lambda}} \tag{1.55}$$

Na figura 1.1 há o gráfico da equação (1.52), com os valores, $a_0 = 1$, $\chi_{0v} = 1$ e $\chi_{b0} = 0$.

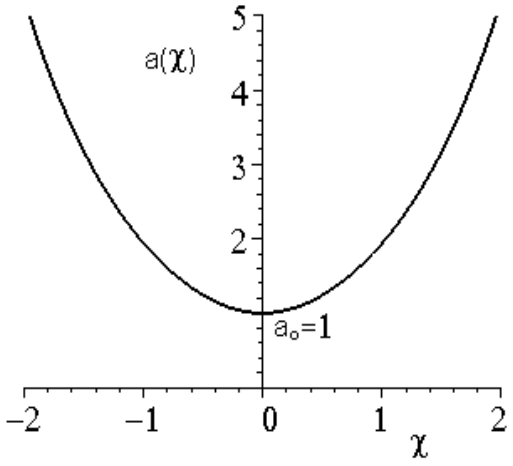

Figura 1.1: Fator de escala $a(\chi)$

O modelo de universo para o vazio é espacialmente homogêneo, isotrópico e de secção espacial hiperbólica. O módulo da densidade de energia efetiva associada ao campo escalar é proporcional a $a(x^0)^{-6}$(1.45). Portanto, é assintoticamente nula para tempos cada vez mais afastados do período ($\chi = \chi_{b0}$), e máxima quando o fator de escala está em torno do mínimo $a(\chi_{b0}) = a_0$. Esta fase de maior contração do universo é denominada ricochete ou *bounce*.

A existência do ricochete (ou ausência de singularidade) nesse universo é devida ao fato de a pressão e densidade de energia efetivas, associadas ao campo escalar, possuirem valores negativos. Novello et al [10] especularam sobre a possibilidade de um acoplamento do campo escalar com o vácuo quântico; neste caso, as flutuações quânticas dos campos de matéria poderiam ser amplificadas de tal forma a ocorrer um fenômeno de criação de partículas durante o ricochete.

1.8 Universo não Singular com Radiação

Nessa seção, será apresentado um modelo cosmológico não singular homogêneo e isotrópico, a partir da geometria de WIST, semelhante ao da seção anterior, mas com radiação e campo escalar sem interação.

Esse modelo é adequado para descrever o período do universo dominado pela radiação. Os parâmetros livres podem ser ajustados para que, pouco antes da fase conhecida como nucleossíntese, a densidade de energia associada ao campo escalar seja desprezível em relação à radiação.

Trata-se de uma representação aproximada, pois não está sendo considerada a interação do campo escalar com a radiação. Neste caso, não há troca de energia entre a radiação e o campo escalar, e portanto é fácil mostrar que os tensores momento-energia de cada fluido se conservam separadamente:

$$T^{\mu\nu}_{(r)\|\nu} = 0 \quad \text{e} \quad T^{\mu\nu}_{(\omega)\|\nu} = 0 \tag{1.56}$$

onde $T^{\mu\nu}_{(r)} = \frac{4}{3}\rho_r u^\mu u^\nu - \frac{1}{3}\rho_r g^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}_{(\omega)} = 2\rho_\omega u^\mu u^\nu - \rho_\omega g^{\mu\nu}$ são, respectivamente, os tensores momento-energia da radiação e do campo escalar.

A curvatura espacial da métrica para esse modelo é nula, ou seja, $\epsilon_c = 0$. O elemento de linha dessa métrica segue abaixo:

$$ds^2 = a^2(\chi)\left(d\chi^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j\right) \tag{1.57}$$

A seguinte ação fornece as equações dinâmicas para o modelo:

$$S = \int \left[R - \lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu}g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_r\right]\sqrt{-g}\; d^4x \tag{1.58}$$

onde $\mathcal{L}_r$ corresponde à densidade de lagrangeana de um fluido perfeito com a equação de estado $\rho_r = 3p_r$, onde ρ_r e p_r são a densidade de energia e a pressão do fluido de radiação.

O cálculo variacional da ação dada pela eq.(1.58) usando a métrica dada em (1.57) resulta nas equações:

$$3\frac{(a')^2}{a^4} = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\omega'}{a}\right)^2 + \kappa\rho_r \tag{1.59}$$

$$\frac{(a')^2}{a^4} - 2\frac{a''}{a^3} = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\omega'}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{3}\rho_r \tag{1.60}$$

$$\Box\omega = \frac{(a^2\omega')'}{a^4} = 0 \tag{1.61}$$

Assumindo que a máxima contração do universo ocorre em $\chi = 0$, a solução das eq.(1.59) a (1.61) é dada pelas expressões a seguir:

$$a(\chi) = a_0\sqrt{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1} \tag{1.62}$$

$$\omega' = \omega_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{\omega_0}{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1} \tag{1.63}$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{0r}}{a^4} \qquad\qquad \rho_\omega = -\frac{3}{\kappa{\chi_0}^2}\frac{{a_0}^4}{a^6} \tag{1.64}$$

Observando as expressões (1.64), nota-se que $\rho_r \sim a^{-4}$ e $\rho_\omega \sim a^{-6}$, o que evidencia a ausência de interação entre os dois fluidos, conforme mencionado.

Outro aspecto importante é o fato que ρ_ω diminui de forma mais acentuada que ρ_r conforme o fator de escala cresce. Assim, se o modelo for ajustado, para que, no início da nucleossíntese, a densidade de energia do campo escalar seja desprezível, em tempos posteriores esse modelo se torna indistinguível do modelo padrão, no que diz respeito à evolução do fator de escala, com a vantagem de não apresentar singularidade.

As relações entre ω_0, ρ_{0r} e a_0 são:

$$\omega_0 = \frac{1}{\chi_0}\sqrt{\frac{6}{\lambda}} \qquad\qquad \chi_0 = a_0\sqrt{\frac{3}{\rho_{0r}\kappa}} \tag{1.65}$$

O parâmetro de Hubble H e a densidade crítica de energia ρ_c [§], nesse modelo, têm as seguintes expressões:

$$\frac{1}{c}H = \frac{a'}{a^2} = \frac{\chi\chi_0}{a_0(\chi^2 + {\chi_0}^2)^{3/2}} \tag{1.66}$$

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa c^2}H^2 = \frac{3}{\kappa {a_0}^2}\frac{(\chi\chi_0)^2}{(\chi^2 + {\chi_0}^2)^3} \tag{1.67}$$

Os parâmetros de densidade da radiação e do campo escalar de Wist são:

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} \quad \Rightarrow \quad \Omega_r = 1 + \left(\frac{\chi_0}{\chi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\chi}{\chi_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{\Omega_r - 1}} \tag{1.68}$$

$$\Omega_\omega = \frac{\rho_\omega}{\rho_c} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\omega = -\left(\frac{\chi_0}{\chi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\chi}{\chi_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{-\Omega_\omega}} \tag{1.69}$$

[§]A densidade crítica é a densidade de energia total de um universo com curvatura espacial nula e sem constante cosmológica.

Uma vez que o modelo possui apenas radiação e campo escalar, a seguinte relação é satisfeita:

$$\Omega_r + \Omega_\omega = 1 \tag{1.70}$$

Será conveniente definir quantidades relativas ao tempo característico do ricochete χ_0:

Define-se a quantidade $\bar{\chi}$: $$\bar{\chi} \equiv \frac{\chi}{\chi_0} \tag{1.71}$$

Com isso o parâmetro de Hubble e o fator de escala são expressos como:

$$H(\bar{\chi}) = \frac{c\ \ \bar{\chi}}{a_0\chi_0\left(\bar{\chi}^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad a(\bar{\chi}) = a_0\sqrt{\bar{\chi}^2+1} \tag{1.72}$$

De uma simples manipulação algébrica é fácil obter:

$$a_0\chi_0 = \frac{-\ \Omega_\omega\ c}{H\left(1-\Omega_\omega\right)^{3/2}} = \frac{c}{H}\frac{\bar{\chi}}{\left(\bar{\chi}^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.73}$$

A última expressão mostra como calcular $a_0\chi_0$ em função do parâmetro de Hubble $H(\chi)$ a partir de um dado instante na era da radiação e o valor de Ω_ω nesse mesmo tempo, ou em função de H e de $\bar{\chi}$.

Uma forma de cálculo mais útil é expressar $a_0\chi_0$ em função da temperatura do universo T_b ou do tempo cosmológico t_b do término do ricochete (*bounce*) e início da era da radiação. O valor de T_b ou t_b corresponde ao tempo χ_b e indica se a era da radiação começou mais próxima ou mais afastada do período inicial da nucleossíntese.

A caracterização do início da era da radiação está relacionada ao valor da derivada do campo escalar ω. Se ω' for próxima de zero, a geometria se torna indistinguível da riemanniana. Neste caso, $\rho_\omega \simeq 0$, o fator de escala e o parâmetro de Hubble tornam-se:

$$a_{pr}(\chi) \simeq \frac{a_0}{\chi_0}\chi = a_0\bar{\chi} \qquad H_{pr}(\chi) \simeq \frac{c}{a_0\chi_0}\left(\frac{\chi_0}{\chi}\right)^2 = \frac{c}{a_0\chi_0\bar{\chi}^2} \tag{1.74}$$

onde o índice (pr) indica o modelo padrão na era da radiação.

A definição do que é $\omega' \simeq 0$ é um tanto arbitrária. Na realidade a derivada de ω só é exatamente zero no limite $\chi \to \infty$, mas não é necessário considerar esse limite, pois a escolha adequada das constantes a_0 e χ_0 torna o modelo quase idêntico ao modelo padrão um pouco depois de $\chi = 0$. Para fins práticos, $H(\chi)$ pode ser utilizado para determinar o início da era da radiação. Muitas quantidades na cosmologia são calculadas em função de H_h, o parâmetro de Hubble no tempo presente e sabe-se que H_h é avaliado com um erro que está em torno de 11%. Um critério aceitável é postular que o início da era da radiação começa quando a diferença entre $H(\chi)$ e $H_{pr}(\chi)$ for menor que 4% . É fácil ver que isso ocorre a partir de $\chi > 6\chi_0$ [¶]. Neste caso $\omega' \mid_{\chi=\chi_b} \simeq 0,027\omega' \mid_{\chi=0}$ e $\rho_\omega \mid_{\chi=\chi_b} \simeq -2,0 \cdot 10^{-5}\rho_r \mid_{\chi=0}$. Portanto será definido o tempo χ_b como:

$$\chi_b \equiv 6\chi_0 \qquad \Rightarrow \qquad H_b \simeq \frac{c}{37,5\ a_0\chi_0} \simeq \frac{8,0}{a_0\ \chi_0} 10^6\ \frac{m}{s} \tag{1.75}$$

Praticamente todo o conteúdo material do universo primordial, representado por ρ_c, estava no estado de radiação. Isso torna fácil obter H em função da temperatura do meio [19], [20]:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3\ c^2}\rho_c} \qquad \text{onde} \qquad \rho_c = g_{ef}\frac{\pi^2(k_B T)^4}{30(\hbar c)^3} \tag{1.76}$$

$$\Rightarrow \qquad H = \sqrt{g_{ef}\frac{8\pi^3 G}{90\ c^5\ \hbar^3}} \cdot (k_B T)^2 = 0,20657 \cdot \sqrt{g_{ef}} \left(\frac{k_B T}{MeV}\right)^2 s^{-1} \tag{1.77}$$

Substituindo a eq.(1.77) em (1.75), no tempo χ_b, obtém-se:

$$a_0\chi_0 \simeq \frac{3,87 \cdot 10^7}{\sqrt{g_{ef}}} \left(\frac{MeV}{k_B T_b}\right)^2 m \tag{1.78}$$

[¶]Na realidade valores de χ um pouco maiores que $6\chi_0$ ainda provocam alterações na taxa de evolução do fator de escala. Mas essa pequena variação rapidamente diminui e não altera as previsões do modelo padrão, se ocorrer no início da ncleossíntese ou antes desse período.

O parâmetro g_{ef} representa o número efetivo de graus de liberdade internos do fluido de radiação e depende do spin das partículas que o constituem. A expressão a seguir permite calcular g_{ef} [19], [20].

$$g_{ef} \equiv \sum_{bs} g_{bs} \left(\frac{T_{bs}}{T}\right)^4 + \sum_{fm} \frac{7}{8} g_{fm} \left(\frac{T_{fm}}{T}\right)^4 \tag{1.79}$$

Na expressão anterior, o índice bs indica os campos bosônicos; e o índice fm, os campos fermiônicos. T é a temperatura do fluido, T_{bs} a temperatura do boson bs e T_{fm} a temperatura do férmion fm, as constantes g_{bs} e g_{fm} representam o valor das degenerescências de spin das partículas [20]. Para o intervalo de temperatura[‖] entre $1MeV$ e $100MeV$ [19], as partículas que faziam parte da radiação do universo eram, em princípio, os fótons, os elétrons, pósitrons e os 3 neutrinos com seus antineutrinos. Essas partículas apresentavam equilíbrio térmico, ou seja, $T = T_{bs} = T_{fm}$, logo, o valor de g_{ef} era:

$$g_{ef} = 2 + \frac{7}{8}(4 + 2 \cdot 3) = \frac{43}{4} \tag{1.80}$$

O primeiro 2, na eq.(1.80), se refere às duas polarizações dos fótons, o fator 7/8 está relacionado ao caráter fermiônico das partículas, o 4 é devido aos elétrons e aos pósitrons, o fator $2 \cdot 3$ é devido aos 3 tipos de neutrinos e 3 antineutrinos. Logo,

$$H \simeq 0,68 \left(\frac{k_B T}{MeV}\right)^2 s^{-1} \qquad 1MeV < k_B T < 100MeV \tag{1.81}$$

A questão é que g_{ef} não é constante, depende da temperatura conforme ilustrado no gráfico de $g_{ef}(T)$ que consta no livro de Kolb, seção 3.3 [19]. Essa dependência, embora seja suave (com exceção de temperaturas em torno

[‖]Uma temperatura dada em Kelvin, T_K, pode ser expressa em unidade de energia, através da constante de Boltzmann k_B: $T = k_B T_K$. A relação entre a temperatura em Kelvin, T_K e a temperatura em elétron-volt, T_{eV} é: $T_K/K = (T_{eV}/eV) \cdot 1,1604 \cdot 10^4$.

de $200MeV$, quando ocorre o processo de hadronização), torna difícil obter uma expressão entre o tempo de término do ricochete χ_b e a temperatura T_b correspondente. Uma outra forma de parametrizar o início da era da radiação no modelo não singular é através do tempo cosmológico t_b.

O tempo t_b é dado por:

$$c\ t_b = a_0\chi_0 \int_0^{\bar{\chi}_b} \sqrt{x^2+1}\ dx \simeq 20 a_0\chi_0 \qquad \text{onde} \qquad \bar{\chi}_b \simeq 6 \tag{1.82}$$

Ao substituir (1.82) em (1.72), o resultado é:

$$H(\bar{\chi}) \simeq \frac{2\cdot 10\ \bar{\chi}}{t_b(\bar{\chi}^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.83}$$

Quando $\bar{\chi} > 6$, o parâmetro de Hubble em função de $\bar{\chi}$, torna-se:

$$H(\bar{\chi}) \simeq \frac{2\cdot 10}{t_b\ \bar{\chi}^2} \simeq \frac{0,20657}{s}\cdot\sqrt{g_{ef}}\left(\frac{k_B T}{MeV}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\chi} \propto \frac{1}{T(g_{ef})^{\frac{1}{4}}} \tag{1.84}$$

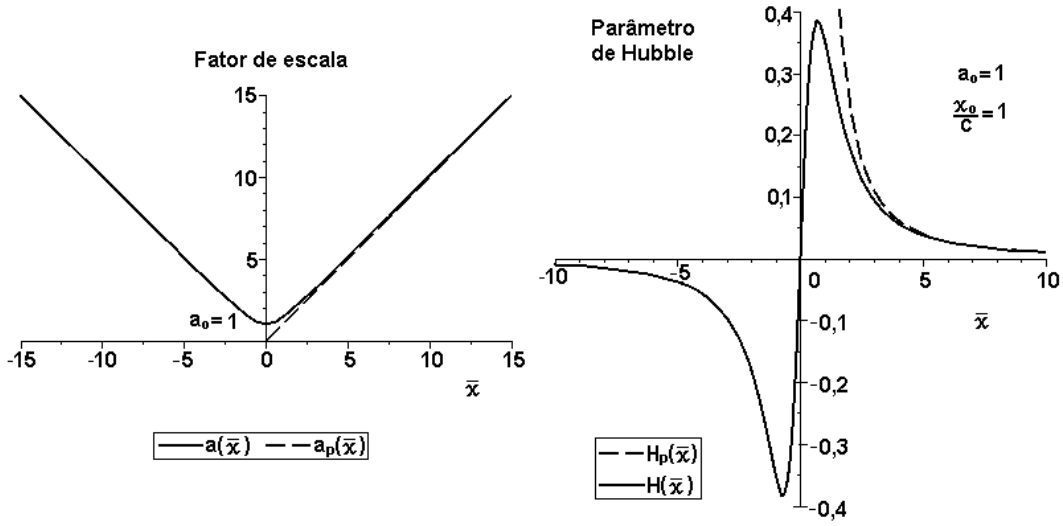

Figura 1.2: Fator de escala $a(\bar{\chi})$ e parâmetro de Hubble $H(\bar{\chi})$.

Na figura 1.2 observa-se o fator de escala e o parâmetro de Hubble do modelo não singular com radiação e do modelo padrão da cosmologia em função de $\bar{\chi}$, com os valores $a_0 = 1$ e $\chi_0/c = 1$.

É importante destacar que o modelo não singular proposto deve convergir para o modelo padrão antes do início da nucleossíntese para não comprometer o sucesso de suas previsões, logo o tempo t_b deve ser inferior a $10^{-2}s$.

1.9 Modelo Padrão com Matéria e Radiação

Assumindo as hipóteses de homogeneidade e isotropia, considerando que a Teoria da Relatividade Geral é a que melhor descreve a gravitação, e supondo que o universo é composto por um fluido perfeito, com uma componente de matéria e uma componente de radiação, sem constante cosmológica**, no caso da métrica de FRW com $\epsilon_c = 0$, as equações de Friedmann, no tempo conforme, assumem a seguinte forma :

$$\frac{3}{c^2}H^2 = 3\frac{(a')^2}{a^4} = \kappa\rho_m + \kappa\rho_r \tag{1.85}$$

$$\frac{(a')^2}{a^4} - 2\frac{a''}{a^3} = \frac{\kappa}{3}\rho_r \tag{1.86}$$

onde ρ_m é a densidade de energia da matéria e ρ_r é a densidade de energia da radiação. A pressão da radiação vale $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ e a pressão do fluido de matéria é nula, $p_m = 0$.

**O parâmetro de densidade da constante cosmológica, Ω_Λ, atualmente está em torno de 0,7 [21]. Na era da radiação e em boa parte do período de domínio da matéria, possuía valor insignificante para a evolução do universo. A dinâmica do universo recente é irrelevante para o estudo desenvolvido nessa tese, por isso a constatante cosmológica foi desconsiderada.

A solução das eq.(1.85) e (1.86) segue abaixo:

$$a(\chi) = \frac{{a_h}^3 {H_h}^2}{4\ c^2}\chi^2 + \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h \sqrt{\Omega_{rh}}\chi \quad \Rightarrow$$

$$a(\chi) = \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h \chi \left(\frac{a_h H_h}{4\ c}\chi + \sqrt{\Omega_{rh}}\right) \tag{1.87}$$

o índice h indica o tempo presente (hoje), o índice r refere-se a uma quantidade associada a radiação, a_h é o valor do fator de escala hoje. $\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}$ é o parâmetro de densidade da radiação.

Na era dominada pela radiação, $\chi \ll \frac{4c\sqrt{\Omega_{rh}}}{a_h H_h} \quad \Rightarrow$

$$a(\chi) \simeq \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h \sqrt{\Omega_{rh}}\ \chi \tag{1.88}$$

No presente o valor da constante H_h, segundo dados recentes do telescópio espacial Hubble, combinados com resultados obtidos a partir de supernovas, indicam que $H_h = (72 \pm 8) Km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$, [18], [22].

Usualmente H_h é representada como uma constante h_h adimensional multiplicada por uma normalização [††], onde $h_h = 0,72 \pm 0,08$:

$$H_h = h_h \cdot 100 Km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}, \qquad h_h = 0,72 \pm 0,08 \tag{1.89}$$

Um outro parâmetro importante na cosmologia é o desvio para o vermelho ou "redshift", definido num instante de tempo t como $z(t)$:

$$z(t) + 1 = \frac{a(t_h)}{a(t)} \tag{1.90}$$

[††]Na literatura, a constante de Hubble no presente é indicada com o índice 0. Nessa tese as quantidades avaliadas no tempo presente são indicadas com o índice h, pois o índice 0 já é utilizado para outros fins. Portanto designamos H_h e h_h ao invés de H_0 e h_0.

1.10 Modelo Cosmológico não singular com Matéria e Radiação

Não existe solução exata para o fator de escala de um universo com matéria, radiação e campo escalar sem interação com o termo cinético $\lambda\omega_{|\mu}\omega_{|\nu}g^{\mu\nu}$ na lagrangeana, oriundo da geometria de WIST, de maneira análoga ao modelo com radiação e campo escalar mostrado na seção 1.8. Entretanto, a métrica singular dada na seção 1.9 e a métrica não singular da seção 1.8 possuem um intervalo no domínio temporal cujo comportamento apresenta diferenças inobserváveis, ou seja, as duas funções quase coincidem na era da radiação.

O fator de escala dado pela eq.(1.62) pode ser expresso como:

$$a(\chi) = \sqrt{{a_{pr}}^2 + {a_0}^2} \tag{1.91}$$

a_{pr} é o fator de escala do modelo padrão na era da radiação, eq.(1.74).

Na era da radiação, $a_{pr} \gg a_0$, a função $a(\chi)$ converge para o fator de escala dado pela expressão (1.88), $\quad a(\chi) \to \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h \sqrt{\Omega_{rh}}\ \chi$.

Na era dominada pela matéria,

$$a_p = \frac{{a_h}^3 {H_h}^2}{4\ c^2}\chi^2 + \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h\sqrt{\Omega_{rh}}\chi \gg \frac{1}{c}{a_h}^2 H_h\sqrt{\Omega_{rh}}\chi = a_{pr} \quad \Rightarrow \quad a_p \gg a_{pr} \gg a_0$$

Portanto o fator de escala de um universo com matéria campo escalar e ricochete pode ser dado, com excelente aproximação, pela expressão abaixo:

$$a(\chi) = \sqrt{{a_p}^2 + {a_0}^2}$$

onde a_p é o fator de escala do modelo padrão dado pela expressão (1.87).

Substituindo a_p na última expressão, obtém-se:

$$a(\chi) = a_0\sqrt{\left(\frac{a_h}{a_0}\right)^2\left[\left(\frac{a_h H_h}{2\ c}\chi\right)^2 + \frac{1}{c}a_h H_h\sqrt{\Omega_{rh}}\chi\right]^2 + 1} \tag{1.92}$$

Durante o ricochete e na era da radiação, a eq.(1.92)converge para a expressão (1.62), $a(\chi) = a_0\sqrt{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1}$, logo o resultado da comparação de ambas é:

$$\frac{a_0}{\chi_0} = {a_h}^2\sqrt{\Omega_{rh}}\frac{H_h}{c} \tag{1.93}$$

Combinando as eq.(1.78), (1.82) e eq.(1.93) é fácil encontrar as expressões a seguir:

$$a_0 \simeq 0,23\ a_h\sqrt[4]{\Omega_{rh}}\sqrt{H_h t_b} \quad \text{ou} \quad a_0 \simeq 1,1\ a_h\sqrt[4]{\Omega_{rh}}\frac{\sqrt{H_h s}}{\sqrt{g_{ef}}}\left(\frac{MeV}{k_B T_b}\right) \tag{1.94}$$

$$\chi_0 = \frac{0,23\ c}{a_h\sqrt[4]{\Omega_{rh}}}\sqrt{\frac{t_b}{H_h}} \qquad \text{ou} \qquad \chi_0 = \frac{1,1\ c}{a_h\sqrt[4]{\Omega_{rh}}}\sqrt{\frac{s}{H_h}}\frac{1}{\sqrt{g_{ef}}}\left(\frac{MeV}{k_B T_b}\right) \tag{1.95}$$

Reescrevendo o fator de escala dado pela eq.(1.92) encontra-se:

$$a(\chi) = a_0\sqrt{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2\left(1 + \frac{\chi\quad a_0}{4\chi_0\Omega_{rh}a_h}\right)^2 + 1} \quad \text{ou} \tag{1.96}$$

$$a(\chi) = a_0\sqrt{\bar{\chi}^2\left(1 + \frac{\bar{\chi}\ a_0}{4\Omega_{rh}a_h}\right)^2 + 1} \tag{1.97}$$

A completa determinação do modelo depende dos parâmetros $a_h,\ t_b,\ H_h$ e Ω_{rh}. A constante a_h é arbitrária e corresponde ao valor do fator de escala hoje. Essa quantidade pode assumir qualquer valor e atua como um calibre (*gauge*). As quantidades H_h e Ω_{rh} são extraídas do modelo padrão. O tempo de término do ricochete, t_b, determina se o fator de escala do modelo converge, de forma mais ou menos breve, para o fator de escala do modelo padrão.

Assumindo os seguintes valores para os parâmetros do modelo [18], [22],

$$H_h \simeq h_h(3,086\cdot 10^{17}s)^{-1}, \qquad a_h = 1, \qquad \Omega_{rh} \simeq \frac{2,47}{{h_h}^2}\cdot 10^{-5} \tag{1.98}$$

encontra-se:

$$\frac{a_0}{\chi_0} \simeq \frac{5,37}{10^{29}\ m} \qquad a_0 \simeq \frac{2,9}{10^{11}}\sqrt{\frac{t_b}{s}} \quad \text{ou} \quad a_0 \simeq \frac{4,6}{10^{11}(g_{ef})^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{MeV}{k_B T_b}\right)$$

$$\chi_0 \simeq 5,4 \cdot 10^{17}\sqrt{\frac{t_b}{s}}\ m \qquad \text{ou} \qquad \chi_0 \simeq \frac{8,5 \cdot 10^{17}}{(g_{ef})^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{MeV}{k_B T_b}\right)\ m \qquad (1.99)$$

No tempo da nucleossíntese correspondente a temperatura $k_B T_{ns} = 1Mev$, obtém-se:

$$H(\chi_{ns}) = H_{ns} \simeq 0,6773\ s^{-1} \quad \text{e} \quad a(\chi_{ns}) = a_{ns} \simeq a_h 1,54 \cdot 10^{-10} \quad (1.100)$$

Capítulo 2

Eletromagnetismo em Espaços Curvos

A dinâmica do campo eletromagnético é dada pelas quatro equações de Maxwell. Escritas na forma diferencial, não covariante, no espaço plano, essas equações são dadas abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j} \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são os campos elétrico e magnético, $\vec{D}$ é o vetor deslocamento elétrico e $\vec{B}$ a indução magnética, ρ_e representa a densidade de carga elétrica e $\vec{j}$ a densidade de corrente elétrica.

