



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
LAFEX - COORDENAÇÃO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS
GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS ELEMENTARES

TESE DE DOUTORADO

Estudos ao Nível de Árvore e Quântico em Gravitação.

Jefferson Luiz de Lima Morais

Orientador: Antonio José Accioly

Rio de Janeiro, Julho de 2013.

I was sort of half-dreaming, like a kid would... that it would be funny if these funny pictures turned out to be useful, because the damned Physical Review would be full of these odd-looking things. And that turned out to be true.

Richard Feynman.

Agradecimentos

Todos estes que aí estão
Atravancando o meu caminho,
Eles passarão.
Eu passarinho!

(*Poema do contra* - Mario Quintana).

Acredito que um trabalho de doutorado representa o resumo de toda a experiência acumulada até o momento de sua conclusão. Embora a tendência seja agradecer às pessoas com as quais tivemos mais contato durante os quatro anos de doutorado – talvez pela limitação humana da memória, talvez pela limitação do número de páginas – a quantidade de pessoas e situações gravadas na nossa linha-mundo é enorme. Portanto, a quantidade de pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho é maior do que o número de pessoas que serão citadas nesse agradecimento. Me valendo da desculpa da limitação humana da memória, me redimo caso venha a esquecer alguém que se sinta importante para a conclusão do presente trabalho.

Começo, então, agradecendo aos meus pais que mesmo dentro de suas limitações, sempre se preocuparam em garantir a mim e ao meu irmão, o acesso à educação. Independente de minhas escolhas não muito convencionais (meus amigos queriam tocar guitarra, eu escolhia bateria; todos queriam ser médicos ou advogados, resolvi fazer física), sempre me apoiaram e me deram amor incondicional!

À Kellynha, ao ter aceitado, há mais dez anos atrás, o convite de ir à Feira do Livro de Porto Alegre comigo.

Ao meu irmão, em me mostrar que nem sempre devemos ser só razão, que também

existe espaço para a emoção.

A toda a minha família, em especial ao meu primo Márcio (Cabelo), em razão de sua grande amizade e das longas conversas científicas e não científicas.

Ao amigo e orientador Antonio Accioly, a grande amizade desenvolvida neste percurso e a imensa paciência com a realização deste trabalho. Nem só de flores são feitos os nossos caminhos. Poder contar com sua amizade e as incontáveis tardes agradáveis no café da UFRJ, foi muito importante nessa caminhada.

Ao professor José Abdalla Helayël-Neto, um tipo de pessoa que raramente se cruza pela vida. Fico extremamente feliz por ter tido a oportunidade de entrar em seu cone de luz!

Ao professor Sebastião Alves Dias, agradeço os belíssimos cursos e o exemplo de que o espírito jovem, combativo e revolucionário, só morre em quem permite.

Agradeço ao professor Sergio Duarte, a porta sempre aberta e a disposição em ajudar.

Aos amigos que contribuíram diretamente para este trabalho: Rodrigo Turcati, Esley Scatena e Bruno Dias.

A todos os amigos do CBPF, em especial a Martha (a barista do grupo, sempre aturando a galera na sua sala na hora do cafezinho), ao Max, Maurício, Fabrício, Leonardo Cirto, Leonardo Ospedal, Guilherme “Vinte”, Ana Paula, Marília, Enrique, Luis, Guillermo, Eduardo (Mexicano), Vicente, Carlos Bonilla, Felipe, Rafael Nardi.

Aos amigos que ajudaram a garantir a minha sanidade mental (ou não): Linneu, Marcelo, Carol, Tamara, Chintia, Flávio (Flavitos), Flavinho, Gustavo (Tião).

À Denise do CAT, a amizade e a oportunidade de trabalhar com a equipe de divulgação científica do CBPF.

À Cris do LAFEX, sempre disposta a ajudar e sempre nos recebendo com sorrisos,

mesmo quando nossa missão é apenas incomodá-la.

Ao professor Ivan Oliveira, agradeço o empenho dedicado à melhoria da pós-graduação, sempre nos recebendo em sua sala com cordialidade e ótima música.

Aos secretários da CFC, Ricardo e Bete, agradeço a ajuda técnica, de extrema importância ao garantir o andamento deste trabalho.

Agradeço aos mésons π , a existência do CBPF.

Por fim, agradeço aos contribuintes brasileiros, ao permitirem que a CAPES financiasse parcialmente este trabalho. E aos meus pais, ao financiarem o resto, com a ajuda sempre que a bolsa não era suficiente para aguentar o mercado imobiliário do Rio de Janeiro.

Termino dedicando este trabalho a três pessoas que o viram começar, mas infelizmente não viram sua conclusão: meu avô, Onofre Moreira; meu tio, José Bráulio de Moraes e minha, vó Celina Moraes. Estas três pessoas podem não ter contribuído diretamente para a minha formação acadêmica, mas deram uma enorme contribuição para a minha formação pessoal, o que, na minha opinião, é mais importante.

Resumo

Dois estudos importantes e atuais no contexto da gravitação são realizados. No primeiro, um vínculo entre a massa do fóton e o parâmetro γ (o parâmetro de deflexão determinado pelos experimentais) e ν (a frequência do fóton) é encontrado combinando-se judiciosamente a relatividade geral e a QED massiva. Adotando este cenário e considerando como dados de entrada as mais recentes medidas de deflexão gravitacional solar de ondas de rádio obtidas através da Interferometria de Linha de Base Extensa (VLBI)¹, um limite superior gravitacional para a massa do fóton é estimado. O segundo estudo é devotado à análise do modelo recentemente encontrado por Bergshoeff, Hohm e Townsend (gravitação massiva em 3D). Algumas propriedades gravitacionais interessantes deste modelo, tais como, presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico, existência de uma deflexão gravitacional dependente do parâmetro de impacto, dilatação temporal e atraso temporal, são considerados. Tais propriedades não possuem contraparte na gravitação de Einstein em 3D. A questão da renormalizabilidade versus unitariedade na gravitação de Einstein em 3D aumentada por termos de (curvatura)² é também discutida.

Palavras-Chave: Fóton Massivo; Gravitação Massiva em 3D.

¹VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*)

Abstract

Two important and current studies in the framework of gravity are performed. In the first one, a constraint between the photon mass and the parameter γ (the deflection parameter determined by experimentalists) and ν (the photon frequency) is found by judiciously combining General Relativity and Massive QED. By adopting this scenario and by considering as inputs the most recent measurements of the solar gravitational deflection of radio waves obtained by means of the Very Long Baseline Interferometry (VLBI), a gravitational upper bound on the photon mass is estimated. The second study is devoted to the analysis of the recently found Bergshoeff - Hohm - Townsend model (massive 3D gravity). Some interesting gravitational properties of this model, namely, the presence of a short-range gravitational force in the nonrelativistic limit, the existence of an impact-parameter-dependent gravitational deflection angle, time dilation and time delay, are considered. Interestingly enough, these properties have no counterpart in the usual Einstein 3D gravity. The question of renormalizability versus unitarity in 3D Einstein gravity augmented by (curvature)²- terms is also discussed.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	viii
Introdução	1
Referências Bibliográficas	9
1 Um limite gravitacional para a massa do fóton	11
1.1 Contextualização	11
1.2 Um Teorema Geral	14
1.2.1 Espalhamento de um bóson escalar massivo	15
1.2.2 Seção de choque não-polarizada	17
1.2.3 Discussão	21
1.3 Um limite gravitacional	22
1.4 Comentários Finais	27
Referências Bibliográficas	31

2	Investigações em Gravitação Massiva Tridimensional	34
2.1	Motivação	34
2.2	Potencial interpartículas	38
2.3	Desvio da Luz	42
2.4	Uma análise comparativa	48
2.5	Comentários finais	54
	Referências Bibliográficas	56
3	Algumas propriedades interessantes da Nova Gravitação Massiva	59
3.1	Motivação	59
3.2	Uma classe de modelos de gravitação tridimensional	63
3.3	Dilatação Temporal Gravitacional	67
3.4	Atraso Temporal Gravitacional	74
3.5	Comentários Finais	76
	Referências Bibliográficas	81
	Apêndice A Prescrição para o cálculo do propagador do gráviton	84
	Apêndice B Um resultado útil para checar a unitariedade da 3DHDG	87
	Considerações Finais	90
	Referências Bibliográficas	95

Lista de Figuras

1.1	Espalhamento de um boson escalar por um campo gravitacional	15
1.2	Vértice da interação escalar-escalar-campo gravitacional externo.	16
1.3	$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}}$ como função do ângulo de espalhamento <i>theta</i>	22
2.1	Força gravitacional de curto alcance do modelo BHT	42
2.2	Geometria da deflexão da luz	47
2.3	Regimes gravitacionais do modelo BHT	50
2.4	Energia potencial gravitacional para os modelos 3DHDG e BHT	53
3.1	Diagrama espaço-temporal para dois sinais idênticos sucessivos.	73
3.2	Atraso temporal em ressonância de radar	75
3.1	Possíveis regimes gravitacionais preditos pelo modelo 3D com $\sigma = -1$	92
3.2	Energia potencial gravitacional para modelos 3D da gravitação	93
3.3	Renormalizabilidade versus unitariedade no modelo 3D geral.	94

Lista de Tabelas

1.1	Seções de choque para o espalhamento de diferentes partículas.	19
1.2	Limites para massa do fóton obtidos via dispersão da velocidade da luz.	30
A.1	Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers	85

Introdução

A gravidade é a interação que atua entre os corpos massivos. Em seu livro publicado em 1686, “*Philosophiae Naturalis Principia*”, ou “*Principia*”, como é conhecido hoje em dia, Sir Isaac Newton já defendia esta ideia. De acordo com a teoria newtoniana, a gravidade era a força responsável tanto pela queda das maçãs como pela revolução dos planetas em torno do Sol. Esta teoria dominou a física por cerca de dois séculos. Somente em 1907 Albert Einstein deu início às investigações sobre a possibilidade de compatibilizar a teoria de Newton com a teoria da relatividade especial. Nos anos que se sucederam ele estudou os fenômenos do desvio da luz em um campo gravitacional e do *redshift* da luz que escapa de um corpo gravitante. Com o passar do tempo Einstein ficou mais audaz em sua tentativa de melhor conceituar a gravitação e procurou examinar, a partir de 1913, os aspectos geométricos desta teoria. Este enfoque levou a um enorme avanço na nossa compreensão sobre a gravitação já que se podia conjecturar dentro deste contexto que esta interação não era mais uma força, como havia proposto Newton, mas sim uma consequência da curvatura do espaço-tempo quadridimensional. Nesta época Minkowski já tinha dado ao tempo o status de dimensão e o conectado à nossa antiga realidade tridimensional, em um continuum espaço-temporal. Dentro

desta nova concepção seria fácil explicar como a gravitação afetaria partículas sem massa tais como os fótons. Em 1915 a teoria geral da relatividade veio à luz.

A relatividade geral (RG) é amplamente reconhecida como uma das pedras angulares da física moderna. Não obstante, somente em raras ocasiões ela foi adotada para se estabelecer limites sobre parâmetros físicos. Esta séria omissão é em geral justificada pelo familiar argumento que as predições da RG não podem ser testadas com suficiente precisão pelos grupos experimentais. Este, obviamente, é um argumento falacioso. De fato, entre os assim chamados testes clássicos da RG, existe um, ou seja, o desvio da luz, que tem sido confirmado com uma precisão que aumenta com o passar do tempo. Na realidade espera-se que uma série de experimentos padrões melhorados que utilizam a Interferometria de Linha de Base Extensa (VLBI)² venha a aumentar a atual precisão do parâmetro de deflexão γ pelo menos de um fator de 4 [1]. Na realidade, o valor atual de γ é 0.9998 ± 0.0003 (dentro de um nível de confiança de 68%) [1], em concordância com a RG. Neste ponto é importante chamar a atenção para o fato, que para o leigo, o desvio da luz, é uma das mais impressionantes previsões feitas por Einstein. Sua célebre fórmula $E = mc^2$ é na verdade a única possível rival para esta predição em popularidade.

Por outro lado, sabemos hoje em dia que as únicas partículas livres cujas massas de repouso podem ser consideradas exatamente iguais a zero são os fótons e os grávitons; os glúons, ou seja, as partículas de *gauge* da QCD, que se acredita serem desprovidas de massa, não podem ser observados como partículas livres (fenômeno do confinamento). Apesar da presente expansão acelerada do universo poder ser parcialmente atribuída a um efeito tipo massa do gráviton, tem havido ferozes debates sobre a eventual existência de uma massa de repouso para o gráviton. Este não é o caso, no entanto, no que

²VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*)

concerne a massa do fóton. De fato, a procura por um valor não nulo para a massa de repouso do fóton tem crescido consideravelmente com o passar do tempo [5–7]. Como é bem sabido, um fóton massivo pode ser acomodado de maneira natural dentro do contexto da QED massiva (eletrodinâmica de Proca) que nada mais é que uma simples modificação da QED padrão. Além disso, a QED massiva preserva a invariância da eletrodinâmica sob transformações de Lorentz. Sua lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2A_\mu^2 - J^\mu A_\mu,$$

onde $F_{\mu\nu}(= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o *field strength*, J^μ é a corrente (elétrica), a qual supomos ser conservada e m é a massa nua do fóton. As equações de campo correspondentes são

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu - m^2 A^\nu, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0,\end{aligned}$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Em termos dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} e dos potenciais V e \mathbf{A} , elas se tornam

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho - m^2 V, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E} - m^2 \mathbf{A}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B},\end{aligned}$$

onde $j^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, e $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ é o, agora observável, potencial quadrivetor. Note

que a equação (1.4) implica que o potencial elétrico devido a uma carga pontual q na origem de coordenadas não é o de Coulomb, mas o sim o potencial de Yukawa, a saber

$$V(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (1)$$

Já que a QED massiva pertence à classe dos assim denominados modelos com correntes conservadas [2], ela é renormalizável [3]. Na realidade a eletrodinâmica de Proca é teoricamente mais simples que a QED padrão, num certo sentido [4]. Consequentemente, ela é uma ferramenta mais que adequada para tratar da questão concernente à possibilidade do fóton possuir uma massa de repouso não nula. Vale a pena mencionar que a visão popular que a invariância de *gauge* implica em uma massa nula para o fóton não é correta. Na verdade, uma dinâmica mínima que seja invariante de *gauge*, ou seja, a ação de Maxwell, certamente leva a uma massa zero para o fóton; no entanto, aumentando a dinâmica, por exemplo, pela adição de um outro campo que interaja com o campo do fóton, tanto a invariância de *gauge* como uma massa não nula podem ser acomodadas simultaneamente [5]. A possível existência na natureza de um fóton massivo (que suporemos ser descrito pelas equações de Proca) levaria a alterações em valores bem conhecidos de certos resultados físicos tais como a velocidade da luz, campos eletromagnéticos estáticos, e assim por diante. Estimativas tipo ordem de grandeza para a massa do fóton baseadas nestas possíveis modificações dos valores de alguns resultados físicos padrões têm sido feitas ao longo das últimas décadas [5–7]. Chamamos atenção para o fato que nessas estimativas foram empregados tanto enfoques terrestres quanto extra-terrestres.

O primeiro objetivo deste trabalho é estabelecer um limite superior para a massa do fóton por meio de um enfoque conceitual novo. Para tanto vamos considerar a notável

predição oriunda da RG anteriormente comentada, ou seja, o desvio da luz, a qual foi confirmada com grande precisão pelos experimentais. O valor experimental desta quantidade será utilizado como dado de entrada a fim de nos fornecer o limite superior que estamos procurando. Em linhas gerais, o nosso procedimento para cumprir esta meta será o seguinte:

⊙ Computamos ao nível de árvore o ângulo de deflexão de um fóton massivo espalhado por um campo gravitacional fraco externo.

⊙ Comparamos o resultado anterior com aquele encontrado via a VLBI, a qual é a mais apurada tecnologia que temos presentemente ao nosso dispor para a medição da deflexão gravitacional por meio de ondas de rádio, e estimamos um limite superior para a massa do fóton.

Isto posto, passemos ao segundo objetivo deste trabalho: gravitação quântica.

É fato bastante conhecido que os grandes físicos do século 20 conseguiram elaborar uma teoria quântica de campos para todas as interações fundamentais, salvo a gravitação. Tanto na eletrodinâmica quântica, como nas teorias de *gauge* não-abelianas, assim como no modelo padrão das partículas físicas, dois princípios guias parecem nortear a pesquisa em física das altas energias: renormalização e teoria perturbativa. No entanto, a gravitação parece até então não se encaixar nestes padrões, o que levou muitos autores a sugerirem engenhosas soluções para a resolução deste impasse; infelizmente, sem sucesso. Porém, é necessário indagarmos, logo de início, se estamos realmente convencidos da natureza quântica da gravitação em distâncias muito pequenas. Na verdade existem muitas razões para se acreditar na natureza quântica da gravitação, entre elas podemos citar: a natureza quântica da matéria no lado direito das equações de Einstein, as singularidades que aparecem nas soluções clássicas da RG, etc. Na realidade, o maior obstáculo quando se tenta construir uma teoria

consistente de gravitação quântica é que a dinâmica de Einstein não é renormalizável pelos critérios convencionais e portanto não é capaz de evitar as predições ambíguas que surgem ao nível quântico. É crença comum que a RG e a mecânica quântica são incompatíveis, contudo, não existe nada de inconsistente entre elas. Tal como a teoria de Fermi para as interações fracas, a gravitação de Einstein quântica é sólida e calculável. Como já mencionamos anteriormente, ela é apenas não renormalizável e portanto não perturbativa para energias $E \lesssim M_{\text{P}}$ (massa de Planck), porém não é inconsistente. Em pequenas distâncias, operadores de ordem mais alta se tornam mandatórios. Conseqüentemente, se queremos utilizar uma teoria invariante por difeomorfismos para descrever uma partícula sem massa de spin dois em distâncias pequenas, precisamos de uma modificação no ultravioleta da gravitação de Einstein. Sabe-se, por outro lado, desde de 1977, que a gravitação é renormalizável em quatro dimensões se incluirmos termos com derivadas mais altas na ação de Einstein-Hilbert [8,9]. A teoria resultante, no entanto, não é unitária devido à presença de um *ghost* massivo de spin 2 no propagador nu. Em 1986, Antoniadis e Tomboulis [10] alegaram que a presença do aludido fantasma é inconclusiva já que esta excitação é instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido era explicitamente dependente de *gauge*. Usando argumentos padrões da teoria quântica de campos eles chegaram à conclusão que a gravitação de ordem superior é unitária. Pouco tempo depois, Johnston [11] mostrou que essas conjecturas não eram corretas uma vez que o par de pólos complexos que aparece no propagador re-somado é independente de *gauge*. Segue-se que a gravitação de ordem superior em quatro dimensões não é unitária. É, portanto, perfeitamente compreensível que cerca de três anos atrás a comunidade científica ficasse completamente atônita ao saber que uma particular extensão de ordem superior da RG tridimensional – que é livre de fantasmas ao nível de árvore – tenha sido descoberta por

Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) [12]. Logo após a descoberta do modelo BHT (nova gravitação massiva), Oda [13] alegou que este modelo é renormalizável; recentemente, no entanto, Muneyuki e Ohta [14] mostraram que a gravitação tridimensional aumentada por termos de (curvatura)² é renormalizável, porém aqueles sistemas contendo uma relação especial entre os coeficientes, incluindo a nova gravitação massiva, não o são.

