Tese de Doutorado

Osciladores Não Comutativos. Uma Abordagem Algébrica de Hopf

Ricardo Kullock

Orientador: Francesco Toppan

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Física Teórica

Rio de Janeiro
2012

Sumário

Agradecimentos

Ao meu orientador, Francesco Toppan, que me guiou por este período.

Ao professor Biswajit Chakraborty, por sua produtiva colaboração científica.

Ao professor Nami Svaiter, com quem aprendi muito.

À minha família, por seu constante apoio.

À todos os meus amigos, especialmente Paulo, Flávio, Carlos, Saulo, Marcelo, Rodrigo, Pedro e André, companhias essenciais em minha vida, assim como meus grandes amigos do mundo acadêmico Gabriel, Paulo e Rodrigo, por todas as suas contribuições, científicas ou não, e à Carol, pelo tempo em que se fez presente.

A tantos outros que estiveram presentes durante este período.

Aos funcionários do CBPF.

O autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

Resumo

Neste trabalho iremos estudar modelos de mecânica quântica não comutativa através das deformações de álgebras de Hopf, em particular pelo Twist de Drinfel'd. Serão estudadas duas deformações distintas para um oscilador harmônico.

Primeiramente mostraremos como introduzir de forma apropriada uma álgebra de Lie dinâmica, incluindo a constante de Planck como uma extensão central, seguindo [1]. Com uma álgebra de Lie em mãos, utilizamos a álgebra universal envelopante a m de obtermos uma álgebra de Hopf, e em seguida utilizamos o Twist de Drinfel'd para deformá-la. Seguindo o trabalho de Woronowicz [2], encontramos os geradores deformados, e mostramos que estes satisfazem relações de comutação deformadas sob a ação adjunta usual, apesar de a ação adjunta deformada levar às mesmas constantes de estrutura.

Duas deformações são estudadas, a primeira levando a uma não comutatividade constante e a outra levando a uma similar à de nida por Snyder [3]. No primeiro caso mostramos que o espectro é o mesmo encontrado na literatura, assim como a quebra de simetria rotacional. No segundo caso a teoria resultante é pseudo-hermitiana, e encontramos um produto interno apropriado para o sistema físico. Nos dois casos a interpretação física do coproduto leva a uma não aditividade na energia de estados de múltiplas partículas.

Abstract

In this work we will study noncommutative quantum mechanical models by deformations of Hopf algebras, in particular the Drinfel'd Twsit. Two distinct deformations for an oscillator will be considered.

First we will show how to appropriety introduce a dynamical Lie algebra, introducing Planck's constant as a central extension, as in [1]. With the Lie algebra at hands we use the universal enveloping algebra as to obtain the Hopf algebra, and use the Drinfel'd Twsit to deform it. Following the work by Woronowicz [2], we nd the deformed generators, and show how these obey deformed commutation relations under the usual adjoint action, even though the deformed adjoint action leads to the same structure constants.

Two deformations are studied, the rst leading to a constant noncommutativity e the other leading to one similar to the Snyder noncommutativity [3]. In the rst case we show that the spectrum just as the one found in the literature, as is the break in the rotational symmetry. In the second case the resulting theory is pseudo-hermitian, and we nd an appropriate inner product for the physical system. In both cases the physical interpretation of the coproduct leads to a non-additive energy for multiparticle states.

Introdução

Tem-se visto atualmente na física um grande interesse em versões não comutativas ou deformadas de teorias já conhecidas. Em grande parte isto se deve ao trabalho de Seiberg e Witten [4], onde a não comutatividade aparece em um limite de baixas energias da teoria de cordas. Os autores consideram uma corda aberta sob um campo externo, e mostram como a ponta da corda tem operadores de posição com comutadores não nulos em uma teoria efetiva.

O primeiro trabalho a considerar uma deformação levando a não comutatividade foi devido a Heisenberg [5]. Seu objetivo era buscar uma forma de regularizar teorias quânticas de campos utilizando um parâmetro com signi- cado físico (e.g. o comprimento de Planck), esperando que uma incerteza nas coordenadas espaciais pudessem evitar os pontos singulares das distribuições. Esta ideia foi desenvolvida por Snyder [3], que substituiu o comutador proposto por Heisenberg (que quebrava a simetria de Lorentz) por um não constante. A ideia de Heisenberg não ganhou muita atenção, principalmente devido ao sucesso da teoria de renormalização.

Na década de 80, as teorias não comutativas ganharam novas forças com os trabalhos de Connes [6], Drinfel'd [7] e Jimbo [8]. Alain Connes foi responsável por introduzir o conceito de geometrias não comutativas, com a possibilidade de introduzir estruturas diferenciais neste contexto assim como a construção de variedades diferenciáveis. Drinfel'd e Jimbo construíram, independentemente, a noção de grupos quânticos [9, 10], que de fato se mostraram ser os grupos de simetria de geometrias não comutativas.

Apesar de inicialmente teorias de deformações serem relacionadas a aspectos de quantização, a primeira aplicação de grupos quânticos foi na solução das equações de Yang-Baxter no próprio trabalho de Jimbo [8], e logo após no efeito Hall quântico [11], para apenas então ter sua aplicação em teorias quânticas de campos deformadas [12]. O interesse em grupos quânticos ainda passa por outras áreas da física, como o grupo de simetria do modelo de cadeia de spins XXZ [13], ou ainda em modelos integráveis como em [14].

Devido a um interesse em desenvolver uma teoria efetiva para a quantização do campo gravitacional, entre as áreas com o maior numero de publicações utilizando deformações estão a de geometrias deformadas [15, 16, 17] e a teoria quântica de campos não comutativa [18, 19]. Ainda encontramos na segunda uma série de novos aspectos em desenvolvimento - como gravidade emergente [21, 22, 23] ou a reprodução de resultados de quebra espontânea de simetria [24] - assim como problemas em aberto, em particular a questão de renormalização com a mistura IV/UV [25] (com alguns resultados parciais em [26, 27]).

Com a presença de deformações de grupos em física, também podemos encontrar um crescente interesse nas álgebras de Hopf [28, 29, 30], que descrevem de forma uni cada os conceitos mencionados acima (especialmente nas equações de Yang-Baxter, relacionadas à estrutura triangular - que será de- nida adiante - das álgebras de Hopf), tornando-se o instrumento no estudo destes.

Dentre as possíveis deformações que se utilizam de álgebras de Hopf está o twist de Drinfel'd, de nido em termos de transformações de similaridade, de tal forma que o resultado ainda é uma álgebra de Hopf. Com este twist a estrutura triangular é modi cada, e podemos encontrar novas álgebras. Em particular, este método permite a construção de soluções não triviais das equações de Yang-Baxter a partir de soluções triviais. Outra aplicação é a deformação de álgebras de Lie [2] onde o twist é aplicado à álgebra universal envelopante, sendo possível de nir um novo subespaço invariante sob a nova ação adjunta - os geradores deformados.

Além de serem associadas ao termo grupo quântico , as álgebras de Hopf também têm encontrado aplicações menos esperadas como em renormalização [32, 33], onde os grá cos de Feynman aparecem como grafos na chamada álgebra de Hopf de árvores enraizadas. Com estas álgebras de Hopf, foi possível entender melhor como a teoria quântica de campos e a mecânica clássica se relacionam [34].

Buscando uma compreensão cuidadosa de como construir e compreender teorias deformadas, muitos autores escolheram focar no estudo da chamada mecânica quântica não comutativa [35, 36, 37]. Esta se caracteriza por relações de comutação não nulas entre seus operadores de posição, além das relações de comutação entre posição e momento. Sua formulação não é simples, e mesmo o simples caso de um oscilador harmônico exige um estudo cuidadoso [38, 39, 40, 41, 42]. Outros exemplos da consequência de uma não comutatividade em mecânica quântica são no efeito Aharanov-Bohm [43], e para um gás de elétrons [44, 45].

Além de abordagens por deformações, também podemos encontrar coordenadas não comutativas em estudos de extensões centrais, por exemplo no grupo de Galileu [46, 47]. Nos dois trabalhos as extensões centrais são exatamente os termos de quebra da comutatividade nas coordenadas. Desta forma, após a quantização obtemos uma mecânica quântica não comutativa. No primeiro trabalho, dois métodos de quantização são analisados, trabalhando com uma partícula livre em duas dimensões. No segundo a não comutatividade leva a uma massa efetiva para uma partícula se movendo sob um campo magnético.

Para uma abordagem por álgebras de Hopf, a identi cação de uma extensão central é de grande importância. Apesar de as extensões centrais atuarem em uma representação de forma proporcional à identidade, elas são geradores da álgebra de Lie, o que signi ca que seu coproduto, counidade e antípoda serão iguais aos de um gerador.

Em [1] os autores identi cam a constante de Planck em uma mecânica quântica usual como uma extensão central, tornando a álgebra de Heisenberg uma álgebra de Lie. Com essa construção, é possível de nir a álgebra universal envelopante, e assim a álgebra de Hopf. Utilizando uma deformação por um twist de Drinfel'd abeliano, os autores mostram como os geradores deformados de Woronowicz [2] satisfazem exatamente as relações de comutação da mecânica quântica não comutativa (para o caso de comutadores constantes entre operadores de posição). Este resultado é encontrado utilizando a ação adjunta não deformada para os geradores deformados, levando a uma construção híbrida .

Ao considerar uma extensão para a quantização de campos, torna-se necessário a introdução de osciladores de Wigner, onde a Hamiltoniana passa também a ser um gerador da álgebra de Lie. Os autores também deformam uma álgebra de Heisenberg fermiônica, mostrando que os mesmos conceitos utilizados se aplicam para o caso de anticomutadores.

Em [31] os autores também apontam a necessidade de identi car certos polinômios como elementos primitivos da álgebra de Hopf, ou seja, geradores de uma álgebra de Lie formal, levando a um formalismo de desdobramento na construção da álgebra de Lie dinâmica a ser utilizada. Com esta iden-ti cação o coproduto destes elementos pode ser utilizado de forma a obter estados de múltiplas partículas mantendo estas quantidades aditivas, o que não seria possível antes. Com este desenvolvimento os autores apontam para a possibilidade de uma teoria deformada desenvolver uma anomalia - um operador simétrico por rotações pode perder esta propriedade.

Neste trabalho parte dos resultados de [1] serão desenvolvidos com maior profundidade para o caso do oscilador harmônico. Dois tipos diferentes de deformações podem ser encontradas neste caso. A primeira é o twist abeliano, levando a um oscilador anisotrópico. O segundo é o twist Jordaniano da álgebra sl_2, que leva a uma não comutatividade de Snyder (a parte espacial apenas). Os resultados expostos aqui podem ser encontrados nos artigos [48, 49].

No primeiro capítulo serão introduzidos os conceitos básicos necessários, particularmente as álgebras de Hopf, a álgebra envelopante universal, e o twist de Drinfel'd. No segundo capítulo serão apresentados os resultados para o twist abeliano, começando por uma apresentação da abordagem utilizada - a de nição da álgebra de nindo polinômios quadrados como novos geradores, o formalismo híbrido, a interpretação do coproduto. A seguir serão apresentados os resultados da deformação para um oscilador harmônico, com seu espectro dado explicitamente e a quebra de simetria rotacional. No terceiro capítulo será apresentado o caso do twist não abeliano, com os operadores de posição e momentum deformados apresentando relações de comutação de Snyder e a consequente não hermiticidade dos operadores.

Capítulo 1

Álgebras de Hopf e Suas Deformações

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos relevantes para esse trabalho. Uma exposição mais detalhada sobre o assunto pode ser encontrada nas referências [9, 10, 29, 30], ou no primeiro capítulo de [50]. Neste trabalho procuraremos introduzir apenas o necessário.

1.1 Grupos Quânticos e Álgebras de Hopf

A de nição de uma álgebra de Hopf pode ser inicialmente pouco familiar, mas esta é relacionada a um conceito frequentemente utilizado em física, a teoria de grupo. Para ver isso, considere um grupo G, e tome a k-álgebra do grupo kG, ou seja combinações lineares (nitas ou não) com coe ciente no corpo k. Para simpli car o tratamento, será utilizado o corpo dos números complexos $k = \mathbb{C}$.

