

Testando Universos Inomogêneos com as Supernovas tipo Ia e as Oscilações Acústicas de Bárions

Cristofher Zuñiga Vargas

Orientador: Dr. Felipe Tovar Falciano

Tese de Doutorado em física

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 2016

Testando Universos Inomogêneos com as Supernovas tipo Ia e as Oscilações Acústicas de Bárions

Cristofher Zuñiga Vargas

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano (Orientador)
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Santiago E. Perez Bergliaffa
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl
Universidade do Federal do Espirito Santo

Prof. Dr. Martin Makler
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

“A natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”.

Richard Feynmann.

Agradecimentos

Ao finalizar um trabalho, tão árduo e cheio de dificuldades, como a elaboração de uma tese de doutorado, é inevitável não sentir um egocentrismo (muito humano por certo) que culmina concentrando a maior parte do mérito no aporte realizado. Contudo, a análise objetiva imediatamente mostra que a magnitude desse aporte tivesse sido impossível sem a participação de pessoas e instituições que facilitaram as coisas para que o desenvolvimento deste trabalho atinga um final feliz. Por isso, é pra mim um enorme prazer utilizar este pequeno espaço para expressar meus mais sinceros agradecimentos.

A primeira pessoa quem devo agradecer (sem dúvida alguma) é o meu orientador, Dr. Felipe Tovar, que sem sua ajuda, orientação e paciência seria praticamente impossível concluir este trabalho. Pela confiança e amizade brindada durante os quatro anos de doutorado, muito obrigado Felipe.

Gostaria também agradecer aos pesquisadores do CBPF, em especial a todos do ICRA, que colaboraram de alguma ou outra forma na minha formação acadêmica. Aos pós-graduandos do CBPF, que não me atrevo nomear a todos por medo de esquecer alguém. Aos integrantes do nosso pequeno grupo de pesquisa (os *pollos mojados*), criado para discussões sobre Relatividade Geral e Cosmologia, Robin, Arthur e Guilherme. Aos meus colegas de sala, Laishh, Luís Rodolfo, Felipe, Luiz Filipe, Erick e Matteus por me permitir fazer parte desse pequeno espaço de trabalho tão agradável. Aos meus amigos *latinos*, Ubaldo, Adrián, Ury, Edher, Miguel, Ricardo, Martín e Victor, pela força e bons conselhos. Ao meu grande amigo e *hermano*, Habib, pela companhia e camaradagem brindada durante todo esse tempo de convivência. À todos vocês, obrigado por fazer da minha estadia, no Rio de Janeiro, tão agradável.

Não poderia deixar de agradecer também à banca examinadora, Dr. Winfried Zimdhal, Dr. Santiago Perez, Dr. Martin Makler, Dr. Sérgio Duarte e Dr. Ribamar Reis, pelos interessantes aportes e correções neste trabalho.

Quero dar também um agradecimento muito especial aos meus pais, Justino e Agueda, por todo o apoio emocional que, apesar da distância, sempre me fizeram sentir de perto. À minha amada, *chata* e melhor amiga, Ana Célia, pela companhia e compreensão em todo momento, especialmente na etapa final do doutorado.

Finalmente, gostaria de agradecer ao CNPq pelo custeio da minha bolsa de doutorado.

Cristofher Zuñiga Vargas
Rio de Janeiro, junho de 2016.

Resumo

Com o objetivo de descrever modelos cosmológicos inhomogêneos, usamos a solução esféricamente simétrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB). Estes modelos são categorizados em duas subclasses: de Big Bang não simultâneo e de Big Bang simultâneo. Ressaltamos a importância destes modelos em conseguir reproduzir a relação distância-luminosidade-redshift do modelo Λ CDM sem a adição *ad hoc* de uma constante cosmológica. No contexto dos modelos de Big Bang não simultâneo, consideramos dois modelos para valores positivos e negativos da derivada da função Big Bang, $t'_B(r)$. Enquanto nos modelos de Big Bang simultâneo consideramos três perfis de matéria que representam vazios locais. Discutimos explicitamente os modelos de Big Bang inhomogêneo com parcial sucesso, contudo também apresentam perigos potenciais na sua aplicabilidade ao universo real. Além disso confirmamos que as medições do desvio temporal do redshift são uma boa ferramenta para discriminar os modelos inhomogêneos com o modelo padrão Λ CDM.

A amostra JLA (Joint Light-curve Analysis) é ajustada com os modelos de Big Bang não simultâneo, enquanto para os modelos de Big Bang simultâneo, acrescentamos a análise BAO (Baryon Acoustic Oscillations) de modo a restringir o espaço de parâmetros do modelo. Nós realizamos uma calibração minuciosa das supernovas com uma dinâmica apropriada de fundo inhomogêneo. Além disso, usamos duas abordagens para a estimação de parâmetros, a saber, a aproximação tradicional χ^2 e a função de verossimilhança. Os modelos inhomogêneos são um claro exemplo de que estas duas abordagens não são equivalentes. Finalmente fazemos uma comparação de modelos com os critérios de informação AIC (Akaike Information Criterion) e BIC (Bayesian Information Criterion), a partir da qual obtemos que o modelo Λ CDM é claramente superior aos modelos de LTB.

Palavras-chave: cosmologia, inhomogeneidades, supernovas.

Abstract

In order to describe inhomogeneous cosmological models, we use the Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) spherically symmetric solution. These models are categorized into two subclasses: non-simultaneous Big Bang and simultaneous Big Bang. We emphasize the importance of these models to reproduce the luminosity distance-redshift relation of the Λ CDM model without the *ad hoc* addition of a cosmological constant. In the context of non-simultaneous Big Bang models, we consider two models for positive and negative values of the derivative of Big Bang function, $t'_B(r)$. While for the simultaneous Big Bang models we consider three density profiles that represent local voids. We discuss explicitly inhomogeneous Big Bang toy models with a partial success, but also potential pitfalls on the applicability to the real Universe. In addition we confirmed that the redshift drift measurements are a good tool to discriminate the inhomogeneous models with the standard Λ CDM model.

The JLA (Joint Light-curve Analysis) sample is fitted with the non-simultaneous Big Bang models, while for the simultaneous Big Bang models we add the BAO (Baryon Acoustic Oscillations) analysis in order to constrain the model space parameters. We perform a careful calibration of supernovae for appropriate inhomogeneous background dynamics. In addition we use two parameter estimation approaches, namely the traditional χ^2 approximation and the Likelihood function. The inhomogeneous models are a clear example that these two approaches are not equivalent. Finally we make a model comparison with the information criteria: AIC (Akaike information Criterion) and BIC (Bayesian Information Criterion) and find that the Λ CDM model is clearly superior to the LTB models.

Keywords: cosmology, inhomogeneity, supernovae.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Os Fundamentos da Cosmologia Moderna	5
2.1 O princípio cosmológico	5
2.2 O modelo cosmológico padrão Λ CDM	6
2.2.1 A radiação	11
2.2.2 A matéria	12
2.2.3 A energia escura	14
2.3 As distâncias cósmicas	15
2.4 Os problemas do modelo Λ CDM	19
2.4.1 O problema da constante cosmológica	19
2.4.2 O problema da coincidência cósmica	20
3 Soluções Exatas das Equações de Campo de Einstein	22
3.1 O modelo de Lemaître-Tolman-Bondi	22
3.2 A propagação da Luz nos modelos de Lemaître-Tolman-Bondi	27
3.3 Modelos com Big Bang não simultâneo	29
3.3.1 O caso com $t'_B < 0$	32
3.3.2 O caso com $t'_B > 0$	34
3.3.3 A idade do universo inomogêneo	38
3.3.4 O cruzamento de camadas (Shell crossing)	40
3.3.5 O deslocamento para o azul (Blueshift)	44
3.3.6 A região passada do cone de luz e o horizonte aparente	46
3.3.7 O desvio do Redshift (Redshift Drift) no LTB	48
3.4 Modelos com Big Bang simultâneo	52

3.4.1	Os perfis dos vazios locais	53
3.4.2	O parâmetro de desaceleração	56
3.4.3	O desvio do redshift nos modelos dos vazios locais de LTB	59
3.4.4	Cruzamento de camadas nos modelos dos vazios locais de LTB?	60
3.4.5	As Oscilações Acústicas de Bárions nos modelos de LTB	61
4	Observações cosmológicas	68
4.1	Indicadores de distâncias, as velas padrões	68
4.2	Supernovas tipo Ia	69
4.2.1	Padronizando as velas	70
4.2.2	SNIa em baixos redshifts	70
4.2.3	SNIa em altos redshifts	71
4.2.4	Erros sistemáticos	73
4.3	A amostra JLA	74
4.4	A amostra BAO	80
5	Resultados	83
5.1	Resultados para o modelo Λ CDM	83
5.2	Resultados para os modelos de Big Bang não simultâneo	86
5.3	Resultados para os modelos de Big Bang simultâneo	90
5.4	Comparação de modelos	98
6	Conclusões	101
A	Métodos estatísticos em Cosmologia	104
B	O Fator de Bayes	108
	Referências Bibliográficas	110

Lista de Figuras

2.1	A distância de luminosidade (esquerda), distância de diâmetro angular (centro) e o módulo de distância (direita), para os modelos de Λ CDM plano, de Einstein de Sitter ($\Omega_M = 1$) e de FLRW aberto ($\Omega_K > 0$ e $\Lambda = 0$)	18
2.2	A coincidência das densidades de matéria e energia escura no redshift $z \approx 0.3$	20
3.1	A densidade de matéria para o tempo presente com diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo o parâmetro r_c .	34
3.2	A densidade de matéria para o tempo presente com diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo r_c .	35
3.3	Parâmetros de Hubble radial, transversal e a média geométrica para os modelos com $t'_B(r) < 0$ (lado esquerdo) e $t'_B(r) > 0$ (lado direito).	36
3.4	Comparação dos raios geodésicos dos modelos de Einstein-de Sitter, Λ CDM, $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$. As curvas para o modelo Λ CDM e para o modelo $t'_B(r) < 0$ são quase indistinguíveis.	37
3.5	Propagação da luz para os modelos $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$ comparados com a propagação da luz nos modelos de Einstein-de Sitter e Λ CDM. As curvas para o modelo Λ CDM e para o modelo $t'_B(r) < 0$ são quase indistinguíveis.	37
3.6	Idade do universo $t_0 - t_i(r)$ no modelo $t'_B(r) < 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc obtidos na nossa análise estatística.	40
3.7	Idade do universo $t_0 - t_i(r)$ no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.243$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc obtidos na nossa análise estatística.	41
3.8	Raio geodésico do modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc. As linhas verdes representam as linhas do mundo para diferentes valores de $r_j = \text{constante}$ em $X(t, r_j)$.	42
3.9	Comparação de $\frac{t_{sc}(r)}{t_0}$ e $\frac{t_B(r)}{t_0}$ no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.287$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc.	42

3.10 Cruzamento de camadas no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.287$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc.	43
3.11 Comportamento da equação (3.87) no modelo $t'_B(r) < 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc.	45
3.12 O desvio do redshift para os modelos de Big Bang não simultâneo com seus respectivos parâmetros de melhor ajuste, comparados com o modelo Λ CDM plano ($\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$).	53
3.13 A distribuição de matéria hoje como uma função da coordenada radial. Nos três perfis fixamos $\Omega_{M,out} = 1$. Os outros parâmetros são considerados como livres que serão ajustados com os dados observacionais. Para plotar os perfis usamos $\Omega_{M,in} = 0.3$, $\Delta r = \nu = 0.5$ e $r_0 = 3$. A linha vertical de traço cinza indica o valor do raio do vazio, enquanto as linhas horizontais os valores das densidades de matéria.	54
3.14 Os índices de expansão hoje para os três modelos: o transversal $H_{\perp 0}(r)$, o radial $H_{\parallel 0}(r)$ e a média geométrica $\bar{H}_{LTB}(t_0, r)$. Os parâmetros usados para plotar os três perfis foram $\Omega_{M,out} = 1$, $\Delta r = \nu = 0.5$, $\Omega_{M,in} = 0.3$ e $r_0 = 3$	57
3.15 Os parâmetros de desaceleração radial e transversal com função de r para diferentes tempos. A linha vertical tracejada marca o tamanho típico do vazio r_0 . Note que, próximo de t_0 todas as curvas são positivas, indicando universos desacelerados hoje.	58
3.16 Parâmetro de desaceleração efetivo para os 3 modelos comparados com o modelo Λ CDM plano e o Universo de Einstein-de Sitter.	59
3.17 O desvio do redshift para os 3 modelos de vazios comparados com o modelo Λ CDM plano.	60
3.18 Raios geodésicos para os 3 modelos de vazios, mostrando a ausência da singularidade shell crossing.	62
4.1 Curvas de luz de SNIa nas proximidades antes (esquerda) e depois (direita) da correção (4.1). (Figura tomada do site: http://www-supernova.lbl.gov).	71
4.2 Diagrama de Hubble publicado pelo SCP [4] junto com as SNIa em baixos redshift do catálogo do telescópio Calán/Tololo. Note que a magnitude aparente efetiva m_B inclui as correções nas curvas de luz da relação largura-luminosidade. As curvas sólidas são as previsões teóricas do m_B para um número de modelos cosmológicos sem constante cosmológica ($(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 0)$). As curvas tracejadas correspondem aos modelos cosmológicos planos ($(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 1), (0.5, 0.5), (1, 0)$ e $(1.5, -0.5)$), mostrando a evidência da expansão acelerada.	72

4.3	Diagrama de Hubble do catálogo JLA calibrado com o modelo Λ CDM plano. Os parâmetros de ruído são fixados em seus valores de melhor ajuste.	78
4.4	O conjunto de dados BAO.	82
5.1	Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 4 parâmetros das SNIa (α , β , M_B^1 e Δ_M) mais o parâmetro Ω_M do modelo Λ CDM plano na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na função verossimilhança (curvas vermelhas contínuas), respectivamente.	84
5.2	Regiões de confiança, em 1σ , 2σ e 3σ , no espaço dos parâmetros (Ω_M , Ω_Λ) para o modelo Λ CDM plano na aproximação χ^2 (lado esquerdo) e na função verossimilhança (lado direito), respectivamente.	85
5.3	PDF do parâmetro σ_{int} na aproximação da verossimilhança com a amostra JLA (lado esquerdo) e a combinação JLA+BAO (lado direito) para o modelo Λ CDM plano.	86
5.4	Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) < 0$ na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na aproximação da função verossimilhança (curvas vermelhas contínuas), respectivamente.	88
5.5	Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) > 0$ na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na aproximação da função verossimilhança (curvas vermelhas), respectivamente.	89
5.6	O PDF do parâmetro σ_{int} para o modelo $t'_B(r) < 0$ (esquerda) e o modelo $t'_B(r) > 0$ (direita). A linha vermelha tracejada representa os valores do σ_{int} obtidos iterativamente na aproximação tradicional χ^2 .	90
5.7	Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo CGBH.	93
5.8	Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo do tipo Gaussiano.	94
5.9	Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo $C\nu$ -ln2.	95
5.10	Os PDFs para σ_{int} na aproximação da função verossimilhança para os modelos CGBH (lado esquerdo), Gaussiano (centro) e $C\nu$ -ln2 (lado direito) com a amostra JLA. A linha vermelha indica os valores obtidos na aproximação χ^2 .	96

- 5.11 Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo CGBH na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO. 96
- 5.12 Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo Gaussiano na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO. 97
- 5.13 Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo $C\nu$ -ln2 na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO. 97
- 5.14 Os PDFs para σ_{int} na aproximação da função verossimilhança para os modelos CGBH (lado esquerdo), Gaussiano (centro) e $C\nu$ -ln2 (lado direito) com a amostra combinada JLA+BAO. A linha vermelha indica os valores obtidos na aproximação χ^2 98

Lista de Tabelas

4.1	O catálogo BAO resumido.	81
5.1	Valores de melhor ajuste dos parâmetros das SNIa (α , β , M_B^1 e Δ_M) e do modelo Λ CDM nas aproximações χ^2 e a verossimilhança, para a amostra JLA, BAO e a combinação JLA+BAO.	85
5.2	Os parâmetros de melhor ajuste para o modelo $t'_B(r) < 0$ nas aproximações χ^2 e verossimilhança na amostra JLA.	86
5.3	Os parâmetros de melhor ajuste para o modelo $t'_B(r) > 0$ nas aproximações χ^2 e verossimilhança na amostra JLA.	87
5.4	Parâmetros de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo CGBH nas duas aproximações χ^2 e verossimilhança.	91
5.5	Valores de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo Gaussiano nas aproximações χ^2 e verossimilhança.	91
5.6	Parâmetros de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo $C\nu$ -ln2 nas duas aproximações χ^2 e verossimilhança.	91
5.7	O mínimo da função Likelihood para todos os modelos.	99
5.8	Comparação do critério de informação para todos os modelos usando os dados JLA e JLA+BAO.	100
5.9	Fator de Bayes para JLA e JLA+BAO, considerando os modelos Λ CDM, Gaussiano, CGBH, $C\nu$ -ln2, $t'_B(r) < 0$ e $t'_B(r) > 0$, respectivamente como os modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	100
A.1	$\Delta\chi^2$ como função dos graus de liberdade	106
A.2	Valores $\Delta_{AIC,i}$ para dar suporte empírico dos modelos em base ao melhor modelo.	107
B.1	Evidências contra o j -ésimo modelo, sendo i o melhor modelo.	109

Capítulo 1

Introdução

A maioria das pesquisas em cosmologia moderna está baseada no princípio cosmológico, segundo o qual o nosso universo é homogêneo e isotrópico sobre escalas suficientemente grandes [1, 2]. Essas pesquisas culminam no modelo Λ CDM que até agora tem recebido o status de modelo padrão. O modelo Λ CDM é extremamente bem sucedido em reproduzir uma ampla gama de observações, tais como a relação distância luminosidade-desvio para o vermelho (redshift) das supernovas tipo Ia (SNIa) [3, 4], a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) [5] e a estrutura em larga escala do universo [6, 7, 8, 9]. Essas observações nos levam a considerar, no contexto do modelo Λ CDM, que o universo na atualidade está acelerando. Até agora não existem modelos alternativos capazes de concorrer com o modelo padrão, no entanto, este último apresenta tensões importantes como as anomalias angulares sobre grandes escalas na CMB [10]. Por outro lado, o seu status não é totalmente satisfatório, uma vez que depende da existência de um setor escuro que em sua maior parte é desconhecido e que usualmente é dividido em matéria escura e energia escura. Ambos ingredientes hipotéticos do modelo só se manifestam por meio de sua interação gravitacional. Embora existam bons argumentos para a existência da matéria escura, não tem sido reportada, até agora, nenhuma detecção direta, apesar dos enormes esforços em ambiciosos projetos que estão em andamento. A energia escura parece ser ainda mais evasiva. No modelo padrão, a energia escura é representada por uma constante cosmológica cuja origem tem sido um assunto de debate há décadas. Por outro lado, existem candidatos teóricos da energia escura tais como os fluidos da quintessência [11], da K-essência [12] e do Gás de Chaplygin [13] apenas para citar alguns. Há também a possibilidade de reproduzir a energia escura através das modificações na interação gravitacional. Nestes cenários a Relatividade Geral é modificada pelas teorias de tipo $f(R)$ [14], Galileo DBI (Dirac-Born-Infeld) [15] ou pela cosmologia do mundo-brana [16] que produzem uma expansão acelerada do universo primordial ou tardio.

Geralmente, as inomogeneidades observadas no universo são consideradas como o resultado de pequenas perturbações iniciais, sobre um fundo homogêneo, que cresceram pela instabilidade gravitacional para depois entrar em um regime não-linear. Em princípio, do ponto de vista teórico, não está claro o que ou qual é realmente a escala de homogeneidade, isto é, a distância em que a suposição de homogeneidade é (aproximadamente) válida. Contudo, podemos duvidar se uma solução homogênea é um ponto de partida adequado para descrever as estruturas inomogêneas e altamente não-lineares do universo.

Por outro lado, se abirmos mão do Princípio Copernicano, podemos construir modelos cosmológicos inomogêneos que possam suprimir a necessidade da introdução de uma energia escura [17, 18, 19, 20]. A validade desta componente exótica é baseada na indeterminação dos modelos de Friedmann a partir dos dados observacionais. Com efeito, nossos dados vêm apenas da região passada de nosso cone de luz nulo e, portanto, há uma coleção de geometrias compatíveis com os dados observacionais. Com efeito, estes modelos são eficazes com inomogeneidades da ordem de algumas frações do raio de Hubble.

A solução cosmológica inomogênea mais simples, das equações de campo de Einstein é a solução esfericamente simétrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) [21, 22, 23]. A solução de LTB tem sido investigada intensamente do ponto de vista matemático [24]. Esta solução contém três funções arbitrárias da coordenada radial que representam uma liberdade de calibre e dois graus de liberdades físicos. Com uma escolha adequada dessas funções arbitrárias podemos recuperar a dinâmica dos universos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A solução de LTB é potencialmente aplicável desde que a contribuição da radiação no conteúdo energético do universo seja desprezível. Para estudar as flutuações da temperatura na CMB, se assume que o universo primordial (antes e até o instante do último espalhamento) é bem descrito por um modelo de FLRW.

Uma das funções arbitrárias, mencionadas na dinâmica de LTB, é a função de tempo de Big Bang inomogêneo. Esse tempo é o momento em que a singularidade Big Bang ocorre na dependência da coordenada radial. Tem sido demonstrado que, em princípio, nas bases da dinâmica de LTB, a relação de distância luminosidade-redshift do modelo Λ CDM pode ser reproduzida sem considerar uma constante cosmológica [25]. Isto ilustra que, uma propriedade geral das observações pode ser descrita incorporando os modelos esfericamente simétricos de LTB [26].

Nesta tese, estudamos os modelos cosmológicos inomogêneos, categorizados em duas subclasses: de Big Bang não simultâneo e de Big Bang simultâneo. No contexto dos modelos de Big Bang não simultâneo, estudamos a dinâmica de forma analítica, pelo menos até onde nos foi possível. Consideramos eles como simples modelos testes que servem para ilustrar as propriedades básicas da solução de LTB. Isso inclui tanto a sua utilidade potencial

na generalização das soluções homogêneas e suas limitações e características indesejáveis, tais como o aparecimento de singularidades no cruzamento de camadas (shell-crossing) e no deslocamento para o azul cosmológico (blueshift). Discutiremos várias características da configuração do tempo de Big Bang não simultâneo com curvatura espacial nula. Usando simples modelos que especifiquem o perfil da função Big Bang, $t_B(r)$, demonstraremos explicitamente que $t'_B(r) > 0$ ¹ corresponde a um modelo de vazio local, enquanto $t'_B(r) < 0$ implica uma corcova, isto é, uma região local de alta densidade. Assim, a nossa análise simplificada está limitada a modelos com densidade de um vazio ou de uma protuberância local. Abordagens alternativas usam um conjunto de espaços vazios como no queijo suíço [27]. As soluções analíticas, embora sejam casos idealizados, podem dar luz para a potencial utilidade dos modelos inomogêneos exatos e, ao mesmo tempo, para armadilhas que possam limitar a sua aplicabilidade imediata no universo real.

No contexto dos modelos com Big Bang simultâneos, consideramos a dinâmica da expansão acelerada do universo, como sendo, atribuída à posição do observador no centro de um grande vazio local. Assim, descrevemos três perfis que modelam regiões inomogêneas de baixa densidade perto do observador e que, para largas escalas, se aproximam assintoticamente para um universo de Einstein-de Sitter.

O desafio é verificar se todas as outras observações, que atualmente reproduzem o modelo Λ CDM, podem ser descritas adequadamente nas bases de uma dinâmica de LTB. Isto tem sido questionado por diferentes razões em vários estudos, por exemplo em [28, 29], concluindo que uma grande maioria dos modelos de LTB são “descartados”. Contudo, tais afirmações radicais têm sido vigorosamente contestadas em [30, 31, 32, 33]. Os modelos de LTB são as soluções inomogêneas mais simples, que admitem a inomogeneidade como sendo apenas na direção radial. Assim, tem sido argumentado que a simetria esférica não é nada mais que uma hipótese simplificadora e, portanto, a circunstância de que o nosso universo real se desvia de ser esfericamente simétrico, não deveria ser utilizada para descartar prematuramente os modelos inomogêneos [33]. Por outro lado, uma ferramenta potencial que discrimina os modelos de LTB do modelo padrão, são as medições da mudança temporal do deslocamento para o vermelho (redshift drift) [33, 34, 35].

O foco principal desta tese é descrever os modelos cosmológicos inomogêneos de LTB e ajustá-los estatisticamente aos dados observacionais das SNIa e da posição do pico das oscilações acústicas de bárions (BAO). Em particular, usamos a amostra JLA (Joint Light-curve Analysis) [36]. Este catálogo contém 740 supernovas que combinam a amostra dos baixos redshift ($z < 0.1$), os três anos de observação do Sloan Digital Sky Survey (SDSS-II, $0.05 < z < 0.4$), os três anos do SuperNova Legacy Survey (SNLS, $0.2 < z < 1$) e a

¹A linha denota derivada com respeito ao argumento.

amostra do Hubble Space Telescope (HST, $z > 1$).

Ao contrário de algumas análises na literatura, nesta tese calibramos cuidadosamente os dados das SNIa com a dinâmica de LTB. Em um universo de LTB, também há ajustes sutis para propagar a escala primordial de BAO para a época atual. A análise combinada de BAO + SNIa oferece um teste rigoroso para os modelos apresentados nesta tese. Além disso, testamos a validade do uso da aproximação χ^2 , em comparação com a função de verosimilhança (Likelihood). Tem sido argumentado que estas duas abordagens não são equivalentes e, na verdade, a nossa análise mostra um exemplo clarificante deste fenômeno.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 introduzimos os conceitos fundamentais do modelo cosmológico padrão Λ CDM e seus principais problemas. Os modelos inomogêneos de LTB são estudados no capítulo 3, especificando suas propriedades para as diferentes subclasses. No capítulo 4, é feita uma revisão detalhada das amostras de SNIa e BAO, também apresentamos as respectivas análises estatísticas que serão usadas para ajustar os modelos cosmológicos. Os nossos resultados são mostrados no capítulo 5, que, em adição, realizamos uma comparação de modelos com os respectivos critérios de informação. Finalmente as nossas conclusões e discussões são expostas no capítulo 6.

Capítulo 2

Os Fundamentos da Cosmologia Moderna

Neste capítulo abordamos os princípios fundamentais nos quais se baseia a cosmologia moderna, dando uma breve descrição do modelo cosmológico padrão Λ CDM e seu conteúdo energético. Discutiremos também a estimativa das diferentes distâncias no formalismo do modelo cosmológico padrão. Finalmente, revisaremos brevemente os problemas principais do modelo Λ CDM que ainda estão em aberto na literatura.

2.1 O princípio cosmológico

Cada vez que a ciência entra num novo campo de pesquisa e é confrontada com uma escassez de dados observacionais ou experimentais, na tentativa de um entendimento teórico, faz-se necessário a introdução de alguns princípios fundamentais. Esses princípios no geral são baseados em ideias de simetrias, as quais reduzem os graus de liberdade do modelo. Esta regra geral, com o propósito de construir um modelo de universo, foi aplicada pelo próprio Einstein e seus colegas cosmólogos no início do século XX. Dado que não existia conhecimento empírico suficiente acerca da distribuição de matéria do universo e que a teoria da gravitação de Einstein era difícil de ser resolvida, dada alguma distribuição de matéria, os cosmólogos tiveram que contentar-se com a construção de modelos simplificados a grosso modo, os quais esperavam descrever algum aspecto do universo. Estes modelos foram baseados numa ideia chamada de **princípio cosmológico**.

Então, o princípio cosmológico é a alegação de que, sobre escalas suficientemente grandes¹, o universo é tanto **homogêneo** quanto **isotrópico**. Por homogêneo se entende como a propriedade de ser idêntico em todas as partes, isto é, existem simetrias de tipo trans-

¹Aproximadamente acima das centenas de Megaparsec.

lacionais. Enquanto isso, a isotropia compreende a propriedade de ver o mesmo em todas as direções, apresentam simetrias de tipo rotacionais. Contudo, é claro que o universo não é exatamente homogêneo, por isso a cosmologia moderna considera a homogeneidade em um sentido de médias, o universo é visto idêntico em diferentes posições quando é olhado sobre escalas suficientemente grandes.

A evidência observacional da isotropia em pelo menos 10^{-5} ordens de grandeza é feita com a detecção da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB, por suas iniciais em inglês) [37, 38]. Contudo, isotropia não implica necessariamente homogeneidade sem a premissa adicional, de que o observador não deve ficar em um lugar privilegiado, conhecida como **Princípio Copernicano**. Um observador no centro de qualquer distribuição de matéria esfericamente simétrica sempre verá isotropia. Por tanto, isotropia junto com o Princípio Copernicano implicam o Princípio Cosmológico. Nesta tese, abordaremos uma cosmologia que viola o Princípio Copernicano [17], para poder suprimir a necessidade da introdução de uma energia escura [19, 26].

Contudo, na seguinte seção apresentaremos o modelo cosmológico padrão Λ CDM, a modo de comparação, que está baseado no Princípio Cosmológico junto a duas componentes exóticas.

2.2 O modelo cosmológico padrão Λ CDM

A cosmologia moderna está baseada nas simetrias translacionais e rotacionais da métrica induzida de cada seção espacial, que dá como resultado a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), e pode ser escrita² como [1]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é o elemento de ângulo sólido em coordenadas esféricas. Apesar das suposições muito restritivas de homogeneidade e isotropia, a métrica (2.1) admite três geometrias espaciais, parametrizadas pelo valor de K . Para uma maior clareza é conveniente introduzir a coordenada χ usando $r = f_K(\chi)$, onde a função vem definida por [39]

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{para } K = +1 \\ \chi & \text{para } K = 0 \\ \sinh \chi & \text{para } K = -1 \end{cases}, \quad (2.2)$$

²No que segue, usaremos unidades nas quais a velocidade da luz $c = 1$.

com isto o elemento de linha (2.1) pode ser re-escrito da seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] . \quad (2.3)$$

A natureza dos espaços 3-dimensionais de curvatura constante da métrica (2.3), segue imediatamente da sua derivação. Por exemplo, uma 2-esfera S_d em uma distância $d = a(t_*)r$ da origem de coordenadas no tempo $t = t_*$, tem área de superfície $A_* = 4\pi a^2(t_*)f_K^2(\chi)$. Assim, podemos imaginar a geometria das seções espaciais, comparando o raio e a área de superfície de esferas centradas em algum ponto arbitrário p do espaço.

No caso em que $K = 0$, a hiper-superfície espacial se reduz ao caso de um 3-espaço Euclidiano contínuo e infinito. Isto é, podemos atingir distâncias arbitrariamente largas desde a origem e o volume de esta superfície 3-dimensional não apresentará bordas.

Para o caso hiperbólico ($K < 0$), a área cresce mais rápido com a distância que no caso Euclidiano, como $A \propto \sinh^2 \chi$. De novo, este espaço 3-dimensional não tem borda, este é o análogo 3-dimensional do plano do Lobachevski de curvatura negativa constante (que pode ser mapeado no interior de uma circunferência unitária).

No caso elíptico ($K > 0$), a área superficial é $A \propto \sin^2 \chi$ e aumenta mais lento do que no caso Euclidiano, atinge um máximo quando $\chi = d/a(t_*) = \pi$ e depois disso decresce para zero quando $\chi \rightarrow 2\pi$ em um ponto q , que é antipodal ao centro p . Estas seções espaciais são fechadas e de volume finito. A situação é modelada pela superfície 2-dimensional de uma esfera ordinária, que é o análogo 2-dimensional do espaço 3-dimensional de curvatura constante positiva.

Note que, quando escolhermos $K = 0, \pm 1$ como em (2.2), isto implica que K e χ são adimensionais e portanto a tem dimensão de comprimento. Contudo, na prática é comum em cosmologia, tomar a como adimensional. Com o fator de escala adimensional, isto segue que χ tem dimensão de comprimento e K tem dimensão (comprimento)⁻², e é dado pela escala de curvatura. Logo temos que para $K = 0$ a função $f_K(\chi) = \chi$, embora para $K \neq 0$, a função f_K pode ser escrita de uma forma unificada [40] como

$$\begin{aligned} f_K(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\chi) , \\ |K| &= \left(a_0 H_0 \sqrt{|\Omega_{K_0}|} \right)^{-2} , \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\Omega_{K_0} := -K/(a_0 H_0)^2$ (para mais detalhes ver [41]). Note que, no caso em que a curvatura é nula podemos normalizar livremente o valor atual do fator de escala para a unidade, isto é $a_0 = 1$.

Para ter uma solução viável das equações de campo de Einstein³

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R - \delta^\mu{}_\nu \Lambda = 8\pi G T^\mu{}_\nu \quad (2.5)$$

é conveniente introduzir o tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta^\mu{}_\nu, \quad (2.6)$$

o qual é compatível com a hipótese de homogeneidade e isotropia, sendo ρ e p a densidade de energia e a pressão respectivamente e u^μ a quadrivelocidade. A natureza da fonte é completamente especificada uma vez que seja definida a relação entre ρ e p com a equação de estado $p = p(\rho)$ que determina cada componente do universo, supondo que não existem forças externas. Por exemplo, $p = 0$ (poeira) especifica a matéria não relativista do universo e $p = \rho/3$, a matéria relativística.

Assim, resolvendo as equações de campo de Einstein (2.5) com a métrica (2.3), encontramos as equações de Friedmann, que descrevem a evolução do universo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) podemos ver claramente que o termo Λ atua como uma “força repulsiva” que acelera o fator de escala. Por outro lado, derivando (2.7) e combinando com (2.8), obtemos a equação de balanço da energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.9)$$

Esta equação é importante porque junto com a equação de estado de cada componente é possível obter o valor da densidade de energia para cada componente por separado. Considerando que cada componente do universo não interage entre si, podemos definir o parâmetro da equação de estado ω_i , que ajuda a catalogar cada componente i do universo por separado se $\omega_i = \text{cte}$. Assim, escrevemos a equação de estado da seguinte forma

$$p_i = \omega_i \rho_i, \quad (2.10)$$

³O termo Λ é a famosa constante cosmológica, introduzida por Einstein para garantir um universo estático. Mas com a descoberta da expansão do universo, ele chamou isto como o maior erro da sua vida.

que substituindo na equação de balanço (2.9) da i -ésima componente, obtemos

$$\rho_i \propto a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (2.11)$$

Finalmente, podemos considerar a densidade de energia total do universo composto por N componentes (matéria ordinária, radiação, matéria escura fria, etc.), com densidade de energia atual denotadas por ρ_{i_0} , da seguinte maneira

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega_i)}. \quad (2.12)$$

Com isto, a equação de Friedmann (2.7) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega_i)} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.13)$$

cuja solução nos dá a evolução do universo considerando todo seu conteúdo energético. Um parâmetro muito usado na cosmologia moderna é o parâmetro de Hubble (ou índice de expansão) que pode ser definido como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.14)$$

Por outro lado, na época presente, o parâmetro de Hubble pode ser expresso como $H(t_0) \equiv H_0 \equiv 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, onde h é um parâmetro adimensional, introduzido para reduzir a faixa de incerteza que surge devido aos erros sistemáticos nas observações e que fica entre 0.4 e 1.0. As últimas observações do PLANCK 2015 restringem esse valor a ser [42]

$$h = 0.6774 \pm 0.0046. \quad (2.15)$$

Por outro lado, aproveitando a evidência da expansão do universo devido ao redshift, observado no movimento das mais de 25000 galáxias que aparecem nas diferentes bandas de frequências (óptica, infravermelho, rádio) [43], podemos estudar a correlação entre o redshift z e a distância r de uma galáxia distante. Assim, expandindo z em torno do tempo presente t_0 (isto é, $z = 0$) e considerando termos de primeira ordem, obtemos⁴

$$z = \frac{H_0 r}{c}. \quad (2.16)$$

⁴Onde recuperamos a velocidade da luz c por motivos de clarificação.

Esta relação, associada com a velocidade de recessão⁵ $v \approx cz$, é conhecida como a **lei de Hubble**, e a partir dela pode se deduzir que uma distância de 1 Mpc corresponde a uma velocidade de $100 h \text{ km s}^{-1}$. As escalas do universo podem ser definidas a partir do parâmetro de Hubble hoje. A escala do tempo (chamada tempo de Hubble) é expressa como

$$t_H \equiv H_0^{-1} = 9.78 h^{-1} \times 10^9 \text{ yrs.} \quad (2.17)$$

A escala de comprimento, conhecida como o radio de Hubble, é definida por

$$D_H \equiv cH_0^{-1} = 2998 h^{-1} \text{ Mpc} , \quad (2.18)$$

a qual, corresponde grosseiramente ao limite de escalas de objetos distantes que podemos observar hoje, e que se afasta de nós à velocidade da luz, devido à expansão do universo.

Também é conveniente introduzir a densidade crítica

$$\rho_{c_0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} , \quad (2.19)$$

que representa a densidade cosmológica média do universo presente. Note que esta densidade é muito pequena comparada com a densidade na estrutura local do universo ($\rho \approx 5 \text{ g/cm}^3$ para a Terra e $\rho \approx 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ para a densidade de matéria (bariônica e escura) em nossa galáxia). Uma fração ainda menor é a responsável da atual expansão acelerada do universo.

Dado que a densidade de energia determina a evolução temporal da métrica via as equações de campo de Einstein, diferentes modelos de FLRW são distinguidos pelas componentes de densidade energética. Assim com ajuda de (2.19), podemos definir o parâmetro de densidade da i -ésima componente do universo, como sendo a razão entre a i -ésima densidade de energia e a densidade crítica

$$\Omega_{i_0} = \frac{\rho_{i_0}}{\rho_{c_0}} . \quad (2.20)$$

Por outro lado, também podem ser definidos os parâmetros de densidade da constante

⁵Obtida a partir da combinação da definição do redshift $z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1$ e o efeito Doppler para velocidade de recessão muito menor que a velocidade da luz, $\lambda_0 \approx (1 + v/c)\lambda$, onde o comprimento de onda λ_0 das linhas de absorção de galáxias distantes são maiores que os comprimentos de onda λ do referencial em repouso quando $z > 0$ [44].

cosmológica e da curvatura

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad \text{e} \quad \Omega_{K_0} = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.21)$$

Assim, tendo em consideração os parâmetros cosmológicos, definidos acima, na equação de Friedmann (2.7), podemos escrever a curvatura como

$$K = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - H_0^2 \equiv H_0^2(\Omega_0 - 1), \quad (2.22)$$

onde $\Omega_0 \equiv \sum_i \Omega_{i_0} + \Omega_\Lambda$. É fácil notar que a curvatura do espaço será dada pelo conteúdo de energia do universo e o valor da constante cosmológica. Na ausência dessa constante e quando o universo for plano ($K = 0$), a densidade de energia total ρ_0 seria igual à densidade crítica ρ_{c_0} . Agora, podemos re-escrever a equação de Friedmann, usando os parâmetros cosmológicos, da seguinte forma

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\sum_{i=1}^N \Omega_{i_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega_i)} + \Omega_{K_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda \right]. \quad (2.23)$$

Considerando esta relação no tempo presente t_0 , podemos inferir a relação

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{i_0} + \Omega_\Lambda + \Omega_{K_0} = 1, \quad (2.24)$$

conhecida como o vínculo energético. Finalmente, o conteúdo total do universo pode ser catalogado com as partículas relativísticas, a matéria não relativista e a energia escura. Então, no que segue, vamos fazer uma breve revisão delas.

2.2.1 A radiação

O espectro da radiação da CMB é o de um corpo negro quase perfeito, com uma temperatura de $T_\gamma = 2.725 \pm 0.002$ K medida com uma extraordinária precisão pelo instrumento FIRAS a bordo do satélite COBE [45]. A densidade de energia dos fótons da CMB no universo presente é $\rho_{\gamma_0} = 4.641 \times 10^{-34} \text{gcm}^{-3}$. Isto corresponde a ter o parâmetro de densidade dos fótons, hoje, sendo

$$\Omega_{\gamma_0} \equiv \frac{8\pi G \rho_{\gamma_0}}{3H_0^2} = \frac{\rho_{\gamma_0}}{\rho_{c_0}} = 2.469 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (2.25)$$

Se tomamos por exemplo o valor $h = 0.67$, temos então $\Omega_{\gamma_0} = 5.5 \times 10^{-5}$. Dado que a densidade de energia dos fótons evolui como $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ (isto é usando $\omega_\gamma = 1/3$ na equação (2.11)), que comparando com a densidade de energia associada $\rho_\gamma = \pi^2 T_\gamma^4/15$ [46] resulta na relação $T_\gamma \propto a^{-1}$. Isto quer dizer que a temperatura evolui inversamente proporcional ao fator de escala. Assim, embora sua contribuição ao valor do parâmetro de densidade total hoje Ω_0 seja desprezível, sua presença é dominante nas etapas primordiais do universo frente à contribuição de matéria que escala como a^{-3} . Essa etapa é conhecida como a era dominada pela radiação.

Por outro lado, existe outra componente a considerar na radiação, os neutrinos que se comportam como partículas relativistas devido a sua massa ser pequena. Eles são partículas fermiônicas com potencial químico zero. A densidade energética dos neutrinos é dada por

$$\rho_\nu = N_{\text{eff}} \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^4, \quad (2.26)$$

onde N_{eff} é o número efetivo de espécies de neutrinos, que no modelo padrão das partículas é fixado a $N_{\text{eff}} = 3$, e T_ν é a temperatura dos neutrinos que é relacionada à temperatura dos fótons via $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$. Logo a relação da densidade de energia dos neutrinos e dos fótons é dado por $\rho_\nu = N_{\text{eff}}(7/8)(4/11)^{4/3}\rho_\gamma$. Por tanto, o parâmetro de densidade da radiação presente, que é a soma dos fótons e os neutrinos, é escrito como

$$\Omega_{r_0} = \frac{\rho_{\gamma_0} + \rho_{\nu_0}}{\rho_{c_0}} = \Omega_{\gamma_0} (1 + 0.2271 N_{\text{eff}}). \quad (2.27)$$

2.2.2 A matéria

Em contraste à radiação da CMB, a densidade energética dos bárions deve ser medida diretamente e não descrita através de sua temperatura. Na atualidade existem formas bem estabelecidas para medir a densidade dos bárions [47]. Todas estas medições foram feitas em diferentes redshifts e sabendo que a densidade de matéria escala como um fluido poeira, com parâmetro de equação de estado $\omega_b = 0$. Com estas considerações, podemos escrever o parâmetro de densidade dos bárions como

$$\Omega_b = \Omega_{b_0} a^{-3}, \quad (2.28)$$

onde Ω_{b_0} é o parâmetro de densidade dos bárions, medido hoje, com um valor de $\Omega_{b_0} h^2 = 0.020 \pm 0.002$ em um nível de confiança de 95% [48]. As observações da CMB também dão lugar a medições do valor do parâmetro de densidade dos bárions. As medições mais atuais, do parâmetro de densidade dos bárions, realizadas pela colaboração do PLANCK

2015 são [42]

$$\Omega_{b_0} h^2 = 0.02230 \pm 0.00014 , \quad (2.29)$$

com 68% no nível de confiança. Se tomamos o valor $h = 0.67$, temos logo que $\Omega_{b_0} = 0.0497$ para o valor de (2.29). Isto significa que a contribuição dos bárions no universo presente é somente de 5%.

