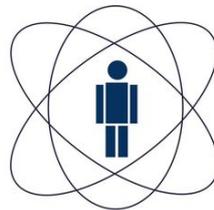


ENRIQUE JOHN ARIAS CHINGA

ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS
COM FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS COM
FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

ENRIQUE JOHN ARIAS CHINGA



CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Tese de Doutorado CBPF

Fevereiro 2014

Enrique John Arias Chinga
Aspectos de Teoria Quântica de Campos com Flutuações Estocásticas,
Tese de Doutorado CBPF © Fevereiro 2014

Todo hombre es lo que hace con lo que hicieron de él.

— J. P. Sartre

RESUMO

Nessa tese de doutorado estudamos várias situações onde o formalismo da teoria quântica de campos é modificado para descrever sistemas com flutuações estocásticas ou desordem. Os fundamentos desta pesquisa são principalmente as flutuações quânticas do cone de luz devido à presença de grávitons de fundo, os modelos análogos da gravitação em sistemas de matéria condensada e finalmente a propagação de ondas em meios desordenados. Nesta tese estas três vertentes convergem e se complementam. Assim pois modelamos as flutuações quânticas do cone de luz utilizando variáveis estocásticas ou desordem, com uma certa distribuição de probabilidades. Ao quantizar as ondas na presença de desordem, obtemos vários efeitos interessantes e esses resultados podem ser contrastados com estudos anteriores. Em particular, nesta tese analisamos como a presença de desordem pode induzir uma auto-interação num campo quântico, originalmente livre, gerando correções radiativas à massa do campo e ao seu acoplamento. Estudamos também como as flutuações do vácuo, assim como as propriedades mecânicas que advem da distorção dessas flutuações (Efeito Casimir) são modificadas pela presença de desordem. Analisamos também como flutuações estocásticas modificam as propriedades térmicas do vácuo descrito por um observador acelerado (Efeito Unruh-Davies). Todos esses estudos utilizam técnicas da teoria quântica de campos na formulação de integrais funcionais e suas extensões à teoria quântica de campos em espaços curvos, a temperatura finita ou na presença de estruturas macroscópicas. Assim pois esperamos apresentar nessa tese uma introdução sucinta de cada uma dessas aplicações da teoria de campos e motivar o leitor a realizar pesquisa nessas direções.

ABSTRACT

In this thesis we analyze several situations where the formalism of quantum field theory is modified to describe systems with stochastic fluctuations or disorder. The framework of our research is based on the following topics: the quantum light-cone fluctuations due to the presence of a background state of gravitons, the analog models of gravity in systems of condensed matter physics and finally the propagation of waves in disordered media. In this thesis these three branches converge and complement each other. In this way we will model the quantum light-cone fluctuations by using stochastic variables or disorder, with a given probability distribution. By quantizing a classical field in the presence of disorder, we obtain several interesting effects and these results could be compared with previous studies. In particular, we analyze how the presence of disorder could induce a self-interaction in the quantum field, originally free, generating radiative corrections to the mass of the field and to the coupling constant. We also study how the vacuum fluctuations, as well as the mechanic properties that emerge from the distortion of such fluctuations (Casimir Effect), are modified by the stochasticity. We analyze also how the stochastic fluctuations modify the thermal properties of the vacuum described by a non-inertial observer (Unruh-Davies effect). All these studies use quantum field theory techniques in its formulation of functional integrals and its extensions to quantum field theory in curved space-times, at finite temperature and in the presence of macroscopic structures. In this thesis we hope to provide a brief introduction to each of these applications of quantum field theory and motivate the reader to develop research in these directions.

PUBLICAÇÕES

Algumas das idéias apresentadas nesta tese de doutorado apareceram em publicações científicas. Segue a lista atualizada

- *"Scalar Quantum Field Theory in Disordered Media"*, E. Arias, E. Goulart, G. Krein, G. Menezes and N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **83**, 125022 (2011).
- *"An analog fluid model for some tachyonic effects in field theory"*, E. Arias, C. H. G. Bessa and N. F. Svaiter, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 2335 (2011).
- *"Thermal Radiation from a Fluctuating Event Horizon"*, E. Arias, G. Krein, G. Menezes and N. F. Svaiter, *Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1250129 (2012).
- *"Thermodynamics of a charged scalar field in disordered media"*, E. Arias, G. Krein, G. Menezes and N. F. Svaiter, arXiv:1210.2444 (2012).
- *"Casimir energy corrections by light-cone fluctuations"*, E. Arias, J. G. Dueñas, C.H.G. Bessa, N. F. Svaiter and G. Menezes, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1450024 (2014).
- Capítulo no livro *"Analogue spacetimes: The first thirty years"*, Proceedings do II Amazonian Symposium on Physics, realizado em Belém-Pará-Brazil, (Editora Livraria da Física 2014).

AGRADECIMENTOS

- Em primeiro lugar eu gostaria de agradecer ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas e à CAPES e à FAPERJ pelo apoio financeiro e a confiança depositada.
- Ao meu orientador Nami Fux Svaiter pela orientação, os estímulos constantes na pesquisa e a amizade brindada.
- A minha família, pelo carinho de sempre, pela confiança e apoio constantes. São eles exemplos que me fortalecem e me guiam pela vida.
- A todos meus amigos e colegas, pelas conversas, a companhia e o afeto, grandes ajudas que me formam como físico e como pessoa dia a dia. Especialmente gostaria de agradecer a: Giovana, Cynthia, Carlos, Lucho, Max, Helmunt, Edward, Roberto, Guillermo, Rodrigo, Jefferson, Leonardo e Vicente.

CONTEÚDO

I	UM CAMPO QUÂNTICO NA PRESENÇA DE FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS	1
1	O CAMPO ESCALAR E AS FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS DO CONE DE LUZ	2
1.1	Introdução	2
1.2	Grávitons e flutuações do cone de luz	6
1.3	Flutuações estocásticas do cone de luz	7
1.4	Efeitos das flutuações estocástica nas funções de Green	10
2	O EFEITO UNRUH-DAVIES NA PRESENÇA DE FLUTUAÇÕES DO CONE DE LUZ	16
2.1	Introdução	16
2.2	O efeito Unruh-Davies	19
2.3	O detector de Unruh-DeWitt	24
2.4	Correções estocásticas à função de Wightman	28
2.5	Probabilidades de Transição Corregidas	30
3	O EFEITO CASIMIR EM UM MÉDIO DESORDENADO	34
3.1	O efeito Casimir	34
3.2	Flutuações do ponto-zero e flutuações do cone de luz	36
3.3	O tensor energia-momento renormalizado de um campo confinado	37
3.4	Correções estocásticas ao tensor energia-momento	42
3.4.1	Efeitos Locais e Divergências Superficiais	46
3.4.2	Termos Globais de Casimir	48
II	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	51
4.1	Conclusões	51
4.2	Perspectivas	52
III	APÊNDICES	54
A	FUNÇÕES DE GREEN DO CAMPO ESCALAR COM FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS	55
B	CORREÇÕES REGULARIZADAS AO TENSOR ENERGIA-MOMENTO	63
C	EFEITOS LOCAIS DAS CORREÇÕES ESTOCÁSTICAS AO TENSOR ENERGIA-MOMENTO	68
	BIBLIOGRAFIA	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Flutuações do cone de luz na função de Green retardada de um campo escalar devido a um estado de grávitons de fundo. 7
Figura 2	Flutuações estocásticas do cone de luz. 7
Figura 3	Expansão da função de Green G em termos da desordem. As linhas retas são propagadores livres, G_0 , e as linhas onduladas representam os ruídos μ e ξ . 10
Figura 4	Correção a ordem de 1-loop, $G_1(x, x')$, à função de Green de dois-pontos devido as flutuações estocásticas do cone de luz. 11
Figura 5	Termos característicos da função de Green de quatro-pontos, após fazer médias nos ruídos, 1PR são gráficos redutíveis de uma partícula. 14
Figura 6	Função de Green de quatro-pontos a nível de árvore, $G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, induzida por médias nos ruídos. 14
Figura 7	Correção de 1-loop à função de Green de quatro-pontos. 15
Figura 8	Espaço-tempo de Rindler. Aqui se mostra o elemento de linha nas coordenadas de Minkowski e de Rindler. Vemos que as métricas de Minkowski e de Rindler se relacionam por um fator conforme. 19
Figura 9	Linha de mundo de um observador acelerado uniformemente. 20
Figura 10	Estrutura causal do espaço de Rindler 23
Figura 11	Transição em um detector acelerado induzida pelas flutuações do vácuo. Os <i>kets</i> são os estados inicial e final do campo e as linhas vermelhas representam os estados do detector. 26
Figura 12	Domínios de integração das variáveis (τ, τ') e $(\Delta\tau, T)$ para obter a função resposta do detector num tempo finito \mathcal{T} . 27
Figura 13	Contorno de integração para a função de Wightman no plano complexo das frequências. 29
Figura 14	Contorno de integração apropriado para avaliar a integral I. 33
Figura 15	Densidade de energia do vácuo do campo escalar livre, entre as placas, como função de z/a . 41

- Figura 16 Expansão da função de Green G em termos da desordem. As linhas retas são propagadores livres, G_0 , e as linhas onduladas representam o ruído v . 43
- Figura 17 Primeira correção local à densidade de energia, $\log(-\langle T^{00}(z) \rangle_1^A)$, como função de z/a e em unidades de σ^2/a^8 , para $d = 3$ dimensões. 47
- Figura 18 Correção à densidade de energia $\langle T^{00}(z) \rangle_1^B$ como função de z/a , em unidades de σ^2/a^8 , para $d = 3$ dimensões. 47
- Figura 19 Termos característicos da expansão perturbativa da função de Green. 55
- Figura 20 Função de Green de 4-pontos a nível de árvore induzida por médias nos ruídos. 57
- Figura 21 Correção de 1-loop de primeiro tipo $\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(I)}$ à função de Green de quatro-pontos. 59
- Figura 22 Correção de 1-loop de segundo tipo $\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(II)}$ à função de Green de quatro-pontos. 60

Parte I

UM CAMPO QUÂNTICO NA PRESENÇA DE
FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

O CAMPO ESCALAR E AS FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS DO CONE DE LUZ

“W. Pauli conjecturou muitos anos atrás que as divergências ultravioletas da teoria quântica de campos poderiam ser removidas em uma teoria na qual a gravitação seja quantizada. A base da conjectura de Pauli foi a observação que estas divergências aparecem das singularidades de cone de luz das funções de dois-pontos, e que flutuações quânticas da métrica do espaço-tempo deveriam ‘espalhar’ o cone de luz, possivelmente removendo estas singularidades.¹”

1.1 INTRODUÇÃO

O problema das divergências na teoria quântica de campos tem sido investigado amplamente desde os pioneiros trabalhos deste formalismo [1]. Vários autores tem ressaltado que apesar do programa de renormalização perturbativa apresentar uma forma de tratar os resultados infinitos que aparecem nesse formalismo, esse problema é mais fundamental e um estudo mais profundo ainda é necessário. Assim nesse contexto, possíveis extensões do formalismo da teoria quântica de campos, considerando o campo gravitacional tem sido ignoradas desde o princípio. Isso se deve ao fato de que a constante de acoplamento do campo gravitacional com a matéria G_N , a constante de Newton, é muito pequena para ser considerada nas escalas de energia da física de partículas.

Os idealizadores da teoria quântica de campos desde cedo perceberam que os propagadores dos campos quantizados apresentam divergências quando esses pontos estão separados por uma distância nula [2]. Quer dizer, entre dois pontos do espaço-tempo separados por uma distância tipo luz. Tais divergências surgem quando a teoria é formulada na ausência da gravidade, isto é no espaço-tempo de Minkowski. Dessa forma, W. Pauli conjecturou que flutuações na métrica poderiam regularizar as divergências dos propagadores e tornar a teoria de campos finita em todas as ordens em teoria de perturbações [3]. Este programa tem sido abordado por diferentes autores com a esperança de eliminar as divergências da teoria de campos mediante um regularizador natural que seria trazido da quantização do espaço-tempo. Esta idéia pode ser implementada utilizando-se o formalismo de integrais funcionais ou integrais de trajetória. Nesse

¹ W. Pauli, Helv. Phys. Acta Suppl. 4, 69 (1956).

formalismo, se o campo gravitacional fosse quantizado, deveríamos levar em consideração todos os possíveis espaço-tempos, fazendo uma média sobre um ensemble de geometrias. Não podemos descartar a possibilidade de eliminar as singularidades dos propagadores no cone de luz quando esta média é implementada. Por exemplo, S. Deser [4] mostrou que ao acoplar os campos quânticos ao campo gravitacional obteríamos propagadores finitos acima do cone de luz, mas o preço a pagar por isso seria uma teoria de campos não-local e onde não é aplicável a teoria de perturbações. Estas propostas de tornar a teoria quântica de campos livre de divergências via a introdução de uma gravitação quântica perdeu interesse pois pode-se mostrar que a gravitação quântica não atua como regularizador de infinitos. Ao contrário, ela traz mais divergências para o formalismo. Pior que isso, o programa de renormalização perturbativa não conseguiu tratar adequadamente essas novas divergências.

Nessa situação, uma possível abordagem metodológica é tratar o campo gravitacional como um campo de fundo clássico, mas com curvatura [5, 6]. Nessa aproximação, que é chamada na literatura de aproximação semi-clássica, importantes efeitos foram previstos. Podemos citar, por exemplo, a criação de partículas em modelos cosmológicos [7] ou a radiação térmica dos buracos negros [8, 9]. Diferentes propostas apareceram na literatura para ir além desta aproximação semi-clássica. Gostariamos de mencionar brevemente duas abordagens que estão ligadas aos modelos investigados nesta tese. Uma abordagem é via o programa da gravitação estocástica, onde uma equação de Einstein-Langevin nos permite encontrar a dinâmica das flutuações da métrica geradas por flutuações do tensor energia-momento associado a campos quânticos [10]. Uma segunda abordagem, se ancora no fato de que uma das principais consequências de assumir que a gravidade possui propriedades quânticas é que a estrutura do espaço-tempo terá que experimentar flutuações quânticas. Assim a imagem de um fundo clássico com um cone de luz bem definido em cada um dos pontos do espaço-tempo tem que ser modificada ao se introduzirem características quânticas na relatividade geral. Nesse sentido, L. Ford e colaboradores discutem diferentes situações onde um banho de grávitons induz flutuações na métrica de fundo [11]-[17]. Em ambos os cenários mencionados temos que a estrutura do cone de luz seria modificada e experimentaria flutuações. Dentro desse cenário, a propagação de ondas electromagnéticas num espaço-tempo estocástico curvo de fundo foi analisado em [18]. Embora as origens da estocasticidade não sejam aprofundadas, nesse trabalho foi mostrado que as flutuações estocásticas da métrica podem ser representadas como flutuações no índice de refração do meio.

Por outro lado, nos últimos anos tem aparecido muitos trabalhos explorando a analogia entre ondas quantizadas em um fluido em movimento e campos quânticos em espaços curvos. W. Unruh em um trabalho seminal, [19], introduziu a idéia de estudar sistemas de matéria condensada onde se reproduzam características cinemáticas análogas às de um espaço-tempo de um buraco negro. Unruh mostrou que a propagação de ondas de som em um fluido supersônico, irrotacional e sem viscosidade é equivalente à propagação de um campo escalar no espaço-tempo na presença de um buraco negro. Desde então, a possibilidade de simular aspectos da relatividade geral e da teoria quântica de campos em espaços curvos através de modelos análogos tem sido amplamente discutida na literatura [20, 21, 22]. Esses trabalhos que modelam efeitos gravitacionais (cinemáticos) em sistemas não-relativistas da física da matéria condensada são chamados de *modelos análogos da gravitação*. Em particular a possibilidade de construir um análogo acústico de um buraco negro e medir fônons com um espectro térmico pode fornecer uma verificação experimental da existência da radiação Hawking em um experimento de matéria condensada. Indo nesta direção, existem interessantes propostas de gerar uma métrica acústica com um horizonte de eventos em condensados de Bose-Einstein e outros superfluidos [22].

Uma vez estabelecida a analogia entre buracos negros e fluidos, uma generalização viável é tratar meios desordenados como modelos de flutuações da geometria efetiva de um buraco “negro” sônico, gerado dentro de um fluido. Assim, como discutimos, se um fluido em movimento gera uma métrica efetiva [19], num fluido desordenado tal métrica apresentará flutuações estocásticas que podem modelar as flutuações quânticas da geometria. Em tal cenário, um modelo análogo de efeitos de gravitação quântica foi proposto [23]. Este modelo se baseia em duas características gerais da propagação de ondas em meios desordenados. Primeiro, as perturbações acústicas em um fluido definem superfícies de descontinuidade que proveêm o análogo de estrutura causal, os ‘cones sônicos’. Segundo, a propagação de excitações acústicas em meios desordenados é geralmente descrita por equações de onda onde o coeficiente que define a velocidade de propagação desta onda assume um caráter aleatório [24, 25, 26, 27]. Juntando essas características temos que as flutuações dos cones sônicos fazem o papel das flutuações dos cones de luz geradas por um banho de grávitons. Os fônons se propagando em tais fluidos desordenados estariam modelando a propagação de partículas em um campo gravitacional de fundo com uma métrica flutuante.

Nessa tese investigamos várias situações levando em conta este modelo análogo de efeitos de gravitação quântica, [23], e além disso estudamos os campos quânticos em um médio desordenado dentro de um

contexto mais geral. Nossos estudos estão inseridos dentro de um programa mais amplo onde se investiga a propagação de campos quânticos em um espaço-tempo clássico de fundo [5, 6], mas considerando flutuações da métrica. Mais especificamente, neste primeiro capítulo, consideramos um campo escalar descrito por uma equação do tipo Klein-Gordon na qual os parâmetros da equação, a massa e a velocidade da onda (coeficiente da segunda derivada temporal do campo), são funções estocásticas dos pontos do espaço. A estocasticidade dos parâmetros é devida a uma fonte de *ruído estático* acoplada ao campo escalar.

Queremos resaltar que as possíveis origens dos ruídos não serão consideradas, mas podemos mencionar que estes podem ser induzidos por uma variedade de fenômenos, como as flutuações da métrica devido à presença de grávitons primordiais em um estado coerente ou interações com defeitos topológicos de fundo, entre outros. Assim como no caso de campos quânticos na presença de um banho térmico externo, as fontes do ruído quebram a simetria de Lorentz, pois elas definem um sistema de referência preferencial.

No estudo dessa situação, é importante observar que sistemas com desordem podem ser divididos em dois grandes grupos: sistemas com desordem *quenched* ou com desordem *annealed* [28, 29, 30]. Enquanto nos sistemas *annealed* o “campo” aleatório se encontra em equilíbrio com os outros graus de liberdade do sistema, nos sistemas *quenched* isto não acontece. A diferenciação entre os dois tipos de desordem é um tópico importante no estudo das influências das impurezas nos fenômenos de transições de fase. Muitos autores tem estudado teoria de campos e o grupo de renormalização para investigar os sistemas com desordem *quenched* [31], com particular ênfase no papel desempenhado pela desordem nos expoentes críticos. No caso da desordem *quenched*, por meio do *método das réplicas*, [32], é possível definir um gerador funcional *quenched* das funções de Green conexas de n -pontos. Com este gerador a disposição, o estudo da influência da desordem na transição de fase pode ser estudado. Nessa tese consideramos sistemas com uma desordem tipo *annealed*. Considerando um ruído fraco implementamos a expansão perturbativa controlada pelos parâmetros pequenos que caracterizam as funções de correlação do ruído. Obtemos a função de Green causal de dois-pontos e de quatro-pontos do campo escalar na presença de desordem. Efetuando a média das funções de Green sobre as flutuações do ruído, obtemos funções de Green qualitativamente similares às de uma teoria com auto-interação $\lambda\phi^4$. Como será mostrado, obtemos, nos diagramas de Feynman no espaço dos momentos, uma “contante de acoplamento” dependente das frequências do campo.

1.2 GRÁVITONS E FLUTUAÇÕES DO CONE DE LUZ

L. Ford [11] mostrou que a presença de um estado *squeezed* das perturbações quantizadas do campo gravitacional de fundo produzem *flutuações do cone de luz* nos propagadores dos campos quânticos. Este resultado pode ser apreciado ao analisar a função de Green retardada de um campo escalar neste fundo gravitacional quântico. Para isso, partiremos do espaço plano de Minkowski e consideraremos flutuações quantizadas desta métrica. No espaço-tempo de Minkowski a função de Green retardada de um campo escalar sem massa é dada pela seguinte expressão

$$G_{\text{ret}}(x, x') = \frac{\theta(t - t')}{4\pi} \delta(\sigma_0). \quad (1)$$

Na equação acima temos que σ_0 é a distancia entre dois pontos, x e x' , do espaço-tempo, isto quer dizer que $\sigma_0^2 = (t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2$. Podemos ver que a função de Green retardada Eq. (1) só está definida acima do cone de luz ($\sigma_0 = 0$) e para tempos futuros ($t > t'$). Se pode ver também que esta função é singular acima do cone de luz. Agora consideraremos que a métrica apresenta flutuações a partir do caso plano, ou seja a métrica será dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ são certas perturbações “pequenas” da métrica. Ademais consideraremos que a perturbações do campo gravitacional estão quantizadas ($h_{\mu\nu}$ são operadores) e que elas se encontram em um estado *squeezed* de grávitons, $|\psi\rangle$. Com tudo isto se pode mostrar que o valor esperado da função de Green retardada do campo escalar neste estado quântico do campo gravitacional de fundo é

$$\langle G_{\text{ret}}(x, x') \rangle = \frac{\theta(t - t')}{8\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\langle\sigma_1^2\rangle}} e^{-\sigma_0^2/2\langle\sigma_1^2\rangle}, \quad (2)$$

onde $\langle\sigma_1^2\rangle = \langle\hat{h}_{\mu\nu}\rangle\Delta x^\mu\Delta x^\nu$ é o valor esperado no estado *squeezed*, onde $\Delta x = x - x'$. Na Eq. (2) apreciamos que não temos mais singularidades na função de Green acima do cone de luz ($\sigma_0 = 0$). Estas singularidades tem sido “suavisadas” pelo banho de grávitons no estado *squeezed*. Também vemos que a função de Green não é mais definida só acima do cone de luz, $\sigma_0 = 0$, se não que ela esta definida para todos os valores de σ_0 . Ela obtem su valor maximo acima do cone de luz $\sigma_0 = 0$, mas existem propagações possíveis fora do cone de luz $\sigma_0 \neq 0$. Assim a função de Green Eq. (2) se comporta como uma Gaussiana cetrada no cone de luz que se estende para dentro e para fora do cone, ver Fig. (1). Nesse caso a pesar de ter a possibilidade de sinais super-luminares isto não viola a causalidade, desde que o estado de grávitons de fundo quebra a simetria de Lorentz e esta simetria é um requisito fundamental na prova da violação da causalidade por táquions [33].