O primeiro passo para encontrarmos uma álgebra de Hopf a partir de um grupo é substituir a multiplicação por um mor smo $\mu : kG \otimes kG \to kG$

$$g \cdot h = \mu(g \otimes h) \qquad g, h \in G, \tag{1.1}$$

de tal forma que a associatividade permaneça válida. A identidade pode ser introduzida através do mor smo $\varepsilon(a) = \mathrm{I}$, onde I é a identidade e $a \in \mathbb{C}$. Para a inversa de um elemento do grupo, primeiramente considere o anti-automor smo $S(g) = g^{-1}$ (a antípoda), tal que $S(g \cdot h) = S(h) \cdot S(g)$. Desta forma temos

$$\mathrm{I} = g^{-1} \cdot g = \mu(g^{-1} \otimes g) = \mu \circ (S \otimes id)(g \otimes g), \tag{1.2}$$

onde id é o mor smo identidade $id(g) = g$ e $\circ$ é a composição de mor smos.

Para chegarmos a de nição de uma álgebra de Hopf, introduzimos $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\eta(g) = 1$, de tal forma que

$$\varepsilon \circ \eta(g) = \mathrm{I} = g^{-1} \cdot g = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta(g), \tag{1.3}$$

onde Δ é chamado de coproduto (ou comultiplicação) e η é a counidade. Dito de outra forma, a multiplicação pela inversa em um grupo pode ser de nida pela composição de mor smos

$$\varepsilon \circ \eta = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta, \tag{1.4}$$

onde a última igualdade corresponde a inversa pela direita $g \cdot g^{-1} = \mathrm{I}$. Esta igualdade é justamente a de nição para uma álgebra de Hopf, com a possibilidade de escolher outros mor smos. Toda vez que um elemento de uma álgebra de Hopf tem seu coproduto e antípoda como introduzidos acima, este é chamado de um elemento do tipo grupo (group-like element). Esta relação de mor smos pode ser colocada na forma do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[r, "S\otimes id"] & A\otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{C} \arrow[rr, "\varepsilon"] & & A. \\ & A\otimes A \arrow[r, "id\otimes S"'] & A\otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

onde A é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (no caso da álgebra de grupo, $A = kG$). Se temos uma família de coprodutos tal que $\lim_{t\to 0} \Delta_t(g) = g \otimes g$, então a álgebra de Hopf com Δ_t como coproduto é chamada de grupo quântico . Este termo também pode ser usado para uma de nição análoga em termos da álgebra universal envelopante.

Com esta formulação de um grupo, a ação adjunta $g \cdot h \cdot g^{-1}$ pode ser escrita de seguinte forma. Primeiro introduzimos a notação de Sweedler

$$\Delta(g) = \sum_i g_i \otimes g_i \equiv g_1 \otimes g_2. \tag{1.5}$$

Desta forma a ação adjunta se torna

$$ad_g h = g_1 \cdot h \cdot S(g_2) = g \cdot h \cdot g^{-1} \tag{1.6}$$

As álgebras de Hopf são, em particular, simultaneamente álgebras e coálgebras, o que também costuma-se representar por diagramas comutativos. A necessidade da álgebra ser associativa (f · (g · h) = (f · g) · h) pode ser representado pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

e a existência do elemento identidade na álgebra pode ser colocada como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k} \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id"] & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"'] \\ A & A \otimes \mathbf{k} \arrow[l] \arrow[u, "id\otimes\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

O lado da coálgebra é exatamente o dual, o que signi ca que devemos simplesmente inverter as setas nos diagramas acima, obtendo uma coálgebra coassociativa, $(\Delta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\Delta)\circ\Delta$, e com uma counidade, $(\eta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\eta)\circ\Delta$.

Ainda são necessárias condições de compatibilidade entre a álgebra e a coálgebra, o resultado sendo chamado de biálgebra. As condições também podem ser descritas por diagramas, ou pelas expressões

$$
\begin{aligned}
\Delta(g \cdot h) &= \Delta(g) \cdot \Delta(h) \\
\eta(g \cdot h) &= \eta(g)\eta(h) \\
\Delta(\mathrm{I}) &= \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \\
\eta(\mathrm{I}) &= 1.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Observe que as duas primeiras condições são simplesmente que Δ e ε são homomor smos da álgebra. Como podemos ver pela própria construção, as biálgebras são auto-duais.

A equação (1.4) exprime a existência de uma antípoda, o último elemento necessário para transformar uma biálgebra em uma álgebra de Hopf. Esta antípoda deve satisfazer também certas condições de compatibilidade, a saber

$$
\begin{aligned}
S(g \cdot h) &= S(h) \cdot S(g) \\
\eta \circ S(g) &= \eta(g) \\
\Delta \circ S(g) &= \tau \circ \Delta(g) \\
S(\mathrm{I}) &= \mathrm{I},
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

onde $\tau\,(g \otimes h) = h \otimes g$ é o mapa de transposição. A primeira condição é equivalente a dizer que a antípoda é um antiautomor smo da álgebra.

1.1.1 Álgebras de Hopf quase-triangulares

Uma classe de álgebras de Hopf desempenha um papel de especial importância para a teoria de deformações, as álgebras de Hopf quase-triangulares. Primeiramente, de nimos o conceito de cocomutatividade: este é o caso de grupos, como introduzidos acima. Especi camente, uma álgebra de Hopf cocomutativa é dada por um coproduto simétrico

$$\tau \circ \Delta = \Delta. \tag{1.9}$$

Uma possibilidade de enfraquecer esta condição é de nindo as álgebras de Hopf quase-cocomutativas. Estas são dadas por um elemento $R \in A \otimes A$ invertível, tal que

$$\tau \circ \Delta = R \Delta R^{-1} \tag{1.10}$$

onde, por $(R \, \Delta \, R^{-1})(g)$, entende-se $R \, \Delta(g) \, R^{-1}$.

O coproduto $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$ também deve formar uma álgebra de Hopf, por isso R não é arbitrário, e deve satisfazer a condição de coassociatividade. Seja $R = R^{\alpha} \otimes R_{\alpha}$, onde α é um multi-índice, então de nimos

$$\begin{aligned} R_{ij} &= I^{\otimes i-1} \otimes R^{\alpha} \otimes I^{\otimes j-i} \otimes R_{\alpha} \otimes I \otimes \ldots \qquad i < j \\ R_{ij} &= I^{\otimes i-1} \otimes R_{\alpha} \otimes I^{\otimes j-i} \otimes R^{\alpha} \otimes I \otimes \ldots \qquad i > j \end{aligned} \tag{1.11}$$

ou seja, se $i < j$, R_{ij} signi ca que R^{α} é colocado na i-ésima posição e R_{α} na j-ésima, completando o resto com identidades, até o número de produtos tensoriais necessários para a equação. Por exemplo, $R_{13} = R^{\alpha} \otimes I \otimes R_{\alpha}$ (ou com mais identidades ao nal) e $R_{31} = R_{\alpha} \otimes I \otimes R^{\alpha}$.

Para Δ^{op} formar uma álgebra de Hopf, a condição sobre R é que

$$R_{12} \, (\Delta \otimes id) \, (R) = R_{23} \, (id \otimes \Delta) \, (R). \tag{1.12}$$

Uma álgebra de Hopf quase-triangular é de nida por uma condição um pouco mais forte, dada por

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) &= R_{13}R_{23} \\ (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) &= R_{13}R_{12},\end{aligned} \tag{1.13}$$

ou seja, a quase-triangularidade garante que $\tau \circ \Delta$ também de na uma álgebra de Hopf. Uma propriedade particularmente interessante da estrutura triangular R, é que ela satisfaz a equação de Yang-Baxter

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{1.14}$$

Se ainda $R_{21} = R^{-1}$, então temos uma álgebra de Hopf triangular. O caso onde apenas esta última condição é imposta, com também $(\eta \otimes \eta)(R) = 1$ é chamado de álgebra de Hopf com cofronteira.

Uma forma de obter estas álgebras quase-triangulares é através do twist de Drinfel'd como será explicado mais adiante.

1.2 A Álgebra Universal Envelopante

O caso da álgebra de Hopf para um grupo é especialmente simples pois seu coproduto é simétrico, ou seja, cocomutativo. Uma segunda possibilidade para um coproduto simétrico é de nir

$$\Delta(u) = u \otimes I + I \otimes u, \tag{1.15}$$

onde u pertence a algum espaço vetorial. Qualquer elemento com um coproduto como este é chamado de primitivo. Também de nimos a antípoda

$S(u) = -u$. Repare que para o elemento identidade estas relações não valem (lembre de 1.8 e 1.7). A ação adjunta para este caso se torna (a multiplicação será omitida a partir deste ponto)

$$ad_u v = u_1 v S(u_2) = uvS(I) + vS(u) = uv - vu, \tag{1.16}$$

ou seja, um comutador. De fato, as relações acima nos levam a uma álgebra de Lie com $u, v \in \mathfrak{g}$.

Uma diferença para o caso de um grupo é que no primeiro caso a multiplicação de coprodutos não muda sua forma, enquanto para álgebras de Lie

$$\Delta(uv) = \Delta(u)\Delta(v) = uv \otimes I + I \otimes uv + u \otimes v + v \otimes u. \tag{1.17}$$

Desta forma, o que temos não é apenas a álgebra de Lie, mas sua álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$. Esta é de nida como a álgebra tensorial sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, módulo o ideal gerado pelo comutadores. O teorema de Poincaré-Birkho -Witt oferece uma descrição da álgebra universal envelopante utilizando polinômios dos geradores, módulo as relações de comutação, ou seja

$$U(\mathfrak{g}) = \frac{C[\tau_i, \tau_j, \ldots]}{[\tau_m, \tau_n] \sim c^k_{mn} \tau_k}, \tag{1.18}$$

onde τ_i são os elementos da base de $\mathfrak{g}$ e c^k_{mn} são as constantes de estrutura. Identi camos a álgebra de Lie com o subespaço linear de $U(\mathfrak{g})$ fechado sob a ação adjunta. Além do coproduto e antípoda introduzidos acima, ainda temos que $\varepsilon(u) = 0$.

É importante observar que a álgebra de Hopf é formada não por $\mathfrak{g}$ e pelos comutadores, mas por $U(\mathfrak{g})$ e pelo produto usual. Isto se torna necessário pois uma álgebra de Lie não contém a identidade, além de o comutador não ser associativo (a identidade de Jacobi pode ser vista como uma quebra explícita da associatividade).

O termo grupo quântico também pode ser utilizado para as álgebras envelopantes de forma similar ao caso de grupos, ou seja, um grupo quântico é uma deformação do coproduto 1.15.

1.3 O Twist de Drinfel'd

Uma importante abordagem para deformar coprodutos mantendo a coassociatividade é dada pelo twist de Drinfel'd. Primeiramente escolhemos um 2-cociclo counitário, ou seja, um elemento F tal que

$$(\mathrm{I} \otimes \mathsf{F})\,(\mathrm{id} \otimes \Delta)\,\mathsf{F} = (\mathsf{F} \otimes \mathrm{I})\,(\Delta \otimes \mathrm{id})\,\mathsf{F}, \tag{1.19}$$

e $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\mathsf{F} = \mathrm{I} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\mathsf{F}$. Com este, de nimos a nova álgebra de Hopf como o mesmo espaço vetorial, e apenas dois dos mor smos modi cados, o coproduto e a antípoda, de acordo com

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathsf{F}} &= \mathsf{F}\,\Delta\,\mathsf{F}^{-1} \\ S^{\mathsf{F}} &= \chi\, S\, \chi^{-1}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde $\chi = \mu(id \otimes S)F$ e $\chi^{-1} = \mu(S \otimes id)F^{-1}$. Desta forma não só garantimos que o resultado é uma álgebra de Hopf, como esta será triangular. Isto é fácil de veri car, utilizando 1.19 e que

$$\tau \circ \Delta^F = R\Delta^F R^{-1}, \tag{1.21}$$

onde $R = F_{21}F^{-1}$.

