

TESE DE  
DOUTORADO

**Cálculo Perturbativo Preditivo:  
Aspectos Dimensionais da  
Consistência do Cálculo Perturbativo  
em TQC's e das Anomalias**

MARCUS VINICIUS SNOVARSKI FONSECA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF

RIO DE JANEIRO, 10 DE MAIO DE 2012

# Dedicatória

*Em memória de minha mãe Madalena Snovarski.*

# Agradecimentos

Agradeço aos Profs. Orimar Antônio Battistel, José A. Helajel-Neto, Alexander Smith, Sebastião Alves (Tião) e Antônio Accioly por todo o companheirismo, estímulo, paciência e pelos ensinamentos.

Agradeço à todos os familiares que torceram por mim ao longo desta caminhada. Em especial ao meu pai e amigo Luiz Fonseca que sem querer me forneceu a motivação inicial para a minha dedicação à Física. A minha mãe Madalena Snovarski, grande apoiadora durante minha graduação. Também agradeço aos meus irmãos Luis Gustavo e Marcelo Fonseca pelo companheirismo. Agradeço a minha noiva Greice Maia por todo apoio, carinho e incentivo na busca da minha realização profissional.

Agradeço ao CNPq pelo financiamento do meu Doutorado, sem o qual dificilmente o teria completado, e ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) pela oportunidade oferecida, por todo o apoio e pela confiança.

# Resumo

Embora tenhamos à disposição uma variedade de métodos para manipular e calcular amplitudes perturbativas divergentes é possível dizer que tais métodos, quando gerais não são completamente consistentes e quando consistentes não são gerais. Esta situação não é a desejada visto que gostaríamos de ter uma prescrição preditiva e consistente afim de promovermos investigações conclusivas no âmbito das Teorias Quânticas de Campos (TQC's). Tendo isso em mente, recentemente tem sido desenvolvida uma estratégia alternativa para manipular as divergências contidas nas amplitudes. Tal estratégia elimina, de um modo automático, todas as arbitrariedades intrínsecas ao cálculo perturbativo gerando resultados para as amplitudes que são consistentes com o conteúdo de simetria, em todas as teorias formuladas em todas as dimensões espaço-temporais renormalizáveis ou não. Ainda, as anomalias são descritas de um modo muito natural e em um cenário livre de ambiguidades.

No presente trabalho usamos a evolução formal da referida prescrição, originalmente denominada de Regularização Implícita, o qual nos referimos como Cálculo Perturbativo Preditivo, afim de investigar alguns problemas bastante gerais referentes aos cálculos perturbativos em TQC's. Primeiro consideramos a Eletrodinâmica Quântica na dimensão física  $D=1+3$  (EDQ<sub>4</sub>), onde um bem detalhado e completo estudo é realizado. Importantes aspectos da EDQ<sub>3</sub> e EDQ<sub>5</sub> são também considerados. Além destes tópicos, apresentamos duas investigações originais sobre o problema das anomalias: a existência de anomalias em amplitudes finitas através da investigação da amplitude AVV no espaço-tempo  $D=1+1$ , e, finalmente, a anomalia AVVV no espaço-tempo  $D=1+5$ . As conclusões

extraídas das investigações realizadas indicam que a estratégia proposta exhibe a consistência e generalidade desejada. A prescrição apresentada ainda é mais simples que aquelas tradicionais, não modifica as amplitudes nos passos intermediários e não requer a avaliação de integrais divergentes. As arbitrariedades são removidas e as simetrias preservadas nas amplitudes não anômalas. Nas amplitudes anômalas as inevitáveis violações emergem dos cálculos de um modo natural sem as ambiguidades desenvolverem algum papel relevante. As investigações realizadas na amplitude anômala AVV representam uma contribuição para clarear a questão, ainda em aberto, sobre a existência ou não de anomalias em amplitudes perturbativas finitas.

# Abstract

Although nowadays we have at our disposal many methods to manipulate and calculate perturbative divergent amplitudes it is possible to say that such a methods, when they are general they are not consistent and when they are consistent they are not general. The situation is not the desirable one since we would like to get a predictive and general tool in order to do conclusive investigations in a so wide as possible context in QFT. Having this in mind, in recent years, an alternative strategy to handle divergences has been proposed and developed. Such a strategy eliminates, in an automatic way, all the arbitrariness intrinsic to the perturbative calculations as well as produces amplitudes which are consistent with its symmetry content, in all theories formulated in all space-time dimensions renormalizable or not. In addition the anomalies are described in a very natural way in a free of ambiguities scenario.

In the present work we use a formal evolution of the referred method, originally denominated as Implicit Regularization scheme, which we refer as Predictive Perturbative Calculations, in order to investigate some problems covering a large lack of situations in QFT relative to the perturbative calculations. First we consider the quantum electrodynamics formulated in the physical  $D=3+1$  space-time dimension (  $\text{QED}_4$ ), where a very detailed and complete study is performed, and important aspects of  $\text{QED}_3$  and  $\text{QED}_5$  are considered too. In addition we considered two original investigations about the problem of anomalies: the existence of anomalies in finite amplitudes, by investigating the single axial AVV triangle in  $D=1+1$  space-time dimension, and, finally, the single axial box anomaly in  $D=5+1$  space-time dimension. The conclusions extracted from the performed

investigations indicate that the proposed strategy exhibit the desirable consistency and generality. The prescription is simplest than the traditional ones, does not modify the amplitudes in intermediary steps of the calculations and does not require evaluation of divergent integrals having physical quantities involved. The arbitrariness are removed and the symmetries are preserved in the non anomalous amplitudes. In the anomalous amplitudes the unavoidable violations emerge from the calculations in a natural way without having to consider a role for ambiguities. The investigation performed in the single axial AVV triangle represents a contribution to clarify a very old open question in the theme: the existence or not of anomalies in finite perturbative amplitudes.

# Conteúdo

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	v
Índice . . . . .	vii
<b>1 Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2 Eletrodinâmica Quântica em <math>D=1+3</math></b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Modelo e notação . . . . .	10
2.3 Processos relevantes . . . . .	11
2.3.1 Propagação do elétron na presença da interação . . . . .	12
2.3.2 Propagação do Fóton na presença da interação . . . . .	14
2.3.3 Interação Elétron-Fóton . . . . .	15
2.3.4 Decaimento fotônico do fóton . . . . .	16
2.4 Vínculos de Consistência . . . . .	17
2.5 Estratégia para manipulações e cálculos de amplitudes contendo divergências em TQC's . . . . .	19
2.6 Solução das amplitudes físicas puramente fermiônicas . . . . .	22
2.6.1 Função de um ponto vetorial . . . . .	22
2.6.2 Função de dois pontos bivetorial . . . . .	24

2.6.3	Função de três pontos trivetorial . . . . .	27
2.7	Solução das amplitudes físicas contendo propagadores bosônicos . . . . .	31
2.7.1	Auto-energia do elétron . . . . .	31
2.7.2	Correção de Vértice . . . . .	36
2.8	Verificação das Relações entre Funções de Green . . . . .	41
2.9	Relações de Simetria . . . . .	47
2.9.1	Verificação das relações de simetria . . . . .	49
2.10	Renormalização e comportamento assintótico da Eletrodinâmica Quadri-Dimensional . . . . .	54
2.11	Comentários finais . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Eletrodinâmica Quântica em Dimensões Ímpares</b>	<b>59</b>
3.1	Introdução . . . . .	59
3.2	Modelo e Processos de Interesse . . . . .	61
3.3	Cálculo das amplitudes físicas . . . . .	63
3.3.1	Função de um ponto vetorial . . . . .	64
3.3.2	Função de dois pontos bivetorial . . . . .	66
3.3.3	Função de Green de três pontos trivetorial . . . . .	68
3.3.4	Auto-energia do elétron . . . . .	71
3.3.5	Correção de vértice . . . . .	73
3.4	Verificação das Relações entre Funções de Green . . . . .	77
3.5	Relações de Simetria . . . . .	82
3.6	EDQ em $D=1+4$ . . . . .	84
3.7	Comentários finais . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Anomalias Finitas em <math>D=1+1</math></b>	<b>92</b>
4.1	Introdução . . . . .	92
4.2	Modelo de estudo e definição da notação . . . . .	97
4.3	Amplitudes Triangulares . . . . .	100

4.4	Relações entre funções de Green . . . . .	102
4.5	Consistência no cálculo perturbativo em $D=1+1$ . . . . .	104
4.6	Amplitude anômala AV . . . . .	108
4.7	Amplitudes Triangulares . . . . .	113
4.8	Relações entre Funções de Green . . . . .	115
4.9	Análise dos resultados obtidos e a anomalia finita AVV . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Anomalias em <math>D=1+5</math></b>	<b>123</b>
5.1	Introdução . . . . .	123
5.2	Modelo, notação e definições . . . . .	124
5.3	Amplitude AVVV em $D=1+5$ . . . . .	129
5.4	Vínculos de Consistência . . . . .	132
5.5	Aspectos gerais da anomalia AVVV em $D=1+5$ . . . . .	133
5.6	Cálculo explícito das amplitudes . . . . .	139
5.7	Verificação das relações entre funções de Green . . . . .	148
5.8	Comentários finais . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>154</b>

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A elaboração de uma Teoria Quântica de Campos (TQC) passa invariavelmente por três etapas. A primeira é referente à escolha dos campos que estarão presentes na teoria tendo como base as características das partículas das quais pretendemos obter a fenomenologia. A segunda diz respeito ao modo como estes campos, ou partículas, irão interagir, o que ocorre através da escolha do(s) grupo(s) de simetria que guiará(ão) a construção dos termos de interação de modo que tenhamos combinações invariantes sob o(s) grupo(s) escolhido(s). Este procedimento gera as chamadas Teorias Clássicas de Campos (TCC). O próximo passo seria dar um caráter quântico à teoria formulada, o que ocorre através da adoção de algum procedimento de quantização.

A escolha dos campos, do grupo de simetria e a construção dos termos invariantes permitem que escrevamos o funcional densidade de Lagrangiana, ou simplesmente Lagrangeano, para o modelo estudado. A quantização da teoria *pode ser* realizada através do estabelecimento das regras de Feynman lidas diretamente deste funcional. O conhecimento das regras de Feynman permite-nos determinar a expressão matemática, a amplitude física perturbativa, referente a um dado processo físico a uma ordem perturbativa escolhida. De mão destas amplitudes bastaria procedermos seu cálculo afim de obtermos a fenomenologia associada ao modelo proposto [1].

Porém a prescrição acima nos conduz a um Lagrangeano que é sempre escrito como

produtos de campos tomados no mesmo ponto do espaço-tempo, sendo esta localidade a maneira mais fácil de evitar problemas com princípios da Relatividade (uma possível interação instantânea a distância). Tais campos são matematicamente entendidos como distribuições, e, produtos de distribuições tomadas em um mesmo ponto não são, a priori, matematicamente bem definidos. Assim o provável surgimento de problemas na obtenção e interpretação da fenomenologia do modelo pode ser previsto na essência da sua construção.

Os problemas acima mencionados de fato existem. Ao procedermos o cálculo das amplitudes físicas advindas da utilização das regras de Feynman vemos que alguns processos são escritos em termos de amplitudes com caráter divergente, o que tornaria o resultado obtido destituído de significado físico. A fim de contornar estas dificuldades presentes na formulação das teorias foram adicionados mais dois passos na obtenção da fenomenologia de uma TQC, os processos de *regularização* e *renormalização*.

O processo de regularização, sob a ótica de um tratamento perturbativo das TQC's, é um mecanismo matemático utilizado para separar a parte divergente de uma amplitude (destituída de significado físico) da sua parte finita (associada a fenomenologia). Esta identificação das divergências nas amplitudes tornaria possível absorvê-las no chamado processo de renormalização da teoria através da redefinição dos parâmetros contidos no modelo (parâmetros nus utilizados na construção do Lagrangeano). Estes dois passos aparentemente contornariam as dificuldades encontradas na solução perturbativa de uma TQC. Porém surgiram alguns novos problemas que impediam a interpretação clara dos resultados obtidos. Na manipulação destas estruturas divergentes surgem arbitrariedades representadas por parâmetros não físicos e estes parâmetros não físicos figuravam nos resultados finais obtidos para as amplitudes. Além de perdermos totalmente o caráter preditivo que poderíamos obter da solução de um modelo, em alguns casos estas ambiguidades impossibilitaram uma interpretação coerente dos resultados obtidos através do tratamento perturbativo das TQC's.

Porém nem toda a comunidade física olhou com maus olhos para estas arbitrariedades.

Em vários estágios do avanço do conhecimento das TQC's estas "liberdades" foram usadas para ajustar resultados ou para justificar comportamentos não esperados das soluções de algumas amplitudes. O maior exemplo desta aplicação foi na busca da interpretação das violações das identidades de Ward, as chamadas anomalias [2], [3], [4].

Ao longo dos anos, muitos métodos foram empregados na tentativa de contornar estas dificuldades. Alguns destes métodos se mostraram consistentes no tratamento de uma classe de modelos e inconsistentes no tratamento de outros. Além disso, observou-se que diferentes métodos tratavam de formas diferentes as arbitrariedades existentes na solução perturbativa de uma TQC e que um mesmo método "precisava" adotar diferentes interpretações para as mesmas arbitrariedades para se mostrar consistente [5]. Isto implica que os resultados do cálculo das amplitudes estão, de certo modo, associados à escolha da prescrição adotada para a manipulação das divergências, o que se torna desastroso do ponto de vista de consistência e universalidade das TQC's caso estas arbitrariedades desempenhem algum papel relevante no contexto das teorias formuladas. Ainda, se o resultado final das amplitudes físicas depende de parâmetros arbitrários e que não podem ser determinados *a priori*, então estes resultados são destituídos de poder de predição de fenômenos ainda desconhecidos, perdendo a física teórica a sua maior beleza.

Mesmo com estes tropeços conseguiu-se solucionar os problemas surgidos na avaliação das amplitudes envolvidas na construção da Eletrodinâmica Quântica Quadridimensional (EDQ<sub>4</sub>). O resultado obtido, ao contrário do que se esperaria frente à sorte de problemas encontrados, mostrou a maior concordância entre predição teórica e a confirmação experimental já observada na história da física moderna [6]. Assim a TQC adquiriu o *status* de mais importante formalismo teórico para o estudo dos fenômenos das partículas elementares.

Porém, devido às limitações apresentadas pelos métodos de regularização é ainda de extremo interesse e necessidade a busca de uma prescrição de cálculo geral que trate sobre uma mesma ótica todas as amplitudes físicas e dê um significado único para as arbitrariedades nelas contidas, independente do ponto onde apareçam e do modelo do qual

façam parte, e que além destas características, possua um caráter universal de aplicabilidade, possibilitando uma interpretação consistente dos resultados obtidos na solução de qualquer TQC, independentemente da dimensão considerada ou das entidades matemáticas presentes na sua formulação.

Um exemplo da não universalidade e das limitações das usuais estratégias de cálculo que tem sido utilizadas está no estudo da EDQ<sub>3</sub> [7]. A mais famosa e bem conceituada estratégia de manipulação das divergências em TQC's, a Regularização Dimensional (RD) [8], possui restrições de aplicabilidade em tal dimensão. A saber, tal incompatibilidade não ocorre somente na dimensão em questão, mas sim em todas as dimensões espaço-temporais ímpares. Tal deficiência é da mesma sorte que aquela apresentada na avaliação das pseudo-amplitudes no estudo de modelos formulados em dimensões pares, porém naquela teoria o problema não se concentra somente em um conjunto isolado de amplitudes, mas faz parte de todas as amplitudes físicas de interesse [9]. Este problema de aplicabilidade não permite, por exemplo, o estudo de fenômenos em teorias formuladas na mais baixa dimensão extra, como a EDQ<sub>5</sub>, onde uma estratégia consistente de manipulação das divergências é ainda mais necessária devido ao elevado grau de divergência das amplitudes físicas. Esta extensão dimensional da EDQ<sub>4</sub> tem se tornado importante à medida que os experimentos no acelerador *Large Hadron Collider* (LHC) tem sido realizados na perspectiva de serem observados efeitos de dimensões extras [10].

Uma estratégia alternativa para o tratamento das divergências é também necessária caso queiramos estudar teorias e modelos que são bem definidos somente em uma dada dimensão, a dimensão física do modelo. Um exemplo onde isto ocorre é no tratamento de teorias supersimétricas onde a continuação analítica da dimensão de 4 para  $n$  leva a conflitos entre os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos implicando assim em uma quebra das relações de supersimetria.

Considerando toda a problematização existente na solução das amplitudes divergentes foi recentemente proposta uma estratégia alternativa às usuais prescrições de regularização. Esta prescrição, proposta e desenvolvida por O.A. Battistel [11], foi inicialmente

batizada de Regularização Implícita por não adotar, em etapa alguma do cálculo de uma amplitude divergente, um método de regularização explícito, ou seja, em momento algum é realizado o cálculo de alguma integral indefinida. Neste procedimento parte-se do ponto que há uma regularização implícita sobre as integrais divergentes que permite que os integrandos das mesmas sejam manipulados matematicamente. Sobre esta regularização são impostas somente condições muito gerais (que qualquer regularização consistente tem que satisfazer) para que tenhamos a preservação da linearidade e das simetrias apresentadas pelas integrais, tal como a simetria de Lorentz. Uma vez implicitamente regularizada, podem ser utilizadas convenientes igualdades matemáticas afim de separar a parte divergente de uma amplitude da sua parte finita. A parte divergente é escrita em termos de um conjunto de objetos divergentes e a parte finita é solucionada através das técnicas usuais de cálculo. Ao fim, analisam-se os objetos divergentes à luz da preservação da simetria de translação no espaço dos momentos e das simetrias contidas no Lagrangeano do modelo. Isto por sua vez cria as chamadas condições de consistência sobre os objetos divergentes básicos que nos conduzem à resultados livres de ambiguidades e que preservam as simetrias esperadas [12].

Nesta tese desenvolvemos investigações através da utilização de uma prescrição de cálculo que representa uma evolução natural da Regularização Implícita. Esta evolução foi conseguida observando-se que a adoção do regulador implícito é feita apenas para fins formais e que os mesmos resultados que são obtidos através desta regularização podem ser obtidos simplesmente através de uma conveniente redefinição das Regras de Feynman, porém agora sem a adoção em momento algum de qualquer tipo de regularização, implícita ou explicitamente. Assim, ficará claro que a regularização que por vezes figurou como uma escolha a ser feita para a solução das amplitudes divergentes não precisa mais ser adotada para quaisquer fins em cálculo perturbativo de TQC's.

Obviamente que qualquer nova proposta de cálculo de amplitudes divergentes deve reproduzir a fantástica concordância entre a previsão teórica e as evidências experimentais apresentadas pela Eletrodinâmica Quântica em quatro dimensões ( $EDQ_4$ ). Assim pode-

mos considerar a  $EDQ_4$  como um laboratório de testes para a avaliação da consistência de qualquer estratégia de cálculo para as amplitudes físicas perturbativas. Caso venhamos a encontrar a consistência esperada com uma nova prescrição estaremos aptos a aplicá-la a outros casos, ainda mais se a tal estratégia se mostrar mais limpa, clara e geral que as atualmente utilizadas. Além disto devemos considerar cada modelo de estudo como um teste de consistência, onde os resultados sempre deverão apresentar-se desvinculados de qualquer arbitrariedade, preservando assim o poder de predição do formalismo teórico, e todas as estruturas matemáticas semelhantes deverão ser interpretadas segundo uma mesma ótica.

Outros casos de interesse para a aplicação e demonstração das potencialidades de uma nova proposta de cálculo seriam inicialmente as extensões tri e pentadimensionais da  $EDQ$  visto que nestes dois modelos as usuais prescrições de cálculo das amplitudes físicas apresentam limitações de aplicabilidade.

Ao longo destes três estudos sempre estaremos enfatizando que as arbitrariedades inerentes ao tratamento perturbativo das  $TQC$ 's não desempenham nenhum papel relevante na interpretação dos resultados. Talvez este seja o ponto onde o presente trabalho mais se afasta daquilo que é difundido pela maioria da literatura das  $TQC$ 's [1]. Para sermos mais específicos, citamos o problema das violações das identidades de Ward. Na grande maioria dos livros a não verificação de todas as identidades de Ward associadas a uma amplitude física se deve ao fato de não ser possível realizarmos escolhas sobre as arbitrariedades/ambiguidades de modo que todas as identidades sejam preservadas. Já em outros livros encontramos as anomalias sendo justificadas com base no surgimento de termos de superfície quando são realizados shifts nas variáveis de integração das amplitudes divergentes que não satisfazem todas as suas respectivas Identidades de Ward. Justifica-se ainda que esta não verificação das identidades é devida a uma não implementação quântica das simetrias clássicas contidas no modelo [1], [2], [3]. Para mostrarmos que nenhuma destas visões de fato fornece uma explicação consistente e universal para a origem das anomalias consideraremos o problema das anomalias triangular  $AVV$  (vértices axial-vetor-vetor) em

$D=1+1$  e box de quatro pontos  $AVVV$  (vértices axial-vetor-vetor-vetor) em  $D=1+5$ .

Com base no acima exposto consideramos no capítulo 2 o primeiro modelo de estudo, a  $EDQ_4$ . Apresentamos detalhadamente os passos necessários para a solução das amplitudes divergentes de uma forma preditiva e sem a adoção de qualquer mecanismo de regularização. A ideia central do modo como vamos abordar o cálculo das amplitudes é bastante simples e intuitiva. Simples, pois apenas adotamos representações alternativas para os propagadores dos campos utilizados para a formulação do modelo. Tais representações nada mais são que adequadas identidades matemáticas. Intuitiva, pois adiamos ao máximo a integração sobre o momento irrestrito dos loops dos diagramas, uma vez que é justamente quando procedemos esta integração que surgem as divergências, assim nada mais direto do que realizar todas as manipulações necessárias nas amplitudes físicas antes de proceder tal integração. Se com estas simples medidas conseguirmos obter todos os resultados pertinentes a uma teoria (renormalização, resultados finitos e não ambíguos, comportamento assintótico, entre outros) se tornará claro que não é necessário que lancemos mão, em qualquer etapa da solução do modelo, de alguma prescrição de regularização explícita ou implícita. Este capítulo pode ser visto como uma apresentação dos passos inerentes a esta nova abordagem para o tratamento das divergências em TQC's.

No capítulo 3 passamos para o estudo da Eletrodinâmica Quântica em dimensões ímpares. Este capítulo mostra quanto geral é a estratégia utilizada no capítulo 2. Ao contrário do que ocorre com a utilização das usuais prescrições de tratamento das divergências, a solução da  $EDQ_3$  se torna mais simples do que o tratamento da  $EDQ_4$  com a utilização da nossa prescrição. Isto decorre diretamente de dois aspectos: o primeiro devido ao caráter geral da prescrição com que trataremos as divergências e segundo pelo fato de as divergências em  $D=1+2$  serem menos severas que em  $D=1+3$ . De mão destas facilidades conseguiremos mostrar claramente a geração de massa para o fóton [13] e o caráter finito da  $EDQ_3$ , explicitando como ocorrem os cancelamentos das divergências infravermelhas e ultravioletas no cálculo das amplitudes. Fechamos este capítulo mostrando alguns resultados já obtidos em  $D=1+4$ .

Dedicamos o quarto e o quinto capítulos ao estudo das anomalias. Este assunto é de nosso pronto interesse visto que na literatura existem interpretações controversas sobre a origem das violações das identidades de Ward. Embora controversas, todas as interpretações de alguma forma ou de outra se sustentam na existência das ambiguidades e das divergências contidas nas amplitudes para justificar tal comportamento. Veremos nestes capítulos como é possível realizarmos uma investigação, do ponto de vista perturbativo, sobre as anomalias mostrando que existe uma interpretação clara sobre este fenômeno que não está de forma alguma associada a existência de arbitrariedades no cálculo das amplitudes. Para isso consideraremos o problema da anomalia finita  $AVV$  em  $D=1+1$ . Se as amplitudes consideradas são finitas, então as mesmas são livres de arbitrariedades e desta forma as interpretações usuais acerca das violações das Identidades de Ward não podem ser aplicadas para a explicação do surgimento destas violações.

Por fim aplicamos as mesmas ideias acima no tratamento da amplitude anômala  $AVVV$  em  $D=1+5$  para mostrarmos que a explicação para as anomalias baseadas nas arbitrariedades/ambiguidades ou no caráter divergente das amplitudes não pode ser aceita mesmo quando aumentado o grau de divergência envolvido. Com estes estudos não restarão dúvidas sobre a incorreta interpretação que se tem dado as ambiguidades e arbitrariedades encontradas na construção e obtenção dos resultados das TQC's através dos usuais métodos de regularização.

No sexto capítulo ressaltamos as conclusões mais importantes obtidas ao longo da elaboração dos nossos estudos e apresentamos nossas perspectivas.

Em todos os capítulos seguintes a esta introdução geral estabelecemos uma pequena introdução mais detalhada do que se propõem em cada um dos deles. Após um desenvolvimento minucioso do assunto apresentamos um breve resumo das conclusões mais interessantes obtidas no capítulo. Este formato dá uma idéia da apresentação de uma série de artigos que foram elaborados durante o período de doutoramento.

# Capítulo 2

## Eletrodinâmica Quântica em $D=1+3$

### 2.1 Introdução

Neste capítulo consideraremos a Eletrodinâmica Quântica Quadridimensional ( $EDQ_4$ ) ao nível perturbativo  $1-loop$ . Os resultados correspondentes são bem conhecidos e evidentemente não se deve esperar obter novidades no conteúdo. Por outro lado, tendo em vista que utilizaremos uma nova estratégia para o tratamento das divergências das soluções perturbativas de TQC, é necessário mostrar que resultados consistentes e ganhos significativos na forma são obtidos. A  $EDQ_4$ , pelo que representa como modelo para teorias de *gauge* mais complexas, deve ser vista como um laboratório para testes de consistência de qualquer proposta para o tratamento das amplitudes perturbativas divergentes. O fato de os resultados pertinentes à  $EDQ_4$  serem bem conhecidos permite a imediata comparação do tratamento que utilizaremos com aqueles associados aos tradicionais. Neste sentido mostraremos que não será necessário a utilização ou até mesmo a menção de uma regularização em passos intermediários do processo de renormalização. Não será portanto necessário completar o cálculo de integrais de Feynman divergentes. Por outro lado os resultados que obteremos poderão, se desejado, ser mapeados naqueles correspondentes a métodos tradicionalmente utilizados na literatura para o mesmo fim. Neste aspecto a vantagem oferecida pelo método que utilizaremos reside na não existência de limitações

de aplicabilidade o que permite utilizá-lo em cenários onde os tradicionais não se aplicam ou não são consistentes. Os resultados são obtidos de uma forma clara, transparente e geral pois quando há escolhas arbitrárias as mais gerais são adotadas. Isto permite automaticamente a discussão a respeito do possível papel desempenhado pelas eventuais ambiguidades associadas. Por fim, além dos aspectos relacionados ao caráter divergente das amplitudes é parte importante do tratamento que utilizaremos uma sistematização eficiente para as partes finitas das mesmas, o que permite tratar amplitudes com grau de complexidade algébrica elevado de modo completamente analítico.

## 2.2 Modelo e notação

Consideremos um modelo contendo um campo fermiônico de spin 1/2 interagindo com um campo vetorial sem massa em um espaço-tempo quadridimensional para o qual a densidade de Lagrangiana é dada pelo funcional

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi - \bar{\Psi} (e\gamma^\mu A_\mu) \Psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} \zeta (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.1)$$

Na expressão acima o campo  $\Psi$  é um campo espinorial de Dirac, associado ao elétron, e  $A_\mu$  é o campo vetorial, associado ao fóton. As matrizes  $\gamma^\mu$  formam uma representação quadridimensional das matrizes de Dirac e  $\zeta$  é o parâmetro (arbitrário) de fixação do gauge.

Inicialmente, é importante notar que a contagem de potências para as amplitudes ao nível um *loop* revelam para o grau superficial de divergência

$$D = 4 - E_B - \frac{3}{2} E_F, \quad (2.2)$$

onde  $E_B$  e  $E_F$  são respectivamente o número de linhas externas bosônicas e fermiônicas.

Esta expressão nos mostra inicialmente que estamos tratando de uma teoria renormalizável (por contagem de potências) o que implica que será possível absorver as divergências das amplitudes perturbativas através de uma redefinição dos parâmetros (nus) utilizados para a construção do Lagrangeano. Além disso, da expressão acima, poderemos constatar que as auto-energias do elétron e do fóton e a correção de vértice da interação elétron-fóton são processos divergentes. Por fim, os diagramas contendo três e quatro fótons externos, com apenas propagadores fermiônicos internos, são também quantidades divergentes. Eles representam contribuições para o que seria o decaimento fotônico do fóton e o espalhamento elástico fóton-fóton, respectivamente. Tais divergências não poderiam ser absorvidas pelos termos presentes no Lagrangeano. O decaimento fotônico do fóton é um processo proibido segundo o grupo de simetria utilizado na construção do funcional (2.1) mas o diagrama correspondente é permitido. Obter naturalmente o cancelamento do processo de decaimento é um aspecto importante do tratamento das divergências presentes nestes diagramas. O diagrama contendo quatro linhas externas bosônicas, embora superficialmente divergente, deve ser naturalmente obtido finito em um tratamento consistente. No que se segue trataremos detalhadamente todas as amplitudes mencionadas ao nível um *loop*, com exceção daquela com quatro fótons externos. Embora os cálculos já tenham sido realizados a extensão das formas matemáticas obtidas torna proibitivo a exibição detalhada das mesmas no presente trabalho ao passo que a ausência destes resultados não causa prejuízo significativo á compreensão do que será exposto.

## 2.3 Processos relevantes

Uma vez estabelecidos os processos básicos aos quais dedicaremos nossa atenção, passamos para a construção das formas matemáticas correspondentes. Na linguagem do cálculo perturbativo isso deve ser feito através das regras de Feynman. Estas são extraídas diretamente do Lagrangeano (2.1).

Examinando a parte livre do referido funcional teremos para o propagador da partícula fermiônica carregando momento  $k$  e massa  $m$

$$iS(k) = \frac{i}{\not{k} - m}, \quad (2.3)$$

onde  $\not{k} = \gamma_\mu k^\mu$ .

Para o propagador do campo vetorial sem massa carregando momento  $k$  teremos

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{(k)^2} \left[ g_{\mu\nu} + (\zeta - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{(k)^2} \right]. \quad (2.4)$$

Finalmente para o vértice da interação do Lagrangeano da EDQ<sub>4</sub> teremos

$$-ie\gamma_\mu. \quad (2.5)$$

Com estes elementos, mais eventuais fatores combinatórios, tomada de traços e sinais globais, podemos estabelecer as formas matemáticas das amplitudes associadas aos processos básicos para os quais a contagem de potências revelou possibilidade de divergências.

### 2.3.1 Propagação do elétron na presença da interação

Consideremos inicialmente o processo elementar caracterizado pela presença de duas linhas externas fermiônicas, ou seja, a propagação do elétron na presença da interação. Para obter a expressão correspondente construímos, com os elementos das regras de Feynman, todos os diagramas contendo no máximo um *loop* que conectam os estados inicial e final. A amplitude correspondente será a auto-energia do elétron neste nível de aproximação. A série perturbativa para o processo está diagramaticamente representada pela figura (2.1).

A primeira contribuição representa a propagação livre do elétron (nível árvore). A segunda contribuição é devida à auto-energia do elétron por excitação de um fóton. Seguindo as regras de Feynman teremos para esta contribuição a expressão, para um valor

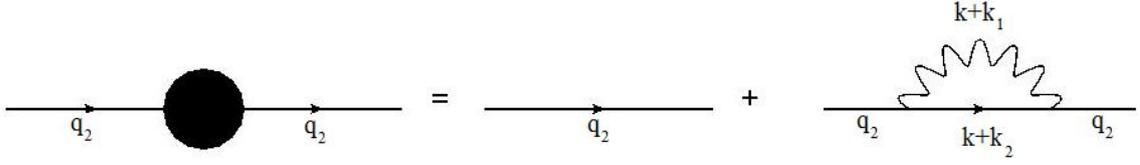


Figura 2.1: Expansão perturbativa a 1-loop da Auto-Energia do Elétron.

do momento não restrito pela conservação de energia e momento nos vértices,

$$\sigma^{ee}(q_2; m) = (-ie)^2 t^{ee}(k_1, k_2; m), \quad (2.6)$$

onde

$$t^{ee}(k_1, k_2; m) = \gamma_\mu \frac{1}{[(k+k_2) - m]} \gamma_\nu \left[ g^{\mu\nu} + (\zeta - 1) \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_1)^\nu}{(k+k_1)^2} \right] \frac{1}{(k+k_1)^2}. \quad (2.7)$$

Na expressão acima notemos primeiramente a adoção de rotulações arbitrárias para os momentos carregados pelas linhas internas do *loop*, tanto para a linha fermiônica como para a linha bosônica. Estas rotulações se fazem necessárias para que inicialmente não nos comprometamos com nenhuma escolha particular para o valor do momento das linhas internas dos loops e para que sejamos capazes de identificar, na expressão final de uma amplitude perturbativa, quais termos são potencialmente ambíguos referentes à escolha destes momentos indeterminados. Embora individualmente arbitrárias, estas rotulações devem obedecer às conservações de energia e momento em cada um dos vértices. No caso do presente processo, teremos

$$q_2 = k_2 - k_1. \quad (2.8)$$

Relações semelhantes irão surgir na avaliação de todos os processos de modo que qualquer diferença entre momentos arbitrários,  $(k_i - k_j)$ , sempre representarão momentos físicos. Porém a soma destes momentos internos será, evidentemente, uma quantidade arbitrária. Assim devemos esperar que tais arbitrariedades não desempenhem nenhum papel relevante na forma final das amplitudes físicas, devendo o resultado das mesmas

ser escrito somente em termos das diferenças entre estas rotulações arbitrárias, as quais representarão quantidades físicas.

Notamos também que na expressão (2.7) o momento  $k$  não está restrito, o que significa que cada valor para este representa uma contribuição para o processo. Deste modo a amplitude total é obtida tomando-se a soma sobre todos os valores deste momentos (integração) que representa a implementação da última regra de Feynman em amplitudes contendo *loops*. Nós, entretanto, não tomaremos a integração nesta etapa, por razões que ficarão claras mais adiante. Assim no contexto da estratégia que adotamos construímos inicialmente as amplitudes ao nível um *loop* para um valor do momento não restrito.

### 2.3.2 Propagação do Fóton na presença da interação

Este processo é caracterizado por duas linhas externas bosônicas. A série perturbativa até o nível um *loop* está representada diagramaticamente na figura:

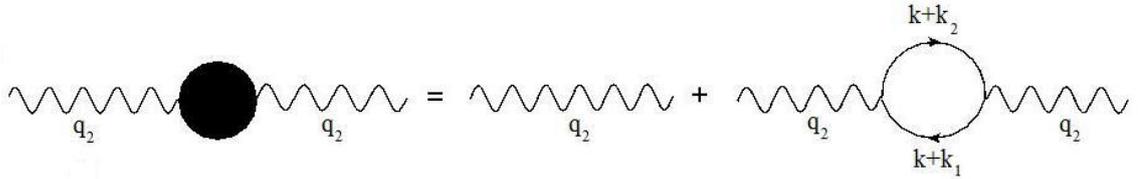


Figura 2.2: Expansão perturbativa a 1-loop da Auto-Energia do Fóton.

A correção ao propagador livre é dada pela auto-energia do fóton cuja expressão, construída através das regras de Feynman, fica

$$\pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(q_2; m) = (-)(-ie)^2 t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m), \quad (2.9)$$

onde definimos a função de dois pontos bivetorial puramente fermiônica

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = Tr \left[ \gamma_\mu \frac{1}{(k + k_1 - m)} \gamma_\nu \frac{1}{(k + k_2 - m)} \right]. \quad (2.10)$$

Esta amplitude é conhecida como tensor de polarização do vácuo. Pela contagem de potências, notamos que, ao ser integrada sobre todos os valores possíveis do momento do

*loop*, esta quantidade adquirirá um grau de divergência quadrático.

### 2.3.3 Interação Elétron-Fóton

O próximo processo elementar a ser considerado é aquele contendo duas linhas externas fermiônicas e uma bosônica, que é a configuração do vértice da interação. A série perturbativa, até o nível um *loop*, está representada diagramaticamente na figura abaixo

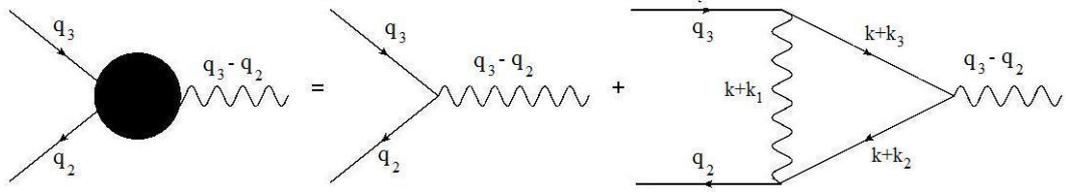


Figura 2.3: Expansão perturbativa a 1-loop da Correção de Vértice.

O primeiro gráfico corresponde a contribuição ao nível árvore, que nada mais é que o próprio vértice da interação. Por este motivo a série perturbativa formada pelos próximos gráficos é chamada de correção de vértice com o segundo gráfico sendo a correção de mais baixa ordem. A amplitude correspondente será dada por

$$\lambda_{\mu}^{ee\gamma}(q_2, q_3; m) = -(ie)^3 t_{\mu}^{ee\gamma}(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.11)$$

onde definimos

$$t_{\mu}^{ee\gamma}(k_1, k_2, k_3, m) = \gamma^{\lambda} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3 - m)} \gamma^{\mu} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2 - m)} \gamma^{\nu} \left[ g^{\lambda\nu} + (\zeta - 1) \frac{(k + k_1)^{\lambda} (k + k_1)^{\nu}}{(k + k_1)^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2}. \quad (2.12)$$

Aqui os momentos para as linhas internas também foram tomados como arbitrários. Estes, em consequência das relações de conservação nos vértices, satisfazem as diferenças

$$q_2 = k_2 - k_1, \quad (2.13)$$

$$q_3 = k_3 - k_1, \quad (2.14)$$

$$q_3 - q_2 = k_3 - k_2. \quad (2.15)$$

As somas destes, como dissemos anteriormente, são, obviamente, quantidades arbitrárias. A contagem de potência revela que ao tomarmos a integração sobre o momento do *loop* (última regra de Feynman) a amplitude será uma quantidade logaritmicamente divergente.

### 2.3.4 Decaimento fotônico do fóton

Este processo é caracterizado pela presença de três linhas bosônicas externas. Por isso nos referimos a ele como sendo o decaimento de um fóton em dois outros fótons. A contribuição de ordem mais baixa vem do diagrama contendo três linhas fermiônicas internas em um diagrama de um *loop*, representado diagramaticamente pela figura

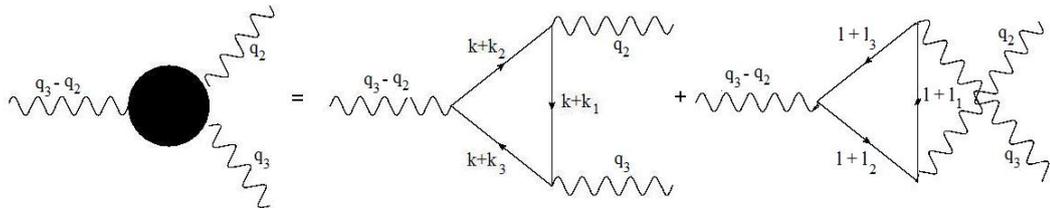


Figura 2.4: Expansão perturbativa a 1-loop do Decaimento do Fóton.