Adicionalmente aos bárions, as observações astrofísicas exigem a existência da matéria escura como outra componente não relativística do universo. Dado que a matéria escura interage bem fracamente com as partículas do modelo padrão das partículas elementares, a sua existência só poderá ser testada pelos efeitos gravitacionais sobre a matéria visível. Sendo mais específicos, se a matéria escura for não relativística, no tempo do desacoplamento dos fótons, é chamada de matéria escura fria (CDM, por suas siglas em inglês Cold Dark Matter). O paradigma presente da formação de estruturas do universo está baseado na aglomeração gravitacional da CDM. A matéria bariônica, por si só, não gera suficiente aglomeração gravitacional que possa conduzir a uma formação de estruturas consistente com as observações de aglomerados de galáxias [46]. As anisotropias na CMB mostram que a abundância presente de matéria escura é de cinco vezes maior que dos bárions. Os dados do PLANCK 2015 ajustam o parâmetro de densidade da CDM como sendo [42]

$$\Omega_{c_0} h^2 = 0.1188 \pm 0.0010 , \quad (2.30)$$

com um nível de confiança de 68%. Para valores de $h = 0.67$ temos $\Omega_{c_0} = 0.2646$ para o valor de (2.30). A origem da matéria escura não foi identificada até agora. Porém, existem basicamente duas classes de matéria escura, os candidatos astrofísicos (buracos negros, estrelas de nêutrons e anãs brancas)⁶ ou as partículas (áxions e as partículas massivas de interação fraca (WIMPs, por suas siglas em inglês)). Tendo estas considerações, podemos escrever a densidade de matéria não relativística, sendo a soma das densidades dos bárions e da CDM, como

$$\Omega_M = \Omega_{M_0} a^{-3} , \quad (2.31)$$

onde $\Omega_{M_0} = \Omega_{b_0} + \Omega_{c_0}$. Se somamos os valores destas componentes, considerando o valor $h = 0.67$, encontramos que o valor da matéria não relativista é de $\Omega_{M_0} = 0.3143$. A partir do vínculo energético (2.24), notamos que, ainda está faltando aproximadamente 70% no conteúdo energético do universo. Este faltante é o último ingrediente a ser considerado no que segue.

⁶Contudo, dado que estes se originam de bárions, não é possível explicar todas as componentes da matéria escura sem considerar a matéria escura não bariônica.

2.2.3 A energia escura

Como mencionamos acima, se somamos as quantidades de radiação e matéria (bárions e CDM), notamos que o valor total é de aproximadamente só 30% do conteúdo total do universo presente. Dado que as observações atuais sobre os valores da curvatura espacial do universo restringem seu valor em $|\Omega_{K_0}| \lesssim 0.01$, precisamos identificar o 70% faltante de matéria cósmica. Esta componente desconhecida, chamada energia escura, é a suposta responsável da atual expansão acelerada do universo, segundo o modelo padrão. Contudo, a natureza física desta componente exótica é absolutamente um mistério até agora. O candidato principal para esta componente, no modelo cosmológico padrão, é a constante cosmológica Λ , daí vem o nome de modelo Λ CDM. Historicamente, a introdução da constante cosmológica, nas equações de campo de Einstein, foi devido a que se acreditava que o universo era estático. Como pode ser visto, na equação (2.8), a constante Λ trabalha como uma força oposta à gravidade. Porém para o caso de um universo dominado pela matéria, encontramos que o universo estático ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$) corresponde a

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad \frac{K}{a^2} = \Lambda. \quad (2.32)$$

Isto mostra que a densidade ρ é determinada pela constante cosmológica. Einstein acreditava que esta solução era uma forma de introduzir a ideia de Mach, de conectar a massa com a inércia, representada aqui com a geometria do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. Ele pensava que mostraria que a matéria era necessária para definir uma métrica não-Minkowskiana. Contudo, aparecem instabilidades que têm que ser consideradas. Por exemplo se $\Lambda/3 > 4\pi G\rho/3$, a equação (2.8) mostra que, com o crescimento de a , o universo abandona o ponto estático (2.32); por outro lado se $\Lambda/3 < 4\pi G\rho/3$ o universo também sai do ponto estático com o decrescimento de a .

A solução acelerada para um espaço vazio, $H = \sqrt{\Lambda/3}$, foi encontrada pelo de Sitter [49] em 1917. Influenciado pela solução acelerada do de Sitter e as observações do espectro das galáxias, Lemaître descreve um período de expansão rápida, dominado pela constante cosmológica [50], durante o qual a recessão das galáxias é acelerada.

Finalmente, as medições do PLANCK 2015 indicam que o valor do parâmetro de densidade de energia escura, medido hoje, é

$$\Omega_\Lambda = 0.6911 \pm 0.0062. \quad (2.33)$$

Concluimos assim que o conteúdo energético do universo é dominado por um setor escuro exótico (aproximadamente com 30% de matéria escura e 70% de energia escura).

Contudo, o setor escuro não está livre de problemas teóricos, os quais serão estudados na seção 2.4.

2.3 As distâncias cósmicas

A maioria das informações que temos sobre o universo, são obtidas por meio da luz. Ao longo do último século, o desenvolvimento de detectores de raios-x, Gamma, rádio, infravermelho, etc. nos deram novas maneiras de observar o universo. Compreender a propagação da luz em um universo em expansão é portanto crítico para interpretar as observações cosmológicas. De modo a quantificar esse efeito, nos modelos de FLRW, escrevemos o redshift como

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (2.34)$$

onde a época presente corresponde a $z = 0$.

Por outro lado, para discutir as observações cosmológicas, é importante introduzir as distâncias cósmicas para o espaço-tempo de FLRW (2.3). De fato, uma grande parte da evidência da energia escura vem da medição das distâncias cosmológicas.

Então, começamos calculando a **distância comóvel** d_c . A luz que viaja ao longo da direção radial, deve satisfazer a equação da geodésica, $ds^2 = 0$. Vamos considerar o caso em que a luz emitida no tempo $t = t_e$ com $\chi = \chi_e$ (isto é, em um redshift z), atinge um observador no tempo $t = t_0$ com $\chi = 0$ (correspondendo a um redshift $z = 0$). Com estas considerações e recuperando o valor da velocidade da luz na métrica (2.3), podemos definir a distância comóvel como

$$d_c \equiv \chi_e = \int_0^{\chi_e} d\chi = - \int_{t_0}^{t_e} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.35)$$

Logo, usando a relação do redshift (2.34), obtemos

$$d_c = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{E(\bar{z})}, \quad (2.36)$$

onde $E(z) \equiv H(z)/H_0$. Se expandirmos em torno do $z = 0$, podemos mostrar que para valores do redshift muito menores que a unidade, a distância comóvel é dada aproximadamente por

$$d_c \simeq \frac{c}{a_0 H_0} z \quad \text{para} \quad z \ll 1. \quad (2.37)$$

Note que, usando a velocidade de recessão $v \equiv cz$, encontramos que

$$v \simeq (a_0 H_0) d_c. \quad (2.38)$$

Isto mostra que a velocidade de recessão v de um objeto é proporcional a d_c com o fator de proporcionalidade $a_0 H_0$. Para a distância física $r = a_0 d_c$ encontramos $r \simeq (c/H_0)z \simeq v/H_0$, o qual significa que a lei de Hubble é válida só para baixos redshift $z \ll 1$. Então, para altos redshift $z \gtrsim 1$ a lei de Hubble deverá ser modificada.

A **distância de Luminosidade** d_L é usada para a observação de SNIa com o fim de conectar a luminosidade de uma vela padrão com o índice de expansão do universo. Assim definimos

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}, \quad (2.39)$$

onde L_s é a luminosidade absoluta de uma fonte e \mathcal{F} representa seu fluxo observado. O fluxo é definido pela relação $\mathcal{F} = L_0/S$, com $S = 4\pi(a_0 f_K(\chi))^2$ a área de uma esfera centrada em $z = 0$ e L_0 sendo a luminosidade absoluta observada. Logo, da equação (2.39) notamos que precisamos da relação L_s/L_0 . Para isso consideramos que no intervalo de tempo dt_s se emite uma energia $dE_s = L_s dt_s$, similarmente no tempo dt_0 emitirá $dE_0 = L_0 dt_0$. Assim a razão entre a energia emitida e observada de uma fonte será $dE_s/dE_0 = \lambda_0/\lambda_s = 1 + z$, onde foi usada a definição do redshift. Contudo, a constância da velocidade da luz $c = \lambda/dt$ implica que $\lambda_s/dt_s = \lambda_0/dt_0$. Assim concluimos que

$$\frac{L_s}{L_0} = \frac{dE_s dt_0}{dE_0 dt_s} = (1 + z)^2. \quad (2.40)$$

Finalmente, podemos re-escrever (2.39) como

$$d_L^2 = a_0 f_K(\chi)(1 + z). \quad (2.41)$$

Considerando (2.35) junto com (2.4) obtemos a relação da distância de Luminosidade com os modelos de FLRW, como

$$d_L = \frac{c(1 + z)}{H_0 \sqrt{\Omega_{K_0}}} \sinh \left[\sqrt{\Omega_{K_0}} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{E(\bar{z})} \right]. \quad (2.42)$$

Fica claro que, a distância de luminosidade está relacionada diretamente com o conteúdo energético e o índice de expansão do universo.

Outro observável importante é a **distância de diâmetro angular** d_A , definida como

$$d_A \equiv \frac{\delta x}{\delta \theta}, \quad (2.43)$$

onde $\delta \theta$ é o ângulo que subtende um objeto de tamanho atual δx , que é ortogonal à linha de visão. Esta distância é usada frequentemente para as observações das anisotropias da CMB.

Dado que a fonte pousa sobre a superfície de uma esfera de raio χ com o observador no centro, o tamanho δx no tempo t_1 , em um espaço-tempo de FLRW (2.3) é dado por

$$\delta x = a(t_1) f_K(\chi) \delta \theta . \quad (2.44)$$

Assim, a distância de diâmetro angular, pode ser escrita como

$$d_A = a(t_1) f_K(\chi) = \frac{a_0 f_K(\chi)}{1+z} = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_{K_0}}} \sinh \left[\sqrt{\Omega_{K_0}} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{E(\bar{z})} \right] . \quad (2.45)$$

Por outro lado, se comparamos as equações (2.42) e (2.45), notamos a seguinte relação

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} . \quad (2.46)$$

Isto é conhecido como a relação de Etherington [51]. Sua validade se estende muito além da métrica de FLRW, isto é válido na verdade, para qualquer métrica Riemanniana enquanto o fluxo seja conservado.

A conexão entre a distância de luminosidade teórica e a distância atual de um objeto astronômico é dado pelo **módulo de distância** μ , que é definido como a diferença entre a magnitude aparente m do brilho de um objeto e sua magnitude absoluta M ⁷,

$$m - M \equiv \mu = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{pc}} \right) . \quad (2.47)$$

Para determinar o módulo de distância precisamos portanto entender a física de um dado objeto astronômico, sendo suficientemente capazes de derivar uma estimativa de sua magnitude absoluta. No capítulo 4, veremos como semelhantes objetos podem ser usados como velas padronizáveis.

Na figura 2.1, mostramos o comportamento da distância de luminosidade (esquerda), distância de diâmetro angular (centro) e o módulo de distância (direita) para os modelos de Λ CDM plano, de Einstein-de Sitter ($\Omega_M = 1$) e de FLRW aberto ($\Omega_K > 0$ e $\Lambda = 0$). Notamos que, estas curvas são muito sensíveis ao modelo que está sendo usado. A distância de luminosidade, sendo uma distância ao longo da região passada do cone de luz, sempre aumenta com o redshift, o que faz sentido intuitivo desde que os objetos mais distantes aparecem mais escuros, e portanto, representam uma maior distância. A distância de diâmetro angular toma o tamanho transversal de um objeto como base para uma distância. Um objeto no redshift $z = 0.5$ se verá maior, representando uma menor distância, que um

⁷A magnitude absoluta de uma SNIa é conhecida sendo em torno de $M \approx -19$ no pico de máximo brilho.

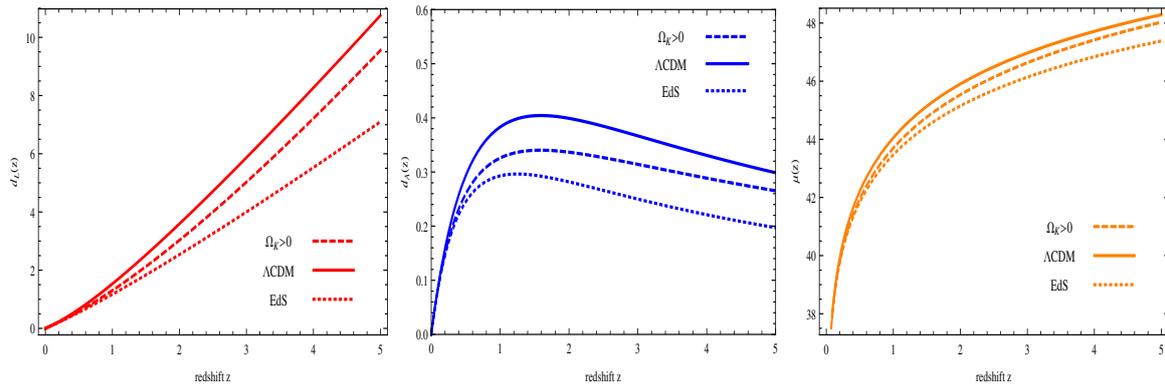


Figura 2.1: A distância de luminosidade (esquerda), distância de diâmetro angular (centro) e o módulo de distância (direita), para os modelos de Λ CDM plano, de Einstein de Sitter ($\Omega_M = 1$) e de FLRW aberto ($\Omega_K > 0$ e $\Lambda = 0$)

objeto num redshift $z = 1$. Contudo, a distância de diâmetro angular não é monotônica com o redshift devido à expansão desacelerada do universo. Uma galáxia próxima pode aparecer maior porque a distância entre ela e nós é pequena comparada com o raio de Hubble. Também pode aparecer maior porque a distância entre ela e nós foi muito menor no passado, quando a luz que vemos hoje foi emitida. Existe portanto um redshift no qual o diâmetro angular de um objeto é mínimo (isto é, um máximo na distância de diâmetro angular). Note que esse máximo na distância de diâmetro angular é em um redshift menor nos modelos de Einstein-de Sitter e FLRW aberto, que no modelo Λ CDM. Finalmente, no módulo de distância, de novo a expansão acelerada do modelo Λ CDM comparado com os modelos de FLRW aberto e de Einstein-de Sitter, significa que os objetos aparecem mais escuros para o mesmo redshift. Como será visto na seção 4.2, isto acontece exatamente nas propriedades das supernovas de tipo Ia, na faixa de redshift $0.5 < z < 1.5$, que se torna o detonante para a aceleração cósmica do modelo cosmológico padrão.

O papel da energia escura é bem claro na diferença entre as curvas do modelo de Einstein-de Sitter, de FLRW aberto e do modelo Λ CDM. Com isto podemos concluir que a introdução de uma energia escura não pode ser suprimida com os modelos homogêneos de FLRW. Uma alternativa pode ser considerar as teorias de gravitação $f(R)$ que reproduzem o comportamento da energia escura com a modificação da própria geometria. Contudo, existe uma outra alternativa para atingir esse objetivo, o qual é violar o princípio copernicano, que será visto no capítulo 3.

2.4 Os problemas do modelo Λ CDM

Apesar do modelo Λ CDM concordar bem com os dados observacionais, ele apresenta problemas teóricos, no setor escuro, que precisam ser abordados. Nesta seção, revisaremos os dois problemas principais que apresenta a energia escura.

2.4.1 O problema da constante cosmológica

Como foi mencionado na seção 2.2.3, o candidato mais simples para energia escura é a constante cosmológica Λ , chamada assim porque sua densidade de energia é constante no tempo e no espaço. Esta componente, no contexto do Universo de Friedmann, é a responsável da atual expansão acelerada. Para obter expansão acelerada apenas recentemente na história do universo, precisamos que o valor da constante cosmológica seja da ordem do quadrado do parâmetro de Hubble hoje H_0 , como pode ser visto da equação (2.7)

$$\Lambda \approx H_0^2 = (2.1332 h \times 10^{-42} \text{GeV})^2 . \quad (2.48)$$

Interpretando isto como a densidade de energia escura, temos

$$\rho_\Lambda \approx \frac{\Lambda m_{\text{pl}}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} \text{GeV}^4 \approx 10^{-123} m_{\text{pl}}^4 , \quad (2.49)$$

onde foram usados os valores de $h \approx 0.7$ e $m_{\text{pl}} \approx 10^{19}$ GeV.

Por outro lado, supondo que a densidade de energia (2.49) vem da energia do vácuo $\langle \rho \rangle$ de um espaço vazio, a energia do ponto zero de algum campo de massa m com momento k e frequência ω é dada por $E = \omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$. Somando sobre as energias do ponto zero do campo até uma escala de corte k_{max} ($\gg m$), obtemos a densidade de energia do vácuo [1, 40, 52]

$$\rho_{\text{vac}} = \int_0^{k_{\text{max}}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \approx \frac{k_{\text{max}}^4}{16\pi^2} . \quad (2.50)$$

Se acredita que o limite de validade da Relatividade Geral é a escala de Planck m_{pl} . Então, tomando como escala de corte $k_{\text{max}} = m_{\text{pl}}$, estimamos a densidade do vácuo como

$$\rho_{\text{vac}} \simeq 10^{74} \text{GeV}^4 . \quad (2.51)$$

Note a **enorme diferença de 10^{121} ordens de magnitude que separam o valor da densidade de energia escura (2.49) com o da escala de Planck (2.51)**. Esta situação não é melhorada tomando outras escalas de corte que aparecem na física de partículas. Por exemplo, no caso da cromodinâmica quântica a escala de corte é $k_{\text{max}} \approx 0.1$

GeV onde obtemos um valor de $\rho_{\text{vac}} \approx 10^{-3} \text{ GeV}^4$, que é ainda muito maior que ρ_Λ .

Este problema foi apresentado mesmo antes da descoberta da energia escura nas observações de supernovas de tipo Ia no 1998. Naquele momento acreditava-se que a constante cosmológica era exatamente zero e tratava-se de explicar o porquê era assim.

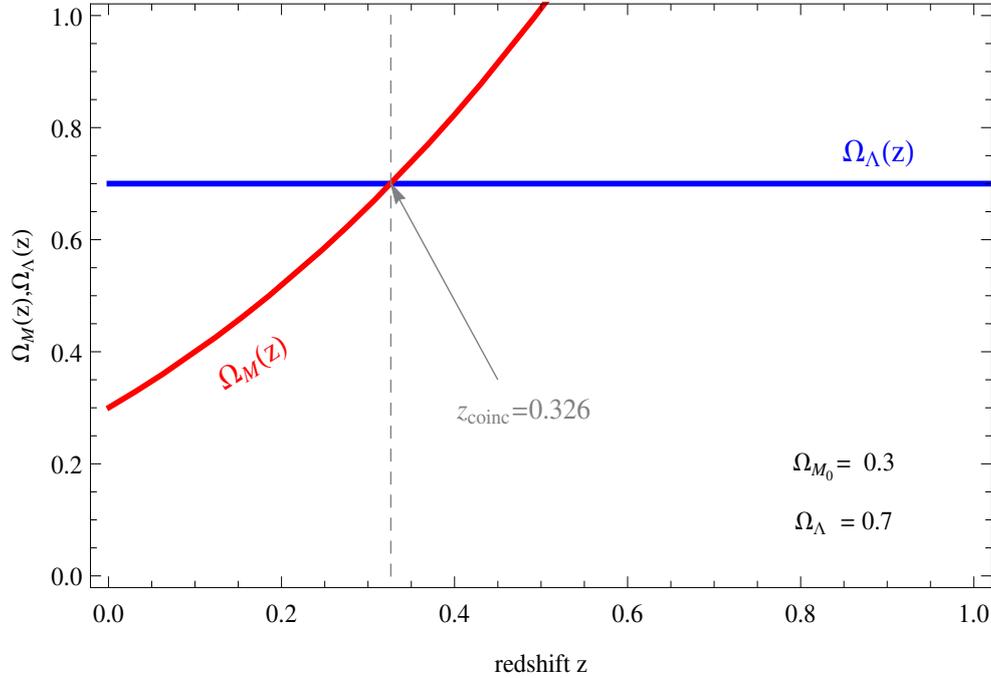


Figura 2.2: A coincidência das densidades de matéria e energia escura no redshift $z \approx 0.3$

2.4.2 O problema da coincidência cósmica

O segundo problema da constante cosmológica como candidato a energia escura é que seu valor não só está em desacordo com todas as possíveis escalas de energia fundamentais, senão também que seu valor particular é quase idêntico a um número totalmente desconexo, a densidade de energia da matéria hoje. Isto é, Ω_Λ é duplamente improvável porque seu valor é tão pequeno em termos absolutos e porque seu valor coincide⁸ com Ω_{m_0} sem nenhum motivo aparente. Da equação (2.11), podemos inferir que a densidade de matéria coincide com a densidade de energia escura no redshift

$$z_{\text{coinc}} = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} \right)^{1/3} - 1, \quad (2.52)$$

que considerando $\Omega_\Lambda = 0.7$, corresponde a $z_{\text{coinc}} \approx 0.3$ como pode ser visto na figura 2.2. Isto quer dizer que vivemos em um momento peculiar da história do universo. Por outro

⁸Pelo menos em um fator de dois ou três.

lado, como vimos na seção 2.1, o princípio copernicano estabelece que não estamos em um lugar privilegiado no universo. Assim, existe uma contradição entre o modelo Λ CDM e o princípio copernicano. Isto é, para acreditar que a aceleração observada é causada pela presença de uma constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, precisamos crer também que estamos em um momento muito especial da história do universo⁹. Esta contradição é conhecida como o **problema da coincidência cósmica**.

Na tentativa de aliviar esses problemas foram propostos na literatura os modelos de Quintessência, Gravidade modificada, interação no setor escuro, etc. Infelizmente, todas as tentativas, de resolver o problema, até agora se mostram falhas.

Por outro lado, uma outra forma de abordar o problema é considerar que a coincidência entre matéria escura e energia escura pode aparecer como produto de uma outra razão mais fundamental, a coincidência entre a expansão acelerada e a formação de estruturas. Isto pode ser explicado se uma é a causa da outra, isto é, se o crescimento das estruturas for a causa da aceleração através da acumulação de efeitos não-lineares. Este argumento é conhecido na literatura como “backreaction” [54, 55]. Uma espécie de saída é que, na verdade, não há nenhuma aceleração real nem energia escura. A aceleração é somente uma consequência de adotar o modelo de fundo, o espaço de FLRW, de uma forma errada. Se pelo contrário, interpretamos as observações com um modelo de fundo inhomogêneo do tipo Lemaitre-Tolman-Bondi (ver seção 3.1) a aceleração do índice de recessão entre as proximidades e as fontes distantes se tornam dependentes da distância, praticamente enxergaremos desaceleração. Discutiremos isto, em maior detalhe, no próximo capítulo.

⁹Contudo, a escolha de uma escala de tempo natural para definir o problema da coincidência é material de debate [53]

Capítulo 3

Soluções Exatas das Equações de Campo de Einstein

Neste capítulo estudaremos o espaço-tempo de Lemaître-Tolman-Bondi como o modelo cosmológico de fundo e suas implicações com as observações de distâncias cosmológicas. Serão estudados os modelos com Big Bang não simultâneo, apresentando dois ansatz que modelam por um lado uma alta distribuição de matéria e por outro um vazio local. Revisaremos também os modelos com Big Bang simultâneo, considerando três perfis de vazios com a finalidade de reproduzir consistentemente as observações cosmológicas. A idade do universo será um tema de interesse devido à inomogeneidade no tempo do Big Bang. Outros temas que serão abordados são as singularidade por cruzamento de camadas, o deslocamento para o azul gravitacional, a propagação da luz nos contextos inomogêneos e o desvio temporal do redshift. Finalmente, estudaremos as oscilações acústicas de bárions para os modelos com Big Bang simultâneo.

3.1 O modelo de Lemaître-Tolman-Bondi

A forma consistente de realizar uma inomogeneidade de simetria esférica foi bem estudada no século passado, na década de 1930, na literatura da Relatividade Geral [21, 22, 23], obtendo a métrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB). Esta é, uma generalização da métrica de FLRW na qual o fator de escala ao longo da coordenada radial r é diferente dado o elemento de linha superficial $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2$. Isto é, uma distribuição esférica mas inomogênea na direção radial. Então, consideramos uma métrica inomogênea escrita em coordenadas comóveis-síncronas, de tal forma que¹ $g_{tt} = 1$, $g_{ti} = 0$ (com $i = r, \theta, \phi$) e o vetor tangente das partículas de matéria é $u^\alpha \equiv \delta_t^\alpha$ (com $\alpha = t, r, \theta, \phi$), o qual significa

¹Considerando unidades naturais $c = 1$.

que a coordenada temporal, t , também é o tempo próprio das partículas. Assim, a métrica é a seguinte

$$ds^2 = dt^2 - Y^2(t, r)dr^2 - X^2(t, r)d\Omega^2, \quad (3.1)$$

onde a função $X(t, r)$ está conectada à área de superfície $S = 4\pi X^2$ (com t e r constantes), que indica a distância entre um observador localizado em uma posição arbitrária e o centro em $X = 0$ [56].

Considerando as equações de campo de Einstein com poeira como fonte gravitacional, isto é, o tensor energia-momento $T^{\mu\nu} = \rho(t, r)u^\mu u^\nu$ e desprezando a constante cosmológica Λ , é encontrado o conjunto de equações

$$G^t_t = \frac{\dot{X}^2}{X^2} + 2\frac{\dot{Y}\dot{X}}{YX} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \left(2\frac{X''}{X} + \frac{X'^2}{X^2} - 2\frac{Y'X'}{YX} \right) = 8\pi G\rho(t, r), \quad (3.2)$$

$$G^r_t = \frac{1}{Y^2} \left(2\frac{\dot{X}'}{X} - 2\frac{\dot{Y}X'}{YX} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$G^r_r = 2\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\dot{X}^2}{X^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \left(\frac{X'^2}{X^2} \right) = 0, \quad (3.4)$$

$$G^\theta_\theta = G^\phi_\phi = \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}\dot{X}}{YX} + \frac{\ddot{Y}}{Y} - \frac{1}{Y^2} \left(\frac{X''}{X} - \frac{1}{2} \frac{Y'X'}{YX} \right) = 0, \quad (3.5)$$

onde o ponto ($\dot{}$) e a linha (\prime) denotam derivadas parciais com respeito à coordenada temporal t e radial r , respetivamente. Agora, integramos a equação (3.3), para obter o termo g_{rr} da métrica (3.1), resultando em

$$Y^2(t, r) = \frac{X'^2}{1 + 2E(r)}, \quad (3.6)$$

onde $E(r)$ é um termo de integração, determinado pelas condições de contorno. Mesmo estando em coordenadas espaciais fixas, o fluido pode-se movimentar fisicamente na direção radial; esse movimento é codificado em $\sqrt{g_{rr}} = X'(t, r)/\sqrt{1 + 2E(r)}$. Substituindo (3.6) em (3.1) é obtida a métrica de LTB

$$ds^2 = dt^2 - \frac{X'^2(t, r)}{1 + 2E(r)}dr^2 - X^2(t, r)d\Omega^2, \quad (3.7)$$

onde o fator de escala inhomogêneo tem duas direções, uma radial $X'(t, r)$ e outra transversal $X(t, r)$. A função $E(r)$ pode ser interpretada como a curvatura espacial que depende da coordenada r . Note que, para garantir a assinatura $(+, -, -, -)$ na métrica (3.7), deve

ser satisfeita a condição $1 + 2E(r) \geq 0^2$ para qualquer r .

Como caso particular, podemos fazer a escolha $X(t, r) = a(t)r$ e $E(r) = -Kr^2$ com $K = 0, \pm 1$, para assim recuperar a métrica de FLRW (2.1). Assim, a métrica (3.7) representa uma inhomogeneidade esférica centrada na origem, onde um observador localizado no centro verá um universo isotrópico.

Para resolver as equações de campo de Einstein, a equação (3.4) é combinada com (3.6) e logo multiplicada por $X^2\dot{X}$, para assim obter uma primeira relação $[X(\dot{X}^2 - 2E)] = 0$, que indica uma constante no tempo para cada camada radial r . Por outro lado, se a equação (3.4) é multiplicada por X^2X' e combinada com (3.3) e (3.6), é encontrada a segunda relação $[X(\dot{X}^2 - 2E)]' = 8\pi G\rho X^2X'$, que combinada com a primeira, servem para escrever as equações dinâmicas que dominam o modelo de LTB,

$$\dot{X}^2(t, r) = 2E(r) + \frac{2M(r)}{X(t, r)}, \quad (3.8)$$

$$8\pi G\rho(t, r) = \frac{2M'(r)}{X^2(t, r)X'(t, r)}, \quad (3.9)$$

onde $M(r)$ é uma função arbitrária que pode ser relacionada com a massa gravitacional efetiva dentro de uma camada esférica de raio r [23] e $E(r)$ também pode ser interpretada como a energia total associada por unidade de massa. Note que a equação (3.9) apresenta duas singularidades, no caso em que $X = 0$ (Big Bang) e quando $X' = 0$ (cruzamento de camadas). Estas singularidades serão estudadas em detalhe mais adiante.

Como a métrica de LTB (3.7) tem o fator de escala em duas direções, é lógico pensar que o índice de expansão também tem duas direções, assim são definidos os dois parâmetros de Hubble,

$$H_{\parallel}(t, r) = \frac{\dot{X}(t, r)}{X(t, r)} \quad \text{e} \quad H_{\perp}(t, r) = \frac{\dot{X}(t, r)}{X(t, r)}, \quad (3.10)$$

que representam os índices de expansão na direção radial e transversal, respetivamente. Esta é uma característica particular dos modelos de LTB que se diferenciam com os modelos de FLRW, os quais apresentam um único parâmetro de Hubble que evolui com o tempo. Também, podemos escrever uma espécie de média geométrica dos índices de expansão radial e transversal como

$$\bar{H}_{\text{LTB}}(t, r) = \left[H_{\parallel}(t, r) H_{\perp}^2(t, r) \right]^{1/3}. \quad (3.11)$$

²O valor $E = -1/2$ é admissível só no caso especial em que $X' = 0$ ocorra no mesmo ponto. Isto é conhecido como um buraco de minhoca [57].

Por outro lado, se derivamos a equação (3.8) e combinamos com (3.9), podemos encontrar a equação de continuidade para a densidade de energia

$$\dot{\rho}(t, r) + (2H_{\perp} + H_{\parallel})\rho(t, r) = 0 . \quad (3.12)$$

Note que neste caso, em analogia com os modelos de FLRW, podemos inferir uma média aritmética do fator de Hubble

$$\langle H \rangle(t, r) = \frac{1}{3} [2H_{\perp}(t, r) + H_{\parallel}(t, r)] , \quad (3.13)$$

que pode ser relacionado com o escalar de expansão $\Theta(t, r)$, da seguinte maneira

$$\Theta(t, r) \equiv u^{\mu}{}_{;\mu} = [2H_{\perp}(t, r) + H_{\parallel}(t, r)] = 3\langle H \rangle(t, r) . \quad (3.14)$$

Contudo, a vorticidade é nula, $\omega_{\alpha\beta} = 0$, devido a que estamos usando coordenadas comoveis-síncronas [24]. O cisalhamento ³ por outro lado, é escrito na forma

$$\sigma^2(t, r) = \frac{1}{3} [H_{\parallel}(t, r) - H_{\perp}(t, r)]^2 . \quad (3.15)$$

Com isto, podemos escrever

$$\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^2 = 4\pi G\rho - \frac{1}{2}{}^3R , \quad (3.16)$$

onde

$${}^3R = -4\frac{(EX)'}{X^2X'} \quad (3.17)$$

representa o escalar de curvatura 3-dimensional da métrica de LTB.

Para estudar a expansão acelerada do universo, podemos usar a equação (3.8) e derivá-la com respeito às coordenadas radial e temporal, para assim obter as seguintes relações

$$\frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{M}{X^3} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{X}'}{X'} = \frac{2M}{X^3} - \frac{M'}{X^2X'} , \quad (3.18)$$

que combinadas com (3.9), nos servem para encontrar uma expressão generalizada da

³O cisalhamento é definido como $\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + \dot{u}_{(\mu}u_{\nu)} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\Theta$, onde $u_{(\mu;\nu)} = \frac{1}{2}(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu})$, $\dot{u}_{(\mu}u_{\nu)} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{\mu}u_{\nu} + \dot{u}_{\nu}u_{\mu})$ e $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_{\mu}u_{\nu}$.

aceleração,

$$\frac{2}{3} \frac{\ddot{X}(t, r)}{X(t, r)} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{X}'(t, r)}{X'(t, r)} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t, r). \quad (3.19)$$

Note que, a equação (3.19) tem duas componentes de aceleração nas duas direções radial e transversal. No entanto, a expansão acelerada não é necessariamente um ingrediente dos modelos inomogêneos. Como foi discutido no final do capítulo anterior, no universo de FLRW, o problema da coincidência cósmica está ligado com a necessidade da introdução de uma energia escura, para explicar a expansão acelerada. Porém nos modelos inomogêneos, a expansão acelerada pode aparecer mesmo sem a introdução de uma componente exótica na dinâmica do universo. O relevante é a reprodução da relação distância luminosidade-redshift. Contudo, isto não exclui a possibilidade de ter aceleração na direção radial, $\ddot{X}'(t, r) > 0$, mesmo que o fator de escala na direção transversal $X(t, r)$ esteja desacelerando o suficiente ou vice versa. Com isto a noção de expansão acelerada perde sentido e vira uma definição ambígua na presença das inomogeneidades [58].

A analogia entre um modelo de LTB com o universo de FLRW pode ser levada adiante definindo os parâmetros de densidade de matéria e de curvatura hoje, dados respectivamente por

$$\Omega_M(r) = \frac{2M(r)}{H_{\perp 0}^2(r)X_0^3(r)} \quad \text{e} \quad \Omega_K(r) = \frac{2E(r)}{H_{\perp 0}^2(r)X_0^2(r)}, \quad (3.20)$$

onde o subíndice 0 representa as quantidades no tempo presente t_0 , isto é $H_{\perp 0}(r) \equiv H_{\perp}(t_0, r)$ e $X(t_0, r) \equiv X_0(r)$. Levando estas considerações é possível re-escrever a equação (3.8) como [59, 60]

$$H_{\perp}^2(t, r) = H_{\perp 0}^2(r) \left[\Omega_M(r) \left(\frac{X_0(r)}{X(t, r)} \right)^3 + \Omega_K(r) \left(\frac{X_0(r)}{X(t, r)} \right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

Note que, esta equação obedece o vínculo energético

$$\Omega_M(r) + \Omega_K(r) = 1, \quad (3.22)$$

que é satisfeito para cada camada esférica de raio r . A principal diferença com relação à equação de Friedmann homogênea (2.23) é que a generalização LTB (3.21) tem dependência tanto temporal quanto espacial. Todas as quantidades LTB dependem não só do tempo mas também da coordenada radial r . Contudo, o formalismo como um todo é covariante sobre a redefinição da coordenada radial. Com efeito, a métrica de LTB (3.7), e

todas as fórmulas por conseguinte, são covariantes sobre a mudança $r \rightarrow f(r)$. Por tanto, com uma escolha adequada da coordenada radial, pode ser escolhido livremente o valor do fator de escala transversal hoje $X_0(r)$. Uma escolha conveniente é assumir o seguinte calibre $X_0(r) = r$. Isto é similar à normalização do fator de escala hoje nos modelos de FLRW, onde se faz a escolha $a(t_0) = 1$.

Com estas considerações a integração da equação (3.8), pode ser realizada obtendo o parâmetro de idade $\Delta t(r)$, que pela natureza inhomogênea da métrica (3.7), obviamente tem dependência espacial,

$$\Delta t(r) = t - t_B(r) = \frac{1}{H_{\perp 0}(r)} \int_0^{x(t,r)} \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_M + \Omega_K}}, \quad (3.23)$$

onde $x(t,r) = X(t,r)/X_0(r) = r^{-1}X(t,r)$ e $t_B(r)$ é outra função arbitrária, chamada tempo do Big Bang, definido como o tempo no qual $X(t_B, r) = 0$. O modelo pode ser especificado formalmente se são dados o parâmetro de densidade $\Omega_M(r)$ e a chamada função Big Bang $t_B(r)$. Nas próximas seções serão revisadas estas possibilidades, porém antes vamos estudar o caminho percorrido pela luz na dinâmica de fundo, com o objetivo de poder comparar os modelos de LTB com os dados observacionais. Isto é equivalente a resolver apropriadamente as geodésicas nulas para os nossos modelos.

3.2 A propagação da Luz nos modelos de Lemaître-Tolman-Bondi

Para conectar a dinâmica de LTB com os dados observacionais, precisamos relacionar o redshift e o fluxo de energia da luz com a natureza exata das inhomogeneidades. Para isto, estudamos a propagação da luz no espaço-tempo de LTB.

Dado que a métrica de LTB possui simetria esférica, vamos considerar um observador que está posicionado no centro de simetria ⁴, isto é, na origem $r = 0$ medirá trajetórias radiais entrantes. Assim, as geodésicas nulas radiais $ds^2 = 0$ da métrica (3.7), resultam em

$$\frac{dt}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{X'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \quad (3.24)$$

onde μ é um parâmetro afim e o sinal negativo é mantido para indicar as trajetórias entrantes. Logo, para dois raios de luz sucessivos, sendo soluções de (3.24), dados por

⁴Existe também a possibilidade de escolher um observador posicionado fora do centro de simetria, mas esse estudo não será abordado nesta tese.

$t_1 = t(\mu)$ e $t_2 = t(\mu) + \delta t(\mu)$. Encontramos que

$$\frac{d}{d\mu}t_1 = \frac{dt(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{X'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}, \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{d\mu}t_2 = \frac{dt(\mu)}{d\mu} + \frac{d\delta t(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{X'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} + \frac{d\delta t(\mu)}{d\mu}. \quad (3.26)$$

Por outro lado, expandindo em séries de Taylor e considerando só termos lineares em $\delta t(\lambda)$, temos

$$\frac{d}{d\mu}t_2 = -\frac{dr}{d\mu} \frac{X'(t(\mu) + \delta t(\mu), r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{X'(t, r) + \dot{X}'(t, r)\delta t(\mu)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (3.27)$$

Comparando (3.26) com (3.27) obtemos a relação [60]

$$\frac{d\delta t}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{\dot{X}'(t, r)\delta t(\mu)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (3.28)$$

Finalmente, da definição do redshift $z(\mu) = \lambda_0/\lambda(\mu) - 1$, a equação (3.28) pode ser reformulada ⁵ como

$$\frac{dz}{d\mu} = (1 + z) \frac{dr}{d\mu} \frac{\dot{X}'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (3.29)$$

Agora, as equações (3.24) e (3.29), que determinam as equações geodésicas nulas, podem ser escritas em termos do redshift da seguinte forma

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{X'(t, r)}{(1 + z)\dot{X}'(t, r)}, \quad (3.30)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{c\sqrt{1 + 2E(r)}}{(1 + z)\dot{X}'(t, r)}, \quad (3.31)$$

onde reintroduzimos explicitamente a velocidade da luz $c \approx 0.3 \text{ Gpc/Gyr}$, com o propósito de obter a distância luminosidade em Gigaparsec (Gpc) devido a que a nossa escala de tempo está em Giga-anos (Gyr).

Note que, para poder resolver o sistema (3.30) e (3.31), são necessárias duas condições iniciais. Uma escolha adequada é o ponto em $z = 0$ dado pelo $(t(0) = t_0, r(0) = 0)$. Assim, resolvendo as equações (3.30) e (3.31) encontramos a curva da região passada do cone de luz $(t(z), r(z))$.

Nos modelos de LTB, a distância de diâmetro angular medida por um observador po-

⁵Isto é possível considerando que $\lambda = c\delta t$.

sicionado no centro é diretamente relacionada com a função $X(t, r)$. Com o procedimento descrito acima, temos o fator de escala transversal $X(t, r)$ em todo ponto e as trajetórias radiais nulas $(t(z), r(z))$, assim podemos construir o fator de escala transversal através das geodésicas e obter a distância de diâmetro angular em função do redshift

$$d_A^{\text{LTB}}(z) = X(t(z), r(z)) . \quad (3.32)$$

Em complemento, podemos calcular também a distância de luminosidade através de sua relação com a distância de diâmetro angular (ver equação (2.46)) [51, 56], obtendo

$$d_L^{\text{LTB}}(z) = (1 + z)^2 d_A^{\text{LTB}}(z) . \quad (3.33)$$

Finalmente, com o objetivo de relacionar os modelos inomogêneos de LTB com as observações de supernovas de tipo Ia, precisamos definir também o módulo de distância

$$\mu_{th}^{\text{LTB}}(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L^{\text{LTB}}(z)}{10 \text{pc}} \right) . \quad (3.34)$$

Até agora, estudamos o espaço-tempo inomogêneo e a propagação da luz no cenário de LTB. Contudo, deixamos em aberto a possibilidade de modelar as inomogeneidades dando valores específicos às funções livres $t_B(r)$ e $\Omega_M(r)$. Note que, a forma que dermos às funções livres $t_B(r)$ e $\Omega_M(r)$ afetam diretamente às equações geodésicas e portanto também ao módulo de distância. É importante ressaltar que o nosso objetivo é modelar um universo inomogêneo que possa reproduzir as observações das distâncias cósmicas e não necessariamente uma expansão acelerada.

Então temos duas opções para modelar. A primeira, considerando uma função de Big Bang não simultânea ($t_B(r) \neq 0$) porém fixando $\Omega_M(r) = 1$ e a segunda considerando um Big Bang simultâneo ($t_B(r) = \text{cte.}$) definindo os perfis da distribuição de matéria $\Omega_M(r)$. No que segue abordaremos as duas possibilidades por separado.

3.3 Modelos com Big Bang não simultâneo

Na seção 3.1, vimos que a densidade de matéria $\rho(t, r)$, na equação (3.9), diverge por dois possíveis motivos, quando $X(t, r) = 0$ e $X'(t, r) = 0$. O primeiro caso é conhecido como a singularidade do tipo Big Bang, isto é, quando $X(t_B(r), r) = 0$, onde $t_B(r)$ é a chamada função Big Bang, que quantifica o tempo no qual ocorre essa singularidade. Note que a singularidade Big Bang é um evento que acontece para diferentes camadas esféricas de raio r . O segundo caso é conhecido como a singularidade do tipo cruzamento

de camadas, que será estudado em detalhe na seção 3.3.4.