Uma aplicação importante para o twist de Drinfel'd está no caso de uma álgebra de funções deformada por um produto estrela. Se a multiplicação usual de funções for escrita como

$$f(x) \cdot h(x) = m(f, h)(x), \tag{1.22}$$

então existe uma compatibilidade com representações do grupo de simetria, ou seja, a ação do grupo em f e g seguida de uma multiplicação deve ser o mesmo resultado que sua ação no produto m(f, g). Isto pode ser escrito como (por g entenda-se sua ação na álgebra de funções)

$$g \circ m(f, h) = m \circ (g \otimes g)(f, h). \tag{1.23}$$

Podemos ver por esta expressão que o coproduto desempenha um papel central nesta compatibilidade. No caso do produto estrela, podemos escreve-lo como

$$m_y = m \circ F^{-1}, \tag{1.24}$$

onde aqui também entendemos F como sua ação nas funções. Desta forma, a compatibilidade exige que o coproduto seja deformado de acordo com 1.20. A condição de cociclo garante a associatividade de m_y.

Em termos gerais, sempre que uma álgebra de Hopf for representada sobre uma álgebra com multiplicação m, então o twist induz uma multiplicação deformada m^F.

1.3.1 O Twist de uma Álgebra Universal Envelopante

A técnica do twist de Drinfel'd pode ser aplicada de forma canônica a uma álgebra universal envelopante. Seu coproduto e antípoda serão deformados de acordo com (1.20). Com isto, a ação adjunta também se torna deformada, de forma que não nos leva mais a um comutador, mas a um comutador deformado

$$[u,v]_F \equiv ad_u^F v, \tag{1.25}$$

onde u, v $\in U(\mathfrak{g})$.

Em [2] o autor prova que, da mesma forma que a ação adjunta usual leva $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, podemos encontrar um subespaço $\mathfrak{g}^F$ em $U(\mathfrak{g})$ tal que $ad^F : \mathfrak{g}^F \to \mathfrak{g}^F$, ou seja, se $\zeta, \xi \in \mathfrak{g}^F$, então

$$[\zeta, \xi]_F \subset \mathfrak{g}^F. \tag{1.26}$$

Este subconjunto é chamado de álgebra de Lie deformada. Podemos ver também que recuperamos as mesmas constantes de estrutura que a álgebra não deformada, ou seja, se τ_i são os geradores da álgebra de Lie com constantes de estrutura c^k_{ij}, então

$$[\tau_i^F, \tau_j^F]_F = c^k_{ij}\tau^F_k. \tag{1.27}$$

Com isso é fácil ver também que a identidade de Jacobi será preservada. A única propriedade modificada será a regra de Leibniz, ou seja

$$[\tau_i^F, \tau_j^F \tau_k^F]_F = [\tau_i^F, \tau_j^F]_F \tau_k^F + \tau_j^F [\tau_i^F, \tau_k^F]_F . \tag{1.28}$$

Dizemos que a regra de Leibniz foi *minimalmente* deformada neste caso, onde o coproduto deformado é dado por

$$\Delta^F(\tau_i^F) = \tau_i^F \otimes I + \bar{R}^\alpha \otimes \bar{R}_\alpha[\tau_i^F], \tag{1.29}$$

onde $\bar{R}_\alpha[\tau_i^F]$ denota a ação adjunta, e a barra em $\bar{R}_\alpha$ significa que esta expansão é para o elemento inverso de R, ou seja, $R^{-1} = \bar{R}^\alpha \otimes \bar{R}_\alpha$, assim como

$$F^{-1} = \bar{f}^\alpha \otimes \bar{f}_\alpha. \tag{1.30}$$

A notação para a ação adjunta $R_\alpha[\tau_i^F]$ deve ser tratada da seguinte forma. Seja um operador T, então $T[v] = [T, v]$, mas $T^2[v] = [T, [T, v]]$

Com isto em mente, os geradores deformados podem ser encontrados pela expressão

$$\tau_i^F = \bar{f}^\alpha[\tau_i]\bar{f}_\alpha, \tag{1.31}$$

o que nos permite escreve-los como polinômios nos geradores usuais. Esta possibilidade será explorada para estudar as propriedades destes geradores deformados, como seu espectro e simetria rotacional.

Estes geradores deformados formam o subespaço mais apropriado quando trabalhamos com o twist de uma álgebra universal envelopante. No caso de um twist trivial (F um 2-cociclo trivial), serão estes geradores deformados que terão explicitamente os coprodutos e antípodas usuais de uma álgebra de Lie.

Capítulo 2

Caso Abeliano

Após introduzir os conceitos matemáticos necessários, podemos estudar sua aplicação para a mecânica quântica, como desenvolvidos nos trabalhos [48] e [49]. Neste capítulo será exposto o primeiro caso - o twist abeliano.

2.1 De nindo a Álgebra

Para uma deformação da mecânica quântica iremos utilizar o twist de Drinfel'd aplicado a uma álgebra universal envelopante. Esta álgebra será de nida a partir de motivações físicas.

Primeiramente introduzimos a álgebra de Heisenberg em d dimensões,

$$[x_i, p_j] = ik\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_i] = 0, \qquad i,j = 1,2,...,d. \tag{2.1}$$

Esta álgebra não é uma álgebra de Lie a não ser que k seja introduzido como uma extensão central (carga central), oque será feito mais adiante.

No intuito de calcular o espectro para um oscilador harmônico, introduzimos também

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2k} x_i x_i \\
K &= \frac{1}{2k} p_i p_i \\
D &= \frac{1}{4k} (x_i p_i + p_i x_i) ,
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

onde a notação de soma está implícita. Com isto podemos de nir a hamiltoniana do oscilador harmônico, $\mathbf{H}^F = H + K$.

Será necessário também introduzir o momento angular. Para $d = 3$ temos

$$
L_i = \frac{1}{k} s_{ijk} x_j p_k , \tag{2.3}
$$

onde s_{ijk} é o simbolo de Levi-Civita (uma densidade tensorial), completamente anti-simétrico. Para $d = 2$ temos apenas $L = L_z$ como momento angular.

Com estas de nições temos a álgebra em $d = 3$ com os comutadores

$$
\begin{array}{llll}
[D, H] = iH, & [D, K] = -iK, & [K, H] = 2iD & \\
[x_i, H] = ip_i, & [x_i, K] = 0, & [x_i, D] = \frac{i}{2} x_i & \\
[p_i, H] = 0, & [p_i, K] = -ix_i, & [p_i, D] = \frac{-i}{2} p_i & \quad (2.4) \\
[L_i, x_j] = is_{ijk} x_k, & [L_i, p_j] = is_{ijk} p_k, & [L_i, L_j] = is_{ijk} L_k & [x_i, p_i] \\
= ik\delta_{ij}. & & &
\end{array}
$$

Em $d = 2$ temos $[L, x_i] = is_{ij} x_j$ e $[L, p_i] = is_{ij} p_j$. Nos dois casos o momento angular comuta com H, K e D.

As relações de comutação acima de nem uma álgebra de Lie - que chamaremos de G_d - com a carga central k. Isto se deve exclusivamente pelo fato de de nirmos inicialmente H, K e D com uma divisão por k. Sem este aspecto, teríamos comutadores como $[H, x_i] = -ikp_i$, com um produto de dois geradores como resultado - sendo uma carga central, k deve ser tratado como um gerador. Desta forma devemos adicionar também as relações de comutação $[k, g] = 0$, $\forall g \in G_d$, ou simplesmente $[k, \cdot] = 0$. Com uma extensão central, temos uma família a um parâmetro de representações, classi cadas pelo valor de k.

A razão para introduzir um operador como primitivo (ou seja, um gerador da álgebra de Lie), é pelo seu coproduto. O coproduto de um elemento primitivo é uma quantidade naturalmente aditiva, além de nos levar a uma construção associativa, consequência da propriedade de coassociatividade. O estado de três partículas é de nido univocamente por $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, logo, se $H|\psi) = E_\psi|\psi)$, então

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(H)(|\psi) \otimes |\varphi) \otimes |\phi)) = E_{\psi,\varphi,\phi}(|\psi) \otimes |\varphi) \otimes |\phi)), \tag{2.5}$$

com $E_{\psi,\varphi,\phi} = E_{\psi,\phi,\varphi} = E_{\varphi,\phi,\psi} = \ldots$ levando, para o caso aditivo, a $E_{\psi,\varphi,\phi} = E_\psi + E_\varphi + E_\phi$.

A diferença entre os operadores H, K e D e suas expressões em termos dos geradores da álgebra de Heisenberg pode ser colocada como uma igualdade fraca $\approx$. Desta forma diremos que dois operadores são fracamente iguais se suas relações de comutação são as mesmas, assim como seu espectro. Dois operadores fracamente iguais diferem apenas como elementos de uma álgebra de Hopf, ou seja, com coprodutos e antípodas distintas. Com isso escrevemos

$$\begin{aligned} 2kH &\approx p_i p_i \\ 2kK &\approx x_i x_i \\ 4kD &\approx x_i p_i + p_i x_i, \end{aligned} \tag{2.6}$$

assim como $k \approx k_V I$, onde denotamos por k_V o valor numérico assumido pela extensão central na representação V. O mesmo se aplica para o momento angular.

2.2 O Coproduto e Geradores Deformados

Como uma primeira deformação iremos utilizar o twist abeliano

$$F = \exp(i\alpha_{ij}\, p_i \otimes p_j), \qquad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji}. \tag{2.7}$$

Este twist é particularmente simples pois não deforma a antípoda,

$$\chi = \mu \circ (id \otimes S)\, F = \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\alpha_{ij} p_i \otimes p_j)^n \right), \tag{2.8}$$

onde utilizamos que $S(p_m p_n) = S(p_m)S(p_n) = S(p_n)S(p_m)$, pois $[p_m, p_n] = 0$. Desta forma cada termo da expansão se torna a contração de um termo simétrico com um anti-simétrico. Com isso temos que $\chi = \chi^{-1} = I$, ou seja,

$S^F = S$.

Desta forma apenas o coproduto é deformado, e a estrutura triangular é dada por

$$R = F_{21} F^{-1} = F^{-2}, \tag{2.9}$$

pois

$$F_{21} = \exp\left(i\alpha_{ij}\, p_j \otimes p_i\right) = \exp\left(-i\alpha_{ij}\, p_i \otimes p_j\right) = F^{-1}. \tag{2.10}$$

Como iremos trabalhar principalmente com os geradores deformados, apenas os coprodutos (1.29) serão calculados. Os geradores deformados são calculados pelas expansão de $\bar{f}^{\alpha}[g]\bar{f}_{\alpha}$, que nesse caso se torna

$$g^F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_n j_n} [p_{i_n}, \ldots [p_{i_1}, g] \ldots] p_{j_1} \ldots p_{j_n}. \tag{2.11}$$

Para x_i, temos

$$x_i^F = x_i - i\alpha_{jk} [p_j, x_i] p_k - \frac{1}{2} \alpha_{jk} \alpha_{mn} [p_j, [p_m, x_i]] p_k p_n + \cdots, \tag{2.12}$$

onde o termo $n = 0$ corresponde simplesmente a multiplicação pela identidade. Como $[p_i, x_j] = -ik\delta_{ij}$, então apenas a correção de primeira ordem é não nula, ou seja, $x_i^F = x_i - \alpha_{ij} p_j k$. Esta transformação é chamada na literatura de Bopp Shift , ou translação de Bopp, usualmente utilizada para mapear uma teoria não comutativa em uma comutativa (o inverso do que temos aqui). Para D, o termo de primeira ordem é dado por

$$-i\alpha_{ij}\,[p_i, D]\,p_j = -i\alpha_{ij}\left(-\frac{i}{2}\right)p_i\,p_j = 0, \tag{2.13}$$

pois $p_i p_j$ é simétrico, enquanto α_{ij} é um tensor anti-simétrico. Temos então que $D^F = D$. Como H e k comutam com p_i, então resta apenas a deformação de K e do momento angular. Para d = 3, temos então

$$\begin{aligned} x_i^F &= x_i - \alpha_{ij} p_j k \\ K^F &= K - \alpha_{ij}\left(x_i p_j + \frac{\alpha_{jk}\alpha_{jl}}{2!} p_k p_l\right) \\ L_i^F &= L_i - \epsilon_{ijk}\alpha_{jl} p_k p_l, \end{aligned} \tag{2.14}$$

enquanto para d = 2 temos $L^F = L - \epsilon_{ij}\alpha_{ik} p_j p_k = L - \alpha(p_x^2 + p_y^2)$, onde usamos que em duas dimensões qualquer tensor de segunda ordem anti-simétrico é proporcional ao simbolo de Levi-Civita, ou seja, $\alpha_{ij} = \alpha\epsilon_{ij}$, além de usarmos também a relação $\epsilon_{ij}\epsilon_{ik} = \delta_{jk}$.

