

Matheus dos Santos Soares

Efeito Unruh-Davies e a dinâmica de emaranhamento para sistemas não inerciais

Rio de Janeiro

Dezembro, 2022

Matheus dos Santos Soares

**Efeito Unruh-Davies e a dinâmica de emaranhamento para
sistemas não inerciais**

Tese de doutorado.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Nami Fux Svaiter

Coorientador: Gabriel Santos Menezes

Rio de Janeiro

Dezembro, 2022

Matheus dos Santos Soares

Efeito Unruh-Davies e a dinâmica de emaranhamento para sistemas não inerciais/
Matheus dos Santos Soares. – Rio de Janeiro, Dezembro, 2022-
80p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Nami Fux Svaiter

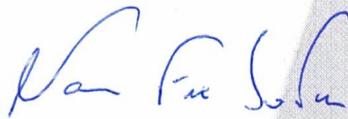
Tese (Doutorado) – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF
Programa de Pós-Graduação, Dezembro, 2022.

1. Efeito Unruh-Davies. 2. Detector de Glauber. 2. Equação Mestra. I. Nami Fux Svaiter. II. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. III. Tese de Doutorado. IV. Efeito Unruh-Davies e a dinâmica de emaranhamento para sistemas não inerciais

“EFEITO UNRUH-DAVIES E A DINÂMICA DE EMARANHAMENTO
PARA SISTEMAS NÃP INERCIAIS”

MATHEUS DOS SANTOS SOARES

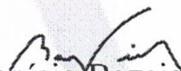
Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



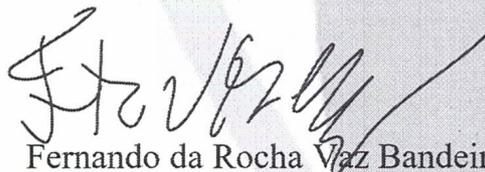
Nami Fux Svaiter – Orientador/CBPF



Gastão Inácio Krein - UNESP



Dionísio Bazeia Filho - UFPB



Fernando da Rocha Vaz Bandeira – CBPF



Sebastião Alves Dias - CBPF

Rio de Janeiro, 15 de dezembro de 2022.

À minha esposa, Isabela Akemi Kina.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, Wanderleia, por toda educação desde os primeiros rabiscos da caligrafia, seu grande esforço para que eu estudasse em bons colégios e por ser um exemplo na área do magistério, área esta que me orgulho de seguir seus passos. Agradeço também ao meu pai, Pedro, por nunca ter parado de apoiar meus estudos e à conclusão deste trabalho. Seu apoio foi fundamental nestes últimos passos quando a vontade de desistir era grande. Agradeço aos meus pais pela família que tenho, pelos meus irmãos Sophia, Lucas e João Paulo que sempre me apoiaram e me ajudaram, mesmo que inconscientemente, a não desistir e dar o meu melhor.

Um agradecimento especial à minha esposa Isabela por todos esses anos de apoio. Sei que não foi nada fácil me aturar nestes últimos meses da conclusão desta tese e por isso agradeço demais sua compreensão. Obrigado por todos os momentos felizes ao longo desses anos e pelos muito que virão.

Agradeço meus sogros Alexandre e Cemi por toda ajuda e incentivo ao longo desses anos.

Agradeço a minha avó Suely por, mesmo de longe, estar sempre orando e torcendo por mim. Agradeço também ao meu avô, Wanderley, que abdicou de seus estudos para trabalhar desde cedo e trazer uma vida melhor para sua família. Graças aos seus esforços, todos seus filhos se formaram e todos os seus netos se graduaram em uma universidade. Se hoje estou aqui, é graças à toda luta de vocês. Muito obrigado.

À minha avó Therezinha por todo o carinho que sempre teve comigo e por todo apoio na minha formação. Você e meu falecido avô, Pedro, têm uma participação enorme em minha formação. Muito obrigado.

Não tenho palavras para agradecer o meu professor Nami por todos os ensinamentos em Física ao longo desses anos de doutorado. Um professor sempre solícito, com grandes ideias e sempre com um bom humor. Foi um prazer poder trabalhar com ele nesses anos. Agradeço também ao professor Gabriel Menezes por todos esses anos que trabalhamos juntos desde a época da iniciação científica. Sou muito grato a tudo que me ensinou e por essa parceria que acabamos desenvolvendo.

Aqui faço um agradecimento aos meus amigos que estiveram presentes nesta luta. Um agradecimento ao meu trio de amigos que sempre esteve comigo nos bons e nos maus momentos, Lucas, Luana e William. São muitos anos de amizade e sou muito grato por todo o apoio que tive. Ao amigo Jayme, da saudosa 508B, por toda ajuda que um recém aluno da pós graduação poderia ter. Aos meus amigos do DEMES, Xisto, Dylan e Jorge

pelos momentos de descontração.

Ao professor Carlos Zarro que colaborou em todos os trabalhos e se tornou um grande amigo. Aqui fica o meu muito obrigado por todas as conversas e por todo o incentivo nos momentos em que mais precisei. Ao meu primo e grande amigo, João Victor, um muito obrigado por toda ajuda em questões gráficas desta tese e pela amizade ao longo de muitos anos. Um obrigado também ao amigo Lucas Haiashi pelo apoio e incentivo. Não por acaso, este é um parágrafo dedicado aos meus amigos vascaínos.

Aos amigos do RA, Ruan, Jamille e Paula por todo esforço que fizeram para me ajudar a concluir esta tese. Uma gratidão enorme por todas as nossas conversas e pelas dicas que me deram para voltar a ter uma boa produtividade.

Agradeço também a todos os professores que tive o prazer de ter nos cursos de Pós-Graduação do CBPF.

Por fim, agradeço todos aqueles que estiveram de alguma maneira ao meu lado ao longo desta etapa da minha vida.

Resumo

Nesta tese, discutimos processos radiativos de sistemas com infinitos graus de liberdade interagindo com detectores em diferentes situações. Inicialmente, abordamos o efeito Unruh-Davies usando um detector de Glauber, uma alternativa ao detector de Unruh-DeWitt frequentemente utilizado na literatura. Mostramos que o detector de Glauber também é capaz de medir o efeito Unruh-Davies. Além disso, revisamos o processo de medição por um detector em movimento retilíneo uniformemente acelerado, interagindo linearmente com um campo escalar massivo, utilizando a teoria da foto-detecção de Glauber. Destacamos as principais diferenças entre o modelo de Glauber e o modelo de Unruh-DeWitt. Investigamos a taxa de probabilidade de transição associada a um detector do tipo broadband uniformemente acelerado preparado no estado fundamental, mostrando como o efeito Unruh-Davies surge dentro da aproximação de onda girante (RWA). Além disso, consideramos o comportamento deste detector em um sistema que é inercial no passado remoto, mas no futuro distante se torna uniformemente acelerado, ajudando a esclarecer as interpretações do detector inercial ou acelerado. Também nesta tese, propomos uma nova forma para a equação mestra quântica da teoria de sistemas quânticos abertos, que permite descrever a dinâmica de sistemas de dois níveis movendo-se ao longo de diferentes trajetórias hiperbólicas com tempos próprios distintos. Na aproximação de Born-Markov, consideramos um campo escalar quântico sem massa acoplado a sistemas de dois níveis. Partindo de um estado separável, mostramos a ocorrência do fenômeno da colheita de emaranhamento. Verificamos também a morte súbita do emaranhamento para diferentes acelerações próprias.

Palavras-chave: efeito Unruh-Davies. detectores de Unruh-DeWitt. detector de Glauber. dinâmica de emaranhamento. equação mestra.

Abstract

In this thesis, we discuss radiative processes of systems with infinite degrees of freedom interacting with detectors in different situations. Initially, we address the Unruh-Davies effect using a Glauber detector, an alternative to the frequently used Unruh-DeWitt detector. We show that the Glauber detector is also capable of measuring the Unruh-Davies effect. Additionally, we review the measurement process by a detector in uniformly accelerated rectilinear motion, interacting linearly with a massive scalar field, using Glauber's photo-detection theory. We highlight the main differences between the Glauber and Unruh-DeWitt models. We investigate the transition probability rate associated with a broadband uniformly accelerated detector prepared in the ground state, showing how the Unruh-Davies effect arises within the rotating wave approximation (RWA). Furthermore, we consider the behavior of this detector in a system that is inertial in the remote past, but becomes uniformly accelerated in the far future, which helps to clarify the interpretations of the accelerated or inertial detector. In this thesis, we also propose a new form for the quantum master equation in the open quantum systems theory, which allows us to describe the dynamics of two-level systems moving along different hyperbolic trajectories with distinct proper times. In the Born-Markov approximation, we consider a massless quantum scalar field coupled to two-level systems. Starting from a separable state, we show the occurrence of the phenomenon of entanglement harvesting. We also verify the sudden death of entanglement for different proper accelerations.

Keywords: Unruh-Davies effect. Unruh-DeWitt's detector. Glauber's detector. entanglement dynamics. master equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $ S\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.6$. . .	59
Figura 2 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $ A\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.6$. . .	60
Figura 3 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$ e $\omega\alpha_2$. O estado inicial foi escolhido como $ S\rangle$ e fixamos $\Gamma_0\tau = 0.05$. . .	60
Figura 4 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $ G\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.58$	61
Figura 5 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $ E\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.1$	62
Figura 6 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $ E\rangle$ e fixamos o parâmetro temporal para $\Gamma_0\tau = 0.75$	63
Figura 7 – Contornos no plano complexo para a avaliação das integrais de $W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega)$. Em (a) temos o contorno para $\omega > 0$. Observamos que neste caso os pólos dentro do contorno para $R \rightarrow \infty$ têm $n \geq 0$. A figura (b) corresponde a $\omega < 0$ e temos $n \geq 1$	76

Lista de publicações

- Soares, M. S., Svaiter, N. F. and Zarro, C. A. D. (2020). “Multiplicative noise in Euclidean Schwarzschild manifold”. In: *Classical and Quantum Gravity* 37, 065024. DOI: 10.1088/1361-6382/ab4fd3.
- Soares, M. S., Svaiter, N. F., Zarro, C. A. D and Menezes, G. (2021). “Uniformly accelerated quantum counting detector in Minkowski and Fulling vacuum states”. In: *Phys. Rev. A*, 103, 042225. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.042225.
- Soares, M. S., Svaiter, N. F., and Menezes, G. (2022). “Entanglement dynamics: Generalized master equation for uniformly accelerated two-level systems”. In: *Phys. Rev. A*, 106, 062440. DOI: 10.1103/PhysRevA.106.062440.

Lista de abreviaturas e siglas

TQC	Teoria Quântica de Campos
SDN	Sistema de dois níveis
RWA	Aproximação de onda girante
FWFP	Funções de Wightman de frequências positivas
EMG	Equação mestra generalizada

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	25
2.1	Quantização Canônica	25
2.2	Decomposição do campo escalar livre	27
2.3	O vácuo	28
2.4	As funções de Green	29
2.5	A quantização de Fulling: O vácuo de Rindler	30
3	O EFEITO UNRUH-DAVIES	33
3.1	O efeito Unruh-Davies: O detector de Unruh-DeWitt	34
3.2	Teoria de foto-deteção de Glauber	36
3.3	A teoria de foto-deteção de Glauber e o efeito Unruh-Davies	39
3.4	O detector de Glauber no sistema coordenadas de Kalnins-Miller	41
4	EQUAÇÃO MESTRA GENERALIZADA	45
4.1	Equação Mestra	45
4.2	Forma de Lindblad-Kossakowski	50
4.3	Equação mestra generalizada para um par de sistemas de dois níveis	52
5	DINÂMICA DE EMARANHAMENTO: CAMPO ESCALAR	57
5.1	Degradação de Emaranhamento	58
5.2	Colheita de Emaranhamento	61
6	CONCLUSÕES	65
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – CÁLCULO DAS FUNÇÕES $\Gamma^{(\alpha\beta)}$	75
A.1	Cálculo das funções $\Gamma^{(\alpha\beta)}$ para o campo escalar	75
	APÊNDICE B – FORMA COMPLETA DA EMG	79

1 Introdução

A teoria quântica de campos trata-se de um conjunto de ideias e ferramentas que combina a mecânica quântica, o conceito do campo e a teoria da relatividade especial. Tal teoria nos fornece métodos poderosos que possuem resultados compatíveis com diversos experimentos e é o melhor modelo para a descrição de três das quatro interações fundamentais: a nuclear fraca, nuclear forte e a eletromagnética, ficando assim a gravitação de fora da descrição dessa teoria [1]. Existe, na atualidade, grande esforço para se construir uma teoria unificada que descreva todas as interações fundamentais sem que haja o comprometimento do modelo padrão.

A descrição mais aceita pela física moderna da gravitação é dada pela Relatividade Geral. Tal teoria consiste em uma descrição geométrica do espaço-tempo onde a massa e a energia ditam como se dá a curvatura do espaço-tempo e tal curvatura dita como os objetos devem se mover [2]. Podemos buscar uma aproximação para um modelo de gravitação quântica através da descrição de um modelo em que os campos são quantizados, através do formalismo da TQC, em um espaço-tempo curvo fixo, descrito pela teoria da relatividade. Tal modelo é chamado de gravitação semi-clássica ou, mais comumente usado, teoria quântica de campos em espaços curvos [3]. Por conta do princípio de equivalência, que estabelece uma relação entre referenciais em repouso num espaço-tempo curvo localmente homogêneo com referenciais uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski, uma investigação interessante é o estudo de campos quânticos na perspectivas destes referenciais. A discussão do comportamento dos átomos em referenciais não inerciais ainda é um tema sob intensa investigação [4–9].

Em 1972, Fulling introduz a quantização de um campo escalar massivo nas coordenadas de um referencial uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowski e demonstra que o vácuo associado a tal observadores não é o mesmo que àquele construído em um referencial inercial no espaço-tempo de Minkowski [10]. Este resultado demonstra que o conceito de partículas é ambíguo. Diferentes sistemas de referencias possuem diferentes tipos de partículas. Posteriormente, Davies [11] e Unruh [12] demonstram que um observador uniformemente acelerado percebe o vácuo encontrado por Fulling como um banho térmico de partículas de Minkowski e mede uma temperatura proporcional à sua aceleração própria. Tal resultado ficou conhecido como efeito Unruh-Davies e possui uma forte relação com o efeito Hawking [13]. De acordo com o efeito Unruh-Davies, um detector em repouso em um referencial uniformemente acelerado pode ser excitado pela absorção de um quantum de campo de Rindler presente no vácuo de Minkowski. Para tal, Unruh introduz o chamado *detector de Unruh-DeWitt* que consiste em um sistema de dois níveis pontual que interage com o campo quântico escalar via uma interação de monopolo

[12, 14].

Um dos questionamentos que surgem no estudo do efeito Unruh-Davies é sobre o modelo de detector que é utilizado. O modelo de detecção de Unruh-DeWitt não consiste em um sistema utilizado em laboratório. Além do mais, pode-se demonstrar que tal detector possui uma probabilidade não nula de se excitar emitindo um quantum para o campo. Tal processo se caracteriza como um processo virtual. Um dos objetivos desta tese é reexaminar o efeito Unruh-Davies usando um modelo de detecção comumente utilizado na Ótica Quântica, a teoria de foto-deteção de Glauber [15, 16]. Revisitaremos a discussão sobre o processo de medição de quanta de campo de Rindler por um detector uniformemente acelerado interagindo com um campo escalar massivo dentro do modelo de Glauber, que realiza a detecção de quanta como um processo apenas absorcivo.

A teoria de Glauber foi construída para formular modelos de detectores que respondem ao campo eletromagnético por absorção de fótons. De qualquer forma, é simples implementar a mesma ideia em um dispositivo que mede quanta associados a um campo escalar massivo. Nesta teoria, as medições são processos de absorção que são registrados, por exemplo, pela detecção de fótons emitidos. Esse tipo de medição é conhecido como medição de segundo tipo, na medida em que altera o estado que está sendo medido.

