

TESE DE DOUTORADO

Modelo Cosmológico com Ricochete e
Constante Cosmológica

Stella Fernandes Pereira

ORIENTADOR: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro - RJ

Abril, 2012

**“e então me digo:
se o mundo dura tanto
e eu tão pouco
importa pouco
se ele não for eterno.”**

Relativa Eternidade - Ferreira Gullar

Agradecimentos

Ao Nelson, pela paciência incansável. Nunca serei capaz de agradecer o suficiente.

A Beatriz Siffert e Rodrigo Maier, sem os quais este trabalho não teria sido possível.

Aos meus pais e Danillo, por serem uma família muito melhor do que eu mereço, com seu amor e suporte incondicionais.

Às irmãs Rita Lima e Bruna Almeida, pela insistência em me tornar uma pessoa melhor.

Aos companheiros de batalhas e cantorias: o clã mineiro Bruno Mota, Gustavo Catão, Daniel Maia e Núbia Moreira. Em especial ao casal Sandro Vitenti e Mariana Penna e ao irmão Álvaro Gomes, por terem segurado em minha mão.

À amiga Aline Nogueira, pela compreensão e apoio sempre presentes.

Aos amigos G7 Daniela Raslan, Gustavo Alcântara, Maíra Abade, José Cezário e Bruna Barros, pela falta que me fazem.

Aos amigos Luana Pedroza, Juliana Ventura, Gustavo Vieira, Katrine Boaventura, Diogo Andrade e Christine Rebouças, pelos abraços e sorrisos na volta pra casa.

Aos colegas e professores do ICRA, pela recepção acolhedora e formação enriquecedora.

Aos funcionários Bete, Ricardo, Cláudia, Luciene e Elisete, pelo atendimento não só prestativo como caloroso.

Ao CNPq, pela bolsa alcançada.

Resumo

O Modelo Cosmológico Padrão é bem sucedido quando confrontado com os dados observacionais para escalas de tempo após a aniquilação elétron-pósitron. Embora apresente questões ainda não respondidas, seus problemas encontram-se principalmente nos estágios iniciais do universo e o paradigma inflacionário apresentou-se como uma boa solução ao incluir uma fase de expansão acelerada no universo primordial, em que o fator de escala cresce exponencialmente. No entanto, apesar de seu sucesso, da maneira em que é construído o modelo padrão é singular, isto é, possui um Big Bang no qual nenhuma física conhecida é possível. Neste sentido, os Modelos Cosmológicos com Ricochete, em que uma fase de contração é conectada a uma de expansão por um período em que o ricochete ocorre, evitam a singularidade. Por esse motivo, estes modelos vêm sendo estudados como uma solução para o problema da singularidade, se tornando um complemento, ou até mesmo uma alternativa à inflação para a descrição da fase primordial de evolução do universo.

Por outro lado, após os dados de supernova tipo Ia sugerirem que o universo encontra-se em uma fase de expansão acelerada, indicando que uma possível fonte para esta aceleração seria um tipo de campo que viola a condição de energia forte. Torna-se razoável supor que esta energia escura também esteja presente na fase de contração em que o universo é muito grande, de modo que é importante incluir esta influência nos modelos com ricochete. Uma forma de analisar o comportamento do modelo é o estudo da dinâmica de perturbações primordiais à medida em que o universo evolui, uma vez que a presença deste campo exótico alteraria as condições iniciais das perturbações.

Assim, neste trabalho consideramos um universo composto por um campo escalar que se comporta como um fluido hidrodinâmico, além da constante cosmológica Λ representando a forma mais simples de energia escura. Evoluímos as perturbações cosmológicas durante a fase de contração, e verificamos como a presença de Λ altera o espectro de potências das perturbações.

Abstract

The Standard Cosmological Model is quite successful when confronted with observational data and, even though it presents issues still to be addressed, its problems are mainly at the very early stages of the universe and the inflationary paradigm came as a good solution, adding an accelerated expansion to the early universe, in which the scale factor grows exponentially. However, despite its successes, from the way it is built, the standard model is singular, i.e., has a Big Bang where no physics that we already know is possible. In that sense, Bouncing Cosmological Models, in which a contraction phase is connected to an expansion one by a period where a bouncing occurs, avoiding the singularity. In this way, those kind of models have been investigated as a solution to the singularity problem, becoming a completion or even an alternative to inflation for the description of early stages of the universe's evolution.

On the other hand, after supernova Ia data suggested that the universe is now in a state of accelerated expansion, indicating that a possible source for this unexpected acceleration would be some kind of field violating strong energy condition, it became reasonable to assume that this dark energy is also present at the contracting phase, when the universe is very big. Then, it is important to include this influence on bouncing models. A way to investigate the behaviour of the model is analysing the dynamics of primordial perturbations as the universe evolves, since the presence of this exotic field would change the initial conditions for perturbations.

Hence, in this work we consider a universe containing a scalar field which behaves as a hydrodynamic fluid, besides the cosmological constant Λ that represents the simplest candidate for dark energy. We evolve the cosmological perturbations through the contraction phase to see how the presence of Λ changes the power spectrum for perturbations.

Sumário

1	Introdução	1
2	Cosmologia Padrão	4
2.1	As equações da Relatividade Geral	4
2.2	Modelo Cosmológico Padrão	9
2.2.1	Modelo Estático de Einstein	12
2.2.2	Modelo de de Sitter	14
2.2.3	Horizontes	15
2.2.4	Casos especiais	17
2.2.5	Caso Geral	18
2.3	Caso particular: Λ + fluido	19
3	Modelos Cosmológicos com Ricochete	21
3.1	Problemas da Cosmologia Padrão	22
3.2	Inflação	25
3.3	Modelos com Ricochete	27
3.3.1	Propriedades	27
4	Teoria Linear de Perturbações	31
4.1	Teoria Newtoniana	31
4.1.1	Instabilidade em um universo em expansão	36

4.2	Perturbações Cosmológicas na Relatividade Geral	43
4.2.1	Invariância de Calibre	45
4.2.2	Equações de Einstein	49
4.2.3	Fluido hidrodinâmico	51
4.2.4	Perturbações de um campo escalar	59
5	Modelo Cosmológico com Ricochete e Λ	65
5.1	Geometria de fundo	65
5.2	Evolução das Perturbações Escalares	68
5.3	Escolha de condições iniciais	74
5.3.1	Caso particular: $\omega = 1/3$	76
5.3.2	Vácuo adiabático	81
5.4	Evolução das Perturbações Escalares	84
5.4.1	Descrição de fluido hidrodinâmico e Vácuo de Bunch-Davies	84
5.4.2	Descrição de campo escalar e Vácuo de Minkowski	90
6	Conclusão	98

Capítulo 1

Introdução

A Astronomia é uma das mais antigas ciências, uma vez que as questões sobre a origem do universo e sobre a movimentação dos astros é quase tão antiga quanto a própria razão do homem. Juntamente com a Cosmologia, é um campo da ciência que aplica a Física na tentativa de compreender a estrutura e a evolução do universo. Da mesma forma, a importância do seu estudo reside parcialmente no fato de que nosso entendimento das leis da Física, e em particular de sua aparente universalidade no espaço e no tempo, ter um número de evidências que dependem crucialmente de dados astronômicos.

Por Cosmologia entende-se o estudo da estrutura dinâmica em larga escala do universo, sua formação e sua evolução. Sua versão mais antiga se encontra nos mitos cosmogônicos, versões mitológicas sobre a origem dos elementos e dos seres vivos. As idéias de como o universo e seus elementos se comportam foram sendo modificadas ao longo do tempo, mas a Cosmologia só passou a ser considerada como ciência após a formulação da Teoria da Relatividade Geral (RG) por Albert Einstein, em 1915.

O Modelo Cosmológico Padrão, um modelo de universo homogêneo e isotrópico originado a partir de uma singularidade inicial, é descrito no Capítulo 2 desta tese. Embora seja muito bem sucedido quando confrontado com dados observacionais, um universo assim construído ainda apresenta discordâncias com algumas observações, entre elas a formação de estruturas e a aceleração do universo hoje observada [22,30]. Mesmo com a introdução

de um novo tipo de componente exótica (matéria e energia escuras) [3], responsáveis por mais de 95% do conteúdo material do universo, o modelo padrão se mostra insuficiente para responder algumas questões, especialmente aquelas relacionadas às condições iniciais para sua evolução, como a sua atual planeza e homogeneidade tendo partido de um Big Bang.

A Teoria Inflacionária, ao propor que nos instantes primordiais o universo era dominado por um campo escalar que foi responsável pela sua expansão exponencial, surge como uma maneira bem aceita para contornar alguns problemas que o modelo padrão apresenta. No entanto, uma das questões fundamentais não abordada pelo paradigma inflacionário é a singularidade inicial. Neste sentido, os Modelos Cosmológicos com Ricochete [20] mostram-se uma alternativa que apresenta soluções para os mesmos problemas que a inflação já resolve, sendo por construção não singulares. Os problemas do modelo padrão da cosmologia e a forma como a inflação e os modelos com ricochete abordam estas questões estão descritos no Capítulo 3.

Por outro lado, já é bem estabelecido que em largas escalas o universo pode ser aproximado para uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria. Porém, claramente se o universo fosse completamente homogêneo e isotrópico, não existiriam estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias. A observação em pequenas escalas sugere, portanto, que a formação de estruturas seja resultado de pequenas perturbações iniciais, uma vez que a matéria é atrativa e pequenas instabilidades gravitacionais tenderiam a aglomerar cada vez mais massa. Para verificar se pequenas inhomogeneidades iniciais presentes no universo primordial são responsáveis pela formação das estruturas observadas hoje, é preciso estudar como estas perturbações evoluem à medida que o universo expande. No Capítulo 4, a fim de descrever o universo de forma mais realista, consideramos que as estruturas são originadas pela evolução de pequenas flutuações (chamadas perturbações) com relação a uma métrica de fundo, esta sim homogênea e isotrópica, e apresentamos este estudo por meio da teoria linear de perturbações.

Após a revisão teórica dos primeiros capítulos, o Capítulo 5 expõe a proposta de modelo que é objeto desta tese. O universo é composto por um campo escalar que se comporta como um fluido hidrodinâmico e por constante cosmológica, a forma mais simples de representar energia escura. Ele evolui a partir de uma fase de contração em que o universo tende assintoticamente a de Sitter, atravessa por um ricochete que evita a singularidade em $t = 0$ e passa para uma fase de expansão em que tende novamente a de Sitter assintoticamente. Neste contexto, é feita a evolução das perturbações escalares, seguindo [26, 27], através do ricochete, a fim de encontrar o espectro de potências. Como resultado [15], verificamos que o espectro de potências para grandes comprimentos de onda possui termos oscilatórios e uma pequena inclinação para o vermelho, indicando o efeito da constante cosmológica no modelo.

Capítulo 2

Cosmologia Padrão

2.1 As equações da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação: o conceito clássico de força gravitacional, dado pelas leis de gravitação de Newton como resultado da interação entre massas, é substituído pela geometria espaço-temporal. Em outras palavras, a gravitação passa a ser interpretada como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa, ou energia. A equação dinâmica que descreve a forma como matéria e energia modificam a geometria do espaço-tempo corresponde à equação de campo gravitacional de Einstein, que pode ser deduzida como resultado do princípio variacional.

Suponha, inicialmente, o funcional ação dado por

$$\mathcal{S}_G = \int d^4x \mathcal{L}_G, \quad (2.1)$$

onde a densidade lagrangiana \mathcal{L}_G , chamada *densidade lagrangiana de Einstein*, depende exclusivamente da métrica $g_{\mu\nu}$, isto é, diz respeito somente a efeitos do campo gravitacional. Uma vez que a ação deve ser independente da escolha de coordenadas, a densidade

lagrangiana \mathcal{L}_G deve ser um escalar, de modo que a escolha mais simples é dada por

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \sqrt{-g} R, \quad (2.2)$$

onde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci e $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica.

As equações de movimento surgem variando-se a ação com relação à métrica $g^{\mu\nu}$. De (2.2), segue que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_G &= \frac{1}{2} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \{ R (\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}] \} \\ &= \frac{1}{2} [(\delta\mathcal{S})_1 + (\delta\mathcal{S})_2 + (\delta\mathcal{S})_3]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Lembrando que, para uma matriz qualquer M vale [2]

$$Tr(\ln M) = \ln(\det M), \quad (2.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \delta Tr(\ln M) &= \delta \ln(\det M), \\ Tr\left(\frac{1}{M} \delta M\right) &= \frac{1}{\det M} \delta(\det M). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dado que

$$\begin{aligned} Tr M &= \sum_i M_{ii} \\ (M^{-1} \delta M)_{ij} &= \sum_k M_{ik}^{-1} \delta M_{kj} \\ Tr(M^{-1} \delta M) &= \sum_i (M^{-1} \delta M)_{ii} = \sum_i \sum_k M_{ik}^{-1} \delta M_{kj}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

e usando (2.5) e (2.6) com $M = g^{\mu\nu}$ e $g^{-1} = \det g^{\mu\nu} = \det M$, segue que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} &= g\delta(g^{-1}), \\ \delta(g^{-1}) &= \frac{1}{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \delta\left[(-g^{-1})^{-1/2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}(-g^{-1})^{-3/2}\delta(-g^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(-g^{-1})^{-3/2}\delta(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(-g)^{3/2}\frac{1}{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Além disso, a forma do tensor de Riemann é tal que¹

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}, \quad (2.9)$$

onde $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\beta}g_{\lambda\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\lambda\beta} - \partial_{\lambda}g_{\beta\gamma})$ é a conexão métrica. Assim, fazendo a variação tem-se

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda})\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}. \quad (2.10)$$

Com um pouco de álgebra, a equação (2.10) pode ser reescrita na forma²

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}), \quad (2.11)$$

¹Em que $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$

²Note que apesar de $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ não ser um tensor, a variação $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ é, tornando a expressão bem definida.

onde

$$\nabla_{\mu} T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \partial_{\mu} T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} + \Gamma_{\lambda \mu}^{\alpha} T_{\beta \dots}^{\lambda \dots} + \dots - \Gamma_{\beta \mu}^{\lambda} T_{\lambda \dots}^{\alpha \dots} - \dots \quad (2.12)$$

é a derivada covariante. A equação (2.11) é chamada de equação de Palatini. Deste modo, a variação do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, dado pela contração $R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu\lambda\nu} \quad (2.13)$$

tem a forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}). \quad (2.14)$$

Assim, para encontrar a contribuição da integral $(\delta\mathcal{S})_2$ em (2.3) segue que

$$\begin{aligned} (\delta\mathcal{S})_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho})] \\ &= \int_{\Omega} d\Omega [g^{\mu\nu} \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - g^{\mu\rho} \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu})] \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) dS_{\rho}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde foi usado que $\nabla_{\rho} g^{\mu\nu} \equiv 0$. Além disso, o Teorema de Stokes foi aplicado e a equação (2.15) representa uma integral de superfície. No entanto, como é usual no princípio variacional, as variações $\delta g^{\mu\nu}$ e as variações de suas primeiras derivadas, combinadas em $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, devem ser nulas³ no contorno $\partial\Omega$, de modo que

$$(\delta\mathcal{S})_2 = 0. \quad (2.16)$$

³É importante ressaltar que existem também derivadas temporais das variações que são usualmente supostas nulas nas bordas.

Finalmente, usando as contribuições (2.8) e (2.16) em (2.3) tem-se que

$$\delta\mathcal{S}_G = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

Como a equação acima deve valer para qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrária, então

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}_G}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] = 0 \\ \therefore G_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

que é a *equação de campo de Einstein no vácuo*.

Torna-se razoável, agora, supor que existem outros campos presentes além do campo gravitacional, de modo que a ação completa da relatividade geral a ser considerada será

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_G + \kappa \mathcal{S}_M \\ &= \int d^4x (\mathcal{L}_G + \kappa \mathcal{L}_M), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde \mathcal{L}_M , chamada *lagrangiana de matéria*, compreende toda a matéria e os campos além do tensor métrico e \mathcal{L}_G é dado pela equação (2.2). A constante de proporcionalidade κ é chamada *constante de acoplamento* da matéria com a gravitação. Aplicando o princípio variacional na ação (2.19) com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta\mathcal{S}_G}{\delta g^{\mu\nu}} + \kappa \frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} G_{\mu\nu} + \kappa \frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Definindo o *tensor energia-momento* como [21]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.21)$$

segue que

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

É importante notar que a definição (2.21), apesar de não ser a única forma de escrever o tensor energia-momento, demonstra ser uma maneira bastante satisfatória de fazê-lo já que $T_{\mu\nu}$ é automaticamente conservado devido à identidade de Bianchi.⁴

Assim, o lado esquerdo da equação (2.22) fornece informações a respeito da curvatura do espaço-tempo determinada pela métrica, enquanto o lado direito representa a distribuição de matéria contida no espaço-tempo. Fazer esta relação é um dos princípios básicos da relatividade geral.

A constante κ é determinada utilizando o princípio de correspondência, uma vez que a equação (2.22) deve ser reduzida àquela da gravitação de Newton no limite não-relativístico, e é um resultado conhecido da relatividade geral dado por

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.23)$$

em unidades não-relativísticas. A equação de Einstein, portanto, tem a forma ($c = 1$):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

2.2 Modelo Cosmológico Padrão

De posse das equações acima, podemos aplicá-las ao universo, uma vez que é possível dizer que o universo é praticamente neutro e, portanto, sua evolução é regida fundamentalmente pela gravitação. No entanto, como garantir que as equações sejam válidas para qualquer ponto do universo e em qualquer instante de tempo? Para tanto, é imprescindível considerar como hipótese de trabalho o que chamamos de *Princípio Cosmológico*, que

⁴É possível também demonstrar que se a ação de matéria \mathcal{S}_M é invariante por transformações de coordenadas, então o tensor energia-momento assim definido também se conserva, isto é, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

pode ser enunciado como

“A parte do universo à qual temos acesso é uma parte representativa do universo como um todo, e, portanto, as leis da física determinadas em nossa vizinhança são válidas em qualquer região e momento da história e em qualquer escala de distância e tempo.”

Duas consequências estruturais da formulação mais forte do princípio cosmológico são a homogeneidade e a isotropia espaciais. Assim, supondo que o universo evolui no tempo, é possível considerar o espaço-tempo como $R \times \Sigma$, onde R representa a direção temporal e Σ uma fatia tipo espaço maximalmente simétrica, ou seja, simétrica por translações e rotações. A métrica do espaço-tempo que descreve uma hipersuperfície maximalmente simétrica que evolui em tamanho pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - [R(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.25)$$

A constante K , que representa a curvatura constante da superfície espacial, pode assumir, em princípio, qualquer valor positivo, negativo ou nulo. Torna-se interessante definir k de modo que $K = |K|k$, e assim k vale $+1$ ou -1 , dependendo de K ser positivo ou negativo. Fazendo a mudança em (2.25) segue que

$$ds^2 = dt^2 - \frac{[R(t)]^2}{|K|} \left(\frac{|K|dr^2}{1 - k|K|r^2} + |K|r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.26)$$

No caso de $K = 0$, a equação (2.25) toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - [R(t)]^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (2.27)$$

Procedendo uma mudança de escala em r , redefinindo $r \equiv |K|^{\frac{1}{2}} r$, e chamando

$$\begin{aligned} a(t) &= R(t)/|K|^{\frac{1}{2}} & \text{se } K \neq 0, \\ a(t) &= R(t) & \text{se } K = 0, \end{aligned}$$

é possível reescrever a equação acima na forma

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.28)$$

onde k pode assumir os valores $+1$, -1 ou 0 e (2.28) é chamado *elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW).

Observe que a métrica de FLRW é definida independentemente do comportamento do fator de escala $a(t)$. A fim de analisar a evolução do fator de escala, é necessário associar à métrica da forma acima, que contém a informação a respeito da geometria do espaço-tempo que supomos descrever o universo, as equações de Einstein, que descrevem a maneira como esta geometria se relaciona com a matéria que compõe este universo. Usando as equações de Einstein temos

$$\begin{aligned} G_{00} &= 8\pi G T_{00} \\ \therefore 3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi G \epsilon \end{aligned} \quad (2.29)$$

e também

$$\begin{aligned} G_{11} &= 8\pi G T_{11} \\ \therefore \frac{2a\ddot{a} + k + \dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi G p \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $\dot{a}(t) = da/dt$, em que supomos que o universo pode ser considerado, com boa aproximação, como um fluido perfeito. Esse fluido é caracterizado por uma densidade de matéria

$\epsilon(x^\mu)$, por uma pressão $p(x^\mu)$, ambas medidas por um observador em um referencial em repouso com relação ao fluido, isto é, um referencial co-móvel, e pela 4-velocidade deste fluido. Além disto, p e ϵ estão relacionadas por uma equação de estado que governa o tipo de fluido em consideração. No limite em que a pressão tende a zero, o fluido perfeito reduz-se à poeira, o que corresponderia a era de matéria. Deste modo, a definição do tensor energia-momento para o fluido perfeito adotado ao longo deste trabalho é dada por

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ é a 4-velocidade do fluido. A homogeneidade e a isotropia do espaço postuladas pelo Princípio Cosmológico exigem que a densidade de energia ϵ e a pressão p sejam funções exclusivas do tempo. Assim, da lei de conservação

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

segue que

$$\frac{d}{dt}(\epsilon a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0, \quad (2.33)$$

que representa a equação de conservação. De posse deste conjunto de equações, podemos encontrar a solução $a(t)$ para cada caso de estudo e analisar o comportamento do universo na era de dominação de cada um dos fluidos.⁵

2.2.1 Modelo Estático de Einstein

Além de homogêneo e isotrópico, o modelo proposto por Einstein era estático (isto é, desprovido de dinâmica em larga escala e, portanto, $\dot{a} = 0$) e fechado (ou seja, limitado nas direções espaciais e portanto finito, com $k = 1$). Assim que tentou aplicar a equação

⁵Note que, como as identidades de Bianchi levam à conservação do tensor energia-momento, então o conjunto de equações (2.29), (2.30) e (2.31) é redundante: para encontrar uma solução, apenas duas delas são utilizadas.

de campo na forma original (2.24), Einstein verificou que só seria possível uma solução estática se a equação fosse modificada introduzindo um termo extra, chamado *constante cosmológica* Λ .