A Hamiltoniana deformada para o oscilador harmônico agora é dada por

$$\mathbf{H}^F = H^F + K^F = H + K - \alpha_{ij}\left(x_i p_j + \frac{\alpha_{jk}\alpha_{jl}}{2!} p_k p_l k\right) \tag{2.15}$$

Utilizando que $R^{-1} = \exp(2\alpha_{ij}\, p_i \otimes p_j)$, podemos calcular os coprodutos deformados, encontrando

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(x_i^{\mathcal{F}}) &= x_i^{\mathcal{F}} \otimes I + I \otimes x_i^{\mathcal{F}} - 2\alpha_{ij} p_j \otimes k \\
\Delta^{\mathcal{F}}(K^{\mathcal{F}}) &= K^{\mathcal{F}} \otimes I + I \otimes K^{\mathcal{F}} + 2\alpha_{ij} p_i \otimes x_j^{\mathcal{F}} + \\
& \quad 2\alpha_{ij}\alpha_{kj} p_i p_k \otimes k \\
\Delta^{\mathcal{F}}(L_i^{\mathcal{F}}) &= L_i^{\mathcal{F}} \otimes I + I \otimes L_i^{\mathcal{F}} + 2 s_{ijk} \alpha_{jl} p_l \otimes p_k .
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

É importante observar que k deve permanecer de um lado do produto tensorial. No caso de elementos proporcionais à identidade isto não é necessário, ou seja, se q for um número e $g \in U(\mathfrak{g})$, temos $g \otimes q = q\, g \otimes I = q\,(g \otimes I)$. Apenas após escolhermos uma representação a extensão central assume valor, e podemos passá-la através do produto tensorial.

É possível calcular os comutadores deformados para estes geradores deformados, obtendo obviamente que as constantes de estrutura são as mesmas. Um aspecto mais interessante é calcular seus comutadores usuais, ou seja considerando os geradores deformados simplesmente como polinômios nos geradores usuais, formando uma álgebra de operadores - este é chamado de formalismo híbrido. Para os operadores de posição deformados, obtemos a conhecida não comutatividade constante,

$$
\left[x_i^{\mathcal{F}}, x_j^{\mathcal{F}} \right] = i\Theta_{ij}, \tag{2.17}
$$

onde $\Theta_{ij} = 2\alpha_{ij} k^2$. Desta forma podemos definir uma mecânica quântica não comutativa utilizando a deformação de álgebras de Hopf, utilizando o twist de Drinfel'd - um importante mecanismo de deformação. Outras relações de comutação modificadas são

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{x}_i, D\right] &= \frac{i}{2}\hat{x}_i + i\alpha_{ik} p_k \\
\left[\hat{x}_i, \hat{K}\right] &= 2i\alpha_{ij}\hat{x}_j k \\
\left[D, \hat{K}\right] &= -i\hat{K} - i\alpha_{ij}\hat{x}_i p_j .
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Para o resto dos comutadores temos as mesmas constantes de estrutura (os comutadores deformados coincidem com os usuais).

2.3 Múltiplas Partículas

Para a construção de estados de múltiplas partículas, nos voltamos agora ao coproduto. Como as relações de comutação descritas acima são consequência de um coproduto deformado, temos que nesta formulação da mecânica quântica não comutativa os estados de múltiplas partículas serão modificados.

Nas referências [51, 52, 53, 54] os autores introduzem uma estatística deformada para o caso da deformação κ-Poincaré, onde eles encontram uma aparente quebra na simetria por troca de partícula, que pode ser vista como consequência de um coproduto deformado - como o que encontramos aqui. Nestas referências, como apontam os autores, a quebra na simetria por troca de partículas é apenas aparente. Isto se deve à necessidade de introduzir um operador de transposição deformado, ou seja, se tomamos a terceira relação em (1.8) como uma definição deste operador, então uma deformação na álgebra de Hopf induz uma deformação no operador de transposição. Então, se definimos $\tau^{F} = R^{-1}\tau R$, temos

$$\tau^{F} \circ \Delta^{F}(g) = R^{-1}\tau \circ \Delta^{F}(g)R = R^{-1}R\Delta^{F}(g)R^{-1}F = \Delta^{F}(g), \tag{2.19}$$

recuperando a simetria por troca de partículas - em um sentido deformado.

Se buscamos uma teoria espectral desta deformação da mecânica quântica, podemos utilizar ainda outra abordagem. A noção de conjugação adjunta em um álgebra de Hopf é tal que $(g \otimes h)^{\dagger} = g^{\dagger} \otimes h^{\dagger}$. Com isso é fácil ver que $F^{\dagger} = F^{-1}$, ou seja, F é um operador unitário no produto tensorial do espaço vetorial consigo mesmo. Desta forma, tendo uma teoria espectral em vista, podemos utilizar o coproduto usual na definição de estados de múltiplas partículas, já que os dois são unitariamente equivalentes. Obviamente isto se deve a escolhermos como subespaço de $U(\mathfrak{g})$ os geradores deformados, onde ainda temos a informação de que se trata de uma álgebra de Hopf deformada. Como vantagem sobre outras abordagens, temos uma simetria explícita na troca de partículas, possível pelo fato de se tratar de um twist unitário (no sentido discutido acima).

Para $d = 3$ podemos fixar um sistema de coordenadas para simplificar o tratamento. Neste caso temos que um tensor α_{ij} anti-simétrico define um vetor (seu dual de Hodge) $\alpha_{ij} = s_{ijk}\alpha_k$. Como este vetor é constante, podemos realizar uma rotação de modo que $\alpha_k = (0, 0, \alpha)$, equivalente a escolher coordenadas de Darboux em uma 2-forma simplética. Em $d = 2$ um tensor anti-simétrico é proporcional ao símbolo de Levi-Civita, ou seja, $\alpha_{ij} = s_{ij}\alpha$, então os dois casos tratados aqui passam a ser descritos em termos de apenas um parâmetro de deformação, mesmo se tratando de diferentes dimensões.

O coproduto da Hamiltoniana deformada do oscilador harmônico, induzindo o estado de duas partículas, fica escrita como

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{H}^F) &= \mathbf{H}^F \otimes I + I \otimes \mathbf{H}^F - \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij}\,(x_i \otimes p_j + p_j \otimes x_i) + \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(2p_i k \otimes p_i + 2p_i \otimes p_i k + p_i^2 \otimes k + k \otimes p_i^2\right), \quad (2.20)\end{aligned}$$

ou ainda, em termos de geradores deformados,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{H}^F) &= \mathbf{H}^F \otimes I + I \otimes \mathbf{H}^F - \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij}\left(x_i^F \otimes p_j + p_j \otimes x_i^F\right) + \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(p_i^2 \otimes k + k \otimes p_i^2\right). \quad (2.21)\end{aligned}$$

Desta forma a não aditividade consequente da deformação se encontra apenas no plano xy.

Podemos também escrever explicitamente o caso de três partículas. Utilizamos a notação

$$\Delta_{(n+1)} = \left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right)\Delta_{(n)}, \quad (2.22)$$

para definir os estados de $(n-1)$ partículas, onde $id^{\otimes k}$ significa que temos k produtos tensoriais de id. A coassociatividade do coproduto (para qualquer álgebra de Hopf) implica que podemos também utilizar como de nição de $\Delta_{(n)}$ qualquer expressão que seja uma permutação de Δ com os mor smos identidade na de nição dada acima. Por exemplo, no caso $n = 2$, podemos utilizar tanto $(\Delta \otimes id)\Delta$ como $(id \otimes \Delta)\Delta$ para $\Delta_{(2)}$, oque é simplesmente a coassociatividade da álgebra de Hopf.

Temos então para três partículas,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(2)}(\mathbf{H}^F) &= \mathbf{H}^F \otimes I \otimes I + I \otimes \mathbf{H}^F \otimes I + I \otimes I \otimes \mathbf{H}^F + \\
&+ \alpha(I \otimes y \otimes p_x + y \otimes I \otimes p_x + y \otimes p_x \otimes I + I \otimes p_x \otimes y + p_x \otimes I \otimes y + p_x \otimes y \otimes I) + \\
&- \alpha(I \otimes x \otimes p_y + x \otimes I \otimes p_y + x \otimes p_y \otimes I + I \otimes p_y \otimes x + p_y \otimes I \otimes x + p_y \otimes x \otimes I) + \\
&+ \alpha^2 \sum_{i=1}^{2} [I \otimes p_i k \otimes p_i + p_i k \otimes p_i \otimes I + p_i k \otimes p_i \otimes I + + I \otimes p_i \otimes p_i k + p_i \otimes p_i k \otimes I + \\
&+ p_i \otimes p_i k \otimes I + k \otimes p_i \otimes p_i + p_i \otimes p_i \otimes k + p_i \otimes p_i \otimes k + \frac{1}{2}(I \otimes k \otimes p_i^2 + k \otimes p_i^2 \otimes I + \\
&+ k \otimes p_i^2 \otimes I + I \otimes p_i^2 \otimes k + p_i^2 \otimes k \otimes I + p_i^2 \otimes k \otimes I)].
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Podemos ver explicitamente a coassociatividade desta expressão (repare, por exemplo, em como a identidade alterna entre suas três possíveis posições).

Até o momento temos uma equivalência unitária apenas para o coproduto - estados de duas partículas - mas é possível provar este resultado também para estados de múltiplas partículas. Em geral, se F é unitário, então qualquer $\Delta^F_{(n)}$ será unitariamente equivalente a $\Delta_{(n)}$. A prova desta a rmativa é por indução.

Seja $\Delta^F_{(n)} = U_n \Delta_{(n)} U_n^{-1}$ para algum operador unitário U_n. Para elevar este a um produto tensorial a mais, temos a definição

$$\Delta^F_{(n+1)} = \left(\Delta^F \otimes id^{\otimes n}\right)\Delta^F_{(n)}, \tag{2.24}$$

consequência direta da definição para o caso não deformado e do twist de Drinfel'd - onde a exigência de F ser um 2-cociclo é essencial. Utilizando que $\Delta^F \otimes id \otimes id \otimes ... = F_{12}(\Delta \otimes id \otimes ...)F^{-1}_{12}$, temos

$$\Delta^F_{(n+1)} = F_{12}\left(\left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right)\Delta^F_{(n)}\right)F^{-1}_{12} \tag{2.25}$$

Como supomos $\Delta^F_{(n)} = U_n\Delta_{(n)}U_n^{-1}$, então

$$\Delta^F_{(n+1)} = U_{n+1}\left(\left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right)\Delta_{(n)}\right)U^{-1}_{n+1} = U_{n+1}\Delta_{(n+1)}U^{-1}_{n+1} \tag{2.26}$$

onde

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= F_{12}\ ((\Delta \otimes id^{\otimes n})\ U_n) \\ U^{-1}_{n+1} &= ((\Delta \otimes id^{\otimes n})\ U^{-1}_n)\ F^{-1}_{12}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Nos resta mostrar que U_{n+1} é de fato unitário, e que a expressão dada acima para U^{-1}_{n+1} realmente define seu inverso. Para ver que estes dois são realmente inversos, basta que U_n tenha uma expansão formal

$$U_n = \sum_k \frac{i^k}{k!} u_1^k \otimes \ldots \otimes u_{n+1}^k$$

$$U_n^{-1} = \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} u_1^k \otimes \ldots \otimes u_{n+1}^k \tag{2.28}$$

com $u_m^\dagger = u_m$, se tornando fácil ver que

$$\left(\left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right) U_n\right)\left(\left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right) U_n^{-1}\right) = \left(\left(\Delta \otimes id^{\otimes n}\right)\left(U_n U_n^{-1}\right)\right), \tag{2.29}$$

pois $\Delta(u_1^k)\Delta(u_1^m) = \Delta(u_1^k u_1^m)$. Resta provar que $U_{n+1}^\dagger = U_{n+1}^{-1}$.