Notemos entretanto que este processo deve ser proibido uma vez que não é possível a construção de um termo trilinear no campo do fóton ( $A_\mu A_\nu A_\lambda$ ) invariante de gauge. Porém, as regras de Feynman permitem que escrevamos a expansão acima e associemos uma expressão a cada um dos diagramas. Isto implica que se a prescrição de tratamento das amplitudes físicas for consistente, de modo que os resultados finais carreguem o conteúdo de simetria do modelo, deveremos encontrar um resultado nulo para este processo. Como cada ordem da expansão perturbativa é caracterizada por uma dada

potência da constante de acoplamento, pois este é o parâmetro perturbativo, deveremos ter o cancelamento ordem a ordem, o que implica que a expressão

$$t_{\lambda\mu\nu}^{\gamma\gamma\gamma}(q_2, q_3; m) = - (ie)^3 t_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m), \quad (2.16)$$

onde identificamos a função de Green trivetorial puramente fermiônica,

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) = Tr \left[ \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3 - m)} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1 - m)} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2 - m)} \right], \quad (2.17)$$

associada ao primeiro diagrama do lado direito da expansão acima, deve se cancelar identicamente quando somada a segunda (canais direto e cruzado). O resultado nulo deve surgir naturalmente após a simetrização dos estados finais exigida pela simetria de Bose e isto representa um vínculo de consistência para as formas explícitas dos diagramas.

Novamente as relações de conservação de energia-momento estabelecem para as diferenças dos momentos internos as relações (2.13) - (2.15). O grau superficial de divergência após a implementação da última regra de Feynman será linear.

## 2.4 Vínculos de Consistência

Na seção anterior, quando tratamos o último processo, pudemos estabelecer um vínculo que irá servir como teste de consistência para qualquer prescrição que seja utilizada para o cálculo das amplitudes físicas perturbativas presentes na EDQ<sub>4</sub>. Vínculos como este poderão ser estabelecidos mais tarde e são chamados de identidades de Ward ou relações de simetria. Tais identidades são consequência direta do conteúdo de simetria com base no qual construímos os termos de interação presentes no Lagrangeano do modelo. Contudo, podemos ainda encontrar um outro conjunto de vínculos a serem satisfeitos pelos resultados das amplitudes e que mais tarde se mostrarão mais fundamentais que as relações de simetria. Tais vínculos são chamados de *relações entre funções de Green* e são obtidas a partir de relações entre integrandos que após a integração sobre o momento

do *loop* relacionam amplitudes com diferentes números de pontos, o que significa que poderemos estar relacionando integrais divergentes com diferentes graus de divergência de modo preciso. Estas relações tem um papel fundamental na interpretação consistente das soluções perturbativas das TQC's e se tornam ainda mais importantes quando algum dos lados relacionados apresentar um grau de divergência superior ao logarítmico, pois neste caso as arbitrariedades relacionadas com a rotulação arbitrária dos momentos internos poderão ter um papel relevante, uma vez que *shifts* nas variáveis de integração, mudando assim o valor da rotulação arbitrária, devem ser compensados por termos de superfície e podem levar então a diferentes formas para as amplitudes.

As relações entre funções de Green podem ser estabelecidas facilmente com a utilização da álgebra das matrizes de Dirac. Como tal, se partirmos da identidade

$$(k_2 - k_1)^\mu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1 - m)} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2 - m)} \right\} = \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1 - m)} - \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2 - m)}. \quad (2.18)$$

Tomando o traço em ambos os lados podemos identificar

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = t_\nu^V(k_1, m) - t_\nu^V(k_2, m), \quad (2.19)$$

onde definimos a função de Green vetorial de um ponto

$$t_\nu^V(k_1, m) = Tr \left[ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1 - m)} \right], \quad (2.20)$$

cuja contagem de potências revela grau superficial cúbico quando integrada sobre o momento irrestrito.

O aspecto importante da relação acima é que, após a integração no momento do *loop* em ambos os lados, a identidade acima irá se tornar uma relação entre duas amplitudes perturbativas. No lado esquerdo teremos uma amplitude com grau de divergência quadrático enquanto que do lado direito teremos uma combinação de duas amplitudes com graus de divergência cúbicos. A verificação desta identidade após a integração é um

requerimento de consistência. O mesmo procedimento mostrado acima pode ser utilizado para a obtenção das relações

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2; m) = t_\mu^V (k_1, m) - t_\mu^V (k_2, m), \quad (2.21)$$

$$q_2^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\lambda\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - t_{\lambda\mu}^{VV} (k_2, k_3; m), \quad (2.22)$$

$$q_3^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\lambda\nu}^{VV} (k_1, k_2; m) - t_{\lambda\nu}^{VV} (k_2, k_3; m), \quad (2.23)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\nu\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2; m), \quad (2.24)$$

e também

$$(q_3 - q_2)^\mu t_\mu^{ee\gamma} (k_1, k_2, k_3; m) = t^{ee} (k_1, k_2; m) - t^{ee} (k_1, k_3; m), \quad (2.25)$$

que relacionará as amplitudes referentes a correção de vértice e à auto-energia. Após o cálculo das formas explícitas das amplitudes envolvidas, no contexto de alguma prescrição, esperamos que todas as relações acima possam ser obtidas satisfeitas de modo natural e exato.

## 2.5 Estratégia para manipulações e cálculos de amplitudes contendo divergências em TQC's

Na seção precedente estabelecemos para cada um dos processos básicos considerados uma expressão *para um valor do momento do loop*. Assim, o primeiro passo na aplicação da prescrição que detalharemos nesta seção é justamente retardar a soma sobre todas os possíveis valores do momento do *loop*, ou seja a implementação da última regra

de Feynman. Este procedimento se justifica através do entendimento que é justamente quando introduzimos a integração sobre o momento não restrito que as indeterminações matemáticas se estabelecem. Integrais de Feynman divergentes contendo a dependência com os momentos externos teriam que ser modificadas por algum processo de regularização. Foi recentemente percebido [12] que é possível evitar o uso de regularizações para todo e qualquer propósito seguindo um procedimento simples. Após o primeiro passo que é a construção da amplitude *para um valor do momento do loop*, antes de inserir a expressão para o propagador observa-se o grau superficial de divergência e adota-se uma representação adequada para o mesmo.

No caso do propagador fermiônico teremos

$$iS(k+k_i) = i \frac{[(k+k_i) + m]}{D_i} \frac{1}{D_i} = \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} D_i} \right\}, \quad (2.26)$$

e forma análoga para o propagador bosônico. Na expressão acima definimos

$$D_{1\dots n} = [(k+k_1)^2 - m^2] \dots [(k+k_n)^2 - m^2].$$

A representação adequada é obtida pela escolha do valor de  $N$  na expressão acima. Esta escolha é determinada pelo maior grau de divergência apresentado pelas amplitudes. No caso da EDQ<sub>4</sub> o maior grau encontrado nas amplitudes perturbativas ao nível um loop a serem calculadas é o cúbico na integração de  $t_\nu^V$ , e desta forma podemos adotar

$$S(k+k_i) = (k+k_i+m) \left[ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{(k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_i} \right], \quad (2.27)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa que desempenha o papel de escala comum para as partes finitas e divergentes de uma amplitude. Podemos verificar que o propagador independe do parâmetro arbitrário  $\lambda$ ;

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} S(k_+, k_i) = 0, \quad (2.28)$$

e o resultado final de qualquer amplitude física deve possuir esta propriedade caso as operações intermediárias sejam consistentes. O desenvolvimento de uma dependência real com o parâmetro  $\lambda$  implicará na quebra da independência de escala e isto levará à quebra de outras simetrias locais e globais.

A representação (2.27) para o propagador fermiônico é capaz de fazer com que a dependência com os momentos internos esteja presente em integrais finitas quando a última regra de Feynman for implementada, nas amplitudes (2.20), (2.10) e (2.17). Além disto as integrais divergentes não conterão nenhuma quantidade física no integrando mas apenas a escala arbitrária assumindo assim formas padronizadas

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k_\mu k_\nu; k_\alpha k_\beta; k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta)}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha}. \quad (2.29)$$

A partir destas formas podemos definir quatro objetos básicos convenientes

$$\begin{aligned} \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - g_{\alpha\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\alpha\mu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (2.31)$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (2.32)$$

$$I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (2.33)$$

e

$$I_{quad}^{(4)}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (2.34)$$

em termos dos quais todo o conteúdo divergente das amplitudes poderá ser escrito. Em níveis superiores de aproximação ou em teorias não renormalizáveis outros destes objetos podem ser definidos. Nenhum dos objetos acima necessitará ser calculado explicitamente para qualquer propósito, como veremos no que se segue. Apenas propriedades gerais destes terão que ser estabelecidas, como as propriedades de escala. Notemos que os três primeiros objetos são diferenças entre integrais com o mesmo grau de divergência porém com estrutura tensorial diferente ao passo que as últimas duas são estruturas irreduzíveis. Como não é necessário que realizemos o cálculo explícito de nenhuma das estruturas (2.30) - (2.34), poderemos obter todos os resultados pertinentes sem que tenhamos utilizado algum método de regularização. Porém, se o interesse for mapear nossos resultados naqueles obtidos através da utilização destes métodos, bastará avaliar os objetos acima definidos à luz de alguma prescrição escolhida.

## 2.6 Solução das amplitudes físicas puramente fermiônicas

A representação apresentada acima para o propagador fermiônico nos possibilita encontrar as formas explícitas para todas as amplitudes físicas que são construídas somente com propagadores fermiônicos. Estudaremos cada uma delas separadamente.

### 2.6.1 Função de um ponto vetorial

A mais simples das estruturas matemáticas que necessitaremos calcular é a função de Green de um ponto vetorial. Porém a mais simples estrutura é aquela que contém o mais alto grau de divergência. Após substituímos os valores dos traços de Dirac encontraremos

$$t_\mu^V(k_1; m) = 4 \left[ \frac{k_\mu}{D_1} + k_{1\mu} \frac{1}{D_1} \right]. \quad (2.35)$$

Necessitaremos então avaliar as estruturas:

$$\frac{k_\mu}{D_1} \text{ e } \frac{1}{D_1}. \quad (2.36)$$

Quando procedermos a integração destes objetos em  $D = 1 + 3$  veremos que a primeira destas estruturas apresentará um grau superficial de divergência cúbico e a segunda um grau quadrático.

Utilizando a representação adequada para o propagador e mantendo somente os termos pares no momento de integração das integrais divergentes, já que os ímpares se anularão, a primeira das estruturas acima poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k_\mu}{D_1} \right]_{\text{pares}} &= -k_1^\alpha \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &+ (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_2^\alpha \frac{4k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{k_1^\beta k_1^\alpha k_1^\rho}{3} \frac{24k_\alpha k_\beta k_\rho k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\ &- 6 (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_1^\alpha \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\ &+ \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)^4 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Os três primeiros termos serão escritos como combinação dos objetos (2.30) - (2.34) quando estes se juntarem àqueles vindos de outra estrutura. Os dois últimos tornar-se-ão integrais finitas e apenas na última encontramos um integrando que depende da rotulação arbitrária  $k_1$  através da presença da estrutura  $D_1$ .

Ao considerarmos a segunda estrutura utilizamos a expressão (2.26) para  $N = 2$ . Desta forma obteremos

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{D_1} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - (k_1^2 + \lambda^2 - m_2^2) \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
&+ k_1^\alpha k_1^\beta \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m_2^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&- \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m_2^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_1}, \tag{2.38}
\end{aligned}$$

onde novamente encontramos a dependência com as rotulações arbitrárias dos momentos internos somente no integrando das integrais finitas.

Poderíamos igualmente utilizar a representação (2.26) com  $N = 3$  para a estrutura acima. Tal escolha somente adicionaria complicações algébricas desnecessárias uma vez que a escolha  $N = 2$  cumpre a tarefa de fazer com que a parte finita esteja separada da parte potencialmente divergente estando a dependência com os momentos presente somente nos integrandos finitos. Como regra, qualquer valor de  $N$  maior daquele que define a representação adequada, levará ao mesmo resultado.

Agora que temos a forma desejada para as estruturas podemos realizar a soma das contribuições de todos os possíveis valores do momento irrestrito do *loop*. Encontraremos

$$T_\mu^V(k_1; m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} t_\mu^V, \tag{2.39}$$

o que nos conduz à forma

$$\begin{aligned}
T_\mu^V(k_1, m) &= -4k_1^\alpha \nabla_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \square_{\alpha\beta\mu\rho}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3} k_1^2 k_1^\alpha \Delta_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) \\
&+ \frac{8}{3} k_{1\mu} k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

A expressão encontrada é puramente divergente e totalmente ambígua. Analisaremos este resultado posteriormente.

## 2.6.2 Função de dois pontos bivetorial

Após substituirmos os valores dos traços de Dirac, a expressão (2.10) adquire a forma

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{VV} &= 4 \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \\
&\quad + 2g_{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \right\}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

onde identificamos o surgimento das estruturas

$$\frac{1}{D_{12}}, \quad \frac{k_\mu}{D_{12}}, \quad \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}}. \tag{2.42}$$

Com o uso da representação adequada para os propagadores a última estrutura do conjunto acima adquire a forma

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu k_\nu}{D_1 D_2} \right]_{\text{pares}} &= \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{1}{4} [(k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)] \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{1}{6} [k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta] \frac{24k_\alpha k_\beta k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad + \left[ (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2)^2 \right] \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad - \frac{A_2^2 A_1 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} - \frac{A_2 A_1^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} \\
&\quad - \frac{A_2^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} - \frac{A_1^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{12}}, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$A_i = (k_{i_1}^2 + 2k_{i_1} \cdot k + \lambda^2 - m_i^2), \tag{2.44}$$

para a compactação das expressões e utilizamos a notação  $A_{ij} = A_i A_j$ .

Para o segundo termo do conjunto (2.42) nós encontramos

$$\left[ \frac{k_\mu}{D_{12}} \right]_{\text{pares}} = -k_2^\alpha \frac{2k_\mu k_\alpha}{(k^2 - \lambda_1^2)^3} - k_1^\alpha \frac{2k_\mu k_\alpha}{(k^2 - \lambda_1^2)^3} \tag{2.45}$$

$$+ \frac{k_\mu A_2^2}{(k^2 - \lambda_1^2)^3 D_2} + \frac{k_\mu A_1^2}{(k^2 - \lambda_1^2)^3 D_1} + \frac{k_\mu A_{12}}{(k^2 - \lambda_1^2)^3 D_{12}}. \tag{2.46}$$

Já para o último termo de (2.41) encontramos

$$\left[ \frac{1}{D_{12}} \right]_{\text{pares}} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{A_2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_2} - \frac{A_1}{(k^2 - \lambda^2) D_{12}}. \quad (2.47)$$

Juntando os resultados e integrando teremos para o tensor de polarização a forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= \frac{4}{3} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\nu} q_{2\mu}) I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \\ &+ 4 \frac{i}{(4\pi)^2} [g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}] [2\xi_2^0(q_2^2, m^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2^2, m^2; \lambda^2)] \\ &+ A_{\mu\nu}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde definimos a estrutura

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}(\lambda^2) &= +4 \nabla_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) \\ &+ \frac{1}{3} q_2^\alpha q_2^\beta \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\beta\mu}^{(4)}(\lambda^2) - 2g_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[ q_2^\alpha Q_2^\beta - Q_2^\alpha q_2^\beta \right] \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\beta\mu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &+ Q_2^\alpha Q_2^\beta \left[ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) - g_{\beta\nu} \Delta_{\alpha\mu}^{(4)}(\lambda^2) - g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &- 4(\lambda^2 - m^2) \Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

com

$$Q_i = k_i + k_1. \quad (2.50)$$

A parte finita foi escrita em termos das funções  $\xi_n^0(q_2^2, m^2; \lambda^2)$ . Trata-se de um caso particular das funções

$$\xi_n^0(q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz (z^n) \ln \left[ \frac{q_2^2 (1-z) z + (\mu^2 - m^2) z - m^2}{-\lambda^2} \right], \quad (2.51)$$

no caso de massas iguais  $\mu^2 = m^2$  ;

$$\xi_n^0(q_2^2; m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz (z^n) \ln \left[ \frac{q_2^2 (1-z) z - m^2}{-\lambda^2} \right]. \quad (2.52)$$

Esta esquematização para a parte finita das funções de Green é de extrema importância para a solução das amplitudes por permitir que coloquemos a solução destas em uma forma mais clara, simples e organizada. A representação na forma integral é muito conveniente e eficiente em cálculos perturbativos. Somente propriedades gerais destas funções se fazem necessárias como veremos adiante.

Quando estivermos tratando de processos representados por gráficos com maior número de pontos outras funções poderão ser definidas seguindo esta mesma filosofia e estas possuirão propriedades que estabelecerão relações com as que acabamos de definir, úteis na verificação de relações entre funções de Green ou relações de simetria. Além disso notaremos ao longo de todo o trabalho o caráter geral que tal esquematização permite. Todas as funções definidas neste capítulo tem seus análogos em outras dimensões, de modo que o resultado final das amplitudes aqui calculadas tem a forma muito semelhante que as mesmas amplitudes calculadas em outras dimensões quando projetadas nestes conjuntos de funções.

Outro ponto importante diz respeito às arbitrariedades presentes na solução para o tensor de polarização. Todas as potenciais ambiguidades se concentram na estrutura  $A_{\mu\nu}(\lambda^2)$ . Os demais termos dependem apenas de diferenças dos momentos externos e embora a escala arbitrária apareça explicitamente, não há dependência líquida pois as propriedades de escala do objeto divergente logarítmico juntamente com as propriedades de escala para as funções finitas terminam por produzir um resultado independente do parâmetro arbitrário  $\lambda$  [14]. Isto ocorrerá em todas as amplitudes e é uma propriedade da prescrição que adotamos.

### 2.6.3 Função de três pontos trivetorial

Após terem sido tomados os traços na expressão (2.17) podemos colocar o resultado na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\lambda\mu\nu}^{VVV}}{4} &= t_{3\lambda\mu\nu}^{(12)+} + t_{1\lambda\mu\nu}^{(32)-} + t_{2\lambda\mu\nu}^{(31)+} \\
&+ g_{\mu\nu} [(k+k_1)_\lambda S_{23} - (k+k_3)_\lambda S_{12} - (k+k_2)_\lambda S_{13}] \frac{1}{D_{123}} \\
&+ g_{\lambda\mu} [(k+k_3)_\nu S_{12} - (k+k_2)_\nu S_{13} - (k+k_1)_\nu S_{23}] \frac{1}{D_{123}} \\
&+ g_{\lambda\nu} [(k+k_2)_\mu S_{13} - (k+k_3)_\mu S_{12} - (k+k_1)_\mu S_{23}] \frac{1}{D_{123}}, \quad (2.53)
\end{aligned}$$

onde introduzimos a notação

$$S_{ij} = [(k+k_i)(k+k_j) - m^2], \quad (2.54)$$

$$t_{i\lambda\mu\nu}^{(jk)s} = (k+k_i)_\lambda [(k+k_j)_\mu (k+k_k)_\nu + (s)(k+k_j)_\nu (k+k_k)_\mu] \frac{1}{D_{123}}, \quad (2.55)$$

e  $s = \pm$ .

Ao realizarmos a distribuição dos termos nos depararemos com as seguintes estruturas

$$\frac{k_\lambda k_\mu k_\nu}{D_{123}}, \quad \frac{k_\lambda k_\mu}{D_{123}}, \quad \frac{k_\lambda}{D_{123}} \quad e \quad \frac{1}{D_{123}}. \quad (2.56)$$

Para a primeira destas estruturas encontraremos um grau de divergência linear, assim ao utilizarmos a representação adequada para os propagadores envolvidos poderemos escrever

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{D_{123}} \right]_{\text{pares}} &= -\frac{(k_1+k_2+k_3)^\alpha}{12} \frac{24k_\mu k_\nu k_\lambda k_\alpha}{(k^2-\lambda^2)^4} \\
&+ \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda A_{ij}}{(k^2-\lambda^2)^5} - \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda A_{123}}{(k^2-\lambda^2)^6} \\
&+ \sum_{i=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (A_i)^2}{(k^2-\lambda^2)^4 D_i} - \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda A_i (A_j)^2}{(k^2-\lambda^2)^5 D_j} + \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (A_i)^2 (A_j)^2}{(k^2-\lambda^2)^5 D_{ij}} \\
&+ \sum_{i \neq j \neq l=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda A_{ij} (A_l)^2}{(k^2-\lambda^2)^6 D_l} - \sum_{i \neq j \neq l=1}^3 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda A_i (A_j)^2 (A_l)^2}{(k^2-\lambda^2)^6 D_{jl}} \\
&+ \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (A_1)^2 (A_2)^2 (A_3)^2}{(k^2-\lambda^2)^6 D_{123}}. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Para a segunda estrutura de (2.56) nós escrevemos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k_\mu k_\nu}{D_{123}} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \sum_{i=1}^3 \frac{A_i k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_i} \\ &+ \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{A_{ij} k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{ij}} - \frac{A_{123} k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{123}}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

As duas últimas estruturas de (2.56) são finitas por contagem de potências e podem ser integradas diretamente. A implementação da última regra de Feynman nos leva a

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = A_{\lambda\mu\nu} &+ \frac{4}{3} [g_{\lambda\mu} (2q_{3\nu} - q_{2\nu}) + (2q_{2\mu} - q_{3\mu}) g_{\lambda\nu} - (q_{2\lambda} + q_{3\lambda}) g_{\mu\nu}] I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \\ &+ \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -16q_{2\mu}q_{2\nu}q_{2\lambda}\xi_{03}^{-1} - 16q_{3\mu}q_{3\nu}q_{3\lambda}\xi_{30}^{-1} \right. \\ &\quad - 16(q_{2\mu}q_{2\nu}q_{3\lambda} + q_{3\mu}q_{2\nu}q_{2\lambda} + q_{2\mu}q_{3\nu}q_{2\lambda}) \xi_{12}^{-1} \\ &\quad - 16(q_{2\mu}q_{3\nu}q_{3\lambda} + q_{3\mu}q_{2\nu}q_{3\lambda} + q_{3\mu}q_{3\nu}q_{2\lambda}) \xi_{21}^{-1} \\ &\quad + 8[q_{2\nu}g_{\mu\lambda} + q_{2\lambda}g_{\mu\nu} + q_{2\mu}g_{\nu\lambda}] \xi_{10}^0 + 8[q_{3\nu}g_{\mu\lambda} + q_{3\lambda}g_{\mu\nu} + q_{3\mu}g_{\nu\lambda}] \xi_{01}^0 \\ &\quad + 8(q_3 + q_2)_\lambda \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\xi_{00}^0 + q_{2\mu}q_{2\nu}\xi_{02}^{-1} + (q_{2\mu}q_{3\nu} + q_{3\mu}q_{2\nu}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\mu}q_{3\nu}\xi_{20}^{-1} \right] \\ &\quad + 8q_{2\nu} \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\xi_{00}^0 + q_{2\mu}q_{2\lambda}\xi_{02}^{-1} + (q_{2\mu}q_{3\lambda} + q_{3\mu}q_{2\lambda}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\mu}q_{3\lambda}\xi_{20}^{-1} \right] \\ &\quad + 8q_{3\mu} \left[ -\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\xi_{00}^0 + q_{2\nu}q_{2\lambda}\xi_{02}^{-1} + (q_{2\nu}q_{3\lambda} + q_{3\nu}q_{2\lambda}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\nu}q_{3\lambda}\xi_{20}^{-1} \right] \\ &\quad - 4(q_{3\mu}q_{2\lambda} + q_{2\mu}q_{3\lambda}) [q_{2\nu}\xi_{01}^{-1} + q_{3\nu}\xi_{10}^{-1}] \\ &\quad - 4(q_{3\nu}q_{2\lambda} + q_{2\nu}q_{3\lambda}) [q_{2\mu}\xi_{01}^{-1} + q_{3\mu}\xi_{10}^{-1}] \\ &\quad + 4(q_{3\nu}q_{2\mu} + q_{2\nu}q_{3\mu}) [q_{2\lambda}\xi_{01}^{-1} + q_{3\lambda}\xi_{10}^{-1}] \\ &\quad + 2g_{\mu\nu}q_{3\lambda} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} - q_3^2 \xi_{10}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1})] \\ &\quad - 2g_{\lambda\mu}q_{3\nu} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} + q_3^2 \xi_{10}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1})] \\ &\quad + 2g_{\mu\nu}q_{2\lambda} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} - q_2^2 \xi_{01}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1})] \\ &\quad - 2g_{\lambda\nu}q_{2\mu} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} + q_2^2 \xi_{01}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2g_{\lambda\nu}q_{3\mu} \left[ q_3^2 \xi_{10}^{-1} - (q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1}) \right] \\
& +2g_{\lambda\mu}q_{2\nu} \left[ q_2^2 \xi_{01}^{-1} - (q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1}) \right] \\
& +2 \left[ g_{\mu\nu}q_{3\lambda} - g_{\lambda\mu}q_{3\nu} \right] \xi_0^0 (q_3, m^2; \lambda^2) - 2 \left[ g_{\lambda\nu}q_{2\mu} - g_{\mu\nu}q_{2\lambda} \right] \xi_0^0 (q_2, m^2; \lambda^2) \\
& +2 \left[ g_{\lambda\nu} (q_3 - q_2)_\mu - g_{\lambda\mu} (q_3 - q_2)_\nu \right] \xi_0^0 (q_3 - q_2, m^2; \lambda^2) \Big\}, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} A_{\lambda\mu\nu} = & - (k_1 + k_3)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right. \\
& \left. - 3g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu}^{(4)} (\lambda^2) - 3g_{\lambda\nu} \Delta_{\alpha\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - (k_3 + k_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right. \\
& \left. - 3g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) - 3g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\lambda}^{(4)} (\lambda^2) \right] \\
& - (k_1 + k_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu}^{(4)} (\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu}^{(4)} (\lambda^2) \right. \\
& \left. - 3g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu}^{(4)} (\lambda^2) - 3g_{\lambda\mu} \Delta_{\alpha\nu}^{(4)} (\lambda^2) \right]. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Na expressão para a função  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  omitimos o argumento  $(q_3^2, q_2^2; m^2)$  das funções  $\xi_{mn}^{-1}$  bem como o argumento  $(q_3^2, q_2^2; m^2; \lambda^2)$  das funções  $\xi_{mn}^0$  para uma melhor visualização do resultado. Tal visualização somente se torna possível graças à definição destas funções, sem as quais a apresentação deste resultado seria impraticável. Aqui também as funções são casos particulares de formas mais gerais:

$$\xi_{mn}^{-1} (q_3^2, q_2^2, m^2; \mu^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^m y^n}{Q(q_3, q_2; m^2; \mu^2)}, \tag{2.61}$$

e

$$\xi_{mn}^0 (q_3^2, q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (z^m y^n) dy \ln \frac{Q(q_3, q_2; m^2; \mu^2)}{-\lambda^2}, \tag{2.62}$$

onde

$$\begin{aligned}
Q(q_3, q_2; m^2; \mu^2) &= q_3^2 (1-z)z + q_2^2 (1-y)y - 2(q_2 \cdot q_3)zy \\
&\quad + (\mu^2 - m^2)z + (\mu^2 - m^2)y - \mu^2.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Como no caso acima estamos considerando propagadores carregando massas iguais, devemos então tomar  $\mu^2 = m^2$ .

Novamente chamamos atenção para o fato de apenas a representação integral ser necessária para as operações que realizaremos não sendo portanto necessário completar as integrações nos parâmetros de Feynman. Algumas propriedades, que podem ser estabelecidas através da representação integral serão suficientes.

## 2.7 Solução das amplitudes físicas contendo propagadores bosônicos

Na auto-energia do elétron bem como na correção de vértice aparecem propagadores bosônicos e fermiônicos. O fato de o campo bosônico ser não massivo nos recomenda cuidados adicionais devido à possibilidade da presença simultânea de divergências ultravioletas e infravermelhas.

### 2.7.1 Auto-energia do elétron

A amplitude correspondente (2.7) poderá ser escrita numa forma mais conveniente com a utilização das identidades

$$\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu = -2(\not{k} + \not{k}_2) + 4m, \tag{2.64}$$

e

$$\begin{aligned}
(k+k_1)[(k+k_2)+m](k+k_1) &= -(k+k_1)^2(\not{k}_2-m) \\
&+ (k+k_1)\{[(k+k_2)^2-m^2]-(q_2^2-m^2)\}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
t^{ee}(k_1, k_2, m) &= -2 \frac{(k+k_2)}{[(k+k_2)^2-m^2](k+k_1)^2} \\
&+ 4m \frac{1}{[(k+k_2)^2-m^2](k+k_1)^2} \\
&- (\zeta-1) \left[ \frac{(\not{k}_2-m)}{[(k+k_2)^2-m^2](k+k_1)^2} - \frac{(k+k_1)}{[(k+k_1)^2]^2} \right] \\
&- (\zeta-1)(q_2^2-m^2) \frac{(k+k_1)}{[(k+k_2)^2-m^2][(k+k_1)^2]^2}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Neste ponto é conveniente adotar a forma padrão para o propagador, introduzindo uma massa fictícia para o fóton. Assim teremos

$$\begin{aligned}
t^{ee}(k_1, k_2, m; \mu) &= -2 \frac{(k+k_2)^\alpha \gamma_\alpha}{D_2 P_1} + 4m \frac{1}{D_2 P_1} \\
&- (\zeta-1)(\not{k}_2-m) \frac{1}{D_2 P_1} + (\zeta-1) \frac{(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha}{[P_1]^2} \\
&- (\zeta-1)(q_2^2-m^2) \frac{(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha}{D_2 [P_1]^2},
\end{aligned} \tag{2.67}$$

onde  $P_1 = [(k+k_1)^2 - \mu^2]$ . A correta estrutura  $t^{ee}(k_1, k_2, m)$  é obtida quando tomamos o limite  $\lim_{\mu \rightarrow 0} t^{ee}(k_1, k_2, m; \mu)$ . Eventuais termos divergentes neste limite caracterizarão a presença de divergências infravermelhas. Mas devido à estratégia que adotamos aparecerão separadas daquelas ultravioletas e serão caracterizadas pelo comportamento das funções finitas introduzidas no limite indicado. Adiantamos neste ponto que não existirão termos divergentes neste limite nas expressões finais para as amplitudes ao nível um loop da QED<sub>4</sub>. A estratégia adotada permite entretanto uma visualização transparente do processo de cancelamento destes termos.

Na expressão para a correção de vértice identificamos os seguintes elementos

$$\frac{k^\alpha}{D_2 P_1}, \frac{1}{D_2 P_1}, \frac{1}{[P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{[P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_2 [P_1]^2} \text{ e } \frac{1}{D_2 [P_1]^2}. \quad (2.68)$$

Notamos que após a integração no momento do *loop* teremos integrais que divergem com graus logarítmico e linear.

As primeiras duas estruturas do conjunto acima são similares as que apareceram na avaliação da função bivetorial mas com os propagadores carregando massas diferentes. Seguindo os passos recomendados pela prescrição adotada, obteremos os resultados desejados. Aqui, para conveniência futura, explicitamos os resultados para as integrais de Feynman ao invés da amplitude total. Assim

$$\begin{aligned} (I_2)(k_1, k_2, m^2; \mu^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_2 P_1} \\ &= I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2), \end{aligned} \quad (2.69)$$

e

$$\begin{aligned} (I_2)^\alpha(k_1, k_2, m^2; \mu^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_2 P_1} \\ &= -\frac{1}{2} Q_\beta \Delta^{(4)\beta\alpha}(\lambda^2) - \frac{1}{2} Q^\alpha I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} \{ q_2^\alpha [2\xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2)] \\ &\quad + Q^\alpha \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Para a terceira e a quarta estruturas de (2.68) nós usamos o fato de que

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \frac{1}{P_1} \right] = \frac{1}{[P_1]^2}, \quad (2.71)$$

para podermos utilizar os resultados encontrados na avaliação da amplitude de um ponto vetorial. Logo

$$\begin{aligned}
(L_2)(k_1, \mu) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu^2} (I_1)(k_1; \mu) \\
&= I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2},
\end{aligned} \tag{2.72}$$

e

$$\begin{aligned}
(L_2)^\alpha(k_1, \mu) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[P_1]^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu^2} (I_1)^\alpha(k_1; \mu) \\
&= -k_{1\beta} \Delta^{(4)\beta\alpha}(\lambda^2) - k_1^\alpha \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Os dois últimos elementos do conjunto (2.68) são finitos no limite ultravioleta por contagem de potências quando integrados em quatro dimensões, logo teremos

$$\begin{aligned}
(Y_2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_2 [P_1]^2} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2),
\end{aligned} \tag{2.74}$$

e

$$\begin{aligned}
(Y_2)^\alpha &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_2 [P_1]^2} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [q_2^\alpha \xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + k_1^\alpha \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2)].
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Com os resultados acima poderemos escrever a solução da amplitude  $T^{ee}(k_1, k_2, m)$  como

$$\begin{aligned}
T^{ee}(k_1, k_2, m) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} T^{ee}(k_1, k_2, m; \mu) \\
&= +\gamma_\alpha (k_1 + k_2)_\beta \Delta^{(4)\beta\alpha}(\lambda^2) - (\zeta - 1) \gamma_\alpha k_{1\beta} \Delta^{(4)\beta\alpha}(\lambda^2) \\
&\quad - (\not{A}_2 - 4m) \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \not{A}_2 \lim_{\mu \rightarrow 0} [2\xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2)] \\
&\quad - (\zeta - 1) (\not{A}_2 - m) \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} (q_2^2 - m^2) \not{A}_2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right]. \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Um aspecto importante na forma como escrevemos a solução final para a amplitude acima precisa ser enfatizado. Notamos que com o uso das representações adequadas dos propagadores e a introdução da escala arbitrária conseguimos fazer com que nenhum dos objetos divergentes básicos dependesse da massa fictícia do fóton. Logo foi possível separar o problema das divergências ultravioletas das possíveis divergências surgidas no limite infravermelho da teoria de forma natural.

No que diz respeito ao surgimento de divergências infravermelhas pode-se facilmente mostrar que das estruturas consideradas em (2.68) apenas algumas apresentam problemas quando o limite  $\lim_{\mu \rightarrow 0}$  é considerado. São as estruturas  $(L_2)$ ,  $(L_2)^\alpha$ ,  $(Y_2)$  e  $(Y_2)^\alpha$ . As estruturas  $(L_2)$  e  $(L_2)^\alpha$  somente aparecem em  $T^{ee}(k_1, k_2, m; \mu)$  através de uma combinação que elimina os problemas infravermelhos individuais. Ou seja, teremos

$$(L_2)^\alpha + k_1^\alpha (L_2) = -k_{1\beta} \Delta^{(4)\beta\alpha}(\lambda^2), \quad (2.77)$$

eliminado problemas no regime infravermelho.

De modo semelhante, as estruturas  $(Y_2)$  e  $(Y_2)^\alpha$  problemáticas individualmente no regime infravermelho somente aparecem em uma combinação livre deste problema. Ou seja

$$(Y_2)^\alpha + k_1^\alpha (Y_2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2), \quad (2.78)$$

que é livre de divergências infravermelhas.

Assim, mesmo na ausência de divergências infravermelhas manteremos o limite explícito por conveniência. O motivo desta atitude ficará claro mais adiante.

## 2.7.2 Correção de Vértice

Para concluirmos, resta apenas avaliarmos a correção de vértice. A este processo associamos a expressão (2.12). Primeiramente notamos que é possível colocar a forma (2.12) em outra mais conveniente com a utilização das identidades

$$\begin{aligned}
\gamma_\lambda [(k + k_3) + m] \gamma_\mu [(k + k_2) + m] \gamma^\lambda &= -4(k + k_1)_\mu (k + k_1) + 2[(k + k_1)^2] \gamma_\mu \\
&\quad - 2 \not{k}_2 \gamma_\mu (k + k_1) - 2(k + k_1) \gamma_\mu \not{k}_3 - 2 \not{k}_2 \gamma_\mu \not{k}_3 \\
&\quad + 4m \left[ 2(k + k_1)_\mu + (q_3 + q_2)_\mu \right] \\
&\quad - 2m^2 \gamma_\mu, \tag{2.79}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(k + k_1) [(k + k_3) + m] \gamma_\mu \times &= \\
\times [(k + k_2) + m] (k + k_1) &= + (k + k_1)^4 \left\{ \gamma_\mu + 2q_{3\alpha} \gamma_\mu [(k + k_1)^\alpha] \right. \\
&\quad - \left[ [(k + k_3)^2 - m^2] - (q_3^2 - m^2) \right] \gamma_\mu \\
&\quad + \left[ [(k + k_2)^2 - m^2] - (q_2^2 - m^2) \right] \gamma_\mu \\
&\quad \left. - (\not{k}_3 - m) \gamma_\mu (\not{k}_2 - m) \right\} \\
&\quad - \left[ [(k + k_3)^2 - m^2] - (q_3^2 - m^2) \right] \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{k}_2 - m) (k + k_1)^\alpha \\
&\quad + \left[ [(k + k_2)^2 - m^2] - (q_2^2 - m^2) \right] \gamma_\alpha (\not{k}_3 + m) \gamma_\mu (k + k_1)^\alpha \\
&\quad + 2(\not{k}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{k}_2 - m) \left[ (k + k_1)_\mu (k + k_1)^\alpha \right], \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Ficaremos então com a forma

$$\begin{aligned}
t_\mu^{ee\gamma}(k_1, k_2, m) = & -4\gamma_\alpha \frac{[(k+k_1)_\mu (k+k_1)^\alpha]}{D_{23}P_1} + 2\gamma_\mu \frac{1}{D_{23}} \\
& -2 \left[ \not{A}_2 \gamma_\mu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\mu \not{A}_3 - 4m\delta_\mu^\alpha \right] \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{23}P_1} \\
& -2 \left[ \not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_3 - 2m(q_3 + q_2)_\mu + m^2 \gamma_\mu \right] \frac{1}{D_{23}P_1} \\
& + (\zeta - 1) \left\{ \gamma_\mu \left[ \frac{1}{D_{23}} - \frac{1}{D_2 [P_1]} + \frac{1}{D_3 [P_1]} \right] + 2q_{3\alpha} \gamma_\mu \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{23} [P_1]} \right. \\
& \quad + \left\{ [(q_3^2 - m^2) - (q_2^2 - m^2)] \gamma_\mu - (\not{A}_3 - m) \gamma_\mu (\not{A}_2 - m) \right\} \frac{1}{D_{23} [P_1]} \\
& \quad - \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_2 [P_1]^2} + \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_3 [P_1]^2} \\
& \quad + \left\{ (q_3^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) - (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \right\} \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} \\
& \quad \left. + 2(\not{A}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_1)^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} \right\} \quad (2.81)
\end{aligned}$$

Na expressão acima nós identificamos as seguintes estruturas

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D_{23}}, \frac{1}{D_i [P_1]}, \frac{1}{D_{23} [P_1]}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{1}{D_i [P_1]^2}, \\
& \frac{k^\alpha}{D_i [P_1]^2}, \frac{1}{D_{23} [P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} e \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2}. \quad (2.82)
\end{aligned}$$

Neste conjunto o primeiro, o segundo, o sexto e o sétimo termos são estruturas que já surgiram anteriormente. Os novos elementos são

$$\frac{1}{D_{23} [P_1]}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{1}{D_{23} [P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} e \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2}. \quad (2.83)$$

Destes termos somente o terceiro é divergente no regime ultravioleta. Para os cálculos necessários manteremos a filosofia adotada no caso anterior, admitiremos a presença de uma massa no propagador do fóton que será posteriormente retirada. Assim

$$P_1 = [(k+k_1)^2] \rightarrow P_1(\mu^2) = [(k+k_1)^2 - \mu^2]. \quad (2.84)$$

Os dois primeiros elementos do conjunto (3.43) podem agora ser solucionados diretamente

$$\begin{aligned}
(I_3) (q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_{23} [P_1 (\mu^2)]} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_{00}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2), \tag{2.85}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I_3)^\alpha (q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1 (\mu^2)]} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} [q_2^\alpha \xi_{01}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad + k_1^\alpha \xi_{00}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2)]. \tag{2.86}
\end{aligned}$$

Para o terceiro elemento do conjunto (3.43) nós consideramos o mesmo procedimento usado na solução do elemento

$$\frac{k_\mu k^\alpha}{D_{123}}, \tag{2.87}$$

presente na avaliação da função de Green trivetorial, mas considerando massas diferentes nos propagadores. Logo

$$\begin{aligned}
(I_3)_\mu^\alpha (q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1 (\mu^2)]} \\
&= \frac{1}{4} \Delta_\mu^{(4)\alpha} (\lambda^2) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\alpha I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ -\frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^0 (q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\
&\quad \quad + q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad + q_{2\mu} q_3^\alpha \xi_{11}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} q_2^\alpha \xi_{11}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad + k_1^\alpha [q_{2\mu} \xi_{01}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10} (q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
&\quad \quad + k_{1\mu} [q_2^\alpha \xi_{01} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10} (q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
&\quad \quad \left. + k_{1\mu} k_1^\alpha \xi_{00} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right]. \tag{2.88}
\end{aligned}$$

Os resultados para os últimos termos de (3.43) podem ser escritos com base naqueles que já obtivemos, bastando que utilizemos

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \frac{1}{D_{23}[P_1]} = \frac{1}{D_{23}[P_1]^2}. \quad (2.89)$$

Assim

$$\begin{aligned} (L_3)(q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \frac{\partial}{\partial \mu^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_{23}[P_1]} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2), \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} (L_3)^\alpha(q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \frac{\partial}{\partial \mu^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_{23}[P_1]} \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [q_2^\alpha \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\ &\quad + k_1^\alpha \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)], \end{aligned} \quad (2.91)$$

e

$$\begin{aligned} (L_3)_\mu^\alpha(q_2, q_3; m^2; \mu^2) &= \frac{\partial}{\partial \mu^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{D_{23}[P_1]} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ -\frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^0(q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad + q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\ &\quad + q_{2\mu} q_3^\alpha \xi_{11}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} q_2^\alpha \xi_{11}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\ &\quad + k_1^\alpha [q_{2\mu} \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\ &\quad + k_{1\mu} [q_2^\alpha \xi_{01}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\ &\quad \left. + k_{1\mu} k_1^\alpha \xi_{00}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Com todos estes resultados em mãos nós poderemos escrever o resultado para a amplitude  $T_\mu^{e\epsilon\gamma}(k_1, k_2, m^2)$  como

$$\begin{aligned}
T_\mu^{ee\gamma} = & \zeta \gamma_\mu I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \gamma_\alpha \Delta_\mu^{(4)\alpha}(\lambda^2) - \frac{i(\zeta + 1)}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \xi_0^0(q_3 - q_2; m^2; \lambda^2) \\
& + \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \gamma_\mu \xi_{00}^0(q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\
& \quad - 2(q_{3\mu} \not{A}_2 + q_{2\mu} \not{A}_3) \xi_{11}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
& \quad + [\not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_2 + \not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_3 - 4m q_{2\mu}] \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - 2q_{2\mu} \not{A}_2 \xi_{02}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
& \quad + [\not{A}_3 \gamma_\mu \not{A}_3 + \not{A}_3 \gamma_\mu \not{A}_2 - 4m q_{3\mu}] \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - 2q_{3\mu} \not{A}_3 \xi_{20}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
& \quad \left. - \left[ \not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_3 + m^2 \gamma_\mu - 2m(q_3 + q_2)_\mu \right] \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right\} \\
& - \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \gamma_\mu \left[ \xi_0^0(q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \right. \\
& \quad - \left\{ [(q_3^2 - q_2^2 + 2m^2) \gamma_\mu - (\not{A}_3 - m) \gamma_\mu (\not{A}_2 - m)] \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right. \\
& \quad - 2\gamma_\mu [\not{A}_3^2 \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
& \quad - (q_3^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} [q_2^\alpha \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
& \quad + (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \mu^2} [q_2^\alpha \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
& \quad + \gamma_\mu \not{A}_2 (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + \not{A}_3 (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \\
& \quad - 2(\not{A}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^0(q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\
& \quad \quad - q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
& \quad \quad \left. \left. - (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right] \right\} \\
& \left. \right\}. \tag{2.93}
\end{aligned}$$

Novamente salientamos que os objetos divergentes básicos não dependem da massa fictícia introduzida para o fóton. Desta maneira conseguimos novamente separar o problema das divergências ultravioletas daquelas possíveis divergências no regime infravermelho. Estas estariam presentes somente nos termos proporcionais a  $(Y_2)$ , mas como novamente esta estrutura somente aparece através da combinação  $(Y_2)^\alpha + k_1^\alpha (Y_2)$  o resultado final é livre deste problema.