Nesta segunda parte do trabalho vamos explorar a nova gravitação massiva. Trataremos em particular dos seguintes tópicos:

- ⊙ Presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico.
- ⊙ Existência de um ângulo de deflexão gravitacional dependente do parâmetro de impacto.
- ⊙ Demonstração de que a nova gravitação massiva é o único sistema unitário, ao nível de árvore, que pode ser construído adicionando-se termos quadráticos na curvatura à RG tridimensional.
- ⊙ Dilatação temporal gravitacional.
- ⊙ Atraso temporal gravitacional.

No Capítulo 1 estimamos um limite superior para a massa do fóton [15,16,17,18]. Este resultado foi incluído no *ParticleDataGroup* [19]. Discutimos, em particular, o conflito existente entre o princípio de equivalência clássico e a mecânica quântica [20,17].

Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos, em detalhe, um estudo sobre interessantes propriedades da nova gravitação massiva [21,22].

Encerramos o trabalho analisando, de passagem, a importante e interessante questão da incompatibilidade entre renormalizabilidade e unitariedade em teorias com derivadas de ordem superior [23]. Apresentamos também algumas possíveis extensões dos resultados aqui elaborados.

Gostaríamos de frisar que os Capítulos 1, 2, e 3, são traduções literais dos artigos onde foram relatados os resultados que fazem parte do presente trabalho. Isto implica, como é natural, em pequenas repetições ao longo do texto. Acreditamos que isto contribuiu para uma maior independência dos Capítulos, o que nos levou a não excluí-las.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Fomalont, et. al., *Astrophys. J.* **699** (2009) 1395.
- [2] J. Cornwall, D Levin, G. Tiktopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 498.
- [3] D. Bolware, *Ann. Phys.* **56** (1970) 140.
- [4] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 984.
- [5] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev.Mod.Phys.* **82** (2010) 939.
- [6] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev.Mod.Phys.* **43** (1971) 277.
- [7] Liang-Cheng Tu, J. Luo and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68** (2005) 77.
- [8] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 953.
- [9] I.L. Buchbinder, Sergei D. Odintsov, I. L. Shapiro, “Effective action in quantum gravity”, IOP Publishing Ltd 1992.
- [10] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 2756.
- [11] D. A. Johnston, *Nuclear Physics B* **297** (1988) 721.

- [12] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 201301.
- [13] I. Oda, *J. High Energy Phys.* **05** (2009) 064.
- [14] K. Muneyuki and N. Ohta, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 101501(R).
- [15] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [16] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [17] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [18] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, R. Turcati, and J. Morais, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 205010.
- [19] J. Beringer, et. al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** (2012) 010001.
- [20] A. Accioly and R. Paszko, *Adv. Studies Theor. Phys.* **3** (2009) 65.
- [21] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati *Phys. Rev. D* **83** (2011) 104005.
- [22] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, R. Turcati, J. Morais, and B. Pereira-Dias *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 225008.
- [23] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *Solving the Riddle of the Incompatibility Between Renormalizability and Unitarity in N-Dimensional Einstein Gravity Enlarged by Curvature-Squared Terms*, to appear in *Int. J. Mod. Phys. D* (2013). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2013 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*

Capítulo 1

Um limite gravitacional para a massa do fóton [1–5]

Os efeitos de uma massa de repouso não-nula para o fóton podem ser incorporados no eletromagnetismo de uma maneira simples pelo uso das equações de Proca. Neste sentido, uma implicação interessante referente à possível existência de um fóton massivo na natureza, isto é, alterações muito pequenas nos valores conhecidos para a deflexão gravitacional da radiação eletromagnética, é utilizada para se estabelecer limites superiores para a sua massa. O limite encontrado é maior que os recentemente obtidos; mesmo assim, é comparável a outros limites já existentes e traz novos elementos à questão de se restringir a massa do fóton.

1.1 Contextualização

Em geral, sistemas de bósons vetoriais pesados são não-renormalizáveis. Existem, entretanto, duas importantes exceções a esta regra:

- (i) Teorias de *gauge* com quebra espontânea de simetria e

(ii) Teorias Abelianas com bósons vetoriais neutros acoplados a correntes conservadas [6].

Esta última, isto é, os “modelos com correntes conservadas”, contêm, no mínimo, um bóson massivo cuja fonte é conservada. Estes sistemas podem ser construídos através da seguinte prescrição geral [7]:

1. Comece com uma Lagrangeana que seja invariante sobre um grupo não semi-simples de transformações de *gauge* locais (isto é, um grupo contendo um subgrupo Abelianos invariante).
2. Providencie quebras espontâneas de simetria (se for o caso), tais que o valor esperado no vácuo do campo escalar seja invariante sobre, no mínimo, um subgrupo Abelianos (uniparamétrico) invariante (deste modo, neste estágio, o vetor Abelianos correspondente é sem massa e acoplado a uma corrente conservada).
3. Adicione (no *gauge-R*) um termo de massa arbitrário para o mesmo vetor Abelianos.

A eletrodinâmica massiva (ou eletrodinâmica de Proca), isto é, a eletrodinâmica que pode ser incorporada no modelo padrão $SU(2) \times U(1)$ e na qual o fóton possui uma pequena massa, é o sistema mais simples deste tipo, além de ser a extensão mais trivial da QED. De fato, a teoria do campo eletromagnético de Proca pode ser construída de maneira única, pela adição de um termo de massa à Lagrangeana do campo eletromagnético, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - J_\mu A^\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2, \quad (1.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

é a intensidade do campo, e J_μ é a corrente (elétrica). O parâmetro m pode ser interpretado como a massa de repouso do fóton. Neste espírito, o comprimento de escala característico m^{-1} se torna o comprimento de Compton reduzido do fóton, que é o alcance efetivo da interação eletromagnética.

A QED massiva não é apenas mais simples teoricamente que a teoria padrão [8], ela também fornece uma estrutura bastante sólida para se analisar (através das equações de Proca) as extensas implicações que a existência de um fóton massivo teriam para a física. Na realidade, alguns destes possíveis efeitos, tais como a variação da velocidade da luz, desvios no comportamento de campos eletromagnéticos estáticos e radiação eletromagnética longitudinal, têm sido meticulosamente estudados por meio de um número de diferentes abordagens ao longo das várias décadas passadas [9–11]. Vale a pena mencionar que tanto o efeito Aharonov-Bohm quanto o efeito Aharonov-Casher estão presentes na QED massiva. O primeiro foi analisado por Boulware e Deser [12], que mostraram que ele se reduz de maneira suave ao resultado original, enquanto o segundo foi estudado por Fuchs [13]. No entanto, o sistema de equações ‘Maxwell + massa do fóton + carga magnética’, não é consistente [8, 9].

Curiosamente, a possibilidade de uma massa não-nula para o fóton permanece, como foi apontado por Adelberger, Dvali e Gruzinov [14], uma das mais importantes questões em física, uma vez que ela poderia lançar uma nova luz sobre algumas questões fundamentais, tais como conservação da carga, quantização da carga, a possibilidade de buracos negros carregados e monopólos magnéticos. Chamamos também especial atenção para o fato que a visão popular de que invariância de *gauge* implica em uma massa nula para o fóton não é correta. Na realidade, uma dinâmica mínima obedecendo a invariância de *gauge*, isto é, a ação de Maxwell, implica realmente em uma massa nula para o fóton; porém, ampliando-se a dinâmica, por exemplo, pela

adição de um outro campo interagindo com o campo do fóton, tanto a invariância de *gauge* quanto uma massa não-nula podem ser acomodadas simultaneamente [11].

O propósito deste capítulo é estabelecer limites superiores para a massa do fóton, supondo que o mesmo seja descrito pela eletrodinâmica de Proca. Para realizar esta meta, analisaremos uma interessante, mas ainda não explorada, consequência da possível existência de um fóton massivo na natureza: a minúscula mudança na deflexão gravitacional usual da radiação eletromagnética.

Em nossas convenções, $\hbar = c = 1$, e a assinatura da métrica é (+ - - -).

1.2 Um Teorema Geral

Para começar, calcularemos até a primeira ordem a seção de choque diferencial para o espalhamento de um bóson escalar massivo, devido a um campo gravitacional fraco, tratado como um campo externo. O propósito deste cálculo é o de servir como um paradigma para a estimativa, até a primeira ordem, da seção de choque para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional externo. Contudo, para evitarmos repetições tediosas, não exibiremos os cálculos referentes à obtenção das seções de choque para o espalhamento tanto das partículas sem massa de spin $\frac{1}{2}$, 1 e 2 quanto das partículas massivas de spin $\frac{1}{2}$ e 1; em vez disso, apresentaremos somente os resultados finais.

1.2.1 Espalhamento de um bóson escalar massivo por um campo gravitacional externo, até a primeira ordem

Nosso objetivo aqui, é obter a seção de choque diferencial – dada pela expressão

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \mathcal{M}^2, \quad (1.2)$$

onde \mathcal{M} é a amplitude de Feynman, calculada pelo vértice da interação – para o espalhamento de um bóson escalar por um campo gravitacional externo – este processo está representado graficamente pela Fig. 1.1. Vale mencionar que, por campo externo, queremos dizer um campo conhecido e cuja dinâmica não é levada em conta na Lagrangeana que descreve o processo.

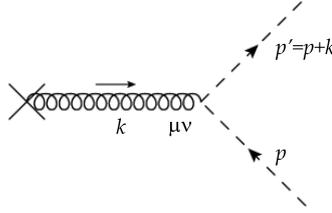


Figura 1.1: Gráfico de Feynman para o espalhamento de um bóson escalar massivo por um campo gravitacional externo; $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$.

A Lagrangeana para um bóson escalar minimamente acoplado à gravitação é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2], \quad (1.3)$$

lembrando que, para campos escalares, $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$. Podemos expandir as flutuações quânticas do campo gravitacional em torno de uma métrica de fundo (que no nosso caso é a

métrica plana de Minkowski), como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu},$$

onde $\kappa = 32\pi G$, com G sendo a constante de Newton.

Expandindo até a primeira ordem em κ , obtemos para a Lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\kappa}{2} h_{ext}^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right], \quad (1.4)$$

de onde prontamente concluímos que, no espaço dos momenta, o vértice da interação é dado por

$$V(p, p') = h_{ext}^{\mu\nu} V_{\mu\nu}(p, p') = \frac{\kappa}{2} h_{ext}^{\mu\nu} [p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu} (p \cdot p' + m^2)]. \quad (1.5)$$

Aqui, vale um comentário. O vértice que acabamos de calcular corresponde ao processo descrito pela Fig. 1.2. Portanto, para o processo representado pela Fig. 1.1, teremos $\mathcal{M} = V(p, -p')$.

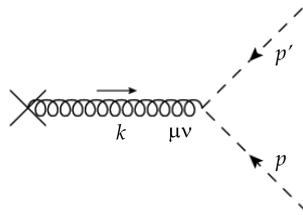


Figura 1.2: Vértice da interação escalar-escalar-campo gravitacional externo.

Supondo que o campo gravitacional externo fraco seja, por exemplo, o campo gerado pelo Sol, podemos obter $h_{ext}^{\mu\nu}$ resolvendo-se as equações de Einstein linearizadas, no *gauge* de de Donder, para uma massa pontual M , localizada na origem ($\mathbf{r} = 0$), ou

seja,

$$h_{ext}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{16\pi r} (\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}).$$

No espaço dos momenta:

$$h_{ext}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{2\mathbf{k}^2} \left(\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0} \right).$$

Combinando todos estes resultados anteriores com a equação (1.2), obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{MG}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[\frac{1 - \frac{m^2}{2E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right]^2, \quad (1.6)$$

onde E é a energia da partícula incidente e θ , o ângulo de espalhamento. Em termos da velocidade \mathbf{v} da partícula incidente, a equação (1.6) fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{MG}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[1 + \frac{\lambda}{2} \right]^2, \quad (1.7)$$

com

$$\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{1 - \mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2}.$$

1.2.2 Seção de choque não-polarizada para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional externo, até a primeira ordem

Utilizando um procedimento similar ao empregado no cálculo da seção de choque anterior, assim como muita álgebra, obtemos as seções de choque diferenciais para o espa-

lhamento das partículas quânticas remanescentes, mencionadas no início desta seção. Estes resultados estão reunidos na tabela 1.1.

Os resultados analíticos exibidos na tabela 1.1 são, certamente, robustos teoricamente; no entanto, eles estão em desacordo com o princípio de equivalência de Galileo e, conseqüentemente, com o princípio de equivalência clássico, uma vez que eles claramente dependem do spin das partículas defletidas pelo campo gravitacional. Agora estamos prontos para enunciar um teorema geral.

Teorema 1.2.1. *Até a primeira ordem, a seção de choque diferencial não-polarizada para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional externo descrito pelas equações de campo de Einstein linearizadas é dependente do spin, o que está em desacordo com o princípio de equivalência clássico.*

Por que o campo gravitacional percebe o spin? Porque existe a presença de uma transferência não-nula de momentum (\mathbf{k}) no espalhamento, responsável por “sondar” a estrutura interna (spin) da partícula. Portanto, para recuperarmos os resultados geométricos de Einstein, devemos ter $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$; em outras palavras, no limite não-trivial de pequenas transferências de momentum, o qual corresponde ao limite não-trivial de pequenos ângulos uma vez que

$$|\mathbf{k}| = 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\theta}{2},$$

as partículas massivas (e as não-massivas) se comportam da mesma maneira, independentemente do spin. De fato, quando o spin é “desligado”, obtemos da Tab. 1.1 que, para $m = 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2M^2}{\theta^4}, \quad (1.8)$$

m	s	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$
0	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$
$\neq 0$	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$
0	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \lambda + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$
0	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^4 \frac{\theta}{2} - \frac{\lambda}{3} \left(1 - \frac{3\lambda}{4} - 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$
0	2	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(\sin^8 \frac{\theta}{2} + \cos^8 \frac{\theta}{2} \right)$

Tabela 1.1: Seções de choque diferenciais não-polarizadas para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional fraco externo gerado por uma partícula pontual estática de massa M . Aqui m é a massa da partícula, s o spin, θ o ângulo de espalhamento e $\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{1-v^2}{v^2}$, com \mathbf{v} e \mathbf{p} sendo a velocidade e o 3-momento, nesta ordem, da partícula incidente.

enquanto que para $m \neq 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2 M^2}{\theta^4} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2. \quad (1.9)$$

Estas seções de choque podem ser relacionadas a uma trajetória clássica com parâmetro de impacto b , através da relação

$$bdb = -\frac{d\sigma}{d\Omega} \theta d\theta.$$

Consequentemente, concluímos que, para $m = 0$,

$$\theta_0 \approx \frac{4GM}{b}, \quad (1.10)$$

e para $m \neq 0$,

$$\theta_0 \approx \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (1.11)$$

A equação anterior fornece o ângulo de deflexão gravitacional para uma partícula teste sem massa – um resultado previsto por Einstein há muito tempo atrás; ao passo que a última fornece exatamente a predição da relatividade geral para a deflexão de uma partícula teste massiva, por um campo gravitacional externo [15]. Os resultados da Tab. 1.1, em resumo, se reduzem, para pequenos ângulos, àqueles preditos pela teoria geométrica de Einstein, confirmando, deste modo, a precisão de nossos cálculos analíticos. Note que a equação (1.11) nos diz que, para $|\mathbf{v}| \ll 1$,

$$\theta_0 \rightarrow \frac{2GM}{bv^2},$$

que nada mais é do que a predição de Newton para o ângulo de deflexão gravitacional.

Note também que para $\frac{m}{E} \ll 1$, onde E é a energia da partícula incidente, a equação (1.11)

leva a

$$\theta_0 \approx \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{m^2}{2E^2} \right), \quad (1.12)$$

Este resultado será utilizado para se encontrar um limite superior para a massa do fóton.

1.2.3 Discussão

Se escolhermos duas expressões, não importando quais, daquelas listadas na Tab. 1.1, obtemos que a diferença entre elas é sempre extremamente pequena para ângulos de deflexão típicos. Para mostrarmos isto para as partículas sem massa, por exemplo, realizamos uma análise quantitativa desta diferença, através do estudo do comportamento de

$$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \equiv \frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_s - (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}},$$

como função do ângulo de espalhamento θ (veja a figura 1.3). É trivial demonstrar que, para pequenos ângulos, a expressão anterior se reduz a

$$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \approx -\frac{s\theta^2}{2}.$$

O que não é nenhuma surpresa, porque, para pequenos ângulos, as seções de choque diferenciais para deflexão gravitacional de partículas sem massa, obtidas através da teoria de Einstein, são esperadas praticamente coincidir com aquelas calculadas até a primeira ordem, usando teoria quântica de campos. De fato, para um ângulo de deflexão típico, isto é, $\theta \sim 10^{-6}$, obtemos

$$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \approx 10^{-2},$$

implicando que

$$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}} \ll 1,$$

como esperado.

