

Tese de Doutorado

Universo Magnético

Aline Nogueira Araújo

Orientador: Mario Novello

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Abril de 2014

A Mario Novello, pelos anos de orientação;

A Nonato Araújo, pelo abraço por tantos anos esperado;

A Flaura, pelo exercício do amor, no convívio e na espera por cada chegada.

“Então um dos juízes da cidade veio à frente e disse: “Fala-nos do Crime e do Castigo”. (...) E assim como uma única folha não fica amarela sem o conhecimento silencioso da árvore inteira, o malfeitor não pode fazer o mal sem a vontade oculta de todos vós. (...) E quando um de vós cai, ele cai pelos que estão atrás dele como um aviso contra a pedra no caminho. Sim, e ele cai pelos que estão à sua frente, que apesar de caminharem mais rápido e mais seguro, não tiraram a pedra. (...) Os corretos não são inocentes dos feitos maus, e os virtuosos não estão puros nos atos criminosos. (...) Mas não podeis impor remorso aos inocentes, nem retirá-lo do coração dos culpados. Sem ser chamado, ele virá durante a noite, para que os homens possam despertar e olhar a si mesmos. E vós, como podereis entender a justiça se não verdes todos os atos à luz de sua totalidade?”

(Khalil Gibran)

Agradecimentos

Aos meus pais, que me ofereceram o melhor de si mesmos. Ensinaram-me a viver. Serei grata sempre.

Aos meus avós, minha base, minhas raízes de cactus e sapopemas de samaúmas.

À tia Rejane e a Rafaella, prima-amiga de momentos inusitados ou não, por terem me recebido com todo o carinho e compartilhado seu lar. Ao Robinho, meu primo-irmão que conversa comigo mesmo no silêncio, mesmo na distância. Ao tio Cícero pelo seu carinho, por ter aberto seu coração e as portas da sua casa. Ao tios Ronaldo e Reinaldo pelos cuidados.

A Sonia Kritz e Rafael Pacheco pelo reencontro e por todo o suporte e ajuda, além de todo o carinho. Muito obrigada.

A Ailéa, minha amiga querida, socorrista suave e sutil. Obrigada por me lembrar da força que existe, onde ninguém pode tocar. Ao Rodrigo, pelo carinho da crítica. A Azucena, Gabriel e Arthur (obrigada pelo girassol!) que tenho a felicidade de considerar amigos.

Ao Terrapia pelas sementes. A Isabel pelas flores.

Ao Pablo por toda a colaboração. Ao Carlos Ducap pelas discussões e revisão de partes do texto.

Ao professor Salim pelas obras de vida.

Ao ICRA pela lição de coletivo.

A CAPES e ao CnPq pelo financiamento.

Sumário

Resumo	6
Abstract	7
Capítulo 1 - Introdução	9
Capítulo 2 - Eletrodinâmica não-linear como fonte de dinâmica gravitacional	15
Capítulo 3 - Universo Magnético	31
Capítulo 4 - Comportamento cíclico	37
Capítulo 5 - Teoria de Born Estendida e Universo Magnético	59
Capítulo 6 - Conclusão	83
Apêndices	87
Referências Bibliográficas	113

Resumo

São apresentados tipos de dois comportamentos para um universo dinâmico: cíclico e com “bounce” [1, 2], ambos não-singulares. São modelos com métrica homogênea e isotrópica e fonte gerada por não-linearidades do campo magnético. Este cenário é chamado “Universo Magnético”. Todo o estudo é motivado por uma representação regular (sem singularidades) dos campos da natureza. O modelo cíclico é baseado numa descrição fenomenológica do conteúdo material, em que o tensor momento-energia é um fluido perfeito, com densidade de energia e pressão identificados com uma série de quatro termos no invariante de calibre F . Cada termo da série comporta-se também como um fluido perfeito não-interagente, que domina em cada uma das quatro fases, que compõem a unidade básica do ciclo. Esta mesma unidade repete-se indefinidamente entre os pontos de máximo e de mínimo do fator de escala. O modelo com “bounce” tem como fundamento a regularização completa dos campos de longo alcance, a gravitação e o eletromagnetismo. É proposta uma interação eletromagnética, que em si, limita superiormente o campo elétrico e o campo magnético eliminando qualquer divergência. Essa interação por sua vez é tomada como fonte do “Universo Magnético”, uma configuração média de campos em que há apenas contribuições do campo magnético. Neste contexto, mostra-se que a limitação da interação eletromagnética implica numa regularização da interação gravitacional e produz um modelo cosmológico sem singularidades. Também são examinados os casos em que matéria não-interagente está presente no universo cíclico e como uma interação em série de potências do campo magnético pode produzir diferentes configurações cosmológicas: singulares, com ricochete e cíclica.

Abstract

Two different types for the behavior of a dynamical universe: the cyclic and the asymptotic ones [1, 2], the both of them non singular. These are models where the metric is homogeneous and isotropic and the source is generated by nonlinearities of the magnetic field. This scenario is called “Magnetic Universe”. The whole analysis is motivated by a regular representation (without any singularities) of the field in nature. The cyclic model is based in a phenomenological description of the right hand side of General Relativity, where the energy-momentum tensor is a perfect fluid, with energy density and pressure identified with a series of four terms on the gauge invariant F . Each term behaves itself as a perfect fluid non-interagent, which prevails in each of the four phases, that compose the basic unity of the cycle. This same unity repeats itself indefinitely in between the maximum and the minimum of scale factor. The bouncing model is grounded on the complete regularization of the long range fields, the gravitation and the electromagnetism. It is proposed a electromagnetic interaction where the limitation of the electric and the magnetic fields is inherent, eliminating any divergences. This interaction is the source for the dynamics of the “Magnetic Universe”, an averaged configuration of fields, in which there are only contributions from the magnetic field. In that context, it is shown that the limitation of the electromagnetic interaction implies the regularization of the gravitational interaction and produces a cosmological model free of singularities. The role of dust is also examined in the cyclic model, even as how a power series in the magnetic field can produce different cosmological configurations: the singular, bouncing and cyclic ones.

Capítulo 1

Introdução

A Relatividade Geral tradicionalmente separa em setores distintos a geometria e o conteúdo material. Este representado pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, que gera a dinâmica do campo gravitacional. E o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, que traz as informações sobre a geometria, representada pela métrica $g_{\mu\nu}$.

A fonte da dinâmica pode ser descrita diretamente a partir dos campos que a geram ou como um fluido decomposto em suas partes irreduzíveis. Nesta tese serão examinados os efeitos na cosmologia padrão da geração da dinâmica por não-linearidades do campo eletromagnético, através da abordagem por fluidos:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde ρ , p , q_μ e $\pi_{\mu\nu}$ são as partes irreduzíveis de $T_{\mu\nu}$. ρ é associada à densidade de energia do fluido, p à pressão, q_μ ao fluxo de calor e $\pi_{\mu\nu}$ à pressão anisotrópica.

Todos os casos aqui estudados referem-se à eletrodinâmica não-linear induzindo a dinâmica de uma geometria globalmente homogênea e isotrópica:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Um fluido perfeito atende a essas simetrias. Então o tensor momento-energia resume-se a:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Por outro lado, ao supor que em larga escala o universo é homogêneo e isotrópico, uma questão fundamental apresenta-se: a passagem entre escalas - das estruturas, como os aglomerados de galáxias - para o cosmos; em outras palavras da astrofísica para a cosmologia. Este ponto levanta muitas questões de fundamento, que são discutidas em outros lugares. Uma dessas questões é a determinação de velas-padrão e seus usos em medidas cosmológicas.

Recentemente, foi proposta mais uma classe de velas-padrão: as supernovas do tipo IA [3]. Medidas desses objetos em grandes distâncias, sugerem que o processo de expansão do universo está ocorrendo aceleradamente.

A incompatibilidade do modelo padrão com estes pontos leva a vários questionamentos, e variadas saídas podem ser apontadas. Neste tese são examinadas as consequências na cosmologia de não-linearidades da outra interação de longo alcance, além da gravitação, o eletromagnetismo. Duas frentes serão abordadas de forma unificada, a presença/ausência de singularidade inicial e a aceleração atual do universo. A grande conveniência desta abordagem é o acesso possível a interações de longo alcance na escala terrestre, ainda que em regimes de campos mais fracos.

Os campos interagem gerando a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico. As questões de singularidade inicial e expansão acelerada são consequências do ajuste da não-linearidade da gravitação e não-linearidades do campo eletromagnético, através das equações (2.16).

A gravitação será aqui representada pelas equações da Relatividade Geral (RG), obtida a partir da extremização da ação:

$$S = \int \sqrt{-g} [R + L(F)], \quad (1.4)$$

em que L é função de interações não-lineares de campo eletromagnético¹, que geram o tensor momento-energia representado acima.

Serão apresentados dois cenários cosmológicos em que não há singularidades. Ambos os cenários dinâmicos. São processos sempre em andamento. Não há um ponto em que “tudo começou”. Os dois comportamentos, de universo eterno, são o *cíclico* e o *assintótico*.

O comportamento cíclico é aquele em que há repetição de um estado do universo, passando por períodos de expansão e contração sucessivos. Esse estado do universo pode ser um ponto de mínima ou máxima condensação ou uma determinada configuração do conteúdo material, por exemplo, uma mesma equação de estado ou uma mesma era, como a fase de radiação. Essa característica cíclica do universo é a apresentada pelo “Universo Magnético Cíclico” [1], exposto nos próximos capítulos.

Comportamento assintótico é um tipo de solução com “bounce”, em que o universo evolui ao longo de um tempo infinito entre duas configurações do conteúdo material, que assintoticamente possuem uma mesma equação de estado [2]. Neste modelo um estado de “vácuo primordial” no infinito passado evolui a um “vácuo inevitável”, passando por uma fase de máxima condensação.

A relação entre os campos acessíveis em escalas terrestres, de natureza vetorial, e uma métrica única (métrica de FLRW), de natureza tensorial, direciona um campo de pesquisa de médias de campos em largas escalas (por exemplo [4]). O procedimento adotado nos trabalhos aqui apresentados é baseado no ajuste de simetrias entre a métrica $g_{\mu\nu}$ e a fonte $T_{\mu\nu}$. A fonte é formada por **médias** dos campos.

A distribuição de matéria/energia do universo é tratada como um fluido de componentes independentes (seções (4.2.2) e (4.2.3)). A cada fase estas componentes relacionam-se com a escala (capítulo 5). Assim, quando a dependência da densidade de

¹ F é o invariante de calibre $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell, antissimétrico, definido a partir dos campos elétrico e magnético e do campo de observadores V_μ pela seguinte relação: $F_{\mu\nu} \equiv E_\mu V_\nu - E_\nu V_\mu + \eta_{\mu\nu\alpha\beta} V^\alpha B^\beta$, onde $\eta_{\mu\nu\alpha\beta}$ é definido pela relação entre o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ e o determinante da métrica $\eta_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. Os campos E_μ e B_μ são definidos pelas projeções de $F_{\mu\nu}$ e de seu dual $F^*_{\mu\nu}$ em relação ao campo de observadores: $E_\mu = F_{\mu\nu}V^\nu$ e $B_\mu = F^*_{\mu\nu}V^\nu$.

energia com o fator de escala for proporcional a a^{-4} , identificamos esta fase como a fase de radiação, por exemplo. Da mesma forma, na extensão do modelo cíclico “Universo Magnético Cíclico”, a fase dominada por matéria não interagente foi associada a um fluido sem pressão $\rho_m \sim a^{-3}$. Isso evidencia que o campo eletromagnético não é nulo em média, pois mesmo no modelo padrão produz dinâmica cosmológica.

Os efeitos cosmológicos de interações não-lineares do eletromagnetismo são estudados há algum tempo [5, 7, 6], além de haver atividade intensa na área de campos magnéticos cosmológicos (por exemplo, [8]). Nesta tese serão examinados os efeitos cosmológicos de interações não-lineares do campo eletromagnético representadas em séries de potências em F . Cada termo da série comporta-se como um fluido perfeito não-interagente (seção (3.1.2)).

Interação do tipo série de potências²:

$$L(F)_s = \sum_{k=m}^n c_k F^k, \quad (1.5)$$

que em um de seus casos especiais:

$$L(F)_{umc} = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{16\mu^4\alpha^2}{F^2} \quad (1.6)$$

produz um cenário de *universo cíclico*, com quatro fases bem definidas: uma fase de expansão acelerada a partir de um ricochete, seguida de outra aceleração (atual aceleração), e por fim uma fase de desaceleração até um raio máximo, definido pela simetria inversa ao raio mínimo em que ocorre “bounce”, em que um novo ricochete ocorre - “rebound”. É apresentado o período do ciclo, a partir dos parâmetros α^2 e μ^2 . É examinado o caso em que, ademais, há poeira (fluido independente com equação de estado $p = 0$). Discute-se brevemente o caso “quase-magnético”, em que os campos elétricos e magnéticos possuem uma relação do tipo $B^2 = \sigma^2 E^2$.

O outro tipo de interação produz o que, nesta tese, chamamos de comportamento

²Onde m e n são números inteiros.

assintótico, em que no infinito passado o universo, a partir do vazio, colapsa até atingir um volume mínimo em que a contração transforma-se em expansão, encaminhando-se para o mesmo estado no infinito futuro. Trata-se de uma solução cuja tensor momento-energia é gerado a partir da Lagrangiana:

$$L(F)_{BI} = \sqrt{1 + \frac{F}{4} - \alpha^2 F^2} \quad (1.7)$$

Assintoticamente, o universo aproxima-se de um estado inicial coincidente com seu estado final - o vazio. O fluido dominante nos dois comportamentos extremos, de colapso e de expansão, possui equação de estado

$$p = -\rho, \quad (1.8)$$

que corresponde à equação de estado associada a um fluido “tipo constante cosmológica”. O que sugere a presença de uma constante cosmológica essencial ao cenário cosmológico, evidenciada nas regiões assintóticas. Esse comportamento “tipo constante cosmológica” é mimetizado pela própria não-linearidade da relação do campo eletromagnético consigo mesmo. No eletromagnetismo de Born-Infeld há uma ambiguidade quanto à presença ou ausência de uma constante na Lagrangiana. Não há nada inerente à teoria que impeça a presença dessa constante, nem que a faça necessária. Entretanto essa ambiguidade é contornada neste modelo cosmológico.

Outra característica da teoria de Born-Infeld estendida é a limitação dos valores dos campos eletromagnético e gravitacional. Há limites superior e inferior. O limite inferior é obtido pela escala cosmológica. O superior pela escala do raio do elétron. Ambos surgem da condição de que não haja singularidades na física.

Esperamos assim, ao colocar essas duas formas gerais de cenários cosmológicos aqui apresentados, exibir uma conexão mais visível entre modelos cíclicos e modelos com “bounce”, estes últimos extensamente e intensamente examinados pelo grupo ICRA/CBPF ao longo de sua história [9].

Capítulo 2

Eletrodinâmica não-linear como fonte de dinâmica gravitacional

Neste capítulo serão apresentadas as bases para a representação dos fenômenos cosmológicos a partir de novas formas de interações do campo eletromagnético. Este campo, ao contrário de outras formas de energia propostas como fonte da aceleração do universo, é acessível em escala terrestre. Além disso, o campo eletromagnético, assim como o campo gravitacional, é também de longo alcance (ambos possuem questões quanto à existência de singularidades no interior de suas teorias). E pode evitar a possível singularidade de um universo com simetrias do tipo Friedmann-Robertson-Walker, como será discutido mais adiante e como já feito na literatura [6, 9].

2.1 Tensor momento-energia

A ação S do campo gravitacional e do eletromagnético é dada por:

$$S = \int [R + L(F)] \sqrt{-g} d^4x \quad (2.1)$$

Quando $\delta S = 0$,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta A^\mu} \delta A^\mu = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta A^\mu} \delta A^\mu &= 0 \\ \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

são obtidas, respectivamente, as equações para o campo $F^{\mu\nu}$ e as equações da Relatividade Geral, sem constante cosmológica, cujo tensor momento-energia é dado pelas interações não-lineares, descritas pela Lagrangiana $L(F)$:

$$(L_F F^{\mu\nu})_{;\nu} = 0\tag{2.4}$$

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\tag{2.5}$$

ou seja¹,

$$T_{\mu\nu} = -4L_F F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu - Lg_{\mu\nu},\tag{2.6}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -4L_F F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu - Lg_{\mu\nu}\tag{2.7}$$

que pode ser reescrita em termos das componentes elétrica e magnética:

$$\begin{aligned}F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu &= -E_\mu E_\nu + E_\alpha E^\alpha V_\mu V_\nu - B_\mu B_\nu - B_\alpha B^\alpha g_{\mu\nu} + \eta^\alpha{}_{\nu\lambda\gamma} V^\lambda B^\gamma E_\alpha V_\mu + \\ &+ \eta_{\mu\alpha\lambda\gamma} V^\lambda B^\gamma E^\alpha V_\nu \\ F &= 2(E_\alpha E^\alpha - B_\alpha B^\alpha)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Os campos que compõem o tensor momento-energia, E e B , são funções explícitas da posição e do tempo e, por consequência, não trazem *a priori* indicativos da escala ou das simetrias da métrica.

Na seção seguinte, essa fonte puramente eletromagnética será ajustada com as sime-

¹ L_F é a derivada parcial da Lagrangiana $L(F)$ com respeito ao invariante F : $L_F \equiv \frac{\partial L}{\partial F}$.

trias de homogeneidade e isotropia da métrica de Friedmann:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2]. \quad (2.9)$$

Isso será feito a partir de médias dos campos, algumas das quais devem ser nulas de modo a atender às simetrias impostas sobre a métrica $g^{\mu\nu}$. Como consequência a média dos campos é nula, porque sua natureza vetorial indica anisotropia.

2.2 Procedimentos de média - relações entre as escalas no universo

A forma de relacionar escalas é ainda uma questão em aberto na física. Por exemplo, a escala quântica com a escala da mecânica clássica; a escala terrestre com a cosmológica. Nesta seção os esforços serão concentrados em estudar a relação entre as duas interações fundamentais de longo alcance, o eletromagnetismo e gravitação, através da relação entre o campo eletromagnético e o campo gravitacional em escala cosmológica.

A proposta é casar as simetrias da métrica $g_{\mu\nu}$, na RG^2 de um universo homogêneo e isotrópico com o campo eletromagnético em larga escala.

Supõe-se um procedimento de média, tal que os campos elétrico e magnético (tomados em média) não são (mais) funções de posição, mas sim da escala do universo.

O tensor momento-energia, fonte da dinâmica, sempre pode ser representado como um fluido escrito em termos de suas partes irreduzíveis, procedimento que será adotado em todos os trabalhos aqui apresentados:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

É sempre possível a partir de um campo de observadores V^μ do tipo tempo, $V^\mu = \delta_0^\mu$,

²RG: Relatividade Geral.

definir uma hipersuperfície perpendicular do tipo espaço a partir do projetor $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} h_\mu^\alpha h_{\alpha\nu} &= h_{\mu\nu} \\ h^\alpha{}_\mu V^\mu &= 0 \\ h^{\mu\nu} V_\nu &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cada uma das componentes irreduzíveis ρ (densidade de energia), p (pressão), q_μ (fluxo de calor) e $\pi_{\mu\nu}$ (pressão anisotrópica) possui suas correspondências tanto com as médias dos campos como com as simetrias da métrica. Portanto, uma métrica homogênea e isotrópica sugere um tensor momento-energia sem transporte de calor $q_\mu = 0$ e sem pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu} = 0$:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

As médias dos campos em cosmologia ainda são um campo de pesquisa de ampla discussão. A primeira proposta apareceu em 1930 no artigo “Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field”, de Tolman e Ehrenfest. Este trabalho é anterior à confirmação da observação da radiação cósmica de fundo. E tem como fundamento tratar a radiação de um corpo negro (equilíbrio térmico) como um fenômeno de natureza eletromagnética em um sistema galileano de coordenadas. Entretanto há outros trabalhos dedicados a investigar médias em larga escala (por exemplo [4]), que levantam questões como a quebra de covariância.

Os procedimentos de média em [4] e [10] são equivalentes, no contexto dos trabalhos apresentados nesta tese, para uma geometria homogênea e isotrópica gerada pelo campo eletromagnético. Porque a discussão acontece na escala em que a métrica é homogênea

e isotrópica.

2.2.1 Médias no “Universo Magnético”

No procedimento de Tolman, o tensor momento-energia do campo eletromagnético³

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\nu} + \frac{F}{4}g_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

é associado a um fluido de densidade de energia e pressão, representando a radiação de corpo negro em equilíbrio térmico. Essa identificação permite que um sistema representado pelo tensor $T_{\mu\nu}$ seja especificado pelos dois escalares ρ (densidade de energia) e p (pressão) (eq.(2.13)).

