21 de novembro de 2014

Campos de Spin-2 Geométricos e suas Implicações Cosmológicas: Energia Escura e Universos não Singulares

Vicente F. Antunes

Orientador: Mário Novello

Tese apresentada para a obtenção do título de Doutor em Física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) – Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo

Dando continuidade ao estudo comparativo de modelos cosmológicos singulares e não singulares desenvolvido anteriormente (*cf.* Antunes, Goulart & Novello [1]), neste trabalho foi investigada uma modificação “mínima” da teoria einsteiniana da gravitação construída sobre um espaço-tempo de Riemann-Cartan cuja torção tem seu número de graus de liberdade reduzido (espaço-tempo de Riemann-Cartan restrito). A dinâmica é definida a partir da ação de Einstein-Cartan, e a estrutura cinemática é escolhida de forma a coincidir com a cinemática da Relatividade Geral no espaço-tempo riemanniano associado. A torção, neste caso, pode ser decomposta em dois campos de spin-2 “estéreis”, com energias de sinais opostos, que propagam-se no espaço-tempo riemanniano. Quando acrescidos do único potencial de auto-interação conservativo admissível, estes campos podem atuar como uma energia escura dinâmica, produzindo uma expansão acelerada tardia do Universo. Além disso, se o campo de energia positiva for a componente dominante, o Universo resultante é não singular.

Abstract

Giving continuity to a previous work comparing singular and bouncing cosmological models (*cf.* Antunes, Goulart & Novello [1]), in this work it was investigated a "minimal" modification of Einstein's theory of gravitation built on a Riemann-Cartan space-time where torsion's number of degrees of freedom is reduced (restricted Riemann-Cartan space-time). The dynamics is defined from the Einstein-Cartan action, and the kinematical structure is chosen in such a way that it coincides with General Relativity's kinematics in the associated riemannian space-time. The torsion, in this case, can be decomposed into two "sterile" spin-2 fields with energies of opposite sign propagating in the Riemannian space-time. When equiped with the only admissible conservative self-interaction potentials, these fields can orininate a dynamical dark energy compatible with a late-time accelerated expansion of the Universe. Also, if the positive energy field is the dominant component, the resulting Universe is non-singular.

Para Luciana, Brigite, Sophia, Valentina (in memoriam), Olivia (in memoriam), Viola, Carmela, Othelo, Oberon (in memoriam), Tristan (in memoriam), Emilia, Julieta, Petruchio, Alice, Romeo (in memoriam), Zigfrida e Lorenzo.

Agradecimentos:

Agradeço, primeiramente, ao Mário Novello pela amizade, pela oportunidade extraordinária e, sobretudo, pelo aprendizado de valor incalculável.

Agradeço também ao Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA) e todos seus integrantes, professores, alunos e funcionários.

Gostaria de incluir um agradecimento especial ao Flávio e a Cíntia Daflon por terem aberto as portas para uma nova percepção da gravidade.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro a este trabalho, e ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) pelo suporte institucional.

ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{M}^4$	variedade base, espaço-tempo
(e_a)	campo de referenciais arbitrário
(θ^a)	campo de correferenciais arbitrário
$\lambda^a{}_b(x)$, $\overset{-1}{\lambda}{}_b{}^a(x)$	transformações lineares
$\otimes$, $\otimes$	produtos tensoriais
$\wedge$	produto exterior
$\omega^a{}_b$	formas de conexão
D	derivada (exterior) covariante associada a uma estrutura conectiva
d	derivada exterior
$\equiv$	identidade, igualdade definitória
$\sim$	equivalência
$C^a{}_{bc}$	coeficientes de estrutura (ou de não holonomia)
$\Omega^a{}_b$	formas de curvatura
Θ^a	formas de torção
g_{ab}	componentes da métrica pseudo-riemanniana (ou lorentziana)
ds^2	tensor métrico, elemento de linha
$(e_{(a)})$	campo de referenciais de Lorentz (ou tetradas)
$(\theta^{(a)})$	campo de correferenciais de Lorentz (ou cotetradas)
(∂_α)	campo de referenciais naturais (ou de coordenadas)
(dx^α)	campo de correferenciais naturais (ou de coordenadas)
$\Gamma^a{}_{cb}$	componentes da conexão de Riemann-Cartan
$\overset{\circ}{\Gamma}{}^a{}_{cb}$	componentes da conexão riemanniana
$K^a{}_{cb}$	componentes do tensor de contorção
$Q^a{}_{cb}$	componentes do tensor de não-metricidade
$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{(a)}{}_{(c)(b)}$	coeficientes de rotação de Ricci

$\overset{\circ}{D}$	derivada (exterior) covariante riemanniana
$R^{a}{}_{bcd}$	componentes do tensor de curvatura de Riemann-Cartan
$\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{bcd}$	componentes do tensor de curvatura de Riemann
$S^{a}{}_{bc}$	componentes da torção
R_{bc}	curvatura média de Riemann-Cartan
$\overset{\circ}{R}_{bc}$	tensor de Ricci (ou curvatura média riemanniana)
R	escalar de curvatura de Riemann-Cartan
$\overset{\circ}{R}$	escalar de Ricci (ou escalar de curvatura riemanniano)
$\eta_{(a)(b)}\,,\eta_{\alpha\beta}$	componentes da métrica de Minkowski
η_{abcd}	componentes da forma volume
η	forma volume
$\|g\|$	determinante da métrica, $\|g\| \equiv det(g_{\alpha\beta})$
$(*X)_{a_1\cdots a_p}$	dual de Hodge (de uma p-forma)
V^a	campo de velocidades (associado a partículas ou observadores)
$\delta[\,\cdot\,]$	derivada funcional de Euler-Lagrange
T_{ab}	tensor momentum-energia
κ	constante gravitacional de Einstein, $\kappa \equiv 8\pi G$ $(c = \hbar = k_B = 1)$
$h_{\alpha\beta}$	temro de primeira ordem da métrica (campo de spin-2 gravitacional)
$X_{(ab)}$	campo simetrizado, $X_{(ab)} \equiv X_{ab} + X_{ba}$
$X_{[ab]}$	campo anti-simetrizado, $X_{[ab]} \equiv X_{ab} - X_{ba}$
${}^{(0)}T_{\alpha\beta}$	tensor momentum-energia em ordem zero
$\tilde{\rho}_B$	densidade de matéria bariônica localizada
$\tilde{\rho}_D$	densidade de matéria escura não bariônica localizada
$\tilde{\phi}_N(x)$	potencial newtoniano
$\triangle$	operador de Laplace, $\triangle \equiv \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$
$A(t)$	fator de escala da métrica de FLRW

ϵ	índice da seção espacial do espaço-tempo de FLRW
ρ_I	densidade de energia da I-ésima componente do fluído cósmico
p_I	pressão isotrópica da I-ésima componente do fluído cósmico
Λ	constante cosmológica
ρ_Λ	densidade de energia escura
w_I	parâmetro da equação de estado da I-ésima componente do fluído cósmico
$H(t)$	parâmetro de Hubble
ρ_c	densidade crítica de energia
Ω_I	densidade relativa de energia da I-ésima componente do fluído cósmico
Ω_Λ	densidade relativa de energia escura
ϕ	campo escalar
φ_{ab} , ψ_{ab}	campos de spin-2
φ , ψ	traços dos campos de spin-2
Φ_{abc} , Ψ_{abc}	tensores de Fierz
Φ_a , Ψ_a	traço dos tensores de Fierz
$V[\Phi]$, $V[\Psi]$	potenciais associados os campos de spin-2 φ_{ab} e ψ_{ab} , respectivamente
Ω_Φ , Ω_Ψ	densidades relativas de energia dos campos de spin-2
w_Φ , w_Ψ	parâmetros das equações de estado para os campos de spin-2

"Gravito ergo sum"

— M. Novello

I. INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral está entre as mais precisas e bem sucedidas teorias já formuladas na história da física. No entanto, todos os testes de precisão aos quais esta teoria já foi submetida estão confinados à escala de distância sub-galática ($< 10^5$ anos-luz).

De fato, já na escala galática surgem discrepâncias entre as previsões da Relatividade Geral e as observações, sendo a massa das galáxias e aglomerados de galáxias compatíveis, no contexto desta teoria, com os efeitos gravitacionais observados, significativamente maior que a inferida pela bem estabelecida relação de massa-luminosidade (Oort [2], Zwicky [3, 4], Rubin *et al.* [5], Bergmann, Petrosian & Lynds [6]). Estas observações têm sido interpretadas como indicando que aproximadamente 80% da matéria localizada do Universo é um tipo de "matéria escura" não identificada, que interage fracamente com a matéria "luminosa" (*i.e.* constituída de prótons, nêutrons, elétrons e fótons) e que deve ainda ser "fria" (*i.e.* não relativística) no Universo atual. O Modelo Padrão da Física de Partículas, no entanto, não apresenta candidatos a uma tal matéria escura fria (CDM – *Cold Dark Matter*) que sejam consistentes com os modelos de formação de estruturas no Universo (*cf.* Peebles & Ratra [7], Padmanabhan [8]). Além disso, no contexto da Cosmologia Padrão, dados sobre a nucleosíntese primordial e a radiação de micro-ondas cósmica de fundo (CMB – *Cosmic Microwave Backgroud*) sugerem que a maior fração desta matéria escura deve ser de natureza não bariônica. Consequentemente, a busca por partículas com estas características acaba sendo dirigida às extensões do Modelo Padrão, ainda pouco consolidadas.

Discrepâncias entre teoria e observação ainda mais surpreendentes, no entanto, são encontradas na escala cósmica ($> 10^9$ anos-luz). Dados observacionais referentes às supernovas do tipo Ia (SNe-Ia) evidenciam uma taxa de expansão do Universo maior do que a prevista pelo modelo cosmológico de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para um Universo espacialmente "plano" e dominado pela matéria (Riess *et al.* [9], Perlmutter *et al.* [10]). Esta observação aponta para a existência de uma "energia escura" que constituiria aproximadamente 70% do conteúdo de matéria-energia do Universo, e seria responsável por sua expansão acelerada. Apesar da constante cosmológica Λ associada à energia do vácuo ser a candidata natural à energia escura, o desacordo em 120 ordens de grandeza para seu valor entre a previsão teórica fornecida pelo Modelo Padrão e o limite observacional (Weiberg [11]) sugerem, no contexto da Cosmologia Padrão, a necessidade de introduzir uma componente material-energética exótica. Dentre as propostas para uma tal componente compatíveis com a Cosmologia Padrão, as mais populares são os modelos de energia escura dinâmica do tipo "quintessência" e análogos (K-essência, campo camaleão, campo "fantasma", *etc.*), nos quais é introduzido um campo escalar cosmológico com propriedades escolhidas *ad hoc* para gerar efeitos compatíveis com uma constante cosmológica em determinados regimes. Apesar destes modelos oferecerem uma solução simples e engenhosa para os problemas da aceleração cósmica tardia e da coincidência cósmica, o caráter artificial do potencial associado ao campo, ou a falta de um sólido modelo físico subjacente, tornam essas propostas pouco satisfatórias.

A ausência de qualquer observação direta de componentes materiais-energéticas exóticas, o mencionado problema da constante cosmológica e o problema de consistência dos cenários cosmológicos fornecidos pela Relatividade Geral, este último diagnosticado pelos teoremas de Penrose-Hawking (*cf.* Hawking & Ellis [12]), acabaram levando a um renovado interesse em teorias modificadas clássicas da gravitação como alternativas aos cenários com matéria e energia escuras. Teorias como "$f(R)$" e análogos, MOND (*Modified Newtonian Dynamics*), Gravitação Massiva, além de cenários oriundos das teorias de Branas-Mundo, tais como o gás de Chaplygin generalizado, e teorias de cordas, como o gás de cordas, estão entre as muitas propostas que surgiram na literatura nas últimas décadas (*cf.* Novello & Perez-Bergliafa [13] e Clifton *et al.* [14] para revisões abrangentes). Em todas estas propostas, no entanto, ou a teoria subjacente impõe grandes modificações à Relatividade Geral, seja em sua estrutura cinemática, seja em sua estrutura dinâmica, ou ambas, ou esta consiste em uma reformulação radical, e de caráter fortemente especulativo, da física da gravitação.

Apesar das dificuldades mencionadas acima, a Relatividade Geral ainda é considerada a teoria melhor consolidada dentre as teorias da gravitação disponíveis hoje em dia, com uma série de previsões e aplicações bem estabelecidas. Tendo isto em mente, é interessante procurar modificações mínimas da teoria einsteiniana com potencial para sanar alguns de seus problemas, em especial os problemas da energia escura e da singularidade inicial, porém preservando seus aspectos fundamentais. Dentre estes aspectos, o mais caro é a descrição geométrica da interação gravitacional exposta pela teoria da Relatividade Geral, que nada mais é do que a expressão em linguagem matemática da característica mais essencial desta interação: sua universalidade. No entanto, apesar desta "geometrização" do campo gravitacional ter se tornado um paradigma da física da gravitação, sendo raras as propostas de teorias alternativas que dispensam uma formulação desta natureza, a geometria que incorpora os aspectos essenciais da estrutura cinemática da Relatividade Geral não exibe a máxima generalidade esperada. Como observado por E. Cartan [15], a torção é uma propriedade "natural" da classe de geometrias que fundamenta estas teorias (geometrias naturais, *i.e.* espaços-fibrados de referenciais equipados com uma conexão linear). Sob esta ótica, o fato da torção ser tomada nula *ab initio* na Relatividade Geral (e também em teorias modificadas) passa a requerer uma justificativa. Estas ideias culminaram com a formulação da teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) da gravitação (Sciama [16, 17], Kibble [18], *cf.* Trautman [19], Hehl *et al.* [20, 21]), cuja estrutura cinemática é definida sobre um espaço-tempo com torção, o espaço-tempo de Riemann-Cartan, e outras teorias alternativas que recuperam a torção (*c.f.* Aldrovandi & Pereira [22], Arcos, Andrade & Pereira [23], Arcos & Pereira [24, 25], Blagojević [26, 27]). Nem as curvas extremais, nem as curvas geodésicas têm status privilegiado nas teorias com torção, e a presença desta impõe modificações importantes à estrutura cinemática destas teorias em relação à cinemática da Relatividade Geral, visto que seus efeitos se manifestam nas identidades de Bianchi, na equação do desvio geodésico, *etc.* Na teoria ECSK, em particular, na qual a estrutura dinâmica é definida pela ação de Einstein-Cartan, o análogo da ação de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral para um espaço-tempo com torção, a corrente de spin é a fonte de uma torção não propagante cujos efeitos estão confinados ao interior da matéria. Como nenhum efeito macroscópico de qualquer tipo está associado à torção na teoria ECSK, esta não pode oferecer uma solução para o problema da energia escura.

Neste trabalho, será estudada uma modificação "mínima" da Relatividade Geral na qual a estrutura cinemática é definida em um espaço-tempo de Riemann-Cartan cuja torção tem seu número de graus de liberdade reduzido (espaço-tempo de Riemann-Cartan restrito), e a estrutura dinâmica é definida apartir de uma modificação da ação de Einstein-Cartan da teoria ECSK. A estrutura cinemática da presente formulação ainda difere da cinemática da teoria ECSK em outro ponto crucial: é postulado que as partículas teste e observadores inercias são representados exclusivamente por curvas do tipo tempo extremais no espaço-tempo de Riemann-Cartan. Como as curvas extremais de um espaço-tempo métrico-afim são descritas por uma equação que envolve apenas a conexão riemanniana, na presente formulação os observadores inercias são associados às curvas geodésicas do tipo tempo no espaço-tempo riemanniano associado. A estrutura cinemática da teoria, do ponto de vista do espaço-tempo riemanniano, é idêntica à da Relatividade Geral, e a torção pode ser tratada como fonte adicional da curvatura riemanniana pura. Seguindo Novello & Trajtenberg, a redução do número de graus de liberdade da torção de 24 para 20 permite decompor a torção em dois campos de spin-2 sem massa e com energias de sinais opostos que se propagam no espaço-tempo riemanniano associado. Para tanto, aqueles autores empregaram uma descrição para campos de spin-2 alternativa à formulada por Fierz & Pauli, na qual, no caso em que estes campos não interagem nem entre si, nem com outros campos de matéria (exceto pela interação gravitacional), pode ser imediatamente estendida aos espaços-tempos curvos de forma consistente. A ação para estes campos de spin-2 "estéreis" é finalmente generalizada pela inclusão de potenciais de auto-interação.

Esta tese está organizada da seguinte forma. Na Seção II serão revisados aspectos elementares de geometrias, espaços-tempos, Relatividade Geral e, em especial, da Cosmologia Padrão e do problema da energia escura. Na Seção III serão revisadas a teoria de Fierz-Pauli para campos de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski, tanto no formalismo original, quanto no chamado "formalismo de Fierz", bem como a descrição de campos de spin-2 em espaço-tempo curvo baseada neste formalismo. Na Seção IV, será discutida a teoria modificada da Relatividade Geral definida em um espaço-tempo de Riemann-Cartan cuja torção tem seu número de graus de liberdade reduzido (espaço-tempo de Riemann-Cartan restrito), e com cinemática einsteiniana no espaço-tempo riemanniano associado. Finalmente, será investigado o modelo cosmológico espacialmente homogêneo e isotrópico que resulta da inclusão no setor escuro destes campos de spin-2 estéreis associados à torção e cujos potenciais de auto-interação são dados pelo único potencial conservativo admissível.

II. PRELIMINARES: GEOMETRIA, GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA

Com o objetivo de fixar a linguagem, notação e convenções, nesta seção será feito um breve apanhado dos elementos de geometria, gravitação e cosmologia. Esta revisão, no entanto, tem dois objetivos principais. O primeiro é lembrar ao leitor que a torção surge naturalmente na estrutura básica das teorias geométricas da gravitação. Para tanto, no espírito dos trabalho originais de Cartan (nos quais estas idéias já aparecem "em germe"), será evocada a teoria de conexões no espaço fibrado de referenciais e seus fibrados tensoriais associados, teoria esta que não será revisada aqui. O segundo objetivo principal desta revisão é apontar para os problemas que acometem os cenários cosmológicos fundamentados pela teoria da Relatividade Geral, problemas estes que serão o objeto desta investigação. Na Subseção II A serão revisadas as definições de geometrias e objetos goemétricos em geral, e os casos particulares de interesse para a física da gravitação singularizados. Na Subseção II B serão revisados o conceito de espaço-tempo e os elementos da teoria da Relatividade Geral. Asseguir, na Subseção II C será fornecida uma visão "panorâmica" da Cosmolgia Padrão e do problema da energia escura. Finalmente, na Subseção II D serão revisados os aspectos elementares dos modelos de energia escura dinâmica. Será assumida a familiaridade do leitor com geometria diferencial, cálculo variacional e teorias clássicas de campos.

A. Geometrias Naturais

Seguindo Kobayashi & Nomizu [28], uma geometria natural pode ser definida a partir de um espaço fibrado de referenciais sobre uma variedade C^k-diferenciável $\mathcal{M}^4$ (como estamos interessados exclusivamente na caracterização do espaço-tempo, *cf.* Subseção II B, vamos nos restringir ao caso de dimensão $n = 4$ e $k > 0$), definido como o conjunto de todos os referenciais (ou bases ordenadas de vetores) $e(x) = (e_a(x)) \equiv (e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x))$ sobre todos os pontos x de $\mathcal{M}^4$, sendo cada referencial $e(x)$ definido no espaço tangente à variedade base $\mathcal{M}^4$ no ponto x, *i.e.* cada vetor é um operador diferencial que atua sobre o espaço das funções sobre $\mathcal{M}$. O espaço fibrado é ainda equipado com uma projeção $\pi : e(x) \mapsto x$ tal que, para toda vizinhança $\mathcal{O}$ de $\mathcal{M}$, a imagem inversa da vizinhança pela projeção $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ é difeomórfica ao espaço produto $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^4$ (trivialidade local). Os elementos pertencentes ao conjunto de todos os referenciais sobre um ponto x (a fibra sobre o ponto) estão relacionados pelas transformações (mudanças de referencial no ponto x)[1]

$$e_b(x) \mapsto \lambda^a{}_b(x) e_a(x) \,, \tag{1}$$

$a, b = 0, 1, 2, 3$, onde $(\lambda^a{}_b(x))$ são as matrizes 4×4 invertíveis pertencem ao grupo $GL(4, \mathbb{R})$ (grupo estrutural do espaço fibrado de referenciais). O corte local $e : x \mapsto e(x)$ associa a cada ponto x pertencente à vizinhança $\mathcal{O}$ um referencial $e(x)$ e define um campo local de referenciais $e = (e_a)$ sobre a vizinhança. A mudança de campo local de referenciais sobre a intersecção de duas vizinhanças é determinada pelas funções de transição $\lambda^a{}_b : x \mapsto \lambda^a{}_b(x)$. De forma equivalente, o espaço fibrado de correferenciais sobre $\mathcal{M}^4$ possui o mesmo grupo estrutural $GL(4, \mathbb{R})$ e permite definir campos locais de correferenciais $e^* = (\theta^a)$, sendo θ^a as 1-formas duais aos vetores e_a (*i.e.* $e_b(\theta^a) = \delta^a{}_b$, sendo $\delta^a{}_b$ o delta de Kronecker), que transformam-se conforme a relação inversa

$$\theta^b(x) \mapsto \overset{-1}{\lambda}{}_a{}^b(x) \theta^a(x) \,. \tag{2}$$

Para a física da gravitação é suficiente tratar dos espaços fibrados tensoriais associados ao espaço fibrado de referenciais através das representações tensoriais do grupo estrutural

---

[1] Como de costume, ao longo do texto será sempre empregada a convenção de Einstein, *viz.* $X_a Y^a \equiv \sum_a X_a Y^a$.

$GL(4,\mathbb{R})$ (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28]). As fibras, neste caso, são os espaços tensoriais lineares nos quais a representação atua, e seus cortes locais definem campos tensoriais locais. Os objetos geométricos podem ser definidos como campos locais de p-formas com valores (r,s)-tensoriais, com a seguinte expressão local (*cf.* Cartan [29], Trautman [30])

$$X = e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \theta^{b_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{b_s} \varotimes X^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s}\,, \tag{3a}$$

$$X^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s} = \frac{1}{p!} X^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s c_1 \cdots c_p} \theta^{c_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_p}\,, \tag{3b}$$

onde $\otimes$ e $\varotimes$ são produtos tensoriais e $\wedge$ o produto tensorial antissimetrizado (produto exterior). O produto tensorial $\varotimes$ foi introduzido para dar ênfase à separação entre o setor (r,s)-tensorial (externo) e o setor p-forma (interno) de um objeto geométrico (estes setores podem, inclusive, ser expressos em termos de bases distintas de referenciais e correferenciais). Neste formalismo, é evidente a diferença fundamental que há entre uma 1-forma com valores escalares, $1 \varotimes f = 1 \varotimes f_a \theta^a$, e uma 0-forma com valores $(0,1)$-tensoriais, $f \varotimes 1 = \theta^a \varotimes f_a$, onde f_a são funções escalares.

Para que constitua uma geometria, o espaço fibrado de referenciais deve ser equipado com uma estrutura conectiva (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28], Trautman [30]), definida por um campo de 1-formas com valores $(1,1)$-tensoriais (*cf.* Choquet-Bruhat *et al.* [31])

$$e_a \otimes \theta^b \varotimes \omega^a{}_b\,, \tag{4}$$

tal que, frente a uma mudança de referencial, as formas de conexão $\omega^a{}_b$ transformam-se de acordo com a regra

$$\omega^a{}_b(x) \longmapsto \overset{-1}{\lambda}{}_c{}^a(x)\omega^c{}_d(x)\lambda^d{}_b(x) + \overset{-1}{\lambda}{}_c{}^a(x) d\lambda^c{}_b(x)\,. \tag{5}$$

A estrutura conectiva permite definir uma derivada (exterior) covariante associada D, cuja aplicação sobre uma p-forma com valores (r,s)-tensoriais qualquer produz uma $(p+1)$-forma com valores (r,s)-tensoriais com a expressão local

$$DX = e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \theta^{b_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{b_s} \varotimes DX^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s}\,, \tag{6a}$$

$$DX^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s} \equiv dX^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s} + \sum_{1 \leq k \leq r} \omega^{a_k}{}_q \wedge X^{a_1 \cdots a_{k-1} q a_{k+1} \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_s} - \sum_{1 \leq k \leq s} \omega^q{}_{b_k} \wedge X^{a_1 \cdots a_r}{}_{b_1 \cdots b_{k-1} q b_{k+1} \cdots b_s}\,, \tag{6b}$$

onde a derivada exterior ordinária da p-forma é definida como segue

$$
\begin{aligned}
dX^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} \equiv\ & \frac{1}{p!}\partial_q X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s c_1\cdots c_p}\theta^q\wedge\theta^{c_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_p} \\
& -\frac{1}{p!}\sum_{1\le k\le p}\frac{(-1)^{k-1}}{2}C^{c_k}{}_{ql}X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s c_1\cdots c_k\cdots c_p}\theta^{c_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_{k-1}}\wedge\theta^q\wedge\theta^l\wedge\theta^{c_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_p}\,,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

sendo ∂_a as derivadas de Pfaff, $\partial_a f \equiv e_a(f)$, e os termos sob o somatório são decorrentes da equação de estrutura de Maurer-Cartan (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28])

$$
d\theta^a = -\frac{1}{2}C^a{}_{bc}\,\theta^b\wedge\theta^c\,. \tag{8}
$$

Na expressão acima, os coeficientes de não holonomia $C^a{}_{bc}$ associam a cada ponto x da vizinhança as constantes de estrutura $C^a{}_{bc}(x)$ da álgebra de Lie do grupo estrutural $GL(4,\mathbb{R})$ com respeito àquela base, como explicitado pela relação dual à (8)

$$
\left[e_b, e_c\right] = C^a{}_{bc}e_a\,, \tag{9}
$$

onde, para uma função (escalar) $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ qualquer, $\left[e_b,e_c\right](f)\equiv\partial_b\partial_c f-\partial_c\partial_b f$ é o colchete de Lie. Em muitas situações será conveniente expressar os objetos geométricos em termos do campo de referenciais naturais (campo de referenciais holonômicos, ou de coordenadas), cujos elementos satisfazem as relações de comutação (letras gregas $\alpha = 0,1,2,3$ serão reservadas aos índices associados ao campo de referenciais naturais)

$$
\left[\partial_\alpha,\partial_\beta\right] = 0\,, \tag{10}
$$

(*i.e.* $C^\sigma{}_{\alpha\beta}\equiv 0$). Neste caso, existem funções locais $x^\alpha:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ (sistema de coordenadas cartesianas local) em termos das quais os elementos do correferencial (θ^α), dual do referencial (∂_α), têm a forma $\theta^\alpha = dx^\alpha$ ($d\theta^\alpha = 0$), e a derivada de Pfaff coincide com a derivada parcial ordinária $\partial_\alpha f\equiv\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

Ao contrário do que ocorre nas geometrias internas das teorias de calibre, nas quais os espaços-fibra associados (espaços internos) são espaços vetoriais sem relação com a variedade base, nas geometrias naturais, ou "soldadas", os espaços-fibra vetoriais associados ao grupo $GL(4,\mathbb{R})$ e a estrutura tangente da variedade base $\mathcal{M}^4$ coincidem. Este fato é encapsulado pela existência de uma 1-forma com valores vetorias "natural" (canônica), definida como segue (Cartan [15], *cf.* Kobayashi & Nomizu [28], Trautman [30], Choquet-Bruhat *et al.* [31]) (forma de soldagem)

$$\theta \equiv e_a \otimes \theta^a \,. \tag{11}$$

Fazendo uso da relação entre os elementos do referencial e as formas de conexão (consequência direta da definição de derivada covariante e da identificação $e_b \equiv e_a \otimes \delta^a{}_b$)

$$e_a \otimes \omega^a{}_b = De_b \,, \tag{12}$$

os objetos geométricos fundamentais, *viz.* campos de referenciais e conexão, permitem definir, de modo natural, as formas de curvatura e torção associadas à estrutura conectiva pela primeira e segunda equações de estrutura de Cartan, respectivamente

$$e_a \otimes \Omega^a{}_b = D(De_b) \,, \tag{13a}$$

$$e_a \otimes \Theta^a = D\theta \,. \tag{13b}$$

Empregando a definição (6), estas podem ainda ser escritas na seguinte forma explícita (Cartan [29, 32–34], *cf.* Kobayashi & Nomizu [28])

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \,, \tag{14a}$$

$$\Theta^a = d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b \,. \tag{14b}$$

Nota-se que, sendo a segunda equação de estrutura consequência da existência de uma forma de soldagem, apenas os espaços fibrados lineares (*i.e.* geometrias naturais) exibem torção.