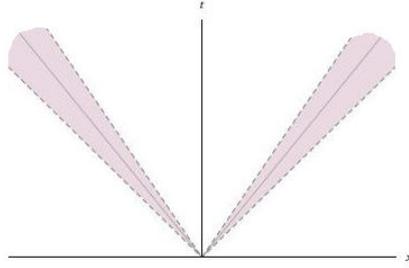


Figura 1: Flutuações do cone de luz na função de Green retardada de um campo escalar devido a um estado de grávitons de fundo.

1.3 FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS DO CONE DE LUZ E A TEORIA DE PERTURBAÇÕES

Nesta tese modelaremos as flutuações do cone de luz introduzindo uma variável estocástica, μ , na equação de onda satisfeita pelo campo. Esta variável fará flutuar o coeficiente da segunda derivada temporal do campo na equação de movimento. Este termo está associado com a velocidade de propagação do campo. Assim, teremos que para distintos valores da variável aleatória teremos diferentes velocidades de propagação da onda. Considerando que esta variável estocástica tem uma distribuição de probabilidade centrada em torno do seu valor nulo, teremos que as flutuações em torno deste valor serão análogas as flutuações do cone de luz induzidas pelo estado de grávitons de fundo. Estas flutuações estocásticas do cone de luz são representadas na Fig. (2).

Equações de onda estocásticas deste tipo são estudadas amplamente quando se quer analisar as propriedades de absorção ou transmissão em um médio desordenado. Também se tem estudos de transições de fase em médios desordenados acoplando linearmente uma variável estocástica ao campo na equação de movimento. Este é o chamado *Random temperature Landau-Ginzburg model* [ref]. Tendo em mente este modelo, vamos considerar uma outra variável estocástica, ξ , que modelará flutuações no termo de massa (temperatura) do campo quântico.

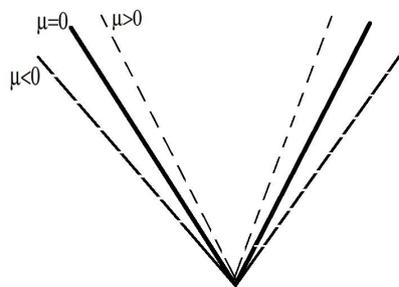


Figura 2: Flutuações estocásticas do cone de luz.

Assim vamos trabalhar com uma equação de Klein-Gordon estocástica para um campo escalar massivo $\varphi(t, \mathbf{x})$, definido em um espaço-tempo $(d + 1)$ -dimensional

$$\left[(1 + \mu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + (1 + \xi) m_0^2 \right] \varphi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

sendo $\mu = \mu(\mathbf{x})$ e $\xi = \xi(\mathbf{x})$ variáveis estocásticas estacionárias independentes. Esses ruídos são funções apenas das variáveis espaciais, e independentes do tempo. Por simplicidade consideraremos uma distribuição de probabilidade Gaussiana e centrada na origem para as duas variáveis aleatórias

$$\langle \mu(\mathbf{x}) \rangle_\mu = 0, \quad \langle \xi(\mathbf{x}) \rangle_\xi = 0, \quad (4)$$

com as seguintes correlações brancas

$$\begin{aligned} \langle \mu(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}') \rangle_\mu &= \sigma_\mu^2 \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \langle \xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}') \rangle_\xi &= \sigma_\xi^2 \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\langle \dots \rangle_\mu$ e $\langle \dots \rangle_\xi$ denotam médias no ensemble de todas as realizações dos ruídos e σ_μ e σ_ξ caracterizam as intensidades dos ruídos. Devido à natureza gaussiana das distribuições de probabilidades que estamos supondo, as correlações de um produto ímpar de ruídos são nulas enquanto que as correlações de um produto par de ruídos podem ser expandidas como soma de produtos de correlações entre dois ruídos, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{2n}} \rangle_\mu &= \langle \mu_{i_1} \mu_{i_2} \rangle_\mu \langle \mu_{i_3} \mu_{i_4} \rangle_\mu \dots \langle \mu_{i_{2n-1}} \mu_{i_{2n}} \rangle_\mu \\ &\quad + \text{permutações}, \end{aligned} \quad (6)$$

aqui temos utilizamos a notação simplificada $\mu_i = \mu(\mathbf{x}_i)$. Gostariamos de resaltar que as variáveis aleatórias μ e ξ são independentes estatisticamente. Como a Eq. (3) é linear no campo $\varphi(t, \mathbf{x})$, podemos aplicar o principio de superposição e decompor o campo utilizando uma transformada de Fourier para achar as suas soluções. Por tanto definimos a transformada de Fourier de $\varphi(t, \mathbf{x})$ com a variável temporal t como

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \varphi(\omega, \mathbf{x}), \quad (7)$$

e sobre a variável espacial \mathbf{x}

$$\varphi(\cdot, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\cdot, \mathbf{k}). \quad (8)$$

Ademais, definimos as transformada de Fourier da função do ruído estacionário

$$\mu(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mu(\mathbf{k}), \quad (9)$$

e análogamente para $\xi(\mathbf{x})$. Utilizando isto na Eq. (3), obtemos que as componentes de Fourier do campo $\varphi(\omega, \mathbf{k})$ satisfazem a equação

$$\int d\mathbf{k}' [L_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')] \varphi(\omega, \mathbf{k}') = 0, \quad (10)$$

onde L_0 é uma “matrix” não-estocástica com elementos

$$L_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2) \delta^{(d)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (11)$$

e $L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ é uma “matrix” estocástica com elementos

$$L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega^2 - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') m_0^2). \quad (12)$$

No espaço de configurações L_0 e L_1 são dadas por

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{x}) &= \omega^2 + \nabla^2 - m_0^2, \\ L_1(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x})\omega^2 - \xi(\mathbf{x}) m_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Queremos reslatar nas ecpresões acima temos efetuamos transformadas de Fourier no tempo, mas não no espaço. Em termos desses operadores Eq. (11) e Eq. (12), e sabendo que estes operadores sempre atuam como operadores integrais de convolução, a equação de Klein-Gordon estocástica pode ser escrita na forma seguinte

$$(L_0 + L_1) \varphi(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (14)$$

Podemos definir a função de Green, G , associada à equação acima como o inverso do operador diferencial na equação de campo

$$G = (L_0 + L_1)^{-1}. \quad (15)$$

Vamos supor ruídos “fracos” tais que suas intensidades σ satisfazam a seguinte desigualdade $\sigma^2 m^4 \ll 1$. Mais adiante veremos que este limite de validade na intensidade dos ruídos é necessário para a teoria de perturbações ser consistente. Assim uma expansão perturbativa para a função de Green G , na forma da equação de Dyson, pode ser obtida

$$\begin{aligned} G &= G_0 - G_0 L_1 G_0 + G_0 L_1 G_0 L_1 G_0 + \dots \\ &= G_0 - G_0 \Sigma G_0, \end{aligned} \quad (16)$$

onde $G_0 = L_0^{-1}$ é a função de Green livre, na ausência do ruído, e temos definido a auto-energia Σ por

$$\Sigma = L_1 - L_1 G_0 L_1 + \dots, \quad (17)$$

Uma representação esquemática da expansão Eq.(16) é apresentada na Fig.(3). No espaço dos momentos a função de Green livre pode-se

Figura 3: Expansão da função de Green G em termos da desordem. As linhas retas são propagadores livres, G_0 , e as linhas onduladas representam os ruídos μ e ξ .

escrever como

$$G_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2 - (\mathbf{k}^2 + m_0^2) + i\epsilon'} \quad (18)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal que leva em conta o contorno de integração apropriado à função de Green causal. Note-se portanto que $iG_0(x, x')$ é o propagador de Feynman do campo livre, sem estocasticidade, isto quer dizer que é o valor esperado no vazio do produto temporalmente ordenado de operadores de campo φ em dois pontos do espaço-tempo $x = (t, \mathbf{x})$ e $x' = (t', \mathbf{x}')$, mais especificamente teremos que

$$iG_0(x, x') = \langle 0 | T[\varphi(t, \mathbf{x})\varphi(t', \mathbf{x}')] | 0 \rangle, \quad (19)$$

onde T denota o produto temporalmente ordenado de operadores. A continuação vamos escrever explicitamente alguns termos da série perturbativa Eq. (16) no espaço de configurações. Até segunda ordem nas variáveis aleatórias temos

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= G_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ &- \int d\mathbf{x}_1 G_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) [\mu(\mathbf{x}_1) \omega^2 - \xi(\mathbf{x}_1) m_0^2] G_0(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}') \\ &+ \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \left\{ G_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}_2) [\mu(\mathbf{x}_2) \omega^2 - \xi(\mathbf{x}_2) m_0^2] \right. \\ &\quad \left. \times G_0(\omega, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) [\mu(\mathbf{x}_1) \omega^2 - \xi(\mathbf{x}_1) m_0^2] G_0(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}') \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Uma representação da expansão perturbativa, no espaço- \mathbf{x} , em termos de diagramas pode ser feita. Estes termos correspondem a diagramas de múltiplos-espalhamento do campo de Klein-Gordon nas inhomogeneidades aleatórias localizadas nas posições $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$. No espaço dos momentos diagramas similares correspondem a interações múltiplas das componentes de Fourier do campo de Klein-Gordon e as inhomogeneidades aleatórias.

e

1.4 EFEITOS DAS FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS NAS FUNÇÕES DE GREEN DO CAMPO ESCALAR

Para analisarmos o efeito das flutuações estocásticas do cone de luz nas propriedades do campo quântico realizaremos as médias sobre

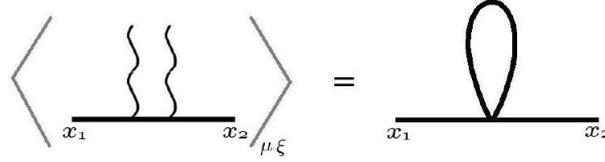


Figura 4: Correção a ordem de 1-loop, $G_1(x, x')$, à função de Green de dois-pontos devido as flutuações estocásticas do cone de luz.

as variáveis estocásticas que aparecem na definição do propagador, $G(x, x')$, na Eq. (20). Note-se que devido a natureza gaussiana das correlações dos ruídos termos com um número ímpar de variáveis aleatórias não contribuem à função de Green de dois-pontos. A primeira correção não nula a esta função vem da média nos ruídos do terceiro termo da Eq. (20). Por tanto a primeira correção à função de Green é de segunda ordem no ruído. Realizando as médias nos ruídos termos

$$\langle G(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle_{\mu\xi} = G_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + G_1(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (21)$$

onde a primeira correção é o seguinte valor médio nos ruídos

$$G_1 = \langle G_0 L_1 G_0 L_1 G_0 \rangle_{\mu\xi}, \quad (22)$$

esta correção é representada na Fig. (4) e pode-se ver que é de ordem de 1-loop. Este loop aparece após realizar as médias nas variáveis aleatórias e é devido às correlações “delta” dos ruídos brancos. A transformada de Fourier da correção vem dada por $G_1(\omega, \mathbf{k})$ tal que

$$G_1(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} G_1(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (23)$$

A correção $G_1(\omega, \mathbf{k})$ pode ser escrita em termos da auto-energia $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$ definida na Eq. (16)

$$G_1(\omega, \mathbf{k}) = -G_0(\omega, \mathbf{k}) \Sigma(\omega, \mathbf{k}) G_0(\omega, \mathbf{k}). \quad (24)$$

Tal que a ordem de 1-loop se tem

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = -(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \alpha(\omega), \quad (25)$$

onde a integral de 1-loop é explícita na integral

$$\alpha(\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} G_0(\omega, \mathbf{k}). \quad (26)$$

Note-se que a ordem de 1-loop a auto-energia é independente do vetor \mathbf{k} e só depende da frequência ω . Da equação Eq.(16), se tem que $G^{-1} = G_0^{-1} + \Sigma$, então na representação do espaço dos momentos para função de Green corrigida temos

$$\begin{aligned} \langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle_{\mu\xi}^{-1} &= G_0(\omega, \mathbf{k})^{-1} + \Sigma(\omega, \mathbf{k}) \\ &= \omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2, \end{aligned} \quad (27)$$

onde a massa renormalizada pelo ruído é

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k}) \\ &= m_0^2 + (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \alpha(\omega). \end{aligned} \quad (28)$$

Desse primeiro resultado, fica claro que o efeito das flutuações estocásticas é de tornar a teoria quântica do campo escalar livre numa teoria com auto-interação, sendo esta auto-interação qualitativamente similar ao acoplamento $\lambda\varphi^4$ usual. Esta auto-interação induzida, tipo $\lambda\varphi^4$, é uma consequência da natureza gaussiana das distribuições das variáveis estocásticas $\mu(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x})$. Um modelo com uma auto-interação polinomial mais geral poderia ser obtido se um ruído não-gaussiano for utilizado. No presente caso temos uma integral divergente de 1-loop na auto-energia devido à natureza branca e as correlações “delta” do ruído Eq. (5). Uma função de correlação de um ruído “colorido” nos daria uma integral de 1-loop finita naturalmente. Por exemplo, se os ruídos fossem gaussianos mas com correlações tipo $\langle \mu(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}') \rangle = e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2/\Lambda^2}$, sendo Λ um parâmetro característico dos ruídos, isto nos levaria a uma auto-energia sem divergências naturalmente. Aqui poderíamos dizer que o objetivo de Pauli, de “suavizar” as divergências da teoria quântica de campos, poderia ser alcançado utilizando correlações coloridas nas flutuações estocásticas do cone de luz. Por hora nós não nos deteremos mais nesse problema. Iremos sim abordar o problema de regularizar e renormalizar a teoria com auto-interação gerada pelas flutuações estocásticas. Como mencionado anteriormente esta auto-interação é tipo $\lambda\varphi^4$, mas com uma “constante” de acoplamento dependente da frequência, $\lambda(\omega) \sim \sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4$. Para $d = 3$ dimensões espaciais podemos obter a parte finita da auto-energia utilizando a fórmula geral

$$\int d^s \mathbf{1} \frac{1}{(\mathbf{1}^2 + \mathbf{a}^2)^A} = \pi^{s/2} \frac{\Gamma(A - s/2)}{\Gamma(A)} \frac{1}{\mathbf{a}^{2A-s}} \quad (29)$$

na integral de 1-loop da auto-energia Eq. (26). Assim a parte finita da auto-energia, $\Sigma_f(\omega, \mathbf{k})$, é dada simplesmente por

$$\begin{aligned} \Sigma_f(\omega, \mathbf{k}) &= -(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + (m_0^2 - \omega^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi} (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (m_0^2 - \omega^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (30)$$

Deste resultado podemos concluir que as flutuações induzem uma auto-energia com uma “largura” finita, a qual nos dá um tempo de vida média finito para as excitações. Seria interessante ressaltar aqui que devido às correlações “delta” dos ruídos, Eq. (5), as intensidades σ_μ e σ_ξ tem unidades de $[M]^{-3/2}$ e com isto teremos então que a auto-energia, Eq. (30), tem portanto as unidades corretas de $[M]^2$. Com este resultado podemos analisar o limite de validade da teoria de perturbações. Para que seja válida a expansão perturbativa Eq. (20) se tem

que satisfazer $\Sigma \ll m_0^2$ e portanto as intensidades dos ruídos tem o limite $\sigma \ll m_0^{-3/2}$ para que seja válida nossa aproximação de ruído fraco.

Desde que os ruídos nos levam a um auto-acoplamento induzido, podemos perguntarnos sobre a forma das correções perturbativas à função de quatro-pontos G_4 do campo escalar. A razão de nos preocupar por esta função de quatro-pontos em particular é que esta função é a que corrige o vértice de interação da teoria $\lambda\phi^4$. Como é conhecido, dada uma função de quatro-pontos, se pode definir a partir dela a função de Green irreduzível de uma partícula (1PI) de quatro-pontos Γ_4 , sem “pernas” externas, segundo

$$\Gamma_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = G_4(k_1, k_2, k_3, k_4) \prod_{i=1}^4 \Gamma_{k_i}, \quad (31)$$

onde os fatores associados às “pernas” externas são denotados por

$$\Gamma_k = \omega^2 - (\mathbf{k}^2 + m_0^2). \quad (32)$$

Em uma teoria quântica de campos covariante, se pode definir a constante de acoplamento renormalizada a partir do vértice próprio de quatro-pontos, impondo-se certas condições de renormalização. Então, embora não estejamos trabalhando com uma teoria de campos covariante, é natural esperar que tal função nos possa brindar alguma informação valiosa sobre a natureza do acoplamento induzido pela desordem. Como a equação de campo com flutuações estocásticas, Eq. (3), é linear no campo ϕ , a correspondente ação do sistema é quadrática no campo. Numa abordagem de integrais funcionais conhecendo a ação do sistema podemos calcular o gerador funcional de todas as funções de Green da teoria. Neste caso o gerador funcional será dado por uma integral gaussiana (da ação quadrática) que pode ser realizada exatamente. Mas este procedimento só será válido se consideramos umas funções estocásticas $\mu(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x})$ fixas. Pois, como já vimos, se realizarmos as médias sobre todas as possíveis realizações dos ruídos geramos uma auto-interação na teoria originalmente linear. Portanto, só antes de realizar as médias nos ruídos, o gerador funcional da teoria é uma integral gaussiana e as funções de Green de n -pontos podem ser construídas a partir de produtos de funções de Green de dois-pontos do sistema. Nesse estágio, considerando funções aleatórias fixas, é claro que as funções de Green dependerão destas funções $\mu(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x})$. Neste ponto podemos realizar as médias nas flutuações estocásticas das funções de Green e analisar o efeito da estocasticidade na teoria. Assim veremos novamente a emergencia de uma auto-interação no sistema logo de considerar as médias nos ruídos. Estes procedimentos para as funções de Green de dois-pontos e de quatro-pontos a nível de árvore e de 1-loop são apresentados em

detalhe no Apêndice A. Aqui gostaríamos de discutir os resultados obtidos nesse apêndice. Assim a função de Green de quatro-pontos, após de tomar as médias nas flutuações, em geral, vem dada por

$$\begin{aligned} \langle G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi} &= \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &+ \langle G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &+ \langle G(x_1, x_4)G(x_2, x_3) \rangle_{\mu\xi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Como antes os pontos do espaço-tempo são denotados por $x = (t, \mathbf{x})$. Na Fig. (5) representamos alguns termos gerados após realizar as médias nas flutuações estocásticas em um produto específico de duas funções de dois-pontos

$$\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi} = \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_2 \quad x_3 \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_4 \quad x_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + 2 \begin{array}{c} x_3 \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \text{IPR graphs}$$

Figura 5: Termos característicos da função de Green de quatro-pontos, após fazer médias nos ruídos, 1PR são gráficos redutíveis de uma partícula.

No Apêndice A a função de Green de quatro-pontos da Eq. (33) é calculada até ordem de 1-loop obtendo-se para os termos conexos irreduzíveis de 1-partícula

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

onde $G_4^{(0)}$ e $G_4^{(1)}$ são contribuições a nível de árvore e de 1-loop, respectivamente. Como veremos estes termos de auto-interação são gerados pelas flutuações estocásticas. Uma das médias nos ruídos que contribui à função de Green de quatro-pontos a nível de árvore é apresentado na Fig. (6)

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \mu\xi \end{array} \right\rangle = \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_2 \quad x_3 \end{array}$$

Figura 6: Função de Green de quatro-pontos a nível de árvore, $G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, induzida por médias nos ruídos.

Utilizando a definição dos vértices próprios da Eq. (31) e os resultados obtidos no Apêndice A, nós podemos expressar o vértice próprio a nível de árvore como

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (2\pi) \left[\delta(\omega_3 + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right. \\ &+ \delta(\omega_2 + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\ &+ \left. \delta(\omega_2 + \omega_3) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

onde $k_i = (\omega_i, \mathbf{k}_i)$. A interpretação definitiva da natureza da auto-interação induzida na teoria requer o estudo da função de Green de quatro-pontos e suas correções radiativas representadas na Fig. (7).

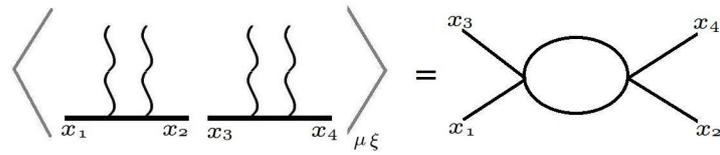


Figura 7: Correção de 1-loop à função de Green de quatro-pontos.

O resultado mais surpreendente que obtemos destes cálculos é que a auto-interação induzida é qualitativamente similar a teoria $\lambda\phi^4$, com um acoplamento dependente da frequência. Isto implica que se começarmos com um modelo interagente, o acoplamento induzido pelos espalhamentos estocásticos no médio pode alterar o valor da constante de acoplamento renormalizada do modelo. Por tanto uma pergunta relevante a ser respondida é saber qual será o sinal do acoplamento efetivo. Por exemplo, se ele é negativo é claro que teremos um decréscimo no valor da constante de acoplamento.

O EFEITO UNRUH-DAVIES NA PRESENÇA DE FLUTUAÇÕES DO CONE DE LUZ

2.1 INTRODUÇÃO

O efeito Unruh-Davies e o efeito Hawking descrevem como certos sistemas na ausência ou presença de gravitação adquirem propriedades térmicas devido a efeitos quânticos. Portanto o estudo desses efeitos requer uma interdisciplinaridade e a troca de idéias entre a Teoria Quântica de Campos, a Teoria Geral da Relatividade e a Física Estatística. Neste capítulo nós pretendemos ampliar mais um pouco este cenário introduzindo nas discussões um primeiro efeito da quantização da gravidade, as flutuações do cone de luz. Nosso objetivo é descrever a influência das flutuações estocásticas do cone de luz no efeito Unruh-Davies.

Inicialmente a teoria quântica de campos foi formulada num espaço-tempo plano. Podemos ir além desta formulação e considerar campos quantizados definidos sobre um espaço-tempo curvo clássico [5, 6]. Este programa é chamado de aproximação semi-clássica da gravitação quântica. Importantes resultados em teoria quântica de campos em espaços curvos apareceram na literatura. O mais famoso deles é o resultado obtido por S. Hawking da emissão de radiação térmica por um buraco negro [8, 9]. Hawking mostrou que devido a efeitos quânticos o buraco negro emite radiação térmica e por tanto possui uma temperatura e uma entropia associadas a ele. Se pode demonstrar que o resultado da existência de uma radiação térmica do buraco negro está intimamente ligado à presença de um horizonte de eventos nesse espaço-tempo. Para sermos mais precisos, o sistema de coordenadas de Schwarzschild não cobre toda a variedade. Para uma situação física onde o raio r da distribuição de matéria é maior do que o raio de Schwarzschild, $2M$, esse sistema de coordenadas é adequado para descrever processos físicos. Entretanto, se o raio da distribuição de matéria for menor que o raio de Schwarzschild o sistema de coordenadas acima referido se torna patológico. Assim, é preciso encontrar uma extensão analítica para cobrir a região $r < 2M$. Essa é a chamada extensão maximal de Kruskal.