Esta forma de $T_{\mu\nu}$ implica que as suas outras partes irreduzíveis, q_{μ} e $\pi_{\mu\nu}$, são nulas:

$$\begin{aligned} q_{\mu} &= 0 \\ \pi_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Anisotropia e fluxo de calor não estão presentes no sistema. Logo a simetria da radiação de corpo negro se corresponde com a distribuição das componentes dos campos. Em média os campos distribuem-se de forma homogênea e isotrópica, em razão do equilíbrio térmico:

³Num sistema Galileano de coordenadas.

A radiação como um todo está em repouso, então em média:

$$\begin{aligned}
\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle &= 0 \\
E_i &= 0 \\
\langle B_x \rangle = \langle B_y \rangle = \langle B_z \rangle &= 0 \\
B_i &= 0 \\
\langle E_i E_j \rangle &= -\frac{1}{3} \delta_{ij} E^2 \\
\langle B_i B_j \rangle &= -\frac{1}{3} \delta_{ij} B^2 \\
\langle E_i B_j \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde uma possibilidade de definição dessa média de uma grandeza foi dada por Tolman a saber:

$$\langle A \rangle \equiv \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int A \sqrt{-g} d^3x \tag{2.17}$$

E a distribuição dos campos em média possui as mesmas simetrias da métrica de Friedmann: homogeneidade e isotropia.

É importante notar que os resultados apresentados nesta tese são independentes do modo como as médias são definidas, desde que (2.16) seja satisfeita.

Estas médias são válidas numa escala de tempo em que as simetrias se mantêm. Como nos modelos no decorrer desta tese possuem invariavelmente métrica homogênea e isotrópica, o “terreno de validade” é estendido por toda a variedade.

Toda a análise contida nesta tese será baseada em fontes geradas a partir de Lagrangianas do tipo $L(F)$. As contribuições de G , o outro invariante de calibre do campo $F^{\mu\nu}$ não são relevantes, uma vez que $G \equiv \vec{E} \cdot \vec{B}$ e na média $\langle E_i B_j \rangle = 0$.

No trabalho original de Tolman e Ehrenfest, o fluido perfeito é equivalente à radiação, cuja equação de estado é:

$$\rho = 3p \tag{2.18}$$

Nesta tese esse procedimento é estendido a todas as fontes eletromagnéticas de um

universo de FRLW, além da radiação. Supõe-se sempre possível compatibilizar efeitos não-lineares de campo eletromagnéticos com homogeneidade e isotropia. E todo fluido perfeito pode ter suas componentes escritas a partir das médias acima ⁴:

$$\rho = -L(F) - 4L_F E^2 \quad (2.19)$$

$$p = L - \frac{4L_F}{3} (2B^2 - E^2) \quad (2.20)$$

Toda a formulação seguinte será baseada em descrições de fluidos gerados pelas interações de origem eletromagnética e por poeira, descrita como um fluido não-interagente sem pressão, cuja equação de estado é

$$p = 0 \quad (2.21)$$

A seguir, será apresentado um cenário cosmológico em que há apenas fluidos gerados por não-linearidades do campo magnético: “Universo Magnético” [5].

2.3 Equações dinâmicas da gravitação

Nas seções anteriores foi examinada a fonte da dinâmica do campo gravitacional em escala cosmológica. Esta seção será dedicada às equações dinâmicas do campo gravitacional. A teoria de campos que representa a gravitação adotada nesta tese é a Relatividade Geral.

⁴onde B^2 e E^2 são definidos a partir deste ponto como as médias dos campos quadráticos, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle &\rightarrow B^2 \\ \langle E^2 \rangle &\rightarrow E^2 \end{aligned}$$

2.3.1 Conservação de energia

O princípio de conservação da energia, reformulado ao longo de muitos séculos, admite uma nova formulação. O tensor *momento-energia* é conservado:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.22)$$

Para que seja possível perceber essa propriedade é necessário haver a interação com o campo de observadores V^μ . Portanto qualquer observação implica em projeções na hipersuperfície $h_{\mu\nu}$ e na direção do campo de observadores. No caso da equação de conservação de energia:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} h^\mu_\alpha &= 0 \\ T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} V_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

No caso específico em que a fonte rege a dinâmica da métrica de Friedmann (eq.(2.13)), as equações (2.23), reduzem-se respectivamente a

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \quad (2.24)$$

e

$$(\rho + p) a^\alpha - p^{i\mu} h_\mu^\alpha = 0 \quad (2.25)$$

Como o sistema escolhido é comóvel ($V_\mu = \delta_\mu^0$)

$$a^\mu = 0. \quad (2.26)$$

Então há a identidade

$$p_{,\mu} h^{\nu\mu} = 0. \quad (2.27)$$

Do princípio de conservação de momento-energia, segue a primeira das equações dinâmicas dos modelos cosmológicos estudados nesta tese. Esta equação relaciona a

evolução temporal da densidade de energia com seu próprio valor no instante t , ρ , com a pressão e com a grandeza θ , de natureza geométrica, que mede a variação do volume.

2.3.2 Equação de aceleração

Definida a superfície de eventos independente dos observadores (eq's.(2.11, 2.12)), a evolução dos parâmetros ópticos, que são identificados com as partes irredutíveis da variação covariante de V_μ :

$$\begin{aligned} V^\mu{}_{;\nu} &= \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{3}h^\mu{}_\nu\theta + a^\mu V_\nu, \\ &= Q^\mu{}_\nu + a^\mu V_\nu. \end{aligned} \quad (2.28)$$

é sempre uma representação válida, pois mesmo que localmente⁵.

As partes $Q_{\mu\nu}$ e $a^\mu V_\nu$ pertencem respectivamente à trisuperfície e à direção de V_μ , ou seja:

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}V^\nu &= 0 \\ a^\mu V_\mu &= 0 \\ Q_{\mu\nu}h^{\alpha\mu} &= Q^\alpha{}_\nu. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As quantidades σ^μ , ω^μ , θ e a_μ são associadas às simetrias das linhas de campo. O primeiro identifica-se com cisalhamento (“shear”). É a parte simétrica de $V_{\mu;\nu}$ sem expansão (sem traço):

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (V_{\mu;\nu} + V_{\nu;\mu}) - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\theta \\ &= h_\mu^\alpha h_\nu^\beta V_{(\mu;\nu)} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\theta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A rotação das linhas do campo de velocidades são representadas pelo tensor anti-

⁵Como por exemplo, a solução de Gödel das equações da Relatividade Geral admite essa separação apenas localmente.

simétrico $\omega_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu}) \\ &= h_\mu^\alpha h_\nu^\beta V_{[\mu;\nu]}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

O fator de expansão θ é uma função:

$$\begin{aligned}\theta &= h^{\mu\nu}V_{\mu;\nu} \\ &= V^\mu{}_{;\mu},\end{aligned}\tag{2.32}$$

ou seja, o traço de $V^\mu{}_{;\nu}$.

O termo proporcional a V^μ corresponde à variação do seu módulo nessa direção, ou seja, sua aceleração:

$$a_\mu V_\nu = (V_{\mu;\lambda}V^\lambda) V_\nu.\tag{2.33}$$

Esta separação de $V^\mu{}_{;\nu}$ em cisalhamento ($\sigma_{\mu\nu}$), expansão (θ), rotação ($\omega_{\mu\nu}$) é simplesmente uma forma de reduzir um tensor de segunda ordem às suas partes irreduzíveis, assim como foi feito com o tensor momento-energia (eq.(2.10))

Das equações (2.23) e (7.1), derivam as relações entre a geometria e o conteúdo energético, representados pelas partes irreduzíveis do gradiente do campo de velocidades e do tensor momento-energia, nessa ordem. Então todas as condições sobre ρ , p , q_ν e $\pi_{\mu\nu}$ serão consequências daquelas provenientes do setor geométrico (θ , $\sigma_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$).

Como as simetrias são homogeneidade e isotropia são válidas as equações (2.15) e

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu} &= 0 \\ \omega_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{2.34}$$

então a parte correspondente à tri-superfície resume-se a:

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\theta \quad (2.35)$$

Portanto único parâmetro geométrico a contribuir à dinâmica da geometria é o volume, θ . A sua equação de evolução é a chamada equação de Raychaudhuri e é derivada apenas da geometria, independente da dinâmica de uma métrica $g_{\mu\nu}$.

O tensor de curvatura, representante da geometrização da descrição do espaço-tempo, pode ser definido como a diferença entre as divergências de duas curvas em função das conexões, definidas a partir do transporte paralelo de um vetor ao longo de sua extensão:

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu;\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu;\mu} \\ &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu} \end{aligned} \quad (2.36)$$

projetando $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ na direção do campo de observadores, chega-se na seguinte relação:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}V^\beta = V^\alpha{}_{;\mu;\nu} - V^\alpha{}_{;\nu;\mu}. \quad (2.37)$$

A partir dessa definição, projetada nos seus índices livres na direção de V_μ e na trisuperfície identificada por $h_{\mu\nu}$, e convenientes operações em cada caso, são obtidas as equações de evolução dos chamados parâmetros ópticos.

Respeitando as simetrias de $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, projeta-se um dos índices livres na direção⁶ de V_β ⁷:

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta &= V^\mu{}_{;\alpha;\beta}V^\beta - V^\mu{}_{;\beta;\alpha}V^\beta \\ &= (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet - a^\mu{}_{;\alpha} + V^\mu{}_{;\beta}V^\beta{}_{;\alpha} \\ &= (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet + V^\mu{}_{;\beta}V^\beta{}_{;\alpha} \end{aligned} \quad (2.38)$$

⁶ $(A)^\bullet \equiv A_{;\mu}V^\mu$.

⁷Lembrando de que $a_\mu = 0$, na métrica de Friedmann.

Os demais índices livres são projetados no 3-espaço pelo projetor $h_{\mu\nu}$:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha = h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet + h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha V^\mu{}_{;\beta} V^\beta{}_{;\alpha} \quad (2.39)$$

Mas, como:

$$V_{\mu;\nu} = Q_{\mu\nu} = \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\theta \quad (2.40)$$

então

$$\begin{aligned} h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet &= h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha Q^\mu{}_\alpha \\ &= \frac{1}{3}h_\delta^\lambda \dot{\theta} \\ h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha V^\mu{}_{;\beta} V^\beta{}_{;\alpha} &= Q^\lambda{}_\beta Q^\beta{}_\delta \\ &= \frac{1}{9}h_\delta^\lambda \theta^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

E a eq.(2.39), fica:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha = \frac{1}{3}h_\delta^\lambda \dot{\theta} + \frac{1}{9}h_\delta^\lambda \theta^2 \quad (2.42)$$

Como θ é um escalar, basta tomar o traço da equação acima, para chegar à equação de evolução da taxa de expansão/contração do campo gravitacional:

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_\mu^\alpha &= \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \\ R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu &= \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

que é chamada equação de Raychaudhuri.

Supondo as equações de Einstein e o tensor momento-energia como um fluido perfeito, chega-se à equação:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad (2.44)$$

que corresponde à evolução temporal do fator de escala em função das propriedades

globais do conteúdo material. No modelo de Friedmann, este parâmetro é associado à função de Hubble, a razão entre a variação do raio do universo e seu valor absoluto:

$$\theta = \frac{3\dot{a}}{a} \quad (2.45)$$

e a equação acima fornece informações sobre a aceleração do fator de escala:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (2.46)$$

2.3.3 Equações da Relatividade Geral

Os fundamentos das equações de Raychaudhuri e de conservação (eq.'s(7.15, 2.24)) são puramente geométricos. Não trazem consigo explicitamente informações sobre a teoria da gravitação. As equações de Einstein, em contrapartida, propõem equações dinâmicas para o campo gravitacional, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

que se acoplam ao sistema dinâmico formado pelas equações apresentadas nas duas seções anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + (\rho + p)\theta &= 0 \\ \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} &= R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \end{aligned} \quad (2.48)$$

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ para uma métrica homogênea e isotrópica é:

$$\begin{aligned}
R^0_0 - \frac{1}{2}R &= G^0_0 \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}R \\
R^1_1 - \frac{1}{2}R &= G^1_1 \\
&= \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{2}{a^2}\frac{\sigma''}{\sigma} \\
R^2_2 - \frac{1}{2}R &= G^2_2 \\
&= \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma}\right] \\
&= G^3_3
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Portanto, a curvatura da triseção espacial, $\epsilon \equiv R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3$, pode ser definida como:

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\epsilon}{a^2}\right] = T = \rho - 3p \tag{2.50}$$

Cuja integral primeira, aliada à equação de conservação, corresponde a uma das equações do modelo de Friedmann:

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} + \frac{3\epsilon}{a^2} \tag{2.51}$$

Apresentadas as equações dinâmicas (2.24, 7.15) de um universo homogêneo e isotrópico e de seu vínculo com a RG (2.51), o passo seguinte é o estudo das propriedades do tensor momento-energia para cada caso: Universo Magnético (cíclico e assintótico) e Universo Magnético na presença de matéria não-interagente.

Na sequência serão apresentadas duas soluções das equações de Einstein: uma cíclica (Universo Magnético Cíclico) e uma assintótica (Teoria de Born estendida e Universo Magnético). Em ambos os casos há apenas contribuições de campo magnético, que produzem um cenário cosmológico chamado “Universo Magnético”. Algumas de suas

características (mencionadas anteriormente neste texto) também são apresentadas em maiores detalhes.

Capítulo 3

Universo Magnético

O intuito desta tese é mostrar que a existência de singularidades não é necessariamente ligada à natureza, mas sim à representação dos fenômenos. Serão apresentados basicamente dois cenários. O primeiro fundamentalmente fenomenológico, em que fluidos gerados a partir de interações não-lineares em séries de potência no invariante F . O segundo é um cenário que busca, de forma unificada, regularizar os campos de longo alcance: a gravitação e o eletromagnetismo. Ambos são colocados num cenário cosmológico chamado “Universo Magnético”.

“Universo Magnético” é baseado na solução homogênea e isotrópica das equações da RG, em que o conteúdo material do universo é gerado por interações não-lineares de campo magnético, representadas por $L(F)$.

O estudo de campos magnéticos em escala cosmológica tem sido objeto de intensa investigação nas últimas décadas, assim como a forma de computar na cosmologia campos magnéticos de galáxias. No entanto, esta tese não visa abordar estas questões de forma mais aprofundada [11]. A única questão é lidar com consequências cosmológicas de assumir contribuições de campo magnético quando submetido às simetrias da métrica de Friedmann.

Essas contribuições são aqui entendidas como o resultado de médias a que se submete o campo eletromagnético, para que as simetrias da métrica também sejam as

de $T_{\mu\nu}$. Procedimento este apresentado em (2.2). Os argumentos apresentados em [?] fazem razoável assumir que apenas o campo magnético médio $\langle B^2 \rangle$ sobrevive numa métrica homogênea e isotrópica. É essa configuração puramente magnética que chamamos de “Universo Magnético”.

Essa fonte de dinâmica pode ser caracterizada como se houvesse um *plasma* (seção 3.1) gerado no universo primordial e mantido sua influência como um campo semente [6], ao longo da evolução do universo.

Ao adicionar a condição de conservação de energia-momento a esse cenário, dois resultados emergem: a relação entre campo magnético e fator de escala é independente da forma da interação, ou seja, independente de $L(F)$ (seção (3.1.1)); e a evolução independente de fluidos quando L pode ser escrita como uma série de potências em F (seção (3.1.2)).

Esses dois resultados serão importantes nas discussões do capítulo (4). Em especial, a relação entre o campo magnético e o fator de escala, que é a mesma quando a interação eletromagnética é linear, é um resultado fundamental para o modelo apresentado no capítulo (5).

3.1 Plasma e teorias não-lineares

Como adiantado na introdução, esta tese propõe o exame dos efeitos cosmológicos para o campo magnético primordial, cuja configuração pode ser gerada por um plasma. Em [?], é proposto que a eletrodinâmica não-linear pode descrever bem os efeitos de corpos carregados numa configuração de um plasma.

Em vários trabalhos, essa configuração é identificada com um plasma primordial, que já foi mostrado ([5, 6, 9]) pode evitar o colapso do universo até uma singularidade, ou evitar uma singularidade inicial. Nesta seção será brevemente exibido como interação não-lineares de F podem mimetizar um plasma [12].

As equações para o campo F , quando $L(F)$ é não-linear, são:

$$(L_F F^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (3.1)$$

que numa releitura das equações do eletromagnetismo linear

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu, \quad (3.2)$$

permite identificar uma fonte J^μ devida à interação não-linear:

$$J^\mu = -\frac{L_F}{L_{FF}} F^{\mu\nu} F_{;\nu} \quad (3.3)$$

Esse tipo de fonte possui uma distribuição de cargas com soma total nula, mas que mesmo assim produz campo magnético. As linhas de B são, externas à distribuição de cargas, mantém a mesma forma no tempo, como congeladas. Esse arranjo de linhas é identificado com a configuração após o procedimento de médias no “Universo Magnético”.

3.1.1 Relação entre campo magnético e fator de escala

Ao escolher a descrição da fonte como um fluido que atende às simetrias da métrica, um fluido perfeito, de densidade de energia e pressão

$$\rho = -L(F) \quad (3.4)$$

$$p = L - \frac{4}{3}FL_F, \quad (3.5)$$

e observar o que surge da equação de conservação de momento-energia:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu}{}_{;\nu}V_\mu &= 0 \\
&= \dot{\rho} + (\rho + p)\theta \\
&= \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) \\
&= -L_F\dot{F} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(-\frac{4}{3}FL_F\right) \\
&= -L_F\left(\dot{F} - 4F\frac{\dot{a}}{a}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, para que a última equação seja satisfeita, ou

$$L_F = 0 \tag{3.7}$$

ou

$$\dot{F} - 4F\frac{\dot{a}}{a} = 0. \tag{3.8}$$

Se a primeira condição for satisfeita, haverá a restrição de que apenas fluidos com equação de estado $p = -\rho$ poderão satisfazer a equação de conservação. Caso contrário, independente da forma de $L(F)$, o campo magnético possui a mesma relação com o fator de escala:

$$F = \frac{F_0}{a^4} \tag{3.9}$$

que engloba fluidos de qualquer equação de estado e quaisquer interações magnéticas representadas por $L(F)$, não importa quão complicada seja: o fator de escala sente a interação magnética da mesma forma - proporcionalmente a $\sqrt[4]{\frac{1}{F}}$.

3.1.2 Independência dos fluidos

Por outro lado, se essa interação puder ser lida como um série de potências em F :

$$L(F) = \sum_k c_k F^k, \quad (3.10)$$

então densidade de energia e pressão reescrevem-se:

$$\begin{aligned} \rho &= - \sum_k c_k F^k \\ p &= \sum_k c_k F^k - \frac{4}{3} F \sum_k c_k k F^{k-1} \\ &= \sum_k c_k F^k \left(1 - \frac{4k}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.12)

Como cada uma das potências comporta-se como um fluido independente dos demais, visto que

$$\begin{aligned} -L_F \dot{F} + \theta \left(\frac{4}{3} L_F F \right) &= 0 \\ - \sum_k c_k F^{k-1} \dot{F} + \theta \left(-\frac{4}{3} F \sum_k c_k k F^{k-1} \right) &= 0 \\ \sum_k \left(c_k k F^{k-1} \dot{F} + \frac{4}{3} \theta c_k k F_k \right) &= 0 \\ \dot{\rho}_k + (\rho_k + p_k) \theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

cada qual com densidade de energia e pressão:

$$\begin{aligned} \rho_k &= c_k F^k \\ p_k &= c_k F^k \left(1 - \frac{4k}{3} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

de modo que o fluido representado por (ρ, p, V^μ) é tal que a composição de suas partes, de mesma natureza que o todo - fluidos (ρ_k, p_k, V^μ) , independente na escala das “partes”, ou seja, de seus componentes independentes:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_k \rho_k \\ p &= \sum_k p_k\end{aligned}\tag{3.15}$$

Aliados os dois resultados, a relação fixa entre campo magnético e fator de escala e a independência de cada termo perante aos demais, permite que cada fase do universo tenha sua dinâmica associada a uma potência de F . O fator de escala pode então ter sua evolução explicitada a partir de expressões analíticas que possuem conexões suaves entre si. Essas expressões são soluções da equação:

$$\rho = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\epsilon}{a^2},\tag{3.16}$$

que é resultado de se assumir a RG como teoria da gravitação¹.

¹ ϵ é a curvatura da triseção espacial.