A equação (2.19) é alterada ao adicionar um termo constante à ação convencional de modo a ter

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M]. \quad (2.34)$$

Neste caso, surge na solução um termo proporcional à métrica $g_{\mu\nu}$ e a equação de campo tem a forma

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

de modo que as equações modificadas tornam-se

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3} \epsilon - \frac{k}{a^2}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3p). \quad (2.37)$$

Observe de (2.36) que acrescentar um termo Λ na equação de Einstein é equivalente a considerar no conteúdo do universo uma componente adicional cuja densidade de energia é dada por

$$\epsilon_\Lambda \equiv \frac{1}{8\pi G} \Lambda. \quad (2.38)$$

Assim, colocado do lado esquerdo da equação de campo (2.35), o termo com constante cosmológica sugere que o espaço-tempo seria curvo mesmo na ausência de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$). Por outro lado, ao movê-lo para o lado direito de (2.35) este termo aparece não mais como uma mudança nas equações de campo, e sim como uma contribuição no tensor energia-momento. Desta forma, o tensor energia-momento possuiria, além de uma contribuição devida a matéria em si, uma componente proporcional ao tensor métrico $\Lambda g_{\mu\nu}$. Neste sentido, uma vez que esta componente seria tal que sua densidade de energia permaneceria constante independentemente da expansão/contração do universo (ou

seja, do comportamento de $a(t)$), a constante cosmológica pode ser interpretada como representante da densidade de energia do vácuo.

Note que, se o conteúdo do universo for limitado a apenas matéria tipo poeira ($p_M \approx 0$) e constante cosmológica, então $a(t)$ é tal que $a_e = 1/\sqrt{8\pi G\epsilon_\Lambda}$ e, de (2.37), concluímos que $\epsilon_M = 2\epsilon_\Lambda$, onde $p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$.⁶ Assim, o efeito repulsivo da pressão negativa de Λ equilibra o efeito atrativo da matéria. No entanto, o universo de Einstein se encontra em um ponto de equilíbrio instável: se $a(t)$ for ligeiramente menor que a_e , então ϵ_M é ligeiramente maior que ϵ_Λ e (2.37) indica que $\ddot{a}/a < 0$ e $a(t)$ decresce. Analogamente, se $a(t)$ for um pouco maior que a_e , o fator de escala tende a crescer. Deste modo, a constante cosmológica deveria estar submetida a um ajuste fino para que o modelo funcionasse e permanecesse estático.

2.2.2 Modelo de de Sitter

Conforme apresentado na seção anterior, a constante cosmológica Λ se comporta como um fluido com equação de estado $p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$. Os espaços de de Sitter são soluções espacialmente planas ($k = 0$) das equações de Einstein em dois casos indistinguíveis. Um deles é na ausência de matéria, mas com constante cosmológica representando a densidade de energia do vácuo. O segundo é na ausência da constante cosmológica, mas na presença de um fluido com $\omega = -1$. Neste cenário, a equação de Friedmann (2.36) torna-se

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\epsilon_\Lambda}{3}a^2 \quad (2.39)$$

e possui solução dada por

$$a(t) = e^{H_\Lambda(t-t_i)}, \quad (2.40)$$

onde

$$H_\Lambda = \left(\frac{8\pi G\epsilon_\Lambda}{3}\right)^{1/2}. \quad (2.41)$$

⁶Ver equação de continuidade (2.33).

O *parâmetro de Hubble*, que define a taxa de expansão do universo, é escrito como

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.42)$$

e é uma constante para este caso, isto é, $H(t) = H_\Lambda$.

2.2.3 Horizontes

Uma vez que a velocidade de propagação de partículas é limitada pela velocidade da luz, que é finita, então existe uma distância máxima que um fóton originado no Big Bang ($t = 0$) pode ter percorrido até atingir um observador em um tempo arbitrário t ? Considere o sistema de coordenadas FLRW dado em (2.28) em que um fóton viaja na direção radial. Como a luz percorre geodésicas nulas, isto é, fótons satisfazem a equação $ds^2 = 0$, então segue que ($d\phi = d\theta = 0$)

$$dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.43)$$

Em particular, para o caso em que tomamos $k = 0$, a distância radial co-móvel máxima $r_{\max}(t)$ até a qual um observador posicionado no centro de coordenadas em um tempo t pode receber sinais emitidos em $t = 0$ é dada por

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} dr. \quad (2.44)$$

A distância física encontrada multiplicando-se (2.44) por $a(t)$

$$d_p = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.45)$$

define o horizonte de partículas: as partículas localizadas a uma distância maior que r_{\max} do observador na origem ainda não foram observadas. Claramente, se a integral em (2.45)

não converge em $t = 0$, não existe horizonte de partículas.

É importante destacar que o horizonte de partículas dado em (2.45) representa a distância mínima entre partículas para que elas tenham estado em contato causal em algum momento do passado. Esta relação difere da definição do raio de Hubble co-móvel, $1/aH$, que determina a distância mínima de separação entre duas partículas para que elas estejam em contato causal agora. Desta forma, duas partículas podem não se comunicar hoje, mas terem estado em contato causal em algum momento do passado.

Ao invés de olharmos para o passado, podemos nos perguntar também se existe um limite de distância máxima no futuro a partir da qual eventos serão sempre inobserváveis. Esta é a definição de horizonte de eventos, dado por

$$d_e = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} dr. \quad (2.46)$$

Desta forma, fontes localizadas a uma distância $r > r_{\max}$ emitem fótons que nunca serão observados pelo observador situado na origem. Analogamente ao caso do horizonte de partículas, se a integral em (2.46) não converge para $t \rightarrow \infty$, não existe horizonte de eventos.

Assim, para um universo composto por um único fluido, em que o fator de escala é uma lei de potência do tempo (isto é, $a(t) = t^q$, $q \neq 1$), o horizonte é tal que

$$d_e(t) = \frac{t}{1-q}, \quad (2.47)$$

não existe horizonte de eventos, uma vez que $d(t \rightarrow \infty)$ diverge. Por outro lado, a integral do horizonte de partículas converge, e este aumenta à medida em que o universo expande.

Analogamente, para um universo dominado por constante cosmológica, temos

$$d_e(t) = \frac{1}{H_\Lambda}, \quad (2.48)$$

ou seja, é constante para qualquer instante de tempo. Assim, todo evento que ocorra, em qualquer instante de tempo, a uma distância maior que H_{Λ}^{-1} não será percebido pelo observador e não influencia seu futuro.

2.2.4 Casos especiais

Para seção espacial plana, vamos supor que o conteúdo do universo seja uma única componente representada por um fluido perfeito de equação de estado $p = \omega\epsilon$, em que ω é uma constante. Neste caso, utilizando o parâmetro de Hubble dado em (2.42), a equação de conservação de energia (2.33) pode ser reescrita como

$$\dot{\epsilon} = -3H(\epsilon + p) = -3H(1 + \omega)\epsilon \quad (2.49)$$

e possui solução dada por

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{a_0^{3(1+\omega)}}{a^{3(1+\omega)}}, \quad (2.50)$$

em que o subíndice 0 representa o valor atual das quantidades.⁷

Assim, a equação de Friedmann (2.29) torna-se

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\epsilon_0 a_0^{3(1+\omega)}}{a^{3(1+\omega)}}, \quad (2.51)$$

de modo que sua solução é dada por

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.52)$$

onde

$$t_0 = \frac{1}{1 + \omega} \sqrt{\frac{1}{6\pi G \epsilon_0 a_0^{3(1+\omega)}}}. \quad (2.53)$$

⁷O valor atual do parâmetro de Hubble é dado pela constante de Hubble H_0 . Para uma descrição dos diferentes métodos utilizados para a determinação de H_0 , ver por exemplo [32] e referências nele contidas.

A partir de (2.52), é possível analisar alguns casos particulares de interesse:

- Matéria não-relativística ($\omega = 0$): No caso de um universo dominado por um fluido tipo poeira, a dependência do fator de escala com o tempo é dada por $a(t) \propto t^{2/3}$.
- Matéria relativística ($\omega = 1/3$): Para um universo dominado por radiação, a solução (2.52) tem a forma $a(t) \propto t^{1/2}$.

2.2.5 Caso Geral

Uma descrição realista do universo, obviamente, não pode conter apenas um único fluido. Introduzimos o *parâmetro de densidade* Ω como a grandeza adimensional

$$\Omega \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{crit}}}, \quad (2.54)$$

em que a densidade crítica ϵ_{crit} é dada por

$$\epsilon_{\text{crit}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.55)$$

Assim, é possível reescrever (2.36) como

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{0\text{crit}}}, \quad (2.56)$$

onde a densidade crítica hoje é dada por $\epsilon_{0\text{crit}} = (3H_0^2)/8\pi G$. Logo, se considerarmos que o universo é composto por um fluido tipo poeira ($\omega = 0$), por radiação ($\omega = 1/3$) e por uma componente de energia escura representada pela constante cosmológica Λ ($\omega = -1$), então (2.56) torna-se

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{0r}}{a^4} + \frac{\Omega_{0m}}{a^3} + \Omega_{0\Lambda}, \quad (2.57)$$

em que

$$\Omega_{0r} = \frac{\epsilon_{0r}}{\epsilon_{0\text{crit}}}, \quad \Omega_{0m} = \frac{\epsilon_{0m}}{\epsilon_{0\text{crit}}}, \quad \Omega_{0\Lambda} = \frac{\epsilon_{0\Lambda}}{\epsilon_{0\text{crit}}}, \quad (2.58)$$

$$\Omega_0 = \Omega_{0r} + \Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} = 1. \quad (2.59)$$

De (2.57), é possível notar que, à medida em que $a \rightarrow 0$, o fator dominante na dinâmica do universo é aquele correspondente à matéria e em seguida, para a muito pequeno, aquele que corresponde à radiação. Por outro lado, no limite em que $a \rightarrow \infty$, o termo com constante cosmológica domina a expansão. Assim, nestes limites, uma descrição do universo que inclua apenas um fluido fornece uma boa aproximação da realidade. No entanto, é importante ter em mente que na transição entre estas fases, a descrição de um único fluido é limitada.

2.3 Caso particular: $\Lambda + \text{fluido}$

Neste trabalho, consideraremos a evolução de um universo em contração composto por um fluido perfeito de equação de estado $p = \omega\epsilon$ e constante cosmológica Λ . Neste cenário, a equação de Friedmann que rege a evolução do fator de escala é dada por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\epsilon_0 a_0^{3(1+\omega)}}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.60)$$

que apresenta como solução

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_{0\omega}}{\Omega_{0\Lambda}} \right)^{1/3(1+\omega)} \left[\sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{0\Lambda}}(1+\omega)H_0 t}{2} \right) \right]^{2/3(1+\omega)}, \quad (2.61)$$

em termos dos parâmetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{0\omega}$ e $\Omega_{0\Lambda}$, onde

$$\Omega_{0\omega} \equiv \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{\text{crit}}} \quad (2.62)$$

e

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{H_0^2}, \quad (2.63)$$

com $\epsilon_{\text{crit}} \equiv 8\pi G/(3H_0^2)$. Note que, à medida que $t \rightarrow 0$, a solução (2.61) tende⁸ a $a(t) \rightarrow t^{2/3(1+\omega)}$, indicando dominação do fluido. Por outro lado, para t grande a exponencial positiva de $\sinh(t)$ domina e temos o espaço-tempo de de Sitter como solução.

Observe que, para o universo dominado apenas pelo fluido (ou no limite deste caso particular em que ocorre a dominação do fluido), em que o fator de escala tem a forma $a(t) \propto t^q$ e $q = 2/3(1 + \omega)$, o horizonte de partículas (2.45) é tal que

$$d_H(t) \equiv a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.64)$$

Integrando (2.64), temos que

$$d_H = \frac{3(1 + \omega)}{1 + 3\omega} \left(t_i^{(1+3\omega)/3(1+\omega)} - t^{2/3(1+\omega)} - t \right), \quad (2.65)$$

onde fica claro que, para o caso da contração (em que $t_i \rightarrow -\infty$), o horizonte é infinito para $\omega > -1/3$ para qualquer tempo t . Por outro lado, na dominação da constante cosmológica, em que o fator de escala é $a(t) \propto \exp(H_\Lambda t)$, temos

$$d_H = e^{H_\Lambda t} \int_{t_i}^t e^{-H_\Lambda t} dt = H_\Lambda^{-1} (e^{H_\Lambda(t-t_i)} - 1), \quad (2.66)$$

de modo que, para $t - t_i \gg H_\Lambda^{-1}$, o tamanho da região causalmente conectada cresce exponencialmente e, no limite em que $t_i \rightarrow -\infty$ o resultado diverge e o modelo não possui horizonte.

⁸Pois para argumento muito pequeno $\sinh(t) \sim t$.

Capítulo 3

Modelos Cosmológicos com Ricochete

A história da evolução do universo conforme prevista pela Cosmologia Padrão encontra grande respaldo observacional e pode ser desêa com bastante confiança a partir do momento da aniquilação elétron-pósitron. No contexto do modelo conhecido como Big-Bang, é possível explicar a abundância de elementos químicos leves (como Hidrogênio e Hélio) por meio de processos de nucleossíntese.

No entanto, para escalas menores o modelo padrão pode somente especular a respeito do comportamento do universo. Além disto, apesar de ser muito bem sucedida quando confrontada com as observações, a Cosmologia Padrão não consegue descrever completamente o comportamento do universo conforme observado. Uma maneira muito difundida de se contornar esses problemas do modelo padrão é supor que previamente à fase de radiação, quando o fator de escala $a(t) \sim \sqrt{t}$, existe um período em que o fator de escala cresce exponencialmente, chamado de período inflacionário. Contudo, a inflação não consegue resolver todos os problemas do modelo padrão cosmológico, e é neste contexto que os modelos com ricochete (*bounce*) surgem como uma boa alternativa.

Os problemas da Cosmologia Padrão, a maneira como a inflação os enfrenta e como os modelos com ricochete surgem como uma boa alternativa ao paradigma inflacionário serão apresentados nesse capítulo.

3.1 Problemas da Cosmologia Padrão

Condições iniciais e homogeneidade

Os dados da radiação cósmica de fundo (CMB) [12], que nos fornecem uma imagem do universo primordial, atestam que a matéria está distribuída de forma bastante homogênea e isotrópica para escalas maiores que alguns megaparsec (Mpc).¹ No entanto, a solução homogênea é um caso muito particular das equações de Einstein, ou seja, nosso universo é uma configuração pouco provável entre todas as situações possíveis. Quais seriam então as condições iniciais para que o universo tivesse estas características?

Horizonte

É possível então supor que o universo tenha se formado em algum estado totalmente aleatório e passado por um processo que o homogeneizou. Suponha um fóton que se desloque por uma geodésica nula na direção radial no referencial co-móvel (mantendo as coordenadas θ e ϕ constantes)²

$$dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0, \quad (3.1)$$

de modo que a distância coordenada radial percorrida desde o desacoplamento até hoje é dada por

$$r_c = \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{3}{m}(t_0^{1/3} - t_d^{1/3}), \quad (3.2)$$

pois a era de radiação é muito curta quando comparada com a era de matéria e podemos aproximar $a(t) \simeq mt^{2/3}$, em que m é uma constante de proporcionalidade. Assim, a distância coordenada entre dois fótons que chegam em $r = 0$ é, aproximadamente,

$$d_c = \frac{6}{m}(t_0^{1/3} - t_d^{1/3}). \quad (3.3)$$

¹1Mpc = 3.09×10^{24} cm.

²Supondo que o universo possui secção espacial plana, ou seja, $k = 0$.

O horizonte, por sua vez, pode ser calculado (novamente aproximando para poeira)

$$h_c = \int_0^{t_d} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{3}{m} t_d^{1/3}. \quad (3.4)$$

Fazendo a comparação temos que

$$\frac{d_c}{h_c} = \frac{\frac{6}{m}(t_0^{1/3} - t_d^{1/3})}{\frac{3}{m}t_d^{1/3}} \simeq 2 \left(\frac{10^{10}}{10^5} \right)^{1/3} - 2, \quad (3.5)$$

ou seja, a distância entre estes dois fótons é quase 100 vezes maior que o tamanho do horizonte, não permitindo contato causal entre eles. Como então é possível que duas regiões que nunca estiveram em contato causal apresentem aproximadamente a mesma temperatura, resultando na quase total homogeneidade e isotropia observada na distribuição da CMB?

Planeza

Supondo então que o universo é homogêneo, a curvatura espacial k presente na equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon - \frac{k}{a^2} \Rightarrow 1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\epsilon - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (3.6)$$

está relacionada ao parâmetro de densidade Ω da forma

$$1 = \Omega - \frac{k}{\dot{a}^2} \quad (3.7)$$

ou

$$|\Omega - 1| = \frac{1}{\dot{a}^2}. \quad (3.8)$$

Diferenciando a equação acima,

$$|\dot{\Omega} - 1| = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}, \quad (3.9)$$

é fácil notar de maneira intuitiva que, como o universo está a maior parte da sua evolução desacelerado, a tendência é de que Ω se afaste cada vez mais do valor 1. No entanto, dados observacionais de medidas de anisotropias da CMB [11, 12] indicam que o valor de Ω está muito próximo de 1, o que nos leva a inferir que ele esteve ainda mais próximo da unidade no passado.

Deste modo, fazendo a razão que compara o valor do parâmetro de densidade atual Ω_0 e o seu valor no período de equivalência matéria-radiação Ω_{eq}

$$\frac{|\Omega_0 - 1|}{|\Omega_{eq} - 1|} = \frac{\dot{a}_{eq}^2}{\dot{a}_0^2} = \frac{t_0^{2/3}}{t_{eq}^{2/3}} = \left(\frac{10^{10}}{10^4} \right)^{2/3} \simeq 10^4, \quad (3.10)$$

temos

$$|\Omega_{eq} - 1| \simeq 10^{-4} |\Omega_0 - 1|. \quad (3.11)$$

Se considerarmos³

$$\Omega_0 \simeq 1 \pm 0,02 \Rightarrow |\Omega_0 - 1| \simeq 0,02, \quad (3.12)$$

então

$$|\Omega_{eq} - 1| \simeq 10^{-6} \Rightarrow \Omega_{eq} \simeq 1 \pm 10^{-6}. \quad (3.13)$$

Fazendo a mesma comparação entre o período de equivalência e da nucleossíntese

$$\frac{|\Omega_{eq} - 1|}{|\Omega_N - 1|} = \frac{\dot{a}_N^2}{\dot{a}_{eq}^2} = \frac{t_{eq}}{t_N} \simeq \frac{10^{12}}{1} \simeq 10^{12}, \quad (3.14)$$

ou seja,

$$|\Omega_N - 1| \simeq 10^{-12} |\Omega_{eq} - 1| \Rightarrow \Omega_N \simeq 1 \pm 10^{-18}. \quad (3.15)$$

Isto é, quanto mais avançamos em direção ao passado, se hoje $\Omega_0 \sim 1$, percebemos que mais próximo ainda ele deveria estar de 1. No entanto, observe pela equação (3.9) que este é um ponto muito especial, o que exigiria novamente condições iniciais muito

³De acordo com [11, 12], $\Omega_0^{\text{tot}} = 1.02 \pm 0.02$.

específicas.