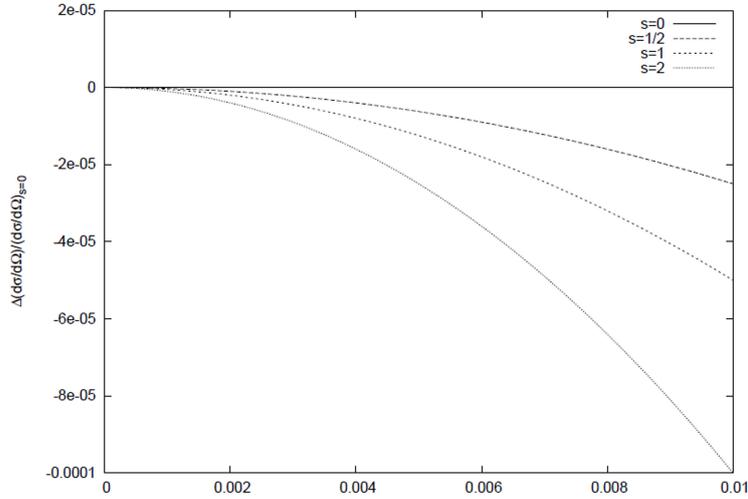


Figura 1.3: Gráfico da diferença entre duas expressões da Tab. 1.1 ($\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})$) como função do ângulo de espalhamento θ , tomando como referência, o espalhamento para a partícula de massa nula e spin zero.

1.3 Um limite gravitacional

É geralmente reconhecido o fato de que a deflexão gravitacional da luz pelo Sol pode ser medida de maneira mais precisa usando-se radiação no comprimento de onda de rádio, através de técnicas de interferometria, no lugar de radiação no comprimento de onda no visível combinada com técnicas óticas disponíveis [16]. De fato, atualmente, a Interferometria de Linha de Base Extensa (*VLBI* na sua sigla em inglês), é a técnica mais precisa que temos à disposição para medir deflexão gravitacional de ondas de rádio [17–19]. O desvio gravitacional, por sua vez, é uma das predições mais impressionantes da relatividade geral. Além disso, as medidas recentes do desvio gravitacional de ondas de rádio usando a *VLBI*, aprimoraram consideravelmente os resultados anteriores dos experimentos de desvio gravitacional próximo da borda do Sol [20]. Conseqüentemente, usaremos estes resultados para estimarmos um limite superior para a massa do fóton.

Para isto, precisamos da equação (1.12), que pode ser reescrita como

$$\theta \approx \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) = \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{8\pi^2\nu^2} \right), \quad (1.13)$$

onde E e ν são, respectivamente, a energia e a frequência do fóton massivo incidente, e

$$\theta_E = \frac{4MG}{b}$$

O primeiro termo em (1.13) coincide com aquele obtido por Einstein em 1916, ao resolver a equação da propagação da luz no campo gerado por um corpo estático [21], enquanto o segundo, representa a correção mais importante devido à massa m do fóton massivo. Por outro lado, o ângulo do desvio gravitacional medido por grupos experimentais é expresso, em geral, através da relação [22]

$$\theta_{exp} = \frac{1 + \gamma}{2} \theta_E, \quad (1.14)$$

com γ sendo o parâmetro de deflexão, caracterizando a contribuição da curvatura do espaço para a deflexão gravitacional. Das equações (1.13) e (1.14), obtemos, então,

$$\theta_E \frac{m^2}{8\pi^2\nu^2} < \theta_E \left(1 - \frac{1 + \gamma}{2} \right), \quad (1.15)$$

implicando

$$m < 2\pi\nu\sqrt{|1 - \gamma|}. \quad (1.16)$$

Recentemente, Fomalont *et al.* [20] determinaram o parâmetro de deflexão,

$$\gamma = 0.9998 \pm 0.0003 \text{ (intervalo de confiança de 68\%)},$$

usando a *VLBI* em 43,23 GHz e 15 GHz para medir a deflexão gravitacional solar de ondas de rádio. Os resultados destes autores provêm principalmente das observações em 43 GHz onde os efeitos de refração da coroa solar eram negligenciáveis além de 3 graus do Sol (Para maiores detalhes veja, por exemplo, [4] e [5]).

Usando o resultado para o parâmetro de deflexão encontrado por Fomalont *et al.* e supondo que o fóton massivo passando pela borda solar tem uma frequência $\nu = 43\text{GHz}$ (o que é perfeitamente justificável, em vista do argumento dado anteriormente), concluímos que

$$m < 2.5 \times 10^{-12} \text{MeV}$$

Observamos que a equação (1.13) pode também ser deduzida *à la* Einstein, isto é, encontrando-se uma solução aproximada para a equação de movimento geodésico de uma partícula teste massiva, no campo de Schwarzschild. Adotando-se esta abordagem, uma expressão para o ângulo de desvio de partículas pelo Sol foi obtida até a ordem $\left(\frac{GM}{b}\right)^3$ em [15]. Este tipo de dedução, entretanto, é um trabalho dispendioso. Por outro lado, Golowich, Gribovsky e Pal [23], ao invés de seguir a usual abordagem geométrica, consideraram o fenômeno de desvio da luz como um problema de espalhamento quântico. Este tratamento, que não é apenas instrutivo, mas também direto quando o campo gravitacional é fraco, permitiu-lhes obter facilmente uma expressão para a deflexão gravitacional de partículas massivas até a ordem $\left(\frac{GM}{b}\right)$. Um resultado idêntico foi encontrado por Mohanty, Nieves e Pal [24], usando um método descoberto por Ohanian e Ruffini [25].

Neste ponto, alguns comentários são pertinentes.

- De acordo com a relatividade geral, fótons não são apenas defletidos, mas também atrasados, pela curvatura do espaço-tempo produzida por uma massa qualquer. E mais, o desvio e o atraso são proporcionais a $\gamma + 1$. Consequentemente, técnicas de atraso temporal podem também ser empregadas para se impor limites à massa do fóton. É interessante notar que, há alguns anos, Bertotti, Iess e Tortora [26] reportaram uma medida do deslocamento na frequência de fótons na faixa de ondas de rádio enviados e emitidos da sonda espacial Cassini, à medida em que passaram próximo ao Sol, que levou a um resultado para γ que concorda com as previsões da relatividade geral padrão, com uma sensibilidade que aproxima o nível no qual, teoricamente, desvios são esperados em alguns modelos cosmológicos [27, 28].
- A equação (1.13) foi obtida com a suposição de que o campo responsável pela deflexão seja um campo gravitacional estático. No entanto, como é bem conhecido, nem o Sol nem os planetas estão em repouso no sistema solar. Na realidade, eles estão se movendo com respeito tanto ao baricentro do sistema solar quanto ao observador. Este movimento certamente acarretará correções dependentes da velocidade à equação relativística do desvio gravitacional da luz. Como uma consequência, a correção induzida pelo movimento à deflexão gravitacional acima citada, deve se correlacionar com a correção da massa do fóton exibida na equação (1.13). Este fato nos conduz a uma importante questão: Atualmente, a tecnologia moderna é sensível o suficiente para detectar estes minúsculos efeitos relativísticos causados pela dependência temporal do campo gravitacional? Kopeikin [29] alega que “no futuro, experimentos de deflexão gravitacional da luz

[30], o experimento na faixa de rádio BepiColombo [31], os experimentos na faixa de laser ASTROD [32] e LATOR [33], irão, definitivamente, atingir a precisão, ao medir $\bar{\gamma}_{PPN}$, $\bar{\beta}_{PPN}$ e $\bar{\delta}_{PPN}$, que é comparável com as correções pós-Newtonianas ao atraso temporal estático e ao ângulo de desvio, causadas pelo movimento dos corpos massivos no sistema solar [34]”. Aqui, desvio da relatividade geral é denotado com o parâmetro PPN comparativo $\bar{\gamma}_{PPN} \equiv \gamma_{PPN} - 1$, $\bar{\beta}_{PPN} \equiv \beta_{PPN} - 1$ $\bar{\delta}_{PPN} \equiv \delta_{PPN} - 1$. Por outro lado, demonstra-se, usando a equação para o atraso temporal pós-pós-Newtoniano, Δt , que foi obtido por Kopeikin acoplando os parâmetros PPN com os termos dependentes da velocidade, que para experimentos gravitacionais com a luz se propagando no campo do Sol,

$$\Delta t \approx (1 + \bar{\Gamma}) \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right), \quad (1.17)$$

com

$$\bar{\Gamma} \approx \bar{\gamma}_{PPN} - 2\beta_{\odot}, \quad (1.18)$$

onde β_{\odot} ($= 5.3 \times 10^{-8}$) é a velocidade do Sol (em unidades naturais) em relação ao baricentro do sistema solar, r_{12} é a coordenada de distância entre os pontos de emissão e observação, r_1 e r_2 são distâncias radiais aos pontos de emissão e observação, respectivamente. Agora, notando que as missões espaciais LATOR e ASTROD irão medir o parâmetro $\bar{\gamma}_{PPN}$ com uma precisão que se aproxima de 10^{-9} [32, 33], chegamos à conclusão de que, no futuro próximo, a correção da dependência explícita da velocidade ao atraso temporal estático, no campo gravitacional solar, deve, aparentemente, ser levada em conta. Responderemos, então, a questão levantada acima. Pelo bem da simplicidade, restringiremos nossa discussão a medidas do desvio da luz pelo Sol, obtidas através das técnicas

de VLBI. Atualmente, os grupos experimentais determinam o parâmetro $\bar{\gamma}_{PPN}$, usando a VLBI, com uma precisão de 10^{-4} [20]. Portanto, a correção mencionada pela dependência da velocidade, é muito pequena e pode ser negligenciada na determinação de $\bar{\gamma}_{PPN}$. Na realidade, a detecção de um efeito tão pequeno está além da tecnologia atual.

- Atualmente, conforme já apontamos, a VLBI é a técnica mais precisa que temos à disposição para se medir deflexão de ondas de rádio regularmente [17–19]. Ela só foi suplantada pelo rastreador Doppler de frequência múltipla do veículo espacial Cassini [26].
- Medir deflexão da luz com técnicas ópticas pode se tornar mais vantajoso para a determinação do parâmetro γ num futuro próximo [35].

1.4 Comentários Finais

Analisaremos, em sequência, como um melhor limite para a massa do fóton poderia ser obtido usando a equação (1.16). Primeiro, se os desvios medidos através do uso da VLBI puderem ser feitos com uma precisão maior, o valor de $\sqrt{|1 - \gamma|}$ seria reduzido, fornecendo, como resultado, uma estimativa gravitacional melhor. De acordo com Fomalont *et al.* [20], uma série de experimentos projetados com a VLBI, poderiam aumentar a precisão de experimentos futuros por um fator de, no mínimo, 4. Segundo, se medidas das deflexões puderem ser obtidas em frequências mais baixas, mantendo-se o valor do parâmetro de deflexão γ , o limite gravitacional será melhorado em proporção direta com a frequência. Este ponto, contudo, deve ser tratado com cuidado. De fato, como já havíamos mencionado, até os dias de hoje, os melhores re-

sultados obtidos para o desvio gravitacional através da VLBI, são aqueles que provêm principalmente de $43GHz$, onde os efeitos de refração da coroa solar são negligenciáveis além de 3 graus do Sol. A propósito, a menor frequência empregada pelos astrônomos que trabalham com ondas de rádio foi $2GHz$. No entanto, as medidas feitas nesta frequência são menos confiáveis, por causa dos efeitos de refração da coroa solar. Na realidade, estes astrônomos utilizam em suas medidas, uma mistura de diferentes frequências, mas as contribuições mais significantes advêm, em geral, de $\sim 43GHz$. A possibilidade de se melhorar este limite gravitacional é, portanto, bem limitada.

Certamente, o limite que encontramos para a massa do fóton é maior que o limite recentemente recomendado, publicado pelo Particle Data Group [36]. Mas ele é, contudo, compatível com outros limites existentes (veja a Tab. 1.2) e traz novos elementos à questão da limitação da massa do fóton. Conseqüentemente, este limite, de fato, possui algum mérito. Discutiremos suas qualidades principais a seguir:

- A teoria adotada para se descrever o fóton massivo possui o limite correto.
- O limite está baseado em cálculos exatos no contexto da relatividade geral; além disso, os dados experimentais mais precisos foram usados como dados de entrada.
- A abordagem conceitual adotada para este limite é completamente original.
- O método utilizado para se estabelecer este limite é interessante por si só, embora não leve a um limite mais rigoroso. De fato, este limite gravitacional é obtido através do uso de propriedades da gravidade. Essencialmente, o ponto é que, um fóton massivo deve ser curvado, em um campo gravitacional, de uma maneira quantitativamente diferente de um fóton sem massa. Assim, observações do desvio da luz pelo Sol, permite a imposição de limites na massa do fóton.

- O limite é essencialmente uma medida da concordância entre teoria e experimento. Ele pode ser usado, portanto, para fornecer uma ideia do quanto a predição teórica se desvia do resultado experimental. Para este limite gravitacional, estimamos que o limite inferior é $m^{-1} \sim 2cm$. Portanto, quanto mais o valor de m^{-1} aumentar, maior será a concordância entre teoria e experimento. Em outras palavras, uma massa nula para o fóton implicaria uma concordância perfeita entre teoria e experimento.
- Recentemente, Adelberger, Dvali e Gruzinov [14] questionaram a validade de alguns limites impostos sobre a massa do fóton, disponíveis na literatura. Eles alegam que se m origina-se de um efeito tipo Higgs, estes limites são inválidos, porque o potencial vetor de Proca do campo magnético galático poderia ser neutralizado por vórtices, dando um campo magnético em grande escala que é efetivamente Maxwelliano. No entanto, estas críticas não se aplicam aos nossos cálculos, porque estes são baseados na suposição plausível de um grande potencial vetor galático; além do mais, em nosso caso m não provém de efeitos do tipo Higgs.

E por último, mas não menos importante, chamamos a atenção para o trabalho de Barton e Dombey [42], no qual demonstram que o efeito Casimir não é sensível a uma pequena massa do fóton. Para isto, mostraram que a contribuição à força de Casimir devida à massa do fóton é proporcional a m^4 , sendo, como consequência, desprezível se comparada com a correção principal de massa finita dos modos transversos. Por outro lado, se o campo magnético galático está no regime de Proca, a própria existência do campo magnético observado em grande escala fornece $m \sim 10^{-26}$ [14]. Portanto, a deflexão da luz pelo Sol, como o efeito Casimir, não é sensível a uma massa do fóton

menor que os limites permitidos já estabelecidos.

Autor (ano)	Tipo de medida	Limites para m (MeV)
Froome (1958) [37]	Interferometria de ondas de rádio	2.4×10^{-13}
Warner <i>et al.</i> (1969) [38]	Observações do pulsar na Nebulosa do Caranguejo	2.9×10^{-14}
Bay <i>et al.</i> (1972) [39]	Emissão de pulsar	1.7×10^{-19}
Brown <i>et al.</i> (1973) [40]	Pulsos de radiação curtos	7.9×10^{-7}
Schaefer (1999) [41]	Explosões de raios gama (GRB980703)	2.4×10^{-17}
	Explosões de raios gama (GRB930229)	3.4×10^{-12}

Tabela 1.2: Alguns limites para massa do fóton obtidos utilizando medidas de dispersão da velocidade da luz em diferentes frequências do espectro eletromagnético (em ordem cronológica).

Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [2] A. Accioly and R. Paszko, *Adv. Studies Theor. Phys.* **3** 65 (2009).
- [3] A. Accioly, J. Helayël-Neto, R. Turcati, J. Morais and E. Scatena, *Classical Quantum Gravity* **27** 205010 (2010).
- [4] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [5] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [6] D. Boulware, *Ann. Phys.* **56**, 140 (1970).
- [7] J. Cornwall, D. Levin, and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 498 (1974).
- [8] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53**, 984 (1996).
- [9] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277 (1971).
- [10] Liang-Cheng Tu, J. Luo, and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 77 (2005).

- [11] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 939 (2010).
- [12] D. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2319 (1989).
- [13] C. Fuchs, *Phys. Rev. D* **42**, 2940 (1990).
- [14] E. Adelberger, G. Dvali, and A. Gruzinov, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 010402 (2007).
- [15] A. Accioly and S. Ragusa, Gravitational deflection of massive particles in classical and semiclassical general relativity, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002), 5429 - 5434; Erratum: **20** (2003), 4963 - 4964.
- [16] D. Lebach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1439 (1995).
- [17] D. Robertson, W. Carter, and W. Dillenger, *Nature* **349**, 768 (1991).
- [18] S. Shapiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 121101 (2004).
- [19] S. Lambert and C. Le Poncin-Lafitte, *Astron. Astrophys.* **499**, 331 (2009).
- [20] E. Fomalont *et al.*, *Astrophys. J.* **699**, 1395 (2009).
- [21] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49**, 769 (1916) .
- [22] C. Will, *Living Rev. Relativity* **9**, 3 (2006).
- [23] E. Golowich, P. Gribovsky, and P. Pal, *Am. J. Phys.* **58**(7), 688 (1990).
- [24] S. Mohanty, J. Nieves, and P. Pal, *Phys. Rev. D* **58**, 093007 (1998).
- [25] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime* (Norton, New York, 1994), 2nd ed.
- [26] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425**, 374 (2003).