Uma outra situação onde aparece um horizonte de eventos e também podemos identificar uma radiação térmica é o espaço-tempo de Rindler [34]. W. Rindler estudou a estrutura causal deste espaço-tempo. O espaço-tempo de Rindler está associado a observadores

uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski. Pode-se mostrar que se realizarmos a quantização de um campo no espaço-tempo de Rindler obteremos que a noção de partícula nesta métrica difere de aquela associada a um observador inercial no espaço-tempo de Minkowski [35, 36]. Assim teremos, por exemplo, que o estado fundamental de um campo associado a um observador com aceleração constante, $|0_R\rangle$ (vácuo de Rindler), vai ser diferente do estado fundamental do campo associado a um observador inercial, $|0_M\rangle$ (vácuo de Minkowski). Mas os dois estados de vácuo, $|0_R\rangle$ e $|0_M\rangle$, estão relacionados entre eles por uma distribuição térmica [37]. Isto quer dizer que um observador não-inercial de Rindler sentirá o vácuo inercial de Minkowski $|0_M\rangle$ como um reservatório térmico.

A diferença entre os vácuos associados a um campo quantizado em um sistema de coordenadas inercial e aquele quantizado em um sistema de coordenadas adaptado a um observador com aceleração uniforme, pode ser vista com a introdução de um aparato experimental [38, 39]. Desta forma W. Unruh propôs um modelo simplificado de um detetor de partículas acoplado a um campo escalar neutro. Unruh demonstrou que no espaço-tempo de Minkowski um observador que percorre uma linha de universo com aceleração própria constante percebe o vácuo de Minkowski como se fosse um banho térmico. Assim para o detetor com aceleração uniforme o vácuo de Minkowski possui propriedades análogas às de um reservatório térmico podendo absorber energia deste para se excitar. Assim, se o detetor se encontra no seu estado fundamental e o campo no estado de vácuo de Minkowski, quando o detetor experimenta uma aceleração uniforme (trajetória hiperbólica no espaço de Minkowski) ele terá uma probabilidade não nula de se excitar mediante a absorção destas flutuações térmicas.

Como discutimos no capítulo anterior, uma vez estabelecida a analogia entre ondas em fluidos em movimento e campos quantizados em espaços curvos, uma aproximação viável é tratar meios desordenados como modelos de flutuações da geometria efetiva de um buraco “negro” sônico, gerado num fluido. Em outras palavras, como um fluido em movimento pode gerar uma métrica efetiva, num fluido desordenado a métrica efetiva apresentará flutuações estocásticas que podem modelar as flutuações quânticas da geometria. Neste capítulo tomaremos um ponto de vista pragmático à procura de consequências experimentais de efeitos das flutuações estocásticas do cone de luz num cenário mais específico. Concretamente analisamos se existe algum dispositivo quântico (detetor) capaz de medir tais efeitos captando como as flutuações estocásticas da geometria afetam a taxa de transição de um sistema de dois níveis que interage com um campo escalar sem massa.

A hipótese mais simples que podemos fazer para modelar as flutuações da geometria é considerarmos uma equação de onda com coeficientes estocásticos. A equação diferencial governando a propagação estocástica da onda não pode ser resolvida exatamente, mas pode ser tratada via teoria de perturbações, utilizando como parâmetro pequeno da expansão a intensidade das funções de correlação dos ruídos. Realizando tal expansão perturbativa, os processos de espalhamentos múltiplos da onda podem ser interpretados em termos de diagramas de Feynman. Como todo este estudo foi feito no capítulo anterior, aqui vamos considerar o caso específico da função de Wightman de dois-pontos de frequências positivas calculada a nível de 1-loop onde levamos em consideração todas as realizações do ruído. Com este resultado é possível calcular as correções às amplitudes de probabilidade de um sistema de dois níveis induzidas pelas flutuações do cone de luz.

Veremos que as flutuações estocásticas não invalidam o efeito Unruh-Davies e ainda temos que o observador acelerado descreve ao vácuo de Minkowski como um reservatório térmico, com uma temperatura proporcional à sua aceleração. Mas, nós mostramos que as previsões trazidas por processos radiativos num cenário semi-clássico podem diferir de aquelas associadas ao cenário considerando este efeito de gravitação quântica, onde flutuações quânticas da métrica são tratadas como ensembles de geometrias. Neste contexto gostaríamos de chamar a atenção aos trabalhos de Hu e Roura [40] discutindo a poucos anos atrás a possibilidade de estudar a função de Wightman de dois-pontos na presença de flutuações da métrica e a função resposta de um detector acoplado ao campo. Também uma desviação do espectro térmico foi achada por T. Takahashi e J. Soda utilizando diferentes modelos de flutuações do horizonte do buraco negro [41].

2.2 O EFEITO UNRUH-DAVIES

O efeito Unruh-Davies é um exemplo bastante instrutivo do fato que ao quantizar um sistema com infinitos graus de liberdade existem infinitas representações não-unitariamente equivalentes da álgebra de operadores associados a este sistema. Isso nos leva ao fato da indeterminação que existe na teoria quântica de campos em espaços curvos quando se tenta definir uma partícula física, independente do observador. Foram os estudos originais de W. Rindler [34] e S. Fulling [35, 36] os que conseguiram mostrar a não-equivalência da interpretação de partícula num espaço-tempo curvo riemanniano com a definição usual num espaço-tempo de Minkowski. Rindler estudou um sistema de coordenadas (que agora leva seu nome) definido a partir das coordenadas cartesianas usuais (t, x) mediante a transformação

$$\begin{aligned} t &= a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \\ x &= a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \end{aligned} \quad (35)$$

onde a é uma constante positiva associada a esta transformação e temos que $-\infty < \eta, \xi < \infty$. As coordenadas de Rindler (η, ξ) descrevem o espaço-tempo (ou uma parte dele) tão bem como as coordenadas de Minkowski (t, x) . Sendo $a > 0$ temos que a transformação da Eq. (35) mapeia só a região $x > |t|$ do espaço-tempo de Minkowski mostrada na Fig. (8). A esta porção do espaço-tempo se lhe denomina “*Cunha de Rindler*”. Nessa figura as linha de $\xi = cte$ (posição de Rindler constante) são apresentadas. Essas linhas correspondem a um observador de Rindler parado e são hipérboles que tem como assíntotas as retas $x = |t|$. As linhas de $\eta = cte$ (tempo de Rindler constante) são nessa figura retas que passam pela origem. As assíntotas $x = \pm t$, estão associadas aos tempos de Rindler $\eta \rightarrow \pm\infty$ e são as “fronteiras” do espaço de Rindler.

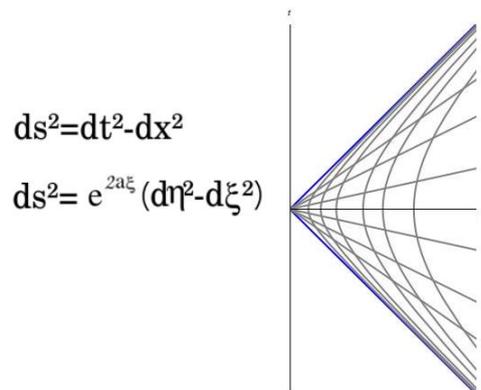


Figura 8: Espaço-tempo de Rindler. Aqui se mostra o elemento de linha nas coordenadas de Minkowski e de Rindler. Vemos que as métricas de Minkowski e de Rindler se relacionam por um fator conforme.

Os observadores de Rindler são definidos como os observadores que possuem $\xi = \text{cte}$, estes seriam observadores inerciais (parados) nesse espaço-tempo. Como se mostra na Fig. (8) as métricas de Rindler e de Minkowski estão relacionadas por uma transformação conforme. Portanto esses espaços possuem a mesma estrutura causal. Pode-se mostrar que os observadores de Rindler ($\xi = \text{cte}$) são observadores não inerciais, com aceleração própria constante, no espaço-tempo de Minkowski. Isto pode ser visto revisando sucintamente o movimento uniformemente acelerado na relatividade restrita [42]. Este movimento será definido como a trajetória onde a *aceleração própria* da partícula

$$\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (36)$$

permanece sempre constante, sendo v a velocidade da partícula. A aceleração própria está definida como a aceleração da partícula vista desde um sistema de referência inercial que instantaneamente tem a mesma velocidade que a partícula. Resolvendo a Eq. (36) obtemos a trajetória hiperbólica mostrada na Fig. (9). Nessa figura τ é o tempo próprio acima da trajetória da partícula e temos considerado como condições iniciais que em $\tau = 0$ temos a posição da partícula $x = \frac{1}{\alpha}$ com velocidade inicial $v = 0$.

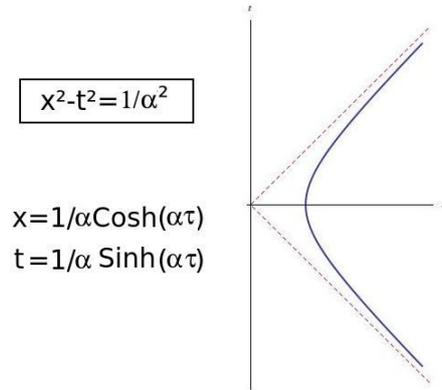


Figura 9: Linha de mundo de um observador acelerado uniformemente.

Portanto vemos que os observadores “inerciais” ($\xi = \text{cte}$) no espaço de Rindler serão observadores não-inerciais com aceleração própria constante, $\alpha = ae^{-a\xi}$, no espaço de Minkowski. O tempo próprio deste observador de Rindler é dado por $\tau = \eta e^{a\xi}$ e aumenta linearmente com o tempo de Rindler, η . Portanto o espaço-tempo de Rindler está associado a observadores uniformemente acelerados no espaço de Minkowski. Utilizando o princípio de equivalência da teoria geral da relatividade teremos que a quantização de um campo não pode depender do sistema de coordenadas (observador) a utilizar. Então, a princípio, não existe nenhuma dificuldade em realizar a quantização de um campo na métrica de Rindler [35, 36]. Na métrica

de Rindler a equação de um campo escalar será escrita da seguinte maneira

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m_0^2 e^{2\alpha \xi} \right) \varphi(\eta, \xi) = 0, \quad (37)$$

esta equação pode ser resolvida por separação de variáveis e se pode obter uma base de soluções. Vamos denotar a esta base de modos de Rindler do campo por $\bar{u}_k(\eta, \xi)$. Com esta base podemos fazer a expansão do campo em modos

$$\varphi(\eta, \xi) = \sum_k \left(a_k \bar{u}_k(\eta, \xi) + a_k^\dagger \bar{u}_k^*(\eta, \xi) \right), \quad (38)$$

e realizar o procedimento de quantização. Fazendo isto construímos o espaço de Hilbert do campo escalar associado ao observador de Rindler. Denotaremos o estado de vazio de Rindler como o estado onde não se tem excitações associadas aos modos de Rindler, isto quer dizer que o vazio de Rindler $|0_R\rangle$ satisfará

$$a_k |0_R\rangle = 0. \quad (39)$$

Com este estado fundamental podemos construir as excitações elementares de Rindler. Assim pois teremos, por exemplo, que $N_k^{(R)} = a_k^\dagger a_k$ é o operador número associado a essas excitações. Se pode mostrar que ao realiza a quantização do campo no espaço de Rindler obteremos uma noção de partícula, nessa métrica, que difere de aquela associada a um observador inercial no espaço de Minkowski [35, 36]. Esses dois observadores podem perceber um mesmo estado do campo quântico de maneira totalmente diferente. Teremos uma não-equivalência das representações de um campo quântico realizadas por um observador de Minkowski e um observador de Rindler. Estes dois observadores constroem espaços de Hilbert diferentes para o mesmo campo quântico. Assim a noção de vazio e a mesma noção de partícula são diferentes para cada um deles. Essa não equivalência pode ser vista analisando o valor esperado do número de excitações de Rindler, do modo- k e energia E_k , no vácuo de Minkowski $|0_M\rangle$. Pode-se provar que

$$\langle 0_M | N_k^{(R)} | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi E_k / \alpha} - 1}. \quad (40)$$

Vemos que este número de ocupação de partículas de Rindler no vácuo de Minkowski é o mesmo que o número de ocupação de excitações de Rindler em um banho térmico a uma temperatura $T = \alpha / 2\pi k_B$, sendo k_B a constante de Boltzman. Deste resultado temos portanto que o vazio de Minkowski é percebido por um observador de Rindler como um banho térmico a uma temperatura, T , proporcional à sua aceleração própria, α , [37].

Seria bom salientar que apesar de dois observadores de Rindler indo com acelerações distintas (em diferentes trajetórias hiperbólicas) perceberem o vácuo de Minkowski a diferentes temperaturas, proporcionais à suas respectivas acelerações, estes observadores estarão em equilíbrio térmico entre eles [43]. O equilíbrio térmico na presença de um campo gravitacional foi estudado por R. Tolman [44, 45] quem mostrou que a lei zero da termodinâmica tem que ser estendida na presença de um campo gravitacional. A relação de Tolman vai nos dar a expressão que deve satisfazer a temperatura em cada ponto do espaço-tempo para o sistema estar em equilíbrio termodinâmico. Esta relação contempla o *red-shift gravitacional* das ondas térmicas que transmitem o fluxo de calor para realizar um balanço de energia entre dois pontos num campo gravitacional. A relação de Tolman pode ser escrita como

$$T\sqrt{g_{00}(x)} = \text{cte}, \quad (41)$$

onde $g_{00}(x)$ é a parte puramente temporal da métrica no ponto x e T é a temperatura do sistema nesse ponto. Assim pois o equilíbrio termodinâmico na presença de um campo gravitacional não implica que cada ponto do sistema tenha a mesma temperatura. A temperatura nesse caso pode variar de ponto para ponto, mas deve variar proporcionalmente ao inverso de $\sqrt{g_{00}}$, de tal maneira que a relação de Tolman, Eq. (41), seja satisfeita. Para nosso caso de um observador de Rindler acelerado ele terá uma temperatura associada $T = \alpha/2\pi k_B$, sendo a aceleração própria $\alpha = ae^{-a\xi}$, dependente da sua “posição” ξ . Como na métrica de Rindler, Fig. (8), temos que a parte puramente temporal da métrica é $g_{00} = e^{2a\xi}$. Então podemos ver que a relação de Tolman é satisfeita identicamente para cada observador de Rindler, tendo-se portanto que todos esses observadores estarão em equilíbrio termodinâmico entre eles.

Analisando a estrutura causal do espaço de Rindler mostrada na Fig. (10), podemos apreciar que a métrica de Schwarzschild e a métrica de Rindler compartilham uma característica fundamental, as duas representam um espaço-tempo com horizonte de eventos. Isto quer dizer que ambos espaços mapeiam regiões do espaço-tempo causalmente desconectadas de outras regiões do espaço-tempo. No caso da métrica de Rindler Eq. (35), teremos que ela mapeia só o “quadrante de Rindler direito”, mostrado na Fig. (8) e denotado por **R** na Fig. (10). Teremos que este “quadrante de Rindler direito” estará causalmente desconectado do “quadrante de Rindler esquerdo”, denotado por **L** na Fig. (10). O quadrante de Rindler esquerdo, **L**, será mapeado pela transformação de Rindler Eq. (35), mas com uma constante negativa, $a < 0$. Estas duas regiões para se comunicarem entre elas teriam que intercambiar sinais com velocidade maior do que a velocidade da luz, portanto não é possível a comunicação entre estas partes do

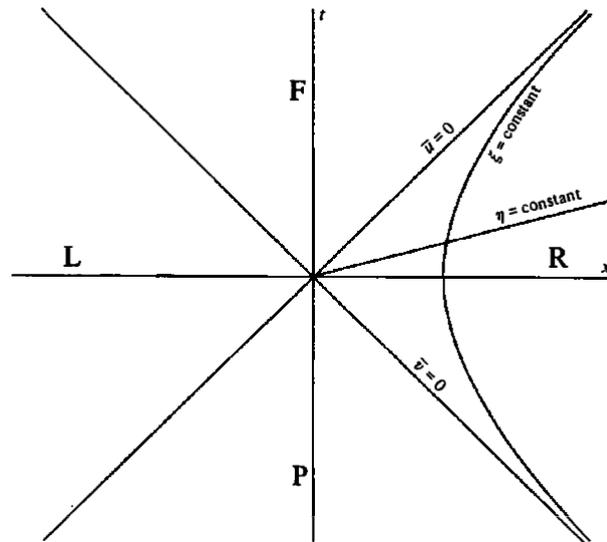


Figura 10: Estrutura causal do espaço de Rindler

espaço-tempo. Com respeito às regiões **P** e **F**, denominadas “passado” e “futuro”, a comunicação é limitada e unidirecional com os quadrantes de Rindler **R** e **L**. Assim, por exemplo, **R** e **L** podem receber informações de **P** mas não pode enviar-lhe informações e **F** não pode enviar sinais a **R** ou **L** mas sim receber sinais destas regiões. Portanto um observador acelerado indo na trajetória hiperbólica mostrada na Fig. (10) vai perceber só uma parte do espaço-tempo e terá como horizonte de eventos às assíntotas da sua trajetória. O fato do observador de Rindler ter um horizonte de eventos vai estar na raiz da radiação térmica no efeito Unruh-Davies assim como a presença do horizonte de eventos é determinante na radiação térmica do buraco negro no efeito Hawking.

Nosso propósito é discutir o efeito Unruh-Davies na presença de flutuações estocásticas do cone de luz. Estas flutuações estocásticas foram discutidas no primeiro capítulo da tese. A relação íntima entre as métricas de Rindler e a métrica de Schwarzschild nos permite outra abordagem e uma interpretação alternativa. Nós podemos pensar as flutuações estocásticas do cone de luz como um modelo particular de flutuações do horizonte de eventos do buraco-negro. Assim este estudo poderia nos brindar algum resultado sobre como as flutuações estocásticas (do horizonte) podem afetar a radiação térmica originada pela presença do horizonte de eventos. Para apreciar mais claramente esta relação entre Rindler e Scharzschild ou a relação entre o efeito Unruh-Davies e o efeito Hawking, vamos analisar o ele-

mento de linha de um espaço-tempo de Schwarzschild que descreve um buraco negro de massa M :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (42)$$

onde $d\Omega^2$ é a medida de uma 2-esfera unitária. Próximo do horizonte de eventos, $r \approx 2M$ a Eq. (42) pode ser escrita como

$$ds^2 = \left(\frac{\rho}{4M}\right)^2 dt^2 - d\rho^2 - 4M^2 d\Omega^2, \quad (43)$$

onde $\rho(r) = \sqrt{8M(r - 2M)}$. Nestas coordenadas, (t, ρ) , o horizonte se encontra em $\rho = 0$. A quantidade $4M^2 d\Omega^2$ descreve o elemento de linha de uma 2-esfera de radio $2M$. Os dois primeiros termos da Eq. (43) podem ser identificados com o elemento de linha de uma quadrante de Rindler bidimensional definindo as variáveis η e ξ implicitamente via $t = 4M\alpha\eta$ e $\rho = e^{\alpha\xi}/\alpha$, para $0 < \rho < \infty$ e $-\infty < t < \infty$. Então teremos que a métrica, próxima do horizonte de eventos, adota a forma

$$ds^2 = e^{2\alpha\xi}(d\eta^2 - d\xi^2) - 4Md\Omega^2. \quad (44)$$

As assíntotas nulas $\xi \rightarrow -\infty$, $\eta \rightarrow \pm\infty$ atuam como horizontes de eventos. Note-se também que as linhas de ξ constante são hipérbolas, portanto elas representam linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados. Portanto pode-se ver que, perto do horizonte de eventos, a métrica de Scharzschild toma a forma de um elemento de linha de Rindler. Em consequência, para capturar as características físicas essenciais no horizonte de eventos, basta com considerar um observador de Rindler uniformemente acelerado em um espaço-tempo de Minkowski.

2.3 O DETECTOR DE UNRUH-DEWITT

Embora esteja fora do escopo desta tese oferecer uma resposta definitiva às perguntas de “o que é um detector? e o que significa detectar partículas?”, estas questões requerem certa discussão. Como temos visto na seção anterior existe um problema conceitual em teoria quântica de campos em espaços curvos ao construir espaços de Hilbert de partículas, pois ditas representações (partículas) são dependentes do observador. Em particular a diferença entre os vácuos associados a um campo quantizado em um sistema de coordenadas inercial (Minkowski) e aquele quantizado em um sistema de coordenadas adaptado a um observador com aceleração uniforme (Rindler), pode ser vista com a introdução de um aparato experimental [38, 39]. Desta forma W. Unruh propôs um modelo simplificado de um detetor

de partículas acoplado a um campo escalar neutro. Unruh demonstrou que no espaço-tempo de Minkowski um observador que percorre uma linha de universo com aceleração própria constante percebe o vácuo de Minkowski como se fosse um banho térmico. Assim para o detetor com aceleração uniforme o vácuo de Minkowski possui propriedades análogas às de um reservatório térmico podendo absorber energia deste para se excitar. Por exemplo, se o detetor se encontra no seu estado fundamental e o campo está no estado de vácuo de Minkowski, quando o detetor experimenta uma aceleração uniforme (trajetória hiperbólica) ele terá uma probabilidade não nula de se excitar mediante a absorção destas flutuações térmicas, ver Fig. (11).

O detetor de Unruh-DeWitt é um sistema quântico de dois níveis de energia com elementos de matriz não nulos do seu operador de monopolo. Este detetor possui a característica que sua resposta ao interagir com um campo escalar no vácuo de Minkowski depende do seu estado de movimento. Se começarmos com o detetor no seu estado fundamental a sua probabilidade de excitação a outro estado será dependente do seu movimento. Assim se o detetor se encontra em um movimento inercial ele tem uma probabilidade assintótica nula de efetuar uma transição para um estado excitado. Mas se o detetor se movimenta com aceleração uniforme, ele tem uma probabilidade assintótica finita de realizar uma transição a um estado excitado. Mais especificamente, o detetor acelerado, com aceleração própria α , interagindo com o campo escalar no vácuo de Minkowski, $|0\rangle$, é equivalente à situação do detetor em movimento inercial mas em contato com um reservatório térmico a temperatura $T = \alpha/2\pi k_B$. Seguindo esses resultados, muitos papers apareceram na literatura estudando o detetor de Unruh-DeWitt em várias situações diferentes [46, 47, 48].