3.2 Inflação

Tendo em vista os problemas descritos na seção anterior, foi proposta na década de 80 [9, 14] uma maneira de tratá-los com apenas um mecanismo cosmológico. A inflação é um período de expansão acelerada que se dá em uma escala de energia de aproximadamente 10^{16} GeV. Como a equação de Friedmann,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3p), \quad (3.16)$$

descreve o comportamento do universo em expansão, note que para que haja aceleração, isto é, $\ddot{a} > 0$, é necessário $\epsilon + 3p < 0$, o que implicaria que a inflação ocorra quando o universo é dominado temporariamente por um fluido com parâmetro da equação de estado $\omega < -\frac{1}{3}$. Um exemplo particular de componente que viola esta condição de energia é uma constante cosmológica positiva, para a qual $\omega = -1$. Neste caso, a solução das equações de Einstein corresponde ao universo de de Sitter, discutido no capítulo anterior.⁴

Horizonte

Se no período inflacionário o universo possui fator de escala que se comporta como uma lei de potência $a(t) \sim t^q$, em que $q = \frac{2}{3(1+\omega)}$, então se $\omega < -\frac{1}{3}$ tem-se $q > 1$. O horizonte co-móvel na fase acelerada que ocorre entre um tempo inicial t_i e um instante final t_f pode ser calculado como

$$\Delta r_c = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \simeq \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{t_i^{q-1}} - \frac{1}{t_f^{q-1}} \right). \quad (3.17)$$

⁴A solução de de Sitter no entanto falha em satisfazer todas as condições necessárias para um modelo inflacionário satisfatório pois não possui conexão suave (“graceful exit”) com o estágio em que o universo se comporta como Friedmann. Para maiores detalhes nas condições que fazem um modelo inflacionário bem sucedido, consultar [13].

Considerando-se que t_i pode ser bastante pequeno, a maior contribuição da integral acima vem deste termo, sendo possível que o horizonte seja tão grande quanto se queira, isto é, o resultado da integral em (3.17) diverge à medida em que $t_i \rightarrow 0$ (ao contrário do caso sempre desacelerado em que o resultado converge). Observe, por outro lado, que se utilizarmos o espaço-tempo de de Sitter como uma aproximação para a inflação, o horizonte dado em (2.66) é finito, uma vez a inflação é iniciada em um tempo finito t_i . Para este caso, o horizonte é proporcional a H_Λ^{-1} .

Planeza

Conforme visto anteriormente na equação (3.8) para o parâmetro de densidade total Ω_T ,

$$|\Omega_T - 1| = \frac{1}{\dot{a}^2} \quad (3.18)$$

temos

$$\frac{d}{dt}(|\Omega_T - 1|) = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}. \quad (3.19)$$

Se o universo esteve sempre desacelerado, a tendência de Ω_T é sempre se afastar de 1. No entanto, supondo

$$a(t) \propto t^q, \quad (3.20)$$

em que

$$q = \frac{2}{3(1+\omega)} \quad ; \quad \omega < -\frac{1}{3}, \quad (3.21)$$

então é possível notar que existe uma maior gama de situações iniciais possíveis: mesmo que Ω_T esteja em um valor distante de 1 no início do período inflacionário, ele é forçado para um valor próximo de 1 durante a inflação, ou seja, a diferença entre Ω_T e 1 diminui com o tempo durante a fase acelerada.

3.3 Modelos com Ricochete

Mesmo sendo muito bem sucedida em resolver alguns dos problemas da Cosmologia Padrão com um único mecanismo, a teoria inflacionária ainda não é capaz de formar um modelo completo para o universo. A inflação precisa de condições iniciais específicas para ser iniciada, que recaem em pré-requisitos sobre o campo escalar que domina a dinâmica do universo quando este emerge da fase quântica (planckiana) [8]. Uma maneira de contornar este problema do Modelo Padrão é em um modelo de universo eterno, uma vez que não existe evidência observacional de que o universo de fato tenha um início: neste caso, as condições iniciais poderiam ser colocadas em um tempo bastante remoto. Dentro desta possibilidade, é possível dividir os modelos de universos eternos em duas subclasses: aqueles que assintoticamente tendem a um volume finito no passado (pré Big-Bang) e os universos que sofrem um ricochete após uma longa fase de contração antes de começarem a se expandir novamente.

Estes últimos serão objeto de estudo desta seção.

3.3.1 Propriedades

A maneira mais simples de estudar um modelo cosmológico com ricochete não singular é considerar modelos clássicos FLRW (isto é, baseados na relatividade geral), com seção espacial fechada ($k = 1$) e com um campo escalar, ou seja, a dinâmica é governada por uma ação de forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{6l_p^2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (3.22)$$

em que $l_p^2 = \frac{8}{3} \pi G$ é o comprimento de Planck e $V(\varphi)$ o potencial para o campo escalar φ . De modo geral, a densidade de energia ϵ_φ e pressão isotrópica p_φ são obtidas a partir

do cálculo do tensor energia-momento para a ação acima, de modo que temos

$$\epsilon_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi), \quad p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \quad (3.23)$$

As equações de Einstein relacionam a evolução temporal do fator de escala $a(t)$ com o tensor energia-momento de φ ,

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.24)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{3} (V - \dot{\varphi}^2) - H^2, \quad (3.25)$$

e a condição de conservação de $T^{\mu\nu}$ resulta na equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0, \quad (3.26)$$

em que $V_{,\varphi} = dV/d\varphi$. Combinando apropriadamente as equações (3.24) e (3.25), segue que

$$\epsilon_\varphi + p_\varphi = 2 \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \quad (3.27)$$

e

$$\epsilon_\varphi + 3p_\varphi = -6 \left(\dot{H} + H^2 \right) \quad (3.28)$$

representam as condições de energia reescritas em termos do fator de Hubble H e do fator de escala a . Note que a condição de energia nula (NEC), definida por $\epsilon + p > 0$, é necessariamente satisfeita pois a energia cinética do campo escalar é sempre positiva. Por outro lado, a condição de energia forte (SEC), dada por $\epsilon + 3p > 0$, deve ser necessariamente violada, ao menos em torno do valor mínimo do fator de escala, já que nesta região este deve ser uma função côncava ($\ddot{a} > 0$) para realizar um ricochete (onde, por

construção, $H = 0$ e $\dot{H} > 0$). O requerimento do ricochete, em que há um momento quando $\dot{H} > 0$, exige ainda que a curvatura da seção espacial seja positiva (ver equação (3.27)) e de potencial $V(\varphi) > 0$, ou seja, o campo escalar não pode ser livre.

Por simplicidade, escolheremos $\eta = 0$ como o tempo conforme no qual o ricochete ocorre e iremos analisar o fator de escala na vizinhança do ricochete, uma vez que estamos interessados em caracterizar o sistema nas regiões próximas ao mínimo de $a(\eta)$. Para este fim, é possível descrever o fator de escala por uma expansão em série de Taylor em η sem perda de generalidade, com um parâmetro livre para cada termo da série, de modo que

$$\frac{a(\eta)}{a_0} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 + \delta \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^3 + \frac{5}{24} (1 + \xi) \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^4. \quad (3.29)$$

O primeiro parâmetro livre a_0 representa o valor do fator de escala no ricochete, enquanto o segundo parâmetro livre, η_0 , fornece a escala temporal característica (a duração física do ricochete é dada pelo tempo $t_0 = a_0 \eta_0$).

Singularidade

Conforme é possível observar pelas equações de Friedmann do capítulo anterior, a evolução do universo via Modelo Padrão apresenta uma singularidade em $t = 0$. Neste instante, uma vez que singularidades estão fora do escopo de qualquer teoria física, não é possível descrever o comportamento do universo. A inflação se omite no que diz respeito à existência de uma singularidade inicial no modelo cosmológico padrão, e, desta forma, cenários em que a singularidade inicial seja eliminada constituem modelos que se apresentam como alternativa ao paradigma inflacionário. Universos não-singulares podem ser obtidos supondo, por exemplo que este alterne uma fase de contração e expansão com um ricochete entre elas.

Horizonte

Supondo que o ricochete ocorre em $t = 0$, de modo que a fase de contração ocorre em $t < 0$ e a fase de expansão ocorre em $t > 0$, o horizonte é obtido da integral

$$d_H(t) = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.30)$$

e portanto, se a dinâmica é dada por um fluido com parâmetro da equação de estado ω , ou seja,

$$a(t) \propto |t|^{2/3(1+\omega)}, \quad (3.31)$$

então

$$d_H \propto \int_{t_i}^t \frac{d\tau}{|\tau|^q}, \quad (3.32)$$

ou seja,

$$d_H \propto \left(\frac{1}{|t_i|^{q-1}} - \frac{1}{|t|^{q-1}} \right), \quad (3.33)$$

de modo que, à medida em que $t_i \rightarrow -\infty$, a integral acima diverge para qualquer fluido usual com $\omega > -\frac{1}{3}$, uma vez que neste caso $q = \frac{2}{3(1+\omega)} < 1$.

Planeza

Por construção de nosso modelo com ricochete, se supusermos que o universo expandiu até atualmente muito menos do que contraiu, podemos resolver o problema da planeza, presente na equação (3.9), com uma longa fase de contração (em que $\ddot{a} < 0$ e $\dot{a} < 0$). Assim, Ω_T teve tempo suficiente para aproximar seu valor da unidade, mas ainda não se afastou suficientemente do valor 1 na fase de expansão para que seja possível observar esta discrepância.

Capítulo 4

Teoria Linear de Perturbações

Conforme discutido no capítulo anterior, o universo pode ser aproximado por uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria para largas escalas, de acordo com os dados observados da radiação cósmica de fundo. Em escalas menores, obviamente o universo possui estrutura não-linear bem desenvolvida (como galáxias, aglomerados de galáxias, etc), o que implica ter havido um pequeno desvio de homogeneidade no universo primordial. Uma teoria de pequenas oscilações na densidade de energia pode explicar a formação de estruturas no universo, pelo princípio de que pela instabilidade gravitacional pequenas regiões de inhomogeneidade tendem a concentrar cada vez mais massa, uma vez que a matéria é atraída para regiões de alta densidade, aumentando assim inhomogeneidades já existentes.

4.1 Teoria Newtoniana

Nesta seção, consideramos a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana da gravitação. Apesar de os resultados serem aplicados somente à matéria não relativística em grandes escalas, as soluções aplicadas aqui são importantes para explicar as características gerais do comportamento das pequenas inhomogeneidades iniciais e sua evolução a fim de formar as estruturas do universo.

Em larga escala, podemos descrever a matéria com boa aproximação como um fluido perfeito descrito por

- densidade de energia $\epsilon(\mathbf{x}, t)$,
- entropia por unidade de massa $S(\mathbf{x}, t)$ e
- campo vetorial de velocidades $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$,

que obedecem às equações hidrodinâmicas abaixo:

Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{V}) = 0. \quad (4.1)$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\epsilon} + \nabla \phi = 0. \quad (4.2)$$

Conservação da Entropia

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) S = 0. \quad (4.3)$$

Equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \epsilon. \quad (4.4)$$

Equação de Estado

$$p = p(\epsilon, S). \quad (4.5)$$

Inicialmente e por simplicidade, supomos que o universo é estático e portanto não está expandindo, com uma densidade de energia $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ constante¹, e realizamos as perturbações em torno dela. Aplicando uma pequena perturbação na distribuição de matéria tem-se:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon,$$

¹No entanto, observe que $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \text{const.} \neq 0$ é incompatível com as equações de Newton, uma vez que se a densidade de energia for constante não existe velocidade relativa entre as partículas do fluido, o que implicaria em $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0$ e, portanto, $\phi = 0$, o que contradiz a equação de Poisson.

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v},$$

$$S = S_0 + \delta S$$

além da perturbação na pressão

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= p_0(\epsilon_0 + \delta\epsilon, S_0 + \delta S) \\ &= p_0 + \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \delta\epsilon + \frac{\partial p}{\partial S} \delta S \\ &= p_0 + \delta p \end{aligned}$$

onde

$$\delta p = c_s^2 \delta\epsilon + \sigma \delta S.$$

em que c_s é a velocidade do som.²

Para que as equações de Newton sejam válidas, é preciso que

$$p \ll \epsilon, \quad c_s^2 \ll c, \quad |\delta\mathbf{v}| \ll c. \quad (4.6)$$

Assim, as equações tomam a forma

$$\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\epsilon, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\epsilon_0} \nabla \delta\epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \nabla \delta S + \nabla \delta\phi = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0. \quad (4.9)$$

Combinando as expressões (4.8) e (4.9) apropriadamente, temos a equação linear para

²Note que pequenas perturbações em uma substância de pressão p propaga-se com a velocidade do som. Para substâncias com $\omega > 0$, temos $c_s = \sqrt{\omega}$. Por outro lado, se $\omega < 0$, ou seja, a substância possui pressão negativa, então pequenas perturbações terão amplitudes que crescem ou diminuem com o tempo.

$\delta\epsilon$

$$\frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta\epsilon - 4\pi G \epsilon_0 \delta\epsilon = \sigma \nabla^2 \delta S, \quad (4.10)$$

cuja solução representa a evolução temporal das perturbações na densidade de energia para o cenário proposto.

Perturbações Adiabáticas

Supondo que a perturbação é adiabática, isto é, $\delta S = 0$, e fazendo a expansão de Fourier

$$\delta\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int \delta\epsilon_{\mathbf{k}}(t) \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (4.11)$$

em que $k = |\mathbf{k}|$ é o número de onda e λ é o comprimento de onda característico de uma determinada perturbação, temos

$$\delta\ddot{\epsilon}_{\mathbf{k}} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \epsilon_0) \delta\epsilon_{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.12)$$

As soluções de (4.12) têm a forma

$$\delta\epsilon_{\mathbf{k}} \propto \exp^{\pm i\omega(k)t}, \quad (4.13)$$

onde

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G \epsilon_0}. \quad (4.14)$$

Note que o comportamento da perturbação depende crucialmente do sinal da expressão dentro da raiz. Deste modo, definimos o *comprimento de onda de Jeans* como

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} \quad (4.15)$$

$$= c_s \left(\frac{\pi}{G \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (4.16)$$

onde

$$k_J = \frac{2}{c_s} \sqrt{\pi G \epsilon_0}$$

é o valor exato para o qual $\omega(k_J) = 0$. Portanto, concluímos que

- para perturbações com comprimento de onda $\lambda < \lambda_J \Rightarrow \delta\epsilon \propto \sin(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x} + \alpha)$, de modo que as pequenas perturbações na densidade possuem comportamento oscilatório;
- por outro lado, se $\lambda > \lambda_J \Rightarrow \delta\epsilon \propto \exp(\pm|\omega|t)$. Para este caso, pequenas perturbações na densidade tendem a crescer exponencialmente.

Note que se $\lambda \ll \lambda_J$ ($k \gg k_J$), podemos desprezar os efeitos gravitacionais. Por outro lado, se $\lambda \gg \lambda_J$ (ou $k \ll k_J$) temos $|\omega(k)| = \frac{1}{t_{GR}} \simeq (4\pi G \epsilon_0)^{1/2} \rightarrow t_{GR} = (4\pi G \epsilon_0)^{-1/2}$, que representa o tempo característico para que o fluido sofra um colapso significativo. A escala de Jeans portanto determina até que ponto o fluido é capaz de conter o colapso gravitacional, isto é, a escala de comprimento até a qual o sistema reage às perturbações.

Perturbações Vetoriais

Suponha agora que $\delta\epsilon = 0$ e $\delta S = 0$, então as equações hidrodinâmicas reduzem-se a

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (4.18)$$

de onde concluímos que para

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{w}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (4.19)$$

temos

$$\mathbf{w}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.20)$$

Perturbações na Entropia

Considere agora que $\delta S \neq 0$. Neste caso temos que

$$\delta \ddot{\epsilon}_{\mathbf{k}} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \epsilon_0) \delta \epsilon_{\mathbf{k}} = -\sigma k^2 \delta S_{\mathbf{k}}, \quad (4.21)$$

é a equação para a qual uma solução particular pode ser

$$\delta \epsilon_{\mathbf{k}}^P = -\frac{\sigma k^2 \delta S_{\mathbf{k}}}{(k^2 c_s^2 - 4\pi G \epsilon_0)}. \quad (4.22)$$

4.1.1 Instabilidade em um universo em expansão

Encontramos até agora dois modos adiabáticos, dois modos vetoriais e um modo de entropia descrevendo perturbações em um meio gravitacional homogêneo e sem expansão. Vamos agora generalizar a situação anterior, supondo que a dinâmica de fundo é tal que

$$\epsilon = \epsilon_0(t), \quad (4.23)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = H(t) \cdot \mathbf{x}. \quad (4.24)$$

Substituindo na equação de continuidade (4.1) temos a equação de conservação de energia

$$\dot{\epsilon}_0 + 3H\epsilon_0 = 0. \quad (4.25)$$

Note que esta é a mesma equação de conservação de energia para $p = 0$, embora não tenhamos feito até agora nenhuma suposição a respeito da pressão. Analogamente, da equação de velocidade (4.2)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\epsilon} + \nabla \phi = 0 \quad (4.26)$$

e tomando os divergentes temos³

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\epsilon_0. \quad (4.27)$$

Observe que o modelo Newtoniano pode descrever muito bem um universo em expansão em que o fluido dominante é a poeira. Porém, é importante ressaltar que a interpretação do caso em Relatividade Geral é diferente, uma vez que para este último o que está em expansão é o próprio espaço-tempo.

Dadas as perturbações

$$\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v},$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi,$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_s^2 \delta\epsilon$$

e tomando a equação de continuidade até primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial \delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0 (\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta\epsilon \mathbf{V}_0) = 0. \quad (4.28)$$

Note que o fato de \mathbf{V}_0 depender da posição impossibilita a expansão de Fourier. A fim de eliminar esta dependência, torna-se conveniente introduzir as coordenadas co-móveis (lagrangianas) \mathbf{q} relacionadas com as coordenadas \mathbf{x} por

$$\mathbf{x} = a(t) \mathbf{q}, \quad (4.29)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, associado à expansão do fluido, uma vez que em \mathbf{q} as partículas estão paradas umas em relação às outras.

Definimos o contraste de densidade (a amplitude fracional das perturbações de densi-

³Observe que se $H = \frac{\dot{a}}{a}$, em que $a(t)$ é o fator de escala, então (4.27) é a equação de Friedmann.

dade)

$$\delta = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (4.30)$$

de modo que obtemos assim a equação

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta - 4\pi G\epsilon_0\delta = 0, \quad (4.31)$$

a qual descreve a instabilidade gravitacional em um universo que expande ou contrai, uma vez que não fizemos nenhuma suposição sobre o fato de $a(t)$ estar aumentando.

Perturbações Adiabáticas

Como em (4.31) todos os coeficientes dependem exclusivamente do tempo, podemos tomar agora a transformada de Fourier

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\epsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.32)$$

Fazendo a mudança de variável

$$v = a^{1/2}\delta \quad (4.33)$$

e reescrevendo (4.32) em termos do tempo conforme η em que

$$dt = a(\eta)d\eta$$

temos

$$v'' + \left[c_s k^2 - 4\pi G\epsilon_0 a^2 + \frac{1}{4} \left(\mathcal{H}^2 - \frac{2a''}{a} \right) \right] v = 0, \quad (4.34)$$

onde

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\eta^2} \equiv \frac{a''}{a}.$$

Usando as equações de fundo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\epsilon_0, \quad (4.35)$$

$$\dot{\epsilon}_0 + 3H\epsilon_0 = 0, \quad (4.36)$$

que levam a

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon_0}{3} + \frac{E}{a^2}, \quad (4.37)$$

em que E representa a energia gravitacional total do sistema, segue que

$$v'' + \left[c_s k^2 - 4\pi G\epsilon_0 a^2 - \frac{E}{4} \right] v = 0. \quad (4.38)$$

Na transformada de Fourier em coordenadas co-móveis temos

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{k}}{a}}, \quad (4.39)$$

em que \mathbf{x} é a coordenada física e, portanto, $\frac{\mathbf{k}}{a}$ representa k físico. Assim, o comprimento de onda de Jeans físico é

$$\begin{aligned} \lambda_J^F &= a\lambda_J \\ &= \frac{2\pi a}{k_J}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G\epsilon_0 a^2}{c_s^2}}, \quad (4.41)$$

em que o termo $E/4$ em (4.38) pode ser desconsiderado, uma vez que da equação de continuidade temos que $\epsilon_0 \propto 1/a^3$ e desta forma o termo $4\pi G\epsilon_0 a^2$ é maior.

Assim

$$\lambda_J^F = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\epsilon_0}}, \quad (4.42)$$

$$\sim c_s t, \quad (4.43)$$

ou seja, o comprimento de onda λ_J^F é da ordem do horizonte do som. Ainda podemos concluir que o colapso gravitacional de certa estrutura está relacionado a quanto uma perturbação é maior ou menor que λ_J em um determinado tempo.⁴

Desta forma, temos que

- Se $\lambda < \lambda_J$

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} e^{\pm i k \int \frac{c_s dt}{a}}.$$

- Se $\lambda > \lambda_J$, a solução geral de (4.32) tem a forma

$$\delta = C_1 H \int \frac{dt}{a^2 H} + C_2 H,$$

de onde concluímos que se $a \propto t^{2/3}$ (universo dominado por matéria) temos

$$\begin{aligned} \delta &= C_1 H \int \frac{dt}{a^2 H^2} + C_2 H \\ &= C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1} \\ &= C_1 a + C_2 H. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Perceba que no caso de um universo em expansão a instabilidade é bem menos eficiente, uma vez que a amplitude da perturbação cresce como uma potência do tempo.

⁴Podemos usar também a massa a partir da qual ocorre colapso gravitacional, definida como a massa de Jeans $M_J \equiv \epsilon_0 (\lambda_J^F)^3$.