Se u_1 não for primitivo, mas um monômio $u_1 = v_1 v_2 \ldots v_k$ de elementos primitivos (para algum k xo) tal que

$$\Delta(v_i)^\dagger = (v_i \otimes I + I \otimes v_i)^\dagger = v_i^\dagger \otimes I + I \otimes v_i^\dagger = \Delta(v_i^\dagger) \qquad i = 1,\ldots,k, \tag{2.30}$$

então

$$\Delta(u_1)^\dagger = \Delta(v_k)^\dagger \ldots \Delta(v_1)^\dagger = \Delta(v_k^\dagger \ldots v_1^\dagger) = \Delta(u_1^\dagger), \tag{2.31}$$

ou seja, se u_1 é hermitiano $\Delta(u_1)^\dagger = \Delta(u_1)$. Desta forma

$$\left(\Delta \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\right) U_n^{\dagger} = \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} \Delta(u_1^k) \otimes \ldots \otimes u_{n+1}^k =$$

$$= \left(\Delta \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\right) U_n^{-1}. \tag{2.32}$$

Se u_1 não for primitivo o resultado se estende trivialmente pela linearidade do coproduto.

Como $F_{12}^{\dagger} = F_{12}^{-1}$, chegamos ao nal da prova, ou seja, basta uma equivalência unitária para qualquer n que todas as outras estão garantidas. No caso particular em que $F = U_1$ é unitário, temos a equivalência para qualquer estado de multiplas partículas.

Em particular, para o caso abeliano, é trivial veri car que esta equivalência é dada por

$$U_n = \exp\left(i\alpha_{ij}(p_i \otimes I^{\otimes n-1} \otimes p_j + I \otimes p_i \otimes I^{\otimes n-2} \otimes p_j + \ldots)\right), \tag{2.33}$$

ou seja, pela exponencial da soma de todas as permutações de p_i, p_j e $n-1$ identidades I.

Esta equivalência permite um tratamento do problema de múltiplas partículas sem a necessidade de introduzir uma simetria deformada de troca, a diferença para um caso sem deformação estrá apenas na não aditividade. Podemos ver que apesar de inicialmente o operador Hamiltoniano induzir uma energia para o estado de duas partículas

$$E_{12} = E_1 + E_2, \tag{2.34}$$

após a deformação temos

$$E^F_{12} = E^F_1 + E^F_2 + \Omega_{12}. \tag{2.35}$$

Esta não aditividade está atrelada à não comutatividade não sendo possível separar os dois. Podemos esperar então que a diferença entre considerar que um sistema está colocado em um potencial externo - induzindo uma não comutatividade efetiva - ou deformado pode ser investigado em efeitos coletivos onde a não aditividade da energia terá um papel relevante. Dito de outra forma, uma deformação da mecânica quântica é diferenciada de um problema com interação a partir de estados de múltiplas partículas.

Apesar desta não aditividade temos ainda a associatividade para estados de múltiplas partículas, consequência da coassociatividade do coproduto, ou seja

$$E^F_{(12)3} = E^F_{1(23)} = E^F_1 + E^F_2 + E^F_3 + \Omega_{12} + \Omega_{23} + \Omega_{13} + \Omega_{123}, \tag{2.36}$$

onde Ω_{123} é dado em termos dos Ω_{ij}'s.

2.4 Espectro e Simetria Rotacional em d=2

Passamos agora a buscar a representação desta mecânica quântica não comutativa em um espaço de Hilbert H, para o caso de duas dimensões $d = 2$. Para isso, consideramos agora que estamos em um módulo tal que a extensão central seja $k_H = 1$. Também podemos considerar a deformação em termos de uma quantidade adimensional α, de nindo $\alpha_{ij} = s_{ij}(\alpha/Z)$, para uma constante de referência Z, e escolhendo um sistema de de unidades onde $Z = 1$. Desta forma escrevemos apenas

$$\alpha_{ij} = s_{ij}\alpha, \tag{2.37}$$

$\alpha \in [0,+\infty]$, sem perdas de generalidade, $\alpha \in [-\infty,0]$ correspondendo apenas a uma rotação $x \mapsto y$, $y \mapsto -x$.

Para encontrar o espectro da Hamiltoniana deformada, consideramos agora a base simultânea de $\mathbf{H}$ e L. Primeiro realizamos a transformação usual

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_i - ip_i}{2} \\ a_i^\dagger &= \frac{a_i + ip_i}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

de forma que

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \tag{2.39}$$

para $i, j = 1, 2$. Esta transformação nos permite encontrar o espectro da Hamiltoniana usual, utilizando as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}, a_i] &= -a_i \\ [\mathbf{H}, a_i^\dagger] &= a_i^\dagger. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Nesta base, para $n_x, n_y \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{H}|n_x, n_y) = (n_x + n_y + 1)|n_x, n_y) \tag{2.41}$$

Para diagonalizar simultaneamente L, devemos passar para os operadores

$$\begin{aligned} b_{\pm} &= \frac{a_x \mp i a_y}{\sqrt{2}} \\ b_{\pm}^{\dagger} &= \frac{a_x^{\dagger} \pm i a_y^{\dagger}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

com

$$[b_{\pm}, b_{\pm}^{\dagger}] = I. \tag{2.43}$$

Estes ainda são operadores de criação e aniquilação para a Hamiltoniana,

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}, b_{\pm}] &= -b_{\pm} \\ [\mathbf{H}, b_{\pm}^{\dagger}] &= b_{\pm}^{\dagger}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

mas servindo também para o momento angular, pois

$$\begin{aligned} [L, b_{\pm}] &= \mp b_{\pm} \\ [L, b_{\pm}^{\dagger}] &= \pm b_{\pm}^{\dagger}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

ou seja, os operadores $b_-, b_-^{\dagger}$ tem suas funções trocadas em relação a Hamiltoniana, por exemplo $b_-^{\dagger}$ aumenta o autovalor de $\mathbf{H}$ em uma unidade, mas diminui o autovalor de L. Nesta base, para $n_+, n_- \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}|n_+, n_-) &= (n_+ + n_- + 1)|n_+, n_-) \\
L|n_+, n_-) &= (n_+ - n_-)|n_+, n_-),
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

ou ainda, se $n = n_+ + n_-$ e $m = n_+ - n_-$, então

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}|n, m) &= (n + 1)|n, m) \\
L|n, m) &= m|n, m).
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

A Hamiltoniana deformada em $d = 2$ é dada por

$$
\mathbf{H}^F = H + K - \alpha x p_y + \alpha y p_x + \frac{\alpha^2}{2} p_i p_i \approx \left(1 + \alpha^2\right) H + K - \alpha L, \tag{2.48}
$$

onde utilizamos a igualdade fraca para denotar que esta é válida apenas quando não consideramos os morfismos da álgebra de Hopf. Primeiro consideramos o operador

$$
\tilde{\mathbf{H}} = \left(1 + \alpha^2\right) H + K. \tag{2.49}
$$

É fácil ver que este será diagonalizado pela mesma base autovetores de **H**, e seu espectro terá apenas uma renormalização em sua frequência. Para isso considere o espectro de

$$
\frac{\tilde{\mathbf{H}}}{(1 + \alpha^2)} = H + \frac{K}{(1 + \alpha^2)} \approx \frac{p_i p_i}{2} + \frac{x_i x_i}{2\,(1 + \alpha^2)}. \tag{2.50}
$$

Desta forma temos um oscilador harmônico com massa unitária e frequência $\omega = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$, e é trivial verificar que

$$\tilde{\mathbf{H}}|n,m) = \sqrt{1+\alpha^2}(n+1)|n,m). \tag{2.51}$$

Ou seja, a Hamiltoniana $\tilde{\mathbf{H}}$ é equivalente a um oscilador com frequência $\tilde{\omega} = \sqrt{1+\alpha^2}$. Com este resultado podemos facilmente escrever o espectro da Hamiltoniana deformada, obtendo

$$\mathbf{H}^F|n,m) = \left[\sqrt{1+\alpha^2}(n+1) - \alpha m\right]|n,m), \tag{2.52}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $m = -n, -n+2, \cdots, n-2, n$.

A energia do vácuo é $\sqrt{1+\alpha^2}$, e os primeiros estados serão dados por

$$\begin{aligned}
|1,1) &: 2\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha \\
|1,-1) &: 2\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha \\
|2,2) &: 3\sqrt{1+\alpha^2} - 2\alpha \\
|2,0) &: 3\sqrt{1+\alpha^2} \\
|2,-2) &: 3\sqrt{1+\alpha^2} + 2\alpha
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Com o momento angular adicionado à álgebra, podemos considerar o que acontece com a invariância $so(2)$ do oscilador harmônico. Lembrando que

$$L^F = L - \alpha(p_x^2 + p_y^2), \tag{2.54}$$

podemos facilmente veri car que

$$[L^F, x_i^F] = i(s_{ij} x_j^F + 2\alpha p_i k), \tag{2.55}$$

ou seja, o operador L^F não é mais um gerador de rotações para este sistema (não comutando com a Hamiltoniana deformada). A simetria rotacional da Hamiltoniana deformada pode ser encontrada analisando sua expressão em termos dos antigos geradores, onde é fácil perceber que o momento angular não deformado será ainda uma simetria. De fato,

$$[L, x_i^F] = i s_{ij} x_j^F, \tag{2.56}$$

e também

$$[L, \mathbf{H}^F] = 0. \tag{2.57}$$

Desta forma podemos a rmar que a invariância rotacional é preservada, mas o operador que realiza esta simetria não é o gerador deformado. Também temos invariância em estados de múltiplas partículas, já que

$$[\Delta(\mathbf{H}), \Delta(L)] = 0. \tag{2.58}$$

Esta última relação pode ser calculada explicitamente, ou podemos simplesmente utilizar a propriedade que Δ é um homomor smo de álgebras.

2.5 Espectro e Simetria Rotacional em d=3

Para a representação no caso de $d = 3$, o procedimento é similar. Primeiro, xamos a extensão central em $k_H = 1$. A mesma consideração sobre a dimensionalidade do parâmetro de deformação pode ser feita, lembrando que agora o símbolo de Levi-Civita de ne um vetor como dual,

$$\alpha_{ij} = s_{ijk}\alpha_k. \tag{2.59}$$

Como já foi mencionado anteriormente, podemos sempre escolher um sistema de coordenadas tal que α_k esteja na direção do eixo z, $\alpha_k = (0, 0, \alpha)$, pois α_{ij} é constante. Da mesma forma que o caso anterior também podemos escolher $\alpha \in [0,+\infty]$.

Para diagonalização podemos realizar as mesmas transformações para operadores de criação e aniquilação, agora com dois operadores extras na direção z,

$$\begin{aligned} b_\pm &= \frac{a_x \mp i a_y}{2} \\ b_\pm^\dagger &= \frac{a_x^\dagger \pm i a_y^\dagger}{2} \\ b_z = a_z \; b_z^\dagger &= a_z^\dagger. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Obviamente estes operadores satisfazem as relações

$$
\begin{aligned}
[b_i, b_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\
[\mathbf{H}, b_i] &= -b_i \qquad (2.61)\\
[\mathbf{H}, b_i^\dagger] &= b_i^\dagger,
\end{aligned}
$$

com $i,j = +,-,z$. Para o momento angular temos novamente que os papéis de b_- e $b^\dagger_-$ estão trocados,

$$
\begin{aligned}
[L_z, b_\pm] &= \mp b_\pm \\
[L_z, b_\pm^\dagger] &= \pm b^\dagger_\pm, \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

enquanto que para b_z temos apenas que $[L_z, b_z] = [L_z, b_z^\dagger] = 0$.