Assim, mesmo que aquelas estruturas identificadas em (2.68) e (2.82) possam apresen-

tar problemas no regime infravermelho quando integradas separadamente, somente ocorrerem combinações delas tais que a expressão final para a auto-energia e para a correção de vértice estejam livres deste tipo de divergência.

## 2.8 Verificação das Relações entre Funções de Green

Agora que obtemos os resultados para todas as amplitudes, escritos na linguagem específica da estratégia que adotamos, devemos verificar se os mesmos são consistentes, ou seja, mostrar que eles satisfazem as relações construídas na seção 4 deste capítulo.

A esquematização adotada para a parte finita das amplitudes permitiu primeiramente que o resultado pudesse ser escrito de uma forma bastante clara. Além disso, há um elemento altamente facilitador com a definição das funções  $\xi_n^0$ ,  $\xi_{mn}^{-1}$  e  $\xi_{mn}^0$ . Como todos os resultados estão escritos em termos destas funções basta que conheçamos algumas identidades específicas para que possamos verificar os vínculos estabelecidos.

As relações necessárias são as seguintes

$$q_3^2 \xi_{10}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_0^0 (q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^{-1} \right\}, \quad (2.94)$$

$$q_2^2 \xi_{01}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{10}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_0^0 (q_3^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^{-1} \right\}, \quad (2.95)$$

$$q_3^2 \xi_{20}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + \xi_{00}^0 + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{10}^{-1} \right\}, \quad (2.96)$$

$$q_2^2 \xi_{02}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ \left. + \xi_{00}^0 + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{01}^{-1} \right\}, \quad (2.97)$$

$$q_3^2 \xi_{11}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{02}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1^0 (q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ \left. + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{01}^{-1} \right\}, \quad (2.98)$$

$$q_2^2 \xi_{11}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{20}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_1^0 (q_3^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ \left. + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{10}^{-1} \right\}, \quad (2.99)$$

$$q_3^2 \xi_{30}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{21}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ -\xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + 2\xi_{10}^0 + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{20}^{-1} \right\}, \quad (2.100)$$

$$q_2^2 \xi_{03}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{12}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ -\xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + 2\xi_{01}^0 + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{02}^{-1} \right\}, \quad (2.101)$$

$$q_3^2 \xi_{21}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{12}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ \left. + \xi_{01}^0 + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{11}^{-1} \right\}, \quad (2.102)$$

$$q_2^2 \xi_{12}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{21}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ \left. + \xi_{10}^0 + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{11}^{-1} \right\}, \quad (2.103)$$

$$q_3^2 \xi_{12}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{03}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_2^0 (q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{02}^{-1} \right\}, \quad (2.104)$$

$$q_2^2 \xi_{21}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{30}^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_2^0 (q_3^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{20}^{-1} \right\}, \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} q_2^2 \xi_{01}^0 + (q_3 \cdot q_2) \xi_{10}^0 &= \frac{1}{2} \left\{ 2q_3^2 \xi_2^0 (q_3^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - 2(p+q)^2 \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - q_3^2 \xi_1^0 (q_3^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) + (p+q)^2 \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} q_3^2 \xi_{10}^0 + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^0 &= \frac{1}{2} \left\{ 2q_2^2 \xi_2^0 (q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - 2(p+q)^2 \xi_2^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + (p+q)^2 \xi_1^0 (q_3 - q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - q_2^2 \xi_1^0 (q_2^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

e

$$q_i^2 \xi_1^0 (q_i^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) = \frac{1}{2} \left[ \mu^2 - m^2 - \mu^2 \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} + m^2 \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + [q_i^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_0^0 (q_i^2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right]. \quad (2.108)$$

Onde omitimos o argumento  $(q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2)$  das funções  $\xi_{mn}^0$  bem como  $(q_2, q_3; m^2; \mu^2)$  das funções  $\xi_{mn}^{-1}$ . As relações acima foram estabelecidas considerando massas diferentes para que as mesmas possam ser utilizadas na verificação da relação entre função de Green da correção de vértice. Caso estejamos considerando as funções puramente fermiônicas basta que usemos a condição  $\mu^2 = m^2$  nos resultados acima.

Começamos realizando a contração do momento externo com a funções de Green de dois pontos bivetorial. O resultado para esta função é representado pela equação (2.48). Contraindo este resultado com o momento externo  $q_2^\mu$  teremos

$$\begin{aligned}
q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= \frac{4}{3} q_2^\mu [g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\nu} q_{2\mu}] I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) \\
&+ 4 \frac{i}{(4\pi)^2} q_2^\mu [g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}] [2\xi_2^0(q_2^2, m^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2^2, m^2; \lambda^2)] \\
&+ q_2^\mu A_{\mu\nu}(\lambda^2). \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos da expressão acima se anulam na contração devido a estrutura tensorial do coeficiente. Restará somente avaliarmos a contração do momento externo com a estrutura ambígua  $A_{\mu\nu}(\lambda^2)$ . Realizando a contração com a estrutura (2.49) e com um pouco de álgebra poderemos escrever

$$\begin{aligned}
q_2^\mu A_{\mu\nu}(\lambda^2) &= -4k_1^\alpha \nabla_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \square_{\alpha\beta\nu\rho}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3} k_1^2 k_1^\alpha \Delta_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{8}{3} k_{1\nu} k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \\
&+ 4k_2^\alpha \nabla_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3} k_2^\alpha k_2^\beta k_2^\rho \square_{\alpha\beta\nu\rho}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} k_2^2 k_2^\alpha \Delta_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{8}{3} k_{2\nu} k_2^\alpha k_2^\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2). \tag{2.110}
\end{aligned}$$

Comparando o resultado acima com (2.40) poderemos estabelecer a verificação da versão integrada de (2.19), ou seja,

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m). \tag{2.111}$$

De um modo completamente análogo podemos obter

$$\begin{aligned}
q_2^\nu A_{\mu\nu}(\lambda^2) &= -4k_1^\alpha \nabla_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \square_{\alpha\beta\mu\rho}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3} k_1^2 k_1^\alpha \Delta_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{8}{3} k_{1\mu} k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2) \\
&+ 4k_2^\alpha \nabla_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3} k_2^\alpha k_2^\beta k_2^\rho \square_{\alpha\beta\mu\rho}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} k_2^2 k_2^\alpha \Delta_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{8}{3} k_{2\mu} k_2^\alpha k_2^\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2), \tag{2.112}
\end{aligned}$$

que verifica a relação

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m). \tag{2.113}$$

As duas verificações acima são obtidas sem que realizemos qualquer possível escolha acerca das arbitrariedades existentes nas soluções das amplitudes envolvidas. Tanto os objetos divergentes como as rotulações são mantidas arbitrárias.

Já para a função de três pontos puramente vetorial escolhemos promover inicialmente a sua contração com o momento externo  $q_2^\nu$ . Ao procedermos a contração com este momento externo encontraremos diretamente a necessidade de utilizarmos as relações (2.100) - (2.105) e (2.106) - (2.107) na condição  $\mu^2 = m^2$ . Ao utilizarmos estas relações todas as funções que ainda restarão são funções cuja soma dos índices inferiores é no máximo 2. Utilizamos então as relações (2.96) - (2.99) para obtermos somente funções de soma 1. Por fim ao utilizarmos as relações (2.94) e (2.95) obteremos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} q_2^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}]_{FINITA} &= 4 \frac{i}{(4\pi)^2} (g_{\lambda\mu} q_3^2 - q_{3\mu} q_{3\lambda}) [2\xi_2^0(q_3^2, m^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_3^2, m^2; \lambda^2)] \\ &\quad - 4 \frac{i}{(4\pi)^2} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) [2\xi_2^0(q_2^2, m^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2^2, m^2; \lambda^2)]. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Para a parte divergente (2.59) após cancelamentos e algum esforço algébrico encontraremos

$$\begin{aligned} q_2^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}]_{DIVERGENTE} &= [A_{\lambda\mu}(\lambda^2)]_{k_1, k_3} - [A_{\lambda\mu}(\lambda^2)]_{k_1, k_2} \\ &\quad + \frac{4}{3} [g_{\mu\nu} q_3^2 - q_{3\nu} q_{3\mu}] I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} [g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\nu} q_{2\mu}] I_{\log}^{(4)}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Os dois resultados acima permitem estabelecer a relação entre funções de Green

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\mu}^{VV}(k_1, k_3; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_2, k_3; m). \quad (2.116)$$

De uma forma completamente análoga pode-se verificar a validade das relações

$$q_3^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{VV}(k_2, k_3; m), \quad (2.117)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = T_{\nu\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2; m). \quad (2.118)$$

Ao apresentarmos as soluções para a auto-energia do elétron e para a correção de vértice afirmamos que as mesmas eram livres de divergências no regime infravermelho. Porém mantemos os limites explicitamente nas suas respectivas expressões. O motivo desta atitude é que mantendo os limites e as derivadas explicitamente não há a necessidade de definirmos um novo conjunto de funções e podemos utilizar as mesmas relações que utilizamos para as funções de Green puramente fermiônicas, apenas não considerando a condição  $\mu^2 = m^2$ .

Com este procedimento podemos promover a contração do momento externo  $(q_3 - q_2)^\mu$  com a expressão obtida para a solução da correção de vértice, usar as relações (2.95) - (2.99) e obter

$$\begin{aligned} (q_3 - q_2)^\mu T_\mu^{ee\gamma} &= -\gamma_\alpha (q_3 - q_2)_\beta \Delta^{(4)\beta\alpha} (\lambda^2) \\ &- (\not{q}_2 - 4m) \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\ &+ (\not{q}_3 - 4m) \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\ &- \frac{i}{(4\pi)^2} \not{q}_2 \lim_{\mu \rightarrow 0} [2\xi_1^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2)] \\ &+ \frac{i}{(4\pi)^2} \not{q}_3 \lim_{\mu \rightarrow 0} [2\xi_1^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2)] \\ &- (\zeta - 1) (\not{q}_2 - m) \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\ &+ (\zeta - 1) (\not{q}_3 - m) \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\ &- \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} (q_2^2 - m^2) \not{q}_2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \\ &+ \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} (q_3^2 - m^2) \not{q}_3 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right], \quad (2.119) \end{aligned}$$

de onde poderemos promover a identificação da versão integrada da relação (2.25), ou

seja, identificamos

$$(q_3 - q_2)^\mu T_\mu^{ee\gamma} = T^{ee}(q_2; m) - T^{ee}(q_3; m), \quad (2.120)$$

como desejado.

Mais uma vez notemos que as relações estabelecidas para os integrandos das amplitudes foram mantidos pelas operações realizadas de modo exato, ainda na presença de quantidades arbitrárias. Isto significa que os resultados apresentados são ainda mapeáveis em qualquer prescrição de regularização tradicional, se desejado. Vencida esta etapa podemos então considerar um passo adicional, considerando o papel das simetrias para a consistência dos cálculos perturbativos.

## 2.9 Relações de Simetria

Embora tenhamos construído e verificado as relações entre funções de Green envolvendo todas as amplitudes de interesse, podemos encontrar ainda mais vínculos para serem impostos sobre os resultados obtidos. Estes vínculos diferem dos anteriores pois não são advindos de relações matemáticas entre integrandos, mas sim de imposições sobre os resultados das amplitudes a fim de verificar se a estratégia utilizada preservou as simetrias contidas no modelo específico bem como outras de caráter geral das TQC's como unitariedade, homogeneidade do espaço-tempo, entre outras. Algumas destas imposições de caráter geral como invariância de Lorentz e CPT são utilizadas para o estabelecimento de teoremas gerais como o de Furry e estabelecem consequências definitivas para algumas amplitudes que se adicionam àquelas estabelecidas pelas identidades de Ward. O aspecto importante é que estas simetrias não estão garantidas *a priori* na expansão perturbativa e necessitam de propriedades específicas das integrais de Feynman para serem mantidas. Motivo pelo qual alguns métodos de regularização levam á quebra destas simetrias em certos cenários.

Voltando ao nosso problema específico, o Lagrangeano da EDQ<sub>4</sub> foi construído através

da imposição da invariância de gauge. Do teorema de Noether sabemos que a toda invariância está associada a conservação da chamada corrente de Noether. No caso da simetria de gauge a corrente conservada é a corrente vetorial. Matematicamente esta conservação da corrente vetorial se realiza quando obtemos um valor nulo para a contração de um índice vetorial da amplitude com o respectivo momento externo, já que escrevemos as regras de Feynman no espaço dos momentos.

Para o caso mais simples, aquele que envolve a função de um ponto vetorial, devemos encontrar

$$k_1^\mu T_\mu^V(k_1; m) = 0. \quad (2.121)$$

Já para a função bivetorial temos duas possíveis contrações, onde teríamos

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = 0, \quad (2.122)$$

e

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = 0. \quad (2.123)$$

Para a análise das amplitudes com três ou mais pontos a conservação da corrente vetorial surge após a simetrização dos estados finais segundo a simetria de Bose, ou seja, a soma dos diagramas referentes ao canal direto e ao canal cruzado. Para a função trivetorial encontraremos as seguintes identidades de Ward

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}(q_2, q_3; m) = 0, \quad (2.124)$$

$$q_3^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 0, \quad (2.125)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) = 0. \quad (2.126)$$

com

$$T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m), \quad (2.127)$$

onde para a contribuição do canal cruzado adotamos também a mais geral rotulação dos momentos internos, exigindo-se apenas as conservações de energia e momento

$$q_2 = l_2 - l_1 \text{ e } q_3 = l_3 - l_1. \quad (2.128)$$

Os resultados finais das amplitudes devem ainda respeitar as imposições vindas do Teorema de Furry. Este teorema exige que as amplitudes que possuam um número ímpar de linhas externas bosônicas e apenas uma espécie de férmion circulando pelas linhas internas sejam identicamente nulas após a simetrização dos estados finais. Devemos então encontrar naturalmente os resultados

$$T_{\mu}^V(k_1, m) = 0, \quad (2.129)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3, m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3, m) = 0. \quad (2.130)$$

### 2.9.1 Verificação das relações de simetria

Segundo o teorema de Furry devemos encontrar um resultado identicamente nulo para a função de um ponto vetorial. O resultado que encontramos é dado por

$$T_{\mu}^V(k_1, m) = -4k_1^{\alpha}\nabla_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3}k_1^{\alpha}k_1^{\beta}k_1^{\rho}\square_{\alpha\beta\mu\rho}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{4}{3}k_1^2k_1^{\alpha}\Delta_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) + \frac{8}{3}k_{1\mu}k_1^{\alpha}k_1^{\beta}\Delta_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda^2). \quad (2.131)$$

Afim de obtermos  $T_{\mu}^V(k_1; m) = 0$  temos dois possíveis caminhos a seguir. Um deles é escolher a rotulação arbitrária tal que  $k_1 = 0$ . Com esta escolha estaríamos de acordo com as implicações do Teorema de Furry porém estaríamos violando uma simetria tão

fundamental quanto este teorema, a simetria de invariância translacional. Logo tal escolha não parece razoável no que se refere a manutenção de simetrias fundamentais. A outra possibilidade seria tomar

$$\nabla_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) = 0, \quad (2.132)$$

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) = 0, \quad (2.133)$$

e

$$\Delta_{\mu\alpha}^{(4)}(\lambda^2) = 0. \quad (2.134)$$

Esta escolha, ao contrário da anterior, é muito mais viável. Primeiramente notamos que ela faz com que o resultado da amplitude  $T_\mu^V(k_1, m)$  seja identicamente nulo. Ainda, tal escolha faz com que os termos potencialmente ambíguos sejam todos eliminados automaticamente preservando assim a invariância translacional.

Ao somarmos as contribuições do canal direto e do canal cruzado para a amplitude  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)$  encontraremos

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) = [T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}], \quad (2.135)$$

onde

$$\begin{aligned} [T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}] &= -\frac{2}{3}(k_1 + k_3)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - 3g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\lambda\nu}\Delta_{\alpha\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &\quad -\frac{2}{3}(k_3 + k_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - 3g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\lambda}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\ &\quad -\frac{2}{3}(k_1 + k_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - 3g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\lambda\mu}\Delta_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}(l_1 + l_3)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\
& \quad \left. - 3g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\lambda\nu}\Delta_{\alpha\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& -\frac{2}{3}(l_3 + l_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\
& \quad \left. - 3g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\lambda}^{(4)}(\lambda^2) \right] \\
& -\frac{2}{3}(l_1 + l_2)^\alpha \left[ \square_{\lambda\alpha\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}^{(4)}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) \right. \\
& \quad \left. - 3g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}^{(4)}(\lambda^2) - 3g_{\lambda\mu}\Delta_{\alpha\nu}^{(4)}(\lambda^2) \right]. \tag{2.136}
\end{aligned}$$

Aqui encontramos um caso mais explícito de qual escolha é mais acertada. Uma vez que todos os momentos  $k_i$  estão relacionados através da conservação de momento em cada vértice, não podemos escolher arbitrariamente todas as rotulações nulas,  $k_i = 0$ , pois isto violaria a conservação de energia-momento. Além disso estaríamos, igualmente ao caso anterior, forçando uma quebra da simetria translacional. Insistimos então na atribuição dos valores (2.132) - (2.134), obtendo

$$[T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}] = 0. \tag{2.137}$$

Notamos que além de obtermos um resultado de acordo com o Teorema de Furry tal escolha faz com que a amplitude  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  seja totalmente não-ambígua, ou seja

$$A_{\lambda\mu\nu} = 0. \tag{2.138}$$

Embora tenhamos chamado as relações (2.132) - (2.134) de escolhas elas não devem ser vistas como tais. Na verdade, a obtenção de resultados para as amplitudes que satisfaçam todos os requerimentos de simetria, inclusive de invariância translacional e a conservação de momento em cada vértice, e que além disso gere resultados livres de ambiguidades "implica" nas relações (2.132) - (2.134). Como tais relações asseguram a consistência da estratégia utilizada para a manipulação e solução das amplitudes divergentes podemos chamá-las de *Condições de Consistência*. Elas devem ser vistas como propriedades das

integrais divergentes que devem ser preservadas para as situações em que o integrando produz um resultado divergente.

Assumindo (2.132) - (2.134) poderemos escrever o resultado final das amplitudes que calculamos como

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma^{ee}}{(-e^2)} &= -(\not{A}_2 - 4m) \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q_2; m^2; 0; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \not{A}_2 \left[ 2\xi_1^0(q_2; m^2; 0; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2; m^2; 0; \lambda^2) \right] \\
&\quad - (\zeta - 1)(\not{A}_2 - m) \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q_2; m^2; 0; \lambda^2) \right] \\
&\quad - \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} (q_2^2 - m^2) \not{A}_2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right], \quad (2.139)
\end{aligned}$$

$$\frac{\Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}}{e^2} = \frac{4}{3} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \left\{ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(q_2^2 + 2m^2)}{q_2^2} \xi_0^0(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \right\}, \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda_{\mu}^{ee\gamma}}{(-e^3)} &= \zeta \gamma_{\mu} I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i(\zeta + 1)}{(4\pi)^2} \gamma_{\mu} \xi_0^0(q_3 - q_2; m^2; \lambda^2) \\
&\quad + \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \gamma_{\mu} \xi_{00}^0(q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\
&\quad \quad - 2(q_{3\mu} \not{A}_2 + q_{2\mu} \not{A}_3) \xi_{11}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad + [\not{A}_2 \gamma_{\mu} \not{A}_2 + \not{A}_2 \gamma_{\mu} \not{A}_3 - 4m q_{2\mu}] \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - 2q_{2\mu} \not{A}_2 \xi_{02}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad + [\not{A}_3 \gamma_{\mu} \not{A}_3 + \not{A}_3 \gamma_{\mu} \not{A}_2 - 4m q_{3\mu}] \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - 2q_{3\mu} \not{A}_3 \xi_{20}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad \left. - \left[ \not{A}_2 \gamma_{\mu} \not{A}_3 + m^2 \gamma_{\mu} - 2m(q_3 + q_2)_{\mu} \right] \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right\} \\
&\quad - \frac{i(\zeta - 1)}{(4\pi)^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \gamma_{\mu} \left[ \xi_0^0(q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \xi_0^0(q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right] \right. \\
&\quad \quad - \left[ (q_3^2 - q_2^2 + 2m^2) \gamma_{\mu} - (\not{A}_3 - m) \gamma_{\mu} (\not{A}_2 - m) \right] \xi_{00}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \\
&\quad \quad + 2\gamma_{\mu} \left[ q_3^2 \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) - (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right] \\
&\quad \quad \left. + (q_3^2 - m^2) \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ q_2^{\alpha} \xi_{01}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^{\alpha} \xi_{10}^{-1}(q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \mu^2} [q_2^\alpha \xi_{01}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2)] \\
& - \gamma_\mu \not{A}_2 (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0 (q_2; m^2; \mu^2; \lambda^2) - \not{A}_3 (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0 (q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \\
& + 2 (\not{A}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^0 (q_2, q_3; m^2; \mu^2; \lambda^2) \right. \\
& \quad \left. - q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) - q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right. \\
& \quad \left. - (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-1} (q_2, q_3; m^2; \mu^2) \right] \Big\}, \quad (2.141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{\lambda\mu\nu}^{\gamma\gamma\gamma}}{ie^3} &= \frac{4}{3} [g_{\lambda\mu} (2q_{3\nu} - q_{2\nu}) + (2q_{2\mu} - q_{3\mu}) g_{\lambda\nu} - (q_{2\lambda} + q_{3\lambda}) g_{\mu\nu}] I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -16 q_{2\mu} q_{2\nu} q_{2\lambda} \xi_{30}^{-1} - 16 q_{3\mu} q_{3\nu} q_{3\lambda} \xi_{03}^{-1} \right. \\
&\quad - 16 (q_{2\mu} q_{2\nu} q_{3\lambda} + q_{3\mu} q_{2\nu} q_{2\lambda} + q_{2\mu} q_{3\nu} q_{2\lambda}) \xi_{21}^{-1} \\
&\quad - 16 (q_{2\mu} q_{3\nu} q_{3\lambda} + q_{3\mu} q_{2\nu} q_{3\lambda} + q_{3\mu} q_{3\nu} q_{2\lambda}) \xi_{12}^{-1} \\
&\quad + 8 [q_{2\nu} g_{\mu\lambda} + q_{2\lambda} g_{\mu\nu} + q_{2\mu} g_{\nu\lambda}] \xi_{01}^0 + 8 [q_{3\nu} g_{\mu\lambda} + q_{3\lambda} g_{\mu\nu} + q_{3\mu} g_{\nu\lambda}] \xi_{10}^0 \\
&\quad + 8 (q_3 + q_2)_\lambda \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi_{00}^0 + q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{20}^{-1} + (q_{2\mu} q_{3\nu} + q_{3\mu} q_{2\nu}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\mu} q_{3\nu} \xi_{02}^{-1} \right] \\
&\quad + 8 q_{2\nu} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\lambda} \xi_{00}^0 + q_{2\mu} q_{2\lambda} \xi_{20}^{-1} + (q_{2\mu} q_{3\lambda} + q_{3\mu} q_{2\lambda}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\mu} q_{3\lambda} \xi_{02}^{-1} \right] \\
&\quad + 8 q_{3\mu} \left[ -\frac{1}{2} g_{\nu\lambda} \xi_{00}^0 + q_{2\nu} q_{2\lambda} \xi_{20}^{-1} + (q_{2\nu} q_{3\lambda} + q_{3\nu} q_{2\lambda}) \xi_{11}^{-1} + q_{3\nu} q_{3\lambda} \xi_{02}^{-1} \right] \\
&\quad - 4 (q_{3\mu} q_{2\lambda} + q_{2\mu} q_{3\lambda}) [q_{2\nu} \xi_{10}^{-1} + q_{3\nu} \xi_{01}^{-1}] \\
&\quad - 4 (q_{3\nu} q_{2\lambda} + q_{2\nu} q_{3\lambda}) [q_{2\mu} \xi_{10}^{-1} + q_{3\mu} \xi_{01}^{-1}] \\
&\quad + 4 (q_{3\nu} q_{2\mu} + q_{2\nu} q_{3\mu}) [q_{2\lambda} \xi_{10}^{-1} + q_{3\lambda} \xi_{01}^{-1}] \\
&\quad + 2 g_{\mu\nu} q_{3\lambda} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} - q_3^2 \xi_{01}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1})] \\
&\quad + 2 g_{\mu\nu} q_{2\lambda} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} - q_2^2 \xi_{10}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1})] \\
&\quad + 2 g_{\lambda\nu} q_{3\mu} [q_3^2 \xi_{01}^{-1} - (q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2g_{\lambda\nu}q_{2\mu} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} + q_2^2 \xi_{10}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1})] \\
& +2g_{\lambda\mu}q_{2\nu} [q_2^2 \xi_{10}^{-1} - (q_3 - q_2)^2 \xi_{10}^{-1} + q_3^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{10}^{-1})] \\
& -2g_{\lambda\mu}q_{3\nu} [(q_3 - q_2)^2 \xi_{01}^{-1} + q_3^2 \xi_{01}^{-1} + q_2^2 (\xi_{00}^{-1} - \xi_{01}^{-1})] \\
& +2 [g_{\mu\nu}q_{3\lambda} - g_{\lambda\mu}q_{3\nu}] \xi_0^0 (q_3, m^2; \lambda^2) - 2 [g_{\lambda\nu}q_{2\mu} - g_{\mu\nu}q_{2\lambda}] \xi_0^0 (q_2, m^2; \lambda^2) \\
& +2 \left[ g_{\lambda\nu} (q_3 - q_2)_\mu - g_{\lambda\mu} (q_3 - q_2)_\nu \right] \xi_0^0 (q_3 - q_2, m^2; \lambda^2) \Big\}. \tag{2.142}
\end{aligned}$$

Notamos que todos os resultados são não-ambíguos e satisfazem todos os requisitos de simetria. Em relação às divergências, notamos que o único objeto divergente que restou foi o objeto  $I_{\log}(\lambda^2)$ . Este objeto será absorvido no processo de renormalização através da incorporação de adequados contra-termos.

## 2.10 Renormalização e comportamento assintótico da Eletrodinâmica Quadri-Dimensional

Afim de promovermos a renormalização começamos determinando os contra-termos  $\delta_\Psi$  e  $\delta_m$  que renormalizam a auto-energia do elétron.

A auto-energia do elétron renormalizada pode ser escrita como

$$\frac{[\Sigma^{ee}]_{REN}}{(-e^2)} = \frac{[\Sigma^{ee}]}{(-e^2)} - \not{A}\delta_\Psi + m\delta_m. \tag{2.143}$$

Os contra-termos  $\delta_\Psi$  e  $\delta_m$  irão assegurar que esta amplitude seja finita e satisfaça às condições de renormalização. Estas são condições que uma amplitude deve satisfazer em um ponto cinemático arbitrário. Por conveniência escolhemos o ponto  $q_2^2 = 0$  e deste modo teremos as seguintes condições

$$[\Sigma^{ee}]_{REN} (q_2^2 = 0; m^2) = 0, \tag{2.144}$$

e

$$\left. \frac{\partial [\Sigma^{ee}]_{REN}(q_2^2; m^2)}{\partial q_2^2} \right|_{q^2=0} = 0. \quad (2.145)$$

Usando então os comportamentos assintóticos das funções

$$\xi_0^0(q_2^2 \rightarrow 0; m^2; 0; \lambda^2) = \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - 1, \quad \xi_1^0(q_2^2 \rightarrow 0; m^2; 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right], \quad (2.146)$$

e

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^0(q_2^2 \rightarrow 0; m^2; \mu^2; \lambda^2) = \frac{1}{2m^2}, \quad (2.147)$$

poderemos determinar a forma dos contra-termos. Estes são dados por

$$\delta_m = (\zeta + 3) e^2 \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - 1 \right) \right], \quad (2.148)$$

e

$$\delta_\Psi = -\zeta e^2 \left[ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] - e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}. \quad (2.149)$$

Para a determinação do contra-termo que renormaliza o processo de correção de vértice impomos a condição

$$[\Lambda_\mu^{ee\gamma}]_{REN}(q_2 = 0; q_3 = 0; m^2) = [\Lambda_\mu^{ee\gamma}](q_2 = 0; q_3 = 0; m^2) + \delta_e = 0, \quad (2.150)$$

o que gera

$$\delta_e = -\zeta e^2 \left\{ I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right] \right\} - e^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \quad (2.151)$$

que surge ao utilizarmos os comportamentos assintóticos

$$\xi_{00}^0(q_3 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0; 0; m^2; \lambda^2) = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right], \quad \xi_{00}^{-1}(q_3, q_2; 0; m^2) = -\frac{1}{m^2}, \quad (2.152)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_{00}^0 (q_3, q_2; \mu^2; m^2; \lambda^2) = \frac{1}{2m^2}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_0^0 (q^2 \rightarrow 0; m^2; \mu^2; \lambda^2) = \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - 1, \quad (2.153)$$

e

$$\xi_0^0 (q_3 - q_2 \rightarrow 0, m^2; \lambda^2) = \ln \frac{m^2}{\lambda^2}. \quad (2.154)$$

Já o contra-termo que renormaliza o tensor de polarização do vácuo surge quando impomos a condição

$$[\Pi^{\gamma\gamma}]_{REN} (q_2^2 = 0; m^2) = \Pi^{\gamma\gamma} (q_2^2 = 0; m^2) + \delta_A = 0, \quad (2.155)$$

onde

$$\Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma} (q_2^2 = 0; m^2) = (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \Pi^{\gamma\gamma} (q_2^2 = 0; m^2). \quad (2.156)$$

Desta forma o contra-termo que renormaliza o tensor de polarização tem a forma

$$\delta_A = \frac{4e^2}{3} \left( I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} \right). \quad (2.157)$$

As constantes de renormalização que renormalizam o campo fermiônico, o campo bosônico e a constante de acoplamento são dadas respectivamente por

$$Z_\Psi = 1 - \zeta e^2 \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] - e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}, \quad (2.158)$$

$$Z_A = 1 + \frac{4e^2}{3} \left( I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.159)$$

e

$$Z_e = 1 - \zeta e^2 \left[ I_{\log}^{(4)} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] - e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}. \quad (2.160)$$

Uma vez que descobrimos as constantes de renormalização podemos agora determinar o comportamento assintótico. Para isso precisamos investigar qual o comportamento da

constante de acoplamento a medida que a escala de energia varia. Tal comportamento é chamando de *running* da constante de acoplamento e é determinado pelo cálculo da *função beta* da teoria. Para encontrarmos a função beta da EDQ<sub>4</sub> nós inicialmente notamos que devido a relação entre funções de Green envolvendo a correção de vértice e a auto-energia do elétron temos a seguinte igualdade

$$\frac{Z_e}{Z_\psi} = 1, \quad (2.161)$$

e desta forma é apenas necessário que saibamos a constante de renormalização do campo bosônico para utilizarmos na relação

$$\beta = \frac{eq^2}{Z_A} \frac{\partial Z_A}{\partial q^2}, \quad (2.162)$$

onde  $q^2$  é um ponto arbitrário de renormalização escolhido [1]. Neste ponto arbitrário a constante de renormalização do campo bosônico toma a forma

$$Z_A = 1 - \frac{4e^2}{3} I_{\log}^{(4)}(\lambda^2) - \frac{4}{3} e^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2m^2}{q_0^2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{3} - \frac{q^2 + 2m^2}{q^2} \xi_0^0(q_2^2 = q^2; m^2; \lambda^2) \right], \quad (2.163)$$

o que nos conduz a seguinte função beta

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2}, \quad (2.164)$$

como deveria ser.

## 2.11 Comentários finais

Neste capítulo mostramos detalhadamente os passos necessários para a obtenção de soluções consistentes para todas as amplitudes divergentes presentes na avaliação perturbativa da EQD<sub>4</sub>. A obtenção destas soluções, a renormalização da teoria e a determinação

do *running* da constante de acoplamento foram possíveis sem que fosse necessário realizarmos explicitamente a integração de alguma integral divergente.

Como nossos resultados concordam com aqueles estabelecidos na literatura podemos concluir que, no que diz respeito ao tratamento das divergências presentes na EDQ<sub>4</sub>, a prescrição que adotamos gera resultados consistentes.

Após impormos as condições de consistência sobre os resultados das amplitudes, obtemos soluções não ambíguas e que dependem somente dos parâmetros físicos. Isto concede à prescrição que adotamos o caráter de predizibilidade necessário a qualquer prescrição que venha a ser utilizada para o cálculo de amplitudes relacionadas a processos físicos. Um aspecto importante da prescrição adotada é a não necessidade de modificar as amplitudes, relativamente às formas produzidas pelas regras de Feynman, para em um passo posterior "retirar" as modificações através de algum processo de expansão seguido de um limite. Processo este que não pode ser controlado completamente e que costumeiramente leva à produção de amplitudes que dependem da prescrição específica adotada assim como da sequência específica dos passos intermediários. Através do procedimento utilizado, que é geral, chegamos aos resultados desejados de um modo simples e transparente. Além disto, a identificação de funções finitas dos momentos externos nos permite uma sistematização eficiente das expressões para as amplitudes perturbativas permitindo resultados compactos e manuseáveis, tarefa que no contexto de métodos tradicionais torna-se frequentemente impraticável.

# Capítulo 3

## Eletrodinâmica Quântica em Dimensões Ímpares

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior consideramos a  $EDQ_4$  ao nível perturbativo um loop. Todas as amplitudes de interesse foram calculadas e os vínculos de consistência foram verificados. Ao final a renormalização e o cálculo da função beta também foram considerados. Um resultado não ambíguo e preservando as simetrias foi obtido sem que qualquer integral divergente tenha sido, de fato, calculada. Apenas propriedades gerais foram utilizadas. Neste capítulo consideraremos a universalidade da prescrição no que diz respeito à dimensão espaço-temporal. É importante lembrar que, a rigor, a dimensão espaço-temporal na construção de uma TQC é uma escolha e, portanto, não é razoável aceitar que tenhamos ferramentas somente aplicáveis em valores específicos desta escolha.

Com isto em mente, neste capítulo trataremos a Eletrodinâmica Quântica em dimensões ímpares. Um completo estudo da  $EDQ_3$  será apresentado assim como o cálculo do tensor de polarização do vácuo da  $EDQ_5$ . Este aspecto é particularmente importante pois o método de regularização mais popular, a Regularização Dimensional (RD), como já dissemos, apresenta limitações de aplicabilidade quando as amplitudes são tensores

anti-simétricos em dimensões pares ou em dimensões ímpares. Nestas últimas as amplitudes misturam naturalmente tensores simétricos e anti-simétricos. Isto se deve ao fato de as matrizes de quiralidade  $\gamma_3$  e  $\gamma_5$  serem incorporadas aos conjuntos de matrizes  $\gamma_\mu$ , em suas respectivas dimensões, na construção da representação da álgebra de Dirac. Na impossibilidade de estender para uma dimensão arbitrária a matriz de quiralidade, a RD não pode ser diretamente aplicada na solução destas simples extensões da  $EDQ_4$ . Logo, regras particulares devem ser aplicadas no estudo de cada dimensão e isto pode gerar dúvidas quanto a consistência da prescrição utilizada comprometendo o caráter preditivo dos resultados.