Agora gostaríamos de descrever o modelo idealizado de detetor. O detetor de Unruh-DeWitt é um sistema quântico de dois níveis, acoplado via uma interação de monopolo com um campo escalar. Trabalharemos em um espaço-tempo de Minkowski $(3 + 1)$ -dimensional, com elemento de linha dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (45)$$

Para achar a distorção causada pelas flutuações do horizonte de eventos nas taxas de decaimento e excitação do sistema quântico, vamos analisar a função resposta deste sistema ao interagir com o campo no seu estado fundamental. Como trabalharemos só com o vácuo de Minkowski, de agora em diante denotaremos simplesmente $|0_M\rangle = |0\rangle$. Ao estar no espaço plano este estado será o vácuo de Minkowski. Sejam $|g\rangle$ e $|e\rangle$ os auto-estados de energia do sistema, com autovalores ω_g e ω_e , e denotaremos por $E = \omega_e - \omega_g$ ao 'gap' de energia entre os dois estados. Vamos supor que o sistema de dois níveis está

fracamente acoplado ao campo escalar com a seguinte densidade lagrangiana de interação

$$L_{\text{int}} = c m(\tau) \varphi(x(\tau)), \quad (46)$$

onde $x^\mu(\tau)$ é a linha de mundo do sistema de dois níveis parametrizada pelo tempo próprio τ , e $m(\tau)$ é o operador de momento de monopolo do sistema de dois níveis. A quantidade c é uma constante de acoplamento pequena entre o detector e o campo escalar. É claro que este é um modelo simplificado, sendo um átomo idealizado pelo sistema de dois níveis que interage com o campo escalar sem massa. Este modelo contém todas as propriedades necessárias para entender as características básicas dos processos radiativos de átomos perto de um horizonte de eventos flutuante. Podemos definir um estado inicial em $\tau = 0$ dado por $|\mathcal{J}\rangle = |g\rangle \otimes |0\rangle$ e um estado final $|\mathcal{F}\rangle = |e\rangle \otimes |\psi\rangle$, no tempo $\tau = \mathcal{T}$. Aqui, $|0\rangle$ e $|\psi\rangle$ são o estado fundamental (vazio) e o estado final do campo, respectivamente. Esta transição é mostrada graficamente na Fig. (11)

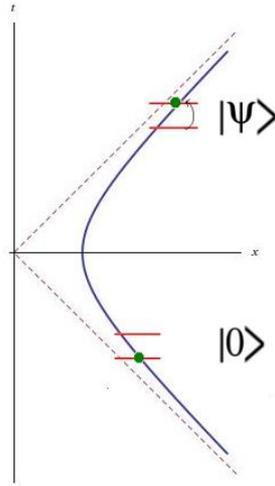


Figura 11: Transição em um detector acelerado induzida pelas flutuações do vácuo. Os *kets* são os estados inicial e final do campo e as linhas vermelhas representam os estados do detector.

Em primeira ordem em teoria de perturbações na constante de acoplamento c , a probabilidade de achar o sistema de dois níveis no estado excitado $|e\rangle$ no tempo \mathcal{T} , partindo desde seu estado fundamental $|g\rangle$ no instante inicial, independentemente do estado final $|\psi\rangle$ do campo, é dada por

$$P(\mathcal{T}) = c^2 \sum_{\psi} \left| \int_0^{\mathcal{T}} d\tau \langle e, \psi | m(\tau) \varphi(x(\tau)) | g, 0 \rangle \right|^2. \quad (47)$$

Utilizando a equação de Heisenberg do operador $m(\tau)$ do sistema de dois níveis e realizando a soma em Eq. (47), obtemos que

$$P(\mathcal{T}) = c^2 |\langle e | m(0) | g \rangle|^2 F(E, \mathcal{T}), \quad (48)$$

onde $c^2 |\langle e | m(0) | g \rangle|^2$ é a chamada seletividade do sistema de dois níveis e $F(E, \mathcal{T})$ a função resposta deste detector definida por

$$F(E, \mathcal{T}) = \int_0^{\mathcal{T}} d\tau' \int_0^{\mathcal{T}} d\tau'' e^{-iE(\tau' - \tau'')} \langle 0 | \varphi(x(\tau')) \varphi(x(\tau'')) | 0 \rangle. \quad (49)$$

Utilizando a definição da função de Wightman de frequências positivas do campo escalar

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle, \quad (50)$$

e introduzindo as variáveis $\Delta\tau = \tau' - \tau''$ e $T = \tau' + \tau''$, a função resposta pode ser reescrita como

$$F(E, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} d(\Delta\tau) e^{-iE(\Delta\tau)} \int_{|\Delta\tau|}^{2\mathcal{T} - |\Delta\tau|} dT G^+(\Delta\tau, T). \quad (51)$$

Na Fig. (12) se representa o domínio do sistema de coordenadas utilizado para a integração sobre $\Delta\tau$ e T da Eq. (51). Para um campo

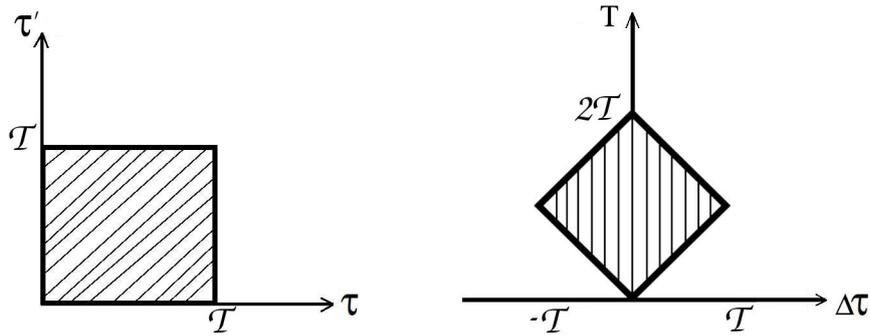


Figura 12: Domínios de integração das variáveis (τ, τ') e $(\Delta\tau, T)$ para obter a função resposta do detector num tempo finito \mathcal{T} .

escalar livre sem massa, se tem que $G^+(\Delta\tau, T) = G^+(\Delta\tau)$, e fazendo $\mathcal{T} \rightarrow \infty$, a integral dupla se reduz à transformada de Fourier da função de Wightman, vezes um intervalo de tempo infinito. Similarmente, vamos mostrar mais adiante como as flutuações estocásticas do cone de luz introduzem uma função não limitada $f(\tau)$ que depende da forma funcional da função de correlação do ruído. Entretanto, a probabilidade de transição por unidade de tempo próprio se mantém finita. Tais efeitos surgem na teoria quântica de campos e podem ser tratados com um desligamento adiabático do acoplamento campo-detector quando $\mathcal{T} \rightarrow \pm\infty$. Para evitar dita situação problemática, assumimos que a interação campo-detector ocorrendo durante um intervalo de tempo finito. Devemos lembrar que o detector definido previamente responde as flutuações do vácuo porque

não temos assumido a aproximação de onda girante para o detector. Este sistema de dois níveis estaria medindo o “ruído do vácuo” na sua linha de mundo. Consequentemente $F(E, \mathcal{T})$ define o espectro do ruído do vácuo. A determinação de $F(E, \mathcal{T})$ requer das funções de Wightman de frequências positivas $G^+(x, x')$. Na próxima Seção determinaremos $G^+(x, x')$ e discutiremos as consequências do médio desordenado na função resposta $F(E, \mathcal{T})$ do detector.

Podemos também definir a taxa de transição do detector para um intervalo de tempo infinito

$$R(E) = \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \frac{dF(E, \mathcal{T})}{d\mathcal{T}}. \quad (52)$$

quando o detector segue uma trajetória com aceleração própria, α , constante se obtém que

$$R(E) = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{e^{2\pi E/\alpha} - 1}. \quad (53)$$

Esta taxa de transição seria esperada se o detector (sistema de dois níveis) estivesse inercial porém em contato com um reservatório térmico com temperatura $T = \alpha/2\pi k_B$.

2.4 CORREÇÕES ESTOCÁSTICAS À FUNÇÃO DE WIGHTMAN

Como vimos na seção anterior uma das quantidades necessárias para calcular a taxa de transição de um detector de Unruh-DeWitt acoplado a um campo escalar é a função de Wightman do campo. A função de Wightman de frequências positivas de um campo escalar sem massa, quantizado no espaço-tempo de Minkowski, está definida pelo valor esperado seguinte

$$G_0^+(x, x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle, \quad (54)$$

se pode mostrar que para o caso do campo escalar sem massa esta expressão é equivalente à integral

$$G_0^+(x, x') = \int_{\mathcal{C}_+} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}, \quad (55)$$

sendo os quadri-vetores $x = (t, \mathbf{x})$ e $k = (\omega, \mathbf{k})$. Esta integral é realizada *off-shell*, ou seja, não temos necessariamente que $\omega = |\mathbf{k}|$. O contorno de integração \mathcal{C}_+ está no plano complexo das frequências e é representado na Fig. (13).

Realizando a integral obtemos

$$G_0^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t-t' - i\epsilon)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}, \quad (56)$$

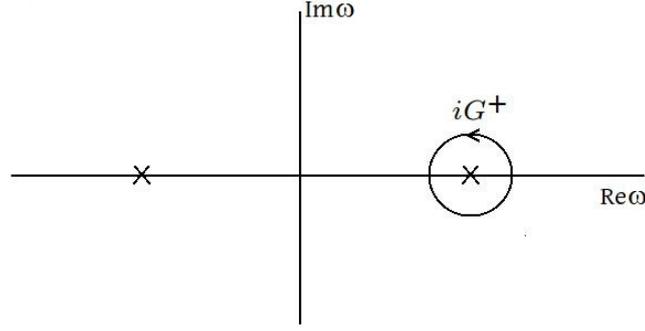


Figura 13: Contorno de integração para a função de Wightman no plano complexo das frequências.

sendo ϵ um parâmetro infinitesimal positivo. No primeiro capítulo da presente tese nós elaboramos a teoria de perturbações para as funções de Green do campo escalar na presença de flutuações estocásticas. Utilizando as expressões desse capítulo Eq. (24), Eq. (25) e Eq. (26) com as condições de contorno adequadas, nós podemos calcular as correções, devido à desordem, a todas as funções de Green (avançada, retardada e causal) e às funções de dois-pontos (Pauli-Jordan, Hadamard e Wightman) do campo escalar. Assim a primeira correção, de ordem de 1-loop nas flutuações estocásticas, à função de Wightman vem dada pela integral

$$G_1^+(x, x') = -\frac{\sigma^2}{(2\pi)^4} \int_{e_+} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\omega^4 \bar{\alpha}(\omega)}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2} e^{-ik(x-x')}, \quad (57)$$

note-se que desde que estamos trabalhando com um campo sem massa só teremos flutuações do cone de luz associadas à variável estocástica μ . Na integral anterior temos definido a integral associada auto-energia a 1-loop, Eq. (26), para o caso sem massa como

$$\bar{\alpha}(\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}. \quad (58)$$

Realizando a integral Eq. (58) e a Eq. (59), no contorno de integração mostrado na Fig. (13), pode-se provar que a correção à função de Wightman do campo escalar sem massa na presença de flutuações estocásticas vem dada por

$$G_1^+(x, x') = \frac{6i\sigma^2}{(2\pi)^3} \frac{f(x, x')}{((\Delta t - i\epsilon)^2 - \Delta \mathbf{x}^2)^5} \quad (59)$$

com a função

$$f(x, x') = \Delta t \{ 5(\Delta t - i\epsilon)^4 + 10(\Delta t - i\epsilon)^2 \Delta \mathbf{x}^2 + \Delta \mathbf{x}^4 \} - 4(\Delta t - i\epsilon)((\Delta t - i\epsilon)^4 - \Delta \mathbf{x}^4). \quad (60)$$

Consequentemente a função de Wightman na presença das flutuações estocásticas (do cone de luz ou do horizonte de eventos) pode ser escrita como

$$\langle G^+(x, x') \rangle_\mu = G_0^+(x, x') + G_1^+(x, x'). \quad (61)$$

Será esta função de Wightman corrigida a que vamos utilizar para calcular as taxas de transição do detector de Unruh-DeWitt na presença das flutuações estocásticas.

2.5 PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO CORREGIDAS

Tendo obtido a função de Wightman de frequências positivas associada ao campo escalar sem massa na presença das flutuações estocásticas, Eq. (61), nós podemos com ela encontrar a função resposta do sistema de dois níveis na presença da desordem. Esta função resposta está dada por

$$F(E, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} d(\Delta\tau) e^{-iE(\Delta\tau)} \int_{|\Delta\tau|}^{2\mathcal{T}-|\Delta\tau|} dT \langle G^+(\Delta\tau, T) \rangle_\mu, \quad (62)$$

onde $\langle G^+(\Delta\tau, T) \rangle_\mu$ pode ser obtida da Eq. (61) junto com as equações Eq. (56) e Eq. (59). Na Fig. (12) se apresenta o domínio de integração na variáveis $\Delta\tau$ e T utilizadas na Eq. (62). Agora vamos considerar que o detector de Unruh-DeWitt se movimenta no plano (t, x) ao longo da trajetória hiperbólica associada a um movimento uniformemente acelerado definido por

$$x = (t^2 + \alpha^{-2})^{1/2}, \quad y = z = 0, \quad (63)$$

onde α é à aceleração própria do detector. A trajetória hiperbólica associada a este movimento é mostrada na Fig. (9). O tempo próprio do detector τ está relacionado com (t, x) pelas fórmulas

$$\begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau), \\ x &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau). \end{aligned} \quad (64)$$

Realizando esta transformação de coordenadas na Eq. (61), podemos escrever a função resposta a ordem de um-loop como a soma de três contribuições

$$F(E, \mathcal{T}) = F_\beta(E, \mathcal{T}) + F_0(E, \mathcal{T}) + F_1(E, \mathcal{T}). \quad (65)$$

O primeiro termo da Eq. (65) é a contribuição térmica usual. Utilizando técnicas desenvolvidas em Ref. [46], ele pode ser escrito da forma

$$F_\beta(E, \mathcal{T}) = \frac{\mathcal{T}|E|}{2\pi} \left[\Theta(-E) \left(1 + \frac{1}{e^{\beta|E|} - 1} \right) + \Theta(E) \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \right], \quad (66)$$

onde o inverso da temperatura é dado por $\beta = 2\pi/\alpha$. Claramente no resultado da Eq. (66) se aprecia o mesmo efeito de aquele produzido por uma radiação térmica a temperatura $\beta^{-1} = \alpha/2\pi$, ver Refs. [37, 38, 39]. Dentro da perspectiva do teorema de termalização(ref), o resultado pode ser colocado da seguinte forma: o estado (estatístico) puro que é o vazio desde o ponto de vista de um observador inercial é um estado (ensemble) estatístico misto desde o ponto de vista de um observador acelerado, com uma temperatura proporcional a magnitude da aceleração do observador. Nesta expressão se pode ver claramente um termo independente da temperatura, associado ao decaimento espontâneo do sistema de dois níveis, e outros dois termos térmicos associados às excitações ou decaimentos induzidos pelo vácuo de Minkowski, percebido como “banho térmico” pelo observador acelerado.

O segundo termo da Eq. (65) é devido ao ligamento e desligamento da interação campo-detector em um tempo finito. Este segundo termo se anula quando são considerados grandes intervalos de tempo de interação. Para mais detalhes sobre esses efeitos de tempo finito vease Ref. [46]. Nós estamos interessados em analisar o terceiro termo de Eq. (65), desde que é este o que contém a correção devido às flutuações estocásticas. Esta contribuição, $F_1(E, \mathcal{T})$ devido aos efeitos do horizonte de eventos flutuante, é dado por

$$F_1(E, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} d(\Delta\tau) e^{-iE\Delta\tau} \int_{|\Delta\tau|}^{2\mathcal{T}-|\Delta\tau|} dT G_1^+(\Delta\tau, T), \quad (67)$$

e pode ser avaliado da mesma forma que $F_\beta(E, \mathcal{T})$. Realizando a transformação de coordenadas das $(\tau, \tau') \rightarrow (\Delta\tau, T)$, se obtém que a correção à função de Wightman, promediada pelas flutuações estocásticas, e avaliada acima da trajetória hiperbólica de um observador acelerado, Eq. (64), é

$$G_1^+(\Delta\tau, T) = \frac{6i}{(2\pi)^3} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^5 \frac{\tilde{\sigma}^2(T)}{\sinh^5\left(\alpha\Delta\tau/2 - i\epsilon\alpha\right)}, \quad (68)$$

aqui temos absorvido uma função positiva de $\Delta\tau$ e T dentro da definição do parâmetro infinitesimal ϵ . Também, a quantidade $\tilde{\sigma}^2(T)$, que caracteriza a intensidade das flutuações do horizonte, é dada por

$$\tilde{\sigma}^2(T) = \sigma^2 \cosh\left(\frac{5\alpha T}{2}\right). \quad (69)$$

A dependencia em T da função de Wightman vem do fato que x não é mais uma variável independente, se não que ela é determinada pela trajetória do detector. Em outras palavras, observadores inerciais nesse modelo experimentam flutuações do cone de luz estáticas, ver Eq. (??). Entretanto, para os observadores uniformemente acelerados

tais flutuações não serão mais estáticas e irão depender do tempo próprio do detector. Fisicamente, é claro que para um detector uniformemente acelerado os efeitos das flutuações aumentarão com o tempo próprio, este resultado é manifesto em. Eq. (69).

Utilizando os resultados de Eqs. (68, 69) em Eq. (67), obtemos que

$$F_1(E, \mathcal{T}) = \frac{6i}{5(2\pi)^3} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \tilde{\sigma}^2(\mathcal{T}) \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} d(\Delta\tau) e^{-iE\Delta\tau} \frac{\sinh[5\alpha(\mathcal{T} - |\Delta\tau|)/2]}{\sinh^5(\alpha\Delta\tau/2 - i\epsilon\alpha)}. \quad (70)$$

Podemos decompor a integral anterior da seguinte maneira

$$\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} d(\Delta\tau) f(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) f(\Delta\tau) - \left[\int_{-\infty}^{-\mathcal{T}} d(\Delta\tau) f(\Delta\tau) + \int_{\mathcal{T}}^{\infty} d(\Delta\tau) f(\Delta\tau) \right], \quad (71)$$

onde temos definido a função seguinte

$$f(\Delta\tau) = \frac{1}{\alpha} e^{-iE(\Delta\tau)/\alpha} \frac{\sinh[5(\alpha\mathcal{T} - |\Delta\tau|)/2]}{\sinh^5(\Delta\tau/2)}. \quad (72)$$

Os últimos dois termos da direita da Eq. (71) podem ser expressados como uma integral só. Eles tem a mesma origem física que o termo $F_0(E, \tau)$ devido a tempos de interação campo-detector finitos. Para realizar a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) f(\Delta\tau), \quad (73)$$

podemos utilizar integração no plano complexo. O contorno a ser utilizado é mostrado na Fig. (14). A integral sobre a parte de embaixo do contorno nos dá a mesma I , enquanto a integração sobre a parte de cima obtemos $\exp(2\pi E/\alpha)I$. A soma destas contribuições está relacionada com o resíduo de grau cinco da função $f(\Delta\tau)$ em $\Delta\tau = 0$. Finalmente, com esses resultados se obtém para a correção à função resposta vinda das flutuações estocásticas

$$F_1(E, \mathcal{T}) = W(E, \mathcal{T}) + H(E, \mathcal{T}), \quad (74)$$

onde

$$W(E, \mathcal{T}) = -\frac{\mathcal{T}\tilde{\sigma}^2(\mathcal{T})}{(4\pi)^2} \frac{(24\alpha^4 - 35E^2\alpha^2 + E^4)}{e^{2\pi E/\alpha} + 1}, \quad (75)$$

e o termo associado a tempos finitos de interação é

$$H(E, \mathcal{T}) = \frac{12\tilde{\sigma}^2(\mathcal{T})}{5(2\pi)^3} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \int_{\mathcal{T}}^{\infty} d(\Delta\tau) \sin(E\Delta\tau) \frac{\sinh[5\alpha(\mathcal{T} - |\Delta\tau|)/2]}{\sinh^5[\alpha\Delta\tau/2]}. \quad (76)$$

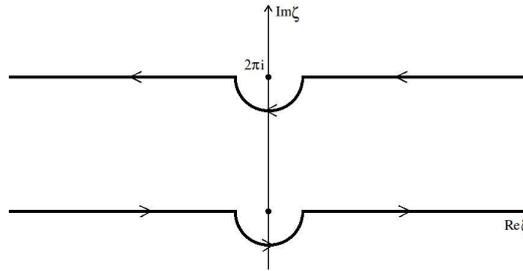


Figura 14: Contorno de integração apropriado para avaliar a integral I.

As Eqs (74)-(76) resumem o principal resultado deste capítulo. Temos achado que a correção devido ao horizonte de eventos flutuante nos traz uma distribuição térmica com uma temperatura $\beta^{-1} = \alpha/2\pi$, que é a mesma temperatura para o caso livre sem flutuações, mas a correção tem a forma de uma distribuição de Fermi-Dirac, Eq. (75). Isto se assemelha com o resultado obtido por Takagi [49, 50], quem estudou o espectro de potências das flutuações de vazio medidas por um detector acelerado em dimensões arbitrárias e discutiu o fenômeno da inversão da estatística para dimensões ímpares. Entretanto, como enfatizado na literatura [51], esta é uma inversão da estatística aparente. No nosso caso nos temos uma correção de Fermi-Dirac à uma radiação térmica de Unruh associada a um campo bosônico (escalar). Nós temos a distribuição de Bose-Einstein como termo principal, mais a correção tipo Fermi-Dirac nos traz uma “mistura de estatísticas” devido às flutuações estocásticas.

Podemos analisar também se as flutuações estocásticas modificam a taxa de transição de um detector inercial interagindo com o vácuo de Minkowski. Considerando um detector com aceleração nula estariamos considerando um observador inercial, realizando este limite na Eq. (75) temos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(E, \tau) = -\tau \frac{\sigma^2}{16\pi^2} E^4 \Theta(-E), \quad (77)$$

Portanto no caso de um detector inercial teremos que as correções à taxa de transição devido às flutuações estocásticas é proporcional a $\Theta(-E)$, assegurando que o detector só apresentará decaimentos espontâneos e não perceberá nenhum banho térmico associado ao vácuo de Minkowski. Isto é uma confirmação da consistência, pois para o caso de um observador inercial no vácuo de Minkowski não esperamos que exista nenhum efeito térmico, mesmo na presença das flutuações estocásticas.

“Isto é o que aconteceu. Durante uma visita que eu realizei a Copenhague, deve ter sido em 1946 ou 1947, Bohr me perguntou o que eu tinha estado fazendo e eu lhe expliquei nosso trabalho sobre as forças de Van der Waals. *Isso está bem*, ele disse, *isso é algo novo*.

Então lhe expliquei que gostaria de encontrar uma derivação simples e elegante dos meus resultados. Bohr pensou um pouco sobre isso, depois murmurou algo como *tem que ter algo a ver com as flutuações do ponto-zero*. Isso foi todo, porém em retrospectiva tenho que admitir que eu lhe devo muito a essa observação”¹

Hendrik B. G. Casimir.