Seguindo as convenções adotadas por Novello [35] e Choquet-Bruhat *et al.* [31], os coeficientes da conexão, tensor de curvatura e tensor de torção são definidos, respectivamente, como segue

$$\omega^a{}_b \equiv \Gamma^a{}_{sb}\,\theta^s \,, \tag{15a}$$

$$\Omega^a{}_b \equiv -\frac{1}{2} R^a{}_{brs}\,\theta^r \wedge \theta^s \,, \tag{15b}$$

$$\Theta^a \equiv \frac{1}{2} S^a{}_{rs}\,\theta^r \wedge \theta^s \,. \tag{15c}$$

Em termos destas definições (15a)-(15c), e fazendo uso da definição (7), as equações de estrutura de Cartan (14a) e (14b) podem ser reescritas na forma

$$R^a{}_{brs} = \partial_s \Gamma^a{}_{rb} - \partial_r \Gamma^a{}_{sb} + \Gamma^a{}_{sl}\Gamma^l{}_{rb} - \Gamma^a{}_{rl}\Gamma^l{}_{sb} + \Gamma^a{}_{lb}C^l{}_{rs}\,, \tag{16a}$$

$$S^a{}_{rs} = \Gamma^a{}_{rs} - \Gamma^a{}_{sr} - C^a{}_{rs}\,. \tag{16b}$$

Em particular, as componentes da derivada covariante de uma 0-forma com valores (r,s)-tensoriais podem ser expressas como segue

$$D_c X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} \equiv \partial_c X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} + \sum_{1\le k\le r} \Gamma^{a_k}{}_{cq} X^{a_1\cdots a_{k-1}qa_{k+1}\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} - \sum_{1\le k\le s} \Gamma^q{}_{cb_k} X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_{k-1}qb_{k+1}\cdots b_s}\,. \tag{17}$$

Convém observar, de passagem, que as identidades de Bianchi na presença de torção diferem das mesmas em uma geometria com torção nula. De fato, tomando-se a derivada exterior covariante das equações de estrutura de Cartan (14a) e (14b), e utilizando as definições (15a)-(15c), pode-se obter as seguintes expressões em componentes para as identidades de Bianchi na presença da torção (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28], Choquet-Bruhat *et al.* [31])

$$D_p R^a{}_{bqr} + D_q R^a{}_{brp} + D_r R^a{}_{bpq} = S^c{}_{pq} R^a{}_{brc} + S^c{}_{qr} R^a{}_{bpc} + S^c{}_{rp} R^a{}_{qbc}\,, \tag{18a}$$

$$R^a{}_{pqr} + R^a{}_{qrp} + R^a{}_{rpq} = D_p S^a{}_{qr} + D_q S^a{}_{rp} + D_r S^a{}_{pq} + S^a{}_{cp} S^c{}_{qr} + S^a{}_{cq} S^c{}_{rp} + S^a{}_{cr} S^c{}_{pq}\,. \tag{18b}$$

Além da estrutura conectiva, assume-se que o espaço fibrado de referenciais esteja equipado com uma (estrutura) métrica, *i.e.* uma 0-forma com valores $(0,2)$-tensoriais

$$g = ds^2 \otimes 1 = \theta^a \otimes \theta^b \otimes g_{ab}\,, \tag{19}$$

tal que o tensor métrico ds^2 é simétrico e não-degenerado $(det(g_{ab}) \neq 0)$. Em uma geometria métrico-afim, *i.e.* equipada com uma estrutura conectiva e também com uma estrutura métrica, os coeficientes da conexão, definidos na equação (15a), admitem a decomposição (*cf.* Schouten [36], Eisenhart [37], Hehl *et al.* [20, 21])

$$\Gamma^a{}_{sb} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^a{}_{sb} + K^a{}_{sb} + Q^a{}_{sb}\,, \tag{20}$$

onde foram definidos os coeficientes da conexão riemanniana pura (coeficientes de rotação de Ricci, quando escritos em termos de um referencial ortonormal)

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{a}{}_{sb} \equiv \frac{1}{2}\Big[g^{ar}\big(\partial_s g_{br} + \partial_b g_{rs} - \partial_r g_{sb}\big) + g^{ar}\big(C^{l}{}_{rb}g_{ls} + C^{l}{}_{rs}g_{lb} + C^{l}{}_{bs}g_{rl}\big)\Big]\,, \tag{21}$$

as componentes do tensor de contorção

$$K^{a}{}_{sb} \equiv \frac{1}{2}g^{ar}\big(S^{l}{}_{rb}g_{ls} + S^{l}{}_{rs}g_{lb} + S^{l}{}_{sb}g_{lr}\big)\,, \tag{22}$$

e as componentes do tensor de não metricidade

$$Q^{a}{}_{sb} \equiv -\frac{1}{2}g^{ar}\big(D_s g_{br} + D_b g_{rs} - D_r g_{sb}\big)\,. \tag{23}$$

A geometria de Riemann-Cartan é o caso particular em que a métrica está sujeita à condição de compatibilidade com a estrutura conectiva (Cartan [29, 32–34], *cf.* Trautman [30], Hehl *et al.* [20, 21])

$$D_c g_{ab} = 0\,. \tag{24}$$

A geometria de Riemann, por sua vez, é o caso ainda mais particular em que ambas as condições de compatibilidade (24) e torção nula ($S^{a}{}_{bc} = 0$) são válidas. Neste último caso, escrevendo os coeficientes da conexão riemanniana pura em termos do referencial natural (símbolos de Christoffel), as fórmulas (16a), (16b), (18a) e (18b) recuperam, naquele referencial, as fórmulas clássicas da geometria riemanniana (*cf.* Eisenhart [38], Kobayashi & Nomizu [28], Do Carmo [39]).

Em termos da decomposição (20) a expressão da curvatura, na geometria de Riemann-Cartan, pode ser reescrita na seguinte forma

$$R^{a}{}_{brs} = \overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{brs} + \overset{\circ}{D}_s K^{a}{}_{rb} - \overset{\circ}{D}_r K^{a}{}_{sb} + K^{a}{}_{sc}K^{c}{}_{rb} - K^{a}{}_{rc}K^{c}{}_{sb}\,, \tag{25}$$

onde $\overset{\circ}{D}$ é a derivada covariante riemanniana definida pela conexão riemanniana pura e $\overset{\circ}{R}_{abcd}$ são as componentes da curvatura de Riemann associada. Tomando-se o traço seguido da contração da expressão (25), obtém-se que o escalar de curvatura $R \equiv g^{rs}R^{a}{}_{ras}$ admite a seguinte decomposição

$$R = \overset{\circ}{R} + K^{ab}{}_{c}K^{c}{}_{ab} - K^{a}{}_{ac}K^{cb}{}_{b} + \overset{\circ}{D}{}^{b}K^{a}{}_{ab} - \overset{\circ}{D}_a K^{ab}{}_{b}\,, \tag{26}$$

onde $\overset{\circ}{R}$ é o escalar de curvatura riemanniano (escalar de Ricci). Nota-se que na geometria de Riemann-Cartan, os coeficientes da conexão e a curvatura média $R_{ab} \equiv R^{a}{}_{ras}$ não possuem, em geral, simetria definida, como ocorre com seus análogos riemannianos (conexão riemanniana e tensor de Ricci).

B. Espaço-Tempo e Gravitação

Espaço-Tempo

O conceito de espaço-tempo é a base das teorias geométricas da gravitação, sendo a "arena" onde todos os processos físicos têm lugar. A exata estrutura geométrica do espaço-tempo, no entanto, varia conforme a teoria e seus princípios fundamentais. Não obstante, certos princípios, tais como o princípio de causalidade e o princípio de equivalência, são essenciais para a estrutura cinemática de qualquer teoria geométrica (clássica) da gravitação.

Um espaço-tempo pode ser definido como uma variedade com estrutura geométrica métrico-afim, *i.e.* um espaço fibrado de referenciais com variedade base $\mathcal{M}^4$ (dotada das propriedades topológicas e de orientabilidade usuais), equipado com uma estrutura conectiva e com uma métrica. A estrutura causal do espaço-tempo é especificada por uma métrica de assinatura $(+---)$ (*cf.* Lichnerowicz [40], Trautman [19, 30, 41, 42], Hehl *et al.* [20, 21]), *i.e.*, em toda vizinhança $\mathcal{O}$ de $\mathcal{M}^4$ existe um campo local de referenciais $(e_{(a)}) = (e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)})$ e o campo de correferenciais correspondente $(\theta^{(a)}) = (\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)})$, em termos do qual o tensor métrico pode ser escrito localmente na forma (campos de referenciais e correferenciais ortonormais)

$$ds^2 = \eta_{(a)(b)}\, \theta^{(a)} \otimes \theta^{(b)}\,, \tag{27}$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ são as componentes da matriz com a forma diagonal

$$(\eta_{(a)(b)}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

É assumido ainda que todo espaço-tempo é tempo-orientável (*cf.* Lichnerowicz [40], Choquet-Bruhat *et al.* [31]), *i.e.* os campos locais de referenciais podem ser escolhidos de tal forma que $g(e_{(0)}, e_{(0)}) > 0$. Fixadas uma orientação e uma orientação temporal, a geometria resultante tem a simetria $GL(4,\mathbb{R})$ reduzida à simetria de Lorentz restrita $SO_+(1,3) \subset GL(4,\mathbb{R})$, que consiste no conjunto das transformações cujas matrizes satisfazem $\lambda^{(c)}_{\ (a)}\eta_{(c)(d)}\lambda^{(d)}_{\ (b)} = \eta_{(a)(b)}$, $det(\lambda^{(a)}_{\ (b)}) = +1$ e $\lambda^{(0)}_{\ (0)} > 0$ (transformações de Lorentz).

O espaço-fibra sobre um ponto da variedade base, nesta geometria, é o conjunto de todos os referenciais ortonormais espacialmente e temporalmente orientados definidos no ponto, e os cortes locais do espaço fibrado definem campos de referenciais de Lorentz (campo de tetradas, ou *vierbeins*). Os campos de correferenciais de Lorentz (cotetradas) permitem, neste caso, definir uma forma volume

$$\eta \equiv \theta^{(0)} \wedge \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} = \frac{1}{4!}\eta_{abcd}\, \theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d = \sqrt{-|g|}\, d^4x \tag{29}$$

em todo o espaço-tempo (*cf.* Lichnerowicz [40]), onde $|g| \equiv det(g_{\mu\nu})$, $d^4x \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. O dual (de Hodge) de uma p-forma com valores (r,s)-tensoriais $(0 \leq p \leq 4)$ é uma $(4-p)$-forna com valores (r,s)-tensoriais, cujas componentes são definidas pela expressão

$$(*X)^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s c_{p+1}\cdots c_4} = \frac{1}{p!}\eta_{c_1\cdots c_4} X^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s}{}^{c_1\cdots c_p}\,, \tag{30}$$

i.e. o operador $*$ atua apenas no setor p-forma de um objeto geométrico. Por fim, para que campos fermiônicos possam ser definidos no espaço-tempo, este deve ser equipado com uma estrutura spinorial (Geroch [43, 44], *cf.* Penrose [45], De Felice & Clarke [46], Wald [47]).

Em todas as teorias geométricas da gravitação, as histórias das partículas materiais são representadas por curvas espaço-temporais $t \mapsto \gamma_V(t)$ causais, *i.e.* cujo campo de vetores tangente à curva satisfaz $g(V,V) = g_{ab}V^aV^b \geqslant 0$ (linhas de mundo), sendo as partículas massivas, em particular, descritas por curvas do tipo tempo $g(V,V) > 0$. Em um espaço-tempo métrico-afim arbitrário, existem duas classes de curvas do tipo tempo que podem, em princípio, ser empregadas para representar as linhas de mundo das partículas e observadores inerciais (*i.e.* livres de interações não-gravitacionais).

A primeira classe é a das curvas geodésica, definidas pela equação

$$V^aD_aV^b = V^a\partial_aV^b + \Gamma^b{}_{ac}V^aV^c = 0\,. \tag{31}$$

Observadores inerciais locais, neste caso, são representados por feixes "estreitos" de curvas geodésicas do tipo tempo, cada feixe sendo equipado com um campo de referenciais de Lorentz tal que $V = e_{(0)}$ (campo de referenciais inerciais), em componentes

$$V^{(a)} = \delta^{(a)}_{(0)}\,, \tag{32}$$

onde V é o campo de vetores tangente às curvas do feixe. Consequentemente, medidas feitas por observadores inerciais locais diferentes são relacionadas por transformações locais de Lorentz, e cada observador define sua própria folheação espacial local, $d\theta^{(0)} = 0$ (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28]). Para os observadores inerciais definidos em termos destas curvas, as leis (não gravitacionais) da física assumem, em um ponto qualquer do espaço-tempo, a mesma forma que exibem na teoria da Relatividade Especial (Princípio da Equivalência). De fato, como é bem conhecido, para todo ponto x de uma variedade dotada de estruturas métrica e conectiva, existe uma vizinhança $\mathcal{O}$ de x tal que qualquer ponto y em $\mathcal{O}$ pode ser ligado a x por uma única geodésica (vizinhança normal). Neste caso, supondo que o tubo que contém o feixe de curvas geodésicas associado ao observador é uma vizinhança normal, em consequência das expressões (12), (15a) e (27), existe um campo de referenciais inerciais adaptado ao feixe, *i.e.* para o qual (*cf.* Von der Heyde [48], Straumann [49], Do Carmo [39], Hartley [50])

$$g_{(a)(b)}(x) = \eta_{(a)(b)}\,, \tag{33a}$$

$$\Gamma^{(a)}_{\;(b)(c)}(x) = 0\,. \tag{33b}$$

Para estes observadores inerciais, e apenas para estes observadores, o espaço-tempo métrico-afim exibe estrutura "infinitesimal" idêntica à do espaço-tempo de Minkowski. Nota-se que a condição para que um tal referencial exista é que seus coeficientes de não holonomia satisfaçam

$$C^{(a)}_{\;(b)(c)}(x) = -S^{(a)}_{\;(b)(c)}(x) + D^{(a)}g_{(b)(c)}(x)\,. \tag{34}$$

Efeitos gravitacionais são descritos pelo desvio das curvas geodésicas produzido pela curvatura, torção e não-metricidade no feixe associado ao observador, de acordo com a equação do desvio geodésico

$$^{\perp}\!\left(\frac{D}{Dt}\,{}^{\perp}\!\left(\frac{D^{\perp}Z^a}{Dt}\right)\right) = R^a{}_{bcd}V^{b\perp}Z^cV^d + {}^{\perp}\!\left(\frac{D}{Dt}\left(S^a{}_{cd}V^{c\perp}Z^d\right)\right) + {}^{\perp}\!\left({}^{\perp}Z^dV^aV^b\frac{Dg_{bd}}{Dt}\right), \tag{35}$$

onde $D/Dt \equiv V^bD_b$, ${}^{\perp}X^a \equiv (\delta^a{}_b - V^aV_b)X^b$ é a projeção espacial de um campo vetorial e ${}^{\perp}Z^a$ são as componentes do campo que descreve a separação espacial entre duas curvas geodésicas vizinhas no feixe, para um mesmo valor do parâmetro afim t, definido pela condição $[V, {}^{\perp}Z] = (V^a\partial_a{}^{\perp}Z^b - {}^{\perp}Z^a\partial_a V^b)e_b = 0$ (campo conector). De acordo com a equação do desvio geodésico (35), tanto a torção quanto a não-metricidade devem produzir efeitos, em princípio, observáveis[3]. Até o presente momento, no entanto, não se tem notícia de que qualquer fenômeno diretamente associado à torção, ou à não-metricidade, tenham sido jamais observados.

A segunda classe de curvas do tipo tempo que podem ser empregadas para representar partículas e observadores inerciais em um espaço-tempo métrico-afim é a das curvas que extremizam o funcional

$$\ell(\gamma_V) = \int \left(g_{ab}V^aV^b\right)^{1/2} dt\,. \tag{36}$$

Como este funcional depende apenas da métrica, tais "curvas extremais" obedecem uma equação diferencial que envolve apenas a parte riemanniana dos coeficientes da conexão

$$V^a\overset{\circ}{D}_aV^b = V^a\partial_aV^b + \overset{\circ}{\Gamma}{}^b{}_{ac}V^aV^c = 0\,. \tag{37}$$

Estas curvas, no entanto, não são geodésicas de um espaço-tempo métrico-afim, *i.e.* os observadores descritos por tais curvas experimentam "forças fictícias" oriundas da contorção e da não-metricidade

$$V^aD_aV^b = K^b{}_{ac}V^aV^c + Q^b{}_{ac}V^aV^c\,. \tag{38}$$

Consequentemente, não é possível adaptar um campo de referenciais inerciais ao feixe de curvas, e o Princípio da Equivalência deixa de ter validade para estes observadores.

Relatividade Geral

Na base da estrutura cinemática da teoria da Relatividade Geral está a escolha de um espaço-tempo com estrutura geométrica riemanniana[2]. Do ponto de vista da formulação geral de uma geometria (*cf.* Subseção II A), no entanto, a estrutura riemanniana consiste em uma restrição de um espaço-tempo métrico-afim. Partindo de uma geometria com máxima generalidade, portanto, a Relatividade Geral deve postular, além da condição de

[2] Ver ainda Ehlers, Pirani & Schild [51] para uma discussão aprofundada sobre a estrutura axiomática das teorias geométricas da Gravitação.

compatibilidade (24) entre a métrica e a estrutura conectiva (Postulado da Metricidade)

$$\overset{\circ}{D}_a g_{bc} = 0\,, \tag{39}$$

postulado assumido em quase todas as teorias geométricas da gravitação[3], e também a condição de torção nula (Postulado da Torção Nula)

$$\Theta^a = 0 \quad (S^a{}_{bc} = 0)\,. \tag{40}$$

Curvas geodésicas e extremais coincidem na geometria de Riemann e, consequentemente, partículas e observadores inerciais devem ser representados por curvas geodésicas do tipo tempo em um espaço-tempo riemanniano (Postulado das Geodésicas)

$$V^a \overset{\circ}{D}_a V^b = 0\,. \tag{41}$$

De acordo com a equação do desvio geodésico (35), os efeitos gravitacionais, neste caso, são determinados exclusivamente pela curvatura riemanniana (ou, equivalentemente, pela métrica, já que neste caso, e apenas neste caso, há uma relação biunívoca entre a curvatura e a métrica).

A estrutura dinâmica da teoria da Relatividade Geral pode ser formulada através do princípio variacional definido pela ação de Einstein-Hilbert (Hilbert [56])

$$\mathcal{S}_{Grav} = \frac{1}{2\kappa} \int \overset{\circ}{R}\, \eta\,, \tag{42}$$

onde $\kappa = 8\pi G$ é a constante gravitacional de Einstein (sendo G a constante gravitacional de Newton), $\overset{\circ}{R}$ é o escalar de Ricci, e, como será sempre feito deste ponto em diante, foi adotado o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$. A solução do problema variacional $\delta[\mathcal{S}_{Grav} + \mathcal{S}_{Mat}] = 0$ com respeito à métrica, onde $\delta[\,\cdot\,]$ é a derivada funcional de Euler-Lagrange[4] e $\mathcal{S}_{Mat}$ uma ação para a matéria, produz as equações de campo da Relatividade Geral (equações de Einstein [57, 58])

$$\overset{\circ}{R}_{ab} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{R} g_{ab} = -\kappa T_{ab}\,, \tag{43}$$

---

[3] *cf.* Weyl [52], Novello & Heintzmann [53], Novello *et al.* [54], Poulis & Salim [55] e, novamente, Hehl *et al.* [20, 21] para visões alternativas.

[4] *cf.* Choquet-Bruhat *et al.* [31].

sendo T_{ab} são as componentes do tensor momentum-energia associado aos campos de matéria

$$\delta[\mathcal{S}_{Mat}] \equiv \frac{1}{2}\int T_{ab}\,\delta g^{ab}\,\eta\,.$$

Este quadro é completado pelo Postulado de Covariância Geral, que impõe a invariância das equações de campo frente às transformações pertencentes ao grupo de difeomorfismos do espaço-tempo $Diff(\mathcal{M}^4) \simeq Diff(4,\mathbb{R}) \supset GL(4,\mathbb{R}) \supset SO_+(1,3)$, *i.e.* as equações de campo (43) são válidas em qualquer referencial. Em consequência das equações de campo (43) e das identidades de Bianchi (18a) e (18b) (para torção nula), o tensor momentum-energia satisfaz automaticamente a lei de conservação

$$\overset{\circ}{D}{}^a T_{ab} = 0\,. \tag{44}$$

O limite de campo fraco da teoria pode ser obtido introduzindo o sistema de coordenadas normais, ou gaussianas (*cf.* Kobayashi & Nomizu [28]), definidas pelo único campo local de referenciais inerciais naturais (ou holonômicos) adaptado a um feixe de curvas geodésicas do tipo tempo contido em uma vizinhança normal de um espaço-tempo com estrutura geométrica riemanniana (*cf.* eq. (34))

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}\,, \tag{45a}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) = 0\,. \tag{45b}$$

Em um ponto y arbitrário de uma vizinhança normal centrada em x , as componentes da métrica e os coeficientes da conexão admitem, se o campo gravitacional for suficientemente fraco na vizinhança[5], a seguinte expansão (Petrov [60])

$$g_{\alpha\beta}(y) = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 h_{\alpha\beta}(x) + O(\varepsilon^3)\,, \tag{46a}$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\rho\sigma}(y) = 0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\eta^{\alpha\lambda}\Big[\partial_\rho h_{\sigma\lambda}(x) + \partial_\sigma h_{\lambda\rho}(x) - \partial_\lambda h_{\sigma\rho}(x)\Big] + O(\varepsilon^3)\,. \tag{46b}$$

[5] Sendo γ_V a geodésica que une $x = \gamma_V(0)$ e $y = \gamma_V(\varepsilon)$, a métrica admite a expansão (*cf.* Ehlers [59])

$$g_{\alpha\beta}(y) = \eta_{\alpha\beta} - \varepsilon^2\frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\rho\beta\sigma}(x)V^\rho(x)V^\sigma(x) + O(\varepsilon^3)\,.$$

Combinando estas expansões com a expressão (16a) para obter a expansão local para o tensor de curvatura de Riemann em torno do ponto x, e utilizando esta última para obter as correspondentes expansões locais para o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, após reunir todos os resultados, pode-se obter a seguinte expansão para o lado esquerdo das equações de Einstein

$$\mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\Box h_{\alpha\beta} - \partial^\mu\partial_{(\alpha}h_{\beta)\mu} + \partial_\alpha\partial_\beta h - \big(\Box h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\big)\eta_{\alpha\beta}\Big] + O(\varepsilon^3)\,, \tag{47}$$

onde $h \equiv \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Sendo $\kappa T_{\alpha\beta} = \kappa\varepsilon^{2\,(0)}T_{\alpha\beta} + O(\varepsilon^3)$, onde ${}^{(0)}T_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor momentum-energia associado exclusivamente aos processos não-gravitacionais, as equações de Einstein (43) podem ser escritas, em segunda ordem em ε, na seguinte forma[6]

$$\Box h_{\alpha\beta} - \partial^\mu\partial_{(\alpha}h_{\beta)\mu} + \partial_\alpha\partial_\beta h - \big(\Box h - \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu}\big)\eta_{\alpha\beta} = -2\kappa\,{}^{(0)}T_{\alpha\beta}\,. \tag{48}$$

Convém observar que nesta aproximação linear da Relatividade Geral, a energia gravitacional associada ao próprio campo gravitacional não é incorporada pelo tensor momentum-energia de mais baixa ordem ${}^{(0)}T_{\alpha\beta}$. Como as equações (48) são invariantes frente às transformações

$$h_{\alpha\beta} \longmapsto h_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha}\xi_{\beta)}\,, \tag{49}$$

é possível impor "condições de calibre" apropriadas (*cf.* Papapetrou [61], De Felice & Clarke [46], Wald [47]), em termos das quais as equações de Einstein linearizadas (48) podem ser escritas, equivalentemente, na forma do sistema

$$\Box h_{\alpha\beta} = -2\kappa\left({}^{(0)}T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}{}^{(0)}T\eta_{\alpha\beta}\right)\,, \tag{50a}$$

$$\partial^\alpha\left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h\right) = 0\,. \tag{50b}$$

A gravitação newtoniana é recuperada no limite não relativístico de um campo associado a um sistema de matéria localizada, cuja fonte é descrita pelo tensor momentum-energia ${}^{(0)}T_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}_B\,\delta^0{}_\alpha\delta^0{}_\beta$, sendo $\tilde{\rho}_B = \tilde{\rho}_B(x^i)$ a densidade de matéria bariônica no sistema, e o tensor momentum-energia é expresso em termos de um referencial representando um observador inercial gravitacionalmente ligado ao sistema. Neste limite, $4\tilde{\phi}_N(x^i) \equiv h_{00}(x^i) - h(x^i)/2$

---

[6] Ao longo do texto serão empregadas as abreviações $X_{(ab)} \equiv X_{ab} + X_{ba}$ e $X_{[ab]} \equiv X_{ab} - X_{ba}$.

satisfaz a equação de Poisson

$$\triangle\tilde{\phi}_N = 4\pi G\tilde{\rho}_B\,, \tag{51}$$

onde $\triangle \equiv \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ é o operador de Laplace e $\tilde{\phi}_N$ o potencial newtoniano.

C. Cosmologia Padrão e Energia Escura

Desde as primeiras observações de natureza cosmológica, realizadas na primeira metade do século XX, tem se acumulado um grande corpo de evidências em favor de um modelo cosmológico fundamentado pela teoria da Relatividade Geral e que assume uma distribuição de matéria-energia espacialmente homogênea e isotrópica como uma boa aproximação para a distribuição de matéria-energia no Universo em grande escala de distância ($> 10^9$ anos-luz).

O espaço-tempo compatível com uma distribuição espacialmente homogênea e isotrópica de matéria-energia é descrito pela (estrutura) métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que escrita em termos de um sistema de coordenadas inerciais global exibe a seguinte forma (Friedman [62, 63], Lemaître [64, 65] Robertson [66], Walker [67], *cf.* Novello [35], Peebles [68])

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-\epsilon r^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\phi^2\right) , \tag{52}$$

onde $A(t)$ é o fator de escala, (r, ϑ, ϕ) são coordenadas espaciais esféricas, foi adotada a notação $dt^2 \equiv dt \otimes dt$, *etc.*, e

$$\epsilon = -1\,,\ \epsilon = 0\,,\ \text{e}\ \epsilon = +1$$

definem, respectivamente, as seções espaciais fechada, plana (euclidiana) e aberta. Neste espaço-tempo, é possível introduzir um feixe global de geodésicas do tipo tempo representado as linhas de mundo dos aglomerados de galáxias e equipado com um correferencial de Lorentz global associado às coordenadas inerciais

$$\theta^{(0)} = dt\,, \tag{53a}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{A(t)}{\sqrt{1-\epsilon r^2}}\, dr\,, \tag{53b}$$

$$\theta^{(2)} = A(t) r\, d\vartheta\,, \tag{53c}$$

$$\theta^{(3)} = A(t) r \sin\vartheta\, d\phi\,, \tag{53d}$$

o qual define o observador (inercial) cósmico. O espaço-tempo admite uma folheação espacial global ($d\theta^{(0)} = 0$), sendo cada folha espacial homogênea e isotrópica, e o parâmetro t , neste contexto, é um tempo global (tempo cósmico). O fator de escala mede a mudança na escala de distância entre diferentes folhas espaciais. Para que seja compatível com a hipótese de homogeneidade e isotropia espacial em escala cósmica, é assumido que a fonte do campo gravitacional pode ser descrita, nesta escala, por uma mistura de fluídos perfeitos independentes (*i.e.* livres de colisões) representada no referencial do observador cósmico pelo tensor momentum-energia de um fluído perfeito (*cf.* Ehlers [59], Sachs [69])

$$T_{(a)(b)} = \sum_{I} \Big[(\rho_I + p_I) V_{(a)} V_{(b)} - p_I \eta_{(a)(b)} \Big] , \tag{54}$$

onde o campo de velocidades coincide com o campo tangente associado ao observador cósmico, *i.e.* $V_{(a)} = \delta_{(a)}^{(0)}$. As densidades de energia e pressões isotrópicas de cada componente do "fluído cósmico", $\rho_I = \rho_I(t)$ e $p_I = p_I(t)$, respectivamente, dependem apenas do tempo cósmico, e cada componente obedece uma equação de estado $p_I = p_I(\rho_I)$. A soma é feita sobre todas as espécies materiais que compõem o conteúdo material do Universo, *viz.* $I = B$ indica a componente bariônica (prótons, nêutrons e elétrons), $I = R$ indica a radiação (partículas relativísticas livres, em particular neutrinos e fótons) e, além disso, como mencionado na seção anterior, o comportamento local da matéria sugere a existência de uma matéria escura de natureza não bariônica, possivelmente fria, e com importantes efeitos para a formação de estruturas no Universo, indicada pelo índice $I = D$. Além disso, é geralmente assumido que a equação de estado para cada espécie é a equação barotrópica linear

$$p_I = w_I \rho_I , \tag{55}$$

onde w_I é um parâmetro constante, sendo $w_I = 0$ para matéria fria (*i.e.* não relativística) e $w_I = 1/3$ para matéria quente.

Motivada pelas recentes evidências observacionais apontando para uma expansão acelerada do Universo (Riess *et al.* [9], Perlmutter *et al.* [10]), a dinâmica do campo gravitacional na Cosmologia Padrão é definida através da ação de Einstein-Hilbert modificada (*cf.* Kolb & Turner [70], Peebles [68], Peebles & Ratra [7], Friedman *et al.* [71])

$$\mathcal{S}_{Grav,\Lambda} = \frac{1}{2\kappa} \int \Big(\overset{\circ}{R} - 2\Lambda \Big) \eta , \tag{56}$$

onde Λ é uma constante. O novo problema variacional $\delta[\mathcal{S}_{Grav,\Lambda} + \mathcal{S}_{Mat}] = 0$ com respeito à métrica, produz as seguintes equações de Einstein modificadas (Einstein [72])

$$\overset{\circ}{R}_{ab} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}g_{ab} = -\kappa T_{ab} - \Lambda g_{ab}\,. \tag{57}$$

onde a constante Λ foi deslocada para o lado direito das equações para enfatizar que esta pode ser pensada como uma nova fonte da curvatura do espaço-tempo. O limite newtoniano destas equações indica que a "constante cosmológica" Λ deve ser muito pequena para que não produza efeitos conflitantes com as observações em escala galática e supergalática ($< 10^9$ anos-luz), *viz.* $\Lambda \ll 4\pi G(\tilde{\rho}_B + \tilde{\rho}_D)$. As equações de Einstein (57), em uma geometria caracterizada pela métrica (52), e com fonte descrita pelo tensor momentum-energia (54), assumem a forma (Friedman [62, 63], Lemaître [64, 65])

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{\epsilon}{A^2} = \frac{\kappa}{3}\sum_I \rho_I + \frac{\Lambda}{3}\,, \tag{58a}$$

$$2\frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}^2 + \epsilon}{A^2}\right) = -\kappa\sum_I p_I + \Lambda\,, \tag{58b}$$

$\dot{A} \equiv \overset{\circ}{D}_{(0)}A = \partial_{(0)}A$. Em virtude da equação de conservação da matéria-energia (44) e das identidades de Bianchi (18a) & (18b), as equações de Friedman (58a) e (58b) não são independentes, e fornecem uma única equação. Por outro lado, combinando as equações (58a) e (58b), obtém-se a equação de Raychaudhuri (Raychaudhuri [73])

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_I \left(\rho_I + 3p_I\right) + \frac{\Lambda}{3}\,. \tag{59}$$

Além disso, da lei de conservação (44) para um fluído constituído por múltiplas espécies livres de colisões, são obtidas as seguintes equações de conservação para cada espécie

$$\dot{\rho}_I + 3\frac{\dot{A}}{A}(\rho_I + p_I) = 0\,. \tag{60}$$

O sistema constituído pelas equações (58a), (55) & (60) descreve completamente a dinâmica do Universo neste modelo (ΛCDM), a base da Cosmologia Padrão. Alternativamente, o sistema de equações (59), (55) & (60) pode ser empregado para a descrição da dinâmica cósmica neste modelo. Nota-se que, de acordo com a equação (59), a constante cosmológica Λ é responsável por uma força repulsiva, oposta à força gravitacional estritamente atrativa gerada pela matéria ordinária, esta última definida aqui como o conjunto de todas as formas de matéria que estão sujeitas tanto à Condição de Energia Fraca, *viz.* $\rho_I \geqslant 0$, quanto à Condição de Energia Forte (*cf.* Hawking & Ellis [12]), *viz.*

$$\rho_I + 3p_I \geqslant 0\,. \tag{61}$$

Em consequência da lei de conservação (60) e da equação de estado (55), a densidade de energia de cada espécie de matéria ordinária que constitui o fluído cósmico é dada por

$$\rho_I(t) = \rho_{I0}\left(\frac{A}{A_0}\right)^{-3(1+w_I)} = \rho_{I0}\,(1+z)^{3(1+w_I)}\;, \tag{62}$$

onde $\rho_{I0} \equiv \rho_I(t_0)$ e $A_0 \equiv A(t_0)$ são os valores atuais e $z \equiv A_0/A - 1$ é o desvio para o vermelho. Consequentemente, definindo-se o parâmetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{A}/A$, a densidade crítica de energia $\rho_c \equiv 3H^2/\kappa$ e as densidades relativas de energia $\Omega_I \equiv \rho_I/\rho_c$ e $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/\kappa\rho_c$, as equações de Raychaudhuri (59) e Friedman (58a) podem ser convenientemente reescritas na forma

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_I (1+3w_I)\Omega_{I0}\rho_{c0}\left(\frac{A_0}{A}\right)^{3(1+w_I)} + \frac{\kappa}{3}\Omega_{\Lambda 0}\rho_{c0}\,, \tag{63a}$$

$$\sum_I \Omega_I + \Omega_\Lambda = 1 + \frac{\epsilon}{(HA)^2}\,. \tag{63b}$$

Estas equações devem ainda ser completadas pelas equações de estado para a radiação ($w_R = 1/3$), matéria bariônica ($w_B = 0$) e matéria escura fria não bariônica ($w_D = 0$). As evidências apontam, no contexto deste modelo ΛCDM, para os seguintes valores atuais do parâmetros cosmológicos (*cf.* Particle Data Group [74])

$$\frac{\epsilon}{(H_0A_0)^2} \approx 0\,, \quad \Omega_{R0} \lesssim 10^{-4}\,, \quad \Omega_{B0} \approx 0.05\,, \quad \Omega_{D0} \approx 0.25\,, \quad \Omega_{\Lambda 0} \approx 0.70\,, \tag{64}$$

e o valor $H_0 \approx 0.70 \times 10^{-10}\,(\text{anos})^{-1}$ para a constante de Hubble. Estes dados implicam a ocorrência de uma era dominada pela radiação, seguida de uma era dominada pela matéria bariônica e, possivelmente, também por uma matéria escura fria não bariônica, e a estas, finalmente, seguidas pela era atual, dominada pela constante cosmológica.