- [27] T. Damour and A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B **423**, 532 (1994).
- [28] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano, Phys. Rev. D **66**, 046007 (2002).
- [29] S. Kopeikin, Mon. Not. R. Astron. Soc. **399**, 1539 (2009).
- [30] S. Kopeikin and B. Mashhoon, Phys. Rev. D **65**, 064025 (2002).
- [31] A. Milani *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 082001 (2002).
- [32] W.-T. Ni, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **166**, 153 (2007).
- [33] S. Turyshev, M. Shao and K. Nordtvedt, Class. Quantum Grav. **21**, 2773 (2004).
- [34] J. Plowman and R. Hellings, Class. Quantum Grav. **23**, 309 (2006).
- [35] S. Klioner, P. Seildemann, and M. Soffel, *International Astronomical Union Symposium* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010), Vol. 261.
- [36] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [37] K. Froome, Proc. Phys. Soc. Lond. Sect. A **247**, 109 (1958).
- [38] B. Warner and R. Nather, Nature **222**, 157 (1969).
- [39] Z. Bay and J. White, Phys. Rev. D **5**, 796 (1972).
- [40] B. Brown *et al.*, Phys. Rev. Lett. **30**, 763 (1973).
- [41] B. Schaefer, Phys. Rev. Lett. **82**, 4964 (1999).
- [42] G. Barton and N. Dombey, Nature **311**, 336 (1984).

Investigações em Gravitação Massiva

Tridimensional [1]

Algumas propriedades gravitacionais interessantes do modelo Bergshoeff-Hohm-Townsend (gravitação massiva em 3 dimensões), como a presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico e a existência de um ângulo de deflexão gravitacional dependente do parâmetro de impacto, são estudadas. Curiosamente, esses fenômenos não possuem contraparte na teoria usual de gravitação tridimensional de Einstein. Com o intuito de melhor entender as duas propriedades gravitacionais supracitadas, elas serão também analisadas no contexto da gravitação com derivadas superiores em três dimensões com o termo de Einstein-Hilbert (EH) com o “sinal errado”.

2.1 Motivação

De acordo com um lenda ainda em voga na física, teorias de campo baseadas em ações contendo derivadas de quarta ordem (ou maiores) implicam em estados de *ghosts*

não-físicos de norma negativa. Geralmente, na literatura, os argumentos para tão indesejável estado das coisas têm avançado, efetivamente, apenas em relação à uma classe particular dessas teorias, a saber, as teorias híbridas, as quais possuem tanto derivadas de segunda, quanto de quarta ordem [2]; além disso, a discussão foi apenas formulada dentro do contexto da quantização canônica [3]. Mesmo assim, é notável que ainda dentre estas teorias híbridas, exista uma classe de modelos livres de *ghosts* ao nível de árvore. À primeira vista, parece que modelos contendo a curvatura escalar pura, isto é, sistemas gravitacionais de quarta ordem com Lagrangeano $R + \alpha R^2$, pertencem a esta privilegiada elite. Na realidade, esses sistemas são conformemente equivalentes à gravitação de Einstein com um campo escalar massivo [4]. Em outras palavras, apesar de possuírem derivadas de quarta ordem no nível métrico, esses modelos são, em última instância, de segunda ordem em suas versões escalares-tensoriais. Há cerca de três anos, no entanto, Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) [5–13] propuseram uma extensão particular da ação de EH em três dimensões espaço-temporais, que contém derivadas superiores e é livre de *ghosts* ao nível de árvore [5]. A demonstração da unitariedade apresentada em [5], é baseada na existência de uma forma alternativa da ação do modelo BHT envolvendo um campo auxiliar, da qual a versão linearizada é equivalente à ação de Fierz-Pauli padrão, que é conhecida por ser livre de *ghosts*; a propósito, essa demonstração foi revisada em [14]. Podemos também nos convencer da ausência de *ghosts* no modelo BHT linearizado, realizando diretamente uma análise canônica [15]. O modelo BHT, claro está, viola radicalmente o folclore padrão, uma vez que é um exemplo de um sistema de quarta ordem que não é importunado por *ghosts*.

A gravitação massiva tridimensional, também conhecida como “nova gravitação massiva”, é, na verdade, um caso particular da teoria tridimensional mais geral obtida pelo

acréscimo de termos quadráticos na curvatura à gravitação planar com o termo de EH com o “sinal errado” (3DHDG). A Lagrangeana para essa teoria genérica pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left(-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right), \quad (2.1)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, com G sendo o análogo tridimensional da constante de Newton, e α e β são coeficientes livres. Note que as constantes κ , α e β possuem dimensões de massa $[\kappa] = -\frac{1}{2}$ e $[\alpha] = [\beta] = -1$, em unidades fundamentais. Uma rápida análise do propagador \mathcal{P} desta teoria – que no espaço dos momenta é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{M_2^2}{k^2(k^2 - M_2^2)} P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} \\ & - \frac{M_0^2}{k^2(k^2 - M_0^2)} P^{(0-s)} \\ & - \frac{M_0^2 \sqrt{2}}{k^2(k^2 - M_0^2)} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] \\ & + \frac{2[2\lambda k^2 - M_0^2(2\lambda + 1)]}{k^2(k^2 - M_0^2)} P^{(0-w)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-w)}$, $P^{(0-s)}$, $P^{(0-sw)}$ e $P^{(0-ws)}$ são os operadores tridimensionais de Barnes-Rivers usuais [16, 17], $M_2^2 = \frac{4}{\beta\kappa^2} (> 0)$, $M_0^2 = -\frac{4}{\kappa^2(8\alpha+3\beta)} (> 0)$, e λ é um parâmetro de gauge – claramente mostra que o sistema 3DHDG é não-unitário, mesmo ao nível de árvore. Chamamos a atenção para o fato de que o propagador acima é um caso especial relativo à supergravidade N=1 e N=2 em três dimensões, aumentada por termos do tipo (curvatura)², obtido por Nishino e Rajpoot [18]; ele também pode ser obtido a partir do propagador relacionado à gravitação tridimensional com o sinal errado, aumentada por um termo de Chern-Simons [19–21].

Por outro lado, se definirmos na equação (2.1) $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$, com $\beta > 0$, ela se reduz a

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) \right], \quad (2.3)$$

onde $m_2^2 = \frac{4}{\kappa^2 \beta}$ (m_2 é um parâmetro de massa), que nada mais é que o Lagrangeano para o modelo BHT. Este sistema, como já havíamos comentado, é um sistema unitário ao nível de árvore. No entanto, não está claro, em absoluto, se a relação particular entre α e β sobreviverá à renormalização em um dado loop, mesmo em um loop; em outras palavras, unitariedade além do nível de árvore ainda precisa ser checada [12]. De fato, é bem provável que o modelo BHT seja não-renormalizável, uma vez que ele melhora o comportamento apenas das projeções de spin-2 do propagador, mas não das projeções de spin-0 [22].

Nossos propósitos neste capítulo são:

1. Explorar algumas propriedades interessantes deste notável modelo, as quais não possuem equivalentes na gravitação usual de Einstein em um espaço-tempo tridimensional;
2. Ressaltar tais propriedades, através de um estudo comparativo entre estas e as suas análogas, obtidas no contexto da 3DHDG.

O capítulo será organizado da seguinte forma: Na **Seção 2.2**, mostramos que, no contexto do modelo BHT, forças gravitacionais de curto alcance são exercidas em partículas-teste que se movem lentamente. Essas forças atrativas representam uma característica distinta da gravitação massiva tridimensional. A expressão analítica para o ângulo de deflexão gravitacional de um raio de luz, no contexto do sistema mencionado, é obtida na **Seção 2.3**. Esse ângulo, diferentemente daquele da gravitação tridimensional de Einstein, depende do parâmetro de impacto. Na **Seção 2.4**, é feito um estudo com-

parativo entre os resultados obtidos nas duas seções anteriores e os correspondentes obtidos através do sistema 3DHDG. Essa análise é de grande ajuda para uma melhor compreensão dos resultados das **Seções 2.2** e **2.3**. Finalmente, na **Seção 2.5**, apresentamos alguns comentários e observações finais.

Ao longo deste capítulo, adotamos unidades naturais ($c = \hbar = 1$), e nossa métrica de Minkowski é dada por $\text{diag}(+1, -1, -1)$. Nosso tensor de Ricci é definido como $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\nu\lambda} \equiv \partial_\nu \Gamma^\lambda_\lambda - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_\nu + \dots$.

2.2 Potencial interpartículas

Na mecânica quântica, o conceito de potencial é introduzido para ser utilizado em conjunto com a equação de Schrödinger. Na teoria quântica de campos, por sua vez, as interações são visualizadas como decorrentes da troca de quanta. É notável que, para partículas que se movem lentamente, estes dois conceitos podem ser fundidos, se nos restringirmos a processos de ordem mais baixa. De fato, de acordo com a aproximação de Born, a seção de choque diferencial relativa, por exemplo, ao espalhamento de dois bósons escalares com a mesma massa m , é dado por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \left| \frac{m}{4\pi} \int e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|,$$

onde \mathbf{p} e \mathbf{p}' são, respectivamente, os momenta inicial e final de uma das partículas. Por outro lado, a seção de choque diferencial para a interação dos bósons acima mencionados, através da troca de grávitons, pode ser expressa como

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \left| \frac{\mathcal{M}_{\text{NR}}}{16m} \right|^2,$$

em que \mathcal{M}_{NR} é o limite não-relativístico da amplitude de Feynman para o processo em discussão. Como resultado, o potencial interpartículas assume a forma

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.4)$$

com \mathbf{k} sendo o momentum do gráviton trocado na interação.

Usando a equação acima, calculamos em seguida a expressão para a energia potencial gravitacional, no contexto do modelo BHT.

O vértice elementar para o processo descrito há pouco é

$$\Gamma_{\mu\nu}(p, p') = \frac{1}{2} \kappa [p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu}(p \cdot p' + m^2)], \quad (2.5)$$

onde os momenta (p e p') são supostos entrando. A amplitude de Feynman é, por sua vez, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \Gamma_{\mu\nu}(p, -p') \mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(q, -q') \\ &= \frac{m_2^2}{k^2(k^2 - m_2^2)} A + \frac{1}{k^2} B, \end{aligned} \quad (2.6)$$

com o propagador dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{m_2^2}{k^2(k^2 - m_2^2)} P^{(2)} + \frac{1}{k^2} P^{(0-s)} + \frac{\sqrt{2}}{k^2} (P^{(0-sw)} + P^{o-ws}) \\ &\quad + \left(\frac{4\lambda}{k^2} + \frac{2}{k^2} \right) P^{(0-w)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

e

$$\begin{aligned}
A = & \frac{1}{2}\kappa^2 \left\{ (p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) - \frac{1}{k^2}(q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 - \frac{1}{k^2}(p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')^2 \right. \\
& + \frac{1}{k^2} [(p \cdot q) - (p \cdot q') - (p' \cdot q) + (p' \cdot q')] (m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') - (p \cdot p')(q \cdot q') \\
& \left. + \frac{1}{k^4}(m^2 - p \cdot p')^2(m^2 - q \cdot q')^2 \right\}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{1}{2}\kappa^2 \left[(p \cdot p')(q \cdot q') + (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') + \frac{1}{k^2}(q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 \right. \\
& + \frac{1}{k^2}(p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')^2 + (m^2 - q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + \frac{1}{k^2}(m^2 - q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 \\
& \left. + \frac{1}{k^2}(m^2 - q \cdot q')^2(m^2 - p \cdot p') + \frac{1}{k^4}(m^2 - p \cdot p')^2(m^2 - q \cdot q')^2 \right]. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

No limite não-relativístico, a equação (2.6) se reduz a

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = -\frac{1}{2}\kappa^2 \frac{m^4}{\mathbf{k}^2 + m_2^2}. \tag{2.10}$$

Realizando a integração apropriada usando as equações (2.4) e (2.10), conclui-se que a energia potencial é dada por

$$U(r) = -2m^2 G K_0(m_2 r), \tag{2.11}$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. Note que $K_0(x)$ se comporta como $-\ln x$ na origem e como $x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$ assintoticamente.

O potencial não-relativístico, por sua vez, tem a forma

$$V(r) = -2mG K_0(m_2 r). \tag{2.12}$$

Nesse ponto, alguns comentários são pertinentes:

- Como o potencial newtoniano, $V_{\text{Newt}}(r) = 2mG \ln \frac{r}{r_0}$ (com r_0 sendo um regulador infravermelho), o potencial referente ao modelo BHT possui uma singularidade logarítmica na origem;
- $V(r) \rightarrow 0$ à medida que $r \rightarrow \infty$ e
- No limite em que $m_2 \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow 0$, reproduzindo, desta forma, o potencial da gravitação tridimensional usual.

Por outro lado, no limite não-relativístico, uma partícula-teste de massa m_{test} se movendo em um campo gravitacional fraco, experimenta uma força

$$\mathbf{F}(r) = -m_{\text{test}} \nabla V(r)$$

Agora, levando em conta a equação (2.12), encontramos que

$$\mathbf{F}(r) = F(r) \hat{\mathbf{r}}$$

com $F(r)$ dada por

$$F(r) \equiv -2Gm_{\text{test}}mm_2K_1(m_2r), \quad (2.13)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada de primeira ordem. Relembrando que $-xK_1(x)$ é uma função negativa monotonamente crescente no intervalo $0 \leq x < \infty$, uma vez que

$$\frac{d}{dx}[-xK_1(x)] = xK_0(x),$$

podemos concluir que $\mathbf{F}(r)$ é sempre atrativa (veja a Fig. 3.1). Essa força gravitacional

de curto alcance não existe no contexto da relatividade geral tridimensional, sendo peculiar ao modelo BHT.

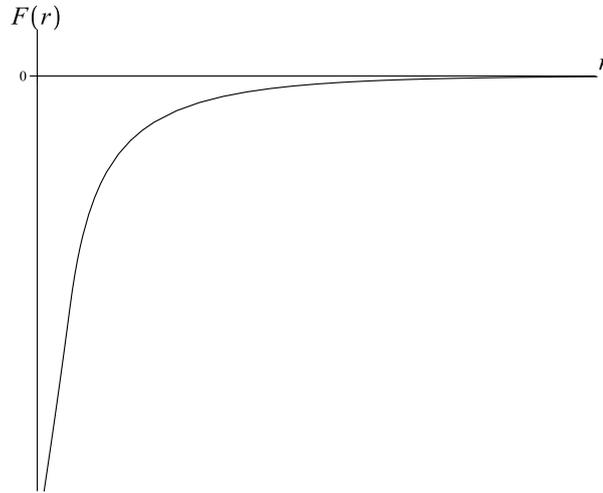


Figura 2.1: A força gravitacional de curto alcance obtida no contexto do modelo BHT. Ela tende a zero à medida em que $r \rightarrow \infty$ e tem um comportamento logarítmico na origem, como o potencial Newtoniano

A energia potencial dada pela equação (2.11) é, como esperado, equivalente àquela obtida através do modelo (unitário) de Pauli-Fierz para um campo massivo de spin-2, linearizado.

2.3 Desvio da Luz

A gravitação tridimensional de Einstein é trivial fora das fontes. Consequentemente, deveríamos esperar, ao menos em princípio, a ausência de deflexão da luz neste sistema. Mas na prática, não é bem assim. De fato, um raio de luz experimenta uma deflexão que é proporcional à massa da fonte; além disso, o desvio é independente do parâmetro de impacto. Isto pode ser facilmente demonstrado para o caso de uma partícula puntiforme

de massa m , localiza na origem ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$). A métrica linearizada correspondente, no *gauge* de de Donder, é dada por

$$ds^2 = dt^2 - (1 - \lambda)(dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

onde

$$\lambda = 8Gm \ln \frac{r}{r_0},$$

com r_0 sendo um regulador infravermelho e r e θ , as coordenadas polares usuais.

Introduzindo um novo conjunto de coordenadas (r' e θ'), através da mudança de variáveis

$$(1 - \lambda)r^2 = (1 - 8Gm)r'^2, \quad \theta' = (1 - 4Gm)\theta,$$

obtemos, até a ordem linear em Gm ,

$$ds^2 = dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2. \tag{2.14}$$

Curiosamente, a geometria ao redor da partícula puntiforme é localmente idêntica a de um espaço-tempo plano. No entanto, esta geometria não é globalmente Minkowskiana, pelo fato de o ângulo θ' variar no intervalo $0 \leq \theta' < 2\pi(1 - 4Gm)$. Consequentemente, a métrica tridimensional descrita por (2.14), representa um espaço cônico onde uma cunha de tamanho angular igual a $8\pi Gm$ e que possui as duas faces idênticas, foi removida. O ângulo de deflexão da luz é, portanto, igual a $4\pi Gm$, ou seja, independente do parâmetro de impacto. Este fenômeno é bastante similar ao efeito Aharonov-Bohm na eletrodinâmica. De fato, neste último caso, o padrão de interferência de dois feixes coerentes de elétrons se movendo em lados diferentes de um solenóide

fino é afetado pelo fluxo magnético dentro do mesmo, embora o campo magnético seja nulo em todos os pontos ao longo do feixe. No nosso caso, em contrapartida, o raio de luz se propagando na região do espaço-tempo plano ao redor da partícula puntiforme, experimenta a curvatura do espaço-tempo, a qual é restrita à partícula puntual massiva [23, 24]. Como veremos a seguir, este estranho efeito geométrico não ocorre na gravitação massiva tridimensional. Neste sentido, calculemos o desvio gravitacional de um raio de luz no contexto do modelo BHT. Para isto, devemos primeiro resolver as equações de campo linearizadas do sistema em questão.

As equações de campo referentes à densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) - \mathcal{L}_M \right], \quad (2.15)$$

com \mathcal{L}_M sendo a densidade de Lagrangeano para a matéria, são

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{m_2^2} \left[\frac{1}{2} R_{\rho\sigma}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} - \frac{3}{16} R^2 g_{\mu\nu} + \frac{3}{4} R R_{\mu\nu} \right] \\ = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento e

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R,$$

é o tensor de Einstein.