3.1 O EFEITO CASIMIR

Na teoria quântica de campos aparecem divergências em quantidades físicas que a princípio deveriam estar bem definidas. Normalmente tais quantidades divergentes aparecem quando estudamos a interação entre campos quânticos, por exemplo a interação do campo eletromagnético com o campo do elétron traz consigo divergências nas definições de massa e carga do elétron. Entretanto, mesmo sem considerar campos quânticos em interação se podem encontrar divergências dentro da teoria de campos. Uma consequência da quantização de qualquer campo clássico é o surgimento de uma energia do ponto-zero que diverge. A divergência da energia do ponto-zero (estado fundamental) de um campo é o caso mais simples de uma divergência que aparece no formalismo da teoria quântica dos campos.

Usualmente na teoria quântica de campos o estado de vazio é suposto como um estado de energia e momento nulos, isto se consegue graças a que temos a liberdade de escolher, a priori, um ordenamento dos operadores, *ordenamento normal*, ao realizar o procedimento de quantização. Entretanto, se considerarmos campos quânticos definidos em espaço-tempos onde a seção espacial tem topologia não trivial, ou na presença de fronteiras macroscópicas, vemos que as propriedades do estado fundamental do campo mudam e essas mudanças podem ser mesuráveis. Ao introduzir certas restrições ou vínculos sobre os campos quantizados limitamos os modos de propagação desses e, conseqüentemente, se modifica o estado de vazio do campo. A mudança do vácuo devido à presença de estruturas macroscópicas produz uma força, devido a efeitos quânticos, entre ditas fronteiras, esta

¹ “The Casimir effect 50 years later”, editor Michael Bordag (Leipzig, Germany 1998).

é a chamada *força de Casimir*.

O efeito Casimir está intimamente ligado, desde seu descobrimento, com a força de Van der Waals. Foram H. B. Casimir e D. Polder quem chegaram até este efeito analisando a força de Van der Waals retardada entre uma molécula e uma superfície condutora [52]. O resultado sendo uma força de atração entre objetos desprovidos de cargas elétricas. Logo após este trabalho Casimir generalizou seu resultado, com um procedimento mais elegante, considerando o vácuo de um campo vetorial confinado entre duas placas condutoras paralelas [53]. Ele obteve que a energia renormalizada desta situação, na presença de fronteiras, depende de uma forma não trivial do comprimento de separação entre as duas placas. Esta energia, por tanto, poderia ser mensurável se as fronteiras fossem perturbadas. Assim, a energia de Casimir pode ser vista como a energia vinda como resposta do vácuo perante a presença de fronteiras macroscópicas. Seria bom ressaltar aqui que o interessante do trabalho original de Casimir não foi a predição da existência de uma força de atração entre objetos neutros, desde que Fritz London já tinha explicado a existência de uma força atrativa entre átomos neutros mas polarizáveis, se não que a importância deste trabalho seminal está no método utilizado por Casimir, o qual se fundamenta nas flutuações da energia do ponto-zero do campo eletromagnético.

Esta atração entre as fronteiras macroscópicas devido às flutuações do vácuo quântico foi vista por Casimir como uma oportunidade para resgatar o modelo clássico do elétron como uma cavidade esférica carregada [54]. Assim, nesse modelo se esperava que as tensões eletrostáticas da superfície fossem anuladas pelas forças de atração do vácuo, otorgando estabilidade a esse sistema. Este modelo tem a vantagem de fornecer um valor sugestivamente pequeno para a constante de estrutura fina do elétron $\alpha = e^2/\hbar c$, partindo de considerações geométricas da energia do vácuo no caso de duas placas paralelas e extrapolando-as ao caso da cavidade esférica. Infelizmente para este modelo, em trabalhos realizados para analisar as forças de Casimir dentro de uma cavidade esférica, [55], T. Boyer obteve surpreendentemente que nessa geometria as forças de Casimir não eram atrativas, como no caso das placas paralelas, se não repulsivas, contrariamente ao que Casimir tinha conjecturado anos antes, eliminando-se assim definitivamente uma descrição semi-clássica do elétron. O trabalho de Boyer tem sido verificado e melhorado por outros autores, [56, 57]. O efeito Casimir tem sido estudado exaustivamente tanto teórica como experimentalmente e a realidade das propriedades do vácuo quântico tem sido observadas em diversos experimentos. Existem vários trabalhos discutindo em detalhe dito efeito, ver por exemplo [58, 59, 60, 61, 62]. Aqui gostaríamos de apresentar e discutir sucintamente as

possíveis abordagens para calcular o efeito das flutuações do vácuo na presença de fronteiras. O método mais direto foi mostrado por Casimir no seu artigo original, [53], e se baseia na soma de autofrequências do campo quântico para achar a energia do vácuo. Esta soma tem que ser regularizada por algum método, por exemplo impondo uma função de corte ou *cut-off* na soma, e depois retirando-a por meio de um limite adequado. Também se pode regularizar a soma infinita de frequências por meio da regularização analítica, indo para dimensões arbitrárias via extensões analíticas e no final tomar o limite para a dimensão física. Outra técnica de regularização que pode ser utilizada é a regularização via a função zeta espectral que utiliza generalizações da função zeta de Riemann para tratar as divergências da energia do ponto-zero do campo. Uma abordagem particularmente elegante de calcular a energia de Casimir é utilizando as funções de Green da teoria. Aplicando certo operador diferencial, apropriado ao campo em estudo, sobre a função de Green do campo obtemos diretamente o valor esperado do tensor-energia momento no estado de vácuo do campo [63, 64]. Este método, por se basear nas funções de Green da teoria, é chamado de *método local* ou em inglês de *point-splitting method*. O método consiste na “separação de pontos” na expressão do tensor energia momento da seguinte maneira: $\varphi(x)^2 \rightarrow \varphi(x)\varphi(x')$, e no final recuperar as quantidades locais originais fazendo o limite: $x' \rightarrow x$.

Nesse capítulo vamos utilizar o método local das funções de Green para analisar o efeito das flutuações estocásticas do cone de luz nas propriedades mecânicas do vácuo que surgem ao impormos que os campos quantizados satisfazem condições de contorno clássicas na presença de estruturas macroscópicas. Analisaremos o caso do campo escalar sem massa confinado entre duas fronteiras planas (placas) na presença de desordem. Aqui consideraremos uma variável estocástica, na equação de movimento do campo, que depende das coordenadas espaço-temporais, e fará flutuar o coeficiente associado à velocidade do campo. Este ruído não-estático vai nos levar a fórmulas similares às estudadas no primeiro capítulo desta tese, mas a presença das fronteiras modificará as funções de Green de tal maneira que a energia e a força de Casimir apresentam variações a partir do caso sem estocasticidade. Estas mudanças na força de Casimir, a princípio poderiam ser mensuráveis, por exemplo num fluido desordenado onde as ondas quantizadas (fônons) se encontrem na presença de fronteiras.

3.2 FLUTUAÇÕES DO PONTO-ZERO E FLUTUAÇÕES DO CONE DE LUZ

Recentemente tem havido muita atividade em explorar a analogia entre ondas quantizadas num fluido e campos quânticos em espaços

curvos [19, 20, 21, 22]. Dentro deste esquema também aparece o efeito Casimir em fluidos quando as flutuações do ponto-zero do campo do fónon é sometido a condições de fronteira. Em outras palavras, perturbações acústicas na presença de fronteiras nos levam ao efeito Casimir fonónico [65, 66, 67].

Neste capítulo investigamos o efeito Casimir associado aos fónons de um fluido relativista confinado entre fronteiras planas e na presença de desordem. Nosso propósito nesta seção é discutir como as distorções da energia do ponto-zero do campo fonónico na presença de placas é afeitada num cenário onde se tem flutuações estocásticas do cone de luz, ou flutuações do “cone-sônico” no caso dos modelos análogos. O efeito Casimir em materiais reais (dielétricos) tem sido investigado em várias situações [68, 69, 70, 71]. Na referência [71], o efeito Casimir térmico entre dielétricos laminares aleatórios foi estudado. Também uma equação de onda escalar onde a constante dielétrica tem uma contribuição aleatória dependente do tempo foi estudada por Stephen um tempo atrás [72]. Para uma discussão mais recente, ver [73]. Não é difícil de ver que podemos usar as idéias desenvolvidas em [71] e [72] para estudar o efeito da desordem no efeito Casimir. Por simplicidade utilizamos o modelo de um fluido relativista perfeito analisado por Ederly [74].

Neste capítulo vamos investigar os efeitos das flutuações do cone de luz sobre o valor esperado do tensor energia-momento no estado de vazio de um campo quântico confinado entre fronteiras planas. ao igual que o primeiro capítulo da tese, aqui assumiremos uma equação de Klein-Gordon estocástica. As diferenças com respeito a esse capítulo são primeiro que neste caso assumiremos que o ruído depende das coordenadas do espaço-tempo e consideraremos correlações do ruído gaussiano tipo delta entre dois pontos. A segunda diferença é que devido à presença das placas o campo deve satisfazer condições de fronteira específicas que modificarão os propagadores do campo livre. Para obter a correção à função de Green temos realizado uma aproximação perturbativa associada ao campo escalar sem massa numa aproximação de desordem fraca. Utilizaremos o método local das funções de Green para calcular a energia do vácuo do sistema [63, 64].

3.3 O TENSOR ENERGIA-MOMENTO RENORMALIZADO DE UM CAMPO CONFINADO ENTRE FRONTEIRAS PLANAS

O propósito desta Seção é estudar o método local para obter o tensor energia-momento renormalizado associado a um campo escalar, minimamente acoplado, na presença de placas. Apesar que o vazio é um estado com características globais, se pode utilizar um método

local para o estudar. Este método, *the point splitting method*, se baseia nas funções de Green da teoria. Para ilustrar este método trabalharemos com o campo escalar livre (sem auto-interação) na presença de fronteiras planas. A densidade lagrangeana deste sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad (78)$$

o tensor energia-momento deste campo é dado por

$$T^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (79)$$

Tomando o valor esperado deste operado no estado fundamental (vácuo) do campo, e definindo a função de Green causal do campo como $iG(x, x') = \langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(x')] | 0 \rangle$, onde $T[\dots]$ é o produto temporalmente ordenado e $|0\rangle$ o estado fundamental do campo. Pode-se mostrar que

$$\langle 0 | T^{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left(\partial^\mu \partial'^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial'^\alpha + \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu} \right) iG(x, x'). \quad (80)$$

Portanto a função de Green causal do campo nos leva ao valor esperado do tensor energia-momento no estado de vácuo. Nós estamos interessados em considerar a presença de objetos macroscópicos próximos ao campo quântico. Esses objetos serão levados em conta exigindo que o campo satisfaça certas condições de fronteira. Em particular, no caso em que o campo está confinado entre duas placas paralelas, localizadas em $z = 0$ e $z = a$, vamos exigir que o campo satisfaça as condições de fronteira de Dirichlet nelas, ou seja o campo tem que satisfazer

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi(x) &= 0, \\ \varphi(x)|_{z=0} &= \varphi(x)|_{z=a} = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Nessa Seção trabalharemos num espaço-tempo $(d+1)$ -dimensional, isto facilitará a regularização dimensional ou analítica da energia do ponto-zero. Denotaremos as coordenadas do espaço-tempo por $x = (t, \mathbf{x})$ enquanto as d coordenadas espaciais serão denotadas por $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, z)$, onde \mathbf{x}_\perp são as coordenadas não compactificadas e z é a coordenada espacial a ser compactificada entre as placas. Então na presença destas fronteiras (placas) a função de Green satisfaz

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \nabla_\perp^2 - \partial_z^2 + m^2)G_0(x, x') &= -\delta(x - x'), \\ G_0(x, x')|_{z=0} &= G_0(x, x')|_{z=a} = 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Utilizando uma representação de Fourier para a função de Green obtemos

$$G_0(x, x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \exp[-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)] \mathcal{G}_\lambda(z, z'),$$

(83)

onde a função $\mathcal{G}_\lambda(z, z')$ satisfaz

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 + \lambda^2)\mathcal{G}_\lambda(z, z') &= \delta(z - z'), \\ \mathcal{G}_\lambda(z, z')|_{z=0} &= \mathcal{G}_\lambda(z, z')|_{z=a} = 0, \end{aligned} \quad (84)$$

sendo $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2 - m^2}$. Utilizando a discontinuidade da função de Green em $z' = z$, podemos resolver a equação anterior e obter

$$\mathcal{G}_\lambda(z, z') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right)}{\lambda^2 - \left(\frac{n\pi z}{a}\right)^2}. \quad (85)$$

Para calcular a densidade de energia associada com o campo escalar no estado de vazio, na presença das placas, usamos o método do *point splitting*. Assim temos que

$$\langle T^{00}(x) \rangle_0 = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{i}{2} \left(\partial_t \partial_{t'} + \partial_{x_\perp} \partial_{x'_\perp} + \partial_z \partial_{z'} + m^2 \right) G_0(x, x'), \quad (86)$$

onde o subíndice zero no lado esquerdo da equação anterior denota a situação sem desordem. Para o caso sem massa, $m = 0$, achamos que

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(x) \rangle_0 &= \frac{i}{a} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 + i\epsilon} \sin^2(n\pi z/a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n\pi/a)^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 + i\epsilon} \cos^2(n\pi z/a) \right\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Na equação acima temos definido a frequência $\bar{\omega}_n = \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + (n\pi/a)^2}$, nessa expressão podemos notar que a densidade de energia do vácuo só depende da coordenada compactificada z . Regularizando analiticamente esta expressão obtemos que a densidade de energia vem dada por

$$\langle T^{00}(x) \rangle_0 = -\frac{1}{2a^{d+1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{d/2} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left(\zeta(-d) + (d-1)K(z) \right), \quad (88)$$

onde $\zeta(z)$ é a zeta de Riemann e temos definido a função

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^d \cos\left(\frac{2n\pi z}{a}\right). \quad (89)$$

O primeiro termo da Eq. (88), que é global, será denotado por $U_0(a)$. Mais adiante veremos que esse termo será a densidade de energia de Casimir para o caso livre. Vemos que esse termo, $U_0(a)$, não esta vem definido para qualquer valor da dimensão espacial, d . Entretanto, utilizando a propriedade de reflexão da zeta de Riemann

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) \pi^{-z/2} = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z) \pi^{(z-1)/2}, \quad (90)$$

podemos escrever

$$U_0 = -\frac{1}{a^{d+1}} \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1). \quad (91)$$

O segundo termo da Eq. (88) faz explícita a dependência na coordenada espacial compactificada, z , da densidade de energia do estado de vazio do campo. Este termo será divergente sobre as placas, para qualquer dimensão. Este tipo de divergências tem sido discutidas amplamente na literatura [58, 59, 60, 61, 62]. Existem diversas formas de tratar estas divergências superficiais. Um procedimento de evitar o aparecimento de tais divergências é utilizando o tensor energia-momento conforme de acoplamento não-mínimo ao vez do tensor energia-momento canônico, [75]. Outra maneira de evadir tais divergências é ainda utilizando o tensor energia-momento canônico, tratar as fronteiras como objetos quânticos. Para analisar como este comportamento singular nas proximidades das fronteiras é modificado pelas flutuações do cone de luz, apresentaremos estes termos locais para o caso livre e depois suas respectivas correções. Para analisar o caso sem estocasticidade utilizamos um procedimento de regularização analítica. A função $K(z)$ pode ser reescrita, utilizando a definição da função polilogaritmo

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad (92)$$

e sua relação com a função zeta de Hurwitz $\zeta(s, a)$

$$\text{Li}_{-s}(e^\mu) = \frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi)^{s+1}} \left[i^{s+1} \zeta\left(s+1, \frac{\mu}{2\pi i}\right) + i^{-(s+1)} \zeta\left(s+1, 1 - \frac{\mu}{2\pi i}\right) \right], \quad (93)$$

onde $\zeta(s, a)$ é definida como

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}, \quad \text{Re}(s) > 1, \quad \text{Re}(a) > 0, \quad (94)$$

assim, podemos mostrar que

$$K(z) = \frac{\Gamma(d+1)}{2(2\pi)^{d+1}} i^{d+1} (1 + (-1)^{d+1}) \left[\zeta(d+1, z/a) + \zeta(d+1, 1 - z/a) \right]. \quad (95)$$

Podemos notar que esta contribuição local não se anula só para dimensões espaciais ímpares. Conseqüentemente, podemos escrever a densidade de energia do estado de vazio como

$$\langle T^{00}(z) \rangle_0 = U_0(a) + g(z), \quad (96)$$

onde $g(z)$ é dada por

$$g(z) = -\frac{(d-1)i^{d+1}}{(4a)^{d+1}} \frac{\Gamma(d+1)}{\pi^{1+d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left[\zeta(d+1, z/a) + \zeta(d+1, 1 - z/a) \right].$$

(97)

Para visualizar o comportamento da densidade de energia do vácuo entre as placas analisaremos o caso de três dimensões espaciais, $d = 3$. Neste caso recuperamos o resultado conhecido [61]

$$\langle T^{00}(z) \rangle_0 = -\frac{\pi^2}{1440a^4} - \frac{1}{16\pi^2 a^4} \left[\zeta(4, z/a) + \zeta(4, 1 - z/a) \right]. \quad (98)$$

O gráfico dessa função é mostrado na Fig. (15), onde a densidade de energia é medida em unidades de $1/a^4$

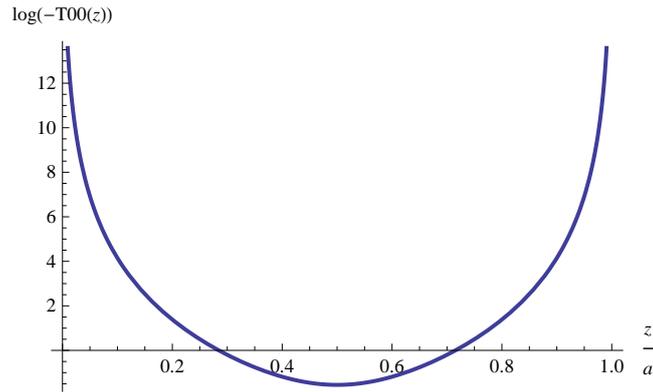


Figura 15: Densidade de energia do vácuo do campo escalar livre, entre as placas, como função de z/a .

Da figura acima podemos ver claramente o surgimento das divergências acima das fronteiras na densidade de energia do vácuo. Queremos ressaltar mais uma vez que tais divergências superficiais desaparecerão uma vez o tensor conforme de energia momento de Callan-Coleman-Jackiw seja utilizado ao vez do tensor canônico [75]. A continuação podemos calcular também a pressão do vácuo na direção z entre as duas placas

$$\langle T^{zz}(x) \rangle_0 = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{i}{2} \left(\partial_t \partial_{t'} - \partial_{x_\perp} \partial_{x'_\perp} + \partial_z \partial_{z'} - m^2 \right) G_0(x, x'), \quad (99)$$

tal que para o campo escalar sem massa obtemos

$$\begin{aligned} \langle T^{zz}(x) \rangle_0 = & \frac{i}{a} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 + i\epsilon} \sin^2(n\pi z/a) \right. \\ & \left. + \frac{(n\pi/a)^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 + i\epsilon} \cos^2(n\pi/a) \right\}. \end{aligned} \quad (100)$$

Utilizando um procedimento de regularização analítica e a Eq. (90), obtemos

$$\langle T^{zz}(x) \rangle_0 = -\frac{d}{a^{d+1}} \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1). \quad (101)$$

Aqui gostaríamos de salientar o fato que a pressão do vazio entre as duas placas é uniforme, independente da posição, para todas as dimensões espaciais. A pressão do vazio do campo é homogênea dentro de todo o espaço entre as placas. Isto é parecido a pressão de um gás ideal dentro de uma caixa.

3.4 CORREÇÕES ESTOCÁSTICAS AO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Nesta Seção estudaremos o campo escalar na presença de flutuações estocásticas do cone de luz e confinado por duas fronteiras planas. Estas flutuações serão modeladas utilizando uma variável aleatória na equação de campo que depende das coordenadas do espaço-tempo $x = (t, \mathbf{x})$, isto é diferente com respeito às Seções anteriores onde o ruído só dependia do espaço. Ademais aqui trabalharemos com um campo sem massa e teremos que introduzir condições de fronteira sobre o campo devido à presença de objetos macroscópicos (placas). A equação de campo aleatória vem dada por

$$\left[(1 + g\nu(x)) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (102)$$

onde g é um parâmetro adimensional pequeno o suficiente para implementar a teoria de perturbações. A variável aleatória $\nu(x)$ tem uma distribuição de probabilidade gaussiana definida por

$$\begin{aligned} \overline{\nu(x)} &= 0, \\ \overline{\nu(x)\nu(x')} &= \sigma^2 \delta^{(d+1)}(x - x'), \end{aligned} \quad (103)$$

os valores médios sobre a variável aleatória, $\nu(x)$, tem sido denotados por $\overline{(\dots)}$ e σ^2 é a intensidade do ruído. Para implementar a teoria de perturbações definimos o comprimento característico l_c

$$\frac{1}{l_c} = g^2 \sigma^2 \frac{\omega}{a^4}. \quad (104)$$

Esta expressão é motivada pela auto-energia do campo induzida pelas flutuações estocásticas. Embora estejamos trabalhando com um ruído dependente do espaço-tempo, suas correlações brancas nos permitem definir um comprimento característico estático. Isto significa que as hipersuperfícies de tipo espaço associadas a dois tempos distintos não estão correlacionadas. Portanto podemos definir o comprimento característico independente do tempo. A expansão perturbativa será válida para $g \ll 1$ tal que se satisfaça $l_c \ll a$. Podemos definir a equação de campo como

$$(L_0 + L_1) \varphi(x) = 0. \quad (105)$$

Onde $L_0 = \partial_t^2 - \nabla^2$ é o operador livre usual e $L_1(x) = g\nu(x)\partial_t^2$ é o operador estocástico. Disto se pode definir a função de Green completa G como

$$G = (L_0 + L_1)^{-1}, \quad (106)$$

o que pode ser expandido da seguinte maneira

$$G = G_0 - G_0 L_1 G_0 + G_0 L_1 G_0 L_1 G_0 + \dots$$

sendo $G_0 = L_0^{-1}$ o propagador livre do campo. Esta expansão perturbativa pode ser representada de uma forma diagramática como se mostra na Fig. (16). Realizando a média sobre todas as configurações da variável aleatória obtemos que a primeira correção não nula à função de Green devido à presença das flutuações estocásticas é dada por

$$G_1(x, x') = \int dy dy' \overline{G_0(x, y) \mathcal{L}_1(y) G_0(y, y') \mathcal{L}_1(y') G_0(y', x')}. \quad (107)$$

De agora em diante, por simplicidade, vamos incluir o parâmetro g dentro da definição da intensidade do ruído σ . Com todas estas considerações e utilizando a função de Green do campo livre na presença das fronteiras, Eq. (83), obtemos que a primeira correção à função de Green é

$$G_1(x, x') = \sigma^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 \exp[-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)] \\ \times \int_0^a dy \left\{ \mathcal{G}_\lambda(z, y) \left(\int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega'^2 \mathcal{G}_{\lambda'}(y, y) \right) \mathcal{G}_\lambda(y, z') \right\} \quad (108)$$

o que também pode ser escrito como

$$G_1(x, x') = \sigma^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \exp[-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)] \\ \times \omega^2 \omega'^2 \int_0^a dy \mathcal{G}_\lambda(z, y) \mathcal{G}_{\lambda'}(y, y) \mathcal{G}_\lambda(y, z'). \quad (109)$$

Aqui podemos definir a auto-energia induzida pelas flutuações da métrica

$$\Sigma(\omega; z) = \sigma^2 \omega^2 \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega'^2 \mathcal{G}_{\lambda'}(z, z). \quad (110)$$

Denotaremos a integral que aparece na última equação por $H(z)$ e esta função é calculada explicitamente no Apêndice (B). Da equação Eq. (168) a auto-energia tem a forma: $\Sigma(\omega; z) \approx \sigma^2 \omega^2 / a^4$ e isto nos permite definir o comprimento característico $\omega / l_c \approx \Sigma(\omega; z)$, como

Figura 16: Expansão da função de Green G em termos da desordem. As linhas retas são propagadores livres, G_0 , e as linhas onduladas representam o ruído v .

dado na Eq. (104). Aqui gostaríamos de analisar um pouco as consequências de escolher um ruído dependente do espaço-tempo ao vez de um ruído estático como temos feito nos capítulos anteriores. Como temos visto no primeiro capítulo, para um campo escalar massivo com flutuações da massa e do cone de luz o ruído estático gera uma auto-energia proporcional a $(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) |\omega^2 - m_0^2|^{1/2}$ onde σ_μ^2 e σ_ξ^2 são as intensidades das flutuações do cone de luz e da massa, respectivamente. No limite de massa nula portanto, teremos que $\iota_c^{-1} \approx \sigma_\mu^2 \omega^5$ o que cresce mais rapidamente com a frequência que o comprimento característico para o caso do campo escalar sem massa com flutuações dependentes do espaço-tempo, onde se tem $\iota_c^{-1} \approx \sigma^2 \omega / \alpha^4$. Isto é diferente do caso de um campo escalar massivo livre (sem fronteiras) na presença de flutuações estocásticas dependentes do espaço-tempo onde $\iota_c^{-1} \approx \sigma^2 \omega m^4$. Portanto no limite de massa zero o comprimento característico do ruído é infinito e a auto-energia se anula. Isto mostra a relevância das fronteiras ao definir um limite de ruído fraco no analisis do campo escalar sem massa com flutuações estocásticas dependentes do espaço-tempo.