A candidata natural à constante cosmológica é a energia do vácuo, associada às flutuações quânticas dos campos de matéria do Modelo Padrão da Física de Partículas, cuja equação de estado tem a forma ($\rho_{VAC} = -p_{VAC}$)

$$w_{VAC} = -1\,. \tag{65}$$

Nota-se que esta equação de estado viola a condição de energia forte (61). No entanto, apesar da energia do vácuo ser capaz de oferecer uma explicação para a expansão cósmica acelerada, o valor de sua densidade previsto pelo Modelo Padrão, $\rho_{VAC} \approx 10^{71}\,\mathrm{GeV}^4$ para a escala de energia de Planck, difere enormemente do valor observado para a densidade de energia associada à constante cosmológica, $\rho_\Lambda = \Omega_{\Lambda 0}\rho_{c0} \approx 10^{-47}\,\mathrm{GeV}^4$. Este desacordo em quase 120 ordens de grandeza é conhecido como o "problema da constante cosmológica" (Weiberg [11]). Apesar do Modelo Padrão prever uma redução substancial deste valor por sucessivos mecanismos de quebra espontânea de simetria no Universo primordial, os valores correspondentes às escalas de energia do setor eletrofraco (EW) e da Cromodinâmica Quântica (QCD) ainda superam o valor observado em muitas ordens de grandeza, *viz.* $\rho_{VAC/EW} \sim 10^6\,\mathrm{GeV}^4\,(\sim 10^{53}\rho_\Lambda)$ e $\rho_{VAC/QCD} \sim 10^{-6}\,\mathrm{GeV}^4\,(\sim 10^{41}\rho_\Lambda)$, respectivamente. Além disso, o processo implica a produção de defeitos topológicos associados (cordas cósmicas, monopolos magnéticos, texturas e paredes de domínio), nunca observados.

Além do problema da constante cosmológica, observações indicam ainda que o valor da densidade de energia do vácuo é atualmente da mesma ordem de grandeza da densidade média de matéria no Universo (*cf.* Peebles & Ratra [7])

$$\rho_\Lambda \sim \rho_{M0}\,.$$

O caráter altamente improvável deste fato, visto que, de acordo com a equação (62), as duas quantidades decaem a uma taxa diferente ao longo da história do Universo, constitui o chamado "problema da coincidência cósmica" da Cosmologia Padrão. Os problemas associados à energia do vácuo sugerem a busca de outro fluído material-energético, de natureza ainda misteriosa, para explicar a expansão acelerada do Universo. Como ocorre com a matéria escura não-bariônica, presume-se que esta "energia escura" deve também ser de natureza exótica.

Além dos problemas associados à constante cosmlógica, a Cosmologia Padrão sofre ainda dos problemas da planitude, do horizonte cosmológico, da assimetria bariônica, da origem das flutuações (*i.e.* dos desvios da homogeneidade e isotropia) na distribuição de matéria-energia no Universo primitivo (o espectro de perturbações iniciais), necessárias para explicar a formação das estruturas observadas no Universo atual, como a inomogeneidade na distribuição de galáxias e anisotropias na radiação de micro-ondas cósmica de fundo (CMB) (*cf.* Peebles & Ratra [7], Padmanabhan [8]) e, sobretudo, o problema da singularidade inicial (Novello [35], *cf.* Subseção II E), *viz.* próximo a um instante $t_* < t_0$ no passado, onde $t_0 - t_* = 1/H_0 \approx 1.4 \times 10^{10}$ anos no modelo ΛCDM, o fator de escala tende a zero $0 \leftarrow A(t_* \leftarrow t)$, e, consequentemente, a curvatura, as densidades de energia (62) e a temperatura divergem nesta região. Além disso, a métrica e, portanto, a própria estrutura do espaço-tempo tornam-se indefinidas na singularidade.

D. Modelos de Energia Escura Dinâmica

A solução mais popular para os três primeiros problemas consiste em postular uma "era inflacionária", na qual um regime de expansão cósmica acelerada, induzido por um campo escalar cosmológico, tem a capacidade amplificar as flutuações da distribuição de matéria-energia no Universo primordial, solucionar o problema dos horizontes cosmológicos, planificar o espaço-tempo, oferecer um explicação para a alta entropia observada no Universo atual e ainda diluir possíveis relíquias oriundas da produção de defeitos topológicos.

Em uma tentativa de solucionar os problemas relacionados à constante cosmológica (problemas da constante cosmológica e coincidência cósmica), foram propostos modelos de energia escura dinâmica, derivados dos modelos inflacionários, nos quais é introduzido no modelo de FLRW um campo escalar cuja dinâmica é definida pela ação (*cf.* Peebles & Ratra [7])

$$\mathcal{S}_\phi = \int \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V[\phi] \right) \eta \,, \tag{66}$$

sendo o potencial $V[\phi]$ escolhido de forma a produzir uma expansão acelerada tardia do Universo. Além disso, o acoplamento entre o campo escalar e a matéria bariônica ordinária nestes modelos deve ser suficientemente fraco para que seja consistente com os vínculos sobre novas forças de longo alcance no Universo (Carroll [75]). Em concordância com a hipótese de homogeneidade e isotropia espacial, assume-se que o campo escalar exibe dependência apenas do tempo cósmico $\phi = \phi(t)$, o que implica um tensor momentum-energia para o campo escalar com a forma (54).

A dinâmica do sistema (no caso particular $\Lambda = 0$) é definida pelo problema variacional $\delta[\mathcal{S}_{Grav} + \mathcal{S}_{Mat} + \mathcal{S}_\phi] = 0$ com respeito à métrica e ao campo escalar. Em uma geometria de FLRW, as equações de Einstein e a equação dinâmica do campo escalar resultantes assumem, respectivamente, a seguinte forma

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{\epsilon}{A^2} = \frac{\kappa}{3} \sum_I \rho_I + \frac{\kappa}{3} \big(K[\phi] + V[\phi] \big) \,, \tag{67a}$$

$$2\frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}^2 + \epsilon}{A^2} \right) = -\kappa \sum_I p_I - \kappa \big(K[\phi] - V[\phi] \big) \,, \tag{67b}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi} + \frac{\partial V[\phi]}{\partial \phi} = 0 \,, \tag{67c}$$

onde foi definido o termo cinético $K[\phi] \equiv \dot{\phi}^2/2$. Combinando as equações de Einstein (67a) e (67b), e ainda fazendo uso das equações de estado (55) e as equações de conservação (60) para cada espécie de matéria ordinária, obtém-se a equação de Raychaudhuri

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_{l}\left(\rho_l + 3p_l\right) - \frac{\kappa}{3}\left(2K[\phi] - V[\phi]\right). \tag{68}$$

Em analogia à descrição dada ao fluído cósmico, pode-se definir a equação de estado efetiva para o fluído constituído pelo campo escalar

$$w_\phi(t) = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{K[\phi] - V[\phi]}{K[\phi] + V[\phi]}. \tag{69}$$

Nota-se que a equação de estado efetiva tem seus valores contidos no intervalo $-1 \leqslant w_\phi \leqslant 1$. No regime em que o potencial é dominante sobre o termo cinético, como ocorre na aproximação de "rolamento lento" (*cf.* Peebles & Ratra [7])

$$\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi} \;\;,\;\; \dot{\phi}^2 \ll V[\phi] \;\;,\;\; \dot{H} \ll H^2, \tag{70}$$

a equação de estado efetiva assume a forma

$$w_\phi \approx -1 \quad (p_\phi < 0). \tag{71}$$

Consequentemente, o potencial associado ao campo escalar atua, neste regime, como uma constante cosmológica efetiva $\rho_\phi \approx V[\phi] \approx const.$

Diversas escolhas de potenciais $V[\phi]$ capazes de gerar uma expansão acelerada tardia do Universo foram propostos na literatura ao longo dos anos, sendo os exemplos mais simples o potencial exponencial $V[\phi] = V_0 e^{-\alpha\phi}$ e potenciais com perfis do tipo $V[\phi] = V_0\phi^{-\alpha}$, que buscam relacionar a expansão acelerada tardia com um regime inflacionário no universo primordial (*cf.* Peebles & Ratra [7]). Nestes modelos (QCDM), nos quais um campo escalar cosmológico com as propriedades descritas acima (quintessência) atua como uma energia escura dinâmica, o problema da coincidência cósmica é amenizado. Alguns potenciais, inclusive, exibem soluções do tipo "atratora" ou "rastreadora" (Peebles & Ratra [7], Steinhardt *et al.* [76]), nas quais a densidade de energia do campo escalar acompanha a densidade de energia da matéria ao longo da história cósmica, passando a crescer apenas na era atual. Em todas estas propostas, no entanto, a escolha do potencial é *ad hoc* e carece de um sólido modelo físico subjacente. Convém observar que, nestes modelos de energia escura dinâmica, o problema do ajuste fino da constante cosmológica não é resolvido, ainda que seja amenizado, sendo simplesmente assumido um valor mínimo para o potencial $V[\phi]$ próximo ou igual a zero.

E. Modelos Cosmológicos Não Singulares

Apesar de uma era inflacionária oferecer uma solução para os problemas da planitude, horizonte cosmológico e origem do espectro de perturbações iniciais, a Cosmologia Padrão acrescida de uma era inflacionária ainda sofre do problema da singularidade inicial (*cf.* Gasperini [77], Novello & Bergliafa [13], Brandenberger [78]). Como demonstrado pelos teoremas de Penrose-Hawking (*cf.* Hawking & Ellis [12]), qualquer modelo cosmológico que, conjuntamente, (a) seja fundamentado pela Relatividade Geral, (b) assuma uma distribuição espacialmente homogênea e isotrópica para a matéria em grande escala de distância e (c) assuma que o fluído cósmico é constituído exclusivamente por matéria ordinária (*viz.* matéria que satisfaz a Condição de Energia Forte (61)), necessariamente exibe uma singularidade inicial (*big bang*), *i.e.* as linhas de mundo do fluído cósmico todas convergem para um único ponto focal no espaço-tempo, situado em um instante $t_* < t_0$ no passado (sendo t_0 o instante atual), além do qual estas linhas de mundo não podem ser estendidas. Como mencionado na Subseção II C, a estrutura do espaço-tempo é indefinida na sungularidade, o que torna o modelo inaplicável em uma vizinhança daquele ponto. Esta inconsistência nos cenários cosmológicos construídos a partir da teoria da Relatividade Geral (*cf.* Subseção II C) sugere a revisão de uma ou mais das condições (a), (b) e (c) acima (*cf.* Novello [35], Novello & Perez-Bergliafa [13]).

A necessidade de substituir, neste regime, a Relatividade Geral por uma teoria quântica da gravitação é tipicamente evocada (*cf.* Ashtekar [79]). No entanto, a singularidade pode ser evitada mesmo no nível clássico. É o que ocorre em modelos cosmológicos que incorporam fluídos materiais exóticos capazes de violar a Condição de Energia Forte, modelos que assumem uma distribuição espacial inomogênea ou anisotrópica para a matéria-energia em escala cósmica, ou ainda modelos baseados em teorias modificadas clássicas da gravitação. Nesta última linha, em particular, foram formuladas diversas propostas nas últimas décadas, dentre as quais destacam-se teorias com graus de liberdade escalares adicionais (como a teoria de Brans-Dicke), teorias nas quais é modificada a forma do acoplamento entre a matéria e a gravidade, teorias cuja ação é construída com invariantes de ordem superior (como a teoria "$f(R)$"), teorias de cordas, teorias de Branas-Mundo, e ainda teorias que incorporam a torção (como a teoria ECSK) (*cf.* Novello & Bergliafa [13], Clifton *et al.* [14], Gasperini [77], e para a discussão das teorias com torção, *cf.* Trautman [80] e Hehl *et al.* [20, 21]).

Nestes modelos, a atual fase de expansão cósmica é precedida por uma fase contrativa, sendo que no *bounce* (ou *big bounce*), a transição entre as duas fases, o fator de escala atinge seu valor mínimo $0 < A(t_*) < A_0$, que pode ser um mínimo local nos modelos com múltiplos bounces ou nos modelos com uma singularidade no futuro (*big crunch*). Dados da radiação CMB sugerem ainda que o valor mínimo do fator de escala deve ser menor do que o valor atual, *i.e.*

$$A(t_*) \ll A_0\,. \tag{72}$$

Apesar do Universo não exibir uma singularidade inicial nestes modelos, o instante t_* em que ocorre o bounce local deve ser suficientemente recuado no tempo para que não haja conflito com os vínculos impostos pelas estimativas de idade de aglomerados globulares e de galáxias elípticas, *viz.* (*cf.* Particle Data Group [74])

$$t_0 - t_* \gtrsim 1.2 \times 10^{10}\,\text{anos}\,. \tag{73}$$

Além de contornarem o problema da singularidade inicial, modelos com bounce podem ser uma alternativa ao paradigma inflacionário, visto que uma fase contrativa acelerada é capaz de oferecer uma explicação para a origem das flutuações na distribuição de matéria-energia no Universo primordial e, possivelmente, ainda solucionar os problemas do horizonte cosmológico e da planitude (Gasperini & Veneziano [81], *cf.* Gasperini [77], Brandenberger [78]).

III. CAMPOS DE SPIN-2 EM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Apesar das extensões do Modelo Padrão preverem a existência de uma miríade de partículas bosônicas de spin superior a 1, a busca por componentes materiais-energéticas escuras exóticas no setor bosônico tem se restringido às partículas de spin-0 (campos escalares, axion, sneutrinos) e partículas de spin-1 (como o bósons de calibre da teoria de Kaluza-Klein). Nas extensões da gravitação einsteiniana que incorporam a torção, no entanto, novos campos bosônicos fundamentais associados à torção são esperados. Como sugere a contagem do número de graus de liberdade da torção, estes campos podem exibir spin 0, 1 ou 2. O caso de spin-2, em particular, é de especial interesse, já que a curvatura e a torção possuem o mesmo status nestas teorias.

Tendo em mente este fato, nesta seção será revisada a descrição da dinâmica dos campos de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski (teoria de Fierz-Pauli), tanto na sua formulação ususal (Subseção III A) quanto na chamada representação de Fierz (Subseção III B), bem como sua ligação com a teoria einsteiniana da gravitação. Na Subseção III C será revisada a extensão deste formalismo aos espaços-tempos curvos e discutido o problema de compatibilidade entre a dinâmica de um campo de spin-2 e a gravitação.

A. Teoria de Fierz-Pauli

Em seu tratamento sistemático das equações da onda relativísticas para partículas de spin arbitrário, Fierz & Pauli estudaram o caso de um campo de spin-2 massivo livre no espaço-tempo de Minkowski, representado por um campo $(0,2)$-tensorial simétrico com componentes $\varphi_{\alpha\beta}$, cuja dinâmica é definida, de forma única, pela seguinte ação (Fierz & Pauli [82])

$$\mathcal{S}_{FP} = \frac{1}{4\kappa}\int \Big[\partial_\mu\varphi_{\alpha\beta}\partial^\mu\varphi^{\alpha\beta} - 2\partial^\mu\varphi_{\mu\alpha}\partial_\beta\varphi^{\alpha\beta} + 2\partial_\beta\varphi^{\beta\alpha}\partial_\alpha\varphi - \partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi - m^2\big(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi^2\big)\Big] d^4x\,, \tag{74}$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ são as componentes da métrica do espaço-tempo de Minkowski, $\varphi \equiv \eta^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ é o traço do campo, κ é uma constante, m é a massa do campo, e foi adotado o referencial natural global no espaço-tempo de Minkowski para estreitar a analogia com o caso da aproximação linear da Relatividade Geral (*cf.* Seção II B). A interação entre o campo de spin-2 e outros campos de matéria pode ser incorporada adicionando-se à ação de Fierz-Pauli termos de acoplamento com a forma

$$\mathcal{S}_I = -\int \tau_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} d^4x\,, \tag{75}$$

onde é assumido que a fonte $\tau_{\alpha\beta}$ é um tensor simétrico. O problema variacional $\delta[\mathcal{S}_{FP}+\mathcal{S}_I] = 0$ com respeito ao campo de spin-2 $\varphi_{\alpha\beta}$ produz as equações dinâmicas

$$\Box\varphi_{\alpha\beta} - \partial^\mu\partial_{(\alpha}\varphi_{\beta)\mu} + \partial_\alpha\partial_\beta\varphi - \big(\Box\varphi - \partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}\big)\eta_{\alpha\beta} + m^2\big(\varphi_{\alpha\beta} - \varphi\eta_{\alpha\beta}\big) = -2\kappa\tau_{\alpha\beta}\,. \tag{76}$$

Tomando-se a divergência da equação (76), obtém-se

$$m^2\big(\partial^\alpha\varphi_{\alpha\beta} - \partial_\beta\varphi\big) = -2\kappa\partial^\alpha\tau_{\alpha\beta}\,. \tag{77}$$

Por outro lado, o traço da equação (76) fornece

$$\Box\varphi - \partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}m^2\varphi + \kappa\tau\,. \tag{78}$$

onde $\tau \equiv \eta^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}$ é o traço do tensor momentum-energia. Tomando a divergência da equação (77), conclui-se que o campo $\varphi_{\alpha\beta}$ massivo é compatível com uma corrente conservada ($\partial^\alpha\tau_{\alpha\beta} = 0$) se satisfizer a condição de compatibilidade

$$\frac{3}{2}m^2\varphi = \kappa\tau\,. \tag{79}$$

No caso estudado por Fierz e Pauli, o de um campo massivo livre, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, a condição (79) implica a identidade

$$\varphi = 0\,, \tag{80}$$

a qual, por sua vez, implica a seguinte redução da identidade (77)

$$\partial^{\alpha}\varphi_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{81}$$

Combinando as condições (80) e (81) com a equação de campo (76), obtém-se o sistema de equações que descreve a dinâmica de um campo de spin-2 massivo livre propagando-se no espaço-tempo de Minkowski (Fierz & Pauli [82])

$$\big(\Box + m^2\big)\varphi_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{82a}$$

$$\partial^{\alpha}\varphi_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{82b}$$

$$\varphi = 0\,. \tag{82c}$$

As condições (82b) e (82c) impõem a redução dos 10 graus de liberdades originais exibidos pelo campo[7] $\varphi_{\alpha\beta}$ aos 5 graus de liberdade associados a um campo de spin-2 puro.

Outro caso de particular interesse é o de um campo com fonte e massa nula, $m = 0$. Neste caso, as condições (82b) e (82c) já não são mais consequência das equações de campo (76), que recuperam a simetria

$$\varphi_{\alpha\beta} \longmapsto \varphi_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha}\xi_{\beta)}\,, \tag{83}$$

sendo ξ^{β} as componentes de um campo vetorial arbitrário. A divergência do lado esquerdo das equações de campo (76) é identicamente nula, e a simetria (83) implica a condição de conservação $\partial^{\alpha}\tau_{\alpha\beta} = 0$ (*i.e.* a quebra da invariância das equações de campo (76) frente às transformações de simetria (83), provocada pelo termo de massa, implica a violação da condição de conservação da corrente $\tau_{\alpha\beta}$). Se a fonte for identificada com o tensor momentum-energia associado aos processos não gravitacionais, $\tau_{\alpha\beta} \equiv {}^{(0)}T_{\alpha\beta}$, e se a constante κ for identificada com a constante gravitacional de Einstein, as equações de Fierz-Pauli

[7] *cf.* Hehl *et al.* [21] pg. 52

(76) com fonte coincidem com as equações de campo da Relatividade Geral em sua forma linearizada (*cf.* eq. (48), Seção II B). Consequentemente, o campo de spin-2 $\varphi_{\alpha\beta}$, sem massa e interagente, pode ser identificado com o campo $h_{\alpha\beta}$ da aproximação linear da Relatividade Geral, e a transformação (83) com a transformação de calibre (49).

B. Teoria de Fierz-Pauli na Representação de Fierz

Além da descrição usual de campos de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski formulada por Fierz & Pauli [82], uma descrição alternativa, a chamada "representação de Fierz" (Pinto Neto [83], Novello & Pinto Neto [84], Novello & Neves [85]) aproxima o formalismo desta teoria do formalismo das teorias de calibre e permite a passagem natural para o caso em que o espaço-tempo de fundo é curvo.

Um tensor de Fierz no espaço-tempo de Minkowski é definido pelas propriedades

$$\Phi_{\alpha\beta\mu} = -\Phi_{\beta\alpha\mu} \,, \tag{84a}$$

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} + \Phi_{\beta\gamma\alpha} + \Phi_{\gamma\alpha\beta} = 0 \,, \tag{84b}$$

$$\partial^{\alpha}(*\Phi)_{\alpha(\mu\nu)} = 0 \,, \tag{84c}$$

onde o dual tem a forma $(*\Phi)_{\alpha\beta\mu} = (1/2)\eta_{\rho\sigma\alpha\beta}\Phi^{\rho\sigma}{}_{\mu}$ (*cf.* Seção II B). Chama-se a atenção para a posição dos índices antissimétricos do tensor de Fierz, convenção adotada tradicionalmente na literatura (*cf.* Novello & Neves [85]). As condições (84c) e (84b) reduzem as 24 componentes independentes de uma 2-forma com valores $(0,1)$-tensoriais arbitrária a apenas 10, e, consequentemente, um tensor de Fierz pode representar um único campo de spin-2. De fato, uma consequência direta da definição acima, é que existe um campo $(0,2)$-tensorial simétrico, com componentes $\varphi_{\alpha\beta}$, em termos das quais as componentes de um tensor de Fierz admitem a expressão

$$\Phi_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\beta}\varphi_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}\varphi_{\beta\mu} - \Phi_{\beta}\eta_{\alpha\mu} + \Phi_{\alpha}\eta_{\beta\mu}\Big) \,, \tag{85a}$$

$$\Phi_{\alpha} \equiv \eta^{\beta\mu}\Phi_{\alpha\beta\mu} = \partial_{\alpha}\varphi - \partial^{\mu}\varphi_{\mu\alpha} \,. \tag{85b}$$

Como pode ser diretamente verificado destas expressões (85a) e (85b), as componentes de um tensor de Fierz $\Phi_{\alpha\beta\mu}$ satisfazem a identidade

$$\partial^{\mu}\Phi_{\mu(\alpha\beta)} = -\Box\varphi_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha}\partial^{\mu}\varphi_{\beta)\mu} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\varphi + \big(\Box\varphi - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi^{\mu\nu}\big)\eta_{\alpha\beta} \,. \tag{86}$$

A teoria de Fierz-Pauli para campos de spin-2 massivos pode ser reformulada, nesta representação baseada nos tensores de Fierz, a partir do princípio variacional definido pela seguinte ação envolvendo os invariantes construídos com os tensores de Fierz (Novello & Neves [85])

$$\mathcal{S}_{Fierz} = \frac{1}{2\kappa}\int \left[\Phi_{\alpha\beta\mu}\Phi^{\alpha\beta\mu} - \Phi_\alpha \Phi^\alpha - \frac{m^2}{2}\big(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi^2\big)\right] d^4x\,. \tag{87}$$

O problema variacional $\delta[\mathcal{S}_{Fierz} + \mathcal{S}_I] = 0$ com respeito ao campo de spin-2 $\varphi_{\alpha\beta}$, produz as equações de campo

$$\partial^\mu \Phi_{\mu(\alpha\beta)} - m^2\big(\varphi_{\alpha\beta} - \varphi\eta_{\alpha\beta}\big) = 2\kappa\tau_{\alpha\beta}\,, \tag{88}$$

onde o termo de fonte do lado direito da equação é oriundo de uma ação de interação com a forma (75). De acordo com a identidade (86), estas equações são exatamente as equações de Fierz-Pauli para um campo de spin-2 massivo livre no espaço-tempo de Minkowski

$$\Box\varphi_{\alpha\beta} - \partial_{(\alpha}\partial^\mu\varphi_{\beta)\nu} + \partial_\alpha\partial_\beta\varphi - \big(\Box\varphi - \partial_\mu\partial_\nu\varphi^{\mu\nu}\big)\eta_{\alpha\beta} + m^2\big(\varphi_{\alpha\beta} - \varphi\eta_{\alpha\beta}\big) = -2\kappa\tau_{\alpha\beta}\,. \tag{89}$$

Para que a equivalência das duas representações fique ainda mais evidente, serão reproduzidos os passos da subseção anterior. Da divergência das equações de campo obtém-se

$$\partial^\beta\partial^\alpha \Phi_{\alpha(\beta\mu)} - m^2\Phi_\mu = 2\kappa\partial^\beta\tau_{\alpha\beta}\,, \tag{90}$$

ao passo que o traço da equação (88) fornece

$$\partial^\mu\Phi_\mu + \frac{3}{2}m^2\varphi = \kappa\tau\,. \tag{91}$$

Por outro lado, como consequência direta da identidade (84c), segue

$$\partial^\mu\Phi_{\alpha\beta\mu} = 0\,, \tag{92}$$

e, consequentemente, obtém-se a identidade

$$\partial^\beta\partial^\alpha\Phi_{\alpha(\beta\mu)} \equiv 0\,. \tag{93}$$

Consequentemente, a mesma a condição de compatibilidade entre o campo de spin-2 e uma corrente conservada obtida no formalismo usual (Subseção III A, eq. (79)) é também obita aqui

$$\frac{3}{2}m^2\varphi = \kappa\tau\,. \tag{94}$$

No caso de massa nula, as condições para que $\varphi_{\alpha\beta}$ represente um campo de spin-2 puro no espaço-tempo de Minkowski obtidas na Subseção III A são recuperadas

$$\Phi_\alpha = 0\,, \tag{95a}$$

$$\varphi = 0\,. \tag{95b}$$

Convém observar que, mesmo no caso em que o campo de spin-2 tem massa nula, $m = 0$, é livre ($\tau_{\alpha\beta} = 0$), o campo de Fierz $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ não é em, em geral, invariante frente às transformações

$$\varphi_{\alpha\beta} \longmapsto \varphi_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} \tag{96}$$

(a excessão sendo o caso em que o campo vetorial é o gradiente de uma função escalar, $\xi_\mu = \partial_\mu f$). No entanto, a ação (87) difere da ação transformada apenas por um termo de borda e, consequentemente, a dinâmica não é modificada pela transformação (96) (Novello & Neves [85]).

C. Campos de Spin-2 em Espaço-Tempo Curvo

Apesar da teoria de Fierz-Pauli na representação de Einstein descrever campos de spin-2 propagando-se no espaço-tempo de Minkowski de forma consistente, quando se tenta estender esta descrição a um espaço-tempo curvo surgem dois obstáculos. O primeiro é decorrente da ambiguidade na passagem de termos da equação (76) envolvendo derivadas parciais ordinárias sucessivas do campo

$$\partial_\alpha \partial_\beta \varphi_{\mu\nu}$$

às suas versões para espaço-tempo curvo, em virtude da não-comutatividade das derivadas covariantes. O segundo obstáculo é consequência do fato das equações dinâmicas para um campo de spin-2 sem massa, sem fontes e propagando-se em espaço-tempo curvo, não exibirem divergência nula, como ocorre com as equações de Einstein linearizadas no vácuo (*cf.* Seção II B). Como observado por Aragone & Deser (Aragone & Deser [86]), para uma escolha arbitrária de ordenamento dos termos envolvendo derivadas covariantes sucessivas do campo, a extensão aos espaços-tempos curvos da dinâmica de um campo de spin-2 sem massa e acoplado minimamente com a gravitação recupera a condição de compatibilidade (divergência nula) apenas no caso em que o espaço-tempo é do tipo Einstein

$$\overset{\circ}{R}_{ab} = \Lambda\, g_{ab}\,.$$

Este cenário é evidentemente inconsistente, já que campos de spin-2 não podem ser a fonte de um espaço-tempo com tal estrutura geométrica. Esta dificuldade constitui o problema da compatibilidade entre a dinâmica de um campo de spin-2 e a gravitação. Na tentativa de contornar este problema, Aragone & Deser propuseram uma extensão da ação de Fierz-Pauli incorporando termos de acoplamento não-mínimo. No entanto, como eles observam, o problema variacional na presença de tais termos acaba levando a modificações das equações de Einstein envolvendo derivadas de ordem superior. Além disso, o acoplamento não-mínimo impõe severas restrições sobre as variáveis de campo em virtude das propriedades algébricas do tensor de Riemann. O caso de um campo de spin-2 massivo em espaço-tempo curvo acoplado não-minimamente com a gravitação foi estudado por Buchbinder e colaboradores (Buchbinder *et al.* [87]), os quais obtiveram equações de campo compatíveis com a Relatividade Geral e as associaram a uma dinâmica efetiva oriunda das teorias de cordas. Também neste caso, a escolha do ordenamento das derivadas covariantes sucessivas do campo é arbitrária.