Perturbações Vetoriais

Com $\delta = 0$, as equações hidrodinâmicas reduzem-se a

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H \delta \mathbf{v} = 0, \quad (4.45)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (4.46)$$

de onde concluímos que para a perturbação de onda plana

$$\delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{q}), \quad (4.47)$$

temos

$$\delta \mathbf{v} \propto \frac{1}{a}. \quad (4.48)$$

Note que se $\delta \mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ fosse importante no passado ele hoje seria tão grande que as perturbações teriam saído do regime linear. Portanto, para que o regime linear seja válido, é preciso que as condições iniciais sejam tais que $\delta \mathbf{v}$ seja muito pequeno hoje.

Matéria na presença de matéria relativística

É importante estudar o comportamento das perturbações na presença de mais de um fluido, uma vez que existe forte evidência observacional de que além da matéria (essencialmente, matéria escura) o universo é composto também por uma componente chamada energia escura. Vamos supor que a matéria escura não interage com a energia escura, e analisar, para pequenas escalas (menores que o comprimento de onda de Jeans), o crescimento das perturbações na matéria usando a teoria Newtoniana. A fim de realizar este estudo, vamos estudar como as perturbações evoluem quando o background possui um fluido com equação de estado em aberto $p_1 = \omega \epsilon_1$, além de matéria.

Assim

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon_{tot}, \quad (4.49)$$

em que a densidade de energia total é dada por

$$\epsilon_{tot} = \frac{\epsilon_{eq}}{2} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^{3(1+\omega)} \right], \quad (4.50)$$

onde a_{eq} é o fator de escala quando as densidades de energia de ambas as componentes são iguais. Como estamos interessados em estudar as perturbações na matéria escura, então

$$\epsilon_0 = \epsilon_M = \frac{\epsilon_{eq}}{2} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3. \quad (4.51)$$

Definimos

$$x \equiv \frac{a}{a_{eq}}, \quad (4.52)$$

e assim podemos reescrever a equação para δ como

$$x^2 (1 + x^{-3\omega}) \frac{d^2 \delta}{dx^2} + \frac{3}{2} x [1 + (1 - \omega) x^{-3\omega}] \frac{d\delta}{dx} - \frac{3}{2} \delta = 0. \quad (4.53)$$

O modelo mais simples de energia escura é a constante cosmológica, ou seja, $\omega = -1$.

Neste caso, a solução geral é dada por

$$\delta(x) = C_1 \sqrt{1 + x^{-3}} + C_2 \sqrt{1 - x^{-3}} \int_0^x \left(\frac{y}{1 + y^3} \right)^{3/2} dy. \quad (4.54)$$

- No limite em que $x \ll 1$, isto é, no regime de dominação da matéria escura ($a \ll 1$), temos

$$\delta(x) = \frac{C_1}{x^{3/2}} + \frac{2}{5} C_2 x \quad (4.55)$$

$$= C_1 H + \frac{2}{5} C_2 a, \quad (4.56)$$

consistente com o resultado encontrado anteriormente.

- No limite em que $x \gg 1$, ou seja, quando há dominação da constante cosmológica,

usando

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y^3} \right)^{3/2} = I,$$

temos que

$$\delta(x) = (C_1 + IC_2) - \frac{C_2}{2x^2},$$

ou seja, o crescimento das perturbações cessa e a amplitude das perturbações congela.

4.2 Perturbações Cosmológicas na Relatividade Geral

Para o estudo das perturbações em escalas menores que a escala de curvatura, a Teoria Newtoniana descrita na seção anterior não é suficiente. Torna-se necessário, então, o estudo no contexto da Relatividade Geral. Para tal, é preciso definirmos um espaço-tempo de fundo, fictício, onde não ocorrem perturbações, e um espaço-tempo real, em que estão contidas as inhomogeneidades. Como estas perturbações na densidade de energia (e conseqüentemente no espaço-tempo) são consideradas como sendo muito pequenas, podemos lançar mão da aproximação linear para estudar sua evolução temporal. Deste modo, a métrica do espaço-tempo será dada por

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.57)$$

em que ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ representa a métrica do espaço-tempo de fundo, tal que

$${}^{(0)}g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (4.58)$$

É possível dividir as perturbações $\delta g_{\mu\nu}$ em três categorias, uma vez que no regime linear os diferentes tipos de perturbações evoluem independentemente e, portanto, podem ser analisados separadamente.

Escalares

A parte da métrica associada às perturbações escalares pode ser escrita como [16]

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\phi & B_{,i} \\ B_{,j} & 2(-\psi\gamma_{ij} + E_{,i,j}) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

onde

$$\gamma_{ij} = \frac{{}^{(0)}g_{ij}}{a^2}$$

e B , E , ϕ e ψ são grandezas escalares.

Vetoriais

Analogamente, a parte vetorial pode ser descrita por

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_j & F_{i,j} + F_{j,i} \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

em que

$$S_{,i}^i = 0 \quad F_{,i}^i = 0$$

e S_i e F_j são vetores.

Tensoriais

E finalmente, a componente tensorial das perturbações pode ser dada por

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

onde

$$h_{,j}^{ij} = 0 \quad \gamma_{ij} h^{ij} = 0.$$

Observe que o tensor $\delta g_{\mu\nu}$ é representado agora por quatro funções escalares (4 graus de liberdade), duas funções vetoriais (4 graus de liberdade, pois foi imposto uma condição de vínculo para cada 3-vetor) e uma função tensorial (2 graus de liberdade, pois o tensor h_{ij} é simétrico e possui 4 equações de vínculo), totalizando 10 graus de liberdade, em consistência com o número de componentes independentes de $\delta g_{\mu\nu}$. As perturbações vetoriais decaem à medida em que o fator de escala aumenta, sendo portanto irrelevantes para o estudo da formação de estruturas. O setor tensorial, por sua vez, descreve ondas gravitacionais (que são os graus de liberdade do próprio campo gravitacional), que não influem na evolução das pequenas perturbações na densidade de energia. Portanto, a fim de estudar a formação de estruturas no universo, a parte de interesse é a de perturbações escalares na métrica.

4.2.1 Invariância de Calibre

Como a Relatividade Geral foi construída para ser uma teoria covariante por transformações arbitrárias de coordenadas, é importante saber se uma determinada transformação na geometria é resultado de uma perturbação física ou resultado de uma transformação de coordenadas, uma escolha inconveniente de sistema de coordenadas. Por esta razão, é importante reescrever a métrica do espaço-tempo real em termos de grandezas invariantes de calibre (*gauge*, isto é, que não dependem de uma escolha particular de coordenadas).

Seja, portanto, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico de um espaço-tempo e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ um outro tensor métrico que pode ser construído sobre este espaço-tempo. Uma perturbação infinitesimal em $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$\delta g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}. \quad (4.62)$$

Tomemos então a transformação infinitesimal de coordenadas⁵

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x), \quad (4.63)$$

tal que

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha, \quad (4.64)$$

então

$$\delta g_{\mu\nu} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}, \quad (4.65)$$

em que ; representa a derivada covariante.

Podemos separar a variação $\xi^\alpha(x)$ em duas partes. A primeira

$$\xi_e^\alpha = (\zeta, \gamma^{ij} \xi_{,j}) \quad (4.66)$$

depende apenas das grandezas escalares ζ e ξ e será chamada de parte escalar. Já a segunda parte

$$\xi_v^\alpha = (0, \xi^i) \quad (4.67)$$

depende da grandeza vetorial ξ^i e será chamada de parte vetorial. Então

$$\delta g_{00} = -2\xi_{0;0} \quad (4.68)$$

$$= -2a^2 (\tilde{\phi} - \phi). \quad (4.69)$$

⁵Note que como $\xi^\alpha(x)$ é um vetor, não existe parte tensorial na transformação de coordenadas. Portanto, os termos tensoriais das perturbações já são perturbações físicas de fato, uma vez que não podem ser originados por transformações de coordenadas.

Assim

$$\begin{aligned}
\xi_{0;0} &= \xi_{0,0} - {}^{(0)}\Gamma_{00}^\mu \xi_\mu \\
&= \xi_{0,0} - {}^{(0)}\Gamma_{00}^0 \xi_0 \\
&= -a^2 \xi^{0'} - aa' \xi_0 \\
&= -a^2 \zeta' - \frac{a^2 a'}{a} \zeta,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

ou seja,

$$\tilde{\phi} = \phi - \zeta' - \frac{a'}{a} \zeta. \tag{4.71}$$

Além disto

$$\begin{aligned}
\delta g_{0i} &= -\xi_{0;i} - \xi_{i;0} \\
&= a^2 \left(\tilde{B}_{,i} - B_{,i} \right),
\end{aligned} \tag{4.72}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\xi_{0;i} &= -a^2 \zeta_{,i} - a' a \xi_{,i} \\
\xi_{i;0} &= a^2 \xi'_{,i} + a' a \xi_{,i},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\tilde{B} = B + \zeta - \xi'. \tag{4.73}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\delta g_{ij} &= -\xi_{i,j} - \xi_{j,i} \\
&= 2a^2 \left[\left(\tilde{E} - E \right)_{,i,j} - \left(\tilde{\psi} - \psi \right) \gamma_{ij} \right] \\
&= -2a^2 \left(\xi_{,i,j} + \frac{a'}{a} \zeta \gamma_{ij} \right),
\end{aligned} \tag{4.74}$$

e desta forma

$$\tilde{E} = E - \xi \quad (4.75)$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\zeta. \quad (4.76)$$

Note que existem dois graus de liberdade (ζ e ξ) para as transformações de coordenadas, e quatro funções escalares (ϕ , ψ , E e B). Construimos então dois campos invariantes por transformações de coordenadas, chamadas variáveis de Bardeen [1]

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} [(B - E') a]' \quad (4.77)$$

$$\Psi = \psi - \frac{a'}{a} (B - E') \quad (4.78)$$

Podemos agora, por exemplo, escolher um calibre em que duas dessas funções são nulas.

Gauge longitudinal ou Newtoniano

O calibre longitudinal é dado por

$$\tilde{B} = \tilde{E} = 0, \quad (4.79)$$

que implica em

$$\xi = E \quad (4.80)$$

$$\zeta = -B + E'. \quad (4.81)$$

Gauge sincrônico

Para o gauge sincrônico, fixamos $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$ e assim

$$\tilde{\phi} = \tilde{B} = 0. \quad (4.82)$$

Note que o gauge longitudinal é fixado unicamente, isto é, qualquer transformação temporal em que $\zeta \neq 0$ viola $B_l = 0$. Em contrapartida, se a condição $\phi_s = B_s = 0$, que define o calibre sincrônico, é satisfeita em algum sistema de coordenadas $x^\alpha \equiv (\eta, \mathbf{x})$, ela também será satisfeita para qualquer outro sistema de coordenadas \tilde{x}^α tal que $\tilde{\eta} = \eta + C_1/a$ e $\tilde{x}^i = x^i + C_{1,i} \int (d\eta/2) + C_{2,i}$. Logo, existe uma classe de sistemas de coordenadas sincrônicos, ou seja, este calibre não é determinado unicamente.

4.2.2 Equações de Einstein

Levando em consideração somente as perturbações escalares, a métrica do espaço-tempo pode ser então escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta + [(1 - 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{,i,j}] dx^i dx^j \right]. \quad (4.83)$$

Reescrevendo no gauge newtoniano, temos que

$$\psi = \Psi, \quad (4.84)$$

$$\phi = \Phi, \quad (4.85)$$

onde Φ e Ψ são os potenciais de Bardeen (4.77) e (4.78). Assim

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Psi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (4.86)$$

que é a forma da métrica invariante de calibre.

Colocando a métrica perturbada na forma (4.86) nas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (4.87)$$

devemos obter

$$G_{\mu\nu} = {}^{(0)}G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} \quad (4.88)$$

$$T_{\mu\nu} = {}^{(0)}T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \quad (4.89)$$

de tal modo que

$${}^{(0)}G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} ({}^{(0)}T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}). \quad (4.90)$$

Uma vez que a equação de Einstein é válida para a métrica de fundo, temos que

$$\delta G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \delta T_{\mu\nu}. \quad (4.91)$$

Um tensor arbitrário A_ν^μ sob transformação infinitesimal de coordenadas é escrito como

$$\tilde{A}_\nu^\mu = A_\nu^\mu - A_{\nu,\alpha}^\mu \xi^\alpha + \xi_{,\alpha}^\mu A_\nu^\alpha - \xi_{,\nu}^\alpha A_\alpha^\mu. \quad (4.92)$$

Portanto

$$\delta \tilde{G}_\nu^\mu = \delta G_\nu^\mu - {}^{(0)}G_{\nu,\alpha}^\mu \xi^\alpha + \xi_{,\alpha}^\mu {}^{(0)}G_\nu^\alpha - \xi_{,\nu}^\alpha {}^{(0)}G_\alpha^\mu, \quad (4.93)$$

ou seja,

$${}^{(c)}\delta G_0^0 = \delta G_0^0 + {}^{(0)}G_0^{0'} (B - E') \quad (4.94)$$

$${}^{(c)}\delta G_i^0 = \delta G_i^0 + \left({}^{(0)}G_0^0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G_\rho^\rho \right) (B - E')_{,i} \quad (4.95)$$

$${}^{(c)}\delta G_j^i = \delta G_j^i + ({}^{(0)}G_j^i)' (B - E') \quad (4.96)$$

onde o índice (c) foi colocado para indicar que estas grandezas estão escritas na forma

invariante de calibre⁶.

Além disto, sendo

$$\delta G_0^0 = \frac{8\pi G}{c^2} \delta T_0^0, \quad (4.97)$$

então

$${}^{(c)}\delta G_0^0 = \frac{8\pi G}{c^2} {}^{(c)}\delta T_0^0. \quad (4.98)$$

Realizando este mesmo procedimento para todas as componentes e substituindo pela métrica em (4.86), temos as equações que descrevem o comportamento das perturbações, dadas por

$$\nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + 3k\Psi = \frac{-4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta T_0^0 \quad (4.99)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} = \frac{-4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta T_i^0 \quad (4.100)$$

$$\left[\Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi + k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,k,j} = \frac{4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta T_j^i \quad (4.101)$$

onde

$$D = \Phi - \Psi. \quad (4.102)$$

4.2.3 Fluido hidrodinâmico

Até agora não especificamos qual o conteúdo material, isto é, qual a expressão de $T_{\mu\nu}$. Primeiramente, vamos estudar estas equações e sua evolução para o caso de um fluido perfeito, que já sabemos ser descrito por

$$T_\beta^\alpha = (\epsilon + p) u^\alpha u_\beta + p \delta_\beta^\alpha. \quad (4.103)$$

É importante notar que a métrica de fundo deve descrever uma configuração homogênea e isotrópica, mas nada impediria que na forma geral do fluido perfeito fossem incluídos

⁶Note que se formos para o gauge longitudinal ($B = E = 0$), a grandeza que fornece a perturbação já é a própria grandeza invariante de calibre.

pressão anisotrópica e fluxo de calor. Porém, se estes termos estiverem presentes, as equações de Einstein mostram que eles decaem muito rapidamente, de modo que para que eles de fato fossem relevantes eles teriam que ser inicialmente muito grandes, arruinando o comportamento homogêneo e isotrópico do fundo.

Então

$$\delta T_{\beta}^{\alpha} = (\delta\epsilon + \delta p) {}^{(0)}u^{\alpha} {}^{(0)}u_{\beta} + ({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p) (\delta u^{\alpha} {}^{(0)}u_{\beta} + {}^{(0)}u^{\alpha} \delta u_{\beta}) + \delta p \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (4.104)$$

e supondo o referencial co-móvel,

$${}^{(0)}u^{\mu} = \frac{\delta_0^{\mu}}{a}, \quad (4.105)$$

temos que

$$\delta T_0^0 = -\delta\epsilon - \delta p + ({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p) (\delta u^0 {}^{(0)}u_0 + {}^{(0)}u_0 \delta u_0) + \delta p = -\delta\epsilon \quad (4.106)$$

$$\delta T_0^i = a ({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p) \delta u^i \quad (4.107)$$

$$\delta T_i^0 = -\frac{1}{a} ({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p) \delta u_i \quad (4.108)$$

$$\delta T_j^i = -\delta p \delta_j^i. \quad (4.109)$$

Mas

$${}^{(c)}\delta\epsilon = \delta\epsilon + {}^{(0)}\epsilon' (B - E') \quad (4.110)$$

$${}^{(c)}\delta p = \delta p + {}^{(0)}p' (B - E'), \quad (4.111)$$

logo

$$\nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + 3k\Psi = \frac{4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta\epsilon \quad (4.112)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} = \frac{4\pi G}{c^2} a \left({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p \right) {}^{(c)}\delta u_i \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \left[\Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi - k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,i,k} \\ = -\frac{4\pi G}{c^2} a^2 \delta_j^{i(c)} \delta p. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Se $i \neq j$, então $\Phi = \Psi^7$ e, portanto,

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi - \Phi') + 3k\Phi = \frac{4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta\epsilon \quad (4.115)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{4\pi G}{c^2} a \left({}^{(0)}\epsilon + {}^{(0)}p \right) {}^{(c)}\delta u \quad (4.116)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi - k\Phi = -\frac{4\pi G}{c^2} a^{2(c)} \delta p. \quad (4.117)$$

Se

$$p = p(\epsilon, S) \quad (4.118)$$

então

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \delta\epsilon + \frac{\partial p}{\partial S} \delta S \\ &= c_s^2 \delta\epsilon + \tau \delta S \end{aligned} \quad (4.119)$$

e assim, combinando com (4.115), reescrevemos (4.117) como

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2 \nabla^2 \Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - k)]\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S. \quad (4.120)$$

Daqui por diante neste capítulo estaremos lidando sempre com as grandezas invariantes de calibre e portanto o índice (c) será suprimido para simplificar a notação. Iniciaremos

⁷Como queremos que Φ e Ψ representem perturbações, então seu valor médio $\frac{1}{V} \int (\Phi - \Psi) dV$ deve ser nulo. Para que a integral seja nula, o integrando deve ser igual a zero.

analisando o caso plano e adiabático, em que

$$k = 0, \quad (4.121)$$

$$\delta S = 0, \quad (4.122)$$

para três diferentes fluidos hidrodinâmicos.

Poeira

Nesta fase

$$c_s^2 = \frac{p'}{\epsilon'} = 0, \quad (4.123)$$

e como

$$a \propto \eta^2 \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{2}{\eta}, \quad (4.124)$$

então a equação da perturbação toma a forma

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0, \quad (4.125)$$

cuja solução

$$\Phi = C_1(\mathbf{x}) + \frac{C_2(\mathbf{x})}{\eta^5} \quad (4.126)$$

possui um modo constante, que domina independente da escala da perturbação, e um modo decrescente, respectivamente.

Para a amplitude de densidade de energia, multiplicamos

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi - \Phi') + 3k\Phi = \frac{4\pi G}{c^2}a^{2(c)}\delta\epsilon$$

por ϵ_0/ϵ_0 , lembrando que $\epsilon_0 \propto 1/a^3$. Desta forma, temos

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{1}{6} \left[\nabla^2 C_1 \eta^2 - 12C_1 + (\nabla^2 C_2 \eta^2 + 18C_2) \frac{1}{\eta^5} \right], \quad (4.127)$$

de modo que seu valor pode ser avaliado para os seguintes limites

- $\lambda^F \ll H^{-1}$ (ou $k\eta \gg 1$)

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto A_k \eta^2 + \frac{B_k}{\eta^3}$$

que é o mesmo resultado que encontramos anteriormente para o caso Newtoniano em (4.44).

- $\lambda^F \gg H^{-1}$ (ou $k\eta \ll 1$)

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto A_k + \frac{B_k}{\eta^5},$$

onde ficam claros os efeitos da relatividade geral, uma vez que para esta escala o resultado se apresenta diferente do caso Newtoniano.