Com estes operadores podemos definir a base $|n_+, n_-, n_z\rangle$, com $n_\pm, n_z \in \mathbb{N}$, de forma que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}|n_+, n_-, n_z\rangle &= \left(n_+ + n_- + n_z + \frac{3}{2}\right)|n_+, n_-, n_z\rangle \\
L_z|n_+, n_-, n_z\rangle &= (n_+ - n_-)\,|n_+, n_-, n_z\rangle. \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

Repare que o espectro de L_z não será o mesmo que o de L, já que a presença de n_z irá mudar a degenerescência de cada auto valor.

Podemos também definir $n_{xy} = n_+ + n_- \in \mathbb{N}$ e $m = n_+ - n_-$, com

$m = -n_{xy}, -n_{xy} + 2, \cdots, n_{xy} - 2, n_{xy}$, de forma que

$$\mathbf{H}|n_{xy}, n_z, m) = \left(n_{xy} + n_z + \frac{3}{2}\right)|n_{xy}, n_z, m)$$

$$L_z|n_{xy}, n_z, m) = m|n_{xy}, n_z, m). \tag{2.64}$$

Utilizando o sistema de coordenadas onde α_k esta no eixo z, a Hamiltoniana deformada toma a mesma forma que no caso $d = 2$,

$$\mathbf{H}^F = H + K - \alpha x p_y + \alpha y p_x + \frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{2} p_i p_i, \tag{2.65}$$

mas agora $H \approx p_i p_i/2$ e $K \approx x_i x_i/2$ são operadores em $d = 3$. Repare que a parte deformada da Hamiltoniana não contém termos em z, se mantendo exatamente a mesma expressão encontrada em $d = 2$.

Para sua aplicação no módulo H, podemos realizar a separação

$$\mathbf{H}^F \approx \tilde{\mathbf{H}}_{xy} - \alpha L_z + \mathbf{H}_z, \tag{2.66}$$

onde $\tilde{\mathbf{H}}_{xy} = \mathbf{H}_{xy} + (\alpha^2/2)(p_x^2 + p_y^2)$, e

$$\mathbf{H}_{xy} = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right)$$

$$\mathbf{H}_z = \frac{1}{2}\left(p_z^2 + z^2\right). \tag{2.67}$$

Com esta base é trivial ver que $\tilde{\mathbf{H}}_{xy}$ terá exatamente o mesmo espectro que o operador $\tilde{\mathbf{H}}$ de nido para $d = 2$, ou seja

$$\tilde{\mathbf{H}}_{xy}|n_{xy}, n_z, m) = \sqrt{1 + \alpha^2}(n_{xy} + 1)|n_{xy}, n_z, m), \tag{2.68}$$

nos levando ao espectro da Hamiltoniana deformada

$$\mathbf{H}^F|n_{xy},n_z,m) = \left[\sqrt{1+\alpha^2}(n_{xy}+1) - \alpha m + (n_z + \frac{1}{2})\right]|n_{xy},n_z,m). \tag{2.69}$$

A energia do vácuo para esta Hamiltoniana é $\frac{1}{2} + \sqrt{1+\alpha^2}$, e seus primeiros níveis de energias são dados abaixo. Para $n = n_{xy} + n_z = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|0,1,0) &: \frac{3}{2} + \sqrt{1+\alpha^2} \\
|1,0,-1) &: \frac{1}{2} + 2\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha \\
|1,0,1) &: \frac{1}{2} + 2\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Para $n = n_{xy} + n_z = 2$, temos

$$\begin{aligned}
|0,2,0) &: \frac{5}{2} + \sqrt{1+\alpha^2} \\
|1,1,-1) &: \frac{3}{2} + 2\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha \\
|1,1,1) &: \frac{3}{2} + 2\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha \\
|2,0,-2) &: \frac{1}{2} + 3\sqrt{1+\alpha^2} + 2\alpha \\
|2,0,0) &: \frac{1}{2} + 3\sqrt{1+\alpha^2} \\
|2,0,2) &: \frac{1}{2} + 3\sqrt{1+\alpha^2} - 2\alpha.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Podemos reparar que todos os estados com $n_z = 0$ coincidem, exceto por uma constante aditiva de $\frac{1}{2}$ (a energia de ponto-zero em z), com as energias para d = 2. É óbvio perceber também que a deformação se dá completamente no plano xy (devido à escolha de coordenadas).

Diferentemente do caso anterior, agora a simetria rotacional é perdida. Os geradores da simetria so(3) adicionados à álgebra são deformados de acordo com

$$L_i^F = L_i + \alpha p_i p_z - \alpha_i p_j p_j, \tag{2.72}$$

ou seja, $L_z^F = L_z - \alpha(p_x^2 + p_y^2)$, a mesma expressão para a deformação de L, enquanto

$$\begin{aligned} L_x^F &= L_x + \alpha p_x p_z \\ L_y^F &= L_y + \alpha p_y p_z. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Estes não nos levam a uma simetria rotacional, pois

$$[L_i^F, x_j^F] = i s_{ijk} x_k^F - 2ik(\delta_{ij} \alpha p_z - \alpha_i p_j). \tag{2.74}$$

Repare que para i = 3, temos

$$[L_z^F, x_j^F] = i s_{3jk} x_k^F - 2ik(\delta_{3j} \alpha p_z - \alpha p_j), \tag{2.75}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [L_z^F, x^F] &= i y^F + 2ik\alpha p_x \\ [L_z^F, y^F] &= -i x^F + 2ik\alpha p_y \\ [L_z^F, z^F] &= -2ik(\alpha p_z - \alpha p_z) = 0 \end{aligned} \tag{2.76}$$

No entanto, podemos veri car se os operadores não deformados L_i nos levam ainda a uma simetria rotacional, mas

$$[L_i, x_j^F] = is_{ijk}x_k^F - ik(\delta_{ij}\alpha p_z - p_i\alpha_j) \tag{2.77}$$

de forma que não temos mais a simetria so(3) mesmo se utilizamos os geradores não deformados. Neste caso temos, para i = 3,

$$[L_z, x_j^F] = is_{3jk}x_k^F - ik(\delta_{3j}\alpha p_z - \alpha_j p_z), \tag{2.78}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [L_z^F, x^F] &= iy^F \\ [L_z^F, y^F] &= -ix^F \\ [L_z^F, z^F] &= -ik(\alpha p_z - \alpha p_z) = 0, \end{aligned} \tag{2.79}$$

de forma que L_z ainda nos leva a uma álgebra de rotação. Ainda é fácil ver pela expressão explícita da Hamiltoniana em termos dos operadores não deformados que $[\mathbf{H}^F, L_z] = 0$, ou seja, a simetria em L_z é mantida pela deformação, enquanto L_x e L_y se perdem. Desta forma podemos dizer que a simetria so(3) foi quebrada a uma simetria so(2).

Novamente temos que o mesmo é verdade para estados de múltiplas partículas, pois

$$[\Delta(\mathbf{H}^F), \Delta(L_z)] = 0, \tag{2.80}$$

como é fácil de veri car.

Capítulo 3

Caso Não Abeliano

Neste capítulo deformaremos a mesma álgebra de nida no capítulo anterior, mas utilizando um twist não abeliano. Os cálculos neste caso são mais complicados, mas a maioria dos conceitos necessários são os mesmos já desenvolvidos para o caso abeliano, com uma diferença, que tornará necessária a introdução de um produto interno deformado.

3.1 Geradores deformados

Existem apenas duas deformações não equivalentes da álgebra sl_2. A primeira, conhecida como $U_q(sl_2)$ depende de um parâmetro adimensional q e não pode ser obtida pela técnica do twist de Drinfel'd. A segunda, que será utilizada aqui, é chamada de deformação Jordaniana, e pode ser obtida pelo twist

$$\mathcal{F} = \exp(-iD \otimes \sigma), \tag{3.1}$$

onde $\sigma = \ln(I + \xi H)$, e $\xi \in R_+$. Devemos excluir a possibilidade $\xi \in R_-$ de forma a evitar que o operador $I + \xi H$ tenha autovalores nulos, tornando σ bem de nido em todo espaço de Hilbert H.

Para os geradores deformados, começamos com x_i^F, onde

$$x_i^F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [D, \cdots [D, x_i] \cdots] \sigma^n. \tag{3.2}$$

Utilizando $[D, x_i] = -(i/2)x_i$, temos

$$x_i^F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(-\frac{i}{2}\right)^n \sigma^n = x_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma/2)^n}{n!}, \tag{3.3}$$

ou seja,

$$x_i^F = x_i e^{\sigma/2}. \tag{3.4}$$

Para os outros geradores o cálculo é similar, resultando em

$$\begin{aligned} p_i^F &= p_i e^{-\sigma/2} \\ H^F &= H e^{-\sigma} \\ K^F &= K e^{\sigma}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

além de $D^F = D$, obviamente.

Para encontrar os comutadores, devemos calcular antes as seguinte expressões

$$
\begin{aligned}
[\sigma, x_i] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}[(\xi H)^n, x_i] = \sum_{n=1}^{\infty} (-\xi H)^{(n-1)} \xi [H, x_i] = \\
&= -i\xi p_i \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi H)^n = -i\xi p_i (I + \xi H)^{-1} = -i\xi p_i e^{-\sigma}, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

além de

$$
\begin{aligned}
&[\sigma, p_i] = [\sigma, H] = 0 \\
&[\sigma, D] = -i\xi H e^{-\sigma} = -i\xi H^F. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Para $[\sigma, K]$ é um pouco mais complicado[1]. Primeiramente temos

$$
\begin{aligned}
[H^n, K] &= 2i \sum_{k=0}^{n-1} H^{n-k-1} D H^k = \\
&= 2iDH^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2i \sum_{k=0}^{n-1} [H^{n-k-1}, D] H^k, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

onde o primeiro termo na segunda linha corresponde ao resultado obtido caso obtivéssemos $[H, [H, K]] = 0$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
[H^n, K] &= 2inDH^{n-1} + 2i \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1) H^{n-k-2} [H, D] H^k = \\
&= 2inDH^{n-1} + n(n-1)H^{n-1}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

[1]Em todos os casos acima utilizamos a regra da derivada, válida nesses casos pois $[H, [H, x_i]] = 0$ e $[H, [H, D]] = 0$.