Fazem parte ainda do eletromagnetismo de Maxwell as equações constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{2.5}$$

As constantes μ e ϵ representam, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio *.

A velocidade de propagação da onda eletromagnética é igual a v, onde $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$; no caso do vazio, $v = c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, onde μ_0 e ϵ_0 são as constantes dielétricas relativas ao vácuo.

Existe ainda a força de Lorentz $\vec{F_l}$ que determina como as cargas e correntes interagem com o campo eletromagnético:

$$\vec{F_l} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{2.6}$$

Em muitos sistemas físicos, a corrente elétrica possui uma relação linear com o campo elétrico, e pode ser modelada pela Lei de Ohm:

$$\vec{j} = \sigma_e \vec{E} \tag{2.7}$$

onde σ_e corresponde a condutividade elétrica do meio.

No estudo de fenômenos que ocorrem em larga escala no universo, como é o caso dos campos magnéticos galácticos, a curvatura do espaço-tempo passa a ser relevante. Por outro lado, o eletromagnetismo de Maxwell apresenta invariância com respeito a transformações conformes da métrica de fundo. Uma vez que a métrica de FRW é conformalmente plana, as equações de Maxwell, no espaço plano e no universo de Friedmann com geometria Riemanniana, devem apresentar a mesma dinâmica.

A próxima seção exibe o eletromagnetismo de Maxwell num espaço-tempo riemanniano.

*No caso mais geral das equações constitutivas, a permissividade elétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ são tensores.

2.1 Campo Eletromagnético em Riemann

Para representar as equações dinâmicas do campo eletromagnético em espaços curvos, é preciso, em primeiro lugar, reescrever as 4 equações de Maxwell usando o formalismo covariante.

Definem-se os tensores $P_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$, o tensor dual ${}^{*}F_{\mu\nu}$ e o quadrivetor corrente J^{μ} como:

$$P_{\mu\nu} = u_{\mu} c D_{\nu} - u_{\nu} c D_{\mu} + \eta_{\mu\nu\alpha\beta} u^{\alpha} H^{\beta} \tag{2.8}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} u_{\mu} E_{\nu} - \frac{1}{c} u_{\nu} E_{\mu} + \eta_{\mu\nu\alpha\beta} u^{\alpha} B^{\beta} \tag{2.9}$$

$${}^{*}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = B_{\mu} u_{\nu} - B_{\nu} u_{\mu} + \frac{1}{c} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} u^{\alpha} E^{\beta} \tag{2.10}$$

$$J^{\mu} = c \rho_e u^{\mu} + j^{\mu} \tag{2.11}$$

As equações tensoriais (2.12), (2.13) e (2.14) a seguir correspondem, respectivamente, às equações constitutivas (2.5), à força de Lorentz eq.(2.6) e à lei de Ohm eq.(2.7) na forma covariante.

$$F_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu}{}_{\lambda\gamma} P^{\lambda\gamma} \tag{2.12}$$

$$F_{(l)}{}^{\nu} = J_{\mu} F^{\mu\nu} \tag{2.13}$$

$$h^{\mu}{}_{\nu} J^{\nu} = \sigma c u_{\nu} F^{\nu\mu} \tag{2.14}$$

$$\text{onde} \quad \Lambda^{\mu\nu}{}_{\lambda\gamma} = \frac{1}{\epsilon\, c^2} (\, u^{\mu} u_{\lambda} h^{\nu}{}_{\gamma} + h^{\mu}{}_{\lambda} u^{\nu} u_{\gamma}) + \mu\; h^{\mu}{}_{\lambda} h^{\nu}_{\gamma} \tag{2.15}$$

os vetores $E^{\mu}, H^{\beta}, D^{\nu}, B^{\beta}$ e j^{μ} do espaço-tempo representam, respectivamente, os campos $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ e a corrente $\vec{j}$ das equações (2.1) a (2.4).

O vetor tipo tempo u^{μ} representa a quadrivelocidade de um campo de observadores, distribuídos no hiperplano de métrica $h_{\mu\nu}$, que medem a densidade de carga ρ_e e de corrente j^{μ}. As relações dadas em (1.6) são satisfeitas pelo campo u^{μ} e pelas métricas $h_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$.

Na forma covariante, no espaço de Minkowski em coordenadas cartesianas, as equações de Maxwell são:

$$P^{\mu\nu}{}_{|\nu} = J^{\mu} \tag{2.16}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \tag{2.17}$$

As equações de Maxwell no espaço-tempo riemanniano podem ser obtidas aplicando o princípio do acoplamento mínimo, que consiste na troca das derivadas simples pelas derivadas covariantes em Riemann.

A eq.(2.17) não se altera em espaços curvos sem torção, pois ela é obtida das simetrias do tensor dual do eletromagnetismo e da simetria entre dois índices da conexão afim.

As equações de Maxwell na formulação covariante em Riemann são:

$$P^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} = J^{\mu} \tag{2.18}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} = 0 \tag{2.19}$$

O potencial vetor A_{μ} é definindo a partir do tensor $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha|\beta} - A_{\beta|\alpha} = A_{\alpha\|\beta} - A_{\beta\|\alpha} \tag{2.20}$$

Convém observar que o tensor do campo eletromagnético $F_{\alpha\beta}$ independe da métrica e da geometria do espaço-tempo, com exceção das geometrias onde a conexão afim não é simétrica.

A equação tensorial (2.16) ou (2.18) que fornece duas das quatro equações de Maxwell pode também ser obtida através do cálculo dos extremos da ação abaixo, em relação às variações do potencial vetor:

$$S_{em} = \int \left(\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \mu J^{\mu} A_{\mu}\right) \sqrt{-g} d^4x$$

Os campos E_{μ} e B_{μ} são ortogonais à quadrivelocidade u^{ν}. Logo eles são obtidos projetando (2.9) e (2.10) em u^{ν}:

$$\frac{E_\mu}{c} = -F_{\mu\nu}u^\nu \qquad\qquad B_\mu = {}^{*}F_{\mu\nu}u^\nu \tag{2.21}$$

uma vez que $B_\mu u^\mu = 0$ e $E_\mu u^\mu = 0$.

A projeção de (2.18) em u^μ e $h^\mu{}_\nu$ resulta em:

$$D^\nu{}_{\|\nu} + D^\mu \dot{u}_\mu - \frac{2}{c}\Omega^\beta H_\beta = c\rho_e \tag{2.22}$$

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu(H_{\alpha\|\beta} + \dot{u}_\alpha H_\beta) - c\dot{D}^\mu - \frac{2\theta}{3}cD^\mu + cD^\nu(\sigma^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\nu - u^\mu \dot{u}_\nu) = h^\mu{}_\nu J^\nu \tag{2.23}$$

E as projeções de (2.19) são:

$$B^\mu{}_{\|\mu} + B^\mu \dot{u}_\mu + \frac{2}{c}\Omega^\mu E_\mu = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{c}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu(E_{\alpha\|\beta} + \dot{u}_\alpha E_\beta) + \dot{B}^\mu + \frac{2\theta}{3}B^\mu - B^\nu(\sigma^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\nu - u^\mu \dot{u}_\nu) = 0 \tag{2.25}$$

onde se definiram as quantidades com ponto ($\dot{}$) como $\dot{V}_\alpha \equiv V_{\alpha\|\beta}u^\beta$. A aceleração do referencial de quadrivelocidade u^μ vale $\alpha^\mu = \dot{u}^\mu$, o cisalhamento vale $\sigma^{\mu\nu}$, a rotação é dada por Ω^μ e $\Omega^{\mu\nu}$.

2.2 Campo Eletromagnético na métrica de FRW em Riemann

Em Friedmann, a rotação, a aceleração e o cisalhamento são nulos:

$$\Omega_{\mu\nu} = 0 \qquad \dot{u}_\mu = 0 \qquad \sigma^{\mu\nu} = 0 \tag{2.26}$$

A métrica de FRW expressa no tempo conforme χ é dada por:

$$ds^2 = a^2(\chi)\left(d\chi^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j\right) \tag{2.27}$$

Feita a escolha apropriada de observadores, tem-se:

$$u^\mu \doteq \frac{1}{a}\delta^\mu_0 \quad \text{e} \quad u_\mu \doteq a\delta^0_\mu \tag{2.28}$$

$$\theta \doteq 3\frac{a'}{a^2} \tag{2.29}$$

$$D^\mu \doteq \delta^\mu_i D^i \qquad H^\nu \doteq \delta^\nu_j H^j \qquad J^0 \doteq c\rho \quad \text{e} \quad J^i \doteq j^i \tag{2.30}$$

onde $\doteq$ indica que essas igualdades são válidas apenas no particular sistema de coordenadas escolhido.

Para um tempo χ constante, o objeto γ_{jk} representa a métrica da hiper-superfície tridimensional tipo espaço normal à congruência de curvas dada pelo campo vetorial u^μ. A partir de agora, será usado o termo "tri-espaço" para designar esta hiper-superfície de métrica γ_{jk}. O tensor γ_{jk} não possui dependência temporal e obedece às relações seguintes:

$$\gamma_{jk}\gamma^{ki} = \delta^i_j \quad \gamma_{ij}\gamma^{ij} = 3 \quad \gamma_{jk} = \gamma_{kj} \quad \gamma_{jk|0} = 0 \tag{2.31}$$

A forma explícita do tensor γ_{ij} em coordenadas cartesianas é:

$$\gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \frac{\epsilon}{4}\, r^2)^2} \tag{2.32}$$

onde $\quad r^2 = x^m x^n \delta_{mn} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

Pode-se, ainda, construir o tensor antissimétrico η^{ijk} e o seu dual η_{ijk} definidos no tri-espaço:

$$\eta^{ijk}\gamma_{kl} = \eta^{ij}{}_{0l} \quad \text{ou} \quad \eta^{ijk} = \frac{-1}{\sqrt{\gamma}}\epsilon^{ijk0} \qquad \text{e} \qquad \eta_{ljk} = \gamma_{la}\gamma_{jb}\gamma_{kc}\eta^{abc} \tag{2.33}$$

$$\text{onde} \qquad \sqrt{-g} = a^4\sqrt{\gamma} \qquad \text{e} \qquad \gamma = det[\gamma_{ij}] \tag{2.34}$$

$$\eta^{ijp}\eta_{pkl} = \delta^{ij}_{kl} \tag{2.35}$$

A métrica γ_{jk} e a conexão riemanianna tridimensional por ela induzida permitem o desenvolvimento de um formalismo covariante apenas no tri-espaço.

O símbolo de Christofell, construído com a métrica γ_{jk}, é igual ao construído com a métrica de FRW, se todos os seus índices forem espaciais. Portanto serve de conexão afim do tri-espaço de métrica γ_{ij}.

$$\{^{i}_{jk}\} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj|k} + g_{lk|j} - g_{jk|l}) = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lj|k} + \gamma_{lk|j} - \gamma_{jk|l}) = {}^{(3)}\{^{i}_{jk}\} \quad (2.36)$$

o índice (3) informa que se trata de um objeto definido no tri-espaço.

A eq.(2.36) implica:

$${}^{(3)}\{^{i}_{jk}\}_{|0} = \{^{i}_{jk}\}_{|0} = 0$$

Das definições do símbolo de Christofell e do tensor η^{ijp}, obtêm-se as identidades:

$$\gamma_{ij\|k} = \gamma_{ij|k} - \gamma_{ip}{}^{(3)}\{^{p}_{jk}\} - \gamma_{jp}{}^{(3)}\{^{p}_{ik}\} = 0 \qquad \eta^{ijp}{}_{\|r} = 0 \quad \text{e} \quad \eta_{ijp\|r} = 0 \quad (2.37)$$

O tensor de curvatura do tri-espaço, no caso de métricas do tipo que estamos utilizando nesta seção, é obtido a partir da definição do tensor de Riemann no espaço-tempo a 4 dimensões eq. (1.3):

$$X_{\gamma\|\beta\|\alpha} = X_{\gamma\|\alpha\|\beta} + X^{\lambda}R_{\gamma\lambda\beta\alpha} \quad \Rightarrow \quad X_{i\|j\|k} = X_{i\|k\|j} - X^{a\,(3)}R_{iajk} \quad (2.38)$$

Como a tri-superfície tem curvatura constante, o tensor de Riemann assume a forma simples:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \epsilon_c(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (2.39)$$

A constante ϵ_c informa a curvatura espacial do espaço-tempo. Na equação de Friedmann (1.46), sabe-se que o termo de curvatura ϵ_c/a^2 é pequeno em relação à densidade crítica no tempo presente, e possivelmente nulo, logo é fácil mostrar que se $\epsilon_c \neq 0$, na era da radiação e em boa parte da era da matéria, o referido termo era várias ordens de grandeza menor que a

densidade crítica e, portanto, pode ser desprezado. Para efeito de cálculo, nessa tese, será considerado $\epsilon_c = 0$. Portanto, ${}^{(3)}R_{ijkl} = 0$.

A partir do formalismo tensorial do tri-espaço é possível simplificar as equações (2.22) a (2.25), separando a dependência temporal da espacial. Deste modo, as equações de campo assumem uma forma covariante, tão somente mediante transformações de coordenadas definidas na hiper-superfície tipo espaço, de métrica γ_{ij}.

As equações (2.24) e (2.25) em Friedmann assumem a forma mais simples:

$$\left(a^3 B^i\right)_{\|i} = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{1}{c}\eta^{ijk}\gamma_{kl}\left(a^3 E^l\right)_{\|j} + \left(a^3 B^i\right)' = 0 \tag{2.41}$$

No vazio, $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$ [†] logo, $F^{\mu\nu} = \mu_0 P^{\mu\nu}$, e a eq.(2.16) torna-se ${F^{\mu\nu}}_{\|\nu} = \mu_0 J^\mu$.

As equações (2.22) e (2.23), em FRW, são dadas a seguir:

$$c\left(a^3 D^i\right)_{\|i} = a^4 J^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{c}\left(a^3 E^i\right)_{\|i} = a^4 \mu_0 J^0 \tag{2.42}$$

$$\eta^{ijk}\gamma_{kl}\left(a^3 H^l\right)_{\|j} - c\left(a^3 D^i\right)' = a^4 j^i \qquad \Rightarrow$$

$$\eta^{ijk}\gamma_{kl}\left(a^3 B^l\right)_{\|j} - \frac{1}{c}\left(a^3 E^i\right)' = \mu_0 a^4 j^i \tag{2.43}$$

O sistema de equações (2.40) a (2.43) evidenciam a invariância conforme do eletromagnetismo em Riemann, uma vez que apresentam a mesma forma que as de Maxwell no espaço plano, eq.(2.21) a (2.24). A expansão do universo altera a intensidade dos campos E^i e B^i através do fator de escala $a(\chi)$ mas não modifica a dinâmica dos mesmos.

A dinâmica do campo EM, em função do potencial vetor A_μ, no vazio e com fontes é dada por:

$$\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right)A_{\alpha\|\beta\|\nu} = \mu_0 J^\mu \qquad \Rightarrow$$

[†]Nos cálculos seguintes, a dinâmica do campo EM será considerada no vazio.

$$\Box A^{\mu} + R^{\mu\nu} A_{\nu} - g^{\mu\nu} A^{\alpha}{}_{\|\alpha\|\nu} = \mu_0 J^{\mu} \tag{2.44}$$

Arbitrando o calibre de Coulomb, $A^{\alpha}{}_{\|\alpha} = 0$, obtém-se:

$$\Box A^{\mu} + R^{\mu\nu} A_{\nu} = \mu_0 J^{\mu} \tag{2.45}$$

Na métrica de Friedmann com $\epsilon_c = 0$, a eq.(2.45) assume a seguinte forma:

$$A_i'' - {}^{(3)}\bigtriangledown^2 A_i = \mu_0 a^2 j_i \tag{2.46}$$

2.3 Campo Eletromagnético em Weyl

A interação do eletromagnetismo com a gravitação é obtida através do princípio de acoplamento mínimo, onde as derivadas simples em relação às coordenadas espaço-temporais são substituídas pelas derivadas covariantes. Assim foram obtidas as equações de Maxwell no espaço-tempo riemanniano.

Da mesma forma, na geometria de Weyl, as equações de Maxwell homogêneas são obtidas por meio da troca das derivadas simples pelas derivadas covariantes em Weyl, [14], [11]:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{2.47}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{2.48}$$

Como a conexão afim de Weyl é simétrica com respeito à troca de seus índices covariantes, a divergência do tensor dual $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$ é idêntica em Weyl e Minkowski, eq.(2.48).

Separando os termos de Riemann e Weyl, a eq.(2.47) resulta em:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} - 2F^{\mu\nu}\omega_{\nu} = 0 \tag{2.49}$$

No caso particular da geometria de Weyl integrável, $\omega_\nu = \omega_{|\nu}$. A última equação resulta em:

$$\left(e^{-2\omega}F^{\mu\nu}\right)_{\|\nu} = 0 \tag{2.50}$$

Um caminho para acrescentar o vetor quadri-corrente J^μ nas equações de Maxwell em Wist é introduzi-lo no lado direito da eq.(2.49) multiplicado pelo fator $e^{2\omega}$. Neste caso, a equação resultante é:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} - 2F^{\mu\nu}\omega_\nu = e^{2\omega}\mu_0 J^\mu \quad \Rightarrow$$

$$\left(e^{-2\omega}F^{\mu\nu}\right)_{\|\nu} = \mu_0 J^\mu \tag{2.51}$$

Uma outra forma de interpretar fisicamente essas equações é considerá-las como equações definidas no espaço-tempo riemanniano, acopladas ao campo escalar de Wist.

A ação que gera a equação (2.51) é dada a seguir:

$$S_{em} = \int \left(\frac{1}{4}e^{-2\omega}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mu_0 A_\mu J^\nu\right)\sqrt{-g}\;\; d^4x \tag{2.52}$$

A partir de agora, o eletromagnetismo em Wist será considerado como um eletromagnetismo riemanniano modificado pelo acoplamento com o campo escalar ω, dado pela eq.(2.52).

Na métrica de FRW, a projeção de (2.48) em u_ν e $h^\mu{}_\nu$ resulta nas eq.(2.40) e (2.41):

$$\left(a^3B^i\right)_{\|i} = 0 \quad (2.40) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{c}\eta^{ijk}\gamma_{kl}\left(a^3E^l\right)_{\|j} + \left(a^3B^i\right)' = 0 \quad (2.41)$$

e a projeção de (2.51) em u_ν e $h^\mu{}_\nu$ resulta em:

$$\frac{1}{c}\left(e^{-2\omega}a^3E^i\right)_{\|i} = a^4\mu_0 J^0 \tag{2.53}$$

$$\eta^{ijk}\gamma_{kl}\left(e^{-2\omega}a^3B^l\right)_{\|j} - \frac{1}{c}\left(e^{-2\omega}a^3E^i\right)' = \mu_0 a^4 j^i \tag{2.54}$$

A dinâmica do potencial vetor, no calibre de coulomb, sem fontes é dada por:

$$\Box A^{\mu} + R^{\mu\nu} A_{\nu} - 2F^{\mu\nu}\omega_{\nu} = 0 \tag{2.55}$$

Em Friedmann, $\omega_{|\beta} = \omega' \delta^{0}_{\beta} = \omega' a^{-1} u_{\beta}$ e a eq.(2.55) torna-se [‡]:

$$A_i'' - 2\omega' A_i' - {}^{(3)}\bigtriangledown^2 A_i = 0 \tag{2.56}$$

No próximo capítulo, a solução da equação (2.56) vai ser determinada, para um campo escalar $\omega(\chi)$ que satisfaz o modelo de universo com radiação e campo escalar discutido no capítulo 1. Em seguida o potencial vetor A_i será quantizado, com o objetivo de se conseguir um espectro de fótons produzidos durante o ricochete, que servirão como semente para os campos magnéticos de larga escala.

2.4 Tensor Momento-Energia do campo Eletromagnético

Na geometria de Wist, a densidade de lagrangeana do campo EM livre, $\mathcal{L}_{0em}$, é dada a partir da ação (2.52) [14], [16]:

$$\mathcal{L}_{0em} = -\frac{1}{2\mu_0} e^{-2\omega} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \tag{2.57}$$

Calculando a variação de $\mathcal{L}_{0em}$ em relção à métrica $g_{\mu\nu}$, define-se o tensor momento-energia do campo EM livre em Wist:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_{0em} = \frac{1}{\mu_0} e^{-2\omega} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \quad \Rightarrow$$

[‡]Convém destacar que a métrica que sobe e desce índices é $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, mesmo que as equações estejam expressas num formalismo covariante no tri-espaço.

$$T_{\mu\nu} = \rho_{em}\left(u_\mu u_\nu - h_{\mu\nu}\right) + u_\mu q_\nu + q_\mu u_\nu + e^{-2\omega}\left(-\epsilon_0 E_\mu E_\nu - \frac{1}{\mu_0} B_\mu B_\nu\right) \quad (2.58)$$

Em analogia com a representação do tensor momento-energia de um fluido geral (1.34), no caso eletromagnético é possível definir quantidades equivalentes: pressão e densidade de energia do campo, p_{em} e ρ_{em}, o fluxo de calor q_α e a pressão anisotrópica $\Pi_{\mu\nu}$.

$$p_{em} = -\frac{1}{3} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = e^{-2\omega}\frac{1}{6}\left(-\epsilon_0 E^\alpha E_\alpha - \frac{1}{\mu_0} B^\alpha B_\alpha\right) = \frac{1}{3}\rho_{em} \quad (2.59)$$

$$\rho_{em} = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = e^{-2\omega}\frac{1}{2}\left(-\epsilon_0 E^\alpha E_\alpha - \frac{1}{\mu_0} B^\alpha B_\alpha\right) \quad (2.60)$$

$$q_\alpha = h_{\alpha\mu} u_\nu T^{\mu\nu} = h_{\alpha\nu} u_\mu T^{\mu\nu} = e^{-2\omega}\frac{1}{\mu_0 c}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} E^\beta B^\gamma u^\delta \quad (2.61)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \left(h_{\alpha\mu} h_{\beta\nu} - h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}\right) T^{\mu\nu} = -\frac{2}{3}\rho_{em} h_{\alpha\beta} - e^{-2\omega}\left(\epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta\right) \quad (2.62)$$

As expressões (2.59) e (2.60) fornecem a equação de estado da radiação: $\rho_{em} = 3p_{em}$. O fluxo de calor (2.61) corresponde ao vetor de Poynting e (2.62) mostra que um campo EM dá origem a uma pressão anisotrópica.

Convém destacar que, no universo, a radiação de fundo é tratada como um fluido perfeito, para um conjunto de observadores com quadrivelocidade u^μ. Essa aproximação se justifica por que a radiação tem um carater homogêneo e isotrópico, o que torna consistente a representação dos efeitos gravitacionais na escala cosmológica através de um tensor momento energia submetido a uma operação de média local. Portanto, toma-se uma média espacial onde $\langle E_\alpha \rangle = \langle B_\alpha \rangle = 0$, $\langle E_\alpha B_\beta \rangle = \langle E_\alpha \rangle \langle B_\beta \rangle = 0$, $\langle E_\mu E_\nu \rangle = -h_{\mu\nu} E_\alpha E^\alpha$ e $\langle B_\mu B_\nu \rangle = -h_{\mu\nu} B_\alpha B^\alpha$, [23].

2.5 Campo Magnético Observável

A intensidade de um campo magnético é sempre definida em uma região finita do espaço e portanto consiste numa média nessa região. Um campo magnético $B(\vec{x},\chi)_i$ apresenta um valor observável $B_{(L)}$ numa escala de distância conforme L dado pela expressão abaixo [24]:

$$B_{(L)}{}^2 = \left\langle \vec{B}(\vec{x},\chi)_{(L)}^{\,2} \right\rangle = -g^{ij} \int \left\langle B(\vec{x},\chi)_i B(\vec{x}+\vec{x'},\chi)_j \right\rangle W(\vec{x'},L)\; d^3\vec{x'} \tag{2.63}$$

$$\text{onde} \quad B_{(L)} = \sqrt{B_{(L)}{}^2} \quad \text{e} \quad B(\vec{x'},\chi)_i = \frac{1}{a(2\pi)^3} \int B(\vec{k},\chi)_i \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x'}} d^3\vec{k} \tag{2.64}$$

Na expressão (2.63), o símbolo $\langle ... \rangle$ indica uma operação de média sobre as realizações do campo, ou simplesmente o valor esperado do mesmo, no caso quântico. A função $W(\vec{x'},L)$ funciona como uma janela que seleciona o campo na região de interesse. $W(\vec{x'},L) \neq 0$ quando $\left|\vec{x'}\right| < L$ e $W(\vec{x'},L) = 0$ quando $\left|\vec{x'}\right| >> L$. Um exemplo de função $W(\vec{x'},L)$ bastante empregado consiste numa Gaussiana de largura L [24]:

$$W(\vec{x}-\vec{x'},L) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\; L^3} \exp\left(-\frac{\left|\vec{x}-\vec{x'}\right|^2}{2\; L^2} \right) \quad \text{onde} \quad \int W(\vec{z},L)\; d^3\vec{z} = 1 \tag{2.65}$$

$$W(\vec{z},L) = \int W(k,L) e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad \text{e} \quad W(k,L) = e^{-\frac{1}{2}(kL)^2} \tag{2.66}$$

Ao substituir (2.64) a (2.66) em (2.63), encontra-se o resultado a seguir, após alguns cálculos:

$$B(\vec{x},\chi)_{(L)}{}^2 = \frac{-g^{ij}}{a^2(2\pi)^6} \int\int \left\langle B(\vec{k},\chi)_i B^*(\vec{q},\chi)_j \right\rangle \; e^{-\frac{1}{2}(qL)^2} e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \; d^3\vec{q}\; d^3\vec{k} \tag{2.67}$$

2.6 Campo Eletromagnético em meios ionizados

Uma grande gama de fenômenos astrofísicos, dentre eles a origem e evolução dos campos magnéticos de larga escala, envolve plasmas. Nesta seção serão tratados alguns aspectos do eletromagnetismo em meios condutivos com destaque para a evolução temporal do campo magnético, bem como uma breve digressão sobre os plasmas.

No estudo aqui desenvolvido, a interação do plasma primordial com os campos semente é discutido após o ricochete, quando eles já foram gerados e a geometria do espaço-tempo já se igualou à Riemanianna. Por uma questão de simplicidade e com base na invariância conforme do EM, algumas propriedades dos plasmas são abordadas usando as equações de Maxwell (2.1) a (2.4) no formalismo não covariante, sem a preocupação com o fator de escala.

O eletromagnetismo em meios ionizados e a interação do meio com os campos estão longe de ser um estudo trivial; compreendem um vasto e complexo campo de pesquisa. Mesmo as propriedades macroscópicas de um meio ionizado, como por exemplo, a frequência média de choque, frequência do plasma, condutividade do meio, dentre outras, são quantidades que dependem de vários parâmetros, como temperatura, densidade numérica das partículas constituintes, suas propriedades, como seção de choque, graus de liberdade, massa, carga, etc. [25], [26]. Não faz parte deste trabalho pormenorizar a física dos plasmas, mas tão somente tratar do essencial com uma abordagem simplificada que permita o entendimento e o estudo dos campos magnéticos de larga escala. Algumas relações e propriedades dos plasmas são utilizadas com as devidas referências mas sem as correspondentes demons-trações.