Matéria relativística

Em uma fase dominada por um fluido onde

$$p = \omega\epsilon \tag{4.128}$$

então

$$\epsilon_0 \propto \frac{1}{a^{3(1+\omega)}} \tag{4.129}$$

e

$$a \propto \eta^{\frac{2}{1+3\omega}}. \tag{4.130}$$

A equação da perturbação torna-se

$$\Phi_k'' + \frac{6(1+\omega)}{(1+3\omega)} \frac{\Phi_k'}{\eta} + \omega k^2 \Phi_k = 0, \tag{4.131}$$

e sua solução é

$$\Phi_k = \eta^{-\nu} [C_1 J_\nu(\sqrt{\omega}k\eta) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\omega}k\eta)], \tag{4.132}$$

em que J_ν e Y_ν são as funções de Bessel, e

$$\nu = \frac{1}{2} \left[\frac{5 + 3\omega}{1 + 3\omega} \right] \quad (4.133)$$

Assim, para

- $\lambda^F \ll H^{-1}c_s$ (ou $\sqrt{\omega}k\eta \gg 1$)

$$\Phi_k \propto \eta^{-\nu-1/2} \exp^{\pm i\sqrt{\omega}k\eta}$$

e

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto k^2 a^{1+3\omega} \Phi,$$

- $\lambda^F \gg H^{-1}c_s$ (ou $\sqrt{\omega}k\eta \ll 1$)

$$\Phi_k \propto C_1 + C_2 \eta^{-2\nu}$$

e

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto -2\Phi.$$

Radiação

Como caso particular da matéria relativística temos a radiação, em que

$$\omega = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{3}{2}. \quad (4.134)$$

Assim

- $\lambda^F \ll H^{-1}c_s$ (ou $\sqrt{\omega}k\eta \gg 1$)

$$\Phi_k \propto \frac{\exp^{\pm i\sqrt{\omega}k\eta}}{\eta^2}$$

e

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto \exp^{\pm i\sqrt{\omega}k\eta}.$$

- $\lambda^F \gg H^{-1}c_s$ (ou $\sqrt{\omega}k\eta \ll 1$)

$$\Phi_k \propto C_1 + \frac{C_2}{\eta^3}$$

e

$$\frac{\delta\epsilon_k}{\epsilon_0} \propto -2\Phi.$$

Caso Geral

Para resolver o caso geral, primeiramente vamos eliminar o termo com derivada primeira na equação diferencial introduzindo a variável

$$\begin{aligned} u &= \exp^{\frac{3}{2} \int \mathcal{H}(1+c_s^2) d\eta} \Phi \\ &= \exp^{-\frac{1}{2} \int \left(\frac{\epsilon'_0}{\epsilon_0+p_0} \right) \left(1 + \frac{p'_0}{\epsilon'_0} \right) d\eta} \Phi \\ &= \exp^{\ln(\epsilon_0+p_0)^{1/2}} \Phi \\ &= (\epsilon_0 + p_0)^{1/2} \Phi. \end{aligned} \tag{4.135}$$

Assim, a equação toma a forma

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = N, \tag{4.136}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\mathcal{H}}{a} \left[\frac{3}{2} (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + k) \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{p_0}{\epsilon_0} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{3k}{8\pi G a^2 \epsilon_0} \right) \end{aligned} \tag{4.137}$$

e

$$N = a^2 (\epsilon_0 + p_0)^{-1/2} \tau \delta S. \quad (4.138)$$

Para o caso adiabático ($\delta S = 0$), a solução formal da equação (4.136) é dada por método iterativo pela expressão

$$u_k = C_1 \theta + C_2 \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} - k^2 \theta \int^\eta \left(\int^{\tilde{\eta}} C_2^2 \theta u_k(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right) \frac{d\tilde{\eta}}{\theta^2(\tilde{\eta})} \quad (4.139)$$

e, portanto, a equação

$$u_k'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k = 0 \quad (4.140)$$

apresenta dois regimes:

- No caso em que $\theta''/\theta \ll c_s^2 k^2$ (ou $\lambda^F \ll H^{-1} c_s$), a solução é oscilatória, modulada por uma amplitude dependente do tempo.
- Por outro lado, quando $\theta''/\theta \gg c_s^2 k^2$ (ou $\lambda^F \gg H^{-1} c_s$), a solução da equação pode ser bem aproximada por

$$\begin{aligned} u_k(\eta) &= C_1 \theta + C_2 \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} \\ &= C_2 \theta \int_{\eta_0} \frac{d\eta}{\theta^2}. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Para $k = 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\eta}{\theta^2} &= \frac{2}{3} \int a^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \right)' \right] d\eta \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{a^2}{\mathcal{H}} - \int a^2 d\eta \right). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Phi &= (\epsilon_0 + p_0)^{1/2} u \\
&= (\epsilon_0 + p_0)^{1/2} C_2 \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} \\
&= (\epsilon_0 + p_0)^{1/2} C_2 \frac{\epsilon_0^{1/2}}{a(\epsilon_0 + p_0)} \int \frac{d\eta}{\theta^2} \\
&= A \left(1 - \frac{\mathcal{H}}{a^2} \int a^2 d\eta \right) \\
&= A \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \int a dt \right). \tag{4.143}
\end{aligned}$$

Na fase de poeira-radiação

$$a(\eta) = a_{eq} (\xi^2 + 2\xi), \tag{4.144}$$

onde

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_{eq}}, \tag{4.145}$$

então

$$\Phi = \frac{\xi + 1}{(\xi + 2)^3} \left[A \left(\frac{3}{5} \xi^2 + 3\xi + \frac{1}{\xi + 1} + \frac{13}{3} \right) + \frac{B}{\xi^3} \right], \tag{4.146}$$

de modo que

- $\eta \ll 1 \Rightarrow \Phi \propto A + \frac{B}{\eta^3}$ (fase dominada pela radiação);
- $\eta \gg 1 \Rightarrow \Phi \propto A + \frac{B}{\eta^5}$ (fase dominada pela poeira).

4.2.4 Perturbações de um campo escalar

Considere agora que a matéria é descrita por um campo escalar, cuja ação pode ser escrita como

$$S = \int p(\chi, \varphi) \sqrt{-g} d^4x, \tag{4.147}$$

onde

$$\chi = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \quad (4.148)$$

é o termo cinético. É possível demonstrar que o tensor energia-momento é representado por

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\epsilon + p)u_{\beta}^{\alpha} - p\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (4.149)$$

onde

$$u_{\nu} = \frac{\varphi_{,\nu}}{2\sqrt{\chi}} \quad (4.150)$$

e

$$\epsilon = 2\chi p_{,\chi} - p. \quad (4.151)$$

Para a ação acima, temos que

$$p(\chi, \varphi) = \chi - V(\varphi) \quad (4.152)$$

$$\epsilon(\chi, \varphi) = \chi + V(\varphi). \quad (4.153)$$

No calibre longitudinal, a perturbação invariante de calibre do campo φ é

$${}^{(e)}\delta\varphi = \delta\varphi + \varphi'_0(B - E') = \delta\varphi. \quad (4.154)$$

Além disto, as equações de Friedmann para o fundo no tempo conforme são

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi a^2 \epsilon}{3} \quad (4.155)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi a^2(\epsilon + p) \quad (4.156)$$

$$\epsilon' = \epsilon_{,\chi}\chi'_0 + \epsilon_{,\varphi}\varphi'_0 = -3\mathcal{H}'(\epsilon + p), \quad (4.157)$$

onde

$$\chi_0 = \frac{\varphi_0'^2}{2a^2}. \quad (4.158)$$

Perturbando χ temos

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + \delta\chi \\ &= \frac{1}{2} \left({}^{(0)}g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \right) (\varphi_0 + \delta\varphi)_{,\mu} (\varphi_0 + \delta\varphi)_{,\nu}, \end{aligned} \quad (4.159)$$

em que

$$\delta g^{\alpha\beta} = -{}^{(0)}g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.160)$$

Logo

$$\delta g^{00} = \frac{2\Phi}{a^2}, \quad (4.161)$$

e portanto

$$\delta\chi = 2\chi_0 \left(-\Phi - \frac{\delta\varphi'}{\varphi_0'} \right). \quad (4.162)$$

Além disto

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 &= \delta\epsilon \\ &= \epsilon_{,\chi} \delta\chi + \epsilon_{,\varphi} \delta\varphi \\ &= \frac{\epsilon + p}{c_s^2} \left[\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} \right)' + \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0'} - \Phi \right] - 3\mathcal{H}(\epsilon + p) \frac{\delta\varphi}{\varphi_0'}, \end{aligned} \quad (4.163)$$

onde definimos

$$c_s^2 = \frac{p_{,\chi}}{\epsilon_{,\chi}} = \frac{\epsilon + p}{2\chi\epsilon_{,\chi}}. \quad (4.164)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\delta T_i^0 &= (\epsilon + p)u^0 \delta u_i \\ &= (\epsilon + p) \left(\frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right)_{,i}\end{aligned}\quad (4.165)$$

e

$$\delta T_j^i = -\delta p \delta_j^i. \quad (4.166)$$

Da equação de Einstein

$$\delta G_i^0 = 8\pi G \delta T_i^0, \quad (4.167)$$

temos então que

$$\Psi + \mathcal{H}\Phi = 4\pi a^2 (\epsilon + p) \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0}. \quad (4.168)$$

Além disto

$$\delta G_0^0 = 8\pi G \delta T_0^0, \quad (4.169)$$

que implica em

$$\nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi a^2 (\epsilon + p) \left[\frac{1}{c_s^2} \left[\left(\frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right)' + \mathcal{H} \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} - \Phi \right] - 3\mathcal{H} \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right]. \quad (4.170)$$

Deste modo, podemos escrever

$$\nabla^2 \Psi = \frac{4\pi a^2}{c_s^2 \mathcal{H}} \left(\mathcal{H} \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} + \Psi \right)' \quad (4.171)$$

$$\left(a^2 \frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right)' = \frac{4\pi a^4 (\epsilon + p)}{\mathcal{H}^2} \left(\Psi + \mathcal{H} \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right). \quad (4.172)$$

Fazendo a mudança de variáveis [19]

$$u \equiv \frac{\Psi}{4\pi(\epsilon + p)^{1/2}} \quad (4.173)$$

$$v \equiv \sqrt{\epsilon_{,x}} a \left(\delta\varphi + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Psi \right), \quad (4.174)$$

as equações podem ser simplificadas para

$$c_s \nabla^2 u = z \left(\frac{v}{z} \right)' \quad (4.175)$$

$$c_s v = \theta \left(\frac{u}{\theta} \right)', \quad (4.176)$$

onde

$$z \equiv \frac{a^2(\epsilon + p)^{1/2}}{c_s \mathcal{H}} \quad (4.177)$$

$$\theta \equiv \frac{1}{c_s z} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{p}{\epsilon} \right)^{-1/2}. \quad (4.178)$$

Assim, temos agora

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0 \quad (4.179)$$

$$v'' - c_s^2 \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0, \quad (4.180)$$

ou

$$u''_k - \left(c_s^2 k^2 + \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k = 0 \quad (4.181)$$

$$v''_k - \left(c_s^2 k^2 + \frac{z''}{z} \right) v_k = 0. \quad (4.182)$$

Soluções Clássicas

Para pequenos comprimentos de onda, isto é, $c_s^2 k^2 \gg \frac{\theta''}{\theta}$, a solução WKB da equação (4.181) é dada por

$$u_k = \frac{C}{\sqrt{c_s}} \exp^{\pm i k \int c_s d\eta}. \quad (4.183)$$

Por outro lado, para grandes comprimentos de onda (ou seja, $c_s^2 k^2 \ll \frac{\theta''}{\theta}$), temos (até segunda ordem em k)

$$u_k = C_1(k)\theta + C_2(k)\theta \int \frac{d\eta}{\theta^2}, \quad (4.184)$$

onde $C_1(k)$ e $C_2(k)$ são funções do número de onda que devem ser determinadas pelas condições iniciais. Assim, como

$$\begin{aligned} \Phi = \Psi &= 4\pi(\epsilon + p)^{1/2}u \\ \delta\varphi &= \frac{\varphi'_0 a \Phi}{4\pi a^3(\epsilon + p)} = \frac{\dot{\varphi}_0 (\dot{\Phi} + H\Phi)}{4\pi(\epsilon + p)}, \end{aligned}$$

então

$$\Phi_k = A_k \left(1 - \frac{H}{a} \int a(t) dt \right) \quad (4.185)$$

$$\delta\varphi_k = A_k \dot{\varphi}_0 \frac{1}{a} \int a(t) dt. \quad (4.186)$$

As equações (4.181) ou (4.182) serão usadas no capítulo seguinte para a análise da evolução das perturbações no caso particular de interesse.

Capítulo 5

Modelo Cosmológico com Ricochete e Λ

5.1 Geometria de fundo

Neste trabalho, consideramos a evolução de um universo em contração, composto por um fluido perfeito de equação de estado ω e componente de energia escura representada pela constante cosmológica Λ . Neste cenário, iniciamos com a ação gravitacional descrita da forma

$$\mathcal{S}_{\text{GR}} = -\frac{1}{6\ell^2} \int \sqrt{-g}(R + 2\Lambda)d^4x, \quad (5.1)$$

em que $\ell = (8\pi G/3)^{1/2}$ é o comprimento de Planck em coordenadas relativísticas ($\hbar = c = 1$). Conforme discutido no capítulo anterior, a geometria de fundo é dada pela métrica homogênea e isotrópica descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j), \quad (5.2)$$

onde escolhemos o caso plano, isto é, a curvatura espacial κ é nula.

O conteúdo material em nosso estudo será representado pelo campo escalar, que sa-

tisfaz à ação¹

$$\mathcal{S}_m = \int p(\chi, \varphi) d^4x, \quad (5.3)$$

resultando no tensor energia-momento

$$T_\nu^\mu = (\epsilon + p)V^\mu V_\nu - p\delta_\nu^\mu, \quad (5.4)$$

em que

$$V_\nu \equiv \varphi_{,\nu} / \sqrt{2\chi} \quad (5.5)$$

e

$$\epsilon \equiv 2\chi p_{,\chi} - p. \quad (5.6)$$

A energia cinética do campo escalar φ é dada por

$$\chi = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \quad (5.7)$$

e a Lagrangiana $p(\chi, \varphi)$ é uma função arbitrária que representa a pressão. No caso particular em que p é uma lei de potência de χ , isto é,

$$p(\chi, \varphi) = \alpha\chi^n, \quad (5.8)$$

temos que

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2\chi p_{,\chi} - p \\ &= \alpha(2\chi n\chi^{n-1} - \chi^n) \\ &= \alpha\chi^n(2n - 1) = p(2n - 1), \end{aligned} \quad (5.9)$$

ou seja, o campo escalar descrito pela ação (5.3) é equivalente a um fluido hidrodinâmico

¹Ver Seção 4.2.4.

com equação de estado dada por

$$p = \frac{1}{2n-1}\epsilon = \omega\epsilon. \quad (5.10)$$

Conforme discutido na seção (2.3), diferenciando a ação (5.1) com relação à métrica, encontramos as equações de Friedmann do fundo que regem a evolução do fator de escala $a(\eta)$ em termos do tempo conforme η . Uma delas é dada por

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \epsilon + a^2 \Lambda, \quad (5.11)$$

em que ϵ é a densidade de energia total do sistema e que obedece à equação de conservação

$$\epsilon' = -3\mathcal{H}(\epsilon + p), \quad (5.12)$$

onde p é a pressão e $f' = \frac{df}{d\eta}$.

Note que diferenciando a equação (5.11) com relação a η e substituindo ϵ em (5.12), tem-se a relação

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi G a^2 (\epsilon + p), \quad (5.13)$$

que é a outra equação de Friedmann do sistema e que não possui dependência explícita em Λ .

Reescrevendo (5.11) em função do tempo cósmico t , lembrando-se da relação $dt = a d\eta$ e considerando que

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega)} = \frac{c_1}{a^{3(1+\omega)}}, \quad (5.14)$$

segue que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{c_1}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.15)$$

cuja solução, expressa em termos dos parâmetros cosmológicos H_0 [7], $\Omega_{0\omega}$ e $\Omega_{0\Lambda}$, é dada

por

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_{0\omega}}{\Omega_{0\Lambda}} \right)^{1/3(1+\omega)} \left[\sinh \left(-\frac{3\sqrt{\Omega_{0\Lambda}}(1+\omega)H_0 t}{2} \right) \right]^{2/3(1+\omega)}, \quad (5.16)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_{0\Lambda} &\equiv \frac{\Lambda}{H_0^2}, \\ \Omega_{0\omega} &\equiv \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{crit}}, \\ \epsilon_{crit} &\equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.2 Evolução das Perturbações Escalares

A métrica total do sistema pode ser escrita realizando uma pequena perturbação na métrica de fundo homogênea e isotrópica $^{(0)}g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = ^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

onde as perturbações podem ser decompostas usando (4.59) em que serão objeto de estudo deste trabalho somente as componentes escalares. Já descrevemos em detalhes na seção (4.2.4) que a evolução das perturbações pode ser descrita por um único campo representado pela variável de Mukhanov-Sasaki

$$v \equiv \sqrt{\epsilon_{,X}} a \left(\delta\varphi + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Psi \right), \quad (5.19)$$

onde $\delta\varphi$ é o campo escalar perturbado e φ_0 seu valor de fundo. Sabemos também que (5.19) satisfaz à equação

$$v'' - c_s^2 \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0, \quad (5.20)$$

em que

$$z \equiv \frac{a^2 [4\pi G(\epsilon + p)]^{1/2}}{c_s \mathcal{H}} \quad (5.21)$$

e

$$c_s^2 \equiv \frac{p_{,\chi}}{\epsilon_{,\chi}}. \quad (5.22)$$

As equações para a evolução das perturbações podem ser escritas em termos apenas da equação de Friedmann (5.13), que independe da constante cosmológica Λ . Além disto, $\delta\Lambda = 0$ e portanto a forma das equações (5.19), (5.21) e (5.22) não se altera pela presença de Λ no modelo.

Para a descrição de fluido perfeito, ou seja, quando

$$p(\chi, \varphi) = \alpha\chi^n = \chi^{(1+\omega)/2\omega}, \quad (5.23)$$

temos que²

$$\begin{aligned} p = \omega\epsilon \quad \rightarrow \quad p_{,\chi} &= \omega\epsilon_{,\chi} \\ c_s^2 &= \omega. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como o fator de escala é descrito por (5.16), então

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = -H_0\sqrt{\Omega_\Lambda} \coth(\gamma t), \quad (5.25)$$

em que

$$\gamma \equiv \frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}(1+\omega)H_0}{2}. \quad (5.26)$$

Assim

$$z(\eta) = \frac{a(\eta)^2[4\pi G(\epsilon + p)]^{1/2}}{c_s\mathcal{H}} = \frac{a(t)[4\pi G(\epsilon + p)]^{1/2}}{c_s H}, \quad (5.27)$$

²Note que, para uma descrição usual de campo escalar, em que $p = \chi - U(\varphi)$, temos que $c_s = 1$ para qualquer potencial, de modo que é possível escolher a forma para $U(\varphi)$.

ou seja,

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{(1+\omega)^{1/2}}{\omega} \sqrt{4\pi G \epsilon} \frac{a(t)}{H} \\
&= \frac{(1+\omega)^{1/2}}{\omega} \sqrt{4\pi G \epsilon_0 a_0^{3(1+\omega)} a^{-3(1+\omega)}} \frac{a(t)}{-\sqrt{\Lambda} \coth(\gamma t)} \\
&= -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\omega}{\omega} \right) \frac{a(t)}{\cosh(\gamma t)}. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Assim, o potencial $V(t)$ em (5.20), definido por

$$V(t) \equiv \frac{z''}{z}, \tag{5.29}$$

é escrito como

$$V(t) = V(t) \equiv \frac{z''}{z} = \frac{\Omega_\Lambda a^2}{R_H^2 a_0^2} \left\{ \frac{(1-3\omega)}{2} \left[\frac{1}{\sinh^2(\gamma t)} - \frac{(1+3\omega)}{2} \right] - \frac{9(1+\omega)^2}{2 \cosh^2(\gamma t)} \right\}, \tag{5.30}$$

onde usamos (5.28) e

$$R_H \equiv 1/(a_0 H_0) \tag{5.31}$$

é o raio de Hubble co-móvel.

De acordo com o que já foi discutido no Capítulo 2, o fator de escala apresentado em (5.16) representa dois regimes:

Contração ($-\infty < t < 0$): Para $t \rightarrow -\infty$, existe a dominação da constante cosmológica e o fator de escala comporta-se como $a(t) \propto \exp(-\sqrt{\Lambda}t)$. Para $t \rightarrow 0^-$, tem-se que $a(t) \propto t^{2/[3(1+\omega)]}$ e o fluido com equação de estado $p = \omega\epsilon$ domina. Logo, esta fase descreve um universo que tende assintoticamente ao espaço-tempo de de Sitter no passado remoto e contrai em direção a uma singularidade em $t = 0$, próximo da qual a constante cosmológica é irrelevante.

Expansão ($0 < t < \infty$): De forma absolutamente análoga, neste intervalo o fator de escala descreve um universo que expande a partir de uma singularidade em $t = 0$, em torno da qual existe a dominação do fluido hidrodinâmico, para um universo que tende assintoticamente para o espaço-tempo de de Sitter no futuro remoto.

Logo, para a região em que existe a dominação da constante cosmológica, no passado remoto do modelo, temos que

$$a(t) = e^{-\sqrt{\Lambda}t}, \quad (5.32)$$

e portanto

$$\frac{da}{dt} = -\sqrt{\Lambda}e^{-\sqrt{\Lambda}t} = -\sqrt{\Lambda}a. \quad (5.33)$$

Assim

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \frac{dt}{da} da = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}a^2} da \\ \int d\eta &= -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int \frac{1}{a^2} da \\ \eta_\infty - \eta &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}a} \Rightarrow a(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}(\eta_\infty - \eta)}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

em que η_∞ é uma constante de integração positiva tal que $-\eta_\infty < \eta \ll 0$. De maneira semelhante, para a fase em que há dominação do fluido e Λ é irrelevante temos que

$$a(t) \propto t^{2/[3(1+\omega)]} \Rightarrow a(\eta) \propto \eta^{2/(1+3\omega)}. \quad (5.35)$$

Da mesma maneira que $a(t)$, o potencial $V(t)$ também apresenta comportamento assintótico. Deste modo, o potencial na equação (5.30) para a solução de de Sitter (5.34) torna-se

$$V(\eta) \equiv \frac{z''}{z} \approx \frac{9\omega^2 - 1}{4(\eta + \eta_\infty)^2} \quad (5.36)$$

para $t \rightarrow -\infty$ e

$$V(\eta) \equiv \frac{z''}{z} \approx \frac{2(1-3\omega)}{(1+3\omega)^2 \eta^2} \quad (5.37)$$

próximo à singularidade, região na qual podemos aproximar o fator de escala para (5.35).

