

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

TESE DE DOUTORADO

EDUARDO HENRIQUE SILVA BITTENCOURT

PONTES DINÂMICAS

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação do CBPF como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Física.

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 2013.

Ao pensador que nos mostrou
um outro caminho: H. Poincaré.

“Nós homens de conhecimento, não nos conhecemos; de nós mesmos somos desconhecidos – e não sem motivos. Nunca nos procuramos: como poderia acontecer que um dia nos encontrássemos? Com razão alguém disse: ‘onde estiver teu tesouro, estará também teu coração’ ”

F. Nietzsche.

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Prof. Mario Novello, pela sua felicidade em fazer ciência (e coisas afins) e as inúmeras oportunidades que tem me oferecido durante este período que temos trabalhado juntos.
- A Grasielle Santos, por ser minha companheira de todos os momentos.
- A José Salim pelos ensinamentos e aventuras através do desconhecido.
- A algumas pessoas que marcaram a minha carreira acadêmica (obviamente, além das já citadas acima): Daniel Tonholo, Renato Klippert e José Baêta.
- A minha família pelo apoio e carinho de sempre.
- Aos amigos de longa data que sempre estiveram presentes: Rivaldo, Fernando, Leonardo, Alan, Célio e Antônio Carlos.
- Aos amigos de Itajubá que me acompanharam durante a faculdade: Bráulio, Antônio, Vitório, Willy, Marcelo, Pedro e Gabriel (Quincas).
- Aos colegas do CBPF de longa e curta data: Gabriel, Josephine, Maria, Azucena, Júnior, Arthur, Mariana, Sandro e alguns outros que esqueço no papel, mas que ficam na memória.
- Aos colegas que fiz do Rio: Reinaldo, Roberto, Thiago, Marília, Henrique, John e Juan.

- Às pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta na realização deste trabalho: pessoal da secretaria do ICRA, pessoal da biblioteca e funcionários do CBPF em geral.
- Ao CNPq pela bolsa concedida.

Resumo

Propomos uma maneira alternativa de compreender o papel da geometria do espaço-tempo na descrição da dinâmica de partículas e campos. Em específico, mostramos que a dinâmica dos campos fundamentais da física (escalar, vetorial e espinorial) pode ser representada (esta mesma dinâmica) de maneiras diferentes dependendo da geometria de fundo escolhida e da presença de processos de auto-interação de cada campo.

Consequentemente, ao introduzir outros campos caso a caso, o que chamamos de interação numa dada representação deve ser reinterpretado após o processo de mapeamento de uma dinâmica na outra. Em outras palavras, na abordagem descrita neste texto, vemos que a geometria é responsável por traduzir concretamente o modo pelo qual os campos interagem entre si, a partir de princípios físicos pré-estabelecidos – acoplamento mínimo, princípio variacional, covariância geral – e como esta interação é levada de um caso a outro através da própria geometria.

Abstract

We propose an alternative way to comprehend the role of the spacetime geometry in the description of the dynamics of particles and fields. In particular, we show that the dynamics of fundamental fields of physics (scalar, vector and spinor) can be represented (the dynamics itself) in different ways depending on the choice of the background geometry and the presence of the self-interaction terms for each field.

Consequently, by introducing other fields in each case, which we named by interaction in a given representation should be reinterpreted after the mapping process of a dynamics into the other. In other words, in the approach described in this text, we see that the geometry is responsible for translating the particular way in which the fields interact, from pre-established physical principles—minimal coupling, variational principle, general covariance—and this interaction is taken as a case to another through the geometry itself.

Índice

Índice	v
Notação	vii
1 Introdução	1
2 Revisitando a métrica de Gordon	4
2.1 Geometrização de movimentos acelerados	5
2.2 Caminhos de luz num dielétrico em movimento: abordagem de Gordon	6
2.3 Métricas Binomiais: caso especial	10
2.4 Métricas Polinomiais: caso geral	12
2.5 Aplicações	16
2.5.1 Identificando Ψ com o potencial gravitacional	16
2.5.2 Movimento circular no espaço de Minkowski	21
2.5.3 Movimento circular na geometria de Gödel	24
3 Teoria escalar-geométrica da gravitação	26
3.1 Descrição da relatividade geral como uma teoria de campo . .	29
3.2 O surgimento da geometria na gravitação escalar	30
3.3 A prescrição da métrica geral: rumo à geometrização da gravitação escalar	33
3.4 As dificuldades das teorias escalares da gravitação precedentes	34
3.5 O campo eletromagnético	36

3.6	A dinâmica da gravitação escalar	37
3.7	Princípio variacional	40
4	Momento magnético anômalo	45
4.1	A ponte dinâmica eletromagnética	46
4.2	A métrica eletromagnética	50
4.3	Princípio de acoplamento mínimo	51
4.4	Acoplamento entre o neutrino e o campo eletromagnético . . .	52
4.5	Acoplamento entre o elétron e o campo eletromagnético . . .	55
4.6	Comparação com experimentos	56
5	Quebra da simetria quiral na ausência de massa	60
5.1	Compêndio matemático para a ponte dinâmica	62
5.2	Ponte Dinâmica para campos espinoriais: de Dirac a uma dinâmica não-linear	66
5.2.1	Caso $\dot{\beta} \ll \beta$ e a solução de Inomata	69
5.2.2	Caso $\dot{\beta} \gg \beta$ e a quebra da simetria quiral	70
6	Considerações Finais	74
7	Perspectivas	77
8	Epílogo	79
A	Método de Hadamard para a GSG	81
B	Invariantes topológicos do eletromagnetismo	83
C	Derivada covariantes de campos espinoriais	87
D	Tétradas	89
	Referências Bibliográficas	91

Notação

As definições apresentadas neste capítulo serão usadas ao longo de todo o texto, a menos de modificações previamente avisadas e pontuais. A maioria destas definições estão em concordância àquelas do livro-texto [1].

- Índices gregos: $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$;

- Índices latinos: $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$;

- Delta de Kronecker:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases};$$

- Velocidade da luz $c = 1$;

- Constante de Planck reduzida $\hbar = 1$;

- Constante de Einstein $k \equiv \frac{8\pi G}{c^4} = 1$;

- Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$;

- Derivada parcial $(,)$:

Sendo A^α um vetor e x^μ uma carta, a derivada parcial de A^α com respeito a x^μ é

$$A^\alpha_{, \mu} \doteq \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu};$$

- Símbolos de Christoffel de primeira espécie:

$$[\beta\gamma, \alpha] = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\alpha\gamma, \beta} - g_{\beta\gamma, \alpha});$$

- Símbolos de Christoffel de segunda espécie:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\lambda}[\beta\gamma, \lambda];$$

- Tensor de Riemann:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \doteq \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda};$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \doteq R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu};$$

- Escalar de curvatura:

$$R \doteq R^{\alpha}{}_{\alpha};$$

- Equação de campo de Einstein:

$$G^{\mu}{}_{\nu} \doteq R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\nu} = -kT^{\mu}{}_{\nu};$$

- Pseudo-tensor de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{se } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ for permutação par de } 0123, \\ -1, & \text{se } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ for permutação ímpar de } 0123, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

- Tensor de Levi-Civita:

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu},$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$;

- Tensor dual:

Dado um tensor antissimétrico de ordem 2 $A^{\mu\nu}$, o dual deste tensor é definido como sendo

$$*A^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}A^{\mu\nu};$$

- Derivada covariante (;):

Sendo A^{α} um vetor contra-variante e x^{μ} uma carta, a derivada covariante de A^{α} é

$$A^{\alpha}{}_{;\mu} \doteq \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}A^{\beta};$$

- Operação de simetrização ($()$):

$$A_{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu};$$

- Operação de antissimetrização [$]$:

$$A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}.$$

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, será apresentada uma nova maneira de descrever as equações dinâmicas para os campos fundamentais da física. Para isso devemos construir um mapa entre equações dinâmicas distintas, tal que este mapa atue simultaneamente em métricas do espaço-tempo, nas quais estas equações estarão definidas. No caso de campos livres, todas as soluções de uma dada equação dinâmica numa métrica específica deverão ser levadas em soluções de uma outra dinâmica em uma outra métrica.

Nos últimos anos, temos nos dedicado ao estudo de elementos de geometria Riemanniana semelhantes aos descritos pela abordagem de W. Gordon, como apresentado em [54]. Em particular, aqueles que permitem uma forma binomial tanto para a métrica do espaço-tempo quanto para a sua inversa. Em outras palavras, suas correspondentes expressões covariante e contravariante são

$$\hat{q}_{\mu\nu} = A \eta_{\mu\nu} + B \Phi_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

e

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \beta \Phi^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

onde A , B , α e β são funções arbitrárias, $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski num sistema de coordenadas arbitrário e $\Phi^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico definido no

espaço de Minkowski. Esta forma para a métrica requer que o tensor $\Phi^{\mu\nu}$ deva satisfazer a condição

$$\Phi_{\mu\nu} \Phi^{\nu\lambda} = m \delta_\mu^\lambda + n \Phi_\mu^\lambda, \quad (1.3)$$

sendo m e n parâmetros arbitários.

Esta característica permite-nos escrever a métrica inversa em uma forma binomial semelhante à métrica, evitando assim dificuldades com séries infinitas [14], as quais aparecem na formulação de teoria de campos para a gravitação de Einstein. Dois exemplos notáveis desta propriedade podem ser obtidos através do campo escalar (em que $\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$) e do campo eletromagnético (em que $\Phi_{\mu\nu} = F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu}$), que serão analisados em capítulos posteriores.

Todo este trabalho iniciou-se da tentativa de rescrever a equação dinâmica de um dado campo (numa dada métrica), dinamicamente equivalente em termos de uma outra equação (numa outra métrica) [21]. O problema que imediatamente surgiu foi: em qual métrica? Com isso os trabalhos do Gordon motivaram – apesar de serem distintos exatamente neste ponto – a escrever esta geometria em termos exclusivamente do campo sob consideração e da geometria de fundo. Este método mostrou-se satisfatório tanto para o campo escalar como para o campo eletromagnético e está sendo desenvolvido para campos espinoriais.

Em paralelo, surgiu uma outra questão simples e sutil – que até o momento não havíamos encontrado no âmbito da física-matemática –, que diz respeito à relação entre curvas geodésicas e geometria. De uma maneira matematicamente precisa, enunciamos: dado uma curva arbitrária sobre uma variedade diferenciável, existe uma métrica na qual esta curva corresponda a uma geodésica na variedade? A resposta, da maneira em que propomos responder, é afirmativa [46]. Porém neste texto analisamos somente os casos em que a métrica que exerce este papel é da forma descrita por (1.1), ou seja, uma métrica binomial.

Diversas outras possibilidades de significados para estes objetos tensoriais

têm sido desenvolvidas. Por exemplo, atualmente, alguns autores iniciaram uma tentativa de associar $\hat{q}_{\mu\nu}$ não a uma métrica, mas sim a um elemento de um grupo [13, 20] que mantêm a dinâmica invariante. Deste modo, ficaria claro qual é o sentido físico (ou mesmo matemático) deste objeto em cada caso: quando funciona como métrica, quando funciona como grupo de simetria da dinâmica ou, numa perspectiva pessimista, se é somente um solipsismo matemático da representação do sistema (o que não está excluído do arcabouço teórico envolvido no método).

Entretanto, neste texto apresentamos exemplos concretos e bastante úteis fisicamente, quando assumimos a realidade física da descrição de um sistema que era puramente abstrato, segundo o procedimento que descreveremos nos próximos capítulos e que temos denominado de *Método da Ponte Dinâmica*.

Capítulo 2

Revisitando a métrica de Gordon

Em 1923, Gordon [19] fez uma sugestão diferenciada ao tratar a propagação de ondas electromagnéticas num dieléctrico em movimento como uma modificação da estrutura métrica de fundo. Ele mostrou que as ondas electromagnéticas não se propagam efetivamente como geodésicas nulas na métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, mas sim numa métrica dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\epsilon\mu - 1) v^\mu v^\nu, \quad (2.1)$$

onde ϵ e μ são parâmetros constantes que caracterizam o meio dieléctrico e v^μ é a quadri-velocidade do material sob consideração. Posteriormente, foi reconhecido que esta interpretação poderia ser utilizada para descrever estruturas não-lineares complexas, mesmo quando ϵ e μ dependem da intensidade do campo electromagnético [52] ou quando são funções mais complexas das intensidades dos campos [61]. Em todos estes casos, o ponto crucial é que o cone causal, o qual está associado com a métrica efetiva, não coincide com o cone nulo da teoria. Isto acontece devido às modificações provocadas pela presença de um dieléctrico em movimento, que altera os caminhos das ondas electromagnéticas no interior do material.

Diante desta situação, coloca-se a seguinte pergunta: seria possível que

tal particular descrição das ondas eletromagnéticas no interior de dielétricos em movimento possa ser generalizada para outros casos, nos quais trajetórias aceleradas devido a outros tipos de forças sejam descritas como geodésicas numa métrica associada $\hat{q}_{\mu\nu}$? Ver-se-á que a resposta é afirmativa e uma solução para isso é quando a geometria associada depende somente do movimento do corpo em questão e da geometria de fundo.

2.1 Geometrização de movimentos acelerados

Considere um campo vetorial¹ u_μ com norma $N \equiv u_\alpha u_\beta g^{\alpha\beta}$ numa geometria dada $g_{\mu\nu}$. A aceleração de u_μ é definida por

$$a_\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu.$$

Agora considere um outro tensor métrico $\hat{q}_{\mu\nu}$, tal que

$$u_{\mu||\nu} \hat{u}^\nu = f(p) u_\mu, \quad (2.2)$$

onde $||$ significa derivada covariante com respeito a $\hat{q}_{\mu\nu}$ e $f(p)$ é uma função arbitrária do parâmetro p ao longo da curva. Sempre que u_μ é um gradiente ou um campo vetorial normalizado, $f(p)$ pode ser escolhida igual a zero sem perda de generalidade. Caso contrário, é preciso ser mais cauteloso na aplicação do método aqui descrito, pois $f(p)$ pode estar definida apenas num determinado intervalo da curva. As componentes contravariantes do campo vetorial são definidas por $\hat{u}^\mu \equiv \hat{q}^{\mu\nu} u_\nu$ e, conseqüentemente, a norma é definida por $\hat{N} \equiv \hat{q}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu$.

Desenvolvendo a Eq. (2.2), obtém-se

$$\frac{1}{2} \hat{N}_{,\mu} + u_{[\mu,\nu]} \hat{u}^\nu = f(p) u_\mu. \quad (2.3)$$

¹O campo de velocidades que aparece naturalmente neste formalismo é o campo definido por formas diferenciais. Em particular, o vetor de onda k_μ , por ser um gradiente, é uma 1-forma diferencial exata, como veremos a seguir.

Se $\hat{q}_{\mu\nu}$ é escolhida de tal forma que esta equação seja verificada, então o movimento acelerado de u_α em $g_{\mu\nu}$ passa a ser representado por uma geodésica na métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$. Dado este resultado e conhecendo a métrica de Gordon, mostra-se que esta é um exemplo particular de tal procedimento. Há uma classe maior de métricas que exercem tal função exibindo diferentes propriedades geométricas, como veremos a seguir.

2.2 Caminhos de luz num dielétrico em movimento: abordagem de Gordon

Começamos por definir dois tensores antissimétricos $F_{\mu\nu}$ (eletromagnético) e $P_{\mu\nu}$ (polarização) representando o campo eletromagnético total dentro do meio material. Estes tensores são expressos em termos dos campos elétrico e magnético E^μ e H^ν , e dos campos induzidos D^μ e B^μ como segue

$$F_{\mu\nu} \equiv E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta,$$

$$P_{\mu\nu} \equiv D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} v_\alpha H_\beta,$$

onde v^μ é um quadri-vetor velocidade comóvel com o dielétrico e $\eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita. Assumimos que as propriedades eletromagnéticas do meio são caracterizadas pelas seguintes relações constitutivas

$$D_\alpha = \epsilon_\alpha{}^\nu(E, H) E_\nu, \quad B_\alpha = \mu_\alpha{}^\nu(E, H) H_\nu,$$

onde $\epsilon_\alpha{}^\nu(E, H)$ e $\mu_\alpha{}^\nu(E, H)$ são *a priori* tensores arbitrários. Com isso, considera-se as equações de Maxwell em um meio dielétrico [32] com permissividade ϵ e permeabilidade μ , as quais caracterizam o dielétrico e, além disso, considera-se v^μ como sendo um campo de velocidades comoviente com o meio. Ou seja, podemos escrever estas equações como

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0, \\
{}^*F^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

sendo ${}^*F^{\mu\nu}$ o dual do tensor eletromagnético.

Ao longo deste capítulo, assumimos que o espaço-tempo plano de Minkowski representa a geometria de fundo, que a permeabilidade é uma constante μ_0 e a permissividade depende somente da norma do vetor campo elétrico $E \equiv \sqrt{-E_\alpha E^\alpha}$, ou seja, $\epsilon = \epsilon(E)$. Apesar dos cálculos serem mais longos, é razoavelmente simples generalizar as equações abaixo para o caso de um espaço-tempo curvo. Será considerado que o campo de observadores comóveis com o dielétrico é tal que $v^\mu{}_{;\nu} = 0$. Logo, as Eqs. (2.4) em termos dos vetores deslocamento elétrico D^μ e indução magnética B^μ são

$$\begin{aligned}
D^\mu{}_{;\nu}v^\nu - D^\nu{}_{;\nu}v^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta}v_\alpha H_{\beta;\nu} &= 0, \\
B^\mu{}_{;\nu}v^\nu - B^\nu{}_{;\nu}v^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta}v_\alpha E_{\beta;\nu} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

Projetando estas equações com respeito a v^μ , obtém-se equações de movimento não-lineares descrevendo o campo eletromagnético no interior do meio dielétrico

$$\begin{aligned}
\epsilon E^\alpha{}_{;\alpha} - \frac{\epsilon' E^\alpha E^\beta}{E} E_{\alpha;\beta} &= 0, \\
\mu_0 H^\alpha{}_{;\alpha} &= 0, \\
\epsilon \dot{E}^\lambda - \frac{\epsilon' E^\lambda v^\alpha E^\mu}{E} E_{\mu;\alpha} + \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} v_\rho H_{\sigma;\beta} &= 0, \\
\mu_0 \dot{H}^\lambda - \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} v_\rho E_{\sigma;\beta} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Por conveniência, define-se o vetor unitário l^μ fixando-se $E^\mu \equiv E l^\mu$, onde l^μ satisfaz $l_\alpha l^\alpha = -1$.

Em primeira ordem de aproximação, as condições de Hadamard [25] impostas sobre a propagação de ondas dão as superfícies características Σ . Tomando as descontinuidades das Eqs. (2.6), segundo as relações

$$[E_{\mu,\lambda}]_{\Sigma} = e_{\mu}k_{\lambda}, \quad [H_{\mu,\lambda}]_{\Sigma} = h_{\mu}k_{\lambda}, \quad (2.7)$$

onde e_{μ} e h_{μ} são as amplitudes das descontinuidades, obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon k^{\alpha} e_{\alpha} - \frac{\epsilon'}{E} E^{\alpha} e_{\alpha} E^{\beta} k_{\beta} &= 0, \\ \mu_0 h^{\alpha} k_{\alpha} &= 0, \\ \epsilon k^{\alpha} v_{\alpha} e^{\mu} - \frac{\epsilon'}{E} E^{\lambda} e_{\lambda} v^{\alpha} k_{\alpha} E^{\mu} + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} k_{\nu} v_{\alpha} h_{\beta} &= 0, \\ \mu_0 k_{\alpha} v^{\alpha} h^{\lambda} - \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} k_{\beta} v_{\rho} e_{\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo que $k_{\mu} \equiv \partial_{\mu}\Sigma$ é o vetor de onda e ϵ' é a derivada de ϵ com relação a E . Combinando estas equações, encontra-se a seguinte relação intermediária

$$\frac{e^{\mu}}{\mu_0 k_{\alpha} v^{\alpha}} [k^{\nu} k_{\nu} - (k^{\nu} v_{\nu})^2] - \frac{k^{\beta} e_{\beta}}{\mu_0 k_{\alpha} v^{\alpha}} k^{\mu} + \epsilon k^{\alpha} v_{\alpha} e^{\mu} - \frac{\epsilon'}{E} E^{\lambda} e_{\lambda} v^{\alpha} k_{\alpha} E^{\mu} = 0, \quad (2.9)$$

a qual, multiplicando por E_{μ} e eliminando o termo $k^{\mu} e_{\mu}$, resulta na relação de dispersão

$$\left(\eta^{\mu\nu} + (\mu_0 \epsilon - 1 + \mu_0 \epsilon' E) v^{\mu} v^{\nu} - \frac{\epsilon'}{\epsilon E} E^{\mu} E^{\nu} \right) k_{\mu} k_{\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Veja que o envelope de descontinuidades propaga-se diferentemente do cone de luz do espaço de Minkowski da teoria linear. Neste caso, a estrutura causal é dada por uma geometria Riemanniana² efetiva $\hat{g}^{\mu\nu}$. Deste ponto de vista, k_{μ} é considerado como sendo um vetor do tipo-nulo em relação a $\hat{g}^{\mu\nu}$, isto é

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0. \quad (2.11)$$

A expressão da geometria efetiva é dada por

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\mu_0 \epsilon - 1 + \mu_0 \epsilon' E) v^{\mu} v^{\nu} - \frac{\epsilon' E}{\epsilon} l^{\mu} l^{\nu}. \quad (2.12)$$

²Matematicamente, o tensor métrico é denotado por um tensor covariante de ordem 2. Porém, aqui reserva-se o nome de “métrica” também a um tensor contravariante de ordem 2, pois, em particular, este é o caminho natural pelo qual a métrica de Gordon aparece.