As equações de campo linearizadas correspondentes, são dadas por

$$\left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\kappa} R^{(\text{lin})} \right] + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu \right) = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
R^{(\text{lin})} &= \kappa \left[\frac{1}{2} \square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \right], \\
\Gamma_\mu &\equiv \left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \partial_\rho \gamma_\mu{}^\rho + \frac{\partial_\mu R^{(\text{lin})}}{4\kappa m_2^2}, \\
\gamma_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Aqui, os índices são levantados (abaixados) usando $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

Procedendo-se de forma análoga ao trabalho de Teyssandier sobre gravitação massiva com derivadas superiores em quatro dimensões [25], pode-se demonstrar que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual valem as condições de *gauge* $\Gamma_\mu = 0$, na métrica linearizada. Supondo que estas condições são satisfeitas, é imediata a demonstração de que a solução geral da equação (2.17) é dada por

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(\text{E})}, \quad (2.18)$$

onde $h_{\mu\nu}^{(\text{E})}$ é a solução da equação de Einstein linearizada, no *gauge* de de Donder, isto é

$$\begin{aligned}
\square h_{\mu\nu}^{(\text{E})} &= \frac{\kappa}{2} (T n_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}), \\
\partial^\nu \gamma_{\mu\nu}^{(\text{E})} &= 0,
\end{aligned} \quad (2.19)$$

com

$$\gamma_{\mu\nu}^{(\text{E})} \equiv h_{\mu\nu}^{(\text{E})} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(\text{E})},$$

enquanto $\psi_{\mu\nu}$ satisfaz a relação

$$(\square + m_2^2)\psi_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T). \quad (2.20)$$

Vale a pena mencionar que neste *gauge* bastante especial, as equações para $\psi_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}^{(E)}$ são completamente desacopladas. Como resultado, a solução geral da equação (2.17) se reduz à combinação linear das soluções das equações acima citadas.

Resolvendo as equações (2.19) e (2.20) para uma partícula puntiforme de massa m localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, obtemos

$$h_{00} = -\frac{\kappa m}{8\pi}K_0(m_2 r) \quad (2.21)$$

$$h_{11} = h_{22} = -\frac{\kappa m}{8\pi}\left[K_0(m_2 r) + 2\ln\frac{r}{r_0}\right]. \quad (2.22)$$

Note que, para $m_2 \rightarrow \infty$, a solução acima reproduz, como já era de se esperar, a solução da equação de Einstein tridimensional linearizada, com o sinal errado, no *gauge* de de Donder.

Estamos, agora aptos para discutir a deflexão sofrida por um fóton, devida a um campo gravitacional gerado pela massa m . Suponha um fóton com momentum p_μ vindo do infinito, com parâmetro de impacto b (veja a Fig. 2.2).

A variação de momentum em p_μ , quando o fóton passa pelo campo gravitacional, é dada por

$$\Delta p_\mu = \frac{\kappa}{2}p^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\mu h_{\alpha\beta} dx^\beta, \quad (2.23)$$

onde a integração é realizada ao longo da trajetória do fóton, aproximadamente reta. Como resultado, o deslocamento ao longo do raio aproximadamente reto e o momentum

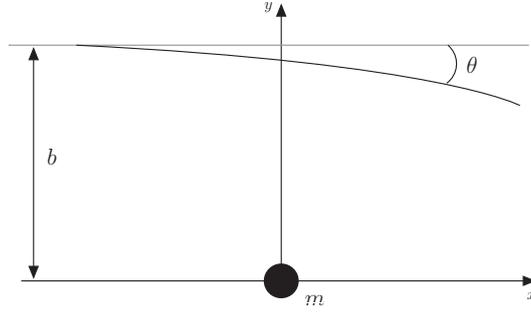


Figura 2.2: Geometria considerada para o cálculo da deflexão da luz, ao passar por um corpo de massa m .

são, respectivamente

$$dx^\mu \approx (dx^1, dx^1, 0), \quad p^\mu \approx (p^1, p^1, 0).$$

Inserindo estas quantidades na equação (2.23), obtemos

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa}{2} p^1 \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y [h_{00} + h_{11}] dx^1, \quad (2.24)$$

que pode ser escrita da seguinte forma,

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa}{2} p^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d}{dr} (h_{00} + h_{11}) \right] \frac{\partial r}{\partial y} \right\}_{y=b} dx. \quad (2.25)$$

Com os resultados de (2.21) e (2.22), podemos escrever a equação (2.25) simplesmente como

$$\Delta p_2 = \frac{b m \kappa^2}{4\pi} p^1 \int_0^\infty \left[\frac{m_2 K_1 (m_2 \sqrt{x^2 + b^2})}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right] dx.$$

Agora, levando-se em conta que [26]

$$\begin{aligned} & \int K_\nu \left(\alpha \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{x^{2\mu+1}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\nu}} dx \\ &= \frac{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}{\alpha^{\mu+1} y^{\nu-\mu-1}} K_{\nu-\mu-1}(\alpha y), \quad \alpha > 0, \quad \text{Re}(\mu) > -1, \end{aligned}$$

e

$$K_{+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

rapidamente encontramos

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa^2 m p^1}{8} (-1 + e^{-m_2 b}). \quad (2.26)$$

Denotando o valor absoluto do ângulo de deflexão por $\theta \left(= \left| \frac{\Delta p_y}{p_x} \right| \right)$, concluímos que

$$\theta = 4\pi G m (1 - e^{-m_2 b}). \quad (2.27)$$

Destacamos que, para $m_2 \rightarrow \infty$, o módulo do ângulo de deflexão reduz a $4\pi G m$, que é, como já havíamos comentado, a predição geométrica da gravitação tridimensional de Einstein.

2.4 Uma análise comparativa

Uma vez que, como já discutimos, o modelo BHT é um caso especial do sistema 3DHDG, um estudo comparativo entre as predições destes modelos referentes tanto ao potencial não-relativístico quanto ao desvio da luz, certamente lançará uma nova luz nos resultados encontrados nas **Seções 2.2** e **2.3**. Conseqüentemente, devemos anal-

isar brevemente estes fenômenos no contexto do modelo 3DHDG e conduzir, após isto, um estudo comparativo entre estes e aqueles obtidos para o sistema BHT. Chamamos atenção ao fato de que o estudo da energia potencial no contexto do modelo 3DHDG vale a pena ser feito, devido a surpreendente similaridade entre este e o potencial relativo à interação de dois vórtices supercondutores.

O potencial não-relativístico para o modelo 3DHDG

Um cálculo similar ao realizado na **Seção 2.2**, produz a seguinte expressão para a energia potencial

$$U(r) = 2GM^2 \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) \right]. \quad (2.28)$$

Ao contrário do potencial Newtoniano,

$$U_{\text{Newt}}(r) = 2GM^2 \ln \frac{r}{r_0},$$

que possui uma singularidade logarítmica na origem e é não-limitado no infinito, este potencial é extremamente bem comportado: é finito na origem ($U(0) = 2GM^2 \ln \frac{M_2}{M_0}$) e zero no infinito. Curiosamente, ele descreve três possíveis regimes gravitacionais. Naturalmente, dependendo da escolha dos parâmetros na ação, obtém-se:

- Gravidade, com $M_2 < M_0$;
- Anti-gravidade, com $M_0 < M_2$ ou
- Blindagem gravitacional, com $M_2 = M_0$

A Fig. 2.3 mostra uma representação esquemática do potencial gravitacional para os três casos descritos acima. É bastante notável que esta representação quantitativa seja

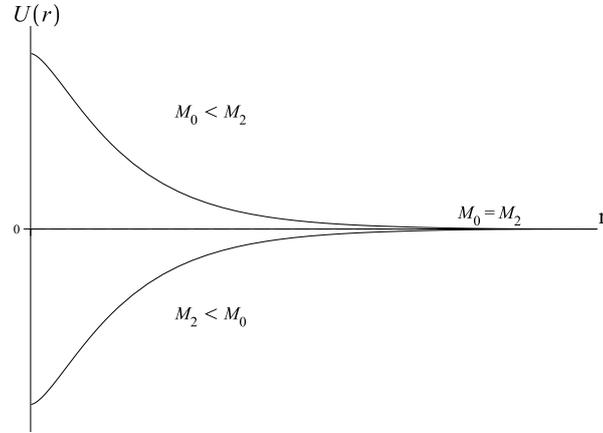


Figura 2.3: Possíveis regimes gravitacionais previstos pela 3DHDG: Gravidade ($M_2 < M_0$); Anti-gravidade ($M_0 < M_2$) e Blindagem gravitacional ($M_2 = M_0$)

muito similar, *mutatis mutandis*, à representação qualitativa encontrada por Jacobs e Rebbi [27], através de um estudo computacional aproximado do potencial de dois vórtices. De fato, calculando a energia de interação das configurações de dois vórtices, na teoria de Ginzburg-Landau ou, equivalentemente, no modelo abeliano de Higgs, como uma função da separação entre os dois vórtices e do parâmetro λ , que mede a intensidade relativa do auto-acoplamento da matéria e do acoplamento eletromagnético, eles mostraram que o potencial entre os vórtices é atrativo para $\lambda < 1$ e repulsivo para $\lambda > 1$. Eles também encontraram que, para $\lambda = 1$, um limite inferior é, na realidade, atingido para todas as separações e que, portanto, neste caso os vórtices não interagem.

Deflexão da luz no contexto da 3DHDG

Um procedimento análogo ao empregado na **Seção 2.3** fornece a solução geral para as equações de campo linearizadas do modelo 3DHDG, geradas por uma partícula pontual

de massa m , localizada em $\mathbf{r} = 0$, ou seja,

$$h_{00} = \frac{m\kappa}{8\pi} \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) \right], \quad (2.29)$$

$$h_{ii} = \frac{m\kappa}{8\pi} \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) - 2 \ln \frac{r}{r_0} \right]. \quad (2.30)$$

Usando estes resultados, podemos mostrar, então, que o valor absoluto do ângulo de deflexão, θ , sofrido por um fóton devido ao campo gravitacional gerado pela massa m é dado por

$$\theta = 4\pi G m (1 - e^{-M_2 b}). \quad (2.31)$$

Note que a excitação escalar de massa M_0 não contribui em nada para o desvio da luz. E por quê? A resposta é que a métrica concernente à gravitação linearizada do tipo $R + R^2$ com o termo de EH com o sinal errado – a teoria obtida linearizando as equações de campo relacionadas à ação

$$\int d^3x \sqrt{g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 - \mathcal{L}_M \right]$$

– é conformemente relacionada àquela da relatividade geral tridimensional com o sinal errado, linearizada. De fato, representando a solução da gravitação $R + R^2$ linearizada e com o sinal errado por $g_{\mu\nu}^{(R+R^2)}$, rapidamente obtemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(R+R^2)} &\equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(R+R^2)} = (1 - \kappa\phi) [\eta_{\mu\nu} - \kappa h_{\mu\nu}^{(E)}] \\ &= (1 - \kappa\phi) g_{\mu\nu}^{(E)}, \end{aligned}$$

onde, claro está, termos da ordem κ^2 foram negligenciados. Aqui, $h_{\mu\nu}^{(E)}$ e ϕ pos-

suem os mesmos significados que na **Seção 2.3**, ao passo que $g_{\mu\nu}^{(E)}$, representa a solução da gravitação linearizada tridimensional de Einstein, com o sinal errado. Esta é a razão pela qual as expressões (2.27) e (2.31), com as devidas mudanças, são tão notavelmente similares.

Um estudo comparativo

Nós estamos agora preparados para uma análise comparativa entre os dois resultados obtidos para a 3DHDG e os seus correspondentes, preditos pelo modelo BHT, de maneira que um melhor entendimento físico deste último possa ser alcançado.

De considerações anteriores, chegamos à conclusão de que o nascimento do potencial do modelo BHT é o potencial de 3DHDG, com $M_2 < M_0$ (veja figura 2.4). Examinando o diagrama mostrado na Fig. 2.4, vemos claramente que, à medida em que M_0 aumenta, o potencial de 3DHDG rapidamente se aproxima ao do modelo BHT e, eventualmente, os dois potenciais coalescem. Consequentemente, para se chegar ao potencial de BHT a partir do potencial de 3DHDG, este último deve necessariamente se tornar singular na origem, o que ocorre no limite $M_0 \rightarrow \infty$. É notável que esta é precisamente a condição para se evitar, pelo menos ao nível de árvore, o *ghost* massivo de spin-0 que *assombra* a 3DHDG. Portanto, a presença da singularidade no potencial de BHT está correlacionada à ausência do *ghost* ao nível de árvore; em outras palavras, unitariedade ao nível de árvore e a existência de uma singularidade no potencial estão entrelaçadas.

Iremos, agora, melhorar nossa discussão a respeito da deflexão da luz no contexto do modelo BHT. Na **Seção 2.3**, chegamos à conclusão de que o ângulo de deflexão gravitacional previsto por este modelo é dependente do parâmetro de impacto, como esperado. Porém, é, este ângulo, pequeno? Antes de responder a esta questão, relembremos que uma das razões de se fazer pesquisa em gravitação tridimensional é

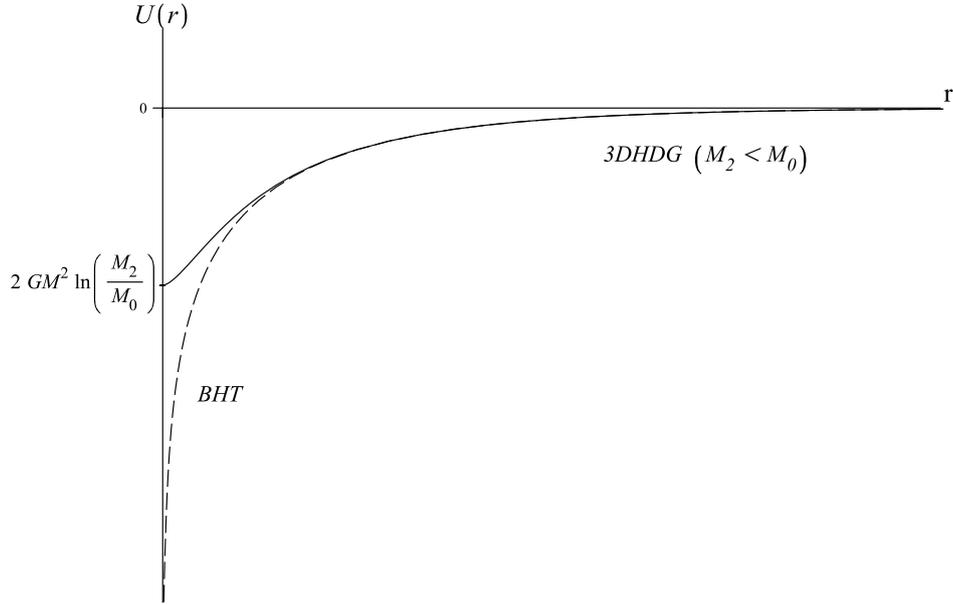


Figura 2.4: Energia potencial gravitacional para os modelos 3DHDG com $M_2 < M_0$ (linha contínua) e BHT (linha pontilhada).

que a gravitação em três dimensões possui uma relevância física direta para se modelar fenômenos que são, na verdade, dinamicamente confinados em uma dimensionalidade mais baixa. De fato, a física gravitacional na presença de uma corda cósmica retilínea (infinitamente longa, perpendicular ao plano) é descrita de forma adequada por uma gravitação tridimensional [24]. Isto significa que a resposta a nossa pergunta inicial pode ser encontrada pela análise da deflexão gravitacional em um modelo gravitacional em quatro dimensões, análogo ao modelo BHT. A saber, gravitação quadridimensional com derivadas superiores e com o sinal errado, definido pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right].$$

Pode-se demonstrar que o ângulo de deflexão, θ é, agora, dado por

$$\theta = 4\pi G\mu \left(1 - e^{-\overline{M}_2 b}\right),$$

onde μ é a densidade de energia da corda e $\overline{M}_2^2 \equiv -\frac{4}{\kappa^2\beta} (> 0)$. Se levarmos em conta que $|\beta| = 10^{60}$, chegamos, de imediato, a $M_2 \approx 10^3 \text{ cm}^{-1}$ [28, 29]. Como consequência, a grandes distâncias da corda, o ângulo de deflexão ($\theta \approx G\mu$) é pequeno, como era de se esperar. Na verdade, observações vinculam $G\mu \approx 10^{-5}$, enquanto o cenário de cordas para a formação de galáxias requer $G\mu \approx 10^{-6}$, correspondendo a uma escala de grande unificação $\approx 10^{16} \text{ GeV}$ [24]. Como um resultado, somente para fótons passando muito próximos à corda cósmica, o desvio da luz diferirá de forma significativa do valor usual predito pela gravitação quadridimensional com derivadas superiores e com o sinal errado. A mesma conclusão, com as mudanças apropriadas, se aplica ao modelo BHT.

2.5 Comentários finais

Como é bem conhecido, a gravitação de Einstein tridimensional é fisicamente trivial, uma vez que os tensores de Einstein e de Riemann são equivalentes em $D = 3$. Além disso, a quantização do campo gravitacional não origina grávitons propagantes, já que a métrica do espaço-tempo é localmente determinada pelas fontes. Consequentemente, a descrição do fenômeno gravitacional através de uma gravitação em três dimensões leva a alguns resultados bizarros, como por exemplo

- Ausência de força gravitacional no limite não-relativístico;
- Deflexão gravitacional independente do parâmetro de impacto.

Todavia, como já discutimos, estes fenômenos estranhos não ocorrem no contexto do modelo BHT. De fato, no contexto deste último modelo, forças gravitacionais de curto alcance são exercidas em partículas que se movem lentamente; além disso, o desvio da luz depende do parâmetro de impacto, como deveria. Em outras palavras, as idiossincrasias da relatividade geral tridimensional não ocorrem no modelo BHT.