Abordaremos a questão de como definir um detector adequado. É importante ter em mente que as medições de observáveis na teoria quântica de campos devem ser realizadas em algum domínio espaço-tempo limitado. Do ponto de vista operacional, as medições são meios para obter informações sobre a realidade física por meio de um aparelho de medição. O aparelho de medição envia um sinal de informação, um sinal que deve ser decodificado por algum receptor capaz de nos dar um valor mensurável na saída do sistema. Consideramos o caso em que a dimensão do espaço de Hilbert do sistema medido é infinita. Nesta situação, um detector ideal de quanta de campo é um sistema adimensional que pode fazer uma transição entre dois níveis de energia, diminuindo o número de quanta do campo em algum estado medido [17]. Portanto, um detector de quanta de campo é um dispositivo experimental acoplado ao campo que não dá sinal se o estado do campo for o estado fundamental. Devemos ter em mente que a definição de um estado de vácuo está relacionada com a escolha dos vetores de Killing de translação temporal usados pelos observadores na quantização de um campo clássico.

Nesse contexto que envolve a dinâmica de detectores em sistemas não inerciais e o efeito Unruh-Davies, surge a dúvida sobre o impacto que isso pode ter na dinâmica de emaranhamento. Atualmente, o emaranhamento quântico é um fenômeno bastante importante para a implementação de protocolos da computação quântica, sendo a dinâmica de sistemas emaranhados um tema relevante e amplamente investigado [18]. Nos últimos anos, a teoria da informação quântica relativística tem sido utilizada para estudar o comportamento de átomos, possivelmente emaranhados, em interação com campos quânticos relativísticos.

Um fenômeno importante abordado por essa teoria é a degradação do emaranhamento, que é quando estados correlacionados podem se tornar não correlacionados pela interação com um campo quântico. Além disso, a colheita de emaranhamento é outro efeito interessante que essa teoria explora, em que átomos inicialmente preparados em um estado separável podem extrair emaranhamento do vácuo quântico.

Recentes pesquisas indicam que a dinâmica do emaranhamento é influenciada pelo movimento dos átomos, sua separação no espaço-tempo e pela dimensão do espaço-tempo [19–28]. A dinâmica do emaranhamento é comumente descrita por meio do detector de Unruh-DeWitt. Neste estudo, buscamos expandir a discussão da dinâmica do emaranhamento para átomos em referenciais não inerciais. Para isso, consideramos um par de átomos de dois níveis (chamamos este sistema como sistema \mathcal{A}) acoplados a um sistema quantizado com infinitos graus de liberdade, chamado de \mathcal{B} . Utilizamos a teoria de sistemas quânticos abertos para descrever a dinâmica do sistema [29, 30]. Nosso objetivo é generalizar a construção da *equação mestra*, que descreve a evolução temporal da matriz densidade do subsistema \mathcal{A} [31].

Benatti e Floreanini derivaram esta equação mestra para átomos não inerciais interagindo fracamente com um campo escalar quântico [32] e recentemente seus resultados foram generalizados para o caso de átomos acoplados a um campo eletromagnético [33]. Ambos os trabalhos descrevem a dinâmica de emaranhamento para átomos com a mesma aceleração própria. Outro objetivo desta tese é estender esse formalismo para um cenário mais geral. Consideramos que os átomos percorrem diferentes linhas de universo que são parametrizadas por diferentes tempos próprios. Desta maneira, investigaremos mais a fundo o papel das acelerações próprias dos sistemas na dinâmica de emaranhamento. Neste cenário, buscamos uma generalização da equação mestra que nos permita realizar tal estudo. A partir dessa equação mestra, para quantificar o emaranhamento do sistema, calculamos a concorrência, uma função monotonicamente crescente do emaranhamento de formação, que foi introduzida por Wootters em 1998 [34].

2 Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo vamos introduzir o processo de quantização dos campos em um espaço-tempo de Minkowski. Tal procedimento é conhecido como quantização canônica e vamos utilizar de tal procedimento para o caso de um sistema de referências uniformemente acelerado. Este último é conhecido como a quantização de Fulling e os resultados deste procedimento serão de grande uso ao longo desta tese.

2.1 Quantização Canônica

Em mecânica quântica, a quantização canônica é o procedimento que nos leva do formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica para a teoria quântica. O procedimento é tal que dados as coordenadas generalizadas q_a e os momenta conjugados p^a nós os promovemos à operadores e definimos relações de comutação da seguinte maneira

$$\begin{aligned} [q_a, q_b] &= [p^a, p^b] = 0, \\ [q_a, p^b] &= i\delta_a^b. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para a teoria quântica de campos vamos fazer o mesmo para um campo quântico $\phi_a(\vec{x})$ e seu momentum conjugado $\Pi^b(\vec{x})$. Dessa maneira, um campo quântico é definido como um operador que obedece as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] &= [\Pi^a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})] = 0 \\ [\phi_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})] &= i\delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

A informação que queremos saber em uma teoria quântica é sobre o espectro da Hamiltoniana H . Por conta dos infinitos graus de liberdade (pelo menos um para cada \vec{x} no espaço) encontrar tal espectro pode ser uma tarefa bastante complicada. Para as teorias livres nós podemos descrever a dinâmica do sistema de tal maneira que cada grau de liberdade evolui independentemente dos demais. Nessas teorias temos Lagrangianas que possuem termos quadráticos nos campos e, então, as equações de movimento são lineares [1]. A teoria relativística de campos livres mais simples é dada pela equação de Klein-Gordon para um campo escalar real $\phi(\vec{x}, t)$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(\vec{x}, t) + m^2 \phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) pode ser obtida através da densidade Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x), \quad (2.4)$$

onde, por simplicidade, adotamos $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ e tal definição, puramente estilística, será usada ao longo deste trabalho.

Fazendo uso de uma transformada de Fourier do campo

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t), \quad (2.5)$$

temos que $\phi(\vec{p}, t)$ satisfaz a equação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2) \right) \phi(\vec{p}, t) = 0, \quad (2.6)$$

onde observamos que para cada valor de \vec{p} , o campo $\phi(\vec{p}, t)$ é solução da equação de um oscilador harmônico que oscila com frequência dada por

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.7)$$

A conclusão que obtemos é que a solução mais geral da equação de Klein-Gordon é uma superposição linear de osciladores harmônicos simples, cada um vibrando em diferentes frequências e amplitudes. Para quantizar o campo $\phi(\vec{x}, t)$ nós precisamos quantizar infinitos osciladores harmônicos. Tal procedimento é padrão da literatura e não vamos reproduzir neste trabalho. Um resultado importante de ser introduzido é que um conjunto de soluções da equação (2.3) é dado pelos modos

$$u_{\vec{k}}(x) \approx e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{p}}t}. \quad (2.8)$$

Esses modos são ditos os *modos de frequência positiva* em respeito a t , pois são auto-funções do operador $\partial/\partial t$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{p}}(x) = -i\omega_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(x), \quad (2.9)$$

com $\omega_{\vec{p}} > 0$. Definindo o produto escalar em um espaço n -dimensional dado por

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int d^{n-1}x \left\{ \phi_1(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi_2^*(x) - \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_1(x) \right] \phi_2^*(x) \right\}, \quad (2.10)$$

com t sendo uma hipersuperfície de simultaneidade no instante t , os modos $u_{\vec{p}}$ são então ortogonais se $\vec{p} \neq \vec{p}'$

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}) = 0. \quad (2.11)$$

Se escolhermos

$$u_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}(2\pi)^{n-1}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{p}}t}, \quad (2.12)$$

Então $u_{\vec{p}}$ é normalizado no produto escalar (2.10)

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}) = \delta^{n-1}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.13)$$

2.2 Decomposição do campo escalar livre

A quantização do campo escalar segue por encontrar a decomposição do operador de campo $\phi(x)$ em uma determinada base respeitando, é claro, as relações de comutação dadas pelas equações (2.2). Onde o momento conjugado $\Pi(x)$ é dado por

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x). \quad (2.14)$$

Os modos do campo dados pela equação (2.12) e seus respectivos conjugados complexos formam uma base ortogonal completa do produto escalar (2.10). Dessa maneira, em um espaço-tempo quadridimensional, o campo $\phi(x)$ pode ser decomposto como uma combinação linear desses modos

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right), \quad (2.15)$$

onde $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ são coeficientes da expansão do operador campo na base de soluções de ondas planas e definimos $px = p^\mu x_\mu = p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}$ com $p^0 = \omega_{\vec{p}}$. A decomposição (2.15) nos permite escrever o campo como sendo a soma de uma parte das energias positivas e uma parte das energias negativas

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (2.16)$$

onde definimos

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}}} e^{-ipx} a(\vec{p}), \quad (2.17)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}}} e^{ipx} a^\dagger(\vec{p}). \quad (2.18)$$

Nossa tarefa agora é entender melhor quem são os operadores $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$. Para isso, observamos que o momentum conjugado definido por (2.14), usando a decomposição da equação (2.15), pode ser escrito em termos dos operadores $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ como

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) \\ &= -i \int d^3 \vec{p} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2(2\pi)^3}} \left(e^{-ipx} a(\vec{p}) - e^{ipx} a^\dagger(\vec{p}) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando a Eq. (2.15) e (2.19) nas relações de comutação (2.2) obtemos as seguintes relações de comutação para os operadores $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0, \quad (2.20)$$

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.21)$$

Isso nos mostra que os operadores $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ possuem relações de comutação análogas aos operadores de aniquilação e criação do oscilador harmônico quântico. Por conta daquela integral sobre \vec{p} temos aqui uma superposição de infinitos osciladores harmônicos quânticos, um para cada valor de \vec{p} [35].

Também podemos obter o operador Hamiltoniano em termos dos operadores de criação e aniquilação. Para isso, calculamos a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} através de

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left[\Pi^2(x) + (\nabla \phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) \right].\end{aligned}\quad (2.22)$$

Usando as equações (2.15), (2.19) em (2.22) e obtemos o operador Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}H &= \int d^2 \vec{x} \mathcal{H} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) + N_{\vec{p}} \right],\end{aligned}\quad (2.23)$$

onde definimos o operador $N_{\vec{p}} = a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})$ que é chamado de operador número.

2.3 O vácuo

Na representação de Heisenberg, os estados quânticos geram o espaço de Hilbert [36]. Uma base conveniente desse espaço é o chamado *espaço de Fock*. Os vetores estado desse espaço podem ser construídos a partir de um estado de vácuo $|0\rangle$. O estado $|0\rangle$ possui a propriedade de ser aniquilado pela atuação do operador $a(\vec{p})$

$$a(\vec{p}) |0\rangle = 0, \forall \vec{p}. \quad (2.24)$$

Obtemos o estado de uma partícula $|1_{\vec{p}}\rangle$ a partir da operação de $a^\dagger(\vec{p})$ no estado de vácuo

$$a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = |1_{\vec{p}}\rangle. \quad (2.25)$$

Consequentemente, podemos criar um estado de várias partículas através de aplicações suscetivas dos operadores $a^\dagger(\vec{p})$ no vácuo para diferentes valores de \vec{p} . Dessa maneira, criamos todos os possíveis estados do espaço de Fock. Anteriormente, definimos o operador número $N_{\vec{p}} = a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})$. O valor esperado desse operador em um determinado estado mede o número de partículas que se encontram nesse estado. Por exemplo, o vácuo é o estado de zero partículas¹, por consequência esperamos que o valor esperado do operador número no vácuo seja zero. Então temos:

$$\langle 0 | N_{\vec{p}} | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) | 0 \rangle = 0, \quad (2.26)$$

¹ Este resultado será um dos principais a causarem certa estranheza quando lidarmos com campos quantizados em sistemas de coordenadas x^μ não inerciais.

como esperado. Com esses resultados podemos ver qual seria o valor esperado da Hamiltoniana no vácuo. Pela interpretação do operador Hamiltoniano, teríamos o valor de energia do estado mínimo do espaço de Fock, que seria zero. Mas ao calcularmos o valor esperado de H no vácuo temos:

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[\langle 0|a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle + \langle 0|N_{\vec{p}}|0\rangle \right] \\ \langle 0|H|0\rangle &= \delta^3(0),\end{aligned}\tag{2.27}$$

onde, pela definição da função delta de Dirac, temos uma energia infinita. Não podemos carregar infinitos em nossa teoria, então esse resultado poderia estragar todo o nosso modelo de quantização. Para lidarmos com isso, lembramos que em Física estamos interessados não em valores de energia, mas sim na diferença de valores de energia entre os estados pois não temos como medir diretamente um valor de energia de um estado. Então, podemos pegar esse termo divergente e subtrair de H , isso nos trás uma nova definição de um *operador Hamiltoniano renormalizado* como sendo

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} N_{\vec{p}}.\tag{2.28}$$

2.4 As funções de Green

Uma vez que construímos uma teoria quântica que lida com infinitos graus de liberdade, podemos nos perguntar como os campos quantizados podem nos fornecer funções relacionadas à observáveis. Por exemplo, dado a teoria quântica definida anteriormente para um campo escalar massivo $\phi(x)$ podemos estar interessados em calcular amplitudes de espalhamentos das partículas que estão associadas ao campo. Uma outra pergunta, bastante comum em mecânica quântica, é: se temos uma partícula preparada em um ponto do espaço-tempo x^μ , qual a probabilidade de encontrarmos essa partícula em um ponto do espaço-tempo y^μ ? Ambas as perguntas são respondidas através de um objeto fundamental da teoria quântica de campos, os *propagadores*. Por exemplo, a resposta da última pergunta é feita pelo valor esperado $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Usando a expansão do campo escalar dada pela equação (2.15) temos

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \langle 0|a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger|0\rangle e^{-ipx+ip'y} \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} = D(x-y),\end{aligned}\tag{2.29}$$

onde $D(x-y)$ é o chamado propagador. Essa função possui um problema quando temos separações espaço-temporais do tipo espaço, $(x-y)^2 < 0$. Nesse tipo de separação, observamos que o propagador decai exponencialmente, o que nos diz que podemos ter uma teoria não causal. Na verdade, o que temos é que se calcularmos o comutador $[\phi(x), \phi(y)]$

teremos

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x), \quad (2.30)$$

caso x e y sejam separados por uma distância do tipo espaço, podemos verificar que esse comutador é nulo, o que nos leva que a amplitude de probabilidade de uma partícula ir de x até y é a mesma que o caminho inverso. Em qualquer experimento as amplitudes desses eventos se cancelam.

Em teorias quânticas com interação uma das mais importantes funções é o *propagador de Feynman* que é obtido por

$$G_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x - y) & \text{quando } x^0 > y^0, \\ D(y - x) & \text{quando } y^0 > x^0, \end{cases} \quad (2.31)$$

onde T está relacionado ao ordenamento temporal do produto dos campos $\phi(x)\phi(y)$ que pode ser escrito como

$$T \phi(x) \phi(y) = \begin{cases} \phi(x) \phi(y) & \text{quando } x^0 > y^0, \\ \phi(y) \phi(x) & \text{quando } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Por sua construção, o propagador de Feynman pode ser escrito em termos das chamadas *funções de Wightman* das frequências positivas $G^+(x, y)$ e das frequências negativas $G^-(x, y)$

$$G_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0) G^+(x, y) + \theta(y^0 - x^0) G^-(x, y), \quad (2.33)$$

onde $\theta(x)$ é a função teta de Heaviside e as funções de Wightman são definidas por

$$G^+(x, y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle, \quad (2.34)$$

$$G^-(x, y) = \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle. \quad (2.35)$$

Todas as funções de Green que discutimos nesta seção e também outras que não serão utilizadas nesse trabalho podem ser obtidas a partir de uma representação integral onde usamos a decomposição do campo em valores esperados no vácuo. Tal representação para um espaço n -dimensional é dada por

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n p \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - ip^0(t - t')}}{(p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} \quad (2.36)$$

A integral da equação (2.36) possui polos em $p^0 = \pm(|\vec{p}|^2 + m^2)^{1/2}$, o contorno que escolhemos no plano complexo para resolver tal integral é que determina qual função de Green estamos calculando.