Note que nesta região, $\cosh(\gamma t) \sim 1$ e, de (5.28) segue que

$$z = \frac{a^2(\epsilon + p)^{1/2}}{c_s \mathcal{H}} \propto a(\eta), \quad (5.38)$$

e deste modo

$$V(\eta) \equiv \frac{a''}{a}. \quad (5.39)$$

A figura (5.1) representa o comportamento do potencial (5.30) para $t < 0$ tomando diferentes valores de ω .

Uma vez que a constante cosmológica não é importante nas proximidades da singularidade, é possível incluir nesta região o ricochete de origem quântica para um único fluido, descrito em detalhes em [23, 24, 28, 29], que separa a fase de contração da expansão. Este ricochete é representado pelo fator de escala

$$a(T) = a_b \left[1 + \left(\frac{T}{T_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3(1-\omega)}}, \quad (5.40)$$

onde $dT = a^{1-3\omega} d\eta$, de modo que T pode ser identificado com o tempo cósmico se o fluido for poeira e com o tempo conforme no caso de radiação. Além disto, a_b (o valor do fator de escala no ricochete) e T_b (a escala de tempo que determina a duração do ricochete) são constantes positivas determinadas pelas observações.

Desta forma, a singularidade entre as etapas de contração e expansão do modelo é evitada, e uma vez que para $|T| \gg T_b$ a solução acima tende à solução clássica $a(\eta) \propto \eta^{2/(1+3\omega)}$, é possível conectar o fator de escala (5.40) com (5.16). Assim, nas proximidades

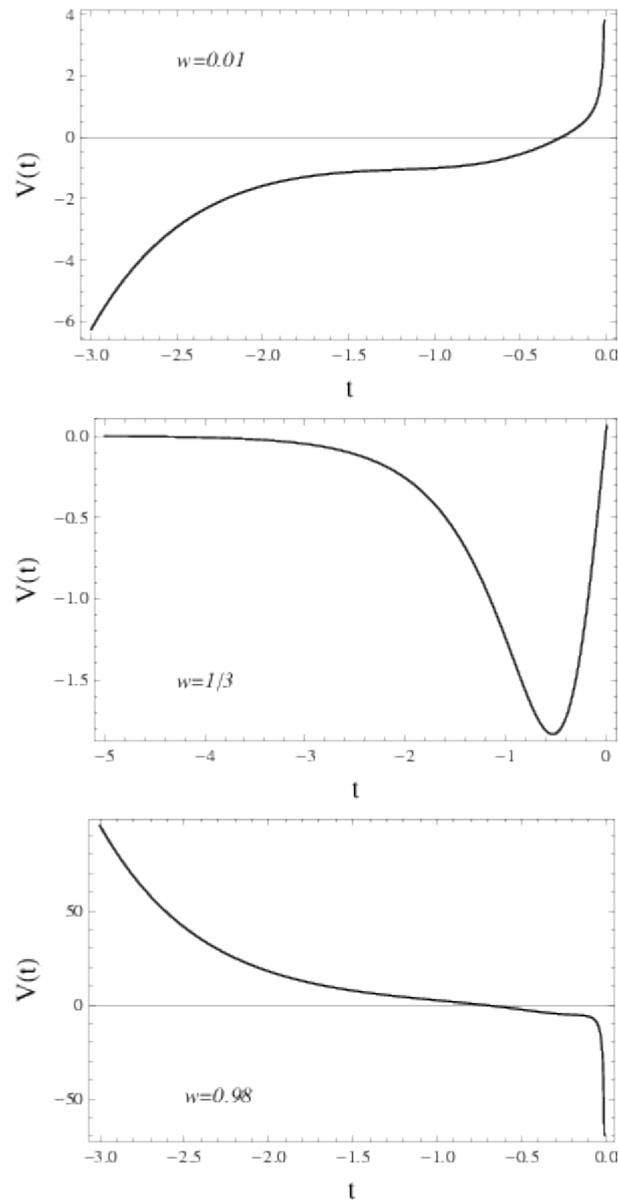


Figura 5.1: Potencial $V(t)$ dado por Eq. (5.30) para três valores diferentes de ω ($\omega < 1/3$, $\omega = 1/3$ e $\omega > 1/3$). Observe que $V(t)$ diverge para $\pm\infty$ no infinito passado para $\omega > 1/3$ e $\omega < 1/3$, respectivamente, e para $\pm\infty$ próximo a $t = 0$ para $\omega < 1/3$ e $\omega > 1/3$, respectivamente.

de $t = 0$, o potencial que rege a evolução das perturbações será

$$V(T) \equiv \frac{a''}{a} = \frac{2 a_b^{3(1-\omega)}}{3(1-\omega)T_b^2} \left[\frac{1}{a^{1+3\omega}} - \frac{2}{3} \left(\frac{T}{T_b} \right)^2 \frac{a_b^{3(1-\omega)}}{1-\omega} a^{-4} \right], \quad (5.41)$$

e seu comportamento é apresentado na figura (5.2). Note que o potencial tem seu máximo próximo de $\eta = 0$ e tende para o potencial representado em (5.37) (encontrado considerando que existe um único fluido $p = \omega\epsilon$ presente para $\gamma t \ll 1$). Deste modo, é possível conectar os potenciais associados às fases de contração e expansão clássicas representados em Fig. (5.1) com o potencial em (5.41) da Fig. (5.2), evitando desta forma a singularidade³. Quando há a dominação da constante cosmológica (isto é, $|\eta| \rightarrow \infty$), a contribuição de (5.41) é irrelevante e é possível considerar somente sua parte clássica (5.30).

5.3 Escolha de condições iniciais

O estudo das perturbações escalares para este modelo portanto é feito evoluindo as perturbações a partir da fase de contração até a era de expansão atual, através do potencial. No entanto, para este fim é preciso estabelecer condições iniciais para as perturbações. Em geral para modelos com ricochete, estas condições iniciais de vácuo são colocadas no passado remoto, onde os potenciais (5.41) são irrelevantes e o universo é muito grande e aproximadamente plano, de modo que se torna natural aproximar a região para Minkowski nesta região. No entanto, devido à presença da constante cosmológica, o universo tende a de Sitter ao invés de Minkowski no infinito passado, além de o potencial não ser nulo nesta região (na verdade, seu valor tende para (5.36)).

³Para outros tipos de modelo de ricochete, é esperado que a situação tenha comportamento similar, embora provavelmente mais complicado para o caso de mais de um campo ser responsável pela produção do ricochete.

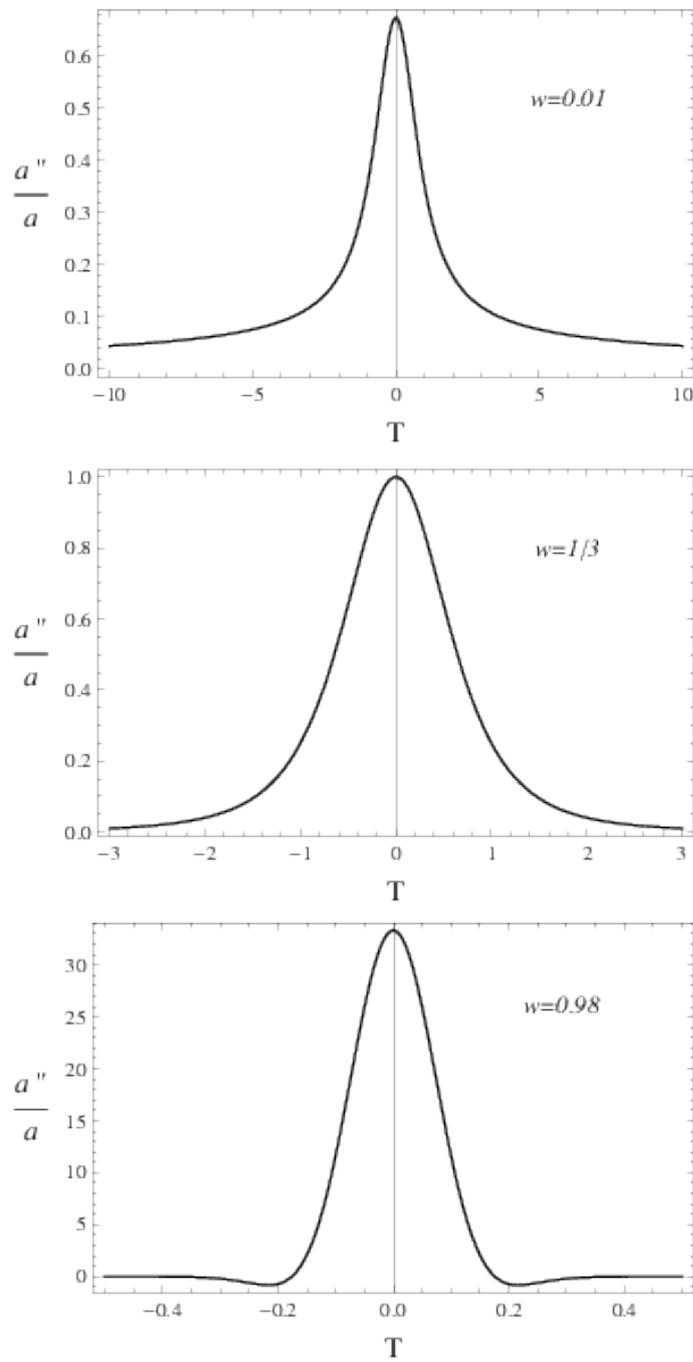


Figura 5.2: Comportamento do potencial $V(T)$ dado em Eq. (5.41) para diferentes valores de ω ($\omega < 1/3$, $\omega = 1/3$ e $\omega > 1/3$). O máximo está localizado em $T = 0$ e seu valor decresce rapidamente, tendendo para o potencial em Eq. (5.37).

5.3.1 Caso particular: $\omega = 1/3$

Um estudo preliminar é feito considerando o caso particular em que o potencial da equação (5.30) de fato tende a um valor nulo no infinito passado, sendo possível nesta região colocar Minkowski como condição inicial de vácuo. Observando Fig. (5.1), note que temos esta situação quando o fluido em questão é a radiação, isto é, $\omega = 1/3$ e $\Omega_{0r} \sim 10^{-5}$. A solução da equação (5.11) na fase de contração para este caso particular é

$$a(t) = \left(\frac{l}{\Lambda}\right)^{1/4} \left(\sinh(-2t\sqrt{\Lambda})\right)^{1/2} \quad (5.42)$$

que pode ser apresentada na forma

$$a(\eta) = -\frac{(-1)^{1/4}l^{1/4} \operatorname{sn} \left[(-1)^{3/4}(l\Lambda)^{1/4}\eta, -1\right]}{\Lambda^{1/4}}, \quad (5.43)$$

em que

$$l \equiv \ell^2 c_1 = \ell^2 \epsilon_0 a_0^4 \quad (5.44)$$

e $\operatorname{sn}[z,m]$ é a função elíptica de Jacobi de argumento z e parâmetro m .

Além disto, para esta situação de estudo temos

$$z = \frac{2\epsilon_0^{1/2}a_0^2}{\mathcal{H}} = \left(2\epsilon_0^{1/2}a_0^2\right) \frac{a}{a'},$$

de forma que, sendo

$$z' = \left(2\epsilon_0^{1/2}a_0^2\right) \left(1 - \frac{aa''}{a'^2}\right)$$

e

$$z'' = \left(2\epsilon_0^{1/2}a_0^2\right) \left(-\frac{a''}{a} - \frac{a'''}{a'} + 2\left(\frac{a''}{a'}\right)^2\right),$$

o potencial da equação de Mukhanov-Sasaki é dado por

$$\begin{aligned}
 V(\eta) &= \frac{z''}{z} \\
 &= -\frac{a''}{a} - \frac{a'''}{a'} + 2\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 \\
 &= \frac{8i\sqrt{l\Lambda}\operatorname{sn}\left[(-1)^{3/4}(l\Lambda)^{1/4}\eta, -1\right]^2}{-1 + \operatorname{sn}\left[(-1)^{3/4}(l\Lambda)^{1/4}\eta, -1\right]^4},
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

ou, em termos do tempo cósmico t ,

$$V(t) = 8a_0H_0^2\sqrt{\Omega_\Lambda\Omega_{0r}}\sec(2H_0t\sqrt{\Omega_\Lambda})\tanh(2H_0t\sqrt{\Omega_\Lambda}). \tag{5.46}$$

É possível observar pela Fig. (5.1) que o potencial torna-se desprezível rapidamente, de modo que é razoável supor, uma vez que a constante cosmológica domina apenas no passado remoto do universo, que (5.46) é pequeno já na fase em que a radiação domina (isto é, para $\gamma t \ll 1$). Assim, para resolver a equação (5.48) analiticamente, tomamos a aproximação expandido (5.45) em série em torno de $\eta = 0$, de modo que pode ser reescrito como

$$V(\eta) = -8(l\Lambda)\eta^2 + O[\eta]^5, \tag{5.47}$$

de forma que a equação a ser resolvida para as perturbações escalares, aproximada para η pequeno, tem a forma⁴

$$v''(\eta) + \left(\frac{k^2}{3} + 8\Lambda l\eta^2\right)v(\eta) = 0 \tag{5.48}$$

e sua solução é dada por

$$v_I(\eta) = C_2(k)D_n(ix) + C_1(k)D_m(x), \tag{5.49}$$

⁴Mantemos o índice k relacionado ao comprimento de onda do modo normal implícito.

onde

$$\begin{aligned}
n &= -2\bar{\alpha}, \\
m &= -2\alpha, \\
x &= 2(-2)^{1/4}(l\Lambda)^{1/4}\eta, \\
\alpha &= \frac{1}{4} + \frac{ik^2}{24\sqrt{2}\sqrt{l\Lambda}},
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$D_n(x)$ é a função parabólico-cilíndrica de índice n e $\bar{\alpha}$ é o conjugado complexo de α . As constantes de integração C_1 e C_2 dependem somente das condições iniciais e do número de onda k .

A solução acima deve ser válida assintoticamente. Vamos propor então a solução de vácuo de Minkowski

$$v_{ini} = \frac{e^{ik\eta/\sqrt{3}}}{\sqrt{k/\sqrt{3}}}, \tag{5.51}$$

e deste modo, comparando as soluções (5.49) e (5.51), encontrar a dependência em k para C_1, C_2 , a saber

$$C_1 = \frac{2^{-\alpha-\frac{3}{4}} (\sqrt{3}k\Gamma[\bar{\alpha}] + 6 \cdot 2^{3/4}(-l\Lambda)^{1/4}\Gamma[\bar{\alpha} + \frac{1}{2}]) \Gamma[2\alpha]}{3^{3/4}\sqrt{k}\pi(-l\Lambda)^{1/4}(\csc(\alpha\pi) + i \sec(\alpha\pi))} \tag{5.52}$$

e

$$C_2 = \frac{2^{\alpha-\frac{5}{4}} (\sqrt{3}k(-l\Lambda)^{3/4}\Gamma[\alpha] + 6i2^{3/4}l\Lambda\Gamma[\alpha + \frac{1}{2}]) \Gamma[2\bar{\alpha}]}{3^{3/4}\sqrt{k}l\pi\Lambda(\csc(\alpha\pi) + i \sec(\alpha\pi))}. \tag{5.53}$$

De modo geral, a solução de (5.48) pode ser escrita como uma expansão em termos de potências de k^2 ,⁵ que, mantendo apenas os termos de ordem maior, pode ser escrita formalmente como

$$v_{II} = A_1(k) z + A_2(k) z \int \frac{d\eta}{z^2(\eta)}, \tag{5.54}$$

onde os coeficientes A_1 e A_2 dependem do número de onda k e também podem ser deter-

⁵Pois estamos interessados em grandes comprimentos de onda, ou seja, $k\eta \ll 1$. Note que esta expansão deve ser válida para qualquer momento do universo.

minados pelas condições iniciais.

Como essa é a solução formal da equação para qualquer instante de tempo, em particular ela deve ser válida para o regime em que η é muito pequeno, isto é, para este limite a equação (5.54) pode ser expandida em série em torno de $\eta = 0$ e, até primeira ordem, é dada por

$$v_{II} = -\frac{A_2}{\sigma} + \sigma A_1 \eta, \quad (5.55)$$

em que a constante $\sigma = 2\epsilon_0^{1/2} a_0^2$. Desta forma, fazendo a junção das soluções v_I e v_{II} e de sua primeira derivada, obtemos,

$$\begin{aligned} A_1 = & \left(\eta_M \Gamma[2\alpha] \left(2^{9/4} \sqrt{3} k l \Lambda \eta_M^2 \Gamma[\bar{\alpha}] + 12 \Gamma[\bar{\alpha} + \frac{1}{2}] \left(-4 \eta_M^2 (-l\Lambda)^{5/4} - (3 - 3i)(l\Lambda)^{3/4} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left. 3^{3/2} i 2^{3/4} k \sqrt{l\Lambda} \Gamma[\bar{\alpha}] \right) \times D_{-2\alpha}[q] \right. \\ & - (3 + 3i) \Gamma[2\alpha] \left(\sqrt{3} k (l\Lambda)^{1/4} \Gamma[\bar{\alpha}] - 6i (-2)^{3/4} \sqrt{l\Lambda} \Gamma[\bar{\alpha} + \frac{1}{2}] \right) \times D_{2\bar{\alpha}}[q] \\ & + 2^{2\alpha - \frac{1}{4}} \Gamma[2\bar{\alpha}] \left(\eta_M \left(2^{1/4} \sqrt{3} k \Gamma[\alpha] \left(-4 l \Lambda \eta_M^2 + 3i \sqrt{2} \sqrt{l\Lambda} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left. 12 \Gamma[\alpha + \frac{1}{2}] \left(-4i \eta_M^2 (-l\Lambda)^{5/4} + (3 + 3i)(l\Lambda)^{3/4} \right) \right) \times D_{-2\bar{\alpha}}[-\bar{q}] \right. \\ & \left. \left. - (3 - 3i) \left(\sqrt{3} k (l\Lambda)^{1/4} \Gamma[\alpha] - 6(-2)^{3/4} \sqrt{l\Lambda} \Gamma[\alpha + \frac{1}{2}] \right) \times D_{2\alpha}[-\bar{q}] \right) \right) \\ & \times \frac{2^{-\alpha}}{\left(3^{3/4} \sigma \sqrt{k} \pi (-l\Lambda)^{1/4} (3 + 8l\eta_M^4 \Lambda) (\csc(\pi\alpha) + i \sec(\pi\alpha)) \right)} \end{aligned} \quad (5.56)$$

e

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left(\Gamma[2\alpha] \left(-2^{1/4} \sqrt{3} k \Gamma[\bar{\alpha}] + 12(-l\Lambda)^{1/4} (-1 + 2^{3/2} i \eta_M^2 \sqrt{l\Lambda}) \Gamma[\bar{\alpha} + \frac{1}{2}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2^{7/4} i \sqrt{3} k \eta_M^2 \sqrt{l\Lambda} \Gamma[\bar{\alpha}] \right) \times D_{-2\alpha}[q] \right. \\
&\quad - (2 - 2i) \eta_M (l\Lambda)^{1/4} \left(i \sqrt{3} k \Gamma[\bar{\alpha}] + 6(-2)^{3/4} (l\Lambda)^{1/4} \Gamma[\bar{\alpha} + \frac{1}{2}] \right) \Gamma[2\alpha] \times D_{2\bar{\alpha}}[q] \\
&\quad + 2^\sigma \Gamma[2\bar{\alpha}] \left(\left(2^{1/4} \sqrt{3} k \Gamma[\alpha] \left(1 + 2i \sqrt{2} \eta_M^2 \sqrt{l\Lambda} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 12 \Gamma[\alpha + \frac{1}{2}] (-i(-l\Lambda)^{1/4} + (2 + 2i) \eta_M^2 (l\Lambda)^{3/4}) \right) \times D_{-2\bar{\alpha}}[-\bar{q}] \right. \\
&\quad \left. \left. - (2 - 2i) \eta_M (l\Lambda)^{1/4} \left(\sqrt{3} k \Gamma[\alpha] - 6(-2)^{3/4} (l\Lambda)^{1/4} \Gamma[\alpha + \frac{1}{2}] \right) \times D_{2\alpha}[-\bar{q}] \right) \right) \\
&\quad \times \frac{2^{-\alpha-1} 3^{1/4} \sigma}{\left(\sqrt{k} \pi (-l\Lambda)^{1/4} (3 + 8l\eta_M^4, \Lambda) (\csc(\alpha\pi) + i \sec(\alpha\pi)) \right)}, \tag{5.58}
\end{aligned}$$

em que

$$\eta_M = \sqrt{\frac{k^2}{24l\Lambda}} \tag{5.59}$$

é o parâmetro que corresponde à região na qual fazemos a junção, isto é, a região para a qual $k^2/3 \approx 8l\Lambda\eta^2$, e também

$$q = (1 + i) 2^{3/4} \eta_M (l\Lambda)^{1/4}. \tag{5.60}$$

Quando a perturbação começa a sair do horizonte, entra no regime oscilatório e portanto sua forma geral é

$$v_{osc} = C e^{ik\eta/\sqrt{3}} + D e^{-ik\eta/\sqrt{3}}, \tag{5.61}$$

e as constantes C e D dependem de k e podem ser obtidas repetindo-se o procedimento de junção entre v_{osc} e v_{II} e suas derivadas de primeira ordem, de modo que, em termos das constantes dadas em (5.56) e (5.57), podemos escrever

$$C = -\frac{i\sqrt{3}c^2 A_1 + k A_2}{2ck} \tag{5.62}$$

e

$$D = -\frac{-3ic^2A_1 + \sqrt{3}kA_2}{2\sqrt{3}ck}. \quad (5.63)$$

Finalmente, esta solução deve ser compatível com a forma geral (5.54) no regime em que $z \approx a$, ou seja,

$$v_{III} = B_1(k)a(\eta) + B_2(k)a(\eta) \int \frac{d\eta}{a^2}, \quad (5.64)$$

de modo que, em primeira ordem, os coeficientes B_1 e B_2 apresentam dependência de k tal que

$$B_1 \propto k^{3/2}, \quad (5.65)$$

$$B_2 \propto k^{-1/2}, \quad (5.66)$$

e portanto negligenciamos a dependência explícita em η uma vez que estamos interessados essencialmente na potência dominante de k em

$$k^2\Phi \propto \left(\frac{v}{z}\right)' \Rightarrow \Phi \sim E(\eta)B_1(k) + F(\eta)\frac{B_2(k)}{k^2} + G(\eta)B_2(k). \quad (5.67)$$

Neste contexto, o espectro de potências

$$\mathcal{P}_\Phi \equiv \frac{2k^3}{\pi^2} \propto k^{n_s-1} \quad (5.68)$$

é tal que

$$n_s - 1 = 2, \quad (5.69)$$

ou seja, o espectro não é invariante de escala.