A  $EDQ_3$  possui como teoria suas próprias implicações fenomenológicas de interesse. Ela tem sido utilizada principalmente para o estudo de fenômenos não perturbativos em teorias de campos de gauge, tal como a geração dinâmica de massa para os férmions. Este modelo também apresenta quebra dinâmica de simetria quiral (QDSQ) [15] e o fenômeno de confinamento [16], existente na formulação quadridimensional da Cromodinâmica Quântica ( $CDQ_4$ ) e em outras teorias quânticas de campos. Como a  $EDQ_3$  é uma teoria relativamente mais simples pois envolve divergências de ordem mais baixa e naturalmente uma quantidade menor de amplitudes divergentes é razoável supor que o estudo da mesma estabeleça uma referência para o estudo de outras mais complexas tal qual o caso da  $EDQ_5$ . A importância deste estudo para nossos propósitos imediatos reside na demonstração da aplicabilidade natural e consistente da estratégia adotada no capítulo anterior no contexto de dimensões ímpares. Entretanto, uma vez demonstrada esta consistência teremos uma ferramenta útil para investigações em cenários onde há controvérsias frequentemente associadas ao uso de regularizações em cálculos perturbativos. Como tal, tem-se recentemente descoberto aplicações em sistemas planares da matéria condensada [17], em particular no estudo da supercondutividade a altas temperaturas e do Efeito Hall Quântico [7]. Ainda, o estudo de teorias quânticas de campos de baixa dimensionalidade tem mostrado importantes aplicações no estudo do grafeno [18].

Por outro lado, extensões para dimensões além da dimensão física das teorias de cam-

pos sempre mereceram grande atenção na literatura de TQC's. Recentemente, entretanto, com a construção do *Large Hadron Collider* (LHC) e a possibilidade de detectarmos efeitos de dimensões extras [10] tornaram-se ainda mais importantes. Assim, o eventual reconhecimento do caráter geral e consistente da prescrição para o tratamento das divergências nas soluções perturbativas considerada aqui credencia o mesmo como uma ferramenta útil para investigações relevantes num contexto onde não há ferramentas confiáveis.

Finalmente, sob o ponto de vista matemático, a dimensão, com já dissemos, é apenas uma escolha na formulação da teoria. Logo, é esperado de uma prescrição consistente que esta seja aplicável de modo idêntico em qualquer dimensão, seja ela par ou ímpar, menor ou maior que a dimensão física. Preservar as simetrias e eliminar ambiguidades não deve estar relacionado ao caráter renormalizável ou não de uma teoria.

A estrutura deste capítulo é praticamente a mesma que a do capítulo anterior, porém com alguma supressão de detalhes relativos aos passos intermediários.

## 3.2 Modelo e Processos de Interesse

O Lagrangeano que consideraremos para a Eletrodinâmica Quântica tridimensional é evidentemente o mesmo que o considerado no estudo da EDQ<sub>4</sub>, expressão (2.1). Porém, as matrizes  $\gamma_\mu$  formam uma representação tridimensional da álgebra de Dirac e, de modo análogo, os campos espinorial e vetorial adquirem formas adequadas para a composição de invariantes em cada termo do Lagrangeano.

Um ponto interessante no que diz respeito ao Lagrangeano da EDQ<sub>3</sub> é que os termos deste funcional continuam a ser escritos com base na invariância frente a simetria de gauge. Nesta dimensão o tensor de Levi-Civita possui somente três índices e desta forma poderíamos ter a presença de um termo adicional àqueles que apareceram em (2.1), que é invariante na ação sob transformações de gauge. Este novo termo surge através do acoplamento do campo de gauge  $A_\mu$  com o seu próprio *field-strength*  $F_{\mu\nu}$  e é chamado de termo topológico de *Chern-Simons*. Acoplamentos desta forma podem ser construídos em

todas as dimensões ímpares através do acoplamento de campos de gauge mais complexos com seus *field-strengths*. Como estes termos são quadráticos nos campos eles geram contribuições na forma de massas para os propagadores. Embora estes termos não possam ser inseridos em Lagrangeanos de dimensões pares podemos inserir termos com o mesmo efeito, mas nestes casos às custas da introdução de elementos que possuam derivadas de ordens superiores do campo de gauge [19].

Mesmo sabendo desta possibilidade não consideraremos inicialmente a presença do termo de Chern-Simons para mostrarmos como o surgimento do mesmo pode ser observado via correções radiativas. Este comportamento irá configurar uma geração de massa para o fóton na EDQ<sub>3</sub>.

As formas para os propagadores do elétron, do fóton e do vértice da interação são idênticos aqueles correspondentes à EDQ<sub>4</sub>. Eles são dados respectivamente pelas expressões:

$$iS(k) = \frac{i}{\not{k} - m}, \quad (3.1)$$

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} + (\zeta - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (3.2)$$

e

$$-ie\gamma_\mu. \quad (3.3)$$

Ao verificarmos a contagem de potências para a EDQ<sub>3</sub> entretanto notaremos inicialmente que se trata de uma teoria super-renormalizável e que o grau de divergência no regime ultravioleta para os processos elementares; propagação do elétron e do fóton na presença da interação, decaimento fotônico do fóton e interação elétron-fóton, correspondem a divergências menos severas. A possibilidade de divergências infravermelhas permanece como uma possibilidade.

No que diz respeito as dificuldades técnicas, as soluções para as amplitudes da EDQ<sub>3</sub> são relativamente menores que para aquelas da EDQ<sub>4</sub>, diferentemente do que ocorre

quando alguns métodos tradicionais de regularização são utilizados. Isto decorre principalmente do caráter geral do procedimento que adotamos, pelo fato de estarmos considerando um número menor de diagramas divergentes e de apresentarmos, estes, graus de divergências menores. Isto implica que a representação adequada para os propagadores envolvidos poderá ser consideravelmente mais simples.

Se os propagadores e os vértices do modelo são idênticos aos da  $EDQ_4$ , as expressões para os processos, para um valor do momento interno do loop, terão a mesma forma que aqueles mostrados em (2.7), (2.10), (2.12), (2.17) e (2.20). Diferenças entre as expressões que obteremos neste capítulo em relação as obtidas no capítulo anterior somente irão surgir quando utilizarmos os resultados dos traços das matrizes ou realizarmos a soma das contribuições referentes a cada um dos possíveis valores do momento indeterminado (integração). Deste modo, os vínculos de consistência a serem estabelecidos sobre as funções de Green são os mesmos encontrados na avaliação da  $EDQ_4$ , ou seja, as relações (2.19) e (2.21) - (2.25).

As conservações dos momentos arbitrários carregados pelas linhas internas dos diagramas também respeitam as mesmas condições que aquelas apresentadas em (2.13) - (2.15).

### 3.3 Cálculo das amplitudes físicas

O maior grau de divergência superficial que encontraremos é o quadrático e está presente na função de Green vetorial de um ponto relacionada ao tensor de polarização através de uma relação entre funções de Green. Assim o primeiro passo é a adoção de uma forma adequada aos propagadores. Para aqueles fermiônicos devemos adotar

$$iS(k+k_i) = i[(k+k_i)+m] \left\{ \frac{1}{(k^2-\lambda^2)} + \frac{(k_i^2+2k.k_i+\lambda^2-m^2)}{(k^2-\lambda^2)^2} + \frac{(k_i^2+2k.k_i+\lambda^2-m^2)^2}{(k^2-\lambda^2)^3} + \frac{(-1)^3(k_i^2+2k.k_i+\lambda^2-m^2)^3}{(k^2-\lambda^2)^3 D_i} \right\}. \quad (3.4)$$

Esta representação tornará possível escrevermos as amplitudes com as partes potencialmente divergentes separadas das partes finitas e a dependência com os momentos internos estará presente, assim como ocorreu no capítulo anterior, somente em integrandos de integrais finitas.

Como os objetos divergentes básicos são estruturas particulares da dimensão e da ordem perturbativa que estamos considerando, devemos identificá-los. Para estudos no espaço tridimensional ao nível 1-loop temos

$$I_{lin}^{(3)}(\lambda^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)}, \quad (3.5)$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2-\lambda^2)^2} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)}, \quad (3.6)$$

onde  $\lambda^2$  é como antes um parâmetro arbitrário com dimensão de massa que desempenha papel de escala comum para as partes finitas e divergentes.

Para qualquer propósito, como no caso da  $EDQ_4$ , não será necessário calcular, de fato, nenhuma destas estruturas.

### 3.3.1 Função de um ponto vetorial

Começamos pela determinação da solução das amplitudes considerando a mais simples das estruturas, a função de um ponto vetorial. Utilizando os resultados da álgebra das matrizes de Dirac em três dimensões poderemos escrevê-la

$$t_\mu^V(k_1; m) = 2 \left[ \frac{k_\mu}{D_1} + k_{1\mu} \frac{1}{D_1} \right]. \quad (3.7)$$

Em termos das estruturas de momento do loop, identificamos

$$\frac{k_\mu}{D_1} \text{ e } \frac{1}{D_1}. \quad (3.8)$$

A escolha  $D = 3$  para a dimensão produzirá divergências quadráticas e lineares, respectivamente, quando procedermos a integração das estruturas acima. Utilizamos então a representação adequada para o propagador do férmion (3.4) e consideramos somente os termos potencialmente divergentes pares no momento de integração. Assim para a primeira estrutura teremos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k_\mu}{D_1} \right]_{\text{pares}} &= -k_1^\alpha \left[ \frac{2k_\mu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\ &\quad + 4(k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_1^\alpha \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - \frac{k_\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_1)^2 - m_1^2]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Do mesmo modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{D_1} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \\ &\quad - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m_1^2]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com as duas estruturas nas formas acima, poderemos agora implementar a integração sobre o momento do loop. Encontraremos

$$T_\mu^V(k_1; m) = -2k_1^\alpha \nabla_{\mu\alpha}^{(3)}(\lambda^2). \quad (3.11)$$

Assim como na EDQ<sub>4</sub> o resultado para esta amplitude é totalmente divergente e ambíguo.

### 3.3.2 Função de dois pontos bivetorial

Passamos agora para a análise da função de Green de dois pontos bivetorial. Através dos resultados da álgebra de Dirac poderemos escrever

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= +2 \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \\
&+ g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + (k_1 - k_2)^2 \frac{1}{D_{12}} \right] \\
&+ 2im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\alpha \frac{1}{D_{12}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Na expressão acima encontramos três novas estruturas;

$$\frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}}; \frac{k_\mu}{D_{12}}; \frac{1}{D_{12}}. \tag{3.13}$$

As duas primeiras estruturas produzirão graus de divergência superficiais linear e logarítmico, respectivamente. Já a última estrutura será finita.

Usando a representação (3.4) poderemos escrever

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
&- (k_2^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&+ \frac{k_\mu k_\nu (k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_2} \\
&+ \frac{k_\mu k_\nu (k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2) (k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_2} \\
&+ \frac{k_\mu k_\nu (k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_{12}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu}{D_{12}} \right]_{\text{pares}} &= - \frac{k_\mu (k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_2} \\
&- \frac{k_\mu (k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) D_{12}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

As formas acima permitem que efetuemos as integrações. Os resultados, juntamente com (3.10), produzem

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= +2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) \\
&+ \frac{i}{2\pi} (q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) \left[ \xi_2^{-1/2}(q_2; m^2) - \frac{\xi_0^{-1/2}(q_2; m^2)}{2} \right] \\
&- (im) \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_2^\alpha \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

A parte finita da amplitude acima foi escrita em termos das funções  $\xi_n^{-1/2}(q_2; m^2)$  definidas como

$$\xi_n^{-1/2}(q_i; \mu^2; m^2) = \int_0^1 dz \frac{z^n}{[q_i^2(1-z)z + (\mu^2 - m^2)z - \mu^2]^{1/2}}. \tag{3.17}$$

na condição  $\mu^2 = m^2$ .

O resultado encontrado para a função bivectorial possui semelhanças e diferenças relativas à forma encontrada no estudo da EDQ<sub>4</sub>. Temos uma parte divergente, que é potencialmente violadora de simetria, e uma parte com coeficiente invariante de gauge  $(q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2)$ . A diferença significativa reside no último termo. Este reflete a presença de um termo topológico de *Chern-Simons* surgido via correção radiativa ao propagador. Então, no processo de renormalização da teoria, será necessário adicionar no Lagrangeano um termo da forma

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda, \tag{3.18}$$

para absorvermos o contra termo da renormalização do campo. Este termo modificaria a forma do propagador livre do fóton se o tivéssemos considerado em nossa lagrangiana inicial. Como a função bivectorial é o tensor de polarização do vácuo tal termo traria para o propagador do fóton um termo de massa, caracterizando-se assim a geração de massa para o fóton por correções radiativas na EDQ<sub>3</sub>.

Embora tenhamos encontrado esta geração de massa na EDQ<sub>3</sub> o mesmo comportamento não deve ser esperado para a EDQ<sub>5</sub>, isto porque na dimensão  $D = 1 + 4$  o tensor de *Levi-Civita* possui cinco índices. Dois destes índices estariam contraídos com duas potências do campo, já que trata-se de um termo cinético. Dos três restantes, um deveria estar contraído com uma derivada, sobrando assim dois índices livres e não sendo possível construir, com o campo  $A_\mu$  um termo de Chern-Simons em  $D = 1 + 4$  [19].

### 3.3.3 Função de Green de três pontos trivetorial

A função de três pontos trivetorial pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\lambda\mu\nu}^{VVV}}{2} &= t_{3\lambda\mu\nu}^{(12)+} + t_{2\lambda\mu\nu}^{(13)+} + t_{1\lambda\mu\nu}^{(32)-} \\
&+ g_{\mu\nu} [(k + k_1)_\lambda S_{23} - (k + k_2)_\lambda S_{13} - (k + k_3)_\lambda S_{12}] \frac{1}{D_{123}} \\
&+ g_{\lambda\mu} [(k + k_3)_\nu S_{12} - (k + k_2)_\nu S_{31} - (k + k_1)_\nu S_{23}] \frac{1}{D_{123}} \\
&+ g_{\lambda\nu} [(k + k_2)_\nu S_{13} - (k + k_1)_\nu S_{23} - (k + k_3)_\nu S_{12}] \frac{1}{D_{123}} \\
&+ 2im\Theta_{\lambda\mu\nu} \frac{1}{D_{123}}, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Theta_{\lambda\mu\nu} &= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_2^\alpha (k + k_1)_\lambda + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha} (2q_3 - q_2)^\alpha (k + k_1)_\nu - \varepsilon_{\lambda\nu\alpha} q_{2\mu} (k + k_1)^\alpha \\
&- g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta} q_2^\beta (k + k_1)^\alpha - g_{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\beta} q_2^\alpha (k + k_1)^\beta \\
&+ \varepsilon_{\lambda\mu\alpha} q_{2\nu} q_3^\alpha - \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_{3\lambda} q_2^\alpha - \varepsilon_{\lambda\nu\alpha} q_{2\mu} q_3^\alpha - g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta} q_3^\alpha q_2^\beta + \varepsilon_{\lambda\mu\nu} S_{12}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

e as estruturas  $t_{i\lambda\mu\nu}^{(jk)s}$  e  $S_{ij}$  tem as mesmas definições que aquelas adotadas em quatro dimensões, ou seja,

$$S_{ij} = [(k + k_i)(k + k_j) - m^2], \tag{3.21}$$

$$t_{i\lambda\mu\nu}^{(jk)s} = (k + k_i)_\lambda \left[ (k + k_j)_\mu (k + k_k)_\nu + (s) (k + k_j)_\nu (k + k_k)_\mu \right] \frac{1}{D_{123}}, \quad (3.22)$$

e  $s = \pm$ .

Observamos também que haverão quatro novas estruturas para serem integradas

$$\frac{k_\lambda k_\mu k_\nu}{D_{123}}, \frac{k_\mu k_\nu}{D_{123}}, \frac{k_\nu}{D_{123}}, \frac{1}{D_{123}}. \quad (3.23)$$

O maior grau de divergência encontrado será o logarítmico, quando a primeira estrutura do conjunto for integrada. As demais estruturas são todas finitas.

Para a primeira estrutura inicialmente escrevemos

$$\left[ \frac{k_\lambda k_\mu k_\nu}{D_1 D_2 D_3} \right]_{\text{pares}} = - \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (k_3^2 + 2k \cdot k_3 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_3} - \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (k_2^2 + 2k \cdot k_2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_{23}} - \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda (k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) D_{123}}. \quad (3.24)$$

Integrando a estrutura acima e agrupando com as demais estruturas finitas encontraremos

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{\text{VVV}} &= \frac{i}{8\pi} \left\{ -4 (g_{\nu\lambda} q_{2\mu} + g_{\mu\nu} q_{2\lambda} + g_{\lambda\mu} q_{2\nu}) \xi_{01}^{-1/2} - 4 (g_{\lambda\nu} q_{3\mu} + g_{\mu\nu} q_{3\lambda} + g_{\lambda\mu} q_{3\nu}) \xi_{10}^{-1/2} \right. \\ &\quad - 4 q_{2\lambda} q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{30}^{-3/2} - 4 (q_{3\lambda} q_{2\mu} q_{2\nu} - q_{2\lambda} q_{3\mu} q_{2\nu} - q_{2\lambda} q_{2\mu} q_{3\nu}) \xi_{12}^{-3/2} \\ &\quad - 4 q_{3\lambda} q_{3\mu} q_{3\nu} \xi_{30}^{-3/2} - 4 (q_{3\lambda} q_{2\mu} q_{3\nu} + q_{2\lambda} q_{3\mu} q_{3\nu} + q_{3\lambda} q_{3\mu} q_{2\nu}) \xi_{21}^{-3/2} \\ &\quad + 2 p_\mu \left[ g_{\lambda\nu} \xi_{00}^{-1/2} + q_{2\lambda} q_{2\nu} \xi_{02}^{-3/2} + (q_{2\lambda} q_{3\nu} + q_{3\lambda} q_{2\nu}) \xi_{11}^{-3/2} + q_{3\lambda} q_{3\nu} \xi_{20}^{-3/2} \right] \\ &\quad + 2 (q_3 - q_2)_\lambda \left[ g_{\mu\nu} \xi_{00}^{-1/2} + q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{02}^{-3/2} + (q_{2\mu} q_{3\nu} + q_{3\mu} q_{2\nu}) \xi_{11}^{-3/2} + q_{3\mu} q_{3\nu} \xi_{20}^{-3/2} \right] \\ &\quad \left. - 2 q_{2\nu} \left[ g_{\lambda\mu} \xi_{00}^{-1/2} + q_{2\mu} q_{2\lambda} \xi_{02}^{-3/2} + (q_{2\mu} q_{3\lambda} + q_{3\mu} q_{2\lambda}) \xi_{11}^{-3/2} + q_{3\mu} q_{3\lambda} \xi_{20}^{-3/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (q_{3\lambda}q_{2\nu} + q_{2\lambda}q_{3\nu}) \left[ q_{2\mu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\mu}\xi_{10}^{-3/2} \right] - (q_{3\lambda}q_{2\mu} + q_{2\lambda}q_{3\mu}) \left[ q_{2\nu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\nu}\xi_{10}^{-3/2} \right] \\
& - (q_{2\nu}q_{3\mu} - q_{3\nu}q_{2\mu}) \left[ q_{2\lambda}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\lambda}\xi_{10}^{-3/2} \right] - g_{\mu\nu} (q_2 \cdot q_3) \left[ q_{2\lambda}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\lambda}\xi_{10}^{-3/2} \right] \\
& - g_{\nu\lambda} (q_3^2 - q_3 \cdot q_2) \left[ q_{2\mu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\mu}\xi_{10}^{-3/2} \right] - g_{\mu\lambda} (q_2^2 - q_2 \cdot q_3) \left[ q_{2\nu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\nu}\xi_{10}^{-3/2} \right] \\
& - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} (q_2^2 q_{3\nu} - q_3^2 q_{2\nu}) \xi_{00}^{-3/2} + \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} (q_2^2 q_{3\mu} - q_3^2 q_{2\mu}) \xi_{00}^{-3/2} \\
& + \left[ g_{\lambda\mu} (q_3 - q_2)_\nu - g_{\lambda\nu} (q_3 - q_2)_\mu \right] \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (q_2^2 q_{3\lambda} + q_3^2 q_{2\lambda}) \xi_{00}^{-3/2} \\
& - (g_{\mu\nu} q_{2\lambda} - g_{\lambda\nu} q_{2\mu}) \xi_0^{-1/2} (q_2; m) + (g_{\lambda\mu} q_{3\nu} - g_{\mu\nu} q_{3\lambda}) \xi_0^{-1/2} (q_3; m) \\
& - im\varepsilon_{\lambda\mu\alpha} q_3^\alpha \left[ q_{2\nu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\nu}\xi_{10}^{-3/2} \right] - im\varepsilon_{\lambda\nu\alpha} (q_3 - 2q_2)^\alpha \left[ q_{2\mu}\xi_{01}^{-3/2} + q_{3\mu}\xi_{10}^{-3/2} \right] \\
& + im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_{3\lambda} \left[ q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} + q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} \right] - im [g_{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\beta} - g_{\nu\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta}] q_3^\beta q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} \\
& - im \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} q_3^2 - \varepsilon_{\lambda\mu\alpha} q_3^\alpha q_{2\lambda} + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha} q_2^\alpha q_{3\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_{3\mu} q_2^\alpha - g_{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\beta} q_3^\beta q_2^\alpha \right] \xi_{00}^{-3/2} \\
& + im\varepsilon_{\lambda\mu\nu} \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) + im\varepsilon_{\lambda\mu\nu} \xi_0^{-1/2} (q_2; m) \}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Na expressão acima omitimos o argumento  $(q_2, q_3; m)$  das funções associadas as estruturas de três pontos para uma melhor visualização do resultado.

A amplitude correspondente ao processo denominado decaimento fotônico do fóton foi escrita em termos das funções  $\xi_{mn}^{-1/2}$  e  $\xi_{mn}^{-3/2}$ . A definição para estas funções é

$$\xi_{mn}^{-1/2} (q_3, q_2; \mu^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^m y^n}{[Q(q_3, q_2; \mu^2; m^2)]^{1/2}}, \tag{3.26}$$

e

$$\xi_{mn}^{-3/2} (q_3, q_2; \mu^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^m y^n}{[Q(q_3, q_2; \mu^2; m^2)]^{3/2}}, \tag{3.27}$$

onde

$$\begin{aligned}
Q(q_3, q_2; m^2; \mu^2) &= q_3^2 (1-z)z + q_2^2 (1-y)y - 2(q_2 \cdot q_3)zy \\
&+ (\mu^2 - m^2)z + (\mu^2 - m^2)y - \mu^2. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Nos caso tratado nesta seção basta impormos a condição  $\mu^2 = m^2$ .

### 3.3.4 Auto-energia do elétron

A expressão referente a auto-energia do elétron pode ser colocada na seguinte forma

$$\begin{aligned}
t^{ee}(k_1, k_2, m) = & -\gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_2 [(k+k_1)^2]} - (\not{k}_2 - 3m) \frac{1}{D_2 [(k+k_1)^2]} \\
& + (\zeta - 1) \left\{ -(\not{k}_2 - m) \frac{1}{D_2 [(k+k_1)^2]} + \gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{[(k+k_1)^2]^2} \right. \\
& \left. - (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_2 [(k+k_1)^2]^2} \right\}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento do capítulo anterior, uma massa é introduzida no propagador do fóton, obtendo assim

$$\begin{aligned}
t^{ee}(k_1, k_2; m^2; \mu^2) = & -\gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_2 P_1} - (\not{k}_2 - 3m) \frac{1}{D_2 P_1} \\
& - (\zeta - 1) \left[ (\not{k}_2 - m) \frac{1}{D_2 P_1} - \gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{[P_1]^2} + (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_2 [P_1]^2} \right], \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde  $P_1 = (k+k_1)^2 - \mu^2$ . A amplitude  $t^{ee}(k_1, k_2; m^2)$  correta será obtida com o limite  $\lim_{\mu \rightarrow 0} t^{ee}(k_1, k_2; m^2; \mu^2)$ .

Inicialmente identificamos as seguintes estruturas

$$\frac{1}{D_2 P_1}; \frac{k^\alpha}{D_2 P_1}; \frac{1}{[P_1]^2}; \frac{k^\alpha}{[P_1]^2}; \frac{1}{D_2 [P_1]^2}; \frac{k^\alpha}{D_2 [P_1]^2}. \tag{3.31}$$

Ao integrarmos sobre o momento do loop encontraremos no máximo o grau de divergência logarítmico.

Os dois primeiros elementos do conjunto acima são similares aqueles avaliados no cálculo do tensor de polarização do vácuo, mas agora carregam massas diferentes em seus propagadores. O primeiro é finito e pode ser integrado diretamente, gerando

$$\begin{aligned}
({}^1J_2)(k_1, k_2; m) & = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_2 P_1} \\
& = \frac{i}{8\pi} \xi_0^{-1/2} (q_2; m^2; \mu^2). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Já para o segundo nós aplicamos os mesmos passos lá aplicados para obtermos uma estrutura semelhante a (3.15) e que ao ser integrada gera

$$\begin{aligned} ({}^1J_2)^\alpha(k_1, k_2; m; \mu) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha}{D_2 P_1} \\ &= -\frac{i}{8\pi} \left[ q_2^\alpha \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) + k_1^\alpha \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para os demais elementos do conjunto (3.31) nós utilizamos a seguinte igualdade

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \frac{1}{P_1} \right] = \frac{1}{[P_1]^2}, \quad (3.34)$$

a qual permite-nos escrever

$$\begin{aligned} ({}^2J_1)(k_1; \mu) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[P_1]^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu^2} (I_1)(k_1; \mu) \\ &= \frac{i}{8\pi} \frac{1}{(-\mu^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} ({}^2J_1)^\alpha(k_1; \mu) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha}{[P_1]^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu^2} (I_1)^\alpha(k_1; \mu) \\ &= -k_1^\alpha \frac{i}{8\pi} \frac{1}{(-\mu^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} ({}^2J_2)(k_1, k_2; m; \mu) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_2 [P_1]^2} \\ &= \frac{i}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2), \end{aligned} \quad (3.37)$$

e

$$\begin{aligned}
({}^2J_2)^\alpha(k_1, k_2; m; \mu) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha}{D_2 [P_1]^2} \\
&= -\frac{i}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ q_2^\alpha \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) + k_1^\alpha \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right] \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Nas integrais acima podemos perceber o surgimento de divergências infravermelhas quando tomarmos o limite  $\lim_{\mu \rightarrow 0}$  em  $({}^2J_1)^\alpha(k_1, \mu)$  e  $({}^2J_1)(k_1, \mu)$ . Porém na expressão (3.30) estas aparecem através da combinação

$$({}^2J_1)^\alpha(k_1, \mu) + k_1^\alpha ({}^2J_1)(k_1, \mu), \quad (3.39)$$

que é nula. Ou seja, a presença de divergências infravermelhas na auto-energia do elétron é apenas aparente.

Com estes resultados obtemos a seguinte expressão para a amplitude  $T^{ee}(k_1, k_2; m)$

$$\begin{aligned}
T^{ee}(k_1, k_2, m) &= \frac{i}{8\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ -(\not{q}_2 - 3m) \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) + \not{q}_2 \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right. \\
&\quad \left. - (\zeta - 1)(\not{q}_2 - m) \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right. \\
&\quad \left. + (\zeta - 1)(q_2^2 - m^2) \not{q}_2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right\}, \quad (3.40)
\end{aligned}$$

onde podemos notar o surgimento de um resultado finito, tanto no regime ultravioleta como no infravermelho.

### 3.3.5 Correção de vértice

A expressão referente a esta amplitude pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
t_\mu^{ee\gamma} &= +\gamma_\mu \frac{1}{D_{23}} - 2_\mu \gamma_\alpha \frac{(k + k_1)(k + k_1)^\alpha}{D_{23} P_1} \\
&\quad + [\not{q}_3 \gamma_\mu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\mu \not{q}_2 - 2\gamma_\alpha \gamma_\mu \not{q}_3 - 2_2 \not{q}_2 \gamma_\mu \gamma_\alpha + 6mg_{\mu\alpha}] \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_{23} P_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -2 \not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_3 + \not{A}_3 \gamma_\mu \not{A}_2 + m \left[ 4 (q_3 + q_2)_\mu - \gamma_\mu \not{A}_2 - \not{A}_3 \gamma_\mu - m \gamma_\mu \right] \right\} \frac{1}{D_{23} P_1} \\
& + (\zeta + 1) \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{D_{23}} + 2 q_{3\alpha} \gamma_\mu \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_{23} P_1} - (\not{A}_3 - m) \gamma_\mu (\not{A}_2 - m) \frac{1}{D_{23} P_1} \right. \\
& \quad + \gamma_\mu \frac{1}{D_3 P_1} - \gamma_\mu \frac{1}{D_2 P_1} + [(q_3^2 - m^2) - (q_2^2 - m^2)] \gamma_\mu \frac{1}{D_{23} P_1} \\
& \quad + \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_3 [P_1]^2} - \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_2 [P_1]^2} \\
& \quad - \left\{ (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu - (q_3^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \right\} \frac{(k + k_1)^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} \\
& \quad \left. + 2 (\not{A}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \frac{(k + k_1)_\mu (k + k_1)^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} \right\}. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Na expressão obtida para a correção de vértice podemos identificar as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D_{23}}, \frac{1}{D_i [P_1]}, \frac{1}{D_{23} [P_1]}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \\
& \frac{1}{D_i [P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_i [P_1]^2}, \frac{1}{D_{23} [P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} e \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

No conjunto acima notamos que a primeira, a segunda, a sexta e a sétima estruturas foram consideradas nos casos anteriores. Os novos elementos são:

$$\frac{1}{D_{23} [P_1]}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]}, \frac{1}{D_{23} [P_1]^2}, \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2} e \frac{k_\mu k^\alpha}{D_{23} [P_1]^2}. \tag{3.43}$$

Estes termos serão todos finitos e serão dados por

$$\begin{aligned}
({}^1 J_3) & = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_{23} [P_1]} \\
& = \frac{i}{16\pi} \xi_{00}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2), \tag{3.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
({}^1 J_3)_\mu & = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha}{D_{23} [P_1]} \\
& = -\frac{i}{16\pi} \left[ q_{2\mu} \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + k_{1\mu} \xi_{00}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right], \tag{3.45}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
({}^1 J_3)_\mu^\alpha &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha k_\mu}{D_{23}[P_1]} \\
&= \frac{i}{16\pi} \left\{ \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^{-1/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right. \\
&\quad + q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \\
&\quad + k_1^\alpha \left[ q_{2\mu} \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right] \\
&\quad + k_{1\mu} \left[ q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) - q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right] \\
&\quad \left. + k_{1\mu} k_1^\alpha \xi_{00}^{-3/2} (p; q; m; \mu^2) \right\}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

As demais integrais são obtidas derivando-se as anteriores em relação a massa fictícia, ou seja

$$\begin{aligned}
({}^2 J_3) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_{23}[P_1]^2} \\
&= \frac{i}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_{00}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2), \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
({}^2 J_3)^\alpha &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha}{D_{23}[P_1]^2} \\
&= -\frac{i}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ q_{2\mu} \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) - k_{1\mu} \xi_{00}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right], \tag{3.48}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
({}^1 J_3)_\mu^\alpha &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha k_\mu}{D_{23}[P_1]^2} \\
&= \frac{i}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^{-1/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right. \\
&\quad + q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \\
&\quad + k_1^\alpha \left[ q_{2\mu} \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) - q_{3\mu} \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right] \\
&\quad + k_{1\mu} \left[ q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) - q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right] \\
&\quad \left. + k_{1\mu} k_1^\alpha \xi_{00}^{-3/2} (q_2; q_3; m; \mu^2) \right\}. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Com os resultados acima encontraremos para a correção de vértice

$$\begin{aligned}
T_\mu^{ee\gamma} = & \zeta \gamma_\mu \frac{i}{8\pi} \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m^2) \\
& + \frac{i}{16\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ -2\gamma_\mu \xi_{00}^{-1/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) - 2(q_{2\mu} \not{A}_3 + q_{3\mu} \not{A}_2) \xi_{11}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right. \\
& \quad - 2q_{2\mu} \not{A}_2 \xi_{02}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) - 2q_{3\mu} \not{A}_3 \xi_{20}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad - (\gamma_\alpha \gamma_\mu \not{A}_2 - 2 \not{A}_2 \gamma_\mu \gamma_\alpha) \left[ q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right] \\
& \quad - (\not{A}_3 \gamma_\mu \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha \gamma_\mu \not{A}_3) \left[ q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) + q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right] \\
& \quad - 6m \left[ q_{2\mu} \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) + q_{3\mu} \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right] \\
& \quad + [\not{A}_3 \gamma_\mu \not{A}_2 - 2 \not{A}_2 \gamma_\mu \not{A}_3] \xi_{00}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad + m \left[ 4(q_3 + q_2)_\mu - \gamma_\mu \not{A}_2 - \not{A}_3 \gamma_\mu - m \gamma_\mu \right] \xi_{00}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad + (\zeta - 1) \left\{ 2\gamma_\mu \xi_0^{-1/2} (q_3; m^2; \mu^2) - 2\gamma_\mu \xi_0^{-1/2} (q_2; m^2; \mu^2) \right. \\
& \quad \quad - 2\gamma_\mu \left[ q_3^2 \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right] \\
& \quad \quad + [(q_3^2 - q_2^2) \gamma_\mu - (\not{A}_3 - m) \gamma_\mu (\not{A}_2 - m)] \xi_{00}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad + \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ -2 \not{A}_3 (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu \xi_1^{-1/2} (q_3; m^2; \mu^2) \right. \\
& \quad \quad \quad + 2\gamma_\mu \not{A}_2 (\not{A}_2 - m) \xi_1^{-1/2} (q_2; m^2; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad + (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad + (q_2^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{A}_3 + m) \gamma_\mu q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad - (p^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) q_2^\alpha \xi_{01}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad - (p^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) q_3^\alpha \xi_{10}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad + 2(\not{A}_3 - m) \gamma_\alpha (\not{A}_2 - m) \left[ \delta_\mu^\alpha \xi_{00}^{-1/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right. \\
& \quad \quad \quad \quad + (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad \quad + q_{2\mu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \\
& \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-3/2} (q_3, q_2; m; \mu^2) \right] \right\} \right\} \{3.50\}
\end{aligned}$$

Como as únicas integrais que apresentam problemas na região infravermelha são  $(J_1)$  e  $(J_1)^\alpha$ , podemos concluir que a amplitude é livre deste tipo de problema.

É interessante salientar o papel da sistematização adotada para expressar a parte finita das amplitudes perturbativas para que esta conclusão tenha sido retirada de modo simples e transparente.

### 3.4 Verificação das Relações entre Funções de Green

Agora que encontramos os resultados para todas as amplitudes identificadas na segunda seção deste capítulo devemos verificar se estes resultados obtidos são consistentes. Para verificarmos esta consistência devemos inicialmente testar a validade das relações entre as funções de Green. Logo é necessário que estabeleçamos um conjunto de relações que envolvam as funções  $\xi_n^{-1/2}$ ,  $\xi_{mn}^{-1/2}$  e  $\xi_{mn}^{-3/2}$ . Estas relações são análogas aquelas obtidas para a verificação das relações em quatro dimensões e são dadas por

$$q_3^2 \xi_{10}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-3/2} = \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_0^{-1/2} (q_2; m; \mu) + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{00}^{-3/2}, \quad (3.51)$$

$$q_2^2 \xi_{01}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{10}^{-3/2} = \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_0^{-1/2} (q_3; m; \mu) + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{00}^{-3/2}, \quad (3.52)$$

$$q_3^2 \xi_{11}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{02}^{-3/2} = \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_1^{-1/2} (q_2; m; \mu) + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01}^{-3/2}, \quad (3.53)$$

$$q_2^2 \xi_{11}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{20}^{-3/2} = \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_1^{-1/2} (q_3; m; \mu) + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10}^{-3/2}, \quad (3.54)$$

$$q_3^2 \xi_{20}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{11}^{-3/2} = \frac{1}{2} \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_{00}^{-1/2} + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10}^{-3/2}, \quad (3.55)$$

$$q_2^2 \xi_{02}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{11}^{-3/2} = \frac{1}{2} \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_{00}^{-1/2} + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01}^{-3/2}, \quad (3.56)$$

$$q_3^2 \xi_{12}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{03}^{-3/2} = \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_2^{-1/2} (q_2; m; \mu) + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{02}^{-3/2}, \quad (3.57)$$

$$q_2^2 \xi_{21}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{30}^{-3/2} = \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_2^{-1/2} (q_3; m; \mu) + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{20}^{-3/2}, \quad (3.58)$$

$$q_2^2 \xi_{12}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{21}^{-3/2} = \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_{10}^{-1/2} + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{11}^{-3/2}, \quad (3.59)$$

$$q_3^2 \xi_{21}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{12}^{-3/2} = \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - \xi_{01}^{-1/2} + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{11}^{-3/2}, \quad (3.60)$$

$$q_3^2 \xi_{30}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{21}^{-3/2} = \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - 2\xi_{10}^{-1/2} + \frac{q_3^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{20}^{-3/2}, \quad (3.61)$$

$$q_2^2 \xi_{03}^{-3/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{12}^{-3/2} = \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - 2\xi_{01}^{-1/2} + \frac{q_2^2 + (\mu^2 - m^2)}{2} \xi_{02}^{-3/2}, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} q_3^2 \xi_{10}^{-1/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{01}^{-1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ (q_3 - q_2)^2 \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - 2(q_3 - q_2)^2 \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) \right. \\ &\quad \left. + 2q_2^2 \xi_2^{-1/2} (q_2; m; \mu) - q_2^2 \xi_1^{-1/2} (q_2; m; \mu) \right. \\ &\quad \left. + [q_3^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^{-1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

e

$$\begin{aligned} q_2^2 \xi_{01}^{-1/2} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{10}^{-1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ (q_3 - q_2)^2 \xi_1^{-1/2} (q_3 - q_2; m) - 2(q_3 - q_2)^2 \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m) \right. \\ &\quad \left. + 2q_3^2 \xi_2^{-1/2} (q_3; m; \mu) - q_3^2 \xi_1^{-1/2} (q_3; m; \mu) \right. \\ &\quad \left. + [q_2^2 + (\mu^2 - m^2)] \xi_{00}^{-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde omitimos o argumento  $(q_3, q_2; m; \mu^2)$  das funções  $\xi_{mn}^l$ .