Agora gostaríamos de calcular a primeira contribuição ao tensor energia-momento devido às flutuações estocásticas. Como discutido na Seção prévia, a densidade de energia do vácuo consiste de dois termos. Um termo global e outro termo local. Este comportamento vai se manter na presença das flutuações do cone de luz. Por outro lado veremos que embora a pressão do vácuo para o caso livre é homogênea dentro das placas, a correção devido à estocasticidade introduz um termo local, semelhante ao encontrado na densidade de energia do vácuo. A correção à densidade de energia do vácuo pode ser calculada de

$$\langle T^{00}(x) \rangle_1 = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} \left(\partial_t \partial_{t'} + \partial_{x_\perp} \partial_{x'_\perp} + \partial_z \partial_{z'} \right) G_1(x, x'), \quad (111)$$

portanto a correção à densidade de energia do campo escalar sem massa é

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(z) \rangle_1 &= \sigma^2 \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 \left((\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2) \int_0^a dy \mathcal{G}_\lambda^2(y, z) H(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a dy (\partial_z \mathcal{G}_\lambda(y, z))^2 H(y) \right), \end{aligned} \quad (112)$$

aqui queremos resaltar que a correção $\langle T^{00}(z) \rangle_1$, só depende da coordenada compactificada z , e não das coordenadas do espaço-tempo x . Na Eq. (112) temos definido a função

$$H(y) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^{d-1} \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega'^2 \mathcal{G}_{\lambda'}(y, y), \quad (113)$$

como estamos estudando um campo sem massa se tem $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2}$. Usando a formula Eq. (85) temos que

$$H(y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 - i\epsilon}. \quad (114)$$

Na Eq. (114) temos definido $\bar{\omega}_n = \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + (\frac{n\pi}{a})^2}$, nessa expressão a integral sobre as frequências será realizada utilizando a prescrição de Feynman do contorno de integração no plano complexo das frequências. Com isto podemos escrever a correção à densidade de energia do vazio entre as placas como

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1 = \sigma^2 \int_0^a dy H(y) (I(y, z) + J(y, z)), \quad (115)$$

onde as funções $I(y, z)$ e $J(y, z)$ estão definidas por

$$\begin{aligned} I(y, z) &= \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 (\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2) \mathcal{G}_\lambda^2(y, z), \\ J(y, z) &= \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 (\partial_z \mathcal{G}_\lambda(y, z))^2. \end{aligned} \quad (116)$$

Utilizando a Eq. (85) estas funções podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I(y, z) &= \frac{4}{a^2} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sin(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2 (\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2)}{(\omega^2 - \bar{\omega}_l^2 + i\epsilon)(\omega^2 - \bar{\omega}_{l'}^2 + i\epsilon)}, \\ J(y, z) &= \frac{4}{a^2} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \cos(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \cos(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times \left(\frac{ll'\pi^2}{a^2} \right) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \bar{\omega}_l^2 + i\epsilon)(\omega^2 - \bar{\omega}_{l'}^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (117)$$

A pressão do vazio entre as placas na direção z também pode ser calculada utilizando o método do *point splitting*

$$\langle T^{zz}(x) \rangle_1 = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} \left(\partial_t \partial_{t'} - \partial_{x_\perp} \partial_{x'_\perp} + \partial_z \partial_{z'} \right) G_1(x, x'), \quad (118)$$

tal que para o campo sem massa obtemos

$$\begin{aligned} \langle T^{zz}(z) \rangle_1 &= \sigma^2 \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 \left((\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2) \int_0^a dy \mathcal{G}_\lambda^2(y, z) H(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a dy (\partial_z \mathcal{G}_\lambda(y, z))^2 H(y) \right), \end{aligned} \quad (119)$$

e podemos escrever

$$\langle T^{zz}(z) \rangle_1 = \sigma^2 \int_0^a dy H(y) (\tilde{I}(y, z) + J(y, z)), \quad (120)$$

onde temos definido a seguinte função $\tilde{I}(y, z)$

$$\tilde{I}(y, z) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2) \mathcal{G}_\lambda^2(y, z). \quad (121)$$

Utilizando Eq. (85) esta função pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y, z) &= \frac{4}{a^2} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sin(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\times \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2 (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2)}{(\omega^2 - \bar{\omega}_l^2 + i\epsilon)(\omega^2 - \bar{\omega}_{l'}^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (122)$$

As componentes do tensor energia-momento serão derivadas explicitamente no Apêndice (B). Na próxima Seção utilizaremos esses resultados para analisar o comportamento de tais componentes. Especificamente, nos focaremos nas características globais e locais das correções ao tensor energia-momento. Como veremos esses termos apresentarão também divergências superficiais que precisam ser analisadas e renormalizadas apropriadamente.

3.4.1 Efeitos Locais e Divergências Superficiais

Nessa seção gostaríamos de apresentar e discutir os termos locais das correções estocásticas do cone de luz. Começaremos nossa discussão com a correção à densidade de energia do vácuo. Primeiro necessitamos regularizar essas contribuições. Utilizando os resultados derivados nos Apêndices (B, C), podemos decompor a correção à densidade de energia, Eq. (115), como segue

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1 = \langle T^{00}(z) \rangle_1^A + \langle T^{00}(z) \rangle_1^B, \quad (123)$$

utilizando os resultados dos apêndices, em particular as equações Eq. (181), Eq. (184) e Eq. (198), temos que

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(z) \rangle_1^A &= -\frac{\sigma^2}{a^{2d+2}} \frac{\zeta(d+1)}{(4\pi)^{d+1}} \left[\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \right]^2 \left[2\zeta(d+1) + (d-2)\mathcal{K}(z) \right], \\ \langle T^{00}(z) \rangle_1^B &= -\frac{\sigma^2}{a^{2d+2} 2^{d+2}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^d \left[\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \right]^2 \left[U(z) - V(z) \right], \end{aligned} \quad (124)$$

onde as funções $U(z)$ e $V(z)$ estão definidas apropriadamente no Apêndice (C). Utilizando Eqs. (95), (208) and (213) podemos analisar o comportamento local das correções à densidade de energia do vácuo devido às flutuações do cone de luz. Na figuras Fig. (17) e Fig. (18) apresentamos o comportamento local dessa correções entre as placas. Nessas figuras as correções à densidade de energia são medidas em unidades de σ^2/a^8 .

As figuras Figs. (17) and (18) mostram também que o caráter geral das divergências superficiais das correções estocásticas é o mesmo

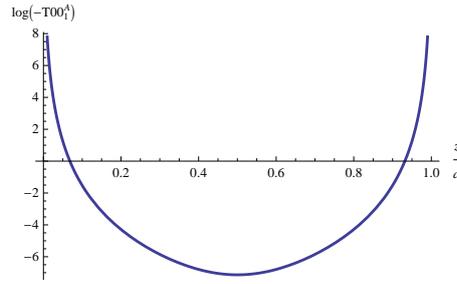


Figura 17: Primeira correção local à densidade de energia, $\log(-\langle T^{00}(z) \rangle_1^A)$, como função de z/a e em unidades de σ^2/a^8 , para $d = 3$ dimensões.

que para o caso livre. Como discutido anteriormente, para o caso livre as divergências superficiais podem ser evitadas utilizando o tensor energia-momento conforme [75]. Entretanto a crença geral que as divergências superficiais desaparecerão uma vez que utilizarmos o tensor conforme de energia-momento, não é um fato geral. Se tem mostrado que uma vez que consideremos fronteiras curvas ao vez de fronteiras planas, as divergências superficiais aparecem mesmo utilizando o tensor conforme [76]. Em outro trabalho relacionado se tem mostrado que ainda no caso de fronteiras planas, quando são utilizadas condições de fronteira mixtas (Dirichlet-Neuman) as divergências superficiais podem permanecer no tensor energia-momento conforme [77]. Concluímos portanto que o uso do tensor de esforços conforme não nos permite remover as divergências nos casos acima discutidos. Para o caso de fronteiras planas e condições de fronteira de Dirichlet na presença de flutuações estocásticas do con de luz, as divergências superficiais surgem das funções $K(z)$, $U(z)$ e $V(z)$. Esses termos locais com divergências superficiais não podem ser evitados completamente utilizando o tensor energia-momento conforme. Por outro lado, pode ser visto que as flutuações estocásticas induzem uma auto-interação na teoria originalmente livre do campo escalar. Essa auto-interação será qualitativamente semelhante à teoria $\lambda\phi^4$. Em geral, é bem conhecido que num sistema com auto-interação

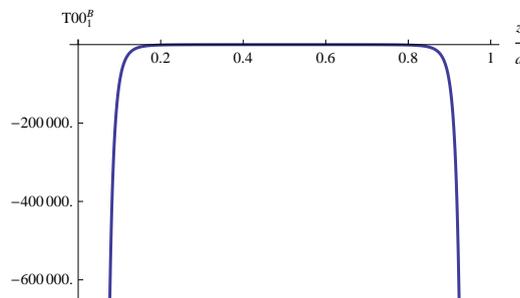


Figura 18: Correção à densidade de energia $\langle T^{00}(z) \rangle_1^B$ como função de z/a , em unidades de σ^2/a^8 , para $d = 3$ dimensões.

sem invariância translacional para renormalizar os infinitos da teoria é necessário introduzir não sómente contra-termos de volume ou *bulk* se não também contra-termos de superfícies [78, 79, 80, 81, 82].

Em conclusão, para evitar as divergências superficiais, é necessário introduzir contra-termos singulares para eliminar a divergência superficial da densidade de energia. Esse procedimento não será realizado aqui, nós referimos o leitor à referência [82] e nos concentraremos na discussão dos termos físicos globais que estão livres de ambigüedades. Análogamente, podemos aplicar este raciocínio à pressão do vázio. Note-se que a pressão do vázio assim como a densidade de energia do vázio agora dependem da distância entre as placas, z . Essa situação é diferente do caso livre. Segundo um procedimento análogo como o considerado para a densidade de energia, obtemos

$$\langle T^{zz}(z) \rangle_1 = \langle T^{zz}(z) \rangle_1^A + \langle T^{zz}(z) \rangle_1^B, \quad (125)$$

onde, utilizando os resultados derivados no apêndice, temos

$$\begin{aligned} \langle T^{zz}(z) \rangle_1^A &= -\frac{\sigma^2}{4\alpha^{2d+2}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^d \left[\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\right]^2 \zeta(-d) \left[(d+1)\zeta(-d) - K(z)\right], \\ \langle T^{zz}(z) \rangle_1^B &= \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{\alpha^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} M_B(l, l') \tilde{R}_{l, l'}(z). \end{aligned} \quad (126)$$

Ambos os termos apresentam um comportamento similar ao mostrado nas figuras Fig. (17) e Fig. (18). Em particular temos uma diferencia importante com o caso sem flutuações estocásticas, quer dizer, o fato que as flutuações do cone de luz introduzem uma correção à pressão do vázio que depende da distância as placas, z . Entretanto, como discutindo anteriormente, este comportamento não será considerado. Na próxima Seção vamos apresentar os termos globais que dam origem às correções do efeito Casimir devido às flutuações estocásticas do cone de luz.

3.4.2 Termos Globais de Casimir

Agora vamos focarnos nos termos globais (físicos) que contribuem ao efeito Casimir. Desconsiderando os termos locais da Eq. (124), como discutido previamente, temos que a contribuição à energia de Casimir por unidade de área das placas é dado por

$$u_1 = -\frac{2\sigma^2}{\alpha^{2d+1}(4\pi)^{d+1}} \left[\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\zeta(d+1)\right]^2. \quad (127)$$

Para mais detalhes deste cálculo referimos o leitor aos Apêndices (B, C). Note-se que para o caso de $d = 3$ dimensões espaciais, a densidade de energia por unidade de área é proporcional a α^{-7} , enquanto a densidade de energia por unidade de volume é proporcional a α^{-8}

(see Eq. (124)). Também um incremento na pressão do vazio sobre as placas devido às flutuações estocásticas é obtido. Denotando a coreeção como p_1 , esta contribuição será dada por um termo global em $\langle T^{zz}(z) \rangle_1$, ver Eq. (126). Então, temos que a contribuição da estocasticidade à pressão do vácuo, *força de Casimir*, sobre as placas é dada por

$$p_1 = -\frac{\sigma^2 (d+1)}{a^{2d+2} (4\pi)^{d+1}} \left[\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1) \right]^2. \quad (128)$$

Como pode-se ver da expressão acima p_1 é claramente negativa. Assim as flutuações estocásticas no limite de ruído fraco induzem pequenos incrementos na atração entre as placas.

Parte II

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

4.1 CONCLUSÕES

Um dos principais resultados que obtivemos nessa tese é a geração de uma auto-interação pelas flutuações estocásticas no campo quântico. Após realizar as médias sobre as variáveis estocásticas obtemos uma auto-interação, sobre a teoria originalmente livre. Este resultado nos leva a uma mudança nas funções de Green e portanto a mudanças nas propriedades do campo frente a diferentes fenômenos. Algo interessante da auto-interação gerada pelo ruído é que é qualitativamente similar ao acoplamento $\lambda\phi^4$. A diferença com esta teoria é que, no nosso caso, a “constante de acoplamento” é dependente das frequências da transformada de Fourier do campo escalar nos gráficos de Feynman. Como vimos no primeiro capítulo, esta auto-interação pode ser regularizada e renormalizada pelos métodos usuais da teoria quântica de campos. Portanto, tendo em mãos essa descrição perturbativa é possível calcularmos as correções a 1-loop na funções de Green de dois-pontos e na função de Green de quatro-pontos.

No segundo capítulo temos analisamos o efeito das flutuações estocásticas do cone de luz no efeito Unruh-Davies. Utilizando as correções às funções de Green, devido as flutuações estocásticas, calculadas previamente, neste capítulo analisamos a resposta de um detector de Unruh-DeWitt uniformemente acelerado na presença do estado de vácuo do campo e considerando, ademais, flutuações estocásticas. Obtivemos nesse estudo que as flutuações estocásticas também proveêm de uma temperatura associada ao detector uniformemente acelerado, proporcional a sua aceleração. Isto quer dizer que as flutuações do cone de luz não invalidam o efeito Unruh-Davies. O efeito das flutuações no detector de Unruh-DeWitt é a mudança da função resposta do detector, corrigindo a taxa de transição térmica deste, sendo originalmente uma distribuição de Bose-Einstein, com uma distribuição térmica do tipo Fermi-Dirac. Assim, poderíamos dizer que as flutuações estocásticas do cone de luz, não invalidam o efeito de um observador acelerado perceber o estado de vácuo de Minkowski como um banho térmico, mas modifica sua taxa de transição gerando uma mistura de estatísticas. Um resultado importante a resaltar é o seguinte, se o detector Unruh-DeWitt se movimenta inercialmente (com velocidade uniforme) no vácuo de Minkowski, ele terá probabilidade nula de se excitar, podendo só realizar um decaimento espontâneo e sem perceber nenhum banho térmico. Este resultado é mantido

no caso das flutuações estocásticas.

Ao analisar o efeito Casimir e as propriedades mecânicas do vácuo na presença de estruturas macroscópicas, vemos que as correções estocásticas vão nos induzir um incremento na força de Casimir. Esta correção à força de Casimir é proporcional a σ^2/a^8 , sendo σ^2 a intensidade das correlações entre os ruídos. Este resultado apresenta uma forma funcional dependente da distância entre as placas, a , diferente ao encontrado no caso livre, onde a força de Casimir é proporcional a $1/a^4$. Neste estudo temos utilizado o método local das funções de Green para calcularmos os valores esperados no estado de vácuo das componentes do tensor energia-momento do campo. Nesta análise vemos que aparecem divergências superficiais tanto no caso livre como nas correções estocásticas. Considerando o tensor energia-momento conforme de acoplamento não-mínimo com a gravitação, temos que essas divergências podem ser eliminadas totalmente no caso do campo livre, e parcialmente no caso das correções estocásticas. Assim, para eliminarmos totalmente as divergências superficiais teremos que introduzir contra-termos de superfície no caso das flutuações estocásticas.

4.2 PERSPECTIVAS

Os resultados apresentados nesta tese podem ser generalizados de diversas formas. Se bem os resultados são interessantes e indicam características gerais dos fenômenos apresentados, as contas só tem sido realizadas a nível de um loop. Portanto possíveis correções radiativas podem melhorar e dar maiores detalhes sobre os efeitos das flutuações estocásticas. Assim, uma das possibilidades de generalizar nossos resultados é mediante um procedimento de resumação sobre certo tipo de gráficos de Feynman induzidos pelas flutuações estocásticas. Se for possível implementar esta resumação claramente obten-se resultados mais robustos. O critério para escolher os gráficos a considerar tem que partir de considerações físicas, Assim pois poderíamos utilizar argumentos ligados à física da matéria condensada e considerar somente gráficos *on-shell* com momentos sobre a “esfera de Fermi” ($\mathbf{p} = \sqrt{2mE_f}$) para ver o efeito da desordem. Esse critério limita os gráficos da função de Green de dois-pontos a gráficos do tipo “arco-íris” em sistemas não-relativista desordenados. É claro que no nosso caso não temos esfera de Fermi, mas poderíamos fazer a analogia considerando gráficos com momentos sobre o cone de luz onde o quadri-momento tenha norma (massa) nula ($p^\mu p_\mu = 0$).

Uma proposta interessante, dentro desta linha de pesquisa de estudar detectores de Unruh-DeWitt, seria de generalizarlos, onde se possa ter

correlações entre as partes do detector. Essas correlações podem fazer que partes do detector se encontrem emaranhadas gerando-se uma situação interessante para analisar as flutuações térmicas do vácuo percebidas pelo detector de Unruh-DeWitt. Assim, poderíamos ter que as flutuações do vácuo numa parte do detector induzam transições na outra, gerando-se um incremento na taxa de transição do detector como um todo e possibilitando, tal vez, a medição de tal espectro térmico. Como estudo complementar a essa situação complexa e interessante, pretendemos estudar esse mesmo sistema (detector) composto na presença de estruturas macroscópicas. A idéia é inserir objetos macroscópicos que quebrem a invariância translacional no espaço e analisar nessa situação processos radiativos associados ao sistema composto de dois detectores preparados em um estado emaranhado. Esta estrutura macroscópica pode ser por exemplo um espelho (placa) no qual o campo deva satisfazer certas condições de fronteira. Esperamos que esta situação apresente fenômenos interessantes ao se quebrar a invariância translacional. Na função resposta do detector teremos várias contribuições. A princípio, termos locais (devido ao posicionamento da placa) e conseqüentemente causais e termos não-locais (devido ao emaranhamento). Como o estado emaranhado é um estado não-local, esta mistura de opostos poderia gerar “fases” nas transições possíveis do detector. Um resultado interessante, ainda em estudo, é a possibilidade dos átomos que definem nosso detector estendido se emaranharem não só entre eles mas também com as imagens deles no espelho.

Outra possibilidade interessante é generalizar as contas realizadas das correções estocásticas ao efeito Casimir do campo escalar (bosônico) ao caso de um campo fermiônico. Esta situação adquire uma relevância prática se consideramos especificamente o caso de duas dimensões espaciais. Ao ser descrito o grafeno, no seu limite de baixos momentos, por uma equação relativista de um campo de Dirac em duas dimensões, temos que poderíamos descrever o efeito da desordem ou impurezas nas forças de Casimir dentro do grafeno. Os efeitos de desordem e impurezas no grafeno é um tema de interesse na pesquisa atual e assim o efeito Casimir no grafeno com desordem pode assumir relevância. Este trabalho está sendo abordado atualmente por nosso grupo de trabalho.