5.3.2 Vácuo adiabático

Observamos que o potencial (5.30), para $\omega < 1/3$ (nosso caso de interesse, representando um fluido que viola a condição de energia forte), diverge para $+\infty$ próximo de $t = 0$

e para $-\infty$ à medida que $t \rightarrow -\infty$. Este comportamento sugere que o potencial cruza o valor zero em algum momento, conforme apresentado na figura (5.1) para $\omega = 0.01$. Como em nosso caso não é possível definir um vácuo de Minkowski no infinito passado, pois nem o modelo tende para Minkowski nem o potencial é desprezível nesta região, será que é possível definir um vácuo adiabático de Minkowski no intervalo em que o potencial é muito pequeno, isto é, na proximidade em que ele cruza o zero?

Supondo que o potencial se anule em um tempo

$$y_V \equiv \gamma t_V \quad (5.70)$$

e que faremos a escolha de utilizar daqui por diante a coordenada adimensional

$$x \equiv \frac{\eta - \eta_V}{R_H}, \quad (5.71)$$

em que η_V corresponde ao tempo conforme associado a (5.70). Na região em que o potencial é muito pequeno, é possível aproximá-lo para uma reta, de coeficiente angular

$$\begin{aligned} \beta = \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_V} &= -\gamma R_H^3 \left(a \frac{dV}{dy} \right) \Big|_{y_V} \\ &= -\frac{3(1+\omega)\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} \left(\frac{a}{a_0} \frac{dV}{dy} \right) \Big|_{y_V}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Usando (5.16) e (5.30), e considerando que $\Omega_{0\omega} + \Omega_\Lambda = 1$, temos que β depende explicitamente de Ω_Λ conforme

$$\beta = \frac{\Omega_\Lambda^{(1+3\omega)/[2(1+\omega)]} (1 - \Omega_\Lambda)^{1/(1+\omega)}}{0.7^{(1+3\omega)/[2(1+\omega)]} 0.3^{1/(1+\omega)}} \beta_{0.7}, \quad (5.73)$$

em que $\beta_{0.7}$ é o valor de β para $\Omega_\Lambda = 0.7$ [12]. Note que $\beta \rightarrow 0$ à medida que $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$.

Assim, equação diferencial a ser solucionada toma a forma

$$\frac{d^2 v_k}{dx^2} + (\omega k^2 + \beta x)v_k = 0, \quad (5.74)$$

e o vácuo adiabático [17] é definido como a aproximação WKB da solução de

$$v''(\eta) + f_k^2 v(\eta) = 0, \quad (5.75)$$

para quando f_k^2 varia adiabaticamente, isto é, supondo que

$$\left| \frac{df_k}{d\eta} \right| \ll f_k^2. \quad (5.76)$$

Neste caso,

$$f_k^2 \equiv \omega k^2 + \beta x. \quad (5.77)$$

Substituindo o ansatz

$$v_k(x) = \frac{1}{2[\Omega_k(x)]^{1/2}} \exp \left[-i \int^x \Omega_k(x') dx' \right], \quad (5.78)$$

em (5.75), temos que $\Omega_k(x)$ satisfaz à equação auxiliar

$$\Omega_k^2 = f_k^2 - \frac{1}{2\Omega_k} \frac{d^2 \Omega_k}{dx^2} + \frac{3}{4\Omega_k^2} \left(\frac{d\Omega_k}{dx} \right)^2. \quad (5.79)$$

Assim

$$\begin{aligned} (\Omega_k^{(0)})^2 &= f_k^2, \\ (\Omega_k^{(2)})^2 &= f_k^2 \left(1 + \frac{5}{16} \frac{\beta^2}{f_k^6} \right), \\ (\Omega_k^{(4)})^2 &= f_k^2 \left[1 + \frac{5}{16} \frac{\beta^2}{f_k^6} - \frac{490}{256} \left(\frac{\beta^2}{f_k^6} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

são os termos de ordem (0), (2) e (4).

Para a expansão (5.80) fazer sentido, é necessário que o parâmetro da expansão β^2/f_k^6 seja muito pequeno, isto é, $\beta^2/f_k^6 \ll 1$. Como estamos perto do valor η_V para o qual o potencial se anula, então sabemos que $x \ll 1$, de forma que então temos

$$\beta^2/f_k^6 \approx \beta^2/(c_s k)^6. \quad (5.81)$$

Estamos interessados em grandes comprimentos de onda⁶, de modo que nosso intervalo de interesse é $1 < k < 10^3$. Assim, para o caso em que a escolha do campo escalar se assemelha a um fluido hidrodinâmico, isto é, quando $c_s^2 = \omega$, sabemos que a evolução das perturbações escalares só fornece um espectro invariante de escala⁷ para $\omega \approx 0$, de modo que não é possível definir o vácuo adiabático.

5.4 Evolução das Perturbações Escalares

5.4.1 Descrição de fluido hidrodinâmico e Vácuo de Bunch-Davies

Conforme discutimos na seção anterior, não é possível definir o vácuo de Minkowski para o caso em que tratamos do fluido hidrodinâmico como escolha para a componente material do modelo. Contudo, em nosso caso de estudo o universo se aproxima assintoticamente de de Sitter, conforme (5.34). Nesta região, o potencial comporta-se de acordo com (5.36), de modo que a equação de Mukhanov-Sasaki (5.20) a ser resolvida para as perturbações nesta região é

$$v_k'' + \left[\omega k^2 - \frac{(9\omega^2 - 1)}{4(\eta + \eta_\infty)^2} \right] v_k = 0. \quad (5.82)$$

⁶Usamos o número de onda $k \equiv R_H/\lambda$, em que λ é o comprimento de onda co-móvel da perturbação.

⁷Esta situação também é verdadeira na presença de Λ , uma vez que a condição inicial de vácuo é colocada no período em que o fluido domina e a constante cosmológica é irrelevante, de forma que a evolução das perturbações é feita de forma idêntica a [25].

A partir daqui faremos a substituição⁸ dada pela translação temporal $(\eta + \eta_\infty) \rightarrow \eta^*$.

A equação (5.82) é equivalente à equação de movimento para um campo escalar massivo no espaço-tempo de de Sitter, isto é,

$$v_k'' + \left[\omega k - \left(2 - \frac{m^2}{\Lambda} \right) \frac{1}{\eta^2} \right] v_k = 0 \quad (5.83)$$

ou

$$v_k'' + f_k^2(\eta) v_k = 0, \quad (5.84)$$

onde

$$f_k(\eta) = \sqrt{\omega k^2 + m_{ef}^2(\eta)}, \quad (5.85)$$

e

$$m_{ef} = m^2 a^2(\eta) - \frac{a''}{a}. \quad (5.86)$$

Ou seja, com massa efetiva dada por

$$m_{ef} = \frac{3\sqrt{\Lambda}}{2} \sqrt{1 - \omega^2}. \quad (5.87)$$

A solução geral de (5.82) é dada em termos das funções de Bessel $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$

$$v_k(\eta) = \sqrt{\eta^*} [J_\nu(k\eta^* \sqrt{\omega}) C_1 + Y_\nu(k\eta^* \sqrt{\omega}) C_2] \quad (5.88)$$

ou

$$v_k = \sqrt{\eta^*} [c_1 H_\nu^{(1)}(\sqrt{\omega} k \eta^*) + c_2 H_\nu^{(2)}(\sqrt{\omega} k \eta^*)], \quad (5.89)$$

em que $H_\nu^{(1,2)}$ são funções de Hankel de primeiro e segundo tipo e o índice $\nu = 3\omega/2$.

Sabendo que o comportamento assintótico das funções de Hankel para $k\eta \gg 1$ é tal

⁸Note que, após a substituição, quando η se aproxima de $-\eta_\infty$, a nova variável η^* é muito pequena. Por simplicidade de notação, daqui por diante no texto escreveremos η ao invés de η^* .

que

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} \\ H_\nu^{(2)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})}, \end{aligned}$$

temos que quando $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ a solução (5.89) tende assintoticamente a

$$v_k \rightarrow \frac{e^{i\sqrt{\omega}k\eta}}{\sqrt{\sqrt{\omega}k}} \quad (5.90)$$

e assim

$$v_k = \sqrt{\eta} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\omega}k\eta) \quad (5.91)$$

define o chamado vácuo de Bunch-Davies.

Vamos então impor esta escolha especial de condições iniciais. A região em que (5.82) é válida ocorre quando o argumento da função de Hankel é muito pequeno, isto é, $\eta \rightarrow \eta_\infty$. Assim, a expansão de (5.91) para $\sqrt{\omega}k\eta \ll 1$ é

$$\begin{aligned} v_k \simeq \eta^{-3\omega/2} &\left[\left(-\frac{i2^{3\omega/2}k^{-3\omega/2}\omega^{-3\omega/4}\Gamma[\frac{3\omega}{2}]\sqrt{\eta}}{\pi} + O[\eta]^{3/2} \right) \right. \\ &\left. + \eta^{3\omega} \left(\frac{2^{-3\omega/2}k^{3\omega/2}\omega^{3\omega/4}(1 + i \cot(\frac{3\pi\omega}{2}))\sqrt{\eta}}{\Gamma[1 + \frac{3\omega}{2}]} + O[\eta]^{3/2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.92)$$

que de forma simplificada pode ser escrita como

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} v_k = a_1 \eta^{(1+3\omega)/2} k^{3\omega/2} + a_2 \eta^{(1-3\omega)/2} k^{-3\omega/2}, \quad (5.93)$$

em que a_1 e a_2 são constantes.

Além disto, conforme fizemos anteriormente, a solução completa de (5.20) pode ser escrita em termos de potências de k^2 , uma vez que estamos interessados em grandes

comprimentos de onda. Assim, a solução formal de (5.20) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{v}{z} &\simeq A_1(k) \left[1 - \omega k^2 \int \frac{d\bar{\eta}}{z^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} z^2(\bar{\eta}) d\bar{\eta} + \dots \right] \\ &+ A_2(k) \left[\int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{z^2} - \omega k^2 \int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{z^2} \int^{\bar{\eta}} z^2 d\bar{\eta} \int^{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{z^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (5.94)$$

em que as constantes de integração $A_1(k)$ e $A_2(k)$ dependem unicamente de k . Como (5.94) é solução para a equação completa, ou seja, sem aproximação, a dependência em k se mantém a mesma durante toda a contração, sendo válida quando o universo entra na fase dominada pelo fluido, inclusive imediatamente antes de o universo realizar o ricochete. Em particular, a solução (5.94) devem coincidir com (5.93) na região em que (5.82) descreve a evolução das perturbações. Nesta região, temos de (5.34) que

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda\eta}}, \\ \mathcal{H} &\sim a(\eta), \end{aligned}$$

e assim de (5.21) temos que

$$z \propto \eta^{\frac{1+3\omega}{2}}. \quad (5.95)$$

Logo, de (5.93) temos

$$\frac{v_k}{z} \simeq \frac{v_k}{\eta^{\frac{1+3\omega}{2}}} = a_1 k^{3\omega/2} + a_2 \eta^{-3\omega} k^{-3\omega/2}. \quad (5.96)$$

Usando (5.95) na solução geral (5.94)

$$\begin{aligned} \frac{v_k}{z} &\simeq A_1(k) + A_2(k) \int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{z^2(\bar{\eta})} \\ &= A_1(k) + A_2(k) \int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^{1+3\omega}} \\ &= A_1(k) + A_2(k) \eta^{-3\omega}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Concluimos ao comparar as duas equações que

$$A_1 \propto k^{3\omega/2} \quad (5.98)$$

$$A_2 \propto k^{-3\omega/2}. \quad (5.99)$$

Ao entrar na região em que ocorre o ricochete, o fator de escala passa a ter a forma (5.40). Além disto, sabemos que nesta fase $z \simeq a$, de modo que a solução (5.94) torna-se

$$\frac{v_k}{a} \simeq A_1(k) + A_2(k) \int^\eta \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})}. \quad (5.100)$$

Assim, substituindo (5.40) na expressão acima temos que

$$\frac{v_k}{a} \simeq A_1(k) + A_2(k) T_b a_0^{3(\omega-1)} \int \frac{ds}{(1+s^2)}, \quad (5.101)$$

em que

$$s \equiv \frac{T}{T_b}, \quad (5.102)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{v_k}{a} &= A_1 + A_2 T_b a_0^{3(\omega-1)} \left(\arctan(s) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq A_1(k) + A_2(k) T_b a_0^{3(\omega-1)} \arctan(s), \end{aligned} \quad (5.103)$$

em que colocamos a constante de integração $\pi/2$, que se mostra conveniente pois queremos manter A_1 inalterada. Dadas as relações

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(s) &= \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right), \quad s > 0; \\ \tan^{-1}(s) &= -\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}(s) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right), \quad s < 0; \end{aligned}$$

para o regime em que $T \gg T_b$, ou seja, para $s \rightarrow -\infty$, e expandindo em primeira ordem

(5.103) em torno de $1/s \approx 0$, temos

$$\frac{v_k}{a} \sim A_1(k) - A_2(k)T_b a_0^{3(\omega-1)} \frac{1}{s}, \quad (5.104)$$

onde usamos que

$$\tan^{-1}(x) \simeq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O[x]^8 \quad (5.105)$$

para x pequeno.

Após o ricochete, o comportamento da variável v_k é resultado da propagação do resultado (5.103) para o outro lado, fazendo agora a expansão para $s \rightarrow +\infty$, da qual segue que

$$\frac{v}{a} \sim A_1(k) + \left(\pi - \frac{1}{s}\right) a_0^{3(\omega-1)} T_b A_2(k) \quad (5.106)$$

$$= \left(A_1(k) + \pi a_0^{3(\omega-1)} T_b A_2(k)\right) - \frac{1}{s} a_0^{3(\omega-1)} T_b A_2(k), \quad (5.107)$$

de onde observamos que, após atravessar o ricochete, o modo constante das perturbações é formado pela combinação dos dois modos A_1 e A_2 que vêm da fase de contração, sendo um efeito do ricochete na evolução de v_k . É importante ratificar aqui que a dependência em k dos coeficientes se mantém a mesma após o ricochete, de modo que é possível utilizá-los para calcular o espectro de potências das perturbações na fase de expansão.

A relação entre o potencial de Bardeen Φ e a variável $v(\eta)$ é dado em [19] e pode ser descrita por

$$k^2 \Phi = -\frac{3\ell^2 \sqrt{(\omega+1)\epsilon_0}}{2\sqrt{\omega}} a \left(\frac{v}{a}\right)', \quad (5.108)$$

de modo que o espectro de potências, definido por (5.68)

$$\mathcal{P}_\Phi \equiv \frac{2k^3}{\pi^2} \propto k^{n_s-1}, \quad (5.109)$$

depende essencialmente do modo dominante $A_2(k)$, e portanto temos que

$$\mathcal{P} \propto k^3 |A_2|^2 \propto k^{n_s-1} \quad (5.110)$$

torna-se

$$\mathcal{P} \propto k^3 (k^{-3\omega/2})^2 \propto k^{n_s-1}, \quad (5.111)$$

de modo que

$$n_s = 1 + 3(1 - \omega). \quad (5.112)$$

Assim, o espectro é invariante de escala somente para $\omega \approx 1$, ao contrário do caso na ausência de constante cosmológica em [25], em que era necessário que o fluido fosse tipo poeira ($\omega \approx 0$) a fim de se obter um espectro invariante de escala [5].

5.4.2 Descrição de campo escalar e Vácuo de Minkowski

Vamos agora analisar o caso em que o conteúdo material do nosso modelo é descrito por um campo escalar tal que sua lagrangiana é

$$\mathcal{L} = p(\chi, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} - U(\varphi). \quad (5.113)$$

Neste caso, o tensor energia-momento, dado por (2.21)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.114)$$

fornece

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + U(\varphi) \right] \quad (5.115)$$

de modo que

$$\epsilon = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) \quad (5.116)$$

$$p = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - U(\varphi), \quad (5.117)$$

mantendo a relação

$$c_s^2 = \frac{p_{,x}}{\epsilon_{,x}} = \omega = 1 \quad (5.118)$$

para qualquer escolha de $U(\varphi)$.

Substituindo (5.116) nas equações de Friedmann temos que, para o caso da métrica de fundo homogênea e isotrópica, o campo escalar é tal que

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{6\pi G(1+\omega)}} \ln \left| \tanh \left[\frac{3(1+\omega)}{4} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right] \right|, \quad (5.119)$$

onde usamos (5.16), pois a forma do fator de escala não se altera uma vez que a equação de estado (5.118) permanece válida para o caso do campo escalar. A conservação de energia de φ é dada pela equação de Klein-Gordon,

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - U_{,\varphi} = 0. \quad (5.120)$$

Conforme discutido anteriormente, para este caso em que fazemos a escolha do campo escalar canônico, uma vez que $c_s^2 = 1$, é possível definir o vácuo de Minkowski adiabático (5.78) quando o potencial (5.30) aproxima-se do valor nulo. Assim, tomando o termo de ordem zero de (5.80), $\Omega_k^{(0)}$, em (5.78) temos

$$v_k(x) \approx \frac{1}{2(k^2 + \beta x)^{1/4}} \exp \left[-\frac{2ik^3}{3\beta} \left(1 + \frac{\beta x}{k^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.121)$$

Portanto as condições iniciais são dadas por

$$v_k(0) \approx \frac{1}{2\sqrt{k}} \exp\left(-\frac{2ik^3}{3\beta}\right), \quad (5.122)$$

e

$$\left.\frac{dv_k}{dx}\right|_{x=0} \approx -v(0)\left(\frac{\beta}{4k^2} + ik\right). \quad (5.123)$$

Logo, devemos resolver (5.20) dadas as condições iniciais (5.122) e (5.123).

Da mesma forma como fizemos anteriormente, a solução formal da equação (5.19) é dada por (5.94). Para encontrar analiticamente a dependência em k dos coeficientes $A_1(k)$ e $A_2(k)$ (em especial A_2 , que domina sobre A_1 na fase de expansão) e conseqüentemente o espectro de potências, vamos conectar em um ponto $x_* = (\eta_* - \eta_V)$ duas soluções aproximadas de (5.19) próximo ao ponto em que o potencial se anula.