Capítulo 4

Comportamento cíclico

Ao longo da sua história, que se desenvolveu a partir do século XX, a cosmologia têm apresentado basicamente três tipos de modelos possíveis, que pretendem representar o universo: modelo do “Big Bang”, modelos com ricochete e modelos cíclicos, estes dois últimos modelos de universo eterno. Dentre as diferenças fundamentais entre essas classes de modelos duas se destacam: a presença/ausência de singularidade presente no domínio das funções e uma “quebra” no fluir do tempo, um “marco inicial”, presente no primeiro modelo, que não se repete nos demais. Embora diferentes, esses dois pontos possuem forte correlação entre si. Havendo singularidade em um tempo finito no passado, há necessariamente, um instante inicial em que o universo teria surgido, e o teria feito a partir de uma singularidade essencial, ou seja, que não pode ser deslocada para um tempo infinitamente distante no passado, como ocorre com os modelos com ricochete.

Esta tese debruça-se sobre modelos de universo eterno gerados pelo encaixe da simetria da geometria de FRLW com interações não-lineares de campo magnético, que produz duas possíveis configurações comportamento cíclico e comportamento assintótico.

São apresentados neste capítulo uma breve revisão de resultados obtidos anteriormente [1] e o seu prolongamento natural, nas seções seguintes.

O ponto de partida é a estrutura básica do chamado “Universo Magnético Cíclico”,

cujo modelo apresenta um cenário cosmológico completo, no qual o principal responsável pela geometria é um campo magnético não-linear que produz uma geometria homogênea e isotrópica do tipo FLRW. Neste cenário distinguem-se quatro fases diferentes: um período de ‘bouncing’, uma era de radiação, uma fase de aceleração e um ‘rebouncing’. Já foi mostrado em outros trabalhos que um campo magnético não-linear muito forte pode evitar a região singular típica da teoria linear de Maxwell; num outro extremo, o de campos muito fracos, este pode acelerar a expansão. O presente modelo vai um passo à frente: após a fase de aceleração, o universo sofre um novo ‘bouncing’ e entra em colapso. Este comportamento é a manifestação da invariância sob o mapeamento dual $a(t) \rightarrow 1/a(t)$ do fator de escala, uma consequência da simetria inversa $F \rightarrow 1/F$, do campo eletromagnético F ($F \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$), da teoria não-linear aqui apresentada. Tal sequência colapso-‘bouncing’-expansão-aceleração-‘rebouncing’-colapso constitui a unidade básica para a estrutura do universo que pode repetir-se indefinidamente[13].

A interação que gera este modelo fenomenológico é (1.6)¹:

$$L(F)_{UMC} = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{16\mu^4\alpha^2}{F^2} \quad (4.1)$$

cujas partes não-nulas do tensor momento-energia são:

$$\rho_{UMC} = -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} + \frac{\mu^2}{F} - \frac{16\alpha^2\mu^4}{F^2} \quad (4.2)$$

$$p_{UMC} = -\frac{5}{3}\alpha^2 F^2 + \frac{F}{12} - \frac{7\mu^2}{3F} + \frac{11}{3}\frac{\beta^2}{F^2} \quad (4.3)$$

Como mostrado na seção (3.1.2), cada termo de (1.6) tem associado a si um fluido perfeito. Portanto o fluido (ρ_{UMC}, p_{UMC}) é composto de quatro outros fluidos independentes entre si. Cada componente domina em cada um dos estágios citados acima, formando meio período de ciclo.

Na seção a seguir serão recuperados alguns dos cálculos realizados em [13], para

¹UMC: Universo Magnético Cíclico.

mostrar como o período do ciclo está relacionado aos parâmetros α^2 e γ^2 e qual o papel da simetria inversa nesse contexto.

4.1 Período do ciclo e simetria inversa

Antes da invenção do relógio, as medidas de tempo eram feitas através de eventos cíclicos, e quanto maiores as porções de tempo, maior a necessidade de observar fenômenos astronômicos cíclicos. Mesmo o relógio analógico, que é basicamente um pêndulo, é um evento cíclico numa escala menor.

Então o primeiro prolongamento natural de investigação dos resultados de [13] foi a determinação do período τ do ciclo.

Como consequência da conservação independente dos fluidos correspondentes a cada potência de F na Lagrangiana, foi possível encontrar a expressão explícita do fator de escala em função do tempo, para cada uma das quatro fases citadas. Foram encontradas as respectivas funções $t(a)$ a partir das equações da R.G. Em seguida, foi mostrada a continuação analítica entre as quatro funções, através dos seus comportamentos nos limites inferior e superior determinados pelas constantes características de cada fase $(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)$. Essa transição suave entre as fases depende de forma significativa da simetria inversa $a \rightarrow \frac{1}{a}$, que ficou bem evidente pelo estudo dos limites da função que descreve a fase de radiação-aceleração. O passo seguinte foi verificar a possibilidade de inversão dessas funções; o que se mostrou possível em todos os casos.

Entretanto, para o cálculo do período do ciclo, são usadas as expressões de $t(a)$ em cada uma das quatro fases.

Um ciclo completo é constituído duas durações iguais: uma proveniente da expansão e outra da contração. O que será mostrado a seguir o cálculo de meio período.

4.1.1 “Bounce” - Ricochete

A fase em que ocorre o ricochete, é dominada pela combinação dos fluidos cuja densidade de energia² é proporcional às potências positivas de F :

$$\rho_f = -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} \quad (4.4)$$

Das equações de Friedmann, é determinada a aceleração positiva [7.15], seja na expansão ou na contração; e a existência de um ponto de mínimo [??]. Todos resultados de uma tri-seção espacial plana. Desta última equação, nesta fase como nas demais, é possível determinar a expressão analítica³ de $t(a)$, tendo em mente que $F = \frac{F_0}{a^4} = \frac{2H_0^2}{a^4}$:

$$\begin{aligned} \rho_f &= 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{\rho_f a^2}{3}} \\ \int \frac{da}{\sqrt{\frac{\rho_f a^2}{3}}} &= \int dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{\sqrt{3} da}{\sqrt{\rho_B a^2}} \\ &= \int \frac{\sqrt{3} da}{\sqrt{\frac{-\alpha^2 (2H_0^2)^2}{a_{br}^6} + \frac{(2H_0^2)}{a_{br}^2}}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} t - t_1 &= \frac{\sqrt{3}}{F_0} \sqrt{F_0 a_{br}^4 - 4\alpha^2 F_0^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} \sqrt{a_{br}^4 - 8\alpha^2 H_0^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

²A etiqueta ρ_f designa a fase específica em que cada análise é feita, sendo equivalente a ρ_B na fase de “bounce”, a ρ_{RA} na fase em que ocorrem radiação e aceleração e por fim a_{RB} na fase de “rebound”.

³Inclusive sua inversa $a(t)$ [1].

Assim, o raio mínimo do universo $a_{min} = \sqrt[4]{8\alpha^2 H_0^2}$ é função apenas do parâmetro α^2 e do campo magnético H_0 . Cada uma dessas constantes, ligadas a fases específicas. A constante α^2 pode ser limitada superiormente pela nucleossíntese e a constante H_0 por medidas de campos magnéticos médios na fase dominada pela radiação, que serve de conexão suave entre as duas fases aceleradas do modelo.

4.1.2 Radiação-aceleração

O segundo grande movimento é a passagem da fase de radiação (bem representada no modelo padrão da cosmologia - em que a densidade de energia é proporcional a a^{-4}) para a fase atual de aceleração, proposta como um efeito cosmológico da eletrodinâmica não-linear [5] (densidade de energia proporcional a a^4). Assim, a integral primeira da equação de Raychaudhuri fica:

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{\sqrt{3}da}{\sqrt{\rho_{RA}a^2}} \\ &= \int \frac{\sqrt{3}da}{\sqrt{\frac{(2H_0^2)}{a^2} + \frac{\mu^2 a^6}{(2H_0^2)}}} \\ t - t_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\mu}} \text{EllipticF} \left(\arccos \left[\frac{1 - \frac{\mu a^4}{H_0^2}}{1 + \frac{\mu a^4}{H_0^2}} \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\text{EllipticF} \left(\arccos \left[\frac{1 - \frac{\mu a^4}{H_0^2}}{1 + \frac{\mu a^4}{H_0^2}} \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ é uma função elíptica incompleta de primeiro tipo ($\text{EllipticF}(z, k)$), que possui função inversa (função de Jacobi) e expansão em série de Taylor bem definida, o que permite conectá-la às duas outras soluções por duas simples mudanças de variáveis $u = a^4$ e $w = a^{-4}$, ou seja, observar o comportamento de cada uma das integrais conforme a^4 - e seu recíproco a^{-4} permite inclusive encontrar o comportamento assintótico quando $\frac{\mu a^4}{H_0^2}$ é muito maior do que um. Vale lembrar que

com as duas integrais também ocorre visualizar a mesma simetria inversa, proposta como princípio entre F e a , fazendo-se presente em todos os passos da análise, como um princípio de fundamento.

A primeira conexão entre as fases é feita pela fase dominada pela radiação. Da primeira grande divisão [4.7], essa fase é recuperada quando o fator de escala já está muito longe do raio mínimo, ou seja, no limite em que $a^4 \gg 8\alpha^2 H_0^2$, portanto:

$$t - t_1 \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} a^2. \quad (4.9)$$

Já na segunda grande fase [4.8], isso ocorre quando $\frac{\mu a^4}{H_0^2} \ll 1$, onde o fator de escala ainda não cresceu o suficiente para ser comparável a μ^2 . Neste caso, a inversa da função de Jacobi ($EllipticF(z, k)$) pode expandida em série⁴, o que resulta em:

$$t - t_2 \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a^2}{H_0}. \quad (4.10)$$

Em ambos os casos [4.9] e [4.10], o comportamento é o da radiação, descrita pela Lagrangiana linear de Maxwell numa geometria de FLRW.

Sendo a radiação a conexão analítica das duas fases, é possível propagar as condições iniciais até a fase de radiação-aceleração. Como consequência da exatidão da coincidência entre os limites das duas funções, as constantes t_1 e t_2 são no fundo a mesma constante e :

$$t_1 = t_2 \quad (4.11)$$

4.1.3 “Rebounce” - Região de novo ricochete

Para concluir qual o tempo necessário para atingir metade do ciclo é necessário fazer a última relação entre o tempo em que o raio é mínimo (t_1) e o tempo em que o raio atinge o máximo, pois a metade restante constitui o mesmo processo: partindo

⁴Para maiores detalhes [13]

do raio máximo até atingir o raio mínimo, passando pelas fases em ordem inversa, em contração.

No item anterior foi mostrada a identidade entre o tempo “inicial”, ou seja, o tempo escolhido para se tomar como a primeira referência t_1 - o ponto de máxima condensação, e t_2 . Resta agora relacionar este com o instante em que a expansão atinge seu máximo. Para isso, basta repetir o mesmo procedimento acima, buscar o comportamento assintótico de $(t(a))$ quando o regime de aceleração sobrepuja o de radiação observar sua continuação analítica com a fase de “rebound”.

O comportamento assintótico superior de t na fase de radiação/aceleração corresponde à região em que $\frac{\mu a^4}{H_0^2} \gg 1$. Como já anteriormente colocado, o princípio de simetria inversa indica que ao estudar a transição das potências positivas de F para as negativas, é interessante manter o mesmo sentido em relação ao fator de escala. Como a transição entre as quatro unidades mínimas - acontece na ordem de a^{-4} , é interessante observar essa evolução em passos de a^4 unida à simetria inversa que observada na função elíptica acima leva a sua expansão em série anteriormente apresentada para o regime oposto, à mesma expansão para $\frac{H_0^2}{\mu a^4}$:

$$t - t_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2} \quad (4.12)$$

Já no caso da fase de “rebound”, $t(a)$ é

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{\sqrt{3} da}{\sqrt{\rho_{RB} a^2}} \\ &= \int \frac{\sqrt{3} da}{\sqrt{\frac{\mu^2 a^6}{(2H_0^2)} - \frac{16\mu^4 \alpha^2 a^{10}}{(2H_0^2)^2}}} \\ t - t_4 &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{H_0^2}{a^2} - 8\mu^2 \alpha^2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

que na região ainda distante do raio máximo, $a_{RB} = \frac{H_0^2}{8\mu^2 \alpha^2}$, possui o mesmo compor-

tamento de $Elliptic(F, k)$:

$$t - t_4 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2} \quad (4.14)$$

Como resultado imediato da simetria inversa, chegou-se ao resultado de que τ é determinado apenas por μ^2 , ou seja, o parâmetro que fornece o “tamanho” da fase tardia de aceleração, que corresponderia ao atual momento da evolução do universo. A constante α^2 , que sozinha fornece a “intensidade” do ricochete não é fator determinante para o processo completo do ciclo. Isso ocorre somente porque ao assumir o princípio de simetria inversa, a fase em que ocorre a desaceleração até atingir o ponto de máxima expansão poder ser reescrita como uma combinação simples de μ^2 e α^2 , permitindo que por uma simples combinação ao se efetuar a “colagem” das soluções analíticas de cada uma das fases, o papel de α^2 seja algo como de um catalisador, às avessas. Uma vez que participa do processo, mas não se apresenta nos produtos, porém não exerce a função de interferir do tempo de desenrolar do processo.

4.2 Universo Magnético Cíclico com matéria

O modelo de universo cíclico anteriormente apresentado[1], foi o resultado da composição das simetrias da métrica homogênea e isotrópica com as simetrias de calibre e inversa do invariante F , que culminaram na simetria cíclica global. Nos procedimentos de média aqui discutidos, foi adotado o método de representação dessas simetrias por um fluido perfeito, abrindo caminho para que uma análise mais completa do modelo pudesse ser empreendida com a mesma ferramenta de mecânica dos fluidos aplicada à cosmologia.

Assim como a primeira proposta de modelo cosmológico supôs que as partes do fluido fossem não-interagentes entre si. O primeiro passo escolhido para introduzir matéria na discussão de universos cíclicos foi a de supô-la descrita por um fluido não-interagente, comumente chamado poeira.

Como no caso do UMC (Universo Magnético Cíclico), a fonte é uma composição de

fluidos não-interagentes, a “adição” de mais um fluido não interagente, cuja densidade de energia é proporcional a a^{-3} como consequência de $p = 0$, é uma transição suave, cujos efeitos imediatos são apenas a mudança na forma de representar o fator de escala (assim como no caso em que a curvatura espacial é não-nula), mas que produz globalmente o embrião da formação de estruturas - ponto chave no estudo de modelos cíclicos.

O modelo constitui-se então de cinco fluidos não-interagentes:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 \\
&= -\alpha^2 F_0^2 a^{-8} + F_0 a^{-4} + \rho_{0m} a^{-3} + \frac{\mu^2}{F_0} a^4 - \frac{\beta^2}{F_0^2} a^8 \\
p &= p_1 + p_2 + p_4 + p_5 \\
&= -\frac{5}{3} \alpha^2 F_0^2 a^{-8} + \frac{F_0}{12} a^{-4} - \frac{7}{3} \frac{\mu^2}{F_0} a^4 + \frac{11}{3} \frac{\beta^2}{F_0^2} a^8,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

que produzem um cenário cíclico, em que a fase de máxima condensação, é suavemente prosseguida de radiação dominante, cuja transição à fase atual de aceleração é uma fase dominada por poeira, e que pela ação não-linear do mesmo campo primordial, possibilita a dissolução das inomogeneidades locais presentes na fase de poeira, até atingir um raio máximo de expansão e reiniciar o colapso.

A equação que relaciona a aceleração com o conteúdo material do universo:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \tag{4.16}$$

mostra que a matéria não-interagente produz uma desaceleração na evolução do universo:

$$\begin{aligned}
\frac{3\ddot{a}_m}{a_m} &= -\frac{1}{2}\rho_m \\
&= -\frac{1}{2}\rho_{0m}a^{-3}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Entretanto o comportamento completo da aceleração é dado pelo fluido completo:

$$\begin{aligned} 6\frac{\ddot{a}}{a} &= -(\rho_t + 3p_t) \\ &= -\left[-\frac{8}{3}\alpha^2 F_0^2 a^{-8} + \frac{F_0}{2}a^{-4} + \rho_{0m}a^{-3} - \frac{6\mu^2}{F_0}a^4 + \frac{10\beta^2}{F_0^2}a^8\right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Os demais fluidos independentes $((\rho_n, p_n), n = 1, 2, 4, 5)$ produzem regimes diferentes de aceleração (veja eq. (4.2) a seguir).

Para que se compreenda o papel da desaceleração $\frac{6\ddot{a}_m}{a_m}$ na dinâmica completa, é necessário conhecer o comportamento do fator de escala. A equação de vínculo possibilita expressões para o fator de escala em função do tempo:

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{da}{\sqrt{\frac{\rho_{total}a^2}{3}}} \\ &= \int \frac{da}{\sqrt{\frac{\left(-\frac{\alpha^2 F_0^2}{a^8} + \frac{F_0}{a^4} + \frac{\rho_{0m}}{a^3} + \frac{\mu^2}{F_0}a^4 - \frac{\beta^2}{F_0^2}a^8\right)a^2}{3}}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Não foi encontrada solução analítica para essa integral. Entretanto, uma solução aproximada pode ser estimada. O mesmo acontece com a aceleração, que é um polinômio de ordem superior:

$$\begin{aligned} 6\frac{\ddot{a}}{a} &= -\left(-\frac{8\alpha^2 F_0^2}{3}\frac{1}{a^8} + \frac{F_0}{2}\frac{1}{a^4} + \rho_{0m}\frac{1}{a^3} - \frac{6\mu^2}{F_0}a^4 + \frac{10\beta^2}{F_0^2}a^8\right) \\ &= -\frac{\left(\frac{\alpha^2 F_0^2}{3} + \frac{F_0}{2}a^4 + \rho_{0m}a^5 - \frac{6\mu^2}{F_0}a^{12} + \frac{10\beta^2}{F_0^2}a^{16}\right)}{a^8} \end{aligned} \quad (4.20)$$

O fluido (ρ, p) foi proposto de início como uma composição de fluidos independentes, (ρ_k, p_k) . Estender o resultado da equação de conservação (??) às duas demais equações (vínculo e aceleração) é um método razoável. E pode ser aplicado em até ordem de $0,5a^{-1}$. Esta é a menor diferença entre todas as fases, correspondendo à diferença entre

as fases de radiação (a^{-4}) e poeira (a^{-3}).⁵

O comportamento da aceleração completo é separado fases, associadas a cada um dos fluidos:

$$6\frac{\ddot{a}}{a} = -[(\rho_1 + 3p_1) + (\rho_2 + 3p_2) + (\rho_3 + 3p_3) + (\rho_4 + 3p_4) + (\rho_5 + 3p_5)] \quad (4.21)$$

$$\frac{3\ddot{a}_1}{a_1} = -\frac{1}{2}\rho_1 \quad \frac{6\ddot{a}_1}{a_1} = \frac{5}{3}\alpha^2 F_0^2 a_1^{-8} > 0$$

$$\frac{3\ddot{a}_2}{a_2} = -\frac{1}{2}\rho_2 \quad \frac{6\ddot{a}_2}{a_2} = -\frac{F_0}{2}a_2^{-4} < 0$$

$$\frac{3\ddot{a}_3}{a_3} = -\frac{1}{2}\rho_3 \quad \frac{6\ddot{a}_3}{a_3} = -\rho_{0m}a^{-3} < 0$$

$$\frac{3\ddot{a}_4}{a_4} = -\frac{1}{2}\rho_4 \quad \frac{6\ddot{a}_4}{a_4} = +\frac{6\mu^2}{F_0}a^4 > 0$$

$$\frac{3\ddot{a}_5}{a_5} = -\frac{1}{2}\rho_5 \quad \frac{6\ddot{a}_5}{a_5} = -\frac{10\beta^2}{F_0^2}a^8 < 0$$

Na fase mais remota da sua história, o universo expandia-se com aceleração positiva. Ao entrar na fase de radiação, a expansão passa a ocorrer desaceleradamente, mantida quando passa a ser dominada por poeira. Quando a matéria incoerente passa a não ser mais tão ativa, um novo processo acelerado é iniciado, para enfim sofrer nova desaceleração.

Quando a evolução temporal é vista em recortes, cada fase é vista separadamente⁶:

$$\int dt = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5) a^2}{3}}} \quad (4.22)$$

⁵E mesmo quando se considera que $\epsilon \neq 0$, a mesma diferença é mantida entre ordens de grandeza é mantida: poeira (a^{-3}) e termo devido à curvatura da tri-seção espacial a^{-2} .