Nesta seção, estudaremos os modelos com a função Big Bang não nula. Por simplicidade, tomamos o caso de curvatura nula $E = 0$. Assim, a solução da equação (3.23) dá como resultado

$$X(t, r) = \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} (t - t_B(r))^{2/3}. \quad (3.35)$$

A solução acima contém as funções arbitrárias $M(r)$ e $t_B(r)$. Assim, com o objetivo de obter o valor do parâmetro de Hubble transversal, derivamos com respeito ao tempo a equação (3.35)

$$\dot{X} = \frac{2}{3} \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} \frac{1}{(t - t_B(r))^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{X}{t - t_B(r)}. \quad (3.36)$$

Com isto, é possível achar o parâmetro de Hubble transversal, representado por

$$H_{\perp}(t, r) = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r)}. \quad (3.37)$$

Também, a partir de (3.35), encontramos que

$$X' = \frac{1}{3} \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} \left[\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] (t - t_B(r))^{2/3}. \quad (3.38)$$

Com (3.38) em (3.9) e a equação (3.8), encontramos

$$3H_{\perp}^2 = 8\pi G\rho \left[1 - \frac{2t'_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} \right]. \quad (3.39)$$

Note que, para o caso em que $t_B = \text{constante}$, reobtemos a equação de Friedmann usual. Por outro lado, a derivada mista de $X(t, r)$ dá como resultado

$$\dot{X}' = \frac{2}{9} \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} \left[\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] \frac{1}{(t - t_B(r))^{1/3}}. \quad (3.40)$$

Com estas relações é encontrado o parâmetro de Hubble radial

$$H_{\parallel}(t, r) = H_{\perp}(t, r) \frac{\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)}}{\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)}} \quad (3.41)$$

onde foi usada a relação (3.37). Note que, no limite homogêneo, obtemos a igualdade $H_{\perp} = H_{\parallel}$. Isto é, o cisalhamento (3.15) se anula e assim recuperamos o universo de FLRW.

Tendo em conta o vínculo energético (3.22) e considerando o caso $E = 0$ o parâmetro de densidade se reduz a $\Omega_M(r) = 1$. Então da relação geral (3.20) que define $\Omega_M(r)$, podemos inferir que

$$2M \equiv r^3 H_{\perp 0}^2(r). \quad (3.42)$$

Porém, junto com a equação (3.37) no tempo presente t_0 , encontramos que

$$M = \frac{2}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}. \quad (3.43)$$

Isto significa que para o nosso caso, $M \neq M_0 r^3$ [61]. Por tanto

$$\frac{M'}{M} = \frac{3}{r} + \frac{2t'_B}{t_0 - t_B}. \quad (3.44)$$

Note que, o último termo em (3.44) aparece adicionalmente à estrutura do $M(r)$. O ponto é que não podemos usar o calibre $M(r) = M_0 r^3$ junto com $X_0(r) = r$ ao mesmo tempo. A densidade de energia (3.9) agora pode ser escrita como

$$8\pi G \rho = \frac{4}{3} \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \frac{M}{M'}\right] (t - t_B)^2}. \quad (3.45)$$

Por outro lado, podemos encontrar a equação da trajetória da luz, juntando (3.30) e (3.31) para este caso em particular

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[\frac{9}{2} M(r)\right]^{1/3} \left[\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)}\right] (t - t_B(r))^{2/3}. \quad (3.46)$$

Note que para poder resolver numericamente esta equação, precisamos definir explicitamente a função Big Bang $t_B(r)$. Uma integração analítica para obter explicitamente $t = t(r)$, somente é possível no limite de FLRW. Por exemplo para $t_B = t_{B_{EdS}} = \text{cte.}$ a equação (3.46) se reduz a

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{(t - t_{B_{EdS}})^{2/3}}{(t_0 - t_{B_{EdS}})^{2/3}}, \quad (3.47)$$

onde foi usada a relação $M_0 = \frac{2}{9}(t_0 - t_{B_{EdS}})^{-2}$ ao invés de (3.43). A solução de (3.47) é

$$t(r) = t_{B_{EdS}} + (t_0 - t_{B_{EdS}}) \left[1 - \frac{1}{3} \frac{r}{t_0 - t_{B_{EdS}}}\right]^3. \quad (3.48)$$

Esta solução representa as geodésicas radiais para um universo de Einstein-de Sitter.

Para os modelos com Big Bang não simultâneo, usamos os resultados das soluções

numéricas da equação (3.46) com valores de $t_B(r)$ dados explicitamente. Porém, podemos usar ainda as relações (3.43) e (3.44) e re-escrever (3.46) da forma

$$\frac{dt}{dr} = - \left[1 + \frac{2}{3} \frac{rt'_B(r)}{t_0 - t_B(r)} - \frac{2}{3} \frac{rt'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}}. \quad (3.49)$$

A ideia é conferir explicitamente, se existem curvas de luz nos modelos com Big Bang não simultâneo, sem a introdução *ad hoc* de uma constante cosmológica, que possam reproduzir as curvas de luz do modelo Λ CDM. Esse objetivo é alcançado com a introdução *ad hoc* de funções arbitrárias, cujas origens físicas e consequências devem ser investigadas. Esta situação é estudada em [25], cujas considerações são baseadas na imposição das geodésicas nulas passadas, dos modelos inomogêneos e do Λ CDM, coincidirem. Esta correlação se traduz em uma condição sobre $t'_B(r)$, contudo, optamos por fazer o processo inverso. Partimos com modelos concretos para $t_B(r)$ com parâmetros “realísticos” e estudaremos se existe a possibilidade de reproduzir a região passada do cone de luz do modelo Λ CDM.

3.3.1 O caso com $t'_B < 0$

Para a função Big Bang, vamos considerar o seguinte ansatz [61]

$$t_B(r) = t_{B0} e^{-(r/r_c)^4} \quad (3.50)$$

onde t_{B0} é um parâmetro que quantifica a idade do universo para o observador colocado no centro de simetria e r_c indica o limite em que a inomogeneidade se manifesta. Este ansatz satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$t_B(0) = t_{B0}, \quad t_B(r \gg r_c) = 0, \quad t'_B = -\frac{4}{r_c} \left(\frac{r}{r_c} \right)^3 t_B. \quad (3.51)$$

Note que para valores de r suficientemente grandes, a função Big Bang aproxima ao limite homogêneo $t_B = 0$. Em (3.46) aparece a relação $\frac{2t'_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'}$, logo com o nosso ansatz (3.50) obtemos

$$\frac{2t'_B}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} = -\frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}. \quad (3.52)$$

De maneira a obter o índice de expansão transversal atual, podemos substituir (3.50) na equação (3.37)

$$H_{\perp 0}(r) = \frac{2}{3t_0} + \frac{2}{3t_0} \frac{t_{B0}}{t_0 e^{(\frac{r}{r_c})^4} - t_{B0}}. \quad (3.53)$$

Esta equação tem a mesma estrutura encontrada por Enqvist em [60], isto é, $H_{\perp 0}(r) = \bar{H} + \tilde{H}(r)$, onde o segundo termo representa as correções devido às inomogeneidades. Notamos também que para um observador na origem de simetria $H_{\perp 0}(r=0) = \frac{2}{3(t_0-t_{B0})}$ e que para posições muito afastadas da inomogeneidade $H_{\perp 0}(r \gg r_c) = \bar{H} = \frac{2}{3t_0}$, reobtemos o valor dos modelos de FLRW.

Por outro lado, considerando o ansatz (3.50), a densidade de energia (3.45) pode ser escrita agora como

$$8\pi G \rho = \frac{4}{3} \frac{1}{[1 + N(t, r)] (t - t_B)^2}, \quad (3.54)$$

onde

$$N(t, r) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B}{t - t_B} \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}. \quad (3.55)$$

Para conseguirmos um melhor entendimento do comportamento do perfil da densidade do modelo próximo ao centro de simetria, derivamos a equação (3.54) do qual obtemos

$$8\pi G \rho' = -\frac{4}{3} \frac{(t - t_B)^2}{[(1 + N(t, r)) (t - t_B)^2]^2} N(t, r) \left[\frac{N'}{N} - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \right]. \quad (3.56)$$

Agora consideramos o comportamento do ρ' na vizinhança da origem. Neste limite

$$\frac{N'}{N} = \frac{1}{r} [1 + \mathcal{O}(r)], \quad \left(\frac{N}{r} \right)_{r=0} > 0, \quad N(t, 0) = 0. \quad (3.57)$$

Obviamente, $\rho'(r \rightarrow 0) < 0$. A região $r = 0$ é o centro de uma região de alta densidade. Na figura 3.1, mostramos o comportamento da densidade $\rho(t_0, r)$ para diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo o parâmetro r_c . Note que, a diferença dos valores da densidade de matéria na região interna e externa da distribuição é completamente atribuída ao valor do parâmetro t_{B0} , isto era de se esperar devido a que a inomogeneidade aumenta com o valor desse parâmetro.

Como próximo passo, calculamos os caminhos geodésicos para nosso modelo. A equação (3.46), agora toma a forma

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} \frac{M'}{M} [1 + N(r)] (t - t_B(r))^{2/3}, \quad (3.58)$$

onde $M(r)$ é dado por (3.43) e

$$\frac{M'}{M} = \frac{3}{r} \left[1 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)} \right]. \quad (3.59)$$

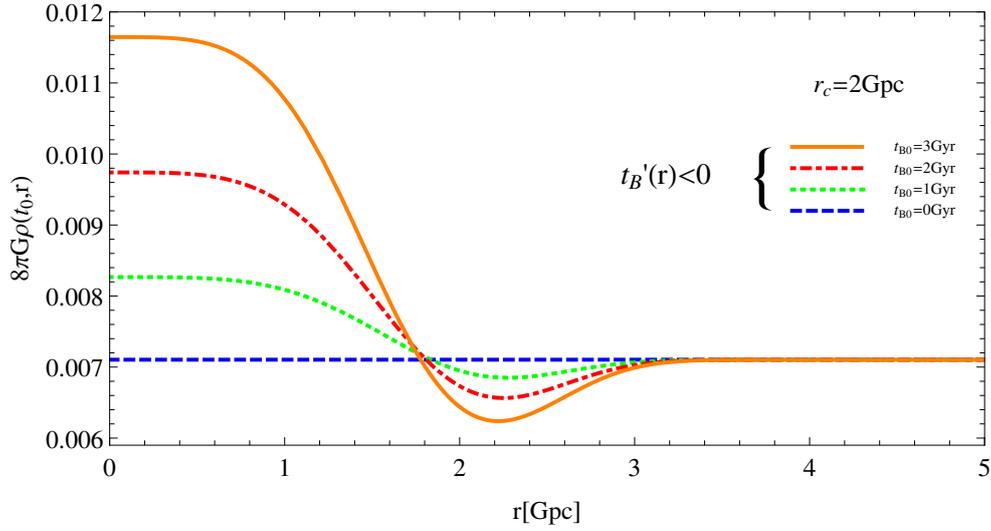


Figura 3.1: A densidade de matéria para o tempo presente com diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo o parâmetro r_c .

Esta equação diferencial não tem solução analítica, entretanto podemos resolvê-la de forma numérica.

3.3.2 O caso com $t'_B > 0$

Agora vamos considerar o seguinte modelo [61]

$$t_B(r) = t_{B0} \left(1 - e^{-(r/r_c)^4} \right), \quad t'_B = \frac{4}{r_c} \left(\frac{r}{r_c} \right)^3 (t_{B0} - t_B(r)). \quad (3.60)$$

Neste segundo caso, os limites são

$$t_B(0) = 0, \quad t_B(r \gg r_c) = t_{B0}, \quad (3.61)$$

isto é, o tempo do Big Bang cresce com r até aproximar um valor constante. Similarmente ao modelo anterior, podemos substituir o nosso ansatz (3.60) na equação (3.37) e assim obter

$$H_{\perp 0}(r) = \frac{2}{3t_0} + \frac{2}{3t_0} \frac{t_{B0} \left(1 - e^{-(r/r_c)^4} \right)}{t_0 - t_{B0} \left(1 - e^{-(r/r_c)^4} \right)}, \quad (3.62)$$

encontrando de novo a estrutura $H_{\perp 0}(r) = \bar{H} + \tilde{H}(r)$. Com a diferença que nos limites próximos do centro $H_{\perp 0}(r = 0) = \frac{2}{3t_0}$ e para largas escalas $H_{\perp 0}(r \gg r_c) = \frac{2}{3(t_0 - t_{B0})}$ os

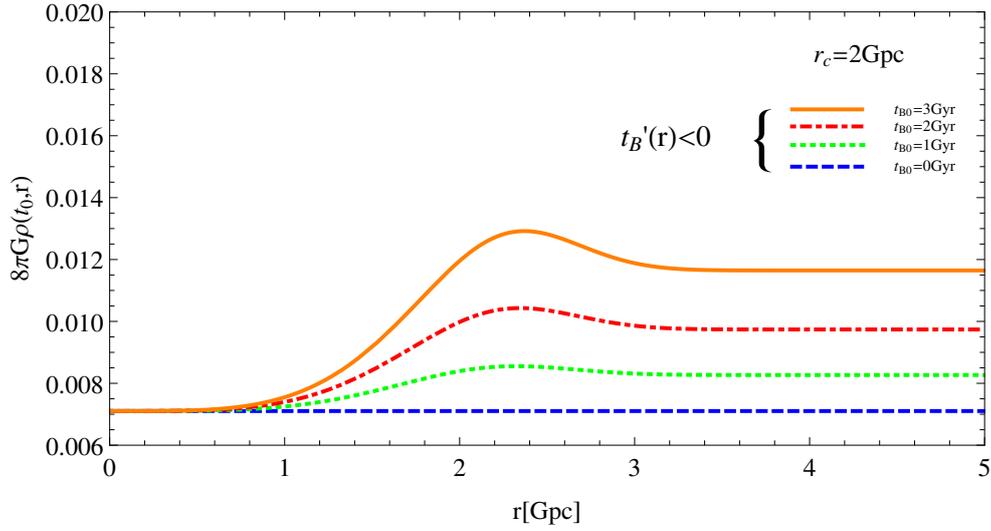


Figura 3.2: A densidade de matéria para o tempo presente com diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo r_c .

valores são inversos aos obtidos no modelo com $t'_B < 0$. Por outro lado, dado que

$$\frac{2t'_B}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} = \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{1}{1 + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \equiv U(t, r), \quad (3.63)$$

podemos encontrar uma expressão para a densidade de matéria a partir da equação (3.45) que resulta em

$$8\pi G \rho = \frac{4}{3} \frac{1}{[1 - U(t, r)] (t - t_B(r))^2}. \quad (3.64)$$

De novo, com motivo de estudar o comportamento da densidade, diferenciamos (3.64) e obtemos

$$8\pi G \rho' = \frac{4}{3} \frac{(t - t_B)^2}{[(1 - U(t, r)) (t - t_B)^2]^2} U(t, r) \left[\frac{U'}{U} - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \right]. \quad (3.65)$$

Similarmente ao caso anterior, encontramos que

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{r} [1 + \mathcal{O}(r)], \quad \left(\frac{U}{r} \right)_{r=0} > 0, \quad U(t, 0) = 0. \quad (3.66)$$

Mas, desta vez $\rho'(r \rightarrow 0) > 0$, isto quer dizer que, a densidade aumenta com r e assim $r = 0$ representa o centro de um vazio local. Na figura 3.2, mostramos o comportamento da densidade $\rho_m(t_0, r)$ para diferentes valores do parâmetro t_{B0} mantendo fixo o valor de r_c . De novo, a diferença dos valores da densidade de matéria nas regiões interna e externa da distribuição são atribuídas ao valor do parâmetro t_{B0} .

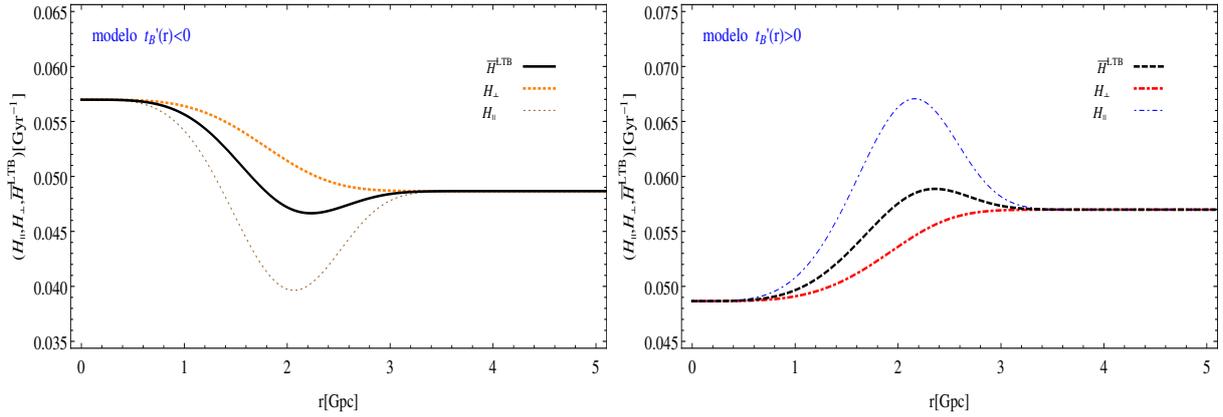


Figura 3.3: Parâmetros de Hubble radial, transversal e a média geométrica para os modelos com $t'_B(r) < 0$ (lado esquerdo) e $t'_B(r) > 0$ (lado direito).

Por outro lado, a equação (3.46) para a propagação da luz, neste caso, se torna

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} \frac{M'}{M} [1 - U(t, r)] (t - t_B(r))^{2/3} \quad (3.67)$$

com $M(r)$ substituído de (3.43) e

$$\frac{M'}{M} = \frac{3}{r} \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)} \right]. \quad (3.68)$$

Na figura 3.3, comparamos os parâmetros de Hubble para os dois modelos com Big Bang não simultâneo. Notamos que existe uma diferença nos valores dos parâmetros de Hubble obtidos pela estrutura em larga escala $r \gg r_c$ e os indicados pela estrutura próxima ao centro da distribuição, $r \approx 0$. Estas diferenças podem servir para distinguir entre os dois modelos. A região passada do cone de luz, $X(t, r(t))$ versus t , comparando os modelos de Einstein-de Sitter, Λ CDM, $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$ são mostradas na figura 3.4, onde empregamos os valores de melhor ajuste do parâmetro t_{B0} que são os resultados da nossa análise estatística descrita no capítulo 5. Note que, o modelo $t'_B(r) < 0$ reproduz muito bem o modelo Λ CDM.

Por outro lado, a propagação da luz para os modelos de Einstein-de Sitter, Λ CDM, $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$ são mostrados na figura 3.5 com os valores de melhor ajuste do parâmetro t_{B0} obtidos no capítulo 5. Note que de novo o modelo $t'_B(r) < 0$ reproduz muito bem o modelo Λ CDM.

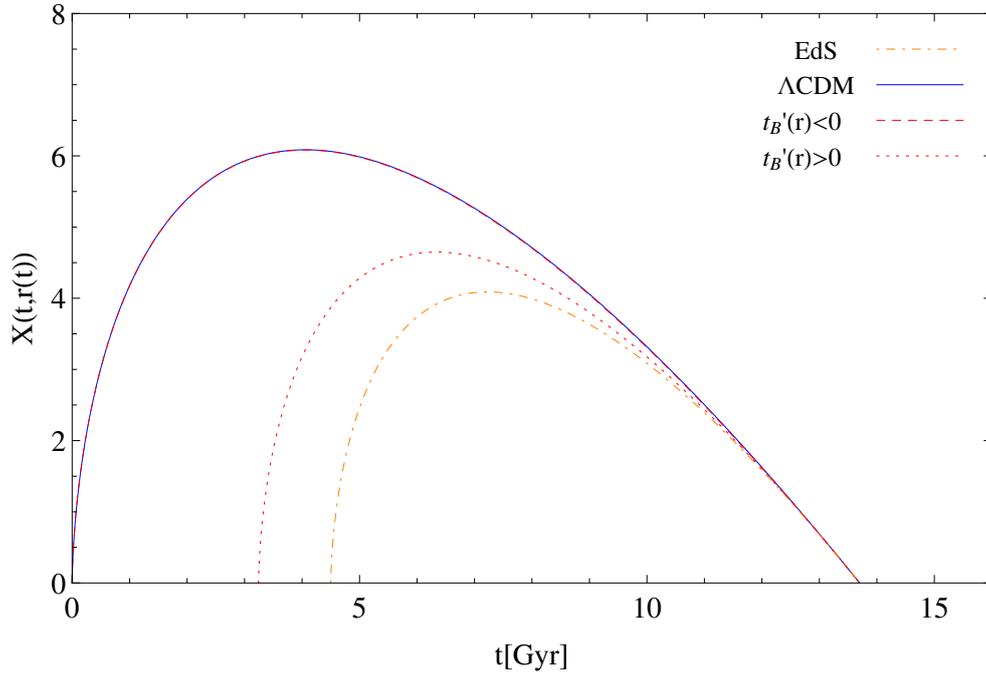


Figura 3.4: Comparação dos raios geodésicos dos modelos de Einstein-de Sitter, Λ CDM, $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$. As curvas para o modelo Λ CDM e para o modelo $t'_B(r) < 0$ são quase indistinguíveis.

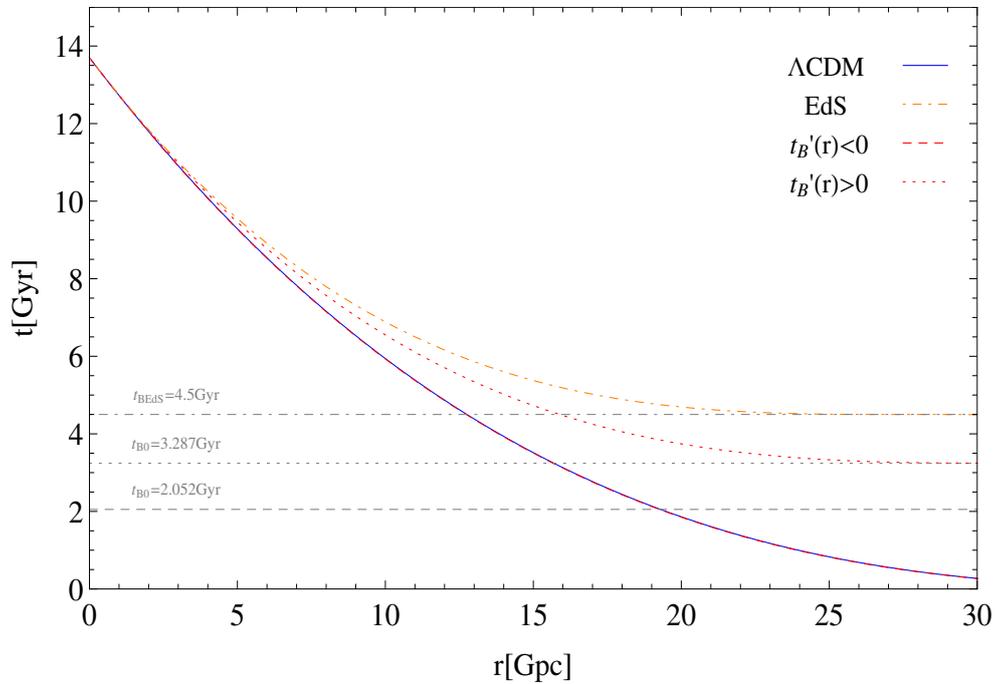


Figura 3.5: Propagação da luz para os modelos $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$ comparados com a propagação da luz nos modelos de Einstein-de Sitter e Λ CDM. As curvas para o modelo Λ CDM e para o modelo $t'_B(r) < 0$ são quase indistinguíveis.

3.3.3 A idade do universo inomogêneo

A função Big Bang não simultânea implica, logicamente, que a idade do universo é diferente para diferentes valores de r . Para um melhor entendimento, primeiro vamos calcular as idades do universo nos modelos de EdS e Λ CDM.

Como vimos acima, a propagação da luz no modelo de EdS é governada pela equação (3.47). Os limites do modelo de EdS como caso particular dos modelos LTB são $X(t, r) = ra(t)$, $E(r) = 0$ e $M(r) = M_0 r^3$, que substituindo na equação (3.8), resulta em

$$\dot{a}^2(t) = \frac{2M_0}{a(t)}. \quad (3.69)$$

A solução desta equação é

$$a(t) = \left(\frac{9M_0}{2}\right)^{1/3} (t - t_{B_{EdS}})^{2/3}. \quad (3.70)$$

A equação da geodésica (3.47), se reduz a

$$\frac{dt}{dr} = -a(t). \quad (3.71)$$

Então, aparentemente, a idade do universo está relacionada às assíntotas:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = t_{B_{EdS}}, \quad (3.72)$$

onde t_i denota o tempo inicial da evolução deste modelo. Normalizamos a escala do tempo de tal forma que a diferença $t_0 - t_{B_{EdS}}$ seja exatamente a idade do universo de EdS, enquanto que t_0 é a idade do modelo Λ CDM. Da mesma forma, no modelo Λ CDM [25]

$$\frac{dt}{dr} = -\left(\frac{6M_\Lambda}{\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left[\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}(t - t_{B\Lambda}) \right], \quad (3.73)$$

onde M_Λ , Λ e $t_{B\Lambda}$ são constantes. Identificando $t_{B\Lambda}$ com o tempo inicial zero, achamos as assíntotas:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = t_{B\Lambda} = 0. \quad (3.74)$$

No que segue encontraremos assíntotas para os modelos inomogêneos com a função Big Bang não simultânea.

Idade do universo no caso $t'_B < 0$

Na seção 3.3.1, mostramos que para o modelo de ansatz (3.50) com propriedades (3.51), a propagação da luz é governada pela equação (3.58). Logo, com o objetivo de calcular a idade do universo, fazemos

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad [1 + N(t_i, r)] (t_i - t_B(r))^{2/3} = 0, \quad (3.75)$$

onde t_i denota o tempo inicial da evolução cósmica que depende do r . Onde, a partir da definição de $N(t, r)$ e com a ajuda de um pouco de álgebra, encontramos

$$[1 + N(t, r)] (t - t_B(r))^{2/3} = (t - t_B(r))^{-1/3} \left[t - t_B(r) + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{1 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \right].$$

Assim, as assíntotas (3.75), para o nosso modelo com $t'_B < 0$, são re-escritas como:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = t_B(r) - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{1 - \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}. \quad (3.76)$$

Notamos que, o tempo inicial da expansão cósmica t_i depende de r . Isto quer dizer que existem diferentes tempos iniciais para cada camada r . Por exemplo, para valores pequenos de r temos $t_i \approx t_{B0}$ e para valores grandes de r obtemos $t_i \approx 0$. A idade do universo inhomogêneo muda de $t_0 - t_{B0}$ próximo de $r = 0$ para $t_0 = 13.7$ Giga-anos (nosso valor de referencia Λ CDM) quando $r > r_c$. Uma representação gráfica da dependência de t_i sobre r é dada na figura 3.6.

Idade do universo no caso $t'_B > 0$

Neste outro caso, a equação que governa a região passada do cone de luz é (3.67). Assim, encontramos os limites

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = t_B(r) + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_{B0} - t_B(r)}{1 + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{r_c} \right)^4 \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}, \quad (3.77)$$

onde t_i de novo denota o tempo inicial da expansão cósmica que depende da coordenada radial r . A situação aqui é totalmente oposta ao caso anterior $t'_B(r) < 0$. Por exemplo, para pequenos valores de r o tempo inicial é $t_i \approx 0$ e para r grandes temos $t_i \approx t_{B0}$. As assíntotas $dt/dr = 0$ resultam em um tempo inicial $t_i = 0$ para pequenos valores de

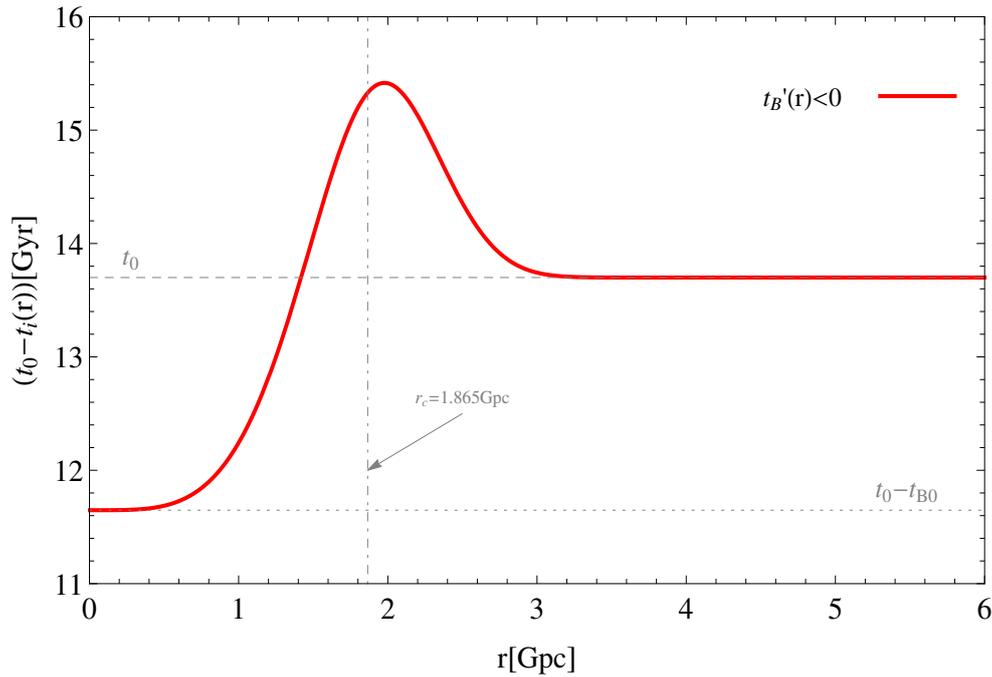


Figura 3.6: Idade do universo $t_0 - t_i(r)$ no modelo $t'_B(r) < 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc obtidos na nossa análise estatística.

r , correspondendo à idade do universo t_0 do modelo Λ CDM. Para valores grandes de r a idade do universo se reduz a $t_0 - t_{B0}$. O comportamento de t_i na dependência de r é visualizado na figura 3.7.

Note que, ao contrário do modelo $t'_B(r) < 0$, este modelo poderia apresentar problemas quando observarmos a idade de objetos distantes, tipo as velhas estrelas. Então nosso modelo poderia ser limitado com essas idades.

3.3.4 O cruzamento de camadas (Shell crossing)

Como mencionamos antes, os modelos LTB apresentam dois tipos de singularidades, o Big Bang e o cruzamento de camadas (shell crossing). Assim, os modelos com Big Bang não simultâneo são propensos à singularidade do tipo cruzamento de camadas. Esse efeito ocorre se uma camada interna $r = r_1$ expande mais rápido que uma camada externa $r = r_2$. A condição para que ocorra o cruzamento de camadas é $X' = 0$, onde como pode ser visto na equação (3.9), a densidade diverge $\rho \rightarrow \infty$. Dentro desta condição o coeficiente radial da métrica, g_{rr} , se anula. Para o nosso caso (ver equação (3.38)), isto corresponde à condição

$$\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} = 0. \quad (3.78)$$

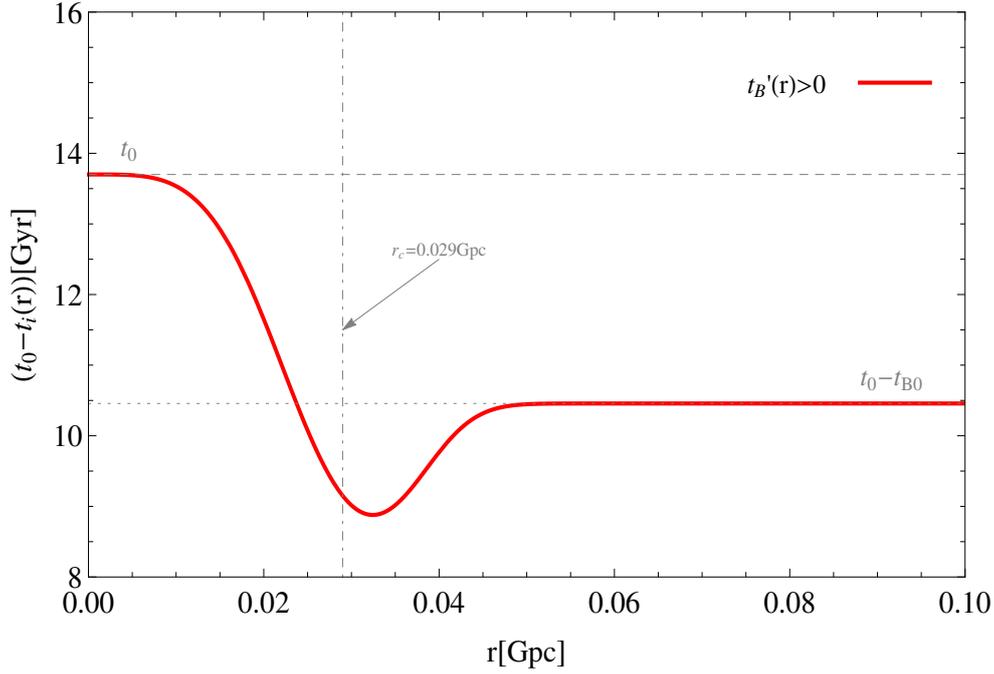


Figura 3.7: Idade do universo $t_0 - t_i(r)$ no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.243$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc obtidos na nossa análise estatística.

Então, enquanto as condições $\frac{M'}{M} > 0$ e $t'_B(r) < 0$ sejam satisfeitas não existirá algum cruzamento de camadas. Assim, com essas condições o nosso primeiro modelo, com o ansatz (3.3.1), estará livre da singularidade do tipo cruzamento de camadas. Na figura 3.8 mostramos que o modelo $t'_B(r) < 0$ não apresenta cruzamento de camadas, as curvas verdes são as respectivas linhas de mundo para cada camada do nosso modelo, calculadas fixando os valores de $r_j = \text{constante}$ para cada $X(t, r_j)$. A linha vertical de traço cinza, representa o valor do nosso parâmetro t_{B0} obtido na nossa análise estatística. Por outro lado, temos que para o nosso segundo modelo com Big Bang não simultâneo, $t'_B(r) > 0$, sim existe singularidade do tipo cruzamento de camadas. Por tanto, encontramos por meio da expressão (3.44) que o cruzamento de camadas aparece para

$$\frac{3}{r} + \frac{2t'_B(r)}{t_0 - t_B(r)} - \frac{2t'_B(r)}{t_{sc} - t_B(r)} = 0, \quad (3.79)$$

que é equivalente a escrever

$$\frac{3}{r} - 2t'_B \frac{t_0 - t_{sc}}{(t_0 - t_B)(t_{sc} - t_B)} = 0. \quad (3.80)$$

Neste caso, t_{sc} denota o ponto de inserção do cruzamento de camadas. Como pode ser apreciado em (3.80), para que ocorra o cruzamento de camadas, é necessário que a condição

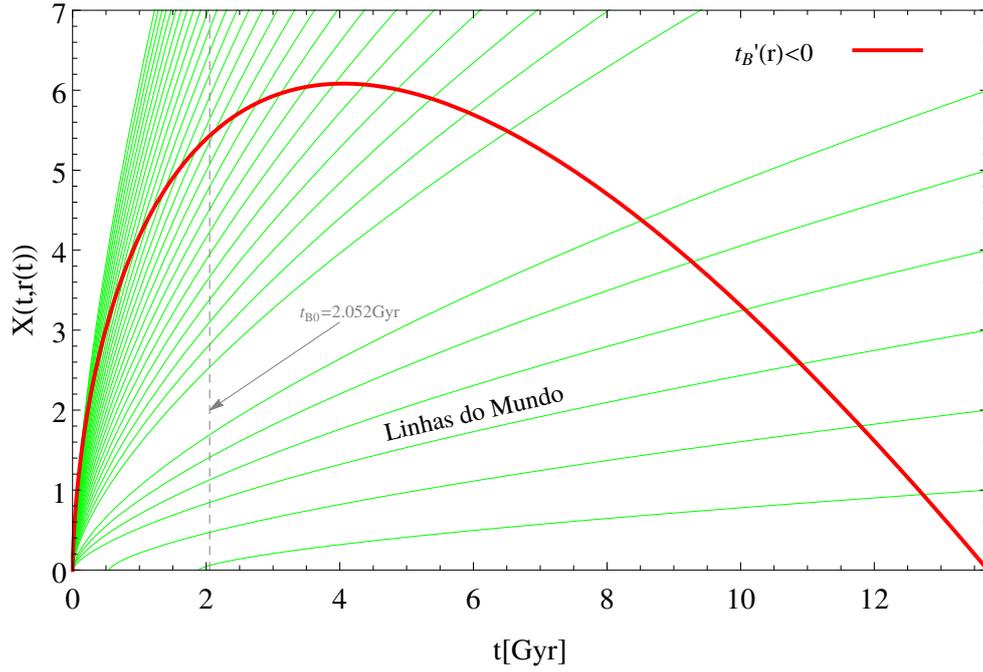


Figura 3.8: Raio geodésico do modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc. As linhas verdes representam as linhas do mundo para diferentes valores de $r_j = \text{constante}$ em $X(t, r_j)$.

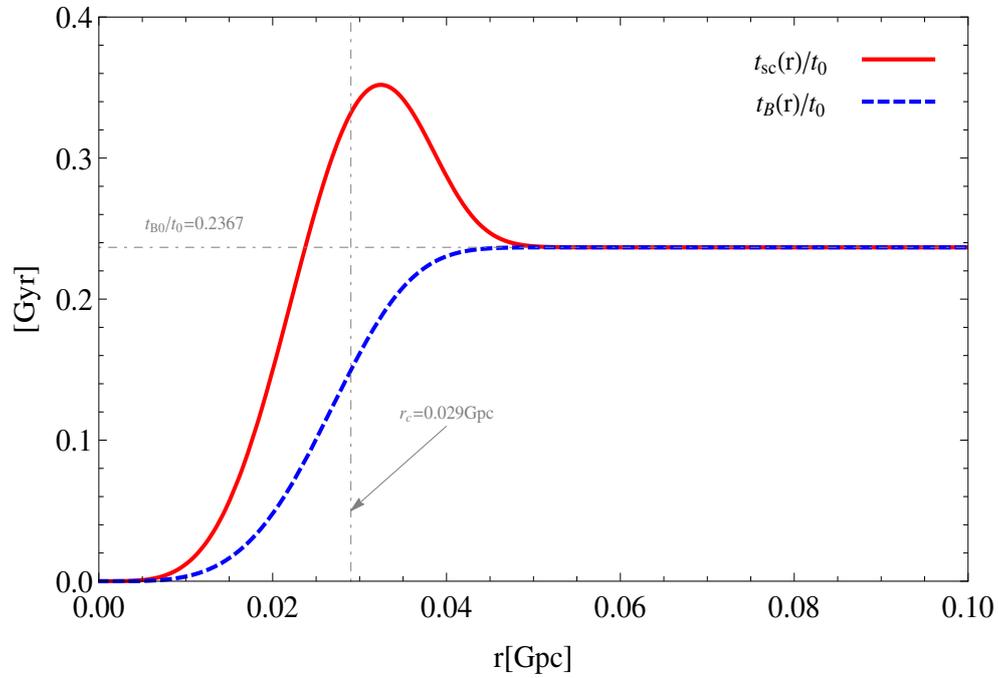


Figura 3.9: Comparação de $\frac{t_{sc}(r)}{t_0}$ e $\frac{t_B(r)}{t_0}$ no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.287$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc.

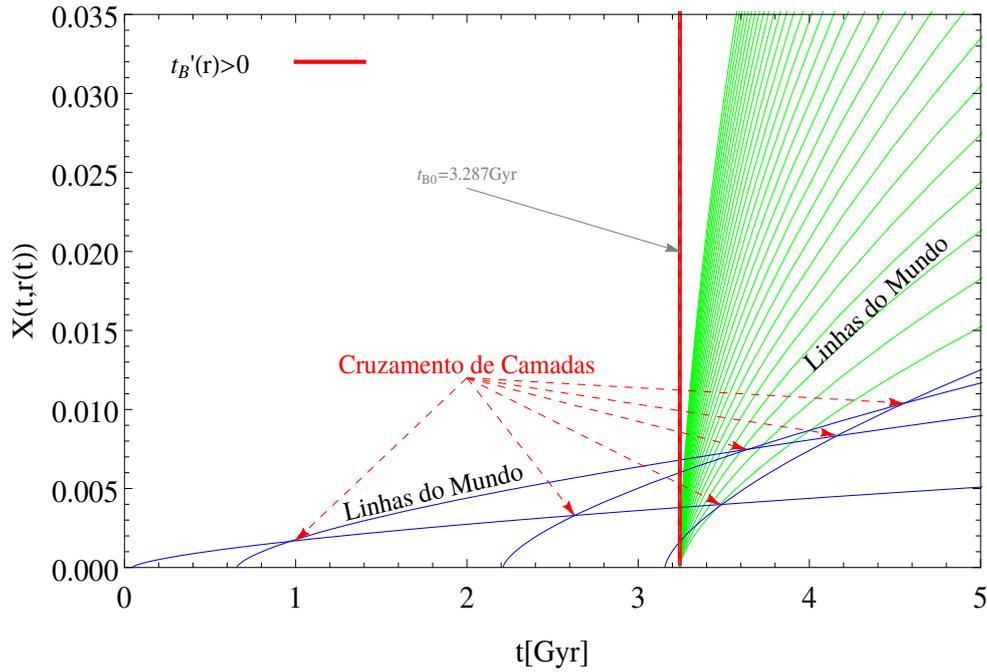


Figura 3.10: Cruzamento de camadas no modelo $t'_B(r) > 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 3.287$ Gyr e $r_c = 0.029$ Gpc.

$t'_B > 0$ seja satisfeita. Assim, resolvendo para t_{sc} encontramos

$$\frac{t_{sc}(r)}{t_0} = \frac{2t'_B(r) + \frac{3}{r}(t_0 - t_B(r))\frac{t_B(r)}{t_0}}{2t'_B(r) + \frac{3}{r}(t_0 - t_B(r))}. \quad (3.81)$$

Obviamente, o numerador é menor que o denominador, em consistência com $t < t_0$. Por tanto, temos que encontrar numericamente, no modelo $t'_B(r) > 0$, para que valor de $\frac{t_{sc}}{t_0}$ ocorre o cruzamento de camadas, com a dependência sobre os parâmetros t_{B0} e r_c . O nosso resultado é visualizado na figura 3.9. A região na qual ocorre o cruzamento de camadas é aquela dentro das curvas vermelha (sólida) e azul (tracejada).

Um exemplo claro de cruzamento de camadas é dado na figura 3.10. As curvas azuis são as respectivas linhas de mundo para cada modelo, calculadas fixando os valores de $r_j = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ para cada $X(t, r_j)$. Note que, neste caso o cruzamento de camadas ocorre para valores de tempo, t , menores do valor do parâmetro t_{B0} . Para valores de tempo maiores que esse parâmetro (linhas de mundo verdes), não ocorre mais cruzamento de camadas. Isto quer dizer que o nosso modelo com $t'_B(r) > 0$ será limitado pelo valor do parâmetro t_{B0} , coisa que não acontece com o modelo $t'_B(r) < 0$ (ver figura 3.8). Então, quando aplicarmos o nosso modelo $t'_B(r) > 0$ a um universo realístico, só poderá ser válido a partir dos valores de tempo maiores que t_{B0} .