Com este resultado podemos encontrar a expressão desejada,

$$[\sigma,K] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\xi^n}{n}\left(2inDH^{n-1} + n(n-1)H^{n-1}\right) =$$

$$= 2i\xi D\sum_{n=1}^{\infty}(-\xi H)^{n-1} + \xi\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(\xi H)^{n-1} = \tag{3.10}$$

$$= 2i\xi D(I+\xi H)^{-1} - \xi^2 H(I+\xi H)^{-2}, \tag{3.11}$$

ou seja,

$$[\sigma,K] = 2i\xi De^{\sigma} - \xi^2 He^{-2\sigma}. \tag{3.12}$$

Com estes resultados, podemos calcular

$$[e^{\sigma/2},x_i] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sigma^n,x_i]}{n!2^n} = -\frac{i\xi}{2}p_i e^{-\sigma/2}, \tag{3.13}$$

donde

$$(I+\xi H)^{\dagger}[x^F_i,x^F_j] = -\frac{i\xi}{2}(x_i p_j - x_j p_i) =$$

$$= -\frac{i\xi}{2}(x^F_i p^F_j - x^F_j p^F_i). \tag{3.14}$$

Desta forma podemos ver que a não comutatividade obtida para a deformação Jordaniana é não constante, similar à de nida por Snyder (é exatamente a parte espacial dos comutadores de nidos por Snyder). Diferentemente do caso abeliano, também temos novas relações de comutação entre os operadores de posição e de momenta, que podemos calcular de maneira similar à utilizada acima ou como consistência imposta pela identidade de Jacobi, resultando em

$$[x_i^F, p_j^F] = ik\delta_{ij} + \frac{i\xi}{2} p_i^F p_j^F. \tag{3.15}$$

Os outros comutadores são

$$\begin{aligned}
[x_i^F, D] &= \frac{i}{2}(x_i^F - \xi x_i^F H^F) \\
[x_i^F, H^F] &= ip_i^F(I - \xi H^F) \\
[x_i^F, K^F] &= i\xi(K^F p_i^F + Dx_i^F) - \frac{\xi}{2}\left(I + \frac{\xi}{2} H^F\right) \\
[p_i^F, D] &= -ip_i^F\left(I - \frac{\xi}{2} H^F\right) \\
[p_i^F, K^F] &= -i(x_i^F + \xi p_i^F D) + \frac{\xi^2}{4} p_i^F H^F \\
[D, H^F] &= iH^F(I - \xi H^F) \\
[D, K^F] &= -iK^F(I - \xi H^F) \\
[K^F, H^F] &= 2iD(I + \xi H^F) + 2\xi H - 2(\xi H^F)^2 \\
[p_i^F, p_j^F] &= [p_i^F, H^F] = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Destes, apenas $[x_i^F, K^F]$ não é trivial. Para encontrar o resultado deste comutador o cálculo é similar ao utilizado para $[\sigma, K]$. Primeiramente encontramos que

$$\begin{aligned}
[e^{\sigma/2}, K] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}[\sigma^n, K] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{n!2^n} \sigma^{n-l-1}[\sigma, K]\sigma^l \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{n!2^n} \left(2i\xi\sigma^{n-l-1} D\sigma^l e^{-\sigma} - \xi^2\sigma^{n-1} H e^{-2\sigma}\right),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

como $[\sigma^{n-l-1}, D] = (n-l-1)[\sigma, D]\sigma^{n-l-2}$, temos que

$$[e^{\sigma/2}, K] = \left(i\xi D - \frac{\xi^2}{4} H\right) e^{-\sigma/2} \,. \tag{3.18}$$

Com este resultado e outros já obtidos verifica-se que o resultado de $[x_i^{\mathcal{F}}, K^{\mathcal{F}}]$ é o colocado acima.

Neste caso fica trivial verificar que a Hamiltoniana deformada mantém a simetria por rotações. Como o momento angular comuta com cada elemento da subálgebra sl_2, ele não será deformado, e continuará comutando com cada um destes operadores individualmente (já que ele irá comutar com σ).

3.2 Estados de Múltiplas Partículas

Assim como no twist abeliano, teremos no caso Jordaniano uma equivalência unitária entre o coproduto usual e o deformado, já que $D^\dagger = D$ e $\sigma^\dagger = \ln(\mathbb{I} + \xi H)^\dagger = \ln(\mathbb{I} + \xi H)$ (para $\xi \in \mathbb{R}$) nos levam a

$$\mathcal{F}^\dagger = \left(e^{-iD\otimes\sigma}\right)^\dagger = e^{iD\otimes\sigma} = \mathcal{F}^{-1}. \tag{3.19}$$

Para este caso também podemos mostrar que o operador unitário para estados de múltiplas partículas se escreve como

$$U_n = \prod_{j=2}^{n+1}\left(\prod_{i<j} \mathcal{F}_{ij}\right), \tag{3.20}$$

Para demonstrar esta expressão, procedemos por indução. Seja algum U_n dado pela expressão acima, com f^1 na expansão de $\mathcal{F}$ primitivo (como é no caso tanto do twist abeliano como no não-abeliano que utilizamos), então temos que (lembrando de 2.27)

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= F_{12}(\Delta\otimes id^{\otimes n})\left[\prod_{j=2}^{n+1}\prod_{i<j} F_{ij}\right] \\
&= F_{12}\prod_{j=2}^{n+1}\prod_{i<j}(\Delta\otimes id^{\otimes n})F_{ij}, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

onde utilizamos que o coproduto é um homomorfismo. Como Δ atua apenas no primeiro elemento do produto tensorial, temos

$$
U_{n+1} = F_{12}\prod_{j=2}^{n+1}\left[(\Delta\otimes id^{\otimes n})F_{1j}\right]\prod_{1\neq i<j}\left[(\Delta\otimes id^{\otimes n})F_{ij}\right]. \qquad (3.22)
$$

O twist F sendo dado por uma exponencial, temos

$$
\left[(\Delta\otimes id^{\otimes n})F_{1j}\right] = F_{1(j+1)}F_{2(j+1)}, \qquad (3.23)
$$

pois estamos supondo que f^1 é primitivo, e também usamos que

$$
\begin{aligned}
[f^1\otimes I\otimes f^2, I\otimes f^1\otimes f^2] &= f^1\otimes[I\otimes f^2, f^1\otimes f^2] = \\
&= f^1\otimes f^1\otimes[f^2,f^2] = 0 \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Para o caso onde $i\neq 1$, o coproduto atuará na identidade, ou seja,

$$
\prod_{1\neq i<j}\left[(\Delta\otimes id^{\otimes n})F_{ij}\right] = \prod_{1<i<j} F_{(i+1)(j+1)}, \qquad (3.25)
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= F_{12}\prod_{j=2}^{n+1} F_{1(j+1)}F_{2(j+1)}\prod_{1<i<j} F_{(i+1)(j+1)}\\
&= F_{12}\prod_{j=3}^{n+2} F_{1j}F_{2j}\prod_{2<i<j} F_{ij} = \prod_{j=2}^{n+2}\prod_{i<j} F_{ij}.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

É trivial verificar que a expressão vale para $U_1 = F = F_{12}$, finalizando a prova.

Desta forma temos também uma expressão geral para o operador que nos dá a equivalência entre qualquer estado de múltiplas partículas, no caso de um twist do tipo usado aqui (exponencial do produto tensorial de um elemento primitivo com outro qualquer).

Para o caso de duas partículas temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{H}^F) &= Ke^{\sigma}\otimes e^{\sigma} + e^{\sigma}\otimes Ke^{\sigma} - \xi^2(KH\otimes H + H\otimes KH)+\\
&+\sum_{n=1}\sum_{k=0}(-\xi)^{n-1}\binom{n}{k} H^k\otimes H^{n-k},
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

onde a simetria por troca de partículas está garantida pela simetria dos binômios de Newton (lembrando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

Para o caso de três partículas temos

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(2)}(\mathbf{H}^F) &= (K\otimes I\otimes I + I\otimes K\otimes I + I\otimes I\otimes K)[e^{\sigma}\otimes e^{\sigma}\otimes e^{\sigma}+\\
&- \xi^2(H\otimes H\otimes I + H\otimes I\otimes H + I\otimes H\otimes H) - \xi^4(H\otimes H\otimes H)]+\\
&+\sum_{n=0}\sum_{k=0}\sum_{l=0}^{k}(-\xi)^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{l} H^l\otimes H^{k-l}\otimes H^{n-k},
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

onde podemos ver explicitamente a simetria por troca de partículas devido a coassociatividade.

3.3 Pseudo-Hermiticidade

Utilizando as expressões (3.4) e (3.5) para os geradores deformados em termos dos usuais, podemos ver que a Hamiltoniana (assim como o operador de posição) não será mais hermitiana, pois

$$K^{F\dagger} = (Ke^{\sigma})^{\dagger} = e^{\sigma}K = K^{F} + 2i\xi D. \tag{3.29}$$

Desta forma não podemos garantir um espectro real. Poderíamos de nir a Hamiltoniana

$$H^{F} + K^{F} + i\xi D, \tag{3.30}$$

que é hermitiana, mas existe uma Hamiltoniana equivalente mais apropriada. Primeiramente percebemos que

$$K^{F\,\dagger} = e^{\sigma}K = e^{\sigma}K^{F}e^{-\sigma}, \tag{3.31}$$

ou seja, K^{F} não é um operador hermitiano, mas sua conjugação resulta em uma transformação de similaridade.

Operadores como este são chamados de pseudo-hermitianos, ou ainda, com algumas condições extras, de η-pseudo-hermitiano. Este último caso se dá quando o operador de conjugação η é linear e positivo-de nido (e inver-tível), como é o caso aqui. Um operador como este age de forma análoga a uma métrica, onde a positividade do operador garante que produtos internos ainda serão positivos.

Como $H^{F\dagger} = H^F$, então ca óbvio que

$$\mathbf{H}^{F\dagger} = \eta \mathbf{H}^F \eta^{-1}, \tag{3.32}$$

com $\eta = e^{\sigma} = I + \xi H$.

Neste caso, existe um espaço de Hilbert $\tilde{H}$, com um produto interno $((\cdot, \cdot))$ onde esta Hamiltoniana será auto-adjunta. Este produto interno pode ser de nido em termos do produto usual de H, da seguinte forma

$$((\psi,\varphi)) = (\psi,\eta\varphi). \tag{3.33}$$

Os dois espaços H e $\tilde{H}$ são iguais como espaços vetoriais, mas não como espaços de Hilbert, já que seus produtos internos são diferentes (a de nição de um espaço de Hilbert é a de um espaço vetorial com um produto interno).

É trivial veri car que, com este produto interno, a Hamiltoniana será auto-adjunta,

$$\begin{aligned} ((\psi, \mathbf{H}^F\varphi)) &= (\psi, e^{\sigma}\mathbf{H}^F\varphi) = \\ &= (e^{\sigma}\, \mathbf{H}^F e^{-\sigma} e^{\sigma}\psi, \varphi) = \\ &= (\mathbf{H}^F\psi, e^{\sigma}\varphi) = \\ &= ((\mathbf{H}^F\psi, \varphi)), \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde usamos que $(\psi, O\varphi) = (O^{\dagger}\psi, \varphi)$.

A seguir mostramos que esta Hamiltoniana ainda terá autovalores reais. Para isso, de nimos a raiz quadrada formal ρ, $\rho^2 = \eta$. Este operador é hermitiano, se o consideramos um endomor smo de H, ou seja, $\rho : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$. Mas se o consideramos como uma transformação entre os diferentes espaços de Hilbert, $\rho : \tilde{\mathsf{H}} \to \mathsf{H}$, então ele será unitário, garantindo que os autovalores da Hamiltoniana sejam reais.

Para compreender como ρ pode ser considerado uma transformação unitária, lembramos da de nição de uma conjugação adjunta T entre dois espaços vetoriais $T : V \to W$. Sua conjugação será uma transformação $T^{\ddagger} : W^* \to V^*$, onde V^* e W^* são os respectivos espaços duais. Com estes, podemos de nir produtos internos em V e W, e a conjugação de T é dada por

$$(w, Tv)_W = (T^{\ddagger} w, v)_V. \tag{3.35}$$

Para o caso considerado aqui, considere $|\varphi) \in \mathsf{H}$ e $|\tilde{\psi}) \in \tilde{\mathsf{H}}$, então

$$((\tilde{\psi}, \rho^{-1}\varphi)) = ((\rho^{-1})^{\ddagger}\tilde{\psi}, \varphi), \tag{3.36}$$

por de nição. Mas, manipulando a de nição do produto interno deformado, temos

$$\begin{aligned} ((\tilde{\psi}, \rho^{-1}\varphi)) &= (\tilde{\psi}, \rho^{-1}\rho^2\varphi) = \\ &= (\rho\tilde{\psi}, \varphi), \end{aligned} \tag{3.37}$$

ou seja, $(\rho^{-1})^{\ddagger} = \rho$ é uma transformação unitária entre $\tilde{\mathsf{H}}$ e H. Repare que $|\tilde{\psi})$ também pode ser considerado um vetor em H.

Sendo uma transformação unitária, podemos utilizar ρ para levar operadores de um espaço de Hilbert em outro. A Hamiltoniana $\mathbf{H}^F$ é auto-adjunta como operador de $\tilde{\mathcal{H}}$. Desta forma podemos definir uma Hamiltoniana equivalente no espaço de Hilbert usual, através de

$$\mathbf{H}^F \mapsto \mathbf{H}^F_\rho = \rho \mathbf{H}^F \rho^{-1}. \tag{3.38}$$

Esta Hamiltoniana equivalente será explicitamente hermitiana, sendo dada por

$$\mathbf{H}^F_\rho = (1 - \frac{\xi^2}{4})\mathbf{H}^F + K^F + i\xi D. \tag{3.39}$$

Repare que apenas o termo $i\xi D$ seria necessário para tornar a Hamiltoniana hermitiana, mas com esta abordagem podemos garantir que $\mathbf{H}^F_\rho$ tem o significado físico apropriado, ou seja, $\mathbf{H}^F_\rho$ como operador em $\mathcal{H}$ é o mesmo que $\mathbf{H}^F$ em $\tilde{\mathcal{H}}$.