No estudo do tensor de polarização do vácuo escrevemos a amplitude referente a este processo em termos da função de Green bivetorial  $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1; k_2; m)$ . Estabelecemos para esta função dois vínculos

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = t_\nu^V(k_1, m) - t_\nu^V(k_2, m), \quad (3.65)$$

e

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = t_\mu^V(k_1, m) - t_\mu^V(k_2, m). \quad (3.66)$$

Para a função de dois pontos envolvida na relação acima encontramos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= +2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) \\ &+ \frac{i}{2\pi} (q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) \left[ \xi_2^{-1/2}(q_2; m^2) - \frac{\xi_0^{-1/2}(q_2; m^2)}{2} \right] \\ &- (im) \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_2^\alpha \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Quando realizarmos a contração com o momento externo todos os termos finitos se cancelarão devido a estrutura invariante de gauge que os multiplica. Assim teremos

$$\begin{aligned} q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) &= 2q_2^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) \\ &= 2k_2^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) - 2k_1^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) \\ &= T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m), \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde identificamos o resultado (3.11). O desenvolvimento acima comprova a validade da versão integrada da relação (3.65). De forma completamente análoga ao procedermos a contração com o outro índice de Lorentz encontramos

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m). \quad (3.69)$$

Já para a função de três pontos trivetorial temos três relações entre funções de Green

$$q_2^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\lambda\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - t_{\lambda\mu}^{VV} (k_2, k_3; m), \quad (3.70)$$

$$q_3^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\lambda\nu}^{VV} (k_1, k_2; m) - t_{\lambda\nu}^{VV} (k_2, k_3; m), \quad (3.71)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = t_{\nu\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - t_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2; m). \quad (3.72)$$

Realizando a contração do resultado (3.25) com o momento externo  $q_2^\nu$  aparecerão naturalmente os lados direitos das relações (3.57) - (3.64). Utilizando o lado esquerdo destas relações, com a imposição da condição  $\mu^2 = m^2$ , restarão apenas funções cuja soma dos índices inferiores é menor ou igual a 2. Utilizamos as relações (3.53) - (3.56) para que tenhamos somente funções cuja soma dos índices inferiores é igual a 1. Utilizamos finalmente as relações (3.51) - (3.52). Após estes procedimentos encontraremos

$$\begin{aligned} q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} &= +\frac{i}{2\pi} (q_{3\mu} q_{3\nu} - g_{\mu\nu} q_3^2) \left[ \xi_2^{-1/2} (q_3; m^2) - \frac{\xi_0^{-1/2} (q_3; m^2)}{2} \right] \\ &\quad - (im) \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_3^\alpha \xi_0^{-1/2} (q_3; m^2) + (im) \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} (q_3 - q_2)^\alpha \xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m^2) \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \left[ (q_3 - q_2)_\mu (q_3 - q_2)_\nu - g_{\mu\nu} (q_3 - q_2)^2 \right] \\ &\quad \times \left[ \xi_2^{-1/2} (q_3 - q_2; m^2) - \frac{\xi_0^{-1/2} (q_3 - q_2; m^2)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Somando e subtraindo a quantidade  $2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2)$  poderemos identificar as estruturas referentes a duas funções de dois pontos. Assim temos a verificação da seguinte relação

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\mu}^{VV} (k_1, k_3; m) - T_{\lambda\mu}^{VV} (k_2, k_3; m). \quad (3.74)$$

Para o estabelecimento desta relação é também necessário que utilizemos uma relação tensorial que envolve o tensor de *Levi-Civita*

$$\varepsilon_{\mu\alpha\nu}k_\lambda + \varepsilon_{\alpha\nu\lambda}k_\mu + \varepsilon_{\nu\lambda\mu}k_\alpha + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha}k_\nu = 0. \quad (3.75)$$

Esta identidade é similar à Identidade de *Schouten* em quatro dimensões.

De modo completamente análogo podemos verificar as duas outras relações envolvendo a função trivetorial.

Já para a correção de vértice devemos verificar a validade da versão integrada da relação

$$(q_3 - q_2)^\mu t_\mu^{ee\gamma}(k_1, k_2, k_3, m) = t^{ee}(k_1, k_2, m) - t^{ee}(k_1, k_3, m). \quad (3.76)$$

Realizando a contração do momento externo  $(q_3 - q_2)^\mu$  com a solução (3.50) e utilizando as relações (3.51) - (3.56) conseguiremos colocar a expressão resultante na forma

$$\begin{aligned} (q_3 - q_2)^\mu T_\mu^{ee\rightarrow\gamma} &= \frac{i}{8\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ -(\not{q}_2 - 3m) \zeta_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) + \not{q}_2 \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right. \\ &\quad - (\xi - 1)(\not{q}_2 - m) \xi_0^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \\ &\quad \left. + (\xi - 1)(q_2^2 - m^2) \not{q}_2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^{-1/2}(q_2; m^2; \mu^2) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{8\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ -(\not{q}_3 - 3m) \zeta_0^{-1/2}(q_3; m^2; \mu^2) + \not{q}_3 \xi_1^{-1/2}(q_3; m^2; \mu^2) \right. \\ &\quad - (\xi - 1)(\not{q}_3 - m) \xi_0^{-1/2}(q_3; m^2; \mu^2) \\ &\quad \left. + (\xi - 1)(q_3^2 - m^2) \not{q}_3 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_1^{-1/2}(q_3; m^2; \mu^2) \right\}, \quad (3.77) \end{aligned}$$

de onde identificamos

$$(q_3 - q_2)^\mu T_\mu^{ee\gamma}(k_1, k_2, k_3, m) = T^{ee}(k_1, k_2, m) - T^{ee}(k_1, k_3, m). \quad (3.78)$$

Logo, do ponto de vista da preservação das relações entre funções de Green, podemos dizer que a prescrição que utilizamos é consistente para o tratamento das amplitudes ao nível um loop da  $EDQ_3$ . Notamos que em momento algum nos afastamos de uma completa analogia em relação aos procedimentos que aplicamos na solução da  $EDQ_4$ , caracterizando assim a universalidade da estratégia.

### 3.5 Relações de Simetria

Nosso interesse agora é verificar se os resultados encontrados para as funções de Green satisfazem às relações de simetria esperadas. As primeiras imposições são aquelas referentes a conservação da corrente vetorial para a verificação da preservação da simetria de gauge e são dadas por

$$k_1^\mu T_\mu^V(k_1; m) = 0, \quad (3.79)$$

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = 0, \quad (3.80)$$

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = 0, \quad (3.81)$$

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) = 0, \quad (3.82)$$

$$q_3^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) = 0, \quad (3.83)$$

$$(q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) = 0, \quad (3.84)$$

onde

$$T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m), \quad (3.85)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q_2, q_3; m), \quad (3.86)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) = T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q_3, q_2; m), \quad (3.87)$$

com as definições

$$q_2 = l_2 - l_1 \text{ e } q_3 = l_3 - l_1. \quad (3.88)$$

Inicialmente consideremos a verificação da conservação da corrente vetorial na função de dois pontos. Realizando a contração com o momento externo obteremos

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = 2q_2^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2). \quad (3.89)$$

Para que o resultado final da função de dois pontos preserve a conservação da corrente vetorial sem que violemos a conservação dos momentos externos ou a invariância translacional temos somente uma possibilidade:

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(\lambda^2) = 0. \quad (3.90)$$

A condição acima é análoga às propriedades identificadas para os objetos divergentes no capítulo anterior. Como esta condição tem a propriedade de fazer com que os resultados das amplitudes se tornem totalmente livres de ambiguidades e de termos violadores de simetria, nos referimos a ela como *relação de consistência*.

Já para a função de três pontos devemos considerar as contribuições referentes aos canais direto e cruzado devido a simetrização de *Bose*. Assim teríamos

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) = q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q_2, q_3; m) + q_2^\nu T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q_3, q_2; m). \quad (3.91)$$

Utilizando a relação

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q_2, q_3; m) = T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3 - q_2; m), \quad (3.92)$$

e

$$q_2^\nu T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q_3, q_2; m) = T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3 - q_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3; m), \quad (3.93)$$

poderemos mostrar

$$\begin{aligned}
q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV}(k_1, k_2, k_3; m) &= T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3 - q_2; m) \\
&\quad + T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3 - q_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(q_3; m) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

De forma análoga podemos mostrar a conservação das demais correntes vetoriais na função de três pontos.

Notemos ainda que, como implicação da relação de consistência teremos

$$T_\mu^V = 0, \tag{3.95}$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = 0. \tag{3.96}$$

Para a demonstração do resultado imediatamente acima utilizamos propriedades das funções  $\xi$ ;

$$\xi_{mn}^l(q_2, q_3; m) = \xi_{nm}^l(q_3, q_2, m), \tag{3.97}$$

que conduz a

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q_2, q_3; m) = -T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q_3, q_2, m), \tag{3.98}$$

ratificando assim a propriedade (3.93).

## 3.6 EDQ em D=1+4

Para o caso da EDQ<sub>5</sub> consideramos no presente trabalho apenas o cálculo da amplitude com maior grau superficial de divergência, o tensor de polarização do vácuo.

Porém, antes de procedermos o cálculo do tensor de polarização é interessante que definamos os objetos divergentes básicos particulares desta dimensão na ordem perturbativa 1-loop. Estes objetos seriam aqueles necessários para expressarmos a parte divergente de qualquer amplitude na dimensão e ordem perturbativa consideradas e são definidos por

$$I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (3.99)$$

$$I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (3.100)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (3.101)$$

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (3.102)$$

e

$$\begin{aligned} \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Assim como ocorreu na EDQ<sub>3</sub>, a lagrangiana e conseqüentemente as regras de Feynman são as mesmas que aquelas mostradas no estudo da EDQ<sub>4</sub>. Assim, a expressão matemática referente a um valor do momento interno do loop para a auto-energia do fóton é dado por

$$\pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(q_2, m) = e^2 t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m), \quad (3.104)$$

onde definimos a função de dois pontos bivetorial puramente fermiônica

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = Tr \left[ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right]. \quad (3.105)$$

Substituindo os valores dos traços a expressão acima toma a forma

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= 4 \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \\
&\quad + 2g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \right].
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Nos deparamos então com as seguintes estruturas de momento

$$\frac{1}{D_1}, \frac{1}{D_{12}}, \frac{k_\mu}{D_1 D_2} \text{ e } \frac{k_\mu k_\nu}{D_1 D_2}. \tag{3.107}$$

Todas estas estruturas se tornarão divergentes quando procedermos a integração do momento do loop. Utilizando a representação adequada para os propagadores envolvidos poderemos escrever estas estruturas de momento na forma

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{D_1} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - (\lambda^2 - m^2) \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} + k_1^\alpha k_1^\beta \left[ \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\alpha\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \\
&\quad + (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} - (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad - 12k_1^\alpha k_1^\beta (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{D_1 D_2} \right]_{\text{pares}} &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
&\quad - [(k_2^2 + \lambda^2 - m^2) + (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)] \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{(A_2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_2} + \frac{(A_1)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_1} + \frac{A_1 A_2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_{12}}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu}{D_1 D_2} \right]_{\text{pares}} &= -(k_1 + k_2)^\nu \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + [(k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) k_1^\nu + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) k_2^\nu] \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) k_1^\nu \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) k_2^\nu \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad - \frac{k_\mu (A_1) (A_2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} - \frac{k_\mu (A_1)^2 (A_2)}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} - \frac{k_\mu (A_2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_2} - \frac{k_\mu (A_1)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{12}},
\end{aligned} \tag{3.110}$$

e

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k_\mu k_\nu}{D_1 D_2} \right]_{\text{pares}} &= \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
&- \left[ (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \right] \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&+ 4 \left( k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&+ \left[ (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2)^2 + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \right. \\
&\quad \left. + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 \right] \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&- \left[ (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^3 + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2)^3 + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2)^2 (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \right] \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
&- 4 (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \left[ k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_1^\beta + 2k_1^\alpha k_2^\beta \right] \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
&- 4 (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \left[ k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + 2k_1^\alpha k_2^\beta \right] \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
&+ \frac{(A_1) (A_2)^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5 D_2} + \frac{(A_1)^2 (A_2)^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5 D_2} + \frac{(A_1)^3 (A_2) k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5 D_2} + \frac{(A_1)^4 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_{12}}.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Como um exemplo da versão integrada das estruturas mostramos abaixo o resultado da integração de duas delas

$$\begin{aligned}
(I_1) &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{D_1} \\
&= I_{\text{cub}}^{(5)}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\text{lin}}^{(5)}(\lambda^2) + k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{16\pi^2} \left\{ (\lambda^2 - m^2) (-\lambda^2)^{1/2} - \frac{2}{3} \left[ (-m^2)^{3/2} - (-\lambda^2)^{3/2} \right] \right\}, \tag{3.112}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I_2) &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{D_{12}} \\
&= I_{\text{lin}}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2} \xi_0^{1/2}(q_2; m^2; \lambda^2). \tag{3.113}
\end{aligned}$$

A integração das demais estruturas acima permitem escrever

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} = & -\frac{4}{3} (q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) \left\{ I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \right. \\
& \left. + \frac{6i}{(4\pi)^2} \left[ \xi_2^{1/2}(q_2^2; m^2; \lambda^2) - \xi_1^{1/2}(q_2^2; m^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
& + S_{\mu\nu}^{(5)},
\end{aligned} \tag{3.114}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu}^{(5)} = & 4\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \\
& - 2 \left[ (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) + (k_2^2 + \lambda^2 - m_2^2) \right] \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \\
& - 2 (k_2 + k_1)_\nu (k_2 + k_1)^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) \\
& + \frac{2}{3} q_{2\mu} q_2^\alpha \Delta_{3;\nu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} q_2^\alpha q_2^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \\
& + \frac{1}{3} \left[ q^\alpha q^\beta + 3 (k_2 + k_1)^\alpha (k_2 + k_1)^\beta \right] \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2).
\end{aligned} \tag{3.115}$$

e as funções finitas

$$\xi_k^{(1/2)}(q_2^2; m^2; \lambda^2) = \int_0^1 z^k dz \left\{ [Q(q_2^2, z)]^{\frac{1}{2}} - (-\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \tag{3.116}$$

com

$$Q(q_2^2, z) = q_2^2(1-z)z - m^2. \tag{3.117}$$

Porém o resultado (3.114) de nada nos vale se não estivermos seguros da consistência do mesmo. Tal consistência pode ser testada através da verificação das relações entre funções de Green. A fim de procedermos esta investigação realizamos o cálculo da função de um ponto vetorial. Esta função de Green é escrita como

$$t_\mu^V(k_1, m) = Tr \left[ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right], \tag{3.118}$$

podendo ser colocada na seguinte forma

$$t_\mu^V(k_1, m) = 4 \frac{k_\mu}{D_1} + 4k_{1\mu} \frac{1}{D_1}. \quad (3.119)$$

Obtemos, após utilizarmos formas adequadas aos propagadores, ao integrarmos

$$\begin{aligned} T_\mu^V(k_1, m) &= -\frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \left[ \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \right] - 4k_1^\alpha \left[ \Delta_{2;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) \right] \\ &+ 4(k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_1^\alpha \left[ \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (3.120)$$

A contração do momento externo com o resultado (3.114) gera diretamente

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = q_2^\mu S_{\mu\nu}^{(5)}, \quad (3.121)$$

onde

$$\begin{aligned} q_2^\mu S_{\mu\nu}^{(5)} &= -\frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\rho \left[ \square_{4;\alpha\beta\rho\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] - 4k_1^\alpha \left[ \Delta_{2;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] + 4(k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_1^\alpha \left[ \Delta_{3;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] \\ &+ \frac{4}{3} k_2^\alpha k_2^\beta k_2^\rho \left[ \square_{4;\alpha\beta\rho\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] + 4k_2^\alpha \left[ \Delta_{2;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right] - 4(k_2^2 + \lambda^2 - m^2) k_2^\alpha \left[ \Delta_{3;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

e desta forma identificamos

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m). \quad (3.123)$$

Da mesma forma podemos mostrar que

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m). \quad (3.124)$$

A conservação das correntes vetoriais somente ocorrerá após a identificação das *condições de consistência*. A nulidade da função de um ponto vetorial, as conservações da corrente vetorial no tensor de polarização e a ausência de ambiguidades nas soluções das amplitudes somente podem ser obtidas se

$$\square_{4;\alpha\beta\rho\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0, \quad (3.125)$$

$$\Delta_{2;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0, \quad (3.126)$$

$$\Delta_{3;\alpha\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0. \quad (3.127)$$

Em consequência disto obtemos

$$T_{\mu\nu}^{VV} = -\frac{4}{3}(q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) \left\{ I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{6i}{(4\pi)^2} \left[ \xi_2^{1/2}(q_2^2; m^2; \lambda^2) - \xi_1^{1/2}(q_2^2; m^2; \lambda^2) \right] \right\}, \quad (3.128)$$

$$T_\mu^V(k_1, m) = 0. \quad (3.129)$$

O objeto divergente  $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$  ainda presente no tensor de polarização pode ser absorvido em um processo de renormalização. Embora não apresentados aqui os resultados para os cálculos das demais amplitudes e a verificação de suas propriedades, afirmamos que estes são obtidos igualmente consistentes.

### 3.7 Comentários finais

Neste capítulo consideramos a eletrodinâmica quântica ao nível perturbativo 1-loop em formulações tri e pentadimensionais. Vimos que a prescrição utilizada para o cálculo das amplitudes divergentes no capítulo anterior pode ser utilizada nestas casos (em dimensões ímpares) de modo rigorosamente idêntico. Os passos seguidos são os mesmos e as definições introduzidas são análogas. Isto reforça o que dissemos na introdução deste trabalho: *o caráter geral da estratégia que utilizaremos para o cálculo de amplitudes divergentes faz com tal prescrição seja utilizada exatamente da mesma forma em qualquer*

*teoria ou modelo, independentemente das simetrias utilizadas ou da dimensão considerada.*

Além disso, vimos que mesmo quando estamos considerando teorias fora da dimensão física as ambiguidades não desempenham nenhum papel nas soluções finais das amplitudes perturbativas. Esta observação caracteriza o caráter preditivo inerente à prescrição, pois os resultados para as amplitudes são escritos completamente em termos de quantidades físicas, ou seja, são naturalmente livres de ambiguidades.

Dois pontos que merecem ser destacados são o modo natural como surgiu o termo gerador de massa para o fóton quando consideramos a EDQ<sub>3</sub> e o caráter renormalizável encontrado para o tensor de polarização do vácuo no estudo da EDQ<sub>5</sub>.

# Capítulo 4

## Anomalias Finitas em $D=1+1$

### 4.1 Introdução

Uma teoria quântica de campos é gerada a partir da quantização de uma teoria clássica. Mas o que devemos esperar, ou exigir, da versão quantizada de uma teoria? Segundo a literatura [1], uma vez que o modo como os campos (partículas) irão interagir é uma consequência direta do conteúdo de simetria utilizado na construção da teoria clássica podemos atribuir um status especial às simetrias. Logo é esperado que a versão quantizada da teoria mantenha o mesmo conteúdo de simetria utilizado na construção da teoria clássica.

Na versão quantizada de uma teoria, os objetos de estudo são o gerador funcional e as funções de Green. A validade das leis de conservação clássicas induzem, através da álgebra de correntes, relações envolvendo funções de Green com diferentes números de pontos e estas relações são as chamadas identidades de Ward-Takahashi, ou simplesmente identidades de Ward no caso dos geradores das simetrias serem abelianos. Estas relações, vistas por hora apenas como consequências do conteúdo de simetria da versão clássica da teoria, tornam-se de fundamental importância quando investigamos a unitariedade e a renormalizabilidade das teorias quânticas que tais simetrias geraram.

A literatura destaca também que existem modelos, especialmente aqueles contendo

partículas quirais ou correntes axiais, para os quais as identidades de Ward não são todas satisfeitas e atribuem esta característica a uma não implementação quântica do conteúdo de simetria contido no modelo clássico associado [2], [3], [4], [20], [22]. Se as violações das identidades de Ward são referentes a uma simetria global então apenas as regras de seleção clássicas não seriam obedecidas no nível quântico e certos processos que seriam proibidos classicamente poderiam ocorrer quanticamente. Porém, se a simetria não implementada for uma simetria local teríamos problemas na interpretação da teoria quântica de campos construída, uma vez que tais violações poderiam implicar em não-renormalizabilidade ou não-unitariedade caso a simetria não preservada fosse uma simetria interna dos campos [21]. A esta catastrófica observação deu-se o nome de *anomalias* [23].

As funções de Green, em termos das quais as identidades de Ward são estabelecidas, são escritas como combinações de integrais de Feynman e estas possuem geralmente um caráter divergente. Logo a verificação ou não das identidades de Ward passa pela escolha de uma prescrição de tratamento destas integrais divergentes. Deste modo as anomalias foram inicialmente vistas como efeitos perturbativos resultantes da regularização inadequada de alguma integral divergente [24], [23]. Mais tarde percebeu-se que as anomalias não eram devidas à regularização utilizada, mas refletiam conceitos fundamentais da teoria quântica de campos. Uma vez alcançado este patamar de importância, as consequências da existência das anomalias passaram a ser estudadas com maior profundidade o que levou a entender que as anomalias constituíam uma via de dois caminhos. Se por um lado deveríamos exigir o seu cancelamento, mesmo às custas da suposição de partículas ainda não observadas, a fim de preservarmos a renormalizabilidade e a unitariedade, por outro deveríamos exigir a sua presença para que nossas previsões teóricas estivessem de acordo com a fenomenologia observada.

O primeiro problema onde as anomalias tiveram papel decisivo foi na explicação do decaimento eletromagnético do pión neutro em dois fótons. A fenomenologia deste decaimento está diretamente associada ao comportamento de baixa energia da função de Green de três pontos com dois vértices vetoriais e um vértice axial, ao que chamaremos

daqui por diante de amplitude  $AVV$ . O divergente da corrente axial é dado classicamente pela seguinte relação

$$\partial_\mu A^\mu = 2imP, \quad (4.1)$$

onde utilizamos a definição das correntes  $P = \bar{\Psi}\gamma_5\Psi$  e  $A^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$ . Tal relação implica na seguinte identidade de Ward

$$(p_1 + p_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV}(p_1, p_2; m^2) = 2mT_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}(p_1, p_2; m^2), \quad (4.2)$$

com  $p_1$  e  $p_2$  sendo os momentos externos.

Sem a presença de anomalias podemos prever o comportamento

$$\lim_{(p_1+p_2)^2 \rightarrow 0} \left[ (p_1 + p_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV}(p_1, p_2; m^2) \right] = 0, \quad (4.3)$$

o que por sua vez implicaria em

$$\lim_{(p_1+p_2)^2 \rightarrow 0} T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}(p_1, p_2; m^2) = 0, \quad (4.4)$$

ou seja, não observaríamos o decaimento do pión neutro. Com a redefinição da amplitude  $AVV$  através da introdução do termo anômalo encontramos um valor não nulo para a taxa de decaimento do pión. Além disso este valor está em boa concordância com o valor experimentalmente observado. Tal concordância experimental somente seria alcançada com a suposição de que os quarks existem em três estados diferentes, o que mais tarde foi chamado de grau de liberdade de cor.

No que diz respeito ao cancelamento das anomalias para a preservação da unitariedade e da renormalizabilidade podemos citar a construção do modelo padrão e do espectro das partículas elementares. O único modo de salvar a renormalizabilidade e a unitariedade de uma teoria é assegurarmos que a contribuição total para as anomalias de todos os diagramas seja zero, promovendo assim um cancelamento geral das anomalias. Isto implica

em condições sobre o conteúdo fermiônico do modelo e indicou que deveriam existir um balanço exato entre o número de quarks e de léptons.

Tais conclusões puderam ser obtidas realizando-se somente o estudo ao nível um loop para os processos envolvidos, pois segundo mostrou o teorema de Adler-Bardeen [25], toda a contribuição para as anomalias quirais são dadas pela contribuição de mais baixa ordem e deste modo as anomalias não recebem contribuições de correções radiativas.

Existem outras sub-áreas da teoria quântica de campos onde as anomalias adquiriram papel de destaque. Nas teorias de cordas observamos a violação da simetria de Weyl (generalização das transformações conformes para espaços curvos), que gera a conhecida anomalia de Weyl. Lá, assim como na construção do modelo padrão, devemos ter um cancelamento desta anomalia, o que somente ocorre se considerarmos que o espaço tenha as chamadas dimensões críticas de 26 dimensões para o caso de considerarmos apenas cordas bosônicas ou 10 dimensões se considerarmos uma teoria de supercordas, onde introduzimos a supersimetria para gerar excitações fermiônicas a partir das excitações bosônicas da corda. A versão mais simples desta anomalia de Weyl é chamada de *anomalia de escala* e aparece quando tratamos a cromodinâmica quântica (CDQ) no limite quiral. O Lagrangeano da CDQ no limite quiral apresenta todos os quarks sem massa e a constante de acoplamento adimensional, o que significa que tal modelo apresenta uma simetria de escala. Quando procedemos o cálculo da função beta vemos que a mesma é diferente de zero, ou seja, ocorre uma quebra da invariância de escala, o que por sua vez gera a chamada liberdade assintótica. Tal escala é conhecida como a escala de confinamento de cor e nos fornece informações acerca das massas dos hádrons, incluindo prótons e nêutrons. A liberdade assintótica ainda permite darmos um tratamento perturbativo a CDQ, pois à altas energias o acoplamento tende a ser pequeno, justificando assim a expansão perturbativa em ordens da constante de acoplamento. Outra importante área de estudo onde figuram as anomalias é na evaporação de buracos negros, conhecida como Efeito Hawking, a qual é atualmente explicada com base na Anomalia de Weyl em duas dimensões [26], [20].

Mas o problema das anomalias não pode ser considerado um problema já fechado e talvez nem correta e completamente compreendido. Na literatura, as anomalias tiveram seu foco mudado da escolha do método de regularização para a impossibilidade de realizarmos escolhas sobre as arbitrariedades envolvidas na solução perturbativa das teorias quânticas de campos, mais precisamente na impossibilidade de escolhermos shifts nas variáveis de integração de integrais divergentes de modo que todas as identidades de Ward associadas a amplitude estudada fossem satisfeitas. Porém, se queremos ver as anomalias como elas de fato são, um conteúdo fundamental das teorias quânticas de campos, essa correlação não seria a esperada e não pode ser fundamentada como a explicação para o seu surgimento.

Podemos também lembrar que as ambiguidades são uma característica intrínseca ao tratamento perturbativo das teorias quânticas de campos. Logo em modelos nos quais pode-se obter soluções exatas (alguns modelos em duas dimensões) não ocorre o surgimento de ambiguidades e desta forma, se existir a ocorrência de anomalias, estas não poderão ser entendidas da mesma forma como são apresentadas na literatura. Ainda podemos ressaltar que em vários trabalhos, tanto os primordiais no assunto [24] [27] como os recentes [23], as anomalias estão associadas diretamente a existência de divergências.

Porém, mesmo quando soluções perturbativas são necessárias, as anomalias não deveriam ser justificadas com base nas ambiguidades. Lembremos que é possível mostrar que em todas as dimensões pares encontraremos inevitáveis violações das identidades de Ward. Elas estão presentes em tensores (funções de Green) que contém um número ímpar de vértices axiais com os demais sendo vértices vetoriais e o menor número possível de propagadores fermiônicos. Em  $D=1+1$  encontramos a amplitude  $AV$  anômala, já em  $D=1+3$  temos as famosas anomalias triangulares  $AVV$  e  $AAA$ . Por sua vez em  $D=1+5$  poderemos ter as anomalias nos diagramas box  $AVVV$  e  $AAAA$  e assim para cada nova dimensão. Então promovemos o seguinte questionamento: Tensores como os acima citados, mas contendo um número maior que o mínimo de propagadores fermiônicos, apresentarão anomalias? Estes seriam os diagramas triangulares  $AVV$  e  $AAA$  em  $D=1+1$ , os diagramas box  $AVVV$  e  $AAAV$  em  $D=1+3$ , etc. Neste caso estaríamos tratando de amplitudes finitas

e não existem argumentos que proíbam a existência de anomalias nos referidos diagramas. Caso venhamos a caracterizar estas amplitudes finitas como anômalas poderemos concluir que as ambiguidades e as divergências não podem desempenhar nenhum papel relevante na descrição do fenômeno das anomalias.

Podemos mostrar que as estruturas gerais de cada um dos tensores acima citados na sua respectiva dimensão dão suporte à existência das anomalias, sendo as amplitudes divergentes apenas as que contém estruturas de menor complexidade.

Para enfatizarmos ainda mais esta questão iremos analisar detalhadamente o problema das anomalias finitas em  $D=1+1$  através da investigação da amplitude AVV. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados também na referência [28].

## 4.2 Modelo de estudo e definição da notação

A fim de desenvolvermos a investigação a que nos propomos, neste capítulo consideramos um modelo bastante geral contendo somente uma espécie de férmion massivo de spin  $\frac{1}{2}$  que é acoplado a campos pseudo-escalares, vetoriais e axial-vetores. Estes acoplamentos podem ser representados pelo seguinte Lagrangeano de interação

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = ie_P(\bar{\Psi}\gamma_3\Psi)\pi - e_V(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu - e_A(\bar{\Psi}\gamma_3\gamma^\mu\Psi)W_\mu^A, \quad (4.5)$$

onde as matrizes  $\gamma^\mu$  e  $\gamma_3$  são matrizes de Dirac em  $D=1+1$ ,  $\Psi$  é o campo fermiônico massivo,  $\pi$  é um campo pseudo-escalar e  $A_\mu$  e  $W_\mu^A$  são respectivamente os campos vetorial e axial-vetor.

As constantes de acoplamento  $e_P$ ,  $e_V$ , e  $e_A$  serão tomadas unitárias por simplificação dos resultados sem comprometer em nada nossas futuras conclusões. A lagrangiana acima apresenta duas importantes propriedades envolvendo as correntes fermiônicas vetorial, axial e pseudo-escalar

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma_3 \gamma^\mu \Psi) = 2mi(\bar{\Psi} \gamma_3 \Psi) = 2miP. \end{cases} \quad (4.6)$$

A conservação da corrente vetorial e a relação entre a corrente axial e aquela pseudo-escalar implicarão em relações entre funções de Green com diferentes números de pontos e, do ponto de vista usual, tais relações deverão ser verificadas pelas soluções das amplitudes associadas para que estas soluções carreguem o conteúdo de simetria do modelo.

Afim de investigarmos estas verificações iremos definir nossas amplitudes através dos dois conhecidos passos. O primeiro é a construção das amplitudes, seguindo as regras de Feynman, para um valor de momento interno do loop. Após realizarmos as convenientes modificações nos propagadores realizamos o segundo passo, a integração sobre o momento irrestrito do loop.

Para uma função de Green de  $n$  pontos teremos

$$t^{\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \dots \Gamma_{n_i}} = Tr \{ \Gamma_{n_1} S_F(k + k_{a_1}; m) \Gamma_{n_2} S_F(k + k_{a_2}; m) \\ \times \Gamma_{n_3} S_F(k + k_{a_3}; m) \dots \Gamma_{n_i} S_F(k + k_{a_n}; m) \}, \quad (4.7)$$

onde o propagador fermiônico tem a mesma definição dos capítulos anteriores

$$S_F = \frac{1}{(k + k_a) - m} = \frac{(k + k_a) + m}{D_a}, \quad (4.8)$$

com

$$D_a = [(k + k_a)^2 - m^2]. \quad (4.9)$$

A amplitude será gerada após computarmos a contribuição de todos os possíveis valores do momento irrestrito do loop, ou seja,

$$T^{\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \dots \Gamma_{n_i}} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} t^{\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \dots \Gamma_{n_i}}. \quad (4.10)$$

Os operadores  $\Gamma_n$  em (4.7) são os operadores dos vértices dos diagramas, e neste capítulo poderão assumir as seguintes formas

$$\Gamma_n = \gamma_3; \gamma_\alpha; \gamma_\alpha \gamma_3, \quad (4.11)$$

respeitando a álgebra das matrizes de Dirac

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \quad (4.12)$$

com a matriz de quiralidade tendo a definição

$$\gamma_3 = \frac{1}{2!} \varepsilon^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta. \quad (4.13)$$

Para a análise das anomalias finitas em D=1+1 necessitaremos do cálculo de amplitudes com 1, 2 e 3 pontos. Estas amplitudes podem ser escritas respectivamente como

$$t^{\Gamma_{n_1}} = \frac{(k + k_{a_1})^\alpha}{D_{a_1}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha] + \frac{m}{D_{a_1}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1}], \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} t^{\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2}} &= \frac{(k + k_{a_1})^\alpha (k + k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta] \\ &+ m \frac{(k + k_{a_1})^\alpha}{D_{a_1 a_2}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2}] + m \frac{(k + k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \gamma_\beta] \\ &+ m^2 \frac{1}{D_{a_1 a_2}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2}], \end{aligned} \quad (4.15)$$

e

$$\begin{aligned} t^{\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3}} &= + \frac{(k + k_{a_1})^\alpha (k + k_{a_2})^\beta (k + k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \\ &+ m \frac{(k + k_{a_2})^\beta (k + k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \\ &+ m \frac{(k + k_{a_1})^\alpha (k + k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \\ &+ m \frac{(k + k_{a_1})^\alpha (k + k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3}] \\ &+ m^2 \frac{(k + k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \\ &+ m^2 \frac{(k + k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m^2 \frac{(k+k_{a_1})^\alpha}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3}] \\
& +m^3 \frac{1}{D_{a_1 a_2 a_3}} \text{Tr} [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3}].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

### 4.3 Amplitudes Triangulares

Na seção anterior encontramos a estrutura geral para as amplitudes de 1, 2 e 3 pontos. Se assumirmos na expressão (4.16) as escolhas  $\Gamma_{n_1} = \gamma_\lambda \gamma_3$ ,  $\Gamma_{n_2} = \gamma_\mu$ ,  $\Gamma_{n_3} = \gamma_\nu$  e  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$  estaremos com a estrutura referente a um valor de momento interno da amplitude AVV. Após substituímos os traços de Dirac pelos seus respectivos valores poderemos escrever esta estrutura como

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \varepsilon_{\lambda\alpha} t_{\mu\nu}^{\alpha(-++)} - \varepsilon_{\lambda\mu} t_\nu^{PPV} - \varepsilon_{\lambda\nu} t_\mu^{PVP} + g_{\mu\nu} t_\lambda^{APP}. \tag{4.17}$$

Aqui temos adotado a definição para o tensor

$$t_{\beta\rho}^{\alpha(s_1 s_2 s_3)} = t_{\beta\rho}^{\alpha(s_1)123} - t_{\beta\rho}^{\alpha(s_2)312} - t_{\beta\rho}^{\alpha(s_3)231}, \tag{4.18}$$

onde  $s_i = \pm 1$  e

$$t_{\beta\rho}^{\alpha(s_n)(ijl)} = 2(k+k_i)^\alpha \frac{(k+k_j)_\beta (k+k_l)_\rho + (s_n)(k+k_j)_\rho (k+k_l)_\beta}{D_{123}}. \tag{4.19}$$

As funções de três pontos identificadas em (4.17) aparecem naturalmente quando os traços de Dirac são tomados. Elas correspondem as expressões obtidas da definição (4.16) tomando as correspondentes escolhas para os vértices  $\Gamma_{n_1}$ ,  $\Gamma_{n_2}$  e  $\Gamma_{n_3}$ . Explicitamente

$$\begin{aligned}
\frac{t_\nu^{PPV}}{2} &= \left\{ (k+k_3)_\nu [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] \right. \\
&\quad - (k+k_2)_\nu [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] \\
&\quad \left. - (k+k_1)_\nu [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] \right\} \frac{1}{D_{123}},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t_\mu^{PVP}}{2} &= \left\{ (k+k_2)_\mu [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] \right. \\
&\quad - (k+k_3)_\mu [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] \\
&\quad \left. - (k+k_1)_\mu [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] \right\} \frac{1}{D_{123}}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{t_\lambda^{APP}}{2} &= -\varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ (k+k_1)^\alpha [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] \right. \\
&\quad - (k+k_3)^\alpha [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] \\
&\quad \left. - (k+k_2)^\alpha [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] \right\} \frac{1}{D_{123}} \\
&+ \varepsilon_{\alpha\beta} \left\{ (k+k_2)_\lambda (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta \right. \\
&\quad - (k+k_1)_\lambda (k+k_3)^\alpha (k+k_2)^\beta \\
&\quad \left. - (k+k_3)_\lambda (k+k_2)^\alpha (k+k_1)^\beta \right\} \frac{1}{D_{123}}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

A identificação de subestruturas no cálculo das amplitudes é importante em dois aspectos. Primeiro permite que realizemos o cálculo das amplitudes através do cálculo de estruturas mais simples e procedamos a verificação das relações entre funções de Green também de uma forma mais clara e organizada. O segundo aspecto se evidencia quando estamos tratando amplitudes divergentes, pois podemos considerar condições de consistência para cada subestrutura individualmente. Estes dois aspectos permitem que analisemos todas as amplitudes de uma forma universal, tratando estruturas matemáticas idênticas da mesma forma, independente de onde apareçam. Esta é uma condição necessária se quisermos tratar as amplitudes de uma forma consistente que permita obtermos conclusões claras acerca do que nos propomos. Porém, antes de avançarmos na determinação das amplitudes vamos considerar algumas relações envolvendo as funções de Green presentes neste estudo.

## 4.4 Relações entre funções de Green

A decomposição em termos de subestruturas encontrada na seção anterior nos mostrou que a avaliação das funções de Green de três pontos com um índice axial e dois vetoriais envolve a avaliação de amplitudes com mesmo número de pontos mas com um número de índices de Lorentz menor. É esperado que estas subestruturas satisfaçam também suas relações de simetria, o que significa que devemos encontrar todas as correntes vetoriais conservadas como decorrência de (4.6). A investigação da conservação da corrente vetorial se dá através da nulidade do resultado da contração dos índices de Lorentz vetoriais da correspondente amplitude com seus momentos externos. Entretanto, antes de realizarmos a investigação em torno das identidades de Ward podemos estabelecer as relações entre funções de Green e utilizar estas relações como guias de consistência.

Como um exemplo consideramos a relação entre funções de Green que envolve a função de dois pontos bivetorial onde temos

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) = t_\nu^V(k_1; m) - t_\nu^V(k_2; m), \quad (4.23)$$

Esta relação é a mesma mostrada nos estudos realizados em outras dimensões. Novamente esperamos que após a integração ser realizada a relação acima permaneça válida.

Na presente investigação nós teremos, além da relação (4.23), as contrações com os índices vetoriais

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = t_\mu^V(k_1) - t_\mu^V(k_2), \quad (4.24)$$

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = t_\mu^A(k_1) - t_\mu^A(k_2), \quad (4.25)$$

$$q_3^\mu t_\mu^{PVP}(k_1, k_2, k_3) = t^{PP}(k_1, k_2) - t^{PP}(k_3, k_2), \quad (4.26)$$

$$q_2^\nu t_\nu^{PPV}(k_1, k_2, k_3) = t^{PP}(k_1, k_3) - t^{PP}(k_2, k_3), \quad (4.27)$$

e

$$q_3^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) = t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) - t_{\mu\nu}^{AV}(k_3, k_2), \quad (4.28)$$

$$q_2^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) = t_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3) - t_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2). \quad (4.29)$$

De um modo completamente similar podemos estabelecer relações através da contração do momento externo com os índices axiais de uma amplitude. Teremos

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = t_\nu^A(k_1) - t_\nu^A(k_2) + 2m [t_\nu^{PV}(k_1, k_2)], \quad (4.30)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) = t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) - t_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_3) - 2mt_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3). \quad (4.31)$$

Na dimensão considerada podemos ainda estabelecer relações envolvendo funções de Green que contenham um número ímpar de matrizes de quiralidade com aquelas que possuem um número par destas matrizes. Como um exemplo podemos citar a relação entre as funções de um ponto

$$t_\mu^A(k_1) = -\varepsilon_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} [t_\beta^V(k_1)]. \quad (4.32)$$

Um dos aspectos mais relevantes das relações estabelecidas acima se encontra ao analisarmos as relações (4.28), (4.29) e (4.31). Estas relações indicam que para obtermos conclusões claras acerca da ocorrência de anomalias em amplitudes finitas é indispensável que tenhamos uma compreensão consistente para a amplitude divergente e anômala  $AV$ . Se não estivermos seguros de qual estrutura representa a amplitude  $AV$  não poderemos verificar a validade das mencionadas relações com a forma integrada das estruturas identificadas.

Para a solução das amplitudes divergentes envolvidas no estudo deste capítulo utilizaremos a prescrição apresentada nos capítulos anteriores. Ao utilizarmos tal metodologia

para a solução das amplitudes divergentes poderemos escrever a parte divergente das amplitudes em termos dos objetos

$$\Delta_{\mu\nu}^{(2)}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (4.33)$$

e

$$I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.34)$$

Já para a parte finita será escrita como combinação das funções

$$\xi_k^{(-1)}(q_i^2; m^2) = \int_0^1 dz \frac{z^k}{Q(q_i^2; m^2; z)}, \quad (4.35)$$

onde

$$Q(q_i^2; m^2; z) = q_i^2(1-z)z - m^2, \quad (4.36)$$

e

$$\xi_{mn}^{(-l)}(q_2^2, q_3^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^m y^n}{[Q(q_2^2, q_3^2; m^2; z, y)]^l}, \quad (4.37)$$

onde

$$Q(q_2^2, q_3^2; m^2; z, y) = q_2^2(1-y)y + q_3^2(1-z)z - 2(q_2 \cdot q_3)zy - m^2. \quad (4.38)$$

## 4.5 Consistência no cálculo perturbativo em $D=1+1$

O conjunto de vínculos construídos na seção anterior, juntamente com as relações de simetria, constituem um conjunto apreciável de imposições a serem estabelecidas sobre os resultados finais das amplitudes físicas. Estas imposições nos servirão de guias de consistência sobre os resultados obtidos. Antes disso porém vamos investigar se é possível a expressão para a amplitude satisfazer simultaneamente todos os vínculos.