Um cálculo simples mostra que a métrica inversa é

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\mu_0\epsilon(1+\xi)}\right) v_\mu v_\nu + \frac{\xi}{1+\xi} l_\mu l_\nu, \quad (2.13)$$

onde

$$\xi \equiv \frac{\epsilon' E}{\epsilon}.$$

Em particular, quando ϵ é constante, esta fórmula se reduz ao resultado do trabalho pioneiro de Gordon, no qual ele mostra que as ondas eletromagnéticas dentro de um dielétrico em movimento não se propagam como geodésicas na geometria de fundo $\eta_{\mu\nu}$, mas na métrica efetiva

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\epsilon\mu_0 - 1) v^\mu v^\nu, \quad (2.14)$$

a qual depende somente das propriedades do dielétrico como μ_0 , ϵ e v_μ , como dito anteriormente. Note que esta métrica é a mesma para todo k_μ , ou seja, a mesma para todas as soluções das Eqs. de Maxwell (2.8). A magnitude N do vetor de onda no espaço-tempo de Minkowski (escrita em termos das propriedades do dielétrico) é determinada pela relação de Gordon

$$\begin{aligned} \hat{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu &= (\eta^{\mu\nu} + (\epsilon\mu_0 - 1) v^\mu v^\nu) k_\mu k_\nu = 0 \implies \\ \implies N &= (1 - \mu_0\epsilon)(k.v)^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo $k.v \equiv k_\alpha v^\alpha$.

A análise da propagação de ondas em meios materiais e o estudo de geometrias efetivas são particularmente interessantes na investigação de modelos análogos de gravitação [54, 52]. Uma discussão completa sobre o assunto pode ser encontrada em [59] e suas referências. Neste capítulo aponta-se apenas um paralelo entre essas geometrias à semelhança daquelas de Gordon e algumas possíveis aplicações de ambas as classes de métricas. O interesse do nosso método no trabalho do Gordon é somente resgatar o papel exercido pela métrica efetiva no contexto das ondas eletromagnéticas.

2.3 Métricas Binomiais: caso especial

Dados os elementos apresentados na introdução, nesta seção limita-se à análise do caso mais simples no qual dado um campo de velocidades u^μ , fixa-se $\Phi^{\mu\nu}$ da métrica (1.1) como sendo $u^\mu u^\nu$. Assim, os coeficientes das métricas covariante and contravariante estão relacionados por

$$A = \frac{1}{\alpha}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)},$$

onde foi escolhido $u_\mu u_\nu \eta^{\mu\nu} = 1$ e a métrica escrita na forma

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \beta u^\mu u^\nu.$$

A derivada covariante de um vetor qualquer X^α na métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ é definida por

$$X^\alpha_{||\mu} = X^\alpha_{,\mu} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} X^\nu.$$

Neste caso, o símbolo de Christoffel de segunda espécie correspondente é construído usando $\hat{q}^{\mu\nu}$. Note que podemos decompor $\hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$\hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu} = \Gamma^\epsilon_{\mu\nu} + K^\epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde $\Gamma^\epsilon_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christoffel construído com a métrica de fundo e $K^\epsilon_{\mu\nu}$ é um verdadeiro tensor. A descrição de uma curva acelerada³ no espaço-tempo plano como uma geodésica na métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ é possível, se a seguinte condição é satisfeita

$$\left(u_{\mu,\nu} - \hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu} u_\epsilon \right) \hat{u}^\nu = 0, \quad (2.17)$$

aqui foi usada a métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ para escrever $\hat{u}^\mu \equiv \hat{q}^{\mu\nu} u_\nu = (\alpha + \beta) u^\mu$. Portanto,

$$\left(u_{\mu,\nu} - \hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu} u_\epsilon \right) u^\nu = 0. \quad (2.18)$$

³Note que estamos lidando aqui com uma coleção de caminhos Γ que normalmente é chamada de congruência de curvas. Entende-se que cada elemento desta coleção refere-se a partículas que têm as mesmas características. Por exemplo, se a aceleração é devido a um campo elétrico estático, todas as partículas de Γ devem ter a mesma razão carga-massa.

A fim de preservar a norma $\hat{u}^\mu \hat{u}_\mu$ ao longo da curva assume-se $\beta_{,\mu} u^\mu = 0$, sem perda de generalidade (o que corresponde a uma simples reparametrização ao longo das curvas). Uma vez que a aceleração na geometria de fundo é definida por $a_\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu$, a condição de movimento geodésico em $\hat{q}_{\mu\nu}$ toma a seguinte forma

$$a_\mu = K_{\mu\nu}^\epsilon u^\nu, \quad (2.19)$$

a qual se reduz a

$$a_\mu = \frac{\alpha + \beta}{2} u^\alpha u^\nu \hat{q}_{\alpha\nu,\mu}. \quad (2.20)$$

Apesar de $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\epsilon$ ser uma conexão, a projeção e a decomposição em termos das definições na geometria de fundo nos dá, ao final, um verdadeiro vetor.

Usando a expressão de $\hat{q}_{\alpha\beta}$ e combinando-a com a condição (2.18) segue que

$$a_\mu + \frac{\partial_\mu(\alpha + \beta)}{2(\alpha + \beta)} = 0.$$

Isto significa que o vetor aceleração a_μ deve ser um gradiente de uma função escalar Ψ , ou seja,

$$a_\mu \equiv \partial_\mu \Psi. \quad (2.21)$$

Logo, a expressão dos coeficientes α e β da métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ são dados em termos do potencial Ψ da aceleração, a partir da relação

$$\alpha + \beta = e^{-2\Psi}. \quad (2.22)$$

Este exemplo simples fornece uma fórmula muito útil para o tratamento específico de um campo de velocidades cuja aceleração provém de um gradiente. Posteriormente, será analisado o caso em que Ψ representa o potencial gravitacional.

2.4 Métricas Polinomiais: caso geral

Uma vez que a abordagem de Gordon depende fortemente da velocidade v^α do dielétrico, parece-nos razoável introduzir uma outra métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ que descreve os mesmos resultados obtidos por Gordon do ponto de vista cinemático e, além disso, reduz a dependência na velocidade do meio. Por razões práticas, seria útil enfraquecer esta restrição dado que é mais fácil determinar a forma do pacote de ondas eletromagnéticas no laboratório do que realizar a construção de meios dielétricos não lineares com parâmetros arbitrários $\epsilon_{\alpha\beta}$ e $\mu_{\alpha\beta}$ – apesar dos grandes avanços nessa área de pesquisa recentemente [69, 66].

Vamos mostrar também que é possível escolher uma classe de geometrias que desempenham o mesmo papel que a métrica de Gordon, a qual depende apenas do ângulo $k_\alpha v^\alpha$ entre o vetor de onda k_α e o vetor velocidade do dielétrico v^α . Este resultado é facilmente obtido e para exemplificar listamos alguns casos abaixo:

i) Considere o caso no qual a métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ é dada por

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \beta k^\mu k^\nu$$

e a inversa como sendo

$$\hat{q}_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta N)} k_\mu k_\nu.$$

Dado que o vetor de onda k_μ é um gradiente de uma dada superfície Σ , tem-se

$$k_{[\mu, \nu]} = 0.$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.3) segue que k_μ satisfaz

$$\hat{N}_{,\mu} = 0 \quad \implies \quad \hat{N} \equiv \text{constante}.$$

Para que este vetor siga um movimento geodésico em $\hat{q}_{\mu\nu}$, é necessário que k_μ deva ter norma constante em $\hat{q}_{\mu\nu}$. A expressão explícita para este vínculo é

$$\hat{N} = (\alpha + \beta N)N = 1, \quad (2.23)$$

onde a unidade foi escolhida apenas por simplicidade.

Nota-se que esta abordagem transforma o vetor de onda não-normalizado k_μ no espaço-tempo de Minkowski num vetor de onda do tipo-tempo normalizado em $\hat{q}_{\mu\nu}$. Este fato não viola a invariância de Lorentz, pois tudo se passa dentro do dielétrico. Observe que não é possível fixar $\hat{N}$ igual a zero, caso contrário, a métrica estaria mal definida. Este resultado notável, que é válido devido a norma constante de k_μ em $\hat{q}_{\mu\nu}$, não garante que o vetor de onda seja do tipo-nulo em qualquer geometria $\hat{q}_{\mu\nu}$. Outra característica importante é que a magnitude do vetor velocidade comóvel ao dielétrico

$$\hat{q}^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = \alpha + \beta(k.v)^2$$

não é positiva definida, o que permite um observador mais rápido que a luz no interior do meio. Por exemplo, se

$$\alpha + \beta(k.v)^2 = 0,$$

então, usando a Eq. (2.15), obtemos

$$\beta = \frac{(\mu_0\epsilon - 1)\alpha}{N}.$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.23), resulta em

$$\alpha = \frac{1}{\mu_0\epsilon N}.$$

Portanto, a métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ com esses valores de α e β produz o seguinte resultado: o vetor de onda k_μ torna-se normalizado e do tipo-tempo, enquanto que a velocidade do dielétrico sendo um vetor do tipo-tempo passa a seguir uma geodésica nula em $\hat{q}_{\mu\nu}$.

Note que a métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ apresentada nas seções precedentes não é única. Podemos ampliar o conjunto de métricas que têm as mesmas propriedades apresentadas acima acrescentando outros termos em $\hat{q}^{\mu\nu}$, desde que a condição

(1.3) seja válida. Para exemplificar estes casos consideramos:

ii) Quando a métrica polinomial é dada por

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \beta k^\mu k^\nu + \delta a^\mu a^\nu,$$

sendo a_μ a aceleração de k_μ na métrica de Minkowski. Sua inversa tem um termo extra e é dada por

$$\hat{q}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu + \Delta a_\mu a_\nu + \Lambda a_{(\mu} k_{\nu)},$$

onde

$$B = -\frac{\beta(1 - \delta a^2)}{X},$$

$$\Delta = -\frac{\delta(1 + \beta N)}{X},$$

e

$$\Lambda = \frac{\beta \delta \dot{N}}{2X}.$$

Aqui definimos $a^2 \equiv -a^\alpha a_\alpha$, $\dot{N} \equiv N_{,\mu} k^\mu$ e

$$X \equiv 1 - \delta a^2 + \beta N - \beta \delta \left(\frac{\dot{N}^2}{4} + N a^2 \right).$$

O aparecimento de um termo extra também acontece com a métrica inversa quando consideramos o termo $a^{(\mu} k^{\nu)}$, ao invés de $a^\mu a^\nu$. Em ambos os casos, um termo adicional necessariamente quebra a simetria polinomial entre a métrica e a sua inversa. No entanto, apresentamos os cálculos para este caso focando apenas na métrica com o termo $a^\mu a^\nu$ e indicamos que os resultados são muito semelhantes quando apenas o outro termo é considerado separadamente.

A condição de movimento geodésico para o vetor de onda leva-nos a

$$\hat{N} = (1 + \beta N)N + \frac{\delta}{4}\dot{N}^2 = 0.$$

Note-se que esta abordagem permite um movimento através de uma geodésica nula para o vetor de onda k_μ , pois foi possível escolher $\hat{N} = 0$ sem ambiguidades com a métrica. Este é o caso mais simples em que recupera-se os resultados de Gordon (k_μ sendo uma geodésica nula na métrica efetiva). A norma do vetor v^μ é indeterminada e, em princípio, pode ser escolhida igual ou diferente de zero, como vimos no caso acima.

iii) O caso mais geral, envolvendo derivadas de primeira ordem de k_μ , ocorre quando a métrica é expressa sob a forma

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \beta k^\mu k^\nu + \delta a^\mu a^\nu + \lambda a^{(\mu} k^{\nu)}$$

e sua inversa é dada por

$$\hat{q}_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu + \Delta a_\mu a_\nu + \Lambda a_{(\mu} k_{\nu)}.$$

Os coeficientes do tensor métrico covariante são dados por

$$B = -\frac{\beta(\alpha - \delta a^2) + \lambda a^2}{Z},$$

$$\Delta = -\frac{\delta(\alpha + \beta N) - \lambda^2 N}{Z},$$

e

$$\Lambda = -\frac{\lambda(2\alpha + \dot{N}\lambda) - 2\beta\delta\dot{N}}{2Z},$$

onde

$$Z \equiv \alpha \left[\alpha^2 - \alpha\delta a^2 + \alpha\beta N + \alpha\dot{N}\lambda - (\beta\delta - \lambda^2) \left(\frac{\dot{N}^2}{4} + Na^2 \right) \right].$$

Uma vez que este caso envolve mais graus de liberdade do que equações a serem satisfeitas, pode-se recuperar todos os resultados apresentados anteriormente com diferentes relações algébricas. Em particular, a magnitude do vector de onda é dada por

$$\hat{N} = (\alpha + \beta N + \lambda\dot{N})N + \frac{\delta}{4}\dot{N}^2.$$

Observe que a métrica e sua inversa têm o mesmo número de termos polinomiais conforme requerido no início. Isso não ocorreu nos últimos dois exemplos em que um termo extra era necessário na expressão da métrica inversa. Seguindo este raciocínio, na próxima seção vamos usar apenas os casos (i) e (iii) que satisfazem as condições (1.1) e (1.2). Além disso, como um exemplo prático, escolhemos o potencial Ψ como sendo o potencial Newtoniano e analisaremos as métricas $\hat{q}_{\mu\nu}$ resultantes deste método.

2.5 Aplicações

2.5.1 Identificando Ψ com o potencial gravitacional

Uma descrição importante da gravitação Newtoniana pode ser expressa em termos de uma representação geométrica do campo gravitacional. Isto pode ser feito fazendo uso de potenciais efetivos, os quais correspondem a conhecida aproximação pós-Newtoniana parametrizada (APNP) [73]. Podemos comparar alguns resultados da APNP – em particular, aqueles relativos às previsões da Relatividade Geral (RG) correspondentes a correções da teoria da gravitação de Newton no sistema solar – com alguma métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ dada pela condição de movimento geodésico no caso de queda livre, por exemplo.

Neste momento, ressaltamos que $\hat{q}_{\mu\nu}$ apenas imita as características de movimento geodésico de soluções da GR. Não há nenhuma equação dinâmica para $\hat{q}_{\mu\nu}$ e não estamos propondo tal teoria. Será analisada apenas uma analogia puramente cinemática.

Esta seção é principalmente para mostrar que a descrição de fenômenos físicos que envolvem acelerações como caminhos geodésicos numa dada geometria não é um privilégio da RG, apesar desta teoria ter sido a primeira a atender para esta possibilidade, mas apenas uma escolha delicada da métrica. Em acordo com as ideias de H. Poincaré sobre descrições geométricas do mundo físico [62], em tradução livre, citamos um de seus escritos sobre física e geometria:

Num espaço não-Euclidiano, no qual seria menos conveniente, entretanto tão legítimo como o nosso espaço comum, a enunciação poderia ser mais complicada, mas ainda assim seria possível.

Em outras palavras, se formos suficientemente habilidoso para escolher a métrica do espaço-tempo, um movimento acelerado numa determinada geometria pode ser devidamente descrito como uma geodésica em algum outro espaço.

Por conveniência, considere o espaço-tempo de Minkowski em coordenadas esféricas e um dado campo de observadores $u_\mu = (1, f(r), 0, 0)$, o qual é definido pelo gradiente da função $\Sigma = t \pm F(r)$ ⁴. Este vetor é acelerado na geometria de fundo e sua aceleração é dada por

$$a_\mu = u_{\mu,\nu} u^\nu = \frac{1}{2} N_{,\mu} = (0, -ff', 0, 0),$$

onde o símbolo $'$ significa derivada com respeito a coordenada radial r e $N \equiv u_\mu u_\nu \eta^{\mu\nu}$.

Podemos escolher a função escalar Ψ , que define a aceleração $a_\mu \equiv \partial_\mu \Psi$ como sendo o potencial newtoniano. Assim temos uma relação direta entre N e Ψ dada por

$$N = 1 + 2\Psi = 1 - \frac{r_H}{r},$$

onde $r_H \equiv 2M$ e M é a massa geométrica da fonte do campo gravitacional. Nesta fórmula, a unidade é importante para fixar $u_\mu u^\mu = 1$ na ausência do potencial gravitacional. Para seguir adiante nos cálculos de uma maneira mais didática, separamos a análise em duas etapas com respeito às formas funcionais da métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$:

i) Considere a métrica $\hat{q}^{\mu\nu}$ como segue

⁴Esta situação pode perfeitamente ser adaptada à descrição de vetores de onda em meios materiais.

$$\hat{q}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \beta u^\mu u^\nu. \quad (2.24)$$

A métrica inversa é

$$\hat{q}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{1 + \beta N} u_\mu u_\nu. \quad (2.25)$$

A condição para que u_μ siga uma geodésica nesta métrica é fornecida por

$$u_{\mu||\nu} \hat{u}^\nu = \frac{1}{2} \hat{N}_{,\mu} = 0, \quad (2.26)$$

onde $\hat{u}^\mu \equiv \hat{q}^{\mu\nu} u_\nu = (1 + \beta N) u^\mu$ e o módulo de u_μ em $\hat{q}_{\mu\nu}$ é

$$\hat{N} \equiv \hat{u}^\mu u_\mu = (1 + \beta N) N,$$

o qual impõe via Eq. (2.25) que este seja uma constante diferente de zero. Por conveniência, fixamos $\hat{N} = 1$. Isto implica que β é dado por

$$\beta = \frac{1 - N}{N^2} = \frac{r_H/r}{\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^2}.$$

Uma expansão em lei de potência em termos de $\epsilon \equiv r_H/r$ da métrica (2.25), que corresponde ao limite de campo fraco (grandes distâncias), resulta nas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \hat{q}_{00} &= 1 - \frac{r_H}{r} \left(1 + \frac{r_H}{r}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \hat{q}_{01} &= - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{r_H}{r}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{7/2}), \\ \hat{q}_{11} &= -1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{r_H}{r}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Vê-se que esta métrica não corresponde a solução de Schwarzschild linearizada (mesmo em coordenadas de Painlevé-Gullstrand devido ao expoente 3/2 ao invés de 1/2 na componente $\hat{q}_{01}$). Esta métrica é muito provavelmente similar a alguma aproximação pós-newtoniana se considerarmos fontes em movimento para o campo gravitacional [73].

ii) Considere $\hat{q}_{\mu\nu}$ dada por

$$\hat{q}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + B u_\mu u_\nu + \Delta a_\mu a_\nu + \Lambda a_{(\mu} u_{\nu)}. \quad (2.28)$$

As componentes da métrica são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} \hat{q}_{00} &= 1 + B, \\ \hat{q}_{01} &= f(B - \Lambda f'), \\ \hat{q}_{11} &= -1 + f^2(B + \Delta f'^2 - 2\Lambda f'). \end{aligned} \quad (2.29)$$

As demais componentes espaciais são idênticas às da métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. A condição que leva u_μ a seguir uma trajetória geodésica nesta métrica é imposta sobre sua norma através de

$$\hat{N} = \frac{N - \Delta(a^2 N + \dot{N}^2/4)}{\mathcal{Z}} \equiv const., \quad (2.30)$$

onde

$$\mathcal{Z} \equiv \left(1 + \frac{\dot{N}\Lambda}{2}\right)^2 - a^2\Delta + NB + a^2N\Lambda^2 - B\Delta \left(a^2N + \frac{\dot{N}^2}{4}\right).$$

Analogamente a seção anterior, denotamos por $\dot{N}$ o termo $N_{,\mu}u^\mu$.