2.5 A quantização de Fulling: O vácuo de Rindler

Nesta seção vamos discutir a quantização do campo escalar utilizando as coordenadas de Rindler [37]. Como em um espaço-tempo globalmente estacionário arbitrário

sempre podemos encontrar um vetor de Killing correspondendo a uma direção temporal de uma família de observadores. No espaço-tempo de Minkowski usamos esta propriedade para realizar a decomposição de um campo escalar $\phi(t, \vec{x})$ da maneira dada pela Eq. (2.15). Tais modos são normalizados e toda a álgebra dos operadores de criação e aniquilação foi construída. O estado de vácuo construído para observadores em repouso para um referencial inercial foi construído como um estado invariante translacional $|0, M\rangle$ (agora, definimos M para dizer que estamos lidando com um vácuo definido em um sistema de coordenadas inercial no espaço-tempo de Minkowski, geralmente chamamos tal estado como *vácuo de Minkowski*) tal qual $a(\mathbf{k})|0, M\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}$.

Consideramos agora uma família de observadores em repouso em um referencial não inercial, *e.g.*, com um movimento retilíneo uniformemente acelerado. A partir das coordenadas usuais $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$, definimos as coordenadas $X^\mu = (\eta, \xi, y, z)$ usando

$$\begin{cases} t = \xi \sinh \eta \\ x^1 = \xi \cosh \eta \\ x^2 = y \\ x^3 = z, \end{cases} \quad (2.37)$$

com $0 < \xi < \infty$ e $-\infty < \eta < \infty$. Por consequência, $\xi^2 = (x^1)^2 - t^2$ e $\eta = \tanh^{-1}(t/(x^1))$. Nestas coordenadas, um observador que viaja na linha de universo $\xi = 1/a = C^{te}$ (y, z também são constantes) possui uma aceleração própria dada por a . Este sistema de coordenadas cobre apenas um pedaço do espaço-tempo de Minkowski, *i.e.*, a região para qual $|x| > t$, onde existe um vetor de Killing global do tipo tempo $\partial/\partial\eta$. Nestas coordenadas, a equação de Klein-Gordon (2.3) se torna

$$\left(\frac{\partial_\eta^2}{\xi^2} - \partial_\xi^2 - \frac{\partial_\xi}{\xi} - \partial_i^2 + m^2 \right) \phi(\eta, \xi, \mathbf{y}) = 0, \quad (2.38)$$

onde definimos $\mathbf{y} = (y, z)$. Essa equação pode ser resolvida facilmente pelo método de separação de variáveis nos fornecendo os modos normalizados como:

$$u_{\vec{q}, \nu} = \frac{\sqrt{2\nu \sinh(\pi\nu)}}{2\pi^2} K_{i\nu}(m\xi) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} e^{-i\nu\eta}, \quad (2.39)$$

onde $K_{i\nu}(z)$ é a função de Macdonald de ordem imaginária e definimos o vetor $\mathbf{q} = (k_y, k_z)$. Neste trabalho vamos nos ater apenas aos observadores que viajam no ramo direito de Rindler. A partir das soluções gerais das equações de Klein-Gordon dadas pela Eq. (2.39), o operador do campo escalar pode ser escrito como uma soma de contribuições de frequências positivas e negativas em respeito ao vetor de Killing $\partial/\partial\eta$ como

$$\phi(\eta, \xi, \mathbf{y}) = \phi^{(+)}(\eta, \xi, \mathbf{y}) + \phi^{(-)}(\eta, \xi, \mathbf{y}), \quad (2.40)$$

Definindo $m^2 = m_0^2 + \mathbf{q}^2$, temos os modos

$$\phi^{(+)}(\eta, \xi, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\nu \int d^2\mathbf{q} \sqrt{\sinh \pi\nu} K_{i\nu}(m\xi) e^{-i(\nu\eta - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} b(\nu, \mathbf{q}), \quad (2.41)$$

e

$$\phi^{(-)}(\eta, \xi, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\nu \int d^2\mathbf{q} \sqrt{\sinh \pi\nu} K_{i\nu}(m\xi) e^{i(\nu\eta - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} b^\dagger(\nu, \mathbf{q}), \quad (2.42)$$

Os operadores de criação e aniquilação dos quanta de Rindler $b^\dagger(\nu, \mathbf{q})$ e $b(\nu, \mathbf{q})$ satisfazem as relações de comutação usuais em sobre uma hipersuperfície de simultaneidade η . Fica claro que no espaço de Hilbert dos estados existe um estado de vácuo $|0, R\rangle$, que é conhecido como o estado de vácuo de Fulling, tal qual $b(\nu, \mathbf{q})|0, R\rangle = 0$, $\forall \nu \in [0, \infty)$, $-\infty < k_y, k_z < \infty$. A partir deste estado podemos criar o espaço de Fock nas coordenadas de Rindler.

O operador de aniquilação dos quanta dos campos de Rindler no modo (ν, \mathbf{q}) pode ser expandido, usando as *transformações Bogoliubov*, em uma combinação linear dos operadores de criação e aniquilação dos quanta dos campos de Minkowski $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$. Temos então

$$b(\nu, \mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{k} [U(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{k})a(\mathbf{k}) + V(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})], \quad (2.43)$$

onde

$$U(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{k}') = \frac{1}{[2\pi\omega_k(1 - e^{-2\pi\nu})]^{1/2}} \left(\frac{\omega_k + |\mathbf{k}|}{m} \right)^{i\nu} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (2.44)$$

$$V(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{k}') = \frac{1}{[2\pi\omega_k(e^{2\pi\nu} - 1)]^{1/2}} \left(\frac{\omega_k + |\mathbf{k}|}{m} \right)^{i\nu} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (2.45)$$

Observamos então, que na construção matemática do formalismo, obtemos duas definições não equivalentes do espaço de Fock com dois vácuos $|0, M\rangle$ e $|0, R\rangle$. O que nos leva a entender que o vácuo invariante de Poincaré $|0, M\rangle$ possui um número infinito de partículas de Rindler no modo (ν, \mathbf{q}) associadas com o campo escalar massivo:

$$\langle 0, M | b^\dagger(\nu, \mathbf{q}) b(\nu', \mathbf{q}') | 0, M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\nu} - 1} \delta(\nu - \nu') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (2.46)$$

Podemos observar que o resultado acima apresenta uma distribuição do tipo Bose-Einstein [38]. Isso nos leva à interpretação do vácuo de Minkowski como sendo um bando térmico de partículas de Rindler. No próximo capítulo vamos explorar tal resultado fazendo o uso de um modelo de detecção dessas partículas de Rindler.

3 O Efeito Unruh-Davies

O objetivo deste capítulo é explorar medições de segundo tipo em uma situação amplamente discutida na literatura: medições de quanta de campo associados a um campo (massivo) realizado por observadores em movimento retilíneo uniformemente acelerado. Como já discutimos, vamos realizar uma distinção entre os modelos de detecção de Glauber e de Unruh-DeWitt. Este último é amplamente discutido, para o qual os processos de absorção e emissão do detector são igualmente importantes. Além disso, como os detectores de partículas são percebidos como aparatos para coletar informações sobre campos quânticos, é importante entender o comportamento de diferentes modelos em situações distintas, e percebe-se que até agora o detector de Glauber não recebeu a devida atenção no contexto do efeito Unruh-Davies. O modelo de Glauber também nos ajuda a entender sob uma perspectiva alternativa o papel da transferência de energia entre o detector de partículas e o campo quântico nos processos de medição. Por outro lado, na teoria quântica da foto-detecção, um tratamento perturbativo da interação detector-campo usando a aproximação de ondas rotativas (RWA) é usualmente adotado [15, 16, 39].

A construção de Glauber introduz uma espécie de ordenação de operadores onde os processos de emissão são desconsiderados. Ressaltamos que esta ordenação de Glauber está relacionada à congruência dos vetores de Killing do tipo tempo. Avaliaremos as taxas de probabilidade de transição do detector acelerado preparado no estado fundamental para três situações de interesse: quando estado do campo é tomado como um estado arbitrário de n -quanta de Rindler; quando o estado do campo constitui de um estado térmico de Rindler com temperatura β^{-1} e finalmente quando o estado do campo é o vácuo Minkowski. Buscamos recuperar o conhecido resultado de que um detector em movimento retilíneo uniformemente acelerado interagindo com um campo no vácuo de Minkowski tem a mesma taxa de probabilidade de transição de um detector acelerado interagindo com o campo em um estado térmico de Rindler a uma temperatura β^{-1} . Como não há concordância na literatura quanto à interpretação dos processos descritos por observadores em repouso em um referencial inercial e em repouso em um referencial não inercial, utilizando o modelo de Glauber, pretendemos esclarecer essa questão [40–43]. Por fim, investigamos um modelo no espaço-tempo Minkowski onde o vácuo definido no passado remoto, o estado $|0, \text{in}\rangle$, e no futuro distante, o estado $|0, \text{out}\rangle$, são unitariamente não equivalentes. Mostramos que um detector de Glauber em um futuro distante pode ser excitado ao interagir com o campo no estado de vácuo $|0, \text{in}\rangle$.

Este capítulo e o próximo possuem os resultados e as discussões publicadas na referência [44].

3.1 O efeito Unruh-Davies: O detector de Unruh-DeWitt

Até agora vimos que para diferentes sistemas de coordenadas, conseguimos definições não equivalentes do vácuo. As transformações de Bogoliubov do capítulo anterior nos mostram que o vácuo de Rindler pode ser considerado como um estado de várias partículas de Minkowski. Podemos criar um modelo de detector de partículas de Minkowski que consiste em um sistema de dois níveis que interage com um campo quântico $\phi(x)$. Tal sistema se excita ao absorver uma partícula de Minkowski e é de se esperar que ao prepararmos o campo em seu estado fundamental $|0, M\rangle$ o sistema não altera seu estado e podemos dizer que detector não detecta partícula alguma. Agora podemos nos perguntar o seguinte. O que acontece se colocarmos o mesmo detector em repouso em um sistema de referências uniformemente acelerado? Tal modelo de detecção ficou conhecido como detector de Unruh-DeWitt [12, 14]. A resposta para a pergunta proposta foi o chamado efeito Unruh-Davies e nos diz que o detector se excita da maneira análoga caso o mesmo estivesse em equilíbrio em um banho térmico de partículas de Rindler [40]. Esse resultado possui uma analogia muito forte com o efeito Hawking e possui uma grande importância na literatura [13]. Nesta seção vamos revisar esse resultado utilizando um modelo de detecção comumente usado na área da ótica quântica.

O detector de Unruh-DeWitt consiste em um sistema de dois níveis idealizado com um estado fundamental denominado por $|g\rangle$, com energia ω_g , e um estado excitado $|e\rangle$, com energia ω_e . A Hamiltoniana que dita a interação entre o detector e o campo quântico $\phi(x)$ é dada por

$$H_{\text{int}} = c_1 m(\tau) \phi(x(\tau)), \quad (3.1)$$

onde $m(\tau)$ é chamado de operador de momento de monopolo e c_1 é uma constante de acoplamento adimensional que possui valores bem pequenos. Nesta Hamiltoniana, τ é o tempo próprio do detector. A Hamiltoniana total do sistema pode ser escrita como a soma

$$H = H_F + H_D + H_{\text{int}},$$

que também possui contribuições livres de interação do detector H_D e do campo quântico H_F .

Estamos interessados aqui em discutir o comportamento de tal sistema de dois níveis com o campo preparado em determinados estados. A dependência temporal de H_{int} é dada por

$$H_{\text{int}}(\tau) = e^{iH_0\tau} (H_{\text{int}})_S e^{-iH_0\tau}, \quad (3.2)$$

onde $(H_{\text{int}})_S$ é a Hamiltoniana de interação na representação de Schrödinger e H_0 é a parte livre de interações da Hamiltoniana do sistema, $H_0 = H_F + H_D$. O sistema obedece

as equações

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\tau\rangle = H_{\text{int}} |\tau\rangle, \quad (3.3)$$

$$|\tau\rangle = U(\tau, \tau_i) |\tau_i\rangle, \quad (3.4)$$

com $U(\tau, \tau_i)$ sendo o operador de evolução temporal. Para a aproximação de primeira ordem em teoria de perturbações, esse operador se torna

$$U(\tau_f, \tau_i) = 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' H_{\text{int}}(\tau'). \quad (3.5)$$

Fazendo uso dos seguintes operadores

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \\ \sigma^+ &= |e\rangle\langle g| \\ \sigma^- &= |g\rangle\langle e| \end{aligned} \quad (3.6)$$

que satisfazem as conhecidas relações de comutação do operador momento angular, a Hamiltoniana da interação do detector com o campo pode ser reescrita como

$$H_{\text{int}} = c_1 [m_{eg}\sigma^+ + m_{ge}\sigma^- + \sigma_z(m_{ee} - m_{gg})] \phi(x(\tau)), \quad (3.7)$$

onde $m_{ij} = \langle i | m(0) | j \rangle$, $|i\rangle = |e, g\rangle$. Quando realizamos a decomposição do campo $\phi(x)$ em uma soma das contribuições de frequências positivas e negativas na Eq. (3.7), encontramos que a contribuição de primeira ordem para o estado do campo e do detector nos fornece quatro tipos de termos associados a processos de absorção ou emissão de quanta do campo com uma excitação ou decaimento do estado do detector [45]. No modelo de detecção de Unruh-DeWitt todos estes processos são levados em consideração. Chamamos a atenção para esses possíveis processos pois é neles que reside a principal diferença entre os modelos de detecção que discutiremos aqui nesta tese.

Usando a Eq. (3.5), podemos encontrar a probabilidade de transição de evolução de um estado inicial $|\tau_i\rangle = |g\rangle \otimes |\Phi_i\rangle$ em τ_i para um estado final $|\tau_f\rangle = |e\rangle \otimes |\Phi_f\rangle$ em τ_f , onde $|\Phi_i\rangle$ é o estado inicial do campo e $|\Phi_f\rangle$ o estado final do campo, calculando a probabilidade de transição dada pela expressão

$$\langle \tau_f | U(\tau_f, \tau_i) | \tau_i \rangle = -i c_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \langle \tau_f | m(\tau') \phi(x(\tau')) | \tau_i \rangle. \quad (3.8)$$

Então, usando a Eq. (3.2), a amplitude de probabilidade das transições se torna

$$A_{|\tau_i\rangle \rightarrow |\tau_f\rangle} = -i c_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' e^{i\omega_{eg}\tau'} \langle e | m(0) | g \rangle \langle \Phi_f | \phi(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle, \quad (3.9)$$

onde definimos $\omega_{eg} = \omega_e - \omega_g$ como o intervalo de energia dos estados do detector. Por consequência, pela Eq. (3.9), após somar sobre um conjunto completo $\{|\Phi_f\rangle\}$, obtemos uma probabilidade das transições dada por

$$\begin{aligned} P_{|\tau_i\rangle \rightarrow |\tau_f\rangle}(\tau_f, \tau_i) &= |A_{|\tau_i\rangle \rightarrow |\tau_f\rangle}|^2 \\ &= c_1^2 |\langle e | m(0) | g \rangle|^2 F(\omega_{eg}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $c_1^2 |\langle e | m(0) | g \rangle|^2$ é chamado de *seletividade do detector* e $F(\omega_{eg}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x})$ é a chamada função resposta ao qual, em primeira ordem em teoria de perturbação é:

$$F(\omega_{eg}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' e^{-i\omega_{eg}(\tau-\tau')} \langle \Phi_i | \phi(\tau, \mathbf{x}) \phi(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle, \quad (3.11)$$

onde usamos $\sum_f |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f| = 1$. A função resposta revela o banho de quanta que um detector pode experimentar. Já que os experimentos em teoria de campos precisam ser avaliados em um intervalo de tempo limitado, para o caso de um detector de Unruh-DeWitt uniformemente acelerado e um campo real escalar não massivo no vácuo de Minkowski, a probabilidade de transição foi avaliada em um intervalo de tempo próprio finito nas Refs. [45, 46]. A taxa de emissão e absorção espontânea de partículas de Rindler (probabilidade de transição por unidade de tempo próprio no limite $\tau_f - \tau_i \rightarrow \infty$) é dada por

$$R(\omega_{eg}) = \frac{|\omega_{eg}|}{2\pi} \left[\theta(-\omega_{eg}) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\sigma\omega_{eg}} - 1} \right) + \theta(\omega_{eg}) \frac{1}{e^{2\pi\sigma\omega_{eg}} - 1} \right], \quad (3.12)$$

onde σ^{-1} é a aceleração própria do detector. A interpretação usual sobre o efeito Unruh-Davies é que o primeiro termo deve descrever a emissão espontânea do detector uniformemente acelerado, enquanto o segundo termo descreve a excitação espontânea [4, 47–54]. A interpretação de como os processos de medida são descritos por diferentes observadores não é nenhum pouco óbvia. Então uma pergunta fundamental seria como podemos interpretar as medidas de um detector em diferentes cenários e é isso que discutiremos a seguir.