⁶Manter esse método de aproximação em regiões em que o campo gravitacional é muito forte ou muito fraco viola a condição de positividade da energia. Essa questão é examinada com maiores detalhes em [1, 13]. t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 são constantes de integração.

$$\begin{aligned}
\int dt_1 &= \int \frac{da_1}{\sqrt{\frac{\rho_1 a_1^2}{3}}} & \int dt_1 &= \int \frac{a_B^3 da_B}{\sqrt{\frac{-\alpha^2 F_0^2 + F_0 a^4}{3}}} & a_{RB}(t) &= \left[\frac{4F_0}{3} (t - t_1)^2 + \alpha^2 F_0 \right]^{\frac{1}{4}} \\
\int dt_2 &= \int \frac{da_2}{\sqrt{\frac{\rho_2 a_2^2}{3}}} & \int dt_2 &= \int \frac{a_2 da_2}{\sqrt{\frac{F_0}{12}}} & a_2(t) &= \left(\frac{F_0}{3} \right)^{\frac{1}{4}} (t - t_2)^{\frac{1}{2}} \\
\int dt_3 &= \int \frac{da_3}{\sqrt{\frac{\rho_3 a_3^2}{3}}} & \int dt_3 &= \int \sqrt{\frac{3a_3}{\rho_{0m}}} da_3 & a_3(t) &= \left(\frac{3\rho_0}{4} \right)^{\frac{1}{3}} (t - t_3)^{\frac{2}{3}} \\
\int dt_4 &= \int \frac{da_4}{\sqrt{\frac{\rho_4 a_4^2}{3}}} & \int dt_4 &= \int \frac{da_4}{a_4^3 \sqrt{\frac{\mu^2}{3F_0}}} & a_4(t) &= \left(\frac{3F_0}{4\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} (t_4 - t)^{-\frac{1}{2}} \\
\int dt_5 &= \int \frac{da_5}{\sqrt{\frac{\rho_5 a_5^2}{3}}} & \int dt_5 &= \int \frac{da_{RB}}{a_{RB}^3 \sqrt{\frac{\mu^2}{3F_0} - \frac{\beta^2 a^4}{3F_0^2}}} & a_{RB}(t) &= \left(\frac{3F_0 \mu^2}{4} \right)^{\frac{1}{4}} [(t - t_5)^2 - \beta^2]^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Mesmo na presença de matéria, ainda é possível afirmar uma invariância $a \rightarrow \frac{1}{a}$, globalmente: o universo continua a oscilar entre um ponto de máxima e um ponto de mínima condensação. Contudo, na escala comparativa das cinco fases representadas pelos cinco fluidos acima, não há mais essa correspondência uma vez que a fase dominada por $\rho \sim a^{-3}$ não encontra a sua equivalente proporcional a a^{-3} ; assim como no caso de curvatura espacial diferente de zero, em que o termo ϵa^{-2} domina entre as fases de radiação e aceleração atual.

Como essa quebra de invariância não ocorre entre F e a , mas na densidade de energia da composição dos fluidos, é interessante examinar quais suas possíveis consequências na relação entre campo magnético e fator de escala, e principalmente, no cenário como um todo, seguindo uma das direções principais desta tese: como a cosmologia pode

indicar novos caminhos para a física e novas formas de interação entre aquilo que é relativamente bem conhecido na física local (como campos magnéticos) e a totalidade, representada pela seu tamanho pelo fator de escala.

No caso em que há ausência de matéria, essa simetria inversa entre $F \rightarrow \frac{1}{F}$, que por meio da invariância de relação com o fator de escala (pela equação [??]) levou a $a \rightarrow \frac{1}{a}$, de forma tal que falar de uma invariância era no fundo falar de outra. A primeira consequência foi o surgimento do produto entre os dois parâmetros α^2 e μ^2 , presentes respectivamente nos termos responsáveis pelo “bounce” e pela fase atual de aceleração, compondo o termo de “rebound”.

Ao supor que além da própria estrutura do espaço-tempo, a própria matéria também é eterna, no sentido de que não há mecanismo de geração de matéria, e que sua presença apenas não é significativa na região de grande condensação, ocorre uma quebra dessa simetria fator de $a \rightarrow \frac{1}{a}$ em todos os pontos, mesmo sendo preservada a estrutura cíclica.

Uma questão muito relevante a ser examinada posteriormente, e que se coloca como um caminho natural desta tese, é examinar as condições termodinâmicas para a possibilidade de distinguir ciclos, mesmo quando não são considerados mecanismos de produção e dissolução de matéria bariônica.

4.2.1 Curvatura da seção espacial

Uma outra abordagem do ponto de vista matemático da tricurvatura na equação de vínculo é possível no contexto de representação por fluidos. Até o momento, a conservação independente das potências de F e a suposição de matéria não-interagente possibilitou tratar “pedaços” da evolução do universo de forma independente, mas o mais conectada possível. Isso foi feito a partir das expressões analíticas do fator de escala, que em última instância derivaram da equação de vínculo.

Em universos com “bounce”, ou seja, em que as condições $\dot{a}_p = 0$ e $\ddot{a}_p > 0$, é necessário pelo menos um ponto em que a derivada do fator de escala anule-se e que a

derivada segunda seja positiva. O termo de tricurvatura pode ser entendido como um densidade de energia, que dependendo do sinal de ϵ . Nos casos estudados aqui, cada termo que compõe a densidade de energia é proporcional a uma potência específica do fator de escala, e como consequência exerce influência dominante em distintas fases da evolução do universo. Assim, a influência da tri-seção de curvatura não-nula não possui influência significativa nas regiões próximas aos pontos de retorno de a .

4.3 Interação não-linear em série de potências

Seja uma Lagrangiana, função do invariante $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, onde $F = F(B^2) = 2B^2$, fonte de um universo de FLRW.

Se

$$L(F) = \sum_{k=m}^n c_k F^k \quad (4.23)$$

com $m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ e $m > n$, então duas são as possibilidades para a evolução do universo: a presença ou ausência de singularidades ('Big Bang'/ 'Big Rip'). No segundo caso, estas são evitadas por basicamente dois 'bounces', um caracterizado por um mínimo, que evita a singularidade inicial ('Big Bang'), e o outro, um ponto de máximo, que impossibilita um 'Big Crunch'. Os fatores que determinam qual cenário será descrito são: o sinal das constantes c_k e a potência k dos termos finais da série. Portanto, a série $L(F)$ deve ser finita.

O tensor momento-energia derivado de $L(F)$, pode ser escrito como um fluido perfeito de pressão p e densidade de energia ρ :

$$\begin{aligned} \rho &= -L \\ p &= L - \frac{4}{3}L_F F \end{aligned} \quad (4.24)$$

Um resultado importante obtido a partir da equação de conservação do tensor momento-energia, que caracteriza o chamado universo magnético, é a propriedade de o

campo magnético manter sempre a dependência com fator de escala do regime linear, independente da forma da Lagrangiana $L(F)$, ou seja:

$$\begin{aligned} B &\sim a^{-2} \\ F &= \frac{F_0}{a^4} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ao supor $L(F)$ como uma série de potências em F , verifica-se que cada termo da série comporta-se como um fluido perfeito não-interagente. Portanto, a aproximação de que cada termo dita uma fase da evolução do universo é boa em quatro ordens de grandeza no fator de escala, uma vez que a Lagrangiana pode ser assim reescrita:

$$L(F) = \sum_{k=m}^n \frac{c_k F_0^k}{a^{4k}} \quad (4.26)$$

E assim, cada termo pode ser tratado como uma Lagrangiana independente

$$L = \sum_{k=m}^n L^{(k)} \quad (4.27)$$

nas equações de FLRW.

Da equação de vínculo segue a restrição sobre os sinais de cada termo: no caso da tri-seção plana, o quadrado do fator de expansão θ é diretamente identificado com a densidade de energia ρ :

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} = -L \quad (4.28)$$

No ponto de máxima condensação ou na singularidade inicial, θ anula-se. Espera-se que nesse regime, o termo dominante seja aquele de maior potência negativa. Então:

$$\rho_B = -L_B = \frac{c_k F_0^k}{a_B^{4k}} = 0 \quad (4.29)$$

o que seria uma inconsistência, uma vez que $c_k \neq 0$, $F_0 \neq 0$ e o fator de escala cresce com o tempo [??] (expressões $a(t)$), é necessário considerar a contribuição do termo

anterior $L^{(k-1)}$. Assim, a equação se reapresenta:

$$\begin{aligned}\rho_B &= -(L_k + L_{k-1}) = 0 \\ a_B^4 &= -\frac{c_k}{c_{k-1}} F_0\end{aligned}\tag{4.30}$$

↓

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} < 0\tag{4.31}$$

Logo, uma vez que o termo linear de $L(F)$ possui constante c_1 negativa, todos os termos de potência ímpar, positiva ou negativa, também têm constantes negativas:

$$c_k > 0, \text{ se } k=2n$$

$$c_k < 0, \text{ se } k=2n+1$$

Portanto a série em questão, além de ser finita, também é alternada:

$$L(F) = \sum_{k=m}^n (-1)^k c_k \frac{F_0^k}{a^{4k}}\tag{4.32}$$

Da equação de evolução do fator de expansão

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)\tag{4.33}$$

chega-se à aceleração correspondente à cada fase, regida pelo respectivo termo em potência de F :

$$3 \frac{\ddot{a}_k}{a_k} = -(-1)^k |c_k| \frac{F_0^k}{a^{4k}} + 2k(-1)^k |c_k| \frac{F_0^k}{a^{4k}} = |c_k| \frac{F_0^k}{a^{4k}} \cdot (-1)^k (2k - 1)\tag{4.34}$$

Como o termo $|c_k| \frac{F_0^k}{a^{4k}} > 0$, então se:

- $k > 0$:

$$\frac{\ddot{a}_k}{a_k} \propto (-1)^k (2k - 1) > 0, \text{ se } k \text{ for par;}\tag{4.35}$$

$$\frac{\ddot{a}_k}{a_k} \propto (-1)^k (2k - 1) < 0, \text{ se } k \text{ for ímpar.} \quad (4.36)$$

- $k < 0$:

$$\frac{\ddot{a}_k}{a_k} \propto (-1)^k (2k - 1) > 0, \text{ se } k \text{ for ímpar;} \quad (4.37)$$

$$\frac{\ddot{a}_k}{a_k} \propto (-1)^k (2k - 1) > 0, \text{ se } k \text{ for par.} \quad (4.38)$$

4.3.1 Truncamento: sinal e paridade

Portanto para potências positivas de F , os termos de ordem par produzem aceleração e termos de ordem ímpar desaceleram o universo. O processo inverso ocorre para potências negativas de F . Assim, sempre que a série for truncada em um termo com potência ímpar, ocorrerá uma singularidade e quando esta for truncada em termo de potência par, ocorrerá um “bounce”. Como F é inversamente proporcional ao fator de escala, os primeiros termos da série serão os dominantes quando $a(t)$ for muito pequeno, assim quando tivermos:

1. Primeiro e último termos da série com potências ímpares:

Se o primeiro e o último termos da série forem ímpares então o universo possui uma singularidade inicial, expande-se desaceleradamente até atingir um ponto de inflexão e passar a uma fase acelerada. No caso específico da Lagrangiana com menor número de termos $L = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F}$, independente do tipo da tri-seção espacial, o universo parte da conhecida fase de radiação e entra na fase de expansão acelerada dominada pelo termo $\frac{1}{F}$, que conduz o universo a uma singularidade final: “Big Bang” \rightarrow “Big Rip”. Nos demais, o universo sempre passará pelo mesmo número de fases aceleradas e desaceleradas: $\frac{(m+n)}{2}$.

2. Primeiro termo par e último termo ímpar:

Neste caso, o universo não “começa” a partir de uma singularidade inicial, ou seja, o fator de escala não tende a zero num tempo finito passado. Este possui um

mínimo: o universo sofre um ricochete e expande-se aceleradamente, até atingir um ponto de inflexão alterando o sinal da aceleração. O caso mais simples dessa configuração é a Lagrangiana de Euler-Heisenberg, $L = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4}$, discutida em [6]. Outra possibilidade também examinada[5], é uma “Lagrangiana-fonte” com três termos $L = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F}$. Em ambos os casos, assim como em todos onde m e n seguem esta paridade, as fases final e inicial possuem o mesmo comportamento: um “bounce inicial” e uma singularidade final, passando ou não por fases intermediárias aceleradas (com diferentes sinais).

3. Primeiro termo ímpar e último termo par:

Assim como no modelo padrão de radiação, faz-se presente uma singularidade inevitável num tempo finito passado, apontando um limite de validade dos modelos com essa característica, nessa região. Ao passo que ao caminhar no tempo finito futuro, encontra-se um ponto máximo para o fator de escala, que leva o universo a passar por todas as fases anteriormente percorridas, mas desta vez em um colapso em direção à singularidade final, levando a um “Big Crunch”.

4. Primeiro e último termos pares:

O exemplo mais simples desta configuração é aquele formado por quatro fases ($L = L^{(2)} + L^{(1)} + L^{(-1)} + L^{(-2)}$), examinado em [1] intitulado “Cyclic Magnetic Universe”: o universo oscila entre um ponto de máximo e um ponto de mínimo indefinidamente, passando, ora em expansão ora em contração, pela fase de radiação descrita pela Lagrangiana de Maxwell $L^{(1)} = \frac{F}{4}$ e por uma fase acelerada regida por $L^{(-1)} = \frac{\mu^2}{F}$. Quando há mais termos nessa configuração para a série, há acréscimos de fases aceleradas e/ou desaceleradas, para potências positivas/negativas de F .

Com relação à tri-curvatura da tri-seção espacial, esta comporta-se como um fluido independente cuja “densidade de energia” é proporcional a a^{-2} . O que não invalida o resultado, em pelo menos duas ordens de grandeza na potência do fator de escala.

Como a idade do universo será dada sempre em função de F_0 e das constantes multiplicativas c_k 's, se estas não forem grandes o suficiente para tornar as fases dominadas pelos respectivos termos muito longas, podemos dizer que há aqui um mecanismo de inflação, que pode se fazer presente em qualquer fase do universo e por variadas vezes, dependendo do número de termos da série.

Um possível termo de ordem zero em k , corresponde à adição de um termo tipo constante cosmológica como fonte das equações de Einstein. E seria relevante no exame da estabilidade das teorias.

4.3.2 Unidade Básica do ciclo

Há uma estrutura básica que se repete em todos os cenários cíclicos gerados a partir de uma interação em série de potências

$$\sum_{k=-n}^n c_k F^k.$$

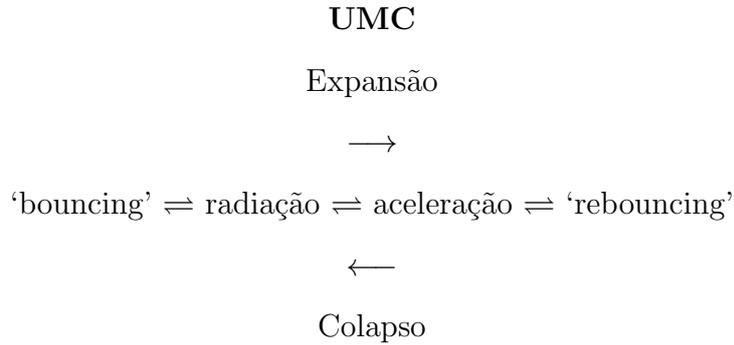
Essa unidade é composta de quatro estágios: “**bounce**”, “**radiação**”, “**aceleração**” e um novo “bounce” (“**rebound**”). O processo, seja de expansão ou de contração, alterna entre aceleração e desaceleração. E corresponde ao caso apresentado em [1] - UMC.

Uma série, que possui termos de potências maiores ($|n| > 2$ e $n = 2j$), mantém essa alternância no sinal da aceleração. No entanto não há alteração significativa da dinâmica das fases básicas individualmente em escala menores do que a^{-4} .

O acréscimo desses quatro termos (dois de potência positiva e dois de potência negativa) espaça os pontos de “bounce” e “rebound”. Esse espaçamento é devido às novas fases de aceleração, representadas por esses termos adicionados à essa estrutura básica do ciclo.

Essa estrutura aparece em dois contextos diferentes. O primeiro dentro do modelo cíclico apresentado em [1]. Repete-se em um par, ora na expansão e ora no colapso,

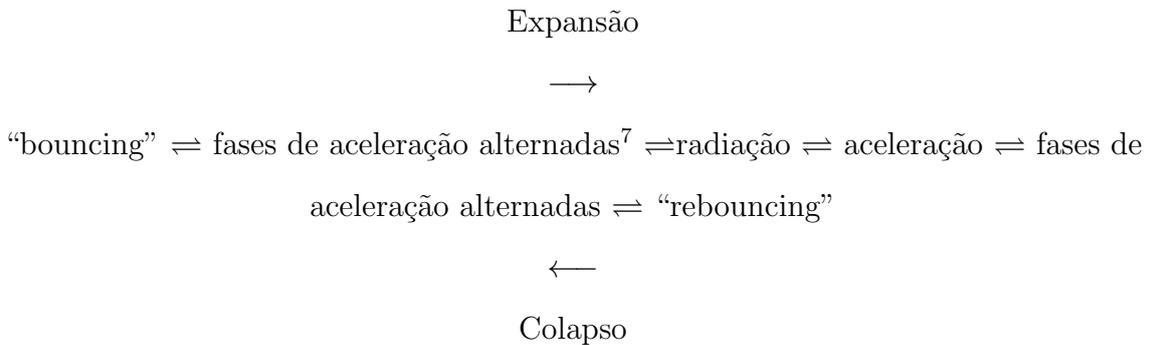
indefinidamente.



No segundo contexto, é essencial para comportamentos cíclicos do universo gerados por uma interação em série de potências. E para cada série em particular, há uma dinâmica, com um número de fases independentes ($2n$), mas que necessariamente esteja incluído esse conjunto de fases.

Comportamento Cíclico

$$\left(\sum_{k=-n}^n c_k F^k \right) \tag{4.39}$$

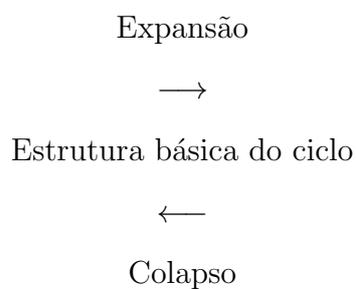


A *unidade básica de um ciclo* é aquela que será a referência de repetição, para que o ciclo seja definido (ver seção (7.2)).

Em toda a discussão em (4.3), que inclui o caso UMC, há sempre dois pontos de retorno, dois pontos de repetição: o ponto de mínima condensação e o de máxima

⁷A alternância do sinal da aceleração é respectivamente: negativa e positiva (4.35),(4.37).

condensação (“bounce” e “rebound”). Esse comportamento cíclico é um caso particular de (7.2): há duas referências de repetição. A unidade básica do ciclo tem em seu interior duas faces complementares, como num espelho: a face de expansão e a face de retração. Ambas são compostas por essa mesma estrutura [13]:



Correspondente, para cada comportamento cíclico estudado em (4.3), a todas as fases presentes entre os dois pontos de retorno.

Capítulo 5

Teoria de Born Estendida e Universo Magnético

O capítulo anterior encerrou-se com a análise dos cenários cosmológicos em que a relação entre a métrica homogênea e isotrópica relaciona-se com a interação eletromagnética expressa por uma série de potências

$$L_{series} = \sum_k c_k F^k \quad (5.1)$$

Tratavam-se de cenários cosmológicos fenomenológicos, em que era indispensável a descrição do conteúdo material através de fluidos.

Os próximos capítulos serão dedicados às consequências cosmológicas de uma nova proposta de teoria eletromagnética.

Como já vem sendo levantada desde o início deste trabalho, a questão das singularidades em teorias físicas é uma das principais motivações desta investigação. Tendo essa questão em mente, e inspirados no trabalho de Born-Infeld, será apresentado um modelo de universo eterno, baseado em uma teoria eletromagnética que limita em seu interior ambos os setores da interação (partes elétrica e magnética), assim como em [14] foi proposto com o campo escalar.

Seguindo os mesmos passos do desenvolvimento de sua teoria, partimos da in-

teração¹:

$$L_{EB} = \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \alpha^2 F^2}, \quad (5.2)$$

que nesta tese será chamada "Interação de Born Estendida", "in mnemosis" ao trabalho de Born de agosto de 1933 [15], "Modified Field Equations for a Finite Radius of Electron". Nesse trabalho, Born apresenta uma interação não-linear do campo eletromagnético que traz em sua estrutura mais fundamental a limitação do campo de uma carga puntiforme:

$$L_{Born} = \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2}} \quad (5.3)$$

A constante γ^2 relaciona-se com a carga da partícula carregada e com o que Born evocou como o raio do elétron, que surge como consequência natural da existência de um campo elétrico máximo. Por outro lado, o setor magnético da interação pode assumir valores infinitamente grandes. E assim, a teoria desempenha seu papel de limitar o campo de uma carga puntiforme, mas ainda carrega em si divergências.

É possível argumentar que ainda não foi observada nenhuma configuração puramente magnética [16]. Entretanto, como já examinado anteriormente em uma série de trabalhos [5], uma métrica homogênea e isotrópica solução das equações da RG pode assumir como fonte um "fluido magnético". Esse fluido é uma resultante de processos de médias em escala cosmológica, em que as resultantes elétricas são anuladas entre si, por questão de simetria, mimetizando uma configuração de plasma [8, 6]. Nesse contexto, seria possível então uma "configuração magnética" que não só limitaria o campo eletromagnético, como também evitaria uma singularidade num tempo finito na solução de Friedmann para as equações da RG.