Como mostrado por Novello & Neves (*cf.* Novello & Neves [85]), o primeiro obstáculo pode ser contornado de forma natural adotando-se a representação de Fierz. Apesar da dinâmica ser completamente equivalente em ambas as representações no espaço-tempo de Minkowski, a extensão da representação de Fierz da teoria de Fierz-Pauli aos espaços-tempos curvos (feita através do princípio de acoplamento mínimo) é livre de ambiguidades. Esta abordagem leva a equações dinâmicas equivalentes às obtidas na representação de Einstein envolvendo acoplamento não-mínimo entre o campo de spin-2 e a gravitação, para uma certa escolha arbitrária dos coeficientes dos termos de acoplamento não-mínimo.

A extensão da definição (85a)-(85b) a um espaço-tempo curvo (riemanniano) arbitrário é imediata. Adotando-se o Princípio de Acoplamento Mínimo entre o campo de spin-2 e a gravitação, o qual, em um espaço-tempo riemanniano, e apenas neste espaço-tempo, pode ser implementado operacionalmente através da mudança

$$\partial_a \longmapsto \overset{\circ}{D}_a \ , \quad \eta_{ab} \longmapsto g_{ab} \, ,$$

obtém-se

$$\Phi_{abc} \equiv \frac{1}{2}\Big(\overset{\circ}{D}_b\varphi_{ac} - \overset{\circ}{D}_a\varphi_{bc} + \Phi_a g_{bc} - \Phi_b g_{ac}\Big) \, , \tag{97a}$$

$$\Phi_c \equiv g^{ab}\Phi_{cab} = \partial_c\varphi - \overset{\circ}{D}{}^b\varphi_{bc} \, , \tag{97b}$$

onde os índices $\{a, b, \cdots\}$ referem-se, como estabelecido anteriormente, a um referencial local arbitrário no espaço-tempo riemanniano. Evidentemente, um tensor de Fierz em espaço-tempo curvo exibe as mesmas propriedades de simetria de um tensor de Fierz no espaço-tempo de Minkowski, *viz.*

$$\Phi_{abc} = -\Phi_{bac} \, , \tag{98a}$$

$$\Phi_{abc} + \Phi_{bca} + \Phi_{cab} = 0 \, , \tag{98b}$$

sendo que esta última pode ainda ser convenientemente reescrita na forma

$$g^{ac}(*\Phi)_{abc} = 0 \, . \tag{99}$$

A condição (84c), por outro lado, assume a forma generalizada

$$\overset{\circ}{D}{}^a(*\Phi)_{a(bc)} = \frac{1}{2}\left\{(\overset{\circ}{R}*)_{brsc} + (\overset{\circ}{R}*)_{rbcs}\right\}\varphi^{rs}\,. \tag{100}$$

A dinâmica para campos de spin-2 massivos em um espaço-tempo riemanniano arbitrário passa a ser definida através do princípio variacional aplicado à versão para espaços-tempos curvos da ação (87), do qual resultam as seguintes equações de campo

$$\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_{a(bc)} - m^2\big(\varphi_{bc} - \varphi g_{bc}\big) = 2\kappa\tau_{bc}\,, \tag{101}$$

onde foi adicionado um termo de fonte ao lado direito da equação. Neste caso, a identidade (86) assume a nova forma

$$\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_{a(bc)} = -\overset{\circ}{D}_a\overset{\circ}{D}{}^a\varphi_{bc} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{D}{}^a\overset{\circ}{D}_{(c}\varphi_{b)a} + \overset{\circ}{D}_{(c}\overset{\circ}{D}{}^a\varphi_{b)a}\right) - \overset{\circ}{D}_b\overset{\circ}{D}_c\varphi + \left(\overset{\circ}{D}_a\overset{\circ}{D}{}^a\varphi - \overset{\circ}{D}_a\overset{\circ}{D}_d\varphi^{ad}\right)g_{bc}\,, \tag{102}$$

onde $\Phi \equiv g^{ab}\Phi_{ab} = \Phi^a{}_a$, e a ambiguidade na passagem das equações de Firez-Pauli à sua versão para espaço-tempo curvo é resolvida de forma natural. Por outro lado, a falha da versão para espaços-tempos curvos da identidade (90), *viz.*

$$\overset{\circ}{D}{}^b\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_{a(bc)} \not\equiv 0\,, \tag{103}$$

sugere a imposição de restrição da estrutura geométrica do espaço-tempo base à de um espaço-tempo de Einstein, para a qual a condição de compatibilidade é trivialmente satisfeita. No entanto, como mostrado por Buchbinder *et al.* (Buchbinder *et al.* [87]) e Novello & Neves (Novello & Neves [85]), esta restrição pode ser flexibilizada. Como consequência da divergência das equações de campo (101)

$$\overset{\circ}{D}{}^b\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_{a(bc)} - m^2\Phi_c = 2\kappa\overset{\circ}{D}{}^b\tau_{bc}\,, \tag{104}$$

foi proposta a seguinte condição de compatibilidade entre um campo de spin-2 massivo em espaço-tempo riemanniano e uma corrente conservada ($\overset{\circ}{D}{}^b\tau_{bc} = 0$) (Novello & Neves [85])

$$\overset{\circ}{D}{}^b\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_{a(bc)} = -m^2\Phi_c\,. \tag{105}$$

Por outro lado, tomando-se o traço das equações de campo (101), obtém-se, analogamente ao caso de espaço-tempo plano, a relação de vínculo

$$\overset{\circ}{D}{}^a\Phi_a = -\frac{3}{2}m^2\varphi + \tau\,, \tag{106}$$

ao passo que a divergência da condição de compatibilidade (105) fornece

$$\overset{\circ}{D}{}^d \left(\overset{\circ}{R}_{abcd} \Phi^{abc} \right) = -m^2 \overset{\circ}{D}{}^a \Phi_a \,. \tag{107}$$

Consequentemente, para que o tensor de Fierz represente um campo de spin-2 puro, este deve satisfazer, além da condição de compatibilidade (105), a condição (Novello & Neves [85])

$$\overset{\circ}{D}{}^d \left(\overset{\circ}{R}_{abcd} \Phi^{abc} \right) = 0 \,. \tag{108}$$

Cabe enfatizar que estes problemas de consistência não se colocam no caso em que os campos de spin-2 são livres (*i.e.* não estão acoplados a nenhuma corrente).

IV. CAMPOS DE MATÉRIA COM ORIGEM GEOMÉTRICA

Nesta presente seção, serão investigadas as consequencias para a dinâmica cósmica da incorporação de campos de spin-2 associados à torção ao setor escuro. Será inicialmente discutida, na Subseção IV A, a escolha de curvas causais físicas no espaço-tempo de Riemann-Carta que recuperam a cinemática einsteiniana no espaço-tempo riemanniano associado. Na Subseção IV B será apresentada a modificação mínima da Relatividade Geral, sugerida por Novello & Trajtenberg [88], na qual a torção, que pode ser decomposta em dois campos de spin-2, atua como uma nova fonte da curvatura do espaço-tempo riemannino associado. Asseguir, na Suseção IV C será obtido o sistema de equações dinâmicas compatível com um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, e, finalmente, na Subseção IV D serão estudados os modelos cosmológicas que derivam deste modelo. Seguindo a mesma filosofia de modificação mínima das teorias dominantes, e tendo em vista os sucessos da Cosmologia Padrão, os mesmos princípios fundamentais daquele modelo cosmológico serão empregados aqui. O presente estudo se restringirá ainda ao caso mais simples possível, *viz.* aquele em que cada campo de spin-2 exibe apenas um dos 10 graus de liberdade originais.

A. Cinemática Einsteiniana

Como discutido nas seções anteriores, os problemas da matéria e energia escuras podem ser abordados através de modificações da teoria da Relatividade Geral. A incorporação da torção, em particular, consiste em uma das modificações mais naturais que se pode impor àquela teoria. De fato, à luz do formalismo que fundamenta as teorias geométricas da gravitação, incluindo a teoria einsteiniana, a escolha de uma torção nula *ab initio* fica sem justificativa. Por outro lado, a torção promove desvios importantes na estrutura cinemática da teoria em relação à da Relatividade Geral e, além disso, efeitos diretamente associados a este campo nunca foram observados.

Uma possível forma de contornar este impasse, seria construir uma estrutura cinemática que parte de um espaço-tempo de Riemann-Cartan (Cartan [29, 32–34], Sciama [16, 17], Kibble [18], *cf.* Trautman [19], Hehl *et al.* [20, 21]), *i.e.* no qual a torção é não nula mas a condição de compatibilidade (24) é válida, porém restringindo a classe de curvas que representam as histórias das partículas teste e dos observadores inererciais de tal modo que a estrutura cinemática da teoria coincida com a da Relatividade Geral. Para implementar esta modificação "mínima" da gravitação einsteiniana, será imposto, primeiramente, o seguinte postulado cinemático:

Postulado Cinemático: *A estrutura cinemática da teoria é construída sobre um espaço-tempo de Riemann-Cartan, e as curvas que representam as histórias das partículas teste e dos observadores inererciais são as curvas do tipo tempo que extremizam o funcional*

$$\ell(\gamma_V) = \int \left(g_{ab}V^aV^b\right)^{1/2} dt\,.$$

Como comentado na Seção II B, estas curvas extremais são descritas localmente pela equação (37), equação que envolve apenas a conexão riemanniana pura, *viz.*

$$V^a \overset{\circ}{D}_a V^b = V^a \partial_a V^b + \overset{\circ}{\Gamma}{}^b{}_{ac} V^a V^c = 0\,,$$

e, consequentemente, a estrutura cinemática da teoria, do ponto de vista do espaço-tempo riemanniano associado, é idêntica à estrutura cinemática da Relatividade Geral.

Nota-se que no caso especial em que o espaço-tempo é de Riemann-Cartan, as formas de conexão, expressas em termos de um referencial ortonormal, satisfazem $\eta_{(c)(a)}\omega^{(c)}_{\ (b)} = -\eta_{(c)(b)}\omega^{(c)}_{\ (a)}$. Consequentemente, o setor $(0,2)$-tensorial do tensor de curvatura de Riemann-Cartan exibe a estrutura de 2-forma, *viz.* $R_{abcd} = -R_{bacd}$. Isto permite definir os duais da curvatura tanto à esquerda $(*R)_{abcd}$, quanto à direita $(R*)_{abcd}$.

B. Campos de Spin-2 com Origem na Torção

A quase todos os campos de interação são associadas partículas bosônicas fundamentais como resultado do processo de quantização destes campos. A excessão é o campo gravitacional da Relatividade Geral, teoria para a qual não é conhecida uma versão quântica. Apesar deste fato, a analogia entre o campo de spin-2 que surge na forma linearizada da Relatividade Geral e os potenciais dos campos de calibre das versões clássicas das demais teorias de interação é inevitável, e o campo de spin-2 sem massa e interagente que deriva do campo gravitacional einsteiniano é comumente associado ao "gráviton". Seguindo esta lógica, em qualquer extensão da Relatividade Geral na qual a torção é incorporada, novos campos bosônicos fundamentais devem ser esperados. Além disso, o número de graus de liberdade da torção sugere que estes campos devem possuir spin 0, 1 ou 2.

Seguindo Novello [89] e Novello & Trajtenberg [88], em um espaço-tempo de Riemann-Cartan é possível, fazendo uso da extensão para espaços-tempos curvos da teoria de Fierz-Pauli na representação de Fierz (Subseção III B), associar à torção dois campos de spin-2 fundamentais, φ_{ab} e ψ_{ab}, impondo a seguinte decomposição para as componentes da torção

$$S^{a}{}_{cd} = \Phi_{cd}{}^{a} + (*\Psi)_{cd}{}^{a} + \Sigma^{a}{}_{cd}\,, \tag{109}$$

onde os campos Φ_{cda} e Ψ_{cda} são componentes dos tensores de Fierz definidos, respectivamente, em termos dos campos φ_{ab} e ψ_{ab}, cada um com 10 graus de liberdade, e o objeto com componentes Σ_{acd} completa os 24 graus de liberdade da torção. Será assumido aqui, no entanto, que a torção está sujeita à seguinte restrição adicional

$$\Sigma_{abc} = \frac{1}{2} g_{a[c} g_{d]b} \Phi^{d} + \eta_{abcd} \Psi^{d}\,, \tag{110}$$

onde $\Phi^{b} \equiv g^{ac} \Phi_{ac}{}^{b}$ e $\Psi^{b} \equiv g^{ac} \Psi_{ac}{}^{b}$, o que reduz os 24 graus de liberdade originais da torção a apenas 20 (espaço-tempo de Riemann-Cartan restrito). Neste caso, a torção pode ser decomposta em apenas dois campos de spin-2.

A escolha mais natural para a ação que define a dinâmica de uma teoria construída sobre um espaço-tempo de Riemann-Cartan, e que recupera a teoria einsteiniana no limite de torção nula, é a ação de Einstein-Cartan da teoria ECSK (*cf.* Kibble [18], Sciama [16], Trautmann

[19], Hehl *et al.* [20, 21])

$$\mathcal{S}_{EC} = \frac{1}{2\kappa}\int R\,\eta\,, \tag{111}$$

onde R é o escalar de curvatura de Riemann-Cartan e $\kappa = 8\pi G$ é a constante gravitacional de Einstein. Seguindo Novello [89] e Novello & Trajtenberg [88], será adotada a ação de Einstein-Cartan como ponto de partida para construir a dinâmica da teoria. Nesta geometria, fazendo uso da decomposição (26) para o escalar de curvatura de Riemann-Cartan

$$R = \overset{\circ}{R} + K^{ab}{}_{c}K^{c}{}_{ab} - K^{a}{}_{ac}K^{cb}{}_{b} + \overset{\circ}{D}{}^{b}K^{a}{}_{ab} - \overset{\circ}{D}{}_{a}K^{ab}{}_{b}\,,$$

pode-se obter a seguinte relação de equivalência dinâmica

$$\int R\,\eta \sim \int \left(\overset{\circ}{R} + K^{ab}{}_{r}K^{r}{}_{ab} - K^{a}{}_{ar}K^{rb}{}_{b}\right)\eta\,, \tag{112}$$

onde $\overset{\circ}{R}$ é o escalar de curvatura de Riemann, e o símbolo "$\sim$" indica que as ações diferem apenas por um termo de borda, *viz.*

$$\int \overset{\circ}{D}{}^{b}\big(K^{a}{}_{ab} - K_{ba}{}^{a}\big)\,\eta\,.$$

A decomposição (109), sujeita à restrição (110), permite, fazendo uso da propriedade cíclica (98b), escrever a seguinte expressão para o tensor de contorção (22) em termos dos tensores de Fierz

$$K_{abc} = 2\varPhi_{acb} + 2(*\varPsi)_{acb} + g_{a[b}g_{d]c}\varPhi^{d} + \eta_{acbd}\varPsi^{d}\,, \tag{113}$$

A expressão (113) acima permite obter, após manipulações diretas, a seguinte identidade para os termos oriundos da contorção na ação (112) (Novello [89], Novello & Trajtenberg [88])

$$K^{ab}{}_{c}K^{c}{}_{ab} - K^{a}{}_{ac}K^{cb}{}_{b} = -2\big(\varPhi_{abc}\varPhi^{abc} - \varPhi_{a}\varPhi^{a}\big) + 2\big(\varPsi_{abc}\varPsi^{abc} - \varPsi_{a}\varPsi^{a}\big) - 4\varPhi_{abc}(*\varPsi)^{abc}\,. \tag{114}$$

Fazendo uso das expressões (97a), (97b), da identidade de Banchi (18b) para a curvatura riemanniana, da identidade (100), e da propriedade cíclica (99), pode-se obter a seguinte relação de equivalência para o termo de interação

$$2\int \varPhi_{abc}(*\varPsi)^{abc}\,\eta \sim \int (*\overset{\circ}{R})_{abcd}\psi^{ac}\varphi^{bd}\,\eta\,, \tag{115}$$

o que permite reescrever a ação (111), finalmente, na forma (Novello [89], Novello & Trajtenberg [88])

$$\mathcal{S}_{EC} \sim \frac{1}{2\kappa}\int\Big(\overset{\circ}{R} - 2I[\Phi] + 2I[\Psi] - 2(*\overset{\circ}{R})_{abcd}\psi^{ac}\varphi^{bd}\Big)\,\eta\,, \tag{116}$$

onde foram definidos os invariantes

$$I[\Phi] \equiv \Phi_{abc}\Phi^{abc} - \Phi_a\Phi^a\,, \tag{117a}$$

$$I[\Psi] \equiv \Psi_{abc}\Psi^{abc} - \Psi_a\Psi^a\,. \tag{117b}$$

Como discutido na Subseção III C, o termo de interação $(*\overset{\circ}{R})_{abcd}\varphi^{ac}\psi^{bd}$ cria problemas de consistência para as equações dinâmicas dos campos de spin-2 derivadas da ação (116) em um espaço-tempo curvo arbitrário. Este fato sugere que seja assumido aqui que estes campos não interagem nem entre si, nem com os demais campos de matéria (exceto pela interação gravitacional), o equivale a adotar, ao invés da ação da teoria ECSK, a seguinte ação alternativa

$$\tilde{\mathcal{S}}_{Grav} = \frac{1}{2\kappa}\int\Big(\overset{\circ}{R} - 2U[\Phi] + 2U[\Psi]\Big)\eta\,, \tag{118}$$

definida em termos dos novos invariantes

$$U[\Phi] \equiv \Phi_{abc}\Phi^{abc} - \Phi_a\Phi^a - V[\Phi]\,, \tag{119a}$$

$$U[\Psi] \equiv \Psi_{abc}\Psi^{abc} - \Psi_a\Psi^a - V[\Psi]\,, \tag{119b}$$

onde foram introduzidos potenciais de auto-interação para os campos de spin-2 com a mesma forma funcional. O problema variacional aplicado à ação $\delta[\tilde{\mathcal{S}}_{Grav} + \mathcal{S}_{Mat}] = 0$, com respeito à métrica e aos campos φ_{ab} e ψ_{ab}, produz o seguinte sistema de equações de campo da gravitação e equações dinâmicas para os campos de spin-2

$$\overset{\circ}{R}_{ab} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}g_{ab} = -\kappa T_{ab} + U_{ab}[\Phi] - U_{ab}[\Psi]\,, \tag{120a}$$

$$\overset{\circ}{D}{}^c\Phi_{c(ab)} - \frac{\partial V[\Phi]}{\partial\varphi^{ab}} = 0\,, \tag{120b}$$

$$\overset{\circ}{D}{}^c\Psi_{c(ab)} - \frac{\partial V[\Psi]}{\partial\psi^{ab}} = 0\,, \tag{120c}$$

onde T_{ab} é, novamente, o tensor momentum-energia da matéria ordinária, e

$$U_{ab}[\Phi] = 4\Phi_{acd}\Phi_b{}^{cd} + 2\Phi_{cda}\Phi^{cd}{}_b - 2\Phi^c\Phi_{c(ab)} - 2\Phi_a\Phi_b - 2\frac{\partial V[\Phi]}{\partial g^{ab}} - U[\Phi]g_{ab}\,, \quad (121a)$$

$$U_{ab}[\Psi] = 4\Psi_{acd}\Psi_b{}^{cd} + 2\Psi_{cda}\Psi^{cd}{}_b - 2\Psi^c\Psi_{c(ab)} - 2\Psi_a\Psi_b - 2\frac{\partial V[\Psi]}{\partial g^{ab}} - U[\Psi]g_{ab}\,, \quad (121b)$$

são os tensores momentum-energia dos campos de spin-2. Na presente formulação, estes campos de spin-2 atuam como fontes adicionais da curvatura riemanniana. Lembrando que o lado esquerdo das equações de movimento (120b) e (120c) tem a forma (102)

$$\mathring{D}^a\Phi_{a(bc)} = -\mathring{D}_a\mathring{D}^a\varphi_{bc} + \frac{1}{2}\left(\mathring{D}^a\mathring{D}_{(c}\varphi_{b)a} + \mathring{D}_{(c}\mathring{D}^a\varphi_{b)a}\right) - \mathring{D}_b\mathring{D}_c\varphi + \left(\mathring{D}_a\mathring{D}^a\varphi - \mathring{D}_a\mathring{D}_d\varphi^{ad}\right)g_{bc}\,,$$

i.e. o limite de curvatura nula para ambas as equações de movimento (120b)-(120c) é a equação de Fierz-Pauli (76) para um campo de spin-2 livre

$$\Box\varphi_{ab} - \partial^c\partial_{(a}\varphi_{b)c} + \partial_a\partial_b\varphi - \big(\Box\varphi - \partial^c\partial^d\varphi_{cd}\big)\eta_{ab} + \frac{\partial V[\Phi]}{\partial\varphi^{ab}} = 0\,.$$

Finalmente, assumindo-se a validade da equação de conservação de matéria-energia para a matéria ordinária, $\mathring{D}^a T_{ab} = 0$, a divergência nula do tensor de Einstein implica a condição

$$\mathring{D}^a\big(U_{ab}[\Phi] - U_{ab}[\Psi]\big) = 0\,. \quad (122)$$

Como, na presente formulação, estes campos de spin-2 são "estéreis" (*i.e.* interagem apenas com o campo gravitacional), esta condição reduz-se, finalmente, às equações de conservação independentes para os campos de spin-2

$$\mathring{D}^a U_{ab}[\Phi] = 0\,, \quad \mathring{D}^a U_{ab}[\Psi] = 0\,. \quad (123)$$

Nota-se que os campos φ_{ab} e ψ_{ab} possuem energias com sinais opostos, e, consequentemente, no caso em que os campos possuem a mesma energia

$$U_{ab}[{}^0\Phi] = U_{ab}[{}^0\Psi] \quad (124)$$

suas contribuições se cancelam, o que equivale a um "estado de vácuo da torção".

C. Campos de Spin-2 no Universo de FLRW

Com o objetivo de abordar o problema da energia escura, será tratado aqui o caso em que os campos de spin-2 massivos e estéreis oriundos da torção atuam, juntamente com as demais componentes material-energéticas ordinárias, como fonte da curvatura riemanniana de um espaço-tempo espacialmente homogêneo e isotrópico. Como discutido na Seção II C, este espaço-tempo é caracterizado pela métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-\epsilon r^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2\right) , \tag{125}$$
$$\epsilon = -1, 0, +1 .$$

Em termos do campo de correferenciais inerciais com o qual está equipado o feixe de geodésicas associado ao fluído cósmico (observador cósmico) (53)

$$\theta^{(0)} = dt , \tag{126a}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{A(t)}{\sqrt{1-\epsilon r^2}}\, dr , \tag{126b}$$

$$\theta^{(2)} = A(t) r\, d\vartheta , \tag{126c}$$

$$\theta^{(3)} = A(t) r \sin\vartheta\, d\phi , \tag{126d}$$

são obtidos os seguintes coeficientes de rotação de Ricci não nulos correspondentes à métrica (125)

$$\mathring{\Gamma}^{(0)}{}_{(1)(1)} = \mathring{\Gamma}^{(1)}{}_{(1)(0)} = \mathring{\Gamma}^{(0)}{}_{(2)(2)} = \mathring{\Gamma}^{(2)}{}_{(2)(0)} = \mathring{\Gamma}^{(0)}{}_{(3)(3)} = \mathring{\Gamma}^{(3)}{}_{(3)(0)} = \frac{\dot{A}}{A} , \tag{127a}$$

$$\mathring{\Gamma}^{(1)}{}_{(2)(2)} = -\mathring{\Gamma}^{(2)}{}_{(2)(1)} = \mathring{\Gamma}^{(1)}{}_{(3)(3)} = -\mathring{\Gamma}^{(3)}{}_{(3)(1)} = -\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{Ar} , \tag{127b}$$

$$\mathring{\Gamma}^{(2)}{}_{(3)(3)} = -\mathring{\Gamma}^{(3)}{}_{(3)(2)} = -\frac{\mathrm{cotg}\vartheta}{Ar} . \tag{127c}$$

A distribuição de matéria-energia compatível com a hipótese de homogeneidade e isotropia espacial é dada, neste referencial, pelo tensor momentum-energia de um fluído perfeito

$$T_{(a)(b)} = (\rho + p) V_{(a)} V_{(b)} - p\eta_{(a)(b)} , \tag{128}$$

sendo $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$ funções apenas do tempo cósmico. O problema que se coloca neste ponto é saber se existem campos φ_{ab} e ψ_{ab} cujos tensores momentum-energia exibem a forma (128).

Nesta geometria, as componentes não nulas do tensor de Fierz Φ_{abc} e seu traço Φ_a exibem a seguinte forma

$$\Phi_{(0)} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{(0)(0)} - \frac{\dot{A}}{A}\Big(3\varphi_{(0)(0)} + \varphi_{(1)(1)} + \varphi_{(2)(2)} + \varphi_{(3)(3)}\Big) + 2\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(1)} + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(0)(2)}\,, \tag{129a}$$

$$\Phi_{(1)} = -\dot{\varphi}_{(0)(1)} - 4\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(1)} + \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\left(2\varphi_{(1)(1)} - \varphi_{(2)(2)} - \varphi_{(3)(3)}\right) + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(1)(2)}\,, \tag{129b}$$

$$\Phi_{(2)} = -\dot{\varphi}_{(0)(2)} - 4\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(2)} + 3\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(2)} + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\left(\varphi_{(2)(2)} - \varphi_{(3)(3)}\right)\,, \tag{129c}$$

$$\Phi_{(3)} = -\dot{\varphi}_{(0)(3)} - 4\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(3)} + 3\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(3)} + 2\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(2)(3)}\,, \tag{129d}$$

$$\Phi_{(0)(1)(0)} = \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(1)} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\left(\varphi_{(2)(2)} - \varphi_{(3)(3)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(1)(2)} = -\Phi_{(1)(0)(0)}\,, \tag{129e}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{(0)(1)(1)} = \frac{1}{2}\Big[-\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_{(0)(0)} - \dot{\varphi}_{(1)(1)} + \frac{\dot{A}}{A}\left(2\varphi_{(0)(0)} + \varphi_{(2)(2)} + \varphi_{(3)(3)}\right) \\ - \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(1)} - \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(0)(2)}\Big] = -\Phi_{(1)(0)(1)}\,,\end{aligned} \tag{129f}$$

$$\Phi_{(0)(1)(2)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(1)(2)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(1)(2)}\right) = -\Phi_{(1)(0)(2)}\,, \tag{129g}$$

$$\Phi_{(0)(1)(3)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(1)(3)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(1)(3)}\right) = -\Phi_{(1)(0)(3)}\,, \tag{129h}$$

$$\Phi_{(0)(2)(0)} = \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(2)} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(2)} - \frac{1}{2}\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\left(\varphi_{(2)(2)} - \varphi_{(3)(3)}\right) = -\Phi_{(2)(0)(0)}\,, \tag{129i}$$

$$\Phi_{(0)(2)(1)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(1)(2)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(1)(2)} + \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(2)}\right) = -\Phi_{(2)(0)(1)}\,, \tag{129j}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{(0)(2)(2)} = \frac{1}{2}\Big[-\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_{(0)(0)} - \dot{\varphi}_{(2)(2)} + \frac{\dot{A}}{A}\left(2\varphi_{(0)(0)} + \varphi_{(1)(1)} + \varphi_{(3)(3)}\right) \\ - \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(1)} - \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(0)(2)}\Big] = -\Phi_{(2)(0)(2)}\,,\end{aligned} \tag{129k}$$

$$\Phi_{(0)(2)(3)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(2)(3)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(2)(3)}\right) = -\Phi_{(2)(0)(3)}\,, \tag{129l}$$

$$\Phi_{(0)(3)(0)} = \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(3)} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(3)} - \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(2)(3)} = -\Phi_{(3)(0)(0)}\,, \tag{129m}$$

$$\Phi_{(0)(3)(1)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(1)(3)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(1)(3)} + \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(3)}\right) = -\Phi_{(3)(0)(1)}\,, \tag{129n}$$

$$\Phi_{(0)(3)(2)} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_{(2)(3)} + \frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(2)(3)} + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(0)(3)}\right) = -\Phi_{(3)(0)(2)}\,, \tag{129o}$$

$$\Phi_{(0)(3)(3)} = \frac{1}{2}\left[-\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_{(0)(0)} - \dot{\varphi}_{(3)(3)} + \frac{\dot{A}}{A}\left(2\varphi_{(0)(0)} + \varphi_{(1)(1)} + \varphi_{(2)(2)}\right) - \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(1)}\right] = -\Phi_{(3)(0)(3)} \tag{129p}$$

$$\Phi_{(1)(2)(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(2)} = -\Phi_{(2)(1)(0)}\,, \tag{129q}$$

$$\Phi_{(1)(2)(1)} = \frac{1}{2}\left[-\dot{\varphi}_{(0)(2)} - 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(2)} + \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(2)} + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\left(\varphi_{(2)(2)} - \varphi_{(3)(3)}\right)\right] = -\Phi_{(1)(1)(2)}\,, \tag{129r}$$

$$\Phi_{(1)(2)(2)} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_{(0)(1)} + 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(1)} - \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\left(\varphi_{(1)(1)} - \varphi_{(3)(3)}\right) - \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(1)(2)}\right] = -\Phi_{(2)(1)(2)}\,, \tag{129s}$$

$$\Phi_{(1)(2)(3)} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(2)(3)} = -\Phi_{(2)(1)(3)}\,, \tag{129t}$$

$$\Phi_{(1)(3)(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(0)(3)} = -\Phi_{(3)(1)(0)}\,, \tag{129u}$$

$$\Phi_{(1)(3)(1)} = \frac{1}{2}\left[-\dot{\varphi}_{(0)(3)} - 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(3)} + \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(3)} + 2\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(2)(3)}\right] = -\Phi_{(3)(1)(1)}\,, \tag{129v}$$

$$\Phi_{(1)(3)(2)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(2)(3)} + \frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(1)(3)}\right] = -\Phi_{(3)(1)(2)}\,, \tag{129w}$$

$$\Phi_{(1)(3)(3)} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_{(0)(1)} + 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(1)} - \frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\left(\varphi_{(1)(1)} - \varphi_{(2)(2)}\right)\right] = -\Phi_{(3)(1)(3)}\,, \tag{129x}$$

$$\Phi_{(2)(3)(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(0)(3)} = -\Phi_{(3)(2)(0)}\,, \tag{129y}$$

$$\Phi_{(2)(3)(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(1)(3)} = -\Phi_{(3)(2)(1)}\,, \tag{129z}$$

$$\Phi_{(2)(3)(2)} = \frac{1}{2}\left[-\dot{\varphi}_{(0)(3)} - 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(3)} + 2\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(3)} + 4\frac{\text{cotg}\vartheta}{rA}\varphi_{(2)(3)}\right] = -\Phi_{(3)(2)(2)}\,, \tag{129aa}$$

$$\Phi_{(2)(3)(3)} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_{(0)(2)} + 3\frac{\dot{A}}{A}\varphi_{(0)(2)} - 2\frac{\sqrt{1-\epsilon r^2}}{rA}\varphi_{(1)(2)}\right] = -\Phi_{(3)(2)(3)}\,. \tag{129bb}$$