Parte III

APÊNDICES

FUNÇÕES DE GREEN DE DOIS E QUATRO PONTOS DO CAMPO ESCALAR COM FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

Começaremos pela expansão perturbativa da função de Green de dois-pontos mostrada na Eq. (16). Esta expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G &= G^{(0)} - G^{(0)} L_1 G^{(0)} + G^{(0)} L_1 G^{(0)} L_1 G^{(0)} + \dots \\ &= G^{(0)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (129)$$

onde $G^{(0)}$ é a função de Green livre e $\mathcal{G}^{(n)}$ é definida por

$$\mathcal{G}^{(n)} = (-1)^n \prod_{j=1}^n \left(L_1 G^{(0)} \right)^j. \quad (130)$$

Em termos de coordenadas espaço-tempo $x = (t, \mathbf{x})$, a Eq. (129) corresponde a

$$G(x, x') = \int dz_1 G^{(0)}(x - z_1) \left[\delta(z_1 - x') + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(z_1, x') \right], \quad (131)$$

e teremos que

$$\mathcal{G}^{(n)}(z_1, x') = (-1)^n \prod_{j=1}^n L_1(z_j) \int dz_{j+1} G^{(0)}(z_j, z_{j+1}). \quad (132)$$

Na Eq. (132) se tem implícita a condição $z_{n+1} = x'$ e não se realiza integração em z_{n+1} . Na figura Fig. (19) apresentamos uma representação gráfica de um termo genérico da equação Eq. (132).

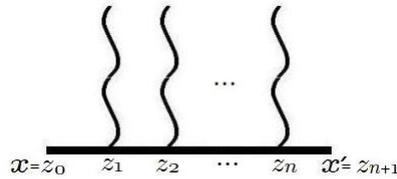


Figura 19: Termos característicos da expansão perturbativa da função de Green.

O operador estocástico $L_1(x)$ dado por

$$L_1(x) = L_1(t, \mathbf{x}) = -\mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \xi(x) m_0^2, \quad (133)$$

sendo $\mu(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x})$ as variáveis estocásticas. No espaço dos momentos o operador L_1 tem a forma

$$L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega^2 - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') m_0^2). \quad (134)$$

A função de Green livre $G^{(0)}(x, x')$ é dada pela expressão

$$G^{(0)}(x, x') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i\mathbf{k}(x-x')} G^{(0)}(\mathbf{k}), \quad (135)$$

onde

$$G^{(0)}(\mathbf{k}) = G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \Gamma_{\mathbf{k}}^{-1} = \frac{1}{\omega^2 - (\mathbf{k}^2 + m_0^2)}. \quad (136)$$

Devido a distribuição de probabilidades das flutuações estocásticas definidas em Eq. (4-5) temos para o operador estocástico L_1 a médias

$$\begin{aligned} \langle L_1(x) \rangle_{\mu\xi} &= 0, \\ \langle L_1(x)L_1(x') \rangle_{\mu\xi} &= \left(\sigma_\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \sigma_\xi^2 m_0^4 \right) \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (137)$$

Devido à gaussianidade das flutuações se tem que os valores médios de potências ímpares são nulos

$$\langle \mathcal{G}^{(2n+1)}(x, x') \rangle_{\mu\xi} = 0. \quad (138)$$

Por tanto a primeira correção à função de Green de dois-pontos, após realizar a médias nos ruídos, é dada por

$$G^{(1)}(x, x') = \int dz_1 G^{(0)}(x, z_1) \langle \mathcal{G}^{(2)}(z_1, x') \rangle_{\mu\xi}. \quad (139)$$

Fazendo $n = 2$ na Eq. (132) e realizando as médias estocásticas obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^{(2)}(z_1, x') \rangle_{\mu\xi} &= \int dz_2 \langle L_1(z_1)L_1(z_2) \rangle_{\mu\xi} \\ &\quad \times G^{(0)}(z_1, z_2)G^{(0)}(z_2, x'). \end{aligned} \quad (140)$$

Multiplicando isto por $G^{(0)}(x - z_1)$ e realizando a integração sobre z_1 , obtemos diretamente que a correção vem dada por

$$G^{(1)}(x, x') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i\mathbf{k}(x-x')} G^{(1)}(\mathbf{k}), \quad (141)$$

onde

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{k}) &= G^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) \\ &= -G^{(0)}(\omega, \mathbf{k})\Sigma(\omega, \mathbf{k})G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (142)$$

onde temos denotado como $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$ à auto-energia que nesta ordem de aproximação está definida por

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = -(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \alpha(\omega), \quad (143)$$

onde

$$\alpha(\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (144)$$

Agora consideraremos a função de Green de quatro-pontos do campo. Como a ação total é quadrática no campo a função de Green de quatro-pontos é a soma de produtos de funções de dois-pontos. O anterior é válido para o caso de configurações fixas dos ruídos. Após fazer as médias estocásticas veremos que se induz um tipo de auto-interação. Assim as médias estocásticas da função de Green de quatro-pontos é dada por

$$\begin{aligned} G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &+ \langle G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &+ \langle G(x_1, x_4)G(x_2, x_3) \rangle_{\mu\xi}. \end{aligned} \quad (145)$$

Nós estamos interessados nas partes irreduzíveis de uma partícula (1PI) da função de quatro-pontos. A contribuição 1PI do primeiro termo da Eq. (145) à função de Green de quatro-pontos a nível de árvore é mostrada na Fig. (20).

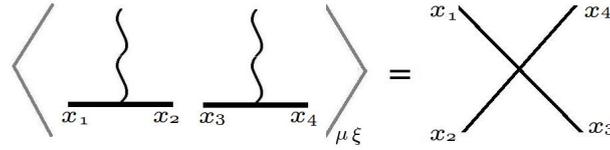


Figura 20: Função de Green de 4-pontos a nível de árvore induzida por médias nos ruídos.

Analisaremos a contribuição a nível de árvore do primeiro termo em Eq. (145) pois as contribuições dos outros termos podem ser obtidas como permutações deste termo

$$\begin{aligned} \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(0)} &= \int dz_1 \int dz_2 G^{(0)}(x_1, z_1)G^{(0)}(x_3, z_2) \\ &\times \langle \mathcal{G}^{(1)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(1)}(z_2, x_4) \rangle_{\mu\xi}. \end{aligned} \quad (146)$$

Fazendo $n = 1$ na Eq. (132) temos

$$\langle \mathcal{G}^{(1)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(1)}(z_2, x_4) \rangle_{\mu\xi} = \langle L_1(z_1)L_1(z_2) \rangle_{\mu\xi} G^{(0)}(z_1, x_2)G^{(0)}(z_2, x_4). \quad (147)$$

Utilizando o resultado da Eq. (137) e fazendo uma transformada de Fourier temos que a primeira correção à função de Green de quatro-

pontos a nível de árvore é

$$\begin{aligned}
 & \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(0)} \\
 &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_4 x_4)} \\
 & \quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4) (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & \quad \times \int dz_1 \int dz_2 e^{i(k_1 - k_2)z_1 + i(k_3 - k_4)z_2} \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2), \\
 &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4)} \\
 & \quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4) (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & \quad \times (2\pi)^{d+1} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (2\pi) \delta(\omega_3 + \omega_4). \quad (148)
 \end{aligned}$$

Na última equação temos feito $k_2 \rightarrow -k_2$ e $k_4 \rightarrow -k_4$, e temos utilizado a identidade $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)\delta(\omega_1 + \omega_2)\delta(\omega_3 + \omega_4) = \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)\delta(\omega_3 + \omega_4)$. As outras contribuições a nível de árvore da Eq. (145) podem ser obtidos da equação Eq. (148) com mudanças apropriadas das variáveis. Explicitamente a correção total da função de Green de quatro-pontos a nível de árvore $G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
 & \quad \times (2\pi)^{d+1} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4)} \\
 & \quad \times G_4^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (149)
 \end{aligned}$$

onde temos definido

$$\begin{aligned}
 G_4^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4) \\
 & \quad \times \Gamma_4^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (150)
 \end{aligned}$$

sendo o vértice próprio a nível de árvore definido por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (2\pi) \left[\delta(\omega_3 + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right. \\
 & \quad + \delta(\omega_2 + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & \quad \left. + \delta(\omega_2 + \omega_3) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right]. \quad (151)
 \end{aligned}$$

Agora calcularemos as correções a 1-loop à função de Green de quatro-pontos. Nos focaremos na média estocástica mostrada na Fig. (21) associada ao primeiro termo da Eq. (145).

Assim teremos uma primeira contribuição de 1-loop

$$\begin{aligned}
 \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(IA)} &= \int dz_1 \int dz_3 G^{(0)}(x_1, z_1)G^{(0)}(x_3, z_3) \\
 & \quad \times \langle \mathcal{G}^{(2)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(2)}(z_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}, \quad (152)
 \end{aligned}$$

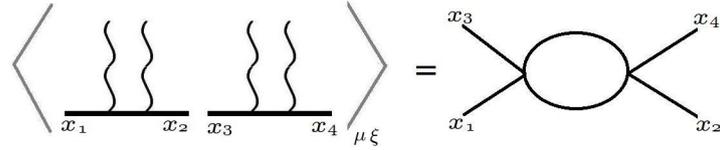


Figura 21: Correção de 1-loop de primeiro tipo $\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(I)}$ à função de Green de quatro-pontos.

e utilizando a Eq. (132) se tem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^{(2)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(2)}(z_3, x_4) \rangle_{\mu\xi} &= \int dz_2 \int dz_4 \langle L_1(z_1)L_1(z_2)L_1(z_3)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &\quad \times G^{(0)}(z_1, z_2)G^{(0)}(z_2, x_2) \\ &\quad \times G^{(0)}(z_3, z_4)G^{(0)}(z_4, x_4). \end{aligned} \quad (153)$$

Usando agora as correlações das variáveis estocásticas se tem

$$\begin{aligned} \langle L_1(z_1)L_1(z_2)L_1(z_3)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} &= \langle L_1(z_1)L_1(z_3) \rangle_{\mu\xi} \langle L_1(z_2)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} \\ &\quad + \langle L_1(z_1)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} \langle L_1(z_2)L_1(z_3) \rangle_{\mu\xi}. \end{aligned} \quad (154)$$

As médias $\langle L_1(z_1)L_1(z_2) \rangle_{\mu\xi}$ $\langle L_1(z_3)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi}$ não são consideradas acima pois não contribuem a ordem de 1-loop à função de quatro-pontos Assim teremos a primeira correção a Eq. (152):

$$\begin{aligned} &\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(IA)} \\ &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_6}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1x_1 - k_2x_2 + k_3x_3 - k_4x_4)} \\ &\quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k_5)G^{(0)}(k_6) \\ &\quad \times (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega_5^2 \omega_6^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\ &\quad \times \int dz_1 \cdots \int dz_4 e^{i(k_1 - k_5)z_1 + i(k_5 - k_2)z_2 + i(k_3 - k_6)z_3 + i(k_6 - k_4)z_4} \\ &\quad \times \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3)\delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_4) \\ &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_6}{(2\pi)^{d+1}} (2\pi)^{2d+4} e^{-i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)} \\ &\quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k_5)G^{(0)}(k_6) \\ &\quad \times (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega_5^2 \omega_6^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times \delta(k_2 + k_4 + k_5 + k_6)\delta(\omega_3 + \omega_4)\delta(\omega_2 + \omega_5). \end{aligned} \quad (155)$$

Uma segunda contribuição de 1-loop à equação Eq. (152) é

$$\begin{aligned}
 & \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(\text{IB})} \\
 &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_6}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1x_1 - k_2x_2 + k_3x_3 - k_4x_4)} \\
 & \quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k_5)G^{(0)}(k_6) \\
 & \quad \times (\sigma_\mu^2\omega_2^2\omega_6^2 + \sigma_\xi^2m_0^4) (\sigma_\mu^2\omega_4^2\omega_5^2 + \sigma_\xi^2m_0^4) \\
 & \quad \times \int dz_1 \cdots \int dz_4 e^{i(k_1-k_5)z_1 + i(k_5-k_2)z_2 + i(k_3-k_6)z_3 + i(k_6-k_4)z_4} \\
 & \quad \times \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3)\delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_4) \\
 &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_6}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)} \\
 & \quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k_5)G^{(0)}(k_6) \\
 & \quad \times (\sigma_\mu^2\omega_2^2\omega_6^2 + \sigma_\xi^2m_0^4) (\sigma_\mu^2\omega_4^2\omega_5^2 + \sigma_\xi^2m_0^4) \\
 & \quad \times (2\pi)^{d+1}\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)(2\pi)\delta(\omega_3 + \omega_4) \\
 & \quad \times (2\pi)^{d+1}\delta(k_2 + k_4 + k_5 + k_6)(2\pi)\delta(\omega_2 + \omega_5). \tag{156}
 \end{aligned}$$

Outro tipo de contrações que nos dão correções de 1-loop à função de quatro-pontos é mostrado na Fig. (22). Um exemplo de contribuições deste tipo é o seguinte termo que vem do primeiro termo na Eq. (145) e está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(\text{II})} &= \int dz_1 \int dz_2 G^{(0)}(x_1, z_1)G^{(0)}(x_3, z_2) \\
 & \quad \times \langle \mathcal{G}^{(1)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(3)}(z_2, x_4) \rangle_{\mu\xi}. \tag{157}
 \end{aligned}$$

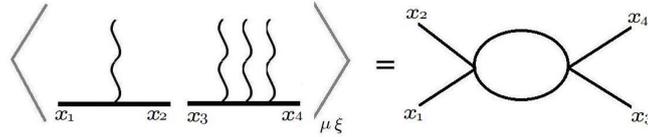


Figura 22: Correção de 1-loop de segundo tipo $\langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(\text{II})}$ à função de Green de quatro-pontos.

Utilizando a Eq. (132) temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{G}^{(1)}(z_1, x_2)\mathcal{G}^{(3)}(z_2, x_4) \rangle_{\mu\xi} &= \int dz_2 \int dz_4 \langle L_1(z_1)L_1(z_2)L_1(z_3)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} \\
 & \quad \times G^{(0)}(z_1, x_2)G^{(0)}(z_2, z_3) \\
 & \quad \times G^{(0)}(z_3, z_4)G^{(0)}(z_4, x_4). \tag{158}
 \end{aligned}$$

Devido a natureza gaussiana do ruído e como estamos procurando correções de 1-loop, podemos considerar que

$$\langle L_1(z_1)L_1(z_2)L_1(z_3)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi} = \langle L_1(z_1)L_1(z_3) \rangle_{\mu\xi} \langle L_1(z_2)L_1(z_4) \rangle_{\mu\xi}$$

As outras contrações da decomposição acima não aparecem porque não contribuem a correções de 1-loop à função de quatro-pontos. Assim teremos que

$$\begin{aligned}
& \langle G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \rangle_{\mu\xi}^{(II)} \\
&= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{dk}{(2\pi)^{d+1}} \frac{dk'}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4)} \\
&\quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k)G^{(0)}(k') \\
&\quad \times (\sigma_\mu^2\omega_2^2\omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2\omega^2\omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
&\quad \times \int dz_1 \cdots \int dz_4 e^{i(k_1-k_2)z_1+i(k_3-k)z_2+i(k-k')z_3+i(k'-k_4)z_4} \\
&\quad \times \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3)\delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_4) \\
&= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{dk}{(2\pi)^{d+1}} \frac{dk'}{(2\pi)^{d+1}} e^{-i(k_1x_1-k_2x_2+k_3x_3-k_4x_4)} \\
&\quad \times G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4)G^{(0)}(k)G^{(0)}(k') \\
&\quad \times (\sigma_\mu^2\omega_2^2\omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2\omega^2\omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
&\quad \times (2\pi)^{d+1}\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)(2\pi)\delta(\omega_1+\omega_2) \\
&\quad \times (2\pi)^{d+1}\delta(k_1+k_2+k+k')(2\pi)\delta(\omega+\omega'). \tag{159}
\end{aligned}$$

Na última equação temos utilizado propriedade da função delta assim como foi feito no calculo das Eq. (155-156). Ao igual que o caso a nível de árvore, todas as contribuições a ordem de 1-loop na Eq. (145) podem ser obtidas das Eq. (155-156) e Eq. (159) fazendo uma mudança de variáveis adequada. Por tanto, a correção total a nível de 1-loop à função de quatro-pontos $G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^{d+1}} \cdots \int \frac{dk_4}{(2\pi)^{d+1}} \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \\
&\quad \times (2\pi)^{d+1} e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4)} \\
&\quad \times G_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \tag{160}
\end{aligned}$$

onde sua transformada de Fourier é dada por

$$\begin{aligned}
G_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= G^{(0)}(k_1)G^{(0)}(k_2)G^{(0)}(k_3)G^{(0)}(k_4) \\
&\quad \times \Gamma_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \tag{161}
\end{aligned}$$

sendo o vértice próprio a nível de 1-loop dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \sum_{\text{perm}} \int \frac{dk}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{dk'}{(2\pi)^{d+1}} G^{(0)}(k)G^{(0)}(k') \\
&\quad \times \delta(k_2+k_4+k+k')\delta(\omega_3+\omega_4)\delta(\omega+\omega_2) \\
&\quad \times (\sigma_\mu^2\omega_2^2\omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2\omega^2\omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
&\quad \times (2\pi)^{d+3} \tag{162}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\
 &= (2\pi)^{d+3} \int \frac{dk}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{dk'}{(2\pi)^{d+1}} G^{(0)}(k) G^{(0)}(k') \\
 & \times \left[\delta(k_2 + k_4 + k + k') \delta(\omega_3 + \omega_4) \delta(\omega + \omega_2) (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right. \\
 & + \delta(k_2 + k_3 + k + k') \delta(\omega_3 + \omega_4) \delta(\omega + \omega_2) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega'^2 \omega_2^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_3 + k_4 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_4) \delta(\omega + \omega_3) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_2 + k_3 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_4) \delta(\omega + \omega_3) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega'^2 \omega_3^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_3 + k_4 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_2 + k_4 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega + \omega_4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_3^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega'^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_1 + k_2 + k + k') \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_2^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_1 + k_3 + k + k') \delta(\omega_1 + \omega_3) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_1 + k_4 + k + k') \delta(\omega_1 + \omega_4) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_4^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_3^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_2 + k_3 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_3^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_4^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & + \delta(k_2 + k_4 + k + k') \delta(\omega_2 + \omega_4) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_4^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_3^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \\
 & \left. + \delta(k_3 + k_4 + k + k') \delta(\omega_3 + \omega_4) \delta(\omega + \omega') (\sigma_\mu^2 \omega_4^2 \omega'^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (\sigma_\mu^2 \omega^2 \omega_2^2 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \right].
 \end{aligned}
 \tag{163}$$

CORREÇÕES REGULARIZADAS AO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Nesta seção discutiremos o procedimento utilizado para renormalizar analiticamente as correções ao tensor energia-momento induzidas pelas flutuações aleatórias na equação de campo. Começaremos com a expressão da função $H(y)$ definida no capítulo IV dada por

$$H(y) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}'_{\perp}}{(2\pi)^{d-1}} \omega'^2 \mathcal{G}_{\lambda'}(y, y), \quad (164)$$

como estamos trabalhando para um campo sem massa temos que $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2}$. Utilizando a função de Green unidimensional com condições de fronteira de Dirichlet

$$\mathcal{G}_{\lambda}(z, z') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right)}{\lambda^2 - \left(\frac{n\pi z}{a}\right)^2}, \quad (165)$$

obtemos que

$$H(y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_n^2 - i\epsilon}. \quad (166)$$

Na expressão acima temos definido a frequência $\bar{\omega}_n = \sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$ e realizaremos a integral no plano complexo das frequências utilizando o contorno de Feynman. Também realizando a integral sobre os momentos transversos \mathbf{k}_{\perp} obtemos para a função $H(y)$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned} H(y) &= \frac{2\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) n^d, \\ &= \frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\right) n^d, \\ &= H^A(y) + H^B(y), \end{aligned} \quad (167)$$

onde temos definido

$$\begin{aligned} H^A(y) &= \frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \zeta(-d), \\ H^B(y) &= -\frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} K(y). \end{aligned} \quad (168)$$

A função $K(y)$ tem sido definida previamente nas Eq. (89) e Eq. (95) e a constante \mathcal{N}_1 é dada por

$$\mathcal{N}_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right). \quad (169)$$

Assim obtemos que a correção à densidade de energia do vazio entre as placas é

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1 = \sigma^2 \int_0^a dy H(y) (I(y, z) + J(y, z)), \quad (170)$$

com as funções

$$\begin{aligned} I(y, z) &= \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 (\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2) \mathcal{G}_\lambda^2(y, z), \\ J(y, z) &= \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \omega^2 (\partial_z \mathcal{G}_\lambda(y, z))^2. \end{aligned} \quad (171)$$

Utilizando a Eq. (165) estas funções podem ser expressadas por

$$\begin{aligned} I(y, z) &= \frac{4}{a^2} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sin(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2 (\omega^2 + \mathbf{k}_\perp^2)}{(\omega^2 - \bar{\omega}_l^2 + i\epsilon)(\omega^2 - \bar{\omega}_{l'}^2 + i\epsilon)}, \\ J(y, z) &= \frac{4}{a^2} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \cos(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \cos(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times \left(\frac{ll'\pi^2}{a^2} \right) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{d-1}\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \bar{\omega}_l^2 + i\epsilon)(\omega^2 - \bar{\omega}_{l'}^2 + i\epsilon)} \end{aligned} \quad (172)$$

Em todas as expressões acima estamos utilizando o contorno de integração de Feynman para deslocar os polos nas integrais no plano complexo das frequências ω . Realizando estas integrais por meio do Teorema dos Resíduos e integrando nos momentos transversos [83, 84], obtemos

$$\begin{aligned} I(y, z) &= \frac{\mathcal{N}_2}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sin(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times \frac{l^{d+2} - l'^{d+2}}{l^2 - l'^2}, \\ J(y, z) &= \frac{\mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \cos(l\pi z/a) \sin(l\pi y/a) \cos(l'\pi z/a) \sin(l'\pi y/a) \\ &\quad \times (ll') \frac{l^d - l'^d}{l^2 - l'^2}, \end{aligned} \quad (173)$$

sendo as contantes definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 &= -2i \left(\frac{\pi}{4} \right)^{d/2} \left(\frac{d-4}{d+2} \right) \Gamma \left(-\frac{d}{2} \right), \\ \mathcal{N}_3 &= 2i \left(\frac{\pi}{4} \right)^{d/2} \Gamma \left(-\frac{d}{2} \right). \end{aligned} \quad (174)$$

Daqui podemos ver que

$$\mathcal{N}_2 = \left(\frac{4-d}{2+d} \right) \mathcal{N}_3. \quad (175)$$

Por tanto

$$I(y, z) + J(y, z) = \frac{\mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a) R_{l, l'}(z), \quad (176)$$

onde temos definido

$$R_{l, l'}(z) = \left\{ \frac{4-d}{2+d} \sin(l\pi z/a) \sin(l'\pi z/a) \left(\frac{l^{d+2} - l'^{d+2}}{l^2 - l'^2} \right) + \cos(l\pi z/a) \cos(l'\pi z/a) ll' \left(\frac{l^d - l'^d}{l^2 - l'^2} \right) \right\}. \quad (177)$$

Finalmente as correções à densidade de energia do vazio é

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(z) \rangle_1 &= \sigma^2 \int_0^a dy H(y) (I(y, z) + J(y, z)), \\ &= \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} M(l, l') R_{l, l'}(z). \end{aligned} \quad (178)$$