A razão principal de se estudar modelos gravitacionais em três dimensões é, na realidade, a tentativa de se encontrar um sistema gravitacional com divergências no ultravioleta menos severas, na teoria de perturbações. Uma vez que a relatividade geral é dinamicamente trivial em três dimensões, o modelo BHT, o qual é unitário ao nível de árvore, é um importante passo nessa direção. Este tipo de pesquisa, conduzida em dimensões mais baixas, certamente nos ajuda a ganhar uma melhor visão sobre difíceis questões conceituais, que estão presentes e mais opacas no mundo físico de dimensão $(3 + 1)$.

Vale a pena mencionar que a trivialidade da relatividade geral tridimensional pode também ser remediada, pela adição ao termo de EH em três dimensões, de um termo de Chern-Simons que viola a paridade. O modelo resultante é geralmente conhecido como *Gravitação Massiva Topológica* (TMG, na sua sigla em inglês) [30]. Recentemente, Ahmedov e Aliev [13] mostraram que as equações de campo relativas ao modelo BTH consistem de uma equação massiva (tensorial) tipo Klein-Gordon, com um termo de fonte de curvatura quadrática e uma equação de vínculo; além do mais, para espaços-tempos algébricos do tipo D e N , as equações de campo da TMG poderiam ser pensadas como a “raiz quadrada” da equação massiva tipo Klein-Gordon, o que os permitiu mapear todas as soluções tipo D e N da TMG, naquelas do modelo BHT. Chamamos a atenção, no entanto, que, ao contrário da TMG, a gravitação massiva tridimensional possui a enorme vantagem de ser uma teoria que preserva a paridade.

Referências Bibliográficas

- [1] Accioly A, Helayël-Neto J, Morais J, Scatena E and Turcati R 2011 *Phys. Rev. D* **83** 104005.
- [2] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [3] P. Manheim, *Found. Phys.* **37**, 532 (2007)
- [4] B. Whitt, *Phys. Lett. B* **145**, 176 (1984).
- [5] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [6] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. D* **79**, 124042 (2009).
- [7] R. Andringa *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27**, 025010 (2010).
- [8] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Annals Phys.* **325**, 1118 (2010).
- [9] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **28**, 015002 (2011).
- [10] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27**, 235012 (2010).
- [11] M. Nakasone and I. Oda, *Prog. Theor. Phys.* **121**, 1389 (2009).

- [12] İ. Güllü and B. Tekin, Phys. Rev. D **80**, 064033 (2009).
- [13] H. Ahmedov and A. Aliev, Phys. Rev. Lett. **106**, 021301 (2011).
- [14] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, Journal of Physics: Conference Series **229** (2010) 012005.
- [15] S. Deser, Phys. Rev. Lett. **103**, 101302 (2009).
- [16] P. Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B **60**, 478 (1973).
- [17] I. Antoniadis and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **33**, 2756 (1986) .
- [18] H. Nishino and S. Rajpoot, Phys. Lett. B **639**, 110 (2006).
- [19] A. Accioly, Phys. Rev. D **67**, 127502 (2003).
- [20] A. Accioly, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **127**, 100 (2004).
- [21] A. Accioly and M. Dias, Int. J. Theor. Phys. **44**, 1123 (2005).
- [22] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, Cosmology, The Quantum Vacuum and Zeta Functions: A Workshop with a Celebration of Emilio Elizalde's Sixtieth Birthday 8-10 Mar 2010, Bellaterra, Barcelona, Spain.
- [23] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **23**, 852 (1981).
- [24] A. Vilenkin and E. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [25] P. Teyssandier, Class. Quantum Grav. **6**, 219 (1989).
- [26] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, and Products* (Academic Press, San Diego, 1994).

- [27] L. Jacobs and C. Rebbi, Phys. Rev. B **19**, 4486 (1979).
- [28] A. Accioly and H. Blas, Phys. Rev. D **64**, 067701 (2001).
- [29] A. Accioly and H. Blas, Int. J. Theor. Phys. **43**, 47 (2004).
- [30] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982); Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982); **185**, 406 (E) (1988).

Capítulo 3

Algumas propriedades interessantes da Nova Gravitação Massiva [1]

Apresentamos neste capítulo, um esboço de uma demonstração de que a nova gravitação massiva - o modelo de gravitação massiva em 3 dimensões proposto por Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) - é o único sistema unitário, ao nível de árvore, que pode ser construído através da inclusão de termos quadráticos na curvatura na Relatividade Geral 3D. Duas propriedades gravitacionais interessantes do modelo BHT, a saber, dilatação temporal e atraso temporal gravitacional, as quais não possuem contraparte na gravitação usual de Einstein em 3 dimensões, também serão analisadas.

3.1 Motivação

Durante muito tempo, os físicos acreditaram que modelos gravitacionais contendo derivadas quárticas (ou mais altas) da métrica estavam condenadas ao fracasso, devido a um único detalhe: eles implicam em estados de *ghosts* não-físicos de norma

negativa. Os modelos de curvatura escalar pura, isto é, os sistemas gravitacionais de quarta ordem com o seguinte Lagrangeano $\mathcal{L} = R + \alpha R^2$, os quais são unitários ao nível de árvore, pareciam ser as únicas exceções a esta regra. Na verdade, estes sistemas são conformemente equivalentes à gravitação de Einstein com um campo escalar [2]. Consequentemente, apesar de possuírem derivadas de quarta ordem da métrica, estes modelos são, em última análise, de segunda ordem em suas versões escalares-tensoriais. Portanto, é perfeitamente compreensível que, há apenas três anos, a comunidade de físicos se viu absolutamente maravilhada ao ser apresentada a uma extensão particular da relatividade geral em três dimensões, contendo derivadas superiores, que é livre de *ghosts* ao nível de árvore, proposta por Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) [3–15].

Foi demonstrado que o modelo de gravitação massiva 3D acima citado, também conhecido como “nova gravitação massiva” (NMG em inglês), é tanto livre de *ghosts* quanto finito no ultravioleta por contagem de potência) no seu puro limite onde a curvatura ao quadrado contém derivadas quárticas irreduzíveis [16], o que, como foi apontado por Ahmedov e Aliev [11], viola o paradigma padrão de seus equivalentes em quatro dimensões [17].

O modelo BHT é definido pela densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) \right], \quad (3.1)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, com G sendo o análogo em três dimensões da constante de Newton e $m_2(> 0)$, um parâmetro de massa. Vale a pena notar que a densidade de Lagrangeano acima, possui um termo de Einstein-Hilbert (EH) invertido.

Uma demonstração formal da equivalência entre a versão linearizada do modelo

BHT e a gravitação de Einstein-Hilbert-Pauli-Fierz, foi apresentada em [3]; por falar nisso, esta demonstração foi revisada em [18]. No entanto, o significado físico dessa equivalência é um tanto quanto obscuro; de fato, a versão linearizada do modelo BHT é invariante por difeomorfismo em relação ao *background*, enquanto a teoria de Pauli-Fierz é somente invariante em relação às simetrias de Killing do espaço-tempo (em particular, o espaço de Minkowski tridimensional), o que mostra claramente, que ainda falta um melhor entendimento das simetrias [10].

E o que dizer sobre a estranha mudança de sinal do termo de EH mencionada anteriormente? No nível linearizado, Deser [16] mostrou que o termo de EH quebra a invariância de Weyl do modelo BHT sem a presença de tal termo e, conseqüentemente, é responsável por dar massa ao gráviton. Em outras palavras, os termos de derivadas superiores providenciam a energia cinética, enquanto o termo de EH fornece a massa neste modelo linearizado, explicando, assim, a estranha mudança de sinal neste termo. É de se notar que o termo de EH dá origem à massa na versão linearizada do modelo BHT, quebrando a invariância de Weyl e não a invariância por difeomorfismo, como esperado [10].

Neste ponto seria interessante nos perguntarmos qual a razão de se pesquisar sobre grávitons massivos. O aumento do interesse nos últimos anos neste assunto é motivado, por um lado, pela descoberta da aceleração cósmica, que poderia ser explicada em termos de uma modificação no infravermelho da Relatividade Geral, que fornece ao gráviton uma pequena massa [19], e, por outro lado, pela conjectura de que alguma teoria envolvendo grávitons massivos poderia ser o limite de baixa energia de uma teoria de cordas não-crítica subjacente à QED [20]. Como frequentemente se faz para muitas outras questões relacionadas à gravitação, é aconselhável considerar primeiro as possibilidades de grávitons massivos no contexto mais simples de um espaço-tempo

em três dimensões [18]. O modelo BHT é, conseqüentemente, a arena ideal para tais investigações.

Nossos objetivos neste capítulo são :

1. Fornecer uma “demonstração ” de que a gravitação de BHT é o único modelo unitário ao nível de árvore que pode ser construído em três dimensões pela combinação criteriosa do escalar de Ricci, R , com os termos quadráticos da curvatura R^2 e $R_{\mu\nu}^2$;
2. Explorar algumas propriedades interessantes deste notável modelo, que não possuem contraparte na gravitação usual de Einstein tridimensional.

O capítulo é organizado como segue. Na próxima sessão, apresentamos um esboço de uma demonstração de que a NMG é o único modelo unitário ao nível de árvore, quadrático na curvatura. Na **Seção 3.3**, mostramos que, diferente do que acontece com a Relatividade Geral tridimensional, relógios são desacelerados em um campo gravitacional descrito pelo modelo BHT. Esta dilatação temporal gravitacional é a base do desvio espectral gravitacional. Uma expressão para o atraso temporal induzido pela NMG é obtida na **Seção 3.4**. Finalmente, na **Seção 3.5** apresentamos alguns comentários e observações. Detalhes de cálculos técnicos são deixados para os apêndices.

Usamos unidades naturais, $c = \hbar = 1$, e a nossa métrica de Minkowski é definida por $\text{diag}(+1, -1, -1)$. Nosso tensor de Ricci é definido por $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \dots$.

3.2 Encontrando uma classe de modelos de gravitação 3D, unitários ao nível de árvore

Começamos nossas análises considerando a teoria tridimensional mais geral, obtida aumentando a gravitação usual de Einstein em três dimensões, através de termos quadráticos na curvatura. Agora, tendo em conta que em três dimensões tanto o tensor de curvatura como o tensor de Ricci possuem o mesmo número de componentes [21], chegamos a conclusão de que a densidade de Lagrangeano para a teoria em questão, pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right), \quad (3.2)$$

onde σ é um parâmetro conveniente que pode tomar os valores $+1$ (termo de EH com o sinal padrão), -1 (termo de EH com o “sinal errado”), e α e β são coeficientes livres. Note que as constantes κ , α e β , possuem dimensão de massa $[\kappa] = -\frac{1}{2}$ e $[\alpha] = [\beta] = -1$, em unidades naturais. Nosso próximo passo é estabelecer vínculos sobre os parâmetros da Lagrangeana acima, através da unitariedade, com a finalidade de obtermos o modelo BHT. Para conseguir este objetivo, faremos uso de um procedimento padrão que converte a tarefa de checar a unitariedade ao nível de árvore de um dado modelo, o que é, em geral, um trabalho demorado, em um simples exercício algébrico. A prescrição consiste basicamente em saturar o propagador com correntes conservadas externas, compatíveis com as simetrias do sistema, e depois examinar os resíduos do propagador saturado (PS) em cada pólo simples. Vamos então calcular o propagador para o modelo de gravidade descrito por (3.1). Para isto, relembramos que para pequenas flutuações ao redor da métrica de Minkowski, η , a métrica total assume

a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Linearizando (3.2) via (3.3) e adicionando ao resultado a densidade de Lagrangeano para a fixação de *gauge*

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\Lambda} (\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})^2,$$

onde

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h,$$

que corresponde ao *gauge* de de Donder, encontramos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

onde, no espaço dos momenta,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left[\sigma k^2 + \frac{\beta \kappa^2 k^4}{4} \right] P^{(2)} + \frac{k^2}{2\Lambda} P^{(1)} + \frac{k^2}{4\Lambda} P^{(0-w)} - \frac{\sqrt{2} k^2}{4 \Lambda} P^{(0-sw)} \\ & - \frac{\sqrt{2} k^2}{4 \Lambda} P^{(0-ws)} + \left[\frac{k^2}{2\Lambda} - \sigma k^2 + 2\alpha \kappa^2 k^4 + \frac{3}{4} \beta \kappa^2 k^4 \right] P^{(0-s)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aqui, $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-w)}$, $P^{(0-s)}$, $P^{(0-sw)}$ e $P^{(0-ws)}$ são os operadores de Barnes-Rivers tridimensionais usuais (veja o apêndice A).

Portanto, o propagador é dado por (veja o apêndice A)

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} &= \frac{2\Lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{1}{k^2(\sigma + \frac{\beta\kappa^2 k^2}{4})} P^{(2)} + \frac{1}{-\sigma k^2 + 2\alpha\kappa^2 k^4 + \frac{3}{4}\kappa^2 k^4 \beta} P^{(0-s)} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{-\sigma k^2 + 2\alpha\kappa^2 k^4 + \frac{3}{4}\kappa^2 k^4 \beta} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] \\
&+ \frac{-4\Lambda\sigma + 2 + 8\Lambda\alpha\kappa^2 k^2 + 3\Lambda\beta\kappa^2 k^2}{-\sigma k^2 + 2\alpha\kappa^2 k^4 + \frac{3}{4}\kappa^2 k^4 \beta} P^{(0-w)}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Agora, a contração do propagador acima com correntes conservadas $T^{\mu\nu}(k)$ ($k_\mu T^{\mu\nu} = k_\nu T^{\mu\nu} = 0$), produz

$$\text{SP} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right] \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right] + \frac{1}{\sigma} \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - m_0^2} \right] \frac{1}{2} T^2, \tag{3.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
m_2^2 &\equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}, \\
m_0^2 &\equiv \frac{4\sigma}{(8\alpha + 3\beta)\kappa^2}.
\end{aligned}$$

Supondo que não há táquions no modelo, prontamente encontramos os seguintes vínculos:

$$\frac{\sigma}{\beta} < 0, \quad \frac{\sigma}{8\alpha + 3\beta} > 0. \tag{3.8}$$

Por outro lado, os resíduos de SP nos polos $k^2 = m_2^2$, $k^2 = 0$, e $k^2 = m_0^2$ são,

respectivamente,

$$Res(\text{SP})|_{k^2=m_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) |_{k^2=m_2^2}, \quad (3.9)$$

$$Res(\text{SP})|_{k^2=0} = \frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - T^2 \right) |_{k^2=0}, \quad (3.10)$$

$$Res(\text{SP})|_{k^2=m_0^2} = \frac{1}{2\sigma} (T^2) |_{k^2=m_0^2}. \quad (3.11)$$

Agora, como é bem conhecido, a unitariedade ao nível de árvore de um modelo genérico é garantida se o resíduo em cada polo simples de SP é maior ou igual a zero. Tendo em mente que (veja apêndice B)

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) |_{k^2=m_2^2} &> 0, \\ \left(T_{\mu\nu}^2 - T^2 \right) |_{k^2=0} &= 0, \end{aligned}$$

chegamos à conclusão que

- $Res(\text{SP})|_{k^2=m_2^2} > 0$ se $\sigma = -1$ (o que implica $\beta > 0$ e $\alpha < 0$), e
- $Res(\text{SP})|_{k^2=0} = 0$.

Consequentemente, não precisamos nos preocupar com esses polos; o polo problemático é $k^2 = m_0^2$, uma vez que $Res(\text{SP})|_{k^2=m_0^2} < 0$. Uma maneira de se evitar este obstáculo, é considerar o limite $m_0 \rightarrow \infty$ do modelo em discussão, o que nos leva a concluir que

$$\alpha = -\frac{3}{8}\beta$$

Portanto, a classe de modelos definidos pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\beta}{2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (3.12)$$

são livres de *ghosts* ao nível de árvore. Por uma questão de conveniência, trocamos β por $\frac{4}{\kappa^2 m_2^2}$, onde m_2 é um parâmetro de massa. A densidade de Lagrangeana resultante,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (3.13)$$

nada mais é do que o modelo BHT para a gravitação massiva tridimensional.

Vale a pena notar que não é de todo claro se a relação particular entre α e β que acabamos de obter, sobreviverá à renormalização em um dado *loop*, mesmo em um *loop*; em outras palavras, unitariedade além do nível de árvore precisa ser checada [10]. É mais provável que o modelo BHT seja não-renormalizável, uma vez que ele melhora apenas as projeções do spin-2 do propagador, mas não a projeção do spin-0 [22].

3.3 Dilatação Temporal Gravitacional

A gravitação de Einstein tridimensional é trivial fora das fontes; conseqüentemente, nenhuma dilatação temporal gravitacional ou desaceleração de relógios pode ocorrer neste quadro. Isto pode ser facilmente demonstrado no caso particular de uma distribuição de massa M , esfericamente simétrica, cujo intervalo espaço-temporal linearizado é dado por

$$ds^2 = dt^2 - (1 + \lambda)(dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (3.14)$$

onde $\lambda = 8GM \ln \frac{r}{r_0}$, com r_0 sendo um regulador infravermelho, e r e θ são as coordenadas polares usuais.

Introduzindo, agora, novas coordenadas radial (r') e angular (θ'), através da mudança de variáveis

$$(1 - \lambda)r^2 = (1 - 8GM)r'^2, \quad \theta' = (1 - 4GM)\theta, \quad (3.15)$$

obtemos, até a ordem linear em GM ,

$$ds^2 = dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2. \quad (3.16)$$

A geometria no entorno da distribuição esfericamente simétrica é, portanto, localmente idêntica àquela de um espaço-tempo plano, como deveria ser; no entanto, não é globalmente Minkowskiana, uma vez que o ângulo θ' varia no intervalo $0 \leq \theta' < 2\pi(1 - 4GM)$. Em consequência, a métrica tridimensional (3.16) descreve um espaço cônico com uma cunha de tamanho angular igual a $8\pi GM$ removida, e as duas faces da cunha identificadas. Chegamos, assim, à conclusão de que no quadro da gravitação de Einstein em três dimensões, nenhum deslocamento espectral gravitacional ocorre, devido a presença do estranho efeito geométrico mencionado. Vale a pena notar que neste contexto, a não existência de uma dilatação temporal não implica que o espaço-tempo seja necessariamente plano; em outras palavras, a dilatação temporal não é um ‘teste clássico’ da Relatividade Geral tridimensional. Como veremos a seguir, o efeito geométrico excêntrico supracitado, não ocorre na NMG. Para isto, devemos resolver de antemão, as equações de campo linearizadas relacionadas ao sistema BHT.