Uma das características essenciais de um plasma é sua capacidade de permanecer eletricamente neutro, isto é, sua capacidade de equilibrar uma diferença de carga em qualquer elemento macroscópico de volume. Caso haja um desequilíbrio elétrico no meio, intensas forças eletrostáticas tenderão a deslocar as cargas no sentido de restaurar a neutralidade.

2.6.1 Neutralidade elétrica de um plasma

Um meio ionizado eletricamente neutro, sob determinadas condições, se comporta como um plasma e apresenta alta condutividade elétrica. Um modelo simples consiste num gás de elétrons e íons positivos em equilíbrio térmico, com densidades numéricas respectivamente n_- e n_+. Uma carga Q introduzida na origem de um sistema de coordenadas é envolvida por uma nuvem de elétrons ou de íons positivos[§]. Em condições de equilíbrio térmico, no caso de um gás não relativístico de temperatura T, a densidade numérica de íons positivos e elétrons numa região é dada pela distribuição de Boltzmann [26]:

$$n_+ = n_0 e^{(-\frac{e\phi}{k_B T})} \tag{2.68}$$

$$n_- = n_0 e^{(\frac{e\phi}{k_B T})} \tag{2.69}$$

onde ϕ é o potencial eletrostático, $(-e)$ corresponde à carga do elétron, k_B representa a constante de Boltzmann e n_0 indica a densidade numérica dos elétrons e dos íons nas regiões em que o potencial é nulo, $\phi = 0$.

O potencial $\phi(r)$ é obtido por meio da equação de Poisson:

[§]Os elétrons apresentam uma mobilidade muito maior em razão da massa do íon ser muito maior que a do elétron. Em função disso, a neutralização das cargas ocorre de forma predominante em razão do movimento eletrônico.

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{em} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{2n_0 e}{\epsilon_0}\sinh\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) - \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(r) \quad (2.70)$$

A eq.(2.70) não tem solução exata. No entanto, quando $k_B T \gg e\phi$, é válida a aproximação $\sinh\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) \simeq \frac{e\phi}{k_B T}$, logo

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) \simeq \frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T}\phi - \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(r) \quad (2.71)$$

cuja solução é:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}\right) \quad (2.72)$$

A coordenada r indica a distância radial em relação à carga Q, e λ_D é o comprimento de Debye [26]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} = 6,9cm\sqrt{\frac{T}{1K}\frac{1cm^{-3}}{n_0}} \quad (2.73)$$

Em regiões cuja distância é maior que o comprimento de Debye, o gás permanece efetivamente neutro.

Um gás ionizado é denominado plasma quando as dimensões dos processos físicos de interesse forem grandes comparadas com o comprimento de Debye.

2.6.2 Oscilação de plasma

Outro efeito característico é a oscilação de plasma. Quando ocorre uma flutuação aleatória de carga, o campo eletrostático que surge desloca as cargas no sentido de restabelecer o equilíbrio. Contudo, o mesmo nunca é atingido na escala microscópica e, portanto, as cargas oscilam com um período médio t_D. Um parâmetro fundamental associado a essas oscilações é a frequência de plasma ω_p:

$$\omega_p \equiv \frac{1}{t_D} = \frac{1}{\lambda_D}\sqrt{\frac{k_B T}{m_e}} \quad (2.74)$$

A escala de tempo t_D corresponde ao intervalo que um elétron de massa m_e gasta em média para percorrer o comprimento λ_D [26]:

$$t_D = \frac{\lambda_D}{v} \qquad \text{onde} \qquad v \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}} \tag{2.75}$$

Um campo EM com frequência menor que ω_p é impedido de penetrar no plasma devido ao rápido deslocamento dos elétrons no sentido de anular o campo incidente.

Existe ainda um parâmetro importante associado a um plasma: o número de elétrons dentro da esfera de Debye, N_D:

$$N_D \equiv \frac{4}{3}\pi(\lambda_D)^3 n_- \tag{2.76}$$

A quantidade ${N_D}^{-2/3}$ é proporcional à razão entre a energia eletrostática média e a energia térmica. A condição $N_D \gg 1$ é denominada aproximação de plasma. Nesta situação, a energia potencial eletrostática é pequena se comparada com a energia cinética ($k_B T$), e o plasma se comporta como um gás ideal.

2.6.3 Campo eletromagnético num meio condutivo

A motivação dessa análise é a descrição da evolução dos campos magnéticos no universo primordial. Nessa fase, o meio apresenta uma grande densidade de partículas carregadas e alta condutividade elétrica, logo a frequência de colisão entre as partículas do fluido é suficientemente alta, tal que a dinâmica do sistema pode ser descrita em termos de um fluido condutor simples com as variáveis usuais hidrodinâmicas (velocidade, pressão e densidade). Essa abordagem é conhecida como aproximação magnetohidrodinâmica (MHD).

As eq. de Maxwell com $\rho_e = 0$ e $\vec{j} = \sigma_e \vec{E}$ são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{2.77}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0 \sigma_e \vec{E} \tag{2.78}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.79}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{2.80}$$

Aplicando o operador $\vec{\nabla}\times$ na eq.(2.78) e substituindo as eq.(2.79) e (2.80) no resultado obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}\left(\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}\right) \tag{2.81}$$

Em Friedmann, a eq.(2.81) apresenta a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial \chi}(a^3 B^i) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}\left[\gamma^{jk}(a^3 B^i)_{\|j\|k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}(a^3 B^i)\right] \tag{2.82}$$

Quando a condutividade σ_e é infinita, o campo elétrico é nulo e o campo magnético[¶] fica "congelado", sua dependência temporal é devida exclusivamente ao fator de escala $a(\chi)$:

$$B^i(\vec{r},\chi) = \frac{B_0(\vec{r})^i}{a(\chi)^3} \qquad B_i(\vec{r},\chi) = \frac{B_0(\vec{r})_i}{a(\chi)} \qquad \text{e} \qquad E_i(\vec{r},\chi) = E^i(\vec{r},\chi) = 0 \tag{2.83}$$

onde $B_0(\vec{r})^i$ e $B_0(\vec{r})_i$ são vetores que dependem apenas da posição $\vec{r}$.

O limite de condutividade infinita é também conhecido como aproximação MHD ideal [26].

Quando a condutividade é alta mas não infinita, o termo com derivada 2^a no tempo na eq.(2.81) pode ser desprezado, pois $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \gg \frac{\epsilon_0}{\sigma_e}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}$, com isso

[¶]Uma vez que, na escala microscópica, o meio é o vácuo, a diferença entre campo e indução magnética está na constante μ_0. Portanto passa a ser designado o vetor indução magnética $\vec{B}$ simplesmente por campo magnético.

obtém-se uma equação de difusão:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}\nabla^2 \vec{B} \tag{2.84}$$

A solução da eq.(2.84) consiste num campo que diminui com o tempo:

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0(\vec{x})e^{-t/\tau_d} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \vec{B}_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{-t/\tau_d}d^3\vec{k} \tag{2.85}$$

No caso de Friedmann, a equação equivalente a (2.84) e sua solução são:

$$\frac{\partial}{\partial \chi}(a^3 B^i) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}\gamma^{jk}(a^3 B^i)_{\|j\|k} \tag{2.86}$$

$$B(\vec{x},\chi)^i = \frac{e^{-\chi/\tau_d}}{a(\chi)^3(2\pi)^3}\int B_0(\vec{k})^i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^3\vec{k} \tag{2.87}$$

Substituindo(2.87) em (2.86) obtém-se para cada componente da integral de Fourier:

$$\tau_d = \mu_0 \sigma_e {L_d}^2 \quad \text{onde} \quad {L_d}^2 = \frac{1}{\vec{k}\cdot\vec{k}} \quad \text{ou} \quad {L_d}^2 = \frac{1}{k_i k_j \gamma^{ij}} \tag{2.88}$$

As expressões (2.85), (2.87) e (2.88) indicam que uma configuração inicial de campo magnético diminui exponencialmente com um tempo de difusão τ_d, onde L_d consiste num comprimento característico do campo magnético associado ao comprimento de onda da componente harmônica da integral de Fourrier do campo.

2.6.4 Condutividade do universo

A condutividade varia em diferentes épocas da evolução do universo em função da densidade numérica de cargas e do tipo de espalhamento dominante.

Durante o ricochete, as equações de Maxwell são modificadas pelo acoplamento com a geometria, conforme indica a eq.(2.51):

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} - 2F^{\mu\nu}\omega_\nu = e^{2\omega}\mu_0 J^\mu$$

Considerando, a título de estimativa, que a Lei de Ohm se altera por um fator multiplicativo $e^{2\omega}$ [‖],

$$h^\mu{}_\alpha J^\alpha = \sigma_e E^\mu \qquad \longrightarrow \qquad e^{2\omega} h^\mu{}_\alpha J^\alpha = \sigma_e E^\mu \tag{2.89}$$

é fácil mostrar que, do ponto de vista Riemanniano, a eq.(2.51) resulta em:

$$h^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu}{}_{\|\nu} = \mu_0(\sigma_e - 2\epsilon_0 c\omega')E^\mu \tag{2.90}$$

A eq.(2.90) mostra que, no ricochete, a condutividade é modififcada pela adição do termo $-2\epsilon_0 c\ \omega'$. Contudo, o que importa para o entendimento dos campos magnéticos de larga escala é o espectro do campo semente existente após o ricochete e sua evolução até a formação de estruturas, quando esse campo desencadeia os campos magnéticos observados.

Após o ricochete, o meio é constituido por um plasma relativístico em energias maiores que as do processo de aniquilação eletron pósitron $e^- e^+$. Na referência [27], J. Ahonen e K. Enqvist mostraram que, nessa fase, a condutividade é proporcional à temperatura.

Em temperaturas entre 1 Mev e a recombinação, o espalhamento Thomson é dominante e a condutividade pode ser calculada com facilidade.

$$\vec{j} = \sigma_e \vec{E} = e n_e \vec{v_e} \qquad \text{e} \qquad \vec{v_e} = \frac{\tau_e\ e}{m_e}\vec{E} \tag{2.91}$$

[‖]Para o acoplamento dado pela eq.(2.51) a força de Lorentz $F_l{}^\mu$ fica multiplicada por $e^{2\omega}$: $F_l{}^\mu = e^{2\omega} F^{\mu\nu} J_\nu$. No entanto, é possível que outros termos decorrentes do campo escalar apareçam, numa demonstração formal da lei de Ohm em Wist.

onde n_e, m_e e $\vec{v_e}$ são, respectivamente, a densidade numérica, a massa e a velocidade média dos elétrons, e corresponde à carga elementar, e τ_e indica o tempo médio entre duas colisões de um elétron.

$$\tau_e = \frac{1}{n_\gamma c \sigma_T} \qquad \text{e} \qquad \sigma_T = \frac{{\mu_0}^2\, e^4}{6\pi {m_e}^2} = \frac{8\pi}{3} {R_e}^2 = 6,652 \cdot 10^{-29} m^2 \tag{2.92}$$

onde σ_T indica a seção de choque de Thomson e R_e, o raio clássico do elétron.

Combinando as expressões dadas em (2.91) e (2.92), obtém-se a condutividade σ_e:

$$\sigma_e = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_e = \frac{n_e}{n_\gamma} \frac{e^2}{\sigma_T m_e c} \simeq \frac{n_e}{n_\gamma} \cdot 1,413 \cdot 10^{12} \frac{1}{\Omega \cdot m} \tag{2.93}$$

Após a recombinação, a matéria é formada por um gás de poeira com uma densidade residual de cargas livres. O espalhamento continua sendo o Thomson, com a modificação nas densidades n_γ e n_e, mas a expressão (2.93) permanece válida.

Hoje as densidades de fótons e elétrons estão em torno de $n_{\gamma h} = 410,5 cm^{-3}$ [22] e $n_{eh} = 3 \cdot 10^{-10} h_h c m^{-3}$ [28] o que resulta em

$$\sigma_{eh} \simeq 0,74 (\Omega \cdot m)^{-1} \tag{2.94}$$

Como a razão n_e/n_γ permanece constante, a condutividade após a recombinação é a mesma que a do presente.

Considerando um tempo característico próximo à idade do universo, $\tau_d \simeq 8,5 \cdot 10^{17} s$ (no tempo conforme), obtém-se das expressões dadas em (2.88) um comprimento característico L_d, para o campo magnético

$$L_d \simeq 1 \cdot 10^{12} m \simeq 3 \cdot 10^{-5} pc \tag{2.95}$$

Convém destacar que, no pior dos casos (o tempo presente), o comprimento característico mínimo do campo magnético é muito menor que as

dimensões das galáxias. Isso significa que campos magnéticos galácticos podem ser considerados congelados, o que equivale à aproximação MHD ideal ou de condutividade infinita.

2.6.5 Oscilações Hidromagnéticas

As oscilações possíveis num fluido usual são as de superfície e as oscilações longitudinais de pressão (ondas acústicas). As oscilações de plasma mencionadas na seção 2.6.2 ocorrem em pequena escala, na qual a aproximação MHD não se aplica. Quando existe um campo magnético num plasma, dentro do limite de validade da magnetohidrodinâmica (MHD), são possíveis outros modos de vibração: as oscilações hidromagnéticas. Cabe observar, no entanto, que estas oscilações são de baixa frequência em relação às oscilações de plasma.

Seja um plasma de condutividade infinita, viscosidade η, pressão p, densidade de energia ρ, sujeito a um campo magnético constante B^i numa métrica de FRW de curvatura espacial nula; esse meio poderá manifestar ondas hidromagnéticas que constituem perturbações da pressão, densidade, do campo magnético e da quadri-velocidade u^μ do fluido. É importante frisar que os cálculos das oscilações hidromagnéticas aqui apresentados são válidos fora do ricochete quando a geometria já é aproximadamente Riemanniana, ou seja, para $\chi > \chi_b$.

As variáveis perturbadas do plasma são dadas a seguir. Os índices "0" e "1" sinalizam quantidades de ordem zero e de 1^a ordem:

$$\rho = \rho_{(0)} + \rho_{(1)} \quad p = p_{(0)} + p_{(1)} \quad B^i = {B_{(0)}}^i + {B_{(1)}}^i \quad u^\mu = {u_{(0)}}^\mu + {u_{(1)}}^\mu \tag{2.96}$$

onde ρ e p obedecem à equação de estado de um fluido perfeito de radiação e a divergência de B^i é nula, logo,

$$\rho_{(0)} = 3p_{(0)} \qquad \rho_{(1)} = 3p_{(1)} \qquad \partial_i {B_{(0)}}^i = \partial_i {B_{(1)}}^i = 0 \tag{2.97}$$

É adotado um referencial onde as quadrivelocidades e a métrica são expressas no tempo conforme χ:

$$g_{\mu\nu} = u_{(0)\mu}u_{(0)\nu} + h_{\mu\nu} \qquad {u_{(0)}}^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{a} \qquad {u_{(1)}}^\mu = \frac{\delta^\mu_i}{a}\frac{v^i}{c} \qquad h_{\mu\nu} = -a^2\delta^i_\mu\delta^j_\nu\delta_{ij} \tag{2.98}$$

$a(\chi)$ é o fator de escala e a quantidade v^i indica a velocidade espacial do movimento oscilatório das partículas do plasma, conhecida como velocidade de "Bulk". No referencial adotado, a velocidade espacial de equilíbrio do fluido é nula, e a velocidade de "Bulk" constitui uma quantidade de primeira ordem.

As equações linearizadas que descrevem as oscilações hidromagnéticas são dadas a seguir, numa forma conformalmente invariante**:

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(a^4\rho_{(1)}) + \frac{4}{3}(a^4\rho_{(0)})\partial_i\frac{v^i}{c} = 0 \tag{2.99}$$

$$\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\chi}\left[(a^4\rho_{(0)})\frac{v^i}{c}\right] + \frac{1}{3}\delta^{ij}\partial_j(a^4\rho_{(1)}) - \frac{\eta^{ijk}}{\mu_0}\left[\eta_{jab}\delta^{ac}\partial_c(a^3{B_{(1)}}^b)\right]\left(\delta_{kd}a^3{B_{(0)}}^d\right)$$
$$- a^3\eta\left[\delta^{ab}\partial_a\partial_b\,\frac{v^i}{c} + \frac{1}{3}\delta^{ij}\partial_j(\partial_a\frac{v^a}{c})\right] = 0 \tag{2.100}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(a^3{B_{(1)}}^i) - \eta^{ijk}\partial_j\left[\eta_{kab}\frac{v^a}{c}(a^3{B_{(0)}}^b)\right] = 0 \tag{2.101}$$

onde o tensor η^{ijk} e o seu dual estão definidos em (2.33). A métrica γ_{ab} desce os índices do tensor η^{ijk}, mas como a curvatura espacial da métrica de FRW adotada é nula, $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$.

**Subseção escrita com base nas referências [25], [26] e [29].

O coeficiente efetivo de viscosidade de shear η apresenta a seguinte expressão dada na referência [30]:

$$\eta = \frac{4}{15} g_{ef} \frac{\pi^2}{30} \frac{{k_B}^4}{(\hbar c)^3} T^4 l_d = \frac{4}{15} \rho_{(0)} l_d \quad \text{onde} \quad \rho_{(0)} = g_{ef} \frac{\pi^2}{30} \frac{{k_B}^4}{(\hbar c)^3} T^4 \tag{2.102}$$

onde l_d é o livre caminho médio da partícula que sofre difusão no meio com maior viscosidade, g_{ef} foi definido no 1° capítulo, eq.(1.79), T a temperatura, k_B a constante de Boltzmann e $\rho_{(0)}$ a densidade de energia da radiação.

Considerando que a perturbação da posição das partículas do plasma, δx^i, em relação a um fluido não perturbado, seja dada pela variável $\xi(x,\chi)^i = \delta x^i$, a velocidade de "Bulk" é definida como $v^i \equiv \partial \xi^i / \partial \chi$. Neste caso, a partir do conjunto de equações (2.99) a (2.101), se obtém a equação diferencial para a perturbação ξ^i :

$$\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}\xi^i - \frac{1}{3}\delta^{ij}\partial_j(\partial_k \xi^k) + \frac{1}{c^2}\eta^{iab} V_{(A)a} \left\{ \eta_{bcd} \delta^{ce} \partial_e \left[\eta^{dfg} \partial_f (\eta_{ghj} \xi^h {V_{(A)}}^j) \right] \right\}$$

$$- \frac{3\ \eta\ a^3}{4(a^4 \rho_{(0)})} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\delta^{ab} \partial_a \partial_b \xi^i + \frac{\delta^{ij}}{3} \partial_j (\partial_a \xi^a) \right] = 0 \tag{2.103}$$

onde $V_{(A)}$ é o módulo da velocidade de *Alfvén*:

$$V_{(A)} = \sqrt{\frac{-c^2\ {B_{(0)}}^i {B_{(0)}}^j g_{ij}}{\mu(\rho_{(0)} + p_{(0)})}} = \sqrt{{V_{(A)}}^i {V_{(A)}}^j \delta_{ij}} \tag{2.104}$$

$V_{(A)}$ expressa a razão entre a densidade de energia magnética e a densidade de energia do fluido (mais a pressão) em um elemento de volume do plasma. A velocidade $V^i_{(A)}$ tem a mesma direção e sentido do campo magnético de fundo ${B_{(0)}}^i$.

No caso de um fluido de radiação, $\rho_{(0)} + p_{(0)} = (4/3)\rho_{(0)}$ e a velocidade de *Alfvén* ${V_{(A)}}^i$ é conformalmente invariante. Sua expressão é:

$${V_{(A)}}^i = \frac{c\ a^3 {B_{(0)}}^i}{\sqrt{(4/3)\mu a^4 \rho_{(0)}}} \qquad V_{(A)i} = \delta_{ij} {V_{(A)}}^j \tag{2.105}$$

A solução da equação (2.103) é do tipo onda plana, com uma expressão da forma:

$$\xi^i = \psi(\chi)^i \exp\left(ik_j x^j\right) \tag{2.106}$$

A forma explícita do vetor $\psi(\chi)^i$ depende do ângulo θ entre os vetores k^i e ${B_{(0)}}^i$ e o ângulo entre os vetores ξ^i e k^i.

O modo incompressível de oscilações ocorre quando $\partial_i \xi^i = 0 \quad \Rightarrow$ $k_i \psi^i = 0$. Isso corresponde a perturbações transversais à direção de propagação, denominadas ondas de *Alfvén* . A equação (2.103) torna-se:

$$(\psi^i)'' + \frac{3\ \eta\ a^3}{4a^4 \rho_{(0)}} k^2 (\psi^i)' + (k\frac{V_{(A)}}{c})^2 \cos^2(\theta)\psi^i = 0 \quad \text{onde} \quad k = \sqrt{k^i k^j \delta_{ij}} \tag{2.107}$$

Esta equação representa um oscilador com um fator de amortecimento dependente do tempo, $D(\chi)$, onde

$$D = \frac{3\ \eta}{4a\rho_{(0)}} k^2 \tag{2.108}$$

No caso de viscosidade nula, $\eta = 0$, a solução de (2.107) é a de um oscilador simples de frequência ν: $\psi^i = \psi^i_{(0)} e^{i\nu\chi/c}$.

As velocidades de fase e grupo das ondas de Alfvén são $\nu/k = V_{(A)}\cos(\theta)$ e $\partial\nu/\partial k_i = {V_{(A)}}^i$. A velocidade de fase tem o mesmo sentido da propagação da onda, mas a velocidade de grupo segue o sentido do campo ${B_0}^i$ e independe do vetor k^i.

As ondas de *Alfvén* são lentas se comparadas com a velocidade do som c_s no meio, sobretudo para campos magnéticos fracos (da ordem de grandeza dos campos observados em galáxias), $c_s \gg V_{(A)}\cos(\theta)$, onde

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \tag{2.109}$$

Outras soluções de (2.103) são obtidas definindo os vetores unitários $\widehat{z}_i$, $\widehat{k}_i$ e as variáveis $A(\chi)$ e $\psi_{\hat{z}}(\chi)$:

$$\widehat{z}_i \equiv \frac{\delta_{ij} B^j}{\sqrt{B^i B^j \delta_{ij}}} \qquad \widehat{k}_i \equiv \delta_{ij}\frac{k^j}{k} \qquad A(\chi) \equiv \psi^i \widehat{k}_i \qquad \psi_{\hat{z}}(\chi) \equiv \psi^i \hat{z}_i \tag{2.110}$$

É fácil mostrar que a equação (2.103) implica as duas equações a seguir:

$$A'' + \left({c_s}^2 + {V_{(A)}}^2\right)\frac{k^2}{c^2}\ A - (k\frac{V_{(A)}}{c})^2\cos^2(\theta)\psi_{\hat{z}} + \frac{\eta\ a^3}{a^4\rho_{(0)}}k^2A' = 0 \qquad (2.111)$$

$$\psi_{\hat{z}}'' + k^2\left(\frac{c_s}{c}\right)^2\cos(\theta)A + \frac{3\ \eta\ a^3}{4a^4\rho_{(0)}}k^2\psi_{\hat{z}}' + \frac{\eta\ a^3}{4a^4\rho_{(0)}}k^2\cos(\theta)A' = 0 \qquad (2.112)$$

As equações (2.111) e (2.112) fornecem a dinâmica dos modos compressíveis de vibração.

Quando a viscosidade é nula, $\eta = 0$, as equações (2.111) e (2.112) tem solução do tipo $\psi_{\hat{z}} \propto A \propto e^{i\nu\chi/c}$. Nesse caso a relação de disperção indica dois possíveis modos de vibração: as ondas MHD rápidas com velocidade de fase maior que c_s e as ondas MHD lentas com velocidade de fase menor que c_s. No limite $V_{(A)} \ll c_s$, aplicável ao caso de campos fracos, as relações de dispersão dos modos rápido e lento tornam-se, respectivamente,

$$\frac{\nu}{k} \simeq c_s \qquad \text{e} \qquad \frac{\nu}{k} \simeq V_{(A)}\cos(\theta) \qquad (2.113)$$

Quando os termos de amortecimento são considerados, não há uma solução geral para as equações (2.111) e (2.112); mas existem dois casos particulares que podem ser tratados analiticamente: um deles quando k^i e ${B_{(0)}}^i$ são paralelos, e o outro quando são perpendiculares:

$$A'' + \frac{\eta\ a^3}{a^4\rho_{(0)}}k^2A' + k^2\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 A = 0 \qquad \cos(\theta) = \frac{k^i\widehat{z}_i}{k} = 1 \qquad (2.114)$$

$$A'' + \frac{\eta\ a^3}{a^4\rho_{(0)}}k^2A' + k^2\frac{1}{c^2}\left({c_s}^2 + {V_{(A)}}^2\right)A = 0 \qquad \cos(\theta) = \frac{k^i\widehat{z}_i}{k} = 0 \qquad (2.115)$$

2.6.6 Frequência de Corte de um Plasma

Na seção 2.6.3, foi mostrado que um campo magnético que permeia um plasma, nas condições de validade da MHD, encontra-se congelado. No entanto, existe a possibilidade das oscilações hidromagnéticas. Portanto, se um campo magnético imerso num plasma possui variações temporais, além das variações devidas ao fator de escala, suas perturbações são pertencentes ao conjunto de oscilações hidromagnéticas. Se o plasma apresenta viscosidade, as perturbações hidromagnéticas serão dissipadas pelo meio, conforme está ilustrado na seção anterior. Dessa forma o campo $\vec{B}$ também será atenuado. Por esse processo, o espectro de frequências de um campo magnético sofre um corte, em função das características do meio: comprimentos de onda menores que o de corte são absorvidos e dissipados na forma de calor. Nesta seção, o comprimento de onda de corte será determinado.

Seja um campo magnético B^i imerso num plasma:

$$B(\vec{x},\chi)^i = \frac{1}{a^3(2\pi)^3}\int B(\vec{k},\chi)^i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}\ , \qquad 0 < \left|\vec{k}\right| < \infty \tag{2.116}$$

O espectro do campo acima pode ser dividido em duas partes. Uma parte constituída de comprimentos de onda maiores que as dimensões de interesse (L) e outra de comprimentos de onda menores. O campo formado pelos comprimentos de onda de larga escala, em intervalos de tempo suficientemente curtos, pode ser considerado aproximadamente uniforme e constante (a menos das variações do fator de escala). Com isso a expressão (2.116) pode ser escrita como:

$$B(\vec{x},\chi)^i = {B_{(0)L}}^i + \frac{1}{a^3(2\pi)^3}\int B(\vec{k},\chi)^i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}\ , \qquad \frac{1}{L} < \left|\vec{k}\right| < \infty \tag{2.117}$$

O 1^o fator da última expressão, ${B_{(0)L}}^i$, representa a componente de ordem zero do campo B^i e o 2^o fator representa uma perturbação de 1^a ordem.