3.2 Teoria de foto-deteccção de Glauber

Nesta seção discutiremos medidas em cenários de processos radiativos para determinados estados preparados para o campo quântico. Introduziremos características particulares da teoria de foto-deteccção de Glauber que serão importante para uma análise do efeito Unruh-Davies através desse formalismo. Para este estudo, vamos considerar um sistema atômico mais próximo de uma situação real, ou seja, com um espectro contínuo de estados. Esse tipo de detector é conhecido como detector do tipo *broadband*¹.

O espaço de Hilbert para o detector, então, é constituído de um estado fundamental $|\psi_b\rangle$ e um contínuo de estados excitados $|\psi_j\rangle$. A Hamiltoniana independente do tempo para o detector satisfaz

$$H_d |\psi_l\rangle = E_l |\psi_l\rangle, \quad l = b \text{ ou } j \quad (3.13)$$

onde E_b é a energia relativa ao estado fundamental e E_j relativa aos estados excitados. A Hamiltoniana de interação para o detector e o campo ainda pode ser dada pela Eq. (3.1) e o momento de monopolo agora se torna

$$m = \int dj \left(m_{jb} |\psi_j\rangle \langle \psi_b| + m_{bj} |\psi_b\rangle \langle \psi_j| \right), \quad (3.14)$$

¹ Usualmente se utiliza, para a discussão do efeito Unruh-Davies, um detector que consiste em um sistema quântico de dois níveis. Este é mais um ponto que desejamos explorar nesta tese.

onde $m_{ik} = \langle \psi_i | m(\tau_i) | \psi_k \rangle$ e τ é o tempo próprio do detector.

A diferença fundamental entre o modelo de deteção de Glauber e o de Unruh-DeWitt pode ser observada por considerarmos uma forma alternativa da Hamiltoniana de interação entre o detector e o campo mas similar àquela encontrada na Eq. (3.7). Para o caso em que estamos interessados agora, tal Hamiltoniana se torna

$$H_{\text{int}} = c_1 \int dj [m_{jb}\sigma^+ + m_{bj}\sigma^- + \sigma_z(m_{jj} - m_{bb})] \phi(x(\tau)) \quad (3.15)$$

onde os operadores σ_z, σ^\pm agora são escritos em termos de $|\psi_j\rangle$ e $|\psi_b\rangle$ mas mantêm a mesma forma dada pela Eq. (3.6). Se realizarmos uma decomposição dos operadores de campo em termos de uma soma das partes das frequências positivas e negativas, encontramos que a contribuição de primeira ordem em teoria de perturbação para o estado do campo e do detector apresenta as mesmas quatro contribuições com as mesmas interpretações quando lidamos com o detector de Unruh-DeWitt. Duas dessas contribuições possuem termos de $c^\dagger(\mathbf{k})\sigma^+$ e $c(\mathbf{k})\sigma^-$, onde c^\dagger, c representa operadores genéricos de criação e aniquilação (podem ser tanto de Minkowski ou de Rindler, dependendo do contexto). Esses termos são conhecidos como os termos anti-ressonantes e são completamente descartados na aproximação de onda girante (RWA). Enquanto o detector de Unruh-DeWitt mantém tais termos, para o detector de Glauber consideramos apenas os termos conhecidos como ressonantes, $c^\dagger(\mathbf{k})\sigma^-$ e $c(\mathbf{k})\sigma^+$.

Podemos calcular a amplitude de transição de um estado inicial $|\tau_i\rangle = |\psi_b\rangle \otimes |\Phi_i\rangle$ em τ_i para o estado $|\tau_f\rangle = |\psi_j\rangle \otimes |\Phi_f\rangle$ em τ_f , onde $|\Phi_i\rangle$ e $|\Phi_f\rangle$ são estados puros arbitrários do campo. Por exemplo, tais estados podem ser estados no espaço de Fock construídos através dos operadores $a^\dagger(\mathbf{k})$ atuando no estado invariante de Poincaré de vácuo $|0, M\rangle$. Em primeira ordem em teoria de perturbação, obtemos

$$A_{|\tau_i\rangle \rightarrow |\tau_f\rangle} = ic_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' e^{i\omega_{jb}\tau'} \langle \psi_j | m(0) | \psi_b \rangle \langle \Phi_f | \phi(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle, \quad (3.16)$$

onde o intervalo de energia agora é definido por $\omega_{jb} = E_j - E_b$. Se expandirmos o campo em termos de contribuições de frequências positivas e negativas, observamos que a Eq. (3.16) possui duas contribuições [45]. São elas

$$\langle \Phi_f | \phi^+(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle + \langle \Phi_f | \phi^-(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle, \quad (3.17)$$

as quais são associadas, respectivamente, com a absorção e emissão de uma partícula inercial com a excitação do detector. Quando consideramos a foto-deteccção como sendo um processo de foto-absorção, na amplitude de probabilidade, somente o primeiro termo é relevante. Também, para processos de excitação, temos $\omega_{jb} > 0$. Este é o caso em que estamos interessados. De qualquer forma, observamos que tais processos são definidos usando uma definição particular do vetor de Killing do tipo tempo e os modos de frequência positiva são associados à esse vetor de Killing.

Para distinguir ainda mais o comportamento dos dois modelos de detectores em processos radiativos, podemos estudar as funções respostas associadas. Como anteriormente, tais funções estão relacionadas com a amplitude de probabilidade dada por $P_{|\tau_i\rangle\rightarrow|\tau_f\rangle}(\tau_f, \tau_i) = |A_{|\tau_i\rangle\rightarrow|\tau_f\rangle}|^2$. Após somarmos sobre um conjunto completo de estados finais do campo $\{|\Phi_f\rangle\}$, obtemos

$$P_{|\tau_i\rangle\rightarrow|\tau_f\rangle}(\tau_f, \tau_i) = c_1^2 |\langle\psi_j| m(0) |\psi_b\rangle|^2 F(\omega_{eg}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}), \quad (3.18)$$

onde a função resposta agora se torna

$$F(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau'' e^{-i\omega_{jb}(\tau' - \tau'')} \langle\Phi_i|\phi(\tau', \mathbf{x})\phi(\tau'', \mathbf{x})|\Phi_i\rangle. \quad (3.19)$$

Mais uma vez, decompondo o operador de campo como uma soma de contribuições de frequências positivas e negativas, a função resposta se escreve como

$$F(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) = F_1(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) + F_2(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}), \quad (3.20)$$

onde

$$F_1(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau'' e^{-i\omega_{jb}(\tau' - \tau'')} \langle\Phi_i|\phi^{(-)}(\tau', \mathbf{x})\phi^{(+)}(\tau'', \mathbf{x})|\Phi_i\rangle, \quad (3.21)$$

e

$$F_2(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x}) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau'' e^{-i\omega_{jb}(\tau' - \tau'')} \langle\Phi_i|\phi^{(+)}(\tau', \mathbf{x})\phi^{(-)}(\tau'', \mathbf{x})|\Phi_i\rangle. \quad (3.22)$$

Nossa definição de um detector real é um dispositivo que vai para um estado excitado diminuindo o número de quanta de um determinado estado. Este é o processo real de detecção. Como $F_1(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x})$ é construído apenas pelo primeiro termo da equação (3.17), é evidente que apenas essa contribuição descreve um processo de absorção. Na teoria de foto-deteção de Glauber somente este termo contribui para a taxa de transição.

Por outro lado, $F_2(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x})$ é obtido através do segundo termo da Eq. (3.17), e por consequência é comumente associado com um processo de emissão, acompanhado de um decaimento do estado do detector. Entretanto, como estamos considerando $\omega_{jb} > 0$, podemos nos perguntar se devemos manter tal contribuição. Na verdade, como demonstrado na Ref. [45], a contribuição F_2 se anula nos limites assintóticos $\tau_i \rightarrow -\infty, \tau_f \rightarrow \infty$ quando $\phi^{(+)}(x)$ e $\phi^{(-)}(x)$ são dados pelas Eqs. (2.17) and (2.18) e $|\Phi_i\rangle$ é o vácuo de Minkowski. Além do mais, existem alguns termos adicionais quando usamos o detector de Unruh-DeWitt que se anulam apenas nos limites assintóticos $\tau_i \rightarrow -\infty, \tau_f \rightarrow \infty$ [45]. Tais termos não estão associados à absorção dos quanta do campo.

Um detector ideal do tipo broadband ocorre quando os vários estados finais com valores energia muito maiores comparados com o intervalo de energia do campo de radiação contribuem para o processo de absorção [17, 55]. Além disso, a faixa de energia é muito

mais ampla do que o tempo de deteção associado. Como isso é uma situação bastante comum nos processos de deteção, vamos assumir aqui que o nosso modelo de detector é do tipo broadband. Por simplicidade, escolhemos $\tau_i = 0$ e $\tau_f = \tau$. A densidade de estados finais do detector é definido por $\rho(\omega_{jb})$ [55]. A probabilidade de excitação é

$$P(\tau, \mathbf{x}) = \int \rho(\omega_{jb}) P_{|\psi_b\rangle \rightarrow |\psi_j\rangle}(\tau, \mathbf{x}) d\omega_{jb}. \quad (3.23)$$

Considerando que $\rho(\omega_{jb})$ é uma função de variação lenta, podemos fazer a substituição por uma função constante, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{jb} e^{i\omega_{jb}(\tau'' - \tau')} \rho(\omega_{jb}) = 2\pi \delta(\tau'' - \tau') \rho(\bar{\omega}_{jb}). \quad (3.24)$$

Por fim, para um detector do tipo broadband, com apenas a contribuição $F_1(\omega_{jb}, \tau_f, \tau_i, \mathbf{x})$, obtemos que a probabilidade de excitação é dada por

$$P(\tau, \mathbf{x}) = C \int_0^\tau d\tau' \langle \Phi_i | \phi^{(-)}(\tau', \mathbf{x}) \phi^{(+)}(\tau', \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle, \quad (3.25)$$

onde C representa a eficiência do detector. A probabilidade de excitação por unidade de tempo no instante τ é definida por $dP(\tau, \mathbf{x})/d\tau$. Então, a taxa de probabilidade de transição do detector é calculada como

$$\frac{dP}{d\tau} = W(\tau, \mathbf{x}; |\Phi_i\rangle) = C \langle \Phi_i | \phi^{(-)}(\tau, \mathbf{x}) \phi^{(+)}(\tau, \mathbf{x}) | \Phi_i \rangle. \quad (3.26)$$

Este é um resultado padrão para o modelo de detector de Glauber. A taxa de probabilidade de transição é obtida por processos de absorção, onde $\phi^{(+)}(\tau, \mathbf{x})$ e $\phi^{(-)}(\tau, \mathbf{x})$ são dadas pelas Eqs. (2.17) e (2.18). Agora podemos investigar o comportamento desse aparato para diferentes sistemas de referência com diferentes estados definidos para o campo quântico. Faremos isso na seção a seguir.

3.3 A teoria de foto-deteccção de Glauber e o efeito Unruh-Davies

Investigaremos agora os processos radiativos de um detector de Glauber em repouso em um sistema de referências uniformemente acelerado. No modelo de Glauber, como discutimos, o detector só funciona por absorção dos quanta do campo quântico. Para entendermos o ponto essencial de nosso procedimento lembramos que em espaços-tempo estacionários, como em Minkowski ou Rindler, observadores usam diferentes escolhas do vetor de Killing do tipo tempo. Então devemos definir duas diferentes definições para o ordenamento temporal, uma dada por $:\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x'):$ \mathbb{M} , usando as Eqs. (2.17) e (2.18) ou $:\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x'):$ \mathbb{R} , usando as Eqs. (2.41) e (2.42) relacionadas aos associados, respectivamente, vetores de Killing.

Utilizaremos o detector do tipo broadband definido na seção anterior, mas agora vamos levar em conta que o mesmo estará em repouso em um referencial uniformemente

acelerado. Neste caso, a taxa de probabilidade de transição deve ser dada pelo produto de $\phi^{(+)}(x)$ e $\phi^{(-)}(x)$ definidos nas Eqs. (2.41) e (2.42), respectivamente. Vamos considerar primeiro que o campo está em um estado arbitrário $|\phi_i\rangle$ construído pela atuação dos operadores $b^\dagger(\nu)$ no vácuo de Fulling $|0, R\rangle$. Já que estamos usando a definição de ordenamento temporal em respeito ao vetor de Killing do tipo tempo de Rindler, o procedimento para se calcular a taxa de probabilidade de transição $W(\eta, \xi; |\phi_i\rangle)$ é o mesmo da seção anterior e nos fornece

$$W(\eta, \xi; |\phi_i\rangle) = \langle \phi_i | \phi^{(-)}(\eta, \xi, \mathbf{y}) \phi^{(+)}(\eta, \xi, \mathbf{y}) | \phi_i \rangle \quad (3.27)$$

onde estamos adotando o parâmetro temporal de Rindler η para descrever a evolução temporal do sistema e por simplicidade fixamos $C = 1$. Observe que a taxa média de contagem dos quanta de Rindler é proporcional ao valor esperado do produto ordenamento normal das partes de frequências negativas e positivas do operador de campo na linha de universo $\xi = C^{te}$ e y, z também constantes. Usando as Eqs. (2.41) e (2.42), encontramos

$$W(\xi; |\phi_i\rangle) = \frac{1}{4\pi^4} \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\nu' \int d^2\mathbf{q} \int d^2\mathbf{q}' e^{i[\eta(\nu-\nu') - \mathbf{y}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q}')] } \sqrt{\sinh \pi\nu} \sqrt{\sinh \pi\nu'} \\ \times K_{i\nu}(m\xi) K_{i\nu'}(m\xi) \langle \phi_i | b^\dagger(\nu, \mathbf{q}) b(\nu', \mathbf{q}') | \phi_i \rangle. \quad (3.28)$$

Fica claro agora que, quando o estado do espaço de Fock em Rindler é o vácuo de Fulling, *i.e.*, $|\phi_i\rangle = |0, R\rangle$, a taxa de excitação se anula, como esperado.