Como um primeiro exemplo estudamos a forma mais geral para o tensor de polarização da EDQ<sub>2</sub>. Este é proporcional a função de Green de dois pontos bivectorial, obtida ao escolhermos  $\Gamma_{n_1} = \gamma_\mu$  e  $\Gamma_{n_2} = \gamma_\nu$  em (4.15). Se ele é um tensor de rank-2, a forma mais geral para ele será

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu} [F_1(q_2^2)] + q_{2\mu}q_{2\nu} [F_2(q_2^2)], \quad (4.39)$$

onde as  $F_i(q_j^2)$  são funções invariantes de Lorentz e  $q_i$  é o momento externo.

Ao realizarmos a contração com o momento externo  $q_2^\mu$  teremos

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_{2\nu} [F_1(q_2^2)] + q_2^2 q_{2\nu} [F_2(q_2^2)]. \quad (4.40)$$

Se impormos que o tensor de polarização satisfaz a conservação da corrente vetorial dada pela relação

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0, \quad (4.41)$$

teremos

$$q_{2\nu} [F_1(q_2^2)] + q_2^2 q_{2\nu} [F_2(q_2^2)] = 0 \rightarrow F_1(q_2^2) = -q_2^2 F_2(q_2^2), \quad (4.42)$$

e a forma mais geral para a função de Green bivectorial passa a ter a forma

$$T_{\mu\nu}^{VV} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) F_2(q_2^2). \quad (4.43)$$

Podemos também estabelecer mais uma relação entre as funções  $F_1$  e  $F_2$  através da análise de um limite de baixa energia. Lembrando da condição (4.42) teremos

$$[F_1(q_2^2)]_{q_2^2=0} = 0. \quad (4.44)$$

Porém a relação (4.23), após integrada, irá gerar

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2), \quad (4.45)$$

onde as funções de um ponto vetorial acima relacionadas apresentam as soluções puramente ambíguas

$$T_{\mu}^V(k_1) = -2k_1^{\alpha} \Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2), \quad (4.46)$$

e

$$T_{\mu}^V(k_2) = -2k_2^{\alpha} \Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2). \quad (4.47)$$

Notamos então uma aparente contradição entre as relações (4.41) e (4.45). Se solucionarmos a função de Green  $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)$  seguindo os passos que temos utilizado ao longo deste trabalho encontraremos

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m^2) = 2\Delta_{\mu\nu}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{i}{\pi} \left[ \frac{q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2}{q_2^2} \right] \left[ 1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(q_2^2; m^2) \right]. \quad (4.48)$$

Procedendo a contração com momento externo

$$\begin{aligned} q_2^{\mu} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m^2) &= 2q_2^{\mu} \Delta_{\mu\nu}^{(2)}(\lambda^2) \\ &= T_{\nu}^V(k_1) - T_{\nu}^V(k_2), \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou seja, a relação entre funções de Green é preservada pelas formas calculadas mesmo os resultados encontrados possuindo ambiguidades. Mas se a relação entre funções de Green foi preservada o mesmo não pode ser dito para a relação de simetria obtida da conservação da corrente vetorial, pelo menos aparentemente.

Notemos ainda que não existem escolhas acerca dos valores dos momentos internos que sejam capazes de fazer com que a função de Green satisfaça a conservação da corrente vetorial e que respeitem a conservação de energia e momento em cada um dos vértices.

Embora pareça que o resultado por nós obtido para as amplitudes envolvidas na investigação desta seção não sejam consistentes, podemos afirmar que estas inconsistências

são apenas aparentes e estão presentes pois ainda mantemos o objeto divergente (4.33) indefinido.

Sobre este objeto é interessante também salientarmos que a sua presença não condiz com a forma mais geral que o tensor  $T_{\mu\nu}^{VV}$  pode assumir após as imposições das conservações das correntes vetoriais, o que nos levaria a prever que este termo é potencialmente violador de simetria.

A análise acima nos conduz a chamada *relação de consistência* para a dimensão em discussão. Os resultados encontrados para as amplitudes somente serão consistentes se adotarmos que o objeto  $\Delta_{\mu\nu}^{(2)}(\lambda^2)$ , definido por (4.33) e que é uma diferença de integrais com o mesmo grau de divergência, for identicamente nulo.

Tal escolha faz com que todas as amplitudes, divergentes ou finitas, satisfaçam a conservação da corrente vetorial bem como as imposições advindas do teorema de Furry e além disso se apresentem completamente não ambíguas, referente tanto ao momento das linhas internas quanto em relação à escala arbitrária, dependendo somente de parâmetros dotados de significado físico.

Além disso, obtemos a relação do limite de baixa energia (4.42) satisfeita, pois identificaremos

$$F_1(q_2^2) = \left[ 1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(q_2^2; m^2) \right], \quad (4.50)$$

e

$$\left[ 1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(q_2^2; m^2) \right]_{q_2^2=0} = 0. \quad (4.51)$$

Se estamos adotando que a prescrição utilizada para obtermos as conclusões acima é consistente e universal, devemos obter resultados consistentes para quaisquer amplitudes divergentes em D=1+1 após impormos a *relação de consistência* e em momento algum poderemos assumir um valor diferente para (4.33) que não aquele identicamente nulo.

## 4.6 Amplitude anômala AV

Podemos realizar uma investigação análoga a mostrada acima para a função de Green  $AV$ . Novamente, antes de verificarmos se o resultado obtido para a amplitude  $AV$  satisfaz as relações entre funções de Green e as relações de simetria vamos descobrir o que podemos esperar em relação a estas verificações. Esta análise é fundamental para que possamos compreender a amplitude divergente  $AV$  e avançar no estudo da ocorrência ou não de anomalias na amplitude finita  $AVV$ .

A amplitude  $AV$  possui a estrutura tensorial de um pseudo-tensor de rank 2 em duas dimensões. A forma mais geral para este tensor é dada por

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu} G_1(q_2^2) + \varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\alpha q_{2\nu} G_2(q_2^2) + \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha q_{2\mu} G_3(q_2^2), \quad (4.52)$$

onde os  $G_i(q_2^2)$  são funções invariantes de Lorentz e  $q_2$  é novamente o momento externo.

Devemos esperar, das relações (4.6), as seguintes condições

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \quad (4.53)$$

e

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 2m T_\nu^{PV}. \quad (4.54)$$

Realizando a contração da expressão (4.52) com o momento externo  $q_2^\nu$  obteremos

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu} q_2^\alpha G_1(q_2^2) + \varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\alpha q_2^2 G_2(q_2^2). \quad (4.55)$$

Impondo a conservação da corrente vetorial obteremos a seguinte relação entre os invariantes

$$G_1(q_2^2) = -q_2^2 G_2(q_2^2). \quad (4.56)$$

Já para a contração com o índice axial encontraremos

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha [q_2^2 G_3(q_2^2) - G_1(q_2^2)], \quad (4.57)$$

que após utilizarmos a relação (4.56) toma a forma

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = q_2^2 \{ \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha [G_3(q_2^2) + G_2(q_2^2)] \}. \quad (4.58)$$

Notamos então que a contração do momento externo com o índice axial da função de Green apresenta o seguinte comportamento no limite cinemático  $q_2^2 \rightarrow 0$ ,

$$[q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV}]_{q_2^2 \rightarrow 0} = 0. \quad (4.59)$$

Mas como a divergência da corrente axial deve ser proporcional a corrente pseudo-escalar devemos verificar a relação de simetria (4.54). A forma mais geral para a amplitude  $T_\nu^{PV}$  é dada por

$$T_\nu^{PV} = \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha \Gamma(q_2^2), \quad (4.60)$$

e desta forma

$$\frac{q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV}}{2m} = \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha \Gamma(q_2^2), \quad (4.61)$$

ou seja, se a relação entre funções de Green for satisfeita devemos esperar o seguinte comportamento

$$[\Gamma(q_2^2)]_{q_2^2 \rightarrow 0} = 0, \quad (4.62)$$

indicando que a amplitude  $T_\nu^{PV}$  deve se anular em tal limite.

Por outro lado, ao realizarmos o cálculo da amplitude  $T_\nu^{PV}$ , encontraremos um resultado finito e dado por

$$T_\nu^{PV} = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} m q_2^\alpha \xi_0^{-1}(m^2; q^2), \quad (4.63)$$

e usando

$$\xi_0^{-1}(q_2^2; m^2) = -\frac{1}{m^2} \left[ 1 + \frac{q_2^2}{6m^2} + O(q_2^4) \right], \quad (4.64)$$

veremos que no limite cinemático  $q_2^2 \rightarrow 0$  a amplitude  $T_\nu^{PV}$  assume o valor

$$[T_\nu^{PV}]_{q_2^2 \rightarrow 0} = -\frac{i}{2m\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha. \quad (4.65)$$

Concluimos então que existe uma inconsistência entre a verificação da relação de simetria (4.54) e o limite de baixa energia na contração do momento externo com o índice axial da amplitude  $AV$ . Ou seja, as condições

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 2mT_\nu^{PV}, \quad (4.66)$$

e

$$\lim_{q_2^2 \rightarrow 0} q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \quad (4.67)$$

não podem ser simultaneamente verificadas pois a estrutura  $q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV}$  não pode apresentar o mesmo comportamento que a estrutura  $T_\nu^{PV}$  no ponto cinemático  $q_2^2 = 0$ .

Do acima exposto entendemos que as três propriedades de simetria referentes a função de Green  $AV$  não podem ser simultaneamente satisfeitas. Como consideramos a forma mais geral para o tensor esta conclusão é independente de a amplitude considerada ser divergente ou não ou de possuir uma caráter ambíguo. Se a conservação da corrente vetorial bem como o limite de baixa energia são satisfeitos então a identidade de Ward axial irá ser invariavelmente violada. Este é o fenômeno da anomalia  $AV$  bidimensional.

Procedendo o cálculo da amplitude  $AV$  encontraremos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m^2) &= -2\varepsilon_{\mu\alpha} \Delta_\nu^{(2)\alpha}(\lambda^2) \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\mu\nu} q_2^2 - \varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\alpha q_{2\nu}}{q_2^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_2^2; m^2)], \end{aligned} \quad (4.68)$$

que satisfaz a relação

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m^2) = -\varepsilon_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} T_{\beta\nu}^{VV}(k_1, k_2; m^2). \quad (4.69)$$

Realizando a contração do momento externo com o índice vetorial encontraremos

$$\begin{aligned} q_2^\nu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) &= -2\varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\nu \Delta_\nu^{(2)\alpha}(\lambda^2) \\ &= T_\mu^A(k_1) - T_\mu^A(k_2). \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde as funções de um ponto axiais possuem as soluções completamente ambíguas

$$T_\mu^A(k_i) = 2\varepsilon_{\mu\alpha} k_{i\beta} \Delta^{(2)\beta\alpha}(\lambda^2). \quad (4.71)$$

A contração do momento externo com o índice axial gera

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = -2\varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\mu \Delta_\nu^{(2)\alpha}(m^2) + (2m) \left[ \frac{i}{2\pi} m \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha \xi_0^{-1}(q_2; m) \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha \quad (4.72)$$

$$= T_\nu^A(k_1) - T_\nu^A(k_2) + 2m T_\nu^{PV}(k_1, k_2) + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha. \quad (4.73)$$

Notamos que a relação entre funções de Green relacionada a contração do momento externo com o índice vetorial é satisfeita mas que aquela referente a contração com o índice axial não. Lembrando da relação de consistência estabelecida na seção anterior, vemos que

$$T_\mu^A(k_1) = T_\mu^V(k_1) = 0, \quad (4.74)$$

implicando que no estudo das relações de simetria da amplitude  $AV$  encontramos a corrente vetorial conservada

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = 0. \quad (4.75)$$

Já a proporcionalidade da divergência da corrente axial com a corrente pseudo-escalar é violada

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = 2m T_\nu^{PV}(k_1, k_2) + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} q_2^\alpha.$$

Estes resultados eram aqueles previstos para a forma mais geral para a função de Green  $AV$ . Nos resta apenas investigar se o limite de baixa energia na contração com o índice axial está correto. Utilizando o resultado (4.65) na expressão acima encontraremos

$$\lim_{q_2^2 \rightarrow 0} q_2^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = 0. \quad (4.76)$$

É importante salientarmos que não existe escolha possível acerca das arbitrariedades que possam conduzir a um resultado para a amplitude  $AV$  que satisfaça todas suas relações de simetria. A imposição  $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = 0$  é a única escolha possível para que tenhamos a conservação da corrente vetorial sem violarmos a simetria translacional e a conservação dos momentos em todos os vértices. Se assumimos um valor diferente de zero para o objeto  $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$  a fim de verificarmos a proporcionalidade entre a corrente axial e a pseudo-escalar estaremos tornando nossos resultados inconsistentes por violarem a conservação da corrente vetorial.

Nós agora estamos prontos para realizar a investigação envolvendo a amplitude  $AVV$ , pois sabemos que a estrutura

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m^2) = -\frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\mu\nu} q_2^2 - \varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\alpha q_{2\nu}}{q_2^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_2^2; m^2)], \quad (4.77)$$

deve ser identificada como a função de Green  $AV$ . Tal expressão satisfaz a conservação da corrente vetorial, satisfaz o limite de baixa energia na contração com o índice axial mas apresenta a proporcionalidade entre a corrente axial e a corrente pseudo-escalar violada.

## 4.7 Amplitudes Triangulares

Ao procedermos a integração da estrutura (4.16) vemos que pela contagem de potências todas as funções com três pontos são finitas. Embora aparentemente mais simples, a solução destas amplitudes envolve um grande esforço algébrico e a sua solução sem uma sistematização semelhante a que promovemos para a parte finita das amplitudes divergentes seria impraticável.

Para a amplitude  $AVV$  nós inicialmente lembramos que foi possível, após a operação de traço, escrevermos

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \varepsilon_{\lambda\alpha} t_{\mu\nu}^{\alpha(-++)} - \varepsilon_{\lambda\mu} t_{\nu}^{PPV} - \varepsilon_{\lambda\nu} t_{\mu}^{PVP} + g_{\mu\nu} t_{\lambda}^{APP}. \quad (4.78)$$

Após somarmos a contribuição referente a todos os possíveis valores de momento de cada uma das estruturas identificadas no lado direito da expressão acima, encontraremos

$$\begin{aligned} (-i\pi) T_{\mu\nu}^{\alpha(-++)} = & + (q_{2\nu} g_{\mu}^{\alpha} + q_{2\mu} g_{\nu}^{\alpha} + q_2^{\alpha} g_{\mu\nu}) \xi_{01}^{-1} + (q_{3\nu} g_{\mu}^{\alpha} + q_{3\mu} g_{\nu}^{\alpha} + q_3^{\alpha} g_{\mu\nu}) \xi_{10}^{-1} \\ & + 2q_2^{\alpha} q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{03}^{-2} + 2(q_3^{\alpha} q_{2\mu} q_{2\nu} + q_2^{\alpha} q_{3\mu} q_{2\nu} + q_2^{\alpha} q_{2\mu} q_{3\nu}) \xi_{12}^{-2} \\ & + 2q_3^{\alpha} q_{3\mu} q_{3\nu} \xi_{30}^{-2} + 2(q_3^{\alpha} q_{3\mu} q_{2\nu} + q_3^{\alpha} q_{2\mu} q_{3\nu} + q_2^{\alpha} q_{3\mu} q_{3\nu}) \xi_{21}^{-2} \\ & - (q_3 + q_2)^{\alpha} \left[ \frac{g_{\nu\mu}^{\alpha}}{2} \xi_{00}^{-1} + q_{2\nu} q_{2\mu} \xi_{02}^{-2} + (q_{2\nu} q_{3\mu} + q_{3\nu} q_{2\mu}) \xi_{11}^{-2} + q_{3\nu} q_{3\mu} \xi_{20}^{-2} \right] \\ & - q_{2\nu} \left[ \frac{g_{\nu}^{\alpha}}{2} \xi_{00}^{-1} + q_{2\mu} q_2^{\alpha} \xi_{02}^{-2} + (q_{2\mu} q_3^{\alpha} + q_{3\mu} q_2^{\alpha}) \xi_{11}^{-2} + q_{3\mu} q_3^{\alpha} \xi_{20}^{-2} \right] \\ & - q_{3\mu} \left[ \frac{g_{\lambda}^{\alpha}}{2} \xi_{00}^{-1} + q_{2\lambda} q_2^{\alpha} \xi_{02}^{-2} + (q_{2\lambda} q_3^{\alpha} + q_{3\lambda} q_2^{\alpha}) \xi_{11}^{-2} + q_{3\lambda} q_3^{\alpha} \xi_{20}^{-2} \right] \\ & + q_3^{\alpha} q_{2\nu} [q_{2\mu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\mu} \xi_{10}^{-2}] + q_2^{\alpha} q_{3\mu} [q_{2\nu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\nu} \xi_{10}^{-2}], \quad (4.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-4i\pi) T_{\nu}^{PPV} = & (q_3 - q_2)_{\nu} \xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m) + q_{3\nu} \xi_0^{-1} (q_3; m) \\ & - 2 [q_3^2 - (q_3 \cdot q_2)] [q_{2\nu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\nu} \xi_{10}^{-2}] \\ & + (q_3^2 q_{2\nu} - q_2^2 q_{3\nu}) \xi_{00}^{-2}, \quad (4.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-4i\pi) T_\mu^{PVP} &= -(q_3 - q_2)_\mu \xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m) + q_{2\mu} \xi_0^{-1} (q_2; m) \\
&\quad - 2 [q_2^2 - (q_3 \cdot q_2)] [q_{2\mu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\mu} \xi_{10}^{-2}] \\
&\quad + [q_2^2 q_{3\mu} - q_3^2 q_{2\mu}] \xi_{00}^{-2}, \tag{4.81}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(-4i\pi) T_\lambda^{APP} &= +\varepsilon_{\lambda\alpha} q_3^\alpha \xi_0^{-1} (q_3; m) + \varepsilon_{\lambda\alpha} q_2^\alpha \xi_0^{-1} (q_2; m) \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\alpha} (q_3 \cdot q_2) (q_2^\alpha \xi_{01}^{-2} + q_3^\alpha \xi_{10}^{-2}) \\
&\quad - \varepsilon_{\lambda\alpha} (q_2^2 q_3^\alpha + q_3^2 q_2^\alpha) \xi_{00}^{-2}. \tag{4.82}
\end{aligned}$$

A junção destas estruturas conforme (4.78) gera

$$\begin{aligned}
(-i\pi) T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ (q_{2\nu} g_\mu^\alpha + q_{2\mu} g_\nu^\alpha + q_2^\alpha g_{\mu\nu}) \xi_{01}^{-1} + (q_{3\nu} g_\mu^\alpha + q_{3\mu} g_\nu^\alpha + q_3^\alpha g_{\mu\nu}) \xi_{10}^{-1} \right. \\
&\quad + 2q_2^\alpha q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{03}^{-2} + 2(q_3^\alpha q_{2\mu} q_{2\nu} + q_{2\mu} q_3^\alpha q_{2\nu} + q_2^\alpha q_{2\mu} q_{3\nu}) \xi_{12}^{-2} \\
&\quad + 2q_3^\alpha q_{3\mu} q_{3\nu} \xi_{30}^{-2} + 2(q_3^\alpha q_{3\mu} q_{2\nu} + q_3^\alpha q_{2\mu} q_{3\nu} + q_2^\alpha q_{3\mu} q_{3\nu}) \xi_{21}^{-2} \\
&\quad - (q_2 + q_3)^\alpha \left[ \frac{g_{\nu\mu}}{2} \xi_{00}^{-1} + q_{2\mu} q_{2\nu} \xi_{02}^{-2} + (q_{2\nu} q_{3\mu} + q_{3\nu} q_{2\mu}) \xi_{11}^{-2} + q_{3\nu} q_{3\mu} \xi_{20}^{-2} \right] \\
&\quad - q_{2\nu} \left[ \frac{g_\mu^\alpha}{2} \xi_{00}^{-1} + q_2^\alpha q_{2\mu} \xi_{02}^{-2} + (q_{2\mu} q_3^\alpha + q_{3\mu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-2} + q_{3\mu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-2} \right] \\
&\quad - q_{3\mu} \left[ \frac{g_\nu^\alpha}{2} \xi_{00}^{-1} + q_{2\nu} q_2^\alpha \xi_{02}^{-2} + (q_{2\nu} q_3^\alpha + q_{3\nu} q_2^\alpha) \xi_{11}^{-2} + q_{3\nu} q_3^\alpha \xi_{20}^{-2} \right] \\
&\quad \left. + q_3^\alpha q_{2\nu} (q_{2\mu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\mu} \xi_{10}^{-2}) + q_2^\alpha q_{3\mu} (q_{2\nu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\nu} \xi_{10}^{-2}) \right\} \\
&+ \frac{1}{4} \left\{ (q_3 - q_2)^\alpha (\varepsilon_{\lambda\nu} g_{\alpha\mu} - \varepsilon_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu}) \xi_0^{-1} (q_3 + q_2; m) \right. \\
&\quad + q_3^\alpha (g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha} - \varepsilon_{\lambda\mu} g_{\nu\alpha}) \xi_0^{-1} (q_3; m) - q_2^\alpha (\varepsilon_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha}) \xi_0^{-1} (q_2; m) \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu} [q_3^2 - (q_3 \cdot q_2)] (q_{3\nu} \xi_{10}^{-2} + q_{2\nu} \xi_{01}^{-2}) + \varepsilon_{\lambda\mu} (q_3^2 q_\nu + q_2^2 q_{3\nu}) \xi_{00}^{-2} \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\nu} [q^2 + (q_3 \cdot q_2)] (q_{3\mu} \xi_{10}^{-2} + q_{2\mu} \xi_{01}^{-2}) - \varepsilon_{\lambda\nu} (q_2^2 q_{3\mu} - q_3^2 q_{2\mu}) \xi_{00}^{-2} \\
&\quad \left. + 2\varepsilon_{\lambda\alpha} (q_3 \cdot q_2) (q_2^\alpha \xi_{01}^{-2} + q_3^\alpha \xi_{10}^{-2}) - \varepsilon_{\lambda\alpha} (q_2^2 q_3^\alpha + q_3^2 q_2^\alpha) \xi_{00}^{-2} \right\}. \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Além das funções acima, necessitamos também da solução da função  $T_{\mu\nu}^{PVV}$  para que possamos promover a verificação das relações entre funções de Green. Teremos então

$$\begin{aligned}
[-4i\pi] T_{\mu\nu}^{PVV} &= 2m\varepsilon_{\mu\alpha} [2q_3^\alpha (q_{2\nu}\xi_{01}^{-2} + q_{3\nu}\xi_{10}^{-2}) - (q_3^\alpha q_{2\nu} + q_2^\alpha q_{3\nu}) \xi_{00}^{-2}] \\
&\quad - 2m\varepsilon_{\nu\alpha} [2q_2^\alpha (q_{2\mu}\xi_{01}^{-2} + q_{3\mu}\xi_{10}^{-2}) - (q_2^\alpha q_{3\mu} + q_3^\alpha q_{2\mu}) \xi_{00}^{-2}] \\
&\quad + 2m [g_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta} q_3^\alpha q_2^\beta + \varepsilon_{\mu\nu} (q_3 \cdot q_2)] \xi_{00}^{-2} - 2m\varepsilon_{\mu\nu} \xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m) \quad (4.84)
\end{aligned}$$

## 4.8 Relações entre Funções de Green

A sistematização utilizada para expressar a parte finita das amplitudes permitiu que encontrássemos uma forma simples e organizada para a solução final das amplitudes consideradas. Porém, para procedermos a verificação das relações de simetria e das relações entre funções de Green torna-se inevitável utilizarmos um conjunto de relações que envolvam as funções  $\xi_m^{-1}$ ,  $\xi_{mn}^{-1}$  e  $\xi_{mn}^{-2}$ . Este conjunto é dado pelas relações

$$q_2^2 \xi_{01}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{10}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_0^{-1} (q_3^2; m^2) + q_2^2 \xi_{00}^{-2}], \quad (4.85)$$

$$q_3^2 \xi_{10}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{01}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_0^{-1} (q_2^2; m^2) + q_3^2 \xi_{00}^{-2}], \quad (4.86)$$

$$q_2^2 \xi_{02}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{11}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_{00}^{-1} + q_2^2 \xi_{01}^{-2}], \quad (4.87)$$

$$q_2^2 \xi_{20}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{11}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2, m^2) - \xi_{00}^{-1} + q_3^2 \xi_{10}^{-2}], \quad (4.88)$$

$$q_2^2 \xi_{11}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{20}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_1^{-1} (q_3^2; m^2) + q_2^2 \xi_{10}^{-2}], \quad (4.89)$$

$$q_3^2 \xi_{11}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{02}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2, m^2) - \xi_1^{-1} (q_2^2, m^2) + q_3^2 \xi_{01}^{-2}], \quad (4.90)$$

$$q_2^2 \xi_{03}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{12}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_2^{-1} (q_3 - q_2, m^2) - 2\xi_{01}^{-1} + q_2^2 \xi_{02}^{-2}], \quad (4.91)$$

$$q_3^2 \xi_{30}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{21}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - 2\xi_{10}^{-1} + q_3^2 \xi_{20}^{-2}], \quad (4.92)$$

$$q_2^2 \xi_{21}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{30}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_2^{-1} (q_2^2; m^2) + q_2^2 \xi_{20}^{-2}], \quad (4.93)$$

$$q_3^2 \xi_{12}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{03}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_2^{-1} (q_2^2; m^2) + q_3^2 \xi_{02}^{-2}], \quad (4.94)$$

$$q_3^2 \xi_{21}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{12}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_{01}^{-1} + q_3^2 \xi_{11}^{-2}], \quad (4.95)$$

$$q_2^2 \xi_{12}^{-2} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{21}^{-2} = \frac{1}{2} [\xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - \xi_{10}^{-1} + q_2^2 \xi_{11}^{-2}], \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} q_3^2 \xi_{10}^{-1} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{01}^{-1} &= \frac{1}{2} \{ (q_3 - q_2)^2 \xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - 2 (q_3 - q_2)^2 \xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) \\ &\quad - p^2 \xi_1^{-1} (q_2^2; m^2) + 2q_2^2 \xi_2^{-1} (q_2^2; m^2) + q_3^2 \xi_{00}^{-1} \}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} q_2^2 \xi_{01}^{-1} + (q_2 \cdot q_3) \xi_{10}^{-1} &= \frac{1}{2} \{ (q_3 - q_2)^2 \xi_1^{-1} (q_3 - q_2; m^2) - 2 (q_3 - q_2)^2 \xi_2^{-1} (q_3 - q_2; m^2) \\ &\quad - q_3^2 \xi_1^{-1} (q_3^2; m^2) + 2q_3^2 \xi_2^{-1} (q_3^2; m^2) + q_2^2 \xi_{00}^{-1} \}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

e

$$q_3^2 \xi_{10}^{-2} + q_2^2 \xi_{01}^{-2} = \xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m^2) + 2m^2 \xi_{00}^{-2}, \quad (4.99)$$

além da redução

$$\xi_2^{-1}(q_i; m) = -\frac{1}{q_i^2} + \frac{q_i^2 - 2m^2}{2q_i^2} \xi_0^{-1}(q_i; m). \quad (4.100)$$

Em adiao  as relaoes acima  necessário utilizarmos também uma propriedade análoga aquela conhecida como identidade de Schouten em 4 dimensões. Tal relaao, em  $D=1+1$ , é dada por

$$\varepsilon_{\mu\nu} q_{i\lambda} + \varepsilon_{\nu\lambda} q_{i\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu} q_{i\nu} = 0, \quad (4.101)$$

Com estes resultados torna-se possível estabelecer os seguintes resultados para as contraoes dos momentos externos com a soluao da amplitude  $AVV$

$$\begin{aligned} q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -\frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\lambda\mu} q_3^2 - \varepsilon_{\lambda\alpha} q_3^\alpha q_{3\mu}}{q_3^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_i; m)] \\ &+ \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\lambda\mu} (q_3 - q_2)^2 - \varepsilon_{\lambda\alpha} (q_3 - q_2)^\alpha (q_3 - q_2)_\mu}{(q_3 - q_2)^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_3 - q_2; m)], \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} q_3^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -\frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\lambda\nu} q_2^2 - \varepsilon_{\lambda\alpha} q_2^\alpha q_{2\nu}}{q_2^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_2; m)] \\ &+ \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\lambda\nu} (q_3 - q_2)^2 - \varepsilon_{\lambda\alpha} (q_3 - q_2)^\alpha (q_3 - q_2)_\nu}{(q_3 - q_2)^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_i; m)], \end{aligned} \quad (4.103)$$

e

$$\begin{aligned} (q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= +\frac{i\varepsilon_{\mu\nu}}{\pi} \\ &- \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\mu\nu} q_2^2 - \varepsilon_{\mu\alpha} q_2^\alpha q_{2\nu}}{q_2^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_2^2; m^2)] \\ &- \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon_{\mu\nu} q_3^2 + \varepsilon_{\nu\alpha} q_3^\alpha q_{3\mu}}{q_3^2} \right] [1 + m^2 \xi_0^{-1}(q_3^2; m^2)] \\ &+ \frac{i}{\pi} \left\{ -m^2 \varepsilon_{\mu\alpha} [2q_3^\alpha (q_{2\nu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\nu} \xi_{10}^{-2}) - (q_3^\alpha q_{2\nu} + q_2^\alpha q_{3\nu}) \xi_{00}^{-2}] \right. \\ &\quad \left. + m^2 \varepsilon_{\nu\alpha} [2q_2^\alpha (q_{2\mu} \xi_{01}^{-2} + q_{3\mu} \xi_{10}^{-2}) - (q_2^\alpha q_{3\mu} + q_3^\alpha q_{2\mu}) \xi_{00}^{-2}] \right. \\ &\quad \left. - m^2 [g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} q_3^\alpha q_2^\beta + \varepsilon_{\mu\nu} (q_3 \cdot q_2)] \xi_{00}^{-2} + m^2 \varepsilon_{\mu\nu} \xi_0^{-1}(q_3 - q_2; m) \right\}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

## 4.9 Análise dos resultados obtidos e a anomalia finita $AVV$

Neste capítulo realizamos um estudo acerca do caráter anômalo da amplitude finita de três pontos  $AVV$  em  $D=1+1$ . Mesmo que este estudo estivesse focado na avaliação de amplitudes finitas vimos que um estudo das funções de Green divergentes de dois pontos era inevitável devido a existência de relações entre funções que envolviam estas amplitudes divergentes e aquelas de nosso principal interesse. Assim, se quiséssemos obter conclusões consistentes acerca das anomalias em funções finitas devíamos antes de tudo ser capazes de obter soluções para as amplitudes divergentes que apareceriam neste estudo bem como uma consistente interpretação acerca do comportamento anômalo destas funções de Green. Sabendo das limitações existentes na avaliação de pseudo-amplitudes divergentes através dos métodos de regularização usuais, optamos por tratá-las segundo a prescrição apresentada e utilizada nos primeiros capítulos deste trabalho.

Com a utilização da referida prescrição obtemos um entendimento claro para o fenômeno das anomalias na amplitude divergente  $AV$  que está em completo acordo com aquele obtido através do estudo da forma tensorial mais geral possível para a função de Green  $AV$ . Este entendimento deixou claro que as anomalias não estão de forma alguma relacionadas com algum tipo de arbitrariedade ou ambiguidade existente na solução de uma amplitude divergente mas são sim uma consequência do número de relações que impomos sobre a amplitude, visto que podemos prever a existência das violações das relações de simetria considerando apenas a forma geral da amplitude.

Após obtermos uma solução consistente com aquilo que esperávamos para a amplitude  $AV$  passamos para o estudo das amplitudes triangulares. Este estudo exigiu um grande esforço algébrico principalmente no estabelecimento das expressões finais para os resultados das contrações das amplitudes triangulares com os seus momentos externos. Os resultados para estas contrações são mostrados nas expressões (4.102) - (4.104). Identificando os resultados (4.77) e (4.84) poderemos escrever estas contrações da seguinte

forma

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m), \quad (4.105)$$

$$q_3^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\mu\nu}^{AV}(k_3, k_2; m), \quad (4.106)$$

e

$$(q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_3; m) - 2mT_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3; m) + \frac{i\varepsilon_{\mu\nu}}{\pi}. \quad (4.107)$$

A identificação das amplitudes nas relações acima facilita a análise dos resultados obtidos. Notamos que mesmo sendo finitas e livres de ambiguidades e arbitrariedades o comportamento das amplitudes triangulares é exatamente o mesmo que aquele mostrado pelas amplitudes anômalas divergentes: *a contração do momento externo com o vértice axial viola inevitavelmente a relação entre funções de Green esperada, o que irá levar a violações de simetria no correspondente processo físico.* Isto nos conduz a uma conclusão clara sobre a amplitude triangular *AVV*: *mesmo finita esta amplitude é anômala.*

O termo que viola a mencionada relação entre funções de Green se converterá no termo anômalo quando considerarmos a simetrização dos estados finais das amplitudes triangulares segundo a simetria de Bose. A presença de tal termo implica que uma teoria não-abeliana irá ter anomalias. Além disso, este termo é justamente aquele necessário para que ocorra a verificação do limite de baixa energia na contração do vértice axial.

Podemos promover uma comparação entre os resultados obtidos neste capítulo e aqueles que seriam obtidos na análise das amplitudes triangulares anômalas em  $D=4$  [29]. Nesta dimensão as amplitudes triangulares são divergentes e pode-se lançar mão, sem restrições, da prescrição utilizada neste trabalho para o cálculo das amplitudes. A parte divergente destas amplitudes poderá ser escrita em termos dos objetos divergentes básicos que são similares a (4.33) e (4.34) mas característicos da dimensão  $D=4$ . A parte finita

poderá ser escrita em termos de funções análogas às (4.35) e (4.37). Como mostrado neste capítulo, este modo de escrever a solução para uma função de Green torna mais simples a obtenção dos resultados das contrações das amplitudes com os seus momentos externos. Ao final é possível obter um resultado que irá automaticamente satisfazer as relações de Green referente a contração com índices vectoriais, conservação da corrente vectorial, mas violará aquela referente ao índice axial. O limite de baixa energia no índice axial é verificado de uma forma completamente análoga ao que mostramos neste capítulo.

As anomalias verificadas neste capítulo podem ser estabelecidas através de argumentos gerais de um modo completamente similar aquele que mostramos no caso da amplitude anômala  $AV$ . Para tal, consideramos a forma mais geral para um pseudo-tensor construído com dois vetores independentes, o símbolo de Levi-Civita e o tensor métrico. Tal expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(q_2, q_3) = & \varepsilon_{\lambda\mu} [q_{2\nu}H_1(q_2, q_3) + q_{3\nu}H_2(q_2, q_3)] \\
& + \varepsilon_{\mu\nu} [q_{2\lambda}H_3(q_2, q_3) + q_{3\lambda}H_4(q_2, q_3)] \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} [q_{2\mu}H_5(q_2, q_3) + q_{3\mu}H_6(q_2, q_3)] \\
& + g_{\lambda\nu}\varepsilon_{\mu\alpha} [q_2^\alpha H_7(q_2, q_3) + q_3^\alpha H_8(q_2, q_3)] \\
& + g_{\nu\mu}\varepsilon_{\lambda\alpha} [q_2^\alpha H_9(q_2, q_3) + q_3^\alpha H_{10}(q_2, q_3)] \\
& + g_{\lambda\mu}\varepsilon_{\nu\alpha} [q_2^\alpha H_{11}(q_2, q_3) + q_3^\alpha H_{12}(q_2, q_3)] \\
& + \varepsilon_{\lambda\alpha} [q_3^\alpha q_{3\mu}q_{3\nu}H_{13}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{3\mu}q_{2\nu}H_{14}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{2\mu}q_{3\nu}H_{15}(q_2, q_3) \\
& \quad + q_3^\alpha q_{2\mu}q_{2\nu}H_{16}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\mu}q_{2\nu}H_{17}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\mu}q_{3\nu}H_{18}(q_2, q_3) \\
& \quad + q_2^\alpha q_{3\mu}q_{2\nu}H_{19}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{3\mu}q_{3\nu}H_{20}(q_2, q_3)] \\
& + \varepsilon_{\nu\alpha} [q_3^\alpha q_{3\mu}q_{3\lambda}H_{21}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{3\mu}q_{2\lambda}H_{22}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{2\mu}q_{3\lambda}H_{23}(q_2, q_3) \\
& \quad + q_3^\alpha q_{2\mu}q_{2\lambda}H_{24}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\mu}q_{2\lambda}H_{25}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\mu}q_{3\lambda}H_{26}(q_2, q_3) \\
& \quad + q_2^\alpha q_{3\mu}q_{2\lambda}H_{27}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{3\mu}q_{3\lambda}H_{28}(q_2, q_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{\mu\alpha} [q_3^\alpha q_{3\lambda} q_{3\nu} H_{29}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{3\lambda} q_{2\nu} H_{30}(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{2\lambda} q_{3\nu} H_{31}(q_2, q_3) \\
& + q_3^\alpha q_{2\lambda} q_{2\nu} H_{32}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\lambda} q_{2\nu} H_{33}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\lambda} q_{3\nu} H_{34}(q_2, q_3) \\
& + q_2^\alpha q_{3\lambda} q_{2\nu} H_{35}(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{3\lambda} q_{3\nu} H_{36}(q_2, q_3)]. \tag{4.108}
\end{aligned}$$

Ao contrairmos o índice axial da expressão acima com o momento externo nós veríamos encontrar um tensor da forma

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{PVV} & = \varepsilon_{\mu\nu} J_1(q_2, q_3) \\
& + \varepsilon_{\mu\alpha} [q_2^\alpha q_{3\nu} J_2(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{2\nu} J_3(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\nu} J_4(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{3\nu} J_5(q_2, q_3)] \\
& + \varepsilon_{\nu\alpha} [q_2^\alpha q_{3\mu} J_6(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{2\mu} J_7(q_2, q_3) + q_2^\alpha q_{2\mu} J_8(q_2, q_3) + q_3^\alpha q_{3\mu} J_9(q_2, q_3)] \\
& + g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} q_2^\alpha q_3^\beta J_{10}(q_2, q_3), \tag{4.109}
\end{aligned}$$

onde  $H_i(q_2, q_3)$  e  $J_i(q_2, q_3)$  são funções invariantes de Lorentz dos momentos indicados.

A contração do tensor que representa a forma mais geral para a amplitude  $AVV$  gera quatro relações entre as funções  $H_i(q_2, q_3)$  e  $J_i(q_2, q_3)$ . Uma destas relações está profundamente relacionada com a anomalia encontrada nas seções anteriores. Nós estamos nos referindo ao termo  $\varepsilon_{\mu\nu}$  que terá a forma

$$\left[ (q_3 - q_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(q_2, q_3) \right]_{\text{termo } \varepsilon_{\mu\nu}} = \varepsilon_{\mu\nu} [((q_3 \cdot q_2) - q_2^2) H_3(q_2, q_3) + (q_3^2 - (q_3 \cdot q_2)) H_4(q_2, q_3)].$$

Como cada termo surgido da contração acima é proporcional a um bilinear nos momentos nós esperamos que o resultado da contração torne-se nulo quando o limite de baixa energia, ( $q_2^2 \rightarrow 0$ ,  $q_3^2 \rightarrow 0$  e  $(q_3 \cdot q_2) \rightarrow 0$ ), for tomado. Porém a expressão contraída deve ser proporcional ao tensor  $PVV$  devido a existência da identidade de Ward. No que diz respeito ao termo  $\varepsilon_{\mu\nu}$  teremos

$$\left[ T_{\mu\nu}^{PVV} \right]_{\text{termo } \varepsilon_{\mu\nu}} = \varepsilon_{\mu\nu} G_1(q_2, q_3), \tag{4.110}$$

que deve igualmente se anular na condição cinemática  $q_2^2 \rightarrow 0$ ,  $q_3^2 \rightarrow 0$  e  $(q_3 \cdot q_2) \rightarrow 0$ .