É procurada uma forma para os campos φ_{ab} e ψ_{ab} tal que os tensores momentum-energia correspondentes exibem a forma (128). As expressões (129a)-(129bb) sugerem a seguinte escolha para as componentes dos campos de spin-2, em forma matricial

$$\left(\varphi_{(a)(b)}\right) = \begin{pmatrix} \chi(t) & & & \\ & \Phi(t) & & \\ & & \Phi(t) & \\ & & & \Phi(t) \end{pmatrix} \quad , \tag{130a}$$

$$\left(\psi_{(a)(b)}\right) = \begin{pmatrix} \xi(t) & & & \\ & \Psi(t) & & \\ & & \Psi(t) & \\ & & & \Psi(t) \end{pmatrix} \quad . \tag{130b}$$

De fato, as expressões das componentes dos tensores de Fierz e seus traços (129a)-(129bb) reduzem-se, para esta escolha, a apenas as seguintes componentes não nulas

$$\Phi_{(0)} = -3\left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right] , \tag{131a}$$

$$\Phi_{(0)(i)(j)} = \left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right] \delta_{(i)(j)} , \tag{131b}$$

$$\Psi_{(0)} = -3\left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right] , \tag{131c}$$

$$\Psi_{(0)(i)(j)} = \left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right] \delta_{(i)(j)} , \tag{131d}$$

ao passo que as expressões para os invariantes assumem a forma

$$U[\Phi] = -3\left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right]^2 - V[\Phi] . \tag{131e}$$

$$U[\Psi] = -3\left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right]^2 - V[\Psi] . \tag{131f}$$

Serão assumidos potenciais de auto-interação com a forma

$$V[\Phi] = \sum_N a_N \left(\varphi_{ab}\varphi^{ab}\right)^{N-1} - b_N \varphi^N , \tag{132a}$$

$$V[\Psi] = \sum_N \tilde{a}_N \left(\psi_{ab}\psi^{ab}\right)^{N-1} - \tilde{b}_N \psi^N , \tag{132b}$$

onde a soma é feita sobre um conjunto de índices $\{N\}$ arbitrário e, para todo N , a_N , b_N , $\tilde{a}_N$ e $\tilde{b}_N$ são constantes. Estes potenciais generalizam o termo de massa da ação de Fierz-Pauli

(74) para campos de spin-2 massivos. Em termos da escolha (130), estes potenciais (132a) e (132b) podem ser reescritos como segue

$$V[\Phi] = \sum_N a_N \big(\chi^2 + 3\Phi^2\big)^{N-1} - b_N \big(\chi - 3\Phi\big)^N \,, \tag{133a}$$

$$V[\Psi] = \sum_N \tilde{a}_N \big(\xi^2 + 3\Psi^2\big)^{N-1} - \tilde{b}_N \big(\xi - 3\Psi\big)^N \,. \tag{133b}$$

Com isso, obtém-se as seguintes componentes não nulas do tensor momentum-energia dos campos de spin-2

$$U_{(0)(0)}[\Phi] = -3\left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right]^2 - 3X[\Phi] \,, \tag{134a}$$

$$U_{(i)(j)}[\Phi] = \left\{\left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right]^2 - Y[\Phi]\right\}\delta_{(i)(j)} \,, \tag{134b}$$

$$U_{(0)(0)}[\Psi] = -3\left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right]^2 - 3X[\Psi] \,, \tag{134c}$$

$$U_{(i)(j)}[\Psi] = \left\{\left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right]^2 - Y[\Psi]\right\}\delta_{(i)(j)} \,, \tag{134d}$$

onde foram definidos os termos oriundos da variação dos potenciais

$$3X[\Phi] = \sum_N a_N\Big[4(N-1)(\chi^2+3\Phi^2)^{N-2}\chi^2 - (\chi^2+3\Phi^2)^{N-1}\Big] - b_N\Big[2N(\chi-3\Phi)^{N-1}\chi - (\chi-3\Phi)^N\Big] \,, \tag{135a}$$

$$Y[\Phi] = \sum_N a_N\Big[4(N-1)(\chi^2+3\Phi^2)^{N-2}\Phi^2 + (\chi^2+3\Phi^2)^{N-1}\Big] - b_N\Big[2N(\chi-3\Phi)^{N-1}\Phi + (\chi-3\Phi)^N\Big] \,, \tag{135b}$$

e o mesmo, *mutatis mutandis*, para o campo ψ_{ab}. Definido, também, os termos cinéticos

$$K[\Phi] \equiv \left[\dot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}(\chi + \Phi)\right]^2 \,, \tag{136a}$$

$$K[\Psi] \equiv \left[\dot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}(\xi + \Psi)\right]^2 \,, \tag{136b}$$

pode-se escrever os tensores momentum-energia dos campos de spin-2 φ_{ab} e ψ_{ab} na seguinte forma matricial

$$\Big(U_{(a)(b)}[\Phi]\Big) = \begin{pmatrix} -3K[\Phi] - 3X[\Phi] & & & \\ & K[\Phi] - Y[\Phi] & & \\ & & K[\Phi] - Y[\Phi] & \\ & & & K[\Phi] - Y[\Phi] \end{pmatrix} , \tag{137a}$$

$$
\Big(U_{(a)(b)}[\Psi]\Big) = \begin{pmatrix} -3K[\Psi]-3X[\Psi] & & & \\ & K[\Psi]-Y[\Psi] & & \\ & & K[\Psi]-Y[\Psi] & \\ & & & K[\Psi]-Y[\Psi] \end{pmatrix} . \tag{137b}
$$

A forma diagonal dos tensores momentum-energia (137a) e (137b) acima sugere que sejam definidas as densidades de energia e pressões isotrópicas associadas ao campos Φ e Ψ como segue

$$
\rho_\Phi \equiv \frac{3}{\kappa}\big(K[\Phi]+X[\Phi]\big)\,, \tag{138a}
$$

$$
p_\Phi \equiv -\frac{1}{\kappa}\big(K[\Phi]-Y[\Phi]\big)\,, \tag{138b}
$$

$$
\rho_\Psi \equiv -\frac{3}{\kappa}\big(K[\Psi]+X[\Psi]\big)\,, \tag{138c}
$$

$$
p_\Psi \equiv \frac{1}{\kappa}\big(K[\Psi]-Y[\Psi]\big)\,, \tag{138d}
$$

o que permite escrever os tensores momentum-energia dos campos φ_{ab} e ψ_{ab} na forma (128)

$$
\frac{1}{\kappa}U_{(a)(b)}[\Phi] = -\big(\rho_\Phi + p_\Phi\big)V_{(a)}V_{(b)} + p_\Phi \eta_{(a)(b)}\,, \tag{139a}
$$

$$
\frac{1}{\kappa}U_{(a)(b)}[\Psi] = \big(\rho_\Psi + p_\Psi\big)V_{(a)}V_{(b)} - p_\Psi \eta_{(a)(b)}\,. \tag{139b}
$$

Consequentemente, as equações de Einstein (120a) para a geometria FLRW assumem, no caso particular que resulta da escolha (130), a seguinte forma

$$
\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{\epsilon}{A^2} = \frac{\kappa}{3}\sum_I \rho_I + K[\Phi] + X[\Phi] - K[\Psi] - X[\Psi]\,, \tag{140a}
$$

$$
2\frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}^2+\epsilon}{A^2}\right) = -\kappa\sum_I p_I + K[\Phi] - Y[\Phi] - K[\Psi] + Y[\Psi]\,. \tag{140b}
$$

Combinando as equações de Einstein, obtém-se a equação de Raychaudhuri

$$
\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_I(\rho_I + 3p_I) + \frac{1}{2}\Big(X[\Psi]+Y[\Psi]\Big) - \frac{1}{2}\Big(X[\Phi]+Y[\Phi]\Big)\,, \tag{141}
$$

De fato, utilizando as definições (138a)-(138d), obtém-se

$$
\rho_\Phi + 3p_\Phi = \frac{3}{\kappa}\big(X[\Phi]+Y[\Phi]\big)\,, \tag{142}
$$

e o mesmo, *mutatis mutandis* para o campo ψ_{ab}.

Por outro lado, em termos das escolhas (130), as equações de movimento (120b) e (120c) reduzem-se ao seguinte conjunto de equações

$$\frac{\dot{A}}{A}\left[\dot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\chi+\Phi)\right]-\frac{1}{6}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\chi}=0\,, \tag{143a}$$

$$\ddot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\dot{\chi}+\dot{\Phi})+\left[\frac{\ddot{A}}{A}-\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2\right](\chi+\Phi)+2\frac{\dot{A}}{A}\left[\dot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\chi+\Phi)\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\Phi}=0\,. \tag{143b}$$

$$\frac{\dot{A}}{A}\left[\dot{\Psi}+\frac{\dot{A}}{A}(\xi+\Psi)\right]-\frac{1}{6}\frac{\partial V[\Psi]}{\partial\xi}=0\,, \tag{143c}$$

$$\ddot{\Psi}+\frac{\dot{A}}{A}(\dot{\xi}+\dot{\Psi})+\left[\frac{\ddot{A}}{A}-\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2\right](\xi+\Psi)+2\frac{\dot{A}}{A}\left[\dot{\Psi}+\frac{\dot{A}}{A}(\xi+\Psi)\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial V[\Psi]}{\partial\Psi}=0\,. \tag{143d}$$

Estas equações devem ainda ser compatíveis com as equações de conservação

$$\dot{\rho_{\Phi}}+3\frac{\dot{A}}{A}(\rho_{\Phi}+p_{\Phi})=0\,, \tag{144a}$$

$$\dot{\rho_{\Psi}}+3\frac{\dot{A}}{A}(\rho_{\Psi}+p_{\Psi})=0\,. \tag{144b}$$

Examinemos, inicialmente, o sistema de equações que descreve a dinâmica do campo φ_{ab}. A equação de conservação (144a) fornece o vínculo

$$\begin{aligned}2\left[\dot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\chi+\Phi)\right]&\left\{\ddot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\dot{\chi}+\dot{\Phi})+\left[\frac{\ddot{A}}{A}-\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2\right](\chi+\Phi)\right\}\\&+2\frac{\dot{A}}{A}\left[\dot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}(\chi+\Phi)\right]^2+\dot{X}[\Phi]+\frac{\dot{A}}{A}\big(3X[\Phi]+Y[\Phi]\big)=0\,.\end{aligned} \tag{145}$$

Tomando-se

$$\chi=-\Phi\,, \tag{146}$$

as equações de campo (143a) e (143b) e o vínculo (145) assumem, respectivamente, a seguinte forma

$$\frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi}+\frac{1}{6}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\Phi}=0\,, \tag{147a}$$

$$\ddot{\Phi}+2\frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi}-\frac{1}{2}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\Phi}=0\,, \tag{147b}$$

$$2\dot{\Phi}\left(\ddot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi}\right)+\dot{X}[\Phi]+\frac{\dot{A}}{A}\big(3X[\Phi]+Y[\Phi]\big)=0\,. \tag{147c}$$

Subtraindo as equações de campo (147a) e (147b), obtém-se

$$\ddot{\Phi}+\frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi}-\frac{2}{3}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\Phi}=0\,. \tag{148}$$

Substituindo a equação (148) no vínculo (147c), e impondo a condição adicional

$$3X[\Phi]=-Y[\Phi]\,, \tag{149}$$

segue

$$\dot{X}[\Phi]=-\frac{4}{3}\frac{\partial V[\Phi]}{\partial\Phi}\dot{\Phi}\,. \tag{150}$$

A equação (150) pode ser imediatamente integrada, o que fornece

$$3X[\Phi]=-Y[\Phi]=-4V[\Phi]-3\mu_0\,, \tag{151}$$

onde μ_0 é uma constante arbitrária. Neste caso, a equação de Raychaudhuri assume a seguinte forma

$$\frac{\ddot{A}}{A}=-\frac{\kappa}{6}\sum_I(\rho_I+3p_I)+X[\Phi]-X[\Psi]\,, \tag{152}$$

onde o "termo cosmológico" $X[\Phi]-X[\Psi]$ é função apenas dos potenciais.

Em termos da escolha (146), o potencial (133a) e os termos oriundos de sua variação, (135a) e (135b), assumem, respectivamente, a seguinte forma

$$V[\Phi]=\sum_N a_N 4^{N-1}\Phi^{2N-2}-b_N(-4)^N\Phi^N\,, \tag{153}$$

$$3X[\Phi]=\sum_N(N-2)a_N4^{N-1}\Phi^{2N-2}+\left(1-\frac{N}{2}\right)b_N(-4)^N\Phi^N\,, \tag{154a}$$

$$Y[\Phi]=\sum_N Na_N4^{N-1}\Phi^{2N-2}-\left(1-\frac{N}{2}\right)b_N(-4)^N\Phi^N\,. \tag{154b}$$

A condição de consistência (151) assume a forma

$$\sum_N 6a_N4^{N-1}\Phi^{2N-2}+\left[2\left(1-\frac{N}{2}\right)-8\right]b_N(-4)^N\Phi^N+6\mu_0=0\,, \tag{155}$$

a qual é satisfeita apenas para os coeficientes

$$a_N=\delta^1{}_N a_1\,,\quad b_N=\delta^{-6}_{\ N}b_{-6}+\delta^0{}_N b_0\,, \tag{156}$$

sujeitos ao vínculo

$$a_1 - b_0 = -\mu_0 \,. \tag{157}$$

Consequentemente, o único potencial compatível com a lei de conservação da energia em um cenário cosmológico espacialmente homogêneo e isotrópico é o que exibe, nesta geometria de FLRW e para as escolhas (130) e (149), a seguinte forma

$$V[\Phi] = -\mu\Phi^{-6} - \mu_0 \,, \tag{158}$$

onde foi definida a constante positiva $\mu \equiv b_{-6}/(4^6)$, e assume-se que a constante μ_0 é também positiva. Com isso obtém-se

$$X[\Phi] = \frac{1}{3}\Big(4\mu\Phi^{-6} + \mu_0\Big) \,. \tag{159}$$

Analogamente, tomando-se $\xi = -\Psi$, e reproduzindo para o campo ψ_{ab} a mesma argumentação desenvolvida acima para o campo φ_{ab} , obtém-se

$$V[\Psi] = -\nu\Psi^{-6} - \nu_0 \,, \tag{160}$$

$$X[\Psi] = \frac{1}{3}\Big(4\nu\Psi^{-6} + \nu_0\Big) \,, \tag{161}$$

sendo ν e ν_0 constantes positivas. Nota-se que é possível agora reconstruir os potenciais em sua forma covariante original, *viz.*

$$V[\Phi] = -\beta\varphi^{-6} - \mu_0 \,, \tag{162}$$

sendo $\beta \equiv 4^6\mu$ e $\varphi = g^{ab}\varphi_{ab}$, e o mesmo para o campo ψ_{ab} .

Neste caso, as equações de Raychaudhuri, Friedman e as equações dinâmicas dos campos de spin-2 assumem, respectivamente, a seguinte forma

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_I(\rho_I + 3p_I) + \frac{1}{3}\Big(4\mu\Phi^{-6} - 4\nu\Psi^{-6} + \mu_0 - \nu_0\Big) \,, \tag{163a}$$

$$\sum_I \rho_I + \rho_\Phi - \rho_\Psi = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{\epsilon}{A^2} \,, \tag{163b}$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi} - 4\mu\Phi^{-7} = 0 \,, \tag{163c}$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}\dot{\Psi} - 4\nu\Psi^{-7} = 0\,. \tag{163d}$$

Chama-se atenção para o sinal negativo na definição da densidade de energia do campo Ψ, como fica evidente na equação de Friedman (163b). Por outro lado, os termos oriundos dos potenciais na equação de Raychaudhuri exibem sinais opostos ao da respectiva densidade de energia, *i.e.* o fluído constituído pelo campo Ψ viola a Condição de Energia Fraca ($\rho_\Psi \leqslant 0$) mas respeita a Condição de Energia Forte

$$\rho_\Psi + 3p_\Psi \geqslant 0\,, \tag{164}$$

ao passo que o fluído constituído pelo campo Φ respeita a Condição de Energia Fraca ($\rho_\Phi \geqslant 0$) mas viola a Condição de Energia Forte (61)

$$\rho_\Phi + 3p_\Phi \leqslant 0\,. \tag{165}$$

Como mencionado anteriormente, a violação da Condição de Energia Forte é precondição para um regime de expansão cósmica acelerada, e também para um Universo não singular. De fato, no regime em que o "termo cosmológico" satisfaz

$$\frac{1}{3}\Big(4\mu\Phi^{-6} - 4\nu\Psi^{-6} + \mu_0 - \nu_0\Big) > \frac{\kappa}{6}\sum_l(\rho_l + 3p_l)\,, \tag{166}$$

o Universo expande aceleradamente.

Convém ressaltar que, apesar de todas as formas de matéria observadas no Universo serem do tipo ordinário (*i.e.* que respeitam ambas as condições de energias), os campos de spin-2 Φ e Ψ têm sua origem na torção e, portanto, não necessitam exibir as mesmas propriedades dos campos de matéria introduzidos pela via fenomenológica. Como os campos Φ e Ψ não interagem nem entre si, nem com as demais espécies componentes do fluído cósmico, pode-se definir, para cada uma delas, uma equação de estado

$$w_\Phi(t) = \frac{p_\Phi}{\rho_\Phi} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\Phi}^2 - 4V[\Phi] + 3\mu_0}{\dot{\Phi}^2 - \frac{4}{3}V[\Phi] + \mu_0}\right)\,, \tag{167}$$

e o mesmo para o campo Ψ.

D. Modelos Cosmológicos

Até este ponto, nenhuma restrição de natureza observacional foi feita. Em analogia com o modelo ΛCDM, será assumido que o fluído cósmico é composto de radiação (R), matéria bariônica (B), e uma matéria escura não bariônica (D). Além disso, será tratado apenas o caso de seção espacial plana ($\epsilon = 0$) (*cf.* Seção II C). Seguindo os mesmos princípios empregados na formulação do modelo ΛCDM (*cf.* Seção II C), será assumido que a matéria que compõe o fluído cósmico é livre de colisões, e as densidades de energia e pressões isotrópicas das espécies de matéria ordinária que constituem o fluído cósmico obedecem as equações de estado (55), *viz.* $w_B = w_D = 0$ e $w_R = 1/3$. Neste caso, evocando as equações de conservação de matéria-energia (60) para cada espécie de matéria ordinária, a dinâmica cósmica é descrita pelo sistema constituído pela equações equação de Raychaundhuri (163a) e pelas equações de campo (163c)-(163d)

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_l (1+3w_l)\Omega_{l0}\rho_{c0}\left(\frac{A_0}{A}\right)^{3(1+w_l)} + \frac{1}{3}\Big(4\mu\Phi^{-6} - 4\nu\Psi^{-6} + \mu_0 - \nu_0\Big)\,, \tag{168a}$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{\dot{A}}{A}\dot{\Phi} - 4\mu\Phi^{-7} = 0\,, \tag{168b}$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{\dot{A}}{A}\dot{\Psi} - 4\nu\Psi^{-7} = 0\,, \tag{168c}$$

sujeito ao vínculo imposto pela equação de Friedman (163b)

$$\sum_l \Omega_{l0} + \Omega_{\Phi 0} - \Omega_{\Psi 0} = 1\,, \tag{168d}$$

onde $\Omega_l \equiv \rho_l/\rho_c$, $\Omega_\Phi \equiv \rho_\Phi/\rho_c$ e $\Omega_\Psi \equiv -\rho_\Psi/\rho_c$, sendo $\rho_c = 3H^2/\kappa$ a densidade crítica de energia e $H \equiv \dot{A}/A$ o parâmetro de Hubble (*cf.* Seção II C). A dificuldade de obter soluções analíticas para o sistema (168a)-(168c) é evidente. No que segue, serão estudadas as soluções numéricas deste sistema.

Os valores das densidades relativas de energia das espécies componentes do fluído cósmico dependem do modelo cosmológico adotado, podendo, aqui, diferir dos respectivos valores inferidos no contexto do modelo ΛCDM. No entanto, seguindo a filosofia de modificações mínimas em relação às teorias dominantes, será assumido o conjunto de parâmetros que mais se aproxima dos valores inferidos naquele modelo, *viz.*

$$\Omega_{R0} = 5\times10^{-4} \;\; , \;\; \Omega_{B0} = 0.049 \;\; , \;\; \Omega_{D0} = (1-\alpha)0.25 \;\; , \;\; \Omega_{\Phi0}-\Omega_{\Psi0} = 0.70+\alpha0.25 \, , \tag{169}$$

juntamente com os valores[8] $H_0 = 0.70\times10^{-10}$ (anos)$^{-1}$ e $\Omega_{\Lambda0} = 0.70$ para, respectivamente, a constante de Hubble e a densidade relativa de energia escura observada (associada à constante cosmológica no modelo ΛCDM), lembrado que $\rho_{c0} = 3H_0^2/\kappa$. O parâmetro $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ indica uma possível contribuição de uma fração da densidade de energia do campo Φ para a matéria escura, ao passo que Ω_D representa a contribuição da matéria escura ordinária. Além disso, o cenário favorecido pelas observações é aquele no qual o termo cosmológico é positivo e muito próxima de zero no Universo atual, *viz.*

$$\frac{1}{3}\Big(4\mu\Phi_0^{-6} - 4\nu\Psi_0^{-6} + \mu_0 - \nu_0\Big) = \frac{\kappa}{3}\Omega_{\Lambda0}\rho_{c0} \, . \tag{170}$$

Fixando a relação entre os valores iniciais dos campos

$$\Psi_0 = \lambda\Phi_0 \, , \tag{171}$$

pode-se escrever o conjunto de valores iniciais (Φ_0, $\dot{\Phi}_0$, Ψ_0, $\dot{\Psi}_0$) compatíveis com as condições (168d) e (170) na seguinte forma

$$\Phi_0 = \pm\left[\frac{3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 - \mu_0 + \nu_0}{4\,(\mu - \lambda^{-6}\nu)}\right]^{-1/6} \, , \tag{172a}$$

$$\dot{\Phi}_0 = \pm\left[\Omega_{\Phi0}H_0^2 - \frac{\mu}{3}\left(\frac{3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 - \mu_0 + \nu_0}{\mu - \lambda^{-6}\nu}\right) + \frac{\mu_0}{3}\right]^{1/2} \, , \tag{172b}$$

$$\Psi_0 = \pm\lambda\left[\frac{3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 - \mu_0 + \nu_0}{4\,(\mu - \lambda^{-6}\nu)}\right]^{-1/6} \, , \tag{172c}$$

$$\dot{\Psi}_0 = \pm\left[\Omega_{\Psi0}H_0^2 - \lambda^{-6}\frac{\nu}{3}\left(\frac{3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 - \mu_0 + \nu_0}{\mu - \lambda^{-6}\nu}\right) + \frac{\nu_0}{3}\right]^{1/2} \, . \tag{172d}$$

A realidade das expressões (172a) e (172c) impõe os vínculos adicionais

$$\mu_0 - \nu_0 \leqslant 3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 \, , \tag{173a}$$

$$\frac{\nu}{\mu} \leqslant \lambda^6\left(1 + \frac{3\Omega_{\Lambda0}H_0^2 - \mu_0 + \nu_0}{3\Omega_{\Psi0}H_0^2 + \mu_0}\right)^{-1} \, . \tag{173b}$$

[8] 10^{-10}(anos)$^{-1} \approx 2\times10^{-33}$ eV

O valor de $\Omega_{\Phi 0} - \Omega_{\Psi 0}$ em (169) permite escrever cada uma das densidades relativas de energia dos campos de spin-2 como segue

$$\Omega_{\Phi 0} = 1.40 + \alpha 0.25 + \beta \,, \tag{174a}$$

$$\Omega_{\Psi 0} = 0.70 + \beta \,, \tag{174b}$$

onde foi introduzido um novo parâmetro β .

As figuras 1-5 asseguir exibem a evolução do fator de escala obtido pelas soluções numéricas do sistema de equações dinâmicas (168a)-(168c), sujeitas à condição (168d), e para diferentes valores dos parâmetros λ , α , β , μ/ν e μ_0/ν_0 . Foram procuradas soluções que respeitam os vínculos observacionais

$$A(t_*) \ll A_0 \,, \quad t_0 - t_* \gtrsim 1.2 \times 10^{10}\,\text{anos} \,, \tag{175}$$

onde t_* é o instante associado a uma singularidade ou a um bounce, e que ainda reproduzem os dados do modelo ΛCDM em todas as eras da história cósmica, exceto para $t \lesssim -1.2 \times 10^{10}\,\text{anos}$. Soluções com estas características resultam das seguintes escolhas

$$\mu \gg \nu \,, \quad \mu_0 > \nu_0 \,, \quad \Phi_0 \approx \Psi_0 \;\, (\lambda \approx 1) \,, \quad \dot{\Phi}_0 \approx \dot{\Psi}_0 \,.$$

Os resultados são comparados aos obtidos, fazendo uso da mesma ferramenta de cálculo numérico utilizada na obtenção das soluções do sistema (168a)-(168c) e para as mesmas condições iniciais, para os modelos da classe FLRW de maior relevância, *viz.* os modelos (com seção espacial plana, $\epsilon = 0$) descritos pela equação (*cf.* Subseção II C)

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}\sum_I (1 + 3w_I)\Omega_{I0}\rho_{c0}\left(\frac{A_0}{A}\right)^{3(1+w_I)} + \frac{\kappa}{3}\Omega_{\Lambda 0}\rho_{c0} \,, \tag{176}$$

sujeita à condição

$$\sum_I \Omega_{I0} + \Omega_{\Lambda 0} = 1 \,, \tag{177}$$

nos seguintes casos: (1) $\Omega_{R0} = 0$, $\Omega_{B0} = 1$, $\Omega_{D0} = 0$ e $\Lambda = 0$ ($\Omega_{\Lambda 0} = 0$) (Einstein-de Sitter), e (2) $\Omega_{R0} = 5 \times 10^{-4}$, $\Omega_{B0} = 0.05$, $\Omega_{D0} = 0.25$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.70$ (ΛCDM com seção espacial plana). Também serão comparados aos obtidos no modelo com quintessência (*cf.* Subseção II D) para um potencial com a forma $V[\phi] = V_0\phi^{-\alpha}$ (QCDM).