O próprio domínio da interação leva a um limite superior e inferior para o invariante

¹EB: Extended-Born (interação de Born estendida.)

F :

$$\begin{aligned} \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \alpha^2 F^2} &\geq 0 \\ F_- &\geq F \geq F_+ \\ F_{\pm} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16\alpha^2 \gamma^4}}{4\alpha^2 \gamma^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

F é essencialmente uma diferença de quadrados - lembre que após os procedimentos de média, há apenas as contribuições dos termos quadráticos dos campos. As regiões em que $F < 0$ são dominadas por campo elétrico e atingem seu máximo quando há um sistema de referências que permite uma carga puntiforme em repouso:

$$F_- = -2E_m^2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\alpha^2 \gamma^4}}{4\alpha^2 \gamma^2} \quad (5.5)$$

Quando $F > 0$, a configuração dos campos é domidada pelo campo magnético, e B^2 pode atingir o valor extremo²:

$$F_+ = 2B_m^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 16\alpha^2 \gamma^4}}{4\alpha^2 \gamma^2} \quad (5.6)$$

Se a Lagrangeana L_{EB} é fonte da geometria de Friedmann, então o tensor momento-energia correspondente é:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(EB) &= -4L_F F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - L g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{\gamma^2}{4L_{EB}} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2) - L_{EB} g_{\mu\nu} \\ &= \frac{\gamma^2}{4\sqrt{W}} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2) F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \gamma^2 \sqrt{W} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde

$$W = 1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \alpha^2 F^2 \quad (5.8)$$

²Deste ponto em diante todas as grandezas com o índice +, referem-se ao ponto em que $F = F_+$. O mesmo vale para os índices que aparecerão mais à frente no texto, como $F = F_b$, e assim por diante.

O tensor momento energia pode ser reescrito como um fluido perfeito (eq.(??)), com componentes ρ e p reescritas em função de F :

$$\begin{aligned}\rho = -L &= \gamma^2 \sqrt{W} \\ p = L - \frac{4F}{3} L_F &= -\gamma^2 \sqrt{W} + \frac{1}{3} \frac{F}{\sqrt{W}} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2 F) \\ &= -\rho + \frac{1}{3} \frac{F \gamma^2}{\rho} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2 F)\end{aligned}\tag{5.9}$$

O domínio de F em um cenário cosmológico deve coincidir com o conjunto³

$$0 \geq F \geq F_+\tag{5.10}$$

estar nele contido.

Como consequência da equação de conservação, poderia-se esperar que o ponto de mínimo de $a(t)$ fosse simplesmente:

$$a_+^4 = \frac{F_0}{F_+}\tag{5.11}$$

Contudo, a dinâmica gravitacional pode impor algumas restrições adicionais aos valores possíveis de F . Para verificar essa possibilidade e, de fato, constatar a intuição de limitação de B^2 num cenário de “Universo Magnético”, que leva a um cenário cosmológico sem singularidade na RG, começamos a análise pela equação que relaciona tricurvatura, densidade de energia e a taxa de variação do fator de escala ⁴:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3\epsilon}{a^2}\tag{5.12}$$

$$\rho = \gamma^2 \sqrt{W}\tag{5.13}$$

Essa equação leva o fator de escala a atingir um único ponto crítico (a_b , quando $\dot{a}_b = 0$),

³A exclusão de valores negativos de F deve-se à ausência de contribuições elétricas à dinâmica gravitacional num modelo de “Universo Magnético”.

⁴A análise deste modelo será restrita à tricurvatura positiva.

sem violar a positividade da densidade de energia em nenhum ponto:

$$a_b^4 = \frac{(18 - F_0\gamma^2) + \sqrt{(18 - F_0\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^8 F_0^2}}{4\gamma^4} \quad (5.14)$$

A equação de aceleração,

$$6\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (5.15)$$

$$= \frac{\gamma^2}{\sqrt{W}}(1 + \alpha^2 F^2), \quad (5.16)$$

mostra que o ponto b é um ponto de mínimo do fator de escala. Uma vez que, $\frac{6\ddot{a}}{a} > 0$, $\forall a$. Consequência deste fato é uma dinâmica sempre acelerada do Universo neste modelo.

O valor correspondente de F no ponto b é:

$$F_b = \frac{4\gamma^4 F_0}{(18 - F_0\gamma^2) + \sqrt{(18 - F_0\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^8 F_0^2}} \quad (5.17)$$

$$= \frac{(F_0\gamma^2 - 18) + \sqrt{(F_0\gamma^2 - 18)^2 - 16\alpha^2\gamma^8 F_0}}{4\alpha^2\gamma^4 F_0} \quad (5.18)$$

que não necessariamente coincide com o valor máximo de F , segundo a equação (5.6). Portanto a interação gravitacional atua diretamente nos valores possíveis de B^2 , e diminui o domínio de F dado pela sua dinâmica própria.

Para garantir que não haja outras divergências, desta vez no setor direito das Equações de Einstein, é necessário observar o comportamento das quantidades termodinâmicas ρ e p .

5.1 Comportamento de ρ

Para estudar o comportamento de ρ , serão examinados o domínio da função atribuída à densidade de energia e os pontos críticos.

A forma da função $\rho(F)$ sugere, assim como a própria Lagrangeana, o intervalo de valores possíveis de F :

$$0 < \rho < \rho_+ \quad (5.19)$$

$$0 < F < F_+ \quad (5.20)$$

Entretanto, a densidade de energia obedece à equação (5.12). E não pode ser nula, pois os dois termos do lado direito da equação são positivos ($\epsilon = +1$). Em especial o segundo termo anula-se somente no limite em que $a \rightarrow \infty$. Logo, o domínio de ρ não segue diretamente de (5.19), mas das condições dadas pela dinâmica. A densidade de energia não sendo nula, todas as derivadas de ρ e de L são regulares, impedindo que quantidades como a pressão também o sejam.

A seguir, segue o exame dos pontos críticos da densidade de energia.

5.1.1 Pontos críticos de ρ

Para encontrar os pontos críticos de ρ , basta estudar a equação de conservação:

$$\dot{\rho} = -(\rho + p)\theta \quad (5.21)$$

Há pontos críticos quando $\theta| = 0$ e/ou $(\rho + p)| = 0$. Como visto acima, o único caso em que θ anula-se é no “bounce”⁵:

Para que $\rho + p$ sejam nulos:

é necessário que $F| = 0$ ou $L_F| = 0$. F anula-se somente no limite $a \rightarrow \infty$. E neste

⁵ $N|$: Valores possíveis de N , quando o lado direito da equação é nulo.

caso a densidade de energia seria

$$\rho_{assint} = \gamma^2, \quad (5.22)$$

que corresponde a $p_{assint} = -\gamma^2$, como será discutido na seq ao seguinte. Ou seja, corresponderia a um estado “tipo constante cosmológica”, pois o fluido assumiria uma equação de estado $p_{assint} = -\rho_{assint}$. Porém isso só poderia ocorrer em uma situação limite (quando o volume do universo seria infinito).

Por outro lado, $L_F| = 0$ implica em:

$$L_F = -\frac{1}{4\sqrt{W}}(1 - 4\alpha^2\gamma^2) \quad (5.23)$$

$$L_F| = 0 \Rightarrow F| = F_c = \frac{1}{4\alpha^2\gamma^2} \quad (5.24)$$

Em resumo há três situações que geram pontos críticos em ρ :

- $F = F_b$: Ponto mínimo de a ;
- $F = F_c$: Ponto em que L_F é nula;
- $F = 0$: Situação correspondente ao limite $a \rightarrow \infty$

Para saber a natureza desses pontos é necessário voltar-se para a derivada segunda de

$$\ddot{\rho} = -(\dot{\rho} + \dot{p})\theta - (\rho + p)\dot{\theta} \quad (5.25)$$

$$= \frac{4}{3}(L_{FF}F + L_F)\theta + \frac{4}{3}FL_F\dot{\theta} \quad (5.26)$$

$$= (\dot{\rho} + \dot{p})\theta - \left[\frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{2}(\rho + 3p) \right] (\rho + p) \quad (5.27)$$

$$= \frac{4}{3}(L_{FF}F + L_F)\theta + \frac{4}{3}FL_F \left[\frac{\theta^2}{3} + (-L + 2FL_F) \right] \quad (5.28)$$

caso a caso:

5.1.1.1 $F = F_c$

($L_F| = 0$ e $(\rho + p)| = 0$) A equação (5.25) resume-se a:

$$\ddot{\rho}_c = -(\dot{\rho}_c + \dot{p}_c)\theta_c \quad (5.29)$$

Usando a equação (7.91) e lembrando que $L_F|_c = 0$, é mostrado que a derivada segunda de ρ em c é negativa:

$$\ddot{\rho}_c = -\theta_c \left(-\frac{4}{3} L_{FF}|_c F_c \right) \quad (5.30)$$

$$= \frac{4\theta_c \dot{F}}{3} (L_{FF}|_c F_c + L_F|_c) \quad (5.31)$$

$$= -\frac{16}{9} F^2 \theta_c^2 L_{FF}|_c, \quad (5.32)$$

porque L_{FF} é sempre positiva. Ou seja,

$$\ddot{\rho}_c < 0, \quad (5.33)$$

a densidade de energia atinge um máximo quando $F = F_c = \frac{1}{4\alpha^2\gamma^2}$.

5.1.1.2 $F_{assint} = 0$ (limite $a \rightarrow \infty$)

Neste caso a soma $\rho + p$ também é nula. E $\ddot{\rho}_{assint}$ possui a mesma forma de (5.29):

$$\ddot{\rho}_{assint} = -(\dot{\rho}_{assint} + \dot{p}_{assint})\theta_{assint} \quad (5.34)$$

$$= -\frac{16}{9} F_{assint} \theta^2 (F_{assint} L_{FF}|_{assint} + L_F|_{assint}) \quad (5.35)$$

Contudo, $F_{assint} = 0$, no limite $a \rightarrow \infty$, logo $\ddot{\rho}_{assint} = 0$ e não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo de ρ . Para mostrar que se trata de um regime assintótico, basta mostrar que todas as derivadas temporais de ρ podem ser reduzidas a termos proporcionais a F ou \dot{F} , assim acontece com o fator de escala no modelo a

seguir.

As condições impostas neste item são:

- 1ª Condição:

$$\dot{\rho}_{assint} = 0 \quad (5.36)$$

- 2ª Condição:

$$(\rho + p)_{assint} = 0 \quad (5.37)$$

- 3ª Condição:

$$F_{assint} = 0 \quad (5.38)$$

E são comuns a todas as derivadas, seja de qual ordem forem.

A equação diferencial de 1ª ordem é simplesmente a equação de conservação projetada:

$$\dot{\rho}_{assint} = 0, \quad (5.39)$$

que mostra que este é um ponto extremo.

A equação de 2ª ordem é:

$$\ddot{\rho} + (\dot{\rho} + \dot{p})\theta + (\rho + p)\dot{\theta} = 0 \quad (5.40)$$

Utilizando as condições (5.36), (5.37) e (5.38), a equação fica reduzida⁶ a:

$$\rho_{assint} = \pm\sqrt{3\gamma^2} \quad (5.41)$$

:

$$\ddot{\rho}_{assint} + (\dot{\rho} + \dot{p})_{assint}\theta_{assint} = 0. \quad (5.42)$$

⁶Lembrando que pela equação (5.12)

Resta apenas conhecer $\rho + p$ no regime em que $F = 0$:

$$\dot{\rho} + \dot{p} = \left(\frac{4}{3} F L_F \right) \cdot \quad (5.43)$$

$$= -\frac{4}{3} \dot{F} (L_{FF} F + L_F) \quad (5.44)$$

$$(\dot{\rho} + \dot{p})_{assint} = 0, \quad (5.45)$$

pois $\dot{F} \sim F = 0$.

A equação de 3ª ordem é:

$$\frac{d^3 \rho}{dt^3} + (\ddot{\rho} + \ddot{p}) \theta + 2 (\dot{\rho} + \dot{p}) \dot{\theta} + (\rho + p) \ddot{\theta} = 0 \quad (5.46)$$

Além das condições (5.36), (5.37) e (5.38), soma-se a eq.(5.45). Logo os dois últimos termos da equação acima são nulos:

$$\frac{d^3 \rho_{assint}}{dt^3} + (\ddot{\rho}_{assint} + \ddot{p}_{assint}) \theta_{assint} = 0 \quad (5.47)$$

A soma $(\ddot{\rho} + \ddot{p})$ é escrita como uma soma de termos proporcionais a \ddot{F} e \dot{F}^2 :

$$(\ddot{\rho} + \ddot{p}) = -\frac{4}{3} \left[\ddot{F} (F L_{FF} + L_F) + \dot{F}^2 (F L_{FFF} + 2 L_{FF}) \right] \quad (5.48)$$

$$\ddot{F} = -\frac{4}{3} \left(\dot{F} \theta + F \dot{\theta} \right) = 0 \quad (5.49)$$

Logo, também é nula em *assint*:

$$(\ddot{\rho} + \ddot{p})_{assint} = 0 \quad (5.50)$$

Equações diferenciais de ordem $n \geq 4$:

Todas as equações diferenciais de ρ são iguais a um “binômio diferencial de New-

ton”⁷:

$$\frac{d^{(n+1)}\rho}{dt^{n+1}} = - \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}(\rho+p)}{dt^{n-k}} \frac{d^k\theta}{dt^k} \right] \quad (5.51)$$

Partindo de que qualquer derivada temporal de ρ é uma combinação de termos proporcionais a derivadas de $(\rho+p)$, reescrevem-se estas derivadas como funções explícitas de $\frac{d^l F}{dt^l}$ e $\frac{\partial^m L}{\partial F^m}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^l(\rho+p)}{dt^l} &= -\frac{4}{3} \left[\frac{d^l F}{dt^l} (FL_{FF} + L_F) \right] + \\ -\frac{4}{3} \left[Q \left(\frac{d^{(l-1)}F}{dt^{(l-1)}}, \frac{d^{(l-2)}F}{dt^{(l-2)}}, \dots, \frac{dF}{dt}, F, \frac{\partial^{(l+1)}L}{\partial t^{(l+1)}}, \frac{\partial^l L}{\partial t^l}, \dots, L_{FF} \right) \right] & \quad (5.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q \left(\frac{d^{(l-1)}F}{dt^{(l-1)}}, \frac{d^{(l-2)}F}{dt^{(l-2)}}, \dots, \frac{dF}{dt}, F, \frac{\partial^{(l+1)}L}{\partial t^{(l+1)}}, \frac{\partial^l L}{\partial t^l}, \dots, L_{FF} \right) &= \\ R \left(\frac{d^{(l-1)}F}{dt^{(l-1)}}, \frac{d^{l-2}F}{dt^{l-2}}, \dots, \frac{dF}{dt}, F, \frac{\partial^{(l+1)}L}{\partial t^{(l+1)}} \right) \cdot S \left(\frac{\partial^l L}{\partial t^l}, \dots, L_{FF} \right) & \quad (5.53) \end{aligned}$$

Q , R e S são funções. Q é o produto $Q = R.S$. R é função apenas das derivadas temporais de F e S apenas das variações de L em relação a⁸ F .

Por outro lado, há uma relação de recorrência para $\frac{d^l F}{dt^l}$, válida no contexto de “Universo Magnético”:

$$\dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \quad (5.54)$$

$$\ddot{F} = -\frac{4}{3}(\dot{F}\theta + F\dot{\theta}) = F.f(\theta, \dot{\theta}) \quad (5.55)$$

$$\frac{d^3 F}{dt^3} = -\frac{4}{3}(\ddot{F}\theta + 2\dot{F}\dot{\theta} + F\ddot{\theta}) = F.g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \quad (5.56)$$

$$\frac{d^4 F}{dt^4} = -\frac{4}{3}\left(\frac{d^3 F}{dt^3} + 3\ddot{F}\dot{\theta} + 3\dot{F}\ddot{\theta} + F\frac{d^3\theta}{dt^3}\right) = F.h\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \frac{d^3\theta}{dt^3}\right) \quad (5.57)$$

$$\frac{d^{(l+1)}F}{dt^{(l+1)}} = -\frac{4}{3} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}F}{dt^{n-k}} \frac{d^k\theta}{dt^k} \right] = F.j\left(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, \frac{d^l\theta}{dt^l}\right) \quad (5.58)$$

⁷Onde $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (combinação de n elementos tomados k a k). E $\frac{d^0 G}{dt^0} \equiv G$; de tal forma que a equação de conservação é recuperada quando $n = 0$.

⁸As equações (5.44) e (5.48) são casos particulares das eq.’s (5.52, 5.53).

f, g, h, j são funções da derivadas de θ .

A sequência de equações acima mostra que qualquer derivada temporal pode ser escrita como um produto de F por função das derivadas de θ . Sendo assim, quando $F = F_{assint} = 0$, todas as suas derivadas de F são nulas.

Com este resultado, as equações (5.52) e (5.53) são nulas.

$$\frac{d^l(\rho + p)}{dt^l} = 0 \quad (5.59)$$

E conseqüentemente (eq. 5.51):

$$\frac{d^n \rho_{assint}}{dt^n} = 0 \quad (5.60)$$

E portanto F_{assint} é uma assintótota para ρ .

5.1.1.3 $F = F_b$ (ou $\theta_b = 0$)

No ponto de “bounce”, a derivada é apenas (eq. (5.25)):

$$\ddot{\rho}_b + (\rho + p)_b \dot{\theta}_b = 0 \quad (5.61)$$

Como o ponto b é um mínimo de a , então $\dot{\theta}_b > 0$. Então o sinal de $\ddot{\rho}_b$ depende apenas do sinal de $(\rho + p)_b$, mais exatamente do sinal de $L_F|_b$:

$$(\rho + p)_b = -\frac{\gamma^2}{4\rho_b} (1 - 4\alpha^2\gamma^2 F_b) \quad (5.62)$$

- Se $F_b < 0$, $(\rho + p)_b > 0$ e ρ atinge um máximo no ponto de “bouncing”;
- Se $F_b > 0$, $(\rho + p)_b < 0$ e o ponto de “bouncing” atinge um mínimo de densidade de energia.

Por outro lado, $F = \frac{1}{4\alpha^2\gamma^2}$ é exatamente um ponto máximo de ρ . E que corresponde

a um valor de F maior do que F_{assint} :

$$F_c > F_{assint} \quad (5.63)$$

$$a_c < a_{assint} \quad (5.64)$$

Para que houvesse mais um ponto de máximo de ρ seria necessário pelo menos mais um ponto de mínimo. Mas, a equação $|\dot{\rho}| = 0$ não fornece mais nenhum ponto crítico além de F_c , F_{assint} e F_b . Então b é necessariamente um ponto mínimo de ρ . E a condição:

$$F_c < F_b \quad (5.65)$$

$$B_0^2 > B_{cr}^2 \quad (5.66)$$

$$B_{cr}^2 = \frac{18}{\gamma^2 (1 + 16\alpha^2\gamma^4)} \quad (5.67)$$

deve ser satisfeita.

Esta desigualdade leva a um compromisso entre o campo B_0 e os parâmetros α^2 e γ^2 . Na eletrodinâmica de Born-Infeld, o parâmetro γ^2 é fixado a partir da solução esféricamente simétrica das equações dinâmicas para o campo eletromagnético.

Neste contexto, a relação (5.66) estipula um valor mínimo para o campo magnético em larga escala. E depende diretamente de que a geometria seja homogênea e isotrópica (cujas simetrias estão embutidas nos procedimentos de médias) e de que a tricurvatura seja positiva.

Em resumo, a densidade de energia é regular em todos os pontos do domínio: no infinito passado, ρ_{assint} ($F_{assint} = 0$), passa por um ponto de máximo ρ_c ($F_c = \frac{1}{4\alpha^2\gamma^2}$)

e atinge seu mínimo no ponto de “bounce” ρ_b ($F = F_b$; (eq.5.18)):

$$\rho_c = \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{16\alpha^2\gamma^4}} \quad (5.68)$$

$$\rho_{assint} = \gamma^2 \quad (5.69)$$

$$\rho_b = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(18 - F_0\gamma^2) + \sqrt{(18 - F_0\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^8 F_0^2}}{\alpha^2\gamma^4 F_0^2}} \quad (5.70)$$

Como consequência desta análise, a região $F_b < F < X_+$ está fora do domínio. E a densidade de energia (assim como L_{EB}) é regular em todos os pontos.