3.3.5 O deslocamento para o azul (Blueshift)

Na seção anterior vimos que a condição $t'_B(r) < 0$ deve ser satisfeita para que não ocorra cruzamento de camadas. Contudo, nos modelos com Big Bang inhomogêneo $t'_B \neq 0$, os raios de luz emitidos perto da singularidade inicial apresentam deslocamento para o azul (blueshift) gravitacional em tempos tardios. Os raios descolados ao azul perturbam a temperatura da CMB ao longo da linha de visão do observador central hoje [28, 29, 30]. Este fenômeno é potencialmente perigoso, na medida em que podemos aplicar os nossos modelos ao universo real como referido. Nos contextos dos nossos modelos isto ocorre quando \dot{X}' muda de $\dot{X}' > 0$ para $\dot{X}' < 0$. Para $\dot{X}' > 0$ temos que $\frac{dz}{dr} > 0$ e z cresce com r , por outro lado, para $\dot{X}' < 0$ temos que $\frac{dz}{dr} < 0$, equivalente a um redshift que decresce com r .

Geralmente o redshift é determinado pela relação (3.29). No caso em que $E = 0$, a dependência do redshift é determinada completamente pelo $\dot{X}'(t(r), r)$ no (3.40). Para $t'_B(r) < 0$ não podemos excluir a possibilidade $\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t-t_B(r)} < 0$. Sobre esta condição, o redshift z não deve crescer com r , pelo contrário, z deveria decrescer. Isto pode então resultar em um blueshift de objetos distantes em lugar de um redshift. Isto é de sumo interesse para quantificar as condições nas quais semelhantes comportamentos podem ocorrer.

No geral, temos a relação

$$\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t-t_B(r)} = \frac{3}{r} + t'_B(r) \left[\frac{2}{t_0-t_B(r)} + \frac{1}{t-t_B(r)} \right]. \quad (3.82)$$

Agora, para que $\frac{dz}{dr} > 0$ seja válido, no caso $t'_B < 0$, devemos ter

$$\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t-t_B(r)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{r} > |t'_B(r)| \left[\frac{2}{t_0-t_B(r)} + \frac{1}{t-t_B(r)} \right]. \quad (3.83)$$

No presente caso (veja (3.51)) isto corresponde a

$$\frac{3}{r} - \frac{4}{r_c} \left(\frac{r}{r_c} \right)^3 \frac{2t_B(r)}{t_0-t_B(r)} > \frac{4}{r_c} \left(\frac{r}{r_c} \right)^3 \frac{t_B(r)}{t-t_B(r)} \quad (3.84)$$

ou equivalentemente

$$\frac{3}{4} \left(\frac{r_c}{r} \right)^4 - \frac{2t_B(r)}{t_0-t_B(r)} > \frac{t_B(r)}{t-t_B(r)}. \quad (3.85)$$

Resolvendo para t , encontramos

$$t(r) > t_B(r) \left[1 + \frac{1}{\frac{3}{4} \left(\frac{r_c}{r}\right)^4 - \frac{2t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \right]. \quad (3.86)$$

Sobre a condição (3.86) temos que $\frac{dz}{dr} > 0$. Para tempos primordiais $\frac{dz}{dr} < 0$ e um blueshift resultante não poderia ser excluído. A igualdade

$$t_{MRH}(r) = t_B(r) \left[1 + \frac{1}{\frac{3}{4} \left(\frac{r_c}{r}\right)^4 - \frac{2t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \right] \quad (3.87)$$

corresponde à hiper-superfície de Máximo Redshift (MRH das inciais em inglês) no [30]. Se $t_{MRH}(r)$ ocorre mais cedo do que a igualdade matéria-radiação, o potencial do blueshift está além da aplicabilidade do modelo LTB sem pressão. A situação para nosso modelo está descrita na figura 3.11. Note que, uma contribuição considerável do blueshift ocorre para tempos que são da ordem de 2 Gyr. Contudo essa contribuição desaparece para escalas maiores a 3 Gpc.

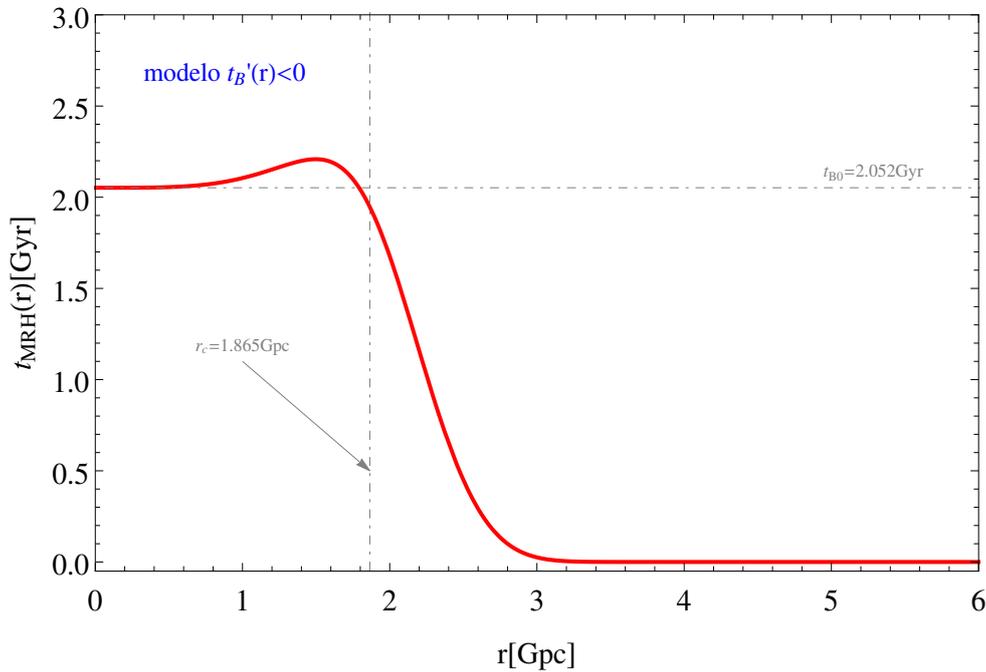


Figura 3.11: Comportamento da equação (3.87) no modelo $t'_B(r) < 0$ com os valores de melhor ajuste $t_{B0} = 2.052$ Gyr e $r_c = 1.865$ Gpc.

3.3.6 A região passada do cone de luz e o horizonte aparente

Começamos fazendo a análise para o modelo de Einstein-de Sitter. A equação do cone de luz para o universo de EdS é dada pela equação (3.48). Resolvendo esta equação para r encontramos que

$$r(t) = 3(t_0 - t_{B_{EdS}}) \left[1 - \left(\frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{1/3} \right]. \quad (3.88)$$

Com esta solução, o raio espacial do cone de luz é

$$X = r(t)a(t) = 3(t_0 - t_{B_{EdS}}) \left(\frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{2/3} \left[1 - \left(\frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{1/3} \right] \quad (3.89)$$

ou, em termos de r ,

$$X = ra(t(r)) = r \left[1 - \frac{1}{3} \frac{r}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right]^2. \quad (3.90)$$

Temos então, que para as expressões em termos de t se satisfazem ambos $X(t = t_{B_{EdS}}) = 0$ e $X(t = t_0) = 0$. Equivalentemente, em termos de r , satisfaz as condições $X(r = 0) = 0$ e $X(r = 3(t_0 - t_{B_{EdS}})) = 0$. Isto significa que existe um máximo valor para X . Ao longo da região passada do cone de luz, X inicialmente cresce até atingir um valor máximo X_m e logo começa a decrescer. Assim, a condição para o tempo máximo t_m é

$$\frac{dX}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (t_m - t_{B_{EdS}})^{1/3} = \frac{2}{3} (t_0 - t_{B_{EdS}})^{1/3}. \quad (3.91)$$

Equivalentemente, para o máximo valor, r_m , de r ,

$$\frac{dX}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_m = t_0 - t_{B_{EdS}}. \quad (3.92)$$

De isto segue que o valor máximo corresponde a

$$X_m = \frac{4}{9} (t_0 - t_{B_{EdS}}) = \frac{3}{2} (t_m - t_{B_{EdS}}). \quad (3.93)$$

Por outro lado, o horizonte aparente é a superfície mais externa presa em torno de uma região fechada. O nome aparente é dado porque separa os raios de luz que estão presos dentro da superfície, daqueles que podem afastar-se dela. A condição para o horizonte

aparente é $X = 2M$ [62], no caso do modelo de EdS ($X = ra$ e $M = M_0 r^3$), segue que

$$a = 2M_0 r^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{2/3} = 2M_0 r^2. \quad (3.94)$$

Assim, usando o valor $M_0 = \frac{2}{9} (t_0 - t_{B_{EdS}})^{-2}$, e com um simples álgebra, obtemos então que

$$\frac{2}{3}(2M) = t - t_{B_{EdS}} \quad \Rightarrow \quad 2M = \frac{3}{2}(t - t_{B_{EdS}}). \quad (3.95)$$

ou

$$X = \frac{3}{2}(t - t_{B_{EdS}}). \quad (3.96)$$

Note que, comparando (3.96) com (3.93) concluímos que o horizonte aparente intersecta a região passada do cone de luz no máximo valor de X . Isto é, à medida que vamos para trás no tempo ao longo da região passada do cone de luz, o raio do cone de luz primeiro aumenta até atingir o horizonte aparente e em seguida diminui até atingir a singularidade Big Bang (ver figura 3.4). Isto reproduz o resultado obtido em [25].

Por outro lado, para o caso dos modelos de LTB, consideramos a solução particular (3.35). Agora, para tratar com o cone de luz temos que usar $t = t(r)$, que é a solução da equação (3.46). Logo, se diferenciamos (3.35) obtemos

$$X' = X \left[\frac{1}{3} \frac{M'}{M} + \frac{2}{3} \frac{X}{t(r) - t_B(r)} \left(\frac{dt}{dr} - t'_B \right) \right], \quad (3.97)$$

que inserindo (3.46), dá como resultado a seguinte expressão

$$X' = \frac{X}{3} \left[\left(1 - \frac{2}{3} \frac{X}{t(r) - t_B(r)} \right) \left(\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B}{t(r) - t_B(r)} \right) \right]. \quad (3.98)$$

De novo, vemos que os valores extremos de X são obtidos quando $X' = 0$. Similarmente aos resultados prévios do modelo de Einstein-de Sitter, a exceção da solução $X = 0$ para $r = 0$ e $t = t_B$, temos que

$$\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B}{t(r) - t_B(r)} = 0 \quad \Rightarrow \quad X' = 0. \quad (3.99)$$

Isto reproduz a condição para que ocorra o cruzamento de camadas. Contudo, na equação (3.98) notamos que existe outra condição que obviamente determina o máximo de X , isto é

$$X_m = \frac{3}{2}(t(r_m) - t_B(r_m)), \quad (3.100)$$

onde os subíndices m denotam o valor de r no máximo de X . Esta é a expressão equivalente

da equação (3.93) para os nossos modelos inomogêneos.

Agora, vamos estudar o horizonte aparente $X = 2M$ [62]. Que no caso dos modelos inomogêneos, significa que

$$X = 2M \quad \Rightarrow \quad 2M = \frac{4}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}. \quad (3.101)$$

Por outro lado, com ajuda de (3.43), podemos escrever X como

$$X = r \left(\frac{t - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)} \right)^{2/3}. \quad (3.102)$$

Finalmente, a condição $X = 2M$ fica como

$$r \left(\frac{t - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)} \right)^{2/3} = \frac{4}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}, \quad (3.103)$$

que via uma álgebra simples, temos

$$\frac{r^2}{(t_0 - t_B(r))^{4/3}} = \frac{9}{4} (t - t_B(r))^{2/3}, \quad (3.104)$$

assim, disto segue que

$$t - t_B(r) = \frac{2}{3} \frac{4}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} = \frac{2}{3} (2M), \quad (3.105)$$

que é equivalente a escrever

$$2M = X = \frac{3}{2} (t - t_B(r)). \quad (3.106)$$

A comparação com (3.100) mostra que aqui também o horizonte aparente intersecta a região passada do cone de luz no máximo valor de X . De novo, o raio do cone de luz aumenta à medida que vamos para trás no tempo ao longo da região passada do cone de luz até atingir o horizonte aparente e logo diminui até a singularidade Big Bang (ver figura 3.4).

3.3.7 O desvio do Redshift (Redshift Drift) no LTB

Até agora, mostramos que os modelos inomogêneos podem reproduzir os resultados do modelo padrão Λ CDM, mas sem poder distinguir entre os dois modelos. Porém, existe a possibilidade de falsear estes modelos, estudando o desvio do redshift (redshift drift) [65],

Isto é, a derivada temporal do redshift cosmológico no universo de LTB. Então, acredita-se que esta é a maneira decisiva de poder diferenciar entre os modelos LTB e os modelos copernicanos.

O caso Λ CDM

Primeiro vamos descrever o desvio do redshift para o modelo padrão Λ CDM [67]. Para isto, consideramos a radiação emitida por uma fonte nos tempos t_s e $t_s + \delta t_s$ que serão observados nos tempos posteriores t_0 e $t_0 + \delta t_0$, que podem ser relacionados, usando a definição da distância comóvel (2.35), da seguinte forma

$$\int_{t_s}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_s + \delta t_s}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.107)$$

que reacomodando os limites de integração logo temos

$$\int_{t_s}^{t_s + \delta t_s} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.108)$$

assim, considerando que $\delta t/t \ll 1$, encontramos a razão

$$\frac{\delta t_s}{a(t_s)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (3.109)$$

O redshift, da fonte, observado hoje, isto é, no tempo t_0 , será

$$z_s(t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t_s)} - 1, \quad (3.110)$$

e para um intervalo de tempo posterior δt_0 (δt_s para a fonte), temos

$$z_s(t_0 + \delta t_0) = \frac{a(t_0 + \delta t_0)}{a(t_s + \delta t_s)} - 1. \quad (3.111)$$

Assim, a variação do redshift da fonte é

$$\delta z_s = \frac{a(t_0 + \delta t_0)}{a(t_s + \delta t_s)} - \frac{a(t_0)}{a(t_s)}. \quad (3.112)$$

Depois de uma expansão em série de Taylor do fator de escala $a(t + \delta t) \approx a(t) + \dot{a}\delta t$, encontramos que

$$\delta z_s = \delta t_0 \left[\frac{\dot{a}(t_0) - \dot{a}(t_s)}{a(t_s)} \right]. \quad (3.113)$$

Note que, a mudança do redshift, $\delta z \propto [\dot{a}(t_0) - \dot{a}(t_s)]$, resulta da evolução do \dot{a} com o tempo cósmico, isto é aceleração ou desaceleração. A expressão acima, pode ser escrita em termos do índice de expansão, como

$$\delta z_s = H_0 \delta t_0 \left[1 + z_s - \frac{H(z_s)}{H_0} \right]. \quad (3.114)$$

Considerando o modelo Λ CDM, podemos escrever a equação de Friedmann (2.23) em função do redshift como $H(z_s) = H_0[\Omega_M(1+z_s)^3 + \Omega_K(1+z_s)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$ com $\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$. Assim, a equação (3.114) pode ser re-escrita como

$$\delta z_s = (1+z_s)H_0\delta t_0 \left[1 - \sqrt{\Omega_M(1+z_s) + \Omega_K + \Omega_\Lambda(1+z_s)^{-2}} \right]. \quad (3.115)$$

Note que, esta expressão será nula quando consideramos um universo vazio ($\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$) e será positiva para um universo inflacionário dominado pela constante cosmológica Ω_Λ .

O caso LTB

Por outro lado, para calcular o desvio do redshift nos modelos com Big Bang não simultâneo, podemos seguir o método desenvolvido em [66]. Então, vamos usar as equações geodésicas para o caso $E = 0$,

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(1+z)\dot{X}'(r,t)}{c}, \quad (3.116)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{X'(r,t)}{c}. \quad (3.117)$$

As trajetórias da luz observada pelo observador no centro de simetria no $t = t_0$ e $t = t_0 + \delta t_0$, respectivamente, são as seguintes

$$z = z_\star(r, t_0), \quad t = t_\star(r, t_0) \quad (3.118)$$

e

$$z = z_\star(r, t_0) + \delta z(r), \quad t = t_\star(r, t_0) + \delta t(r). \quad (3.119)$$

Aqui temos por definição que $t_*(0, t_0) = t_0$, $\delta t(0) = \delta t_0$, $z_*(0, t_0) = 0$ e $\delta z(0) = 0$. Substituindo (3.118) e (3.119) nas equações geodésicas, obtemos

$$\frac{d\delta z}{dr} = \frac{\dot{X}'}{c}\delta z + (1+z)\frac{\ddot{X}'}{c}\delta t, \quad (3.120)$$

$$\frac{d\delta t}{dr} = -\frac{\dot{X}'}{c}\delta t. \quad (3.121)$$

Podemos trocar r por $z = z_*(r, t_0)$, usando

$$\frac{d}{dr} = \frac{dz}{dr} \frac{d}{dz} = \frac{(1+z)\dot{X}'}{c} \frac{d}{dz}, \quad (3.122)$$

Assim, temos que

$$\frac{d\delta z}{dz} = \frac{\delta z}{1+z} + \frac{\ddot{X}'}{\dot{X}'}\delta t, \quad (3.123)$$

$$\frac{d\delta t}{dz} = -\frac{\delta t}{1+z}, \quad (3.124)$$

a última equação é integrada facilmente e resulta em $\delta t = \delta t_0/(1+z)$, que substituída em (3.123), será

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\delta z}{1+z} \right) = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{\ddot{X}'}{\dot{X}'} \delta t_0. \quad (3.125)$$

Por outro lado, podemos usar a expressão de $X(t, r)$ para obter

$$\ddot{X}' = -\dot{X}' \left[\frac{t'_B}{(t-t_B)^2} \frac{r}{3 + 2\frac{rt'_B}{t_0-t_B}} + \frac{1}{t-t_B} \right]. \quad (3.126)$$

Finalmente, a equação do desvio do redshift será

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\delta z}{1+z} \right) = -\frac{\delta t_0}{(1+z)^2} \left[\frac{t'_B}{(t-t_B)^2} \frac{r}{3 + 2\frac{rt'_B}{t_0-t_B}} + \frac{1}{t-t_B} \right]. \quad (3.127)$$

Note que, como foi feito em [66], os valores negativos nos modelos LTB estão em concordância com o seguinte resultado nas proximidades do centro ($r = 0$),

$$\left. \frac{d\delta z}{\delta t_0} \right|_{t=t_0, r=0} = -\frac{z}{t_0 - t_B(0)}, \quad (3.128)$$

e se queremos obter um valor positivo, deveria ser satisfeita a relação $t_0 < t_B(0)$. Mas como é sabido isso leva a cruzamento de camadas.

Na figura 3.12 comparamos os dois modelos LTB com o modelo Λ CDM em uma escala de tempo de $\delta t_0 = 10$ anos e encontramos a diferença fundamental no sinal da curva na faixa de redshift $z \lesssim 2$, reproduzindo o resultado encontrado na referência [66], onde a valor positivo é atribuído a que a constante cosmológica Λ gera gravidade repulsiva. Esta diferença é considerada como uma ferramenta potencial para discriminar entre estes modelos.

A medição do desvio do redshift, na atualidade, é impossível de ser feita. Contudo, existem projetos recentes como o CODEX (COsmic Dynamics and EXo-earth experiment) desenvolvido no E-ELT (European Extremely Large Telescope), argumentando que podem medir o deslocamento da velocidade, $\delta v_s = c\delta z_s/(1 + z_s)$, na ordem de 110 cm/s sobre um período de 10 anos das observações do Lyman- α forest no espectro de absorção do QSO [68]. Evidentemente essas diferenças servirão para poder distinguir o modelo Λ CDM de um modelo LTB que foi desenhado para reproduzir a mesma relação distância de luminosidade-redshift. Contudo, essa análise escapa do objetivo principal desta tese e será desenvolvida em trabalhos futuros. Até aqui fomos capazes de estudar os modelos com Big Bang não simultâneo, porém como próximo passo, na seguinte seção, estudaremos a outra possibilidade que é a de um universo com Big Bang simultâneo.

3.4 Modelos com Big Bang simultâneo

Nesta seção trabalhamos a possibilidade de considerar o Big Bang simultâneo $t_B(r) = t_*$ sendo o valor de t_* uma constante, que com a hipótese do tempo de Big Bang simultâneo o valor numérico de t_* é irrelevante e podemos definir como sendo nulo, como deve ser esperado nos modelos genéricos da inflação. Com esta consideração, podemos calcular a equação (3.23) para o tempo presente, resultando em

$$H_{\perp 0}(r) = \frac{1}{t_0} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_M + \Omega_K}}, \quad (3.129)$$

onde t_0 é a idade do universo, que por economia computacional, fixamos em $t_0 = 13.7$ Gyr⁶. Isto quer dizer que, a idade do universo é uma quantidade global, que contrariamente aos modelos com Big Bang não simultâneo, não depende da localização espacial dos observadores. Note que $H_{\perp 0}(r)$ é medido em unidades de Gyr⁻¹. Assim, para cada valor do parâmetro de densidade da matéria Ω_M , a equação (3.129) nos permite calcular

⁶Este valor corresponde a fixar $H_0 = 71$ Km/Mpc/sec no modelo Λ CDM.

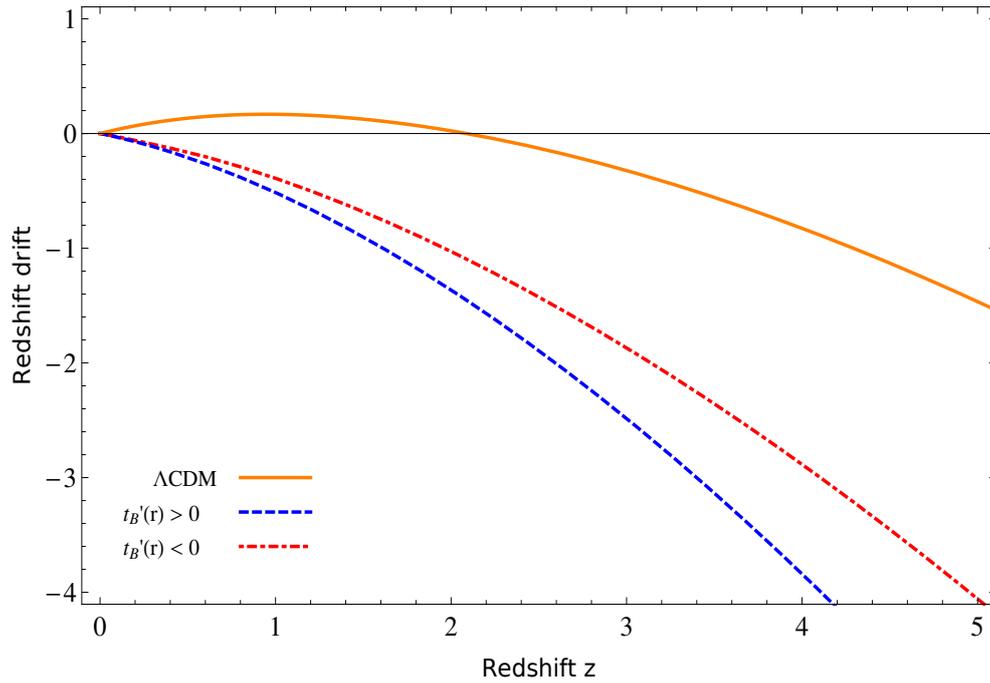


Figura 3.12: O desvio do redshift para os modelos de Big Bang não simultâneo com seus respectivos parâmetros de melhor ajuste, comparados com o modelo Λ CDM plano ($\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$).

o valor do parâmetro de Hubble hoje $H_{\perp 0}(r)$ o qual pode ser usado em (3.21) para obter o valor numérico do fator de escala inhomogêneo $X(t, r)$ e todas suas derivadas parciais. Estes tipos de modelos são considerados como restritos. Um próximo passo é definir o perfil do parâmetro de densidade, passo que será estudado na seguinte subseção.

3.4.1 Os perfis dos vazios locais

Como é bem conhecido, no modelo Λ CDM a diminuição da luminosidade das supernovas distantes pode ser explicada somente com a introdução *ad hoc* de uma componente de energia escura, que é a responsável pela presente expansão acelerada do universo. Contudo, com os modelos inhomogêneos de simetria esférica, é possível gerar o escurecimento observado de objetos distantes via uma região de baixa densidade local.

Assim, analisaremos três perfis diferentes da distribuição de matéria, conhecidos como: o perfil de CGBH (Constrained Garcia-Bellido-Haugbølle), o perfil de tipo Gaussiano e a nossa nova proposta, o perfil de $C\nu\text{-ln}2$ o qual será descrito depois. Os três perfis apresentam duas propriedades principais, eles descrevem uma vizinhança local de simetria esférica com baixa densidade e se aproximam suavemente a um universo de Einstein-de Sitter (ver figura 3.13). Os parâmetros para cada perfil são escolhidos de forma que recuperemos assintoticamente um espaço-tempo de FLRW. Esse comportamento assintótico

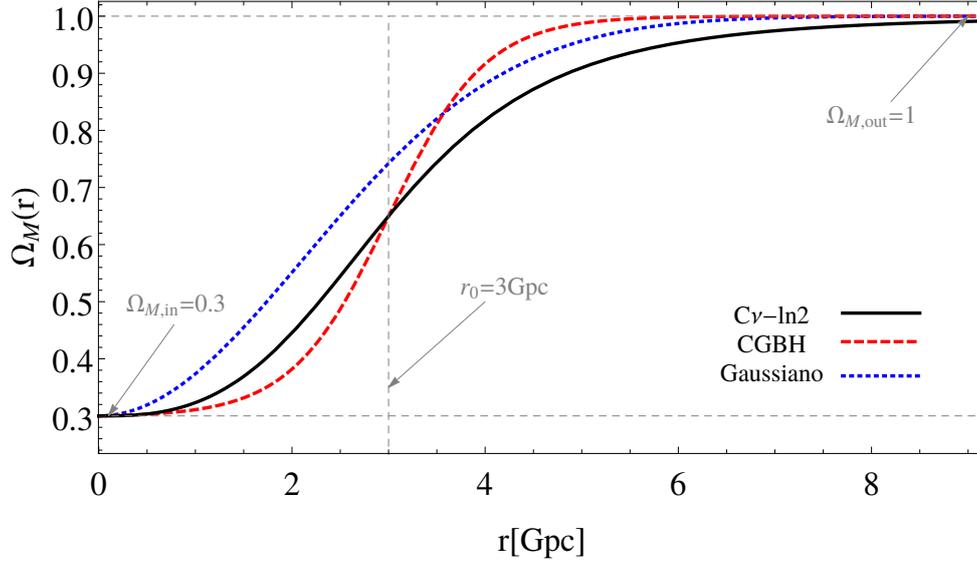


Figura 3.13: A distribuição de matéria hoje como uma função da coordenada radial. Nos três perfis fixamos $\Omega_{M,\text{out}} = 1$. Os outros parâmetros são considerados como livres que serão ajustados com os dados observacionais. Para plotar os perfis usamos $\Omega_{M,\text{in}} = 0.3$, $\Delta r = \nu = 0.5$ e $r_0 = 3$. A linha vertical de traço cinza indica o valor do raio do vazio, enquanto as linhas horizontais os valores das densidades de matéria.

também nos garante que muito no passado todos os modelos se aproximam a um universo de FLRW.

O perfil do modelo CGBH

Na referência [63], J. Garcia-Bellido e T. Haugbølle propõem um modelo, com seis parâmetros livres, que é completamente caracterizado pela distribuição de matéria $\Omega_M(r)$ e o índice de expansão transversal hoje $H_{\perp 0}(r)$. Essa parametrização fixa os valores, na região interna e externa, de Ω_M e $H_{\perp 0}$, e também quão grande e suave é a transição das regiões interna e externa. Devido a que o perfil é restrito pelo requerimento de um tempo de Big Bang simultâneo, eles chamaram seu modelo como CGBH (das iniciais em inglês Constrained Garcia-Bellido-Haugbølle). Esta condição extra impõe a relação entre o índice de expansão e a densidade de matéria, assim o modelo terá só uma única função livre.

O perfil do modelo CGBH é parametrizado da seguinte maneira

$$\Omega_M(r) = \Omega_{M,\text{out}} + (\Omega_{M,\text{in}} - \Omega_{M,\text{out}}) \left[\frac{1 - \tanh[(r - r_0)/2\Delta r]}{1 + \tanh(r_0/2\Delta r)} \right], \quad (3.130)$$

onde $\Omega_{M,\text{in}}$ representa a densidade de matéria no centro do vazio local e r_0 é o tamanho típico do vazio que, em ordem a ajustar com os dados observacionais, será da ordem de

Gpc. O parâmetro Δr controla a suavidade da transição de dentro para fora do vazio. Finalmente $\Omega_{M_{\text{out}}}$ é a densidade na região externa do vazio que é fixada à unidade em ordem a recuperar assintoticamente o modelo plano de FLRW.

O perfil do tipo Gaussiano

O segundo perfil a ser considerado é similar ao CGBH, mas com um parâmetro menos e exibe uma transição do tipo-gaussiana do dentro para fora do vazio local. A densidade de matéria para o perfil Gaussiano é escrito da forma

$$\Omega_M(r) = \Omega_{M_{\text{out}}} + (\Omega_{M_{\text{in}}} - \Omega_{M_{\text{out}}})e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}. \quad (3.131)$$

Todos os parâmetros têm a mesma interpretação física como antes considerado. Porém, pela falta de um parâmetro que suavize a transição de dentro para fora do vazio local, o valor dos parâmetros $\Omega_{M_{\text{in}}}$ e r_0 serão bem diferentes aos resultados do modelo CGBH.

O perfil do modelo $C\nu\text{-ln}2$

O terceiro e último perfil a ser considerado é proposto nesta tese com o raciocínio similar às parametrizações previamente estudadas. Isto é, um modelo de vazio que muda suavemente a densidade de matéria de um meio de baixa densidade com $\Omega_{M_{\text{in}}}$ para outra região com densidade de matéria $\Omega_{M_{\text{out}}}$. Este perfil é apresentado como [64]

$$\Omega_M(r) = \Omega_{M_{\text{in}}} + (\Omega_{M_{\text{out}}} - \Omega_{M_{\text{in}}}) \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3+\nu} \left[1 + \nu \ln^2\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{3+\nu} \left[1 + \nu \ln^2\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]}, \quad (3.132)$$

onde ν tem o papel similar de Δr no modelo CGBH. Note que, para $\nu = 0$, será suprimido o aporte logarítmico na transição de dentro para fora do vazio e o perfil se reduz ao caso mais simples de uma potenciação ao cubo.

Uma característica interessante que distingue este perfil do CGBH é a independência do valor do parâmetro de densidade em r_0 com respeito ao parâmetro de transição. No modelo $C\nu\text{-ln}2$ a densidade de matéria $\Omega_M(r_0)$ depende só de $\Omega_{M_{\text{in}}}$ e $\Omega_{M_{\text{out}}}$. Com efeito, um cálculo direto mostra que

$$\Omega_M(r_0) = \frac{\Omega_{M_{\text{in}}} - \Omega_{M_{\text{out}}} \tanh(r_0/2\Delta r)}{1 + \tanh(r_0/2\Delta r)} \quad \text{perfil CGBH} \quad (3.133)$$

$$\Omega_M(r_0) = \frac{1}{2} (\Omega_{M_{\text{out}}} + \Omega_{M_{\text{in}}}) \quad \text{perfil } C\nu\text{-ln}2 \quad (3.134)$$

Estes valores coincidem para valores $\frac{r_0}{2\Delta r} \gg 1$, na figura 3.13 pode ser apreciado esse comportamento.

Por outro lado, na figura 3.14, mostramos os índices de expansão transversal e radial (3.10) e a média geométrica \bar{H}^{LTB} para os três perfis. Note que o modelo CGBH apresenta uma maior diferença entre os parâmetros de Hubble transversal e radial em comparação com os outros modelos. Na seção 3.4.5 veremos como estas diferenças têm um papel essencial quando compararmos com os dados da escala de BAO.

3.4.2 O parâmetro de desaceleração

Na seção 3.1 foram obtidos os parâmetros de Hubble na direção transversal $H_{\perp 0}(r)$ e radial $H_{\parallel 0}(r)$, então é lógico pensar que existem dois parâmetros de desaceleração diferentes. Assim, em analogia com a métrica de FLRW, podemos definir o parâmetro de desaceleração transversal e radial como

$$q_{\perp}(t, r) = -\frac{\ddot{X}(t, r)}{X(t, r)H_{\perp}^2(t, r)} \quad , \quad (3.135)$$

$$q_{\parallel}(t, r) = -\frac{\ddot{X}'(t, r)}{X'(t, r)H_{\parallel}^2(t, r)} \quad . \quad (3.136)$$

Note que, no limite de FLRW $X(r, t) = a(t)r$, com $a(t)$ o fator de escala. Pode ser verificado imediatamente que ambos parâmetros de desaceleração, definidos acima, convergem ao parâmetro de desaceleração de FLRW, isto é $q = q_{\parallel} = q_{\perp} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$. Na figura 3.15, mostramos ambos parâmetros de desaceleração em função da coordenada radial, r , para diferentes tempos. Em todos os casos a expansão hoje é de forma desacelerada contrariando o resultado obtido no modelo Λ CDM que descreve um universo em expansão acelerada. Esta é uma característica geral dos modelos de LTB, a qual é considerada na literatura como uma forma potencial de distinguir uma evolução homogênea e isotrópica de um modelo inomogêneo [65, 66]. Além dos dois parâmetros de desaceleração definidos acima, podemos definir também um parâmetro de desaceleração efetivo como resultado da combinação deles. No espaço-tempo de LTB o fator de expansão, $\Theta(t, r)$, é definido por (3.14). Em adição, o parâmetro de desaceleração, no Universo de FLRW, pode ser escrito como $q = -1 - 3\dot{\Theta}/\Theta$. Por tanto, é possível definir o parâmetro de desaceleração efetivo de LTB, simplesmente substituindo o fator de expansão por sua versão em LTB. Fazendo uso de (3.30), pode ser encontrado o **parâmetro de desaceleração efetivo** em

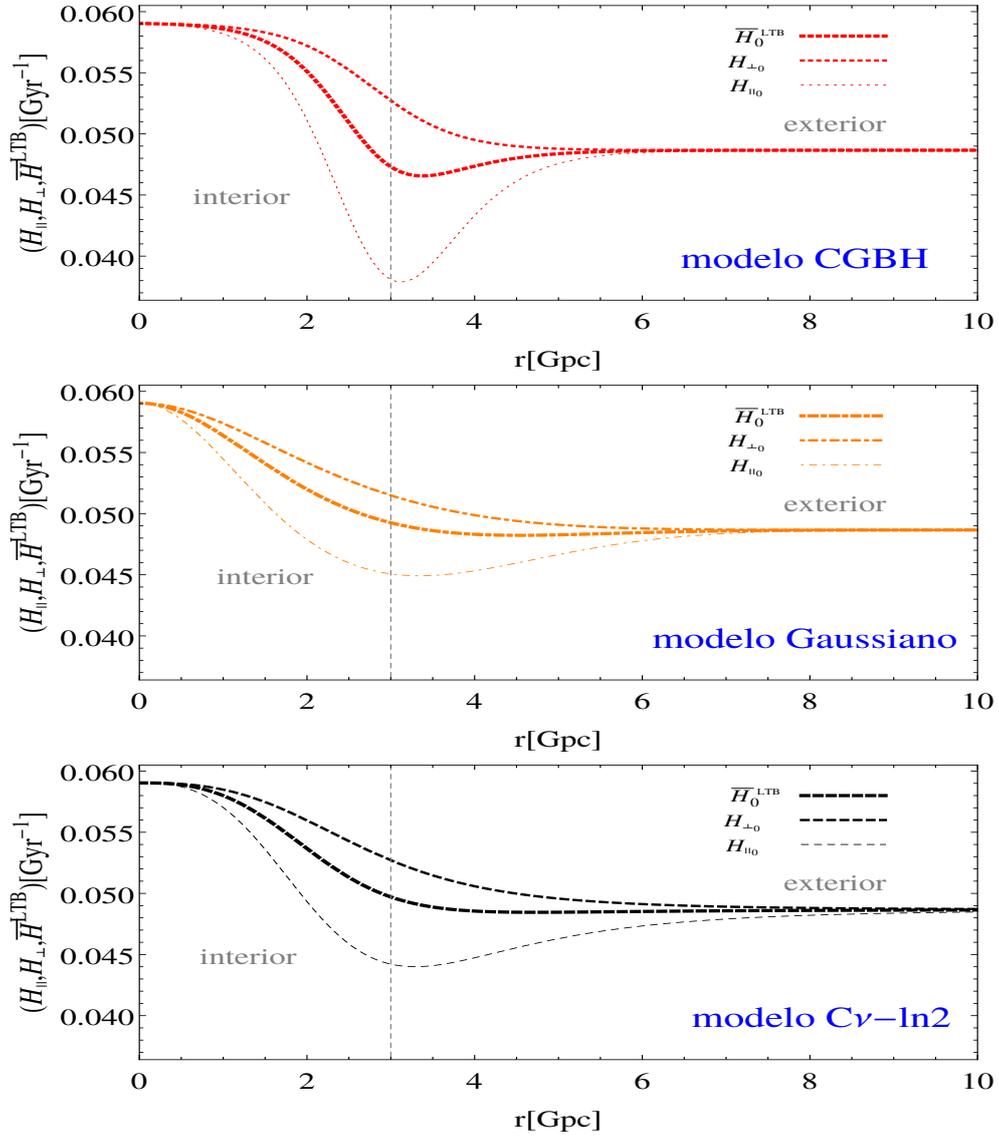


Figura 3.14: Os índices de expansão hoje para os três modelos: o transversal $H_{\perp 0}(r)$, o radial $H_{\parallel 0}(r)$ e a média geométrica $\bar{H}_{\text{LTB}}(t_0, r)$. Os parâmetros usados para plotar os três perfis foram $\Omega_{M_{\text{out}}} = 1$, $\Delta r = \nu = 0.5$, $\Omega_{M_{\text{in}}} = 0.3$ e $r_0 = 3$.

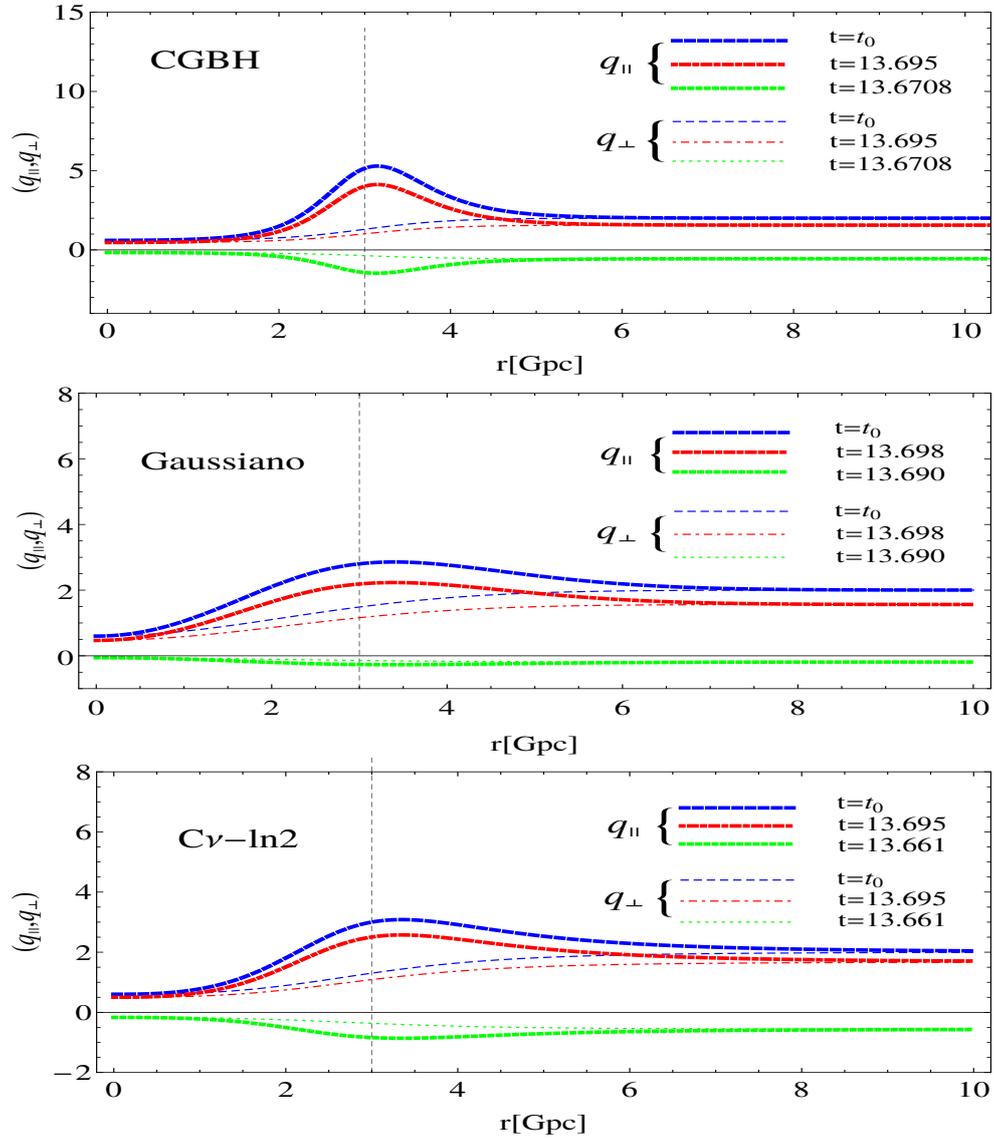


Figura 3.15: Os parâmetros de desaceleração radial e transversal com função de r para diferentes tempos. A linha vertical tracejada marca o tamanho típico do vazio r_0 . Note que, próximo de t_0 todas as curvas são positivas, indicando universos desacelerados hoje.