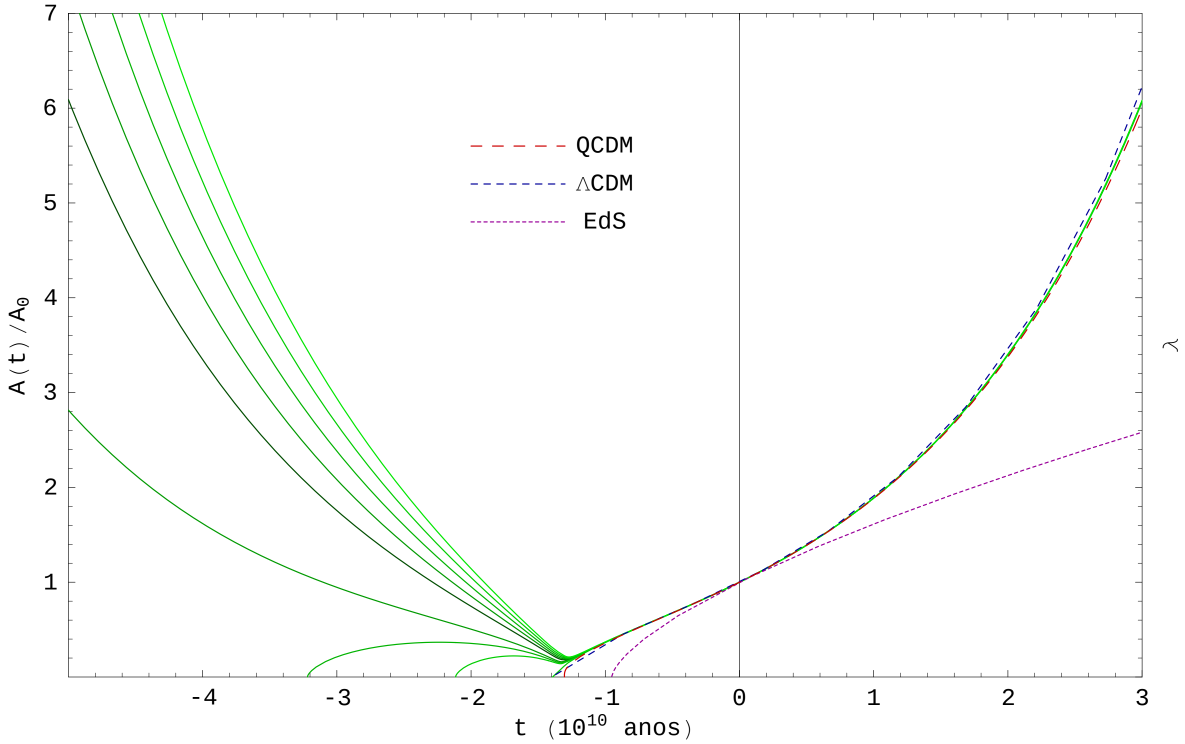

Figura 1: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\alpha = 0$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$, e diferentes valores do parâmetro $\lambda \equiv \Psi_0/\Phi_0$, sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

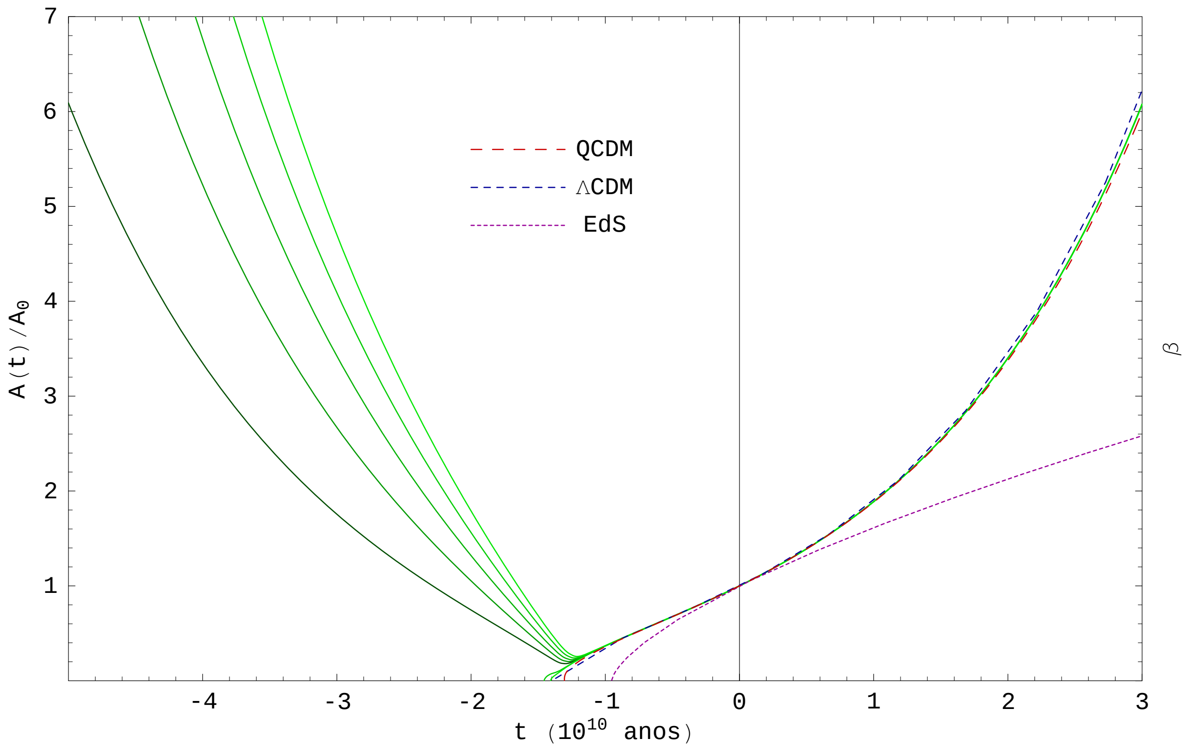

Figura 2: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\alpha = 0$, $\lambda = 1.1$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$, e diferentes valores do parâmetro β, sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

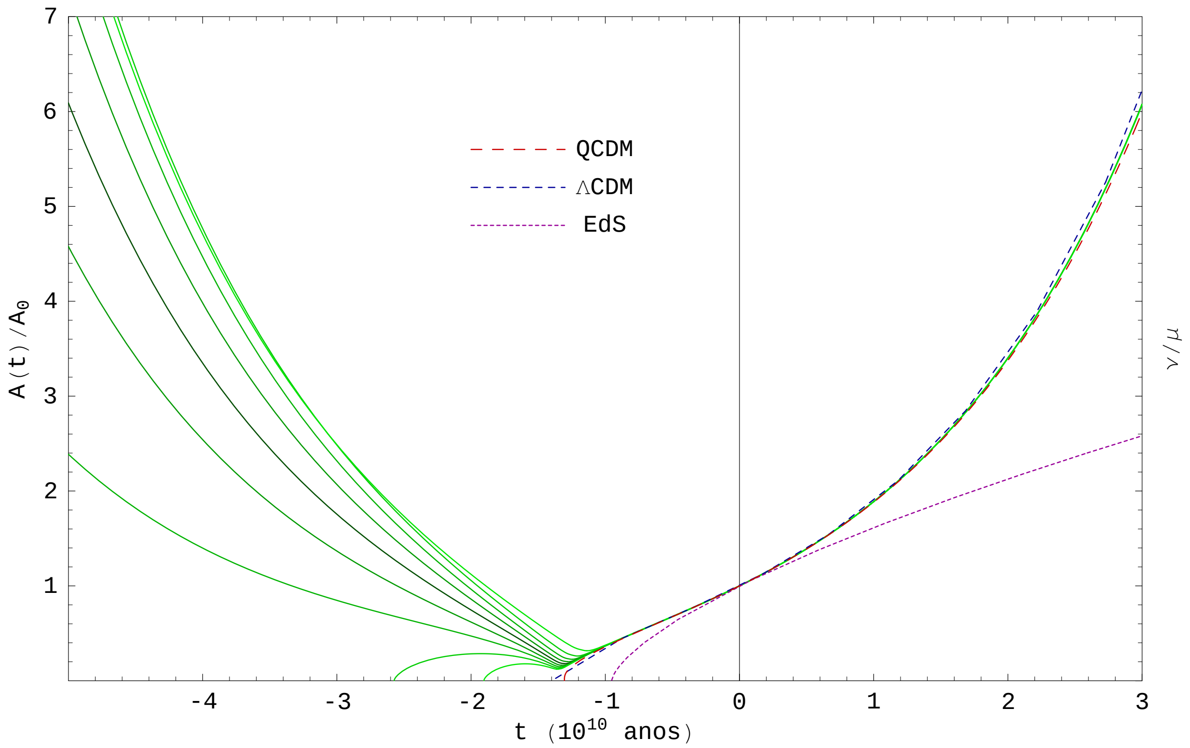

Figura 3: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\alpha = 0$, $\beta = 12$, $\lambda = 1.1$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$, e diferentes valores do parâmetro ν/μ , sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

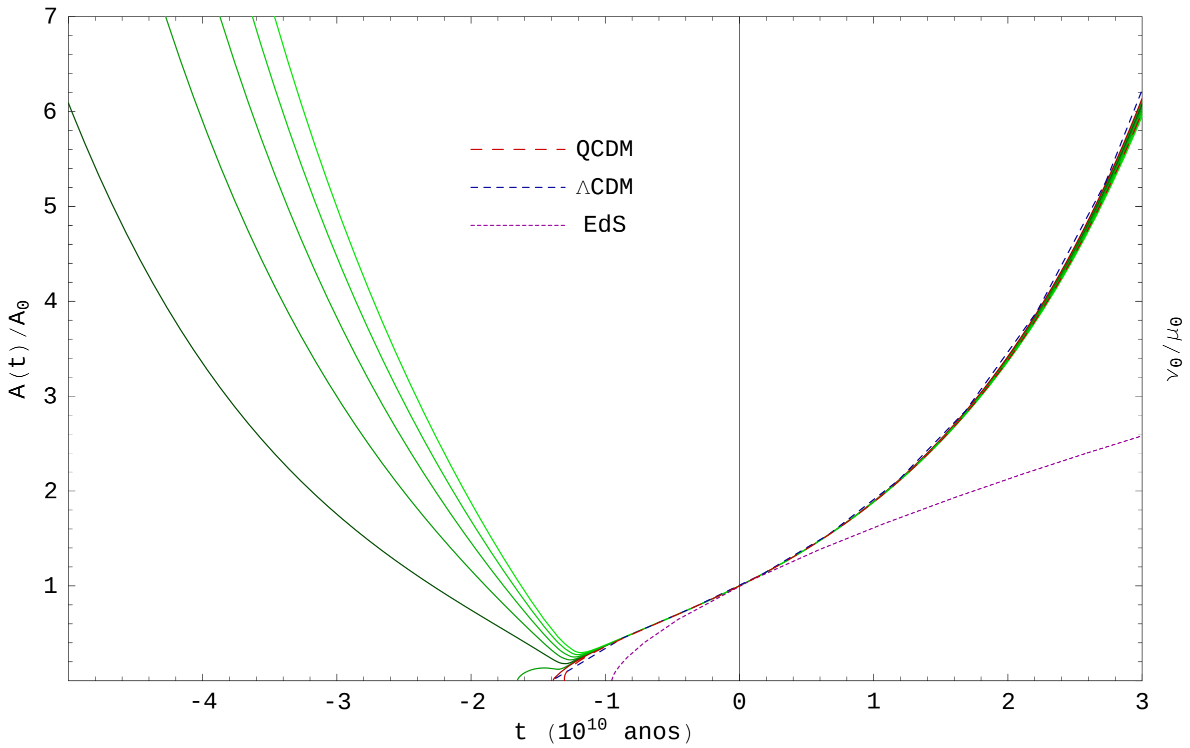

Figura 4: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\alpha = 0$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\lambda = 1.1$, e diferentes valores do parâmetro ν_0/μ_0 , sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

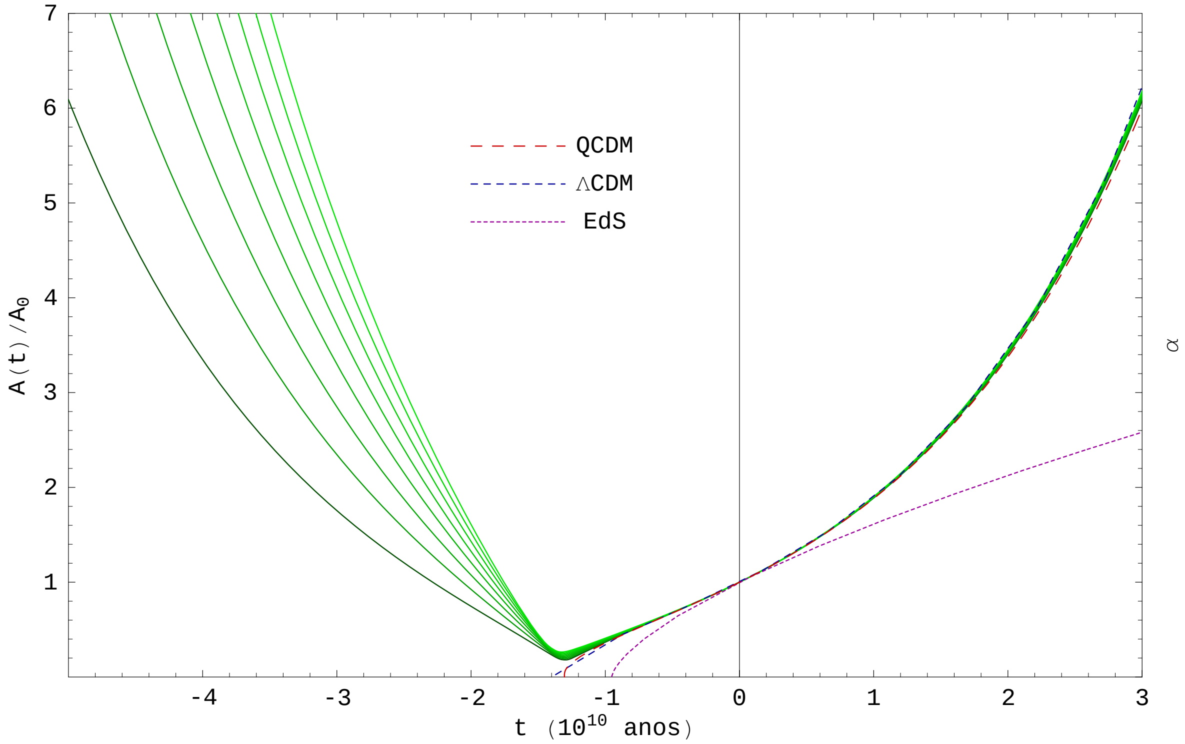

Figura 5: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1\times10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$, e diferentes valores do parâmetro α , sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

Dentre o conjunto de soluções exibidos acima, foram selecionados dois cenários representativos: uma solução com *bounce* e uma solução com singularidade incial. As figuras 6-27 exibem, para ambos os casos, a evolução das densidades relativas de energia $\Omega_\Phi(t) - \Omega_\Psi(t)$, $\Omega_B(t) + \Omega_D(t)$ e $\Omega_R(t)$, do parâmetro de desaceleração $q(t) \equiv -A\ddot{A}/\dot{A}^2$, do parâmetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{A}/A$, das magnitudes $\Phi(t)/\Phi_0$, $\Psi(t)/\Psi_0$, $\dot{\Phi}(t)/\dot{\Phi}_0$ e $\dot{\Psi}(t)/\dot{\Psi}_0$, das equações de estado $w_\Phi(t) \equiv p_\Phi/\rho_\Phi$ e $w_\Psi(t) \equiv p_\Psi/\rho_\Psi$, e do termo cosmológico $X[\Phi]-X[\Psi]$. Os gráficos mostram que, em ambos os cenários, o comportamento de todos os parâmetros cosmológicos reproduzem as previsões do modelo ΛCDM em todas as eras da história cósmica, exceto próximo ao bounce ou à singularidade inicial. Além disso, as equações de estado dos campos φ_{ab} e ψ_{ab} assumem valores no intervalo $-1 \leqslant w_{\Phi} \leqslant -1/3$, $-1 \leqslant w_{\Psi} \leqslant -1/3$.

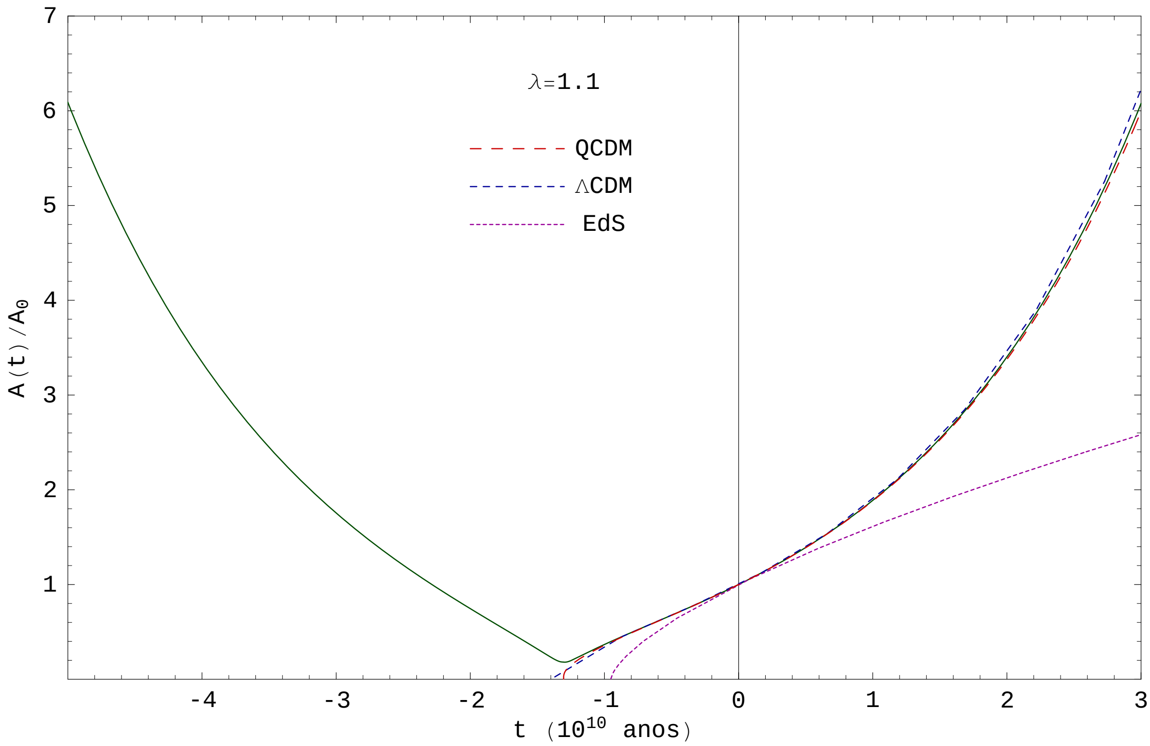

Figura 6: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

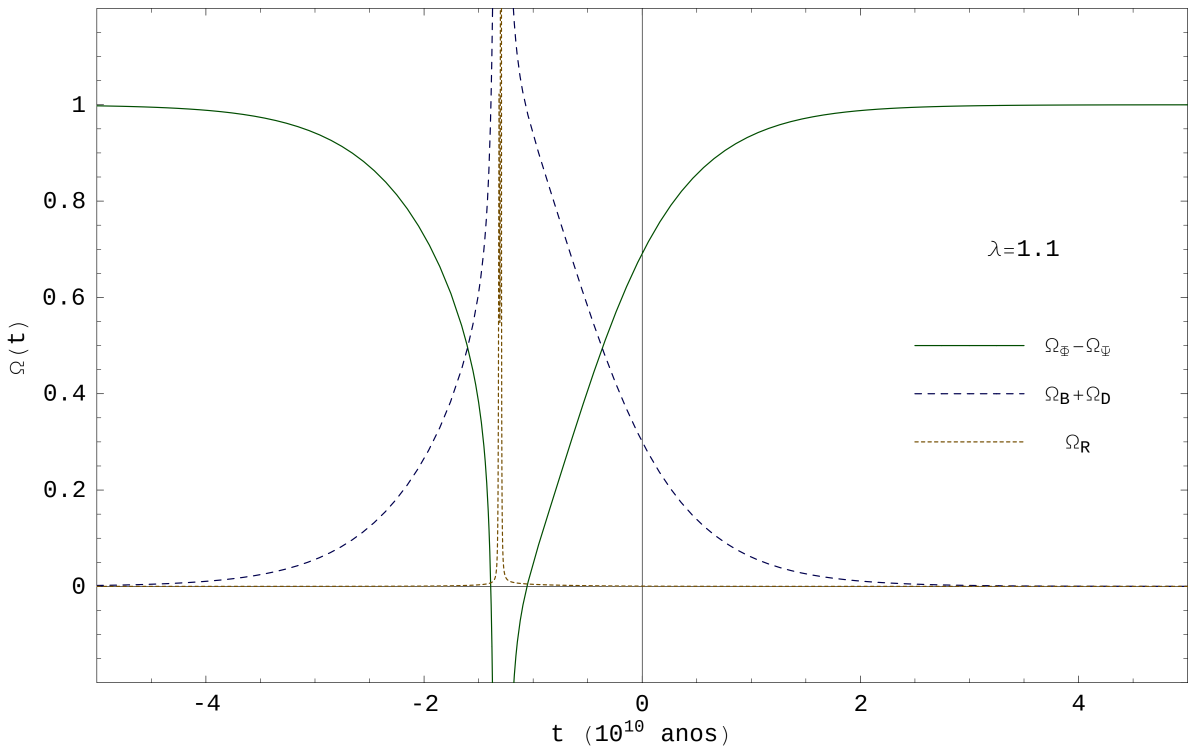

Figura 7: Evolução das densidades relativas de energia $\Omega_\Phi(t) - \Omega_\Psi(t)$ (linha sólida), $\Omega_B(t) + \Omega_D(t)$ (linha tracejada) e $\Omega_R(t)$ (linha pontilhada), obtidas por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

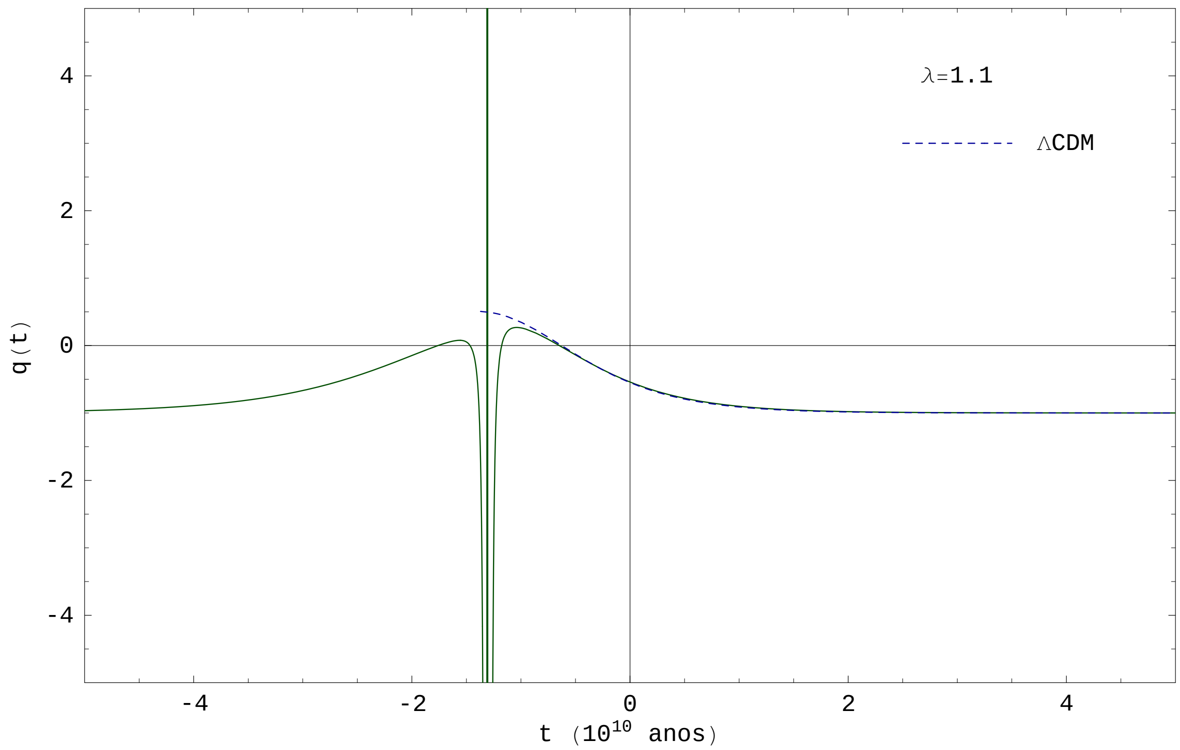

Figura 8: Evolução do parâmetro de desaceleração $q(t) \equiv -A\ddot{A}/\dot{A}^2$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. O resultado é comparado com o obtido para o modelo ΛCDM (linha tracejada).

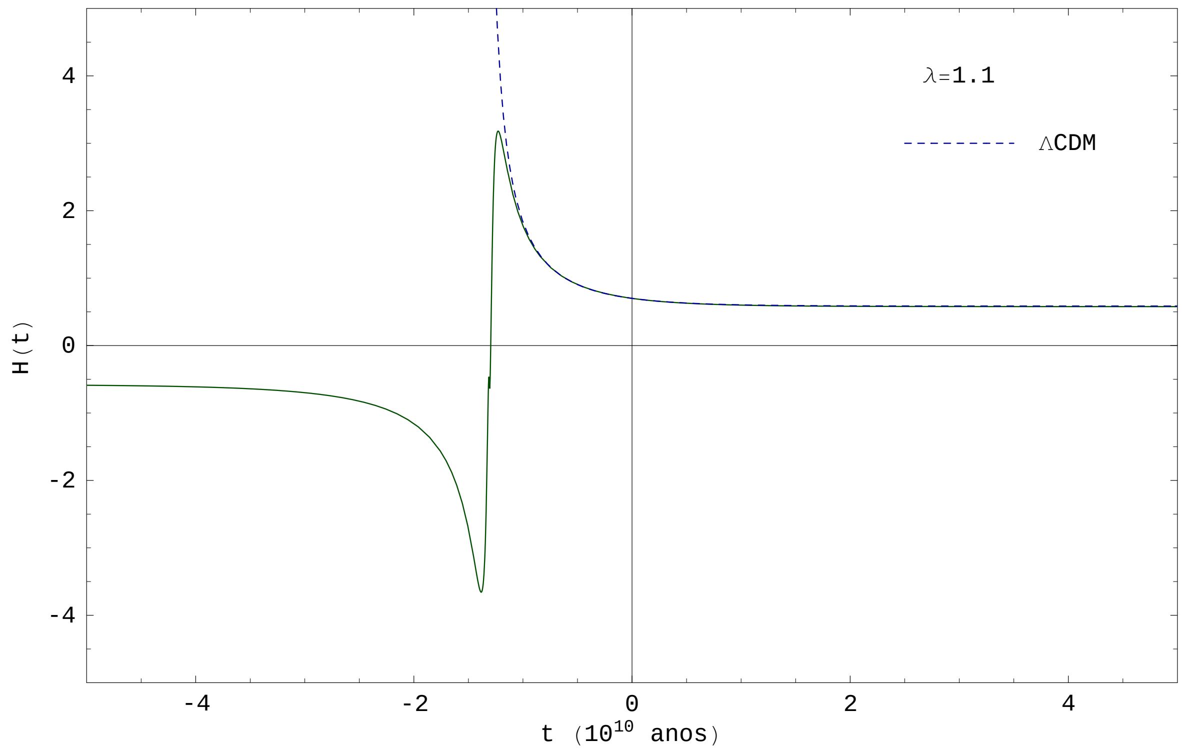

Figura 9: Evolução do parâetro de Huble $H(t) \equiv \dot{A}/A$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. O resultado é comparado com o obtido para o modelo ΛCDM (linha tracejada).

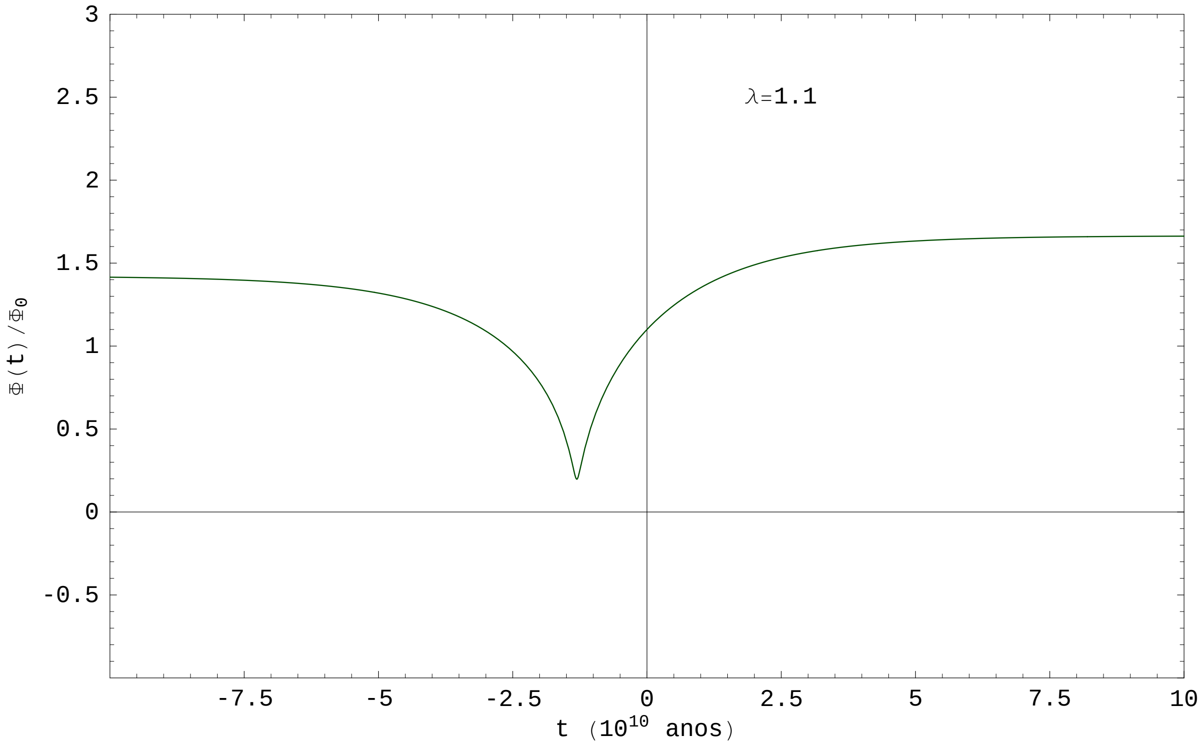

Figura 10: Evolução da magnitude relativa $\Phi(t)/\Phi_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

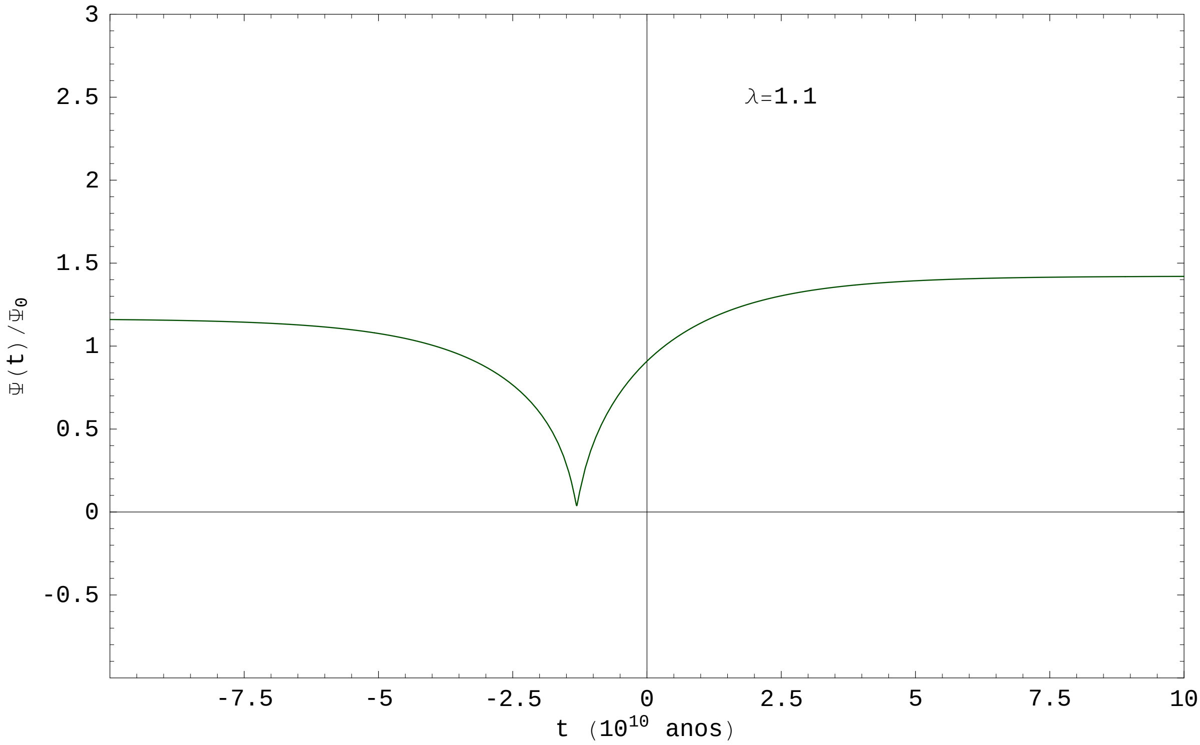

Figura 11: Evolução da magnitude relativa $\Psi(t)/\Psi_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