Vamos assumir um banho térmico no espaço-tempo de Rindler. Cada observador em repouso em um referencial uniformemente acelerado mede uma temperatura local dada por $T = \beta^{-1}$. A lei de Planck nos mostra que a taxa de transição em uma linha de universo específica é

$$W_\beta(\xi) = \frac{1}{4\pi^4} \int d^2\mathbf{q} \int_0^\infty d\nu \frac{\sinh \pi\nu}{e^{\beta\nu} - 1} K_{i\nu}^2 \left(\xi \sqrt{m_0^2 + \mathbf{q}^2} \right). \quad (3.29)$$

Uma família de observadores pode ser definida por um conjunto de linhas de universo do tipo tempo. No espaço-tempo de Rindler cada observador viajando em uma linha de universo $\xi = C^{te}$ define um referencial uniformemente acelerado com aceleração própria dada por $a = \xi^{-1}$. Pode-se demonstrar que existe um equilíbrio térmico usando a relação de Tolman $\beta^{-1} \sqrt{g_{00}} = C^{te}$ [56, 57]. Então, a temperatura local em cada linha de universo é

$$\beta^{-1} = (2\pi\xi)^{-1}.$$

Agora queremos entender como um detector se comporta ao substituir espaço de Fock de Rindler por um outro espaço de Hilbert que carrega outra representação da álgebra do campo. Este é o ponto fundamental aqui. Trata-se de aplicar operadores construídos para atuar em uma representação da álgebra de operadores a estados que pertencem a uma representação unitariamente não equivalente. Em outras palavras, queremos compreender

como um detector de Glauber uniformemente acelerado se comporta se o estado do campo é o vácuo de Minkowski. A partir da Eq. (3.28) usando que $|\phi_i\rangle = |0, M\rangle$ obtemos a taxa de transição de um detector uniformemente acelerado interagindo com o campo escalar no vácuo de Minkowski. Chamamos esta taxa de $W_1(\xi; |0, M\rangle)$. Usando a Eq. (2.46), obtemos

$$W_1(\xi; |0, M\rangle) = \frac{1}{4\pi^4} \int d^2\mathbf{q} \int_0^\infty d\nu \frac{\sinh \pi\nu}{e^{2\pi\nu} - 1} K_{i\nu}^2 \left(\xi \sqrt{m_0^2 + \mathbf{q}^2} \right). \quad (3.30)$$

Observamos que $W_1(\xi; |0, M\rangle) = W_\beta(\xi)$. Esta é uma outra versão do teorema Bisognano-Wichmann [58, 59] que afirma que o valor esperado do vácuo de Minkowski de observáveis que estão localizados no ramo direito de Rindler satisfaz a condição de Kubo-Martin-Schwinger [60, 61] em respeito com a variável temporal de Rindler η . Do ponto de vista do observador uniformemente acelerado, a contribuição para a taxa dada por W_1 é um processo de excitação do detector de Glauber com a absorção de um quantum de Rindler do campo escalar.

Pela Eq. (3.30), para o caso em que $m_0^2 = 0$ obtemos o famoso resultado

$$W_1(\xi; |0, M\rangle) = \frac{1}{(2\pi\xi)^2} \int_0^\infty d\nu \frac{\nu}{e^{2\pi\nu} - 1}. \quad (3.31)$$

A interpretação dada pelo observador inercial para o processo de excitação é a seguinte. Como para o observador inercial o estado do campo é o vácuo de Minkowski, o detector faz transições para estados excitados e os quanta do campo aparecem. A fonte de energia que permite esses processos vem do agente que acelera o detector. Aplicando a Eq. (2.43) ao estado de vácuo de Minkowski, obtemos

$$b(\nu, \mathbf{q}) |0, M\rangle = \int d^3\mathbf{k} V(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) |0, M\rangle. \quad (3.32)$$

A maneira tradicional de se interpretar o resultado acima é afirmar que os processos de contra-rotação $\sigma^+ a^\dagger(\mathbf{k})$ ($\sigma^+ = |e\rangle \langle g|$ para detectores de dois níveis usuais) são responsáveis pela contribuição do lado direito. Estas representam um processo virtual, uma vez que ocorrem para intervalos de tempo pequenos $\Delta\tau$ obedecendo $|\Delta\omega|\Delta\tau < 1$, onde $\Delta\omega$ é o intervalo de energia associado, fazendo com que o detector reaja às flutuações do vácuo [45]. Para um detector em repouso num sistema de referências em um movimento retilíneo uniformemente acelerado, este processo se torna um processo real ao qual é geralmente considerado como a radiação de Unruh. Essa mesma análise pode ser feita por um observador inercial. A contribuição F_1 é um processo de excitação do detector com emissão.

3.4 O detector de Glauber no sistema coordenadas de Kalnins-Miller

Nesta seção vamos estudar o comportamento de um detector que é inercial em um passado remoto e em um futuro distante está em repouso em um sistema uniformemente

acelerado. O sistema de coordenadas adaptado para esse cenário foi obtido nos trabalhos das Refs. [62–64]. A quantização do campo escalar para esse sistema de coordenadas foi discutido pela primeira vez por Costa, Svaiter e De Paola [65–69]. Para um espaço-tempo quadridimensional com as coordenadas cartesianas usuais $x^\mu = (t, x, \mathbf{y})$ e coordenadas curvilíneas $X^\mu = (\xi, \eta, \mathbf{y})$, definimos a seguinte correspondência entre estes sistemas

$$t + x = \frac{2}{a} \sinh a(\xi + \eta), \quad (3.33)$$

e

$$t - x = -\frac{1}{a} e^{-a(\xi - \eta)}, \quad (3.34)$$

para $-\infty < \eta < \infty$ e $-\infty < \xi < \infty$. Este sistema de coordenadas $X^\mu = (\xi, \eta, \mathbf{y})$ é válido apenas para $t - x < 0$. No entanto, é possível estendê-lo para cobrir todo o espaço-tempo. O elemento de linha quadridimensional pode ser escrito usando as coordenadas curvilíneas como

$$ds^2 = \left(e^{-2a\eta} + e^{2a\xi} \right) \left(d\eta^2 - d\xi^2 \right) - dy^2 - dz^2. \quad (3.35)$$

O próximo passo é estudar a aceleração própria de um observador viajando ao longo de uma linha de universo $\xi, \mathbf{y} = C^{te}$. Temos que

$$\alpha = a \left(e^{-2a\eta} + e^{2a\xi} \right)^{-3/2} e^{2a\xi} \Big|_{\xi=\bar{\xi}, \mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}}. \quad (3.36)$$

Então, no passado remoto e no futuro distante nós temos, respectivamente

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \alpha(\eta, \xi, \mathbf{y})|_{\xi=\bar{\xi}, \mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}} = 0, \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \alpha(\eta, \xi, \mathbf{y})|_{\xi=\bar{\xi}, \mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}} = a e^{-a\bar{\xi}} = a_\infty. \end{cases} \quad (3.37)$$

Essas coordenadas a equação de Klein-Gordon (2.3) é escrita como

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m_0^2 \left(e^{-2a\eta} + e^{2a\xi} + \mathbf{q}^2 \right) \right] \phi(\eta, \xi, \mathbf{y}) = 0. \quad (3.38)$$

Definimos as variáveis $\zeta = a^{-1} e^{-a\eta}$ e $\chi = a^{-1} e^{a\xi}$ para $\infty > \zeta > 0$ e $0 < \chi < \infty$. Usando o resultado obtido por Kalnins e Miller escrevemos $\phi(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = F(\zeta)G(\chi)H(\mathbf{y})$. Usando o método das separações de variáveis para a equação acima podemos escrever a equação de Klein-Gordon como

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + m_0^2 + \mathbf{q}^2 + \frac{\lambda^2}{\zeta^2} \right] F(\zeta) = 0, \quad (3.39)$$

e

$$\left[\frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} - m_0^2 - \mathbf{q}^2 + \frac{\lambda^2}{\chi^2} \right] G(\chi) = 0. \quad (3.40)$$

Existem dois conjuntos completos de bases ortonormais que podem ser usados na expansão do campo. São eles $\{u_\lambda(\zeta, \chi, \mathbf{y}), u_\lambda^*(\zeta, \chi, \mathbf{y})\}$ e $\{v_\lambda(\zeta, \chi, \mathbf{y}), v_\lambda^*(\zeta, \chi, \mathbf{y})\}$ aos quais possuem as formas

$$u_\lambda(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = N_\lambda H_{i\lambda}^{(1)}(m\zeta) K_{i\lambda}(m\chi) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}, \quad (3.41)$$

$$u_\lambda^*(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = N_\lambda H_{-i\lambda}^{(2)}(m\zeta) K_{i\lambda}(m\chi) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}, \quad (3.42)$$

onde $m = \sqrt{m_0^2 + \mathbf{q}^2}$ para

$$N_\lambda = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left[\lambda (1 - e^{-2\pi\lambda}) \right]^{1/2}, \quad (3.43)$$

e

$$v_\nu(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = \left(\frac{\nu}{4\pi^3} \right)^{1/2} J_{i\nu}(m\zeta) K_{i\nu}(m\chi) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}, \quad (3.44)$$

$$v_\nu^*(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = \left(\frac{\nu}{4\pi^3} \right)^{1/2} J_{-i\nu}(m\zeta) K_{i\nu}(m\chi) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}, \quad (3.45)$$

onde $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ são funções de Bessel do terceiro tipo, ou funções de Hankel, e $J_\nu(z)$ é a função de Bessel do primeiro tipo. Pode-se mostrar que $u_\lambda(\zeta, \chi, \mathbf{y})$ e $u_\lambda^*(\zeta, \chi, \mathbf{y})$ são, respectivamente, os modos de frequência positiva e negativa no passado remoto e $v_\nu(\zeta, \chi, \mathbf{y})$ e $v_\nu^*(\zeta, \chi, \mathbf{y})$ são, respectivamente, os modos de frequência positiva e negativa no futuro distante [70, 71]. Então, no passado remoto, o campo pode ser expandido como

$$\phi(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\lambda \int d^2\mathbf{q} \left[a_{\text{in}}(\lambda, \mathbf{q}) u_\lambda(\zeta, \chi, \mathbf{y}) + a_{\text{in}}^\dagger(\lambda, \mathbf{q}) u_\lambda^*(\zeta, \chi, \mathbf{y}) \right], \quad (3.46)$$

onde $a_{\text{in}}(\lambda, \mathbf{q})$ e $a_{\text{in}}^\dagger(\lambda, \mathbf{q})$ são os operadores de aniquilação e criação para os quanta do campo no passado remoto. Definimos então o estado de vácuo

$$a_{\text{in}}(\lambda, \mathbf{q}) |0, \text{in}\rangle = 0, \quad \forall \lambda, \mathbf{q}. \quad (3.47)$$

Da mesma maneira, a expansão do campo para observadores no futuro distante pode ser escrita como

$$\phi(\zeta, \chi, \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\nu \int d^2\mathbf{q} \left[a_{\text{out}}(\nu) v_\nu(\zeta, \chi, \mathbf{y}) + a_{\text{out}}^\dagger(\nu) v_\nu^*(\zeta, \chi, \mathbf{y}) \right], \quad (3.48)$$

onde $a_{\text{out}}(\nu, \mathbf{q})$ e $a_{\text{out}}^\dagger(\nu, \mathbf{q})$ são os operadores de aniquilação e criação para os quanta do campo no futuro distante. O estado de vácuo nesse caso é definido por

$$a_{\text{out}}(\nu, \mathbf{q}) |0, \text{out}\rangle = 0, \quad \forall \nu, \mathbf{q}. \quad (3.49)$$

O número de partículas associadas aos modos (ν, \mathbf{q}) -out no vácuo definido no passado remoto é dado por

$$\langle 0, \text{in} | a_{\text{out}}^\dagger(\nu, \mathbf{q}) a_{\text{out}}(\nu, \mathbf{q}) |0, \text{in}\rangle = \int d\lambda \int d^2\mathbf{q}' |\beta_{\nu\mathbf{q}, \lambda\mathbf{q}'}|^2, \quad (3.50)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov são

$$|\beta_{\nu\mathbf{q}, \lambda\mathbf{q}'}| = \frac{1}{a\sqrt{e^{2\pi\nu} - 1}} \delta(\nu - \lambda) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (3.51)$$

Este modelo apresenta um comportamento similar ao efeito Hawking. Se considerarmos a versão quântica de uma teoria de campo sem interações, o estado de vácuo construído

no passado infinito aparece como um estado térmico no futuro distante. Vamos discutir o comportamento de um detector de Glauber neste modelo. Definimos a quantidade

$$W(x; |\Phi\rangle) = \langle \Phi | : \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) :_{\text{out}} | \Phi \rangle. \quad (3.52)$$

Como discutimos anteriormente, para um detector do tipo broadband a expressão acima é proporcional à taxa de excitação. Para $|\Phi\rangle = |0, \text{out}\rangle$ temos $W = 0$ como esperado. Estamos interessados em considerar o caso

$$W(x; |0, \text{in}\rangle) = \langle 0, \text{in} | : \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) :_{\text{out}} |0, \text{in}\rangle. \quad (3.53)$$

Um procedimento direto nos fornece

$$W(\zeta, \chi; |0, \text{in}\rangle) = \frac{1}{4\pi^3} \int d^2\mathbf{q} \int_0^\infty d\nu \frac{\nu}{e^{2\pi\nu} - 1} J_{i\nu}(m\zeta) J_{-i\nu}(m\zeta) K_{i\nu}^2(m\chi). \quad (3.54)$$

Para o caso onde $m_0^2 = 0$ e $\zeta \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} W(\zeta, \chi; |0, \text{in}\rangle) = \frac{1}{(2\pi\chi)^2} \int_0^\infty d\nu \frac{\nu}{e^{2\pi\nu} - 1}. \quad (3.55)$$

Assim, a mesma interpretação dada a W_1 e W_β pode ser discutida no modelo de Kalnins-Miller. Anteriormente obtivemos que a taxa de probabilidade de transição de um detector acelerado interagindo com um banho térmico em Rindler é igual à taxa de probabilidade de transição do detector acelerado acoplado ao campo no vácuo de Minkowski. De forma semelhante, observamos que, para o campo sem massa, a taxa de probabilidade de transição do detector no futuro distante é equivalente à taxa de probabilidade de transição do detector em repouso em um referencial não inercial interagindo com o campo preparado em um estado térmico usual.

4 Equação Mestra Generalizada

Neste capítulo vamos fazer a descrição de um sistema de átomos de dois níveis interagindo com um campo quântico sob a luz da teoria de sistemas quânticos abertos [29]. O objetivo deste capítulo é generalizar a construção da equação mestra para descrever sistemas em repouso em referenciais uniformemente acelerados com tempos próprios distintos. Com isso, buscamos estudar os efeitos que diferentes acelerações próprias fazem na dinâmica de emaranhamento. A generalização apresentada neste trabalho torna-se importante porque permite investigar outros aspectos que podem influenciar a dinâmica do sistema além daqueles já estudados em trabalhos anteriores, como a distância ortogonal ao movimento entre os átomos e a polarização dos átomos no caso do campo eletromagnético. Investigamos, com este formalismo, as implicações para a degradação do estado emaranhado e a colheita de emaranhamento do vácuo quântico.

Este capítulo tal como o seguinte possui os resultados e discussões publicados na referência [72].

4.1 Equação Mestra

Vamos aqui buscar a derivação de uma forma generalizada da equação mestra [73]. O nome *generalizada* é utilizada neste trabalho já que estamos trabalhando com sistemas pontuais de dois níveis viajando em linhas de universo distintas com tempos próprios distintos. A Hamiltoniana do sistema ao qual estamos interessados pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{\text{int}}. \quad (4.1)$$

Nessa equação, \mathcal{H}_A descreve a Hamiltoniana livre do sistema de dois níveis, \mathcal{H}_F é a Hamiltoniana do campo e \mathcal{H}_{int} descreve a Hamiltoniana de interação. Esta última (\mathcal{H}_{int}) geralmente possui a forma

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_i \sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)} \otimes B_i^{(\alpha)}, \quad (4.2)$$

onde $A_i^{(\alpha)}$ são os operadores aos quais agem no espaço dos estados dos sistemas de dois níveis, enquanto os operadores $B_i^{(\alpha)}$ correspondem ao espaço dos estados do campo. O índice α está associado ao número de sistemas de dois níveis.

Para descrever a evolução do subsistema A deve-se escolher um parâmetro apropriado. Em nossa exposição, pode-se esperar o emprego do tempo próprio dos sistemas de dois níveis, pois o acoplamento com o campo quântico é efetivo apenas em sua trajetória. No entanto, aqui há uma ambiguidade – os sistemas de dois níveis estudados podem se mover ao longo de diferentes trajetórias parametrizadas por diferentes tempos próprios.