Conclusão

Neste trabalho apresentamos duas deformações de um sistema de mecânica quântica - descrevendo um oscilador harmônico - de forma que os operadores de posição se tornem não comutativos.

A abordagem para a deformação foi o twist de Drinfel'd, ou seja, uma deformação de uma álgebra de Hopf. Para isto foi necessário identi car a álgebra de Lie apropriada, considerando a constante de Planck como uma extensão central e considerando polinômios quadráticos como geradores de uma álgebra formal. A primeira sugere que o coproduto e antípoda (e outros mor smos da álgebra de Hopf) da constante de Planck devem ser aqueles de um elemento primitivo, e não de um múltiplo da identidade. A segunda diz o mesmo a respeito dos polinômios quadráticos - o que de ne o formalismo de desdobramento.

A interpretação para a identi cação de polinômios quadráticos como geradores é relacionada ao coproduto. O coproduto de um gerador leva a uma aditividade em estados de produto tensorial, e preserva também a associatividade para múltiplos produtos tensoriais. Desta forma o coproduto é visto como a forma apropriada de de nir estados de múltiplas partículas para o caso de quantidades aditivas - os polinômios identi cados como geradores são aqueles que serão relacionados com estas quantidades.

Com todas as identi cações feitas, procedemos com a deformação dada pelo twist de Drinfel'd. Apenas os mor smos da antípoda e o coproduto mudam na deformação, enquanto o espaço vetorial da álgebra de Hopf não muda. Apesar disto, no caso da álgebra universal envelopante, o subespaço identi cado como a álgebra de Lie também é modi cado, e ganhamos a noção de geradores deformados. São estes novos geradores que são identi cados com uma mecânica quântica não comutativa, quando vistos pelos comutadores usuais - utilizando as expressões dos geradores deformados como séries no parâmetro de deformação (formalismo híbrido). Com isto podemos ver que é possível derivar relações de comutação a partir de primeiros princípios.

Uma diferença entre esta e outras abordagens encontradas na literatura está nos estados de múltiplas partículas. Como os geradores deformados pertencem a uma álgebra de Hopf, eles terão seus coprodutos modi cados, e quantidades que eram aditivas deixam de ser. Desta forma uma consequência essencial da deformação serão efeitos coletivos, que estarão atrelados - de uma forma precisa - aos efeitos de não comutatividade em estados de uma partícula, diferenciando o problema de, por exemplo, potenciais externos - que poderiam levar a efeitos similares (como o efeito de um campo magnético sobre uma partícula em duas dimensões).

Estudamos explicitamente dois tipos diferentes de deformações. A primeira, levando a uma não comutatividade constante, é devida ao twist abeliano. Neste caso, as expressões explícitas das quantidades deformadas em termos das usuais permite o cálculo do espectro utilizando apenas técnicas canônicas. Como a não comutatividade é constante, temos uma quebra da simetria de rotação em três dimensões, enquanto que no caso $d = 2$ a simetria é mantida (de uma forma degenerada - o tensor de não comutatividade será proporcional a forma de volume).

A segunda não comutatividade é não constante, e equivale à parte espacial das relações propostas por Snyder, e por isso dizemos que ela é uma não comutatividade do tipo Snyder . Neste caso alguns dos operadores deformados, incluindo a Hamiltoniana, deixam de ser hermitianos. Isto se deve ao fato de que em álgebras de Hopf também podemos introduzir o conceito de conjugação, e este está atrelado à antípoda, que é deformada apenas neste caso não abeliano. Apesar desta di culdade foi possível identi car que a Hamiltoniana pertence a uma classe de operadores chamados de η-pseudo-hermitianos, tornando possível a de nição de um produto interno deformado, onde a Hamiltoniana é auto-adjunta. Também é possível de nir uma Hamiltoniana equivalente no espaço de Hilbert inicial, que será explicitamente hermitiana. Para este twist temos que a simetria por rotações será preservada.

Por m, podemos ver que é possível de nir teorias de mecânica quântica não comutativa a partir do twist de álgebras de Hopf. Este formalismo permite a investigação detalhada do sistema resultante, e oferece uma construção explícita em termos das quantidades usuais. Esta abordagem também deixa claro como o comportamento de estados de múltiplas partículas está atrelado aos efeitos não comutativos, aspecto que não ca evidente em outros formalismos.

Referências Bibliográ cas

[1] P. G. Castro, B. Chakraborty e F. Toppan, J. Math. Phys. 49, 082106 (2008), [arXiv:0804.2936 [hep-th]].

[2] S. L. Woronowicz, Commun. Math. Phys. 122, 125 (1989)

[3] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[4] N. Seiberg e E. Witten, JHEP 09, 032 (1999), [arXiv:hep-th/9908142].

[5] W. Heisenberg, Ann. Phys. 32, 20 (1938).

[6] A. Connes, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 62, 257 (1986).
A. Connes, M. R. Douglas e A. Schwarz, JHEP. 02, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162].

[7] V. G. Drinfel'd, J. Sov. Math. 41, 898 (1988) [Zap. Nauchn. Semin. 155, 18 (1986)], Sov. Math. Dokl. 32, 254 (1985) [Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. 283, 1060 (1985)].

[8] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. 10, 63 (1985).

[9] V. Chari e A. Pressley A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press; Cambridge 1994

[10] S. Majid Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge University Press; Cambridge 1994

[11] J. Bellissard, Lecturegiven at the Conference on Localization in Disordered System, Bad Schandau, DDR, Dec 1-5, 1986.

[12] A. Connes e M. A. Rie el, Contemp. Math. 62, 237 266 (1987).

[13] T. Koma e B. Nachtergaele, Lett. Math. Phys. 40, 1 (1997) [arXiv:cond-mat/9512120v1].

[14] J. Abad e M. Rios, J. Phys. A 28, 3319 (1995) [arXiv:hep-th/9410193v1].

[15] P. Aschieri, M. Dimitrijevic, F. Meyer e J. Wess, Class. Quant. Grav. 23, 1883 (2006), [arXiv:hep-th/0510059v2], Fortsch. Phys. 55, 649 (2007), [arXiv:hep-th/0703014].

[16] P. Aschieri1, F. Lizzi, e P. Vitale, Phys. Rev. D 77, 025037 (2008), [arXiv:0708.3002v2 [hep-th]].

[17] R. J. Szabo, Class. Quantum Grav. 23, R199 (2006) [arXiv:hep-th/0606233v2].

[18] H. Grosse e J. Madore, Phys. Lett. B 283, 218 (1992), [arXiv:hep-th/9805085v1].

[19] R. J. Jzabo, Phys. Rept. 378, 207 (2003), [arXiv:hep-th/0109162v4]

[20] H. Grosse, C. Klimcik, e P. Presnajder, Int. J. Theor. Phys. 35, 231 (1996), [arXiv:hep-th/9505175v1].

[21] H. Steinacker, JHEP 12, 049 (2007), [arXiv:0708.2426].

[22] V. O. Rivelles, Phys. Lett. B 558, 191 (2003) , [arXiv:hep-th/0212262].

[23] H. S. Yang, Mod. Phys. Lett. A 22, 1119 (2007), [arXiv:hep-th/0612231].

[24] H. Grosse, F. Lizzi, H. Steinacker, Phys. Rev. D 81, 085034 (2010), [arXiv:hep-th/1001.2703], [arXiv:hep-th/1002.1862], [arXiv:hep-th/1001.2706],

[25] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk e N. Seiberg, JHEP 02, 020 (2000), [arXiv:hep-th/9912072v2].

[26] H. Grosse e R. Wulkenhaar, JHEP 12, 019 (2003), [arXiv:hep-th/0307017v1]

[27] H. Grosse e R. Wulkenhaar, Commun. Math. Phys. 256, 305-374 (2005), [arXiv:hep-th/0401128]

[28] H. Hopf, Ann. of Math. 42, 22 (1941).

[29] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, W. A. Benjamin, Inc.; New York (1969)

[30] E. Abe, Hopf Algebras, Cambridge University Press; Cambridge (1980)

[31] B. Chakraborty, Z. Kuznetsova e F. Toppan, J. Math. Phys. 51, 112102 (2010) [arXiv:1002.1019v1 [hep-th]]

[32] D. Kreimer, Adv. Theor. Math. Phys. 2 no. 2, 303 (1998), [arXiv:q-alg/9707029v4], Proc. Symp. Pure Math. 73 43 (2005).

[33] A. Connes e D. Kreimer, Commun. Math. Phys. 210, 249 (2000), [arXiv:hep-th/9912092v1], Commun. Math. Phys. 216, 215 (2001), [arXiv:hep-th/0003188v1]

[34] V. Rivasseau, [arXiv:0705.0705v1 [hep-th]]

[35] R. V. Mendes, Eur. Phys. J. C 42, 445 (2005) [arXiv:hep-th/0406013]

[36] V. P. Nair e A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B 505, 267 (2001), [arXiv:hep-th/0011172]

[37] F. G. Scholtz, L. Gouba, A. Hafver e C. M. Rohwer, J. Phys. A 42, 175303 (2009), [arXiv:0812.2803 [math-ph]]

[38] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura e T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002), [arXiv:hep-th/0111181]

[39] A. Smailagic e E. Spallucci, Phys. Rev. D 65, 107701 (2002), [arXiv:hep-th/0108216]

[40] A. Smailagic e E. Spallucci, J. Phys. A 35, L363 (2002), [arXiv:hep-th/0205242]

[41] A. Kijanka e P. Kosi«ski, Phys. Rev. D 70, 127702 (2004), [arXiv:hep-th/0407246]

[42] I. Dadic, L. Jonke, e S. Meljanac, Acta Physica Slovaca 55, 149 (2005), [arXiv:hep-th/0301066]

[43] K. Li e S. Dulat Eur. Phys. J. C 46, 825 828 (2006) [arXiv:hep-th/0508193v3]

[44] F. S. Bem ca e H. O. Girotti J. Phys. A 38 L539 (2005) [arXiv:quant-ph/0506191v1]

[45] S. Khan, B. Chakraborty, e F. G. Scholtz Phys. Rev. D 78, 025024 (2008) [arXiv:0707.4410v1 [hep-th]]

[46] J. Lukierski, P. C. Stichel e W. J. Zakrzewski, Ann. Phys. (N. Y.) 260, 224 (1997), [arXiv:hep-th/9612017]

[47] C. Duval e P. A. Horvathy, Phys. Lett. B 479, 284 (2000), [arXiv:hep-th/0002233]

[48] P. G. Castro, B. Chakraborty, R. Kullock e F. Toppan, J. Math. Phys. 52, 032102 (2011), [arXiv:hep-th/1012.5158v2]

[49] P. G. Castro,R. Kullock e F. Toppan, J. Math. Phys. 52, 062105 (2011), [arXiv:hep-th/1104.3852v2]

[50] P. G. Castro, Hopf Algebras in Deformed Quantum Theories, [arXiv:1012.1815v1 [hep-th]]

[51] G. Amelino-Camelia e M. Arzano, Phys. Rev. D 65 084044 (2002), [arXiv:hep-th/0105120v2

[52] M. Daszkiewicz, J. Lukierski e M. Woronowicz Mod. Phys. Lett. A 23, 653 (2008) [arXiv:hep-th/0703200v4], Phys. Rev. D 77, 105007 (2008) [arXiv:0708.1561v3 [hep-th]]

[53] C.A.S. Young e R. Zegers Nuclear Phys. B 797, 537 (2008) [arXiv:0711.2206v2 [hep-th]], Nuclear Phys. B 804, 342 (2008) [arXiv:0803.2659v1 [hep-th]]

[54] J. Lukierski, Rep. Math. Phys. 64, 299 (2009) [arXiv:0812.0547v4 [math-ph]]