Desta forma, o cálculo do comprimento de onda de corte de um campo magnético num plasma é determinado a partir das eq.(2.107), (2.114) e (2.115) da última seção.

A amplitude das oscilações hidromagnéticas obedece à equação de um oscilador harmônico amortecido, com um coeficiente de amortecimento $D(\chi)$ e frequência ν:

$$X'' + D(\chi)X' + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 X = 0 \tag{2.118}$$

No caso da eq.(2.107), $X(\chi) = \psi(\chi)^i$, $\nu = kV_{(A)}\cos(\theta)$ e $D(\chi)$ é dado pela eq.(2.108). No caso das eq.(2.114) e (2.115), $X(\chi) = A(\chi)$, $D = (k^2\eta)/(a\rho_{(0)})$ e a frequência são, respectivamente, $\nu = kc_s$ e $\nu^2 = k^2({c_s}^2 + {V_{(A)}}^2)$. A solução exata de $X(\chi)$ depende da forma explícita do termo de amortecimento. No entanto, existem soluções analíticas aproximadas de (2.118), nos regimes $\nu/c >> D$ e $\nu/c << D$, que permitem uma melhor análise do número de onda de corte, das perturbações.

No primeiro caso, o termo de amortecimento pode ser considerado "quase" constante, com isso a solução aproximada da eq.(2.118) apresenta uma forma simples:

$$X(\chi) = X_0 \exp\left[-\int_{\chi_b}^{\chi} \frac{D(\tau)}{2} d\tau\right] e^{\pm i\nu\chi/c} = X_0 \exp\left[-\frac{k^2}{k_D(\chi)^2}\right] e^{\pm i\nu\chi/c} \tag{2.119}$$

Por outro lado, quando $\nu/c << D$, a dinâmica das perturbações segue a mesma de um oscilador super-amortecido. Nesse caso existem duas soluções aproximadas, nas quais se considera $D' << D^2$ [29]:

$$X(\chi) = X_{0A} \frac{1}{D^{1/2}} \exp\left[-\int^{\chi} D(\tau) d\tau\right] \tag{2.120}$$

$$X(\chi) = X_{0B} \frac{1}{D^{1/2}} \exp\left[-\int^{\chi} \frac{\nu^2}{c^2 D(\tau)} d\tau\right] \tag{2.121}$$

Na solução (2.120) a amplitude cai bruscamente com o tempo, em (2.121) a amplitude varia pouco, é quase constante. A validade de uma ou de outra

depende das condições iniciais, sobretudo da derivada primeira de $X(\chi)$. Se X' possui inicialmente um valor baixo, (2.121) descreve bem a evolução temporal de $X(\chi)$. Por outro lado, se X' é inicialmente elevado, a solução é do tipo (2.120) e o amortecimento é forte. Neste último caso, X' também decresce e a partir de um dado tempo a solução torna-se igual a (2.121).

É preciso agora verificar se as equações (2.107), (2.114) e (2.115) se enquadram no regime $\nu/c >> D$ ou $\nu/c << D$.

Quanto às equações (2.114) e (2.115), basta estudar uma delas, pois no caso de interesse, quando o campo magnético é fraco, $c_s \gg V_{(A)}$ e a dinâmica do modo perpendicular dada pela eq.(2.115) pode ser também representada, com boa aproximação, por (2.114). Para esta última equação, tem-se:

$$\frac{\nu}{c} = \frac{k}{\sqrt{3}} \qquad D(\chi) = \frac{k^2\eta}{a\rho_{(0)}} \qquad \Rightarrow \qquad D(\chi) = \frac{4}{15}\frac{k^2 l_d}{a} \tag{2.122}$$

Calculando $(Dc)/\nu$, obtém-se: $(Dc)/\nu = (4\sqrt{3}kl_d)/(15a)$. Mas a quantidade $kl_d/a << 1$ pois o comprimento de onda precisa ser maior que o livre caminho médio l_d da partícula que mais contribui para a viscosidade do meio. Logo, para (2.114) e (2.115),

$$\frac{D(\chi)}{\nu/c} = \frac{4\sqrt{3}}{15}\frac{k\ l_d}{a} << 1 \tag{2.123}$$

Com isso, em todo o domínio de k a solução da eq.(2.118) é a expressão (2.119), onde

$$k_D(\chi)^{-2} = \int^{\chi} \frac{2}{15}\frac{l_d(\tau)}{a(\tau)}d\tau \tag{2.124}$$

Durante a era da radiação, o espalhamento dos fótons pelos elétrons contribuiu para a viscosidade até o período do desacoplamento. A atenuação provocada nas perturbações MHD apresenta um número de onda de corte, $k_{D\gamma}$, calculado a partir do livre caminho médio dos fótons, $l_{d\gamma}$:

$$l_{d\gamma} = \frac{1}{\sigma_T n_e} \qquad \text{onde} \quad n_e = \frac{n_{ph}}{a^3} = \frac{n_{bh}x_e}{a^3} \tag{2.125}$$

σ_T é a seção de choque de Thomson, n_{ph} e n_e são a densidade numérica de prótons hoje e a densidade de elétrons num tempo qualquer, n_{bh} é a densidade numérica de bárions no tempo presente, e $x_e = (n_p)/(n_n + n_p)$ é a fração do número de elétrons livres em relação ao número de bárions, onde n_n e n_p são as densidades de nêutrons e prótons. Mas [22],

$$\sigma_T = 6,652459 \cdot 10^{-25} cm^2 \ , \qquad n_{bh} \simeq 0,256 \ m^{-3} \tag{2.126}$$

Após a formação do ^4He a fração de elétrons livres, fica congelada em $x_e \simeq 0,877$ [20], logo,

$$n_e = 2,25 \cdot 10^{-7} \frac{1}{a^3 \ cm^3} \ , \quad l_{d\gamma} \simeq 6,69 \cdot 10^{28} a^3 \ m \tag{2.127}$$

Substituindo (2.127) em (2.124), obtém-se o número de onda de corte:

$$k_{D\gamma}{}^{-2} \simeq 8,93 \cdot 10^{27} m \int_0^{\chi} a^2(\tau) d\tau \tag{2.128}$$

No caso do tempo correspondente ao desacoplamento, $\chi_{dec} \simeq 6,18 \cdot 10^{24} m$, o número de onda de corte é calculado usando o fator de escala da eq.(1.88). O resultado é dado a seguir:

$$k_{D\gamma}{}^{-2} \simeq 1,12 \cdot 10^{46} m^2 \tag{2.129}$$

No universo primordial, em temperaturas maiores que $1MeV$, a viscosidade do meio é devida ao espalhamento dos neutrinos e ao espalhamento Thomson. O coeficiente de viscosidade η dado pela eq.(2.102) é proporcional ao livre caminho médio l_d. Para temperaturas de interesse, superiores a $1MeV$[††], a seção de choque de Thomson é muito maior que a seção de

[††]Em temperaturas extremamente elevadas, maiores que $100GeV$, se as teorias físicas conhecidas continuam válidas, o livre caminho médio dos fótons é maior que o dos neutrinos. Neste caso, a viscosidade seria dominada pela interação fóton - elétron. Mas o trabalho aqui desenvolvido não atinge tal escala de energia.

choque das interações fracas, e isso implica um livre caminho médio dos neutrinos muito maior do que o livre caminho médio dos fótons. Logo a maior contribuição para a viscosidade, nesse período, é devida ao espalhamento dos neutrinos. Após $k_B T \simeq 1MeV$, a taxa de interação dos neutrinos se torna menor que a taxa de expansão do universo. Com isso, os neutrinos se desacoplam das outras componentes da radiação, e a viscosidade passa a ser determinada pelos fótons. Após o desacoplamento dos fótons, não ocorre mais atenuação das oscilações hidromagnéticas devido à viscosidade do meio [24].

O número de onda conforme de corte $k_D(\chi)$, referente à atenuação das perturbações hidromagnéticas em temperaturas superiores a $1MeV$, é calculado a partir de l_{dw}:

$$l_{dw} = \frac{1}{\sigma_w n_w} \qquad \text{onde} \qquad \sigma_w = \left[\frac{G_F}{(\hbar c)^2} T\right]^2 \qquad \text{e} \tag{2.130}$$

$$n_w = g_w \int \left[e^{\frac{E(\vec{k})}{k_B T}} - 1\right]^{-1} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \qquad \Rightarrow \qquad n_w = g_w \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \tag{2.131}$$

l_{dw} é o livre caminho médio dos neutrinos, σ_w é a seção de choque das interações fracas, $G_F = (\hbar c)^3 (293GeV)^{-2}$ é a constante de Fermi, T a temperatura do meio, $E(\vec{k})$ é a energia do neutrino, onde $E(\vec{k}) = \hbar c \left|\vec{k}\right|$, g_w e n_w são, respectivamente, o número de graus de liberdade internos e a densidade numérica de neutrinos. No modelo padrão da física de partículas, $g_w = 6$. Logo,

$$l_{dw} = \frac{\pi^2 \ (\hbar \ c)^7}{\zeta(3) g_w {G_F}^2 (k_B T)^5} \simeq 1,9848 \cdot 10^9 \left(\frac{MeV}{k_B T}\right)^5 m \tag{2.132}$$

Considerando (1.84), obtém-se:

$$l_{dw}(\bar{\chi}) \propto (g_{ef})^{\frac{5}{4}} \bar{\chi}^5 \tag{2.133}$$

Substituindo (2.133) em (2.124) e considerando a aproximação na qual g_{ef} varia lentamente com a temperatura, o resultado é:

$$k_{Dw}(\bar{\chi})^{-2} = \frac{2\chi_0}{15}\int_{\bar{\chi}_D}^{\bar{\chi}} \frac{l_{dw}(x)}{a_0\ x}dx \simeq \frac{2\ l_{dw}(\bar{\chi})\ \chi_0}{5\cdot 15\ a_0}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}_D}{\bar{\chi}}\right)^5\right] \qquad (2.134)$$

No modelo não singular dado pelo fator de escala (1.96), durante o ricochete, a geração de campo magnético devido à interação com o campo escalar está se processando, e a dinâmica das ondas hidromagnéticas não é conhecida. A partir do tempo χ_b, o campo magnético gerado apresenta um dado espectro e começam a valer os cálculos da seção 2.6.5, o que não significa que antes não ocorra atenuação do campo de forma concomitante à sua produção. Em termos efetivos, o tempo $\bar{\chi}_D$ de início do processo de atenuação deve ser portanto $\bar{\chi}_D \leq \bar{\chi}_b$. Para efeito de cálculo será adotado $\bar{\chi}_D = 0$. Da expressão (2.134) nota-se que essa aproximação torna-se cada vez melhor conforme o tempo evolui, logo,

$$k_{Dw}(\bar{\chi})^{-2} = \frac{2\chi_0}{15}\int_{0}^{\bar{\chi}} \frac{l_{dw}(x)}{a_0\ x}dx \simeq \frac{2\ l_{dw}(\bar{\chi})\chi_0}{75\ a_0} \qquad (2.135)$$

Na temperatura de $k_BT = 1MeV$, o valor de $(k_{Dw})^{-2}$ é:

$$k_{Dw}{}^{-2} \simeq 9,9\cdot 10^{35}m^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\overline{k_{Dw}}\right)^{-2} \simeq \frac{9,9\cdot 10^{35}m^2}{{\chi_0}^2} \qquad (2.136)$$

Os modos de perturbação MHD rápidos sempre se encontram no regime oscilatório subamortecido, pois a desigualdade (2.123) é sempre satisfeita. Para esses modos, a expressão (2.124) fornece o número de onda de corte. Quanto aos modos de perturbação lentos, é preciso verificar a relação $(Dc)/\nu$, na equação dinâmica (2.118). Caso as perturbações MHD lentas estejam no estado subamortecido ($(Dc)/\nu << 1$), a determinação do número de onda de corte segue o mesmo procedimento de cálculo dos modos rápidos, e o resultado é igual ao calculado a partir da expressão (2.124). No entanto, uma

parcela do espectro de perturbações lentas pode estar no regime superamortecido ($(Dc)/\nu >> 1$), cujas soluções são do tipo (2.120) e (2.121).

A relação $(Dc)/\nu$ para as perturbações lentas é dada a seguir:

$$\frac{D(\chi)}{\nu/c} = \frac{l_d}{5}\frac{k}{a}\frac{c}{V_{(A)}\,|\cos(\theta)|} \tag{2.137}$$

Esta relação depende do ângulo θ e do campo magnético de fundo, que determina a velocidade de Alfvén $V_{(A)}$, bem como do livre caminho médio l_d.

É importante destacar que uma parcela menor de energia contida nas perturbações lentas é dissipada pela viscosidade do meio, devido ao fato de um intervalo do espectro se encontrar no regime superamortecido, o que não ocorre nos modos rápidos de perturbação. No entanto, as perturbações lentas compreendem uma parcela da totalidade de perturações MHD, o que significa que o erro cometido não deve ultrapassar uma ordem de grandeza.

O conhecimento do percentual exato de dissipação de energia do campo magnético através da viscosidade depende da solução analítica das equações MHD. No entanto, não existe tal solução analítica que envolva todos os modos de vibração, nem mesmo para as equações linearizadas. Portanto a amplitude dos modos lentos superamortecidos serão ignorados. Essa aproximação resulta na validade da expressão (2.124) para todos os modos de perturbação, sejam eles lentos ou rápidos. O erro cometido ao assumir essa posição leva a resultados com uma maior dissipação de energia em relação ao que realmente ocorre.

Capítulo 3

Campos magnéticos de larga escala

Um dos problemas na astrofísica e cosmologia que tem recebido crescente atenção da comunidade científica é a origem, evolução e estrutura dos campos campos magnéticos observados em larga escala no universo (galáxias e aglomerados).

Nas galáxias, o campo magnético observado está em torno de alguns μG e apresenta coerência na escala galáctica. Na Via Láctea, por exemplo, a intensidade do campo está em torno de $3\mu G$ a $4\mu G$ [20]. Em alguns casos, as observações indicam campos que alcançam dezenas de μG [31], [32]. Nos aglomerados de galáxias, os campos são da ordem de μG com um comprimento de coerência que atinge $100kpc$ [24].

3.1 Técnicas Observacionais

Existem três principais métodos usados para observar campos magnéticos em ambientes astrofísicos: Efeito Zeeman, Radiação Síncroton e Rotação de Faraday. Elas possuem sensibilidade diferente e podem informar sobre a componente paralela ou perpendicular à linha de visada. Os dois últimos dependem da medida adicional da distribuição de energia dos elétrons do meio, a qual nem sempre é fácil determinar.

Os campos magnéticos, em ambientes astrofísicos, possuem uma componente homogênea e uma componente estocástica.

3.1.1 Efeito Zeeman

A presença de um campo magnético quebra a degenerescência dos níveis de energia de um átomo. Isto causa uma separação das linhas espectrais de emissão (ou absorção), gerando $2j + 1$ níveis de energia, onde j indica o número quântico associado ao momento angular total do átomo (momento angular orbital mais o spin eletrônico). A separação energética $\Delta\varepsilon$ entre dois níveis vizinhos depende diretamente do campo magnético B:

$$\Delta\varepsilon = g_l \mu_b B \tag{3.1}$$

onde g_l é o fator de Landé, μ_b o magneton de Bohr e B o campo magnético.

Através da medida de $\Delta\varepsilon$ no espectro de emissão, é possível determinar o campo magnético do meio sem hipóteses adicionais [33]. Uma das linhas espectrais mais usadas nesse método é a linha de 21 cm do hidrogênio.

Esta técnica é sensível à componente uniforme do campo magnético, mas infelizmente o efeito Zeeman é pequeno se comparado com o deslocamento

Doppler, devido ao movimento térmico dos átomos e moléculas no ambiente astrofísico. Ela é melhor empregada para medir campos mais intensos em regiões de baixa temperatura [34], [35].

3.1.2 Radiação Síncroton

Partículas carregadas em movimento relativístico circular ou numa órbita espiralada em torno das linhas de campo magnético emitem uma radiação eletromagnética conhecida como emissão síncroton. Se a densidade numérica das partículas em função de suas energias for conhecida através de outras técnicas, é possível, medindo a radiação síncroton, inferir o campo magnético de uma dada região do espaço.

O raio da trajetória depende da massa, e a intensidade da emissão depende da aceleração centrípeta; portanto, os elétrons são responsáveis pela maior contribuição à radiação síncroton. A densidade numérica de elétrons relativísticos $n_e(\varepsilon)d\varepsilon$ no intervalo de energia $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ é dada pela expressão:

$$n_e(\varepsilon)d\varepsilon = n_{e0}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-p} d\varepsilon \tag{3.2}$$

onde ε é a energia dos elétrons, n_{e0} e ε_0 são constantes, o índice 0 indica um valor de referência. O expoente p é denominado índice espectral da distribuição.

A emissividade síncroton j_ν em função da freqüência ν de uma distribuição de elétrons é dada pela expressão a seguir [34], [35]:

$$j_n u \propto n_{e0}\nu^{(1-2)/2}B_\perp^{(1+p)/2} \tag{3.3}$$

onde $B_\perp$ é o campo magnético perpendicular à linha de visada.

A direção de emissão máxima é normal às linhas de campo magnético, portanto essa técnica é sensível à componente perpendicular à linha de visada. O plano de polarização da radiação é normal às linhas do campo magnético, e o grau de polarização depende da intensidade da componente estocástica em relação à componente homogênea do campo [32], [36].

3.1.3 Rotação de Faraday

A presença de um campo magnético num meio ionizado provoca rotação no plano de polarização de uma onda eletromagnética, desde que o campo possua uma componente paralela à direção de propagação da onda. O efeito ocorre porque os estados de polarização circular esquerdo e direito viajam, nesse meio, com velocidades de fase diferentes. Como uma polarização linear pode ser decomposta em duas polarizações circulares de mesma intensidade, mas de sentidos opostos, o resultado é a rotação do plano de polarização por um ângulo $\Delta\psi$ dado pela expressão a seguir [37]:

$$\frac{\Delta\psi}{rad} = 8,1 \cdot 10^5 \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \int_0^{L/pc} \left(\frac{B_\parallel(l)}{Gauss}\right) \left(\frac{n_e(l)}{cm^{-3}}\right) d\left(\frac{l}{pc}\right) \tag{3.4}$$

onde L é a distância percorrida pela onda até o observador, λ o comprimento de onda, $B_\parallel(l)$ e $n_e(l)$ são a componente do campo magnético paralela à linha de visada e a densidade numérica de elétrons ao longo do trajeto.

Como o ângulo de polarização intínseco da fonte não é conhecido, calcula-se a quantidade abaixo, a partir de medidas em dois comprimentos de onda distintos, λ_1 e λ_2:

$$\frac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2}{\left(\frac{\lambda_1}{m}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{m}\right)^2} = 8,1 \cdot 10^5 \int_0^{L/pc} \left(\frac{B_\parallel(l)}{Gauss}\right) \left(\frac{n_e(l)}{cm^{-3}}\right) d\left(\frac{l}{pc}\right) rad$$

O valor obtido depende de $B_\parallel$ mas não depende da polarização inicial.

3.2 Possíveis origens dos campos magnéticos de larga escala

Quanto à origem, em geral, grande parte dos modelos considera que os campos magnéticos observados são o resultado de um processo de amplificação de um campo, bem menos intenso, pré-existente à formação das galáxias, comumente denominado campo semente. Há uma intensa discussão se os campos semente são gerados por algum processo que atuou no universo primordial ou se esses campos foram gerados em épocas mais recentes, através de algum mecanismo de separação de cargas.

Na literatura, encontram-se três tipos de origem para esses campos semente: astrofísica, cosmológica e primordial.

O mecanismo astrofísico mais difundido é conhecido como Bateria Biermann. Nele há um termo proporcional ao produto vetorial entre os gradientes de pressão e densidade do fluido que compõem o plasma. Esse termo serve como fonte na equação de indução magnética e permite o surgimento de um campo magnético sempre que os gradientes de pressão e densidade não forem paralelos [38] e [39].

Existem ainda outros processos astrofísicos capazes de gerar campos semente envolvendo, por exemplo, *starbursts*, discos de acresção de buracos negros, explosões de supernova e jatos extragaláticos [40], [41].

O mecanismo cosmológico é baseado na geração de campos semente a partir de perturbações cosmológicas [42] e [43]. Devido aos efeitos de colisão, existe uma diferença entre a velocidade de protons e elétrons em torno e depois do tempo do desacoplamento. Essa diferença resulta numa corrente elétrica que gera um campo magnético. Com esse processo, obtém-se um

campo da ordem de $10^{-18}G$ coerente em $1Mpc$ e $10^{-14}G$ em escalas de $10kpc$ [44].

Em qualquer um desses processos, para que o campo semente gerado seja adequado, ele precisa apresentar um comprimento de coerência e uma intensidade compatível com o modelo de amplificação.

A visão mais aceita é que os campos magnéticos semente têm origem primordial (uma boa revisão é dada em [28]). O que caracteriza essa classe é que os modelos teriam atuado em períodos anteriores à nucleossíntese, nos quais o universo apresentava temperaturas bastante elevadas.

A diversidade de modelos primordiais não é pequena. Alguns sugerem que os campos semente surgiram na transição de fase quark hádron a partir das flutuações eletromagnéticas que ocorreram no plasma [33], [45] . Outros modelos recorrem à transição eletrofraca [28], [46]. Há também os modelos onde o campo semente é gerado no período inflacionário. Alguns exemplos são dados em [47], [48] e [49].

A dificuldade existente em boa parte dos modelos primordiais é que o universo apresenta, nessa fase, um alto grau de homogeneidade e isotropia, e as equações do campo eletromagnético são invariantes mediante transformação conforme da métrica de fundo. Nesses casos, para que haja a geração de campo EM, é necessária a quebra da invariância conforme do eletromagnetismo.

Existem vários caminhos nos quais esta invariância conforme é quebrada: acoplamentos não mínimos entre o campo gravitacional e o eletromagnético [11], [47] e [50]; anomalias quânticas do traço do tensor momento-energia durante a inflação [51]; massa não nula para o fóton [52]; perturbações escalares da métrica no fim da inflação [53]; acoplamento do campo EM com um campo escalar carregado [54]; acoplamento exponencial entre um campo

escalar sem carga e o campo EM em modelos inflacionários [48], [55], [56] e através da teoria de cordas no início do universo [57]. O mesmo tipo de acoplamento exponencial é naturalmente implementado na geometria de Weyl integrável (Wist) [58].

3.3 Geração de Campo Magnético num universo com ricochete

O modelo adotado no presente trabalho propõe a geração primordial de campo semente no universo não singular, com radiação e campo escalar, desenvolvido no primeiro capítulo. O eletromagnetismo segue a dinâmica das equações de Maxwell acopladas à geometria de WIST, conforme discutido no segundo capítulo. O campo escalar da geometria é responsável pela quebra da invariância conforme [11], [15], [16], mas, no caso proposto, isso pode ocorrer sem que o sistema esteja em um regime de energias extremamente altas, onde as teorias físicas não estão ainda bem estabelecidas.

Em todos os casos citados de acoplamento exponencial de um escalar com o campo EM, a ação tem a seguinte forma:

$$S = \int f(\omega) F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x \tag{3.5}$$

onde ω é o dilaton (na teoria de cordas [55], [59]) ou o campo escalar da geometria de Weyl integrável e $F_{\alpha\beta}$ o campo eletromagnético. Em Wist ou na teoria de cordas, $f(\omega)$ assume a forma $e^{-2\omega}$. A equação de movimento que segue dessa ação foi obtida no segundo capítulo 2, (eq.2.56):

$$A_i'' - 2\omega' A_i' - {}^{(3)}\bigtriangledown^2 A_i = 0$$

O trabalho proposto discute a produção de fótons no modelo de universo sem singularidade e com radiação apresentado no primeiro capítulo. A produção de fótons ocorre nesse cenário pela transferência de energia do campo escalar para o campo EM. O estado de vácuo eletromagnético definido antes do ricochete é alterado devido à interação, quando ω não é constante, e passa a apresentar um número expressivo de fótons após o ricochete. Na subseção 3.3.1, o potencial vetor A_μ acoplado ao campo ω vai sofrer o processo de quantização canônica, e serão discutidas as características do campo resultante.