As equações de campo concernentes à densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) - \mathcal{L}_M \right], \quad (3.17)$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade de Lagrangeana para a matéria, são

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{m_2^2} \left[\frac{1}{2} R_{\rho\sigma}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \frac{3}{16} R^2 g_{\mu\nu} + \frac{3}{4} R R_{\mu\nu} \right] = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia, e

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

é o tensor de Einstein.

As equações de campo linearizadas correspondentes são dadas por

$$\left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\kappa} R^{(\text{lin})} \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu) = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} R^{(\text{lin})} &= \kappa \left[\frac{1}{2} \square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \right], \\ \Gamma_\mu &\equiv \left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \partial_\rho \gamma_\mu{}^\rho + \frac{\partial_\mu R^{(\text{lin})}}{4\kappa m_2^2}, \\ \gamma_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Note que aqui, índices são levantados (abaixados) usando-se $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

Plagiando o trabalho de Teyssandier em gravitação quadridimensional com derivadas superiores [23], pode-se mostrar que é sempre possível escolhermos um sistema de coordenadas tal que as condições de *gauge*, $\Gamma_\mu = 0$, estejam asseguradas, na métrica linearizada. Assumindo que estas condições estejam satisfeitas, é direta a demonstração de que a solução geral de (3.19) é dada por

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(E)}, \quad (3.20)$$

onde $h_{\mu\nu}^{(E)}$ é a solução da equação de Einstein linearizada no *gauge* de de Donder, isto é,

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2}(T\eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}), \quad \partial^\nu \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = 0, \quad (3.21)$$

com

$$\gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(E)},$$

enquanto $\psi_{\mu\nu}$ satisfaz a equação

$$(\square + m_2^2)\psi_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T). \quad (3.22)$$

Vale a pena notar que, neste *gauge* muito especial, as equações para $\psi_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}^{(E)}$ são totalmente desacopladas. Como resultado, a solução geral de (3.19) se reduz à combinação linear das equações acima mencionadas.

Resolvendo as equações (3.21) e (3.22) para uma partícula puntiforme de massa M

localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, encontramos

$$h_{00} = -\frac{\kappa M}{8\pi} K_0(m_2 r) \quad (3.23)$$

$$h_{11} = h_{22} = -\frac{\kappa M}{8\pi} \left[K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right], \quad (3.24)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. Note que K_0 se comporta como $-\ln x$ na origem e como $x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$ assintoticamente. Daí, o intervalo espaço-temporal lê-se

$$ds^2 = [1 - 4MGK_0(m_2 r)] dt^2 - \left[1 + 4GM \left(K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right) \right] (dr^2 + r^2 d\theta^2). \quad (3.25)$$

No limite $m_2 \rightarrow \infty$, (3.25) reproduz (3.14), como esperado. A geometria no entorno da partícula puntiforme não é, naturalmente, localmente idêntica àquela de um espaço-tempo tipo Minkowski, sinalizando, desta maneira, a possibilidade de ocorrência de um deslocamento espectral gravitacional. Vamos, então, demonstrar que a dilatação temporal gravitacional de fato ocorre no modelo BHT.

Suponha que um sinal enviado por um emissor em um ponto fixo (r_E, θ_E) é recebido, após viajar ao longo de uma geodésica nula, por um receptor em um ponto fixo (r_R, θ_R) (veja a Fig. 3.1). Agora, a diferença $t_R - t_E$, onde t_E é a coordenada tempo de emissão e t_R é a coordenada tempo de recepção, é a mesma para todos os sinais emitidos – as linhas-mundo de sinais sucessivos nada mais são que cópias de sinais sucessivos apenas deslocados no tempo. Como resultado, se a diferença de tempo- t entre um sinal e o próximo é dt_E no ponto de partida, a diferença de tempo- t correspondente no ponto de chegada é necessariamente a mesma. Contudo, o relógio de um observador situado no ponto de emissão registra tempo próprio (τ) e não a coordenada tempo (t).

Consequentemente,

$$d\tau_E = \sqrt{1 - 4MGK_0(m_2 r_E)} dt_E$$

e similarmente

$$d\tau_R = \sqrt{1 - 4MGK_0(m_2 r_R)} dt_R.$$

Uma vez que $dt_E = dt_R$, prontamente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_R}{d\tau_E} &= \frac{\sqrt{1 - 4MGK_0(m_2 r_R)}}{\sqrt{1 - 4MGK_0(m_2 r_E)}} \\ &\approx 1 - 2MGK_0(m_2 r_R) + 2MGK_0(m_2 r_E) \\ &= 1 + V_R - V_E, \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde

$$V(r) \equiv \frac{\kappa}{2} h_{00}(r) = -2MGK_0(m_2 r)$$

é o potencial gravitacional. Isto mostra que, se o relógio em (r_R, θ_R) está em um potencial mais baixo que o relógio em (r_E, θ_E) , isto é, $V_R < V_E$, então $d\tau_R$ é menor que $d\tau_E$. Em outras palavras, o relógio que está mais mergulhado no potencial gravitacional corre mais devagar. A equação (3.26) é a fórmula para a dilatação temporal gravitacional ou a fórmula do desvio para o vermelho. Vale a pena notar que $d\tau_R \rightarrow d\tau_E$ à medida em que $m_2 \rightarrow \infty$, implicando que nenhuma dilatação temporal ocorre no quadro da Relatividade Geral tridimensional, o que concorda totalmente com o resultado obtido previamente.

Por outro lado, se o emissor é um átomo pulsante que, no intervalo de tempo próprio $\Delta\tau_E$, emite n pulsos, um observador situado no emissor, atribuirá ao átomo, uma frequência $\nu_E \equiv \frac{n}{\Delta\tau_E}$, que, claro está, é a frequência própria do átomo pulsante.

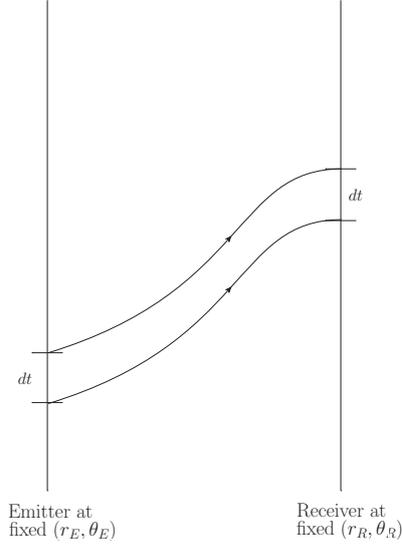


Figura 3.1: Diagrama espaço-temporal ilustrando as linhas-mundo de dois sinais idênticos sucessivos.

O observador localizado no receptor, por sua vez, atribuirá a frequência $\nu_R \equiv \frac{n}{\Delta\tau_R}$ ao mesmo átomo. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\nu_R}{\nu_E} &= \frac{\sqrt{1 - 4MGK_0(m_2r_E)}}{\sqrt{1 - 4MGK_0(m_2r_R)}} \\ &\approx 1 + 2MG [K_0(m_2r_R) - K_0(m_2r_E)]. \end{aligned}$$

Disto, imediatamente temos o desvio fracional

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \equiv \frac{\nu_R - \nu_E}{\nu_E} \approx 2MG [K_0(m_2r_R) - K_0(m_2r_E)].$$

Note que, uma vez que $K_0(x)$ é uma função monotonicamente decrescente no intervalo $0 \leq x < \infty$, $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ é positiva se $r_E > r_R$ e negativa se $r_E < r_R$. Por consequência, se o emissor está mais próximo do objeto massivo que o receptor, o desvio é para o vermelho, mas se o receptor está mais próximo do objeto massivo, o desvio é para o

azul.

Das considerações precedentes, chegamos à conclusão de que o desvio espectral gravitacional é, de fato, um teste clássico do modelo BHT. Isto pode também ser visto, como na Relatividade Geral em quatro dimensões, como um teste direto da curvatura do espaço-tempo.

3.4 Atraso Temporal Gravitacional

Um outro efeito interessante que pode ser obtido a partir da aproximação linear da NMG, é o atraso temporal sofrido por um sinal de luz enviado por um observador – situado em um ponto fixo no espaço, no campo gravitacional gerado por um objeto massivo – a um objeto pequeno e refletido de volta para o observador. O objeto pequeno é suposto estar localizado diretamente entre o observador e o imenso corpo (veja Fig.3.2). Considere, neste espírito, um pulso de luz que se move ao longo de uma linha reta conectando o observador e o objeto pequeno. É fácil demonstrar que a coordenada tempo para a viagem completa (observador → objeto pequeno → observador) é dada por

$$\Delta t_G = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{1 + 4MG[K_0(m_2r) + 2 \ln \frac{r}{r_0}]}{1 - 4MGK_0(m_2r)}} dr. \quad (3.27)$$

Portanto, o lapso de tempo próprio medido pelo observador, cujo relógio, naturalmente, registra tempo próprio, tem a forma

$$\Delta \tau_G = 2\sqrt{1 - 4MGK_0(m_2r_2)} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{1 + 4MG \left[K_0(m_2r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right]}{1 - 4MGK_0(m_2r)}} dr. \quad (3.28)$$

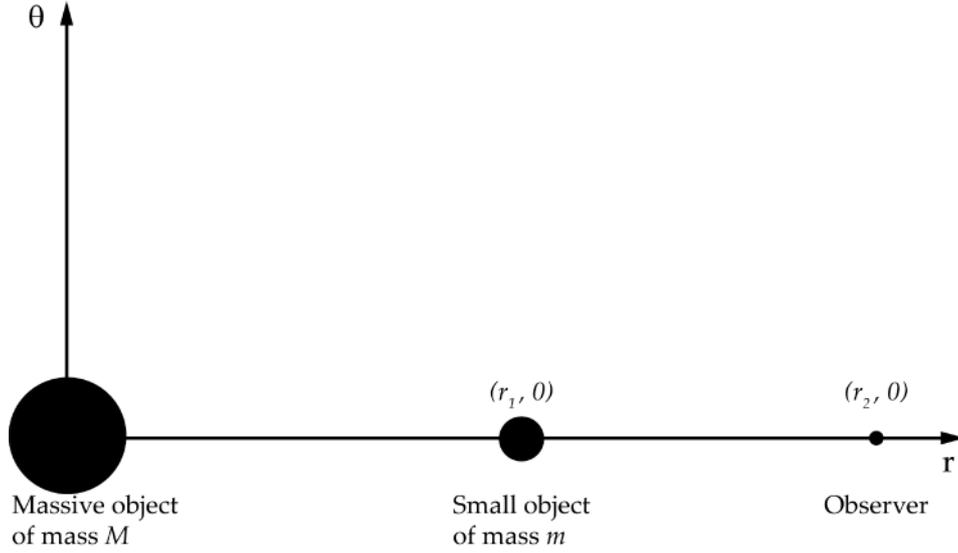


Figura 3.2: Atraso temporal em “ressonância de radar”. O observador localizado em $(r_2, 0)$ emite um sinal em direção ao objeto em $(r_1, 0)$. Este sinal é refletido de volta ao observador.

Por outro lado, a distância viajada pelo pulso de luz é igual a

$$2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + 4MG \left[K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right]} dr.$$

Consequentemente, com base na teoria clássica, deveríamos esperar um tempo de ida e volta igual a

$$\Delta\tau_C = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + 4MG \left[K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right]} dr. \quad (3.29)$$

De (3.28) e (3.29), chegamos à conclusão de que $\Delta\tau_G \neq \Delta\tau_C$. Note que no limite $m_2 \rightarrow \infty$,

$$\Delta\tau_G = \Delta\tau_C = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + 8MG \ln \frac{r}{r_0}} dr,$$

que claramente nos mostra que não existe atraso temporal no quadro da Relatividade Geral tridimensional, como esperado.

Por outro lado, as equações (3.28) e (3.29) nos dizem que

$$\Delta\tau_G \approx 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[1 + 4MG \left(K_0(m_2 r) + \ln \frac{r}{r_0} \right) \right] dr - 4MG[K_0(m_2 r_2)](r_2 - r_1),$$

$$\Delta\tau_C \approx 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[1 + 2GM \left(K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right) \right] dr.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \Delta\tau_G - \Delta\tau_C &\approx 4MG \left[\int_{r_1}^{r_2} K_0(m_2 r) dr - (r_2 - r_1) K_0(m_2 r_2) \right] \\ &= 4MG [K_0(m_2 r_0) - K_0(m_2 r_2)] (r_2 - r_1), \end{aligned}$$

onde $r_1 < r_0 < r_2$. Disso, chegamos à conclusão de que existe um atraso temporal induzido pela NMG

$$\Delta\tau_G - \Delta\tau_C \approx 4MG [K_0(m_2 r_0) - K_0(m_2 r_2)] (r_2 - r_1). \quad (3.30)$$

3.5 Comentários Finais

Como é bem sabido, a gravitação de Einstein em três dimensões e sem fontes, é fisicamente trivial, porque os tensores de Einstein e de Riemann são equivalentes em $D = 3$. Além disso, a quantização do campo gravitacional não dá origem a grávitons propagantes, uma vez que a métrica espaço-temporal é localmente determinada pelas fontes. Conseqüentemente, a descrição de fenômenos gravitacionais por uma gravitação em três

dimensões, leva a alguns resultados estranhos, tais como

- falta de uma força gravitacional no limite não-relativístico;
- deflexão gravitacional independente do parâmetro de impacto;
- ausência completa de dilatação temporal gravitacional;
- nenhum atraso temporal

Pode-se demonstrar que os dois primeiros fenômenos estranhos na lista acima, não ocorrem no contexto do modelo BHT [24]. De fato, no quadro deste último, forças gravitacionais de curto alcance são exercidas em partículas se movendo lentamente; além disso, o desvio da luz depende do parâmetro de impacto, como deveria ser. Por outro lado, os fenômenos bizarros remanescentes da lista acima citada, como demonstramos, também não ocorrem no sistema BHT. Na verdade, tanto o atraso temporal quanto o deslocamento espectral ocorrem no contexto da NMG. Como na Relatividade Geral em quatro dimensões, dilatação temporal gravitacional e atraso temporal gravitacional são também testes do modelo BHT. Vale a pena notar que a base para estes testes é a solução independente do tempo das equações de campo linearizadas do modelo BHT, produzidas por uma massa esférica estática.

Uma das principais razões para se estudar modelos de gravitação tridimensionais é, na realidade, a tentativa de se encontrar um sistema de gravitação com divergências no ultravioleta menos severas, em teoria de perturbação. Uma vez que a Relatividade Geral em três dimensões é dinamicamente trivial, o modelo BHT, que é unitário ao nível de árvore, é um importante passo nessa direção. Este tipo de pesquisa conduzida em dimensões mais baixas, certamente nos ajuda a melhorar nosso conhecimento sobre difíceis questões conceituais, que estão presentes e são mais opacas no mundo

físico de dimensão (3+1). Um outro forte argumento a favor de se considerar teorias de gravitação massivas, como já havíamos comentado, é o fato de que a atual expansão acelerada do universo pode ser parcialmente atribuída a um efeito do tipo gráviton massivo.

Vale a pena mencionar que a trivialidade da Relatividade Geral tridimensional pode também ser curada pela adição, à ação de EH em três dimensões, de um termo de Chern-Simons que viola a paridade. O modelo resultante é usualmente conhecido como Gravitação Massiva Topológica (TMG) [25, 26]. Mesmo assim, em contraste com a TMG, a gravitação massiva tridimensional tem a enorme vantagem de ser uma teoria que preserva a paridade. Por outro lado, uma vez que a gravitação com derivadas superiores em três dimensões (3DHDG) – que é definida pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{3DHDG}} = \sqrt{g} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\alpha}{2} R^2 \right)$$

– é não-unitária ao nível de árvore [27], seria interessante verificar se a adição de um termo topológico do tipo Chern-Simons,

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{\mu}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} [\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\omega\mu}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\omega}],$$

onde μ é um parâmetro arbitrário, a este modelo de ordem mais alta, curaria a não-unitariedade do anterior. Demonstra-se que, para se evitar *ghosts* e *tachions* na teoria

mista ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_{3\text{DHDG}} + \mathcal{L}_{\text{CS}}$), os seguintes vínculos nos parâmetros deve valer¹[28]:

$$\text{(setor de spin-2)} : \sigma < 0, \beta > 0,$$

$$\text{(setor de spin-0)} : \sigma > 0, 3\beta + 8\alpha > 0.$$

Assim, para valores arbitrários dos parâmetros, o modelo em questão é não unitário ao nível de árvore, o que mostra claramente que o termo topológico de Chern-Simons não é uma panaceia para o problema da unitariedade da 3DHDG. Todavia, se prevenirmos a propagação do spin-0, através da escolha $3\beta + 8\alpha = 0$, o modelo resultante é unitário ao nível de árvore. É surpreendente que essa condição seja exatamente a mesma condição que aparece no modelo BHT (no limite $m_0 \rightarrow \infty$). Chamamos a atenção ao fato de que, contrariamente a uma crença popular, a adição de um termo de Chern-Simons a um modelo unitário ao nível de árvore, não é necessariamente uma garantia de que o modelo resultante será unitário ao nível de árvore [27]. Por exemplo, a adição de um termo de Chern-Simons (\mathcal{L}_{CS}) à gravitação tridimensional $R + \alpha R^2$ –

$$\mathcal{L}_{R+\alpha R^2} = \left(-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha R^2}{2}\right)\sqrt{g}$$

– que é unitária ao nível de árvore, prejudica a unitariedade deste último [27]. Portanto, em alguns casos, a coexistência entre o termo topológico de Chern-Simons e teorias de gravitação com derivadas em três dimensões é conflitante.