Neste caso, pode-se escolher tanto $\hat{N} = 0$ quanto $\hat{N} = 1$. Analisemos ambos casos separadamente:

ii.a) Se $\hat{N} = 0$, a Eq. (2.30) implica em

$$\Delta = \frac{N}{a^2 N + \dot{N}^2/4}.$$

Dado que u_μ é do tipo-nulo na métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$, espera-se obter as componentes da métrica segundo a aproximação PNP responsáveis por descrever corretamente a deflexão dos raios luminosos, a qual é dada pela componente $1 - 1$ da métrica. Portanto, com as considerações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
B &= -1 + \frac{1}{\frac{r_H}{r} \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)}, \\
\Lambda &= \frac{B}{f'}, \\
\Delta &= 4 \left(\frac{r^2}{r_H}\right)^2 \left(1 - \frac{r_H}{r}\right),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $f' = -(1/2r)\sqrt{r_H/r}$. Em termos das componentes da métrica, temos

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{00} &= 1 + \frac{r}{r_H} - \frac{r_H}{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\
\hat{q}_{01} &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2}), \\
\hat{q}_{11} &= -1 - \frac{r_H}{r} + \left(\frac{r_H}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Note que um termo linear em r não esperado aparece em $\hat{q}_{00}$ devido a nossa consideração. Se tentamos eliminar este termo, inevitavelmente o regime plano assintótico é perdido pelas demais componentes da métrica. Deste modo, o problema persiste.

ii.b) No caso em que $\hat{N} = 1$, podemos reproduzir a aproximação linear da solução de Schwarzschild. Isto é,

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{00} &= 1 - \frac{r_H}{r} + 2 \left(\frac{r_H}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\
\hat{q}_{01} &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2}), \\
\hat{q}_{11} &= -1 - \frac{r_H}{r} + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Este resultado só é possível sendo os parâmetros da métrica dados por

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{r_H}{r} \left(1 + 2\frac{r_H}{r}\right)^{-1}, \\
\Lambda &= \frac{B}{f'}, \\
\Delta f'^2 &= -\left(1 + 3\frac{r_H}{r}\right) \left(1 + 2\frac{r_H}{r}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Observe que $\hat{q}_{00}$ difere dos resultados APNP já na segunda ordem de aproximação em ϵ , o que certamente produzirá discrepâncias no termo de ordem superior na expansão.

Estes cálculos foram feitos basicamente de modo a ilustrar algumas analogias entre as geometrias $\hat{q}_{\mu\nu}$ e aquelas estudadas em modelos análogos. Por esta razão, a primeira ordem de aproximação é suficiente para correlacioná-las cinematicamente. Se levarmos a sério essa abordagem, procurando uma analogia cinemática perfeita, a introdução de um potencial não-linear Ψ na equação de Newton torna-se necessário e, então, pode-se reproduzir exatamente a solução de Schwarzschild. Neste caso, devido ao número de parâmetros arbitrários, podemos demonstrar facilmente que num cenário similar ao tratado previamente (onde $\hat{N} = 0$), se impusermos de saída que a métrica (2.28) é Schwarzschild, obtemos um potencial dado por

$$\Psi = -\frac{1}{2} \frac{r_H}{r} \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-2}.$$

Esta generalização do caso anterior envolve uma questão muito delicada sobre a dinâmica de Ψ , pois não conhecemos na física cotidiana um potencial deste tipo. Por isso, neste capítulo, discutimos apenas as propriedades cinemáticas da trajetória de partículas num regime bem estabelecido para que haja uma interpretação física imediata daquilo que estamos propondo.

2.5.2 Movimento circular no espaço de Minkowski

Consideremos o caso simples de um corpo acelerado se movendo circularmente numa dada variedade. Para isso, começamos por escrever a seguinte métrica em coordenadas cilíndricas (t, r, ϕ, z) , dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r)d\phi^2 + 2h(r)d\phi dt], \quad (2.35)$$

onde a é uma constante. Escolhemos a seguinte base de tétradas dadas implicitamente pelas 1-formas

$$\begin{aligned}
\theta^0 &= a(dt + h d\phi), \\
\theta^1 &= a dr, \\
\theta^2 &= a \Delta d\phi, \\
\theta^3 &= a dz,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde denotamos $\Delta \equiv \sqrt{h^2 - g}$. As únicas componentes não nulas do tensor de Riemann R^A_{BCD} na base escolhida são

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= \frac{1}{4a^2} \left(\frac{h'}{\Delta} \right)^2, \\
R^0_{112} &= -\frac{1}{2a^2} \left(\frac{h''}{\Delta} - \frac{h' \Delta'}{\Delta^2} \right), \\
R^0_{202} &= \frac{1}{4a^2} \left(\frac{h'}{\Delta} \right)^2, \\
R^1_{212} &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{3}{4} \left(\frac{h'}{\Delta} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde $'$ significa derivada com respeito a coordenada radial r .

No caso $R^A_{BCD} = 0$, obtemos

$$h' = 0; \quad \Delta'' = 0.$$

Resolvendo estas equações, encontramos

$$h \equiv \text{constante}; \quad \Delta \equiv wr,$$

onde w é uma constante. Portanto, Eq. (2.35) torna-se

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + (h^2 - w^2 r^2)d\phi^2 + 2h d\phi dt]. \tag{2.38}$$

Se considerarmos o campo de observadores

$$v^\mu = \frac{1}{a\sqrt{h^2 - w^2 r^2}} \delta_2^\mu,$$

a este vetor corresponde um vetor aceleração dado por

$$a_\mu = \left(0, \frac{w^2 r}{(h^2 - w^2 r^2)}, 0, 0 \right).$$

Isto implica que $a_\mu = \partial_\mu \Psi$, sendo

$$2\Psi = -\ln(h^2 - w^2 r^2).$$

Esta situação é similar ao caso anterior uma vez que a aceleração é um gradiente. O parâmetro β da métrica (1.1), dado pela expressão (2.22), pode ser escrito como

$$1 + \beta = h^2 - w^2 r^2,$$

onde consideramos $\alpha = 1$, por simplicidade. O elemento de linha construído com esta métrica é definido como sendo

$$\frac{ds^2}{a^2} = \frac{w^4 r^4 - w^2 r^2 h^2 + 1}{(h^2 - w^2 r^2)^2} dt^2 + d\phi^2 + \frac{2h}{h^2 - w^2 r^2} d\phi dt - dr^2 - dz^2. \quad (2.39)$$

No caso em que $h^2 - w^2 r^2 > 0$, curvas aceleradas do tipo-tempo fechadas (CTC) aparecem na geometria de fundo. Este mapa leva estas curvas em geodésicas do tipo-tempo fechadas (CTG) na geometria $\hat{q}_{\mu\nu}$. Observe que há um singularidade real em $r = h/w$ e que $\hat{q}_{00}$ troca de sinal em

$$w^2 r_\pm^2 = \frac{h^2 \pm \sqrt{h^4 - 4}}{2}.$$

De modo a esclarecer o que está ocorrendo com estas geodésicas em particular e quais as propriedades não-triviais que emergem deste resultado, pretende-se fazer uma análise mais detalhada deste caso. Entretanto, de começo, tem sido muito difícil entender como foi possível encontrar curvas do tipo-tempo fechadas no espaço de Minkowski próximo da origem. Esta questão ainda não foi esclarecida completamente mas, por não afrontar diretamente a proposta do nosso método, deixamos sua análise minuciosa para ser feita num trabalho posterior, fora do escopo desta tese.

2.5.3 Movimento circular na geometria de Gödel

A métrica de Gödel [22] pode ser obtida da métrica apresentada na seção anterior (2.35), onde a é uma constante relacionada com a vorticidade $a = 2/\omega^2$ e as funções $h(r)$ e $g(r)$ são dada por

$$h(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r;$$

$$g(r) = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1).$$

Na Ref. [57] foi apontado as propriedades acausais de uma partícula se movendo numa órbita circular ao redor do eixo z com quadri-velocidade

$$v^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{a \sinh r \sqrt{\sinh^2 r - 1}}, 0 \right).$$

A este vetor corresponde um vetor aceleração dado por

$$a^\mu = \left(0, \frac{\cosh r [2 \sinh^2 r - 1]}{a^2 \sinh r [\sinh^2 r - 1]}, 0, 0 \right).$$

O que significa que $a_\mu = \partial_\mu \Psi$, sendo

$$\Psi = - \ln(\sinh r \sqrt{\sinh^2 r - 1}).$$

Novamente estamos numa situação onde a aceleração é o gradiente de um potencial. Neste caso, o parâmetro β da métrica (1.1) é dado por

$$1 + \beta = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1).$$

A métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ tem então a seguinte expressão escrita em termos do elemento de linha infinitesimal

$$\frac{\hat{d}s^2}{a^2} = \frac{3 - \sinh^4 r}{(\sinh^2 r - 1)^2} dt^2 + d\phi^2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{\sinh^2 r - 1} d\phi dt - dr^2 - dz^2. \quad (2.40)$$

A partir da análise das geodésicas na geometria de Gödel, o domínio $r < r_c$ onde $\sinh^2 r_c = 1$ separa a região causal das regiões acausais do

espaço-tempo. Isto está relacionado com o fato de que uma geodésica que atinge o valor $r = 0$ está confinada dentro do domínio Ω_c definido pela região $0 < r < r_c$ (ver Ref. [51] para obter maior detalhes sobre o movimento geodésico na métrica de Gödel). No entanto, o campo gravitacional é finito na região $r = r_c$. Nada semelhante acontece na métrica (2.40), já que em $\sinh^2 r = 1$ existe uma singularidade real nesta métrica. Somente o domínio exterior é permitido. Isto significa que para este tipo de curva acelerada na geometria de Gödel, o domínio permitido para a métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ é precisamente toda a região acausal.

Assim resumimos este capítulo com o seguinte:

Lema. *Para qualquer caminho acelerado Γ descrito pelo quadri-vetor velocidade v_μ e aceleração a_μ em uma determinada geometria Riemanniana $g_{\mu\nu}$ sempre podemos construir outra geometria $\hat{q}_{\mu\nu}$, que chamamos de métrica arrastada, que depende apenas de $g_{\mu\nu}$, v_μ e a_μ tal que o caminho Γ é uma geodésica em $\hat{q}_{\mu\nu}$.*

No próximo capítulo analisaremos o que acontece quando assumimos uma realidade física para $\hat{q}_{\mu\nu}$ e uma certa universalidade no sentido de satisfazer o princípio da equivalência da relatividade geral, porém no contexto de uma teoria escalar da gravitação. Resultados altamente não-triviais serão obtidos e novos caminhos surgirão para este tipo de abordagem.

Capítulo 3

Teoria escalar-geométrica da gravitação

Neste capítulo, veremos como a métrica efetiva apresentada no capítulo anterior pode ganhar um caráter universal (deixando de ser somente efetiva), quando assumimos que esta geometria é aquela que descreve os fenômenos gravitacionais e a única que interage diretamente com a matéria [50].

Nos últimos anos, estudos têm sido feitos revisitando a teoria escalar de gravitação e apontando as razões pelas quais essa teoria foi abandonada – cf. [17], [18], [67] e [73] e referências para uma revisão completa sobre as teorias escalares da gravitação. As críticas vão desde os fundamentos teóricos até os observacionais e são baseadas nas hipóteses feitas desde a proposta de Einstein-Grossmann [71], que diz que as teorias escalares da gravitação devem essencialmente satisfazer três condições:

- A teoria é descrita numa geometria conformalmente plana e a métrica de Minkowski é observável;
- A fonte do campo gravitacional é o traço do tensor momento-energia;
- O campo escalar é a generalização segundo a relatividade especial do potencial newtoniano.

Neste capítulo, apresenta-se uma nova possibilidade para a descrição da interação gravitacional em termos de um campo escalar Φ , isto é, uma gravitação escalar-geométrica (GSG)¹. Os três pressupostos acima citados não se realizam em nossa teoria. Em particular, veremos que a crença geral de que a única fonte possível de uma gravitação escalar é o traço do tensor momento-energia não é válida.

Esclarecemos desde o início que esta não é uma gravitação escalar no sentido da relatividade especial e o adjetivo geométrico aponta-nos sua semelhança com a relatividade geral, ou seja, estamos construindo uma teoria métrica da gravitação. Em outras palavras, seguimos a idéia principal da relatividade geral e assumimos como um *a priori* que a gravidade é descrita por uma geometria riemanniana. Na relatividade geral, as 10 componentes do tensor métrico são as variáveis básicas da teoria. Na GSG, o tensor métrico é determinado pelas derivadas de uma quantidade física fundamental representada pelo campo escalar Φ .

Isto significa que, apesar de fazermos uso de um campo escalar para representar todos os processos gravitacionais, nós não seguimos os exemplos anteriores de gravitação escalar, por exemplo, a “Entwurf Theory” de Einstein e Grossmann. Antes de apresentar as razões que nos motivaram a realizar esta proposta, vamos resumir as principais características da GSG:

- A interação gravitacional é descrita por um campo escalar Φ ;
- O campo Φ satisfaz uma dinâmica não linear;
- A teoria satisfaz o princípio da covariância geral, ou seja, esta não é uma teoria restrita ao domínio da relatividade especial e de espaços planos;
- Todo tipo de matéria e energia interage com Φ unicamente através da

¹GSG é a sigla em inglês para *geometric scalar gravity*. Decidimos manter a sigla para preservar o nome originalmente dado.

métrica pseudo-riemanniana

$$q_{\mu\nu} = a\eta_{\mu\nu} + b\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi; \quad (3.1)$$

- As partículas teste seguem geodésicas na métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$;
- Φ está relacionado de uma maneira não trivial com o potencial newtoniano Φ_N ;
- As ondas eletromagnéticas se propagam como geodésicas nulas na métrica $q^{\mu\nu}$.

Os parâmetros a e b são funcionais do campo escalar Φ (que serão especificados quando fixarmos a lagrangiana do campo Φ). A métrica auxiliar (Minkowski) $\eta^{\mu\nu}$ é inobservável, pois o campo gravitacional se acopla com a matéria somente através de $q^{\mu\nu}$. Seguimos os principais passos da relatividade geral ao assumir que uma única entidade geométrica interage com todas as formas de matéria e energia e que a geometria subjacente a todos os eventos é controlada pelos fenômenos gravitacionais.

A partir deste postulado segue imediatamente que a geometria do espaço-tempo é um processo evolutivo identificado com a dinâmica do campo gravitacional. Esta hipótese da relatividade geral está contida em cada experimento como um exemplo específico de uma geometria resolvendo essa dinâmica.

O segundo postulado importante da relatividade geral afirma que a métrica acopla-se universal e minimamente a todos os campos do modelo padrão, substituindo em toda parte a métrica de Minkowski pela métrica do espaço-tempo. Vamos aceitar também este postulado, mas investigamos uma forma especial para a métrica riemanniana que representa o campo gravitacional. Vamos descrever a origem deste distanciamento com a relatividade geral numa seção posterior depois de analisar o caso da relatividade geral.

Uma observação final diz respeito ao nosso método de identificar a forma correta da dinâmica do campo escalar. A ação de uma dada teoria é geralmente construída com certos princípios e regras. Por exemplo, poder-se-

ia querer impor covariância geral, princípios de simetria, tais como a invariância de calibre ou alguma limitação na ordem das derivadas. Embora estes princípios em específico sejam preservados na nossa teoria, naturalmente eles não são suficientes. Adotamos um procedimento voltado para as observações e tentamos determinar a forma da dinâmica da teoria *a posteriori*, como uma expansão em série no campo Φ cujos coeficientes são fixados a partir das observações. Isto significa que avançaremos passo a passo, se for o caso, adicionando novos termos a lagrangiana quando necessário e continuaremos tal procedimento até que a teoria alcance sua forma final, descrevendo corretamente o máximo possível de fenômenos gravitacionais. No que segue, apresenta-se um exemplo de como esta estratégia pode ser usada na análise do movimento de partículas teste (como as órbitas planetárias) do campo gerado por um corpo massivo no regime quase-linear.

3.1 Descrição da relatividade geral como uma teoria de campo

Embora a relatividade geral seja normalmente apresentada no quadro de uma geometria riemanniana, é possível descrever totalmente a teoria da gravitação de Einstein em termos de um campo de spin-2 propagando-se num espaço-tempo arbitrário de fundo. O caso minkowskiano foi investigado por diversos autores (ver detalhes em [24] e [14]) e para uma geometria de fundo genérica, o modelo foi descrito por [8] e [23].

A ideia principal pode ser resumida da seguinte forma: considere um espaço de fundo dotado da métrica Minkowski (apenas para simplificar nossa exposição). Em um sistema de coordenadas lorentziano a métrica de fundo toma a forma constante. Podemos até assumir sistemas de coordenadas gerais. No entanto, o tensor de curvatura permanece identicamente nulo:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\eta_{\epsilon\sigma}) = 0.$$

De agora em diante $\eta_{\mu\nu}$ corresponde às componentes (não necessariamente

constantes) da métrica de Minkowski num sistema de coordenadas qualquer. Sendo assim, introduzimos um tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ de ordem 2 e escrevemos

$$g^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Esta forma binomial é uma expressão exata para a métrica $g^{\mu\nu}$. Entretanto, note que sua inversa, o tensor covariante $g_{\mu\nu}$, não possui uma forma binomial em general, mas pode ser escrita como uma série infinita:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha} h^{\alpha}_{\nu} + \dots$$

Existem dois postulados principais nos fundamentos da relatividade geral:

- A geometria de Minkowski não é observável. Matéria e energia interagem gravitacionalmente apenas através da combinação $\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ e suas derivadas. Toda partícula teste em um campo gravitacional move-se ao longo de uma geodésica em relação à métrica $g_{\mu\nu}$;
- A dinâmica da gravitação é descrita por uma equação que relaciona o tensor de curvatura contraído $R_{\mu\nu}$ com o tensor momento-energia da matéria.

A teoria escalar da gravitação que estamos apresentando lida com uma modificação da métrica plana de Minkowski semelhante à relatividade geral. No entanto, há uma diferença muito importante em relação à origem da curvatura do espaço-tempo e da sua dinâmica. Em nosso modelo da forma (binomial) da métrica $q_{\mu\nu}$ vem de um princípio que explicaremos agora.

3.2 O surgimento da geometria na gravitação escalar

Nesta seção vamos mostrar que uma métrica $q_{\mu\nu}$ naturalmente aparece em certas teorias não-lineares de campos escalares. Vamos começar por consi-

derar a seguinte lagrangeana não-linear no espaço-tempo de Minkowski

$$L = V(\Phi) w, \quad (3.3)$$

onde $w \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$. Para $V = 1/2$ este é apenas o caso de um campo escalar livre, sem massa, satisfazendo a equação de Klein-Gordon. No caso geral, o termo cinético usual é rescalado por uma amplitude – um potencial $V(\phi)$ – dependente do campo. Lembramos que estamos usando $\eta^{\mu\nu}$ para apresentar a teoria num sistema de coordenadas arbitrário, uma vez que a teoria satisfaz o princípio da covariância e, portanto, não há nenhum sistema de referência privilegiado. A equação de campo é

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \frac{1}{2} \frac{V'}{V} w = 0, \quad (3.4)$$

onde $V' \equiv dV/d\Phi$ e η é o determinante de $\eta_{\mu\nu}$.

Um resultado notável é que a equação de campo acima (3.4) pode ser vista como uma equação de Klein-Gordon para um campo Φ sem massa se propagando num espaço-tempo curvo cuja geometria é governada pelo próprio campo. Em outras palavras, a mesma dinâmica pode ser escrita ou numa métrica de Minkowski ou numa outra geometria construída em termos do próprio campo escalar. Seguindo os passos estabelecidos em [54], introduzimos o tensor métrico contravariante $q^{\mu\nu}$ pela fórmula binomial

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi, \quad (3.5)$$

onde $\partial^\mu \Phi \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$ e os parâmetros α e β são funções adimensionais² de Φ . A expressão covariante correspondente, definida como a inversa $q_{\mu\nu} q^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$,

²A quantidade w pode ser escrita em termos de seu correspondente

$$\Omega \equiv \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi q^{\mu\nu},$$

se especificarmos a lagrangiana da teoria. De fato, temos

$$\Omega = (\alpha + \beta) w.$$

A partir desta expressão, fornecendo α e β obtemos Ω como função de w e Φ .