O campo A_μ precisa ser normalizado para servir como variável canônica. Define-se então a variável $\mathcal{A}_\mu$:

$$\mathcal{A}_\mu \equiv e^{-\omega} A_\mu \tag{3.6}$$

escolhendo o calibre de radiação, $\mathcal{A}_0 = 0$ e ${}^{(3)}\bigtriangledown^i \mathcal{A}_i = 0$, a equação dinâmica (2.56) assume a forma:

$$\mathcal{A}_i'' + (\omega'^2 - \omega'' - {}^{(3)}\bigtriangledown^2)\mathcal{A}_i = 0 \tag{3.7}$$

A equação (3.7) pode ser resolvida implementando a transformada de Fourier da variável $\mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{A}(\chi, \vec{x})_i = \frac{\sqrt{\mu_0 \hbar c}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^{2} \int \left[a_{\vec{k}\lambda} \mathcal{A}_k^{(-)}(\chi)\ P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i + a^*_{\vec{k}\lambda} \mathcal{A}_k^{(+)}(\chi)\ P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i \right]\ d^3\vec{k} \tag{3.8}$$

onde $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a^*_{\vec{k}\lambda}$ são constantes, k é o módulo do vetor de onda conforme $\vec{k}$, λ denota as duas polarizações do campo EM e $P_{\vec{k}\lambda}(\vec{r})_i$ é a base espacial definida na hiper-superfície $\chi =$ constante, pelas seguintes relações:

$$\gamma^{ab} P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_{a\|b} = 0 \quad \partial_0 P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i = 0 \quad \gamma^{ab} P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_{i\|a\|b} = -\gamma^{ab} k_a k_b\ P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i$$

$$\int \gamma^{ij} P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i\ P^*_{\vec{k}'\lambda'}(\vec{x})_j d^3\vec{x} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k} - \vec{k}')(2\pi)^3 \quad P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i = (-1)^{\lambda+1} P^*_{-\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i \tag{3.9}$$

As constantes, $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a^*_{\vec{k}\lambda}$, atendem às igualdades abaixo:

$$a_{\vec{k}\lambda} = (-1)^{\lambda+1} a_{-\vec{k}\lambda} \quad \text{e} \quad a^*_{\vec{k}\lambda} = (-1)^{\lambda+1} a^*_{-\vec{k}\lambda} \tag{3.10}$$

Usando as expressões (3.8) a (3.9) obtém-se a transformada inversa:

$$a^*_{\vec{k}\lambda} \mathcal{A}^{(+)}_k(\chi) = \int \gamma^{ij} \mathcal{A}(\chi, \vec{x})_i \; P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_j \; d^3\vec{x} \tag{3.11}$$

O modelo cosmológico com ricochete e radiação possui curvatura espacial nula ($\epsilon_c = 0$), a métrica adotada é dada pela expressão (1.57). Nesse caso, $\gamma^{ij} = \delta^{ij}$, $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ e as bases $P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i$ e $P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i$ apresentam a forma:

$$P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i = \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \text{e} \quad P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i = \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i \; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{3.12}$$

O vetor polarização $\varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i$ satisfaz às relações a seguir:

$$\varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i \varepsilon(\vec{k}, \lambda')_j \; \delta^{ij} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i = (-1)^{\lambda+1} \varepsilon(-\vec{k}, \lambda)_i \quad \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i \; k_j \; \delta^{ij} = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_i \; \varepsilon(\vec{k}, \lambda)_j = \delta_{ij} - \widehat{k}_i \widehat{k}_j \quad \text{onde} \quad \widehat{k}_i \equiv \frac{k_i}{\sqrt{k_a k_b \delta^{ab}}} \tag{3.13}$$

A substituição de (3.8), (3.9) e (3.12) em (3.7) resulta em:

$$\mathcal{A}''_k(\chi) + [\omega'' - (\omega')^2 + k^2] \mathcal{A}_k(\chi) = 0 \quad \text{onde} \quad k^2 \equiv \delta^{ij} k_i k_j \tag{3.14}$$

Da mesma forma, é possível calcular a transformada de Fourrier do campo $A(\chi, \vec{x})_i$ e obter suas componentes $A_k(\chi)$, onde $\mathcal{A}_k(\chi) = e^{-\omega} A_k(\chi)$. A equação resultante equivalente a (3.14), em função da variável A_k, é:

$$A''_k(\chi) - 2\omega' A'_k(\chi) + k^2 A_k(\chi) = 0 \tag{3.15}$$

O campo escalar é dado pelo modelo cosmológico discutido no primeiro capítulo. A integral de $\omega(\chi)'$, expressão (1.63), fornece $\omega(\chi)$:

$$\omega(\chi) = \omega_0 \chi_0 \left[\arctan\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{onde} \quad \omega(\chi)' = \frac{\omega_0}{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1} \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.14) e (3.15), obtém-se:

$$\mathcal{A}_k''(\chi) + \left\{ k^2 - \frac{2\omega_0\chi + (\chi_0\omega_0)^2}{{\chi_0}^2\left[\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1\right]^2} \right\} \mathcal{A}_k(\chi) = 0 \tag{3.17}$$

$$A_k''(\chi) - \frac{2\ \omega_0}{\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 + 1} A_k'(\chi) + k^2 A_k(\chi) = 0 \tag{3.18}$$

As duas soluções linearmente independents de (3.18) envolvem funções de Heun *:

$$A_k^{(1)}(\chi) = e^{-ik\chi} HeunC(4k, -1 - i\omega_0, -1 + i\omega_0, 0, \frac{1}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\chi}{2})$$

$$A_k^{(2)}(\chi) = e^{ik\chi} HeunC(4k, -1 + i\omega_0, -1 - i\omega_0, 0, \frac{1}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\chi}{2}) \tag{3.19}$$

As soluções assintóticas de (3.17) e (3.18) são combinações lineares de funções harmônicas do tipo $e^{ik\chi}$ e $e^{-ik\chi}$, uma vez que, em períodos afastados do bouncing, ω' e ω'' tendem a zero.

Para determinar a energia produzida na interação do vácuo quântico com o campo escalar, é preciso relacionar as soluções assintóticas em $\chi \to -\infty$ com as soluções em $\chi \to +\infty$. O problema é que as expressões assintóticas das funções de Heun não foram encontradas na literatura especializada ([60], [61] e [62] são algumas das referências consultadas). A saída escolhida foi buscar uma outra função $\omega(\chi)'$ aproximada, que, ao ser inserida na equação diferencial (3.15), resulte em soluções com limites assintóticos conhecidos.

Adotou-se, apenas na equação (3.15), a função aproximada $\omega_v(\chi)'$. Essa função coincide com a derivada do campo escalar do modelo de universo vazio, sem singularidade, eq.(1.54):

$$\omega_v' = \frac{\omega_{0v}}{\cosh\left(\frac{\chi}{\chi_{0v}}\right)} \tag{3.20}$$

*A notação usada para designar as funções de Heun é a mesma empregada no programa de cálculo Maple12.

Os critérios adotados para a determinação das constantes ω_{0v} e χ_{0v} em função de ω_0 e χ_0 são:

$$\omega_v(\chi)' \mid_{\chi=0} = \omega(\chi)' \mid_{\chi=0} \tag{3.21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_v(\chi)' d\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\chi)' d\chi \tag{3.22}$$

as igualdades (3.21) e (3.22) levam às relações a seguir:

$$\chi_{0v} = \chi_0 \qquad \text{e} \qquad \omega_{0v} = \omega_0 \tag{3.23}$$

Usando a expressão (3.20) e (3.23), a equação diferencial (3.15) é dada a seguir:

$$A_k''(\chi) - \frac{2\ \omega_0}{\cosh\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)} A_k'(\chi) + k^2 A_k(\chi) = 0 \tag{3.24}$$

Calculadas as componentes $A_k(\chi)$ através de (3.24), utiliza-se a expressão (3.16) na igualdade (3.6) para encontrar $\mathcal{A}_k(\chi)$. O resultado é:

$$\mathcal{A}_k^{(1)}(\chi) = e^{-\omega} F(a, -a; b; y) \ \text{ e } \ \mathcal{A}_k^{(2)}(\chi) = e^{-\omega} y^{1-b} F(1-b+a, 1-b-a; 2-b; y) \tag{3.25}$$

onde $F(\alpha, \beta; \gamma; y)$ são funções hipergeométricas e ω é dada por (3.16). A função y e as constantes a, b estão especificadas a seguir:

$$a = ik\chi_0 \qquad b = \frac{1}{2} + i\omega_0\chi_0 \qquad y = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sinh\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right) \tag{3.26}$$

Os limites assintóticos $\chi \to \pm\infty$ [†] de $\mathcal{A}_k^{(1)}(\chi)$ e $\mathcal{A}_k^{(2)}(\chi)$ são:

$$\mathcal{A}_k^{(1)}(\chi) = e^{-\omega} \frac{\Gamma(b)}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - a)}{\Gamma(b-a)}\ e^{-\left(k\chi_0 \frac{\pi\chi}{2|\chi|} + ik|\chi|\right)} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + a)}{\Gamma(b+a)}\ e^{\left(k\chi_0 \frac{\pi\chi}{2|\chi|} + ik|\chi|\right)} \right] \tag{3.27}$$

[†]Como ω' tende rapidamente a zero em tempos afastados da origem, não é necessário tomar exatamente os limites $\chi \to \pm\infty$, basta considerar $\chi \ll 0$ ou $\chi \gg 0$.

$$\mathcal{A}_k^{(2)}(\chi) = ie^{-\omega}\frac{\Gamma(2-b)}{2\sqrt{\pi}k\chi_0}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a)}{\Gamma(1-b-a)}\ e^{i\pi(1-b+\frac{1}{2}a)\frac{\chi}{|\chi|}-ik|\chi|}\right]$$
$$- ie^{-\omega}\frac{\Gamma(2-b)}{2\sqrt{\pi}k\chi_0}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{\Gamma(1-b+a)}\ e^{i\pi(1-b-\frac{1}{2}a)\frac{\chi}{|\chi|}+ik|\chi|}\right] \qquad (3.28)$$

As componentes harmônicas $\mathcal{A}_k^{(1)}$ e $\mathcal{A}_k^{(2)}$ são combinadas linearmente de tal forma que antes do ricochete ($\chi \ll 0$), $\mathcal{A}_k^{(+)} \propto e^{ik\chi}$ e $\mathcal{A}_k^{(-)} \propto e^{-ik\chi}$:

$$\mathcal{A}_k^{(+)}(\chi) = d_1^+\mathcal{A}_k^{(1)} + d_2^+\mathcal{A}_k^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_k^{(+)}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{ik\chi} \ \text{ em } \ \chi \ll 0 \quad (3.29)$$

$$\mathcal{A}_k^{(-)}(\chi) = d_1^-\mathcal{A}_k^{(1)} + d_2^-\mathcal{A}_k^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_k^{(-)}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-ik\chi} \ \text{ em } \ \chi \ll 0 \quad (3.30)$$

$$\text{onde} \qquad d_1^+ = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)\Gamma(1-b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}-a)\ T(a,b)}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\pi k\chi_0\right)$$

$$d_1^- = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)\Gamma(1-b+a)}{\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}+a)\ T(a,b)}\ \exp\left(\frac{1}{2}\pi k\chi_0\right)$$

$$d_2^+ = -i\chi_0\sqrt{2\pi k}\ \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(1-b+a)\Gamma(1-b-a)}{\Gamma(2-b)\Gamma(\frac{1}{2}-a)\ T(a,b)}\ e^{\left[\frac{\pi\chi_0}{2}\left(\frac{i}{\chi_0}+2\omega_0-k\right)\right]}$$

$$d_2^- = i\chi_0\sqrt{2\pi k}\ \frac{\Gamma(b+a)\Gamma(1-b+a)\Gamma(1-b-a)}{\Gamma(2-b)\Gamma(\frac{1}{2}+a)\ T(a,b)}\ e^{\left[\frac{\pi\chi_0}{2}\left(\frac{i}{\chi_0}+2\omega_0+k\right)\right]}$$

$$T(a,b) = \Gamma(b+a)\Gamma(1-b-a) + \Gamma(b-a)\Gamma(1-b+a) \qquad (3.31)$$

3.3.1 Geração quântica de campo magnético primordial

A quantização canônica do eletromagnetismo consiste na transformação do campo clássico $\mathcal{A}(\chi,\vec{x})_i$ em um operador quântico $\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{x})_i$ [63]. Isto é matematicamente equivalente a quantizar suas componentes harmônicas.

Como o EM é conformalmente plano e a métrica de fundo é a de FRW, a quantização canônica segue o mesmo procedimento que é implementado no espaço-tempo de Minkowski. As constantes $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a^*_{\vec{k}\lambda}$ da expressão (3.8) são transformadas nos operadores de criação e aniquilação $\widehat{a}_{\vec{k}\lambda}$ e $\widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda}$. Esses operadores satisfazem a relação de comutação de um campo bosônico:

$$\left[\widehat{a}_{\vec{k}\lambda}, \widehat{a}^\dagger_{\vec{k}'\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{3.32}$$

O operador resultante do campo EM é expresso como:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{x})_i = \frac{\sqrt{\mu_0\hbar c}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\int\left[\widehat{a}_{\vec{k}\lambda}\mathcal{A}^{(-)}_k(\chi)\ P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i + \widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda}\mathcal{A}^{(+)}_k(\chi)\ P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i\right]\ d^3\vec{k} \tag{3.33}$$

Na região assintótica $\chi \to -\infty$, $\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{r})_i$ torna-se:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{x})_i = \frac{\sqrt{\mu_0\hbar c}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\int\left[\widehat{a}_{\vec{k}\lambda}\frac{e^{-ik\chi}}{\sqrt{2k}}\ P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i + \widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda}\frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2k}}\ P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i\right]\ d^3\vec{k} \tag{3.34}$$

Após o ricochete, em $\chi \to \infty$, o operador $\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{r})_i$ assume a forma:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\chi,\vec{x})_i = \frac{\sqrt{\mu_0\hbar c}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\int\left[\widehat{b}_{\vec{k}\lambda}\frac{e^{-ik\chi}}{\sqrt{2k}}\ P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i + \widehat{b}^\dagger_{\vec{k}\lambda}\frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2k}}\ P^*_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i\right]\ d^3\vec{k} \tag{3.35}$$

Os operadores $\widehat{a}_{\vec{k}\lambda}$, $\widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda}$, $\widehat{b}_{\vec{k}\lambda}$ e $\widehat{b}^\dagger_{\vec{k}\lambda}$ estão relacionados pela transformação de Bogoliubov [63] :

$$\widehat{b}_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\alpha_{\vec{k}\vec{k}'}\widehat{a}_{\vec{k}'\lambda} + \beta_{\vec{k}\vec{k}'}\widehat{a}^\dagger_{\vec{k}'\lambda}\right)\ d^3\vec{k}' \tag{3.36}$$

No modelo proposto, $\alpha_{\vec{k}\vec{k}'}$ e $\beta_{\vec{k}\vec{k}'}$ são:

$$\alpha_{\vec{k}\vec{k}'} = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')c^+_{k'} \qquad \text{e} \qquad \beta_{\vec{k}\vec{k}'} = (2\pi)^3\delta(\vec{k}+\vec{k}')(-1)^{\lambda+1}c^{-*}_{k'} \tag{3.37}$$

Substituindo (3.37) em (3.36), obtém-se:

$$\widehat{b}_{\vec{k}\lambda} = c^+_k\ \widehat{a}_{\vec{k}\lambda} + (-1)^{\lambda+1}c^{-*}_k\ \widehat{a}^\dagger_{-\vec{k}\lambda} \quad \text{e} \quad \widehat{b}^\dagger_{\vec{k}\lambda} = c^{+*}_k\ \widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda} + (-1)^{\lambda+1}c^-_k\ \widehat{a}_{-\vec{k}\lambda} \tag{3.38}$$

O cálculo de $\mathcal{A}_k^{(+)}(\chi)$ e $\mathcal{A}_k^{(-)}(\chi)$ no limite $\chi \to \infty$ permite identificar as constantes c_k^+ e c_k^-:

$$c_k^- = -\frac{\sinh(\pi\omega_0\chi_0)}{\cosh(\pi k\chi_0)} \quad \text{e} \quad c_k^+ = \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2} - ik\chi_0)\right]^2}{\Gamma(\frac{1}{2} - ik\chi_0 - i\omega_0\chi_0)\Gamma(\frac{1}{2} - ik\chi_0 + i\omega_0\chi_0)} \tag{3.39}$$

Essas constantes obedecem à relação

$$\left|c_k^+\right|^2 - \left|c_k^-\right|^2 = 1 \tag{3.40}$$

Um caminho mais formal para a determinação de c_k^+ e c_k^- é através do produto escalar entre funções, definido abaixo [63]:

$$(\phi_1(x), \phi_2(x)) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_\Sigma \phi_1(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi_2(x) d\Sigma^\mu \tag{3.41}$$

onde $d\Sigma^\mu = U^\mu d\Sigma$, U^μ é um vetor unitário normal a hiper-superfície tipo espaço Σ e $d\Sigma = \frac{1}{3!}\eta_{\lambda\alpha\beta\gamma}U^\lambda dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$. No caso que está sendo abordado $\phi(x)$ são as bases vetoriais $u_{\vec{k}\lambda}(x)_i$:

$$u_{\vec{k}\lambda}(x)_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\chi} P_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})_i \tag{3.42}$$

Logo,

$$\left(u_{\vec{k}\lambda}(x)_i, u_{\vec{k}'\lambda'}(x)^i\right) = i \int \left[u^*_{\vec{k}'\lambda'}(x)^i \frac{\partial}{\partial\chi} u_{\vec{k}\lambda}(x)_i - u_{\vec{k}\lambda}(x)_i \frac{\partial}{\partial\chi} u^*_{\vec{k}'\lambda'}(x)^i\right] \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(u_{\vec{k}\lambda}(x)_i, u_{\vec{k}'\lambda'}(x)^i\right) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.43}$$

Considerando o produto escalar (3.43), as expressões dos coeficientes c_k^+ e c_k^- são determinadas através dos seguintes limites:

$$\lim_{\chi\to\infty} \sum_{\lambda'=1}^{2} \int \left(\mathcal{A}_{k'}^{(-)}(\chi) P_{\vec{k}'\lambda'}(\vec{r})_i, u_{\vec{k}\lambda}(x)^i\right) d^3\vec{k}' = c_k^+ \tag{3.44}$$

$$\lim_{\chi\to\infty} \sum_{\lambda'=1}^{2} (-1)^{\lambda'} \int \left(\mathcal{A}_{k'}^{(-)}(\chi) P_{\vec{k}'\lambda'}(\vec{r})_i, u^*_{\vec{k}\lambda}(x)^i\right) d^3\vec{k}' = c_k^- \tag{3.45}$$

No problema que está sendo estudado, não é necessário o uso de uma base complexa, assim, $\varepsilon(\vec{k},\lambda)_i = \varepsilon^*(\vec{k},\lambda)_i$. Sem perda de generalidade, o potencial vetor pode ser expresso como:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\vec{x},\chi)_i = \frac{\sqrt{\mu_0\hbar c}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{\varepsilon(\vec{k},\lambda)_i}{\sqrt{2k}}\left[\widehat{d}_{\vec{k}\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k\chi)} + \widehat{d}^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k\chi)}\right]\, d^3\vec{k} \quad (3.46)$$

onde, $\widehat{d}_{\vec{k}\lambda} = \widehat{a}_{\vec{k}\lambda}$ em $\chi \to +\infty$ e $\widehat{d}_{\vec{k}\lambda} = \widehat{b}_{\vec{k}\lambda}$ em $\chi \to -\infty$.

O campo magnético em Weyl $B^W(\vec{x},\chi)_i$ [‡] é definido a partir de $A(\vec{x},\chi)_i$:

$$B(\vec{x},\chi)_i \equiv g_{ij}\eta^{\mu jlm}V_\mu e^{-\omega}A(\vec{x},\chi)_{m\|l} = g_{ij}\eta^{\mu jlm}V_\mu\mathcal{A}(\vec{x},\chi)_{m\|l} \quad (3.47)$$

Cabe lembrar que o potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},\chi)$ com índice covariante não depende do fator de escala, embora esteja definido no espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}$. Nos cálculos que se seguirão, o fator de escala sempre será colocado em evidência, mas o campo magnético $B(\vec{r},\chi)_i$ ainda estará definido no espaço-tempo cuja métrica é a de FRW. Logo, com $\epsilon = 0$, obtém-se:

$$\eta^{\mu jlm} \doteq -a^{-4}\varepsilon^{\mu jlm} \qquad g_{ij} \doteq -a^2\delta_{ij} \qquad V_\mu \doteq \delta^0_\mu \qquad \Rightarrow$$

$$B(\vec{x},\chi)_i \doteq \frac{1}{a}\delta_{ij}\varepsilon^{0jlm}\mathcal{A}(\vec{x},\chi)_{m|l} \qquad \Rightarrow$$

$$\widehat{B}(\vec{x},\chi)_i = \frac{\sqrt{\mu_0\hbar c}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{i\ k}{a\sqrt{2k}}B^0(\vec{k},\lambda)_i\left[\widehat{d}_{\vec{k}\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k\chi)} + \widehat{d}^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k\chi)}\right]\, d^3\vec{k} \quad (3.48)$$

onde $B^0(\vec{k},\lambda)_i$ é um novo vetor polarização para o campo magnético, definido a partir de $\varepsilon(\vec{k},\lambda)_i$ no espaço euclideano:

$$B^0(\vec{k},\lambda)_i \equiv \delta_{ij}\ \varepsilon^{0jlm}\ \widehat{k}_l\ \varepsilon(\vec{k},\lambda)_m \quad (3.49)$$

A base $B^0(\vec{k},\lambda)_i$ obedece às seguintes relações:

$$B^0(\vec{k},\lambda)_i\ k_j\ \delta^{ij} = 0 \qquad B^0(\vec{k},\lambda)_i = (-1)^\lambda B^0(-\vec{k},\lambda)_i$$

[‡]O índice W, que indica uma grandeza definida na geometria de Weyl, será omitido nos próximos cálculos visando maior simplicidade na notação.

$$\sum_{\lambda=1}^{2} B^0(\vec{k},\lambda)_i B^0(\vec{k},\lambda)_j = \delta_{ij} - \widehat{k}_i \widehat{k}_j \tag{3.50}$$

Usando as propriedades da base, a expressão (3.48) é escrita como:

$$\widehat{B}(\vec{x},\chi)_i = \frac{1}{a\ (2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^{2} \int \widehat{B}_\lambda(\vec{k},\chi)_i\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ d^3\vec{k} \qquad \text{onde} \tag{3.51}$$

$$\widehat{B}_\lambda(\vec{k},\chi)_i \equiv \widehat{B}_\lambda(\vec{k},\chi) B^0(\vec{k},\lambda)_i \qquad \text{e} \tag{3.52}$$

$$\widehat{B}_\lambda(\vec{k},\chi) \equiv \frac{ik\sqrt{\mu_0 \hbar c}}{\sqrt{2\ k}} \left[\widehat{d}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik\chi} - (-1)^\lambda \widehat{d}^\dagger_{-\vec{k}\lambda} e^{ik\chi} \right] \tag{3.53}$$

$\widehat{B}(\vec{x},\chi)_i$ é um operador hermitiano, uma vez que $\widehat{B}_\lambda(\vec{k},\chi)_i = \widehat{B}^\dagger_\lambda(-\vec{k},\chi)_i$.

Define-se o estado de vácuo do campo EM em $\chi \to -\infty$:

$$\left\langle 0 \left| \widehat{a}^\dagger_{\vec{k}\lambda} \widehat{a}_{\vec{k}\lambda} \right| 0 \right\rangle = 0 \tag{3.54}$$

A densidade de energia do campo magnético é dada por:

$$\rho_B = -\frac{1}{2\mu_0} g^{ij} \left\langle 0 \left| : \widehat{B}(\vec{x},\chi)_i\ \widehat{B}(\vec{x},\chi)_j : \right| 0 \right\rangle \qquad \Rightarrow \tag{3.55}$$

$$\rho_B = \frac{\delta^{ij}}{2\mu_0 a^4} \sum_{\lambda\lambda'} \int\int \left\langle 0 \left| : \widehat{B}_\lambda(\vec{p},\chi)_i\ \widehat{B}^\dagger_{\lambda'}(\vec{q},\chi)_j : \right| 0 \right\rangle e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}}\ \frac{d^3\vec{p}\ d^3\vec{q}}{(2\pi)^6} \tag{3.56}$$

Antes do ricochete, em $\chi \to -\infty$, o valor esperado da densidade de energia do campo magnético é nulo, $\rho_B = 0$. Após o processo de interação com a geometria, em $\chi \to +\infty$, o valor de ρ_B é obtido com facilidade, a partir das expressões a seguir:

$$\frac{1}{\mu_0} \left\langle 0 \left| : \widehat{B}_\lambda(\vec{p},\chi)_i\ \widehat{B}^\dagger_{\lambda'}(\vec{q},\chi)_j : \right| 0 \right\rangle = \frac{(2\pi)^3}{4} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p}-\vec{q}) \left[S(p) + R(p,\chi) \right] P(\widehat{p})_{ij} \tag{3.57}$$

$$\text{onde} \quad S(p) = \frac{2\hbar c}{(2\pi)^3} p (c_p^-)^2 = \frac{2\hbar c}{(2\pi)^3} \frac{p\ [\sinh(\pi\omega_0\chi_0)]^2}{[\cosh(\pi p \chi_0)]^2} \tag{3.58}$$

$$\text{e} \qquad R(p,\chi) = \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} p \left(c_p^- c_p^+ e^{-2ip\chi} + c_p^- c_p^{+*} e^{2ip\chi} \right) \tag{3.59}$$

O objeto matemático $P(\widehat{p})_{ij}$ é um projetor euclidiano no plano normal ao vetor $\widehat{p}$:

$$P(\widehat{p})_{ij} \equiv \delta_{ij} - \widehat{p}_i \widehat{p}_j \tag{3.60}$$

Quando ocorre a quantização no vácuo, o termo oscilante $R(p,\chi)$, que tem origem na componente magnética do campo, é cancelado por outro termo de mesmo módulo mas de sinal oposto, oriundo da parte elétrica do campo EM [64]. Foi mostrado, no capítulo 2, que um meio formado por um plasma na aproximação MHD anula o campo elétrico e congela o campo magnético, inibindo oscilações temporais. Como o universo primordial tinha as características de um plasma, o termo oscilante não existia e deve ser desprezado nos cálculos. Logo,

$$\frac{1}{\mu_0}\left\langle 0\right|\!:\widehat{B}_\lambda(\vec{p},\chi)_i\ \widehat{B}^\dagger_{\lambda'}(\vec{q},\chi)_j:\!\left|0\right\rangle = \frac{(2\pi)^3}{4}\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{p}-\vec{q})S(p)P(\widehat{p})_{ij} \qquad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.56), eis o resultado:

$$\rho_B = \frac{1}{a^4}\int_0^\infty S(k)k^2\ \frac{dk}{(2\pi)^2} = \frac{1}{a^4{\chi_0}^3}\int_0^\infty S(\overline{k})\overline{k}^2\ \frac{d\overline{k}}{(2\pi)^2} \qquad (3.62)$$

Mas o campo magnético, conforme visto no capítulo 2, sofre um corte no seu espectro devido à viscosidade do meio. Assim os limites de integração da última expressão são de $k=0$ até $k=k_D$. Outra forma de introduzir o corte no espectro é acrescentar diretamente a função de corte $\exp[-2(\overline{k}/\overline{k_D})^2]$ na expressão (3.62), onde $\overline{k}\equiv\chi_0\ k$ e $\overline{k_D}\equiv\chi_0\ k_D$.

$$\rho_B = \frac{1}{a^4{\chi_0}^3}\int_0^\infty S(\overline{k})e^{-2\left(\frac{\overline{k}}{\overline{k_D}}\right)^2}\overline{k}^2\ \frac{d\overline{k}}{(2\pi)^2} = \frac{2\hbar c}{a^4{\chi_0}^4}\int_0^\infty \left(c_k^-\right)^2 e^{-2\left(\frac{\overline{k}}{\overline{k_D}}\right)^2}\frac{\overline{k}^3}{(2\pi)^5}\ d\overline{k} \qquad (3.63)$$

Logo após o ricochete, o valor de k_D ainda é maior que a largura do espectro gerado e por isso a atenuação devido à viscosidade ainda não começara a atuar. O valor de ρ_B em χ_b resulta em:

$$\rho_B(\chi_b) \simeq \frac{2\ \hbar\ c\ \sinh^2(\pi\chi_0\omega_0)}{72,03(2\pi)^5[\chi_0 a(\chi_b)]^4} \qquad (3.64)$$

No tempo da nucleossíntese (denotado pelo índice "ns") correspondente à temperatura $k_BT_{ns}=1MeV$, a desigualdade $0\leq\overline{k}\leq\overline{k_D}<0,1$ é satisfeita;

com isso a aproximação $\cosh(\pi\overline{k}) \simeq 1$ torna-se válida e $c_k^- \simeq -\sinh(\pi\omega_0\chi_0)$. Nesse caso, a expressão de $\rho_B(\chi_{ns})$ assume uma forma simples:

$$\rho_B(\chi_{ns}) = \frac{B^2(\chi_{ns})}{2\mu_0} = \frac{\hbar c[\sinh(\pi\omega_0\chi_0)]^2}{4\ (2\pi)^5}\left[\frac{k_D(\chi_{ns})}{a(\chi_{ns})}\right]^4 \tag{3.65}$$

Não existe solução exata para a integral da eq.(3.63), mas a expressão a seguir fornece uma ótima aproximação para $\rho_B(\chi)$ no intervalo $\overline{\chi_b} \leq \overline{\chi} \leq \overline{\chi_{ns}}$:

$$\rho_B(\chi) \simeq \frac{\rho_B(\chi_b)}{1 + \frac{1{,}093}{(\overline{k_D})^2} + \frac{1}{9{,}004(\overline{k_D})^4}}\left[\frac{a(\chi_b)}{a(\chi)}\right]^4 \tag{3.66}$$

O valor esperado do quadrado do campo, $B(L,\vec{x},\chi)^2$ ou simplesmente $B^2_{(L)}(\chi)$, numa escala conforme L, é determinado com o mesmo procedimento de cálculo do caso clássico, dado pela expressão (2.63), com a substituição da operação de média pelo valor esperado:

$$B_{(L)}{}^2 = -g^{ij}\int \left\langle 0\left|\widehat{B}(\vec{x},\chi)_i\widehat{B}(\vec{x}+\vec{x'},\chi)_j\right|0\right\rangle W(\vec{x'},L)\ d^3\vec{x'}$$

$$\Rightarrow \qquad B_{(L)}{}^2 = \frac{2\ \mu_0}{a^4(2\pi)^2}\int_0^\infty S(k)e^{-k^2\left(\frac{2}{{k_D}^2}+\frac{1}{2}L^2\right)}k^2\ dk \tag{3.67}$$

O que se deseja é conhecer o valor de $B_{(L)}$ na época da formação das galáxias, nesse caso, $\cosh(\pi\overline{k}) \simeq 1$, com isso a integração de (3.67) fornece a expressão a seguir:

$$B_{(L)}{}^2 = \frac{\mu_0\ \hbar\ c\ \sinh^2(\pi\omega_0\chi_0)}{2(2\pi)^5 a^4[(0,5L)^2 + {k_D}^{-2}]^2} \tag{3.68}$$

Ao combinar as expressões (3.64) e (3.68), o resultado encontrado é:

$$B_{(L)}(\chi)^2 = \frac{2\ \mu_0}{a(\chi)^4[(0,5L)^2 + k_D(\chi)^{-2}]^2}\left[\frac{a(\chi_{ns})}{k_D(\chi_{ns})}\right]^4\rho_B(\chi_{ns}) \tag{3.69}$$

O comprimento conforme L é igual à maior escala na qual os campos magnéticos são observados ($L \simeq 0,1Mpc \simeq 3,086\cdot 10^{21}m$). O número de onda de corte é decrescente e a partir de um dado tempo, $L << {k_D}^{-1}$.