Ao calcularmos perturbativamente o termo proporcional a  $\varepsilon_{\mu\nu}$  na amplitude  $T_{\mu\nu}^{PVV}$  encontraremos

$$[T_{\mu\nu}^{PVV}]_{\varepsilon_{\mu\nu} \text{ term}} = \frac{i}{2\pi} m \varepsilon_{\mu\nu} [(q_3 \cdot q_2) \xi_{00}^{-2} - \xi_0^{-1} (q_3 - q_2; m)], \quad (4.111)$$

que não se anula como esperado. Logo a contração da amplitude axial com o momento externo não pode ser identificada com a amplitude pseudo-escalar pois não possuem o mesmo comportamento no limite de baixa energia e a relação de simetria será invariavelmente violada.

Através da análise promovida com a forma mais geral possível para os tensores obtemos a mesma conclusão que havia sido obtida quando realizamos o cálculo efetivo das amplitudes consideradas. Isto torna a conclusão de que a amplitude finita AVV em dimensão D=1+1 de fato é anômala, completamente segura.

# Capítulo 5

## Anomalias em $D=1+5$

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior realizamos um detalhado estudo do comportamento anômalo das amplitudes  $AV$  e  $AVV$  em  $D=1+1$ . Conseguimos mostrar que mesmo em amplitudes finitas observamos inevitáveis violações das relações entre funções de Green. Esta não verificação implica na violação das Identidades de Ward. O caráter finito destas amplitudes permitiu concluirmos que as anomalias não estavam ligadas de forma alguma à existência de ambiguidades ou indeterminações presentes no tratamento perturbativo de uma TQC.

Além disso mostramos que a interpretação utilizada para o entendimento da anomalia na amplitude finita  $AVV$  em  $D=1+1$  é utilizada de uma forma completamente análoga para a descrição da anomalia  $AVV$  em  $D=1+3$ . Com esta analogia *indicamos* que mesmo quando as amplitudes consideradas são divergentes as ambiguidades não representam nenhum papel na interpretação consistente deste fenômeno.

Neste capítulo queremos dar um passo definitivo na compreensão e entendimento das anomalias e do papel das ambiguidades nas soluções perturbativas das TQC's. Para isso, realizamos a investigação da ocorrência de violações das relações entre funções de Green na amplitude  $AVVV$  em  $D=1+5$ . Para a amplitude considerada o grau de divergência é mais elevado que aquele encontrado no estudo em  $D=1+3$  e o modelo agora é não

renormalizável.

Mesmo a teoria formulada sendo não renormalizável mostraremos que as anomalias podem ser compreendidas através de uma interpretação única, independente da dimensão que está sendo considerada, do caráter finito ou divergente das amplitudes envolvidas ou de a teoria ser renormalizável ou não.

Poderemos ainda colocar o problema muito semelhantemente ao problema em 2 e 4 dimensões. Como o grau de divergência envolvido é mais severo que aqueles encontrados nos dois modelos, o uso de uma prescrição clara, geral e consistente é imprescindível. Como vimos nos capítulos anteriores, a estratégia que temos utilizado possui a generalidade e a consistência necessárias para manipularmos todas as amplitudes divergentes que surgirem nesta análise.

Por fim, ao termos avaliado as anomalias em diferentes dimensões, poderemos obter uma visão bastante geral para este fenômeno. Veremos que o problema das anomalias é incontornável e que de forma alguma devem ser relacionadas com as arbitrariedades presentes na descrição perturbativa de uma TQC, independente de as amplitudes serem finitas ou divergentes.

## 5.2 Modelo, notação e definições

Afim de desenvolvermos a investigação deste capítulo consideraremos novamente um modelo bastante geral contendo somente uma espécie de férmion massivo de spin  $\frac{1}{2}$  que é acoplado aos campos pseudo-escalares, vetoriais, axial-vetores e tensoriais. Estes acoplamentos podem ser representados pelo seguinte Lagrangeano de interação,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = e_P(\bar{\Psi}\gamma_7\Psi)\pi - e_V(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu - e_A(\bar{\Psi}\gamma_7\gamma^\mu\Psi)W_\mu^A + e_T(\bar{\Psi}\gamma_7\sigma^{\mu\nu}\Psi)H_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde as matrizes  $\gamma^\mu$ ,  $\gamma_7$  e  $\sigma^{\mu\nu}$  são matrizes de Dirac em D=1+5,  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  são os campos fermiônicos massivos,  $\pi$  é um campo pseudo-escalar,  $A_\mu$  é o campo vetorial e  $W_\mu^A$  e  $H_{\mu\nu}$  são, respectivamente, os campos axial-vetor e tensorial.

Ao realizarmos o *power-counting* veremos que os acoplamentos propostos caracterizam um modelo não renormalizável e embora as constantes de acoplamento  $e_P$ ,  $e_V$ ,  $e_A$  e  $e_T$  possuam dimensão, adotaremos elas como unitárias para uma maior simplificação dos resultados.

O Lagrangeano acima apresenta duas importantes propriedades que relacionam as correntes fermiônicas vetorial, axial e pseudo-escalar,

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma_\gamma \gamma^\mu \Psi) = 2mi(\bar{\Psi} \gamma_\gamma \Psi) = 2miP. \end{cases} \quad (5.2)$$

A conservação da corrente vetorial e a relação entre as correntes axial e pseudo-escalar implicam em relações precisas sobre as amplitudes. Estas relações são análogas aquelas encontradas no estudo das anomalias finitas e são chamadas identidades de Ward.

Já o divergente da corrente tensorial não pode ser escrito em termos das demais correntes contidas no modelo. Esta constatação impede que utilizemos o método da álgebra de correntes para encontrarmos vínculos a serem impostos sobre as amplitudes tensoriais. Porém podemos estabelecer relações entre funções de Green envolvendo a amplitude tensorial de uma maneira completamente análoga a que viemos utilizando ao longo dos três capítulos anteriores [30].

Inicialmente definimos as amplitudes envolvidas através dos dois conhecidos passos. O primeiro é a construção das amplitudes a 1-loop, seguindo as regras de Feynman, para um valor do momento irrestrito. Após realizarmos as convenientes modificações nos propagadores passamos para o segundo passo, a integração sobre o momento irrestrito do loop.

Para uma função de Green de  $n$  pontos teremos

$$t^{\Gamma n_1 \Gamma n_2 \dots \Gamma n_i} = Tr [\Gamma_{n_1} S_F(k + k_{a_1}; m) \Gamma_{n_2} S_F(k + k_{a_2}; m) \dots \Gamma_{n_i} S_F(k + k_{a_n}; m)]. \quad (5.3)$$

onde o propagador fermiônico tem a mesma definição dos capítulos anteriores

$$S_F = \frac{1}{\not{E}_n} = \frac{(\not{k} + \not{k}_n) + m}{D_n}, \quad (5.4)$$

com

$$F_n = (k + k_n) - m, \quad (5.5)$$

e

$$D_n = [(k + k_n)^2 - m^2]. \quad (5.6)$$

A verdadeira amplitude é gerada após computarmos a contribuição de todos os possíveis valores do momento através da integração em  $D=1+5$ , ou seja

$$T^{\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\dots\Gamma_{n_n}} = \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6} t^{\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\dots\Gamma_{n_n}}. \quad (5.7)$$

As amplitudes envolvidas nesta investigação são potencialmente divergentes desde que as formas integradas das funções de Green irão gerar um *power-counting* que revela uma contagem quadraticamente divergente para as amplitudes  $AVVV$  e  $PVVV$  e uma contagem cúbica para  $AVV$ . As expressões podem, em princípio, ser contaminadas com ambiguidades em um modo completamente similar ao caso 4D, como é bem conhecido. Aqui o problema pode se tornar ainda mais complicado devido ao elevado grau de divergência contido nos diagramas avaliados. As soluções encontradas irão mostrar a potencialidade de nossa estratégia desde que os resultados obtidos estarão em completo acordo com aquilo que esperamos.

Os operadores  $\Gamma_n$  são os operadores dos vértices dos diagramas e neste capítulo poderão assumir as seguintes formas

$$\Gamma_n = \gamma_\tau; \gamma_\alpha; \gamma_\alpha\gamma_\tau; \gamma_\tau\sigma_{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

respeitando a álgebra das matrizes de Dirac

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \quad (5.9)$$

e

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2i\sigma_{\alpha\beta}, \quad (5.10)$$

com a matriz de quiralidade tendo a definição

$$\gamma_7 = \frac{1}{6!} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\kappa\sigma\tau} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\kappa \gamma_\sigma \gamma_\tau. \quad (5.11)$$

Para a análise da anomalia  $AVVV$  em  $D=1+5$  necessitaremos do cálculo de funções de Green de três e quatro pontos. Estas amplitudes podem ser escritas respectivamente como

$$\begin{aligned} t^{\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}} &= +Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \frac{(k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_2})^\beta (k+k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \\ &+ m Tr [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \frac{(k+k_{a_2})^\beta (k+k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \\ &+ m Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \frac{(k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} \\ &+ m Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3}] \frac{(k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2 a_3}} \\ &+ m^2 Tr [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3} \gamma_\xi] \frac{(k+k_{a_3})^\xi}{D_{a_1 a_2 a_3}} + m^2 Tr [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3}] \frac{(k+k_{a_2})^\beta}{D_{a_1 a_2 a_3}} \\ &+ m^2 Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3}] \frac{(k+k_{a_1})^\alpha}{D_{a_1 a_2 a_3}} + m^3 Tr [\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2} \Gamma_{n_3}] \frac{1}{D_{a_1 a_2 a_3}}. \quad (5.12) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t^{\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}} &= + (k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_2})^\beta (k+k_{a_3})^\rho (k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\rho \Gamma_{n_4} \gamma_\kappa]}{D_{a_1 a_2 a_3 a_4}} \\ &+ m (k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_2})^\beta (k+k_{a_3})^\rho \frac{Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \gamma_\rho \Gamma_{n_4}]}{D_{a_1 a_2 a_3 a_4}} \\ &+ m (k+k_{a_1})^\alpha (k+k_{a_2})^\beta (k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr [\Gamma_{n_1} \gamma_\alpha \Gamma_{n_2} \gamma_\beta \Gamma_{n_3} \Gamma_{n_4} \gamma_\kappa]}{D_{a_1 a_2 a_3 a_4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m(k+k_{a_1})^\alpha(k+k_{a_3})^\rho(k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\gamma_\alpha\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m(k+k_{a_2})^\beta(k+k_{a_3})^\rho(k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\gamma_\beta\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_1})^\alpha(k+k_{a_3})^\rho \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\gamma_\alpha\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_1})^\alpha(k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\gamma_\alpha\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_2})^\beta(k+k_{a_1})^\alpha \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\gamma_\alpha\Gamma_{n_2}\gamma_\beta\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_2})^\beta(k+k_{a_3})^\rho \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\gamma_\beta\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_4})^\kappa(k+k_{a_2})^\beta \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\gamma_\beta\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^2(k+k_{a_4})^\kappa(k+k_{a_3})^\rho \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^3(k+k_{a_1})^\alpha \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\gamma_\alpha\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} + m^3(k+k_{a_2})^\beta \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\gamma_\beta\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^3(k+k_{a_3})^\rho \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\gamma_\rho\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} + m^3(k+k_{a_4})^\kappa \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}\gamma_\kappa]}{D_{a_1a_2a_3a_4}} \\
& +m^4 \frac{Tr[\Gamma_{n_1}\Gamma_{n_2}\Gamma_{n_3}\Gamma_{n_4}]}{D_{a_1a_2a_3a_4}}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Os resultados para os traços que necessitaremos podem ser obtidos através da definição da matriz de quiralidade. Utilizando a definição (5.11) encontraremos

$$\begin{aligned}
\frac{Tr[\gamma_7\gamma_\lambda\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\xi\gamma_\kappa]}{6} &= g_{\lambda\alpha}\varepsilon_{\mu\beta\nu\rho\xi\kappa} - g_{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho\xi\kappa} + g_{\lambda\beta}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho\xi\kappa} - g_{\lambda\nu}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\rho\xi\kappa} \\
&+ g_{\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\xi\kappa} - g_{\lambda\xi}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\rho\kappa} + g_{\lambda\kappa}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\rho\xi} \\
&+ g_{\alpha\mu}\varepsilon_{\lambda\beta\nu\rho\xi\kappa} - g_{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\rho\xi\kappa} - g_{\alpha\rho}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\xi\kappa} \\
&+ g_{\alpha\xi}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\rho\kappa} - g_{\alpha\kappa}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\rho\xi} \\
&+ g_{\mu\beta}\varepsilon_{\lambda\alpha\nu\rho\xi\kappa} - g_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\rho\xi\kappa} + g_{\mu\rho}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\xi\kappa} - g_{\mu\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\rho\kappa} \\
&+ g_{\mu\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\rho\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g_{\beta\nu}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\rho\xi\kappa} - g_{\beta\rho}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\xi\kappa} + g_{\beta\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\rho\kappa} - g_{\beta\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\rho\xi} \\
& +g_{\nu\rho}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\xi\kappa} - g_{\nu\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\rho\kappa} + g_{\nu\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\rho\xi} \\
& +g_{\rho\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\kappa} - g_{\rho\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\xi} \\
& +g_{\xi\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\rho},
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\frac{Tr [\gamma_\tau\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\xi\gamma_\kappa]}{6} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\xi\kappa}, \tag{5.15}$$

$$Tr [\gamma_\tau\gamma_{i_1}\dots\gamma_{i_n} / n < 4] = 0, \tag{5.16}$$

e

$$Tr [\gamma_\tau\gamma_{i_1}\dots\gamma_{i_n} / n = \textit{impar}] = 0. \tag{5.17}$$

Nas expressões acima todos os índices aparecem um mesmo número de vezes, o que nos leva a chamá-los de *traços simetrizados*.

### 5.3 Amplitude AVVV em D=1+5

O primeiro passo para o cálculo de uma amplitude perturbativa física é o estabelecimento da sua estrutura matemática para um valor de momento das linhas internas. A estrutura  $t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  surge ao realizarmos as devidas escolhas em (5.7) para obtermos

$$t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = Tr \left\{ \gamma_\lambda\gamma_\tau \frac{1}{\not{F}_4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{F}_1} \gamma_\nu \frac{1}{\not{F}_2} \gamma_\xi \frac{1}{\not{F}_3} \right\}. \tag{5.18}$$

Quando procedermos a soma das contribuições de todos os possíveis valores do momento indeterminado adicionaremos uma potência sexta de momentos ao numerador.

Realizando a contagem de potências notaremos estar tratando de uma estrutura que apresenta um grau de divergência quadrático.

Usando a expressão (5.13) com as respectivas escolhas dos operadores  $\Gamma_i$  e com os resultados dos traços apresentados na seção anterior poderemos escrever (5.18) como

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}}{6} = & -K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha} [g_{\lambda\alpha}\varepsilon_{\mu\beta\nu\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\mu}\varepsilon_{\lambda\beta\nu\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\xi}\varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\rho\kappa}] \frac{1}{D_{1234}} \\
& -K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha} [g_{\lambda\beta}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho\xi\kappa} + g_{\mu\beta}\varepsilon_{\lambda\alpha\nu\rho\xi\kappa} + g_{\beta\nu}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\rho\xi\kappa} + g_{\beta\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\rho\kappa}] \frac{1}{D_{1234}} \\
& -K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha} [g_{\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\xi\kappa} + g_{\mu\rho}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\xi\kappa} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\xi\kappa} + g_{\rho\xi}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\kappa}] \frac{1}{D_{1234}} \\
& -K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha} [g_{\lambda\kappa}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\rho\xi} + g_{\mu\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\rho\xi} + g_{\nu\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\rho\xi} + g_{\xi\kappa}\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\rho}] \frac{1}{D_{1234}} \\
& + g_{\lambda\mu} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho\xi\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] + g_{\lambda\nu} \left[ \varepsilon_{\alpha\mu\beta\rho\xi\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] + g_{\lambda\xi} \left[ \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\rho\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] \\
& + g_{\mu\nu} \left[ \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\rho\xi\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] + g_{\mu\xi} \left[ \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\rho\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] + g_{\nu\xi} \left[ \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\rho\kappa} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}} \right] \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_1) \cdot (k+k_4) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\xi\kappa} (k+k_2)^\rho (k+k_3)^\kappa \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_2) \cdot (k+k_4) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\xi\kappa} (k+k_1)^\beta (k+k_3)^\kappa \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\xi\kappa} (k+k_3)^\kappa (k+k_4)^\alpha \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_4) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\rho\xi} (k+k_1)^\beta (k+k_2)^\rho \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\rho\xi} (k+k_2)^\rho (k+k_4)^\alpha \\
& + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\xi} (k+k_1)^\beta (k+k_4)^\alpha, \quad (5.19)
\end{aligned}$$

onde

$$K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha} = (k+k_1)^\beta (k+k_2)^\rho (k+k_3)^\kappa (k+k_4)^\alpha. \quad (5.20)$$

Na expressão acima é possível identificarmos as seguintes subestruturas

$$\frac{t_{\lambda\xi}^{APPV}}{6} = \varepsilon_{\lambda\xi\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.21)$$

$$\frac{t_{\lambda\nu}^{APVP}}{6} = -\varepsilon_{\lambda\nu\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.22)$$

$$\frac{t_{\lambda\mu}^{AVPP}}{6} = -\varepsilon_{\lambda\mu\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.23)$$

$$\frac{t_{\nu\xi}^{SPVV}}{6} = -\varepsilon_{\nu\xi\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.24)$$

$$\frac{t_{\mu\xi}^{SVPV}}{6} = \varepsilon_{\mu\xi\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.25)$$

$$\frac{t_{\mu\nu}^{SVVP}}{6} = -\varepsilon_{\mu\nu\beta\rho\kappa\alpha} \frac{K_{1234}^{\beta\rho\kappa\alpha}}{D_{1234}}, \quad (5.26)$$

o tensor

$$\frac{t_{\lambda\mu\nu\xi}}{6} = -\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} t_{\lambda}^{(-+ -)\alpha\beta\rho} + \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\beta\rho} t_{\mu}^{(-+ +)\alpha\beta\rho} + \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\rho} t_{\nu}^{(+ - -)\alpha\beta\rho} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\rho} t_{\xi}^{(- - -)\alpha\beta\rho}, \quad (5.27)$$

onde

$$\begin{aligned} t_{\kappa}^{(s_1 s_2 s_3)\alpha\beta\rho} &= \left[ (k+k_1)_{\kappa} (k+k_2)^{\alpha} (k+k_3)^{\beta} (k+k_4)^{\rho} \right. \\ &\quad + (s_1) (k+k_1)^{\alpha} (k+k_2)_{\kappa} (k+k_3)^{\beta} (k+k_4)^{\rho} \\ &\quad + (s_2) (k+k_1)^{\alpha} (k+k_2)^{\beta} (k+k_3)_{\kappa} (k+k_4)^{\rho} \\ &\quad \left. + (s_3) (k+k_1)^{\alpha} (k+k_2)^{\beta} (k+k_3)^{\rho} (k+k_4)_{\kappa} \right] \frac{1}{D_{1234}}, \quad (5.28) \end{aligned}$$

com  $s = \pm 1$  e a subestrutura tensorial

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [t^{T(\alpha\beta)PPPP}] &= -\frac{1}{D_{1234}} [(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_4)^{\alpha} (k+k_1)^{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_4)^{\alpha} (k+k_2)^{\beta} \\ &\quad - \frac{1}{D_{1234}} [(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_4)^{\alpha} (k+k_3)^{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{D_{1234}} [(k+k_4) \cdot (k+k_3) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \\
& +\frac{1}{D_{1234}} [(k+k_4) \cdot (k+k_2) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_1)^\alpha (k+k_3)^\beta \\
& -\frac{1}{D_{1234}} [(k+k_4) \cdot (k+k_1) - m^2] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} (k+k_2)^\alpha (k+k_3)^\beta.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Com tais identificações a estrutura  $t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  adquire a forma

$$\begin{aligned}
t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = & +t_{\lambda\mu\nu\xi} + \frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [t^{T(\alpha\beta)PPP}] \\
& +g_{\mu\nu}t_{\lambda\xi}^{APPV} + g_{\mu\xi}t_{\lambda\nu}^{APVP} + g_{\nu\xi}t_{\lambda\mu}^{AVPP} - g_{\lambda\mu}t_{\nu\xi}^{SPVV} - g_{\lambda\nu}t_{\mu\xi}^{SVPV} - g_{\lambda\xi}t_{\mu\nu}^{SVVP}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Como evidenciado no capítulo anterior, a forma alcançada para a estrutura acima torna muito mais simples a obtenção de uma solução para a amplitude relacionada pois a integração de cada estrutura pode ser feita separadamente. Também poderemos realizar as contrações com os momentos externos separadamente quando estivermos verificando a validade das relações entre funções de Green.

## 5.4 Vínculos de Consistência

Na seção anterior vimos que a decomposição em termos de subestruturas promovida para  $t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  faz com que ao integrarmos ambos os lados obtenhamos uma relação entre várias funções de Green. Mas esta não é a única relação que podemos obter, pois sempre que contraímos uma amplitude perturbativa com o momento externo encontramos uma relação entre amplitudes com diferentes números de pontos.

Do mesmo modo como estabelecemos as relações entre funções de Green nos capítulos anteriores podemos construir relações envolvendo a estrutura  $t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$ . Estas relações são dadas por

$$(q_2 - q_3)^\xi t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} (k_1, k_2, k_3, k_4; m^2) = t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} (k_4, k_1, k_3; m^2) - t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} (k_4, k_1, k_2; m^2), \quad (5.31)$$

$$q_2^\nu t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} (k_1, k_2, k_3, k_4; m^2) = t_{\lambda\mu\xi}^{AVV} (k_4, k_1, k_3; m^2) - t_{\lambda\mu\xi}^{AVV} (k_4, k_3, k_2; m^2), \quad (5.32)$$

$$q_4^\mu t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} (k_1, k_2, k_3, k_4; m^2) = t_{\lambda\nu\xi}^{AVV} (k_1, k_2, k_3; m^2) - t_{\lambda\nu\xi}^{AVV} (k_4, k_2, k_3; m^2), \quad (5.33)$$

$$(q_3 - q_4)^\lambda t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} (k_1, k_2, k_3, k_4; m^2) = t_{\xi\mu\nu}^{AVV} (k_4, k_1, k_2; m^2) - t_{\mu\nu\xi}^{AVV} (k_1, k_2, k_3; m^2) \\ + 2mt_{\mu\nu\xi}^{PVVV} (k_1, k_2, k_3, k_4; m^2), \quad (5.34)$$

e são uma consequência da álgebra das matrizes de Dirac envolvidas.

Independente do método através do qual as estruturas envolvidas serão manipuladas, ao calcularmos as funções  $AVVV$ ,  $PVVV$  e  $AVV$  deverá ser possível contrair o resultado de  $AVVV$  com os momentos externos e identificar os resultados das amplitudes mostradas nestas relações.

As relações acima são estabelecidas para um valor do momento interno do loop. É esperado que elas sejam verificadas após procedermos a integração sobre o momento indeterminado de cada uma das estruturas relacionadas. A verificação ou não destas relações é de extrema importância na interpretação consistente das amplitudes. Quando a discussão é relativa as anomalias, o conceito das relações entre funções de Green desempenha um papel fundamental desde que elas permitem entender as amplitudes anômalas e as não anômalas de um modo muito claro.

## 5.5 Aspectos gerais da anomalia $AVVV$ em $D=1+5$

Antes de procedermos o cálculo explícito das estruturas envolvidas na avaliação da ocorrência de violações nas relações entre funções de Green obtidas na seção anterior, é

interessante realizarmos uma investigação matemática muito geral acerca das propriedades dos tensores envolvidos. Após esta análise, poderemos realizar uma identificação destes tensores com as amplitudes físicas que surgiram na construção das relações entre funções de Green.

A forma mais geral para um pseudo-tensor em seis dimensões formado com três vetores independentes e quatro índices de Lorentz é dada por

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = & \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left[ p_1^\alpha p_2^\beta F_1 + p_1^\alpha p_3^\beta F_2 + p_2^\alpha p_3^\beta F_3 \right] \\
& + p_{1\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_5 + p_{2\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_6 + p_{3\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_7 \\
& + p_{1\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_8 + p_{2\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_9 + p_{3\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{10} \\
& + p_{1\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{11} + p_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{12} + p_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{13} \\
& + p_{1\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{14} + p_{2\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{15} + p_{3\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_{16},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

onde os  $F_n$  são funções invariantes dos vetores independentes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ .

O tensor  $T_{\lambda\mu\nu\xi}$  poderá mais tarde ser identificado com amplitude  $AVVV$ , assim como os vetores  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  poderão ser associados aos três momentos externos independentes existentes na avaliação desta função de Green. Podemos também associar os três índices de Lorentz  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\xi$  aos índices vetoriais da amplitude  $AVVV$ , e assim estes estariam relacionados às conservações das correntes vetoriais. Já o índice  $\lambda$  estaria relacionado, através da contração com o respectivo momento externo, com a relação entre a corrente axial e a pseudo-escalar.

Ao procedermos a contração com o momento externo  $p_1^\mu$  teremos

$$p_1^\mu T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho \left[ F_3 + (p_1^2) F_8 + (p_1 \cdot p_2) F_9 + (p_1 \cdot p_3) F_{10} \right]. \tag{5.36}$$

Impondo que esta contração se anule,  $p_1^\mu T_{\lambda\mu\nu\xi} = 0$ , para posteriormente à identificarmos com a conservação de uma corrente vetorial, encontraremos a seguinte relação entre

os invariantes

$$F_3 = - (p_1^2) F_8 - (p_1 \cdot p_2) F_9 - (p_1 \cdot p_3) F_{10}. \quad (5.37)$$

Procedendo a contração com o momento externo  $p_2^\nu$  teremos

$$p_2^\nu T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho [F_2 + (p_2 \cdot p_1) F_{11} + (p_2^2) F_{12} + (p_2 \cdot p_3) F_{13}], \quad (5.38)$$

e ao impormos novamente a anulação do resultado da contração acima teremos

$$F_2 = - (p_2 \cdot p_1) F_{11} - (p_2^2) F_{12} - (p_2 \cdot p_3) F_{13}. \quad (5.39)$$

Procedendo a contração com o momento externo  $p_3^\xi$  teremos

$$p_3^\xi T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho [F_1 + (p_1 \cdot p_3) F_{14} + (p_2 \cdot p_3) F_{15} + (p_3^2) F_{16}], \quad (5.40)$$

que ao impormos a sua anulação gera mais uma relação entre invariantes

$$F_1 = - (p_1 \cdot p_3) F_{14} - (p_2 \cdot p_3) F_{15} - (p_3^2) F_{16}. \quad (5.41)$$

Falta-nos então considerar a contração com o momento externo  $(p_1 + p_2 + p_3)^\lambda$ . Ao realizarmos esta contração teremos

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 + p_3)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) &= -\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_3 + (p_1^2) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_5 \\ &+ (p_1 \cdot p_2) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_6 + \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_2 \\ &+ (p_1 \cdot p_3) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_7 + (p_1 \cdot p_2) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_5 \\ &+ (p_2^2) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_6 - \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\lambda} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_1 \\ &+ (p_2 \cdot p_3) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_7 + (p_1 \cdot p_3) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_5 \\ &+ (p_2 \cdot p_3) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_6 + (p_3^2) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho F_7. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Utilizamos agora as relações (5.37), (5.39) e (5.41) para eliminarmos os invariantes  $F_3$ ,  $F_2$  e  $F_1$ . Obteremos então

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_2 + p_3)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = & \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho \{ (p_1 \cdot p_2) [F_9 - F_{11} + F_5 + F_6] \\
& + (p_2 \cdot p_3) [F_{15} - F_{13} + F_6 + F_7] \\
& + (p_1 \cdot p_3) [F_{14} + F_{10} + F_7 + F_5] \\
& + (p_2^2) [F_6 - F_{12}] + (p_3^2) [F_{16} + F_7] \\
& + (p_1^2) [F_8 + F_5] \}. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

O resultado acima pode ser escrito em uma forma mais compacta

$$(p_1 + p_2 + p_3)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = T_{\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3), \tag{5.44}$$

onde

$$T_{\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) = \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\rho \Gamma(p_1, p_2, p_3), \tag{5.45}$$

e todos os termos da estrutura  $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$  são multiplicados por bilineares dos momentos.

A característica mais interessante da expressão acima é que a forma alcançada implica na condição

$$\Gamma(p_1, p_2, p_3) \Big|_{p_i \cdot p_j = 0 \text{ com } i, j = 1, 2, 3} = 0, \tag{5.46}$$

que por sua vez conduz a

$$(p_1 + p_2 + p_3)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}(p_1, p_2, p_3) \Big|_{p_i \cdot p_j = 0 \text{ com } i, j = 1, 2, 3} = 0. \tag{5.47}$$

Estes resultados foram obtidos considerando a forma mais geral possível para os tensores. Deste modo podemos realizar um *link* da análise promovida acima com o estudo da anomalia  $AVVV$  em  $D=1+5$ . Isto ocorre quando identificamos a amplitude  $AVVV$  com o tensor  $T_{\lambda\mu\nu\xi}$  e o tensor  $T_{\mu\nu\xi}$  com a amplitude  $PVVV$ . As relações impostas acima

sobre os tensores correspondem as conservações das correntes vetoriais e a proporcionalidade entre o divergente da corrente axial e a corrente pseudo-escalar. Estas relações são representadas por

$$(q_2 - q_3)^\xi t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}(q_2, q_3, q_4) = 0, \quad (5.48)$$

$$q_2^\nu t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}(q_2, q_3, q_4) = 0, \quad (5.49)$$

$$q_4^\mu t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}(q_2, q_3, q_4) = 0, \quad (5.50)$$

$$(q_3 - q_4)^\lambda t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}(q_2, q_3, q_4) = 2mt_{\mu\nu\xi}^{PVVV}(q_2, q_3, q_4). \quad (5.51)$$

Se as propriedades deduzidas para os tensores são impostas sobre as amplitudes, então obtemos um comportamento para a amplitude  $T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  no limite de baixa energia  $q_i \cdot q_j = 0$  com  $i, j = 2, 3, 4$ :

$$\left[ (q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}(q_2, q_3, q_4) \right]_{q_i \cdot q_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4} = 0, \quad (5.52)$$

Escrevendo a amplitude  $PVVV$  na forma

$$T_{\mu\nu\xi}^{PVVV} = \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\rho} q_2^\alpha q_3^\beta q_4^\rho \Gamma(q_2, q_3, q_4), \quad (5.53)$$

e utilizando a condição (5.47) teremos

$$\left[ T_{\mu\nu\xi}^{PVVV} \right]_{p_i \cdot p_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4} = 0. \quad (5.54)$$

Quando calcularmos as amplitudes  $AVVV$  e  $PVVV$  a um certo nível perturbativo é necessário que tais resultados sejam verificados pelas correspondentes expressões. O mesmo tipo de exercício pode ser feito com todas as amplitudes físicas onde as propriedades gerais dos tensores envolvidos podem ser usadas para estabelecermos limites de baixa energia. No caso que estamos considerando, a expressão matemática referente ao processo físico deve ser construída através da simetrização dos estados finais segundo a simetria de Bose. Isto significa que devemos somar as contribuições dos canais  $s$ ,  $t$  e  $u$ .

Esta simetrização permite também a investigação acerca da verificação das identidades de Ward. Já as relações entre as funções de Green podem ser vistas como mais fundamentais que estas relações por serem válidas canal a canal.

Nossa questão agora é se o resultado das amplitudes ao nível 1-loop construídas através das regras de Feynman lidas da lagrangiana satisfazem as relações esperadas? A resposta é não e de um modo inevitável. Este é o fenômeno da anomalia axial em  $D=1+5$ . Esta situação é completamente similar a que encontramos no capítulo anterior ao estudarmos as anomalias axiais em  $D=1+1$  e seria análoga a que encontraríamos no estudo da anomalia  $AVV$  em  $D=1+3$ .

As dificuldades relacionadas a esta investigação residem no fato das amplitudes perturbativas obtidas com o uso das regras de Feynman serem quantidades potencialmente divergentes e as usuais prescrições de cálculo de integrais divergentes não poderem ser aplicadas diretamente na solução das amplitudes envolvidas. No caso considerado o *power-counting* revela um grau de divergência superficial quadrático, tornando o problema da avaliação da amplitude ainda mais complexo que aquele encontrado em  $D=1+3$ . Por estes motivos adotaremos a estratégia alternativa que temos aplicado em todos os casos estudados neste trabalho e mostraremos que o fenômeno das anomalias aparece de uma forma natural.

A existência de anomalias pode ser colocada de uma forma bastante simples. O primeiro passo é verificar qual o comportamento da solução ao nível 1-loop da amplitude  $PVVV$  no ponto cinemático considerado acima. Ao realizarmos esta tarefa encontraremos um resultado finito para  $PVVV$  mas que não se anula no limite de baixa energia. Assim, mesmo que obtenhamos a amplitude  $T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  de um modo consistente, preservando tanto as identidades referentes as conservações das correntes vetoriais como o limite de baixa energia, não será possível satisfazer a identidade de Ward no índice axial simultaneamente pois a amplitude  $T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}$  e a contração  $(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  não apresentam um mesmo comportamento no ponto cinemático considerado. Estes argumentos são simples de serem formulados mas não é simples obtermos uma comprovação explícita. Nossa proposta é

mostrar através da estratégia alternativa de manipulação de divergências como o comportamento anômalo surge naturalmente quando realizamos uma investigação envolvendo os resultados das amplitudes.

## 5.6 Cálculo explícito das amplitudes

Ao realizarmos o *power-counting* sobre os possíveis diagramas contidos no modelo considerado, veremos que o grau de divergência mais severo é aquele que diverge com uma potência 5 do momento e estaria presente na avaliação da função de um ponto vetorial. Neste caso a representação alternativa que adotariamos para o propagador teria a forma

$$\begin{aligned}
S(k + k_i; m; \lambda^2) &= \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m}{[(k + k_i)^2 - m^2]} \\
&= (\not{k} + \not{k}_i + m) \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right. \\
&\quad + \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^4}{(k^2 - \lambda^2)^5} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad \left. - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^5}{(k^2 - \lambda^2)^6} + \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m^2)^6}{(k^2 - \lambda^2)^6 [(k + k_i)^2 - m^2]} \right\}, \tag{5.55}
\end{aligned}$$

com os objetos divergentes básicos necessários a 1-loop em D=1+5 sendo

$$\left[ \Delta_{2;\mu\nu}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[ \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right], \tag{5.56}$$

$$\left[ \Delta_{3;\mu\nu}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[ \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right], \tag{5.57}$$

$$\left[ \Delta_{4;\mu\nu}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[ \frac{12k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{2g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right], \tag{5.58}$$

$$\left[ \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\nu} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\alpha} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\beta} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\}, \quad (5.59)$$

$$\left[ \square_{5;\mu\alpha\beta\delta}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{96k_\mu k_\alpha k_\beta k_\delta}{(k^2 - \lambda^2)^5} - g_{\mu\alpha} \frac{12k_\beta k_\delta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\beta} \frac{12k_\alpha k_\delta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\delta} \frac{12k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} \right\}, \quad (5.60)$$

$$\left[ \Sigma_{6;\mu\nu\alpha\beta\delta\tau}^{(6)}(\lambda^2) \right] = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{960k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta k_\delta k_\tau}{(k^2 - \lambda^2)^6} - g_{\mu\nu} \frac{96k_\alpha k_\beta k_\delta k_\tau}{(k^2 - \lambda^2)^5} - g_{\mu\alpha} \frac{96k_\nu k_\beta k_\delta k_\tau}{(k^2 - \lambda^2)^5} - g_{\mu\beta} \frac{96k_\nu k_\alpha k_\delta k_\tau}{(k^2 - \lambda^2)^5} - g_{\mu\delta} \frac{96k_\nu k_\alpha k_\beta k_\tau}{(k^2 - \lambda^2)^5} - g_{\mu\tau} \frac{96k_\nu k_\alpha k_\beta k_\delta}{(k^2 - \lambda^2)^5} \right\}, \quad (5.61)$$

$$I_{quart}^{(6)}(\lambda^2) = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (5.62)$$

$$I_{quad}^{(6)}(\lambda^2) = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (5.63)$$

e

$$I_{log}^{(6)}(\lambda^2) = \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3}. \quad (5.64)$$

Estes são os ingredientes necessários para que possamos realizar o cálculo explícito de qualquer amplitude física na dimensão e ordem perturbativa considerada.

Nossa primeira amplitude de interesse é a amplitude  $AVV$ . Após utilizarmos os resultados dos traços envolvidos encontraremos a seguinte expressão

$$T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m^2) = -6\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\xi\kappa} \frac{(k + k_3)^\alpha (k + k_1)^\beta (k + k_2)^\kappa}{D_{123}}, \quad (5.65)$$

Em termos das estruturas de momento encontramos dois elementos. Estes elementos podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{k^\alpha}{D_{123}} \right]_{\text{pares}} &= -\frac{1}{6} (k_{1\beta} + k_{2\beta} + k_{3\beta}) \left[ \frac{12k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{2g^{\alpha\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} (k_1^\alpha + k_2^\alpha + k_3^\alpha) \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{k^\alpha A_3^2}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_3} + \frac{k^\alpha A_{23}}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_3} + \frac{k^\alpha A_{13}}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_3} \\
&\quad + \frac{k^\alpha A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{23}} + \frac{k^\alpha A_{12}}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_{23}} + \frac{k^\alpha A_1^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_{123}}, \quad (5.66)
\end{aligned}$$

e

$$\left[ \frac{1}{D_{123}} \right]_{\text{pares}} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{A_3}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_3} - \frac{A_2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_{23}} - \frac{A_1}{(k^2 - \lambda^2) D_{123}}, \quad (5.67)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{i_1 i_2 \dots i_n} &= (k_{i_1}^2 + 2k_{i_1} \cdot k + \lambda^2 - m^2) \times (k_{i_2}^2 + 2k_{i_2} \cdot k + \lambda^2 - m^2) \times \\
&\quad \dots \times (k_{i_n}^2 + 2k_{i_n} \cdot k + \lambda^2 - m^2). \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Nas formas acima poderemos identificar os termos potencialmente divergentes com os objetos (5.56) - (5.64). Os demais podem ser integrados diretamente. Encontraremos

$$\begin{aligned}
(I^3) &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{D_{123}} \\
&= I_{\log}^{(6)}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^3} \zeta_{00}^0, \quad (5.69)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I^3)^\alpha &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{k^\alpha}{D_{123}} \\
&= -\frac{1}{6} (k_{1\beta} + k_{2\beta} + k_{3\beta}) \Delta_4^{(6)\alpha\beta}(\lambda^2) - \frac{1}{3} (k_1^\alpha + k_2^\alpha + k_3^\alpha) I_{\log}^{(6)}(\lambda^2) \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^3} [q_2^\alpha \zeta_{10}^0 + q_3^\alpha \zeta_{01}^0 + k_1^\alpha \zeta_{00}^0], \quad (5.70)
\end{aligned}$$

onde omitimos o argumento  $(k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2)$  das funções  $\xi_{mn}^0$  que serão posteriormente definidas.

Com estes dois resultados a solução para a amplitude  $T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}$  pode ser escrita como

$$T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m^2) = +\varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\kappa} q_3^\alpha q_2^\beta (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\kappa\rho}(\lambda^2) \right]. \quad (5.71)$$

Notamos o carácter totalmente ambíguo e divergente do resultado acima desde que a combinação  $k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}$  não pode ser escrita em termos dos momentos externos e o parâmetro  $\lambda$  é uma quantidade arbitrária.