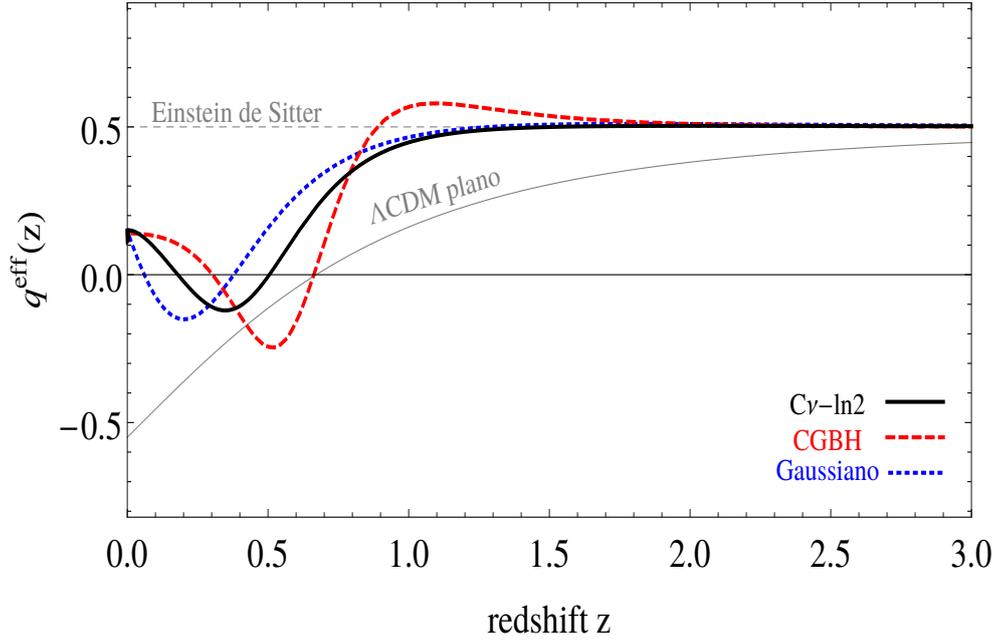


Figura 3.16: Parâmetro de desaceleração efetivo para os 3 modelos comparados com o modelo Λ CDM plano e o Universo de Einstein-de Sitter.

termos do redshift z como

$$q^{\text{eff}}(z) = -1 + \frac{3(1+z)H_{\parallel}(z)}{[H_{\parallel}(z) + 2H_{\perp}(z)]^2} \left[\frac{d}{dz}H_{\parallel}(z) + 2\frac{d}{dz}H_{\perp}(z) \right]. \quad (3.137)$$

Note que para altos redshifts o parâmetro efetivo tende a se comportar como de um modelo de FLRW. Na figura 3.16 se mostra a evolução do parâmetro de desaceleração efetivo em função do redshift para os três perfis. Adicionalmente, incluímos o modelo Λ CDM plano (com $\Omega_m = 0.3$) e os modelos de Einstein-de Sitter (EdS). O parâmetro de desaceleração para todos os modelos inomogêneos troca de sinal duas vezes indicando expansão desacelerada para valores pequenos de z . Este comportamento está em acordo com os parâmetros de desaceleração transversal e radial descritos anteriormente.

3.4.3 O desvio do redshift nos modelos dos vazios locais de LTB

O comportamento da expansão desacelerada do universo no tempo presente, pode ser um indicador para poder diferenciar os modelos de vazios de LTB com o resultado obtido no modelo Λ CDM, que indica expansão acelerada. Contudo, não temos os dados observacionais do parâmetro de desaceleração. Na seção 3.3.7 foi estudado o desvio do redshift, para os modelos com Big Bang não simultâneo, como um método efetivo para poder diferenciar os modelos inomogêneos dos homogêneos. Nesta seção vamos a estudar o

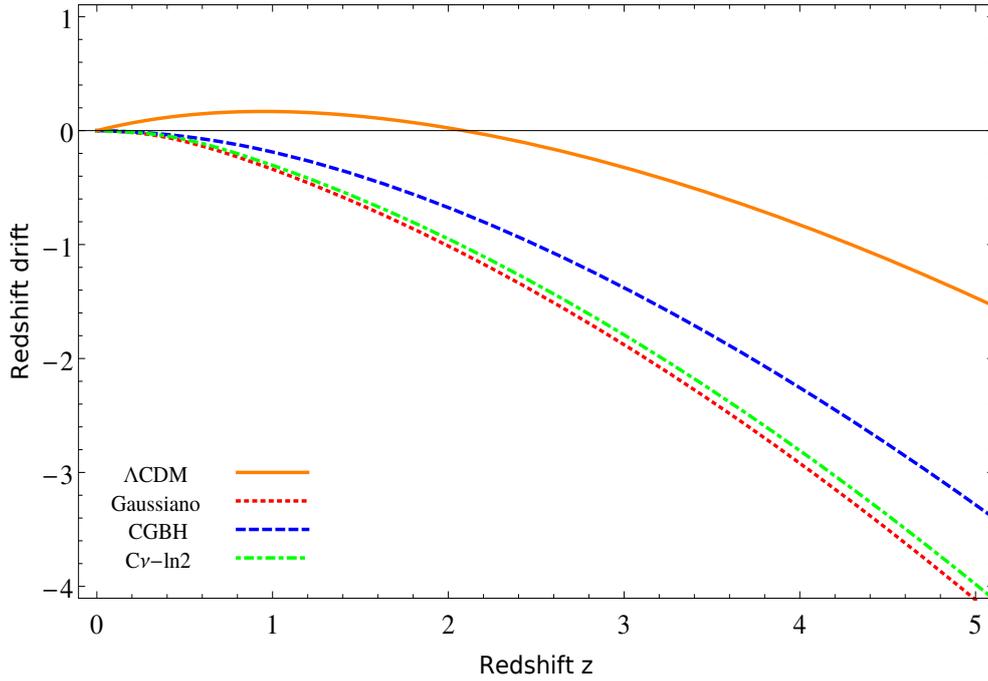


Figura 3.17: O desvio do redshift para os 3 modelos de vazios comparados com o modelo Λ CDM plano.

desvio do redshift para os modelos com Big Bang simultâneo e comparar com o resultado do modelo Λ CDM. Considerando as equações geodésicas (3.24), a equação para o desvio do redshift [66], nos modelos de LTB, é obtida como

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\delta z}{1+z} \right) = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{\ddot{X}'}{\dot{X}'} \delta t_0 . \quad (3.138)$$

Na figura 3.17 apresentamos a comparação dos modelos de vazio de LTB com o modelo Λ CDM. Da mesma forma que na seção 3.3.7 calculamos isto para um intervalo temporal de $\delta t_0 = 10$ anos. Note que nossos resultados apresentam a mesma diferença de sinal das curvas como foi encontrado nos casos de Big Bang não simultâneo. De novo, estas diferenças servirão para distinguir o modelo Λ CDM dos modelos de LTB.

3.4.4 Cruzamento de camadas nos modelos dos vazios locais de LTB?

Na seção 3.3.4 foram estudadas as condições nas quais acontece uma singularidade de tipo cruzamento de camadas para os modelos com Big Bang não simultâneo. No caso dos modelos com Big Bang simultâneo, o valor de $X'(t, r)$ é obtido de forma numérica. Então não temos forma de calcular analiticamente as condições em que acontece uma

singularidade do tipo cruzamento de camadas, isto é, $X' = 0$. Porém, podemos calcular numericamente a curva $X(t, r(t))$ e verificar se a faixa do tempo estudada, apresenta algum cruzamento de camadas. Na figura 3.18 mostramos as curvas dos raios geodésicos para os modelos de CGBH, Gaussiano e $C\nu\text{-ln}2$, comprovando que não apresentam cruzamento de camadas em toda a história do universo a partir do Big Bang. A singularidade do Big Bang $X = 0$ é indicada para cada figura. De novo, as curvas verdes são as respectivas linhas de mundo para cada modelo, calculadas fixando os valores de $r_j = \text{constante}$ para cada $X(t, r_j)$.

3.4.5 As Oscilações Acústicas de Bárions nos modelos de LTB

O modelo padrão da cosmologia descreve os processos da nucleossíntese primordial e da época da recombinação dentro de um universo homogêneo e isotrópico. Deado que os bárions são fortemente acoplados aos fótons antes da época da recombinação, as oscilações das ondas sonoras devem ser impressas nas perturbações dos bárions, bem como as anisotropias de temperatura da CMB. As Oscilações Acústicas de Bárions (BAO, pelas iniciais em inglês) têm um comprimento característico, impressa na distribuição de matéria, que codifica a física dessa fase primordial do universo. Este pequeno sinal ocorre, aproximadamente, na separação de comprimentos da ordem de 150 Mpc.

De modo a tratar com as observações de BAO nos modelos inomogêneos, temos que enfrentar efeitos diferentes que vêm da dependência espacial da dinâmica de fundo. Em particular, como já vimos, nos modelos de LTB os comprimentos físicos dependem não só do tempo, t , também da coordenada radial, r . Além disso, o modelo tem dois índices de expansão distintos, isto é, nas direções transversal $H_{\perp}(t, r)$ e radial $H_{\parallel}(t, r)$. Para fazer a análise de BAO, em um modelo inomogêneo arbitrário, temos que começar baseados em primeiros princípios. Em particular, os perfis (3.130)-(3.132) junto com a hipótese de um tempo do Big Bang simultâneo, garantem que nossos modelos de LTB têm propriedades válidas que aproximam a dinâmica de FLRW no passado longínquo. Portanto, podemos assumir que estes modelos são indistinguíveis do universo de FLRW durante a recombinação. O passo crucial será então, propagar apropriadamente a condição inicial através da dinâmica inomogênea de LTB. As componentes transversal e radial evoluem em formas diferentes, assim, seguindo [69] devemos descrevê-las por separado.

A simetria esférica da métrica de LTB simplifica consideravelmente a evolução do comprimento transversal. Com efeito, podemos escolher o sistema de coordenadas de forma que se cumpra $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$. Além disso, estas condições são estáveis para geodésicas de tipo-tempo. Por tanto, uma separação angular $\Delta\theta$ entre geodésicas vizinhas será preser-

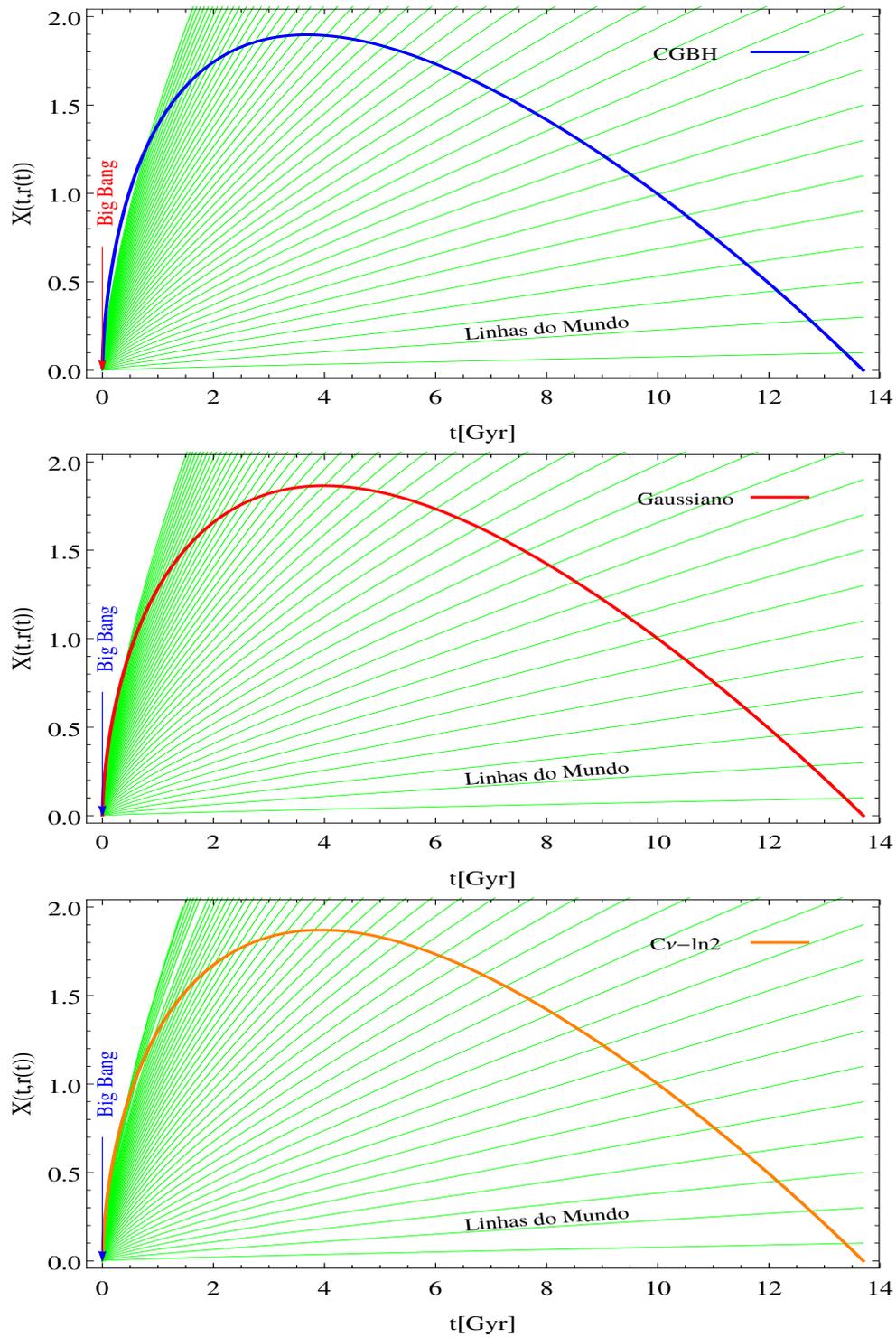


Figura 3.18: Raios geodésicos para os 3 modelos de vazios, mostrando a ausência da singularidade shell crossing.

vada ao longo das suas trajetórias. Assim, o comprimento físico transversal, na emissão⁷, é dada por $L_{\perp}(t_e, r) = \int \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = X(t_e, r) \Delta\theta$. O comprimento físico radial é obtida de uma forma similar. Uma partícula de matéria, inicialmente em repouso, continuará na mesma posição radial e sua evolução será também estável para geodésicas de tipo-tempo. Para uma separação radial inicial dr , o comprimento físico radial na emissão é $L_{\parallel}(t_e, r) = \int \sqrt{g_{rr}} dr \approx X'(t_e, r) \Delta r / \sqrt{1 + 2E(r)}$. Estes comprimentos podem ser relacionados com os comprimentos físicos observados, respectivamente, como

$$L_{\perp}(t, r) = \frac{X(t, r)}{X(t_e, r)} L_{\perp}(t_e, r) , \quad (3.139)$$

$$L_{\parallel}(t, r) = \frac{X'(t, r)}{X'(t_e, r)} L_{\parallel}(t_e, r) . \quad (3.140)$$

As relações acima expressam a evolução do fundo dos comprimentos físicos, no modelo de LTB. As correções em primeira ordem não são tão simples, como no caso homogêneo e isotrópico. No universo de FLRW, a evolução de sub-horizontes nas perturbações em primeira ordem é exclusivamente dependente do tempo. Hoje em dia as medições das observações cosmológicas são suficientemente precisas para demandar um adequado controle destes efeitos. Como argumentado em [70, 71, 72] estes efeitos podem produzir um deslocamento na escala acústica que, de passo, pode gerar erros sistemáticos comparados com os já esperados erros estatísticos na seguinte geração de levantamentos de dados. Não obstante, para a presente análise vamos manter apenas até as perturbações em primeira ordem.

A evolução das perturbações lineares nos modelos inomogêneos é mais complicada que no modelo de FLRW. Uma das questões chave é a combinação dos modos das perturbações em primeira ordem. Como é bem sabido [73, 74], o desacoplamento das perturbações lineares é uma consequência direta das simetrias na métrica de fundo FLRW. No Universo de LTB, pelo contrário, se espera um acoplamento entre os modos escalar, vetorial e tensorial. O acoplamento crucial no Universo de LTB é entre os modos escalares e tensoriais. De fato, devido à simetria esférica na métrica de fundo LTB, pode ser mostrado que os modos vetoriais podem ser ignorados em comparação com as outras componentes. Ademais, o acoplamento, dos modos, depende do perfil de matéria específica de cada modelo. Por sorte, para o perfil de CGBH, os efeitos não lineares são subdominantes [69, 75] e podemos considerar aproximadamente a escala de BAO como sendo constante no espaço de coordenadas. A validade, para os perfis de tipo Gaussiano e $C\nu\text{-ln}2$, segue de suas baixas diferenças entre os índices de expansão transversal e radial (ver figura 3.14).

⁷O tempo de emissão é representado por t_e .

Os modelos de LTB, considerados aqui, para grandes distâncias espaciais ($r = r_\infty \gg r_0$) ou para bem longe no passado ($t = t(z_\infty)$ com $z_\infty \gtrsim 1000$), se aproximam a um comportamento de FLRW, de tipo poeira. Portanto, podemos assumir que o tempo primordial da dinâmica bariônica, em nossos modelos, será indistinguível do caso de FLRW. Esta característica garante o uso da independência espacial, na escala de BAO, como condição inicial para nossos modelos. Adicionalmente, no passado distante, a homogeneidade e isotropia do universo nós permite assumir a escala de BAO, como sendo independente da coordenada espacial nas hiper-superfícies de tempo constante.

$$L^{\text{BAO}}(t_e, r(z)) \approx L^{\text{BAO}}(t_e, r_\infty). \quad (3.141)$$

A escala de BAO assintótica pode ser calculada dentro do cenário do modelo Λ CDM para o qual usamos a fórmula de ajuste (fitting formulae) para a matéria escura fria adiabática desenvolvida em [76]. A escala assintótica de BAO depende do horizonte do som l_s na época do arrasto (drag) o qual pode ser aproximado por

$$l_s(z_{\text{drag}}) = \frac{44.5 \ln(9.83/\Omega_M^{\text{eff}} h_{\text{eff}}^2)}{\sqrt{1 + 10(\Omega_b^{\text{eff}} h_{\text{eff}}^2)^{3/4}}} \text{ Mpc}, \quad (3.142)$$

onde Ω_M^{eff} , Ω_b^{eff} e h_{eff} são, respectivamente, a densidade efetiva total, densidade efetiva de bárions e o fator de Hubble efetivo normalizado. Convencionalmente, no modelo Λ CDM, em vez disso deveríamos ter o parâmetro de matéria total Ω_0 , a matéria bariônica Ω_b e o fator de Hubble normalizado $h = H_0/(100 \text{ Km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1})$. Contudo, dado que, o nosso modelo, somente no regime assintótico é aproximadamente homogêneo e isotrópico, precisamos evoluir para trás no tempo a dinâmica de LTB, até o tempo de emissão e usar os valores efetivos na fórmula de ajuste escrita acima.

O tempo de emissão tem que ser longe o suficiente, no passado, para atingir o comportamento assintótico de FLRW. Devido à economia computacional, escolhemos o tempo de emissão como $z_e = 100$, quando a inomogeneidade LTB⁸ ainda está na ordem de 1%. Nesta fase, podemos assumir que, $\Omega_M^{\text{eff}} = \Omega_{M_{\text{out}}}$ e $\Omega_b^{\text{eff}} = f_b \Omega_{M_{\text{out}}}$, onde f_b representa a fração dos bárions na matéria total. O fator de Hubble normalizado se escreve como $h_{\text{eff}} = H_0^{\text{eff}}/(100 \text{ Km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1})$ onde o parâmetro de Hubble efetivo é dado por

$$H_0^{\text{eff}} = \frac{[H_{\parallel}(z_e)H_{\perp}^2(z_e)]^{1/3}}{\sqrt{\Omega_M^{\text{eff}}(1+z_e)^3 + (1-\Omega_M^{\text{eff}})(1+z_e)^2}}. \quad (3.143)$$

⁸As inomogeneidades podem ser caracterizadas através do contraste da densidade $\delta\rho_m(t, r) = \rho_m(t, r)/\rho_m(t_\infty, r)$, conseqüentemente, a declaração de que as inomogeneidades de LTB são pequenas significa que $\delta\rho(t, r) \lesssim 1\%$.

A simples diferença do procedimento acima com o feito em [69] é que usamos a média geométrica do parâmetro de Hubble (3.11), ao invés da média aritmética do parâmetro de Hubble (3.13). Esta pequena modificação tem a vantagem de que a média geométrica converge mais rápido para o regime do FLRW que a média aritmética.

O horizonte do som nos dá a escala de BAO comóvel que, no universo de FLRW, é igual à escala física de BAO hoje⁹. Lembrando que, o limite assintótico espacial do modelo de LTB em qualquer momento é o Universo de FLRW, temos que $L^{\text{BAO}}(t_0, r_\infty) = l_s(z_{\text{drag}})$. Com o fim de relacionar o horizonte do som (3.142) com as escalas físicas transversal e radial usando (3.139)-(3.141), fazemos uma regra de três, para obter

$$L_{\parallel}^{\text{BAO}}(z) = \frac{X'(t(z), r(z))}{X'(t_e, r(z))} \frac{X'(t_e, r_\infty)}{X'(t_0, r_\infty)} l_s(z_{\text{drag}}), \quad (3.144)$$

$$L_{\perp}^{\text{BAO}}(z) = \frac{X(t(z), r(z))}{X(t_e, r(z))} \frac{X(t_e, r_\infty)}{X(t_0, r_\infty)} l_s(z_{\text{drag}}). \quad (3.145)$$

Existe um último passo para conectar as relações acima com os dados observacionais. A sensibilidade das pesquisas atuais, somente proveem uma razão das escalas de distâncias combinadas, a partir do espectro de potências esfericamente promediado [77, 78]. No universo de FLRW, o observável físico associado com a escala de BAO é a razão [79]

$$d_z^{\text{FLRW}} = \frac{l_s(z_{\text{drag}})}{D_V^{\text{FLRW}}(z)}, \quad (3.146)$$

onde $D_V^{\text{FLRW}}(z)$ codifica a escala de dilatação como, a raiz cúbica do produto da dilatação radial com o quadrado da dilatação transversal [8, 79].

A dilatação radial é dada por

$$D_z^{\text{FLRW}}(z) = \frac{z}{H^{\text{FLRW}}(z)} \quad (3.147)$$

enquanto a dilatação angular ou transversal é simplesmente a distância angular comóvel que pode ser escrita em termos da distância diâmetro angular como $(1+z)d_A^{\text{FLRW}}$. Assim, escrevemos

$$D_V^{\text{FLRW}}(z) = \left[\left((1+z)d_A^{\text{FLRW}} \right)^2 \frac{z}{H^{\text{FLRW}}(z)} \right]^{1/3}. \quad (3.148)$$

⁹A identificação do horizonte do som comóvel com a escala física de BAO hoje é válida se assumimos a normalização do fator de escala $a(t_0) = 1$.

Em particular, uma relação útil a ser considerada é a razão

$$\mathcal{R} \equiv \frac{D_V^{\text{FLRW}}(0.35)}{D_V^{\text{FLRW}}(0.2)} . \quad (3.149)$$

Esta quantidade somente depende dos parâmetros cosmológicos $(\Omega_M, \Omega_K, \Omega_\Lambda)$ e portanto, fornece um vínculo bastante útil. Pode ser verificado que a relação medida não pode ser reproduzida sem Λ . Mas, na verdade, o modelo Λ CDM não encaixa muito bem com o número a ser reproduzido. O valor medido de \mathcal{R} em [79] é de cerca de 1.812 ± 0.060 , enquanto o valor medido com Λ CDM (com $\Omega_\Lambda = 0.75$) é somente de 1.67. Por outro lado, um universo vazio aberto dá cerca de 1.5.

Ainda que (3.146) e (3.149) fornecem observáveis de BAO nos modelos de FLRW, é conveniente seguir as medições atuais, que usualmente se referem a quantidades independentes do modelo $(\Delta\theta^2\Delta z)$, onde $\Delta\theta$ é o ângulo no céu e Δz é o intervalo do redshift, que corresponde ao horizonte de som comóvel. No universo de FLRW temos que $d_A^{\text{FLRW}} = l_s/(1+z_{\text{BAO}})\Delta\theta$ e $l_s = \Delta z/H^{\text{FLRW}}(z_{\text{BAO}})$ de tal modo que encontramos

$$(\Delta\theta^2\Delta z)^{1/3} = z^{1/3} \frac{l_s}{D_V^{\text{FLRW}}(z)} \quad \text{para FLRW} . \quad (3.150)$$

Conforme com [69, 80], definimos, no modelo de LTB, uma longitude característica de BAO, $d_z(z)$, como o análogo LTB das relações anteriores. Assim, definimos a quantidade

$$d_z^{\text{LTB}}(z) = \left(\frac{\Delta\theta^2\Delta z}{z} \right)^{1/3} \quad \text{para LTB} . \quad (3.151)$$

A escala angular é de novo relacionada à distância diâmetro angular com a diferença que devemos usar o comprimento de BAO transversal

$$\Delta\theta_{\text{BAO}} = \frac{L_\perp^{\text{BAO}}(z)}{d_A^{\text{LTB}}(z)} . \quad (3.152)$$

De uma maneira similar, da equação (3.31) e da métrica (3.7), a separação do redshift será

$$\Delta z_{\text{BAO}} = (1+z)H_\parallel(z)L_\parallel^{\text{BAO}}(z) . \quad (3.153)$$

Assim, combinando as equações anteriores com (3.144) e (3.145) obtemos

$$d_z^{\text{LTB}} = \left[\frac{1+z}{z} \frac{H_\parallel(z)}{d_A^{\text{LTB}}(z)^2} \right]^{1/3} \xi(z) l_s(z_{\text{drag}}) , \quad (3.154)$$

onde a função dependente do redshift $\xi(z)$ é definida como

$$\xi(z) = \left(\frac{X'(t(z), r(z))}{X'(t_e, r(z))} \frac{X'(t_e, r_\infty)}{X'(t_0, r_\infty)} \right)^{1/3} \left(\frac{X(t(z), r(z))}{X(t_e, r(z))} \frac{X(t_e, r_\infty)}{X(t_0, r_\infty)} \right)^{2/3}. \quad (3.155)$$

Note que, para tempos primordiais t_e , no limite de FLRW, isto é $X(t_e, r) = a(t_e)r$, a função se reduz a $\xi(z_e) = (1 + z_e)^{-1}$. A equação (3.154) pode ser facilmente relacionada com a expressão dos modelos de FLRW, como

$$d_z^{\text{LTB}} = (1 + z)\xi(z) \left[\frac{H_{\parallel}(z)}{H^{\text{FLRW}}(z)} \left(\frac{d_A^{\text{FLRW}}(z)}{d_A^{\text{LTB}}(z)} \right)^2 \right]^{1/3} d_z^{\text{FLRW}}. \quad (3.156)$$

Note que, para tempos primordiais t_e , esta relação se reduz ao modelo de FLRW, $d_z^{\text{LTB}}(z_e) = d_z^{\text{FLRW}}(z_e)$. Neste capítulo estudamos como os modelos de LTB podem descrever as observações cosmológicas das supernovas tipo Ia e as Oscilações Acústicas de Bárions. Assim, como próximo passo, no capítulo seguinte estudaremos esses dados observacionais.

Capítulo 4

Observações cosmológicas

Neste capítulo, apresentaremos as observações astrofísicas usadas para testar os modelos cosmológicos. Daremos uma breve revisão do conceito de vela padrão e sua aplicação na medição de distâncias cosmológicas. Também serão estudados o método de uso de supernovas tipo Ia (SNIa) como velas padronizáveis, dando uma revisão dos dados mais atuais na literatura junto com as técnicas estatísticas para ajustar os modelos cosmológicos. Finalmente, apresentamos o catálogo de dados das Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) que servirão para impor vínculos no espaço de parâmetros cosmológicos.

4.1 Indicadores de distâncias, as velas padrões

O termo vela padrão, na astrofísica, é usado para se referir às propriedades físicas de determinados objetos, que permitem estimar a distância na qual eles se encontram. Ao contrário dos objetos que estão localizados nas proximidades da terra, na qual é possível determinar a distância por procedimentos geométricos, a fonte de informação¹ de um objeto distante, consiste em comparar a luz que é recebida com a luz que foi emitida por esse mesmo objeto determinado. A medição da luz recebida na terra pode ser feita com bastante precisão, ao contrário da luz emitida que não é possível de medir, a não ser que seja usada alguma propriedade do objeto emissor que esteja relacionada com a luminosidade e que possa ser medida.

Dentro dos objetos distantes que podem ser considerados como velas padrão, estão o período de variabilidade das estrelas Cefeidas e das RR Lyrae [81], a largura das linhas espectrais de emissão da relação de Tully-Fisher [82] e as supernovas tipo Ia. Sendo as SNIa os objetos mais distantes e os melhores candidatos a velas padrão devido ao seu brilho extremamente luminoso e uniforme.

¹na qual se baseia a estimação da distância de luminosidade.

4.2 Supernovas tipo Ia

A supernova é uma explosão estelar, extremamente luminosa, que gera uma alta liberação de radiação e que pode durar várias semanas ou até mesmo meses. As supernovas são classificadas de acordo com as linhas de absorção dos elementos químicos que as constituem. Se o espectro de uma supernova inclui uma linha espectral de hidrogênio, então ela é catalogada como do tipo II. Caso contrário ela será do tipo I. No início dos anos 80 emerge uma nova subclassificação de supernovas, nas quais, as supernovas do tipo I foram divididas em três. Se elas apresentam linhas de absorção de silício isoladamente ionizado (Si II) serão consideradas como do tipo Ia, se contêm uma linha de hélio são do tipo Ib e se carecem de silício e hélio serão do tipo Ic. Logo foi percebido que contrárias às supernovas do tipo II, as do tipo Ia exibem uma enorme uniformidade, não só em suas características espectrais senão também em suas curvas de luz (baixa dispersão), de tal forma que sua luminosidade varia em função do tempo, começando por um brilho crescente até atingir o pico máximo para logo desvanecer em um período de várias semanas.

A explosão de uma SNIa ocorre quando a massa de uma anã branca², em um sistema binário, excede o limite de Chandrasekhar³, de $1.44 M_{\odot}$ [83], que por meio da absorção do gás da outra estrela (acrescimento Carbono/Oxigênio), procede à fusão instantânea de todo seu núcleo. Isto é, gera uma explosão termonuclear que expulsa todo o material que a formava. Devido a que a luminosidade absoluta da SNIa é quase constante no pico máximo do brilho, a distância de uma SNIa pode ser determinada medindo sua luminosidade aparente. Assim a SNIa poderia ser considerada como uma “vela padrão” para o qual a distância de Luminosidade pode ser medida observacionalmente, contudo existe uma dispersão na medição das curvas de luz e então não são velas padrão perfeitas, mas podem ser padronizáveis (ver seção 4.2.1).

As supernovas de tipo Ia são vistas tanto em galáxias com populações estelares jovens quanto velhas. Nas populações estelares jovens, como as galáxias espirais, elas se encontram geralmente nos braços das espiras, onde existe formação estelar ativa no presente. Também são achadas nas galáxias elípticas, onde a formação estelar aparentemente cessou muitos Giga-anos atrás. As propriedades das SNIa não parecem apresentar diferenças entre estas diferentes populações. Isto é importante porque em altos redshifts a população estelar é mais nova.

²Estrela compacta suportada pela pressão degenerada de elétrons.

³A massa na qual os elétrons degenerados se tornam relativistas e a anã branca vira instável.

4.2.1 Padronizando as velas

No início da década dos noventa, com suficientes observações e a chegada dos detetores CCD (Charge Coupled Device), foi possível determinar a existência de uma variabilidade considerável dentro das SNIa. Isto é, a explosão que ocorre perto do limite de Chandrasekhar, e não exatamente no limite como se acreditava, pode ter uma luminosidade intrínseca que varia por um fator de três. O pico máximo do brilho e o tempo de duração da curva de luz da SNIa estão bem correlacionados [84]. Isto é, enquanto mais largo o pico de luminosidade (mais brilhante), o decaimento é mais suave (mais amplo); como mostrado no lado esquerdo da figura 4.1. Existem várias formas de quantificar este efeito, por exemplo considerando a correção de Phillips [84]

$$M_B = a + b \Delta m_{15}(B) , \quad (4.1)$$

onde M_B representa o pico da magnitude absoluta na banda-B e Δm_{15} é a mudança observada na magnitude aparente, 15 dias depois do pico, sendo a e b constantes. Esta é uma relação empírica e não existem argumentos teóricos para sua formulação. O pequeno grau residual da dispersão pode se inferir devido a diferenças nos índices de acreção, nas velocidades de rotação ou nas razões de Carbono/Oxigênio [85]. O lado direito da figura 4.1 mostra como a correção alinha a largura da curva de luz e o pico máximo do brilho para as supernovas nas proximidades. Contudo, quando esta correção é aplicada, a dispersão das SNIa na linha de Hubble diminui em pelo menos 0.3 magnitudes [86]. Outra correção aplicada às curvas de luz, foi desenvolvida na referência [87], a chamada Multicolor Light Curve Shape (MLCS), na qual fazem uso de cores para realizar correções da extinção devido à poeira, reduzindo a dispersão em 0.12 magnitudes. Assim, esta relação de queda-brilho nos permite usar as SNIa como velas padrões calibradas para a cosmologia. Na atualidade existem diferentes adaptadores de curvas de luz para padronizar as SNIa, entre eles temos o SALT (Spectral Adaptive Light-curve Template) que será revisado em maior detalhe na seção 4.3. Por enquanto, vamos a continuar com uma breve revisão dos catálogos de SNIa nas diferentes faixas de redshift.

4.2.2 SNIa em baixos redshifts

As SNIa em baixos redshifts são aquelas que se encontram na faixa de $0.01 < z < 0.1$. A primeira maior coleção de dados (29 SNIa) observados em baixos redshift foi realizada, em meados da década de noventa, com o telescópio Calán/Tololo no Chile por Hamuy et. al. [88]. Dados mais atuais, em baixos redshift, foram catalogados no CfAI [89] que acrescentam 22 SNIa, no CfAII [90] com 44 SNIa, no CfAIII [91] com um número maior

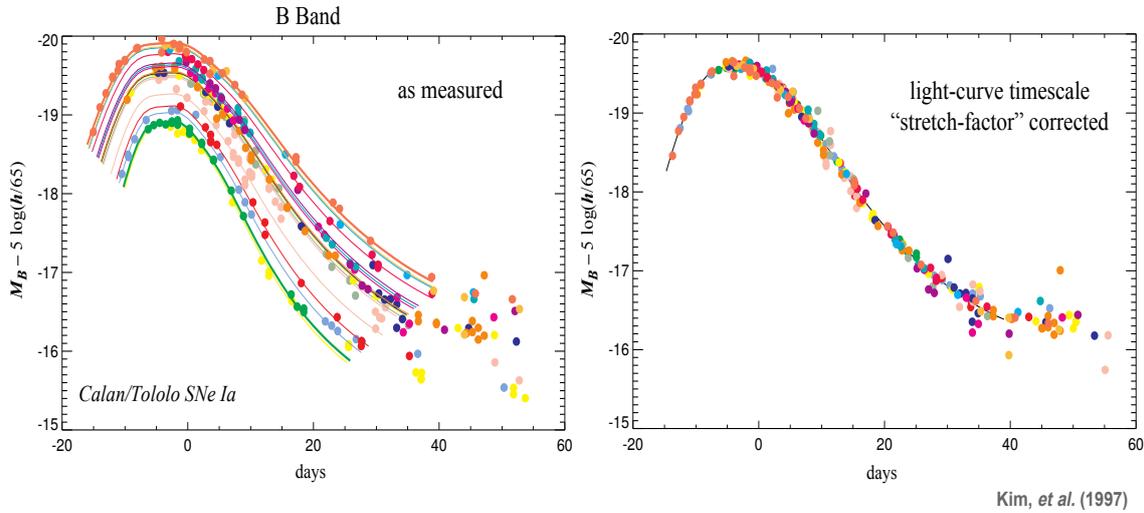


Figura 4.1: Curvas de luz de SNIa nas proximidades antes (esquerda) e depois (direita) da correção (4.1). (Figura tomada do site: <http://www.supernova.lbl.gov>).

de 158 SNIa, no CSP [92] com 35 SNIa e no LOSS [93] com 165 SNIa. Para as amostras do Calán/Tololo, CfAI e CfAII, os dados foram transformados, pelos próprios autores, de um sistema instrumental para o sistema de Landolt [94], usando transformações lineares derivadas das estrelas numa faixa limitada de cor, nas diferentes bandas (UBVRI). No caso das amostras CfAIII, CSP e LOSS, já existe uma disponibilidade natural do sistema de fotometria, então não é preciso aplicar transformação alguma. As amostras nesta faixa de baixos redshifts servem para restringir bem, estatisticamente, o valor do parâmetro de Hubble, independentemente do modelo cosmológico que seja usado. Por outro lado, para poder restringir com precisão o parâmetro de desaceleração (ou a expansão acelerada), precisamos de dados em mais altos redshift onde possam ser apreciados os desvios no índice de expansão.

4.2.3 SNIa em altos redshifts

No final da década de noventa, dois grupos independentes, realizaram a maior coleção de observações de SNIa, para a cosmologia, em altos redshifts. Por um lado o *High z-Supernovae Search Team* (HSST) dirigido por A. Riess [3] junto com Schmidt [95], e por outro o *Supernova Cosmology Project* (SCP) comandado por S. Perlmutter [4], obtiveram resultados similares, indicando que o universo de Friedmann, no tempo presente, está em expansão acelerada. Até 1998 o HSST descobriu 16 SNIa em altos redshifts junto com 34 SNIa em baixos redshifts, enquanto o SCP confirmou 42 supernovas na faixa

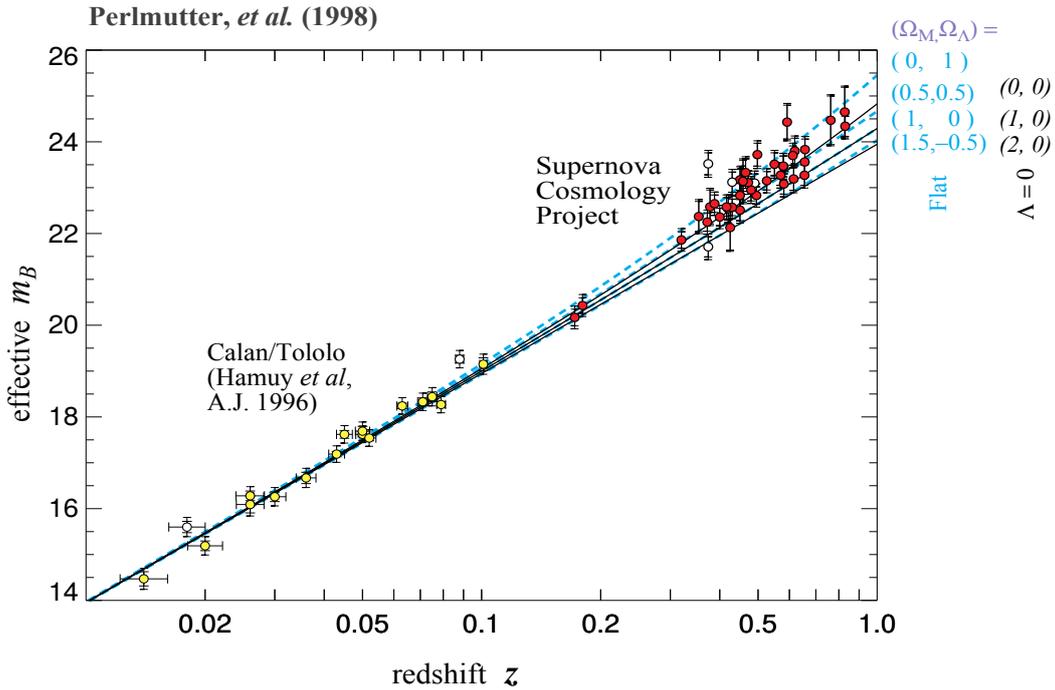


Figura 4.2: Diagrama de Hubble publicado pelo SCP [4] junto com as SNIa em baixos redshift do catálogo do telescópio Calán/Tololo. Note que a magnitude aparente efetiva m_B inclui as correções nas curvas de luz da relação largura-luminosidade. As curvas sólidas são as previsões teóricas do m_B para um número de modelos cosmológicos sem constante cosmológica ($(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 0), (1, 0)$ e $(2, 0)$). As curvas tracejadas correspondem aos modelos cosmológicos planos ($(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 1), (0.5, 0.5), (1, 0)$ e $(1.5, -0.5)$), mostrando a evidência da expansão acelerada.

de redshift $z = 0.18\text{--}0.83$. No HSST mostraram que, para $z \approx 0.5$, as SNIa são 0.2 magnitudes mais escuras do que prediz o modelo espacialmente plano de só poeira (sem constante cosmológica). Este comportamento pode ser apreciado no diagrama de Hubble obtido pelo SCP, que corrobora os resultados do HSST, apresentado na figura 4.2. Com a análise estatística feita por Perlmutter *et al.* se encontrou que o parâmetro de densidade é restringido no valor de $\Omega_M = 0.28$ no Universo plano com constante cosmológica [4]. Estes resultados indicam que o conteúdo energético do universo, no contexto de FLRW, é dominado pelo setor escuro, com um 30% de matéria escura e um 70% de energia escura, aproximadamente. Como foi mencionado na seção 2.2, o candidato mais simples para a energia escura é a constante cosmológica cuja evidência observacional está claramente nas SNIa e que combinadas com a evidência de um Universo plano dado pela CMB e dos aglomerados de galáxias de uma baixa matéria total, indicam uma concordância entre os parâmetros cosmológicos do modelo Λ CDM.

Dados mais atuais na faixa alta de redshift, foram obtidos pelos três anos de observação

do programa SuperNova Legacy Survey (SNLS3) [96], com o telescópio Canada-França-Hawaii, focando principalmente em medir o valor da equação de estado da energia escura. Ele foi projetado para medir centenas de SNIa na faixa de redshift, $0.3 < z < 1$. Nesta faixa foram confirmadas 472 SNIa. Ao contrário das medições anteriores, esta amostra leva em consideração as correlações entre a luminosidade da SNIa e as propriedades da galáxia em que foi detetada a SNIa (ver seção 4.3). Outro catálogo importante nos altos redshifts é a amostra ESSENCE (Equation of State: SuperNovae trace Cosmic Expansion) que compila 200 objetos na faixa de redshift, $z = 0.2-0.8$ [97].

Por outro lado, temos a compilação da amostra Union [98] que reúne 307 SNIa de diferentes fontes, por meio da calibração feita com o adaptador de curvas de luz, SALT. Uma versão mais atual desta compilação foi desenvolvido no Union2 [99], refinando as curvas de luz e agregando novos dados, com alta precisão, de SNIa nos altos redshift do HST. Esta compilação é conformada por 557 dados, confirmados a ser SNIa. Uma última versão desta compilação é encontrada no Union2.1 [100], alcançando as 580 SNIa conformada pelos dados em baixos e altos redshifts.

A amostra SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [101, 102, 103, 104, 105] apresenta uma coleção de dados realizados em 3 seções, investigando as curvas de luz nas diferentes bandas de SNIa em uma faixa de redshift intermediária, $z = 0.05-0.4$, complementando os catálogos nos baixos e altos redshifts. O SDSS é um melhor caracterizador de população de supernovas, confirmando SNIa de forma espectroscópica. Finalmente, o Hubble Space Telescope (HST) [106, 107] leva a descoberta de SNIa em $z > 1$, com uma alta precisão estatística de centenas de SNIa confirmadas espectroscopicamente.

4.2.4 Erros sistemáticos

Como foi visto acima, as SNIa são bem caracterizadas em baixos redshifts, ao contrário das medições de objetos em altos redshifts onde se deve ter maior cuidado. Assim, podem aparecer erros sistemáticos, nos efeitos de seleção em função do redshift, como as incertezas pela possível evolução da população de progenitores das SNIa em função do tempo ou pela extinção por poeira interestelar. Se estes efeitos forem grandes e não restringidos nem corrigidos, limitariam nossa acurácia nas medições relativas à luminosidade e assim reduzir potencialmente a eficácia das SNIa em altos redshift para medições cosmológicas.