Para concluir, destacamos que, recentemente, a dinâmica clássica não-linear do modelo BHT foi exaustivamente investigada por de Rham, Gabadadze, Pirtskhalava, Tolley and Yavin [29], que encontraram que a teoria passou por verificações notavelmente

¹A excitação sem massa, como a excitação sem massa da Relatividade Geral tridimensional, não é um grau de liberdade dinâmico, isto é, é não-propagante.

não-triviais no nível não-linear, tais como as seguintes:

- No limite de desacoplamento da teoria, as interações dos modos de helicidade-0 são descritas por um único termo cúbico, o assim chamado cúbico Galileano [30];
- O modo conforme da métrica coincide com o modo de helicidade-0 no limite de desacoplamento;
- A teoria completa não leva a nenhum grau de liberdade extra, o que sugere que um análogo tridimensional do *ghost* de Boulware-Deser quadridimensional não está presente no sistema BHT.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).
- [2] B. Whitt, *Phys. Lett. B* **145**, 176 (1984).
- [3] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [4] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. D* **79**, 124042 (2009).
- [5] R. Andringa *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27**, 025010 (2010).
- [6] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Annals Phys.* **325**, 1118 (2010).
- [7] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **28**, 015002 (2011).
- [8] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27**, 235012 (2010).
- [9] M. Nakasone and I. Oda, *Prog. Theor. Phys.* **121**, 1389 (2009).
- [10] İ. Güllü and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **80**, 064033 (2009).
- [11] H. Ahmedov and A. Aliev, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021301 (2011).

- [12] D. Dalmazi, *Phys. Rev. D* **80**, 085008 (2009).
- [13] D. Dalmazi and E. Mendonc a, *J. High Energy Phys.* JHEP09(2009)011.
- [14] J. Helayel-Neto, C. Hernaski, B. Pereira-Dias, A. Vargas-Paredes and V. Vasquez-Otoya, *Phys. Rev. D* **82**, 064014 (2010).
- [15] C. Hernaski, A. Vargas-Paredes and J. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **80**, 124012 (2009).
- [16] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 101302 (2009).
- [17] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [18] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Journal of Physics: Conference Series* **229** (2010) 012005.
- [19] D. Eckhardt, J. Pestaña and E. Fischbach, *New Astron.* **15** 175 (2010).
- [20] 't Hooft G 2008 arXiv: 0708.3184 [hep-th].
- [21] Staruszkiewicz A 1963 *Acta Phys. Pol.* **24** 734.
- [22] Bergshoeff E, Hohm O and Townsend P 2010 *Cosmology, the Quantum Vacuum and Zeta Functions: A Workshop with a Celebration of Emilio Elizalde's Sixtieth Birthday*, Bellaterra, Barcelona, Spain.
- [23] Teyssandier P 1989 *Class. Quantum Grav.* **6** 219.
- [24] Accioly A, Helayel-Neto J, Morais J, Scatena E and Turcati R 2011 *Phys. Rev. D* **83** 104005.
- [25] Deser S, Jackiw R and Templeton S 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 975.

- [26] Deser S, Jackiw R and Templeton S 1982 *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** 372; 1988 **185** 406 (E).
- [27] Accioly A 2003 *Phys. Rev. D* **67** 127502.
- [28] Hernaski C, Pereira-Dias B and Vargas-Paredes A 2010 *Phys. Lett. A* **374** 3410.
- [29] de Rham C, Gabadadze G, Pirtskhalava D, Tolley A and Yavin I 2011 *J. Higher Energy Physics* **06** 028.
- [30] Nicolis R, Rattazzi R and Trincherini E 2009 *Phys. Rev. D* **79** 064036.
- [31] Dengiz S and Tekin B 2011 *Phys. Rev. D* **84** 024033.
- [32] Jatkar D and Sinha A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 171601.
- [33] Nieuwenhuizen P 1973 *Nucl. Phys. B* **60** 478.
- [34] Antoniadis I and Tomboulis E 1986 *Phys. Rev. D* **33** 2756.

Apêndice **A**

Uma prescrição para o cálculo do propagador do gráviton e uma lista de algumas identidades que facilitam enormemente esta tarefa

Para encontrarmos o propagador relacionado à densidade de Lagrangeana na equação (3.1), é muito conveniente trabalhar em termos dos operadores de Barnes-Rivers no espaço dos tensores simétricos de posto 2. O conjunto completo de operadores tridimensionais, no

espaço dos momenta, é [33, 34]

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa} - \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}), \quad (\text{A.1})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (\text{A.2})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

e

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

são, respectivamente, os operadores de projeção transverso e longitudinal. A tabela multiplicativa para esses operadores é mostrada na Tab. A.1. Para calcular o propa-

Tabela A.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

gador do gráviton, precisamos da parte bilinear da densidade de Lagrangeana (3.1).

Com a seguinte escolha de *gauge*

$$\frac{1}{2\Lambda}(\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})^2$$

–o *gauge* de de Donder– e passando para o espaço dos momenta, reproduzimos (3.5).

A tarefa de se calcular o operador \mathcal{O} , é bastante facilitada se recorrermos às seguintes identidades:

$$\begin{aligned} [P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}), \\ [2P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}, \\ [2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\kappa}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa}k_\mu k_\lambda), \\ [2P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\kappa k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda}k_\mu k_\nu), \\ P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} &= \frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu k_\kappa k_\lambda). \end{aligned}$$

Agora, se escrevermos o operador \mathcal{O} na forma genérica

$$\mathcal{O} = x_1 P^{(1)} + x_2 P^{(2)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)},$$

e levamos em conta que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, onde \mathcal{O}^{-1} é o propagador, rapidamente obtemos

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} \left[x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)} \right]. \quad (\text{A.7})$$

De (A.7) e (3.5), obtemos (3.6).

Apêndice **B**

Um resultado útil para checar a unitariedade de um modelo genérico de gravitação tridimensional

Teorema 1. *Se m é a massa de uma partícula física genérica de spin-2, relacionada a um dado modelo gravitacional, e k é a troca de momentum correspondente, então*

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=m^2} > 0 \quad \text{and} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0.$$

Aqui, $T^{\mu\nu}(= T^{\nu\mu})$ é a corrente externa conservada.

Começamos por observar que o conjunto de vetores independentes no espaço dos momenta, $k^\mu \equiv (k^0, \mathbf{k})$, $\tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\mathbf{k})$, $\epsilon^\mu \equiv (0, \hat{\epsilon})$, onde $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário ortogonal a \mathbf{k} , é uma base conveniente para se expandir quaisquer vetores tridimensionais $V^\mu(k)$.

Usando esta base, podemos escrever o tensor de corrente, simétrico, como:

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + B\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + C\epsilon^\mu \epsilon^\nu + Dk^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + Ek^{(\mu} \epsilon^{\nu)} + F\tilde{k}^{(\mu} \epsilon^{\nu)},$$

onde $a^{(\mu b^\nu)} \equiv \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + b^\mu a^\nu)$.

A conservação da corrente fornece os seguintes vínculos nos coeficientes A , B , D , E e F :

$$Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$B(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + \frac{D}{2}k^2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$Ek^2 + F(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Das equações (B.1) e (B.2), obtemos

$$Ak^4 = B(k_0^2 \mathbf{k}^2)^2,$$

enquanto a equação (B.3) implica

$$E^2 > F^2.$$

Por outro lado, saturando os índices de $T^{\mu\nu}$ com os momenta k_μ , chegamos à relação de consistência para os coeficientes A , B e D :

$$Ak^4 + B(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Depois de um cálculo longo, mas de certa maneira simples, usando as equações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2 &= \left[\frac{k^2(A-B)}{\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right]^2 + \frac{k^2}{2}(E^2 - F^2), \\ T_{\mu\nu}^2 - T^2 &= k^2 \left[\frac{1}{2}(E^2 - F^2) - 2C(A-B) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Portanto,

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=m^2} > 0 \quad \text{e} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0.$$

Considerações Finais

Como mencionamos na Introdução , este trabalho tinha dois propósitos especiais:

- Encontrar um limite para a massa do fóton que não fosse baseado somente em cálculos de ordem de grandeza, mas sim em resultados provenientes de cálculos rigorosos realizados no contexto da Gravitação ao Nível de Árvore e onde fossem utilizados como dados de entrada as mais recentes medidas experimentais.
- Pesquisar novas e interessantes propriedades da Gravitação Massiva em 3D.

Será que os objetivos foram atingidos? Antes de responder a esta indagação é necessário analisar o que os resultados obtidos até aqui nos dizem sobre os dois tópicos previamente mencionados.

Iniciemos considerando a questão da determinação de um limite superior para a massa do fóton. Como mostramos no texto, os efeitos devidos a uma massa de repouso não nula para o fóton podem ser incorporados no eletromagnetismo de uma maneira bastante simples via a QED Massiva. Nesse espírito, uma interessante implicação decorrente da possível existência de um fóton massivo na natureza, a saber, pequenas alterações nos valores conhecidos da deflexão gravitacional da radiação eletromagnética, foram uti-

lizados para estabelecer um limite superior para a massa do fóton. O limite obtido não é tão bom quanto aqueles recentemente estimados, sendo, porém, comparável a outros limites existentes e traz uma nova contribuição para a questão da restrição da massa do fóton.

No que tange à Gravitação Massiva em 3D, verificamos que ela é a única teoria de ordem superior em 3D que é unitária ao nível de árvore. Estudamos também uma série de propriedades gravitacionais desta teoria que não possuem contraparte na Gravitação de Einstein em 3D.

Podemos responder agora, com total segurança, que os objetivos principais do trabalho foram plenamente atingidos.

Vamos discutir agora, de passagem, a interessante questão da incompatibilidade entre renormalizabilidade e unitariedade na gravitação em 3D aumentada por termos de (curvatura)². Analisando os resultados tratados neste trabalho concluímos que é impossível construir um modelo gravitacional com derivadas de ordem superior que seja simultaneamente renormalizável e unitário [1]. Por que razão estas propriedades não podem coexistir pacificamente no contexto do aludido modelo? Para responder esta questão vamos considerar a energia gravitacional interpartícula no modelo com $\sigma = -1$ já que este é o único sistema em 3D que contém um modelo unitário ao nível de árvore. Lembrando que a energia potencial interpartículas é dada por

$$U(r) = 2G_3m^2 [K_0(m_0r) - K_0(m_2r)],$$

e que ela descreve três possíveis regimes gravitacionais (veja a Fig. 3.1), chegamos à conclusão que em qualquer um desses regimes a energia potencial gravitacional é finita

na origem. Por que isso é assim? Simplesmente porque o modelo geral é não unitário devido à presença de um *ghost* massivo de spin 2 não-taquiônico. Este fantasma, evidentemente, contribui negativamente para a energia potencial. Conseqüentemente, a mencionada energia negativa adiciona-se à energia positiva proveniente da partícula massiva de spin 0 para dar origem a um potencial finito na origem.

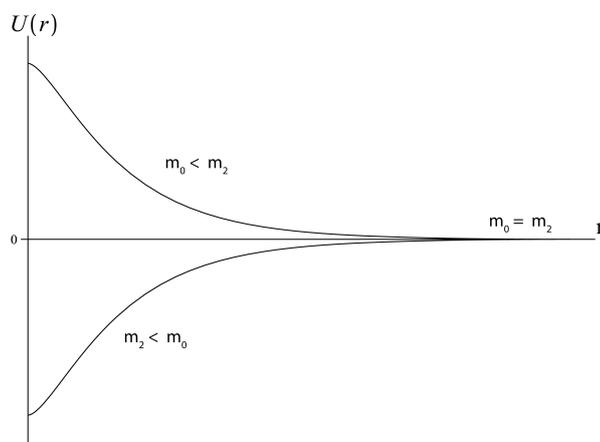


Figura 3.1: Os possíveis regimes gravitacionais preditos pelo modelo geral 3D com $\sigma = -1$.

Evidentemente, o berço do modelo BHT – que é unitário ao nível de árvore – é o modelo com $m_2 < m_0$ (veja a Fig. 3.2). Examinando o diagrama esboçado na Fig. 3.2, vemos claramente que quando m_0 torna-se cada vez maior, o potencial 3D aproxima-se rapidamente do potencial BHT e eventualmente os dois potenciais coalescem. Deste modo, para se chegar ao potencial de BHT a partir da teoria 3D, este último precisa necessariamente se tornar singular na origem, o que ocorre no limite $m_0 \rightarrow 0$. É notável que esta seja precisamente a condição para se evitar, ao nível de árvore, o *ghost* massivo de spin-0 que assombra o modelo 3D. Portanto, a presença da singularidade no potencial de BHT está correlacionada à ausência do *ghost* ao nível de árvore; em outras palavras, a unitariedade ao nível de árvore e a existência de uma singularidade no

potencial estão interligadas. No diagrama da Fig. 3.3, mostramos como se comportam os modelos 3D no que diz respeito à unitariedade e à renormalizabilidade. Segue-se que um sistema unitário está correlacionado a um potencial singular na origem, enquanto um modelo renormalizável está relacionado a um potencial finito na origem. Portanto não é possível uma coexistência entre estas duas propriedades no contexto da gravitação de Einstein em 3D aumentada por termos de (curvatura)²; em outras palavras, neste tipo de modelo iremos ter sempre a questão da renormalizabilidade versus unitariedade.

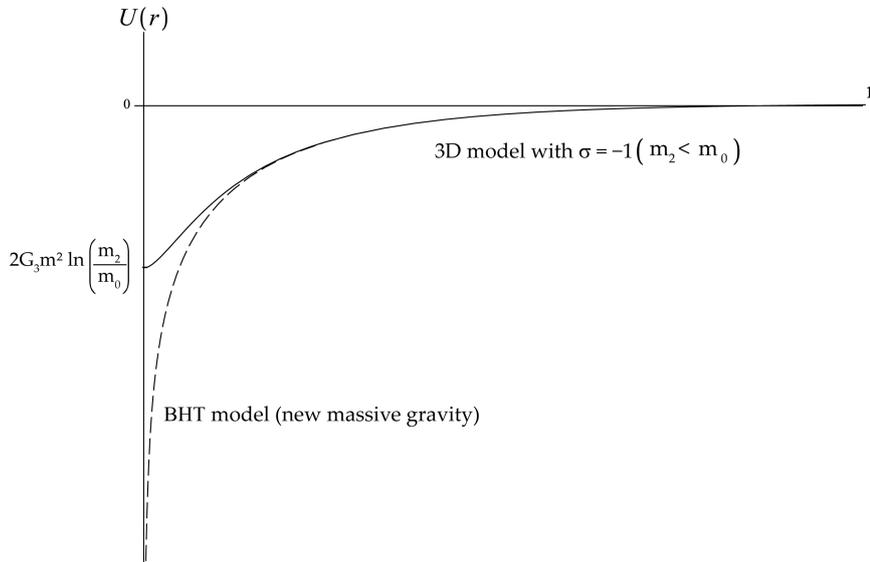


Figura 3.2: Energia potencial gravitacional para o modelo 3D com $\sigma = -1$ e $m_2 < m_0$ (linha contínua) e para o modelo BHT (linha tracejada).

Para finalizar, vamos comentar rapidamente sobre uma investigação que seria, de certa maneira, uma continuação natural deste trabalho. Como vimos, no modelo de Einstein tridimensional com termos de (curvatura)², é impossível reconciliar unitariedade e renormalizabilidade. Seria interessante, em decorrência, resolver o para-

doxo da incompatibilidade entre renormalizabilidade e unitariedade na Gravitação de Einstein em N dimensões aumentada por termos de curvatura ao quadrado.

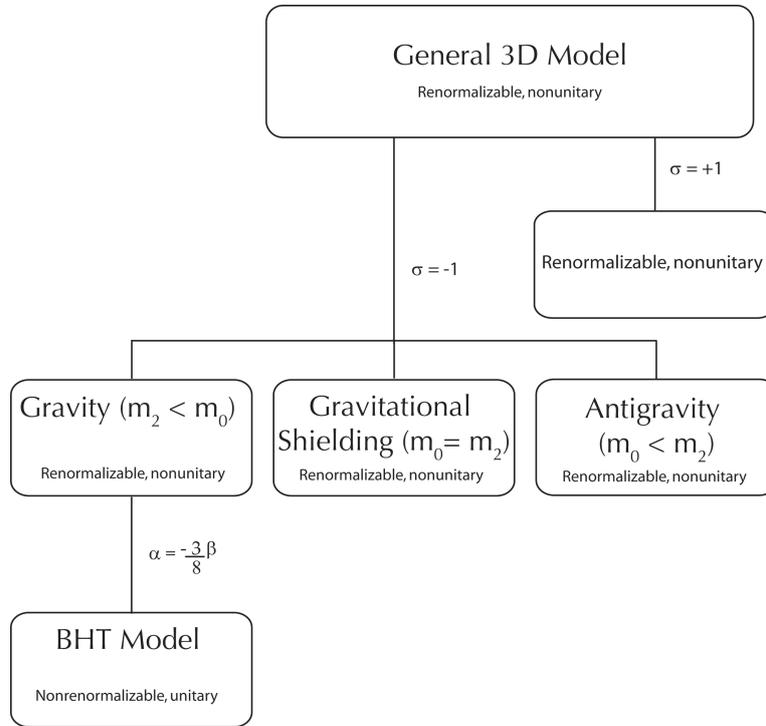


Figura 3.3: Renormalizabilidade versus unitariedade no modelo 3D geral.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *Solving the Riddle of the Incompatibility Between Renormalizability and Unitarity in N-Dimensional Einstein Gravity Enlarged by Curvature-Squared Terms*, to appear in Int. J. Mod. Phys. D (2013). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2013 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*