As próximas amplitudes que consideraremos são as amplitudes  $T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}$  e  $T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$ . Após utilizarmos os resultados dos traços poderemos escrever

$$t_{\mu\nu\xi}^{PVVV} = +6m\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\rho\kappa} q_4^\alpha q_2^\rho q_3^\kappa \frac{1}{D_{1234}}, \quad (5.72)$$

onde temos o surgimento da estrutura

$$\frac{1}{D_{1234}}. \quad (5.73)$$

Quando procedermos a integração a estrutura acima será finita, e como solução encontraremos

$$\begin{aligned} I^4 &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{D_{1234}} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^3} \xi_{000}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Logo

$$T_{\mu\nu\xi}^{PVVV} = +6m \frac{i}{(4\pi)^3} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\rho\kappa} q_4^\alpha q_2^\rho q_3^\kappa \xi_{000}^{-1}. \quad (5.75)$$

Para o cálculo da amplitude  $AVVV$  inicialmente notamos que para a decomposição (5.30) teremos

$$\begin{aligned}
& g_{\mu\nu}T_{\lambda\xi}^{APPV} + g_{\mu\xi}T_{\lambda\nu}^{APVP} + g_{\nu\xi}T_{\lambda\mu}^{AVPP} - g_{\lambda\mu}T_{\nu\xi}^{SPVV} - g_{\lambda\nu}T_{\mu\xi}^{SVPV} - g_{\lambda\xi}T_{\mu\nu}^{SVVP} \\
= & \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6} [g_{\mu\nu}t_{\lambda\xi}^{APPV} + g_{\mu\xi}t_{\lambda\nu}^{APVP} + g_{\nu\xi}t_{\lambda\mu}^{AVPP} - g_{\lambda\mu}t_{\nu\xi}^{SPVV} - g_{\lambda\nu}t_{\mu\xi}^{SVPV} - g_{\lambda\xi}t_{\mu\nu}^{SVVP}] \\
= & 0.
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Já a estrutura tensorial  $t^{T(\alpha\beta)PPP}$  e o tensor  $t_{\lambda\mu\nu\xi}$  podem ser respectivamente escritos como

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [t^{T(\alpha\beta)PPP}]}{12} = & \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left\{ -q_2^\alpha q_3^\beta \frac{1}{D_{123}} + [q_4^\alpha q_2^\beta - q_3^\beta q_4^\alpha - q_2^\alpha q_3^\beta] \frac{1}{D_{234}} \right. \\
& + q_4^\alpha q_2^\beta \frac{1}{D_{124}} - 3q_4^\alpha q_3^\beta \frac{1}{D_{134}} \\
& + 2(q_3 - q_2)^\alpha \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{234}} - 2q_4^\alpha \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{134}} \\
& + [q_4^2 q_2^\alpha q_3^\beta + q_2^2 q_3^\beta q_4^\alpha - q_3^2 q_2^\beta q_4^\alpha] \frac{1}{D_{1234}} \\
& + 2q_2^2 q_4^\alpha \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& \left. + 2[(q_3 \cdot q_4) q_2^\alpha - (q_2 \cdot q_4) q_3^\alpha - (q_3 \cdot q_2) q_4^\alpha] \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \right\} \tag{5.77}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\lambda\mu\nu\xi}}{6} = & +2 \left\{ (q_2^\rho q_3^\kappa) \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} g_{\alpha\mu} + (q_2^\rho q_4^\kappa) g_{\alpha\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} \right\} \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& -2 \left\{ (q_2^\rho q_4^\kappa) g_{\alpha\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} + (q_3^\kappa q_4^\rho) g_{\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right\} \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& -q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha [g_{\lambda\beta} \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho\xi\kappa} + g_{\mu\beta} \varepsilon_{\lambda\alpha\nu\rho\xi\kappa} + g_{\beta\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\rho\xi\kappa} + g_{\beta\xi} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\nu\rho\kappa}] \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& -q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha [g_{\lambda\rho} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\xi\kappa} + g_{\mu\rho} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\xi\kappa} + g_{\nu\rho} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\xi\kappa} + g_{\rho\xi} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\kappa}] \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& -q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha [g_{\lambda\alpha} \varepsilon_{\mu\beta\nu\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\mu} \varepsilon_{\lambda\beta\nu\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\beta\rho\xi\kappa} + g_{\alpha\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\beta\nu\rho\kappa}] \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \\
& -q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha [g_{\lambda\kappa} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu\rho\xi} + g_{\mu\kappa} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\nu\rho\xi} + g_{\nu\kappa} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\rho\xi} + g_{\xi\kappa} \varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta\nu\rho}] \frac{(k + k_1)^\beta}{D_{1234}} \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Notamos então o surgimento de duas novas estruturas de momento

$$\frac{k^\alpha}{D_{1234}} e \frac{k^\alpha k^\beta}{D_{1234}}, \quad (5.79)$$

e que somente a última estrutura se tornará divergente quando integrada. Procedendo o cálculo destas estruturas encontraremos

$$\begin{aligned} (I^4)^\alpha &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{k^\alpha}{D_{1234}} \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^3} [q_2^\alpha \xi_{100}^{-1} + q_3^\alpha \xi_{010}^{-1} + q_4^\alpha \xi_{001}^{-1} + k_1^\alpha \xi_{000}^{-1}], \end{aligned} \quad (5.80)$$

e

$$\begin{aligned} (I^4)^{\alpha\beta} &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{k^\alpha k^\beta}{D_{1234}} \\ &= +\frac{1}{12} [\Delta_{4;\mu\nu}^{(6)}(\lambda^2)] + \frac{1}{6} g^{\alpha\beta} I_{\log}^{(6)}(\lambda^2) \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \xi_{000}^0 + q_2^\alpha q_2^\beta \xi_{200}^{-1} + q_3^\alpha q_3^\beta \xi_{020}^{-1} + q_4^\alpha q_4^\beta \xi_{002}^{-1} \right. \\ &\quad \quad + q_2^\alpha q_3^\beta \xi_{110}^{-1} + q_2^\alpha q_4^\beta \xi_{101}^{-1} + q_3^\alpha q_4^\beta \xi_{011}^{-1} \\ &\quad \quad + q_4^\alpha q_2^\beta \xi_{101}^{-1} + q_4^\alpha q_3^\beta \xi_{011}^{-1} + q_3^\alpha q_2^\beta \xi_{110}^{-1} \\ &\quad \quad + k_1^\alpha [q_2^\beta \xi_{100}^{-1} + q_3^\beta \xi_{010}^{-1} + q_4^\beta \xi_{001}^{-1}] \\ &\quad \quad \left. + k_1^\beta [q_2^\alpha \xi_{100}^{-1} + q_3^\alpha \xi_{010}^{-1} + q_4^\alpha \xi_{001}^{-1}] + k_1^\alpha k_1^\beta \xi_{000}^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Com os resultados acima e (5.74) poderemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{TPPP}}{4} &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} t_{\alpha\beta}^{TPPP} \\ &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [(q_2 - q_3)^\alpha (k_{4\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) + q_4^\alpha (k_{1\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho})] \Delta_4^{(6)\rho\beta}(\lambda^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left( 2q_4^\alpha q_2^\beta - q_2^\alpha q_3^\beta - q_3^\beta q_4^\alpha \right) I_{\log}^{(6)}(\lambda^2) \\ &\quad - \frac{3i\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta}}{(4\pi)^3} \left\{ q_4^\alpha q_3^\beta [2\xi_{10}^0(k_1, k_3, k_4; m; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_1, k_3, k_4; m; \lambda^2)] \right. \\ &\quad \quad + 2 \left( q_3^\alpha q_2^\beta + q_3^\beta q_4^\alpha - q_4^\alpha q_2^\beta \right) \xi_{01}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) \\ &\quad \quad \left. - \left( q_3^\alpha q_2^\beta + q_3^\beta q_4^\alpha - q_4^\alpha q_2^\beta \right) \xi_{00}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q_4^\alpha q_2^\beta \xi_{00}^0(k_1, k_2, k_4; m; \lambda^2) - q_2^\alpha q_3^\beta \xi_{00}^0(k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) \\
& +2(q_3 \cdot q_4) q_2^\alpha \left( q_3^\beta \xi_{010}^{-1} + q_4^\beta \xi_{001}^{-1} \right) \\
& -2(q_2 \cdot q_4) q_3^\alpha \left( q_2^\beta \xi_{100}^{-1} + q_4^\beta \xi_{001}^{-1} \right) \\
& -2(q_3 \cdot q_2 - q_2^2) q_4^\alpha \left( q_2^\beta \xi_{100}^{-1} + q_3^\beta \xi_{010}^{-1} \right) \\
& -2 \left( q_4^2 q_2^\alpha q_3^\beta + q_2^2 q_3^\beta q_4^\alpha - q_3^2 q_2^\beta q_4^\alpha \right) \xi_{000}^{-1} \}, \tag{5.82}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu\xi} &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} t_{\lambda\mu\nu\xi} \\
&= + [(q_2^\rho q_3^\kappa) \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} g_{\alpha\mu} + (q_2^\rho q_4^\kappa) g_{\alpha\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta}] \Delta_4^{(6)\alpha\beta}(\lambda^2) \\
&\quad - [(q_2^\rho q_4^\kappa) g_{\alpha\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} + (q_3^\kappa q_4^\rho) g_{\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta}] \Delta_4^{(6)\alpha\beta}(\lambda^2) \\
&\quad + 2 \left[ 2q_2^\alpha q_4^\beta + q_2^\alpha q_3^\beta + q_3^\beta q_4^\alpha \right] \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left[ I_{\log}^{(6)}(\lambda^2) \right] \\
&\quad + \frac{12i}{(4\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left[ 2q_2^\alpha q_4^\beta + q_2^\alpha q_3^\beta + q_4^\alpha q_3^\beta \right] \xi_{000}^0 \right. \\
&\quad \quad + q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{4\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} \xi_{002}^{-1} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \xi_{200}^{-1} \\
&\quad \quad + \left[ q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{3\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right] \xi_{020}^{-1} \\
&\quad \quad + \left[ q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{2\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{4\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right] \xi_{101}^{-1} \\
&\quad \quad + \left[ q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{3\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} + q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{4\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{4\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right] \xi_{011}^{-1} \\
&\quad \quad + \left[ q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{2\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right] \xi_{110}^{-1} \\
&\quad \quad - q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\rho\kappa} \xi_{100}^{-1} - (q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha) q_{4\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\rho\kappa} \xi_{001}^{-1} \\
&\quad \quad \left. + (q_2^\rho q_4^\alpha q_3^\kappa) [q_{3\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\rho\kappa} - q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\rho\kappa}] \xi_{010}^{-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Estes resultados permitem que escrevamos a solução para a amplitude  $AVVV$  como

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} t_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} \\
&= (q_2^\rho q_3^\kappa \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} g_{\alpha\mu} + q_2^\rho q_4^\kappa g_{\alpha\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta}) \Delta_4^{(6)\alpha\beta} (\lambda^2) \\
&\quad - (q_2^\rho q_4^\kappa g_{\alpha\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} + q_3^\kappa q_4^\rho g_{\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta}) \Delta_4^{(6)\alpha\beta} (\lambda^2) \\
&\quad + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [(q_2 - q_3)^\alpha (k_{4\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) + q_4^\alpha (k_{1\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho})] \Delta_4^{(6)\rho\beta} (\lambda^2) \\
&\quad + \frac{12i}{(4\pi)^3} \left\{ -\frac{\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta}}{2} \left( 2q_2^\alpha q_4^\beta + q_2^\alpha q_3^\beta + q_4^\alpha q_3^\beta \right) \xi_{000}^0 \right. \\
&\quad\quad + q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{4\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} \xi_{002}^{-1} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \xi_{200}^{-1} \\
&\quad\quad + \left( q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{3\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right) \xi_{020}^{-1} \\
&\quad\quad + \left( q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{2\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{4\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right) \xi_{101}^{-1} \\
&\quad\quad + \left( q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\beta q_{3\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\rho\kappa\beta} + q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{4\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{4\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right) \xi_{011}^{-1} \\
&\quad\quad + \left( q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{2\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho\kappa\beta} - q_2^\rho q_4^\kappa q_3^\beta q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} - q_3^\kappa q_4^\rho q_2^\beta q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\rho\kappa\beta} \right) \xi_{110}^{-1} \\
&\quad\quad - (q_3^\kappa q_4^\alpha q_2^\rho) q_{2\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\rho\kappa} \xi_{100}^{-1} \\
&\quad\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [(q_2 \cdot q_4) q_3^\alpha + (q_3 \cdot q_2) q_4^\alpha - q_2^2 q_4^\alpha] q_2^\beta \xi_{100}^{-1} \\
&\quad\quad - \frac{1}{2} \left\{ 2q_2^\rho q_3^\kappa q_4^\alpha q_{4\mu} \varepsilon_{\lambda\nu\xi\alpha\rho\kappa} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [(q_2 \cdot q_4) q_3^\alpha - (q_3 \cdot q_4) q_2^\alpha] q_4^\beta \right\} \xi_{001}^{-1} \\
&\quad\quad + q_2^\rho q_4^\alpha q_3^\kappa (q_{3\xi} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\rho\kappa} - q_{3\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\rho\kappa}) \xi_{010}^{-1} \\
&\quad\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [(q_3 \cdot q_4) q_2^\alpha - (q_3 \cdot q_2) q_4^\alpha + q_2^2 q_4^\alpha] q_3^\beta \xi_{010}^{-1} \\
&\quad\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left( q_4^2 q_2^\alpha q_3^\beta + q_2^2 q_3^\beta q_4^\alpha - q_3^2 q_2^\beta q_4^\alpha \right) \xi_{000}^{-1} \\
&\quad\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left( q_3^\alpha q_2^\beta + q_3^\beta q_4^\alpha - q_4^\alpha q_2^\beta \right) \xi_{01}^0 (k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) \\
&\quad\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \left( q_3^\alpha q_2^\beta + q_3^\beta q_4^\alpha - q_4^\alpha q_2^\beta \right) \xi_{00}^0 (k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) \\
&\quad\quad - \frac{1}{4} q_4^\alpha q_3^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} [2\xi_{10}^0 (k_1, k_3, k_4; m; \lambda^2) - \xi_{00}^0 (k_1, k_3, k_4; m; \lambda^2)] \\
&\quad\quad - \frac{1}{4} q_4^\alpha q_2^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} \xi_{00}^0 (k_1, k_2, k_4; m; \lambda^2) \\
&\quad\quad \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi\alpha\beta} q_2^\alpha q_3^\beta \xi_{00}^0 (k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) \right\}, \tag{5.83}
\end{aligned}$$

onde omitimos os argumentos  $(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2; \lambda^2)$  das funções  $\xi_{mno}^0$  bem como o argumento  $(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2)$  das funções  $\xi_{mno}^{-1}$ .

A parte finita dos resultados encontrados para todas as estruturas consideradas nesta

seção foram escritas em termos das funções  $\xi_{mn}^0$ ,  $\xi_{mno}^0$  e  $\xi_{mno}^{-1}$ . Estas funções são definidas por

$$\xi_{mn}^0(k_i, k_j, k_k; m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^m y^n) \ln \frac{Q(k_i, k_j, k_k; m^2; z, y)}{-\lambda^2},$$

onde

$$\begin{aligned} Q(k_i, k_j, k_k; m^2; z, y) &= (k_i - k_j)^2 (1 - z) z + (k_i - k_k)^2 (1 - y) y \\ &\quad - (k_i - k_j)(k_i - k_k) zy - m^2, \end{aligned}$$

e

$$\xi_{mno}^0(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} dx (z^m y^n x^o) \ln \frac{Q(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2; z, y, x)}{-\lambda^2},$$

e

$$\xi_{mno}^{-1}(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} dx \frac{(z^o y^n x^m)}{Q(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2; z, y, x)},$$

com

$$\begin{aligned} Q(q_2^2, q_3^2, q_4^2; m^2; z, y, x) &= q_2^2 (1 - x) x + q_3^2 (1 - y) y + q_4^2 (1 - z) z \\ &\quad - 2q_3 \cdot q_2 y x - 2q_4 \cdot q_2 z x - 2q_4 \cdot q_3 z y - m^2. \end{aligned} \quad (5.84)$$

As funções de Green apresentadas acima são aquelas necessárias para completarmos nossa investigação. Notemos a presença de termos potencialmente ambíguos na expressão da amplitude  $AVVV$  e que estes termos vieram do setor da amplitude que foi identificado como a amplitude tensorial.

O resultado obtido para as amplitudes carregam todas as arbitrariedades intrínsecas aos diagramas. Nenhuma modificação nas amplitudes foi feita até o momento. Agora que nós temos os resultados das amplitudes podemos verificar se as relações entre funções de Green são preservadas pelas formas encontradas.

## 5.7 Verificação das relações entre funções de Green

Para verificarmos os vínculos construídos entre as funções de Green é necessário que primeiro estabeleçamos um conjunto de relações que envolvam as funções finitas utilizadas para expressarmos o resultado das amplitudes. Estas relações são dadas por

$$q_2^2 \xi_{100}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{010}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{001}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{00}^0(k_1, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) + q_2^2 \xi_{000}^{-1}], \quad (5.85)$$

$$q_3^2 \xi_{010}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{100}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{001}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{00}^0(k_1, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) + q_3^2 \xi_{000}^{-1}], \quad (5.86)$$

$$q_4^2 \xi_{001}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{100}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{010}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{00}^0(k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) + q_4^2 \xi_{000}^{-1}], \quad (5.87)$$

$$q_2^2 \xi_{200}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{110}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{101}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{10}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) + \xi_{01}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) + \xi_{000}^0 + q_2^2 \xi_{100}^{-1}], \quad (5.88)$$

$$q_3^2 \xi_{020}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{110}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{011}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{01}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) + \xi_{10}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) + q_3^2 \xi_{010}^{-1} + \xi_{000}^0], \quad (5.89)$$

$$q_4^2 \xi_{002}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{101}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{011}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{01}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) + \xi_{10}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) - \xi_{00}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) + \xi_{000}^0 + q_4^2 \xi_{001}^{-1}], \quad (5.90)$$

$$q_2^2 \xi_{101}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{002}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{011}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{01}^0(k_1, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{01}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) + q_2^2 \xi_{001}^{-1}], \quad (5.91)$$

$$q_2^2 \xi_{110}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{020}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{011}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{10}^0(k_1, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{10}^0(k_2, k_3, k_4; m^2; \lambda^2) + q_2^2 \xi_{010}^{-1}], \quad (5.92)$$

$$q_3^2 \xi_{011}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{101}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{002}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{01}^0(k_1, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{01}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) + q_3^2 \xi_{001}^{-1}], \quad (5.93)$$

$$q_3^2 \xi_{110}^{-1} + (q_3 \cdot q_2) \xi_{200}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{101}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{10}^0(k_1, k_1, k_4; m^2; \lambda^2) - \xi_{10}^0(k_3, k_2, k_4; m^2; \lambda^2) + q_3^2 \xi_{100}^{-1}], \quad (5.94)$$

$$q_4^2 \xi_{011}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{110}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{020}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{10}^0(k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) - \xi_{10}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) + q_4^2 \xi_{010}^{-1}], \quad (5.95)$$

$$q_4^2 \xi_{101}^{-1} + (q_4 \cdot q_2) \xi_{200}^{-1} + (q_4 \cdot q_3) \xi_{110}^{-1} = \frac{1}{2} [\xi_{01}^0(k_1, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) - \xi_{01}^0(k_4, k_2, k_3; m^2; \lambda^2) + q_4^2 \xi_{100}^{-1}], \quad (5.96)$$

juntamente com a redução

$$\begin{aligned} \xi_{000}^0 &= -\frac{1}{9} - \frac{2}{3} m^2 \xi_{000}^{-1} \\ &+ \frac{1}{3} [q_2^2 \xi_{100}^{-1} + q_3^2 \xi_{010}^{-1} + q_4^2 \xi_{001}^{-1} + \xi_{00}^0]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

A identificação destas relações permite que procedamos de uma forma bastante clara a verificação das relações entre funções de Green.

Ao realizarmos a contração do resultado da amplitude  $T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  com os respectivos momentos externos encontraremos

$$\begin{aligned} (q_2 - q_3)^\xi T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= +\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\kappa} q_4^\alpha q_3^\beta (k_{1\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \right] \\ &- \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\kappa} q_4^\alpha q_2^\beta (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{4\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \right], \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= +\varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\kappa} q_4^\alpha q_3^\beta (k_{1\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \right] \\
&\quad -\varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\kappa} (k_4 - k_2)^\alpha (k_3 - k_2)^\beta (k_{2\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \right], \quad (5.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_4^\mu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= -\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\kappa} q_3^\beta q_2^\alpha (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \\
&\quad -\varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\kappa} (k_4 - k_2)^\alpha (k_3 - k_2)^\beta (k_{2\rho} + k_{3\rho} + k_{4\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \right] \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^3} \left( q_2^\alpha q_3^\lambda q_4^\beta \right) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\lambda\beta} + 2m \left\{ 6m\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\lambda\beta} \left( q_2^\alpha q_3^\lambda q_4^\beta \right) \frac{i}{(4\pi)^3} \zeta_{000}^{-1}(q_2^2; q_3^2; q_4^2; m^2) \right\}, \quad (5.100)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= +\varepsilon_{\xi\mu\nu\alpha\beta\kappa} q_4^\alpha q_2^\beta (k_{4\rho} + k_{2\rho} + k_{1\rho}) \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) \\
&\quad +\varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\beta\kappa} q_3^\beta q_2^\alpha (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) \Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2). \quad (5.101)
\end{aligned}$$

Se realizarmos a identificação das funções de Green dos lados direitos das expressões acima poderemos então verificar a validade das relações

$$(q_2 - q_3)^\xi T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_4, k_1, k_3; m^2) - T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_4, k_1, k_2; m^2), \quad (5.102)$$

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}(k_4, k_1, k_3; m^2) - T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}(k_4, k_3, k_2; m^2), \quad (5.103)$$

e

$$q_4^\mu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = T_{\lambda\nu\xi}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m^2) - T_{\lambda\nu\xi}^{AVV}(k_4, k_2, k_3; m^2). \quad (5.104)$$

Já a relação referente a contração com o vértice axial toma a forma

$$\begin{aligned}
(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= T_{\xi\mu\nu}^{AVV}(k_4, k_1, k_2; m^2) - T_{\mu\nu\xi}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m^2) \\
&+ 2m T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}(k_1, k_2, k_3, k_4; m^2) \\
&+ \frac{i}{32\pi^3} (q_2^\alpha q_3^\lambda q_4^\beta) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\lambda\beta}.
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Os resultados acima são obtidos sem que realizemos nenhuma específica escolha acerca das arbitrariedades contidas nas soluções das amplitudes envolvidas.

Sabemos que resultados consistentes para as amplitudes somente serão obtidos após o estabelecimento das *relações de consistência*. Estes vínculos surgem após impormos que os resultados devem satisfazer as conservações das correntes vetoriais e serem totalmente livres de ambiguidades. A única possibilidade de obtermos estes vínculos satisfeitos sem que abramos mão da invariância translacional é atribuímos nos resultados acima

$$\Delta_4^{(6)\rho\kappa}(\lambda^2) = 0. \tag{5.106}$$

Com esta imposição obtemos a amplitude  $AVV$  com o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\xi}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m^2) &= +\varepsilon_{\lambda\mu\xi\alpha\beta\kappa} q_3^\alpha q_2^\beta (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho}) \left[ \Delta_4^{(6)\kappa\rho}(\lambda^2) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Além disso, é conveniente lembrarmos que a imposição sobre o objeto divergente básico deve ser aplicada em todos os lugares em que o mesmo surge, pois somente quando este objeto assume este valor é que consistentes interpretações podem ser obtidas a partir dos resultados encontrados para as amplitude físicas.

## 5.8 Comentários finais

Ao impormos que o resultado consistente da amplitude  $T_{\mu\nu\xi}^{AVV}$  é identicamente nulo, encontraremos as seguintes relações

$$(q_2 - q_3)^\xi T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = 0, \quad (5.108)$$

$$q_2^\nu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = 0, \quad (5.109)$$

$$q_4^\mu T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = 0, \quad (5.110)$$

e

$$(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} = +2m T_{\mu\nu\xi}^{PVVV} + \frac{i}{32\pi^3} \left( q_2^\alpha q_3^\lambda q_4^\beta \right) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\lambda\beta}. \quad (5.111)$$

As três primeiras relações refletem as conservações das correntes vetoriais. A última relação vem concordar com as conclusões que obtivemos ao adotarmos a forma mais geral possível para os tensores que representaram as amplitudes relacionadas acima.

Para explicitarmos este fato ainda mais, podemos determinar o valor da amplitude  $T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}$  no limite cinemático  $q_i \cdot q_j = 0$  com  $i, j = 2, 3, 4$ . Teremos

$$[T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}]_{q_i \cdot q_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4} = +6m \frac{i}{(4\pi)^3} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\rho\kappa} q_4^\alpha q_2^\rho q_3^\kappa [\xi_{000}^{-1}]_{q_i \cdot q_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4}, \quad (5.112)$$

onde

$$\begin{aligned} [\xi_{000}^{-1}]_{q_i \cdot q_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} dx \frac{1}{[-m^2]} \\ &= -\frac{1}{6m^2}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

e deste modo

$$[T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}]_{q_i \cdot q_j = 0 \text{ com } i, j = 2, 3, 4} = -\frac{1}{m} \frac{i}{64\pi^3} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\rho\kappa} q_4^\alpha q_2^\rho q_3^\kappa. \quad (5.114)$$

Notamos então que como esperado a amplitude  $T_{\mu\nu\xi}^{PVVV}$  não se anula no ponto cinemático considerado. Porém, seu valor no ponto em questão faz com que tenhamos

$$\begin{aligned}
(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV} &= -\frac{i}{32\pi^3} \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\rho\kappa} q_4^\alpha q_2^\rho q_3^\kappa + \frac{i}{32\pi^3} (q_2^\alpha q_3^\lambda q_4^\beta) \varepsilon_{\mu\nu\xi\alpha\lambda\beta} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.115}$$

Logo, para que o limite de baixa energia seja satisfeito na contração  $(q_3 - q_4)^\lambda T_{\lambda\mu\nu\xi}^{AVVV}$  é necessário que a relação entre funções de Green seja violada, sendo que esta violação ocorre por um valor que é justamente igual ao oposto do valor assumido por  $2mT_{\mu\nu\xi}^{PVVV}$  no limite considerado.

Após esta análise, juntamente com o exposto no capítulo anterior, enumeramos as principais conclusões obtidas sobre as anomalias:

a) *Todas as amplitudes não anômalas de uma teoria, se consistentemente calculadas, tem suas relações entre funções de Green preservadas, mesmo na presença de termos potencialmente ambíguos e violadores de simetria.*

b) *Para estas amplitudes, todas as simetrias (identidades de Ward) são satisfeitas pelas formas calculadas após a imposição das relações de consistência e os termos potencialmente ambíguos são eliminados.*

c) *Para as amplitudes anômalas, os termos ambíguos são também eliminados mas pelo menos uma das relações entre funções de Green irá ser violada.*

d) *A relação entre funções de Green que irá ser violada é aquela em que a contração do momento externo ocorre no vértice axial onde o limite de baixa energia é satisfeito.*

Salientamos por fim que as colocações acima são gerais, aplicando-se a quaisquer amplitudes independentemente de ser divergentes ou finitas ou de pertencerem a modelos renormalizáveis ou não.

# Capítulo 6

## Conclusões

Embora a Teoria Quântica de Campos seja atualmente a principal ferramenta para a investigação de teorias e modelos acerca das partículas elementares e suas interações ainda existem uma série de aspectos presentes na interpretação dos resultados obtidos que não são completamente esclarecidos. Destes podemos destacar o papel das ambiguidades e o surgimento de inevitáveis violações das relações de simetria das amplitudes físicas perturbativas. Tais aspectos ainda são fontes de discussões na literatura devido a não generalidade das prescrições utilizadas para o cálculo das amplitudes físicas envolvidas. Neste trabalho nos propomos a gerar contribuições bastante significativas acerca dos dois temas destacados.

No primeiro capítulo apresentamos resultados referentes a formulação quadridimensional da eletrodinâmica quântica ( $EDQ_4$ ). A obtenção destes resultados passa invariavelmente pela avaliação de amplitudes divergentes e é necessário que utilizemos algum artifício matemático para contornar as indeterminações presentes no cálculo destas estruturas. Como as usuais técnicas para o tratamento destas divergências quando geram resultados consistentes para as amplitudes não são gerais e quando gerais não são consistentes, podendo em alguns casos conduzir a resultados destituídos de significado físico, optamos por adotar uma prescrição alternativa. Esta prescrição alternativa, chamada de *Predictive Prescription*, é uma evolução natural do formalismo adotado pela *Implicit*

*Regularization* [11] e está centralmente baseada no retardo, tanto quanto possível, da integração sobre os momentos irrestritos dos diagramas de Feynman. Com isso podem ser utilizadas identidades matemáticas nos integrandos (daquelas integrais que quando integradas se tornam indefinidas) separando a parte potencialmente divergente da parte finita. Assim é possível solucionarmos as amplitudes sem que seja necessário realizar o cálculo explícito de qualquer integral divergente ou a adoção de algum tipo de regularização.

Este êxito é alcançado graças as identidades matemáticas que são utilizadas nos integrandos. Tais identidades, que são representações alternativas para os propagadores da teoria, fazem com que toda a dependência em relação aos parâmetros físicos esteja presente somente na parte finita das amplitudes, evidenciando desde este ponto, o fato das divergências não representarem nenhum papel fundamental para a interpretação dos resultados obtidos.

Para a organização destes resultados é definido um conjunto de funções específicas da dimensão considerada mas que possuem análogos nas demais dimensões. Tal organização permitiu apresentar de uma forma bastante clara e compacta as soluções das amplitudes consideradas. Nenhuma integração nos parâmetros de Feynman necessitou ser realizada, precisando apenas de relações entre as diferentes funções definidas bem como o seu comportamento em certas condições cinemáticas.

Já a parte divergente pode ser escrita em termos dos *objetos divergentes básicos*. Estes objetos são também particulares da dimensão e da ordem perturbativa considerada tendo seus análogos nos outros casos. Sobre alguns destes objetos impomos as relações de consistência e aqueles que permaneceram na solução final das amplitudes foram absorvidos no processo de renormalização da teoria.

Ao fim do primeiro capítulo conseguimos mostrar que a prescrição utilizada possibilita obter resultados para todas as amplitudes divergentes presentes na  $EDQ_4$  de modo que as mesmas satisfaçam todos os critérios de simetria, proceder a renormalização da teoria e realizar o cálculo da função beta. A concordância dos resultados obtidos com aqueles esperados evidenciou a consistência da alternativa que utilizamos para o cálculo

das amplitudes.

No segundo capítulo a generalidade da *Predictive Prescription* foi evidenciada através do estudo da EDQ em dimensões ímpares. O primeiro modelo de estudo foi a extensão tridimensional da EDQ usual. Todas as amplitudes de interesse foram calculadas de uma forma completamente análoga a que utilizamos no estudo do primeiro capítulo. Além disso, mostramos claramente como ocorre a geração de massa para o fóton via correções radiativas e como ocorre o cancelamento das divergências que tornam a EDQ<sub>3</sub> finita. No fim daquele capítulo foram apresentados alguns resultados obtidos na extensão pentadimensional da EDQ dando uma ênfase maior ao caráter renormalizável do tensor de polarização do vácuo.

Nestes dois estudos destacamos que em momento algum na interpretação dos resultados as ambiguidades desenvolveram papel relevante, seja aquela introduzida devido a liberdade na escolha da rotulação arbitrária dos momentos ou seja aquela referente a escala comum as partes finitas e divergentes.

O terceiro e quarto capítulos foram dedicados ao estudo das anomalias. No primeiro destes capítulos foi apresentada uma breve descrição da importância deste tema e nos levantado o questionamento acerca da interpretação que é dada e a forma como a literatura justifica o surgimento das violações das identidades de Ward. Salientamos que a grande maioria dos livros apresenta o surgimento das anomalias com base nas ambiguidades inerentes ao tratamento perturbativo das TQC's. Se as ambiguidades não desempenham papel algum na interpretação das soluções das TQC's o conceito apresentado na literatura deveria ser revisto. Para isso propomos um problema bastante interessante: anomalias em amplitudes finitas.

É de comum acordo que na avaliação de amplitudes finitas não há o surgimento de ambiguidades, pois as mesma surgem devido ao caráter divergente das amplitudes. Então se estas amplitudes pudessem apresentar anomalias, este comportamento não poderia ser explicado com base nas ambiguidades, muito menos com shifts nas variáveis de integração, os quais não seriam compensados pelos termos de superfície. Propomos então a inves-

tigação da existência de anomalias na amplitude  $AVV$  em  $D=1+1$ . Ao considerarmos a forma mais geral para um tensor que pudesse mais tarde ser identificado com a função de Green  $AVV$  vimos que não seria possível satisfazer as conservações das correntes vetoriais, a relação entre o divergente da corrente axial e a corrente pseudo-escalar e o limite de baixa energia, caracterizando assim um comportamento anômalo. Ao realizarmos o cálculo explícito da amplitude perturbativa confirmamos o comportamento encontrado para o tensor na forma mais geral. Desta forma se quisermos entender o fenômeno das anomalias de uma forma universal, através de uma mesma interpretação independente do modelo e da dimensão que estamos considerando, as ambiguidades presentes em amplitudes divergentes não podem ser utilizadas para justificar o comportamento anômalo apresentado por algumas amplitudes.

Para evidenciarmos este aspecto utilizamos a generalidade e a consistência apresentada pela prescrição de tratamento das divergências para o estudo da anomalias  $AVVV$  em  $D=1+5$ . No tratamento das amplitudes envolvidas neste estudo os graus de divergência que surgem são ainda mais severos que aqueles encontrados na avaliação da conhecida anomalia  $AVV$  em  $D=1+3$ . Novamente consideramos o estudo da forma mais geral para um tensor que pudesse posteriormente ser identificado com a amplitude  $AVVV$ . Vimos que um tensor com esta forma não poderia de forma alguma satisfazer as três conservações da corrente vetorial, a relação da divergência da corrente axial com a corrente escalar e o limite de baixa energia simultaneamente, caracterizando novamente um comportamento anômalo. Após realizarmos o cálculo de todas as estruturas envolvidas mostramos que mesmo quando o grau de divergência das amplitudes consideradas aumenta, continuamos a interpretar o surgimento das anomalias sem menção alguma as ambiguidades.

Assim, no que diz respeito as anomalias, nossos estudos nos permitiram obter as seguintes conclusões:

a) *Todas as amplitudes não anômalas de uma teoria, se consistentemente calculadas, tem suas relações entre funções de Green preservadas, mesmo na presença de termos potencialmente ambíguos e violadores de simetria.*

b) *Para estas amplitudes, todas as simetrias (identidades de Ward) são satisfeitas pelas formas calculadas após a imposição das relações de consistência e os termos potencialmente ambíguos são eliminados.*

c) *Para as amplitudes anômalas, os termos ambíguos são também eliminados mas pelo menos uma das relações entre funções de Green irá ser violada.*

d) *A relação entre funções de Green que irá ser violada é aquela em que a contração do momento externo ocorre no vértice axial onde o limite de baixa energia é satisfeito.*

Nossos próximos estudos estarão focados na investigação do possível caráter renormalizável da extensão pentadimensional da EDQ utilizando a *Preductive Prescription*. Ainda sobre este modelo, procuramos por algum efeito semelhante a geração de massa para o fóton obtida na EDQ<sub>3</sub>. Além disso pretendemos verificar um comportamento semelhante aquele que encontramos na avaliação da amplitude *AVV* em  $D=1+1$  na amplitude *AVVV* em  $D=1+3$ . Também pretendemos realizar investigações em  $D=1+7$  evidenciando ainda mais que os argumentos que apresentamos na interpretação das anomalias são universais e consistentes.

# Bibliografia

- [1] • C. Itzykson and J.B. Zuber; *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980),
  - S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, (1996),
  - T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford (1988).
  
- [2] • J. Schwinger, Phys. Rev **82**, 664 (1951).
  
- [3] • S.L. Adler, Phys Rev **177**, 2426 (1969).
  
- [4] • J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60**, 47 (1969).
  
- [5] • E. Gambin, G. Dallabona and O. A. Battistel, Braz. J. Phys. **37**, 1191 (2007),
  - E. Gambin, O. A. Battistel, C. O. Lobo, G. Dallabona, Braz. J. Phys. **35**, 565 (2005).
  
- [6] • W.E.Lamb and R.C.Rutherford, Phys.Rev. **72**, 241 (1947),
  - J. Schwinger, *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York (1958).
  
- [7] • R. E. Pringle and S M Girvin, *Quantum Hall effect*, Springer-Verlag, New York (1987),
  - K.Ishikawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107**, 167 (1992).
  
- [8] • t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B 44**, 189 (1972);
  - C. G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. **40 B**, 566 (1972).

- [9] • W.A. Bardeen, R. Gastmans and B. Lautrup, Nucl. Phys. **B 48**, 319 (1972),
  - D.A. Akyeampong and R. Delburgo, Nuovo Cimento **A 17**, 578 (1973),
  - P. Breitenlohner and D. Maison, Commun. Math. Phys. **52**, 11 (1977),
  - G. Bonneau, Phys. Lett. **B 96**, 147 (1980).
- [10] • CMS Collaboration, *Search for Large Extra Dimensions in the Diphoton Final State at the Large Hadron Collider*, arxiv: 1103.4279v1 (2011).
- [11] • O. A. Battistel, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) (1999).
  - O. A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).
  - O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 1 (2002).
- [12] • O.A. Battistel, G. Dallabona and G. Krein, Phys. Rev. D **77**, 065025 (2008).
  - O.A. Battistel, M.V.S. Fonseca and G. Dallabona, Phys. Rev **D 85**, 085007 (2012).
- [13] • S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140**, 372 (1982)
  - I. Affleck, J. Harvey and E. Witten, Nucl. Phys. **B206**, 413 (1982).
- [14] • M. V. S. Fonseca, Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) (2008).
- [15] • R.D. Pisarski, Phys. Rev. **D 29**, 2423 (1984),
  - T. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali and L.C.R. Wijawardhana, Phys. Rev. **D 33**, 3704 (1986).
- [16] • P. Maris, Phys. Rev. **D 52**, 6087 (1995).
- [17] • D.H. Kim and P.A. Lee, Ann. Phys. **272**, 130 (1999).
- [18] • M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov and A.K. Geim, Nature Physics **2**, 620 (2006),
  - C.W.J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **80**, 133 (2008).

- [19] • M. V. S. Fonseca, A. V. Paredes, *Braz. J. Phys.* **40**, 319 (2010).
- [20] • K. Fujikawa, *Quantum Anomalies and some recent developments*, arxiv: 0902.2066v1 (2009).
- [21] • D. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev* **D 6**, 477 (1972),
  - C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, *Phys. Lett.* **38 B**, 519 (1972).
- [22] • B. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, Oxford (1996),
  - K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integral and Quantum Anomalies*, Oxford University Press, Oxford (1996).
- [23] • A. Bilal, *Lectures on Anomalies*, arxiv: 0802.0634v1 (2008).
- [24] • I. S. Gertsegin and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **181**, 1955 (1969).
- [25] • S. Adler and W. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969).
- [26] • M. J. Duff, *Class. Quantum Grav.* **11**, 1387 (1994).
- [27] • R. Jackiw and K. Johnson, *Phys. Rev* **182**, 1459 (1969).
- [28] • O.A. Battistel, M.V.S. Fonseca and G. Dallabona, *Phys. Rev* **D 85**, 085007 (2012).
- [29] • O. A. Battistel and O. L. Battistel. *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 1979-2017,
  - O. A. Battistel and G. Dallabona. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28** (2002) 1-22.
- [30] • G. Dallabona and O.A. Battistel, *Phys. Rev.* **D 70**, 065017 (2004).