Evolução

As SNIa são objetos em evolução nas proximidades do universo. A forma das curvas de luz das SNIa são projetadas com seu tipo de galáxia anfitriã [109]. As SNIa nas galáxias anfitriãs primordiais (galáxias elípticas, que contêm apenas estrelas velhas) mostram

curvas de luz que se levantam e caem mais rapidamente que nas anfitriãs tardias (galáxias espirais, com formação estelar permanente). No entanto, uma vez corrigida a forma da curva de luz (ver seção 4.2.1), a luminosidade não mostra diferenças em função do tipo de anfitriã. Essas investigações empíricas fornecem garantias para usar as SNIa como indicadores de distância, sobre uma variedade de populações estelares de diferentes idades. Contudo, é possível elaborar cenários onde algumas das SNIa mais distantes não tenham análogas nas proximidades. As supernovas são estudadas em redshifts cada vez mais altos. Então, pode se tornar importante realizar observações espectroscópicas e fotométricas detalhadas de cada SNIa distante, para reconhecer e rejeitar exemplos que não tenham análogos nas proximidades. Contudo, apesar das provas relevantes, não existe evidência atual de que o escurecimento das SNIa seja atribuído à sua própria evolução.

Extinção

A extinção⁴, por poeira interestelar, na Via Láctea é bem entendida. As curvas de luz das SNIa são corrigidas por extinção galáctica, usando a lei de extinção de Cardelli et al. [115] parametrizando a razão de extinção na banda visual ⁵ $R_V = A(V)/E(B - V)$, onde $A(V)$ é a extinção total na banda visível e $E(B - V) = A(B) - A(V)$ é a diferença entre a extinção nas longitudes de onda azul e a banda visível. O parâmetro R_V está correlacionado com o tamanho médio dos grãos de poeira que provocam a extinção. Assim, a média do valor do parâmetro de extinção, para várias linhas de visada, é $R_V = 3.1$ para a Via Láctea. Porém, no caso das galáxias anfitriãs de SNIa a extinção tem que seguir as curvas de extinção similares às da Via Láctea [116]. Para SNIa nas proximidades (baixos redshifts) a extinção entra como incerteza sistemática por meio do coeficiente de correção da cor β (ver seção 4.3). No caso das SNIa em altos redshifts, elas são medidas na banda mais vermelha, assim são menos afetados pela extinção galáctica [98].

4.3 A amostra JLA

Nesta tese usamos a amostra de SNIa mais atual na literatura o JLA (Joint Light-curve Analysis) [36] que inclui uma seleção de 740 SNIa confirmadas espectroscopicamente. O JLA está conformado pela nova compilação de curvas de luz de SNIa dos três anos da amostra SDSS-II ($0.05 < z < 0.4$), os três anos do SNLS ($0.2 < z < 1$), o HST ($z > 1$) e a amostra de vários experimentos em baixos redshift ($z < 0.1$). Este experimento segue os

⁴Definida como, absorção e dispersão de radiação eletromagnética por meio de gás ou poeira galáctica.

⁵ R_V é determinado extrapolando a extinção próxima ao infravermelho para uma longitude de onda finita.

mesmos métodos e hipóteses da análise de dados dos três anos do SNLS com a diferença que apresenta as seguintes melhorias:

- A adição de toda a amostra de SNIa, espectroscopicamente confirmadas, do SDSS-II em ambos treinamentos no adaptador de curva de luz SALT2 (ver a seção 4.3) e na análise do diagrama de Hubble (374 SNIa).
- Intercalibração das amostras do SNLS e SDSS e as incertezas sistemáticas reduzidas na calibração fotométrica, realizada cegamente com respeito à análise da cosmologia.
- A investigação minuciosa dos erros sistemáticos associados com a modelagem das curvas de luz das SNIa com o SALT2.

Assim, temos à disposição centenas de SNIa confirmadas espectroscopicamente para o ajuste dos modelos inomogêneos. Por tanto, como próximo passo estudaremos o adaptador de curvas de luz usado para estimar as distâncias cósmicas.

O adaptador de curvas de luz: SALT2

Como foi visto na seção 4.2.1, para poder usar as SNIa como velas padrão, precisamos fazer correções nas curvas de luz. Na literatura existem vários métodos desenvolvidos para fazer essas correções. Entre eles se encontram os estimadores de distância, usando o parâmetro de esticamento das curvas de luz (Δ_{15} ou fator de esticamento, ver [84, 111, 112]), a informação da cor [113] ou a mistura de ambas [87, 114]. Ao contrário do MCLS, desenvolvido pelo A. Riess em [87], que só ajustam SNIa das proximidades, o Spectral Adaptive Light curve Template (SALT) [108] adapta SNIa tanto das proximidades como das regiões distâtes. Uma versão mais atualizada pode ser encontrada no SALT2 [110], que acrescenta informação espectroscópica, para melhorar a resolução das longitudes de onda dos modelos espectrais. Nesta tese será usado o adaptador de curvas de luz SALT2, com a intenção de calibrar os modelos cosmológicos com as SNIa e obter os valores de melhor ajuste dos parâmetros livres.

O SALT2 modela a evolução da distribuição de energia espectral média das SNIa e sua variação temporal com a cor (intrínseca ou por extinção). Na fase f e longitude de onda λ , o fluxo de densidade de energia é dado por

$$\Phi_{SN}(f, \lambda) = X_0 [M_0(f, \lambda) + X_1 M_1(p, \lambda)] \exp [C \times C_L(\lambda)] , \quad (4.2)$$

onde X_0 , X_1 e C , são os parâmetros de normalização, forma e cor, respectivamente. Estes parâmetros são avaliados para cada SNIa e seus valores diferem de uma para outra SNIa. A

sequência espectral média M_0 , o desvio em primeira ordem em torno da sequência média M_1 e a lei de cor C_L são treinadas sobre uma amostra de SNIa espectroscopicamente confirmadas [110].

O fluxo do observador de referência na banda de passagem Y é dado por [108, 117]

$$F^{SN}(f, z, T^Y) = (1 + z) \int d\lambda' [\lambda' \Phi(f, \lambda') T^Y(\lambda'(1 + z))] , \quad (4.3)$$

onde $T^Y(\lambda)$ é a curva de transmissão do filtro do observador de referência Y e z representa o redshift.

As equações (4.2) e (4.3) são usadas para ajustar cada SNIa, por separado, e assim obter os valores dos parâmetros X_0 , X_1 e C com seus respectivos erros. Contudo, o ajuste das curvas de luz, com o adaptador SALT2, não estima o módulo de distância de forma independente para cada SNIa. O pico da magnitude do referencial do observador na banda B , pode ser definido como [112, 117]

$$m_B^* := -2.5 \log_{10} \left[X_0 \int d\lambda' M_0(f = 0, \lambda') T^B(\lambda') \right] , \quad (4.4)$$

onde T^B é a curva de transmissão do filtro B . Assim, para uma dada SNIa, m_B^* pode ser rapidamente calculado a partir do modelo ajustado, e equivalentemente usar (m_B^*, X_1, C) , em lugar de (X_0, X_1, C) , como parâmetros no ajuste da cosmologia.

Os parâmetros recuperados do ajuste das curvas de luz, (m_B^*, X_1, C) , podem ser usados para estimar o módulo de distância como

$$\mu^{\text{SNIa}} = m_B^* - (M_B - \alpha X_1 + \beta C) , \quad (4.5)$$

com m_B^* , X_1 e C derivados do ajuste das curvas de luz, e α , β e M_B são os parâmetros nuisance na estimativa de distância. Note que, os parâmetros nuisance serão ajustados junto com os parâmetros do modelo cosmológico teórico. Uma característica interessante nestes parâmetros é que a magnitude absoluta M_B e o parâmetro β dependem das propriedades da galáxia anfitriã [96] embora o mecanismo não seja entendido por completo. Uma forma de corrigir aproximadamente estes efeitos é considerar que a magnitude absoluta está relacionada com a massa estelar da galáxia anfitriã (M_{estelar}), desprezando uma dependência com β , pela simples função degrau:

$$M_B = \begin{cases} M_B^1 & \text{se } M_{\text{estelar}} < 10^{10} M_{\odot} \\ M_B^1 + \Delta_M & \text{outros casos} \end{cases} \quad (4.6)$$

Os parâmetros das curvas de luz (m_B^* , X_1 , C), como foi mencionado acima, resultam do ajuste do modelo de sequência espectral das SNIa para os dados fotométricos.

O JLA reúne uma matriz de covariância de 2220×2220 para os parâmetros das curvas de luz que incluem tanto os erros estatísticos quanto os sistemáticos (para maior detalhes ver a seção 5 da referência [36]).

$$C_\eta = C_{\text{estat}} + C_{\text{cal}} + C_{\text{model}} + C_{\text{viés}} + C_{\text{anf}} + C_{\text{poei}} + C_{\text{pec}} + C_{\text{nãoIa}}, \quad (4.7)$$

As incertezas estatísticas C_{estat} são obtidas da propagação de erros do ajuste das curva de luz [96]. Por outro lado, são consideradas 7 fontes de incertezas sistemáticas. Reavaliando 5 fontes de incertezas associadas com a calibração C_{cal} , com os modelos das curvas de luz C_{model} [118], com as correções dos viés $C_{\text{viés}}$, com a função degrau da massa estelar anfitriã C_{anf} e com a densidade da coluna de poeira da Via Láctea C_{poei} . Também foi considerada a incerteza devida às correções das velocidades peculiares C_{pec} e a contaminação de supernovas que não são de tipo Ia $C_{\text{nãoIa}}$ [119].

Os parâmetros recuperados do ajuste das curvas de luz (m_B^* , X_1 , C) são os dados que serão usados para ajustar os modelos cosmológicos. Estes dados, com sua respectiva matriz de covariância, se encontram disponíveis no site http://supernovae.in2p3.fr/sdss_snls_jla/ReadMe.html.

Na figura 4.3 apresentamos o diagrama de Hubble dos dados do catálogo JLA calibrado com o modelo Λ CDM plano, mantendo os parâmetros nuisance fixos em seus valores de melhor ajuste.

A aproximação tradicional χ^2 :

A forma tradicional de ajustar os modelos cosmológicos teóricos com as SNIa observadas é usando a função χ^2 (ver apêndice A) que, com as equações (3.34) e (4.5), pode ser expressa da seguinte forma

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B) = \sum_{i=1}^{740} \frac{[\mu_i^{\text{SNIa}}(\boldsymbol{\delta}, M_B) - \mu^{\text{Th}}(z_i; \boldsymbol{\theta})]^2}{\sigma_i^2(\boldsymbol{\delta}) + \sigma_{\text{int}}^2} \quad (4.8)$$

onde os parâmetros das supernovas são denotados por $\boldsymbol{\delta} := (\alpha, \beta)$ e os parâmetros cosmológicos pelo parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ que toma diferentes valores, segundo o modelo cosmológico a ser ajustado. Para os modelos com Big Bang não simultâneo temos $\boldsymbol{\theta} := (r_c, t_{B0})$ e no caso dos modelos com Big Bang simultâneo com os três perfis arbitrários: $\boldsymbol{\theta} := (\Omega_{M,\text{in}}, \Delta r, r_0)$ para o CGBH, $\boldsymbol{\theta} := (\Omega_{M,\text{in}}, \nu, r_0)$ para o $C\nu\text{-ln}2$ e $\boldsymbol{\theta} := (\Omega_{M,\text{in}}, r_0)$ para o de tipo Gaussiano.

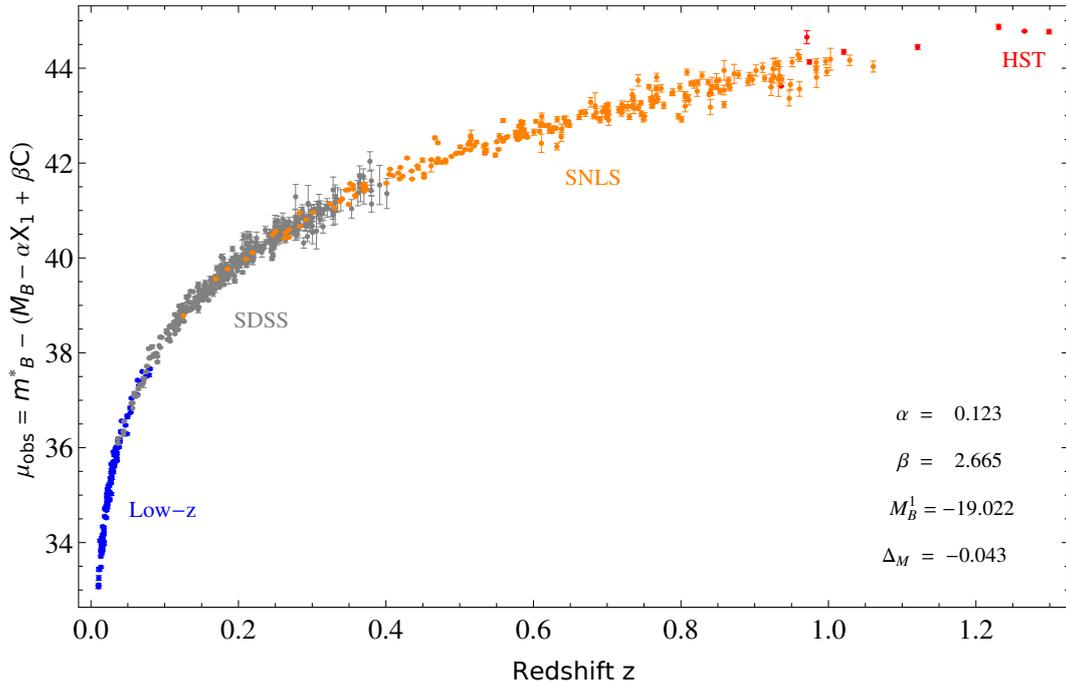


Figura 4.3: Diagrama de Hubble do catálogo JLA calibrado com o modelo Λ CDM plano. Os parâmetros de ruído são fixados em seus valores de melhor ajuste.

A propagação de erros pode ser expressa, em base da matriz de covariância (4.7) com seus respectivas incertezas, como segue

$$\sigma_i^2(\delta) = \sigma_{m_B^*,i}^2 + \alpha^2 \sigma_{x_1,i}^2 + \beta^2 \sigma_{c,i}^2 + 2\alpha \sigma_{m_B^* x_1,i} - 2\beta \sigma_{m_B^* c,i} - 2\alpha\beta \sigma_{x_1 c,i} + \sigma_{\mu z,i}^2, \quad (4.9)$$

onde o termo $\sigma_{\mu z,i}^2$ representa a contribuição na dispersão do módulo de distância devido a incertezas no redshift pelas velocidades peculiares e também de suas próprias medições. Por simplicidade, sua contribuição será modelada como de um Universo vazio [102, 117], que é escrita da seguinte maneira

$$\sigma_{\mu z,i} = \sigma_{z,i} \left(\frac{5}{\log 10} \right) \frac{1 + z_i}{z_i(1 + z_i/2)}. \quad (4.10)$$

com

$$\sigma_{z,i}^2 = \sigma_{\text{spec},i}^2 + \sigma_{\text{pec}}^2 \quad (4.11)$$

onde $\sigma_{\text{spec},i}^2$ representa o erro de medição pelo redshift e $\sigma_{\text{pec}}^2 = 0.0012$ é a incerteza no redshift devido a velocidades peculiares.

Como foi estudado na seção 4.2.1, as SNIa não são velas padrão perfeitas, mesmo depois de fazer as correções nas relações de luminosidade-forma e luminosidade-cor (ver a seção 4.3). O termo σ_{int} , introduzido na equação (4.8), representa a incerteza associada

à dispersão intrínseca restante nas SNIa.

Seguindo os trabalhos realizados na literatura [117, 120], temos que ter cuidado na minimização da função χ^2 , devido a que na definição da propagação de erros, σ_i^2 , foram considerados os parâmetros α e β . Isto é, quando minimizamos o (4.8) com respeito aos parâmetros α e β aparecem viés, no sentido de aumentar os erros $\sigma_i(\boldsymbol{\delta})$ para diminuir o valor do χ^2 . Assim, mantendo presente este fenômeno, usaremos o método iterativo empregado nas referências [117, 120].

O método iterativo, consiste em re-escrever a função χ^2 , apresentada na equação (4.8), da seguinte forma:

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B) = \sum_{i=1}^{740} \frac{[\mu_i^{\text{SNIa}}(\boldsymbol{\delta}, M_B) - \mu^{\text{Th}}(z_i; \boldsymbol{\theta})]^2}{\sigma_i^2(\boldsymbol{\eta}) + \sigma_{\text{int}}^2}. \quad (4.12)$$

Nesta expressão, $\boldsymbol{\eta} := (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ representam parâmetros diferentes aos do SALT2. Em ordem a obter os valores de melhor ajuste, começamos com os valores iniciais fixados em $\boldsymbol{\eta}$ e a otimização é realizada sobre os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\delta}$ e M_B . O seguinte passo é atualizar o valor de $\boldsymbol{\eta}$, igualando com o valor de melhor ajuste de $\boldsymbol{\delta}$ e a otimização é alcançada de novo. Este processo será repetido até obter a convergência, isto é, até que $\boldsymbol{\eta}$ não mude mais sobre alguma desejada precisão.

Por outro lado, note que σ_{int} não foi considerado como parâmetro livre em todo o processo, assim, ele é obtido seguindo o seguinte procedimento: começando com um valor inicial ($\sigma_{\text{int}} = 0.15$), realizamos iterativamente o processo mencionado acima até alcançar a convergência desejada. Logo, o valor do σ_{int} será obtido por tunelamento fino, de tal modo que o χ^2 reduzido ⁶ atinga a unidade (mantendo todos os outros parâmetros fixos em seus valores de melhor ajuste). O processo iterativo, mencionado acima, deve ser repetido mais uma vez mantendo fixo o novo valor de σ_{int} , para assim finalmente obter os valores de melhor ajuste dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\delta}$ e M_B .

A função verossimilhança (Likelihood):

Os autores da referência [117] mostram os limites de validade da usualmente incorreta aproximação χ^2 . Considerando que as curvas de luz das SNIa ajustam os parâmetros como variáveis aleatórias com uma distribuição Gaussiana, eles propõem tomar como ponto de

⁶O χ^2 reduzido é definido como $\chi_{\text{red}}^2 = \chi^2/(N - k)$, onde N representa o número de dados e k o número de parâmetros livres [121].

partida a função verossimilhança (Likelihood)

$$L = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma}} \exp(-\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X}/2) \quad (4.13)$$

onde N representa o número de dados e $\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X} =: \chi^2$, que tirando o logaritmo natural e multiplicando por menos dois, resulta em

$$\mathcal{L} := -2 \ln L = \chi^2 + \ln \det \Sigma + N \ln(2\pi) . \quad (4.14)$$

As equações (4.13) e (4.14) são as bases sobre o qual descansa todo o procedimento estatístico (ver apêndice A). O caso é que, se toda a covariância do problema é conhecida com exatidão, minimizar o χ^2 é totalmente equivalente a minimizar o \mathcal{L} . Contudo, como já vimos antes, as SNIa não são velas padrões perfeitas e temos que acrescentar o termo σ_{int} na covariância. Isto é a covariância não é completamente conhecida e temos que tomar em conta o penúltimo termo da equação (4.14), para evitar viés na hora de minimizar. Assim tendo estas considerações, minimizar χ^2 não é equivalente a minimizar \mathcal{L} .

Então, podemos re-escrever a equação (4.14) como⁷

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B, \sigma_{\text{int}}) := \chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B, \sigma_{\text{int}}) + \sum_i^N \ln [\sigma_i^2(\boldsymbol{\delta}) + \sigma_{\text{int}}^2] . \quad (4.15)$$

Note que **agora** σ_{int} é considerado também como um parâmetro livre. Portanto, com este novo procedimento podem ser obtidas funções de distribuições de probabilidades sem viés, incluindo σ_{int} e $\boldsymbol{\delta}$.

4.4 A amostra BAO

Assim como as SNIa, que são os melhores candidatos a “velas padrão”, para as observações astrofísicas, as Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) são os candidatos a prover uma “régua padrão”⁸ para as escalas de longitude, na cosmologia, com finalidade de explorar a história da expansão do Universo. Na seção 3.4.5 foi estudada, em detalhe, a escala característica BAO para os modelos inomogêneos, na qual se mostra que as características bariônicas se mantêm em posições de coordenadas constantes, relacionando as escalas transversais e radiais em diferentes redshifts como boa aproximação nos valores assintóticos. Assim, o sinal acústico nos aglomerados de galáxias, pode ser usado para

⁷Temos desprezado o último termo devido a que é uma constante e não altera a minimização.

⁸Uma régua padrão é um objeto com longitude própria conhecida.

impor vínculos nos parâmetros dos modelos cosmológicos.

Nesta seção vamos descrever os dados observacionais da escala BAO que serão usados para ajustar os modelos cosmológicos. Essas medições são feitas em termos da variável d_z , que para os modelos inomogêneos é dada pela equação (3.151) ou sendo mais explícitos pela equação (3.154).

Consideramos, assim, as medições da escala BAO em diferentes redshifts. O nosso catálogo é representado pelas observações no baixo redshift $z = 0.106$ obtido pelo 6dFGS [122], em $z = 0.35$ e $z = 0.57$ medidos pelos SDSS [123, 124], que finalmente são complementados com as observações feitas na colaboração do WiggleZ [125] nos redshifts $z = 0.44, 0.6$ e 0.73 .

Existe também uma medição adicional, feita pelo Carnero et al. [126], que pode ser considerado no catálogo BAO. Este ponto adicional envolve uma correlação puramente angular, na faixa de redshift $[0.5 - 0.6]$, que é definida como sendo no redshift $z = 0.55$, e pode ser comparada com a predição teórica $\Delta\theta_{\text{BAO}}$ representada na equação (3.152).

Todos esses dados com seus respectivos erros são resumidos na tabela 4.1 e mostrados na figura 4.4.

sample	z	$d_z \pm \sigma_{d_z}$
6dFGS	0.106	0.336 ± 0.015
SDSS	0.35	0.1126 ± 0.0022
SDSS	0.57	0.0732 ± 0.0012
WiggleZ	0.44	0.0916 ± 0.0071
WiggleZ	0.6	0.0726 ± 0.0034
WiggleZ	0.73	0.0592 ± 0.0032
sample	z	$\Delta\theta \pm \sigma_\theta$
Carnero et al.	0.55	$3.90^\circ \pm 0.38^\circ$

Tabela 4.1: O catálogo BAO resumido.

Assim como no caso das SNIa, precisamos da função χ^2 para ajustar os nossos modelos com os dados BAO. Por tanto, temos

$$\chi_{\text{BAO}}^2 = \sum_{i,j} [d_{z,i} - d_z^{LTB}(z_i; \gamma)] C_{ij}^{-1} [d_{z,j} - d_z^{LTB}(z_j; \gamma)] + \frac{[\Delta\theta - \Delta\theta_{\text{BAO}}(0.55)]^2}{\sigma_\theta^2} \quad (4.16)$$

onde γ representa os parâmetros cosmológicos, que a diferencia do θ na equação (4.8), o γ contém um termo adicional, o parâmetro da fração dos bárions f_b .

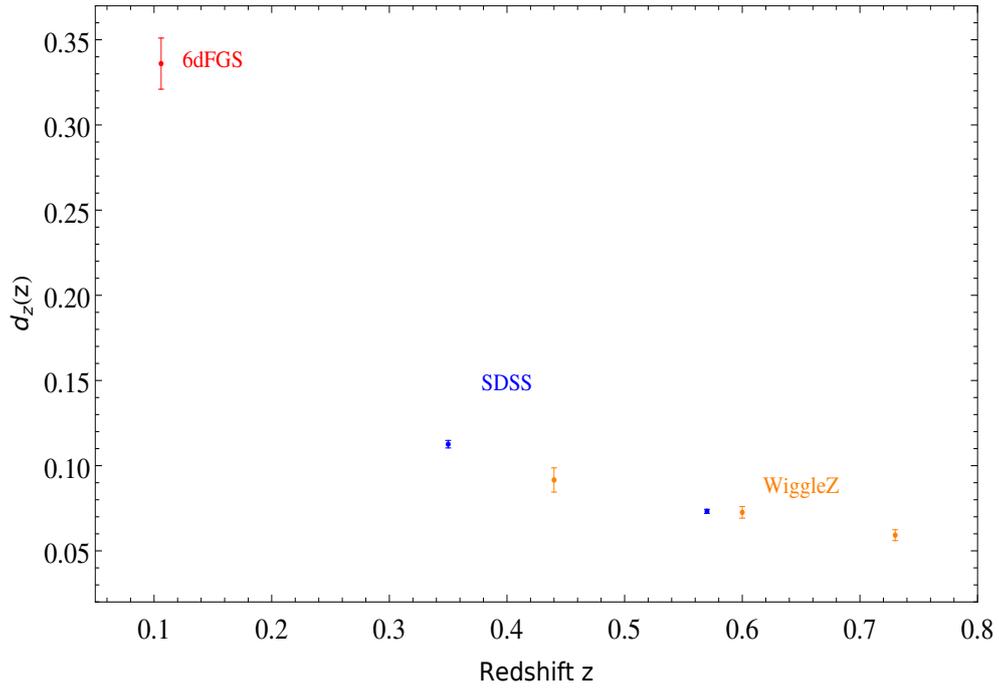


Figura 4.4: O conjunto de dados BAO.

O C_{ij}^{-1} na equação (4.16) é a inversa da matriz de covariância, que está expressa em termos do d_z e pode ser representada como

$$C_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 4444 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 206612 & 0 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0 & 694444 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 23857 & -22747 & 10586 \\ 0. & 0. & 0. & -22747 & 128729 & -59907 \\ 0. & 0. & 0. & 10586 & -59907 & 125536 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Note que, esta vez conhecemos muito bem a matriz de covariância e não faz sentido construir uma função verossimilhança para procurar diferenças com a análise tradicional χ^2 , já que, neste caso, são equivalentes.

Capítulo 5

Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados dos parâmetros de melhor ajuste para os modelos Λ CDM, os modelos de LTB nos casos do tempo Big Bang não simultâneo por um lado e por outro com Big Bang simultâneo. Consideraremos as análises na aproximação clássica χ^2 e o método da verossimilhança, para todos os modelos estudados no capítulo 3.

5.1 Resultados para o modelo Λ CDM

Como foi mencionado na seção 2.2, o modelo Λ CDM está dominado por duas componentes exóticas, a matéria escura e a energia escura. O valor da contribuição da radiação é desprezível para redshifts $\lesssim 2$, por isso não vai ser considerado na nossa análise estatística. Consideramos também a curvatura como sendo nula. Então o modelo Λ CDM plano unicamente vai ter como parâmetro livre a matéria Ω_M , já que podemos usar a equação do vínculo energético para expressar o parâmetro da energia escura $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$. Isto quer dizer que, quando ajustamos só a amostra JLA, o valor dos parâmetros cosmológicos nas equações (4.12) e (4.15) é simplesmente representado por $\theta := \Omega_M$. Para o caso em que usamos a amostra BAO, os parâmetros cosmológicos são $\gamma := (\Omega_M, f_b)$. Na tabela 5.1 resumimos os nossos resultados. Note que existe um viés¹ significativo nos parâmetros α e β quando comparamos as aproximações χ^2 e a verossimilhança. O viés é menos notório no parâmetro Ω_M . Isto concorda com os resultados obtidos por [117]. Para a análise combinada JLA+BAO fixamos os valores dos parâmetros das SNIa com seus valores de melhor ajuste obtidos tanto na análise χ^2 quanto na verossimilhança com a amostra JLA. Nossos resultados são consistentes com aqueles obtidos na literatura [36]. Na figura 5.1 mostramos as regiões de contorno em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança. Note aqui que,

¹Termo designado para indicar tendenciosidade, no nosso caso é para indicar a parcialidade das aproximações χ^2 e verossimilhança.

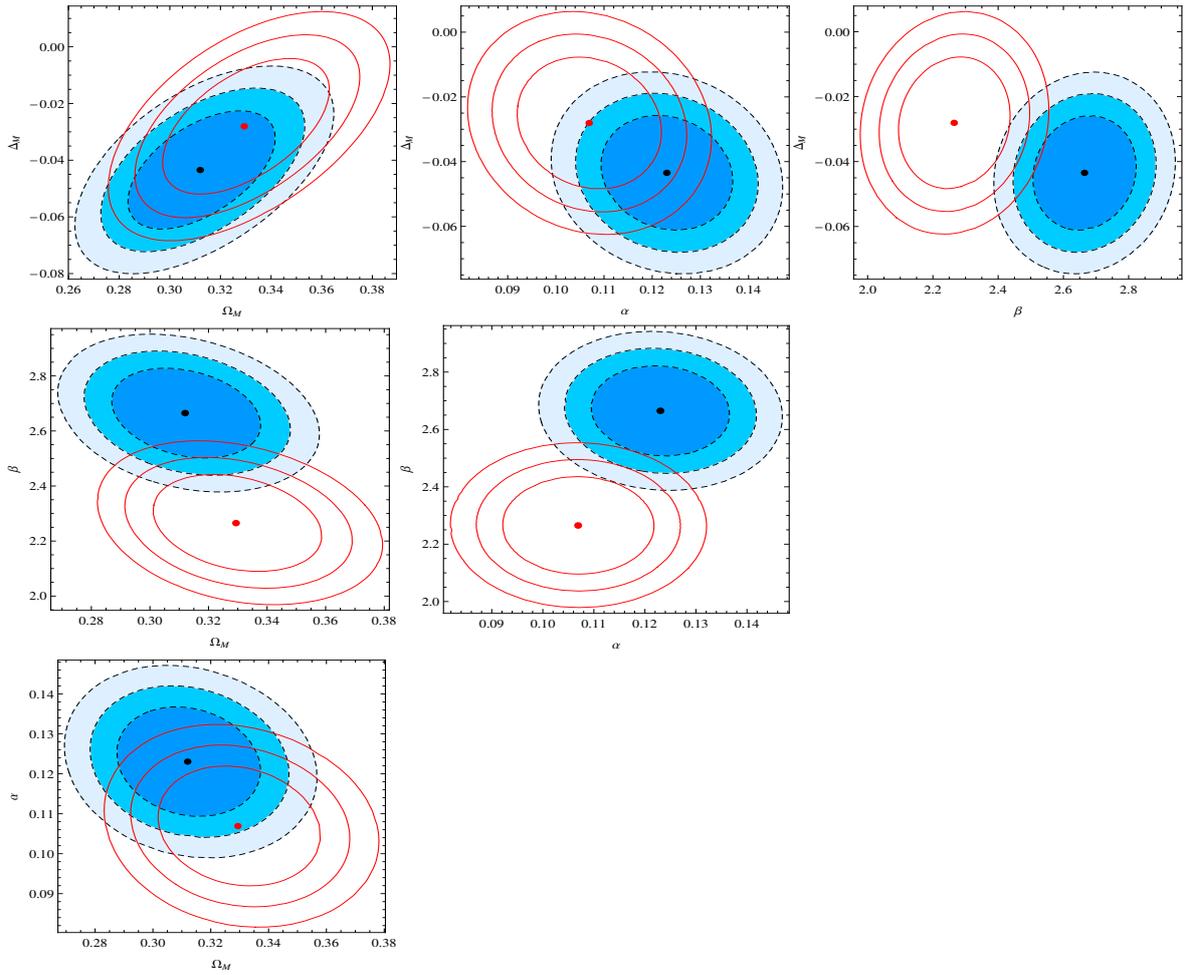


Figura 5.1: Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 4 parâmetros das SNIa (α , β , M_B^1 e Δ_M) mais o parâmetro Ω_M do modelo Λ CDM plano na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na função verossimilhança (curvas vermelhas contínuas), respectivamente.

o viés nos valores de melhor ajuste para os parâmetros das SNIa estão em pelo menos 3σ do nível de confiança. Isto difere consideravelmente com os resultados obtidos por [117].

Na figura 5.2 mostramos as curvas de contorno para 1σ , 2σ e 3σ no espaço $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ com a análise JLA, BAO e JLA+BAO para as duas aproximações χ^2 (lado esquerdo) e verossimilhança (lado direito).

Λ CDM	Ω_M	$100 f_b$	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$0.312_{-0.029}^{+0.030}$	$0.123_{-0.014}^{+0.014}$	$2.665_{-0.158}^{+0.158}$	$-19.022_{-0.023}^{+0.023}$	$-0.043_{-0.022}^{+0.021}$	0.973868	0.019
\mathcal{L}_{JLA}	$0.329_{-0.032}^{+0.034}$	$0.107_{-0.015}^{+0.015}$	$2.265_{-0.170}^{+0.172}$	$-19.032_{-0.026}^{+0.029}$	$-0.028_{-0.024}^{+0.024}$	$0.064_{-0.027}^{+0.022}$
χ_{BAO}^2	$0.255_{-0.195}^{+0.030}$	$21.325_{-14.08}$	0.399400
$\chi_{\text{JLA+BAO}}^2$	$0.312_{-0.025}^{+0.026}$	$14.712_{-3.193}^{+3.867}$	0.963805	0.019
$\mathcal{L}_{\text{JLA+BAO}}$	$0.328_{-0.019}^{+0.019}$	$13.301_{-2.181}^{+2.479}$	$0.054_{-0.019}^{+0.018}$

Tabela 5.1: Valores de melhor ajuste dos parâmetros das SNIa (α , β , M_B^1 e Δ_M) e do modelo Λ CDM nas aproximações χ^2 e a verossimilhança, para a amostra JLA, BAO e a combinação JLA+BAO.

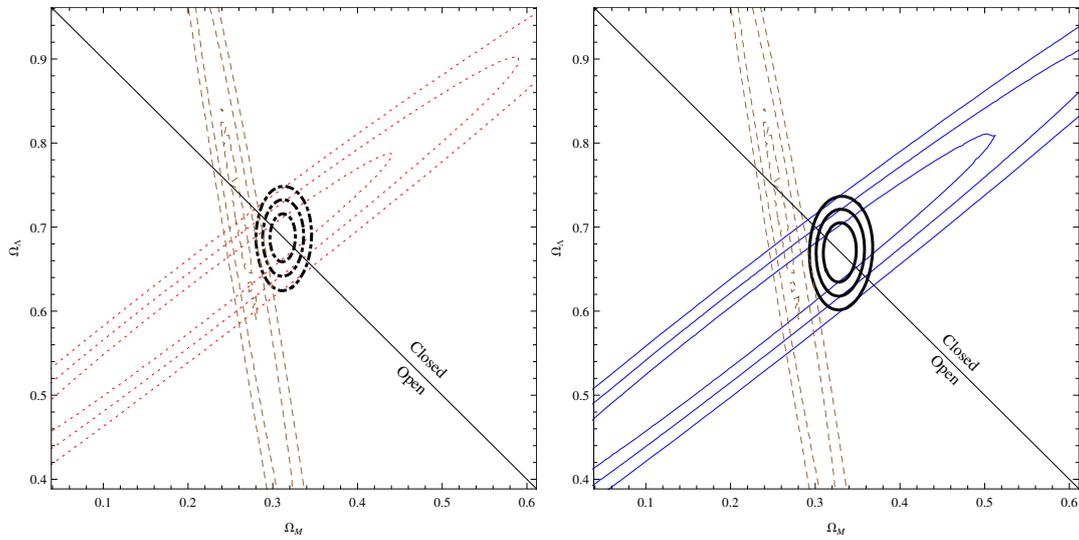


Figura 5.2: Regiões de confiança, em 1σ , 2σ e 3σ , no espaço dos parâmetros (Ω_M , Ω_Λ) para o modelo Λ CDM plano na aproximação χ^2 (lado esquerdo) e na função verossimilhança (lado direito), respectivamente.

Finalmente, as distribuições das funções de probabilidade (PDF) dos parâmetros σ_{int} são mostrados na figura 5.3 para a aproximação da verossimilhança com a amostra JLA (lado esquerdo) e com a combinação JLA+BAO (lado direito). A linha vertical vermelha tracejada representa o valor do σ_{int} obtido de forma iterativa na aproximação χ^2 . Note que, o viés no parâmetro σ_{int} é pelo menos acima de 3σ no nível de confiança em contraste com os resultados do [117].

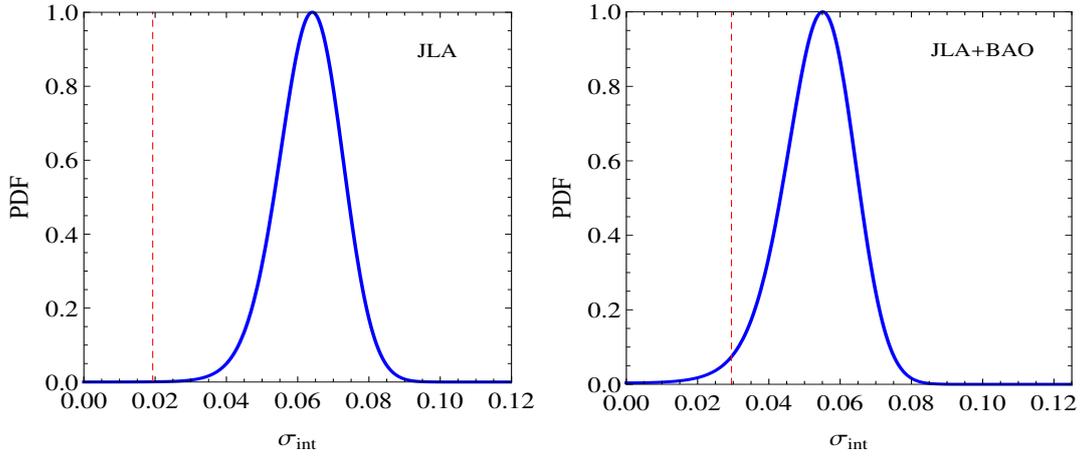


Figura 5.3: PDF do parâmetro σ_{int} na aproximação da verossimilhança com a amostra JLA (lado esquerdo) e a combinação JLA+BAO (lado direito) para o modelo Λ CDM plano.

$t'_B(r) < 0$	t_{B0}	r_c	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$2.052^{+0.119}_{-0.117}$	$1.865^{+0.131}_{-0.122}$	$0.117^{+0.016}_{-0.016}$	$2.525^{+0.183}_{-0.182}$	$-19.412^{+0.015}_{-0.015}$	$-0.047^{+0.021}_{-0.020}$	0.977595	0.058
\mathcal{L}_{JLA}	$2.052^{+0.131}_{-0.128}$	$1.902^{+0.146}_{-0.135}$	$0.102^{+0.017}_{-0.017}$	$2.145^{+0.190}_{-0.188}$	$-19.425^{+0.017}_{-0.017}$	$-0.032^{+0.023}_{-0.022}$	$0.080^{+0.024}_{-0.022}$

Tabela 5.2: Os parâmetros de melhor ajuste para o modelo $t'_B(r) < 0$ nas aproximações χ^2 e verossimilhança na amostra JLA.

5.2 Resultados para os modelos de Big Bang não simultâneo

No caso dos modelos de Big Bang não simultâneos, estudados na seção 3.3, os parâmetros cosmológicos das funções χ^2 e verossimilhança tomam a forma $\theta := (r_c, t_{B0})$. Na tabela 5.2 resumimos os nossos resultados, para o caso $t'_B(r) < 0$ nas aproximações χ^2 e verossimilhança comparadas com a amostra de supernovas JLA. Analogamente à análise feita com o modelo Λ CDM, os parâmetros das SNIa apresentam vieses significativos entre as aproximações χ^2 e verossimilhança. Note também que o parâmetro t_{B0} se mantém invariante nas duas aproximações, coisa que não acontece com o parâmetro r_c . Por outro lado, na tabela 5.3 resumimos nossos resultados para o caso $t'_B(r) > 0$, obtendo resultados similares para os parâmetros das SNIa. No caso dos parâmetros cosmológicos, o r_c é quem se mantém invariante em contraste com o t_{B0} que varia ligeiramente nas duas aproximações.

O parâmetro t_{B0} representa a diferença máxima da idade do Universo inhomogêneo comparada com o caso homogêneo $t_{B0} = 0$. O modelo de alta densidade descreve uma inhomogeneidade de uma extensão na ordem de 2 Gpc. O valor de melhor ajuste de r_c para o modelo vazio é da ordem de 30 Mpc, isto é, a extensão do vazio é muito menor.

$t'_B(r) > 0$	t_{B0}	r_c	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$3.243_{-0.101}^{+0.101}$	$0.029^{+0.015}$	$0.102_{-0.021}^{+0.021}$	$2.310_{-0.245}^{+0.244}$	$-19.042_{-0.021}^{+0.021}$	$-0.089_{-0.028}^{+0.028}$	1.000700	0.154
\mathcal{L}_{JLA}	$3.287_{-0.105}^{+0.104}$	$0.029^{+0.015}$	$0.087_{-0.022}^{+0.022}$	$1.948_{-0.243}^{+0.242}$	$-19.046_{-0.022}^{+0.023}$	$-0.076_{-0.030}^{+0.031}$	$0.161_{-0.020}^{+0.022}$

Tabela 5.3: Os parâmetros de melhor ajuste para o modelo $t'_B(r) > 0$ nas aproximações χ^2 e verossimilhança na amostra JLA.

Na figura 5.4, apresentamos as regiões de contorno para o modelo $t'_B(r) < 0$ em 1σ , 2σ e 3σ de nível de confiança. Os contornos sólidos (azuis) representam a análise χ^2 e as curvas vermelhas são feitas para a análise com a função verossimilhança. Note que, no 2-espaço (t_{B0}, r_c) o viés entre a análise χ^2 e a verossimilhança é muito pequeno em comparação com os contornos nos quais participam os parâmetros das supernovas (α , β e M_B^1). As regiões de contorno para o modelo $t'_B(r) > 0$ em 1σ , 2σ e 3σ de nível de confiança, são apresentadas na figura 5.5. Note que, também apresentam um viés alto nos parâmetros das supernovas (α , β). O contorno para o parâmetro r_c não é fechado, isto possivelmente é devido a que este modelo apresenta singularidade de tipo cruzamento de camadas.