é dada também por uma expressão binomial³:

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \quad (3.6)$$

Agora perguntamos se é possível encontrar α e β , de tal maneira que a dinâmica do campo (3.4) tome a forma

$$\square \Phi = 0, \quad (3.7)$$

sendo $\square$ o operador de Laplace-Beltrami relativo à métrica $q_{\mu\nu}$, isto é

$$\square \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-q}} \partial_\mu (\sqrt{-q} q^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi).$$

Para responder a esta questão, calculamos o determinante da métrica $q = \det q_{\mu\nu}$, usando o teorema de Cayley-Hamilton [55]

$$-4 \det \mathbf{A} = \text{Tr} \mathbf{A}^4 - \frac{4}{3} \text{Tr} \mathbf{A} \text{Tr} \mathbf{A}^3 - \frac{1}{2} (\text{Tr} \mathbf{A}^2)^2 + \text{Tr} \mathbf{A}^2 (\text{Tr} \mathbf{A})^2 - \frac{1}{6} (\text{Tr} \mathbf{A})^4,$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz. Sendo assim, um cálculo direto nos dá

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\eta}}{\alpha \sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}. \quad (3.8)$$

Usando a equação (3.5), segue que

$$q^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = (\alpha + \beta) \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi. \quad (3.9)$$

O resultado final é resumido no seguinte lema:

Lema. *Dada a lagrangiana $L = V(\Phi)w$ com um potencial arbitrário $V(\Phi)$, a teoria de campo satisfazendo a Eq. (3.4) no espaço-tempo de Minkowski é equivalente a um campo sem massa satisfazendo a equação de Klein-Gordon $\square \Phi = 0$ na métrica $q^{\mu\nu}$ dado que as funções $\alpha(\Phi)$ e $\beta(\Phi)$ satisfazem a condição*

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V. \quad (3.10)$$

O fato considerável é que esta equivalência é válida para qualquer dinâmica descrita no espaço-tempo de Minkowski pela lagrangiana L . Este lema pode ser extendido a outros tipos de lagrangianas não-lineares (ver detalhes em [21]).

³Métricas deste tipo são também relevantes num outro contexto. Ver, por exemplo, as teorias descritas em [36].

3.3 A prescrição da métrica geral: rumo à geometrização da gravitação escalar

Nesta seção, mostramos como uma teoria não-linear com base na lagrangiana L seleciona uma classe de tensores métricos associados com a dinâmica do campo escalar. É tal propriedade apenas uma simples curiosidade matemática ou é o lema apresentado anteriormente apontando para um programa mais ambicioso? Será que a métrica associada $q^{\mu\nu}$ desempenha um papel mais fundamental? A seguinte hipótese dá um passo na direção de construir uma teoria para a interação gravitacional com base no campo escalar Φ .

Hipótese Fundamental. *A interação gravitacional é mediada pelo campo escalar Φ . Porém, todas as formas de matéria e energia interagem com Φ somente por meio da métrica $q_{\mu\nu}$ e suas derivadas de forma covariante. Ou seja, a gravitação é um fenômeno métrico.*

Ao longo deste capítulo exploraremos esta hipótese para ver se ela é válida não só do ponto de vista formal, mas também em comparação com as observações experimentais. Em particular, vamos examinar a situação referente aos testes clássicos da relatividade geral.

Vale a pena ressaltar que o campo escalar não é a generalização *à la* relatividade especial do potencial newtoniano. Na verdade, seguindo o esquema da relatividade geral [12] e assumindo que as partículas teste seguem geodésicas relativas à geometria $q_{\mu\nu}$, temos que

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i = -\partial^i \Phi_N, \quad (3.11)$$

onde estamos assumindo uma configuração de campo fraco, estático e baixas velocidades para as partículas teste.

Da Eq. (3.6), temos

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} \partial^i \ln \alpha.$$

Segue daí que o potencial newtoniano Φ_N é aproximadamente dado por

$$\Phi_N \approx -\frac{1}{2} \ln \alpha.$$

Esta fórmula estabelece a relação entre a métrica $q_{\mu\nu}$ e o potencial newtoniano Φ_N como sendo

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} \approx 1 + 2\Phi_N.$$

Além disso, usando a equação (3.7), obtemos corretamente o limite newtoniano na ausência de matéria:

$$\nabla^2 \Phi_N = 0.$$

Este foi o ponto de partida do caminho seguido por Einstein na construção de sua teoria tensorial da gravitação. A gravitação escalar geométrica segue por outro caminho que descreveremos a seguir. A partir de agora, vamos explorar as conseqüências da extrapolação a partir da aproximação acima, considerando-a uma expressão geral entre α e Φ , ou seja,

$$\alpha = e^{-2\Phi}. \quad (3.12)$$

A próxima tarefa é determinar a dependência funcional de β em relação a Φ ou a forma do potencial $V(\Phi)$, já que

$$\beta = \alpha(\alpha^2 V - 1). \quad (3.13)$$

Antes de seguir adiante, faremos alguns comentários sobre as versões anteriores de teorias escalares infrutíferas da gravitação.

3.4 As dificuldades das teorias escalares da gravitação precedentes

Uma das principais desvantagens das propostas antigas para a gravitação escalar origina-se a partir da relação entre o campo Φ e o potencial newtoniano Φ_N , na tentativa de generalizar a equação de Poisson [18]. Nordström

foi o primeiro que tentou uma tal generalização segundo os argumentos da relatividade especial da gravitação de Newton [40]. Ele fez a suposição mais simples, impondo que

$$\square \Phi = -4\pi G\rho, \quad (3.14)$$

onde ρ é a densidade de matéria. Infelizmente, a massa inercial das partículas teste não era mais constante e, além disso, a teoria não podia ser derivada a partir de um princípio variacional. Em seguida, o próprio Einstein [71] afirmou ter encontrado de uma maneira muito clara a possível generalização correta escrevendo a equação na forma

$$\square \Phi = -\kappa T, \quad (3.15)$$

onde T é o traço do tensor momento-energia. Nesta teoria, partículas teste se movem de acordo com a equação

$$\frac{d}{d\tau}(m(x^\alpha(\tau))v^\mu(\tau)) = m(x^\alpha(\tau))\eta^{\mu\nu}\partial_\nu \Phi(x^\alpha(\tau)), \quad (3.16)$$

onde τ é o tempo próprio. Note que ainda existe uma dependência espaço-temporal da massa m fornecida pela equação

$$m = m_0 e^{(\Phi - \Phi_0)},$$

onde m_0 e Φ_0 são constantes. A teoria melhorada de Einstein tem um princípio de mínima ação e satisfaz o princípio da equivalência. No entanto, o campo eletromagnético não interage com a gravidade. Seguindo nesta direção, a melhor proposta foi a reformulação da teoria de Nordström feita por Einstein e Fokker, em que eles estabelecem

$$R = 24\pi G T.$$

onde R é o escalar de curvatura. No entanto, o campo electromagnético permanece desacoplado do campo gravitacional.

Segue então um resumo das principais desvantagens das propostas acima:

- *A existência de um sistema de referência preferencial:* todas teorias relativística especiais adotam esta hipótese desde o começo.
- *A fonte da gravitação escalar é o traço do tensor momento-energia:* esta é a origem da principal dificuldade de todas as teorias escalares precedentes; o campo gravitacional não se acopla com o campo eletromagnético.
- *A gravitação escalar é conformalmente plana:* a geometria de fundo (Minkowski) é observável.

Mesmo após o advento da teoria da relatividade geral e seus sucessos na descrição das observações, algumas teorias alternativas que envolvem campos escalares em diferentes cenários tem sido sugeridas até os dias de hoje, com o objetivo de serem competitivas em explicar os testes observacionais e, às vezes, trazendo física nova (ver alguns exemplos em [17, 18, 67, 65]).

Nossa teoria escalar da gravidade supera os problemas mencionados acima: a estrutura do tensor métrico (3.5) é covariante desde o início, a formulação via teoria de campos faz com que a geometria de fundo não seja observável e o princípio variacional permite um acoplamento completo do tensor momento-energia. Vale a pena destacar a hipótese de que todos os corpos se movem ao longo de geodésicas em relação à métrica

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi.$$

Como uma realização deste procedimento, veremos a seguir como os campos eletromagnéticos acoplam-se ao campo gravitacional somente através da métrica $q_{\mu\nu}$.

3.5 O campo eletromagnético

O princípio da equivalência afirma que todo tipo de matéria e energia interage com o campo gravitacional através do acoplamento mínimo com a métrica

$q_{\mu\nu}$. Os antigos modelos gravitacionais escalares assumiam que o campo escalar só gerava uma métrica conformalmente plana e que ele acoplava-se apenas com traço do tensor momento-energia. Essas hipóteses não se aplicam aqui, pois em nossa teoria escalar-geométrica da gravitação (GSG), o campo eletromagnético interage com o campo escalar através da métrica $q_{\mu\nu}$ como qualquer outro tipo de matéria e energia.

Assim, a parte eletromagnética da lagrangiana é dada por

$$L = F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} q^{\mu\nu} q^{\alpha\beta}. \quad (3.17)$$

A equação de campo correspondente obtida através do princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-q} d^4x L = 0,$$

é dada por

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (3.18)$$

onde $F^{\mu\nu} \equiv F_{\alpha\beta} q^{\alpha\mu} q^{\beta\nu}$. O ponto e vírgula (;) representa aqui a derivada covariante com respeito a métrica $q_{\alpha\beta}$. As condições de Hadamard sobre as descontinuidades (ver apêndice [A]) fornecem a relação de dispersão

$$k_\mu k_\nu q^{\mu\nu} = 0,$$

onde $k_\mu \equiv \partial_\mu \Sigma$ é o gradiente da função Σ que define a superfície de descontinuidade. Assim, as ondas eletromagnéticas se propagam ao longo de geodésicas nulas na geometria $q_{\mu\nu}$.

Vamos agora completar a teoria especificando os parâmetros α e β como funções de Φ . Seguindo a estratégia que escolhemos, devemos olhar para os vínculos impostos pelas observações. Isto é feito, antes de mais nada, olhando para o campo gravitacional de objetos esfericamente simétricos.

3.6 A dinâmica da gravitação escalar

O ponto de partida habitual para construir uma teoria consiste em escrever uma ação guiado por certos princípios, como a covariância geral, as equações

diferenciais de segunda ordem, o limite newtoniano correto e assim por diante. Uma teoria física deve, porém, ser refutável por suas consequências observacionais. A GSG contém dois ingredientes principais: a interação do campo gravitacional Φ com a matéria e todo tipo de energia se dá através do tensor métrico $q_{\mu\nu}$ e a dinâmica de Φ relacionada com a lagrangiana

$$L = V(\Phi) w$$

é escrita na geometria de fundo auxiliar não-observável (Minkowski). Para selecionar dentre todas as possíveis lagrangianas na forma acima, procuramos indicações das várias circunstâncias em que experimentos confiáveis foram realizados. Nesse sentido, iniciamos a discussão analisando as consequências da GSG para o sistema solar. Isto, naturalmente, é não suficiente e para especificar completamente a dinâmica teremos de olhar para outras propriedades. A análise das órbitas planetárias permite, no entanto, colocar restrições na teoria como vamos explicar agora.

A solução estática e esfericamente simétrica

Qualquer teoria da gravitação deve levar em consideração as órbitas planetárias. Na relatividade geral estes movimentos são descritos por geodésicas da geometria de Schwarzschild. Na GSG, as partículas seguem geodésicas na métrica $q_{\mu\nu}$. Sendo assim, nesta seção basicamente veremos qual a relação entre $q_{\mu\nu}$ e a métrica Schwarzschild, pois esta é a solução fornecida pela relatividade geral ao problema com simetria esférica e estático.

Começamos por reescrever a métrica auxiliar de fundo (Minkowski) em coordenadas esféricas

$$ds_M^2 = dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (3.19)$$

Mudando a coordenada radial de acordo com $R = \sqrt{\alpha} r$, onde $\alpha = \alpha(r)$, temos

$$ds_M^2 = dt^2 - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 - \alpha r^2 d\Omega^2. \quad (3.20)$$

Dado que estamos procurando por soluções estáticas esfericamente simétricas, assumimos que o campo escalar depende apenas da variável radial $\Phi = \Phi(r)$. Logo, a métrica gravitacional (3.6) fica sendo dada por

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.21)$$

donde denotamos

$$B \equiv \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2.$$

Neste caso, a equação de campo (3.7) se reduz a

$$\frac{r^2 \sqrt{\alpha + \beta}}{\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^{-1} \frac{d\Phi}{dr} = \Phi_0, \quad (3.22)$$

sendo Φ_0 uma constante. Sabendo que $\alpha(\Phi) = e^{-2\Phi}$, procedemos por sucessivas aproximações e obtemos um *ansatz* para a forma do potencial V como segue:

$$V(\Phi) = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}. \quad (3.23)$$

Substituindo as Eqs. (3.12) e (3.23) na Eq. (3.22), obtemos

$$e^{2\Phi} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\Phi_0}{r^2} \quad (3.24)$$

e, portanto,

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(2c_1 - 2\frac{\Phi_0}{r} \right), \quad (3.25)$$

onde c_1 é uma constante de integração. O comportamento assintótico do campo Φ implica que $c_1 = 1/2$ e $\Phi_0 = MG/c^2$, sendo M a massa da fonte gravitacional, G é a constante de Newton e c a velocidade da luz, isto é

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_H}{r} \right), \quad (3.26)$$

sendo $r_H \equiv 2MG/c^2$. O campo escalar Φ se reduz ao potencial newtoniano no limite de campo fraco. Usando α e β dados por (3.12) e (3.13), respectivamente, o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.27)$$

Esta geometria tem a mesma forma que aquela da relatividade geral e produz o mesmo regime observado para os testes solares. Assim, a teoria da gravitação escalar-geométrica corresponde a uma boa descrição das órbitas planetárias e também da trajetórias dos raios de luz, que seguem geodésicas (tipo-tempo e tipo-nulo, respectivamente) na geometria $q_{\mu\nu}$. Se novas observações exigirem uma modificação da métrica na vizinhança de um corpo maciço isto deve ser feito através do ajuste da forma do potencial $V(\Phi)$. Até o momento, a escolha feita de $V(\Phi)$ é considerada satisfatória.

3.7 Princípio variacional

Agora que encontramos um possível potencial para o campo escalar, estamos na posição de escrever sua equação dinâmica. Começamos então pela ação escrita na geometria auxiliar de Minkowski. Do princípio variacional

$$\delta S_M = \delta \int \sqrt{-\eta} d^4x L,$$

obtemos:

$$\delta S_M = - \int \sqrt{-\eta} d^4x (V' w + 2V \square_M \Phi) \delta \Phi, \quad (3.28)$$

onde

$$\square_M \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)$$

é o operador de d'Alembert no espaço-tempo plano (num sistema de coordenadas arbitrário). Usando as relações do lema para passar ao espaço-tempo curvo, temos

$$\delta S_M = -2 \int \sqrt{-q} d^4x \sqrt{V} \square \Phi \delta \Phi. \quad (3.29)$$

Na presença de matéria, adicionamos um termo correspondente a L_m à ação total:

$$S_m = \int \sqrt{-q} d^4x L_m. \quad (3.30)$$

Uma primeira variação deste termo resulta em

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-q} d^4x T^{\mu\nu} \delta q_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

onde definimos o tensor momento-energia de forma padrão

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}} \frac{\delta(\sqrt{-q} L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}.$$

A covariância geral da teoria leva a seguinte lei de conservação do tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

A equação de movimento é obtida pelo princípio de mínima ação

$$\delta S_M + \delta S_m = 0.$$

Até este ponto estamos seguindo os caminhos da relatividade geral. Entretanto, na teoria GSG, a métrica $q_{\mu\nu}$ não é a quantidade fundamental. Deste modo, temos que escrever a variação $\delta q_{\mu\nu}$ como função de $\delta\Phi$:

$$\delta q_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha Z w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right). \quad (3.32)$$

Apesar de estarmos usando a métrica de Minkowski como geometria de fundo para simplificar, no fim das contas todas as expressões devem ser rescritas em termos da métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$. Após alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\delta S_m}{\delta \Phi} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-q} d^4x \left(\frac{\alpha'}{\alpha} (E - T) - \frac{Z'}{Z} E + 2 \nabla_\lambda C^\lambda \right),$$

onde $Z \equiv \alpha + \beta = \alpha^3 V$. Denotamos também

$$T \equiv T^{\mu\nu} q_{\mu\nu}, \quad E \equiv \frac{T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega}, \quad X' \equiv \frac{dX}{d\Phi},$$

e

$$C^\lambda \equiv \frac{\beta}{\alpha \Omega} (T^{\lambda\mu} - E q^{\lambda\mu}) \partial_\mu \Phi.$$

Por fim, a equação de movimento para o campo gravitacional Φ é dada por:

$$\sqrt{V} \square \Phi = \kappa \chi, \quad (3.33)$$

onde

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} (T - E) + \frac{Z'}{2Z} E - \nabla_\lambda C^\lambda \right).$$

Substituindo o valor $\alpha = e^{-2\Phi}$ e usando a equação (3.23) para o potencial V , reescrevemos esta expressão sob a forma

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{3e^{2\Phi} + 1}{3e^{2\Phi} - 1} E - T - \nabla_\lambda C^\lambda \right).$$

Esta equação descreve a dinâmica da GSG na presença de matéria, com base nas hipóteses (3.12) e (3.23). A quantidade χ envolve um acoplamento não-trivial entre o gradiente do campo escalar $\nabla_\mu \Phi$ e do tensor momento-energia completo do campo de matéria $T_{\mu\nu}$ e não exclusivamente o seu traço. Esta propriedade permite que o campo eletromagnético possa interagir com o campo gravitacional por completo. O limite newtoniano da teoria, na presença de matéria, é corretamente obtido se fizermos a identificação

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4},$$

pois neste regime E é aproximadamente a pressão, a qual se anula; $C^\lambda = 0$ pois não há termos de viscosidade e T é igual a densidade de matéria (poeira).

Decomposição natural

A forma da métrica contendo derivadas de Φ sugere uma simplificação na descrição da matéria em questão, a qual é conveniente na exploração de consequências cosmológicas da GSG. Suponha que $\partial_\mu \Phi$ seja do tipo-tempo em $q_{\mu\nu}$, ou seja, $\Omega > 0$. Definimos então o seguinte vetor normalizado

$$I_\mu = \frac{\partial_\mu \Phi}{\sqrt{\Omega}}. \quad (3.34)$$

Este vetor pode ser usado na decomposição do tensor momento-energia resultando em um fluido perfeito, se assumirmos a representação comóvel fixando

$$T^{\mu\nu} = (\varrho + p) I^\mu I^\nu - p q^{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

onde ρ é a densidade de matéria e p é a pressão. Segue então que

$$T^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = \sqrt{\Omega} \varrho I^\mu,$$

e

$$T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi = \Omega \varrho.$$

Logo, de acordo com esta decomposição, a quantidade E e T se reduzem a

$$E = \varrho, \quad T = \varrho - 3p. \quad (3.36)$$

Usando estes resultados temos que $C^\mu = 0$. Ainda dentro desta abordagem, a equação de movimento para a teoria escalar da gravitação é fornecida pela equação

$$\sqrt{V} \square \Phi = -\frac{\kappa}{2} \left(\frac{2\alpha}{\alpha-3} \varrho - 3p \right). \quad (3.37)$$

Esta é a forma da dinâmica de Φ quando a fonte da gravitação é um fluido perfeito. As consequências cosmológicas desta equação não fazem parte da proposta deste texto por ainda estarem sob análise, mas podem ser encontradas em [50], onde resultados não triviais já começam a surgir.

Com isso vemos que esta teoria escalar da gravitação é capaz de reproduzir os resultados bem estabelecidos pela relatividade geral usando “apenas” um campo escalar. A maneira pela qual este campo interage com os demais é dada por um processo não trivial, sendo este o responsável pelo sucesso desta teoria. Obviamente muitas questões ainda devem ser analisadas sobre este caso para que possamos estabelecê-la como uma nova teoria da gravitação universal. Entretanto, os resultados aqui apresentados e os que estão em andamento nos fazem otimistas quanto a isso.

No próximo capítulo, deixaremos este assunto de lado e passaremos a tratar o caso do campo eletromagnético. Mostraremos que a mesma realidade física que aqui atribuímos para a métrica $q_{\mu\nu}$, quando introduzimos matéria, pode ser dada a uma métrica que chamamos de eletromagnética. Faremos com que campos espinoriais se acoplem com o campo eletromagnético

através desta métrica e veremos as consequências desta interação em duas formulações distintas da mesma dinâmica.

Capítulo 4

Momento magnético anômalo

Neste capítulo, propomos uma nova forma de contribuição para o momento magnético anômalo de todas as partículas. Esta origem comum é apresentada dentro do cenário recente da eletrodinâmica, denominado *Método da Ponte Dinâmica* (PD), no qual introduz-se uma métrica eletromagnética correspondente, que não tem caráter gravitacional. Esta métrica eletromagnética constitui um processo universal percebido por todos os corpos, carregados ou não carregados. Como tal, produz automaticamente uma explicação para a possível existência de um momento magnético para os neutrinos, o qual aparece de modo distinto no mundo quântico, quando se permite uma extensão do modelo padrão da física de partículas elementares.

Para que isto seja possível, supõe-se que o momento magnético de qualquer partícula é composto de duas partes distintas: uma parte clássica que depende da carga da partícula e, por conseguinte, a partir da análise dimensional, é inversamente proporcional à massa correspondente; e uma outra parte, que denominamos momento magnético métrico, o qual depende linearmente em relação à massa. Esta segunda parte – que deve ser várias ordens de grandeza menor do que o termo clássico, como veremos – é comum para todas as partículas e não depende da carga, pois o acoplamento entre o momento magnético e o campo $F_{\mu\nu}$ se dá através da métrica. Iremos argumentar que parte do momento magnético anômalo do elétron (e outras

partículas) é devido ao momento magnético métrico. Analisamos também o caso específico do neutrino para exemplificar concretamente este fato, pois é um caso que não envolve a carga elétrica.