Neste caso, podemos imaginar a existência de um “parâmetro de tempo” auxiliar η (no sentido de que é uma parametrização arbitrária da curva descrevendo a linha de universo de um “átomo” ou um “detector de partículas”) tal que se pode fazer a seguinte suposição razoável: Os tempos próprios dos sistemas de dois níveis são funções de tal parâmetro, $\tau_\alpha = \tau_\alpha(\eta)$. Qual seria esse parâmetro dependerá do contexto em análise. A razão pela qual inicialmente deixamos η não especificado é que desejamos mostrar que o formalismo proposto nesta tese pode abranger muitas situações diferentes que obedecem à condição geral mencionada. Assim, uma definição adequada e não ambígua para η depende da situação em que se está interessado. Claramente, em um espaço-tempo curvo a noção da coordenada temporal é mais sutil e deve-se ter cuidado em sua escolha - dito de forma simples, as diretrizes nesta situação devem ser consideradas caso a caso. No entanto, como discutiremos na próxima seção, estamos interessados na situação em que os sistemas de dois níveis estão em linhas de universo uniformemente aceleradas. Neste caso η pode ser o tempo Rindler associado. De fato, como duas hipérbolas diferentes na mesmo ramo de Rindler podem ser cortadas por uma única linha de constante η , esses tempos apropriados podem ser simplesmente relacionados, e esse recurso será explorado mais a frente nesta tese.

Para o caso de sistemas de dois níveis a Hamiltoniana de interação na representação de interação usualmente pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta) = \sum_{\omega} \sum_i \sum_{\alpha} e^{-i\omega\tau_\alpha(\eta)} A_i^{(\alpha)}(\omega) \otimes B_i^{(\alpha)}[x(\tau_\alpha(\eta))] \frac{d\tau_\alpha(\eta)}{d\eta}, \quad (4.3)$$

onde ω é o gap de energia entre os dois estados do sistema. A matriz densidade do sistema completo (ρ_{AB}) na representação de interação ($\tilde{\rho}_{AB}$) é descrita pela equação de Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{\rho}_{AB}(\eta) = -i [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta), \tilde{\rho}_{AB}(\eta)]. \quad (4.4)$$

Embora esta equação forneça a dinâmica de todo o sistema, estamos interessados apenas no comportamento do subsistema A . Nosso objetivo é construir uma equação para a matriz de densidade reduzida $\rho_A(\eta)$ dos sistemas de dois níveis que preserve todas as propriedades das matrizes de densidade.

Fazendo uso da teoria de perturbação em relação a uma constante de acoplamento adequada, que está presente no Hamiltoniano de interação, e considerando a aproximação de acoplamento fraco, *i.e.*, desprezando correlações de ordem superior, temos que

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\rho}_{AB}(\eta) = & -i \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} d\eta_1 [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1), \tilde{\rho}_{AB}(\eta_1)] \\ & - \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1), [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_2), \tilde{\rho}_{AB}(\eta)]] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como desejamos estudar a evolução da matriz densidade reduzida ρ_A do subsistema \mathcal{A} , calculamos o traço sobre os estados do campo, $\tilde{\rho}_A(\eta) = \text{Tr}_B [\tilde{\rho}_{AB}(\eta)]$, e obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\rho}_A(\eta) = & -i \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} d\eta_1 \text{Tr}_B [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1), \tilde{\rho}_{AB}(\eta_1)] \\ & - \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 \text{Tr}_B [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1), [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_2), \tilde{\rho}_{AB}(\eta)]] . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Antes de continuarmos, vamos recorrer a algumas aproximações adicionais. Ressaltamos que a derivação apresentada a seguir depende fortemente dessas premissas. Este procedimento se justifica, pois tais aproximações podem ser implementadas em muitas situações já discutidas na literatura.

Assumimos que existem duas escalas de tempo distintas. Uma é especificada por τ_B , o tempo característico associado às correlações internas no sistema \mathcal{B} . A outra escala de tempo é τ_A que descreve a evolução temporal da matriz densidade na presença da interação entre os dois sistemas. Assumimos que

$$\tau_B \ll \Delta\eta \ll \tau_A. \quad (4.7)$$

Isso significa que a escala de tempo de relaxação do sistema \mathcal{B} é menor que a escala de tempo de relaxação dos sistemas de dois níveis. Portanto, quando se inicia a correlação entre os dois sistemas, o campo tem tempo suficiente para atingir o equilíbrio. Isso implica que estamos dentro do regime da *aproximação de Born*, que permite desprezar as correlações iniciais induzidas pelas interações entre os subsistemas:

$$\tilde{\rho}_{AB}(\eta) \approx \tilde{\rho}_A(\eta) \otimes \tilde{\rho}_B, \quad (4.8)$$

onde $\tilde{\rho}_B$ é o operador matriz densidade reduzida associada com o subsistema \mathcal{B} . Além disso, tais aproximações também permitem concluir que o operador $\tilde{\rho}_B$ pode ser considerado aproximadamente estacionário:

$$\tilde{\rho}_B(\eta) \approx \sigma_B \rightarrow [\sigma_B, \mathcal{H}_B] = 0. \quad (4.9)$$

Como mencionado acima, o subsistema \mathcal{B} está associado ao campo quântico ao qual os sistemas de dois níveis se acoplam. Portanto, espera-se que

$$\text{Tr}_B \left\{ B_i^{(\alpha)} [x(\tau_\alpha(\eta))] \sigma_B \right\} = 0. \quad (4.10)$$

Podemos, então, reescrever a Eq. (4.6) como

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\rho}_A(\eta) = & - \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 \\ & \times \text{Tr}_B [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1), [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_2), \tilde{\rho}_{AB}(\eta)]] , \end{aligned} \quad (4.11)$$

Expandindo os comutadores e implementando as discussões acima sobre os intervalos de tempo, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}_A(\eta)}{\Delta \eta} &= \frac{1}{\Delta \eta} \int_{\eta}^{\eta+\Delta \eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 \text{Tr}_B [\mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_2) \tilde{\rho}_A(\eta) \otimes \sigma_B \mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1) \\ &\quad - \mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_1) \mathcal{H}_{\text{int}}(\eta_2) \tilde{\rho}_A(\eta) \otimes \sigma_B] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando a Eq. (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}_A(\eta)}{\Delta \eta} &= \frac{1}{\Delta \eta} \sum_{\omega, \omega'} \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\eta}^{\eta+\Delta \eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 e^{-i\omega \tau_{\beta}(\eta_2)} e^{i\omega' \tau_{\alpha}(\eta_1)} \\ &\quad \times \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') \text{Tr}_B [B_j^{(\beta)}(\eta_2) \sigma_B B_i^{\dagger(\alpha)}(\eta_1)] \right. \\ &\quad \left. - A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) \text{Tr}_B [B_i^{\dagger(\alpha)}(\eta_1) B_j^{(\beta)}(\eta_2) \sigma_B] \right) \frac{d\tau_{\beta}(\eta_1)}{d\eta_1} \frac{d\tau_{\alpha}(\eta_2)}{d\eta_2} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde, por simplicidade, escrevemos $B_i^{(\alpha)}[x(\tau_{\alpha}(\eta))] = B_i^{(\alpha)}(\eta)$. Definimos as funções de correlação do campo como

$$\text{Tr}_B [B_i^{\dagger(\alpha)}(\eta_1) B_j^{(\beta)}(\eta_2) \sigma_B] = G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\tau_{\alpha}(\eta_1), \tau_{\beta}(\eta_2)). \quad (4.14)$$

Podemos expandir a definição das funções de correlação

$$G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\tau_{\alpha}(\eta_1), \tau_{\beta}(\eta_2)) = \text{Tr}_B [e^{-i\mathcal{H}_F \tau_{\alpha}(\eta_1)} B_i^{\dagger(\alpha)}(0) e^{i\mathcal{H}_F \tau_{\alpha}(\eta_1)} e^{-i\mathcal{H}_F \tau_{\beta}(\eta_2)} B_j^{(\beta)}(0) e^{i\mathcal{H}_F \tau_{\beta}(\eta_2)} \sigma_B], \quad (4.15)$$

e, fazendo uso de que σ_B não varia no tempo e a propriedade cíclica do traço, temos que

$$G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\tau_{\alpha}(\eta_1), \tau_{\beta}(\eta_2)) = \text{Tr}_B [B_i^{\dagger(\alpha)}(x[\tau_{\alpha}(\eta_1) - \tau_{\beta}(\eta_2)]) B_j^{(\beta)}(0) \sigma_B]. \quad (4.16)$$

Como pode ser observado na Eq. (4.16) a função $G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\tau_{\alpha}(\eta_1), \tau_{\beta}(\eta_2))$ depende apenas da diferença $\tau_{\alpha}(\eta_1) - \tau_{\beta}(\eta_2)$. Em vários casos que estamos interessados esta função é a chamada função de Wightman das frequências positivas que pode ser calculada pela Eq. (2.34). Portanto, obtemos em seu argumento a diferença dos tempos próprios dos sistemas de dois níveis. Como será discutido na seção seguinte, neste trabalho estamos particularmente interessados em sistemas de dois níveis uniformemente acelerados, e neste caso veremos que esta função depende apenas da diferença dos parâmetros $\eta_1 - \eta_2$, ao qual será considerado o tempo próprio de um dos sistemas de dois níveis. Por isso escrevemos que

$$G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\tau_{\beta}(\eta_1), \tau_{\alpha}(\eta_2)) = G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\eta_1 - \eta_2). \quad (4.17)$$

Usando a propriedade cíclica do traço e depois de algumas manipulações algébricas simples, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}_A(\eta)}{\Delta \eta} &= \frac{1}{\Delta \eta} \sum_{\omega, \omega'} \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\eta}^{\eta + \Delta \eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 e^{i(\omega' - \omega)\tau_{\alpha}(\eta_1)} e^{i\omega(\tau_{\alpha}(\eta_1) - \tau_{\beta}(\eta_2))} \\ &\quad \times G_{ij}^{(\alpha\beta)}(\eta_1 - \eta_2) \frac{d\tau_{\beta}(\eta_1)}{d\eta_1} \frac{d\tau_{\alpha}(\eta_2)}{d\eta_2} \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') \right. \\ &\quad \left. - A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) \right) + h.c. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Até agora nós não especificamos o comportamento das funções $\tau_{\alpha}(\eta)$. Por simplicidade, vamos assumir uma relação linear da forma

$$\tau_{\alpha}(\eta_i) = a_{\alpha} \eta_i, \quad (4.19)$$

para alguma constante a_{α} . Esta relação é obedecida em vários sistemas físicos de interesse como, por exemplo, uma classe de observadores no espaço-tempo de Rindler ou Schwarzschild – no primeiro caso, a_{α} pode ser associado com a aceleração própria dos sistemas de dois níveis.

Definindo $s = \eta_1 - \eta_2$ ¹, e realizando a seguinte mudança de coordenadas [73]

$$\int_{\eta}^{\eta + \Delta \eta} d\eta_1 \int_{\eta}^{\eta_1} d\eta_2 \rightarrow \int_0^{\Delta \eta} ds \int_{\eta + s}^{\eta + \Delta \eta} d\eta_1, \quad (4.20)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}_A(\eta)}{\Delta \eta} &= \sum_{\omega, \omega'} \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} J(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_{\beta} \omega) \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') \right. \\ &\quad \left. - A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega') A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) \right) + h.c., \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde definimos as funções

$$J(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) = \int_{\eta}^{\eta + \Delta \eta} d\eta_1 \frac{e^{i(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) \eta_1}}{\Delta \eta}, \quad (4.22)$$

e

$$W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_{\beta} \omega) = a_{\alpha} a_{\beta} \int_0^{\infty} ds e^{i\omega a_{\beta} s} G_{ij}^{(\alpha\beta)}(s). \quad (4.23)$$

Observe que movemos o limite superior de integração sobre ds para infinito como $\tau_{\beta} \ll \Delta \eta$ e o limite inferior da integral sobre $d\eta_1$ foi tomado como η já que apenas pequenos valores de s contribuem significativamente para a integral.

Podemos estudar o comportamento da função $J(x)$. Resolvendo explicitamente a integral desta função temos:

$$\begin{aligned} J(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) &= \int_{\eta}^{\eta + \Delta \eta} d\eta_1 \frac{e^{i(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) \eta_1}}{\Delta \eta} \\ &= e^{i(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}) \eta} F(\omega' a_{\alpha} - \omega a_{\beta}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

¹ Observe que os índices α e β definem duas linhas de universo distintas dos átomos e η_1 e η_2 definem duas hiper-superfícies de simultaneidade. Portanto $\alpha = \beta$ não implica $s = \eta_1 - \eta_2 = 0$.

com

$$F(\omega' a_\alpha - \omega a_\beta) = e^{i(\omega' a_\alpha - \omega a_\beta) \frac{\eta}{2}} \frac{\sin \left[\left(\frac{\omega' a_\alpha - \omega a_\beta}{2} \right) \Delta \eta \right]}{\left[\left(\frac{\omega' a_\alpha - \omega a_\beta}{2} \right) \Delta \eta \right]}. \quad (4.25)$$

Observamos que, para $|\omega' a_\alpha - \omega a_\beta| \ll (\Delta \eta)^{-1}$, a função $|F|$ se aproxima de um, e, por outro lado, para $|\omega' a_\alpha - \omega a_\beta| \gg (\Delta \eta)^{-1}$, $|F|$ se aproxima de zero. Ou seja, $|F|$ tem um pico acentuado em torno do valor $|\omega' a_\alpha - \omega a_\beta| = 0$. Por consequência, dentro de nossas suposições, podemos fazer a aproximação

$$J(\omega' a_\alpha - \omega a_\beta) \approx e^{i(\omega' a_\alpha - \omega a_\beta) \eta} \delta(\omega' a_\alpha - \omega a_\beta). \quad (4.26)$$

4.2 Forma de Lindblad-Kossakowski

Vamos obter agora a forma padrão da equação mestra. Usamos o termo *forma padrão* para corresponder com a equação mestra conhecida como a equação de Lindblad-Kossakowski [74, 75]. Usando a Eq. (4.26) na equação (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}_A(\eta)}{\Delta \eta} &= \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega) \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)} \left(\frac{a_\beta}{a_\alpha} \omega \right) - A_i^{\dagger(\alpha)} \left(\frac{a_\beta}{a_\alpha} \omega \right) A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) \right) \\ &+ \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} W_{ij}^{*(\alpha\beta)}(a_\alpha \omega) \left(A_i^{(\alpha)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_j^{\dagger(\beta)} \left(\frac{a_\alpha \omega}{a_\beta} \right) - \tilde{\rho}_A(\eta) A_j^{\dagger(\beta)} \left(\frac{a_\alpha \omega}{a_\beta} \right) A_i^{(\alpha)}(\omega) \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Essa equação descreve a variação de $\tilde{\rho}_A(\eta)$ no intervalo $(\eta, \eta + \Delta \eta)$. A razão $\Delta \tilde{\rho}_A / \Delta \eta$ pode ser pensado como uma operação de média que suaviza variações rápidas de $\tilde{\rho}_A(\eta)$. A investigação da evolução temporal em uma escala de tempo $\tau_A \ll \Delta \eta$ nos permite negligenciar essas flutuações pequenas e rápidas. Essa aproximação coarse-graining é conhecida como *aproximação Markoviana*. Além disso, em nosso caso os operadores $A(\omega)$ tomarão a forma de combinações lineares das matrizes de Pauli. Então ω está associado com os autovalores da Hamiltoniana dos sistemas de dois níveis (\mathcal{H}_A). Então, podemos escrever que $A(\lambda \omega) = A(\omega)$ para alguma constante positiva λ . Por isso

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \tilde{\rho}_A(\eta) &= \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega) \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) - A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) \right) \\ &+ \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} W_{ji}^{*(\beta\alpha)}(a_\beta \omega) \left(A_j^{(\beta)}(\omega) \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) - \tilde{\rho}_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde realizamos a mudança $i \longleftrightarrow j$ e $\alpha \longleftrightarrow \beta$ no segundo termo do lado direito. Agora podemos reescrever nossas grandezas na representação de Schrödinger, $\tilde{\rho}_A(\eta) = e^{i\mathcal{H}_A \eta} \rho_A(\eta) e^{-i\mathcal{H}_A \eta}$, também

$$e^{i\mathcal{H}_A \eta} A_i^{(\alpha)}(\omega) e^{-i\mathcal{H}_A \eta} = e^{-i\omega \eta} A_i^{(\alpha)}(\omega), \quad (4.29)$$

e, definindo as funções

$$\Gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) = W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) + W_{ji}^{*(\beta\alpha)}(a_\beta\omega), \quad (4.30)$$

$$\Delta_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) = \frac{W_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) - W_{ji}^{*(\beta\alpha)}(a_\beta\omega)}{2i}, \quad (4.31)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_A(\eta) = & -i [\mathcal{H}_A, \rho_A(\eta)] - i \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \Delta_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) [A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega), \rho_A(\eta)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) \left(2A_j^{(\beta)}(\omega) \rho_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) - \{A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega), \rho_A(\eta)\} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $\dot{F} = dF/d\eta$ e o comutador e anti-comutador de operadores C, D são definidos da maneira usual

$$\begin{aligned} [C, D] & \equiv CD - DC \\ \{C, D\} & \equiv CD + DC. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Definimos a seguinte Hamiltoniana efetiva

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \equiv \mathcal{H}_A + \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \Delta_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega), \quad (4.34)$$

que descreve a evolução unitária do sistema. O termo $\Delta_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega)$ produz uma contribuição divergente em \mathcal{H}_{eff} – esse é o conhecido *desvio de Lamb*, ao qual é esperado de acontecer devido ao acoplamento com os campos. O surgimento de tais divergências estão associadas com o tratamento não relativístico do subsistema A – um processo de renormalização, então, é necessário [32]. Entretanto, observe que tal contribuição apenas afeta o termo de evolução unitária da equação. Como neste trabalho estamos interessados apenas na dinâmica de emaranhamento, que não é afetada pelo desvio Lamb, não discutiremos tal renormalização aqui. De qualquer forma, enfatizamos a importância do tratamento de tal contribuição à evolução unitária do subsistema A . Uma discussão sobre o tópico é dada na referência [32].