5.2 Comportamento de p

A pressão associada a $L(F)$ neste modelo é:

$$p_{EB} = -\rho_{EB} + \frac{F\gamma^2}{3} \frac{1 - 4\alpha^2\gamma^2 F}{\rho_{EB}} \quad (5.71)$$

$$= -\gamma^2 \sqrt{W} + \frac{F}{3\sqrt{W}} (1 - 4\alpha^2\gamma^2 F) \quad (5.72)$$

$$= -\frac{1}{6\sqrt{W}} (6\gamma^2 + 3\gamma^2 F + 2\alpha^2\gamma^4 F^2) \quad (5.73)$$

Na seção anterior foi mostrado que a densidade de energia é regular em todos os pontos. A pressão p também possui o mesmo comportamento, desde que (eq. (7.98)) $p \neq 0$. Essa condição é automaticamente satisfeita, porque a densidade de energia nunca pode ser nula num cenário de tricurvatura não-nula sem que violação de condição de energia positiva.

Os pontos críticos de p ocorrem quando $\dot{p} = 0$:

$$\dot{p} = \left(L - \frac{4}{3} F L_F \right) \cdot \quad (5.74)$$

$$= -\frac{\dot{F}}{3} (L_F + F L_{FF}) \quad (5.75)$$

$\dot{F} = 0$ satisfaz a equação acima. E corresponde aos dois pontos $F| = 0$ e $\theta| = 0$.

A derivada segunda de p

$$\ddot{p} = - \left[\frac{\ddot{F}}{3} (L_F + 4FL_{FF}) + \frac{(\dot{F})^2}{3} (5L_{FF} + 4FL_{FFF}) \right] \quad (5.76)$$

$$\ddot{F} = \left(-\frac{4}{3}F\theta \right)' \quad (5.77)$$

$$\ddot{F} = -\frac{4}{3}(\dot{F}\theta + F\dot{\theta}) \quad (5.78)$$

quando $\dot{F}| = 0$ é:

$$\ddot{p}|_{\dot{F}=0} = \frac{4}{9}(\dot{F}\theta + F\dot{\theta})|(L_F + 4FL_{FF})| \quad (5.79)$$

mostra que os pontos F_{assint} e F_b são respectivamente assíntota e ponto de mínimo:

- $\theta_b = 0$ - “Bounce”

A equação (5.79) fica apenas

$$\ddot{p}_b = \frac{4}{9}F_b\dot{\theta}_b(L_F + 4FL_{FF})|_b \quad (5.80)$$

O campo F e L_{FF} são sempre positivos ($F = 2B^2$ e eq. (7.85), $\forall F$). θ é positivo no ponto de mínimo do fator de escala. Para conhecer o sinal de \ddot{p}_b resta apenas calcular $L_F|_b$:

$$L_F = -\frac{\gamma^2}{\rho}(1 - 4\alpha^2\gamma^2F) \quad (5.81)$$

$$L_F|_b = -\frac{\gamma^2}{\rho_b}(1 - 4\alpha^2\gamma^2F_b) \quad (5.82)$$

Se $F_b > 0$, $L_F|_b > 0$ e se $F_b < 0$, $L_F|_b < 0$. Lembrando da condição (5.65), vemos se trata de um ponto de mínimo:

$$\ddot{p}_b > 0 \quad (5.83)$$

- $F_{assint} = 0$

A equação (5.79) neste caso é:

$$\ddot{F}_{assint} = \frac{4}{9} \dot{F}_{assint} \theta_{assint} (L_F + 4FL_{FF})|_{assint} \quad (5.84)$$

Quando $F = 0$, acontece com a pressão algo muito semelhante com o que acontece com a densidade de energia. É sempre possível, seja qual for a ordem da derivada de p , reduzi-la a um produto de F com funções das derivadas de L e θ (5.1.1.2). Logo essa é uma situação assintótica também para p .

Nesse regime a pressão relaciona-se com a densidade de energia através de uma equação de estado “tipo constante cosmológica”:

$$p_{assint} = -\rho_{assint} = -\gamma^2 \quad (5.85)$$

As duas quantidades termodinâmicas responsáveis pela representação do conteúdo material do universo são regulares em todos os pontos. Portanto não há singularidades no interior do modelo.

Como pontos principais do comportamento dessas quantidades surgiram os pontos de mínimo de ρ e p ; que acontecem no ponto mínimo do fator de escala. Apesar de ambos serem mínimos, a densidade de energia é sempre positiva e a pressão é sempre negativa (eq. 7.100). Em termos de valor absoluto, a densidade de energia é mínima enquanto a pressão tem o seu maior valor absoluto no domínio, sendo a principal contribuição para o ricochete e a redistribuição de matéria.

Outro ponto importante da dinâmica é a presença de um comportamento assintótico, definido pelo $\lim a \rightarrow \infty$. As duas quantidades termodinâmicas seguem assíntotas nesse regime e compõe um fluido “tipo constante cosmológica”:

$$(\rho + p) \rightarrow 0 \quad (5.86)$$

Esboçado o comportamento do lado direito das equações dinâmicas do campo gravitacional, resta integrar o cenário geométrico. Anteriormente no texto foi mostrado que a geometria, reduzida ao fator de escala a , apresenta um volume mínimo neste cenário cosmológico. Resta saber qual o comportamento no regime assintótico que surgiu na análise do conteúdo material.

5.3 Comportamento do fator de escala

Seguindo a mesma estratégia utilizada no estudo do comportamento de ρ e p , são examinados os pontos críticos e o domínio de a - e conseqüentemente de F .

5.3.1 Pontos críticos de a

A equação (5.12), que relaciona a densidade de energia com a taxa de variação do volume θ , o fator de escala a e a tricurvatura espacial ϵ resume o acoplamento das propriedades geométricas com a dinâmica do campo gravitacional, em que se assume RG como sua representação, com a separação de conteúdo material e geometria.

Esta mesma equação produz os pontos críticos do fator de escala:

$$\rho_b = \frac{3\epsilon}{a_b^2}, \quad (5.87)$$

que é único e corresponde ao apresentado na equação (5.14). Como a dinâmica é sempre acelerada $\left(\frac{\ddot{a}}{a} > 0, \forall t\right)$, a_b é um ponto de mínimo.

A densidade de energia no limite $a \rightarrow \infty$ é γ^2 . Quando esse limite é aplicado à equação (5.12), conclui-se que nesse regime

$$\theta_{assint} = \pm \sqrt{3\gamma^2}, \quad (5.88)$$

ou seja, θ é um valor finito. Ao resgatar a representação do espaço-tempo por quantidades ópticas, em que nesse contexto de simetrias resume-se a θ , fica evidente que não

há divergências no setor geométrico. A densidade de energia é sempre bem definida, mesmo no limite $a \rightarrow \infty$.

5.4 Sistema dinâmico

Para conhecer o processo dinâmico do modelo, montamos um sistema dinâmico em função das variáveis (F, θ) para que o sistema de equações diferenciais baseado no modelo de Friedmann e na equação de conservação:

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} + \frac{3\epsilon}{a^2} \quad (5.89)$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (5.90)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \quad (5.91)$$

fossem reduzidos a um sistema dinâmico planar autônomo:

$$\dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \quad (5.92)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{3} + \gamma^2\sqrt{W} - \frac{1}{2}\frac{F(1 - 4\alpha^2\gamma^2 F)}{\sqrt{W}} \quad (5.93)$$

Os pontos de equilíbrio acontecem quando:

$$\dot{F}| = 0 \quad (5.94)$$

$$\dot{\theta}| = 0 \quad (5.95)$$

E são apenas dois:

$$\text{Ponto A: } \left(0, -\sqrt{3\gamma^2}\right) \quad (5.96)$$

$$\text{Ponto B: } \left(0, +\sqrt{3\gamma^2}\right) \quad (5.97)$$

A equação (5.12) é uma condição auxiliar, uma equação de vínculo, que permite

determinar o valor de θ nesses pontos de equilíbrio.

Esses pontos correspondem aos valores $F = F_{assint} = 0$ e $\theta = \theta_{assint}$; que são correspondentes aos regimes assintóticos da densidade de energia e da pressão. Como a variação do volume θ assume valores positivos e negativos, conclui-se que são dois regimes assintóticos para ρ e p . Para determinar a natureza e a relação entre esses pontos é necessário linearizar o sistema em torno desses pontos:

$$\begin{bmatrix} \dot{F} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)_{A,B} & \left(\frac{\dot{F}}{\theta} \right)_{A,B} \\ \left(\frac{\dot{\theta}}{F} \right)_{A,B} & \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta} \right)_{A,B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

A matriz $J_{A,B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)_{A,B} & \left(\frac{\dot{F}}{\theta} \right)_{A,B} \\ \left(\frac{\dot{\theta}}{F} \right)_{A,B} & \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta} \right)_{A,B} \end{bmatrix}$ é a matriz Jacobiana da expansão em torno de cada ponto (A ou B). Se ela for diagonalizável, os seus autovalores $\mathbf{v}_{1,2}$ e autovetores $\lambda_{1,2}$ compõem a solução

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.99)$$

do sistema de equações acima:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} \quad (5.100)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

em cada um dos pontos (A e B).

A natureza dos autovalores está diretamente relacionada à estabilidade do sistema na vizinhança do ponto. Se todos os autovalores associados à transformação no ponto

são números reais, as exponenciais são também reais.

$$\lambda_{1,2} \in \mathfrak{R}, e^{\lambda_{1,2}} \text{ são reais} \quad (5.102)$$

No caso de ambos os autovalores positivos, essas exponenciais são crescentes, e o sistema tende a afastar-se do ponto. O que caracteriza um ponto de equilíbrio instável. Se ambos os λ 's forem negativos, as exponenciais são convergentes, caracterizando um atrator:

$$\lambda_{1,2} > 0: \text{ Ponto instável} \quad (5.103)$$

$$\lambda_{1,2} < 0: \text{ Atrator} \quad (5.104)$$

A discussão é aqui limitada a essas duas possibilidades pois são as que surgem da análise deste sistema dinâmico em especial. Para maiores detalhes sobre a análise de sistemas dinâmicos na dinâmica cosmológica, veja por exemplo[?].

- **Ponto A:** $(0, -\sqrt{3\gamma^2})$

A matriz Jacobiana para o ponto A é:

$$J_A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)_A & \left(\frac{\dot{F}}{\theta} \right)_A \\ \left(\frac{\dot{\theta}}{F} \right)_A & \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta} \right)_A \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\theta_A & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\theta_A \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

E seus autovalores são

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\theta_A - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\theta_A - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5.107)$$

$$\lambda_1 = -\frac{4}{3}\theta_A \quad (5.108)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3}\theta_A \quad (5.109)$$

Como $\theta_A = -\sqrt{3\gamma^2} > 0$, ambos os autovalores são positivos, e o ponto A é um ponto de fuga das linhas.

• **Ponto B:** $(0, +\sqrt{3\gamma^2})$

A matriz Jacobiana para o ponto B é:

$$J_B = \begin{bmatrix} \left(\frac{\dot{F}}{\bar{F}} \right)_B & \left(\frac{\dot{F}}{\bar{\theta}} \right)_B \\ \left(\frac{\dot{\theta}}{\bar{F}} \right)_B & \left(\frac{\dot{\theta}}{\bar{\theta}} \right)_B \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\theta_B & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\theta_B \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

E seus autovalores são

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\theta_B - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\theta_B - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5.112)$$

$$\lambda_1 = -\frac{4}{3}\theta_B \quad (5.113)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3}\theta_B \quad (5.114)$$

Como $\theta_B = +\sqrt{3\gamma^2} < 0$, ambos os autovalores são negativos, e o ponto B é um ponto atrator de linhas.

Como já mostrado anteriormente, o valor $F = 0$ é atingido quando o fator de

escala tende ao infinito. Enquanto a densidade de energia é igual a γ^2 . Até então essa situação foi tratada como um único estado assintótico. O resultado da análise do sistema dinâmico por outro lado, mostra que são dois regimes assintóticos: um no infinito passado, e outro no infinito futuro.

Há apenas dois pontos de equilíbrio neste sistema dinâmico: um ponto instável e um atrator. Ambos ocorrem quando $F = 0$, ou seja, no infinito passado, o universo veio em processo de contração acelerada, atinge um ponto em que a contração passa a ser uma expansão (“bounce”), e prossegue em expansão sempre acelerada em direção a um estado cuja equação de estado é a mesma da qual o processo “originou-se”: $p = -\rho = -\gamma^2$.

Esse comportamento de escape do estado $p = -\rho = \gamma^2$ no infinito passado em direção a um novo estado $p = -\rho = -\gamma^2$ no infinito futuro independe de qualquer condição inicial. Logo, todas as possíveis integrais de trajetória das soluções possuem o mesmo comportamento: um grande volume colapsa, passa por um mínimo ($\theta_b = 0$) e começa a crescer.

Quando se resgata as informações de ρ e p nesses dois regimes assintóticos (“futuro” e “passado”), verifica-se que há uma simetria em relação ao ponto b , que não é exclusividade do comportamento do setor geométrico. Todo o modelo sofre um “espelhamento” nesse ponto.

A densidade de energia então aumentando seu valor, seguindo a assíntota $\rho_{assint} = \gamma^2$, atinge um ponto máximo em $\rho_c = \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{16\alpha^2\gamma^4}}$, depois começa a diminuir até atingir um mínimo local $\rho_b = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(18 - F_0\gamma^2) + \sqrt{(18 - F_0\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^8 F_0^2}}{\alpha^2\gamma^4 F_0^2}}$ no ponto de ricochete. Depois repete o mesmo processo em ordem reversa: expandindo, a densidade vai aumentando até atingir novamente o ponto máximo ρ_c , depois vai diminuindo assintoticamente seu valor em direção a ρ_{assint} .

A pressão também possui tal comportamento “espelhado”: sempre negativa, vai progressivamente afastando-se do regime assintótico $p_{assint} = -\gamma^2$ no infinito passado,

até atingir um mínimo no ponto de ricochete p_b e passar a aumentar sempre em direção ao estado p_{assint} no infinito futuro.

A principal motivação deste trabalho é a necessidade de construir uma teoria em que os campos de longo alcance possuam comportamento regular. Iniciou-se com uma interação inspirada na primeira proposta de Born para a regularização do campo elétrico de um elétron:

$$\text{Interação de Born: } L_B = -\gamma^2 \sqrt{U} \quad (5.115)$$

$$\text{Interação de Born Estendida: } L_{EB} = -\gamma^2 \sqrt{W} \quad (5.116)$$

E mostramos que essa interação estendida limita o campo eletromagnético inferiormente e superiormente. Com o foco no limite superior do campo, associado ao setor magnético, um modelo de universo eterno, concentrado no que chamamos “Universo Magnético” foi produzido, em que não há singularidades também no campo gravitacional.

Capítulo 6

Conclusão

No capítulo 4 foi mostrado que não-linearidades do campo magnético, um campo acessível na escala terrestre, podem gerar uma fase acelerada posterior à fase de radiação e evitar uma singularidade inicial [5]. E mais, produzem uma nova fase desacelerada que culmina num ponto de máximo do fator de escala [1]. A singularidade inicial (“Big Bang”) e a singularidade final (Big Rip) são evitadas respectivamente por um ponto de mínimo (“bounce”) e por um ponto de máximo (“rebound”) do fator de escala, levando a um comportamento cíclico. O ciclo é composto de duas partes que se repetem em ordem inversa: “bounce”- radiação - aceleração - “rebound”. A repetição de ciclos idênticos é ocorre indefinidamente.

O acréscimo de matéria como um novo fluido não-interagente não altera o comportamento cíclico, mas quebra a invariância $a \rightarrow \frac{1}{a}$, presente no modelo puramente magnético. Quando há somente campo magnético, essa simetria $a \rightarrow \frac{1}{a}$ é consequência direta da simetria inversa do campo magnético $F \rightarrow \frac{1}{F}$. Nesse sentido, produz efeito similar ao de uma triseção espacial positiva ($\epsilon = +1$); a diferença pode ser entendida apenas como uma questão de ordens de grandeza no fator de escala. A tricurvatura mantém a mesma configuração em ordem de grandeza a^{-2} e a matéria não-interagente ($p = 0$), em uma ordem de grandeza a mais (a^{-3}).

Em seguida, foi mostrado que uma série de potências com termos positivos e neg-

ativos gerando uma métrica homogênea e isotrópica produzem cenários cosmológicos dependentes explicitamente do sinal dos coeficientes c_k da série e do truncamento da série. Os termos pares e ímpares relacionam-se produzindo uma série alternada (4.32), que também produzem sinais alternados da aceleração. Os pares produzem aceleração e ímpares desaceleração. A combinação entre o sinal e a paridade dos termos inicial e final produzem cenários cosmológicos com “bounce”/“rebound”, singularidade (“Big Bang”, “Big Rip”, “Big Crunch”) e/ou ciclos idênticos. A adição de um termo constante à série equivale a um termo do tipo constante cosmológica e pode ser importante na extensão deste estudo à teoria de perturbações cosmológicas.

Nos ciclos estudados em (4.3), há sempre dois pontos de retorno, em que ocorrem repetições idênticas indefinidamente. Nesse contexto, foram definidas duas estruturas: a estrutura básica do ciclo e a unidade básica do ciclo. A estrutura básica do ciclo é a estrutura dinâmica que se passa entre os dois pontos de referência (o ponto de máximo e de mínimo, “bounce” e “rebound”). A unidade básica de um ciclo define o ciclo quando é repetida. Em todos os cenários de (4.3), a unidade básica do ciclo é composta de duas faces complementares: a fase de contração e a de retração. Cada face equivale então à estrutura básica de cada caso. Ambas, a estrutura básica e a unidade básica, podem ser diferentes para cada modelo cíclico.

No capítulo 5, foi mostrado que uma teoria eletromagnética com o campo F limitado superiormente e inferiormente, quando combinada com a RG, produz um cenário cosmológico sem singularidade. Mostrou-se que é possível limitar mutuamente os dois campos de longo alcance. Partimos da ideia de Born para regularizar o campo elétrico do elétron. E estendemos essa proposta ao campo magnético, adicionando um termo quadrático à raiz que compõe a Lagrangeana, uma vez que a interação de Born-Infeld não produz um cenário FLRW não-singular.

A regularidade das funções associadas à densidade de energia e à pressão interferem diretamente no domínio do campo F , e variam de modelo para modelo, tendo relação direta com a tricurvatura (a interferência da curvatura da triseção está sendo discutida

em maiores detalhes em [18]).

Mostramos que no “Universo Magnético”, tendo a interação de Born estendida como fonte das equações dinâmicas, não admite singularidade, ao contrário do que ocorre com a descrição Einstein-Maxwell e Einstein-Born-Infeld de eletrodinâmica e gravitação:

- Na fase primordial o “fluido magnético” (o que define o Universo Magnético), tem um comportamento “tipo constante cosmológica” ($p_{assint} = -\rho_{assint}$), que é instável;
- Como consequência, há o colapso até um valor mínimo do fator de escala $a_{min} = a_b$;
- Deste ponto em diante, o universo passa a expandir-se rumo a uma configuração idêntica à inicial, dominada por um fluido perfeito de equação de estado $\rho_{assint} + p_{assint} = 0$.

Para que tal modelo seja mais realista, é necessário introduzir matéria ordinária (assim como feito na seção (4.2)), que vai contribuir com a densidade de energia total com um termo proporcional a^{-3} . É também preciso fazer uma análise dos parâmetros tal como em [19].

Outra ramificação natural deste cenário é seguir os passos de Born e Infeld em [15]. Retirar um termo constante γ^2 e continuar num estudo mais aprofundado desta teoria:

$$L_{EBI} = -\gamma^2 \left(\sqrt{W} - 1 \right), \quad (6.1)$$

examinando quais critérios ajudam no direcionamento de uma teoria que busca descrever a interação eletromagnética (maiores detalhes são encontrados em [20]), como por exemplo o limite de campos fracos de ambas as teorias. E analisar suas consequências no Universo Magnético.

Uma continuação natural é, através destas interações, estudar a relação entre campos elétricos e magnéticos em escala cosmológica. Como ponto de partida pode-se

tomar o caso quase-magnético (7.8).

Capítulo 7

Apêndices

7.1 Evolução das quantidades cinemáticas

Definida a superfície de eventos independente dos observadores, a evolução dos parâmetros ópticos, que são identificados com as partes irredutíveis da variação covariante de V_μ :

$$\begin{aligned} V^\mu{}_{;\nu} &= \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{3}h^\mu{}_\nu\theta + a^\mu V_\nu, \\ &= Q^\mu{}_\nu + a^\mu V_\nu. \end{aligned} \tag{7.1}$$

é sempre uma representação válida, pois mesmo que localmente, como no caso da solução de Gödel das equações da Relatividade Geral, a separação gaussiana, tempo-espaço (1+3), é possível.

No caso da métrica de Friedmann, q_ν e $\pi_{\mu\nu}$ são nulos, por questões de simetria. Da dinâmica de $g_{\mu\nu}$ seguirão portanto as propriedades dinâmicas da densidade de energia e pressão.