Embora o neutrino não tenha um momento magnético clássico, uma vez que não tem carga, há investigações acerca da possibilidade de que (para além do modelo padrão da física de partículas) o neutrino poderia ter um momento magnético efetivo [37], [33], [4] e [6]. Para qualquer partícula carregada o momento magnético μ é inversamente proporcional à sua massa correspondente. No entanto, no caso de neutrino ν , sugere-se que μ_ν dependa linearmente da sua massa. Esta dependência é uma consequência da forma como o momento magnético do neutrino é introduzido na teoria quântica. Entretanto, o objetivo aqui é sugerir uma nova maneira de entender a origem deste momento magnético em particular, tal que este também dependa linearmente com a massa do neutrino, mas tenha uma origem geométrica. Obviamente, esta nossa proposta está centrada em princípios físicos que não aparecem na proposta quântica. Por isso, este é o ponto fundamental a partir do qual consideramos a explicação deste fenômeno via a PD como sendo tão esclarecedora quanto a proposta quântica e, assim, espera-se que os dois métodos possam ser competitivos ou mesmo complementares.

4.1 A ponte dinâmica eletromagnética

Num trabalho recente [53] mostrou-se que a teoria de Born-Infeld num espaço-tempo curvo dotado de uma métrica $\hat{e}^{\mu\nu}$, que depende do próprio campo eletromagnético, é dinamicamente equivalente à eletrodinâmica linear de Maxwell descrita numa geometria de Minkowski. Em outras palavras, existe uma conexão entre as dinâmicas destas duas teorias de tal maneira que elas são representações distintas de uma e mesma dinâmica. Isto significa que uma solução qualquer da primeira teoria será também uma solução desta última, a qual é dada em termos de um mapa prescrito. Esta tarefa altamente não trivial só se torna possível se a métrica do espaço-tempo depende explicita-

mente do campo eletromagnético. Devido à estrutura algébrica do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e seu dual, existe um tipo de relação de fechamento que permite a existência deste mapeamento, gerando assim uma ponte dinâmica entre as duas teorias paradigmáticas. O preço a pagar é abrir mão do espaço-tempo de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e ir para uma geometria curva específica $\hat{e}_{\mu\nu}$, que é construída somente em termos do espaço-tempo de fundo e dos campos eletromagnéticos. Chamamos PD o mapeamento que implementa tal modificação da representação. A receita completa do mapa e da discussão correspondente de suas propriedades foi feita em [53]. A primeira vista, este procedimento pode parecer como uma simples ferramenta matemática. Entretanto, vamos usar essa equivalência a fim de revelar uma nova física, mas, primeiramente, faremos um breve resumo da proposta.

Considere a Lagrangiana de Born Infeld para o campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, definida numa geometria curva $\hat{e}_{\mu\nu}$, como sendo

$$L = \beta^2 \left(1 - \sqrt{\hat{U}} \right), \quad (4.1)$$

onde

$$\hat{U} \equiv 1 + \frac{\hat{F}^2}{2\beta^2} - \frac{\hat{G}^2}{16\beta^4}.$$

As equações dinâmicas para o campo eletromagnético, neste caso, são

$$\partial_\nu \left[\frac{\sqrt{-\hat{e}}}{\hat{U}} \left(\hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4\beta^2} \hat{G} \hat{F}^{*\mu\nu} \right) \right] = 0. \quad (4.2)$$

Os objetos desta teoria neste espaço-tempo curvo são construídos a partir duma métrica eletromagnética definida por

$$\hat{e}^{\mu\nu} \equiv a \eta^{\mu\nu} + b \Phi^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

sendo $\hat{e}$ o determinante da métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$ e $\Phi_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu$. Os coeficientes a e b são dados como funções dos invariantes $F \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ e $G \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*$ escolhidas de tal modo que fazem com que ambas as dinâmicas sejam equivalentes¹.

¹Todas as quantidades escritas com o símbolo (^) tem seus índices levantados e abaix-

Para demonstrarmos esta equivalência, é necessário conhecer os campos $\hat{F}^{\mu\nu}$ e seu dual que estão definidos na métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$ como funções dos campos da teoria de Maxwell. A partir da definição dos campos de Born-Infeld e da escolha da métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$, podemos mostrar que eles estão relacionados através de

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{F}^{\mu\nu}}{a^2} \\ \frac{{}^*\hat{F}^{\mu\nu}}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - \epsilon F m & -\frac{\epsilon G m}{2} \\ -\frac{\epsilon G m}{2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ {}^*F^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

onde $\epsilon \equiv b/a$ e os demais parâmetros são

$$n = 1 + \frac{\epsilon^2 G^2}{16}, \quad m = 1 - \frac{\epsilon F}{4}.$$

Logo, a equação (4.4) pode ser entendida como a “transformação linear” que leva os campos de Born-Infeld aos campos de Maxwell. Substituindo esta equação em (4.5) e fazendo com que o resultado corresponda a dinâmica de Maxwell, temos as seguintes equações para os coeficientes da métrica eletromagnética

$$\begin{cases} n - \epsilon F m + \frac{\hat{G}}{2\beta^2} \epsilon m &= -\frac{Q}{4}, \\ -\epsilon G m + \frac{\hat{G} n}{2\beta^2} &= 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo

$$Q = 1 - \frac{\epsilon F}{2} - \frac{\epsilon^2 G^2}{16}.$$

Resolvendo estas equações para a e ϵ temos a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$ que leva a teoria de Born-Infeld no espaço curvo na teoria de Maxwell no espaço de Minkowski. Neste momento, poderíamos nos perguntar se, dadas as equações acima, seria possível fazer o mapa dinâmico inverso, ou seja, encontrar a métrica que levaria a teoria de Maxwell no espaço de Minkowski numa teoria de

 ados com a métrica $\hat{e}^{\mu\nu}$. Em particular, os invariantes $\hat{F}$ e $\hat{G}$ são construídos com $\hat{e}^{\mu\nu}$. Conferir o apêndice (B) para encontrar as definições de quantidades referentes a cada teoria em sua respectiva métrica.

Born-Infeld num espaço curvo. Para isso seria necessário o cálculo da transformação inversa àquela apresentada em (4.4), o que seria simples. Entretanto, como as equações (4.5) dependem explicitamente da forma funcional da langragiana de ambas teorias, a métrica que faria o mapa na direção inversa (se existir), não possui relação direta com a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$, a princípio.

Como dito anteriormente, estamos interessados apenas no mapa atuando em uma dada direção, num regime específico para os campos e, em paralelo, buscando uma expressão simples para a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$. Em outras palavras, estamos buscando um princípio físico que ao aplicá-lo à dinâmica de Born-Infeld produz algum resultado não trivial na dinâmica de Maxwell. Para isso supomos $G = 0$. Este regime corresponde a um campo elétrico ortogonal a um campo magnético, que podem ser descritos por ondas planas. Com isso a segunda equação de (4.5) é identicamente satisfeita. Sendo assim, um dos coeficientes da métrica permanece indeterminado e, por simplicidade, fixamos $a = 1$. Com isso o outro coeficiente está completamente determinado e é dado por 3 possibilidades

$$\epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} = \left\{ \frac{2}{F}, \frac{2}{F} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - F/2\beta^2}} \right), \frac{2}{F} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - F/2\beta^2}} \right) \right\}.$$

É fácil notar que ϵ_1 não é uma boa solução para este problema pois, neste caso, o determinante da transformação (4.4) não está definido.

Consideremos o regime em que o campo eletromagnético está muito abaixo do campo crítico, ou seja, $F \ll \beta^2$. Neste caso, se fizermos uma expansão em série de potências para as demais soluções permitidas em termos de $F/2\beta^2$, vemos que a série não converge neste ponto para ϵ_2 . Logo, somente ϵ_3 é uma boa solução neste regime e, como mostrado em [53], a métrica pode ser aproximada por

$$\hat{e}_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\beta^2} \phi_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Neste capítulo somente este caso nos interessará, pois podemos considerar

o segundo termo da métrica como uma correção à geometria de fundo, o que simplificará consideravelmente o estudo da dinâmica de partículas elementares, como veremos mais adiante. A partir de agora vamos denominar representação MM quando escolhe-se descrever efeitos eletromagnéticos na teoria linear de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, quando escolhe-se fazer o mapa entre as dinâmicas e descrever os mesmos efeitos na teoria não-linear de Born-Infeld em um espaço-tempo curvo representado pela métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$, será chamada representação $\hat{E}$. Vamos enfatizar que essas representações (MM e $\hat{E}$) devem descrever uma única e a mesma dinâmica, caso contrário, há ambiguidades a representação do movimento de objetos interagentes com o campo eletromagnético. Em outras palavras, se não houver a garantia de que estamos descrevendo de maneiras distintas o mesmo fenômeno, a correlação entre as duas representações para campos eletromagnéticos através da ponte dinâmica faz sentido, mas não haverá mais uma equivalência.

4.2 A métrica eletromagnética

A presença de uma estrutura curva para o espaço-tempo no domínio dos campos eletromagnéticos pode ser um importante instrumento teórico somente se houver uma prescrição de como a matéria pode perceber essa geometria. A questão é: como a matéria interage com a métrica eletromagnética? A fim de explorar esta formulação métrica devemos realizar uma generalização do método apresentado na seção anterior para lidar com a presença da matéria. Neste ponto, propomos a idéia natural de que: **todo tipo de partículas, carregadas ou não, interagem com $\hat{e}_{\mu\nu}$ da mesma forma.**² O modo mais simples de realizar esta hipótese é através do princípio de acoplamento mínimo, no qual partículas testes ou campos têm sua dinâmica escrita em termos da métrica eletromagnética. Analisaremos então o caso específico de

²Esta proposta surge a partir de uma analogia com o papel desempenhado pela geometria no caso do campo gravitacional.

campos espinoriais (por exemplo, o neutrino do elétron) para investigar que tipo de novos efeitos pode-se obter dentro deste cenário métrico.

Esta ponte dinâmica estendida diz respeito agora ao comportamento de todo tipo de matéria numa dada representação. Em particular, na representação $\hat{E}$, o pressuposto de que qualquer tipo de matéria carregada ou não só interage com a geometria $\hat{e}_{\mu\nu}$ deve ter uma equivalência na representação MM. A equação de movimento do neutrino, que inclui os efeitos da geometria eletromagnética deve ter uma equivalência na representação MM; deve-se aceitar que nesta representação deve existir algum termo extra na lagrangiana que seja o análogo do acoplamento mínimo com a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$. Por exemplo, a dependência da teoria de Born-Infeld sobre o parâmetro β que aparece na representação $\hat{E}$ torna-se na representação MM uma relação entre o momento magnético de qualquer partícula e sua massa correspondente, tal como será mostrado mais adiante. Note que esta forma de descrever o acoplamento da matéria com o campo eletromagnético através da métrica depende fortemente do modo pelo qual o mapa dinâmico é feito.

4.3 Princípio de acoplamento mínimo

Nesta seção descrevemos efeitos eletromagnéticos na representação $\hat{E}$. Podemos explorar a equivalência dinâmica apresentada pela PD e propor uma extensão de modo a acoplar qualquer tipo de matéria ao campo eletromagnético. No formalismo tradicional, apenas uma partícula carregada é capaz de perceber diretamente o campo eletromagnético. No entanto, a modificação da estrutura métrica, devido à presença do campo eletromagnético, permite uma outra possibilidade como veremos abaixo.

A equivalência entre a dinâmica de Maxwell num espaço-tempo plano e a teoria de Born-Infeld foi mostrada apenas sob a consideração de campos livres. Assumindo que a matéria que se acopla com o campo EM pode ser descrita tanto na representação-MM quanto no cenário da métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$, então esta equivalência pode ser estendida e passa a ter um significado físico

concreto. Vamos investigar as consequências da análise na representação- $\hat{E}$. De começo notamos que há duas formas possíveis de interação entre a matéria e o campo EM, que são

- através do potencial A_μ ;
- através do tensor métrico $\hat{e}_{\mu\nu}$.

Uma vez que este segundo modo de interação não havia sido considerado anteriormente, vamos nos concentrar aqui apenas nele. Salientamos que a existência da geometria eletromagnética tem consequências relevantes somente se esta geometria é percebida por todos os tipos de matéria. Somos então levados a afirmar algo aparentemente contra-intuitivo e subjetivo: na presença de campos eletromagnéticos, cada corpo individual vive numa geometria eletromagnética $\hat{e}_{\mu\nu}$. Isso corresponde a um aparente paradoxo de que uma partícula pode acoplar-se ao campo eletromagnético mesmo sem ter carga elétrica. Mais precisamente: se uma partícula tem carga, ela se acopla com o campo eletromagnético de modo usual através do potencial A_μ . Isso acontece apenas para a classe de corpos que chamamos *carregados*. Por outro lado, iremos examinar aqui a nossa hipótese fundamental de que todas as partículas (carregadas ou não) interagem com a geometria eletromagnética de uma única e mesma maneira e veremos se existem consequências observacionais deste fato.

4.4 Acoplamento entre o neutrino e o campo eletromagnético

No caso do neutrino, o qual não possui carga, há apenas a possibilidade de acoplamento direto com o campo eletromagnético via a métrica. Sendo assim, aplicamos o princípio de acoplamento mínimo a este caso.

Na métrica eletromagnética, definimos a álgebra das matrizes de Dirac associadas $\hat{\gamma}^\alpha$ como sendo

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\mu = 2\hat{e}^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad (4.7)$$

sendo $\mathbf{1}$ a matriz identidade associada a álgebra de Clifford. Da equação (4.6) obtemos³

$$\hat{\gamma}^\mu = \gamma^\mu - \frac{1}{4\beta^2} \phi^\mu{}_\alpha \gamma^\alpha. \quad (4.8)$$

Segundo esta representação, a equação de evolução para o campo espinorial torna-se

$$i\hbar c \hat{\gamma}^\mu \hat{\nabla}_\mu \Psi - mc^2 \Psi = 0, \quad (4.9)$$

sendo que a derivada covariante é dada em termos dos símbolos de Christoffel construídos com a métrica eletromagnética e a conexão interna é dada pelos coeficientes de Fock-Ivanenko obtidos pela condição riemanniana

$$\hat{\nabla}_\mu \hat{\gamma}^\nu = [V_\mu, \hat{\gamma}^\nu], \quad (4.10)$$

onde V_μ é um elemento arbitrário da álgebra de Clifford. Supomos que na ausência de qualquer tipo de matéria, o comutador que aparece do lado direito da equação acima se anula. Entretanto, quando há matéria, V_μ deve depender tanto do campo eletromagnético quanto das propriedades do campo de matéria. Deste modo, consideremos o caso em que V_μ seja dado por

$$V_\mu = i \frac{mc}{\hbar} \frac{F_{\mu\nu}}{\beta} \hat{\gamma}^\nu \gamma_5. \quad (4.11)$$

³Sem envolver derivadas de $F_{\mu\nu}$, a expressão mais geral para $\hat{\gamma}^\mu$ em termos das matrizes de Dirac constantes γ^μ e o campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é

$$\hat{\gamma}^\mu = \gamma^\mu + [p\sqrt{\epsilon} F^\mu{}_\alpha + q\epsilon\phi^\mu{}_\alpha] \gamma^\alpha,$$

onde p e q são constantes satisfazendo $2q = p^2 + 1$ e $\epsilon = -1/2\beta^2$. Com o objetivo de simplificar nossa exposição, escolhemos um caso específico fixando $p = 0$.

Note que (4.10) é a condição general que permite que a probabilidade e a corrente espinorial se conservem nas geometrias riemannianas [41, 44], ou seja, a derivada covariante da métrica continua sendo nula⁴: $\hat{\nabla}_\alpha \hat{e}^{\mu\nu} = 0$.

Substituindo estas expressões e a Eq. (4.6) na equação de movimento de Ψ no espaço curvo, obtém-se, com o auxílio da ponte dinâmica, a equação de evolução para o campo espinorial no espaço-tempo de Minkowski. Lembrando que estamos considerando apenas o regime em que $F \ll 2\beta^2$, desprezamos os termos de ordem superior $(F/\beta^2)^2$ e ficamos com a seguinte equação para Ψ já escrita no espaço-tempo de Minkowski e segundo a teoria de Maxwell

$$i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{m c^2}{2\beta} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \gamma_5 \Psi - m c^2 \Psi = 0. \quad (4.12)$$

O Hermitiano conjugado desta equação, resultando na dinâmica para $\bar{\Psi}$, é

$$i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} - \frac{m c^2}{2\beta} \bar{\Psi} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \gamma_5 + m c^2 \bar{\Psi} = 0, \quad (4.13)$$

sendo $S^{\mu\nu} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu$.

Veja que o efeito concreto do acoplamento mínimo é fornecer um momento magnético efetivo para os neutrinos. A intensidade do acoplamento depende da massa da partícula e do parâmetro β , i.e,

$$\mu_g = \frac{m c^2}{\beta}. \quad (4.14)$$

Ressaltamos que a hipótese da universalidade de $\hat{e}_{\mu\nu}$ revela a existência de uma fonte extra para a origem do momento magnético de todas as partículas (carregadas ou não). A compatibilidade deste resultado com a representação Maxwell-Minkowski implica que a Lagrangiana que descreve a interação do neutrino com o campo eletromagnético contém um termo extra que nesta representação (MM) deve ser colocado à mão e não corresponde a um acoplamento mínimo nesta representação. Em outras palavras, a presença de um momento magnético para o neutrino na representação usual não deve ser

⁴Ver detalhes no apêndice (C).

visto como uma surpresa exótica, mas em vez disso deve ser compreendido – em função da ponte dinâmica – como consequência da universalidade da geometria $\hat{e}_{\mu\nu}$ na representação $\hat{E}$.

4.5 Acoplamento entre o elétron e o campo eletromagnético

É importante realçar que o valor do momento magnético obtido na seção anterior contém apenas a contribuição geral para qualquer partícula, seja ela carregada ou não. Partículas carregadas têm uma fonte extra para μ que está relacionada a sua carga. O momento magnético clássico do elétron, por exemplo, é o magneton de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$. Assim, o valor total do momento magnético do elétron deve ser lido, segundo nossos argumentos, como

$$\mu_e = \mu_B + \frac{m_e c^2}{\beta} + \text{correções quânticas}.$$

A primeira parte é o termo clássico e a segunda parte corresponde a contribuição geométrica, que estamos propondo sua existência. As correções quânticas adicionadas a esta fórmula possuem sua origem ligada estritamente à carga elétrica da partícula, mais precisamente às correções em série de potências sobre a constante de estrutura fina

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{(2\epsilon_0)\hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

onde e é a carga do elétron e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. Sendo assim, estas correções quânticas ao momento magnético anômalo não são de natureza geométrica, o que elimina qualquer ambiguidade entre a contribuição quântica e a geométrica, fazendo de nossa proposta algo bastante pertinente.

4.6 Comparação com experimentos

Nesta seção, comparamos a proposta acima da contribuição para o momento magnético de partículas carregadas e não-carregadas devido a métrica eletromagnética com resultados observacionais. Na literatura, encontra-se apenas duas medições precisas para o momento magnético anômalo de partículas fundamentais: a primeira é o caso do elétron (dado experimental mais preciso), que permite testes locais da QED, em particular, a constante de estrutura fina α ; a segunda é o momento magnético do múon que, apesar de menos preciso, pode testar o modelo padrão da física de partículas como um todo [60]. Atualmente, o momento magnético anômalo do τ não é observável devido a sua vida-média muito curta (cerca de 2.9×10^{-13} s). No entanto, existe uma estimativa da anomalia que produz um limite superior de 13×10^{-3} na diferença entre o valor medido e o valor teórico. Não iremos analisar aqui o caso de partículas compostas, como prótons e nêutrons, uma vez que a física de seus componentes fundamentais (por exemplo, os *quarks*) ainda está em desenvolvimento, no que diz respeito ao momento magnético destas partículas.