A partir daqui, obtemos a forma padrão da equação mestra generalizada que descreve a evolução temporal dos átomos viajando ao longo de diferentes linhas de universo:

$$\dot{\rho}_A(\eta) = -i [\mathcal{H}_{\text{eff}}, \rho_A(\eta)] + \mathcal{L} \{ \rho_A(\eta) \}, \quad (4.35)$$

onde o termo $\mathcal{L} \{ \rho_A(\eta) \}$, a contribuição dissipativa da equação mestra generalizada, é dada por

$$\mathcal{L} \{ \rho_A(\eta) \} = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}(a_\beta, \omega) \left(2A_j^{(\beta)}(\omega) \rho_A(\eta) A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) - \{A_i^{\dagger(\alpha)}(\omega) A_j^{(\beta)}(\omega), \rho_A(\eta)\} \right). \quad (4.36)$$

Como já discutimos, é o termo não unitário $\mathcal{L}\{\rho_A(\eta)\}$ que é responsável pelos efeitos de decoerência tal como a criação de emaranhamento. Observe a generalidade da derivação desta equação mestra, ela pode ser aplicada para um campo escalar e também para um campo vetorial.

4.3 Equação mestra generalizada para um par de sistemas de dois níveis

Vamos agora especificar a equação mestra generalizada para um caso particular. Aqui vamos obter uma generalização dos resultados obtidos na Ref. [32]. Consideramos o caso de um par de sistemas de dois níveis idênticos interagindo com um campo escalar quântico não massivo $\phi(x)$. O parâmetro que escolhermos para descrever a evolução temporal do sistema é o tempo próprio (τ) de um dos sistemas de dois níveis. As contribuições para a Hamiltoniana do sistema podem ser escritas na forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{int} \quad (4.37)$$

onde

$$\mathcal{H}_A = \frac{\omega_0}{2} \left[S_{(1)}^z \otimes \mathbb{1}_2 \frac{d\tau_1(\tau)}{d\tau} + \mathbb{1}_1 \otimes S_{(2)}^z \frac{d\tau_2(\tau)}{d\tau} \right], \quad (4.38)$$

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[(\dot{\phi}(x))^2 + (\nabla\phi(x))^2 \right], \quad (4.39)$$

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{j=1}^2 \mu_j m^{(j)}(\tau_j(\tau)) \phi[x_j(\tau_j(\tau))] \frac{d\tau_j(\tau)}{d\tau}. \quad (4.40)$$

Os operadores de Raising e lowering $S_{(j)}^\pm$, que atuam no subespaço dos sistema de dois níveis j , são dados por

$$S_{(j)}^+ = |e_j\rangle \langle g_j|; \quad S_{(j)}^- = |g_j\rangle \langle e_j|. \quad (4.41)$$

O operador diagonal $S_{(j)}^z$ é

$$S_{(j)}^z = \frac{1}{2} (|e_j\rangle \langle e_j| - |g_j\rangle \langle g_j|). \quad (4.42)$$

Além disso, μ_j é a constante de acoplamento que descreve a interação do sistema de dois níveis j com o campo quântico e $m^{(j)}$ é o operador momento de monopólo do sistema de dois níveis, dado por

$$m^{(j)}(\tau_j(\tau)) = S_{(j)}^+ e^{i\omega_0\tau_j(\tau)} + S_{(j)}^- e^{-i\omega_0\tau_j(\tau)}. \quad (4.43)$$

Por simplicidade, adotamos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Gostaríamos de estudar a situação em que ambos os sistemas de dois níveis estão em linhas de universo uniformemente aceleradas. Sabe-se que as coordenadas desses sistemas de dois níveis são dadas pelas chamadas

coordenadas de Rindler. Essas coordenadas para aceleração uniforme ocorrendo apenas na direção x — podem ser expressas como²

$$t = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\eta), \quad x = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\eta). \quad (4.44)$$

A aceleração própria é definida por $\alpha^{-1} = ae^{-a\xi}$ e o tempo próprio é associado com η e ξ pela relação

$$\tau = e^{a\xi}\eta.$$

Observe que esse parâmetro η não necessariamente é o mesmo η da seção anterior, apesar de que em princípio estamos livres para fazer tal escolha. Consideramos que os sistemas de dois níveis estão viajando ao longo de diferentes trajetórias hiperbólicas $x^\mu(\tau_1) = (t(\tau_1), x(\tau_1), y_1, z_1)$ e $x^\mu(\tau_2) = (t(\tau_2), x(\tau_2), y_2, z_2)$, as quais a dependência funcional $t(\tau_i), x(\tau_i)$ é dada pelas equações similares às Eqs. (4.44).

Agora identificamos o parâmetro de evolução no tempo da equação mestra generalizada derivada na seção anterior com o tempo próprio de um dos sistemas de dois níveis. Isso nos permite realizar uma simples mudança de variáveis na equação mestra generalizada. No entanto, lembre-se de que temos dois tempos próprios diferentes à nossa disposição. No entanto, considerando que as duas hipérbolas diferentes estão no mesmo ramo de Rindler, elas são cortadas por uma única linha de coordenada de Rindler constante η , o que significa que temos uma relação simples entre os tempos próprios dos sistemas de dois níveis. A seguir é conveniente escolher o tempo próprio τ_1 como o parâmetro que descreve a evolução temporal do sistema. Usando métodos padrão, podemos relacionar o outro tempo próprio τ_2 com τ_1 . Essa relação é dada por

$$\tau_2(\tau_1) = \tau_1 e^{a(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tau_1, \quad (4.45)$$

e, então, as constantes a_β que usamos na Eq. (4.19) podem ser escritas como $a_1 = 1$ e $a_2 = \alpha_2/\alpha_1$. Observe que, nessa situação de tempos de Rindler iguais (mas hipérbolas diferentes e, como consequência, tempos próprios distintos), os dois sistemas de dois níveis estão sempre separados por uma distância do tipo espaço, mesmo que estejam no mesmo ramo de Rindler.

Por outro lado, como estamos lidando com um campo escalar, a soma i, j é removida. Além disso, os operadores A devem ser identificados com os operadores de escada S^\pm . Em seguida, escrevemos a equação mestra generalizada como

$$\frac{d\rho_A(\tau)}{d\tau} = -i[\mathcal{H}_{\text{eff}}, \rho_A(\tau)] + \mathcal{L}\{\rho_A(\tau)\}, \quad (4.46)$$

² Aqui escolhemos uma forma diferente mas equivalente àquela utilizada na seção 2.5. Essa escolha é padrão quando lidamos com sistemas em diferentes linhas de universo para podermos descrever todos pelo mesmo parâmetro como foi requerido por nossa derivação da equação mestra.

com $\tau \equiv \tau_1$, onde a contribuição dissipativa é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\rho_A(\tau)\} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) \\ &\times \left(2S_{(\beta)}^- \rho_A(\tau) S_{(\alpha)}^+ - \left\{ S_{(\alpha)}^+ S_{(\beta)}^-, \rho_A(\tau) \right\} \right) + (\omega \rightarrow -\omega), \end{aligned} \quad (4.47)$$

com \mathcal{H}_{eff} sendo dada por

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_A + \sum_{\alpha, \beta} \Delta^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) S_{(\alpha)}^+ S_{(\beta)}^- + (\omega \rightarrow -\omega). \quad (4.48)$$

As funções $\Gamma(x)$ e $\Delta(x)$ são dadas pelas Eqs. (4.30) e (4.31), removendo a dependência dos índices i e j . Encontramos

$$W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = a_\alpha a_\beta \int_0^\infty ds e^{i\omega a_\beta s} G^{+(\alpha\beta)}(s), \quad (4.49)$$

onde $G^{+(\alpha\beta)}(s)$ é a função de Wightman das frequências positivas que pode ser calculada através da Eq. (2.34).

Para calcular $\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega)$, primeiro encontramos as funções $G^{+(\alpha\beta)}(s)$ e, por consequência, $W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega)$. A função de Wightman das frequências positivas para um campo escalar real e não massivo no espaço-tempo de Minkowski é dada por

$$G^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{[(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2]}. \quad (4.50)$$

Como exigimos que os átomos estejam em um movimento uniformemente acelerado acoplado a um campo escalar preparado no vácuo de Minkowski $|0, M\rangle$, o procedimento é mudar as coordenadas inerciais (x, x') na Eq. (4.50) para as coordenadas de Rindler usando as expressões definidas acima [5]. Ao fazer isso temos, para o termo usual representado por $\alpha = \beta$

$$G^{+(\beta\beta)}(s) = -\frac{1}{16\pi^2 \alpha_\beta^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{2\alpha_1}(s - 2i\epsilon)\right)}, \quad (4.51)$$

e para os termos cruzados, $\alpha \neq \beta$, temos $G^{+(12)}(s) = G^{+(21)}(s) = G_c^+(s)$, onde

$$\begin{aligned} G_c^+(s) &= -\frac{1}{16\pi^2 \alpha_1 \alpha_2} \left[\sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\phi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\phi}{2}\right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

com a seguinte definição

$$\cosh \phi = 1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + |\Delta\mathbf{y}|^2}{2\alpha_1 \alpha_2}, \quad (4.53)$$

onde $|\Delta\mathbf{y}|^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2$ é a distância ortogonal (ao plano (t, x)) entre os sistemas de dois níveis a qual assumimos ser constante. Observe que o termo ϵ deve ser mantido

finito para que as entradas físicas nos sistemas de dois níveis não sejam incompatíveis com as condições usuais impostas à função de distribuição de Wightman. É somente neste caso que o limite de comutação acentuada é bem definido - ele é válido como uma aproximação válida para intervalos de energia fixos quando o intervalo de tempo próprio é muito maior que o ϵ [5].

Vamos calcular as diferentes contribuições para a dinâmica separadamente. Observe que

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) &= W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) + W^{*(\beta\alpha)}(a_\beta\omega) \\ &= a_\alpha a_\beta \int_0^\infty ds e^{i\omega a_\beta s} G^{+(\alpha\beta)}(s) + a_\beta a_\alpha \int_0^\infty ds e^{-i\omega a_\beta s} G^{+(\beta\alpha)}(s).\end{aligned}\quad (4.54)$$

Realizando a mudança $s \rightarrow -s$ na segunda integral e observando que $G^{+(\beta\alpha)}(-s) = G^{+(\alpha\beta)}(s)$ nós temos

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = a_\alpha a_\beta \int_{-\infty}^\infty ds e^{i\omega a_\beta s} G^{+(\alpha\beta)}(s).\quad (4.55)$$

Os cálculos explícitos da Eq. (4.55) é dada no Apêndice A.1. Nós temos então

$$\Gamma^{(\beta\beta)}(a_\beta\omega) = \Gamma^{(\beta\beta)}(\omega) = \frac{\omega\alpha_\beta}{2\pi\alpha_1} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega\alpha_\beta}} \right),\quad (4.56)$$

e a contribuição dos termos cruzados

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = \Gamma^{(\alpha\beta)}(\omega) = \frac{\sin(\omega\alpha_\beta\phi)}{2\pi\alpha_1 \sinh\phi} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega\alpha_\beta}} \right).\quad (4.57)$$

É útil escrever a Eq. (4.46) em termos dos operadores de pseudo-spin usando que $S_{(\alpha)}^+ = S_{(\alpha)}^1 + iS_{(\alpha)}^2$ e $S_{(\alpha)}^- = S_{(\alpha)}^1 - iS_{(\alpha)}^2$, onde $S_{(1)}^i = \sigma^i \otimes \sigma^0$ e $S_{(2)}^i = \sigma^0 \otimes \sigma^i$ com σ^i a matriz de Pauli i [76]. A contribuição dissipativa pode ser escrita como (a partir de agora, como só estamos interessados na dinâmica do subsistema A , vamos omitir o índice A da matriz densidade ρ_A)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\rho(\tau)\} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \mathcal{C}_{ij}^{(\alpha\beta)} \left[2S_{(\beta)}^j \rho(\tau) S_{(\alpha)}^i \right. \\ &\quad \left. - \{S_{(\alpha)}^i S_{(\beta)}^j, \rho(\tau)\} \right],\end{aligned}\quad (4.58)$$

com a matriz de Kossakowski $\mathcal{C}_{ij}^{(\alpha\beta)}$ definida como

$$\mathcal{C}_{ij}^{(\alpha\beta)} = A^{(\alpha\beta)} \delta_{ij} - iB^{(\alpha\beta)} \epsilon_{ijk} \delta_{3k} - A^{(\alpha\beta)} \delta_{3i} \delta_{3j}.\quad (4.59)$$

Também definimos as seguintes funções

$$A^{(\alpha\beta)} = \frac{\mu^2}{4} \left(\Gamma^{(\alpha\beta)}(\omega) + \Gamma^{(\alpha\beta)}(-\omega) \right),\quad (4.60)$$

$$B^{(\alpha\beta)} = \frac{\mu^2}{4} \left(\Gamma^{(\alpha\beta)}(\omega) - \Gamma^{(\alpha\beta)}(-\omega) \right).\quad (4.61)$$

Usando as equações (4.56) e (4.57) podemos calcular explicitamente as funções dadas pelas equações (4.60) e (4.61). Para $\alpha = \beta$ temos

$$A^{(\beta)} = A^{(\beta\beta)} = \Gamma_0 \frac{\alpha_\beta}{4\alpha_1} \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi\alpha_\beta\omega} - 1} \right), \quad (4.62)$$

$$B^{(\beta)} = B^{(\beta\beta)} = \Gamma_0 \frac{\alpha_\beta}{4\alpha_1}, \quad (4.63)$$

e para $\alpha \neq \beta$,

$$A^{(\alpha\beta)} = \Gamma_0 \frac{\sin(\omega\alpha_\beta\phi)}{4\omega\alpha_1 \sinh \phi} \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi\alpha_\beta\omega} - 1} \right), \quad (4.64)$$

$$B^{(\alpha\beta)} = \Gamma_0 \frac{\sin(\omega\alpha_\beta\phi)}{4\omega\alpha_1 \sinh \phi}, \quad (4.65)$$

onde introduzimos o termo $\Gamma_0 = \mu^2\omega/2\pi$ que é a taxa de emissão espontânea.