O tensor de curvatura, representante da geometrização da descrição do espaço-tempo, pode ser definido como a diferença entre as divergências de duas curvas em função das conexões, definidas a partir do transporte paralelo de um vetor ao longo de

sua extensão:

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu;\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu;\mu} \\
&= \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

projetando $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ na direção do campo de observadores, chega-se na seguinte relação:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}V^\beta = V^\alpha{}_{;\mu;\nu} - V^\alpha{}_{;\nu;\mu}. \tag{7.3}$$

A partir dessa definição, projetada nos seus índices livres na direção de V_μ e na trisuperfície identificada por $h_{\mu\nu}$, e convenientes operações em cada caso, são obtidas as equações de evolução dos chamados parâmetros ópticos.

Respeitando as simetrias de $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, projeta-se um dos índices livres na direção¹ de V_β :

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta &= V^\mu{}_{;\alpha;\beta}V^\beta - V^\mu{}_{;\beta;\alpha}V^\beta \\
&= (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet - a^\mu{}_{;\alpha} + V^\mu{}_{;\beta}V^\beta{}_{;\alpha}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Os demais índices livres são projetados no 3-espço pelo projetor $h_{\mu\nu}$:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha = h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet - h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} + h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha V^\mu{}_{;\beta}V^\beta{}_{;\alpha} \tag{7.5}$$

¹ $(A)^\bullet \equiv A_{;\mu}V^\mu$.

Desenvolvendo cada um dos termos:

$$\begin{aligned}
h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha (V^\mu{}_{;\alpha})^\bullet &= h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha (Q^\mu{}_\alpha + a^\mu V_\alpha)^\bullet \\
&= h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha [\dot{Q}^\mu{}_\alpha + \dot{a}^\mu V_\alpha + a^\mu a_\alpha] \\
&= h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha Q^\mu{}_\alpha + h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha a^\mu a_\alpha \\
h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha V^\mu{}_{;\beta} V^\beta{}_{;\alpha} &= h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha [(Q^\mu{}_\beta + a^\mu V_\beta) (Q^\beta{}_\alpha + a^\beta V_\alpha)] \\
&= Q^\lambda{}_\beta Q^\beta{}_\delta
\end{aligned} \tag{7.6}$$

O tensor de Riemann completamente projetado é:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu V^\beta h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha = (h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha \dot{Q}^\mu{}_\alpha + a^\lambda a_\delta) - h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} + Q^\lambda{}_\beta Q^\beta{}_\delta \tag{7.7}$$

onde (lembrando de (??))

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^\mu{}_\alpha &= \left(\sigma^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha + \frac{1}{3} h^\mu{}_\alpha \dot{\theta} \right)_{;\lambda} V^\lambda \\
&= \frac{1}{3} \dot{\theta} V^\beta (h^\mu{}_\alpha)_{;\beta} + \frac{1}{3} h^\mu{}_\alpha \dot{\theta} + \sigma^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha \\
&= -\frac{1}{3} (a^\mu V_\alpha + a_\alpha V^\mu) + \frac{1}{3} h^\mu{}_\alpha \dot{\theta} + \sigma^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha \\
h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha \dot{Q}^\mu{}_\alpha &= \frac{1}{3} h_\delta^\lambda \dot{\theta} + h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha \sigma^\mu{}_\alpha + h_\mu^\lambda h_\delta^\alpha \omega^\mu{}_\alpha
\end{aligned} \tag{7.8}$$

e

$$\begin{aligned}
Q^\lambda{}_\beta Q^\beta{}_\delta &= \left[\frac{1}{3} h^\lambda{}_\beta \dot{\theta} + \sigma^\lambda{}_\beta + \omega^\lambda{}_\beta \right] \left[\frac{1}{3} h^\beta{}_\delta \dot{\theta} + \sigma^\beta{}_\delta + \omega^\beta{}_\delta \right] \\
&= \frac{h^\lambda{}_\delta \dot{\theta}^2}{9} + \frac{2\dot{\theta}}{3} [\omega^\lambda{}_\delta + \omega^\lambda{}_\delta] + \sigma^\lambda{}_\beta \sigma^\beta{}_\delta + \omega^\lambda{}_\beta \omega^\beta{}_\delta + \sigma^\lambda{}_\beta \omega^\beta{}_\delta + \omega^\lambda{}_\beta \sigma^\beta{}_\delta
\end{aligned} \tag{7.9}$$

7.1.1 Equação de evolução do fator de expansão

Portanto, para saber a evolução temporal do raio do universo, faz-se necessário saber comportamento do fator de expansão varia no tempo. Como este é essencialmente um traço, contraem-se os índices livres na equação (7.7):

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu V^\beta h_\mu^\alpha = h_\mu^\alpha \dot{Q}^\mu{}_\alpha + a^\mu a_\mu - h_\mu^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} + Q^\alpha{}_\beta Q^\beta{}_\alpha \quad (7.10)$$

Termo a termo:

- Termo quadrático em $Q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} Q^\alpha{}_\beta Q^\beta{}_\alpha &= \frac{\theta^2}{3} + \frac{2\theta}{3} (\sigma^\mu{}_\mu + \omega^\mu{}_\mu) + \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} + \omega_{\nu\mu} \sigma^{\mu\nu} \\ &= \frac{\theta^2}{3} + \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} + \omega^{\nu\mu} \omega_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.11)$$

- Termos nulos, naturalmente decorrentes das propriedades de simetria:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu{}_\mu &= 0 \\ \omega^\mu{}_\mu &= 0 \\ \omega^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} &= 0 \\ \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

- Variação temporal de $Q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^\mu{}_\alpha &= \left(\frac{1}{3} h_\alpha^\mu \theta \right)_{;\beta} V^\beta \\ &= \frac{1}{3} (h_\alpha^\mu)_{;\beta} V^\beta \theta + \frac{1}{3} h_\alpha^\mu \dot{\theta} + \sigma^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha \\ &= -\frac{1}{3} \theta (a^\mu V_\alpha + a_\alpha V^\mu) + \frac{1}{3} h_\alpha^\mu \dot{\theta} + \sigma^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha \end{aligned} \quad (7.13)$$

- Termos de aceleração:

$$\begin{aligned}
h_{\mu}^{\alpha} a^{\mu}{}_{;\alpha} &= (\delta_{\mu}^{\alpha} - V^{\alpha} V_{\mu}) a^{\mu}{}_{;\alpha} \\
&= a^{\mu}{}_{;\mu} - \dot{a}^{\mu} V_{\mu} \\
&= a^{\mu}{}_{;\mu} - a^{\mu}{}_{;\nu} V^{\nu} V_{\mu} \\
&= (a^{\mu} V_{\mu})_{;\nu} V^{\nu} - a^{\mu} V_{\mu;\nu} V^{\nu} \\
&= -a^{\mu} a_{\mu}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Ao substituir os termos desenvolvidos em (7.12), (7.13) e (7.14), na equação (7.10), chega-se à equação evolução para o fator de expansão, conhecida como equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu} \omega_{\nu\mu} - a^{\mu}{}_{;\mu} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \tag{7.15}$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \tag{7.16}$$

Obtêm-se a equação de Raychaudhuri (primeira equação de Friedmann)

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p), \tag{7.17}$$

aquela que rege a evolução temporal do fator de expansão em função das propriedades globais do conteúdo material. No modelo de Friedmann, este parâmetro é associado à função de Hubble, a razão entre a variação do raio do universo e seu valor absoluto:

$$\theta = \frac{3\dot{a}}{a} \tag{7.18}$$

e a equação acima fornece informações sobre a aceleração do fator de escala:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) \tag{7.19}$$

Todos os casos estudados nesta tese não possuem cisalhamento, rotação ou aceleração, portanto, apenas por questões de completeza e harmonia de conjunto, as equações de evolução para estas grandezas serão aqui apresentadas, deixando para outra ocasião o seu desenvolvimento, em que apenas o procedimento é indicado levando em conta as simetrias de cada uma delas.

7.1.2 Equação de evolução de $\sigma_{\mu\nu}$

As distorções nas linhas do campo gravitacional têm sua evolução a partir da variação temporal de $\sigma^{\mu\nu}$, obtida a partir da simetrização da equação para o tensor de curvatura totalmente projetada (7.7):

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha &= \left(h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha Q^\mu{}_{;\alpha} + a_\lambda a_\delta \right) - h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} + Q_{\beta(\lambda}Q_{\delta)}^\beta \\
&= \left[\frac{1}{3}h_{\lambda\delta}\dot{\theta} + \dot{\sigma}_{\mu\alpha}h_\lambda^\mu h_\delta^\alpha \right] + a_\lambda a_\delta - h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} \\
&+ \left[\frac{1}{9}h_{\lambda\delta}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\lambda\delta} + \sigma_{\lambda\beta}\sigma^\beta{}_\delta + \omega_{\lambda\beta}\omega^\beta{}_\delta \right] \quad (7.20)
\end{aligned}$$

lembrando que da equação de evolução para o fator de expansão (7.15), o termo $\dot{\theta}$ é escrito apenas em termos independentes explicitamente do tempo, correspondentes aos traços. Portanto:

$$\begin{aligned}
R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu V^\beta h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha &= \dot{\sigma}_{\mu\alpha}h_\lambda^\mu h_\delta^\alpha + a_\lambda a_\delta - h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^\alpha a^\mu{}_{;\alpha} + \\
&+ \left[\frac{1}{9}h_{\lambda\delta}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\lambda\delta} + \sigma_{\lambda\beta}\sigma^\beta{}_\delta + \omega_{\lambda\beta}\omega^\beta{}_\delta \right] + \\
&+ \frac{1}{3}h_{\lambda\delta} \left[R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - \left(\frac{\theta^2}{3} + \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\mu} - a^\mu{}_{;\mu} \right) \right] \quad (7.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{\mu\alpha}h_{\lambda}^{\mu}h_{\delta}^{\alpha} &= R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}V^{\nu}V^{\beta}h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^{\alpha} - \frac{1}{3}h_{\lambda\delta}R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} + h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^{\alpha}a^{\mu}{}_{;\alpha} - a_{\lambda}a_{\delta} \\
&- \left[\frac{1}{9}h_{\lambda\delta}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\lambda\delta} + \sigma_{\lambda\beta}\sigma^{\beta}{}_{\delta} + \omega_{\lambda\beta}\omega^{\beta}{}_{\delta} \right] - \frac{1}{3}h_{\lambda\delta} \left(\frac{\theta^2}{3} + \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\mu} - a^{\mu}{}_{;\mu} \right)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

7.1.3 Equação de evolução de $\omega_{\mu\nu}$

De forma semelhante, a evolução temporal da rotação das linhas do campo são obtidas a partir de antissimetrização de (7.7):

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}V^{\nu}V^{\beta}h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^{\alpha} &= h_{\mu[\lambda}h_{\delta]}^{\alpha}Q^{\mu}{}_{\alpha} - h_{\mu[\lambda}h_{\delta]}^{\alpha}a^{\mu}{}_{;\alpha} + Q_{\beta[\lambda}Q^{\beta}{}_{\delta]} \\
&= \dot{\omega}_{\lambda\alpha}h_{\lambda}^{\mu}h_{\delta}^{\alpha} - h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^{\alpha}a^{\mu}{}_{;\alpha} + \left[\frac{2}{3}\theta\omega_{\lambda\delta} + \sigma_{\lambda\alpha}\omega^{\alpha}{}_{\delta} - \sigma_{\delta\alpha}\omega^{\alpha}{}_{\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Mas, ao antissimetrizar o tensor de Riemann completamente projetado em V_{μ} e $h_{\mu\nu}$, o lado esquerdo da equação anula-se. Então a equação de evolução de $\omega_{\mu\nu}$ fica:

$$\dot{\omega}_{\lambda\alpha}h_{\lambda}^{\mu}h_{\delta}^{\alpha} - h_{\mu(\lambda}h_{\delta)}^{\alpha}a^{\mu}{}_{;\alpha} + \left[\frac{2}{3}\theta\omega_{\lambda\delta} + \sigma_{\lambda\alpha}\omega^{\alpha}{}_{\delta} - \sigma_{\delta\alpha}\omega^{\alpha}{}_{\lambda} \right] = 0 \tag{7.24}$$

7.2 Ciclos cosmológicos

Os universos cíclicos são uma extensão de universo eterno, que não possui começo nem fim, em que ocorrem repetições de máximas e mínimas condensações.

Um universo cíclico com um número indefinido de repetições, em que os ciclos são indistinguíveis entre si apresenta uma configuração ilimitada e infinitamente contável. Quando um número indefinido de repetições produz ciclos distinguíveis entre si infinitamente contável.

Quando os ciclos são distinguíveis entre si, a duração de cada um ou de um conjunto de ciclos é diferente de um outro ou de outro conjunto de ciclos. Gerando uma

configuração ilimitada, uma vez que não há começo nem fim, mas finitamente contável.

Uma configuração de universo limitada admite ciclos ao longo de sua evolução. Um processo dinâmico em que um volume inicial finito expande-se ou contrai-se pode movimentar-se através de ciclos antes de retornar ao volume inicial. Mas a dinâmica passa a existir em um dado tempo e cessa num tempo posterior.

Entretanto, um universo dinâmico implica numa constante mudança em seu estado, e por consequência, um universo dinâmico é eterno.

7.3 Condição Geométrica

Quando há dois pontos, em tempos diferentes, onde o raio do universo atinge um mínimo local:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t_1) &> 0 \\ \dot{\theta}(t_2) &> 0 \\ \theta(t_1) &= 0 \\ \theta(t_2) &= 0,\end{aligned}\tag{7.25}$$

supondo $-\infty < t < +\infty$. Ou seja, que o domínio de t sejam todos os reais ($t \in \mathfrak{R}$).

θ é a taxa de crescimento/decrescimento do volume do universo:

$$\theta = V^\mu{}_{;\mu},\tag{7.26}$$

que corresponde ao traço da variação covariante da velocidade V^μ de uma classe de observadores.

Entre dois pontos de mínimo, deve haver necessariamente um ponto de máximo, e

vice-versa. Isso implica em:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &< 0 \\ \theta(t) &= 0\end{aligned}\tag{7.27}$$

onde $t_1 < t' < t_2$. Esta é uma condição necessária para a existência de um ciclo.

7.4 Condição sobre o conteúdo material

Quando o universo volta a uma dada distribuição material. Um exemplo é a repetição de uma equação de estado após uma fase transiente.

Se as partes irreduzíveis do tensor momento-energia, que representa o conteúdo material do universo, relacionam-se por uma equação de estado $f(\rho, p, q_\nu, \pi_{\mu\nu}) = 0$ num intervalo $(t - t_f)$ e esta mesma configuração repete-se num outro intervalo $(t - t_{f'})$, ocorre um ciclo.

Com base nesses dois tipos de condições, geométrica e material, duas situações serão apresentadas neste trabalho. Um modelo de universo cíclico ilimitado com um número indefinido de repetições, chamado de Universo Magnético Cíclico. E um modelo de universo em que ao limitar superiormente o campo eletromagnético produz uma configuração assintótica.

Esses dois modelos apresentam comportamentos diferentes: um é, ao longo de sua evolução, composto de ciclos e sua dinâmica o leva sempre à repetição indefinida de ciclos. Enquanto o outro caminha inexoravelmente para o fechamento de um único ciclo desde sua partida no infinito passado, sem efetivamente alcançá-lo.

7.5 Comportamentos cíclico e assintótico

Este trabalho versará sobre dois comportamentos cosmológicos: configuração cíclica completa e configuração assintótica.

Define-se configuração cíclica completa aquela em que dois ciclos indistinguíveis ou mais repetem-se. Um universo com configuração assintótica é um universo eterno em que não há repetição dos estágios final e inicial. Dentre os modelos assintóticos destacam-se alguns modelos com “bouncing”, extensamente e intensamente, examinados pelo grupo de cosmologia e gravitação do ICRA/CBPF deste o fim da década de 70.

Esses dois comportamentos são gerados a partir de acoplamentos mínimos entre a gravitação na formulação pela Relatividade Geral e auto-interações não-lineares de campo magnético em larga escala. Autointerações inspiradas nas auto-interações eletromagnéticas de Euler-Heisenberg e Born-Infeld.

Uma série de observações desde o século passado têm sugere o comportamento dinâmico do universo. Uma forma de garantir esse comportamento é supor que há dois pontos de máxima/mínima condensação:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_2 = 0 \\ \theta_1 &> 0 (< 0) \\ \theta_2 &> 0 (< 0).\end{aligned}\tag{7.28}$$

Porque necessariamente haverá um ponto t' em que

$$\theta_2 \neq \theta' \neq \theta_1\tag{7.29}$$

além de ser recuperada a condição (7.27).

7.6 Modelo cosmológico estático

O modelo cosmológico de Einstein foi o primeiro modelo cosmológico a admitir que a totalidade poderia ser descrita pela física desde surgimento da ciência moderna [21, 22]. É um modelo estático. Não há evolução. Não há começo, nem fim. Sua

geometria não possui rotação, cisalhamento, nem expansão:

$$\begin{aligned}\theta &= 0 \\ \sigma_{\mu\nu} &= 0 \\ \omega_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{7.30}$$

Sendo o primeiro modelo cosmológico, estabeleceu algumas bases que ainda são mantidas até hoje. A primeira delas é a separação entre espaço tridimensional e o tempo. Segundo essa noção é sempre possível definir uma superfície tridimensional ortogonal ao tempo. De tal maneira que o tempo transforma-se em um parâmetro autônomo pertencente ao conjunto dos números reais.

A segunda noção é a descrição do conteúdo material como um fluido (seção (??)). Nesta tese serão examinadas situações em que a distribuição de matéria é representada por fluidos perfeitos:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu}\tag{7.31}$$

A distribuição proposta por Einstein pode ser entendida como um caso particular. Trata-se um único fluido incoerente. Portanto, sem pressão:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu\tag{7.32}$$

Uma geometria, em que as equações (7.30) são válidas, tem a equação de Raychaudhuri:

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0\tag{7.33}$$

para uma classe de observadores do tipo-tempo $V_\mu = \delta_\mu^0$.

As equações que Einstein havia proposto para representar a interação gravitacional

até então eram:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= -T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= -T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.34)$$

O que gera um modelo completamente sem matéria, pois a densidade de energia deve ser nula para satisfazer as essas equações da Relatividade Geral e a equação geométrica de Raychaudhuri:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu &= -(\rho V_\mu V_\nu) V^\mu V^\nu + \left(\frac{1}{2}\rho g_{\mu\nu}\right) V^\mu V^\nu \\ &= -\rho + \frac{1}{2}\rho \\ \rho &= 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Essa incompatibilidade entre o modelo cosmológico e as equações da gravitação fez Einstein alterá-las, introduzindo um termo a mais na Lagrangiana de interação gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} \quad (7.36)$$

Entretanto o princípio de conservação de energia na forma covariante foi mantido. A questão era que essa nova interação ainda fosse compatível com $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Das equações de Einstein originais segue que:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \\ &= -T^{\mu\nu} \\ G^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= -T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Então para que ainda haja conservação de energia na forma covariante, basta que

2.

$$\begin{aligned}
(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu})_{;\nu} &= -T^{\mu\nu}_{;\nu} \\
&= 0 \\
(\Lambda g^{\mu\nu})_{;\nu} &= 0 \\
\Lambda_{;\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Essa nova constante relaciona-se com a densidade de energia desse fluido incoerente de uma forma simples:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu &= 0 \\
R_{\mu\nu} &= -T_{\mu\nu} + \frac{T}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu &= -\rho + \frac{\rho}{2} + \Lambda
\end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\rho = 2\Lambda \tag{7.40}$$

portanto $\Lambda > 0$ para que a densidade de energia seja positiva definida. O que compatibiliza a interação gravitacional com um universo estático com matéria não-interagente.

Estudando as novas equações da dinâmica do campo gravitacional é possível compreender as propriedades dessa geometria. O elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - b^2 [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2]] \tag{7.41}$$

responde às simetrias do modelo, sendo b uma constante e σ uma função, ambas ainda a serem determinadas.

O tensor de curvatura

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}, \tag{7.42}$$

²Lembrando que $g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ para geometrias riemannianas.

associado a esse elemento de linha, gera as componentes do tensor de Ricci

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} \quad (7.43)$$

que são:

$$\begin{aligned} R^0_0 &= 0 \\ R^1_1 &= -\frac{2}{b^2} \frac{\sigma''}{\sigma} \\ R^2_2 &= -\frac{1}{b^2} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right] \\ R^3_3 &= R^2_2 \end{aligned} \quad (7.44)$$

e o escalar de curvatura é

$$\begin{aligned} R &= R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 \\ &= -\frac{1}{b^2} \left[4 \frac{\sigma''}{\sigma} + 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{2}{\sigma^2} \right] \\ &= -\frac{1}{b^2} {}^{(3)}R \end{aligned} \quad (7.45)$$

Como a componente temporal é nula, a única contribuição ao escalar de curvatura é espacial. O escalar de curvatura resume, a menos da constante b^2 , à tri-curvatura espacial.