Nos dias de hoje, a discrepância entre os valores experimentais e teóricos do momento magnético anômalo dos léptons é minúscula⁵. As correções devidas a teoria quântica em laços (loop quantum theory) do momento magnético padrão faz essa discrepância ser muito pequena, o que restringe fortemente a possibilidade de física nova. O valor anômalo a_i do momento magnético μ_i da partícula i é definido por

$$a_i = \frac{g_i - 2}{2} = \frac{m_i}{m_e} \frac{\mu_i}{\mu_B} - 1, \quad (4.15)$$

onde $\mu_B = e \hbar / 2 m_e$ é o magneton Bohr, m_e é a massa do elétron, g_i é o fator de Landé e m_i é a massa da partícula em consideração. No caso do múon [7], a diferença Δa entre o valor experimental E e o valor teórico T da anomalia é

⁵Todos os valores usados aqui foram retirados do *Particle Data Group* [38].

$$\Delta a_\mu \doteq a_\mu^E - a_\mu^T = (1.90 \pm 0.19) \times 10^{-9}. \quad (4.16)$$

Por conseguinte, este é o limite superior em que o momento magnético geométrico μ_g poderia contribuir. Assim, se considerarmos que os efeitos devido ao acoplamento da matéria com $\hat{e}^{\mu\nu}$ aparecem nesta ordem de magnitude, tem-se

$$\mu_g^{(\mu)} \doteq \Delta a_\mu \frac{e\hbar}{2m_\mu}. \quad (4.17)$$

Por outro lado, a fórmula para o momento magnético geométrico é dada por

$$\mu_g^{(\mu)} = \frac{m_\mu c^2}{\beta}. \quad (4.18)$$

Se assumirmos que o acoplamento geométrico é responsável por todos os termos restantes da anomalia do múon, ou seja, as correções quânticas de ordem superior seriam identicamente nulas, é possível estimar a partir da fórmula (4.18) um valor para o campo eletromagnético crítico: $\beta \approx 2.0 \times 10^{23} T$ ou $\beta \approx 6.0 \times 10^{31} V/m$.

Assumindo que a calibração do campo crítico determinada pelos resultados acima é válida, as correções geométricas no caso do momento magnético do elétron são previstas ser

$$\mu_g^e = 4.44 \times 10^{-14}. \quad (4.19)$$

A diferença entre o valor experimental padrão (E) e o valor teórico (T), no caso do elétron é cerca de 600 vezes menor do que no caso do muon [26], que é

$$\Delta a_e \equiv a_e^E - a_e^T = (3.13 \pm 5.20) \times 10^{-12}. \quad (4.20)$$

Como podemos ver, os erros experimentais predominantes são compatíveis com efeitos da geometria $\hat{e}^{\mu\nu}$ na anomalia elétron.

No que diz respeito à anomalia do τ , que está prevista ser inferior a 13×10^{-3} , nossas predições são também compatíveis com os experimentos. De fato, usando a fórmula (4.14), temos

$$\mu_g^\tau = 1.08 \times 10^{-6}. \quad (4.21)$$

Vamos agora discutir o caso excepcional do neutrino. Sendo uma partícula elementar sem carga, podemos esperar que o neutrino não tenha momento magnético algum, nem mesmo correções quânticas. Não obstante, uma extensão ao modelo padrão prevê um momento magnético para o neutrino diferente de zero, o qual está em relação direta com a massa. A partir da discussão acima, parece natural propor que a existência do momento magnético do neutrino tenha apenas uma origem geométrica. Então, podemos estimar seu valor como sendo dado por

$$\mu_\nu = \frac{m_\nu c^2}{\beta} = 8.70 \times 10^{-20} \mu_B. \quad (4.22)$$

Este valor extremamente pequeno é compatível com o domínio dos valores obtidos a partir de áreas distintas da física sobre o possível momento magnético do neutrino $4 \times 10^{-20} \mu_B < \mu_\nu < 9 \times 10^{-9} \mu_B$ – ver referências [2], [34] e [30]. Por fim, vale ressaltar que a previsão proposta por este método está próximo do valor estabelecido pelo Modelo Padrão Extendido (aproximadamente igual a $3,2 \times 10^{-19} \mu_B$).

Relação princípios físicos e geometria

Neste capítulo apresentou-se um exemplo concreto da importância que pode ser atribuída à Ponte Dinâmica. Quando escolhemos os princípios físicos – neste exemplo, o acoplamento mínimo entre $F_{\mu\nu}$ e Ψ via a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$ – que determinam o sistema físico em consideração, as duas representações ($\hat{E}$ e MM) já estão automaticamente correlacionadas através do mapa entre as equações dinâmicas. Tudo se passa como se o significado físico de certas

quantidades só pudesse ser claramente estabelecido numa das representações da dinâmica – uma vez que estes postulados nesta representação estariam em acordo com o senso comum. Em consequência, o resultado do mapa dinâmico sobre estes postulados aplicado na outra representação pode não ser compatível, ou melhor, pode não coincidir com o que se espera destes mesmos postulados aplicados diretamente à representação usada após o mapa. Para expressar melhor o ponto que queremos enfatizar, consideremos novamente o exemplo desenvolvido neste capítulo: o procedimento usado no mapa entre as dinâmicas nos mostra que não é possível aplicar o princípio de acoplamento mínimo entre $F_{\mu\nu}$ e Ψ no espaço de Minkowski e obter um momento magnético para o campo espinorial. De imediato, destacamos que a representação de uma dada dinâmica deve vir em seguida da escolha dos postulados da teoria e não ao contrário, como as vezes é-se levado a acreditar.

Capítulo 5

Quebra da simetria quiral na ausência de massa

Neste capítulo usamos o formalismo de tétradas (vierbeins) para mostrar que um campo espinorial satisfazendo a equação linear de Dirac definida numa geometria curva é equivalente a uma equação não-linear no espaço-tempo de Minkowski, que num caso particular se reduz a equação de Heisenberg. Este mapa depende apenas da geometria de fundo e das correntes vetorial J_μ e axial I_μ . Além disso, a estrutura algébrica de Clifford da geometria curva pode ser lida em termos da estrutura definida no espaço-tempo plano. Por isso, a ponte dinâmica estabelece que ambas as representações são completamente equivalentes no caso de campos livres.

Dentro de um contexto histórico para as teorias espinoriais não lineares, podemos citar que, nos anos cinquenta, Heisenberg [28] propôs uma nova teoria para campos e partículas elementares, a fim de resolver alguns problemas que surgiram no modelo padrão da época, por exemplo, encontrar um processo matemático rigoroso para a renormalização, o aparecimento de estados “fantasmas” (*ghosts*) dos campos e unitariedade da matriz S . Alguns anos depois, Nambu juntamente com Jona-Lasinio (NJL) [39] publicaram dois trabalhos usando a lagrangiana proposta por Heisenberg para descrever algumas analogias entre a física de partículas elementares e fenômenos de

supercondutividade. Por várias razões, que não vamos entrar em detalhes, esta teoria foi deixada de lado e esses problemas foram contornados. Recentemente esta teoria reapareceu como sendo um regime fenomenológico da cromodinâmica quântica, baseada na quebra da simetria quiral (ver detalhes na Ref. [27]). De um ponto de vista puramente teórico, algumas teorias espinoriais não lineares têm sido extensivamente estudadas e vários resultados sobre a natureza dos espinores tem surgido — cf. [63, 16] e referências.

Desta maneira, mostra-se que o termo auto-interacção da equação de NJL pode ser derivado a partir do princípio de acoplamento mínimo aplicado a uma geometria curva efetiva. Supondo-se que um determinado campo espinorial satisfaça a equação de Dirac num espaço-tempo curvo, reescreve-se essa dinâmica como uma generalização da equação de NJL no espaço-tempo plano de Minkowski. Num regime específico do parâmetro de acoplamento, a equação é se torna aquela de NJL. Tal mapa entre dinâmicas corresponde a uma substituição sistemática dos objetos definidos num dado espaço em termos dos objetos definidos no outro espaço. No entanto, esta alteração da representação deve levar em consideração somente o campo spinorial.

Sendo isso possível, este capítulo completa os demais e uma sequência de trabalhos mostrando a equivalência matemática entre equações dinâmicas para os campos fundamentais. De fato, as Refs. [54, 21] analisam o caso de campos escalares e as Refs. [53, 48] o caso do campo eletromagnético. Tal método, que denominamos de (*Ponte Dinâmica* PD), está sutilmente ligado ao contexto dos modelos análogos de gravitação, como dito em capítulos anteriores, entretanto realçamos que, por construção, não há dinâmica preferencial. Essa simetria só é quebrada quando acrescentamos alguma interação.

Ao contrário do que foi feito em [45], o campo espinorial ele mesmo não é transformado, mas obedece a duas formas diferentes da mesma dinâmica em dois espaços-tempos diferentes. Isso significa que o campo espinorial fundamental satisfazendo a equação de Heisenberg no espaço-tempo de Minkowski pode ser considerado como sendo o mesmo campo livre de Dirac definido em uma geometria curva.

Fazemos uso do formalismo de tétradas (vierbein), a fim de que o mapa possa atuar simultaneamente sobre o espaço dos espinores e no espaço-tempo. Este formalismo claramente simplifica os cálculos e as propriedades geométricas do espaço-tempo podem ser descritas por meio dos campos de tétradas. A lagrangiana assim como a equação dinâmica devem ser invariantes não só sob difeomorfismos, mas também sob transformações de Lorentz locais.

5.1 Compêndio matemático para a ponte dinâmica

Para começar em direção à construção da ponte dinâmica para campos espinoriais, denotamos o tensor métrico no qual a equação de Dirac será definida como segue

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + 2\alpha \Sigma^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde $\gamma^{\mu\nu}$ é a geometria de Minkowski num sistema de coordenadas arbitrário e α é uma função arbitrária. O segundo termo $\Sigma^{\mu\nu}$ está relacionado com as correntes e escalares construídos a partir dos espinores fundamentais. Com esta hipótese sobre $\Sigma^{\mu\nu}$, sempre podemos decompor o tensor métrico nesta forma binomial. Para escrever a inversa da métrica também desta forma, temos que impor a condição de

$$\Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\nu\lambda} = p \delta_{\lambda}^{\mu} + q \Sigma^{\mu}_{\lambda},$$

onde p e q são funções arbitrárias. Portanto,

$$\hat{g}_{\mu\nu} = m \gamma_{\mu\nu} + n \Sigma_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

cujos coeficientes do lado direito da equação são

$$m = 1; \quad n = -\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha\Sigma^2},$$

sendo que $\Sigma^2 = \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$.

Consideramos agora o campo espinorial Ψ e construímos dois escalares hermitianos:

$$A = \bar{\Psi}\Psi, \quad A^\dagger = A, \quad (5.3)$$

$$B = i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad B^\dagger = B. \quad (5.4)$$

Também definimos as correntes vetorial e axial associadas ao espinor, respectivamente, como sendo

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad I^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi, \quad (5.5)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac.

Usando a identidade de Pauli-Kofink (PK), temos

$$(\bar{\Psi}Q\gamma_\lambda\Psi)\gamma^\lambda\Psi = (\bar{\Psi}Q\Psi)\Psi - (\bar{\Psi}Q\gamma_5\Psi)\gamma_5\Psi.$$

considerando Q um elemento arbitrário da álgebra, a relação abaixo conecta os escalares A e B com as correntes J_μ e I_μ , ou seja,

$$J^2 = -I^2 = A^2 + B^2, \quad J_\mu I^\mu = 0. \quad (5.6)$$

donde denotamos X^2 como sendo $X_\mu X^\mu$.

O termo $\Sigma^{\mu\nu}$ representando a influência do espinor fundamental Ψ sobre o espaço-tempo de Minkowski é controlado pela relação

$$\Sigma^{\mu\nu} = H^\mu H^\nu, \quad (5.7)$$

onde

$$H^\mu = J^\mu + \epsilon I^\mu, \quad (5.8)$$

ou, na expressão estendida,

$$\Sigma^{\mu\nu} = J^\mu J^\nu + \epsilon^2 I^\mu I^\nu + \epsilon(J^\mu I^\nu + I^\mu J^\nu). \quad (5.9)$$

Assumimos que ϵ é um número real arbitrário. Vemos que H^μ satisfaz

$$H^2 \equiv H^\mu H_\mu = (1 - \epsilon^2) J^2.$$

Observe que PK implica em

$$(\gamma.H)\Psi = [\mathbf{1} + \epsilon\gamma_5](A + iB\gamma_5)\Psi, \quad (5.10)$$

onde denotamos o produto escalar $X^\mu Y_\mu$ de dois objetos X^α e Y^β por $X.Y$. Esta expressão corresponde exatamente ao termo de auto-interação da equação de Heisenberg.

Por fim, usando as definições acima, o tensor métrico e seu inverso podem ser lido como

$$\begin{aligned} \hat{g}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} + 2\alpha H^\mu H^\nu, \\ \hat{g}_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha H^2} H_\mu H_\nu, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde $\alpha = \alpha(A, B)$.

O próximo passo é reescrever os objetos definidos anteriormente em termos das tétradas¹. Para isso devemos primeiro dizer como a base de tétradas no espaço $\hat{g}^{\mu\nu}$ se relaciona com a base no espaço de Minkowski, de modo que o mapa entre as dinâmicas seja compatível também com a álgebra de cada espaço. Segundo estes vínculos, supomos as bases de tétradas estejam relacionadas por

$$\hat{e}^\mu{}_A = e^\mu{}_A + \beta H_A H^\mu, \quad (5.12)$$

donde tiramos que as seguintes relações devem ser válidas

$$\begin{aligned} \eta^{AB} \hat{e}^\mu{}_A \hat{e}^\nu{}_B &= \hat{g}^{\mu\nu}, \\ \eta^{AB} e^\mu{}_A e^\nu{}_B &= \eta^{\mu\nu}, \\ H_A &= e^\mu{}_A H_\mu, \\ \hat{e}^\mu{}_A H_\mu &= (1 + \beta H^2) H_A. \end{aligned}$$

Os índices gregos são subidos e descidos com as métricas do espaço-tempo ($\hat{g}_{\mu\nu}$ ou $\eta_{\mu\nu}$) e os índices latinos usando a métrica η_{AB} .

¹Conferir alguns elementos sobre o formalismo de tétradas no apêndice (D).

Para que, além disso, o mapa atue corretamente sobre os elementos da álgebra, as matrizes de Dirac devem estar relacionadas através das tétradas como segue

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^\mu &= \hat{e}^\mu{}_A \gamma^A = \gamma^\mu + \beta \gamma^A H_A H^\mu, \\ \gamma^A &= \hat{e}_\mu{}^A \hat{\gamma}^\mu = e_\mu{}^A \gamma^\mu,\end{aligned}\tag{5.13}$$

onde as componentes inversas da base $\hat{e}_\mu{}^A$ são dadas por

$$\hat{e}_\mu{}^A = e_\mu{}^A + \tilde{\beta} H^A H_\mu.$$

Devido as relações de fechamento da base, $\tilde{\beta}$ é dado em termos de β por

$$\tilde{\beta} = -\frac{\beta}{1 + \beta H^2}.$$

Por fim, para que estes conjuntos de matrizes satisfaçam a álgebra de Clifford associada a cada espaço, devemos ter as seguintes relações sendo verificadas

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^{\{\mu}\hat{\gamma}^{\nu\}} &= 2\hat{g}^{\mu\nu} \mathbf{1}, & \gamma^{\{\mu}\gamma^{\nu\}} &= 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \\ \gamma^{\{A}\gamma^{B\}} &= 2\eta^{AB} \mathbf{1},\end{aligned}\tag{5.14}$$

sendo $\mathbf{1}$ a identidade da álgebra de Clifford. Estas relações de fechamento da álgebra implicam na seguinte relação entre α e β

$$\alpha = \beta \left[1 + \frac{\beta}{2} H^2 \right].\tag{5.15}$$

Note que quando usadas na contração de quaisquer objetos, as identidades acima sugerem que a seguinte distinção deve ser feita

$$\begin{aligned}\hat{X}.\hat{Y} &= \hat{g}^{\mu\nu} \hat{X}_\mu \hat{Y}_\nu = \eta^{AB} \hat{X}_A \hat{Y}_B, \\ X.Y &= \eta^{\mu\nu} X_\mu Y_\nu = \eta^{AB} X_A Y_B,\end{aligned}\tag{5.16}$$

ou seja, os escalares $\hat{X}.\hat{Y}$ e $X.Y$ não coincidem necessariamente.

5.2 Ponte Dinâmica para campos espinoriais: de Dirac a uma dinâmica não-linear

Um campo espinorial Ψ se transforma como um campo escalar sob a ação de um difeomorfismo

$$\Psi'(x'^\mu) = \Psi(x^\mu) \quad (5.17)$$

e como um espinor sob as transformações de Lorentz locais

$$\tilde{\Psi} = \Lambda \Psi, \quad (5.18)$$

onde Λ representa as matrizes de Lorentz infinitesimais e locais.

Um campo espinorial está na representação de Dirac quando este obedece a equação de Dirac, a qual corresponde a um campo espinorial livre sem massa. No nosso caso, esta equação definida na métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, Eq. (5.11), é dada por

$$i\hat{\gamma}^\mu \hat{\nabla}_\mu \Psi = 0, \quad (5.19)$$

onde

$$\hat{\nabla}_\mu = \partial_\mu - \hat{\Gamma}_\mu,$$

sendo $\hat{\Gamma}_\mu$ a conexão de Fock-Ivanenko² definida por

$$\hat{\Gamma}_\mu = -\frac{1}{8} \left([\hat{\gamma}^\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha,\mu}] - \hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^\rho [\hat{\gamma}^\alpha, \hat{\gamma}_\rho] \right),$$

donde denotamos o comutador de A com B por $[A, B] \equiv AB - BA$. Em termos das tétradas, a conexão é escrita como

$$\hat{\Gamma}_A = -\frac{1}{4} \hat{\gamma}_{BCA} S^{BC}$$

²Para que a conexão Γ_μ coincida com a conexão de Fock-Ivanenko é necessário impor que a derivada covariante das matrizes de Dirac se anulem, i.e., $\nabla_\alpha \gamma^\mu = 0$. No caso mais geral poderíamos ter $\nabla_\alpha \gamma^\mu = [V_\alpha, \gamma^\mu]$, sendo V_α um elemento arbitrário da álgebra de Clifford [41]. Entretanto, ao longo deste capítulo assumimos a hipótese de que a derivada covariante é zero.

onde

$$S^{BC} = \frac{1}{2}[\gamma^B, \gamma^C],$$

e $\hat{\gamma}_{BCA}$ são chamados coeficientes de rotação de Ricci, que são definidos por

$$\hat{\gamma}_{ABC} = \frac{1}{2}(\hat{C}_{ABC} - \hat{C}_{BCA} - \hat{C}_{CAB}),$$

e, finalmente,

$$\hat{C}_{ABC} = -\hat{e}_{\nu A} \hat{e}^{\mu}_{[B} \hat{e}^{\nu}_{C], \mu}. \quad (5.20)$$

Vemos facilmente que $\hat{C}_{ABC}$ satisfaz $\hat{C}_{ABC} = -\hat{C}_{ACB}$.

A partir das definições acima, podemos reescrever a equação de Dirac usando a Eq. (5.12) como

$$i\gamma^A(\partial_A + \beta H_A H^B \partial_B + \frac{1}{4}\hat{\gamma}_{BCA} S^{BC})\Psi - m\Psi = 0. \quad (5.21)$$

Para encontrar a equação diferencial para o espinor no espaço de Minkowski, é preciso calcular o termo $\hat{\gamma}_{ABC} S^{BC}$ da equação (5.21). Para isso, primeiro devemos encontrar $\hat{C}_{ABC}$. Usando a definição (5.20) e a hipótese (5.12), temos que

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ABC} = & -(1 + \tilde{\beta} H^2)(H_A \beta_{[B} H_{C]} + \beta^2 H_A H_{[B} \dot{H}_{C]} - \beta H_A H_{[C, B]}) + \\ & + \beta H_{A, [B} H_{C]} + \frac{1}{2} \beta \tilde{\beta} H_A H^2_{, [B} H_{C]}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde denotamos $\dot{H}_A \equiv H_{A, B} H^B$. Segue daí que os coeficientes de rotação de Ricci são dados por

$$\hat{\gamma}_{ABC} = \hat{C}_{ABC} - \frac{\beta}{2} \left[\tilde{\beta} H^2 (H_A H_{[B, C]} + H_{[B} H_{C], A}) - H_{A, [C} H_{B]} - H_{[B, C]} H_A \right]. \quad (5.23)$$

De posse dessas quantidades, devemos agora encontrar

$$\gamma^A \hat{\Gamma}_A = -\frac{1}{4} \hat{\gamma}_{BCA} \gamma^A \gamma^B \gamma^C.$$

Para isso usamos a identidade

$$\gamma^A \gamma^B \gamma^C = \eta^{AB} \gamma^C + \eta^{BC} \gamma^A - \eta^{AC} \gamma^B + i\epsilon^{ABC}{}_D \gamma^C \gamma_5.$$

Sendo assim, devemos calcular apenas dois termos que são dados como segue

$$\hat{\gamma}_{BCA} \epsilon^{ABC}{}_D = -\frac{\beta \tilde{\beta} H^2}{2} H_A H_{[B,C]} \epsilon^{ABC}{}_D \quad (5.24)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{BCA} \eta^{AB} \gamma^C &= (1 + \tilde{\beta} H^2) \left[\dot{\beta} H \cdot \gamma - H^2 \beta \cdot \gamma + \beta^2 H^2 \dot{H} \cdot \gamma - \beta^2 (\dot{H} \cdot H) (H \cdot \gamma) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{4} \dot{H}^2 \cdot \gamma + \frac{\beta}{2} \dot{H} \cdot \gamma \right] - \frac{\beta}{4} \dot{H}^2 \cdot \gamma + \frac{\beta \tilde{\beta}}{2} \dot{H}^2 H \cdot \gamma - \frac{\beta \tilde{\beta}}{2} H^2 H^2 \cdot \gamma, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde $\dot{\beta} \equiv \beta_{,A} H^A$, $\beta \cdot \gamma \equiv \beta_{,A} \gamma^A$ e $H^2 \cdot \gamma \equiv 2H^A H_{A,B} \gamma^B$.