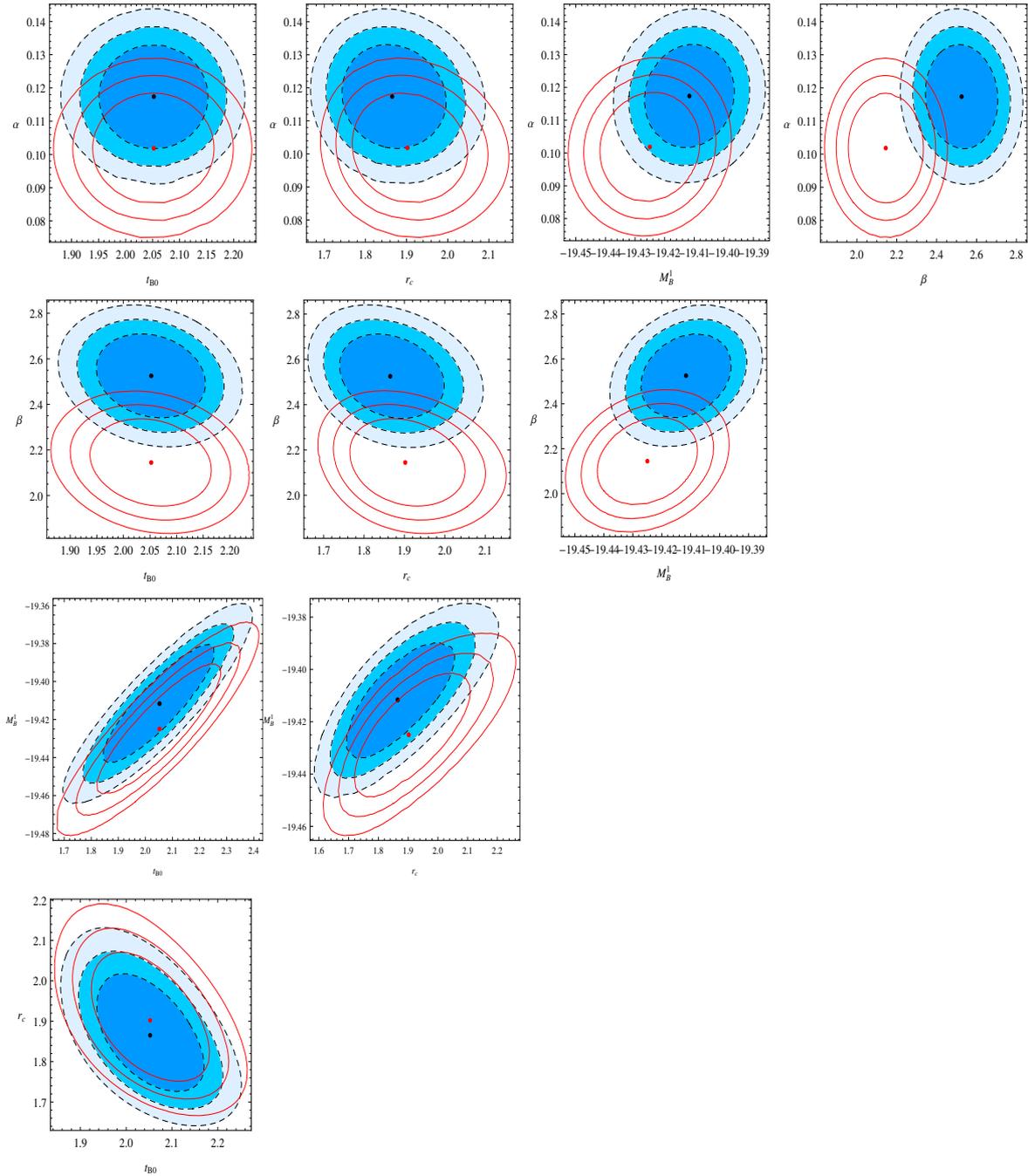


Figura 5.4: Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) < 0$ na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na aproximação da função verossimilhança (curvas vermelhas contínuas), respectivamente.

Finalmente na figura 5.6 mostramos as funções de distribuições de probabilidade (PDF) para o parâmetro σ_{int} . A linha vermelha tracejada representa o valor de σ_{int} obtido de forma iterativa pelo método χ^2 . Notamos que, existe uma diferença acima de 3σ de confiança entre os dois métodos para o modelo $t'_B(r) < 0$, coisa que não acontece com o

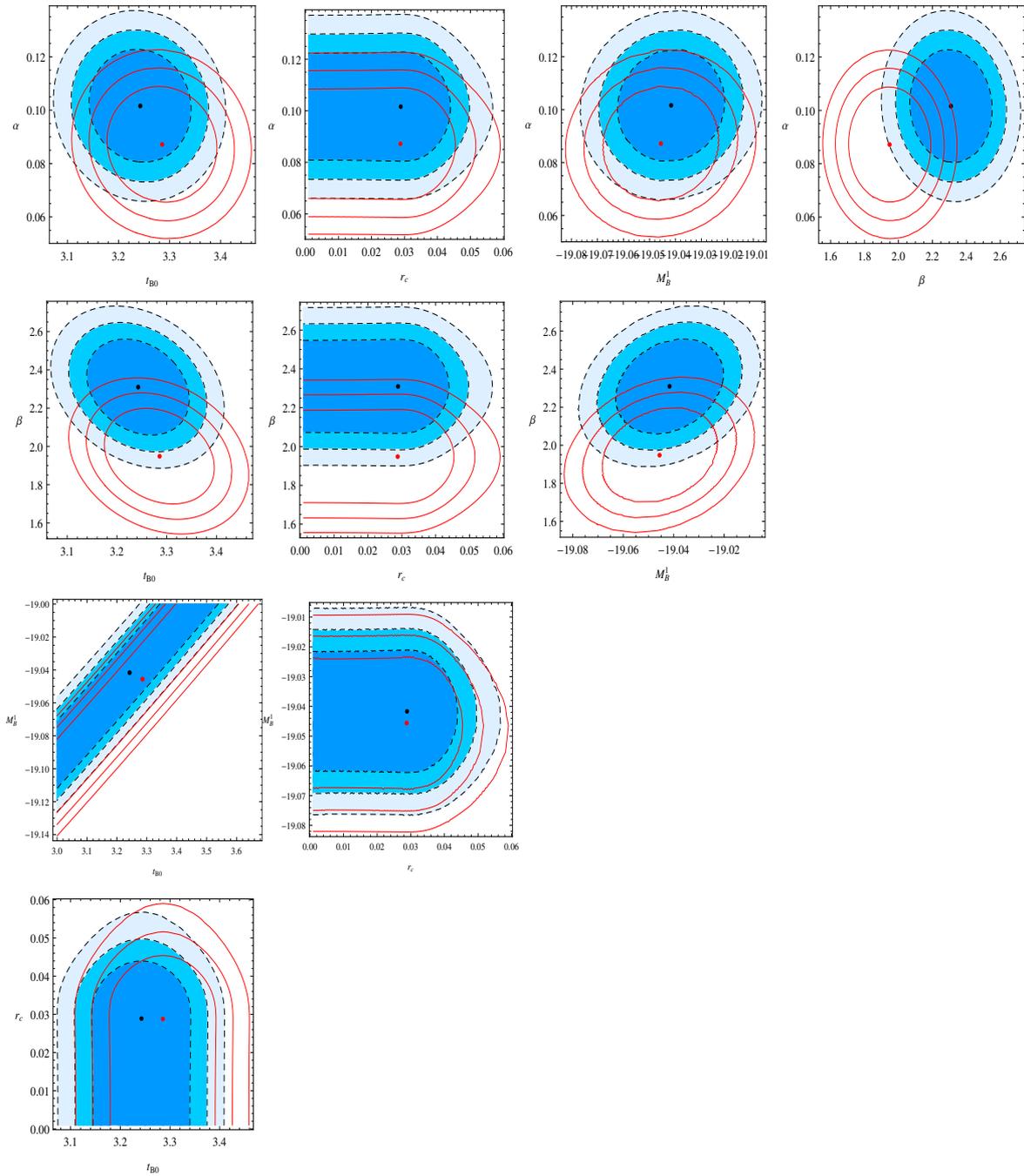


Figura 5.5: Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos para os 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) > 0$ na aproximação χ^2 (contorno preto pontilhado) e na aproximação da função verossimilhança (curvas vermelhas), respectivamente.

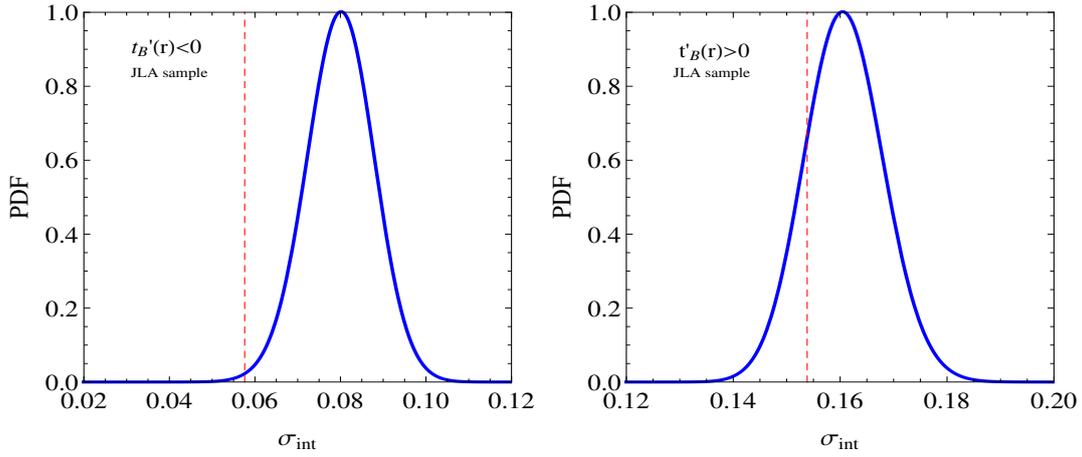


Figura 5.6: O PDF do parâmetro σ_{int} para o modelo $t'_B(r) < 0$ (esquerda) e o modelo $t'_B(r) > 0$ (direita). A linha vermelha tracejada representa os valores do σ_{int} obtidos iterativamente na aproximação tradicional χ^2 .

modelo $t'_B(r) > 0$.

5.3 Resultados para os modelos de Big Bang simultâneo

Como foi visto na seção 3.4 os modelos de Big Bang simultâneos tem $t_B(r) = 0$. Neste contexto foram estudados três perfis de vazio local, os de tipo CGBH, Gaussiano e $C\nu$ -ln2. Quando ajustamos só as SNIa, os parâmetros cosmológicos que especificam a distribuição da matéria nas equações (4.8) e (4.15) são representados por $\theta := (\Omega_{M,in}, r_0, \Delta r)$ para o modelo CGBH, por $\theta := (\Omega_{M,in}, r_0)$ para o modelo Gaussiano e por $\theta := (\Omega_{M,in}, r_0, \nu)$ para o modelo $C\nu$ -ln2. Além deles também temos os parâmetros das SNIa representados por $\delta := (\alpha, \beta, M_B^1, \Delta_M)$. No caso em que usamos os dados BAO, acrescentamos o parâmetro da fração dos bárions, assim temos que na equação (4.16) os parâmetros cosmológicos são representados por $\gamma := (\Omega_{M,in}, r_0, \Delta r, f_b)$ para o CGBH, $\gamma := (\Omega_{M,in}, r_0, f_b)$ para o modelo Gaussiano e $\gamma := (\Omega_{M,in}, r_0, \nu, f_b)$ para o modelo $C\nu$ -ln2.

Nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 resumimos os valores de melhor ajuste para os modelos de tipo CGBH, Gaussiano e $C\nu$ -ln2, respectivamente, usando ambas aproximações χ^2 e verossimilhança, mostrando por separado os resultados com a amostra JLA, BAO e a combinação JLA+BAO. Note que, os parâmetros das SNIa têm similares resultados para os três modelos. Isto é consistente com a ideia de que estes parâmetros não são muito sensíveis à evolução cosmológica. Contrariamente aos parâmetros cosmológicos que mostram diferenças consideráveis. Em particular, o modelo $C\nu$ -ln2 requer um valor mais

CGBH	$\Omega_{M\text{in}}$	r_0	Δr	$100 f_b$	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$0.09_{-0.02}^{+0.03}$	$3.88_{-2.12}^{+2.47}$	$3.89_{-2.44}^{+2.12}$	$0.12_{-0.02}^{+0.02}$	$2.66_{-0.19}^{+0.19}$	$-19.22_{-0.05}^{+0.05}$	$-0.04_{-0.03}^{+0.03}$	0.998104	0.02
\mathcal{L}_{JLA}	$0.11_{-0.03}^{+0.03}$	$4.15_{-2.42}^{+2.97}$	$3.79_{-2.85}^{+2.34}$	$0.11_{-0.02}^{+0.02}$	$2.26_{-0.20}^{+0.20}$	$-19.25_{-0.05}^{+0.05}$	$-0.03_{-0.35}^{+0.35}$	$0.06_{-0.03}^{+0.03}$
χ_{BAO}^2	$0.38_{-0.06}^{+0.08}$	$3.31_{-0.46}^{+1.22}$	$0.51_{-0.17}$	$5.62_{-3.92}^{+5.53}$	0.34333
$\chi_{\text{JLA+BAO}}^2$	$0.12_{-0.02}^{+0.02}$	$3.16_{-0.17}^{+0.17}$	$0.73_{-0.15}^{+0.97}$	$15.30_{-0.70}^{+8.59}$	1.02432	0.03
$\mathcal{L}_{\text{JLA+BAO}}$	$0.12_{-0.02}^{+0.02}$	$3.72_{-0.29}^{+0.31}$	$1.68_{-0.32}^{+0.60}$	$16.81_{-0.32}^{+7.69}$	$0.07_{-0.02}^{+0.02}$

Tabela 5.4: Parâmetros de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo CGBH nas duas aproximações χ^2 e verossimilhança.

Gaussiano	$\Omega_{M\text{in}}$	r_0	$100 f_b$	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$0.16_{-0.02}^{+0.02}$	$4.28_{-0.66}^{+0.99}$	$0.12_{-0.02}^{+0.02}$	$2.65_{-0.18}^{+0.18}$	$-19.27_{-0.04}^{+0.04}$	$-0.04_{-0.03}^{+0.03}$	0.973515	0.03
\mathcal{L}_{JLA}	$0.17_{-0.02}^{+0.02}$	$4.27_{-0.75}^{+1.23}$	$0.11_{-0.02}^{+0.02}$	$2.25_{-0.19}^{+0.19}$	$-19.30_{-0.05}^{+0.04}$	$-0.03_{-0.03}^{+0.03}$	$0.07_{-0.03}^{+0.02}$
χ_{BAO}^2	$0.26_{-0.06}$	$7.39_{-1.48}$	$18.9_{-13.29}$	0.272500
$\chi_{\text{JLA+BAO}}^2$	$0.17_{-0.01}^{+0.01}$	$5.08_{-0.27}^{+0.32}$	$16.31_{-1.98}^{+2.23}$	0.996667	0.02
$\mathcal{L}_{\text{JLA+BAO}}$	$0.19_{-0.02}^{+0.02}$	$5.04_{-0.35}^{+0.40}$	$14.49_{-2.20}^{+2.33}$	$0.07_{-0.02}^{+0.02}$

Tabela 5.5: Valores de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo Gaussiano nas aproximações χ^2 e verossimilhança.

alto da densidade no interior do vazio local $\Omega_{M,\text{in}}$ em comparação com os modelos CGBH e Gaussiano. Por outro lado, o vazio local do modelo Gaussiano apresenta um valor mais alto do tamanho r_0 , sendo o modelo $C\nu\text{-ln}2$ de menor tamanho. Estas características são robustas no sentido em que aparecem tanto na aproximação χ^2 quanto na verossimilhança.

Nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostramos as regiões de contorno e os valores de melhor ajuste, para cada perfil, usando somente a amostra JLA. Os contornos de traço vermelho indicam os níveis de confiança em 1σ , 2σ e 3σ na aproximação χ^2 , enquanto os contornos azuis sólidos na aproximação da função verossimilhança. Os resultados para o modelo CGBH são mostrados na figura 5.7, enquanto para os perfis Gaussiano e $C\nu\text{-ln}2$ são

$C\nu\text{-ln}2$	$\Omega_{M\text{in}}$	r_0	ν	$100 f_b$	α	β	M_B^1	Δ_M	χ_{red}^2	σ_{int}
χ_{JLA}^2	$0.18_{-0.02}^{+0.02}$	$3.12_{-0.46}^{+0.61}$	$0.04_{-0.03}^{+1.66}$	$0.12_{-0.16}^{+0.16}$	$2.63_{-0.19}^{+0.19}$	$-19.29_{-0.04}^{+0.04}$	$-0.05_{-0.03}^{+0.03}$	0.974052	0.03
\mathcal{L}_{JLA}	$0.21_{-0.03}^{+0.02}$	$3.02_{-0.50}^{+0.69}$	$0.08_{-0.03}^{+2.28}$	$0.11_{-0.02}^{+0.02}$	$2.23_{-0.20}^{+0.20}$	$-19.33_{-0.05}^{+0.05}$	$-0.03_{-0.03}^{+0.03}$	$0.07_{-0.03}^{+0.03}$
χ_{BAO}^2	$0.26_{-0.12}$	$5.23_{-1.65}$	$0.58_{-0.17}^{+4.95}$	$19.54_{-2.53}^{+2.53}$	0.403333
$\chi_{\text{JLA+BAO}}^2$	$0.21_{-0.02}^{+0.02}$	$4.40_{-0.36}^{+0.40}$	$0.34_{-0.03}^{+1.45}$	$20.97_{-3.30}^{+3.09}$	0.999448	0.14
$\mathcal{L}_{\text{JLA+BAO}}$	$0.22_{-0.02}^{+0.02}$	$3.54_{-0.24}^{+0.29}$	$0.03_{-0.03}^{+1.46}$	$11.65_{-2.13}^{+2.42}$	$0.07_{-0.02}^{+0.02}$

Tabela 5.6: Parâmetros de melhor ajuste com os erros em 1σ de confiança para o modelo $C\nu\text{-ln}2$ nas duas aproximações χ^2 e verossimilhança.

apresentados nas figuras 5.8 e 5.9, respectivamente. Podemos apreciar que os contornos são similares em forma e área, contudo, ao contrário de [117], eles apresentam um viés significativo nos valores de melhor ajuste e os contornos da função verossimilhança são ligeiramente maiores do que χ^2 . Os resultados são incompatíveis, pelo menos em 1σ nos planos (β, r_0) , (β, α) , $(\Delta r, \beta)$, (ν, β) e $(\Omega_{M,\text{in}}, \beta)$. Assim, nossa análise exhibe um exemplo concreto das críticas relacionadas à aproximação χ^2 no uso de SNIa, discutidas na referência [117]. Na figura 5.10 mostramos as funções distribuição de probabilidade (PDF) do parâmetro σ_{int} para os modelos CGBH, Gaussiano e $C\nu\text{-ln}2$. A linha vertical em traço vermelho representa o valor do parâmetro σ_{int} obtido de forma iterativa na aproximação χ^2 . Em todos os casos o resultado simples da aproximação χ^2 é excluído pela verossimilhança com um alto nível de confiança, o qual é bastante diferente do resultado obtido na referência [117]. Na seção 3.4.5 introduzimos o parâmetro f_b e descrevemos como podem ser usadas as réguas padrões (BAO) nos cenários de LTB. Note que, independentemente da aproximação estatística que usemos (χ^2 ou verossimilhança), aparece uma forte tensão entre os valores de melhor ajuste obtidos com as diferentes amostras BAO e SNIa (ver as tabelas 5.4, 5.5 e 5.6). Na referência [69] foi argumentado que a discrepância provem da evolução de um cisalhamento não nulo nos modelos de LTB. De fato, a dependência espacial e a diferença na evolução dos dois índices de expansão LTB (H_{\parallel} e H_{\perp}) trabalham de forma diferente no ajuste dos dados BAO e SNIa. Em particular, o baixo valor de $\Omega_{M,\text{in}}$ necessário para ajustar os dados das SNIa, aumenta a taxa de expansão que acaba por aumentar o alongamento da escala de BAO perto do centro. Nesse sentido, a tensão observada na nossa análise tem uma origem puramente geométrica associada com a dinâmica dos modelos de LTB. As figuras 5.11, 5.12 e 5.13 mostram que os valores de melhor ajuste dos parâmetros ajustados usando somente BAO estão em desacordo com os valores de melhores ajuste obtidos com somente as SNIa, em pelo menos 3σ do nível de confiança. No caso do modelo CGBH, a figura 5.11 indica que os dados BAO favorecem um vazio local denso (densidade de matéria mais alta) quando comparamos com os dados das SNIa. Para o modelo Gaussiano, a figura 5.12 mostra que BAO além de favorecer valores de densidade de matéria alta dentro do vazio local, também favorece vazios locais de maiores tamanhos, isto é, valores mais altos do parâmetro r_0 . No caso do modelo $C\nu\text{-ln}2$, ainda existe a mesma tensão entre os valores de melhor ajuste usando os dados de BAO e das SNIa, mas em menor grau comparados com os outros dois modelos.

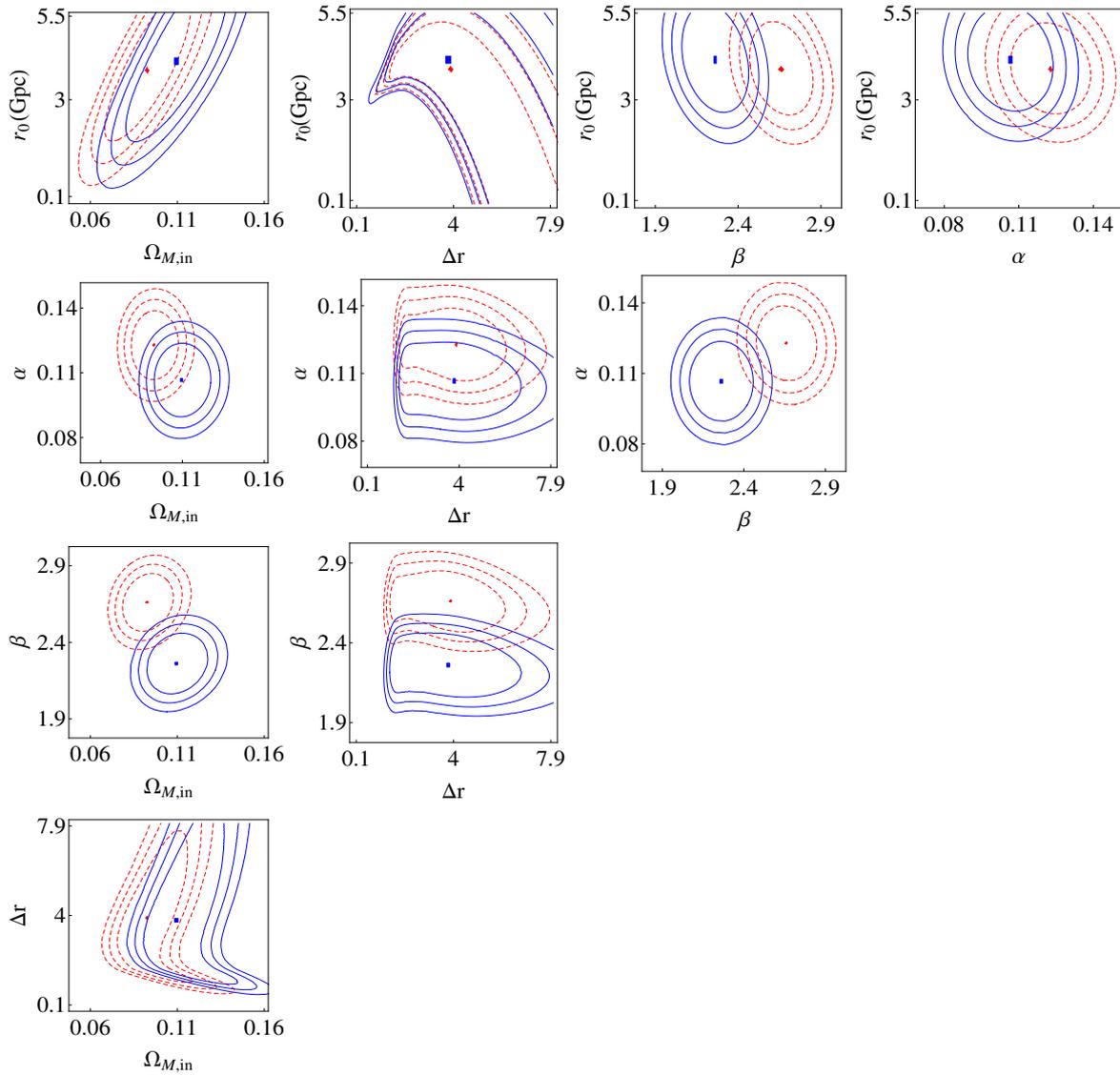


Figura 5.7: Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo CGBH.

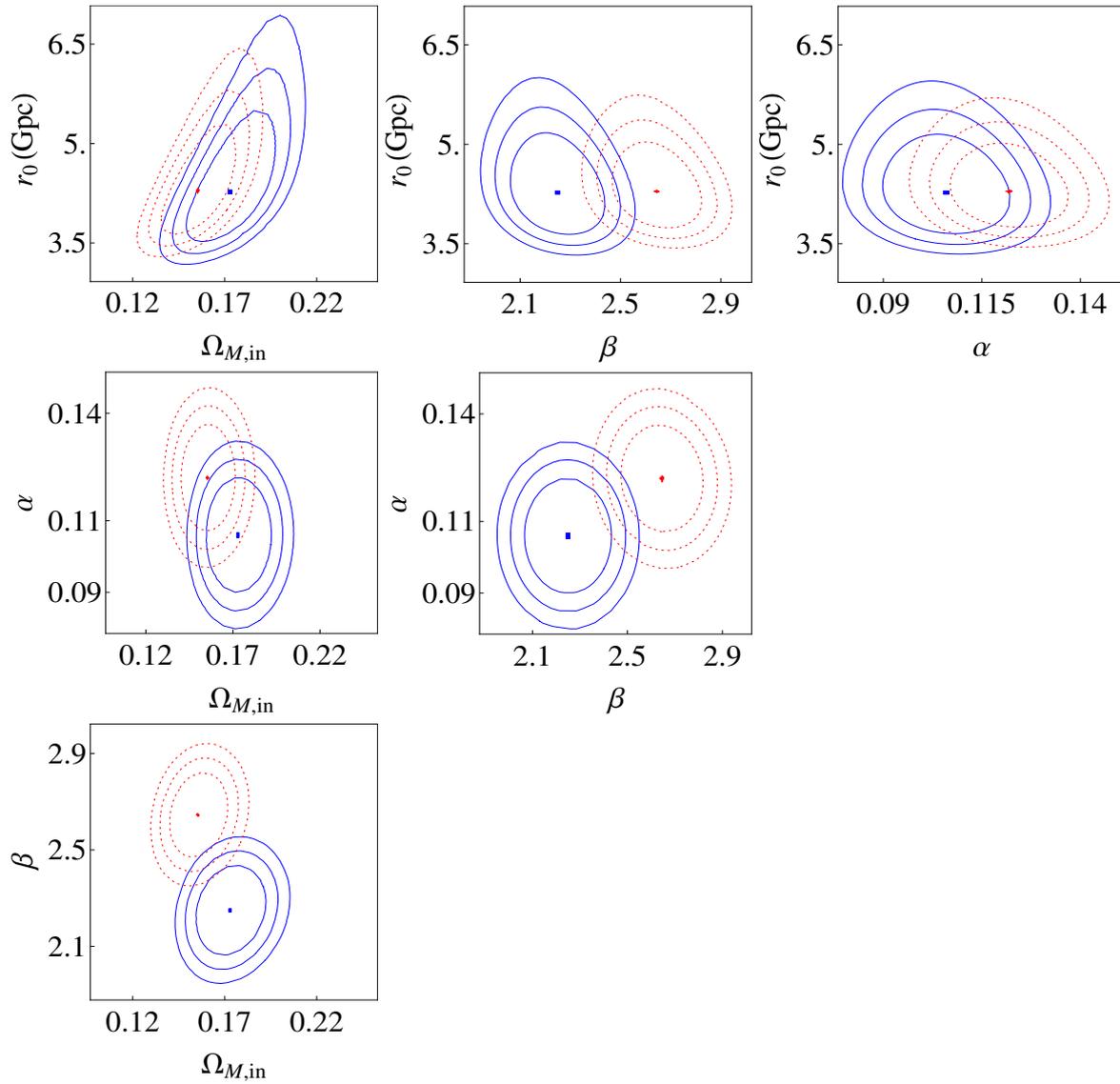


Figura 5.8: Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo do tipo Gaussiano.

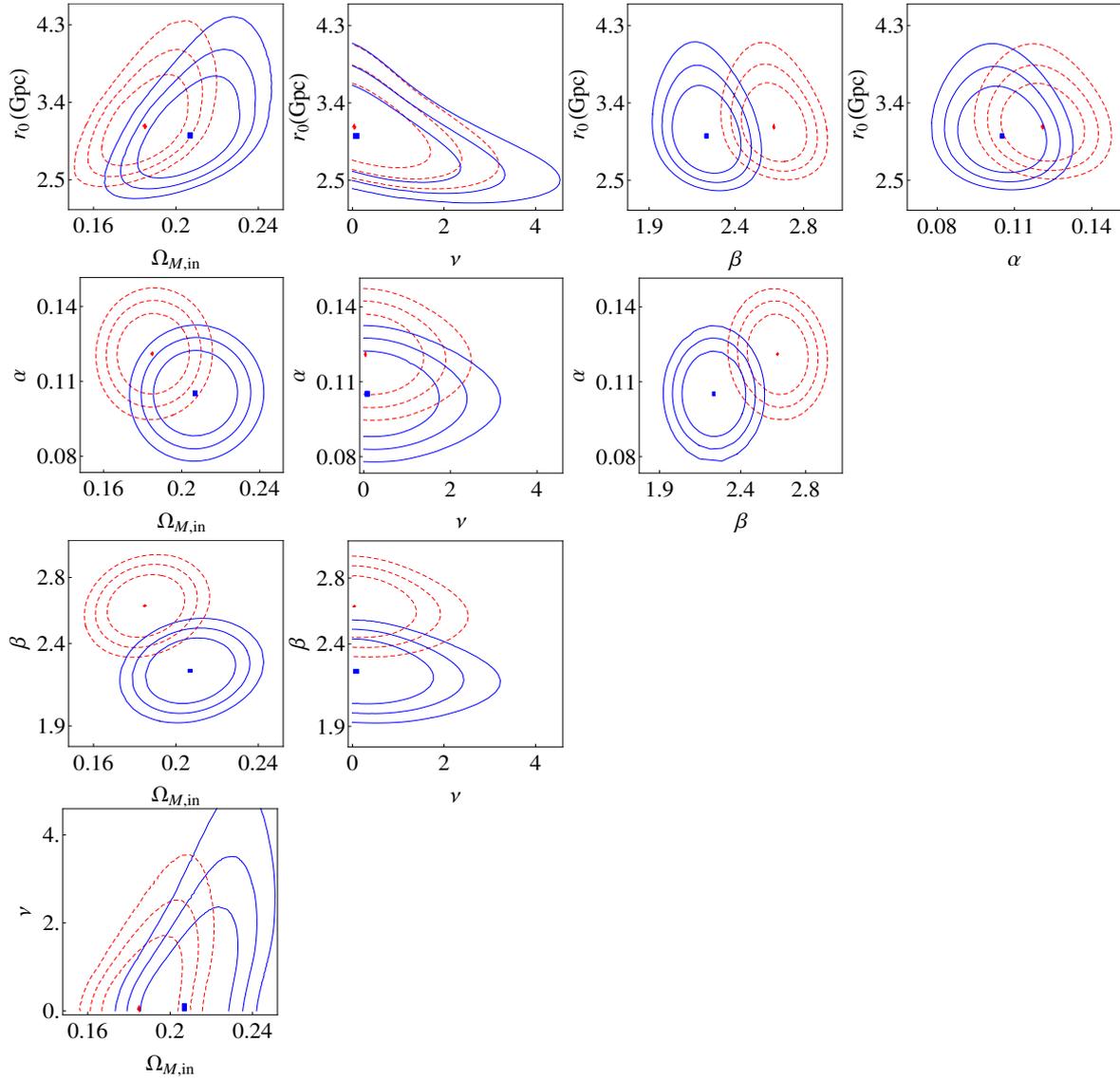


Figura 5.9: Regiões de confiança nas aproximações χ^2 (vermelho tracejado) e verossimilhança (azul sólido) com a amostra JLA para o modelo $C\nu\text{-ln}2$.

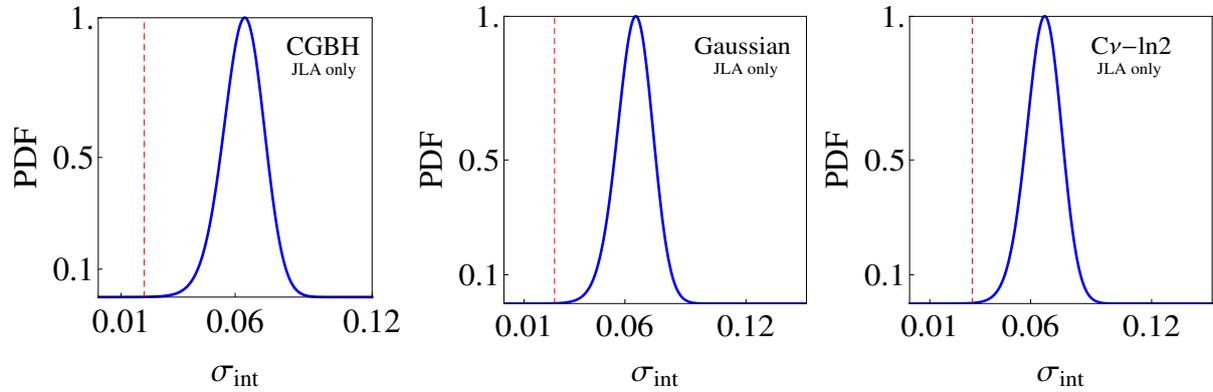


Figura 5.10: Os PDFs para σ_{int} na aproximação da função verossimilhança para os modelos CGBH (lado esquerdo), Gaussian (centro) e $C\nu\text{-ln}2$ (lado direito) com a amostra JLA. A linha vermelha indica os valores obtidos na aproximação χ^2 .

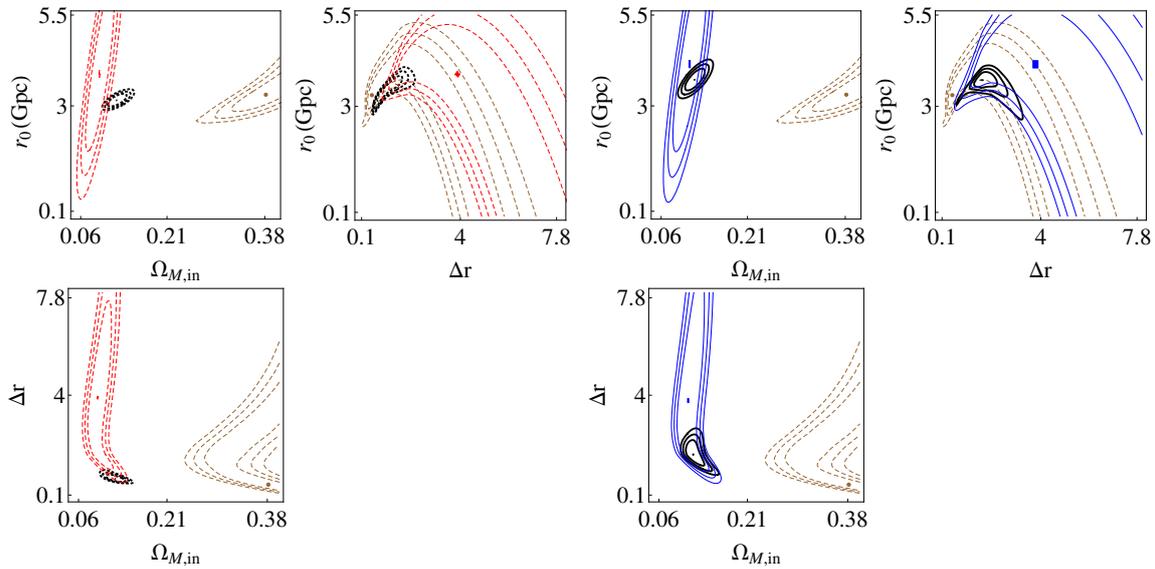


Figura 5.11: Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo CGBH na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO.

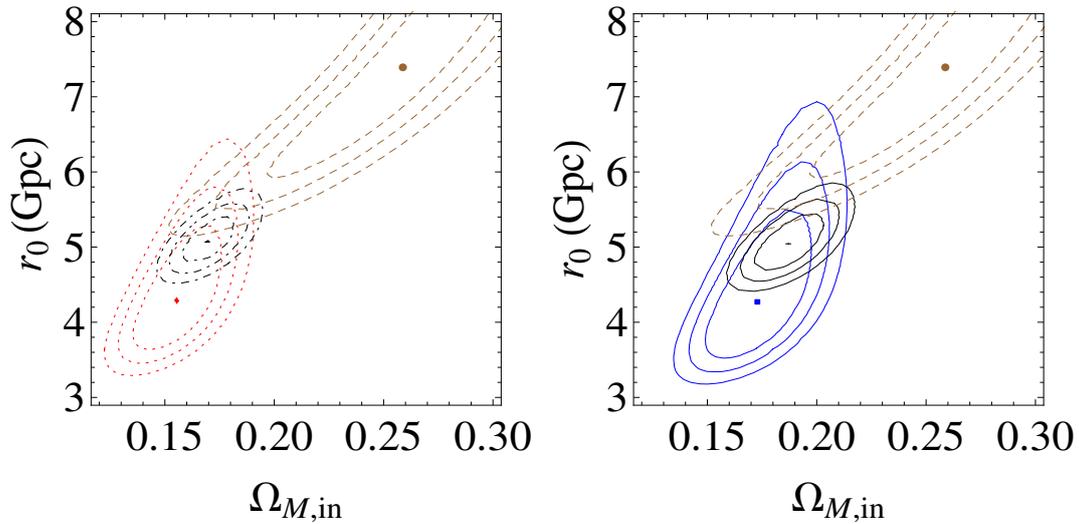


Figura 5.12: Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo Gaussiano na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO.

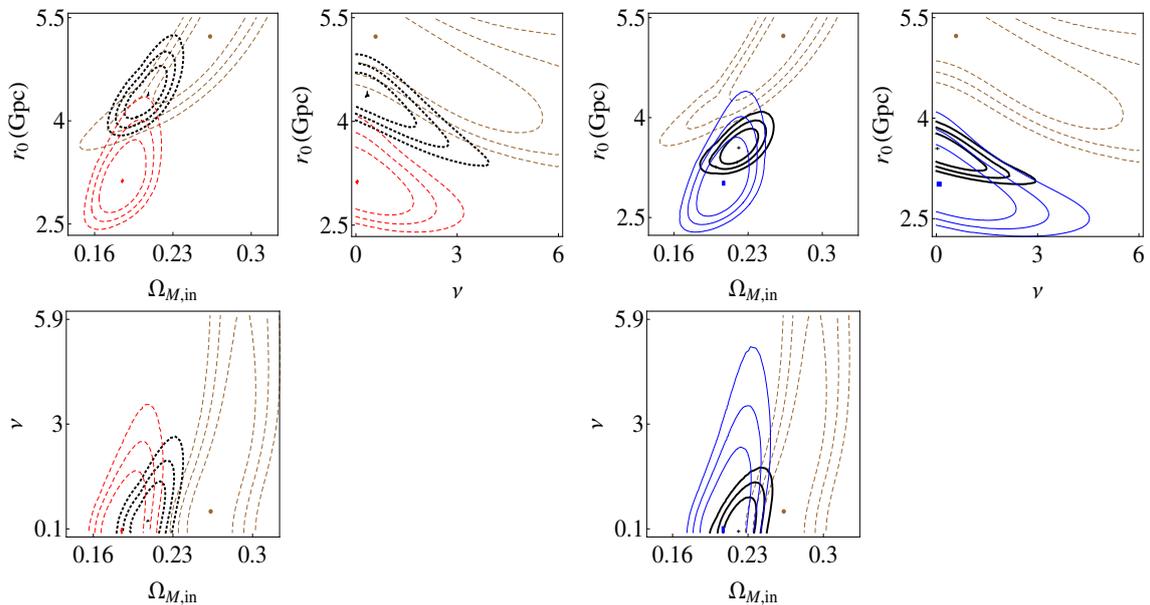


Figura 5.13: Parâmetros de melhor ajuste em 1σ , 2σ e 3σ do nível de confiança para o modelo $C\nu$ -ln2 na aproximação χ^2 (lado esquerdo), com somente a amostra JLA (contornos de traço vermelho) e a combinação JLA+BAO (contornos de pontilhado preto), e na aproximação da função verossimilhança (lado direito) com somente a amostra JLA (contornos sólidos azuis) e a combinação JLA+BAO (contornos sólidos pretos). Os contornos de traços marrons são para somente BAO.

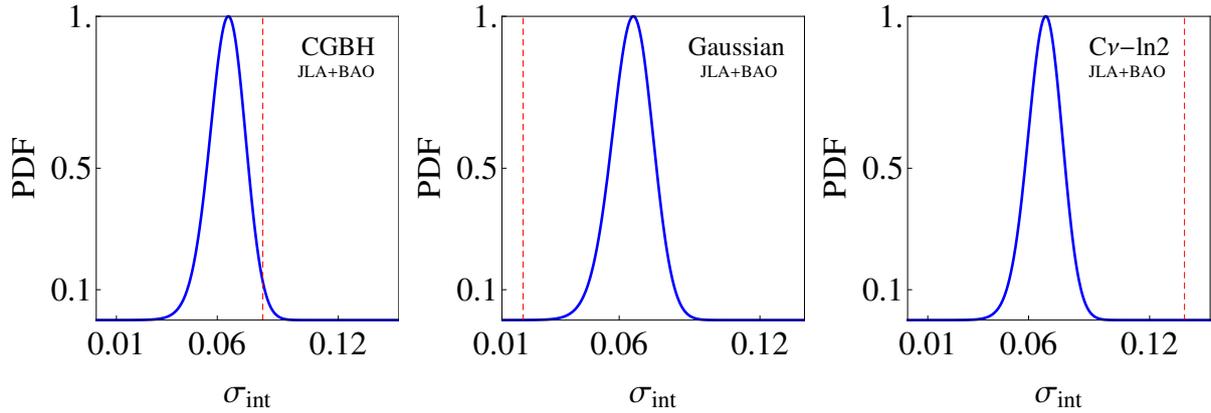


Figura 5.14: Os PDFs para σ_{int} na aproximação da função verossimilhança para os modelos CGBH (lado esquerdo), Gaussiano (centro) e $C\nu\text{-ln}2$ (lado direito) com a amostra combinada JLA+BAO. A linha vermelha indica os valores obtidos na aproximação χ^2 .

5.4 Comparação de modelos

Até agora temos estudado o modelo Λ CDM plano e os diferentes modelos inomogêneos de LTB, indicando que eles ajustam bem os dados observacionais. Contudo, não sabemos o quão bem cada um destes modelo ajustam os dados. Assim, aparece a seguinte questão interessante, qual é o modelo que ajusta melhor os dados observacionais?

Em primeira instância, podemos olhar nas tabelas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 e decidir que o modelo $t'_B(r) < 0$ é o vencedor pelo fato de ter um χ^2_{red} mais próximo da unidade. Contudo, os modelos estudados por separado têm diferentes números de parâmetros livres. Então verificar a qualidade de ajuste com o χ^2_{red} não é o caminho que devemos seguir.