As componentes do tensor G^{μ}_{ν} são:

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -\frac{1}{2b^2} {}^{(3)}R \\ G^1_1 &= -\frac{1}{b^2} \left(2 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{{}^{(3)}R}{2} \right) \\ G^2_2 &= \frac{1}{b^2} \frac{\sigma''}{\sigma} \\ G^3_3 &= G^2_2 \end{aligned} \quad (7.46)$$

E as novas equações de Einstein ficam³:

$$\begin{aligned}
 -\frac{(3)R}{2b^2} + \Lambda &= -\rho \\
 -\frac{1}{b^2} \left(2\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{(3)R}{2} \right) + \Lambda &= 0 \\
 \frac{1}{b^2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \Lambda &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.47}$$

Da primeira equação (componente 0-0) segue que a tricurvatura é constante, como já esperado para um modelo estático.

$$(3)R = 2b^2 (\rho + \Lambda). \tag{7.48}$$

A componente 2-2 é a equação diferencial de um seno. Ou seja:

$$\begin{aligned}
 \sigma(\chi) &= \text{sen}(\chi) \\
 b^2 &= \frac{1}{\Lambda}
 \end{aligned}
 \tag{7.49}$$

A componente 0-0 recupera o resultado $\rho = 2\Lambda$.

O escalar de curvatura e a curvatura espacial são

$$\begin{aligned}
 R &= 6\Lambda \\
 (3)R &= -6
 \end{aligned}
 \tag{7.50}$$

Por fim o elemento de linha que representa a métrica de Einstein é reescrito:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\Lambda} [d\chi^2 + \text{sen}^2\chi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \tag{7.51}$$

³A equação da componente 3-3 é idêntica à de 2-2.

com $-\infty < t < \infty$, $0 < \chi < \pi$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi < 2\pi$.

A pode ser relacionado aritmeticamente ao raio de um cilindro de base circular em um espaço de dimensão 5. Sendo este raio uma constante, o volume total não varia. Não há possibilidade de criação de matéria, nem de uma redistribuição, pois a densidade de energia total também é associada unicamente à constante cosmológica.

Este modelo cosmológico seminal produziu questões a respeito de uma lei da física, neste caso da gravitação. Einstein alterou sua representação de uma interação percebida na escala terrestre, a gravitação para não perder contato com sua representação da totalidade. Introduziu uma constante que apenas tem ação com o todo ⁴.

Assim como o modelo revisitado nesta seção, aqueles apresentados nesta tese também não têm começo nem fim. Mas diferente dele, *evoluem*. Seja de forma *cíclica*, seja de forma *assintótica*.

7.6.1 Modelo cosmológico homogêneo e isotrópico

As primeiras observações da radiação cósmica de fundo indicaram que os objetos luminosos no céu estavam afastando-se coletivamente uns dos outros. Aparecia a noção de universo dinâmico. Anos antes o matemático russo A. Friedmann havia proposto uma solução para as equações de Einstein em que a métrica do espaço-tempo era homogênea e isotrópica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad (7.52)$$

Por conta dessas simetrias, não há cisalhamento, rotação, nem aceleração:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= 0 \\ \omega_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

⁴O modelo de comportamento assintótico apresentado no capítulo (??) apresenta necessariamente uma constante cosmológica.

Entretanto a taxa de expansão é função exclusiva⁵ de $a(t)$:

$$\theta = \frac{3\dot{a}}{a} \quad (7.54)$$

Essa equação permite associar a função $a(t)$ ao tamanho do universo. Sendo função explícita do tempo, carrega consigo o comportamento dinâmico do universo. É portanto um modelo de universo dinâmico. Nos trabalhos que geraram esta tese [1, 2], essa é considerada a geometria do espaço-tempo.

A equação de Raychaudhuri, que mostra a evolução desse parâmetro óptico, resume-se a:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} &= R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \\ 3\frac{\ddot{a}}{a} &= R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \end{aligned} \quad (7.55)$$

As simetrias da métrica permitem que o tensor momento-energia seja representado em suas partes irredutíveis por um fluido perfeito⁶ com densidade de energia e pressão não-nulas (7.31):

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p). \quad (7.56)$$

A aceleração depende do arranjo entre pressão e densidade de energia.

Essas mesmas simetrias satisfazem às equações (??):

$$\begin{aligned} R^0_0 - \frac{R}{2} &= G^0_0 \\ -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\epsilon}{a^2} \right] &= -T^0_0 \\ &= -\rho \end{aligned} \quad (7.57)$$

⁵Notação: $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$.

⁶Não há fluxo de calor q_μ , nem pressão anisotrópica, $\pi_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
R^1_1 - \frac{R}{2} &= G^1_1 \\
-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{2}{a^2} \frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{3\epsilon}{a^2} &= -T^1_1 \\
&= -p
\end{aligned} \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned}
R^2_2 - \frac{R}{2} &= G^2_2 \\
-\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} \frac{\sigma''}{\sigma} &= -T^2_2 \\
&= -p
\end{aligned} \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned}
G^2_2 &= G^3_3 \\
G^0_i &= 0
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Essas equações possuem três tipos de soluções: de tricurvatura plana, positiva e negativa; associadas aos valores de ϵ :

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}R &= 0 \\
\epsilon &= 0 \\
{}^{(3)}R &> 0 \\
\epsilon &= 1 \\
{}^{(3)}R &< 0 \\
\epsilon &= -1,
\end{aligned} \tag{7.61}$$

que correspondem a diferentes métricas em que σ é:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \chi \\ \sigma_{>} &= \text{sen}\chi \\ \sigma_{<} &= \text{senh}\chi\end{aligned}\tag{7.62}$$

para cada caso, respectivamente. Resta apenas a função $a(t)$ a determinar e que, como já colocado acima, é identificado com o volume do universo.

No modelo cosmológico de Einstein a equação de conservação de energia resume-se à constância da densidade de energia. No caso de um fluido perfeito, para um observador do tipo-tempo a equação projetada resume-se a:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0.\tag{7.63}$$

Para a métrica de Friedmann, a equação fica:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0\tag{7.64}$$

Se for possível densidade de energia e pressão forem proporcionais ponto a ponto num mesmo referencial, ou seja:

$$p = \lambda\rho\tag{7.65}$$

É impossível inferir o comportamento de ρ e p com o raio do universo⁷:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \lambda)\rho &= 0 \\ \rho &= \rho_0 a^{-3(1+\lambda)},\end{aligned}\tag{7.66}$$

mesmo sem supor nenhum tipo de descrição mais detalhada do fluido.

Observações posteriores à proposição desta solução das equações de Einstein, in-

⁷ $\lambda \in \Re$.

dicaram que a radiação proveniente do espaço era uniformemente distribuídas sobre o céu. Esse fluido então pode ser modelado como um gás de fótons, com comportamento de um corpo negro [10]. Era possível então dizer que esse fluido, esse gás, não só possui uma equação de estado, como λ também é conhecido $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (7.67)$$

porque seu tensor momento-energia tem traço nulo.

Recuperando em parte a suposição do modelo de Einstein de que a matéria do universo é não-interagente entre si e extendendo essa não interação à radiação em escala cosmológica, o fluido do universo pode ser decomposto em dois outros fluidos não interagentes:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k \rho_k \\ &= \rho_m + \rho_r \\ p &= \sum_k p_k \\ &= p_m + p_r, \end{aligned} \quad (7.68)$$

obtem-se a base do modelo padrão da cosmologia.

A equação de conservação desdobra-se em duas, uma para cada um dos fluidos independentes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_k \rho_k \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \left(\sum_k \rho_k + \sum_k p_k \right) &= 0 \\ \dot{\rho}_k + \frac{3\dot{a}}{a} (\rho_k + p_k) &= 0 \\ \dot{\rho}_k + \frac{3\dot{a}}{a} (1 + \lambda_k) \rho_k &= 0 \end{aligned} \quad (7.69)$$

É interessante mostrar que esse mesmo tipo de comportamento, esse mesmo mecanismo de conservação é repetido no caso de universo magnético.

A relação entre densidade de energia e o raio do universo para a matéria não inter-agente $p = 0$:

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_{0m}a^{-3} \\ p_m &= 0\end{aligned}\tag{7.70}$$

Por outro lado a radiação produz uma relação entre a e ρ :

$$\begin{aligned}\rho_r &= \rho_{0r}a^{-4} \\ p_r &= \frac{\rho_0}{3}a^{-4}\end{aligned}\tag{7.71}$$

Havendo relações diferentes entre as componentes dos dois fluidos e o raio a , a aproximação de que cada fluido é predominante em um determinado período do universo é razoável até uma ordem de grandeza de $\frac{1}{2}a(t)$. Quanto menor o raio do universo maior a atuação da radiação, pois a densidade de energia nesse período é proporcional a a^{-4} , enquanto que poeira (matéria não-interagente) é proporcional a a^{-3} . Assim, quando o raio for crescendo, a radiação produz menos efeitos e a matéria passa a dominar a dinâmica.

A equação de vínculo com a Relatividade Geral (R.G) pode ser reescrita:

$$\rho = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\epsilon}{a^2}\tag{7.72}$$

$$\rho_k = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\epsilon}{a^2}\tag{7.73}$$

E cada fase possui um diferente comportamento com o tempo⁸:

$$a_m = \left(\frac{3\rho_{0m}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}(t - t_0)^{\frac{2}{3}}\tag{7.74}$$

⁸Soluções para triseção espacial plana.

$$a_r = \left(\frac{\rho_{0r}}{3} \right)^{\frac{1}{4}} (t - t_0)^{\frac{1}{2}} \quad (7.75)$$

Fazendo o movimento de andar para trás na “seta” do tempo, o raio a_r tende a zero num tempo finito, indicando uma singularidade. Ao voltar para as conexões da métrica, verifica-se que se trata de uma singularidade que não pode ser removida se todas condições acima forem mantidas.

Por outro lado, a solução de poeira, dominante quanto maior o universo, possui uma desaceleração, indicando que em algum momento a expansão deve cessar.

Ambos os resultados serão objeto de exame desta tese, que concentra-se em cenários ausentes de singularidades e possuem processos de expansão acelerados.

7.6.1.1 Modelo de Einstein - conexões

As componentes não-nulas da conexão afim são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\sigma\sigma' \\ \Gamma_{33}^1 &= -\sigma\sigma'\text{sen}^2(\theta) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{\sigma'}{\sigma} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{\sigma'}{\sigma} \\ \Gamma_{23}^3 &= -\text{cotg}(\theta) \end{aligned} \quad (7.76)$$

7.6.1.2 Modelo de Friedmann

Conexões não-nulas:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a} \\
 \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}\sigma^2 = \Gamma_{11}^0\sigma^2 \\
 \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}\sigma^2\text{sen}^2\theta = \Gamma_{22}^0\text{sen}^2\theta \\
 \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 \\
 \Gamma_{22}^1 &= -\sigma\sigma' \\
 \Gamma_{33}^1 &= -\sigma\sigma'\text{sen}^2\theta = \Gamma_{22}^1\text{sen}^2\theta \\
 \Gamma_{12}^2 &= \frac{\sigma'}{\sigma} = \Gamma_{13}^3 \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta\cos\theta \\
 \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

Componentes do tensor de Ricci e escalar de curvatura:

$$\begin{aligned}
 R^0_0 &= 3\frac{\ddot{a}}{a} \\
 R^1_1 &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{a^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2 \right) \\
 R^2_2 &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} - 2\dot{a}^2 \right] \\
 R^3_3 &= R^2_2 \\
 R^i_j &= 0, i \neq j \\
 R &= 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\epsilon}{a^2} \right] \\
 \epsilon &= -\frac{1}{3} \left[\frac{2\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right]
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

7.7 Equações subsidiárias

$$L_{EB} = \gamma^2 \sqrt{W} \quad (7.79)$$

$$W = 1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \alpha^2 F^2 \quad (7.80)$$

$$L_F(EB) = -\frac{\gamma^2}{2\sqrt{W}} \left(\frac{1}{2\gamma^2} - 2\alpha^2 F \right) \quad (7.81)$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{W}} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2 F) \quad (7.82)$$

$$= -\frac{\gamma^2}{4\rho} (1 - 4\alpha^2 \gamma^2 F) \quad (7.83)$$

$$L_{FF}(EB) = \frac{1 + 16\alpha^2 \gamma^4}{16\gamma^2 W^{\frac{3}{2}}} \quad (7.84)$$

$$= \frac{\gamma^4 (1 + 16\alpha^2 \gamma^4)}{16\rho^3} \quad (7.85)$$

$$-\frac{1}{2}(\rho + 3p) = -L + 2FL_F \quad (7.86)$$

$$\rho + p = -\frac{4}{3}FL_F \quad (7.87)$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (7.88)$$

$$(\dot{\rho} + \dot{p}) = -\frac{4}{3}\dot{F}(L_{FF}F + L_F) \quad (7.89)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(-\frac{4}{3}F\theta L_F\right)(L_{FF}F + L_F) \quad (7.90)$$

$$= -\frac{16}{9}F\theta(F L_{FF} + L_F) \quad (7.91)$$

$$F = \frac{F_0}{a^4} \quad (7.92)$$

$$\dot{F} = -4\frac{F_0}{a^4}\frac{\dot{a}}{a} \quad (7.93)$$

$$\dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \quad (7.94)$$

$$\rho = -L \quad (7.95)$$

$$\rho_{EB} = \gamma^2\sqrt{W} \quad (7.96)$$

$$p = L - \frac{4}{3}FL_F \quad (7.97)$$

$$p_{EB} = -\rho_{EB} + \frac{F\gamma^2}{3}\frac{1 - 4\alpha^2\gamma^2F}{\rho_{EB}} \quad (7.98)$$

$$= -\gamma^2\sqrt{W} + \frac{F}{3\sqrt{W}}(1 - 4\alpha^2\gamma^2F) \quad (7.99)$$

$$= -\frac{1}{6\sqrt{W}}(6\gamma^2 + 3\gamma^2F + 2\alpha^2\gamma^4F^2) \quad (7.100)$$

7.8 Caso quase-magnético

Também foi iniciado o exame de campos elétricos cosmológicos, através do chamado caso quase-magnético, em que escala cosmológica, o campo elétrico é proporcional ao campo magnético:

$$E^2 = f^2 B^2 \quad (7.101)$$

então

$$F = 2B^2 (1 - f^2) \quad (7.102)$$

$$\dot{F} = 4 \left[B\dot{B} (1 - f^2) \right] \quad (7.103)$$

Foram relacionados apenas os quadrados dos campos, porque após o procedimento de médias as contribuições de outras componentes são nulas. Isso se reflete nas equações para as componentes do fluido perfeito:

$$\begin{aligned} \rho &= -L - 4L_F f^2 B^2 \\ p &= L - \frac{4}{3} L_F B^2 (2 - f^2) \end{aligned} \quad (7.104)$$

Houve basicamente dois resultados fundamentais na ausência de campo elétrico cosmológico em um universo de Friedmann. O primeiro foi a relação entre o campo eletromagnético e o raio do universo, independente da interação eletromagnética. O outro foi a conservação independente de fluidos perfeitos. Ambas consequências da conservação do tensor momento-energia, modelado como um fluido perfeito. As consequências de o fluido ser quase-magnético [7.104] serão basicamente decorrentes da equação de conservação, de onde foram extraídas esses resultados:

$$\begin{aligned}
& \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \\
& \left[-L_F \dot{F} - 4L_{FF} \dot{F} f^2 B^2 - 8L_F f \dot{f} B^2 - 8L_F f^2 B \dot{B} \right] + \\
& \quad + \frac{3\dot{a}}{a} \left[-4L_F f^2 B^2 - \frac{4}{3} L_F B^2 (2 - f^2) \right] = \\
& L_F \left[B \dot{B} (1 + f^2) + B^2 f \dot{f} \right] + 4L_{FF} f^2 B^2 \left[B \dot{B} (1 - f^2) - B^2 f \dot{f} \right] + \\
& \quad + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left[L_F B^2 (1 + f^2) \right] = 0 \quad (7.105)
\end{aligned}$$

Considerando f constante, E^2 e B^2 são proporcionais. Como consequência, os termos proporcionais a \dot{f} anulam-se e a equação de conservação transforma-se em:

$$\begin{aligned}
L_F \left[B \dot{B} (1 + f^2) \right] + 4L_{FF} f^2 B^2 \left[B \dot{B} (1 - f^2) \right] + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left[L_F B^2 (1 + f^2) \right] &= 0 \\
\frac{\dot{B}}{B} \left[1 + 4f^2 B^2 \frac{L_{FF}}{L_F} \frac{1 - f^2}{1 + f^2} \right] &= -2 \frac{\dot{a}}{a} \quad (7.106)
\end{aligned}$$

que dependendo do tipo de interação representada por $L(F)$, pode produzir uma expressão analítica que relacione o campo magnético com o raio do universo. Assim, a relação entre eles já não depende mais da eletrodinâmica que gerou o fluido; pode depender inclusive de forma explícita da sua variação em até segunda ordem (L_{FF}). Este é um ponto de partida para um estudo mais aprofundado da relação entre os campos elétrico e magnético na escala cosmológica.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Novello, Aline N Araújo, J. M. Salim, International Journal of Modern Physics A, vol. 24, n.30, p. 5639-5658, (2009).
- [2] M. Novello, J. M. Salim, Aline N. Araújo, Physical Review D 85, 023528 (2012).
- [3] S. Perlmutter et al., Nature (London) **391**, 51 (1998); A. G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [4] M. Gasperini, G. Marozzi and G. Veneziano, J. Cosmol. Astrop. Phys. **03** 011 (2009). M. Gasperini, G. Marozzi and G. Veneziano, J. Cosmol. Astrop. Phys. **02** 02 (2009).
- [5] E. Goulart, A eletrodinâmica não linear e a aceleração do universo - dissertação de mestrado - CBPF (2004). M. Novello, E. Goulart, J. Salim and S.E. Perez Bergliaffa, Class Quantum Gravity (2004), [astro-ph/0312093](#).
- [6] V. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J. M. Salim, Phys. Rev. D **65**, 063501 (2002), and references therein.
- [7] G. B. Santos, Cosmologia Dominada pela Eletrodinâmica Semi-Clássica - dissertação de mestrado - UNIFEI (2008).
- [8] R. Durrer, A. Neronov, *Cosmological Magnetic Fields: Their Generation, Evolution and Observation* , [astro-ph/1303.7121v2](#) (2013).
- [9] M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, Phys. Reports, vol. 463, **4**, 127-213 (2008).

- [10] R. Tolman and P. Ehrenfest, Phys. Rev. **36**, 1791 (1930).
- [11] Nilton de S. Medeiros *Campos Magnéticos de Larga Escala em um Universo não Singular* - tese de doutorado - CBPF (2011)
- [12] J. Plebanski in Lectures on non linear Electrodynamics, Ed. Nordita (1970).
- [13] Aline N. Araújo, *Universo Magnético Cíclico* - dissertação de mestrado - CBPF (2008).
- [14] M. Novello, M. Makler, L.S. Werneck, C. A. Romero, Phys. Rev. D **71**, 043515 (2005).
- [15] M. Born, Nature vol 132, p. 282 (1933); M. Born in Proc. Roy. Soc. A vol 143, p. 410 (1934); M. Born and L. Infeld in Proc. Roy. Soc. A vol 144, p. 425 (1934)
- [16] M.W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Möttönen, D. S. Hall, Nature **505**, 657 (2014).
- [17] Anna Paula R. Bacalhau, *Dinâmica Cosmológica para Modelos de Interação Não-Lineares do Setor Escuro* - dissertação de mestrado - UFES (2012).
- [18] Carlos E. Ducap, *Dissertação de mestrado* - em elaboração - CBPF (2014).
- [19] L. G. Medeiros, International Journal of Modern Physics D, v. 21, p. 1250073, (2012).
- [20] S. O. Vellozo, *Uma Discussão sobre o Spin e a Estabilidade da Carga Elétrica na Eletrodinâmica de Born-Infeld* - tese de doutorado - CBPF (2009).
- [21] M. Novello, *Cosmologia* - Coleção CBPF - Tópicos de Física - Livro 04 (2010).
- [22] M. Novello, "Do Big Bang ao universo eterno" - ed. Zahar (2009).

*“E é como se eu despertasse de um sono
que não me deixou viver;
E a vida explodisse em meu peito
com as cores que eu não sonhei;
E é como se eu descobrisse que a força esteve o tempo todo em mim
E é como se então de repente eu chegasse ao fundo do fim:
De volta ao começo, de volta ao começo...”*

(“De volta ao começo” - Gonzaguinha)