O valor de $k_D(\chi)$ até o desacoplamento é calculado pela expressão (2.128). Após esse período, no tempo do desacoplamento χ_{dec}, a viscosidade não atua mais, e a dissipação de energia do campo torna-se muito pequena [24]. Para $\chi > \chi_{dec}$, $L << {k_D}^{-1}$, assim obtém-se:

$$\frac{{B_{(L)}}^2}{2\mu_0} = \left[\frac{a(\chi_{ns})}{a(\chi)}\right]^4 \left[\frac{k_D(\chi_{dec})}{k_D(\chi_{ns})}\right]^4 \rho_B(\chi_{ns}) \ , \quad \chi > \chi_{dec} \ \text{ e } \ L < 1Mpc \tag{3.70}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\frac{B_{(L)}(\chi)}{Gauss}\right]^2 \simeq 1,10 \cdot 10^{-57} \frac{\rho_B(\chi_{ns})}{m^{-3} Ja(\chi)^4} \tag{3.71}$$

3.4 Comprimento de coerência do campo

O comprimento de coerência do campo magnético observado pode alcançar a ordem de grandeza de $0,1Mpc$. O campo semente deve apresentar um comprimento de coerência de larga escala compatível com o campo após sofrer amplificação. O valor mínimo da coerência do campo semente depende do modelo de amplificação que tenha sido responsável por gerar os campos observados no presente. Se o campo semente possuir helicidade (o que não é o caso do modelo aqui empregado), é possível que uma parte da energia do campo semente associada às frequências mais altas seja transferida às componentes do campo com freqüências mais baixas através de um mecanismo de cascata inversa (*inverse cascade effect*), aumentando, desta forma, o comprimento de coerênca do campo resultante [65].

A coerência do campo é determinada através da função normalizada de

coerência mútua $\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi)$, [66]:

$$\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi) \equiv \frac{\left\langle 0 \left| : \widehat{B}(\vec{x},\chi)_i \ \widehat{B}(\vec{x}',\chi)^i : \right| 0 \right\rangle}{\left\{ \left\langle 0 \left| : \widehat{B}(\vec{x},\chi)_j \widehat{B}(\vec{x},\chi)^j : \right| 0 \right\rangle \left\langle 0 \left| : \widehat{B}(\vec{x}',\chi)_l \widehat{B}(\vec{x}',\chi)^l : \right| 0 \right\rangle \right\}^{1/2}} \tag{3.72}$$

O módulo da função $\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi)$[§] permite calcular o comprimento de coerência do campo, r_c, fazendo $\vec{x}' \equiv \vec{x} - \vec{r}$. Quando há máxima coerência, $|\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi)| = 1$, o que ocorre para $|\vec{r}| << r_c$. Por outro lado, quando $|\vec{r}| >> r_c$, o campo não preserva a coerência e $|\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi)| \simeq 0$.

Quando o k_D já é menor que a largura do espectro inicial do campo, o espectro de potência é proporcional a uma potência de k, ou seja, $S(k) \propto k^n$. No modelo empregado, $n = 1$, e logo após o ricochete, $S(k) \propto k$. Neste caso a função $\gamma(\vec{x},\vec{x}-\vec{r},\chi)$ assume a seguinte forma:

$$\gamma(\vec{x},\vec{x}-\vec{r},\chi) = \frac{8}{(rk_D)^4} \int_0^\infty x^2 \sin(x) \ e^{-2\left(\frac{x}{rk_D}\right)^2} dx, \quad \text{onde} \quad r \equiv |\vec{r}| \tag{3.73}$$

O comprimento conforme de coerência r_c é estabelecido, considerando no gráfico (3.1) a largura na metade da altura. O resultado é:

$$r_c \simeq \frac{2}{k_D} \tag{3.74}$$

Em períodos posteriores ao desacoplamento, o valor de r_c é:

$$r_c \simeq 2,1 \cdot 10^{23} m \simeq 6,5 Mpc \tag{3.75}$$

Nota-se que o fato de o espectro sofrer corte devido à atenuação das oscilações MHD produz um grande aumento no comprimento de coerência do campo semente. Essa ordem de grandeza do r_c atende à necessidade dos modelos de amplificação dos campos pré-galáticos.

[§] $|\gamma(\vec{x},\vec{x}',\chi)|$, em ótica, é uma função conhecida como visibilidade.

O gráfico de $|\gamma(\vec{x}, \vec{x} - \vec{r}, \chi)|$ é dado a seguir em função de (rk_D):

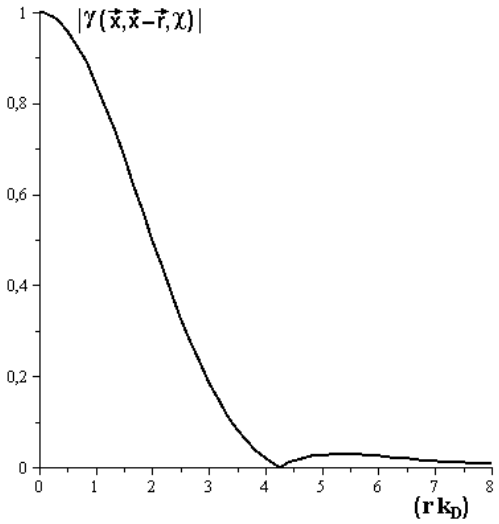

Figura 3.1: Função normalizada de coerência mútua.

3.5 Modelos de amplificação de campos pré-galáticos

Os dois principais métodos de amplificação de campos semente são o mecanismo de contração adiabática e o dínamo galático. O primeiro é um modelo bastante simples e atua durante a contração da nuvem de gás que forma a galáxia ou aglomerado. O dínamo constitui um conjunto de modelos similares que amplificam o campo semente durante a formação e evolução da galáxia. Este é considerado o método padrão pois apresenta uma taxa de amplificação bem maior que a contração adiabática.

3.5.1 Contração adiabática

As nuvens cósmicas de gás sofrem colapso durante o processo de formação de estruturas. Devido à alta condutividade do meio, o fluxo magnético do campo semente é conservado. Portanto o campo pré-galático sofre uma amplificação proporcional ao quadrado da raiz cúbica da razão entre o volume final e inicial da estrutura:

$$B_{seed} = B_{gal} \left(\frac{\rho_{mig}}{\rho_{gal}} \right)^{\frac{2}{3}} \tag{3.76}$$

onde B_{seed} e B_{gal} são respectivamente as intensidades do campo semente e galático. O termo entre parênteses é a razão entre as densidades de matéria do meio interglático e da galáxia (ou aglomerado), que é igual à razão inversa entre os volumes. A ordem de grandeza deste termo no caso das galáxias, em geral, é $(\rho_{mig}/\rho_{gal}) \simeq 10^{-6}$ [28]. Se os campos galáticos são da ordem de 10^{-6} G, o campo semente precisa apresentar uma intensidade de pelo menos 10^{-10} G. Esta intensidade ainda é muito alta para a maioria dos modelos de geração de campos pré-galáticos.

3.5.2 Dínamo Galático

Este mecanismo transfere parte da energia cinética do plasma, associada à rotação da galáxia, para o campo magnético, produzindo uma amplificação exponencial com o tempo. O modelo mais simples é conhecido como dínamo de campo médio (ou dínamo α - Ω) [67].

A evolução do campo magnético é dada pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma_e} \nabla^2 \vec{B} \tag{3.77}$$

No caso do plasma cosmológico, a condutividade σ_e é alta, logo o segundo termo à direita em (3.77) pode ser desprezado, o resultado é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) \tag{3.78}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade do fluido.

Para que o mecanismo de dínamo funcione, são necessárias três condições: a nuvem de plasma que constitui a galaxia em formação precisa apresentar uma velocidade angular de rotação que varie em função do raio, deve haver uma rápida reconexão das linhas de campo magnético e o plasma deve possuir um movimento turbulento [28], [34].

O campo magnético e a velocidade podem ser escritas como a soma de um termo médio mais um termo randômico devido ao movimento turbulento do fluido:

$$\vec{V} = \left\langle \vec{V} \right\rangle + \vec{v} \quad \vec{B} = \left\langle \vec{B} \right\rangle + \vec{b} \quad \text{onde} \quad \left\langle \vec{b} \right\rangle = \langle \vec{v} \rangle = 0 \tag{3.79}$$

o símbolo $\langle ... \rangle$ indica uma operação de média temporal. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$ são as componentes randômicas da velocidade $\vec{V}$ e do campo magnético $\vec{B}$. Ao substituir (3.79) na eq.(3.78) e fazendo uma operação de média, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{B} \right\rangle = \vec{\nabla} \times \left(\left\langle \vec{V} \right\rangle \times \left\langle \vec{B} \right\rangle \right) + \vec{\nabla} \times \left(\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle \right) \tag{3.80}$$

O termo $\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle$, devido às componentes randômicas, pode ser escrito como [28], [35]:

$$\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{B} \right\rangle - \beta \vec{\nabla} \times \left\langle \vec{B} \right\rangle \tag{3.81}$$

$$\text{onde} \qquad \alpha = -\frac{\tau_c}{3}\left\langle \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} \right\rangle \qquad \beta = \frac{\tau_c}{3}\left\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \right\rangle \tag{3.82}$$

τ_c denota o tempo de correlação do campo de velocidade, α quantifica a helicidade do fluido, e β é proporcional à energia cinética do movimento turbulento. A equação dinâmica do campo magnético médio é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{B} \right\rangle = \vec{\nabla} \times \left(\left\langle \vec{V} \right\rangle \times \left\langle \vec{B} \right\rangle \right) + \vec{\nabla} \times \left(\alpha \left\langle \vec{B} \right\rangle \right) + \beta \nabla^2 \left\langle \vec{B} \right\rangle \tag{3.83}$$

Esse modelo é concebido para descrever uma nuvem de gás em forma de disco girando em torno de seu eixo com uma velocidade angular Ω, função do raio. A eq.(3.83) é escrita em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) e se transforma no sistema a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B_r\rangle = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\langle B_\phi\rangle\right) + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\langle B_r\rangle \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B_\phi\rangle = -\Omega\langle B_r\rangle + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\langle B_\phi\rangle \tag{3.85}$$

A velocidade média é dada por $\left\langle\vec{V}\right\rangle = r\Omega\hat{\phi}$, onde $\Omega(r) \propto r^{-1}$, o termo $\partial_z\langle\alpha B_r\rangle$ foi descartado na eq.(3.85) porque é muito menor que o termo $\Omega\langle B_r\rangle$ [33]. Quando a derivada em relação ao raio é desprezada, pelo fato de ser muito menor que a derivada em relação a z, a equação de evolução da componente $\langle B_z\rangle$ se desacopla das outras duas e pode ser negligenciada[34].

A solução das eq.(3.84) e (3.85) resulta numa amplificação exponencial do campo magnético conforme o giro do disco galático. Quando ocorre a equipartição da energia entre o movimento do fluido e a energia do campo magnético, a amplificação para.

As condições iniciais normalmente utilizadas assumem que o disco de plasma que constitui a galaxia em formação apresente uma espessura $2h$, no intervalo $-h < z < h$. O termo com β na eq.(3.83) atua como um fator de dissipação do campo magnético devido à turbulência do fluido. Outra hipótese importante é que o coeficiente β fora do disco deve ser muito alto, resultando num campo magnético nulo em $|z| = h$. A validade destas hipóteses, chamadas de condições de contorno de vácuo, é questionada por alguns autores, o que poderia comprometer o funcionamento do modelo [33], [68].

Uma outra dificuldade do dínamo $\alpha - \Omega$ é explicar os campos magnéticos em galáxias elípticas e nos aglomerados de galáxia, onde Ω é menor do que

nas galáxias [34], [35]. Nas representações de universo em que o desvio para o vermelho é uma medida da idade do objeto observado [1], o dínamo enfrenta sérios problemas, uma vez que existem medidas de campo magnético em galáxias com alto desvio para o vermelho. De acordo com o modelo padrão e o modelo não singular adotado, essas estruturas são mais jovens e o dínamo não teria tido tempo para amplificar o suficiente os campos semente. Nas referencias [35] e [69], encontram-se boas revisões sobre o assunto.

Um exemplo típico de dínamo de campo médio consegue um fator de amplificação da ordem de $e^{25} \simeq 7,2 \cdot 10^{10}$ num tempo aproximado de 10 bilhões de anos. Para gerar um campo magnético observado da ordem de μG, é necessário um campo de pelo menos $10^{-17} Gauss$, numa escala de $30 kpc$ a $100 kpc$, após o colapso da galáxia. O valor desse campo semente, avaliado no tempo presente, é da ordem de $10^{-21} Gauss$ na escala de $1 Mpc$ [34].

O modelo apresentado é um exemplo de dínamo de grande escala. Apesar das dificuldades citadas, possui a vantagem de amplificar campos magnéticos semente de forma simples, gerando campos galácticos com larga escala de coerência.

Existem outros modelos de dínamo que conseguem transferir a energia cinética do fluido para o campo magnético, de forma mais breve e com maior eficiência. Os tipos mais promissores pertencem à categoria de modelos que atuam a partir de pequenas escalas. Esta classe de dínamos produz campos magnéticos correlacionados em escalas da ordem ou menores que a escala de energia transportada pelo campo de velocidade do fluido. No entanto, os efeitos de pequena escala podem estar relacionados com a estrutura de larga escala, podendo resultar em campos com grandes comprimentos de coerência.

Esses dínamos em pequena escala são importantes pois, além de apre-

sentar uma taxa de amplificação muito maior que a dos modelos de larga escala em períodos mais curtos, também podem ser capazes de atuar em situações onde o dínamo de grande escala não atua, como galáxias elípticas e aglomerados de galáxias, onde os efeitos de rotação são desprezíveis.

Um exemplo de dínamo de pequena escala foi utilizado na tese de Rafael S. Souza sobre campos magnéticos cosmológicos [33], com base no artigo de Brandenburg e Subramannian [69]. O movimento turbulento do plasma durante o colapso recebe energia de estrelas ou supernovas através de vórtices de larga escala que se quebram sucessivamente em vórtices menores. A ideia principal é que uma dada fração da energia cinética dos movimentos turbulentos de larga escala seja transferida para pequenos vórtices. As equações hidrodinâmicas foram resolvidas supondo um campo semente oriundo de flutuações do campo eletromagnético, que teriam ocorrido na transição de fase quark - hádron.

Capítulo 4

Perturbações gravitacionais induzidas por um campo magnético cosmológico

O tensor momento-energia do campo magnético de fundo apresenta flutuações tensoriais de origem quântica que servem de fonte para as perturbações da métrica de fundo [24], [70].

O espectro de perturbações gravitacionais integrado atua como uma densidade de energia extra que deve contribuir para a taxa de expansão do universo no período da nucleossíntese [24].

Nesse capítulo, a densidade de energia das ondas gravitacionais é calculada.

4.1 Fonte de perturbações tensoriais

O tensor momento-energia de um campo magnético pode ser desenvolvido em uma transformada de Fourier:

$$T(\vec{x},\chi)_{ij} = \frac{1}{a(\chi)^2}\int T(\vec{k},\chi)_{ij}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tag{4.1}$$

As componentes $T(\vec{k},\chi)_{ij}$ são dadas por:

$$T(\vec{k},\chi)_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}g_{ij}g^{rs} - \delta^r_i\delta^s_j\right)\int B(\vec{p},\chi)_r B^*(\vec{p}-\vec{k},\chi)_s\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \tag{4.2}$$

Define-se a componente da transformada de Fourrier da pressão anisotrópica do tensor momento-energia como:

$$\Pi(\vec{k},\chi)_{ij} \equiv \left[P(\hat{k})_{ir}P(\hat{k})_{js} - \frac{1}{2}P(\hat{k})_{ij}P(\hat{k})_{rs}\right]T(\vec{k})_{rs} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}P(\hat{k})_{ij}P(\hat{k})_{rs} - P(\hat{k})_{ir}P(\hat{k})_{js}\right]\int B(\vec{p},\chi)_r B^*(\vec{p}-\vec{k},\chi)_s\frac{d^3\vec{p}}{\mu_0(2\pi)^3} \tag{4.3}$$

$P(\hat{k})_{ab}$ é o projetor euclideano dado em (3.60) e a pressão anisotrópica $\Pi(\vec{r},\chi)_{ij}$ é obtida pela integral de Fourier:

$$\Pi(\vec{x},\chi)_{ij} = \frac{1}{a(\chi)^2}\int \Pi(\vec{k},\chi)_{ij}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tag{4.4}$$

O tensor anisotrópico $\Pi(\vec{x},\chi)_{ij}$ desempenha papel importante nesta seção, pois é ele que se acopla às perturbações tensoriais da métrica através da equação de Einstein e serve de fonte para as ondas gravitacionais.

Na tese desenvolvida, a pressão anisotrópica é de natureza puramente quântica e tem origem no campo magnético gerado no ricochete, no modelo apresentado no capítulo 3. Logo, para determinar $\Pi(\vec{x},\chi)_{ij}$, o campo clássico $B(\vec{p},\chi)_a$ da eq.(4.3) deve ser substituído pelo operador quântico dado pela eq.(3.53), conforme o procedimento tradicional de quantização canônica.

Com tal procedimento, a pressão anisotrópica é representada pelo operador de campo $\widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}$.

A questão é como introduzir na equação de Einstein um tensor clássico $\Pi(\vec{x},\chi)_{ij}$ que represente os efeitos de um campo quântico. A proposição mais óbvia é tomar o valor esperado do operador tensorial $\widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}$ no vácuo. Implementando este cálculo, obtém-se:

$$\left\langle 0 \left| : \widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij} : \right| 0 \right\rangle = \frac{\delta(\vec{k})}{2} \int S(p) P(\hat{p})_{rs} d^3\vec{p} \left[\frac{1}{2} P(\hat{k})_{ij} P(\hat{k})_{rs} - P(\hat{k})_{ir} P(\hat{k})_{js} \right] \tag{4.5}$$

onde $S(p)$ é dado pela eq.(3.58).

Por outro lado, é fácil mostrar que:

$$\int \int [P(\hat{p})_{rs} \sin\theta] d\theta d\phi = \frac{8\pi}{3} \delta_{rs} \tag{4.6}$$

Ao substituir a identidade (4.6) em (4.5) o resultado é:

$$\left\langle 0 \left| : \widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij} : \right| 0 \right\rangle = 0 \tag{4.7}$$

A última igualdade indica que o valor esperado do operador $\widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}$, por si só, não pode representar classicamente os efeitos quânticos do operador pressão anisotrópica. Mas, por outro lado, o valor esperado do quadrado do operador $\widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}$ apresenta um valor não nulo. Do ponto de vista clássico, isso pode ser entendido como uma quantidade tensorial estocástica de média nula, mas com média quadrática não nula. O comportamento estocástico, devido às flutuações quânticas, pode ainda ser atribuído a uma base, sem a necessidade de descrever a sua forma explícita, uma vez que o que se deseja não é conhecer o valor da perturbação num ponto do espaço-tempo, mas a densidade de energia das perturbações gravitacionais, e isto depende do quadrado da derivada temporal da perturbação da métrica.

Define-se o operador $\widehat{B}(\vec{k})_a$ através da soma das polarizações da expressão (3.52):

$$\widehat{B}(\vec{k})_a \equiv \sum_{\lambda=1}^{2} \widehat{B}_\lambda(\vec{k})_a \quad \text{e} \quad \widehat{B}^\dagger(\vec{k})_a \equiv \sum_{\lambda=1}^{2} \widehat{B}^\dagger_\lambda(\vec{k})_a \tag{4.8}$$

Após alguns cálculos, obtém-se $\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}\widehat{\Pi}^\dagger(\vec{k}',\chi)_{lm} : \left| 0 \right\rangle$:

$$\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}\widehat{\Pi}^\dagger(\vec{k}',\chi)_{lm} : \left| 0 \right\rangle =$$

$$\left[\frac{1}{2}P(\hat{k})_{ij}P(\hat{k})_{rs} - P(\hat{k})_{ir}P(\hat{k})_{js}\right] \cdot \left[\frac{1}{2}P(\hat{k}')_{lm}P(\hat{k}')_{tu} - P(\hat{k}')_{lt}P(\hat{k}')_{mu}\right] \cdot$$

$$\frac{1}{{\mu_0}^2}\int\int \left\langle 0 \right| : \widehat{B}(\vec{p})_r\ \widehat{B}^\dagger(\vec{p}-\vec{k})_s\ \widehat{B}(\vec{p}\,'-\vec{k}\,')_u\ \widehat{B}^\dagger(\vec{p}\,')_t : \left| 0 \right\rangle \frac{d^3\vec{p}\ d^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^6} =$$

$$\left[\frac{1}{2}P(\hat{k})_{ij}P(\hat{k})_{rs} - P(\hat{k})_{ir}P(\hat{k})_{js}\right] \cdot \left[\frac{1}{2}P(\hat{k}')_{lm}P(\hat{k}')_{tu} - P(\hat{k}')_{lt}P(\hat{k}')_{mu}\right] \cdot$$

$$\frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}\,')}{4}\int S(p)S\left(\left|\vec{p}-\vec{k}\right|\right)\left[P(\hat{p})_{rt}P(\widehat{p-k})_{su} + P(\hat{p})_{ru}P(\widehat{p-k})_{st}\right] d^3\vec{p} \tag{4.9}$$

A função de correlação $\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k},\chi)_{ij}\widehat{\Pi}^\dagger(\vec{k}',\chi)_{lm} : \left| 0 \right\rangle$ pode ser escrita como:

$$\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k})_{ij}\widehat{\Pi}^\dagger(\vec{k}')_{lm} : \left| 0 \right\rangle = \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}\,')}{4(2\pi)^{-3}}\left[M(\hat{k})_{ijlm}f(k)^2 + iA(\hat{k})_{ijlm}g(k)^2\right] \tag{4.10}$$

onde os objetos $A(\hat{k})_{ijlm}$ e $M(\hat{k})_{ijlm}$ são:

$$A(\hat{k})_{ijlm} \equiv \frac{\hat{k}_q}{2}\left[P(\hat{k})_{jm}\varepsilon_{ilq} + P(\hat{k})_{il}\varepsilon_{jmq} + P(\hat{k})_{im}\varepsilon_{jlq} + P(\hat{k})_{jl}\varepsilon_{imq}\right]$$

$$M(\hat{k})_{ijlm} \equiv P(\hat{k})_{il}P(\hat{k})_{jm} + P(\hat{k})_{im}P(\hat{k})_{jl} - P(\hat{k})_{ij}P(\hat{k})_{lm} \tag{4.11}$$

As funções $f(k)$ e $g(k)$ estão associadas, respectivamente, à parte simétrica da função de correlação e à parte antissimétrica, relacionada à helicidade do campo. Essas funções são obtidas com facilidade pelas identidades a seguir [34]:

$$M(\hat{k})_{ijlm}\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k})_{ij}\widehat{\Pi}^\dagger(\vec{k}')_{lm} : \left| 0 \right\rangle = 2(2\pi)^3\delta\left(\vec{k}-\vec{k}\,'\right)f(k)^2 \tag{4.12}$$

$$A(\hat{k})_{ijlm}\left\langle 0\right|:\widehat{\Pi}(\vec{k})_{ij}\widehat{\Pi}^{\dagger}(\vec{k'})_{lm}:\left|0\right\rangle = 2(2\pi)^3\delta\left(\vec{k}-\vec{k}\,'\right)g(k)^2 \tag{4.13}$$

No modelo desenvolvido nesse trabalho, a componente antissimétrica é nula, ou seja, $g(k)=0$ e a parte simétrica dada por $f(k)$ é:

$$f(k)^2 = \int_{p=0}^{\infty} p^2 S(p) \int_{\gamma=-1}^{1} S\left(\left|\vec{k}-\vec{p}\right|\right)(1+\gamma^2)\left[1+\frac{(k-p\gamma)^2}{\left|\vec{k}-\vec{p}\,\right|^2}\right]\frac{d\gamma\; dp}{4(2\pi)^2} \tag{4.14}$$

$\gamma = \hat{k}\cdot\hat{p}$, $\left|\vec{k}-\vec{p}\,\right|^2 = p^2+k^2-2pk\gamma$ e a função $S(p)$ foi definida em (3.58).