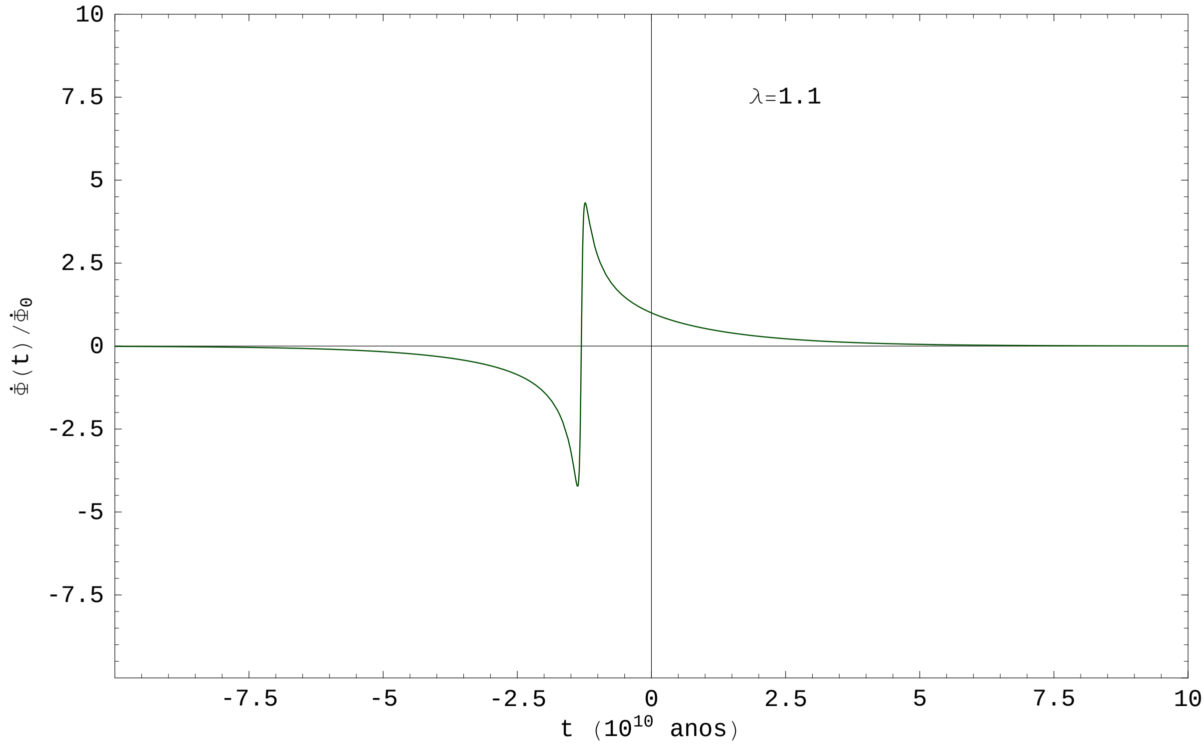

Figura 12: Evolução da magnitude relativa $\dot{\Phi}(t)/\dot{\Phi}_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

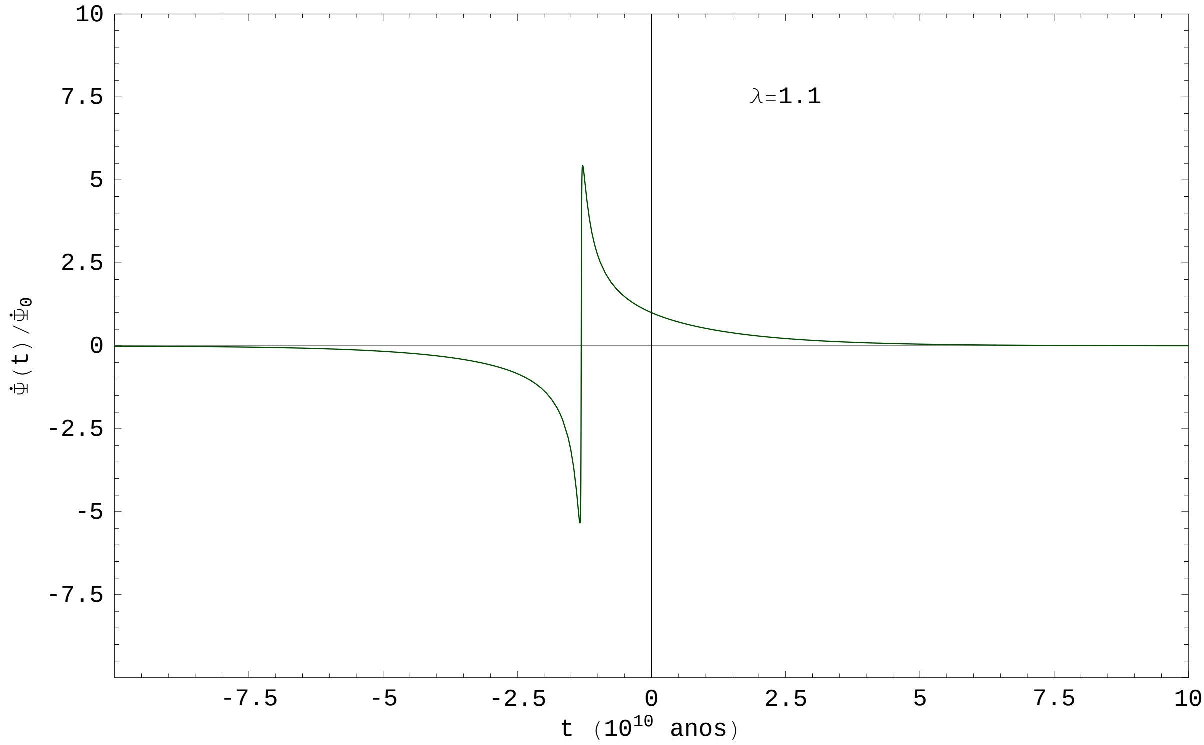

Figura 13: Evolução da magnitude relativa $\dot{\Psi}(t)/\dot{\Psi}_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

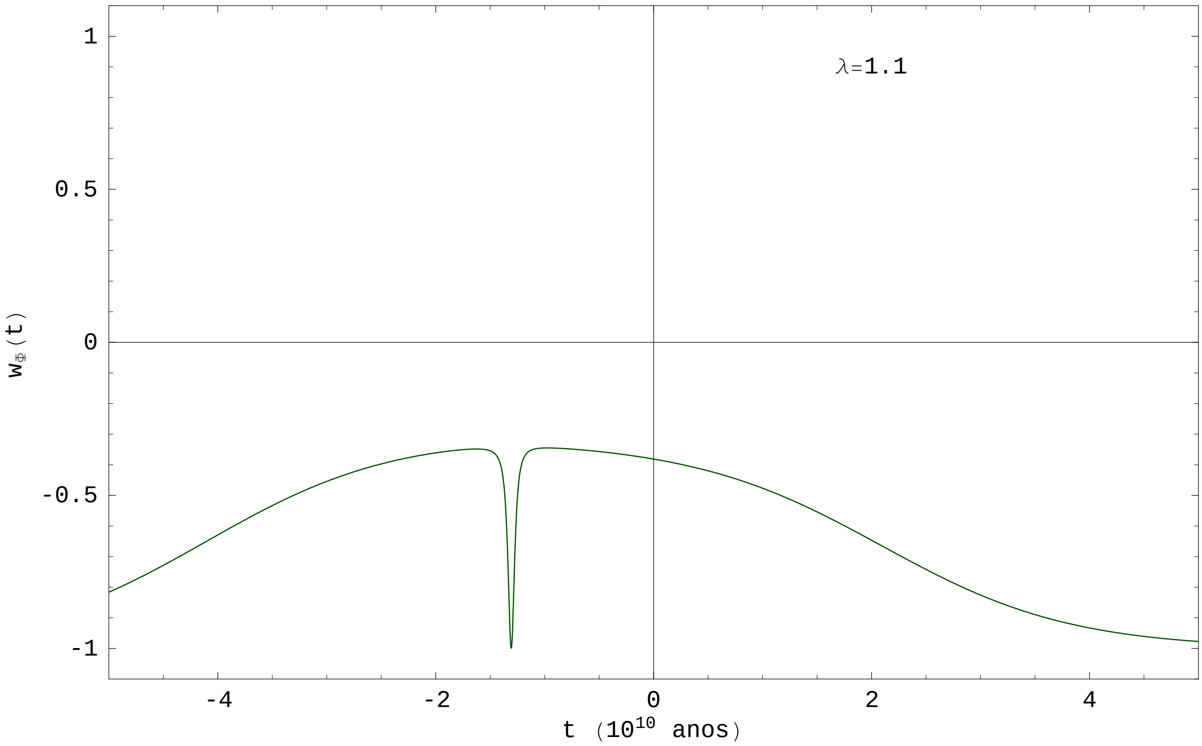

Figura 14: Evolução da equação de estado $w_\Phi(t) \equiv p_\Phi/\rho_\Phi$ do campo Φ, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

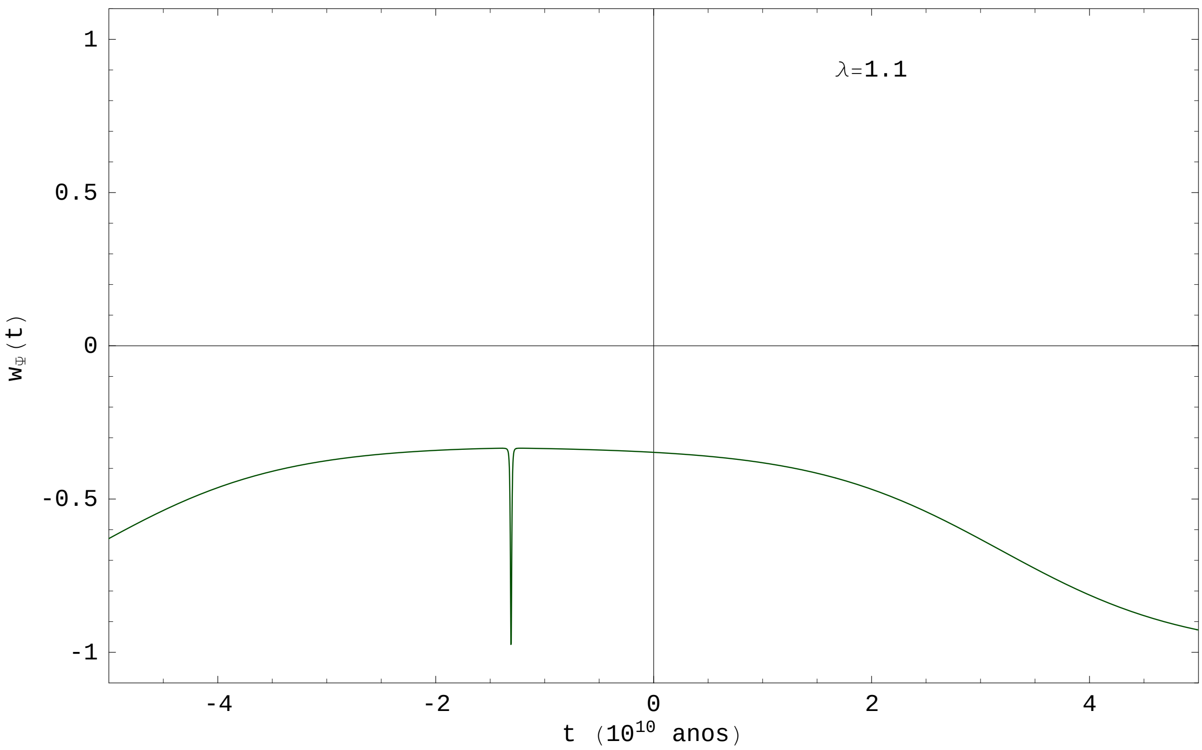

Figura 15: Evolução da equação de estado $w_\Psi(t) \equiv p_\Psi/\rho_\Psi$ do campo Ψ, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

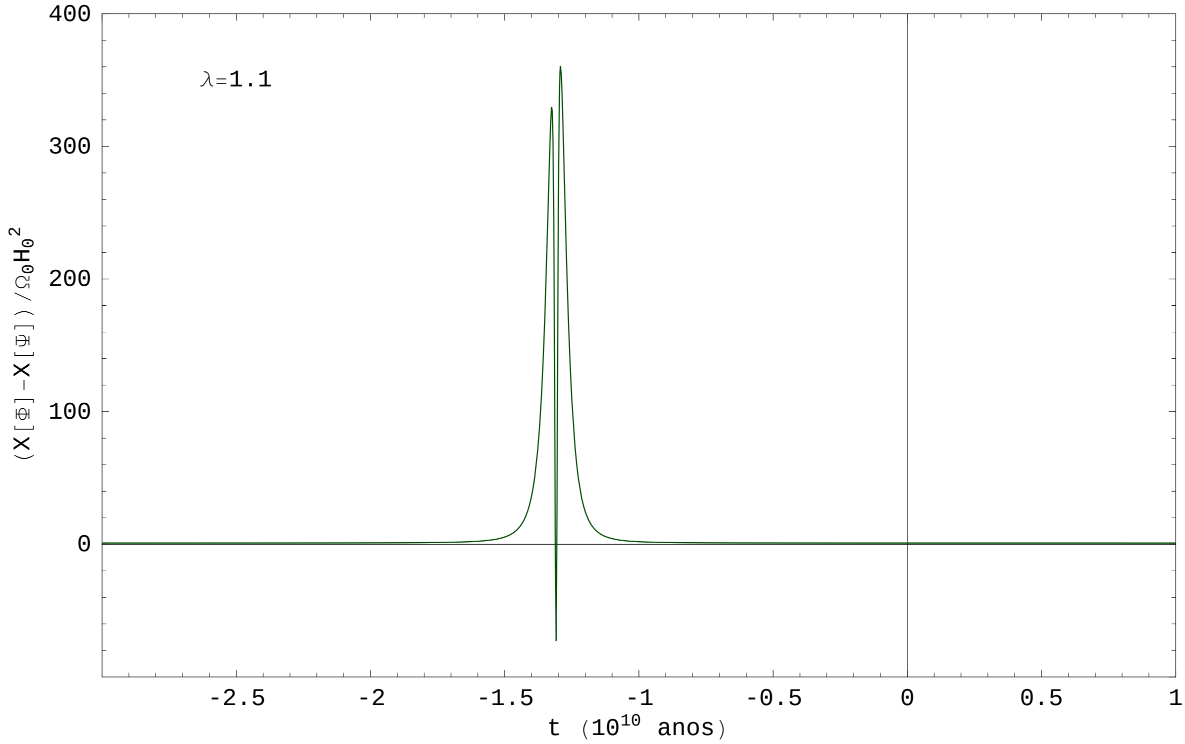

Figura 16: Evolução do "termo cosmológico" relativo $(X[\Phi] - X[\Psi])/\Omega_{\Lambda 0} H_0^2$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.1$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

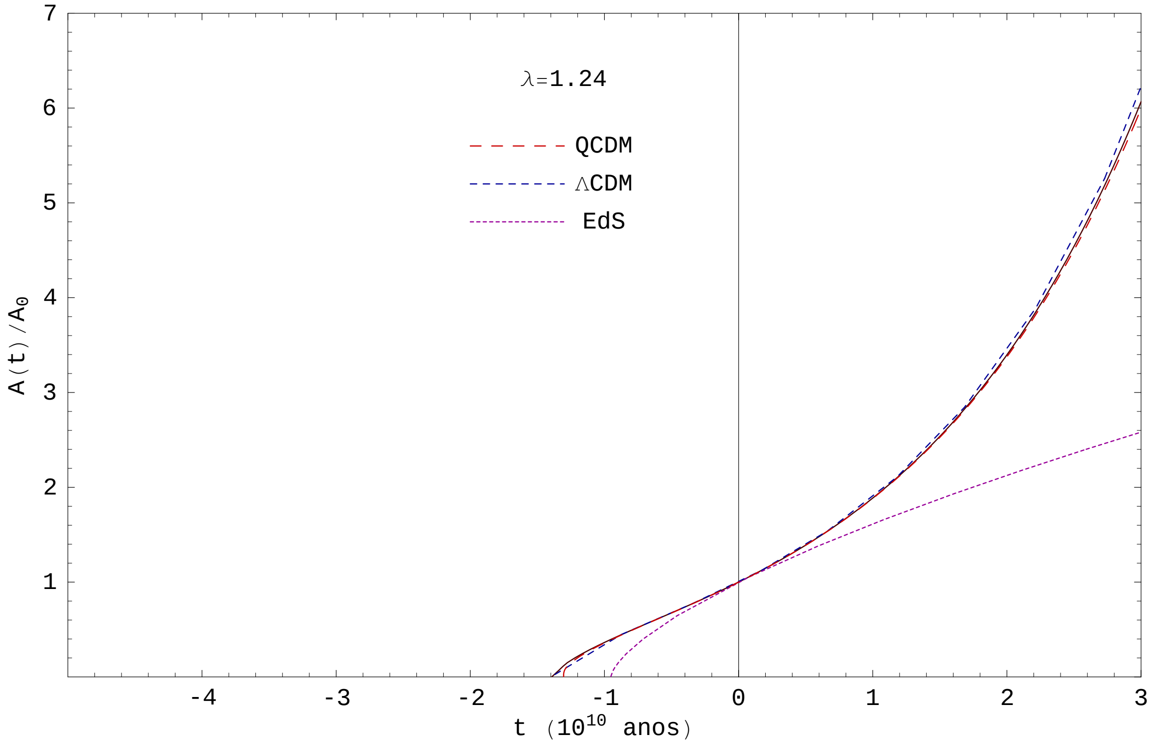

Figura 17: Evolução do fator de escala $A(t)$ para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. Os resultados são comparados com as soluções dos modelos de Einstein-de Sitter (EdS) (linha pontilhada), ΛCDM plano e com quintessência (QCDM) plano (linhas tracejadas), todas obtidas usando o mesmo recurso de cálculo numérico empregado na obtenção das soluções do sistema (168a), (168b) e (168c).

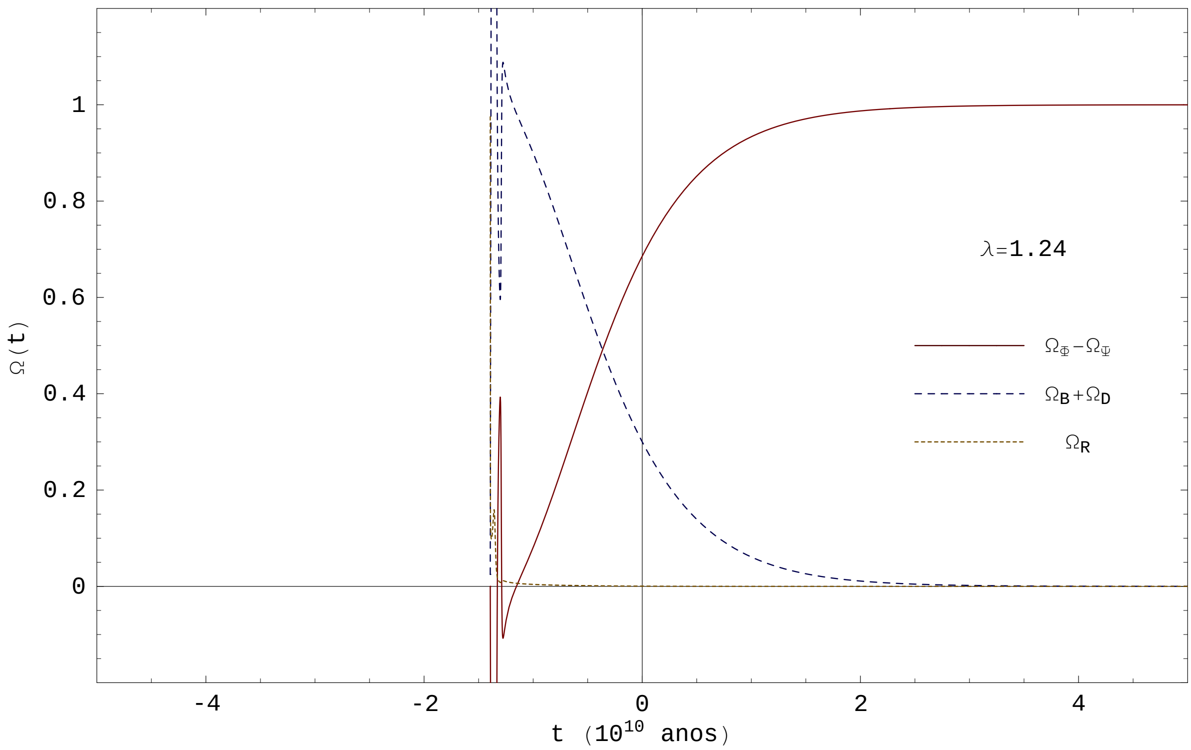

Figura 18: Evolução das densidades relativas de energia $\Omega_\Phi(t) - \Omega_\Psi(t)$ (linha sólida), $\Omega_B(t) + \Omega_D(t)$ (linha tracejada) e $\Omega_R(t)$ (linha pontilhada), obtidas por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

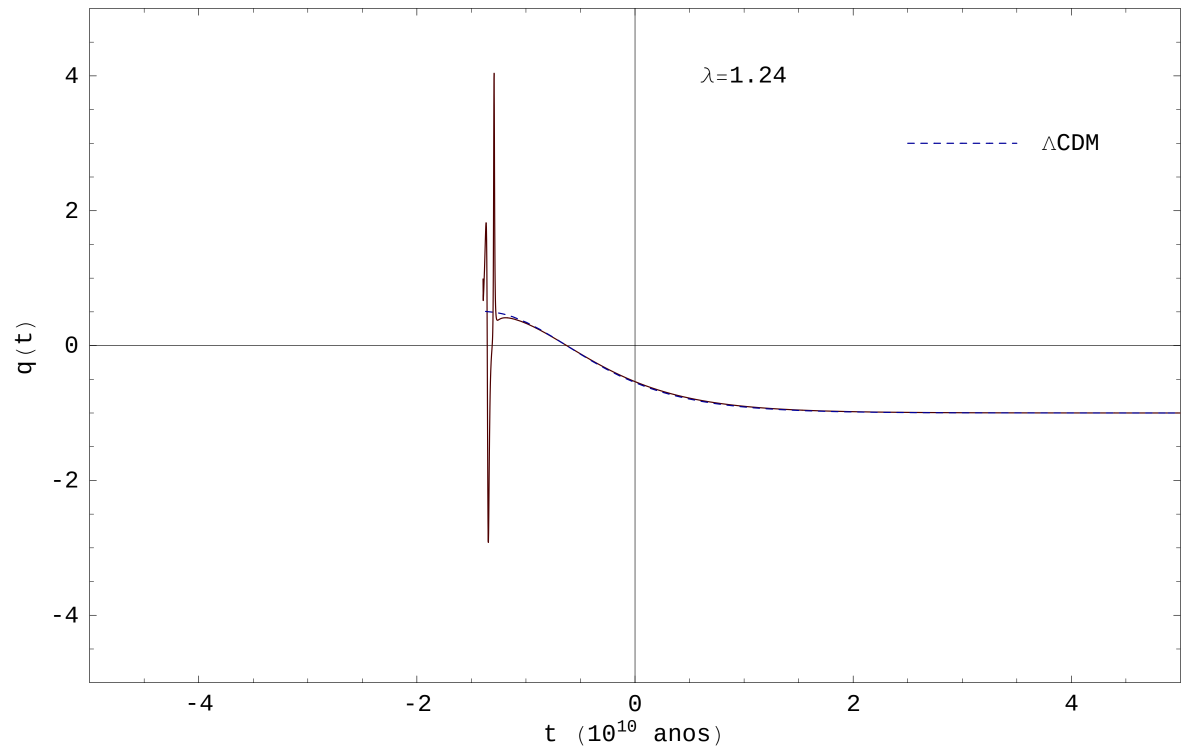

Figura 19: Evolução do parâmetro de desaceleração $q(t) \equiv -A\ddot{A}/\dot{A}^2$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. O resultado é comparado com o obtido para o modelo ΛCDM (linha tracejada).

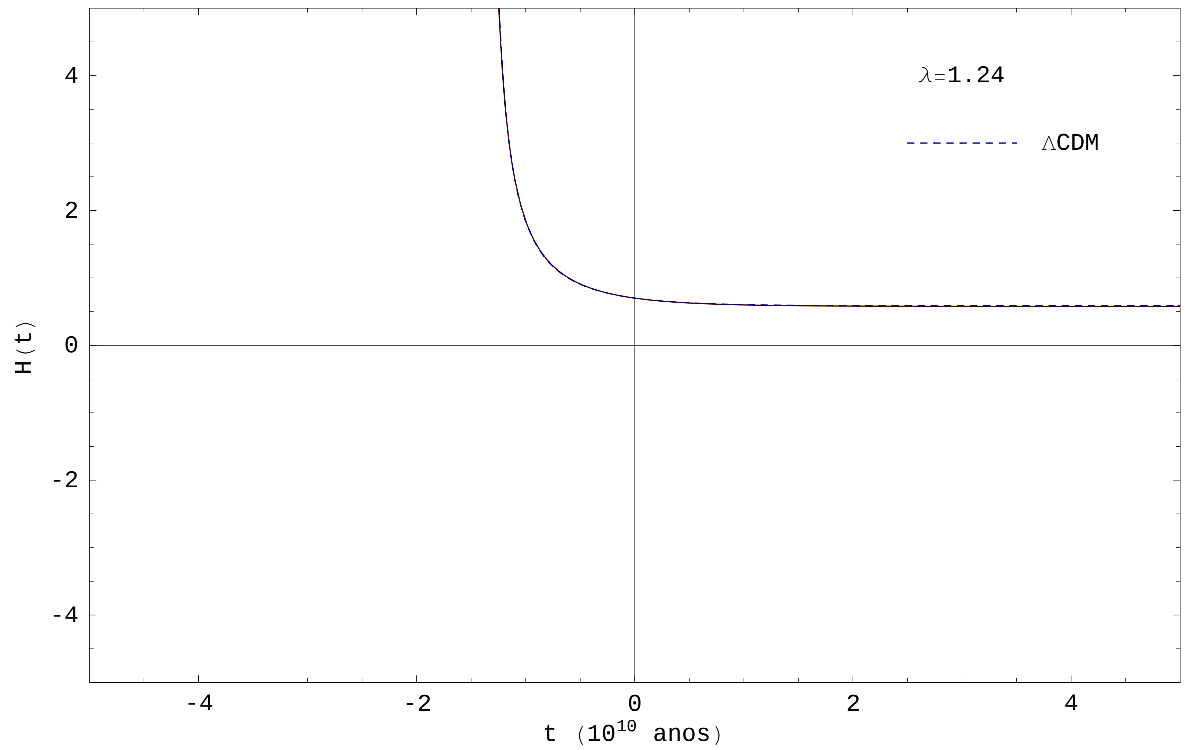

Figura 20: Evolução do parâetro de Huble $H(t) \equiv \dot{A}/A$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual. O resultado é comparado com o obtido para o modelo ΛCDM (linha tracejada).

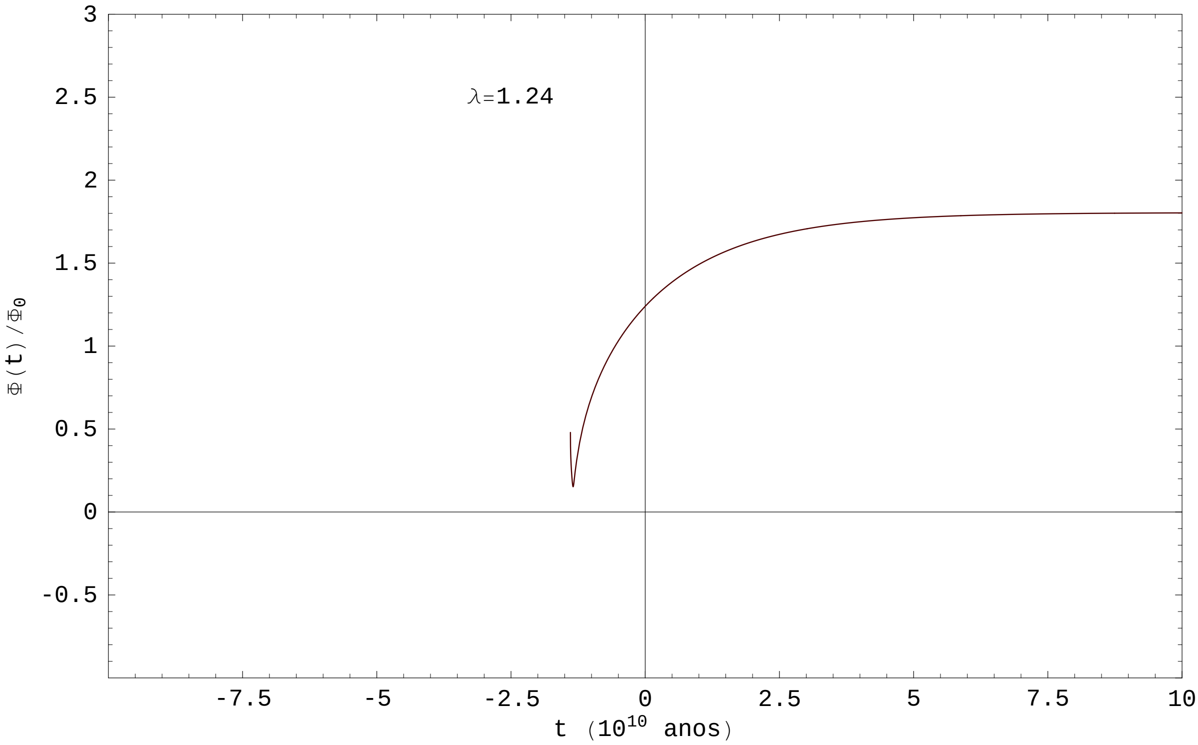

Figura 21: Evolução da magnitude relativa $\Phi(t)/\Phi_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

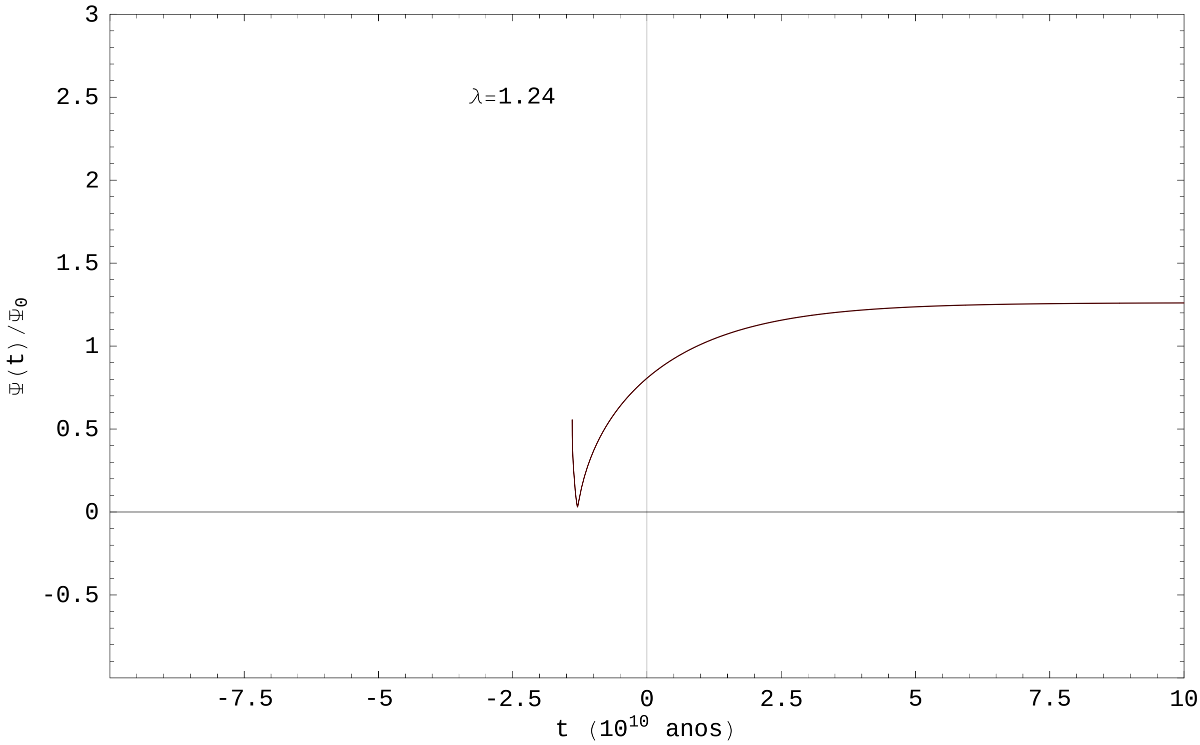

Figura 22: Evolução da magnitude relativa $\Psi(t)/\Psi_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1\times10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