A primeira delas, claramente, é dada pela solução de vácuo adiabático (5.121)

$$v_k(x_*) \approx \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(1 - \frac{\beta x_*}{4k^2}\right) \exp\left[-i\left(\frac{2k^3}{3\beta} + kx_*\right)\right]. \quad (5.124)$$

A fim de que a conexão entre as duas soluções seja suave, vamos também conectar suas derivadas. De (5.124) segue que

$$\left.\frac{dv_k}{dx}\right|_{x=x_*} \approx -\frac{1}{2\sqrt{k}} \left[\frac{\beta}{4k^2} + ik\left(1 + \frac{\beta x_*}{4k^2}\right)\right] \exp\left[-i\left(\frac{2k^3}{3\beta} + kx_*\right)\right]. \quad (5.125)$$

A segunda solução, como no instante η_* o universo já é dominado pelo campo escalar, é dada pelas funções de Hankel

$$v_k(\eta) = \sqrt{\eta} \left[C_1(k)H_\nu^1(k\eta) + C_2(k)H_\nu^2(k\eta)\right], \quad (5.126)$$

em que o índice $\nu \equiv 3(1 - \omega)/2(1 + 3\omega)$. Expandindo (5.126) para $|k\eta| \gg 1$ e tomando

no ponto em que queremos conectar as duas funções η_* temos

$$v_k(\eta_*) \approx \frac{B_1(k)}{2\sqrt{k}} \left[1 - \frac{\alpha_1}{2ik\eta_*} \right] + \frac{B_2(k)}{2\sqrt{k}} \left[1 + \frac{\alpha_1}{2ik\eta_*} \right], \quad (5.127)$$

com primeira derivada

$$\left. \frac{dv_k}{dx} \right|_{\eta=\eta_*} \approx \frac{1}{2\sqrt{k}} \left\{ B_1(k) \left[ik - \frac{\alpha_1}{2\eta_*} \right] - B_2(k) \left[ik + \frac{\alpha_1}{2\eta_*} \right] \right\}, \quad (5.128)$$

onde

$$B_1(k) \equiv 2C_1(k) \exp \left[i \left(k\eta_* - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (5.129)$$

$$B_2(k) \equiv 2C_2(k) \exp \left[-i \left(k\eta_* - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (5.130)$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{\Gamma(\nu + 3/2)}{\Gamma(\nu - 1/2)} = \frac{2(1 - 3\omega)}{(1 + 3\omega)^2}. \quad (5.131)$$

Agora, só resta conectar as duas soluções, dadas pelas Eqs. (5.124) e (5.125), e suas primeiras derivadas, Eqs. (5.127) e (5.128), em η_* . Encontramos assim os coeficientes $C_1(k)$ e $C_2(k)$,

$$C_1(k) \approx \left(\frac{i\beta}{16k^3} - \frac{\beta x_*}{8k^2} \right) \exp \left[-i \left(\frac{2k^3}{3\beta} + kx_* + \alpha_2 \right) \right] \quad (5.132)$$

$$C_2(k) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i\alpha_1}{2k\eta_*} - \frac{i\beta}{8k^3} \right) \exp \left[-i \left(\frac{2k^3}{3\beta} + kx_* - \alpha_2 \right) \right], \quad (5.133)$$

onde

$$\alpha_2 \equiv k\eta_* - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (5.134)$$

Além disto, o limite da solução (5.126) para $k\eta \rightarrow 0^-$ deve poder ser representado

pela solução formal (5.94) para $k\eta \ll 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
v_k(\eta) &\equiv A_1(k)\eta^{1/2+\nu} + A_2(k)\eta^{1/2-\nu} \\
&\approx \sqrt{\eta} \left\{ \left(\frac{k\eta}{2} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left[C_1(k) + C_2(k) + +i [C_1(k) - C_2(k)] \cot(\nu\pi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{k\eta}{2} \right)^{-\nu} \frac{i [C_2(k) - C_1(k)]}{\Gamma(1-\nu) \sin(\nu\pi)} \right\}, \tag{5.135}
\end{aligned}$$

de modo que o coeficiente $A_2(k)$ tem a dependência

$$\begin{aligned}
|A_2(k)|^2 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2} \right)^{-2\nu} \frac{1}{[\Gamma(1-\nu) \sin(\nu\pi)]^2} \left[1 + \frac{\beta x_*}{2k^2} \cos(2\alpha_2) \right. \\
\left. + \frac{\alpha_1^2}{4k^2 \eta_*^2} - \frac{\beta}{4k^3} \sin(2\alpha_2) \right]. \tag{5.136}
\end{aligned}$$

Analogamente à seção anterior, o índice espectral n_s é dado por

$$\begin{aligned}
n_s = 1 + \frac{12\omega}{1+3\omega} - \frac{\beta x_* \eta_*}{k} \sin(2\alpha_2) - \frac{2}{k^2} \left[\frac{\alpha_1^2}{4\eta_*^2} + \frac{\eta_* \beta}{4} (1+2x_*) \cos(2\alpha_2) \right. \\
\left. + \frac{\eta_* \beta}{4} \cos(2\alpha_2) \right] + \frac{3\beta}{4k^3} \sin(2\alpha_2). \tag{5.137}
\end{aligned}$$

Conforme mostrado em [25], na ausência de constante cosmológica e havendo somente uma componente material de equação de estado ω no universo, o índice espectral seria representado pelos dois primeiros termos em (5.137) e seria invariante de escala para $\omega \approx 0$. No entanto, na presença de Λ , aparecem termos adicionais em n_s que indicam uma inclinação para o vermelho (representada pelo primeiro termo entre colchetes), além de termos oscilantes, ambos decrescentes com relação a k .

A fim de verificar numericamente este resultado, mudamos a variável temporal de η para $y = \gamma t$ e definimos a função transformada

$$u_k \equiv a^{1/2} v_k \tag{5.138}$$

de modo que a equação transformada é

$$\frac{d^2 u_k}{dy^2} + \left[\frac{4k^2}{9(1+\omega)^2 [\Omega_\Lambda^{(1+3\omega)/2} \Omega_{0\omega}]^{2/[3(1+\omega)]} \sinh^{4/[3(1+\omega)]}(-y)} - \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} + \frac{\omega}{(1+\omega)^2 \sinh^2(y)} + \frac{2}{\cosh^2(y)} \right] u_k = 0, \quad (5.139)$$

e tomamos as condições iniciais (5.122) e (5.123) em $y_{ini} = y_V$. Os resultados estão apresentados na Fig. 5.3.

A partir das soluções apresentadas na Fig. (5.3), calculamos v_k e tomamos seu valor em $y = -10^{-15}$. Usando (5.35), transformamos este resultado para dependência em η , uma vez que $dy = a\gamma d\eta$ e assim

$$\eta = \frac{2y^{1-\frac{2}{3(1+\omega)}} \left(\frac{\Omega_{0\omega}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-\frac{1}{3+3\omega}}}{a_0 H_0 (1+3\omega) \sqrt{\Omega_\Lambda}}. \quad (5.140)$$

Com este resultado, tomamos a expansão em (5.94) até os termos de ordem menor em k , tal que

$$v_k \simeq A_1(k) \eta^{\frac{2}{1+3\omega}} + A_2(k) \eta^{\frac{2}{1+3\omega}} \int^\eta \frac{d\bar{\eta}}{z^2(\bar{\eta})}, \quad (5.141)$$

e sabendo que nesta região $z(\eta) \propto a(\eta)$, de modo que temos

$$v_k \simeq A_1(k) \eta^{\frac{2}{1+3\omega}} + C_3 A_2(k) \eta^{\frac{3\omega-1}{1+3\omega}}, \quad (5.142)$$

em que

$$C_3 = \frac{2\omega(1+3\omega)}{9a_0^2(\omega^2-1)} \left(\frac{a_0\gamma(1+3\omega)}{3(1+\omega)} \right)^{-\frac{4}{1+3\omega}} \left(\frac{\Omega_{0\omega}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-\frac{3+\omega}{(1+3\omega)(1+\omega)}}. \quad (5.143)$$

Multiplicamos então (5.142) por $\eta^{\frac{2}{1+3\omega}}$ e diferenciamos o resultado com relação a η para isolar $A_2(k)$. Este resultado está expresso na Fig. (5.4) para diferentes valores de ω .

Note que, de forma consistente, quando a constante cosmológica se anula e $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$, temos que $\beta \rightarrow 0$ e $|\eta_*| \rightarrow \infty$, de modo que os termos adicionais em (5.137) desaparecem.

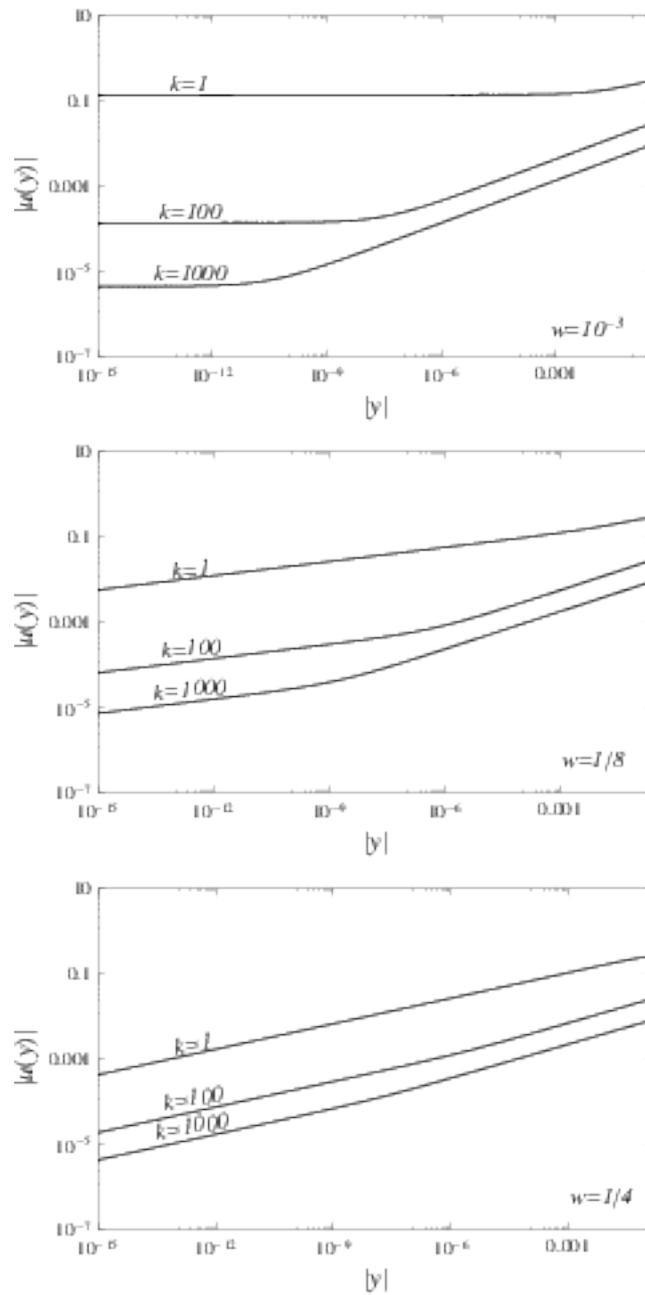


Figura 5.3: Resultados numéricos da Eq. (5.139) para $\omega = 10^{-3}, 1/8$ e $1/4$, para diferentes valores de k .

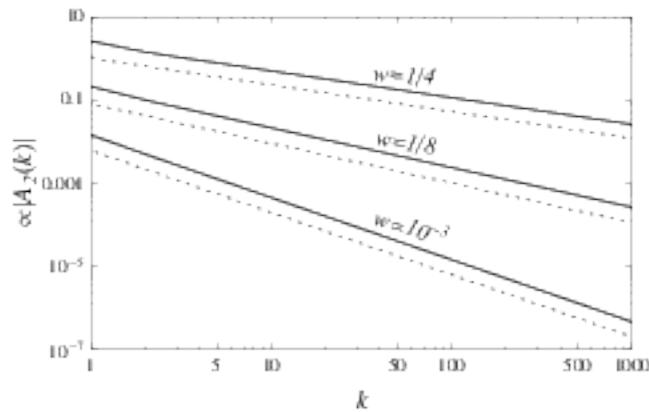


Figura 5.4: Resultados numéricos de $|A_2(k)|$ para $\omega = 10^{-3}, 1/8$ e $1/4$ calculados em $y = -10^{-15}$. Para fins de comparação, as linhas cheias mostram os resultados numéricos e as curvas tracejadas são proporcionais a $k^{\frac{3(\omega-1)}{2(3\omega+1)}}$.

Este resultado está apresentado na Fig. (5.5), na qual representamos os valores numéricos de n_s para diferentes valores de Ω_Λ . É possível observar que as oscilações são cada vez menores à medida que Ω_Λ se torna menor, sugerindo que de fato são resultado da influência da constante cosmológica no modelo.

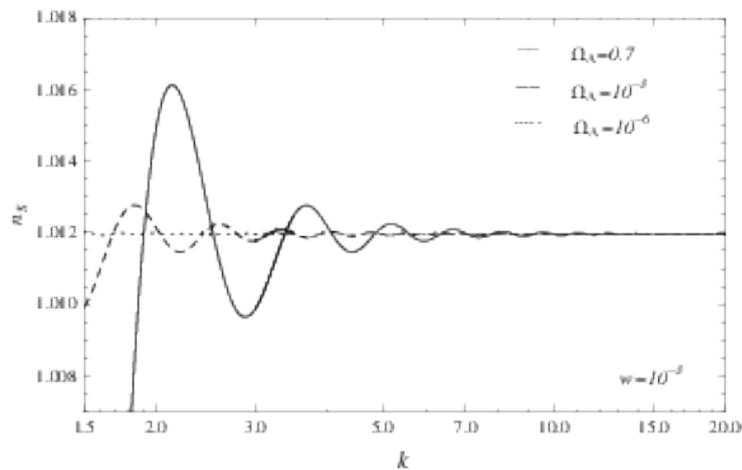


Figura 5.5: Índice espectral calculado numericamente $n_s(k)$ para $y = -10^{-15}$ e $\omega = 10^{-3}$, para diferentes valores de Ω_Λ . Observe que claramente as oscilações diminuem à medida em que a contribuição da constante cosmológica se torna menor.

Capítulo 6

Conclusão

O modelo cosmológico padrão, construído a partir das propriedades da matéria e utilizando apenas a Relatividade Geral como teoria de base, apesar de seu sucesso no que diz respeito à previsão da abundância de elementos leves ou na comparação com a curva de Hubble, tem necessidade de condições iniciais muito específicas para dar conta das características de homogeneidade e planeza hoje observadas. Deste modo, foi proposta na década de 80 [18,31] uma teoria em que a presença de um campo especial no universo primordial seria responsável por uma expansão exponencial nos estágios iniciais, e este paradigma inflacionário foi proposto a fim de apresentar uma solução para os problemas presentes no modelo padrão. No entanto, uma questão teórica fundamental a respeito deste modelo não era abordada pela inflação: a questão da singularidade, um ponto no qual nenhuma teoria física conhecida poderia ser aplicada.

Por muito tempo acreditou-se que não seria possível evitar a singularidade inicial em qualquer modelo gravitacional, baseando-se nos teoremas de singularidades vigentes [4,10]. No entanto, uma das condições para a validade dos teoremas era a ausência de campos que violassem a condição de energia forte, isto é, componentes materiais para as quais $\epsilon + 3p > 0$. Entretanto, dados de supernova tipo Ia [22,30] indicaram que o universo hoje estaria em expansão acelerada, sugerindo a presença de um conteúdo que ficou conhecida como energia escura. Assim, modelos de universo não singulares atraíram cada vez mais

atenção.

Os modelos cosmológicos com ricochete [5, 28] são exemplos de modelos não singulares que se apresentam como complemento e até mesmo como alternativa ao paradigma inflacionário, supondo serem capazes de solucionar os problemas do modelo padrão de maneira satisfatória. Neste sentido, a fase de contração acelerada resolve os problemas de planeza e do horizonte, e por construção o modelo de ricochete não apresenta singularidade. Resta portanto saber se tais modelos também fornecem em sua evolução a formação de estruturas que observamos hoje. Para este fim, é preciso fazer um estudo da dinâmica das perturbações primordiais, responsáveis pela aglomeração de matéria e pela consequente formação de galáxias e aglomerados de galáxias, à medida que este universo evolui.

Neste trabalho, realizamos um estudo da evolução das perturbações cosmológicas em um universo composto por constante cosmológica, representando uma forma simplificada de incluir uma componente que viola a condição de energia forte, além de um campo escalar, cujo potencial tem forma que torna sua descrição análoga a um fluido hidrodinâmico de equação de estado $p = \omega\epsilon$. Este universo vem de uma fase de contração, que assintoticamente tende para um universo de De Sitter à medida que o tempo $t \rightarrow -\infty$, ou seja, supomos que quando o universo é muito grande a constante cosmológica domina sobre o campo escalar. À medida em que evolui, passamos por uma fase em que Λ torna-se irrelevante, e o campo escalar domina. Nesta região, colocamos condições de vácuo para as perturbações cosmológicas, uma vez que o potencial da equação que representa a dinâmica das perturbações tem valor nulo em algum instante de tempo dentro desta fase. A partir daí, evoluímos as perturbações até que elas entrem na região em que o ricochete ocorre, sendo então influenciadas por um potencial da forma (5.41).

Analisando o espectro de potências destas perturbações cosmológicas após a fase de ricochete, mais precisamente seu índice espectral, observamos que o espectro é invariante de escala se o fluido for tipo poeira, isto é, $\omega \approx 0$, como esperado e já verificado em

trabalhos anteriores [6,25]. No entanto, além disto existe uma pequena inclinação para o vermelho no espectro, além de termos oscilatórios, indicando que o comportamento das perturbações é alterado pela presença de Λ . Uma evidência desta influência está no fato de que os termos extras em n_S variam com Ω_Λ , tornando-se cada vez menores à medida em que tornamos a concentração da constante cosmológica menor.

Note que escolhemos um campo escalar como parte componente do modelo. Uma evolução natural deste problema seria se, por outro lado, analisássemos a situação em que a contração fosse causada por um fluido hidrodinâmico tipo poeira com $c_s^2 = \omega \approx 0$, na qual a descrição do vácuo adiabático seria mais complicada. Além disto, uma extensão natural seria o estudo do comportamento para outras formas de energia escura além da constante cosmológica.

Referências Bibliográficas

- [1] BARDEEN, J. M. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev. D* **22** (1980), 1882–1905.
- [2] CARROLL, S. M. Lecture notes on general relativity.
- [3] COPELAND, E. J., SAMI, M., AND TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006), 1753–1936.
- [4] ELLIS, G. F. R., AND HAWKING, S. The Cosmic black body radiation and the existence of singularities in our universe. *Astrophys. J.* **152** (1968), 25.
- [5] FINELLI, F., AND BRANDENBERGER, R. On the generation of a scale-invariant spectrum of adiabatic fluctuations in cosmological models with a contracting phase. *Phys. Rev. D* **65** (2002), 103522.
- [6] FINELLI, F., PETER, P., AND PINTO-NETO, N. Spectra of primordial fluctuations in two-perfect-fluid regular bounces. *Phys. Rev. D* **77** (2008), 103508.
- [7] FREEDMAN, W. L., ET AL. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant. *Astrophys. J.* **553** (2001), 47–72.
- [8] GOLDWIRTH, D. S., AND PIRAN, T. Initial conditions for inflation. *Physics Reports* **214**, 4 (1992), 223–292.
- [9] GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D* **23** (1981), 347–356.

- [10] HAWKING, S., AND ELLIS, G. F. R. Singularities in homogeneous world models. *Phys. Lett. 17* (1965), 246–247.
- [11] KOMATSU, E., ET AL. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl. 192* (2011), 18.
- [12] LARSON, D., ET AL. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters. *Astrophys. J. Suppl. 192* (2011), 16.
- [13] LIDDLE, A., AND LYTH, D. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [14] LINDE, A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B 108* (1982), 389–393.
- [15] MAIER, R., PEREIRA, S., PINTO-NETO, N., AND SIFFERT, B. B. Bouncing models with a cosmological constant. *Phys. Rev. D85* (2012), 023508.
- [16] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] MUKHANOV, V., AND WINTZKI, S. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [18] MUKHANOV, V. F., AND CHIBISOV, G. V. Quantum fluctuation and nonsingular universe. (in russian). *JETP Lett. 33* (1981), 532–535.
- [19] MUKHANOV, V. F., FELDMAN, H. A., AND BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys. Rept. 215* (1992), 203–333.

- [20] NOVELLO, M., AND BERGLIAFFA, S. E. P. Bouncing Cosmologies. *Phys. Rept.* *463* (2008), 127–213.
- [21] PEEBLES, P. *Principles of physical cosmology*. Princeton series in physics. Princeton University Press, 1993.
- [22] PERLMUTTER, S., ET AL. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J.* *517* (1999), 565–586.
- [23] PETER, P., PINHO, E., AND PINTO-NETO, N. Tensor Perturbations in Quantum Cosmological Backgrounds. *JCAP* *0507* (2005), 014.
- [24] PETER, P., PINHO, E. J. C., AND PINTO-NETO, N. Gravitational wave background in perfect fluid quantum cosmologies. *Phys. Rev.* *D73* (2006), 104017.
- [25] PETER, P., PINHO, E. J. C., AND PINTO-NETO, N. A non inflationary model with scale invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev.* *D75* (2007), 023516.
- [26] PETER, P., AND PINTO-NETO, N. Has the Universe always expanded ? *Phys. Rev.* *D65* (2002), 023513.
- [27] PETER, P., AND PINTO-NETO, N. Primordial perturbations in a non singular bouncing universe model. *Phys. Rev.* *D66* (2002), 063509.
- [28] PETER, P., AND PINTO-NETO, N. Cosmology without inflation. *Phys. Rev.* *D78* (2008), 063506.
- [29] PINHO, E. J. C., AND PINTO-NETO, N. Scalar and vector perturbations in quantum cosmological backgrounds. *Phys. Rev.* *D76* (2007), 023506.
- [30] RIESS, A. G., ET AL. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron. J.* *116* (1998), 1009–1038.

- [31] STAROBINSKY, A. A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.* 30 (1979), 682–685.
- [32] WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.