O resultado do método da Ponte Dinâmica aplicado a um campo espinorial satisfazendo a equação de Dirac num espaço curvo mostra que, quando a dinâmica é reescrita no espaço-tempo de Minkowski, produz-se três termos de auto-interação dadas por $H_A H^B \partial_B \Psi$, (5.24) e (5.25). Não obstante, a equação resultante não possui nenhuma forma reconhecível. Para avançarmos mais e alcançarmos a uma equação razoável para ser tratada no espaço de Minkowski, procedemos na simplificação da equação dinâmica para o campo espinorial Ψ no espaço plano.

Portanto, temos que assumir um valor específico para ϵ . Por conveniência, que ficará clara mais adiante, supomos na Eq. (5.8) que $\epsilon = -1$. Isso implica que

$$H^A H_A = 0.$$

Vale ressaltar que esta condição não implica que $J^2 = 0$ (o que seria uma hipótese extremamente forte). No entanto, esta condição reduz significativamente os termos de auto-interação da dinâmica, produzindo

$$\hat{\gamma}_{BCA} \epsilon^{ABC}{}_D = 0 \quad (5.26)$$

e

$$\hat{\gamma}_{BCA}\eta^{AB}\gamma^C = \dot{\beta}H.\gamma + \frac{\beta}{2}\dot{H}.\gamma. \quad (5.27)$$

Assim, o campo spinorial obedece à seguinte equação simplificada

$$i \left(\gamma^A \partial_A + \beta \gamma^A H_A H^B \partial_B + \frac{\beta}{4} \dot{H}_A \gamma^A + \frac{\dot{\beta}}{2} H_A \gamma^A \right) \Psi = 0. \quad (5.28)$$

Note-se que esta ainda é uma equação dinâmica altamente não-linear para o espinor. Dentre todos estes termos, os três primeiros incluem derivadas de Ψ e só o último seria algébrico. Os resultados importantes virão a seguir, quando examinarmos alguns regimes para o parâmetro de acoplamento β .

5.2.1 Caso $\dot{\beta} \ll \beta$ e a solução de Inomata

Antes de mais nada, gostaríamos de ressaltar que no modelo padrão da física de partículas, qualquer campo spinorial sem massa pode representar um neutrino. Assim, tudo o que foi desenvolvido acima pode ser imediatamente aplicado a esta partícula. Neste caso particular, os resultados obtidos serão cruciais para tornar o método proposto mais competitivo. Nesta e na seção seguinte consideraremos apenas neutrinos.

No regime em que $\dot{\beta} \ll \beta$, a equação para o campo spinorial no espaço de Minkowski (5.28) possui apenas os termos dinâmicos (o termo algébrico é negligenciado)

$$i \left(\gamma^A \partial_A + \beta \gamma^A H_A H^B \partial_B + \frac{\beta}{4} \dot{H}_A \gamma^A \right) \Psi = 0. \quad (5.29)$$

No geral, esta solução não corresponde a nenhuma dinâmica que pudéssemos tratar. No entanto, existe uma classe muito interessante de soluções para este caso, que é dada pela condição de Inomata [29], onde as derivadas de Ψ são proporcionais aos elementos da álgebra de Clifford, ou seja, uma combinação linear da base formada por $\mathbf{1}$, γ_5 , γ_A , $\gamma_A \gamma_5$ e $\gamma_A \gamma_B$. Nesta classe de solução, a dinâmica do campo spinorial se reduz a equações algébricas sobre os coeficientes da expansão.

Se, por outro lado, assumirmos que a geometria efetiva (5.1) corresponde, de fato, a uma geometria real – solução das equações de Einstein e que é causada por um campo gravitacional gerado pelos próprios neutrinos – seguindo os passos Inomata, podemos analisar segundo a teoria Rainich-Misner-Wheeler-Inomata (RMWI), quais informações sobre o campo gravitacional gerado pelos neutrinos podem ser obtidas somente pelas simetria desta teoria. Entretanto, neste capítulo, estamos interessados somente nas propriedades das partículas elementares, ou seja, este regime para o parâmetro de acoplamento β não traz informações simples sobre a dinâmica de partículas elementares no espaço de Minkowski. Logo, generalizações não triviais devem ser feitas. Com isso, o desenvolvimento sistemático da teoria RMWI não é nosso objetivo neste trabalho e esta análise deverá ser abordada num futuro próximo. Nosso principal objetivo encontra-se na próxima seção.

5.2.2 Case $\dot{\beta} \gg \beta$ e a quebra da simetria quiral

No lagrangiano do Modelo Padrão da física de partículas, os neutrinos destros não estão presentes, uma vez que interações fracas apenas alguns dos neutrinos canhotos. Consequentemente, não é possível formar termos de massa para eles de acordo com as simetrias do Modelo Padrão. No entanto, a experiência de 1998, Super-Kamiokande, e vários outros experimentos independentes e diferentes detectaram a família oscilação dos neutrinos [5]. Do casal mínima aplicada a Minkowski espaço, esse fato só é possível se os neutrinos são levemente enorme, quebrando a simetria quiral. Mas levanta uma questão fundamental: onde está o ainda não observado neutrinos destro?

Hoje em dia, existem duas maneiras possíveis para responder a esta pergunta: em primeiro lugar, eles simplesmente não existem, o que não é muito satisfatório. Em segundo lugar, eles existem, mas não interagem fracamente. No entanto, por causa do prazo de massa, o qual mistura os dois quiralidades, foi necessário assumir que neutrinos destros são pesados. Em seguida, a simetria quiral é quebrada “na mão” e não explica por que esses neutrinos

são tão maciça. Além disso, uma vez que o destro neutrino precisa muito altas energias a serem observados permanece despercebida em experimentos de baixa energia, apesar de sua fraca interação com outras partículas. no entanto, vamos que no regime $\dot{\beta} \gg \beta$, o resultado é completamente diferente do modelo padrão e nossa explicação é compatível com a fenomenologia.

Consideremos $\dot{\beta} \gg \beta$ na Eq. (5.28). Neste caso, dois dos três termos de auto-interação se anulam e apenas um permanece, resultando em

$$i \left(\gamma^A \partial_A + \frac{\dot{\beta}}{2} H_A \gamma^A \right) \Psi = 0. \quad (5.30)$$

Substituindo a expressão para $H_A \gamma^A \Psi$, obtemos

$$i \gamma^A \partial_A \Psi + 2s(\mathbf{1} - \gamma_5)(A + iB\gamma_5) \Psi = 0. \quad (5.31)$$

Esta equação é muito semelhante à equação de Heisenberg para um campo espinorial se propagando no espaço-tempo de Minkowski, onde denotamos $s \equiv i\dot{\beta}/4$. Surpreendentemente, concluímos que o termo não-linear de auto-interação dos modelos de Nambu-Jona-Lasinio pode ser visto como uma modificação da estrutura do espaço-tempo.

Até este ponto, nosso método parece apresentar equações dinâmicas equivalentes apenas de um ponto de vista puramente matemático, sendo ambas as representações são igualmente satisfatórias; a equação de Dirac é mais simples que a de Heisenberg, mas no espaço de Minkowski é mais fácil de tratar o campo que na geometria curva, a qual depende de Ψ .

Para introduzir uma representação preferencial, induzida por fatos experimentais/fenomenológicos referentes ao campo espinorial, vamos começar por reescrever Ψ , como uma superposição de duas componentes com quiralidades opostas

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R,$$

onde

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\Psi \quad \Psi_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)\Psi,$$

são componentes do espinor representando a quiralidade de mão esquerda e de mão direita, respectivamente. Dada a sua arbitrariedade, assumimos o parâmetro s como uma constante (pelo menos ao longo das curvas integrais representadas pelo campo vetorial H^A). Sabemos que a equação de Dirac é invariante sob a ação de γ_5 – pois ambas as componentes quirais satisfazem a mesma dinâmica no espaço curvo efetivo – portanto, após a aplicação do método, percebemos que cada componente de Ψ satisfaz uma equação dinâmica distinta no espaço de Minkowski

$$i\gamma^A\partial_A\Psi_R + 4s(A + iB\gamma_5)\Psi_L = 0, \quad (5.32)$$

e

$$i\gamma^A\partial_A\Psi_L = 0. \quad (5.33)$$

A partir dessas equações, obtemos um resultado notável: se, por exemplo, Ψ_L representa o estado de um neutrino de mão esquerda e Ψ_R representa um neutrino de mão direita, vemos que a cada componente da superposição satisfaz uma dinâmica diferente equação no espaço plano. Este resultado torna-se ainda mais impressionante se olharmos para todo o processo de construção de dinâmicas equivalentes: começamos a Ponte Dinâmica com um campo espinorial satisfazendo a equação de Dirac em um espaço curvo, que é a superposição de estados com diferentes quiralidades. Nesta geometria, cada componente quiral satisfaz a mesma equação. No final do processo, uma vez no espaço de Minkowski, obtivemos duas componentes separadas, que satisfaçam duas equações diferentes.

Este resultado é uma possível explicação do porquê mede-se apenas um tipo de neutrino. A partir deste método, este fenômeno deveria ser compreendido como sendo devido ao fato de que o termo de auto-interacção, que aparece apenas para uma componente quiral, envolve uma escala de energia muito alta – fazendo com que o termo algébrico domine o termo de propagação –, de modo que o aparato de medida não é capaz de detectar a presença da outra componente quiral. Sumariamente, ambas as quiralidades existem mas é possível fazer medidas com apenas uma delas.

No caso de férmions massivos, ainda há resultados preliminares, porém espera-se que este tipo de auto-interação não aparecerá facilmente devido a dois motivos observacionais: o parâmetro β deve depender do inverso da massa de cada partícula considerada (ou seja, ele seria pequeno para estas partículas) e a presença do termo de massa também quebra quiralidade e produz uma mistura na contribuição de cada termo. Entretanto, o modelo padrão se interessa apenas por auto-interações advindas de correções quânticas. Logo, seria necessário examinar se alguma dessas correções quânticas poderia ser modelada por um termo de auto-interação do tipo NJL generalizado e se que seria consistente com a nossa proposta. Sabemos que, hoje em dia, só há estimativas para as propriedades do neutrino de mão direita [9]. A tentativa de introduzir números específicos para este modelo ainda está sendo desenvolvida e será endereçada a um trabalho mais experimental sobre o assunto. Mesmo assim, do ponto de vista puramente teórico, o método da Ponte Dinâmica no caso de campos espinoriais já traz a possibilidade de nova física para o modelo padrão.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste texto foi apresentada uma nova maneira de descrever a dinâmica dos campos fundamentais da física. Isto foi possível devido a construção de um mapa entre equações dinâmicas distintas. Este mapa atua sobre a métrica do espaço-tempo na qual uma dada dinâmica está definida de maneira bem precisa, levando-a a uma outra dinâmica definida em outra métrica.

Em particular, no segundo capítulo, apresentamos uma extensão da métrica de Gordon no sentido de construir uma classe maior de geometrias que descrevem movimentos acelerados no espaço-tempo de Minkowski como geodésicas em uma geometria modificada $\hat{q}_{\mu\nu}$. Esta métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$ depende apenas da geometria de fundo e do vetor velocidade do corpo acelerado. Analisamos caminhos de luz (acelerados) dentro de um dielétrico em movimento e construímos uma coleção de geometrias com propriedades distintas àquelas da abordagem de Gordon, mas com os mesmos efeitos cinemáticos. Reunimos também esta nova classe de geometrias, que chamamos de métricas arrastadas, com as geometrias efetivas do eletromagnetismo não-linear, produzindo uma coleção de possíveis estruturas métricas do espaço-tempo, que têm uma aplicação imediata na teoria de modelos análogos. Ao final do capítulo, foram estudados casos em que uma geometria curva de fundo apresenta observadores num movimento circular e, então, aplicamos o método desenvolvido no início do texto para descrevê-los como geodésicas.

No terceiro capítulo, apresentamos uma nova proposta para lidar com processos gravitacionais através de um campo escalar como uma extensão natural da teoria de Newton. Mostramos também como as desvantagens tradicionais de modelos da gravitação escalar são superadas em nossa proposta. Em particular, nota-se que a geometria de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é auxiliar e não observável. Este procedimento é semelhante à formulação de campo da Relatividade Geral proposta por Gupta, Feynman, Deser, Grischuk e outros. A matéria interage com o campo escalar Φ apenas através da métrica gravitacional e a dinâmica da teoria advém de um princípio variacional. O Lema Fundamental relaciona uma classe de sistemas dinâmicos descritos pela lagrangiana $L = V(\Phi)w$ com um campo de Klein-Gordon sem massa auto-interagente em um espaço-tempo curvo. A auto-interação do campo escalar é descrita pelo potencial $V(\phi)$ que multiplica o termo cinético. Diferentes formas de $V(\phi)$ resultam em diferentes teorias gravitacionais. Naquele capítulo, analisamos somente o caso em que

$$V = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}.$$

Essa escolha particular permite soluções em acordo com o conhecimento observacional dos fenômenos da gravitação. Como dito anteriormente, as consequências cosmológicas desta teoria e outros testes clássicos da gravitação ainda estão sob análise e, por isso, não foram apresentados no texto.

No capítulo seguinte, estudou-se a possibilidade de descrever a dinâmica da teoria linear de Maxwell em termos da teoria não-linear de Born-Infeld. Como foi demonstrado em [53], o preço a pagar é a introdução de uma geometria curva que tem apenas um caráter eletromagnético, ou melhor, não é atribuída nenhuma dinâmica extra a esta geometria. Em seguida, demos um passo além ao generalizar esta equivalência na presença de matéria. A representação geométrica em termos da métrica eletromagnética é atribuída a todos os corpos, carregados ou não. Isto implica em várias possibilidades de descrição dos fenômenos eletromagnéticos, algumas das quais exploramos aqui. No caso em que o campo eletromagnético está num regime muito

distante de seu valor máximo β , o resultado mais surpreendente é o aparecimento de um momento magnético para o neutrino. A comparação da abordagem proposta aqui com os resultados observacionais indicam que nossa teoria não está em contradição com a observação. Portanto, este modelo deve ser levado adiante e o caso de campos eletromagnéticos muito elevados deve ser examinados, a fim de encontrarmos algum fenômeno claramente descritível em termos do nosso modelo.

Por fim, estendemos o método da ponte dinâmica para o caso de campos espinoriais, cujo resultado mais importante foi permitir a elaboração de uma proposta para a quebra da simetria quiral sem a necessidade de um termo de massa na equação dinâmica do campo.

Capítulo 7

Perspectivas

Nota-se que o método das *Pontes Dinâmicas* representa agora um novo campo de estudo; uma nova linha de pesquisa. Cada exemplo apresentado aqui possui uma série de questões que ainda permanecem em aberto. Em particular, citamos algumas daquelas relacionadas a cada capítulo apresentado, que pretende-se respondê-las num futuro próximo.

No caso das métricas arrastadas, que representam um conjunto de métricas que não estão diretamente ligadas à dinâmica de um dado campo, estas métricas deveriam ser analisadas do ponto de vista de todos os processos dinâmicos que produzem uma cinemática bem conhecida. Por exemplo, o eletromagnetismo. Seria importante estudar partículas carregadas sujeitas a campos eletromagnéticos, cuja aceleração é produzida por uma força de Lorentz que envolva a presença simultânea de campos elétricos e magnéticos. Em seguida, deveríamos entender as propriedades físicas que possuem um comportamento singular devido a presença ou não de campo eletromagnético: perfil da radiação eletromagnética, trabalho realizado pelo campo, efeitos de retro-reação etc.

Na teoria escalar da gravitação ainda é necessário verificar se a teoria permite uma solução exata e consistente com o efeito Lense-Thirring, a solução interna de uma estrela, a cosmologia, a radiação gravitacional e a quantização.

No caso da métrica eletromagnética, devemos ainda considerar o acoplamento mínimo do campo eletromagnético com outros campos além do espinorial e ver se há efeitos desta métrica sobre bósons e mésons, ou mesmo, a possibilidade de outros acoplamentos em $\hat{e}_{\mu\nu}$. Também seria interessante tentar encontrar um mapa entre a teoria de Maxwell definida num espaço curvo e alguma teoria não linear do eletromagnetismo definida no espaço plano.

Para a métrica espinorial, ainda seria necessário desenvolver completamente todas as consequências do modelo proposto e tentar encontrar uma viabilidade experimental para a confirmação da nossa proposta.

Capítulo 8

Epílogo

Nas ciências exatas sempre nos defrontamos com a escolha de primeiros princípios na elaboração de um modelo, que em geral se faz sobre dados empíricos ou bases matemáticas abstratas. Na Física, em particular, para criar uma determinada teoria é necessário estabelecer quais são as premissas consideradas como verdadeiras e, em seguida, desenvolver o arcabouço teórico e experimental que daí decorrem [62]. Até o advento da teoria da relatividade geral e da mecânica quântica esta questão não se colocava, ou melhor, era endereçada somente à metafísica. O observador e seu papel eram de domínio do bom senso e do senso comum (“*todo mundo sabe que...*”). No caso da teoria da relatividade especial (restrita) esta questão aparece de forma bastante evidente com o rompimento dos conceitos mecânicos absolutos. Na mecânica quântica, o problema é ainda mais profundo, abalando os alicerces da ciência com a crítica à própria realidade objetiva (ou, pelo menos, o seu modo *a priori*) [64]. De duas maneiras bem distintas, estas duas novas teorias iniciadas no fim do século XIX trouxeram para o âmbito da Física uma crítica ao mundo físico organizado desde os gregos (pós-socráticos).

O que nos interessa por trás desta revolução é o *processo*. A relatividade geral com seus processos não-lineares (gravitação $\Longleftrightarrow$ energia-momento) e a mecânica quântica como processo de construção gradativa da representação da realidade (pelo menos, segundo a interpretação de Copenhague) permitem

que certos conceitos primitivos da física tradicional possam ser deduzidos de processos não-lineares de interação entre campos e/ou fluidos.

Seguindo nesta direção, mostramos que propriedades elementares, como o momento magnético e a quebra da simetria quiral – conferir os casos da massa em [58, 49] e o spin em [56], que não foram detalhadamente discutidos aqui (por serem textos que não estão ligados diretamente com as pontes dinâmicas) – podem emergir de acoplamentos não-mínimos de campos de matéria com a geometria.

É claro ver que algumas ideias apresentadas neste trabalho tem ressonâncias diretas com textos clássicos sobre esta discussão e que citamos, para terminar, um trecho breve de um deles [43]:

*“Estariamos assim no limiar de uma ontologia... o conceito de **campo** aparecendo então como primordial; a matéria, os corpos nele se destacando como eventuais flutuações locais, distorções aleatórias do espaço-tempo”.*

Appendix A

Método de Hadamard para a GSG

O método de Hadamard é muito utilizado no estudo da propagação de descontinuidades de um determinado campo. Proposto por J. Hadamard em 1903 [25], o método consiste em associar as descontinuidades das derivadas de um dado campo, ao atravessar uma dada superfície, com o vetor normal a esta superfície. Como dito anteriormente, este mesmo método pode ser usado para obter a métrica de Gordon.

Faremos aqui uma análise breve das descontinuidades do campo eletromagnético que foram usadas no caso da teoria escalar da gravitação. Mostraremos que as ondas eletromagnéticas seguem ao longo de geodésicas na métrica $q_{\mu\nu}$. Procederemos de acordo com o método de Hadamard (ver detalhes também em [52] e referências) para obter a relação de dispersão das ondas nesta métrica.