A integral dentro da expressão acima pode ser reescrita como a soma de dois termos

$$\begin{aligned} M(l, l') &= \int_0^a dy H(y) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a), \\ &= M_A(l, l') + M_B(l, l'). \end{aligned} \quad (179)$$

tos quais são definidos com a ajuda de Eq. (168) como

$$\begin{aligned} M_A(l, l') &= \frac{\mathcal{N}_1 \zeta(-d)}{a^{d+1}} \int_0^a dy \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a), \\ M_B(l, l') &= -\frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \int_0^a dy K(y) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a). \end{aligned} \quad (180)$$

Por tanto separamos

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1 = \langle T^{00}(z) \rangle_1^A + \langle T^{00}(z) \rangle_1^B, \quad (181)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(z) \rangle_1^A &= \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} M_A(l, l') R_{l, l'}(z), \\ \langle T^{00}(z) \rangle_1^B &= \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'=1}^{\infty} M_B(l, l') R_{l, l'}(z). \end{aligned} \quad (182)$$

Devido à ortogonalidade das funções seno, $\int_0^\pi d\alpha \sin(l\alpha) \sin(l'\alpha) = (\pi/2)\delta_{l, l'}$, encontramos que

$$M_A(l, l') = \frac{\mathcal{N}_1}{2a^d} \zeta(-d) \delta_{l, l'}. \quad (183)$$

Por tanto no primeiro termo da Eq. (182) a soma em l' pode ser feita sem dificuldades. Tomando o limite $l' \rightarrow l$ na expressão $R_{l,l'}(z)$ dentro d Eq. (177) obteremos termos que são proporcionais a l^d , e consecuentemente

$$\begin{aligned} \langle T^{00}(z) \rangle_1^A &= \frac{\sigma^2}{a^{2d+2}} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_3 \sum_{l=1}^{\infty} l^d (2 + (d-2) \cos(2l\pi z/a)), \\ &= \frac{\sigma^2}{a^{2d+2}} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_3 \{2\zeta(-d) + (d-2)K(z)\}. \end{aligned} \quad (184)$$

Integrando na coordenada entre as duas placas obteremos a densidade de energia por unidade de area transversal das placas $u_1 = \int_0^a dz \langle T^{00}(z) \rangle_1$. Da mesma maneira que no caso livre, a função $K(z)$ trará divergências superficiais que podem ser evadidas considerando o tensor energia-momento conforme. Considerando só o termo global da Eq. (184), e utilizando os valores de \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_3 temos

$$u_1^A = -\frac{\sigma^2}{8a^{2d+1}} \frac{1}{(4\pi)^{d-1}} \left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta(d+1) \right)^2. \quad (185)$$

Para o segundo termo na Eq. (181), graças à ortogonalidade das funções seno (as funções cos tem a mesma propriedade) é melhor primeiro fazer a integral no espaço entre as placas.

$$u_1^B = \int_0^a dz \langle T^{00}(z) \rangle_1^B = \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l,l'=1}^{\infty} M_B(l,l') \int_0^a dz R_{l,l'}(z) \quad (186)$$

Depois da integração em z é possível realizar a soma em l' . Tomando o limite $l \rightarrow l'$ on $R_{l,l'}$ obteremos termos proporcionais a l^d . Então, temos que $\sum_{l'} M_B(l,l') R_{l,l'} = a l^d M_B(l,l)$. Relembrando a definição da função $K(z)$, o calculo de $M_B(l,l)$ é direto

$$\begin{aligned} M_B(l,l) &= -\frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} n^d \int_0^a dy \cos(2\pi n y/a) \sin^2(l\pi y/a), \\ &= -\frac{\mathcal{N}_1}{2a^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} n^d \int_0^a dy \cos(2\pi n y/a) \left(1 - \cos(2l\pi y/a)\right), \\ &= \frac{\mathcal{N}_1}{2a^d} l^d. \end{aligned} \quad (187)$$

Por tanto, temos achado que o segundo termo da correção à densidade de energia é

$$u_1^B = -\frac{\sigma^2}{4a^{2d+1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{d+1} \left(\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\right)^2 \zeta(-2d). \quad (188)$$

Para a pressão do vazio podemos seguir um procedimento similar

$$\begin{aligned} \langle T^{zz}(z) \rangle_1 &= \sigma^2 \int_0^a dy H(y) (\tilde{I}(y,z) + J(y,z)), \\ &= \langle T^{zz}(z) \rangle_1^A + \langle T^{zz}(z) \rangle_1^B. \end{aligned} \quad (189)$$

Onde

$$\langle T^{zz}(z) \rangle_1^A = \frac{\sigma^2}{a^{d+2}} \mathcal{N}_3 \sum_{l,l'=1}^{\infty} M_{\Lambda}(l,l') \tilde{R}_{l,l'}(z), \quad (190)$$

e temos definido

$$\tilde{R}_{l,l'}(z) = \left\{ \sin(l\pi z/a) \sin(l'\pi z/a) \left(\frac{l^{d+2} - l'^{d+2}}{l^2 - l'^2} \right) + \cos(l\pi z/a) \cos(l'\pi z/a) ll' \left(\frac{l^d - l'^d}{l^2 - l'^2} \right) \right\}. \quad (191)$$

Segundo um procedimento inteiramente analogo ao mostrado

$$\langle T^{zz}(z) \rangle_1^A = -\frac{\sigma^2}{4a^{2d+2}} \left(\frac{\pi}{4} \right)^d \left(\Gamma \left(-\frac{d}{2} \right) \right)^2 \zeta(-d) \left\{ (d+1)\zeta(-d) - K(z) \right\}. \quad (192)$$

O outro termo da pressão é

$$\langle T^{zz}(z) \rangle_1^B = \frac{\sigma^2}{a^{d+2}} \mathcal{N}_3 \sum_{l,l'=1}^{\infty} M_B(l,l') \tilde{R}_{l,l'}(z). \quad (193)$$

O comportamento destes termos locais da pressão do vácuo é semelhante ao comportamento da parte local das correções à densidade de energia do vácuo. Estas contribuições locais serão analisadas com mais detalhe no próximo Apêndice C.

EFEITOS LOCAIS DAS CORREÇÕES ESTOCÁSTICAS AO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Nesta seção vamos analisar a dependencia da densidade de energia com a posição respeito das placas. Tínhamos que a correção a densidade de energia pode ser escrita por

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1 = \langle T^{00}(z) \rangle_1^A + \langle T^{00}(z) \rangle_1^B \quad (194)$$

onde a segunda parte é

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1^B = \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3}{a^{d+2}} \sum_{l, l'} M_B(l, l') R_{l, l'}(z) \quad (195)$$

sendo

$$M_B(l, l') = -\frac{\mathcal{N}_1}{a^{d+1}} \int_0^a dy K(y) \sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a) \quad (196)$$

e a função $K(y)$ esta definida por

$$K(y) = \sum_n n^d \cos(2n\pi y/a).$$

Para realizar a integral Eq. (196) vamos utilizar que

$$\sin(l\pi y/a) \sin(l'\pi y/a) = \frac{1}{2} (\cos(|l-l'|\pi z/a) - \cos((l+l')\pi z/a))$$

e devido a ortogonalidade das funções $\cos()$, temos que

$$M_B(l, l') = \frac{\mathcal{N}_1}{4a^d} \sum_n n^d (\delta_{2n, l+l'} - \delta_{2n, |l-l'|}). \quad (197)$$

Na Eq. (197) só teremos termos não nulos quando $2n = l + l'$ ou quando $2n = |l - l'|$, ou que se pode resumir em $2n = |l \pm l'|$. Isto restringira os valores de l e l' sob os quais será realizada a soma da Eq. (195). Sendo n um número natural, o resultado de $l \pm l'$ deve ser um número par. Assim teremos que l e l' tem que possuir a mesma paridade. Inserindo a Eq. (197) em Eq. (195) obtemos

$$\langle T^{00}(z) \rangle_1^B = \frac{\sigma^2 \mathcal{N}_3 \mathcal{N}_1}{a^{2d+2} 2^{d+2}} (U(z) + V(z)) \quad (198)$$

onde temos definido as funções

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{l, l'}^* (l + l')^d R_{l, l'}(z), \\ V(z) &= \sum_{l, l'}^* |l - l'|^d R_{l, l'}(z). \end{aligned} \quad (199)$$

O simbolo * nas somatorias da Eq. (199) denota que a soma esta restrita a valores tais que l e l' possuem a mesma paridade, quer dizer

$$\sum_{l,l'}^* = \sum_{l=2m, l'=2m'} + \sum_{l=2m+1, l'=2m'+1} \quad (200)$$

Utilizando a definição dada na Eq. (200) teremos que

$$U(z) = U_I(z) + U_{II}(z) \quad (201)$$

onde

$$\begin{aligned} U_I(z) &= 2^d \sum_{m,m'} (m+m')^d R_{2m,2m'}(z), \\ U_{II}(z) &= 2^d \sum_{m,m'} (m+m'+1)^d R_{2m+1,2m'+1}(z). \end{aligned} \quad (202)$$

Da definição da função $R_{l,l'}(z)$

$$\begin{aligned} R_{l,l'}(z) = & \left\{ \frac{4-d}{2+d} \sin(l\pi z/a) \sin(l'\pi z/a) \left(\frac{l^{d+2} - l'^{d+2}}{l^2 - l'^2} \right) \right. \\ & \left. + \cos(l\pi z/a) \cos(l'\pi z/a) l l' \left(\frac{l^d - l'^d}{l^2 - l'^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (203)$$

se pode mostrar imediatamente que

$$R_{2m,2m'}(z) = 2^d R_{m,m'}(2z) \quad (204)$$

Por tanto uma primeira contribuição a $U(z)$ na Eq. (201) se pode escrever como

$$U_I(z) = 2^{2d} \sum_{m,m'} (m+m')^d R_{m,m'}(2z) \quad (205)$$

Na suma anterior m e m' não possuem nenhuma restrição. Nesta expressão o binomio de Newton pode ser expandido e o cociente dos polinomios nas variaveis m e m' de $R_{m,m'}(2z)$ podem ser expandidos como soma de produtos de potencias de m e m' . Assim conseguiremos fatorar as somas duplas $\sum_{m,m'}$ na Eq. (205) em produtos do tipo $(\sum_m)(\sum_{m'})$. Realizando isso obtemos

$$\begin{aligned} U_I(z) = & 2^{2d} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-1)!}{k!(d-1-k)!} \\ & \left\{ \frac{4-d}{2+d} \sum_{i=1}^{d+2} \mathcal{F}(2d-k-i+1; 2z) \mathcal{F}(k+i-1; 2z) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^d \mathcal{G}(2d-k-j; 2z) \mathcal{G}(k+j; 2z) \right\} \end{aligned} \quad (206)$$

Na Eq. (206) temos definido as funções

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(m; z) &= \sum_l l^m \sin(l\pi z/a) \\ \mathcal{G}(m; z) &= \sum_l l^m \cos(l\pi z/a).\end{aligned}\quad (207)$$

Utilizando propriedades de Polilogaritmos e a funções zeta de Hurwitz se pode mostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(m; z) &= \frac{\Gamma(m+1)}{2(2\pi)^{m+1}} i^m (1 + (-1)^m) (\zeta(m+1, z/2a) + \zeta(m+1, 1 - z/2a)), \\ \mathcal{G}(m; z) &= \frac{\Gamma(m+1)}{2(2\pi)^{m+1}} i^{m+1} (1 + (-1)^{m+1}) (\zeta(m+1, z/2a) - \zeta(m+1, 1 - z/2a)).\end{aligned}\quad (208)$$

Das equações Eq. (208) vemos que $\mathcal{F}(2n+1; z) = \mathcal{G}(2n; z) = 0$ sendo n um número inteiro. Assim teremos que em Eq. (206) varios termos se anulam e avaliando explicitamente para $d = 3$ dimensões espaciais

$$\begin{aligned}U_I(z) &= \frac{128}{5} \left(4\mathcal{F}(2, 2z)\mathcal{F}(4, 2z) + \mathcal{F}(0, 2z)\mathcal{F}(6, 2z) \right. \\ &\quad \left. + 10(\mathcal{G}(3, 2z))^2 + 5\mathcal{G}(1, 2z)\mathcal{G}(5, 2z) \right).\end{aligned}\quad (209)$$

Da Eq. (201) temos que a outra contribuição à função $U(z)$ é dada por

$$U_{II}(z) = 2^d \sum_{m, m'} (m + m' + 1)^d R_{2m+1, 2m'+1}(z) \quad (210)$$

Se pode mostrar que para $d = 3$ dimensões espaciais temos

$$\begin{aligned}U_{II}(z) &= 2^3 \sum_{j=0}^2 \sum_{k''=0}^j C_j^2 C_{k''}^j \\ &\quad \left\{ \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^{5-i} \sum_{k'=0}^{i-1} C_k^{5-i} C_{k'}^{i-1} 2^{k+k'-1} \xi(j+k-k''; z) \xi(k'+k''; z) \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^{3-i} \sum_{k'=0}^{i-1} C_k^{3-i} C_{k'}^{i-1} 2^{k+k'-1} \left[4\rho(j-k-k''+1; z) \rho(k'+k''+1; z) \right. \\ &\quad + 2\rho(j-k-k''+1; z) \rho(k'+k''; z) + 2\rho(j-k-k''; z) \rho(k'+k''+1; z) \\ &\quad \left. \left. + \rho(j-k-k''; z) \rho(k'+k''; z) \right] \right\}\end{aligned}\quad (211)$$

onde C_k^n são os fatores combinatorios

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e temos definido as funções

$$\begin{aligned}\xi(n, z) &= \sum_m m^n \sin((2m+1)\pi z/a), \\ \rho(n, z) &= \sum_m m^n \cos((2m+1)\pi z/a).\end{aligned}\quad (212)$$

Não é difícil mostrar que a partir destas definições teremos que

$$\begin{aligned}\xi(n, z) &= \mathcal{G}(n, 2z) \sin(\pi z/a) + \mathcal{F}(n, 2z) \cos(\pi z/a), \\ \rho(n, z) &= \mathcal{G}(n, 2z) \cos(\pi z/a) - \mathcal{F}(n, 2z) \sin(\pi z/a).\end{aligned}\quad (213)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] "Selected papers on Quantum electrodynamics", ed. Julian Schwinger (Dover Publications, 1958).
- [2] G. Kallen, *Physica* **19**, 850 (1953).
- [3] W. Pauli, *Helv. Phys. Acta Suppl.* **4**, 69 (1956).
- [4] S. Deser, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 417 (1957).
- [5] N. D. Birrell and P. C. Davis, "Quantum Fields in Curved Space" (Cambridge University Press, New York, 1982).
- [6] L. Parker and D. Toms, "Quantum Field Theory in Curved Space-time: Quantized Fields and Gravity" (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [7] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).
- [8] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [9] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys* **43**, 199 (1975).
- [10] B. L. Hu and E. Verdaguer, *Living Rev. Rel.* **11**, 3 (2008).
- [11] L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **51**, 1692 (1995).
- [12] L. H. Ford and N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **54**, 2640 (1996).
- [13] L. H. Ford and N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **56**, 2226 (1997).
- [14] H. Yu and L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **60**, 084023 (1999).
- [15] R. T. Thompson and L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **78**, 024014 (2008).
- [16] R. T. Thompson and L. H. Ford, *Class. Quant. Grav.* **25**, 154006 (2008).
- [17] H. Yu, N. F. Svaiter and L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **80**, 124019 (2009).
- [18] B. L. Hu and K. Shiokawa, *Phys. Rev. D* **57**, 3474 (1998).
- [19] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [20] "Artificial Black Holes", edited by M. Novello, M. Visser, and G. Volovick (World Scientific, Singapore, 2002).
- [21] "Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology", edited by R. Schützhold and W.G. Unruh, Springer Lecture Notes in Physics Vol. 718 (Springer, Berlin Heidelberg, 2007).

- [22] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4643 (2000); L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **63**, 023611 (2001); C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **18**, 1137 (2001); P. O. Fedichev and U. R. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240407 (2003); V. A. De Lorenci, and R. Klippert, *Braz. J. Phys.* **34**, 1367 (2004); H. Nakano, Y. Kurita, K. Ogawa, and C. Moon Yoo, *Phys. Rev. D* **71**, 084006 (2005); R. Schützhold, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 190405 (2006); S. Wuster and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **76**, 013608 (2007).
- [23] G. Krein, G. Menezes and N. F. Svaiter, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 131301 (2010).
- [24] A. Ishimaru, “*Wave Propagation and Scattering in Random Media*” (Academic, New York, 1978).
- [25] H. Gzyl, “*Diffusion and Waves*” (Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002).
- [26] V. I. Klyatskin “*Dynamics of Stochastic Systems*” (Elsevier B. V., Amsterdam, 2005).
- [27] J. Pierre Fouque, J. Garnier, G. Papanicolaou and K. Solna, “*Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media*” (Springer Science and Business Media, New York, 2007).
- [28] D. Chowdhury, “*Spin Glasses and Other Frustrated Systems*” (World Scientific, Singapore, 1986).
- [29] M. Mézard, G. Parisi, and M.A. Virasoro, “*Spin Glass Theory and Beyond*” (World Scientific, Singapore, 1987)
- [30] G. Parisi, *Lett. Math. Phys.* **88**, 255 (2009), S. W. Edwards and P. W. Anderson, *J. Phys.* **F4**, 965 (1975), D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1972 (1975).
- [31] T. C. Lubensky, *Phys. Rev. B* **11**, 3573 (1975), G. Grinstein and A. Luther, *Phys. Rev. B* **13**, 1329 (1976), J. A. Hertz, *Phys. Rev. B* **18**, 4875 (1978), S. K. Ma and J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 589 (1978), D. Sherrington, *Phys. Rev. B* **22**, 5553 (1980), D. Sherrington, *J. Phys. C* **14**, L371 (1981).
- [32] Viktor Dotsenko, “*Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems*” (Cambridge University Press, New York, 2001).
- [33] F. A. E. Pirani, *Phys. Rev. D* **12**, 3224 (1970).
- [34] W. Rindler, *Am. J. Phys.* **34**, 1174 (1966).
- [35] S. A. Fulling, “*Scalar Quantum Field Theory in Closed Universe of Constante Curvature*” (Ph.D thesis, Princeton University, 1972).

- [36] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [37] P. C. W. Davies, *J. Phy. A* **8**, 609 (1975).
- [38] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [39] B. S. DeWitt, “*General Relativity: an Einstein Survey*” ed S. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, 1979).
- [40] B. L. Hu, A. Roura and E. Verdaguer, *Phys. Rev. D* **70**, 044002, (2004). B. L. Hu, A. Roura and E. Verdaguer, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 749 (2004).
- [41] T. Takahashi and J. Soda, *Class. Quantum Grav.* **27**, 175008 (2010).
- [42] W. Rindler, “*Introduction to Special Relativity*” (Oxford University Press, New York, 1982).
- [43] D. W. Sciama, P. Candelas and D. Deutsch, *Adv. Phys.* **30**, 327 (1981).
- [44] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **35**, 904 (1930).
- [45] R. C. Tolman and P. Ehrenfest, *Phys. Rev.* **36**, 1791 (1930).
- [46] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **46**, 5267 (1992).
- [47] N. F. Svaiter, L. H. Ford and M. L. Lyra, *Phys. Rev. A* **49**, 1378 (1994).
- [48] L. Crispino, A. Higushi and G. Matsas, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 787 (2008).
- [49] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 505 (1984).
- [50] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1 (1986).
- [51] W. Unruh, *Phys. Rev. D* **34**, 1222 (1986).
- [52] H. B. G. Casimir and D. Polder, *Phys. Rev. D* **73**, 360 (1948).
- [53] H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wekf.* **51**, 793 (1948).
- [54] H. B. G. Casimir, *Physica* **19**, 846 (1956).
- [55] T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **174**, 1764 (1968).
- [56] B. Davies, *J. Math. Phys.* **13**, 1324 (1972).
- [57] R. Balian and B. Duplantier, *Ann. Phys. (N. Y.)* **112**, 165 (1978).
- [58] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 87 (1986).
- [59] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, “*The Casimir Effect and Its Applications*” (Oxford Science Publications, Great Britain, 1997).

- [60] M. Bordag (ed), *"The Casimir effect 50 years later"*, (Leipzig, Germany, 1998).
- [61] K. A. Milton, *"The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy"* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [62] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *Phys. Rep.* **353**, 1 (2001)
- [63] Brown L S and Maclay G J 1969 *Phys. Rev.* **184** 1272
 Bender C M and Hays P 1976 *Phys. Rev.* **D14** 2622
 Deutsch D and Candelas P 1979 *Phys. Rev.* **D20** 3063
 Candelas P 1980 *Phys. Rev.* **D21** 2185
- [64] Fulling S A 1989 *"Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-time"* (Great Britain: Cambridge University Press)
- [65] Ford L H and Svaiter N F 2009 *Jour. Phys.* **161** 012034
- [66] Ford L H and Svaiter N F 2009 *Phys. Rev.* **D80** 065034
- [67] Schiefele J and Henkel C 2009 *J. Phys.* **A42** 045401
- [68] Barash Y S and Ginzburg V L 1975 *Sov. Phys. Usp.* **18** 305
- [69] Kupiszewska D and Mostowski J 1990 *Phys. Rev.* **A41** 4636
- [70] Van Enk S J 1995 *Jour. Mod. Opt.* **42** 321
- [71] Dean D S, Horgan R R, Naji A and Podgornik R 2009 *Phys. Rev.* **A79** 040101
- [72] M. J. Stephen *Phys. Rev.* **B37** 1 (1988).
- [73] Ford L H, de Lorenci V A, Menezes G and Svaiter N F 2013 *Annals Phys.* **329** 80
- [74] A. Edery, *J. Math. Phys.* **44**, 599 (2003).
- [75] C. G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **59**, 42 (1970).
- [76] D. Deutsch and P. Candelas, *Phys. Rev. D* **20**, 3063 (1979).
- [77] A. Romeo and A. A. Saharian, *J. Phys.* **A35**, 1297 (2002).
- [78] K. Symansik, *Nucl. Phys.* **B 190**, 1 (1980).
- [79] C. D. Fosco and N. F. Svaiter, *J. Math Phys* **42**, 5185 (2001).
- [80] M. Caicedo and N. F. Svaiter, *J. Math* **45**, 179 (2004).
- [81] N. F. Svaiter, *J. Math Phys* **45**, 4524 (2004).
- [82] M. Aparicio Alcalde, G. F. Hidalgo and N. F. Svaiter, *J. Math* **47**, 052303 (2006).

- [83] Erdélyi A (ed)1953 "*Higher Transcendental Functions Vol. 1*" (New York: McGraw-Hill Book Company)
- [84] Abramowitz M and Stegun I A 1972 "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*" (New York: Dover)
- [85] Prudnikov A P, Brychkov Yu A and Marichev O I, "*Integrals and Series Vol. 1*" (London: Gordon and Breach Science Publishers)