A integral (4.14) só pode ser resolvida numericamente. Para encontrar uma função analítica aproximada, tomou-se o logarítmo natural de $f(k)^2$ e, a partir de um conjunto de pontos obtidos numericamente, foi possível determinar os coeficientes de um polinômio de 2^a ordem. Eis o resultado:

$$f(\bar{k}) \simeq \frac{0,05513\cdot\hbar c}{(2\pi)^4(\chi_0)^{2,5}}\frac{[\sinh(\pi\omega_0\chi_0)]^2}{\exp[0,65\bar{k}^2]} \tag{4.15}$$

Para representar classicamente a pressão anisotrópica $\Pi(\vec{r},\chi)_{ij}$, define-se uma base tensorial de componentes aleatórias $\Pi_0(\vec{k})_{ij}$, onde:

$$\Pi_0(\vec{k})_{ij}k^j = 0\ , \quad \Pi_0(\vec{k})_{ij}g^{ij} = 0\ , \quad \left\langle\Pi_0(\vec{k})_{ij}\right\rangle = 0$$

$$\text{e} \qquad \left\langle\Pi_0(\vec{k})_{ij}\Pi_0^*(\vec{q})^{ij}\right\rangle = \frac{(2\pi)^3}{a^4}\delta(\vec{k}-\vec{q}) \tag{4.16}$$

O símbolo $\langle ...\rangle$ indica uma operação de média sobre todas as realizações do campo. Agora é possível representar a pressão anisotrópica dada em (4.4), definindo:

$$\Pi(\vec{k},\chi)_{ij} \equiv \Pi(\vec{k},\chi)\Pi_0(\vec{k})_{ij} \tag{4.17}$$

$$\Rightarrow \qquad \Pi(\vec{x},\chi)_{ij} = \frac{1}{a^2}\int \Pi(\vec{k},\chi)\Pi_0(\vec{k})_{ij}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tag{4.18}$$

Das proppriedades da base, obtém-se a média e a função de correlação clássica:

$$\left\langle\Pi(\vec{k})_{ij}\right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle\Pi(\vec{k})_{ij}\Pi^*(\vec{q})^{ij}\right\rangle = \frac{(2\pi)^3}{a^4}\delta(\vec{k}-\vec{q})\Pi(k)^2 \tag{4.19}$$

Do campo quântico, tem-se o valor esperado e a função de correlação quântica:

$$\left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k})_{ij} : \left| 0 \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle 0 \right| : \widehat{\Pi}(\vec{k})_{ij} \widehat{\Pi}^{\dagger}(\vec{q})^{ij} : \left| 0 \right\rangle = \frac{(2\pi)^3}{a^4} \delta(\vec{k} - \vec{q}) f(k)^2 \quad (4.20)$$

Comparando (4.19) e (4.20), adota-se $\Pi(k) = f(k)$ como alternativa para representar o campo quântico de forma clássica.

Falta ainda levar em conta a frequência de corte devido à viscosidade do meio. Isso é feito multiplicando $f(k)$ pela função $\exp(-2k^2/{k_D}^2)$:

$$f(k) \exp\left[-2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right] \simeq \frac{0,05513 \cdot \hbar c}{(2\pi)^4 (\chi_0)^{2,5}} \frac{[\sinh(\pi\omega_0\chi_0)]^2}{\exp\left[\bar{k}^2\left(0,65 + \frac{2}{(\bar{k}_D)^2}\right)\right]} \qquad (4.21)$$

Com isso o tensor momento-energia do campo magnético gerado no ricochete fica determinado a seguir:

$$T(\vec{x}, \bar{\chi})_{ij} \;=\; \langle T(\vec{x}, \bar{\chi})_{ij} \rangle \;+\; \Pi(\vec{x}, \chi)_{ij} \qquad \Rightarrow$$

$$T(\vec{x}, \bar{\chi})_{ij} = \frac{(2\pi)^{-2}}{a(\bar{\chi})^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} \int_0^{\infty} \frac{S(k) k^2}{\exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]} dk + \int \frac{f(k)\; \Pi_0(\vec{k})_{ij}}{\exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \; \frac{d^3\vec{k}}{2\pi} \right] \qquad (4.22)$$

A pressão anisotrópica deve gerar perturbações na métrica de FRW na forma de uma radiação gravitacional de fundo. O que será feito a seguir é introduzir o tensor momento-energia na equação de Einstein e calcular a densidade de energia das perturbações tensoriais da métrica de fundo. O problema é que o tensor dado em (4.22) é válido a partir do tempo χ_b, quando houve o término da produção de campo magnético. Mas a excitação das perturbações da métrica ocorre desde o início da geração do campo magnético no tempo $\chi = -\chi_b$ e sofre uma contribuição importante durante o ricochete. No entanto, não há o conhecimento da expressão da densidade de energia, nem da pressão anisotrópica antes de χ_b. O que se sabe é que antes do tempo

$-\chi_b$ a densidade ρ_b e a pressão $\Pi(\vec{x},\chi)_{ij}$ são nulas e após χ_b o valor dessas quantidades é dado pela expressão (4.22). Um caminho para contornar esse impasse é postular uma função suave do tempo, $O(\bar{\chi})$, que conecte o valor nulo do tensor momento-energia antes de $-\chi_b$ com a expressão (4.22) após o ricochete.

Uma escolha razoável para uma função $O(\bar{\chi})$ é o próprio campo escalar da geometria de Weyl, devidamente normalizado:

$$O(\bar{\chi}) \equiv \frac{\omega(\bar{\chi})}{\lim_{\chi\to\infty}\omega(\chi)} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(\bar{\chi}) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{4.23}$$

Multiplicando (4.22) por (4.23) obtém-se o tensor momento-energia e a pressão anisotrópica induzidos pelo campo magnético primordial, válidos em todo o domínio temporal. Os resultados são:

$$T(\vec{x},\bar{\chi})_{ij} = \frac{\delta_{ij}\ O(\bar{\chi})}{3(2\pi)^2 a(\bar{\chi})^2}\int_0^\infty \frac{S(k)k^2}{\exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]}dk + \Pi(\vec{x},\chi)_{ij} \tag{4.24}$$

$$\Pi(\vec{x},\bar{\chi})_{ij} = \frac{O(\bar{\chi})}{(2\pi)^3 a(\chi)^2}\int \frac{f(k)\ \Pi_0(\vec{k})_{ij}}{\exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ d^3\vec{k} \tag{4.25}$$

4.2 Ondas gravitacionais geradas de um campo magnético primordial

O tensor (4.24) entra na equação de Einstein somado ao tensor momento-energia da radiação, mas não deve alterar de forma significativa a dinâmica da métrica de fundo, pois caso contrário tornaria os resultados teóricos incompatíveis com os dados da cosmologia observacional. Portanto será dado

um tratamento perturbativo à métrica de tal forma que a componente de ordem zero tenha sua dinâmica determinada por um fluido perfeito de radiação e a perturbação tensorial de 1^a ordem siga a dinâmica dada pela pressão anisotrópica. Nesse trabalho não será considerada a densidade de energia das perturbações escalares.

A métrica $g_{\mu\nu}$ é dada pelo elemento de linha [24], [71]:

$$ds^2 = a(\chi)^2 \left[d\chi^2 - (\delta_{ij} + 2h_{ij})\ dx^i dx^j \right] \tag{4.26}$$

$$\text{ou seja,} \qquad g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + 2\delta^i_\mu \delta^j_\nu h_{ij}\ , \quad g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - 2\delta^\mu_i \delta^\nu_j h^{ij} \tag{4.27}$$

O tensor $g^{(0)}_{\mu\nu}$ corresponde à métrica não perturbada de Friedmann e sua dinâmica foi discutida no primeiro capítulo. O termo $h_{\mu\nu}$ quantifica a perturbação tensorial. Os tensores $h_{\mu\nu}$ e $g^{(0)}_{\mu\nu}$ satisfazem as relações:

$$^{(3)}\nabla^i h_{ij} = 0\ , \qquad h_{ij} = h(\vec{x},\chi)_{ij}\ , \qquad h^{ab} = -g^{(0)ai} g^{(0)bj} h_{ij}$$

$$h_{ij} g^{(0)ij} = 0\ , \qquad 4 = g_{(0)\mu\nu} g^{(0)\mu\nu} >> h_{ij} h^{ij} \simeq 0 \tag{4.28}$$

Ao substituir (4.27) na eq. de Einstein, obtém-se:

$$\Box^{(0)} \left[a^2 h(\vec{x},\chi)_{ij} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \Pi(\vec{x},\chi)_{ij} \tag{4.29}$$

O operador D'alambertiano $\Box^{(0)}$ é construído com a métrica $g^{(0)}_{\mu\nu}$.

Para resolver (4.29), o tensor $h(\vec{x},\chi)_{ij}$ é desenvolvido numa transformada de Fourrier com a mesma base da pressão anisotrópica:

$$h(\vec{x},\chi)_{ij} = \frac{1}{a^2} \int h(\vec{k},\chi)_{ij}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad \text{onde} \quad h(\vec{k},\chi)_{ij} \equiv h(k,\chi)\Pi_0(\vec{k})_{ij} \tag{4.30}$$

Ao substituir (4.25) e (4.30) na eq.(4.29), obtém-se:

$$h''(\vec{k},\chi)_{ij} + 2\frac{a'}{a} h'(\vec{k},\chi)_{ij} + k^2 h(\vec{k},\chi)_{ij} = \frac{8\pi G}{a^2 c^4} \Pi(\vec{k},\chi)_{ij}$$

$$\Rightarrow \qquad h''(k,\chi) + 2\frac{a'}{a}h'(k,\chi) + k^2 h(k,\chi) = \frac{8\pi G \;\; O(\chi)\;\; f(k)}{c^4 a(\chi)^2 \exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]} \tag{4.31}$$

A transformação de variáveis $h \equiv \frac{\tilde{h}}{a}$ transforma a eq.(4.31):

$$\tilde{h}''(k,\chi) + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\tilde{h}(k,\chi) = \frac{8\pi G \;\; O(\chi)\;\; f(k)}{c^4 a(\chi) \exp\left[2\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right]}$$

$$\tilde{h}''(\bar{k},\bar{\chi}) + \left(\bar{k}^2 - \frac{a(\bar{\chi})''}{a(\bar{\chi})}\right)\tilde{h}(\bar{k},\bar{\chi}) = F \quad \text{onde} \quad F \equiv \frac{8\pi G \;\; {\chi_0}^2 \;\; O(\bar{\chi})\;\; f(\bar{k})}{c^4 a(\bar{\chi}) \exp\left[2\left(\frac{\bar{k}}{k_D}\right)^2\right]} \tag{4.32}$$

Na última equação, as derivadas são operadas em relação ao tempo conforme normalizado $\bar{\chi}$.

A solução geral da eq.(4.32) envolve a soma da solução da equação homogênea com a solução particular. A primeira corresponde a uma radiação de ondas gravitacionais preexistente ao período do ricochete, e a segunda representa a componente da radiação de fundo que tem como fonte a pressão anisotrópica do campo magnético. Uma vez que se deseja estudar as res-trições aos campos magnéticos cosmológicos, a radiação gravitacional de fundo préexistente, caso tenha existido, será desprezada. Logo a solução de (4.31) é dada pela expressão:

$$\tilde{h}(\bar{k},\bar{\chi}) = \tilde{h}_1 \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_2 \; F(\bar{k},y)dy}{\tilde{h}_1'\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1\tilde{h}_2'} - \tilde{h}_2 \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_1 \; F(\bar{k},y)dy}{\tilde{h}_1'\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1\tilde{h}_2'} \tag{4.33}$$

As expressões $\tilde{h}_1$ e $\tilde{h}_2$ são as soluções da equação homogênea correspondente a eq.(4.32). No modelo padrão da cosmologia, o fator de escala é $a(\bar{\chi}) \propto \bar{\chi}$ e o termo a''/a é nulo. Neste caso, $\tilde{h}_1$ e $\tilde{h}_2$ são combinações lineares de funções seno e cosseno. No modelo não singular adotado, a equação homogênea associada e suas soluções em função das variáveis $\bar{\chi}$ e $\bar{k}$ são:

$$\tilde{h}''(\bar{k},\bar{\chi}) + \left[\bar{k}^2 - \frac{1}{(\bar{\chi}^2+1)^2}\right]\tilde{h}(\bar{k},\bar{\chi}) = 0 \tag{4.34}$$

$$\tilde{h}_1 = \bar{\chi}\sqrt{\bar{\chi}^2+1}\; HeunC\left(0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{\bar{k}^2}{4}, \frac{1}{4}+\frac{\bar{k}^2}{4}, -\bar{\chi}^2\right)$$

$$\tilde{h}_2 = \sqrt{\bar{\chi}^2+1}\; HeunC\left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{\bar{k}^2}{4}, \frac{1}{4}+\frac{\bar{k}^2}{4}, -\bar{\chi}^2\right) \qquad (4.35)$$

onde $HeunC(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, Z)$ são as funções confluentes de Heun.

A densidade de energia gravitacional tem a seguinte forma [24], [70], [72]:

$$\rho_G = \frac{c^4}{16\pi G a^2}\left\langle \left[a^2 h(\vec{x},\chi)_i{}^j\right]' \cdot \left[a^2 h(\vec{x},\chi)^i{}_j\right]' \right\rangle \qquad \Rightarrow$$

$$\rho_G = \frac{c^4 \eta^{il}\eta^{jm}}{16\pi G a^2}\int\int [h(k,\chi)]'[h(q,\chi)]' e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}}\left\langle \Pi_0(\vec{k})_{ij}\Pi_0(\vec{q})_{lm}\right\rangle \frac{d^3\vec{k}\; d^3\vec{q}}{(2\pi)^6}$$

$$\rho_G = \frac{c^4}{8\pi G}\frac{a(\chi)^{-2}}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \left\{\frac{d}{d\chi}\left[\frac{\tilde{h}(k,\chi)}{a(\chi)}\right]\right\}^2 k^2 dk \quad \text{ou} \qquad (4.36)$$

$$\rho_G = \frac{c^4}{8\pi G}\frac{(\bar{\chi}^2+1)^{-1}}{(2\pi)^2 {a_0}^4 {\chi_0}^5}\int_0^\infty \left\{\frac{d}{d\bar{\chi}}\left[\frac{\tilde{h}(\bar{k},\bar{\chi})}{\sqrt{\bar{\chi}^2+1}}\right]\right\}^2 \bar{k}^2 d\bar{k} \qquad (4.37)$$

A expressão de $\tilde{h}$ dada em (4.33) pode ser reescrita como:

$$\tilde{h} = \frac{\sqrt{8\pi G}\; {a_0}^2 {\chi_0}^{2,5}\lambda_G}{c^2(2\pi)^{-1}e^{\left(0,65\bar{k}^2\right)}}\left[\tilde{h}_1\int_{-\infty}^{\bar{\chi}}\frac{\tilde{h}_2 O(y) e^{-2\frac{\bar{k}^2}{\overline{k_D}^2}}}{Wr\sqrt{y^2+1}}dy - \tilde{h}_2\int_{-\infty}^{\bar{\chi}}\frac{\tilde{h}_1 O(y) e^{-2\frac{\bar{k}^2}{\overline{k_D}^2}}}{Wr\sqrt{y^2+1}}dy\right] \qquad (4.38)$$

onde $$Wr \equiv \tilde{h}_1'\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1\tilde{h}_2' \qquad \text{e} \qquad (4.39)$$

$$\lambda_G \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}}\frac{\hbar c\left[\sinh\left(\pi\chi_0\omega_0\right)\right]^2}{(2\pi)^5(a_0\chi_0)^3 18,14} \simeq 2,72\cdot 10^3\sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}}(a_0\chi_0)\rho_B(\overline{\chi_b}) \qquad (4.40)$$

Na expressão (4.38), o fator $\exp\left(-2\frac{\bar{k}^2}{\overline{k_D}^2}\right)$ é originado da atenuação do campo magnético devido à viscosidade do plasma. $\overline{k_D}$ é o número de onda de corte, dado em (2.135). Esse termo tem uma influência ínfima no cálculo da perturbação tensorial e por conseguinte na densidade de energia gravitacional. A razão disto é simples de compreender: o número de onda de corte é função do tempo, mas durante e logo após o ricochete o valor de $\overline{k_D}$ é muito maior que a largura do espectro da fonte de perturbações, $f(\bar{k})$, que é dada pelo fator $\exp\left(-0.65\bar{k}^2\right)$ em (4.15). Quando $\overline{k_D}$ torna-se menor que 4, é que

a atenuação da fonte começa a impor um corte no espectro. O instante em que começa a ocorrer o corte depende da temperatura do final do ricochete. Para $k_B T_b \simeq 20MeV$, o tempo conforme em que a viscosidade começa a atuar é da ordem de 16 vezes χ_0, ou seja, $\bar{\chi}_{visc} \simeq 16$; para $k_B T_b \simeq 30MeV$, o tempo da viscosidade é $\bar{\chi}_{visc} \simeq 20$. No entanto, em tempos maiores que $\bar{\chi} \simeq 10$ os integrandos da expressão (4.38) contribuem pouco para as integrais, uma vez que são divididos pelo fator $\sqrt{y^2+1}$. Como o Wronskiano Wr é constante, os termos de amortecimento podem ser desconsiderados. Assim, $\tilde{h}(\bar{k}, \bar{\chi})$ torna-se:

$$\tilde{h} = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}} \frac{(2\pi) {a_0}^2 {\chi_0}^{2,5}}{e^{(0,65\bar{k}^2)}} \lambda_G \left[\tilde{h}_1 \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_2 \; O(y)}{Wr\sqrt{y^2+1}} dy - \tilde{h}_2 \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_1 \; O(y)}{Wr\sqrt{y^2+1}} dy \right] \tag{4.41}$$

O cálculo da densidade de energia das ondas gravitacionais é implementado substituindo (4.41) em (4.37). O resultado é:

$$\rho_G = \frac{{\lambda_G}^2}{(\bar{\chi}^2+1)^2} \Psi(\bar{\chi}) \quad \text{onde} \quad \Psi(\bar{\chi}) \equiv \int_0^{\infty} e^{-1,3\bar{k}^2} \left(\bar{k} \; Ih \right)^2 d\bar{k} \tag{4.42}$$

$$Ih \equiv \left(\tilde{h_1}' - \frac{\bar{\chi} \; \tilde{h}_1}{\bar{\chi}^2+1} \right) \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_2 \; O(y) \; dy}{Wr\sqrt{y^2+1}} - \left(\tilde{h_2}' - \frac{\bar{\chi} \; \tilde{h}_2}{\bar{\chi}^2+1} \right) \int_{-\infty}^{\bar{\chi}} \frac{\tilde{h}_1 \; O(y) \; dy}{Wr\sqrt{y^2+1}} \tag{4.43}$$

A integração de (4.42) só pode ser calculada numericamente. Mas ainda assim, é difícil obter um gráfico de ρ_G em função do tempo. A opção adotada foi o cálculo de alguns pontos próximos do ricochete. Sabe-se que, em tempos maiores que $\overline{\chi_b}$, as funções $\tilde{h}_1$ e $\tilde{h}_2$ convergem para combinações lineares de funções seno e cosseno. O gráfico aproximado de $\rho_G(\bar{\chi})$ é facilmente determinado, substituindo $\tilde{h}_1 = \sin(\bar{k}\bar{\chi})$ e $\tilde{h}_2 = \cos(\bar{k}\bar{\chi})$. Claro está que a curva assim obtida precisa ser multiplicada por um fator de correção, uma vez que essa aproximação só é válida fora do ricochete, em $\bar{\chi} > 6$.

É fácil constatar que a quantidade $\Psi_{ap.}(\bar{\chi})$ nunca ultrapassa um valor máximo, e próximo do ricochete essa quantidade, calculada com as funções

$\tilde{h}_1$ e $\tilde{h}_2$ corretas, é menor que 0,37. De onde se conclui que $\Psi(\bar{\chi}) \leq 0.37$ em todo o domínio temporal.

A figura seguinte mostra o gráfico de $\Psi(\bar{\chi})$ calculada com as funções de Heun, e o gráfico da função aproximada $\Psi_{ap.}(\bar{\chi})$, calculada com as funções $\sin(\bar{k}\bar{\chi})$ e $\cos(\bar{k}\bar{\chi})$:

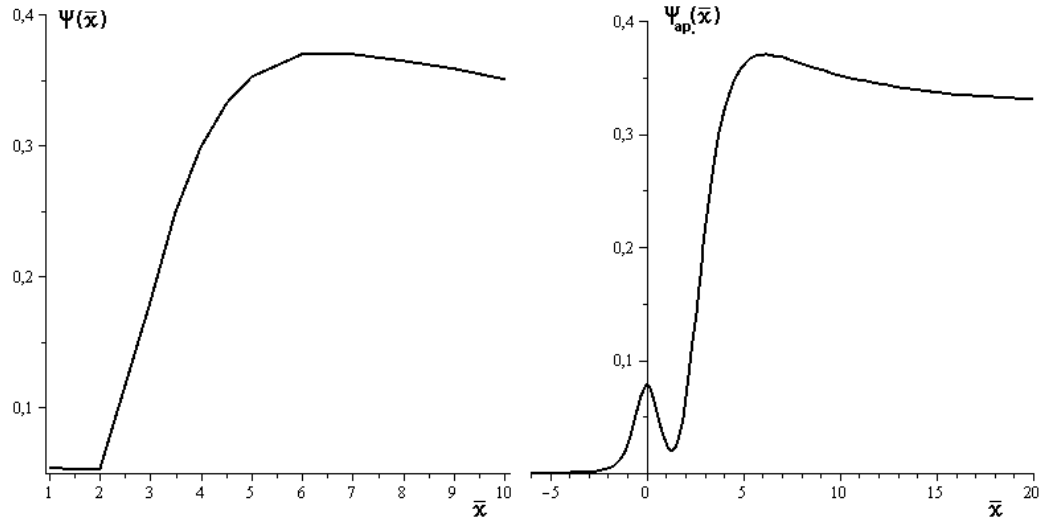

Figura 4.1: Função $\Psi(\bar{\chi})$ e $\Psi_{ap.}(\bar{\chi})$

No próximo capítulo, serão discutidos os limites sobre o campo magnético semente e sobre a densidade de energia máxima das ondas gravitacionais de tal forma que não altere as previsões do modelo padrão. O principal vínculo ocorre na nucleossíntese. Para estimar ρ_G em χ_{ns} é preciso calcular o valor assintótico de $\Psi(\bar{\chi})$. Mas esse limite não é fácil de ser determinado, mesmo numericamente. O maior valor temporal que o programa Maple conseguiu calcular, após várias horas de processamento, foi $\bar{\chi} = 10$. Neste tempo, o resultado foi $\Psi \simeq 0,35$.

Uma alternativa é estimar $\lim_{\bar{\chi}\to\infty} \Psi(\bar{\chi})$ utilizando as funções $\sin(\bar{k}\bar{\chi})$ e $\cos(\bar{k}\bar{\chi})$. O resultado foi $\Psi(\bar{\chi}) \simeq 0,34$.

O valor de $\Psi(\bar{\chi})$ é sensível à função $O(\bar{\chi})$ definida em (4.23). Uma outra alternativa aceitável é dada abaixo:

$$O(\bar{\chi}) \equiv \frac{\sqrt{\bar{\chi}^2+1}+\bar{\chi}}{2\sqrt{\bar{\chi}^2+1}} \tag{4.44}$$

No caso de tal escolha o valor assintótico de $\Psi(\bar{\chi})$ fica em torno de $0,27$.

Uma vez que se deseja um limite superior para ρ_G, será adotada a seguinte estimativa para a densidade de energia das ondas gravitacionais:

$$\rho_G \simeq \frac{0,34{\lambda_G}^2}{\bar{\chi}^4} \qquad \text{para} \qquad \bar{\chi} >> 10 \tag{4.45}$$

Na nucleossíntese a densidade de energia das ondas gravitacionais assume a expresssão abaixo:

$$\rho_G(\bar{\chi}_{ns}) \simeq \frac{6,7\left[\rho_B(\bar{\chi}_{ns})\right]^2 m^3}{10^{28}\left[\bar{k}_D(\bar{\chi}_{ns})\right]^8 J} \simeq 6,4\cdot 10^{116}\frac{\left[\rho_B(\bar{\chi}_{ns})\right]^2}{m^{-3}J}\left(\frac{m}{\chi_0}\right)^8 \tag{4.46}$$

Capítulo 5

Restrições à intensidade dos Campos Magnéticos Cosmológicos

A diversidade de modelos que geram campos magnéticos de larga escala é grande na literatura atual. Portanto, torna-se importante buscar métodos para impor limites a esses campos e com isso restringir a gama de modelos de geração. Essa seção apresenta um dos métodos mais restritivos, baseados nos limites impostos pela nucleossíntese.

A descrição dos processos que ocorreram na nucleossíntese é feita a partir de teorias físicas bem estabelecidas. Além disso, a coincidência entre as previsões teóricas e os dados observacionais confere à nucleossíntese um elevado grau de confiabilidade. Portanto ela constitui um vínculo razoavelmente seguro para modificações do modelo padrão cosmológico nessa fase.

A ideia de usar a nucleossíntese para limitar a intensidade dos campos magnéticos primordiais não é nova. Segundo D. Grasso e H. Rubinstein

[28], isto começou com os trabalhos de Matese e O'Connel (1969 - 1970), bem como com Greenstein (1969). Uma revisão sobre o assunto pode ser encontrada nas referências [28] e [73]. Via nucleossíntese é possível limitar o número de famílias de neutrinos [74], assim como restringir a intensidade de um possível espectro de radiação gravitacional de fundo, como fez M. Maggiore na referência [75].

Em artigos mais recentes, Chiara Caprini e Ruth Durrer [24], [76] utilizaram os vínculos impostos pela nucleossíntese para limitar a intensidade dos Campos Magnéticos primordiais. Cabe destacar, no entanto, que esta proposta foi desenvolvida no contexto da cosmologia padrão. A inovação desta tese consiste em investigar esses limites num modelo cosmológico com ricochete.

Uma outra forma de limitar os campos magnéticos semente é através da análise do espectro da radiação cósmica de fundo. Tal método se mostra importante em modelos de geração de campo semente posteriores a nucleossíntese. R. Durrer na referência [77] argumenta que campos menores que $10^{-9}G$ não são detectáveis através da radiação cósmica de fundo. Artigos de revisão sobre campos magnéticos de larga escala citam valores próximos [35]. No caso dos campos primordiais, o vínculo imposto pela nucleossíntese é muito mais restritivo e será discutido logo a seguir.

5.1 Restrições via nucleossíntese

A presença de um campo magnético, no início do universo, pode interferir na produção dos elementos leves. Uma vez que as previsões teóricas estão em acordo com os dados observacionais, a nucleossíntese pode ser usada para

limitar a intensidade desses campos primordiais.

Existem duas principais formas de um campo magnético alterar os resultados da nucleossíntese. A primeira é modificando a taxa das reações nucleares. A segunda é através da alteração na taxa de expansão do universo [35].

O primeiro caso pode ocorrer, por algumas razões. Por exemplo, quando o campo magnético é muito forte, os elétrons passam a ter um movimento com uma componente circular normal ao campo. A densidade de estados fica alterada devido à quantização da energia associada ao movimento circular. A mudança no espaço de fase dos elétrons influi nas reações nucleares que envolvem os nêutrons, resultando numa diferente razão entre prótons e neutrons [73]. Outro efeito que altera a relação neutrons - prótons tem origem no aumento da densidade de energia do gás de elétrons e pósitrons devido à presença de um campo magnético intenso [28].

Existe um razoável consenso entre os especialistas da área de que o vínculo originado na modificação da taxa de expansão do universo devido à densidade de enegia do campo magnético constitui uma restrição mais acentuada do que os métodos baseados na modificação da taxa das reações nucleares.