Seja Σ uma superfície de descontinuidade do campo A_μ . A descontinuidade de uma função arbitrária f através desta superfície é definida por

$$[f(x)]_\Sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)). \quad (\text{A.1})$$

No caso em questão, assumimos que o campo A_μ e suas primeiras derivadas $\partial_\nu A_\mu$ são contínuas ao atravessar Σ , enquanto que as segundas derivadas

apresentam uma descontinuidade:

$$[A_\mu]_\Sigma = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$[\partial_\nu A_\mu]_\Sigma = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$[\partial_\alpha \partial_\beta A_\mu]_\Sigma = k_\alpha k_\beta \xi_\mu(x), \quad (\text{A.4})$$

onde $k_\mu \equiv \partial_\mu \Sigma$ é o vetor de propagação ortogonal a superfície Σ e $\xi_\mu(x)$ é a amplitude da descontinuidade. Usando estas propriedades da descontinuidade na equação de movimento do campo eletromagnético

$$q^{\alpha\nu} F_{\mu\nu;\alpha} \equiv q^{\alpha\nu} A_{[\mu,\nu];\alpha} = 0,$$

segue que

$$k_\alpha k_\beta q^{\alpha\beta} = 0.$$

Isto significa que as descontinuidades do campo eletromagnético se propagam ao longo de geodésicas nulas na métrica $q_{\mu\nu}$.

Do ponto de vista da GSG, isso acontece devido à relação entre o campo EM e a métrica, os quais se acoplam minimamente segundo o princípio da covariância geral. Portanto, qualquer outro tipo de matéria só interage gravitacionalmente via a métrica $q_{\mu\nu}$.

Appendix B

Invariantes topológicos do eletromagnetismo

Dados o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e seu dual ${}^*F_{\mu\nu}$, os dois invariantes topológicos escalares da teoria eletromagnética que podemos construir são definidos como sendo

$$\begin{aligned} F &\equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2 \right), \\ G &\equiv {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4 \vec{E} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

onde usamos que o tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser descomposto, com respeito a uma classe de observadores, da seguinte forma

$$F_{\mu\nu} \equiv E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta,$$

sendo v^μ um campo vetorial normalizado do tipo-tempo. De posse destas definições, um cálculo direto mostra-nos que as seguintes relações algébricas são válidas

$$F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}^* - F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{F}{2} \delta^\mu{}_\nu, \quad (\text{B.1})$$

$$F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}^* = -\frac{G}{4} \delta^\mu{}_\nu, \quad (\text{B.2})$$

$$F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\nu = -\frac{G}{4} F^\mu{}_\nu - \frac{F}{2} F^\mu{}_\nu, \quad (\text{B.3})$$

$$F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\lambda F^\lambda{}_\nu = \frac{G^2}{16} \delta^\mu{}_\nu - \frac{F}{2} F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu. \quad (\text{B.4})$$

Seguindo a prescrição do método das pontes dinâmicas aplicado ao campo eletromagnético, todo objeto tensorial na teoria de Maxwell tem seus índices levantados ou abaixados pela métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, enquanto que num espaço-tempo curvo, onde definimos a teoria de Born-Infeld, os índices devem ser levantados ou abaixados fazendo-se uso da métrica $\hat{q}_{\mu\nu}$. De modo esquemático, temos:

- **Teoria de Maxwell:** dada pelo par ordenado $(\eta_{\mu\nu}, -\frac{1}{4}F)$, onde a primeira entrada corresponde a métrica do espaço-tempo e a segunda entrada diz respeito a Lagrangiana. Deste modo, temos

$$F^{\mu\nu} \equiv F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta},$$

$$F = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}.$$

A equação dinâmica desta teoria na ausência de fontes é dada por

$$(F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta})_{,\nu} = 0.$$

- **Teoria de Born-Infeld:** corresponde ao par $(\hat{e}_{\mu\nu}, \beta^2(1 - \sqrt{\hat{U}}))$, donde β é um parâmetro arbitrário da teoria (campo eletromagnético crítico) e

$$\hat{U} = 1 + \frac{\hat{F}}{2\beta^2} - \frac{\hat{G}}{16\beta^4},$$

$$\hat{F}^{\mu\nu} \equiv F_{\alpha\beta} \hat{e}^{\mu\alpha} \hat{e}^{\nu\beta},$$

$$\hat{F} = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \hat{e}^{\mu\alpha} \hat{e}^{\nu\beta},$$

$$\hat{G} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{e}}} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = \hat{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

A dinâmica desta teoria não-linear do eletromagnetismo na ausência fontes é dada por

$$\partial_\nu \left[\frac{\sqrt{-\hat{e}}}{\hat{U}} \left(\hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4\beta^2} \hat{G}^* \hat{F}^{\mu\nu} \right) \right] = 0.$$

Na proposta apresentada no capítulo (4), a métrica $\hat{e}_{\mu\nu}$ depende do próprio campo eletromagnético e da métrica de Minkowski. Devido às relações algébricas (B.1)-(B.4), existe um único caminho para introduzir a métrica eletromagnética, ou seja,

$$\hat{e}^{\mu\nu} = a \eta^{\mu\nu} + b \phi^{\mu\nu}, \quad (\text{B.5})$$

onde a e b correspondem a duas funções arbitrárias dos dois invariantes de Lorentz F e G . Novamente, assumimos que $\phi^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu$. O termo “métrica eletromagnética” é justificado pelo fato de que $\hat{e}_{\mu\nu}$ é unicamente definida em termos dos campos eletromagnéticos e não possui dinâmica própria.

A relação entre os invariantes topológicos de cada teoria estão correlacionados pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \hat{F} &= a^2 \left[(n - \epsilon F m) F - \frac{\epsilon m}{2} G^2 \right], \\ \hat{G} &= a^2 \left[n - \frac{\epsilon m}{2} F \right] G, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

onde

$$n \equiv 1 + \frac{\epsilon^2 G^2}{16}, \quad m \equiv 1 - \frac{\epsilon F}{4}.$$

As funções arbitrárias a e $\epsilon \equiv b/a$ são coeficientes do tensor métrico. Com estas equações o cálculo para encontrar a relação entre as quantidades físicas de cada dinâmica em termos da outra torna-se mais simples.

Appendix C

Derivada covariantes de campos espinoriais

Faremos aqui um breve resumo correspondente aos resultados fundamentais desenvolvidos em [41] e que podem ser encontrados de uma maneira extremamente didática em [70]. Sabe-se que no tratamento de campos espinoriais em espaços curvos é necessário introduzir uma estrutura extra responsável por fazer a conexão em a geometria curva e o espaço espinorial. Isto é feito a partir de uma generalização do conceito de transporte paralelo na presença de espinores, no qual aparece uma nova conexão (interna) que atua simultaneamente nos dois espaços. No caso mais geral, a partir da condição (4.10), segue que esta conexão interna Γ_μ é dada por

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{FI} + V_\mu, \quad (\text{C.1})$$

onde V_μ é um vetor arbitrário satisfazendo a álgebra de Clifford e Γ_μ^{FI} é chamada conexão de Fock-Ivanenko, a qual é definida em termos das matrizes de Dirac γ^μ como

$$\Gamma_\mu^{FI} = \frac{1}{8} [\gamma^\lambda \gamma_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu} \gamma^\lambda + \Gamma_{\lambda\mu}^\epsilon (\gamma_\epsilon \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \gamma_\epsilon)], \quad (\text{C.2})$$

sendo que $\Gamma_{\lambda\mu}^\epsilon$ são os símbolos de Christoffel construídos com a métrica $g_{\mu\nu}$. Logo, a derivada covariante de Ψ é escrita como

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \Psi &= \partial_\mu \Psi - \Gamma_\mu \Psi \\ &= \partial_\mu \Psi - \Gamma_\mu^{FI} \Psi - V_\mu \Psi.\end{aligned}\tag{C.3}$$

Para que esta expressão esteja bem definida, a corrente de probabilidade $J^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ deve ser preservada

$$\nabla_\mu J^\mu = 0.$$

Sendo assim, o hermitiano conjugado desta expressão deve ser

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \bar{\Psi} &= \partial_\mu \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \Gamma_\mu \\ &= \partial_\mu \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \Gamma_\mu^{FI} + \bar{\Psi} V_\mu.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Desta expressão, vemos que V^μ deve se transformar como uma conexão, como demonstrado por [15]. Logo, a escolha dada pela Eq. (4.11), sob a condição de que $F_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$ – condição trivialmente satisfeita dado que $F_{\mu\nu}$ representa o campo eletromagnético também em $g^{\mu\nu}$ –, é compatível com esta restrição sobre V^μ .

Appendix D

Tétradas

O formalismo das tétradas (ou vierbein) foi inicialmente introduzido por Hermann Weyl para tratar de campos espinoriais em espaços curvos. Grandes avanços nesta área foram também desenvolvidos por Élie Cartan, o qual demonstrou que este formalismo é completamente equivalente àquele usado pela relatividade geral (dependente sistema de coordenadas).

No caso considerado, assumimos um espaço quadri-dimensional munido com um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e um sistema de coordenadas x^α . As tétradas são objetos definidos localmente que formam uma base invariante de Lorentz neste espaço

$$e^\mu{}_A = e^\mu{}_A(x) = (e^\mu(x))_A, \quad (\text{D.1})$$

tal que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{AB} e^\mu{}_A e^\nu{}_B, \quad (\text{D.2})$$

onde η^{AB} é a métrica de Minkowski. A inversa da base $e_\mu{}^A$ é definida através de

$$e_\mu{}^A e^\nu{}_A = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu{}^A e^\mu{}_B = \delta_B^A, \quad (\text{D.3})$$

que verifica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e_\mu{}^A e_\nu{}^B. \quad (\text{D.4})$$

Vale ressaltar que os índices de espaço-tempo $\mu, \nu, \dots$ são levantados e abaixados usando a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, enquanto que os índices espino-

riais $A, B, \dots$ são alterados através da métrica do espaço interno (espinorial) que, neste caso, escolhemos ser a métrica de Minkowski η_{AB} :

$$e^{\mu A} = g^{\mu\nu} e_{\nu}{}^A = \eta^{AB} e^{\mu}{}_B, \quad (\text{D.5})$$

$$e_{\mu A} = g_{\mu\nu} e^{\nu}{}_A = \eta_{AB} e_{\mu}{}^B. \quad (\text{D.6})$$

O determinante ligado a esta base é dado por

$$e = \sqrt{-g}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (\text{D.7})$$

Este é o motivo pelo qual os vierbeins as vezes são chamados de “raiz quadrada” do tensor métrico.

Sob a ação de difeomorfismos, as tétradas se transformam como um vetor e sob a ação de transformações de Lorentz locais, como sendo

$$\begin{cases} e_{\mu}{}^A &= \Lambda^A{}_B e_{\mu}{}^B, \\ e^{\mu}{}_A &= \Lambda_A{}^B e^{\mu}{}_B \equiv (\Lambda^A{}_B)^{-1} e^{\mu}{}_B, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

onde $\Lambda^A{}_B$ e $(\Lambda^A{}_B)^{-1}$ são matrizes de Lorentz infinitesimais e locais, sendo uma a inversa da outra segundo a definição.

Referências Bibliográficas

1. R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York, (1975).
2. A.B. Balantekin, *Neutrino Magnetic Moment*, arXiv: hep-ph/0601113v1;
3. C. Barceló, S. Liberati e M. Visser, *Analogue Gravity*, *Liv. Rev. Rel.* **14** 3 (2011);
4. H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayël-Neto e M.T.D. Orlando, *Magnetic Moment Generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-Symmetry Violation*, arXiv: hep-ph/0806.1253v2;
5. J. Beringer et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** 010001 (2012).
6. K. Bhattacharya e P.B. Pal, *Neutrinos and magnetic fields: a short review*, *Proc. Indian Natn Sci Acad* **70**, **A** 145 (2004);
7. A. Czarneck e W.J. Marciano, *The Muon anomalous magnetic moment: A Harbinger for 'new physics'*, *Phys. Rev. D* **64** 013014 (2001);
8. S. Deser, *Gravity from self-interaction in a curved background*, *Class. Quantum Grav.* **4** L99 (1987).
9. M. Drewes, *The phenomenology of right handed neutrinos*, arXiv:hep-ph/1303.6912 (2013).

10. A. Einstein (1912) quoted by Horst-Heino v. Borzeszkowski e Renate Wahsner, em *Mach's Principle*, Ed. J. Barbour e H. Pfister, Birkhäuser (1995).
11. A. Einstein, *The collected papers of Albert einstein* **6** Doc. 30, Princeton University Press (1997).
12. A. Einstein, *The meaning of relativity*, Princeton University Press, (1950).
13. F. T. Falciano e E. Goulart, *A new symmetry of the relativistic wave equation*, *Class. Quant. Grav.* **29** 085011 (2012).
14. R. P. Feynman, F. B. Morinigo e W. G. Wagner, *Feynman lectures on gravitation*, Addison Wesley Pub. Company, Massachusetts, (1995).
15. J. B. Formiga, *Conservation of the Dirac current in models with a general spin connection*, arXiv:hep-th/1210.0759 (2012).
16. W.I. Fushchych e R.Z. Zhdanov, *Symmetry and exact solutions of non-linear spinor equations*, *Phys. Rep.* **172** 4 p.123 (1989).
17. G. Gibbons e C. Will, *On the multiple deaths of Whitehead's theory of gravity*, arXiv:gr-qc/0611006v1 (2006).
18. D. Giulini, *What is (not) wrong with scalar gravity?*, arXiv:0611100 [gr-qc] (2008).
19. W. Gordon, *Zur Lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie*, *Ann. Phys. (Leipzig)* **72** 421 (1923);
20. E. Goulart e F. T. Falciano, *Disformal invariance of Maxwell's field equation*, arXiv:gr-qc/1303.4350v1 (2013).
21. E. Goulart, M. Novello, F. T. Falciano e J. D. Toniato, *Hidden geometries in nonlinear theories: a novel aspect of analogue gravity*, *Class. Quantum Grav.* **28** 245008 (2011).

22. K. Gödel, *An Example of New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Equations of Gravitation*, *Rev. Mod. Phys.* **21** 447 (1949).
23. J. P. Grishchuk, A. N. Petrov e A. D. Popova, *Exact theory of the (Einstein) gravitational field in an arbitrary background space-time*, *Commun. Math. Phys.* **94** 379 (1984).
24. S. N. Gupta *Einstein's and others theories of gravitation*, *Phys. Rev.* **96** 1683 (1954) .
25. J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de hydrodynamique*, Ed. Hermann, Paris (1903);
26. D. Hanneke, S. Fogwell, e G. Gabrielse, *New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **100** 120801 (2008);
27. T. Hatsuda and T. Kunihiro, *QCD phenomenology based on a chiral effective lagrangian*, *Phys. Rep.* **247** 221 (1994).
28. W. Heisenberg, *Quantum theory of fields and elementary particles*, *Rev. Mod. Phys.* **29** 3 (1957).
29. A. Inomata and W. A. KcKinley, *Geometric theory of neutrinos*, *Phys. Rev.* **140** 1467 (1965).
30. A.V. Kuznetsov e N.V. Mikheev, *A new bound on the Dirac neutrino magnetic moment from the plasma induced neutrino chirality flip in a supernova*, *JCAP* **11** 031 (2007).
31. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Ed. 4, Dover, New York (1970);
32. L. Landau e E. Lifshitz, *Electrodynamique des milieux Continus*, Ed. Mir, Moscow (1969);

33. B.W. Lee e R.E. Shrock, *Natural suppression of symmetry violation in gauge theories: muon- and electron-lepton-number nonconservation*, *Phys. Rev. D* **16** 1444 (1977);
34. O. Lychkovskiy e S. Blinnikov, *Spin flip of neutrinos with magnetic moment in core-collapse supernova*, arXiv: hep-ph/0905.3658v3;
35. E. Mach, *The Science of Mechanics*, Ed. 6, The Open Court Publishing CO., Illinois (1960);
36. J. Magueijo, *Bimetric varying speed of light theories and primordial fluctuations*, *Phys. Rev. D* **79** 043525 (2009).
37. W. J. Marciano e A. I. Sanda, *Exotic decays of the muon and heavy leptons in gauge theories*, *Phys. Lett. B* **67** 303 (1977);
38. K. Nakamura et al., *Particle Data Group*, *JP G* **37** 075021 (2010);
39. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with superconductivity. I*, *Phys. Rev.* **122** 345 (1961); Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with superconductivity. II*, *Phys. Rev.* **124** 246 (1961).
40. G. Nordström, *Relativitätsprinzip und Gravitation*, *Phys. Zeit.* **13** 1126 (1912).
41. M. Novello, *Algebre de l'espace-temps*, tese de doutorado (1972).
42. M. Novello, *Cosmologia Relativista, II Escola de Cosmologia e Gravitação*, CBPF/Rio de Janeiro (1980).
43. M. Novello, *Cosmos e Contexto*, Ed. Forense Universitária (1988).
44. M. Novello, *Weak and Electromagnetic Forces as a Consequence of the Self-Interaction of the γ -Field.*, *Phys. Rev. D*, **8** 8, 2398 (1973);

45. M. Novello, *Constructing Dirac linear fermions in terms of non-linear Heisenberg spinors*, *Europhys. Lett.* **80** 41001 (2007).
46. M. Novello e E. Bittencourt, *Dragged Metrics*, *Gen. Rel. Grav.* DOI: 10.1007/s10714-013-1507-z (2013).
47. M. Novello e E. Bittencourt, *Gordon Metric Revisited*, *Phys. Rev. D* **86** 124024 (2012).
48. M. Novello e E. Bittencourt, *A geometrical origin of the right-handed neutrino magnetic moment*, arXiv:gen-ph/1111.2347.
49. M. Novello e E. Bittencourt, *What is the origin of the mass of the Higgs boson?*, *Phys. Rev. D* **86** 063510 (2012).
50. M. Novello, E. Bittencourt, U. Moschella, E. Goulart, J. M. Salim e J. Toniato, *Geometric scalar theory of gravity*, *JCAP* **06** 014 (2013); arXiv:gr-qc/1212.0770.
51. M. Novello, I. Damião Soares e J. Tiomno, *Geodesic motion and confinement in Gödel's universe*, *Phys. Rev. D* **27** 4 779 (1983).
52. M. Novello, V. De Lorenci, R. Klippert and J. M. Salim *Geometrical aspects of light propagation in non-linear electrodynamics*, *Phys. Rev D* **61**, 045001 (2000).
53. M. Novello, F. T. Falciano e E. Goulart, *Electromagnetic Geometry*, arXiv:1111.2631 (2011).
54. M. Novello e E. Goulart, *Beyond analog gravity: the case of exceptional dynamics*, *Class. Quantum Grav.* **28** 145022 (2011).
55. M. Novello e E. Goulart, *Eletrodinâmica não linear: causalidade e efeitos cosmológicos*, Ed. Livraria da Física, São Paulo (2010).
56. M. Novello, J. M. Salim e F. T. Falciano, *On a Geometrical Description of Quantum Mechanics*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **8** 87 (2011).

57. M. Novello, N. F. Svaiter e M. E. X. Guimarães, *Backwards Time Travel Induced by Combined Magnetic and Gravitational Fields*, *Mod. Phys. Lett. A* **7** 5 381 (1992);
58. M. Novello, *The gravitational mechanism to generate mass*, *Class. Quant. Gravity* **28** 035003 (2011).
59. M. Novello, M. Visser and G. Volovik (Eds), “*Artificial Black Holes*”, *Proceedings of the workshop: Analog Models of General Relativity*, World Scientific (2002);
60. M. Passera, *Electron, muon and tau magnetic moments: a theoretical update*, arXiv: hep-ph/0702027v1;
61. J. B. Pendry, D. Schurig and D. R. Smith, *Controlling Electromagnetic Fields*, *Science* **312** 1780 (2006);
62. H. Poincaré, *Science and Hypothesis*, Ed. Scott, Michigan University (1905).
63. N. J. Poplawski, *Covariant differentiation of spinors for a general affine connection*, arXiv:gr-qc/0710.3982v2 (2007).
64. I. Prigogine e I. Stengers, *A nova aliança: a metamorfose da ciência*, Editora UnB, Brasília (1984).
65. F. Ravndal, *Scalar gravitation and extra dimensions*, arXiv:gr-qc/0405-030v1 (2004).
66. D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr and D. R. Smith, *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies*, *Science* **314** 977 (2006);
67. R. U. Sexl, *Theories of gravitation*, *Fortsch. Phys.* **15** 269 (1967).
68. S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Scalar gravitation: A laboratory for numerical relativity*, *Phys. Rev. D* **47** 1529 (1993).

69. D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire, *Metamaterials and Negative Refractive Index*, *Science* **305** 788 (2009);
70. I. D. Soares, *O cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços curvos*, *II Escola de Cosmologia e Gravitação*, CBPF/Rio de Janeiro (1980).
71. J. Stachel et al., editors, *The collected papers of Albert Einstein*, vol. 1-9, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1987-2005).
72. J. H. Taylor e J. M. Weisberg, *A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*, *Astroph. J.* **253** 908 (1982); J. H. Taylor and J. M. Weisberg, *Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913 + 16*, *Astroph. J.* **345** 434 (1989).
73. C. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Liv. Rev. Rel.* **9** 3 (2006).