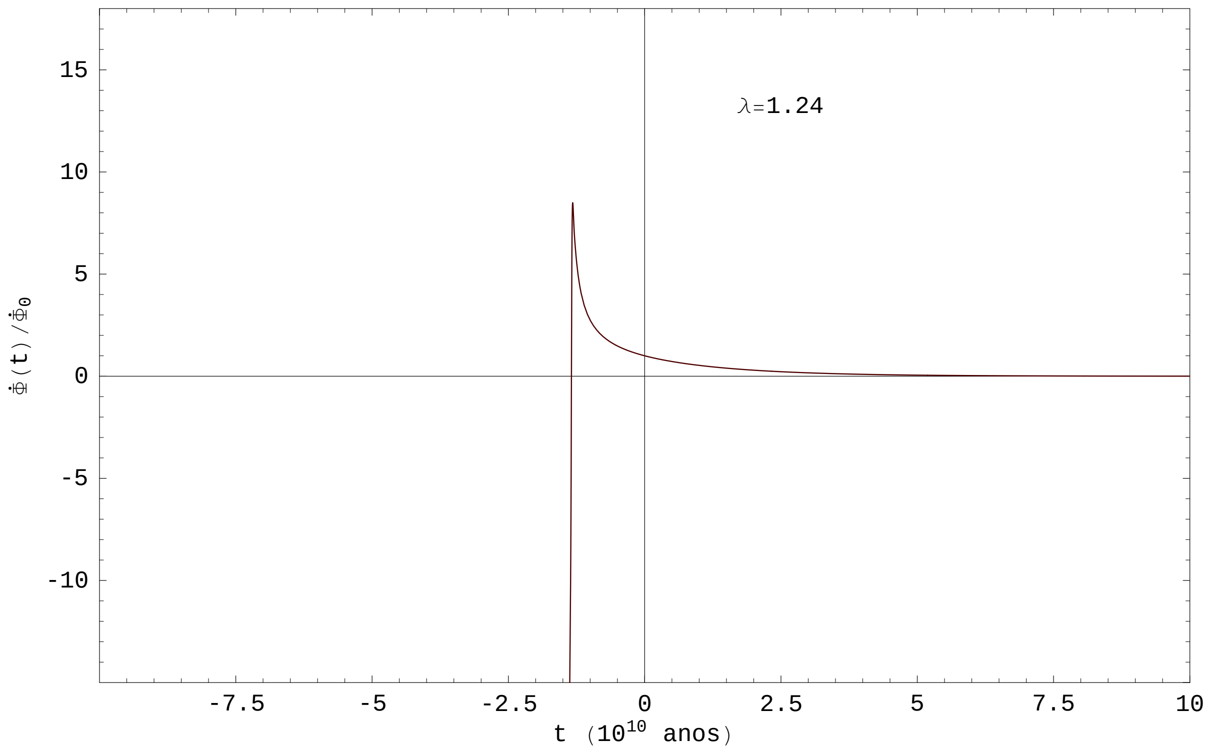

Figura 23: Evolução da magnitude relativa $\dot{\Phi}(t)/\dot{\Phi}_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1\times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

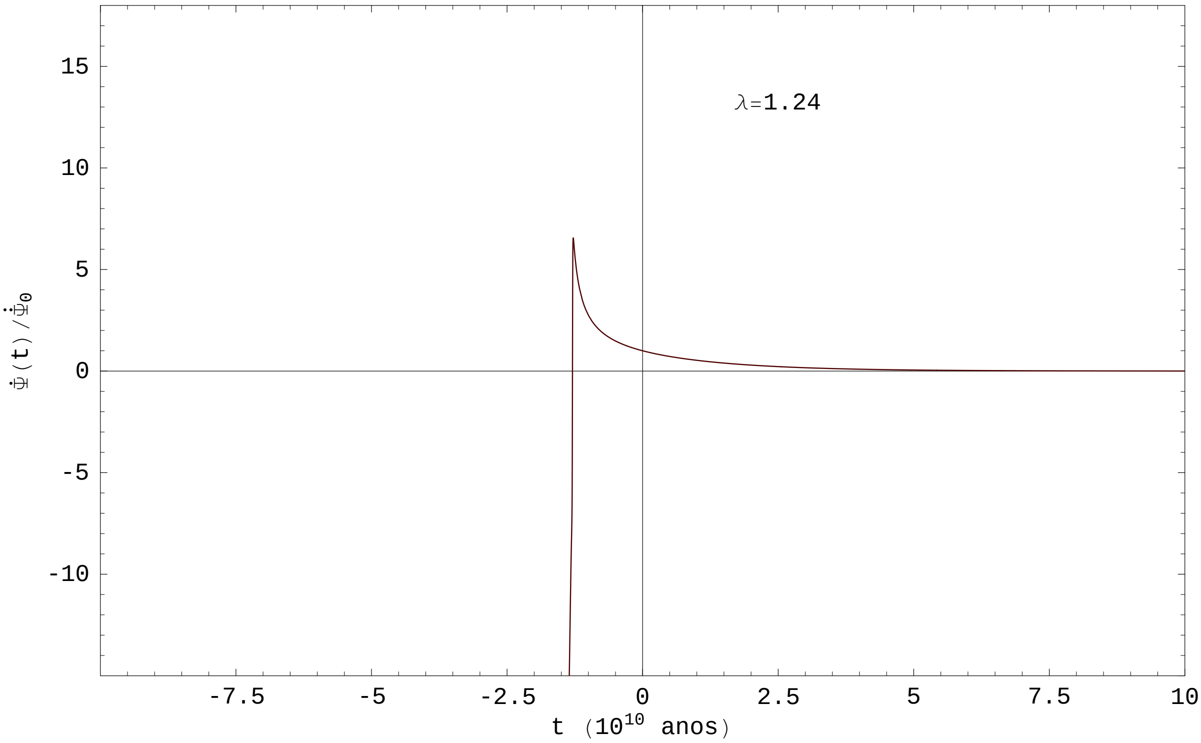

Figura 24: Evolução da magnitude relativa $\dot{\Psi}(t)/\dot{\Psi}_0$, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1\times10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

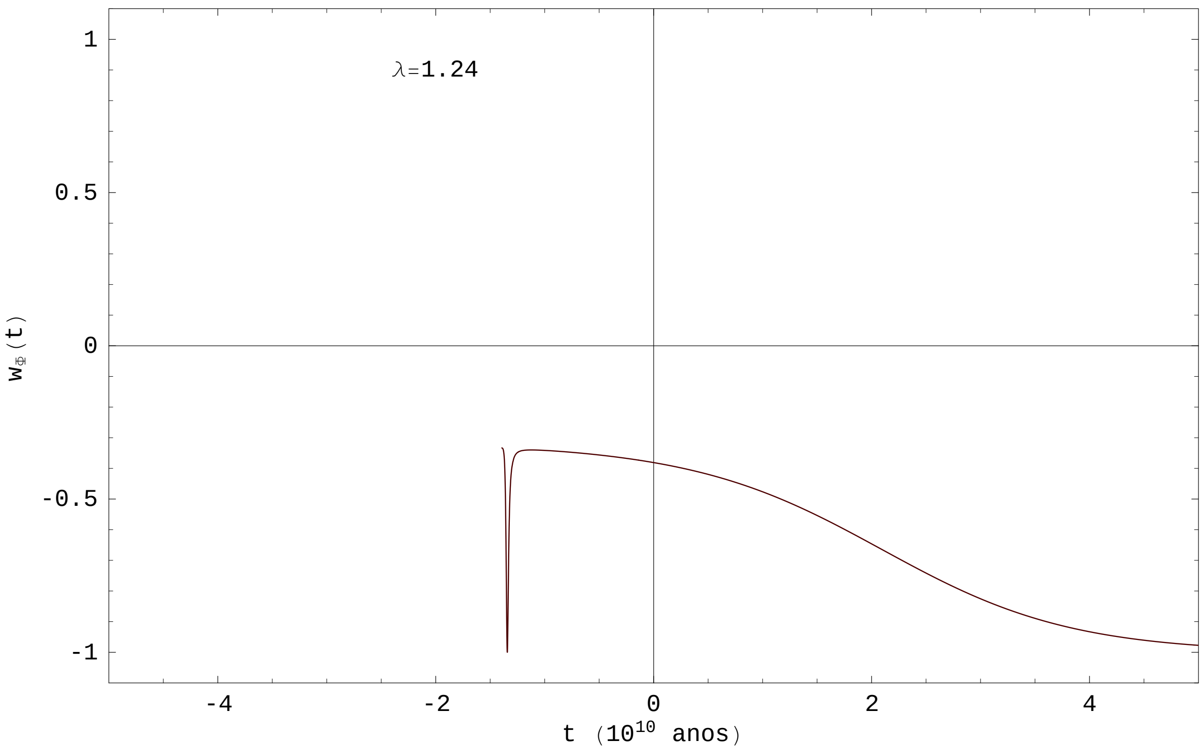

Figura 25: Evolução da equação de estado $w_\Phi(t) \equiv p_\Phi/\rho_\Phi$ do campo Φ, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

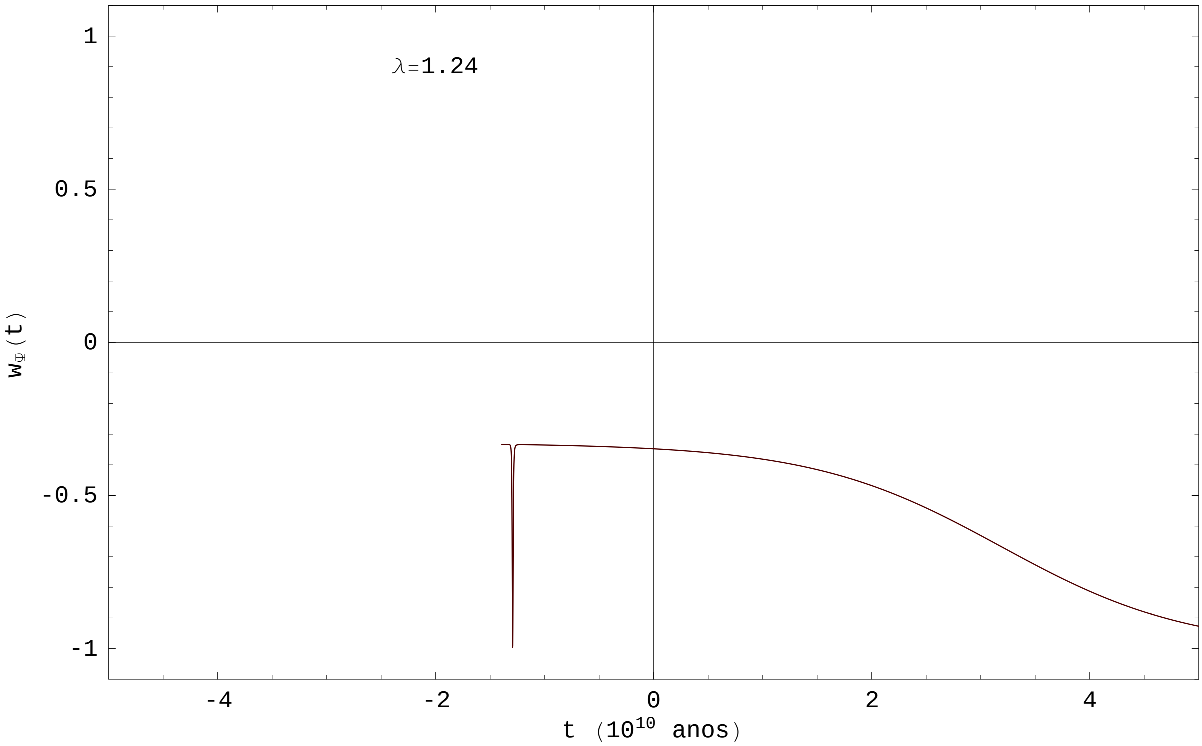

Figura 26: Evolução da equação de estado $w_\Psi(t) \equiv p_\Psi/\rho_\Psi$ do campo Ψ, obtida por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

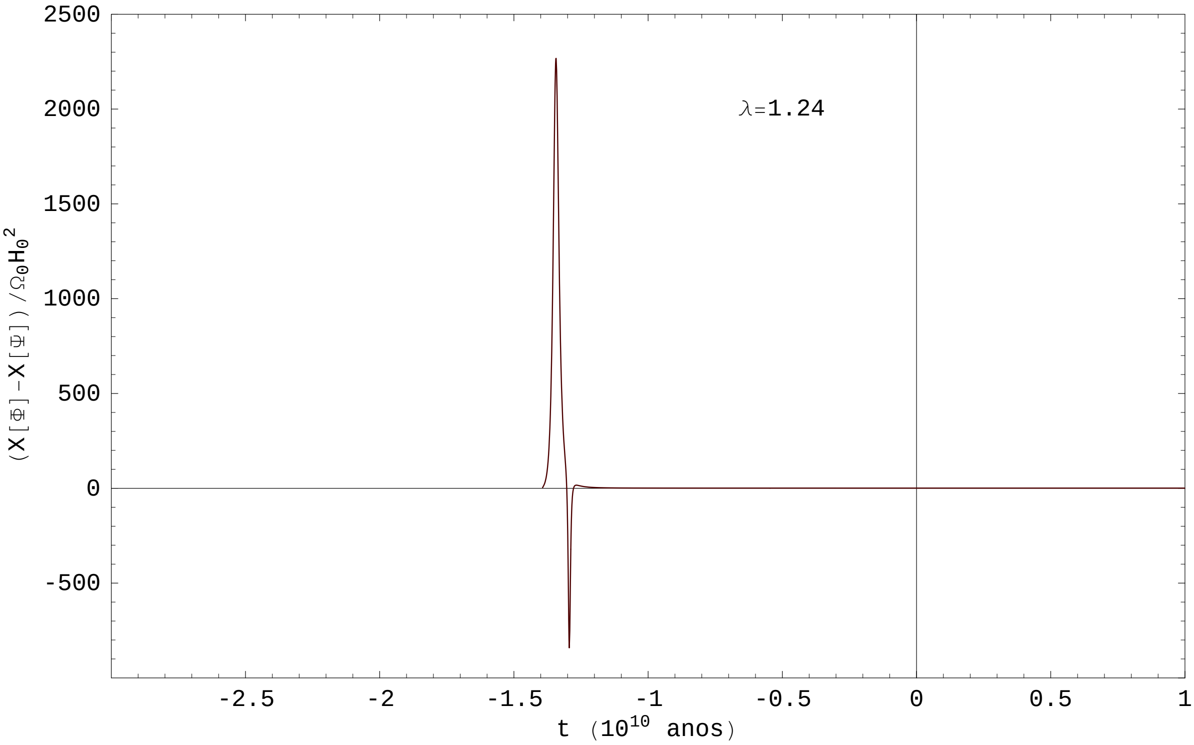

Figura 27: EEvolução do "termo cosmológico" relativo $(X[\Phi]-X[\Psi])/\Omega_{\Lambda 0}H_0^2$, obtido por integração numérica do sistema (168a), (168b) e (168c), para os parâmetros fixos $\lambda = 1.24$, $\beta = 12$, $\nu/\mu = 1 \times 10^{-4}$ e $\nu_0/\mu_0 = 0.28$ e $\alpha = 0$, sendo $t = 0$ o instante atual.

V. CONCLUSÃO

Dentre os grandes problemas em aberto da física contemporânea, o que possivelmente causa maior perplexidade é o problema da energia escura: o valor muito próximo de zero da densidade de energia do vácuo, a candidata natural à energia escura, não encontra uma explicação no Modelo Padrão da Física de Partículas (problema da constante cosmológica). Esta dificuldade tem, recentemente, motivado a proposta de uma profusão de teorias modificadas da gravitação e a inclusão de novos campos de matéria no Modelo Padrão. Dentre estas propostas, as mais populares, os modelos de energia escura dinâmica associada a um campo escalar, ou modelos com quintessência (QCDM), falham em contornar o problema da constante cosmológica, sendo imposto um valor próximo de zero para o mínimo do potencial de auto-interação do campo escalar, o qual atua como uma constante cosmológica em eras tardias da história do Universo nestes modelos. Outras propostas exóticas, como campo fantasma, teorias do tipo $f(R)$, e modelos baseados nas teorias de cordas, como branas-mundo, o gás de cordas e o modelo ecpirótico cíclico, são propostas pouco consolidadas ou de caráter fortemente especulativo (*cf.* Clifton *et al.* [14]).

Não menos aturdente que o problema da energia escura é o problema da singularidade inicial. Como discutido exaustivamente na literatura (*cf.* Novello & Perez-Bergliafa [13]), este problema impõe imensas dificuldades conceituais à gravitação einsteiniana, denunciando uma inconsistência nos modelos cosmológicos fundamentados pela Relatividade Geral, *viz.* a própria teoria se torna inaplicável nas proximidades da singularidade, e o problema de condições iniciais não pode ser definido. A quantização do campo gravitacional, considerado o caminho mais natural para a resolução desta dificuldade, tem, até o presente momento, resistido a todas as tentativas de formulação, ainda que existam propostas promissoras, como a Gravitação Quântica em Laços (*Loop Quantum Gravity*) (*cf.* Ashtekar [79]), entre outras. No entanto, modificações no nível clássico, ou semi-clássico, podem não só apontar a direção para uma melhor compreensão da física da gravitação, como ainda ajudar a lançar luz sobre alguns dos problemas que acometem a teoria einsteiniana, como os problemas da energia escura e da singularidade inicial. Nesta direção, também uma profusão de teorias modificadas da gravitação e a inclusão de novos campos de matéria foram propostas, tais como, novamente, teorias do tipo $f(R)$, teorias com campos escalares, e modelos inspirados nas teorias de cordas, como o modelo ecpirótico cíclico. Dentre as modificações clássicas da Relatividade Geral, em particular, as mais simples são possivelmente as teorias que procuram incorporar elementos que surgem "naturalmente" no formalismo básico das teorias geométricas da gravitação, mas que foram dispensadas, sem justificativa, pela Relatividade Geral. Este é o caso, por exemplo, da torção. Incorporada originalmente pela teoria Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK), a torção nesta teoria tem como fonte as correntes de spin, e pode também evitar a singularidade (Trautman [80]). No entanto, como as corrrentes de spin estão confinadas ao interior da matéria, a teoria ECSK não pode resolver o problema da energia escura.

No presente trabalho foi investigada uma modificação "mínima" da Relatividade Geral na qual a torção é reincorporada. A estrutura cinemática da teoria é definida em um espaço-tempo de Riemann-Cartan, sendo fixadas as curvas extremais como as curvas que representam as histórias das partículas teste e observadores inerciais. Como a equação das curvas extremais envolve apenas a conexão riemanniana, a cinemática einsteiniana é recuperada no espaço-tempo riemanniano associado. Neste caso, para uma ação derivada da ação de Einstein-Cartan da teoria ECSK, a torção passa a ser fonte da curvatura riemanniana e, quando tem seus graus de liberdades restringidos, pode ser decomposta em dois campos de spin-2 com energias de sinais opostos. Estes campos devem ainda ser estéreis, *i.e.* devem interagir apenas com o campo gravitacional einsteiniano, para que não originem correntes não conservadas.

O caso estudado aqui foi o de máxima simplicidade, em que ambos os campos de spin-2 têm seus números de graus de liberdade reduzidos a apenas 1. O modelo cosmológico espacialmente homogêneo e isotrópico que resulta foi estudado por meio da integração numérica do sistema de equações dinâmicas. Apesar de sensível às escolhas dos valores dos parâmetros e às condições iniciais, este modelo oferece uma explicação natural para o valor próximo de zero do termo cosmológico: como este é dado pela diferença entre os termos oriundos dos potenciais de auto-interação dos campos de spin-2, um pequeno desbalanço em relação a um estado de equilíbrio poderia explicar o valor diminuto deste termo. Cabe ressaltar que os potenciais de auto interação adotados aqui são os únicos potenciais conservativos admitidos por estes campos de spin-2.

Além disso, se o campo de energia positiva é a componente dominante, o Universo resultante é não singular. Esta é uma consequencia do fato de que o fluído associado a este campo, apesar de respeitar a Condição de Energia Fraca ($\rho_\Phi \geqslant 0$), viola a Condição de Energia Forte

$$\rho_\Phi + 3p_\Phi \leqslant 0\,.$$

O campo de energia negativa, por outro lado, apesar de violar a Condição de Energia Fraca ($\rho_\Psi \leqslant 0$), respeita a Condição de Energia Forte

$$\rho_\Psi + 3p_\Psi \geqslant 0\,.$$

O campo Ψ atua, portanto, como matéria ordinária, amenizando os efeitos do campo Φ. Este "leve desbalanço" entre os campos Φ e Ψ é essencial para a concordância do presente modelo com o ΛCDM e a observância do vínculo $A(t_*) \ll A_0$. De fato, para uma certa combinação dos parâmetros do modelo, *viz.* quando os potenciais de auto-interação satisfazem

$$V[\Phi_0] \gg V[\Psi_0]\,,$$

foram obtidas soluções que reproduzem com exatidão os valores dos parâmetros cosmológicos do modelo ΛCDM, exceto próximo do bounce ou da singularidade.

O caso estudado neste trabalho foi baseado em uma extrema simplificação do modelo proposto, o que indica uma grande riqueza de soluções e cenários cosmológicos a serem explorados no futuro. Também o estudo das perturbações cosmológicas no presente modelo, essencial para entender o impacto destas modificações no processo de formação de estruturas no Universo, e também o caso de campos spin-2 em uma configuração esfericamente simétrica, foram adiados para uma investigação futura, em uma continuação do presente trabalho.

ÍNDICE REMISSIVO

---

[1] V. F. Antunes, E. Goulart, & M. Novello, Grav. Cosmol. **15**, 191 (2009).
[2] J. H. Oort, Bull. Astron. Inst. Netherlands **6**, 249 (1932).
[3] F. Zwicky, Helvetica Physica Acta **6**, 110 (1933).
[4] F. Zwicky, The Astrophysical Journal **86**, 217 (1937).
[5] V. Rubin, W. K. J. Ford, & N. Thonnard, The Astrophysical Journal **238**, 471 (1980).
[6] A. Bergmann, V. Petrosian, & R. Lynds, Astrophys. J. **350**, 23 (1990).
[7] P. J. E. Peebles & B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2002), arXiv:astro-ph/0207347.
[8] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
[9] A. G. Riess *et al.*, Astronomical J. **116**, 1009 (1998).
[10] S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
[11] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
[12] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
[13] M. Novello & S. E. Perez-Bergliafa, Phys. Rep. **463**, 127 (2008), arXiv:0802.1634 [astro-ph].
[14] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, & C. Skordis, Phys. Rep. **513**, 1 (2011), arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO].
[15] E. Cartan, C. R. Acad. Sci. (Paris) **174**, 593 (1922), traduzido para o Inglês em *Cosmology and Gravitation*, editado por P.G. Begmannn and V. De Sabbata (Plenum Press, New York, 1980), p. 489.
[16] D. Sciama, em *Recent Developments in General Relativity* (Pergamon, Oxford, 1962).

[17] D. Sciama, Rev. Mod. Phys. **36**, 463 (1964).

[18] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[19] A. Trautman, em *General Relativity and Gravitation*, editado por A. Held (Plenum Press, New York, 1980) p. 287.

[20] F. W. Hehl, P. Von der Heyde, G. D. Kerlick, & J. M. Nester, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[21] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, & Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[22] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, "An introduction to teleparallel gravity," (2010), notas não publicadas dinsponíveis em www.ift.unesp.br/users/jpereira/tele.pdf.

[23] H. I. Arcos, V. C. Andrade, & J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 807 (2004), arXiv:gr-qc/0403074.

[24] H. I. Arcos & J. G. Pereira, Class. Quant. Grav. **21**, 5193 (2004), arXiv:gr-qc/0408096.

[25] H. I. Arcos & J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 2193 (2004), arXiv:gr-qc/0501017.

[26] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries* (IOP Publishing, Bristol, 2002).

[27] M. Blagojević, "Three lectures on poincaré gauge theory," (2003), `arXiv:gr-qc/0302040v1`.

[28] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Wiley, New York, 1963).

[29] E. Cartan, *Sur les Variété à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée* (Gauthier-Villars, Paris, 1955) traduzido para o Inglês em *On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity*, Monographs and Textbooks in Physical Sciences, editado por R. de Ritis & G. Marmo (Bibilopolis, Napolis, 1986).

[30] A. Trautman, *Differential Geometry for Physicists*, Stony Brook Lectures (Bibliopolis, Napoli, 1984).

[31] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette, & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (North Holland, Amsterdam, 1982).

[32] E. Cartan, Ann. Éc. Norm. **40**, 325 (1923).

[33] E. Cartan, Ann. Éc. Norm. **41**, 1 (1924).

[34] E. Cartan, Ann. Éc. Norm. **42**, 17 (1925).

[35] M. Novello, *Cosmologia*, Coleção CBPF - Tópicos de Física (Livraria da Física, São Paulo, 2010).

[36] J. A. Schouten, *Ricci Calculus*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1954).

[37] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Colloquium Publications, Vol. 8 (American Mathematical Society, 1927).

[38] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1949).

[39] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry* (Birkhäuser, Boston, 1992).

[40] A. Lichnerowicz, em *Battelle Rencontre 1967*, editado por J. A. Weeler & C. M. de Witt (W. A. Benjamin, New York, 1968) p. 121.

[41] A. Trautman, Symp. Math. **12**, 139 (1973).

[42] A. Trautman, em *The Physicist's Conception of Nature*, editado por J. Mehra (D. Reidel, Dordrecht and Boston, 1973) p. 179.

[43] R. Geroch, J. Math. Phys. **9**, 1739 (1968).

[44] R. Geroch, J. Math. Phys. **11**, 343 (1970).

[45] R. Penrose, em *Battelle Rencontre 1967*, Lectures in Mathematics and Physics, editado por J. A. Weeler & C. M. de Witt (W. A. Benjamin, New York, 1968) p. 121.

[46] F. De Felice & C. J. S. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambrigde, 1990).

[47] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[48] P. Von der Heyde, Lettre al Nuovo Cimento **14**, 250 (1975).

[49] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer, Berlin, 1984).

[50] D. Hartley, Class. Quantum Grav. **12**, L103 (1995).

[51] J. Ehlers, F. A. E. Pirani, & A. Schild, em *General Relativity*, editado por L. O'Raifeartaigh (Oxford University Press, Oxford, 1972).

[52] H. Weyl, *Space-Time-Matter* (Dover, New-York, 1952).

[53] M. Novello & H. Heintzmann, Phys. Lett. A **98**, 10 (1983).

[54] M. Novello, L. A. R. Oliveira, J. M. Salim, & E. Elbaz, Int. J. Mod. Phys. D **1**, 641 (1992).

[55] F. P. Poulis & J. M. Salim, Int. J. Mod. Phys.: Conf. Series **3**, 87 (2011), arXiv:1106.3031 [gr-qc].

[56] D. Hilbert, Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr. Math.-Phys. Kl. , 395 (1915).

[57] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin , 844 (1915).

[58] A. Einstein, Annalen der Physik **354**, 769 (1916).

[59] J. Ehlers, em *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, editado por W. Israel (1973) pp. 1–122.

[60] A. Z. Petrov, *Einstein Spaces* (Plenum Press, Oxford, 1969).

[61] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity* (D. Reidel, Dordrecht and Boston, 1974).

[62] A. Friedman, Z. Phys. **10** (1922).

[63] A. Friedman, Zeitschrift für Physik A **21**, 326 (1924).

[64] G. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A **47**, 49 (1927).

[65] G. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A **53**, 51 (1933).

[66] H. P. Robertson, Proc. N.A.S. **15**, 822 (1935).

[67] A. G. Walker, Proc. London Math. Soc. **42**, 90 (1936).

[68] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1993).

[69] R. K. Sachs, em *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, editado por W. Israel (D. Reidel, 1973) pp. 197–236.

[70] E. W. Kolb & M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990).

[71] J. A. Frieman, M. S. Turner, & D. Huterer, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **46**, 385 (2008), arXiv:0803.0982 [astro-ph].

[72] A. Einstein, Koniglich Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte , 142 (1917).

[73] A. Raychaudhuri, Phys. Rev. **98**, 1123 (1955).

[74] Particle Data Group, artigos de revisão, `http://pdg.lbl.gov/`.

[75] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998).

[76] I. Zlatev, L. Wang, & P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999).

[77] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[78] R. Brandenberger(2012), arXiv:1204.6108 [astro-ph.CO].

[79] A. Ashtekar (2012), arXiv:1201.4598 [gr-qc].

[80] A. Trautman, em *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Vol. 2, editado por J.-P. Françoise, G. L. Naber, & S. T. Tsou (Elsevier, 2006) pp. 189–195.

[81] M. Gasperini & G. Veneziano, Phys. Rep. **373** (2003), arXiv:hep-th/0207130.

[82] M. Fierz & W. Pauli, Proc. Roy. Soc. **173A**, 211 (1939).

[83] N. P. Neto, *Teoria da Gravitação em Termos das Variáveis de Fierz-Lanczos*, tese de doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) (1989).

[84] M. Novello & N. P. Neto, Fortschr. Phys. **40**, 174 (1992).

[85] M. Novello & R. P. Neves, Class. Quantum Grav. **19**, 5335 (2002), arXiv:gr-qc/0204058.

[86] C. Aragone & S. Deser, Nuovo Cimento **3**, 709 (1971).

[87] I. L. Buchbinder, D. M. Gitman, V. A. Krykhtin, & V. D. Pershin, Nucl. Phys. B **584**, 615 (2000), arXiv:hep-th/9910188.

[88] M. Novello & P. I. Trajtenberg, em *Festschrift in Homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo*, Trends in Physics, editado por M. S. D. Cattani, L. C. B. Crispino, M. O. C. Gomes, & A. F. S. Santoro (2009).

[89] M. Novello (2002), arXiv:gr-qc/0212026.