A restrição via expansão do universo será revista a seguir e utilizada no modelo desenvolvido no capítulo 3. A densidade de energia das ondas gravitacionais, obtidas no capítulo 4, deverá ser considerada no cálculo da taxa de expansão do universo, resultando num vínculo muito maior aos campos primordiais.

A partir da síntese dos elementos leves, surgiu toda a matéria bariônica existente no universo. A proporção entre Deutério, ^3He, ^4He e ^7Li é prevista com sucesso e depende da razão bárion - fóton e da relação entre a densidade numérica de neutrons n_n e a densidade de prótons n_p. No início da nucleos-

síntese, até a temperatura de $1MeV$, o conteúdo de matéria do universo era composto por um fluido de radiação e por uma certa densidade de prótons e neutrons. A radiação era composta por fótons, neutrinos, antineutrinos, elétrons e pósitrons em equilíbrio térmico. Como a energia associada à massa de repouso dos prótons e neutrons é muito maior que a eneregia térmica nessa época, eles não contribuiam para a radiação. Com isso, a densidade de energia do meio era bem representada apenas como um fluido de radiação, cujo valor é proporcional a $T^4 \propto a^{-4}$.

O equilíbrio estatístico entre o número de prótons e neutrons foi mantido estável devido às reações $p+e^- \rightleftharpoons n+\nu_e$, $p+\bar{\nu_e} \rightleftharpoons n+e^+$ e $n \rightleftharpoons p+e^-+\bar{\nu_e}$. A proporção entre prótons e neutrons é obtida a partir da distribuição de Boltzmann. O resultado é:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{Q}{k_B T}} \quad \text{onde} \quad Q = (m_n - m_p)c^2 \tag{5.1}$$

A taxa das reações que mantém o equilíbrio entre prótons e neutrons $\Gamma_{pe \rightleftharpoons n\nu}$ envolvem interações fracas entre os neutrinos e as outras partículas e, portanto, é proporcional a T^5 [19]. Quando a taxa de expansão do universo, dada por $H \propto T^2$, se torna maior que $\Gamma_{pe \rightleftharpoons n\nu}$, os neutrinos se desacoplam e a razão $\frac{n_n}{n_p}$ fica congelada (na verdade ainda há uma variação nessa razão devido ao decaimento dos neutrons, via interação fraca). Após esse desacoplamento, que ocorre numa temperatura em torno de $0,8MeV$, a maior parte dos nêutrons passa a formar os núcleos de He. Se houver uma alteração nesse valor, a razão $\frac{n_n}{n_p}$ se modifica, resultando numa abundância de He, no final da nucleossíntese, sensivelmente diferente em relação aos outros elementos leves, comprometendo assim o acordo com as estimativas da composição bariônica do universo.

O ponto crucial nessa questão é o fator de proporcionalidade entre T^2 e o parâmetro de Hubble. Esse fator depende dos campos constituintes da

radiação através do parâmetro g_{ef} definido na expressão (1.79). Se além de fótons, dos pares elétron-pósitron e das três famílias de neutrinos existirem outros campos, por exemplo, mais uma família de neutrinos, uma radiação gravitacional de fundo ou mesmo um campo magnético primordial, a relação entre temperatura e H se modifica. Com isso, os neutrinos se desacoplam numa temperatura diferente de $0,8MeV$, alterando a proporção $(\frac{n_n}{n_p})$ e comprometendo o sucesso das previsões teóricas. A determinação da razão n_n/n_p, que permite encontrar o valor limite de g_{ef}, é calculada a partir das estimativas observacionais da densidade numérica de ^4He no final da nucleossíntese.

A questão da densidade de energia limite que pode ser acrescentada ao universo primordial é muitas vezes expressa a partir do número de famílias de neutrinos N_ν. Um campo existente antes do tempo χ_{ns} contribui para o parâmetro g_{ef} e pode ser representado como se fosse um número efetivo de famílias neutrinos, além das três do modelo padrão. No artigo de D. N. Schramm e Michael S. Turner [74], N_ν é estimado no intervalo $3 \leq N_\nu < 3,7$. Com alguns cálculos triviais, M. Maggiore [75] obtém a densidade de energia limite (ρ_{lim}) de um campo bosônico extra, em função de N_ν e da densidade de energia dos fótons (ρ_γ), no tempo χ_{ns} correspondente à temperatura $T_{ns} \simeq 1MeV$:

$$\frac{\rho_{lim}(\chi_{ns})}{\rho_\gamma(\chi_{ns})} = \frac{7}{8}(N_\nu - 3) \tag{5.2}$$

O valor de N_ν limitado pela nucleossíntese é sujeito a várias fontes de erro. A dificuldade consiste em estimar, a partir da densidade atual de ^4He o percentual que foi sintetizado nas estrelas ao longo da evolução do universo, e a quantidade real de ^4He que tem origem primordial.

Segundo M. Maggiore num artigo de 2000, [75], o limite máximo de N_ν deve estar entre 3,04 e 5. Sendo mais provável $N_\nu < 4$. Este dado está compatível com o limite $N_\nu < 3,7$ da referência [74] de 1998. No artigo de

Giovannini [73] de (2004), a densidade de energia limite que pode ser acrescida ao universo primordial é expressa diretamente em função da densidade de energia dos neutrinos, $\rho_{lim} < 0,27\rho_{\nu}$, o que é equivalente a $N_{\nu} < 3,8$.

O valor adotado será o menos restritivo, $N_{\nu} < 3,8$, logo,

$$\rho_{lim}(\chi_{ns}) < 0,7\rho_{\gamma}(\chi_{ns}) \tag{5.3}$$

Mas $\rho_{\gamma}(\chi_{ns})$ é calculada de forma trivial substituindo $g_{\gamma} = 2$ e $k_B T_{ns} = 1MeV$ na expressão a seguir:

$$\rho_{\gamma}(\chi_{ns}) = g_{\gamma}\frac{\pi^2(k_B T_{ns})^4}{30(\hbar c)^3} \simeq 1,372\cdot 10^{25}\frac{J}{m^3} \quad \Rightarrow \quad \rho_{lim} \simeq 9,6\cdot 10^{24}\frac{J}{m^3} \tag{5.4}$$

O limite dado por esse método, aplicado diretamente sobre a densidade de energia de um campo magnético (ρ_B), gerado antes da nucleossíntese, já fornece um importante limite à intensidade do campo magnético remanescente na época da formação de estruturas.

Considerando $\rho_B(\chi_{ns}) = \rho_{lim}(\chi_{ns})$ na expressão (3.71), obtém-se:

$$\rho_B(\chi_{ns}) < 9,6\cdot 10^{24} m^{-3} J \quad \Rightarrow \quad B_{(L)}(\chi) < \frac{1,0\cdot 10^{-16} Gauss}{a(\chi)^2} \tag{5.5}$$

O valor da intensidade do campo magnético semente $B_{(L)}$, no início da formação das galáxias, avaliado no tempo atual, apresenta um valor máximo de $1,0\cdot 10^{-16} Gauss$.

Um campo semente com esse valor não é suficiente para gerar campos magnéticos da ordem de alguns μG, observados nas galáxias, através do mecanismo de contração adiabática. No entanto, os modelos de dínamo são capazes de amplificar campos semente da ordem de $10^{-16} G$ e gerar campos magnéticos de larga escala da ordem de μG ou até dezenas de μG, com bastante folga.

Caso a densidade de energia das ondas gravitacionais, induzida pelo campo magnético, seja considerada, o limite sobre $B_{(L)}$ torna-se várias ordens

de grandeza mais restritivo:

$$\rho_{lim} > \rho_B(\chi_{ns}) + \rho_G(\chi_{ns}) = \rho_B(\chi_{ns}) \left\{ 1 + 6,4 \cdot 10^{116} \frac{[\rho_B(\bar{\chi}_{ns})]}{m^{-3}J} \left(\frac{m}{\chi_0} \right)^8 \right\} \tag{5.6}$$

Mas a densidade $\rho_B(\chi_{ns})$ é no mínimo algumas ordens de grandeza menor que $\rho_G(\chi_{ns})$. Logo a desigualdade (5.6) pode ser reescrita como:

$$\rho_{lim} > 6,4 \cdot 10^{116} \left[\frac{\rho_B(\bar{\chi}_{ns})}{m^{-3}J} \right]^2 \left(\frac{m}{\chi_0} \right)^8 \frac{J}{m^3} \tag{5.7}$$

A densidade de energia $\rho_B(\chi_{ns})$ é parcialmente dissipada devido à viscosidade do plasma e resulta num campo magnético $B_{(L)}(\chi)$ após o período do desacoplamento, conforme a eq.(3.71). Ao considerar a expressão de $\rho_B(\chi_{ns})$ em (5.7), obtém-se:

$$\frac{B_{(L)}(\chi)}{Gauss} < \frac{3,7}{a(\chi)^2} \left(\frac{\chi_0}{10^{26}m} \right)^2 \qquad \text{para} \quad \chi > \chi_{dec} \tag{5.8}$$

O limite dado em (5.8) pode ser expresso em termos do tempo t_b, em que ocorre a transição entre o ricochete e a era da radiação, ou em função da temperatura T_b, do universo, neste tempo:

$$\frac{B_{(L)}(\chi)}{Gauss} < \frac{9,3 \cdot 10^{-17}}{a(\chi)^2} \left(\frac{t_b}{s} \right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{B_{(L)}(\chi)}{Gauss} < \frac{2,7 \cdot 10^{-16}}{a(\chi)^2} \left[\frac{MeV}{k_B T_b (g_{ef})^{\frac{1}{4}}} \right]^2 \tag{5.9}$$

O valor máximo para tempo deve ser $t_b < 0,01s$ e o valor mínimo de T_b vale $k_B T_b \simeq 10MeV$. O fator g_{ef} é avaliado na temperatura T_b. Esses valores correspondem a um campo máximo da ordem de $B_{(L)} < [10^{-18}/a(\chi)^2]Gauss$.

A seguir há o gráfico do valor limite de $\frac{a^2 B_{(L)}}{Gauss}$ em função de $\frac{t_b}{s}$ e de $\frac{k_B T_b (g_{ef})^{\frac{1}{4}}}{MeV}$:

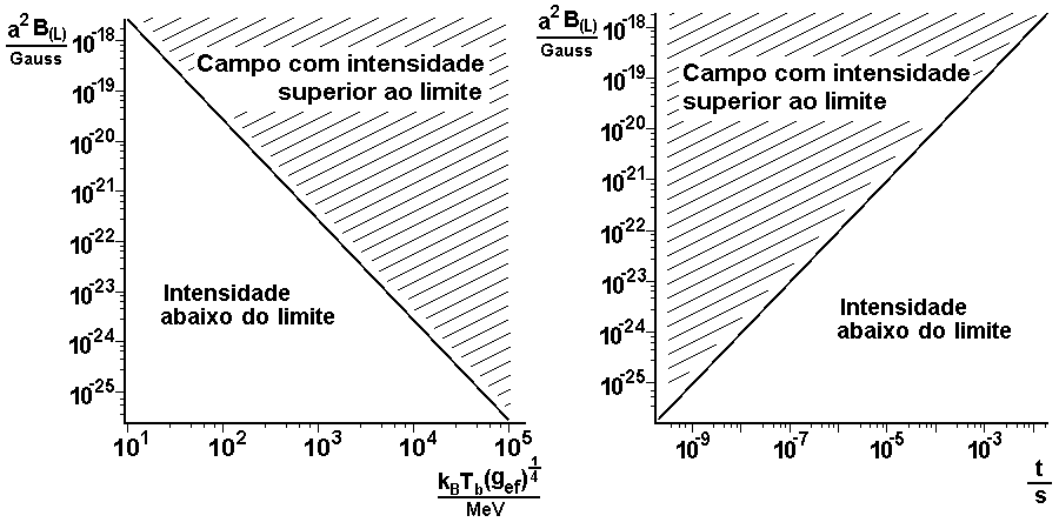

Figura 5.1: Função $a^2 B_{(L)}(T_b)$

Capítulo 6

Conclusões

A atenuação das oscilações MHD e, por conseguinte, do campo semente, desempenha um papel fundamental no estudo dos campos magnéticos de larga escala. Em razão do número de onda de corte, k_D, decrescer com o tempo, o espectro de potência na época da formação das estruturas fica bastante estreito; o que é interessante, pois o comprimento de coerência é proporcional a ${k_D}^{-1}$ e não pode ser menor que $1Mpc$.

O trabalho desenvolvido mostrou que, se um campo semente primordial tiver sido gerado durante o ricochete, a restrição à sua intensidade passa a depender do tempo de transição χ_b (ou da temperatura T_b).

A densidade de energia das perturbações gravitacionais tem como fonte o campo magnético e surge junto com ele no ricochete, após χ_b a radiação gravitacional não é mais alimentada. Devido à constante de acoplamento $\kappa = 8\pi G/c^4$ ser muito pequena, a densidade $\rho_G(\chi_b)$ é bem menor que $\rho_B(\chi_b)$ logo após o término da geração. No entanto, entre o tempo χ_b e o tempo da nucleossíntese χ_{ns}, ocorreu uma forte atenuação do campo magnético devido à viscosidade do plasma, conforme foi discutido no capítulo 2. Quanto maior

for a temperatura T_b, maior será o intervalo $\chi_{ns} - \chi_b$ e, portanto, maior a atenuação do campo magnético. Uma vez que ρ_G não sofre os efeitos dissipativos do plasma, a densidade $\rho_B(\chi_{ns})$ torna-se progressivamente menor que $\rho_G(\chi_{ns})$ na nucleossíntese, conforme o aumento de T_b. Essa é a razão da dependência do gráfico (5.1) e da expressão (5.9) com a temperatura T_b.

O modelo desenvolvido evidenciou que, embora a nucleossíntese constitua um forte vínculo aos campos semente de origem primordial, é possível contornar essa barreira em modelos cuja atenuação devido à viscosidade não seja forte o suficiente para tornar a densidade ρ_G extremamente mais alta que ρ_B, desde que não existam perturbações gravitacionais oriundas de uma fonte que não seja o campo $\vec{B}$. Se houver uma densidade de ondas gravitacionais ρ_{G0} com outra origem, esta deve contribuir com a taxa de expansão do universo, além da densidade ρ_G de origem magnética. Efetivamente qualquer fonte extra de energia na nucleossíntese torna os limites calculados mais rigorosos e pode até mesmo inviabilisar qualquer modelo de geração primordial de campo magnético semente.

O modelo desenvolvido nessa tese é competitivo e apresenta a vantagem de gerar um campo magnético primordial com características adequadas, num universo não singular. Mas pode ainda ser enriquecido com o cálculo das perturbações gravitacionais que possam ter surgido durante o ricochete.

A pesquisa da teoria da gravitação envolvendo testes com respeito à natureza geométrica do espaço tempo e do acoplamento da gravitação com o eletromagnetismo é de fundamental importância não apenas para a consolidação da tese proposta, mas principalmente para a cosmologia e a física básica.

Referências Bibliográficas

[1] J. V. Narlikar - An Introduction to Cosmology - *Cambridge University Press*, 2002.

[2] A. R. Liddle and D. H. Lyth - Cosmological Inflation - *Cambridge University Press*, Cambridge, 2000.

[3] V. Mukhanov - Physical Foundations of Cosmology - *Cambridge University Press*, Cambridge, 2005.

[4] Scott Dodelson - Modern Cosmology - *Academic Press*, San Diego, 2003.

[5] S. W. Hawking e G.F.R. Ellis, - The Large Scale Structure of Spacetime - *Cambridge University Press*, England, 1973.

[6] J. Ehlers, F. A. E. Pirani, A. Schild - General Relativity - Papers in Honour of J. L. Synge - Edited for the Royal Irish Academy by L O' Raifeartaigh - *Clarendon Press*, Oxford, 1972.

[7] Mario Novello - Dirac's Equation in a Weyl Space - *Nuovo Timento*, A 74 p954, 1969.

[8] Gilvan A. Alves - Tese de mestrado: Fótons não lineares: Uma solução cosmológica não singular - *CBPF*, Rio de Janeiro, 1986.

[9] L. A. de Oliveira - Tese: Acoplamento não-mínimo com a gravitação e espaços de Weyl integráveis - *CBPF*, Rio de Janeiro, 1988.

[10] M. Novello, L. A. Oliveira, J. M. Salim, E. Elbaz - Geometrized Instantons and the Creation of the Universe - *Int. J. Mod. Phys.* D, **1** 641, 1993.

[11] J. M. Salim, S. L. Sautú - Gravitational theory in Weyl Integrable Spacetime - *Class. Quantum Grav.*, **13**, 353-360, 1996.

[12] H. P. de Oliveira, J. M. Salim, S. L. Sautú - Non singular inflationary cosmologies in Weyl Integrable Geometry - *Class. Quantum Grav.*, **14**, 2833-2843, 1997.

[13] J. C. Fabris, J. M. Salim, S. L. Sautú - Inflationary cosmological solutions in Weyl Integrable Geometry - *Mod. Phys. Lett.* A, Vol.13, N^o.12, 953-959, 1998.

[14] R. Klippert, V. A. De Lorenci, M. Novello, J. M. Salim - The radiation era in scalar-tensor cosmology - *Phys. Lett.* B, 472, 27-32, 2000.

[15] J. M. Salim, N. Souza and S. E. P. Bergliaffa - Production of photons in a bouncing universe - *Class. Quantum Grav.*, **22**, 975-986, 2005.

[16] J. M. Salim, N. Souza, S. E. P. Bergliaffa and T. Prokopec - Creation of cosmological magnetic fields in a bouncing cosmology - *JCAP* 04 (2007) 011.

[17] H. Weyl - Space-Time-Matter - *Dover Publications Inc.*, New York, 1922.

[18] M. Novelo, N. Pinto, S. E. Bergliaffa (org.) - Programa Mínimo de Cosmologia - *ICRA Brasil / CBPF*, Rio de Janeiro, 2010.

[19] E. W. Kolb, M. S. Turner - The Early Universe - *Addison - Wesley Publishing Company*, 1994.

[20] T. Padmanabhan - Theoretical Astrophysics Vol.3 - *Cambridge University Press*, 2007.

[21] R. E. de Souza - Introdução à Cosmologia - *Edusp*, São Paulo, 2004.

[22] K. Nakamura, et al. - Particle Data Group - *Jour. of Phys.* G **37**, 075021, 2010.

[23] Richard C. Tolman - Relativity Thermodynamics and Cosmology - *University Press*, Oxford, 1950.

[24] C. Caprini, R. Durrer - Gravitational wave production: A strong constraint on primordial magnetic fields - *Phys. Rev.* D, Vol. 65, 023517, 2001.

[25] J. D. Jackson - Eletrodinâmica Clássica - *Guanabara Dois*, 2^a ed., 1982.

[26] T. Padmanabhan - Theoretical Astrophysics Vol.1 - *Cambridge University Press*, 2007.

[27] J. Ahonen, K. Enqvist - Eletrical condutivity in the early universe - *Phys. Rev.* B, 382, 40-44, 1996.

[28] D. Grasso e H Rubinstein - Magnetic Fields in the Early Universe - *Phys. Rept.*, 348 163-266, 2001.

[29] K. Subramanian, J. D. Barrow - Magnetohydrodynamics in the early universe and the damping of nonlinear Alfvén waves - *Phys. Rev.* D, Vol. 58, 083502, 1998.

[30] Steven Weinberg - Gravitation and cosmology - *John Wiley Sons, Inc.*, 1972.

[31] R. Beck - Cosmic Magnetic Fields: Observations and Prospects - arXiv:1104.3749v1 [astro-phCO] Apr 2011.

[32] R. Wielebinski, R. Beck (Eds.) - Cosmic Magnetic Fields - *Springer-Verlag*, 2005.

[33] Rafael da S. de Souza - Tese: Origem e Evolução dos Campos Magnéticos Cosmológicos - *USP* - Departamento de Astronomia, São Paulo, 2009.

[34] Chiara. Caprini - Tese: The observational consequences of primordial fields - *University of Oxford* - Department of Physics, 2004.

[35] L. M. Widrow - Origin of galactic and extragalactic magnetic fields - *Rev. Mod. Phys.*, *74* 775-823, [SPIRES], 2003.

[36] T. Padmanabhan - An Invitation to Astrophysics - *World Scientific*, 2006.

[37] K. Rohlfs, T. L. Wilson - Tools of Radio Astronomy - *Springer-Verlag*, 2006.

[38] K. Subramanian - Magnetizing the universe - Proceedings of Science MRU:071,2007 - arXiv:0802.2804v1 [astro-ph] Feb 2008.

[39] L. Biermann e A. Schluter - *Phys. Rev.*, 82:863, 1951.

[40] S. A. Colgate e H. Li - The magnetic fields of the universe and their origin - arXiv:astro-ph/0001418, 2000.

[41] O. D. Miranda, M. Opher and R. Opher - Seed magnetic fields generated by primordial supernova explosions - arXiv:astro-ph/9808161v1 Aug 1998.

[42] S. Matarrese, S. Mollerach, A. Notari and A. Riotto - Large-scale magnetic fields from density perturbations - *Phys. Rev.* D, Vol.71, 043502, 2005.

[43] K. Takahashi, K. Ichiki, H. Ohno and H. Hanayama - Magnetic field generation from cosmological perturbation - *Phys.Rev.Lett.*, 95, 121301, 2005.

[44] K. Ichiki, K. Takahashi, H. Ohno, H. Hanayama and N. Sugiyama - Cosmological Magnetic Field: a fossil of density perturbations in the early universe - *Science*, Volume 311, Issue 5762, pp. 827-829, 2006.

[45] R. S. Souza, R. Opher - The Origin of Magnetic Fields in Galaxies -*Phys. Rev.* D, Vol.81, 067301, 2010.

[46] J. Ahonen, K. Enqvist - Magnetic field generation in first order phase transition bubble collisions -*Phys. Rev.* D, Vol.57, 664-673, 1998.

[47] M. S. Turner, L. M. Widrow - Inflation-produced, large-scale magnetic fields - *Phys. Rev.* D, Vol.37, N^o.10, 2743-2754, 1988.

[48] B. Ratra - Cosmological seed magnetic field from inflation - *Astrophys. J.*, 391 L1, 1992.

[49] R. Emami, H. Firouzjahi, M. S. Movahed - Inflation from Charged Scalar and Primordial Magnetic Fields? - *Phys. Rev.* D, 81:083526, 2010 - arXiv:0908.4161.

[50] Tomislav Prokopec - Cosmological magnetic fields from photon coupling to fermions and bosons in inflation - *HD-THEP-04-7*, arXiv:astro-ph/0106247, 2001.

[51] A. D. Dolgov - Breaking of conformal invariance and electromagnetic field generation in the universe - *Phys. Rev.* D, Vol.48, 2499, 1993.

[52] Tomislav Prokopec, Ewald Puchwein - Nearly minimal magnetogenesis - *HD-THEP-04-7*, arXiv:astro-ph/0403335v1 14 Mar 2004.

[53] A. L. Maroto - Primordial magnetic fields from metric perturbations - *Phys. Rev.* D, Vol.64 083006, 2001.

[54] E. Calzetta, A. Kandus e F. Mazzitelli - Primordial magnetic fields induced by cosmological particle creation - *Phys. Rev.* D, Vol.57, 7139, 1998.

[55] D. Lemoine e M. Lemoine - Primordial magnetic fields in string cosmology - *Phys. Rev.* D, Vol.52, N^o.4, 1955-1962, 1995.

[56] K. Bamba e J. Yokoyama - Large-scale magnetic fields from inflation in dilaton electromagnetism - *Phys. Rev.* D, Vol.69, 043507, arXiv:astro-ph/0310824 (2004).

[57] T. Damour, A. M. Polyakov, - The String Dilaton and a Least Coupling Principle - *Nucl. Phys.* B **423** 532, [SPIRES] [hep-th/9401069], 1994.

[58] J. M. Salim, S. L. Sautú, R. Martins - Dilaton eletromagnetic Bianchi-I cosmologies - *Class. Quantum Grav.*, **15**, 1521-1526, [SPIRES], 1998.

[59] M. Gasperini, M. Giovannini, G. Veneziano - Primordial magnetic fields from string cosmology - *CERN-TH/95-85*, arXiv:hep-th/9504083v1 17 Apr 1995.

[60] A. Ronveaux, F. M. Arscott, S. Yu. Slavyanov, D. Schmidt, G. Wolf, P. Maroni and A. Duval - Heun's Differential Equations - *Oxford University Press*, New York, 1995.

[61] Léa Jaccoud and Bartolomeu D. B. F. - On Certain Solutions for Confluent and Double-Confluent Heun Equations - *J. Math. Phys.* **49** 083508, 2008.

[62] Robert S. Maier - The 192 Solutions of the Heun Equation - arXiv:math/0408317v2 [math.CA], Mar. 2006.

[63] N. D. Birrell and P. C. W. Davies - Quantum fields in curved space - *Cambridge University Press*, New York, 1999.

[64] W. Greiner - Quantum Mechanics - Special Chapters - *Springer - Verlag*, Alemanha, 1998.

[65] R.Durrer and C. Caprini - Primordial Magnetic Fields and Causality - *JCAP* 0311 (2003) 010.

[66] L. Mandel, E. Wolf - Optical coherence and quantum optics - *Cambridge University Press*, New York, 1995.

[67] Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, e D. D. Sokoloff - Magnetic Fields in Astrophysics - *Gordon and Breach*, New York, 1983.

[68] R. M. kulsrud, E. G. Zweibel - *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 046901, 2008.

[69] A. Brandenburg, K. Subramanian - *Phys. Rept.*, 417:1-209, 2005 - arXiv:astro-ph/0405052

[70] C. Caprini and R.Durrer - Gravitational waves from stochastic relativistic sources: primordial turbulence and magnetic fields - *Phys.Rev.* D74:063521, 2006 - arXiv:astro-ph/0603476.

[71] R. Durrer, P. G. Ferreira, and T. Kahniashvili - Tensor Microwave Anisotropies from a Stochastic Magnetic Field - *Phys. Rev.* D, Vol.61, 043001, 2000 - arXiv:astro-ph/9911040.

[72] L. Landau, E. Lifchitz - Teoria do campo - *Editora Mir.*

[73] M. Giovannini - The Magnetized Universe - *Int.J.Mod.Phys.* D, 13 (2004) 391-502 - arXiv:astro-ph/0312614

[74] David N. Schramm and Michael S. Turner - Big-Bang Nucleosynthesis enters the precision era - Rev. Mod. Phys. 70, 303-318, 1998 - arXiv:astro-ph/9706069v1 Jun. 1997.

[75] M. Maggiore - Gravitational Experiments and Early Universe Cosmology - *Phys. Rept.*, Vol. 331, 283-367, 2000.

[76] C. Caprini - Limits for primordial magnetic fields - Proceedings of the 25th Texas Symposium, 2010 - arXiv:1103.4060v1.

[77] R. Durrer - Cosmic Magnetic Fields and the CMB - *NewAstron.Rev.* 51:275-280, 2007 - arXiv:astro-ph/0609216v1.