Felizmente, existe a possibilidade de resolver essa questão considerando técnicas mais sofisticadas (ver apêndice A), aplicáveis à seleção de modelos, que penalizam o aumento de parâmetros em cada modelo. Por exemplo, temos o AIC corrigido (Akaike Information Criterion) [127] que compara diferentes modelos através de uma quantidade definida como

$$AIC = \mathcal{L}_{\min} + N \ln(2\pi) + 2k + \frac{2k(k-1)}{N-k-1}, \quad (5.1)$$

onde k é o número de parâmetros livres e N é o número total dos dados usados. Outra possibilidade é o BIC (Bayesian Information Criterion) [128] que usa a quantidade

$$BIC = \mathcal{L}_{\min} + N \ln(2\pi) + k \ln N. \quad (5.2)$$

O valor dos \mathcal{L}_{\min} de todos os modelos são resumidos na tabela 5.7. Um modelo é visto como favorecido pelos dados quando é obtido um valor baixo de AIC ou BIC . Note que, as diferenças entre os critérios provém dos últimos dois termos no AIC e o último

modelo	\mathcal{L}_{min}	
	JLA	JLA + BAO
Λ CDM	-1995.80	-2032.07
$t'_B(r) < 0$	-1931.02	-
$t'_B(r) > 0$	-1513.07	-
CGBH	-1997.3	-1972.38
Gaussiano	-1992.88	-1990.52
$C\nu$ -ln2	-1986.63	-1977.44

Tabela 5.7: O mínimo da função Likelihood para todos os modelos.

no BIC . Assim, para uma grande quantidade de número de dados ($N \gg 1$), o BIC é um pouco mais sensível com um incremento do número de parâmetros livres que no AIC . Com efeito, para um aumento $k \rightarrow k + \delta_k$, o AIC muda em uma quantidade $2\delta_k [1 + (\delta_k + 2k - 1)/(N - \delta_k - k - 1)] + \mathcal{O}(N^{-2})$ enquanto o BIC é proporcional com $\delta_k \ln N$.

Na tabela 5.8 resumimos os resultados de cada modelo para SNIa e SNIa+BAO usando os critérios de informação AIC e BIC . Onde o número de parâmetros livres no ajuste das SNIa é $k = 6$ para o Λ CDM, $k = 7$ para os modelos de Big Bang não simultâneos e o perfil do tipo Gaussiano, e finalmente $k = 8$ para os modelos CGBH e $C\nu$ -ln2. Por outro lado quando usamos a análise combinada SNIa+BAO temos $k = 3$ para o modelo Λ CDM, $k = 5$ para os modelos CGBH e $C\nu$ -ln2 e $k = 4$ para o modelo de tipo Gaussiano. Note que, o modelo Λ CDM é o vencedor em ambos critérios quando é comparado contra os modelos de LTB. No apêndice A estudamos a possibilidade de calcular o nível de suporte empírico de um modelo com respeito ao melhor modelo, usando a diferença $\Delta_{AIC,i} = AIC[i] - AIC_{min}$. A partir da tabela 5.8 com ajuda da tabela A.2 podemos deduzir que com a análise de somente as SNIa, os modelos CGBH e Gaussianos tem um nível de suporte empírico consideravelmente menor e que os demais modelos têm essencialmente nenhum. Com a análise combinada SNIa+BAO os modelos LTB não tem essencialmente nenhum nível de suporte empírico.

No apêndice B, estudamos o fator de Bayes que é útil para obter as evidências do melhor modelo com respeito aos demais, contudo existem complicações numéricas que limitam seu cálculo. A fim de obter o factor de Bayes B_{ij} , podemos usar uma estimativa aproximada [129] que é apropriada quando $N \rightarrow \infty$. Neste limite, pode ser mostrado que

$$\frac{BIC[i] - BIC[j] + 2 \ln B_{ij}}{2 \ln B_{ij}} \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

onde $BIC[j]$ denota o critério BIC para o modelo j . Esta equação não dá o valor preciso

modelos	JLA		JLA + BAO	
	AIC	BIC	AIC	BIC
Λ CDM	-623.689	-596.131	-666.025	-652.221
$t'_B(r) < 0$	-556.876	-524.744	-	-
$t'_B(r) > 0$	-138.926	-106.794	-	-
CGBH	-621.118	-584.418	-602.296	-579.318
Gaussian	-618.736	-586.604	-622.458	-604.064
$C\nu$ -ln2	-610.448	-573.748	-607.356	-584.378

Tabela 5.8: Comparação do critério de informação para todos os modelos usando os dados JLA e JLA+BAO.

	JLA	JLA + BAO
$2 \ln B_{12}$	9.527	48.157
$2 \ln B_{13}$	11.713	72.903
$2 \ln B_{14}$	22.383	67.843
$2 \ln B_{15}$	71.387	-
$2 \ln B_{16}$	489.337	-

Tabela 5.9: Fator de Bayes para JLA e JLA+BAO, considerando os modelos Λ CDM, Gaussiano, CGBH, $C\nu$ -ln2, $t'_B(r) < 0$ e $t'_B(r) > 0$, respectivamente como os modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

de B_{ij} mas é bem simples de manipular e não requer a avaliação da distribuição do prior. O seu uso pode ser visto como provendo uma indicação razoável da evidência dos modelos. Nossos resultados são resumidos na tabela 5.9, onde denotamos os modelos Λ CDM, Gaussiano, CGBH, $C\nu$ -ln2, $t'_B(r) < 0$ e $t'_B(r) > 0$, respectivamente como os modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Com esses resultados concluímos que o modelo Λ CDM é claramente o vencedor (mínimo valor BIC). Baseados na tabela B.1 do apêndice B, notamos que o modelo Λ CDM tem uma forte evidência comparado com o modelo do tipo Gaussiano e uma evidência muito forte com respeito aos demais modelos. Para a análise combinada, a evidência do modelo Λ CDM é muito forte com respeito aos três modelos LTB de Big Bang simultâneo.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, estudamos os modelos cosmológicos inhomogêneos como uma alternativa ao modelo cosmológico padrão Λ CDM. Estes modelos podem descrever as observações na relação distância luminosidade-redshift para as SNIa, sem a necessidade da introdução de uma componente de energia escura. Sendo a métrica de LTB, uma solução esfericamente simétrica das equações de campo de Einstein com poeira como a única componente do Universo. Estes modelos foram categorizados em dois tipos: de Big Bang não simultâneo e de Big Bang simultâneo.

Dentro dos modelos de Big Bang não simultâneo, foram estudados dois perfis simples que representam a função Big Bang $t_B(r)$. Uma derivada positiva da função Big Bang, com respeito ao r (isto é, $t'_B > 0$), representa um vazio local, por outro lado, uma derivada negativa ($t'_B < 0$), dá lugar a uma região de alta densidade. Estes modelos têm dois parâmetros cosmológicos: t_{B0} , que quantifica a intensidade da inhomogeneidade e r_c , que indica o tamanho da região inhomogênea. Os cones de luz destes modelos foram comparados com os dos modelos de EdS e Λ CDM, baseados na solução parabólica. De estes modelos somente o modelo de EdS admite uma solução analítica. Enquanto que na maioria das configurações de LTB, o observador é centrado no centro de um vazio local, confirmamos que, na medida em que a relação distância luminosidade-redshift é satisfeita, uma localização no centro de alta densidade dá melhores resultados. Contudo, estes simples modelos inhomogêneos encaram problemas tais como as singularidades dos cruzamento de camadas ou de regiões de deslocamento para o azul cosmológico que limitam sua imediata aplicabilidade para o Universo real. Demonstramos e visualizamos explicitamente a ocorrência do cruzamento de camadas no modelo de vazio local com Big Bang inhomogêneo. Por outro lado, o modelo de alta densidade é livre de cruzamento de camadas, mas ele pode sofrer de algum efeito de deslocamento para o azul assim que o índice de expansão se torne negativo. Recuperamos que o horizonte aparente dos modelos com Big Bang inhomogêneo

intersecta a região passada do cone de luz no máximo do raio areal.

No caso dos modelos de Big Bang simultâneos, sem perda de generalidade, consideramos o tempo do Big Bang como sendo nulo. Dentro deste cenário, os dados observacionais indicam que vivemos em um grande vazio local inomogêneo que alcança o tamanho de poucos Gigaparsec. Assim, consideramos três perfis diferentes de vazios locais nos modelos de LTB. Os perfis de tipo CGBH e $C\nu\text{-ln}2$ que têm três parâmetros cosmológicos e o perfil de tipo Gaussiano que só apresenta dois parâmetros. Foi mostrado que a expansão acelerada neste contexto ocorreu no passado e hoje experimentamos uma desaceleração. Também visualizamos explicitamente que estes modelos não apresentam cruzamento de camadas. Por outro lado, com objetivo de incluir a análise BAO, acrescentamos o parâmetro extra f_b que representa a fração de bárions com respeito ao conteúdo total de matéria.

Por outro lado, realizamos um estudo detalhado das observações cosmológicas, fazendo uma revisão minuciosa da dispersão das SNIa e sua calibração com os modelos cosmológicos. Essa dispersão está codificada nos parâmetros de ruído das SNIa na estimativa de distâncias cosmológicas. Assim, para ajustar os dados das SNIa com os modelos cosmológicos, temos considerado ambos parâmetros tanto os cosmológicos como das SNIa. Os dados que usamos neste trabalho foram a amostra JLA e o coleção de dados da posição do pico acústico BAO.

Realizamos uma análise estatística de melhor ajuste e restringimos o espaço de parâmetros, tanto para os modelos inomogêneos de LTB quanto para o modelo Λ CDM. A análise foi realizada usando as amostras JLA e BAO, separadamente, e a análise combinada JLA+BAO. Tivemos o cuidado para calibrar os nossos modelos cosmológicos com os dados das SNIa.

Também testamos a validade da aproximação χ^2 em comparação com a aproximação da função verossimilhança desenvolvida no [117]. Nossos resultados estão em concordância com os obtidos na literatura, apresentando um claro exemplo de que estas duas aproximações não são equivalentes. Os parâmetros das SNIa, $\boldsymbol{\delta} := (\alpha, \beta, M_B^1, \Delta_M)$, têm resultados similares para todos os modelos cosmológicos, mas apresentando sempre viés nas duas aproximações. Por outro lado, os parâmetros cosmológicos, $\boldsymbol{\theta}$, nos diferentes modelos apresentam desvios consideráveis, independentemente do método estatístico empregado. As regiões de contorno para as aproximações χ^2 e verossimilhança exibem formas e áreas similares, mas têm viés significativos nos valores de melhor ajuste, com os contornos da verossimilhança ligeiramente maiores que do χ^2 .

O valor de melhor ajuste para o parâmetro σ_{int} na aproximação da função verossimilhança foi mostrado para todos os modelos considerando por separado as análises JLA e

a combinação JLA+BAO. Encontramos um viés significativo entre as duas aproximações, χ^2 e verossimilhança, no valor do parâmetro σ_{int} .

Encontramos uma tensão entre as regiões de confiança dos ajustes por separado usando os dados das SNIa e do BAO. Esta discrepância deriva do comportamento dos índices de expansão radial e transversal dos modelos LTB, que trabalham de formas diferentes para BAO e as SNIa. Com efeito, o valor baixo de $\Omega_{M,\text{in}}$ necessário para ajustar as SNIa aumenta o índice de expansão e conseqüentemente estica a escala BAO perto do centro. Esta discrepância foi vista na figura 5.11 em mais de 3σ do nível de confiança para o modelo CGBH, e nos níveis de confiança menores para os modelos Gaussiano e $C\nu\text{-ln}2$ mostrados nas figuras 5.12 e 5.13, respectivamente.

Finalmente, analisamos os critérios de informação *AIC* e *BIC* para avaliar o melhor modelo. O modelo Gaussiano é ligeiramente favorecido em comparação com os outros modelos de LTB. Mas ainda o modelo Λ CDM é o mais favorecido. A principal diferença entre todos os modelos é o número de parâmetros livres, onde o modelo Λ CDM tem menos parâmetros que os modelos de LTB. Esta é uma vantagem nos critérios de informação e dada a proximidade do resultado é sem dúvida a razão para que o Λ CDM ultrapasse os outros modelos. Também calculamos o fator de Bayes, que indica uma forte evidência para o modelo Λ CDM contra os modelos de LTB, usando tão somente as SNIa enquanto com a combinação JLA+BAO a evidência é muito forte.

Apêndice A

Métodos estatísticos em Cosmologia

Nas últimas duas ou três décadas a cosmologia deixou de ser uma ciência especulativa, pela falta de dados, e se tornou em uma ciência norteada pelos dados observacionais, no qual se justifica a necessidade do desenvolvimento de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas [130]. A cosmologia está relacionada intrinsecamente com a estatística, por exemplo, as teorias do origem e evolução do Universo não predizem em qual ponto determinado do espaço-tempo irá ser formada uma galáxia em particular, ou qual caminho específico da radiação cósmica de fundo terá uma dada temperatura: qualquer teoria predirá propriedades estatísticas promediadas do nosso Universo, e somente podemos observar uma realização particular de isto. No contexto da cosmologia observacional, tratamos os dados de tal forma que sejam considerados como problemas de análise de dados, que podemos classificar como, os testes de hipótese, a estimativa de parâmetros e a seleção de modelos.

Em relação aos testes de hipótese, podemos perguntar se as observações de estruturas em larga escala são consistentes com a hipótese de que o Universo é espacialmente plano. No caso da estimativa de parâmetros, queremos saber por exemplo, qual é o valor da densidade de matéria dentro do vazio local inhomogêneo ou qual o valor do tamanho do mesmo. Temos que recalcar que cada conjunto de parâmetros determina um modelo. Assim que, ao estimar os parâmetros que melhor ajustam um referido modelo, já estaríamos realizando uma seleção de modelos. Contudo, a seleção de modelos está relacionado a diferentes classes de modelos, que não sejam distintos apenas pelos valores de seus parâmetros, mas pelas hipóteses feitas na construção teórica das mesmas, podendo ainda ter diferentes parâmetros livres e em diversas quantidades.

Neste apêndice apresentamos a estimativa de parâmetros e a seleção de modelos. O teste da hipótese só será realizado via um determinado modelo. E já que estamos tratando com a estatística, fazemos uma revisão do aparato estatístico utilizado.

Estimativa de parâmetros

O método mais empregado na estatística é o ajuste do χ^2 . As principais suposições que estão por trás deste método são as seguintes.

Suponha que estamos ajustando N par de variáveis (x_i, y_i) ¹, com um modelo que possui k parâmetros ajustáveis a_j , onde $j = 1, \dots, k$. Por outro lado, existe uma relação funcional entre as variáveis independentes e dependentes medidas

$$y(x) = y(x; \boldsymbol{\theta}), \quad (\text{A.1})$$

onde definimos o modelo de parâmetros desconhecidos com o vetor $\boldsymbol{\theta} := (a_1, \dots, a_k)$. Note que a dependência nos parâmetros é indicada explicitamente no lado direito. Agora, para encontrar o conjunto de parâmetros, $\boldsymbol{\theta}$, que melhor ajusta as variáveis reais, $y(x)$, ao conjunto de variáveis, (x_i, y_i) , precisamos dos estimadores da máxima verossimilhança (Likelihood), $L(\boldsymbol{\theta})$.

Supondo que cada variável, y_i , possui um erro de medição que é independentemente aleatório e tem distribuição gaussiana em torno do modelo real $y(x)$ e que cada ponto possui um desvio padrão σ_i . Assim, a probabilidade do conjunto de variáveis é o valor máximo da função verossimilhança de cada ponto,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y_i - y(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Note que, maximizar [A.2](#) é equivalente a minimizar o duplo de seu logaritmo negativo

$$-2 \ln L(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^N \left[\frac{(y_i - y(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \right] + \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i^2 + N \ln(2\pi). \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado, se os erros σ_i são independentes dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, concluímos que a equação [\(A.2\)](#) é maximizada encontrando os valores de $\boldsymbol{\theta}$ que minimizam a função

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^N \left[\frac{(y_i - y(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Assim, só nestas circunstâncias (σ_i independente de $\boldsymbol{\theta}$), o método da máxima verossimilhança é equivalente ao método dos quadrados mínimos. Este ponto é de suma importância, já que os erros das SNIa não são conhecidos por completo, e além disso, eles dependem dos parâmetros teóricos. É por isso que no capítulo [4](#), discutimos as diferenças

¹Sendo $i = 1, \dots, N$.

estatísticas de usar o método de χ^2 ou da função verossimilhança.

O método usado para maximizar a verossimilhança (ou minimizar o χ^2), no geral é o método de busca na grade dos parâmetros, onde se considera um intervalo razoável para os parâmetros, no qual se espera que o valor máximo (ou mínimo) se encontra dentro dos limites físicos dos parâmetros.

No capítulo 5 mostramos, para cada modelo, as curvas de contorno para 1σ , 2σ e 3σ no nível de confiança. Uma região de confiança é um local de pontos de probabilidade constante que rodeia uma região de uma probabilidade especificada na distribuição de probabilidade conjunta [131]. Assim, cada nível $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\min}^2$ corresponde a uma probabilidade de que os parâmetros estejam dentro da região delimitada pelo nível. Pode-se mostrar que, para uma função linear nos parâmetros, a probabilidade p depende do número de parâmetros livres, k [132], resumidos na tabela A.1.

p	$\Delta\chi^2$							
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
68.3 % (1σ)	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04	8.18	9.3
95.4 % (2σ)	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3	12.8	14.3	15.8
99.73 % (3σ)	9.00	11.8	12.4	16.3	18.2	20.1	21.9	23.6

Tabela A.1: $\Delta\chi^2$ como função dos graus de liberdade

Como exemplo do uso da tabela A.1, consideramos o caso particular, em que temos três parâmetros livres, isto é, $\nu = 3$. Assim, para construir o contorno com 1σ (68.3%) de confiança, fazemos o plot de corte em $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 3.53$.

Critérios de Seleção de Modelos

Como já vimos nos nossos modelos estudados, eles apresentam diferentes números de parâmetros livres. Por exemplo, o modelo de tipo Gaussiano, tem $k = 2$ e os modelos CGBH e $C\nu\text{-ln}2$ têm $k = 3$. Assim, podemos pensar que os modelos com maior número de parâmetros vão, naturalmente, ajustar melhor os dados. Então, como fazer uma classificação de modelos sem penalizar aqueles que tenham menos parâmetros, descontando a flexibilidade dos modelos mais complexos?

Na teoria da informação a realidade pode ser aproximada por modelos, que dependem de algum número de parâmetros. O melhor modelo do conjunto em consideração deve ser a melhor aproximação da realidade. Akaike [127] encontrou uma aproximação que quantifica a informação perdida quando a realidade é aproximada por um modelo. Esse

método é conhecido como o critério de informação Akaike (AIC) e é dada por

$$AIC = -2 \ln \hat{L} + 2k, \quad (\text{A.5})$$

onde \hat{L} representa a máxima verossimilhança, a quantidade $2k$ representa a penalização dos modelos que cresce com o número de parâmetros. O modelo preferido será aquele que tem o valor mínimo de AIC , isto é, aquele que tem a mínima perda de informação. Assim, o AIC recompensa a qualidade do ajuste e a penalidade reduz sobre o ajuste dado pelo aumento do número de parâmetros.

Existe uma correção nesta aproximação quando o número de dados é finito e pequeno, conhecido como o AIC corrigido, e é expressado como

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{N-k-1}. \quad (\text{A.6})$$

Note que para um número infinito de dados esta expressão se reduz ao AIC tradicional. Nesta tese para comparar modelos, usaremos o critério AIC corrigido, mesmo que a amostra de SNIa seja grande. Cabe indicar que, o modelo que apresentar menor AIC será o modelo de referencia para categorizar os demais. Assim podemos calcular a diferença $\Delta_{AIC,i} = AIC_i - AIC_{\min}$ e fazer uso da tabela A.2 para categorizar, com as regras aproximadas empiricamente, nossos modelos com respeito ao melhor modelo (AIC_{\min}) [133].

$\Delta_{AIC,i}$	Nível de suporte empírico do modelo i
0 – 2	Substancial
4 – 7	Consideravelmente menos
> 10	Essencialmente nenhum.

Tabela A.2: Valores $\Delta_{AIC,i}$ para dar suporte empírico dos modelos em base ao melhor modelo.

Por outro lado, desde o ponto de vista Bayesiano, o Schwarz propôs uma quantidade aproximada [128], conhecida como o critério de informação Bayesiana BIC , dada por

$$BIC = -2 \ln \hat{L} + 2k \ln N. \quad (\text{A.7})$$

Da mesma forma que no AIC o melhor modelo é aquele que tem o mínimo valor BIC . A principal diferença com o AIC é que neste caso a penalidade não só depende do número de parâmetros livres k , se não que também tem em consideração o logaritmo do número de dados N . Isto nós dá a possibilidade de penalizar modelos mais complexos, tendo por entendido que a complexidade é identificada com o número de parâmetros livres.

Apêndice B

O Fator de Bayes

No cenário Bayesiano, o melhor modelo (do conjunto de modelos em consideração) é aquele que tem maior probabilidade com os dados medidos (chamado de probabilidade a posteriori) [134]

$$P(M_i|D) = \frac{P(D|M_i)P(M_i)}{P(D)} , \quad (\text{B.1})$$

onde $P(M_i)$ é a probabilidade a priori para o modelo M_i , D representa os dados medidos, $P(D)$ é a constante de normalização que pode ser escrita como

$$P(D) = \sum_{i=1}^N P(D|M_i)P(M_i) , \quad (\text{B.2})$$

e $P(D|M_i)$ é a verossimilhança marginalizada, também chamada evidência e expressada por

$$E_i \equiv P(D|M_i) = \int P(D|\boldsymbol{\theta}, M_i)P(\boldsymbol{\theta}|M_i)d\boldsymbol{\theta} , \quad (\text{B.3})$$

onde $P(D|\boldsymbol{\theta}, M_i)$ é a verossimilhança sobre o i -ésimo modelo, $P(\boldsymbol{\theta}|M_i)$ é a probabilidade a priori para $\boldsymbol{\theta}$ sobre o i -ésimo modelo.

Assim, podemos avaliar a razão a posteriori para os modelos em consideração, que no caso de prior plano dos modelos, este se reduz à razão das evidências chamada de fator de Bayes

$$B_{ij} = \frac{P(D|M_i)}{P(D|M_j)} . \quad (\text{B.4})$$

A interpretação do fator de Bayes é resumida na tabela B.1

$2 \ln B_{ij}$	B_{ij}	Evidência contra o j -ésimo modelo
0 – 2	1 – 3	Não vale mais do que uma simples menção
2 – 6	3 – 20	Positiva
6 – 10	20 – 150	Forte
> 10	> 150	Muito forte.

Tabela B.1: Evidências contra o j -ésimo modelo, sendo i o melhor modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General theory of Relativity*, Wiley, New York (1972). 1, 6, 19
- [2] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005). 1
- [3] A. G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009. 1, 71
- [4] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565. viii, 1, 71, 72
- [5] D. N. Spergel et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175. 1
- [6] M. Tegmark et al., *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 103501. 1
- [7] U. Seljak et al., *Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias: constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 103515. 1
- [8] D. J. Eisenstein et al., *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*, *Astrophys. J.* **633** (2005), 560. 1, 65
- [9] L. Fu, E. Semboloni et al., *Very weak lensing in the CFHTLS Wide: Cosmology from cosmic shear in the linear regime*, *Astron. Astrophys.* **479** (2008) 9. 1
- [10] T. Buchert, A. A. Coley, H. Kleinert, B.F. Roukema and D.L. Wiltshire, *Observational challenges for the standard FLRW model*, *Int.J.Mod.Phys. D* **25**, (2016) 1630007 arXiv:1512.03313. 1

- [11] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3406. 1
- [12] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt, *Essentials of k-essence*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 103510. 1
- [13] J. P. Campos, J. C. Fabris, R. Perez, O. F. Piattella and H. Velten, *Does Chaplygin gas have salvation?*, *The European Physical Journal C* **73** (2013) 2357. 1
- [14] V. Miranda, S. E. Jorás, I. Waga, and M. Quartin, *Viable Singularity-Free $f(R)$ Gravity without a Cosmological Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 221101. 1
- [15] M. Zumalacárregui, T. S. Koivisto, and D. F. Mota, *DBI Galileons in the Einstein frame: Local gravity and cosmology*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 083010. 1
- [16] R. Maier and F. T. Falciano, *Brane world in non-Riemannian geometry*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 064019. 1
- [17] W. Valkenburg, V. Marra and C. Clarkson, *Testing the Copernican principle by constraining spatial homogeneity*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **438** (2014) L6. 2, 6
- [18] M. Redlich, K. Boljko, S. Meyer, G. F. Lewis, M. Bartelmann, *Probing spatial homogeneity with LTB models: a detailed discussion*, *A&A* **570** (2014) A63. 2
- [19] M. Célérier, *Do we really see a cosmological constant in the supernovae data?*, *Astron. Astrophys.* **353** (2000) 63. 2, 6
- [20] H. Iguchi, T. Nakamura and K.-I. Nakao, *Is Dark Energy the Only Solution to the Apparent Acceleration of the Present Universe?*, *Prog. Theor. Phys.* **108** (2002) 809. 2
- [21] G. Lemaître, *The Expanding Universe*, *Gen. Rel. Grav.* **29** (1997) 641. 2, 22
- [22] R. C. Tolman, *Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20** (1934) 169. 2, 22
- [23] H. Bondi, *Spherically Symmetrical Models in General Relativity*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc* **107** (1947) 410. 2, 22, 24
- [24] J. Plebański and A. Krasinski, *An introduction to general relativity and cosmology*, *Cambridge University Press*, (2006). 2, 25

- [25] A. Krasinski, *Accelerating expansion or inhomogeneity? A comparison of the Λ CDM and Lemaître-Tolman models*, *Phys.Rev.D*, **89**, (2014) 023520 arXiv:1309.4368. [2](#), [32](#), [38](#), [47](#)
- [26] N. Mustapha, C. Hellaby and G. F. Ellis, *Large-scale inhomogeneity versus source evolution: can we distinguish them observationally?*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **292** (1997) 817. [2](#), [6](#)
- [27] V. Marra and A. Notari, *Observational constraints on inhomogeneous cosmological models without dark energy*, *Class. Quantum Grav.* **28**, (2011) 164004 arXiv:1102.1015. [3](#)
- [28] J. P. Zibin, *Can decaying modes save void models for acceleration?*, *Phys.Rev.D* **84**, (2011) 123508 arXiv:1108.3068. [3](#), [44](#)
- [29] P. Bull, T. Clifton and P. G. Ferreira, *The kSZ effect as a test of general radial inhomogeneity in LTB cosmology*, *Phys.Rev.D* **85**, (2012) 024002 arXiv:1108.2222. [3](#), [44](#)
- [30] A. Krasinski, *Blueshifts in the Lemaître-Tolman models*, arXiv:1409.5377. [3](#), [44](#), [45](#)
- [31] T. Clifton, P. G. Ferreira and J. Zuntz, *What the small angle CMB really tells us about the curvature of the Universe*, *JCAP* **07**, (2009) 029. [3](#)
- [32] A. Moss, J. P. Zibin, and D. Scott, *Precision cosmology defeats void models for acceleration*, *Phys.Rev.D*, **83** (2011) 103515. [3](#)
- [33] M-N. Célérier, *Some clarifications about Lemaître-Tolman models of the Universe used to deal with the dark energy problem*, *A & A* **543**, (2012) A71. [3](#)
- [34] C-M. Yoo, T. Kai and K. Nakao, *Redshift drift in Lemaître-Tolman-Bondi void universes*, *Phys. Rev. D*, **83**, (2011) 043527. [3](#)
- [35] S. Koksang and S. Hannestad, *Redshift drift in an inhomogeneous universe: averaging and the backreaction conjecture*, *JCAP* **1601**, (2016) 009 arxiv:1512.05624. [3](#)
- [36] M. Betoule et al., *Improved cosmological constrain from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples*, *A&A* **568** (2014) A22. [3](#), [74](#), [77](#), [83](#)
- [37] H. V. Peiris et al., *First year Wilkinson Microwave Anysotropy Probe (WMAP) observations: Implications for inflation* *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 1. [6](#)

- [38] C. L. Bennett et al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results* *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 1. [6](#)
- [39] M. Novello, *Introdução à Cosmologia Programa Mínimo de Cosmologia / organizadores: Mario Novello, Nelson Pinto Neto, Santiago Esteban Perez Bergliaffa.*- Rio de Janeiro, Jauá Editora (2010). [6](#)
- [40] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy, theory and Observations*, Book, Cambridge University Press (2010). [7](#), [19](#)
- [41] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Book, Cambridge University Press (1993). [7](#)
- [42] Planck Collaboration, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters* arXiv:1502.01589v2. [9](#), [13](#)
- [43] H. Spinrad and S. Djorgovski, *The status of the Hubble diagram in 1986, in IAU Symp. 124, Observational Cosmology*, ed. A. Hewitt, G. Burbidge and L.-Z. Fang (Dordrecht: Reidel) (1987) 129. [9](#)
- [44] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929) 168. [10](#)
- [45] D. J. Fixsen et al., *The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS data set*, *ApJ.* **473** (1996) 576. [11](#)
- [46] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Fermi National Accelerator Laboratory, University of Chicago, Academic Press, (2003). [12](#), [13](#)
- [47] M. Fukugita, C. J. Hogan and P. J. E. Peebles, *The Cosmic Baryon Budget*, *ApJ* **503** (1998) 518. [12](#)
- [48] S. Burles, K. M. Nollett and M. S. Turner, *Big-Bang nucleosynthesis predictions for precision cosmology*, *Astrophys. J.* **552** (2001) L1. [12](#)
- [49] W. de Sitter, *On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis*, *Proc. Kon. Ned. acad. Wet.*, **19** (1917) 1217. [14](#)
- [50] G. Lemaître, *A homogeneous universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae*, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, Ser. 1, **47** (1927) 49. [14](#)

- [51] I. M. H. Etherington, *On the definition of distance in general relativity*, *Gen. Rel. Grav.* **39** (2007) 1055. [17](#), [29](#)
- [52] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, *Living Rev. Rel.*, **4** (2001) 1, arXiv:0004075. [19](#)
- [53] E. Bianchi and C. Rovelli, *Why all these prejudices against a constant?*, arXiv:1002.3966. [21](#)
- [54] S. Rasanen, *Dark energy from backreaction*, *JCAP*, **0402** (2004) 003. [21](#)
- [55] T. Buchert, *Dark energy from structure - A status report*, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 467. [21](#)
- [56] G. F. R. Ellis, *Republication of: Relativistic cosmology*, *Gen. Relativ. Gravit.* **41** (2009) 581-660. [23](#), [29](#)
- [57] C. Hellaby and K. Lake, *Shell crossing and the Tolman model*, *Astrophys. J.* **290** (1985) 381. [24](#)
- [58] P. S. Apostolopoulos, N. Brouzakis, N. Tetradis and E. Tzavara, *Cosmological acceleration and gravitational collapse*, *JCAP* **0606** (2006) 009. [26](#)
- [59] K. Enqvist and T. Mattsson, *The effect of inhomogeneous expansion on the supernova observations*, *JCAP* **02** (2007) 019. [26](#)
- [60] K. Enqvist, *Lemaître–Tolman–Bondi model and accelerating expansion*, *General Relativity and Gravitation* **40** (2008) 451–466. [26](#), [28](#), [33](#)
- [61] E. G. Chirinos, C. Z. Vargas and W. Zimdahl, *Simple inhomogeneous cosmological (toy) models*, *JCAP*, **05** (2016) 003. [31](#), [32](#), [34](#)
- [62] K. Bolejko, A. Krasiński, C. Hellaby and M.-N. Célérier, *Structures in the Universe by Exact Methods: Formation, Evolution, Interactions*, Cambridge University Press (2010). [47](#), [48](#)
- [63] J. García-Bellido and T. Haugbølle, *Confronting the Lemaître-Tolman-Bondi models with observational cosmology*, *JCAP* **04** (2008) 003. [54](#)
- [64] C. Z. Vargas, F. T. Falciano and R. R. R. Reis, *Constraining LTB models with JLA supernovae and BAO*, arXiv: 1512.02571. [55](#)

- [65] J-P. Uzan, C. Clarkson and G. Ellis, *Time Drift of Cosmological Redshifts as a Test of the Copernican Principle*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 191303. 48, 56
- [66] C-M. Yoo, T. Kai and K. Nakao, *Redshift drift in Lemaitre-Tolman-Bondi void universes*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 043527. 50, 51, 52, 56, 60
- [67] A. Balbi and C. Quercellini, *The time evolution of cosmological redshift as a test of dark energy*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **000** (2007) 1-7. 49
- [68] Liske et al., *Cosmic dynamics in the era of Extremely Large Telescopes*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **386** (2008) 1193. 52
- [69] M. Zumalacárregui, J. García-Bellido and P. Ruiz-Lapuente, *Tension in the void: cosmic rulers strain inhomogeneous cosmologies*, *JCAP* **10** (2012) 009. 61, 63, 65, 66, 92
- [70] M. Crocce and R. Scoccimarro, *Nonlinear Evolution of Baryon Acoustic Oscillations*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 023533. 63
- [71] R. Angulo, C. M. Baugh, C. S. Frenk, and C. G. Lacey, *The detectability of baryonic acoustic oscillations in future galaxy surveys*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **383** (2008) 755. 63
- [72] R. E. Smith, R. Scoccimarro and R. K. Sheth, *Eppur Si Muove: On The Motion of the Acoustic Peak in the Correlation Function*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 043525. 63
- [73] J. P. Zibin, *Scalar perturbations on Lemaitre-Tolman-Bondi spacetimes*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 043504. 63
- [74] C. Clarkson, T. Clifton and S. February, *Perturbation Theory in Lemaitre-Tolman-Bondi Cosmology*, *JCAP* **06** (2009) 025. 63
- [75] S. February, C. Clarkson and R. Maartens, *Galaxy correlations and the BAO in a void universe: structure formation as a test of the Copernican Principle*, *JCAP* **03** (2013) 023. 63
- [76] D. J. Eisenstein and W. Hu, *Baryonic features in the matter transfer function*, *Astrophys. J.* **496** (1998) 605. 64
- [77] T. Okumura, T. Matsubara, D. J. Eisenstein, I. Kayo, C. Hikage, A. S. Szalay, and D. P. Schneider, *Large-scale anisotropic correlation function of SDSS luminous red galaxies*, *Astrophys. J.* **676** (2008), 889. 65

- [78] M. Shoji, D. Jeong, and E. Komatsu, *Extracting angular diameter distance and expansion rate of the universe from two-dimensional galaxy power spectrum at high redshifts: Baryon acoustic oscillation fitting versus full modeling*, *Astrophys. J.* **693** (2009), 1404. [65](#)
- [79] W. J. Percival et al., *Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **401** (2010) 2148. [65](#), [66](#)
- [80] T. Biswas, A. Notari, W. Valkenburg, *Testing the Void against Cosmological data: fitting CMB, BAO, SN and H_0* , *JCAP* **11** (2010) 030. [66](#)
- [81] A. C. Layden, R. B. Hanson, S. L. Hawley, A. R. Klemola and C. J. Hanley, *The absolute magnitude and kinematics of RR Lyrae stars via statistical parallax*, *Astron. J.* **112** (1996) 2110-2131. [68](#)
- [82] R. B. Tully and J. R. Fisher, *A new method of determining distances to galaxies*, *Astronomy and Astrophysics*, **54**, 3 (1977) 661–673. [68](#)
- [83] S. Chandrasekhar, *The maximum mass of ideal white dwarfs*, *Astrophys. J.* **74** (1931) 81. [69](#)
- [84] M. M. Phillips, *The absolute magnitudes of Type IA supernovae*, *Astrophys. J.* **413** (1993) L105-L108. [70](#), [75](#)
- [85] K. Nomoto et al., *Type Ia Supernovae, Theory and Cosmology*, ed. J. C. Niemeyer & J. W. Truran (Cambridge: Cambridge Univ. Press), (2000) 63. [70](#)
- [86] R. P. Kirshner, *Foundations of Supernova Cosmology*, (2009) arXiv:0910.0257. [70](#)
- [87] A. G. Riess, W. H. Press and R. P. Kirshner, *A Precise Distance Indicator: Type IA Supernova Multicolor Light-Curve Shapes*, *ApJ*, **473** (1996) 88-109. [70](#), [75](#)
- [88] M. Hamuy et al., *BVRI light curves for 29 type Ia supernovae*, *AJ* **112** (1996) 2408. [70](#)
- [89] A. Riess et al., *BVRI light curves for 22 type Ia supernovae*, *AJ* **117** (1999) 707. [70](#)
- [90] S. Jha et al., *BVRI light curves for 44 type Ia supernovae*, *AJ* **131** (2006) 527. [70](#)
- [91] M. Hicken et al., *Improved Dark Energy Constraints from ≈ 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves*, *ApJ* **700** (2009) 331. [70](#)

- [92] C. Contreras et al., *The Carnegie Supernova Project: First Photometry Data Release of Low-Redshift Type Ia Supernovae*, *AJ* **139** (2010) 519. [71](#)
- [93] M. Ganeshalingam et al., *Results of the Lick Observatory Supernova Search Follow-up Photometry Program: BVRI Light Curves of 165 Type Ia Supernovae*, *ApJS* **190** (2010) 418G. [71](#)
- [94] A. U. Landolt, *UBVRI photometric standard stars in the magnitude range 11.5-16.0 around the celestial equator*, *Astronomical Journal* **133** (1992) 340. [71](#)
- [95] B. P. Schmidt et al., *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type IA Supernovae*, *ApJ* **507** (1998) 46-63. [71](#)
- [96] M. Sullivan, et al., *SNLS3: Constraints on Dark Energy Combining the Supernova Legacy Survey Three-year Data with Other Probes*, *ApJ*, **737** (2011) 102. [73](#), [76](#), [77](#)
- [97] J. Sollerman et al., *Supernova Cosmology and the ESSENCE Project*, *ESA-SP* **637E** (2006) 14S. [73](#)
- [98] M. Kowalski et al., *Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets*, *ApJ* **686** (2008) 749-778. [73](#), [74](#)
- [99] R. Amanullah et al., *Spectra and Hubble Space Telescope Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation*, *ApJ* **716** (2010) 712-738. [73](#)
- [100] N. Suzuki et al., *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-Energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-type-hosted supernova sample*, *ApJ* **746** (2012) 85. [73](#)
- [101] J. A. Frieman et al., *The Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Survey: Technical Summary*, *AJ* **135** (2008) 338-347. [73](#)
- [102] R. Kessler et al., *First-Year Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Results: Hubble Diagram and Cosmological Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **185** (2009) 32. [73](#), [78](#)
- [103] J. Sollerman et al., *First-Year Sloan Digital Sky Survey-II (SDSS-II) Supernova Results: Constraints on Nonstandard Cosmological Models*, *ApJ* **703** (2009) 1374. [73](#)
- [104] H. Lampeitl et al., *First-year Sloan Digital Sky Survey-II supernova results: consistency and constraints with other intermediate-redshift data sets*, *MNRAS* **401** (2010) 2331. [73](#)

- [105] H. Campbell et al., *Cosmology with photometrically classified type Ia supernovae from the SDSS-II Supernova Survey*, *ApJ* **763** 88. [73](#)
- [106] A. G. Riess et al., *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z \geq 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*, *ApJ* **659** (2007) 98. [73](#)
- [107] N. Suzuki et al., *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-type-hosted Supernova Sample*, *ApJ* **746** (2012) 85. [73](#)
- [108] J. Guy et al., *SALT: a spectral adaptive light curve template for type Ia supernovae*, *Astron. Astrophys.*, **443** (2005) 781-791. [75](#), [76](#)
- [109] M. Hamuy et al., *The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type IA Supernovae*, *Astron. J.*, **112** (1996) 2391. [73](#)
- [110] J. Guy et al., *SALT2: using distant supernovae to improve the use of Type Ia supernovae as distance indicators*, *Astron. Astrophys.*, **466** (2007) 11-21. [75](#), [76](#)
- [111] A. G. Riess, W. H. Press and R. P. Kirshner, *Using Type IA supernova light curve shapes to measure the Hubble constant*, *ApJ*, **438** (1995) L17. [75](#)
- [112] S. Perlmutter et al., *Measurements of the Cosmological Parameters Ω and Λ from the First Seven Supernovae at $z \leq 0.35$* , *ApJ*, **483** (1997) 565. [75](#), [76](#)
- [113] L. Wang et al. *Multicolor Light Curves of Type Ia Supernovae on the Color-Magnitude Diagram: A Novel Step toward More Precise Distance and Extinction Estimates*, *ApJ*, **590** (2003) 944. [75](#)
- [114] R. Tripp, *A two-parameter luminosity correction for Type IA supernovae*, *A&A*, **331** (1998) 815. [75](#)
- [115] J. A. Cardelli, G. C. Clayton and J. S. Mathis, *The relationship between infrared, optical, and ultraviolet extinction*, *ApJ*, **345** (1989) 245. [74](#)
- [116] S. Jha, A. G. Riess and R. P. Kirshner, *Improved distances to type Ia supernovae with multicolor light-curve shapes: MLCS2k2*, *ApJ*, **659** (2007) 122-148. [74](#)
- [117] B. L. Lago, M. O. Calvão, S. E. Jorás, R. R. R. Reis, I. Waga and R. Giostri, *Type Ia supernova parameter estimation: a comparison of two approaches using current datasets*, *A&A*, **541** (2012) A110. [76](#), [78](#), [79](#), [83](#), [84](#), [85](#), [92](#), [102](#)

- [118] J. Mosher, J. Guy, R. Kessler et al., *Cosmological Parameter Uncertainties From SALT-II Type Ia Supernova Light Curve Models*, *ApJ*, **793** (2014) 1-16. [77](#)
- [119] A. Conley et al., *Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the Supernova Legacy Survey*, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **192** (2011) 1-29. [77](#)
- [120] P. Astier et al., *The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and ω from the first year data set*, *A&A*, **447** (2006) 31-48. [79](#)
- [121] J. Henrique Vuolo, *Fundamentos da teoria de erros*, Editora Blücher, 2^a edição (1995). [79](#)
- [122] F. Beutler et al., *The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **416** (2011) 3017. [81](#)
- [123] N. Padmanabhan et al., *A 2 per cent distance to $z = 0.35$ by reconstructing baryon acoustic oscillations I. Methods and application to the Sloan Digital Sky Survey*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427**, (2012) 2132. [81](#)
- [124] L. Anderson et al., *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in the Data Release 9 Spectroscopic Galaxy Sample*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2013) 3435. [81](#)
- [125] C. Blake et al., *The WiggleZ Dark Energy Survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **418** (2011) 1707. [81](#)
- [126] A. Carnero et al., *Clustering of Photometric Luminous Red Galaxies II: Cosmological Implications from the Baryon Acoustic Scale*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **419** (2012) 1689. [81](#)
- [127] H. Akaike, *A new look at the statistical model identification*, *IEEE Trans. Automatic Control* **16** (1974) 716. [98](#), [106](#)
- [128] G. Schwarz, *Estimating the dimension of a model*, *Ann. Stat.* **6** (1978) 461. [98](#), [107](#)
- [129] R. Kass and A. E. Raftery, *Bayes Factors*, *Journal of the American Statistical Association*, **90** (1995) 773-795. [99](#)
- [130] L. Verde, *Statistical Methods in Cosmology*, (2009) arXiv:0911.3105v1. [104](#)

- [131] P. Gregori, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*, Cambridge University Press, (2010). 106
- [132] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007). 106
- [133] K. P. Burnham and D. R. Anderson, *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information Theoretic Approach, Second Edition*, Springer (2002). 107
- [134] H. Jeffreys, *Theory of Probability, 3rd edn.*, Oxford University Press, (1961). 108