5 Dinâmica de Emaranhamento: Campo Escalar

Para descrever a dinâmica de emaranhamento podemos ignorar a contribuição não unitária dada pela Eq. (4.48). Escrevemos a parte dissipativa (4.58) na base $\{|1\rangle = |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle, |2\rangle = |e_1\rangle \otimes |e_2\rangle, |3\rangle = |g_1\rangle \otimes |e_2\rangle, |4\rangle = |e_1\rangle \otimes |g_2\rangle\}$. Pode-se provar que se assumirmos uma forma diagonal em blocos da matriz densidade em $\tau = 0$ a evolução de $\rho(\tau)$ preserva essa forma de diagonal em bloco. Portanto, assumimos que a matriz densidade na base acima mencionada tem a forma

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & 0 & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & \rho_{34} \\ 0 & 0 & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

O problema se simplifica se trabalharmos na base coletiva do sistema. Para sistemas idênticos de dois níveis, tal base é dada por

$$|G\rangle = |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle, \quad (5.2)$$

$$|E\rangle = |e_1\rangle \otimes |e_2\rangle, \quad (5.3)$$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle \otimes |e_2\rangle + |e_1\rangle \otimes |g_2\rangle), \quad (5.4)$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle \otimes |g_2\rangle - |g_1\rangle \otimes |e_2\rangle), \quad (5.5)$$

e obtemos, que nesta base a matriz densidade ainda continua na forma de diagonal em bloco como

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} \rho_{GG} & \rho_{GE} & 0 & 0 \\ \rho_{EG} & \rho_{EE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{SS} & \rho_{SA} \\ 0 & 0 & \rho_{AS} & \rho_{AA} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

com $\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle$. Calculamos os elementos da matriz da equação mestra generalizada dada pela Eq. (4.46) na base acima mencionada. Obtemos oito equações diferenciais lineares acopladas envolvendo todos as componentes da matriz da Eq. (5.6). Como estamos lidando com uma situação mais geral do que as estudadas nas Refs. [32, 33], nosso conjunto de equações é mais complexo e é apresentado no apêndice B. Observamos das Eqs. (B.1-B.8) que se tomarmos $\alpha_1 = \alpha_2$, *i.e.*, definimos ambos os sistemas de dois níveis na mesma linha de universo, então temos $A^{(11)} = A^{(22)}$, $B^{(11)} = B^{(22)}$, $A^{(12)} = A^{(21)}$ e $B^{(12)} = B^{(21)}$. Isso simplifica o conjunto de equações e recuperamos o resultado anterior da literatura

[32, 33, 77]. Portanto, como esperado, o caso em que os sistemas de dois níveis estão com a mesma aceleração própria é um caso especial da equação mestra derivada neste trabalho.

O problema segue tratando o sistema de dois níveis como um único sistema de quatro níveis. Em seguida, devemos estudar quanto de emaranhamento é armazenado neste sistema quântico. Existem muitas alternativas para prosseguir com este estudo. Escolhemos aqui calcular a *concorrência* deste sistema. A concorrência $C(\rho)$ é uma função dos autovalores da matriz $R = \rho\tilde{\rho}$, com $\tilde{\rho}$ dado por

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^T \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad (5.7)$$

que possui valor $C = 1$ para estados maximamente emaranhados e $C = 0$ para estados separáveis. Na base dada pelas Eqs. (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) nós temos a seguinte forma para a concorrência [33, 78]

$$C[\rho(\tau)] = \max \{0, \mathcal{C}_1(\tau), \mathcal{C}_2(\tau)\}, \quad (5.8)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\tau) = & \sqrt{[\rho_{AA}(\tau) - \rho_{SS}(\tau)]^2 - [\rho_{AS}(\tau) - \rho_{SA}(\tau)]^2} \\ & - 2\sqrt{\rho_{GG}(\tau)\rho_{EE}(\tau)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(\tau) = & -\sqrt{[\rho_{AA}(\tau) + \rho_{SS}(\tau)]^2 - [\rho_{AS}(\tau) + \rho_{SA}(\tau)]^2} \\ & + 2|\rho_{GE}(\tau)|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Na sequência, resolvemos numericamente a contribuição dissipativa da equação mestra generalizada para diferentes configurações iniciais dos sistemas de dois níveis e usamos esta solução para avaliar a concorrência da Eq. (5.8) para estudarmos a dinâmica de emaranhamento deste sistema.

5.1 Degradação de Emaranhamento

Vamos primeiro considerar o sistema como inicialmente em um estado maximamente emaranhado e calcular sua evolução. É conhecido que esta configuração fornece o cenário para estudar um fenômeno chamado *degradação de emaranhamento*. O interesse em investigar isso está no fato de que a degradação do emaranhamento para átomos acelerados se comportará diferentemente dos átomos inerciais devido ao efeito Unruh [79]. Este fenômeno pode ser investigado usando como estado inicial o estado simétrico $|S\rangle$ ou o estado antissimétrico $|A\rangle$. É importante ressaltar que muitos trabalhos consideram uma distância ortogonal não trivial $|\Delta\mathbf{y}|$ entre os sistemas de dois níveis [33, 77]. No presente estudo, esse efeito pode ser observado como uma mudança na função ϕ definida pela Eq. (4.53). Observamos que essa modificação leva a uma mudança na concorrência que

é irrelevante em comparação com a mudança na aceleração própria dos sistemas de dois níveis. Por este motivo optamos por trabalhar com $|\Delta\mathbf{y}|^2 = 0$.

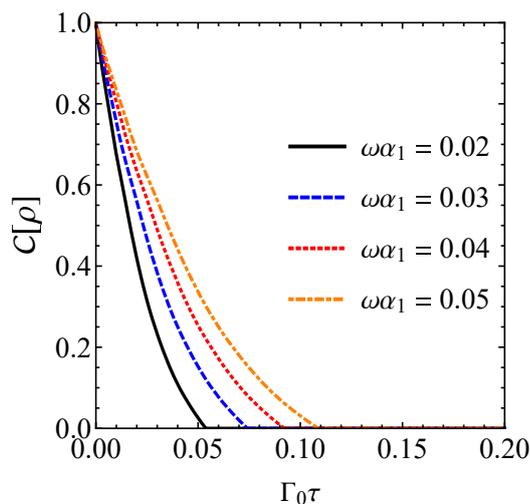


Figura 1 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $|S\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.6$.

Para o sistema preparado no estado simétrico os resultados são mostrados na Fig. 1, onde fixamos o valor da aceleração do segundo sistema de dois níveis (α_2^{-1}) e variamos a aceleração do primeiro sistema de dois níveis (α_1^{-1}). Na Fig. 2 usamos o estado antissimétrico como o estado inicial do sistema onde α_2 é fixo e variamos α_1 . Observamos que a degradação do emaranhamento ocorre mais rapidamente para o sistema preparado no estado $|S\rangle$. Além disso, observe a degradação do emaranhamento em estágio inicial desenvolvido pelo sistema de dois níveis – o perfil visto na degradação das correlações dos sistemas de dois níveis pelo ruído do ambiente é compatível com o conhecido efeito de morte súbita do emaranhamento [80]. Por morte súbita, dizemos qualquer degradação do emaranhamento que ocorre em um tempo finito. Tais resultados estão de acordo com os resultados apresentados na Ref. [77].

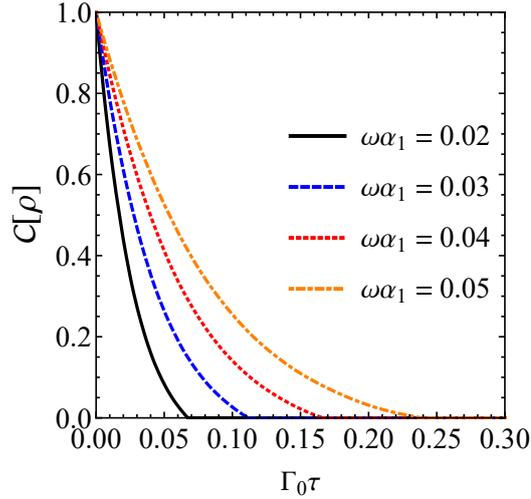


Figura 2 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $|A\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.6$.

A equação mestra derivada neste trabalho nos permite investigar como ocorre o emaranhamento quando os sistemas de dois níveis estão em linhas de mundo distintas, *i.e.*, para diferentes valores de α_i . Aqui consideramos $\alpha_1 \neq \alpha_2$ mas observe que para $\alpha_1 = \alpha_2$ a equação mestra é a mesma usada na Ref. [32] e, portanto, obtemos os mesmos resultados. Por construção temos $\alpha_2 \geq \alpha_1$ e discutimos como o emaranhamento se comporta quando variamos ambas as acelerações próprias. Na Fig. 3 temos para um valor fixo do parâmetro de tempo $\Gamma_0\tau$ os valores que a concorrência $C(\tau)$ assume para diferentes valores de α_1 e α_2 . Observamos que à medida que ambas as acelerações diminuem (à medida que α_i aumenta), o tempo de vida do estado emaranhado aumenta.

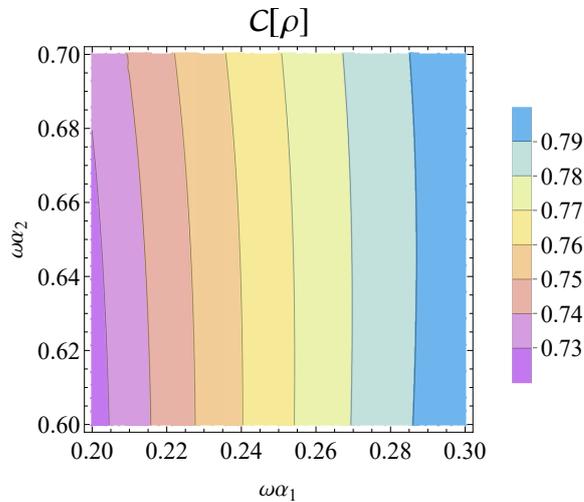


Figura 3 – Comparação da degradação de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$ e $\omega\alpha_2$. O estado inicial foi escolhido como $|S\rangle$ e fixamos $\Gamma_0\tau = 0.05$.

5.2 Colheita de Emaranhamento

Outro fenômeno interessante é o chamado *colheita de emaranhamento* [81]. Esse fenômeno ocorre quando um sistema é preparado em um estado separável e, devido à interação dos átomos com o campo, cria-se um estado atômico emaranhado. Como discutido acima, para um campo escalar sem massa, o sistema está realmente colhendo emaranhamento do campo somente se os sistemas de dois níveis estiverem separados por uma distância do tipo espaço [82]. Lembre-se de que, em nosso sistema, temos um par de sistemas de dois níveis viajando ao longo de diferentes hipérbolas, ou seja, com diferentes acelerações próprias, mas ao longo de linhas de tempo de Rindler constante. Portanto, eles estão de fato separados por uma distância semelhante ao espaço. Neste cenário, podemos afirmar definitivamente que o emaranhamento que está sendo gerado deve vir da colheita de emaranhamento. Para estudar este fenômeno dentro do nosso formalismo preparamos o sistema de dois níveis no estado $|G\rangle$ ou no estado $|E\rangle$. Observamos na Fig. 4 que, para o estado inicial sendo $|G\rangle$, um estado emaranhado pode ser criado e a concorrência aumenta com o valor de α_1 . Um resultado interessante é que o emaranhamento só é criado por valores menores de α_1^{-1} em comparação com o caso anterior. Se empregarmos a mesma configuração usada na discussão da degradação do emaranhamento, não podemos observar nenhum estado emaranhado sendo criado, então $C[\rho(\tau)] = 0$ nesta configuração.

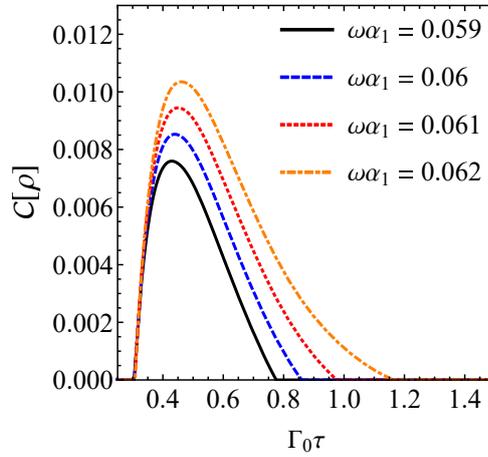


Figura 4 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $|G\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.58$.

Ao definir o estado inicial como $|E\rangle$, obtemos os resultados ilustrados na Fig. 5. Observamos que o estado emaranhado só é criado diminuindo significativamente a aceleração do segundo sistema de dois níveis α_2^{-1} . Além disso, o fenômeno da colheita de emaranhamento ocorre apenas para pequenos valores dessa aceleração. Nesta situação, observamos que só temos estados emaranhados para $\alpha_2 \gg \alpha_1$ – observamos que esse estado emaranhado tem vida curta. Além disso, quando aumentamos o valor de α_1 , o emaranhamento associado aumenta. É importante ressaltar que embora α_2 seja o parâmetro

que mais auxilia a colheita do emaranhamento, esse fenômeno ocorre apenas para valores relativamente altos também para α_1 . Esta dificuldade em criar estado emaranhado está de acordo com os resultados discutidos na Ref. [77].

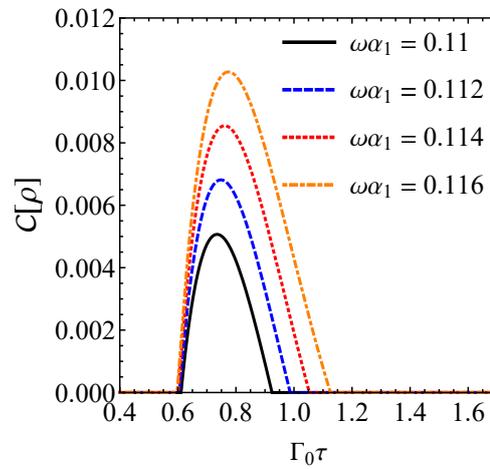


Figura 5 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $|E\rangle$. Usamos $\omega\alpha_2 = 0.1$.

Como discutido acima, nossa equação mestra generalizada nos permite estudar como o emaranhamento criado evolui quando examinamos valores diferentes para ambas as acelerações próprias. Na Fig. 6 consideramos um parâmetro fixo $\Gamma_0\tau$ quando a concorrência atinge seu valor máximo. Para ter um resultado não trivial, definimos valores para α_2 muito maiores que α_1 . Um trabalho interessante que estuda como a aceleração pode auxiliar na colheita de emaranhamento é apresentado na Ref. [28]. Os autores investigam três cenários de aceleração diferentes usando o modelo de detector de partículas Unruh-DeWitt - esta é a principal diferença entre o procedimento que usamos aqui. Essa configuração do sistema pode agora ser revisitada usando a teoria dos sistemas quânticos abertos e a equação mestre derivada neste artigo.

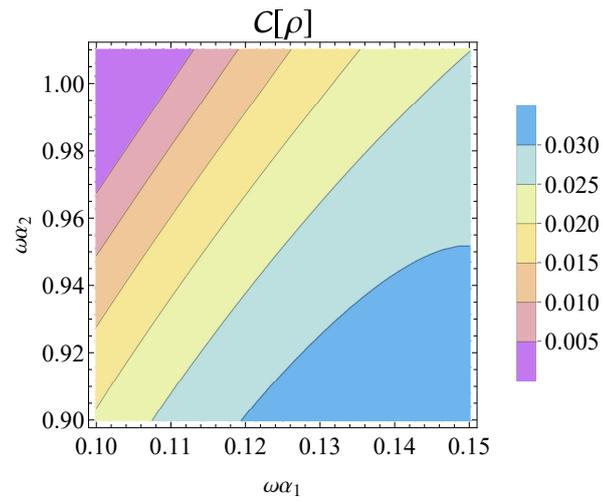


Figura 6 – Comparação da colheita de emaranhamento para diferentes valores de $\omega\alpha_1$. O estado inicial foi escolhido como $|E\rangle$ e fixamos o parâmetro temporal para $\Gamma_0\tau = 0.75$.

6 Conclusões

Neste trabalho, propomos estudar o efeito Unruh-Davies usando a teoria de foto-detecção de Glauber. Existem algumas simplificações em nossa discussão, como o uso de interações pontuais e a ausência de uma função de comutação. Acreditamos que é possível entender o efeito mesmo com tais simplificações. Discutimos o processo de medir os quanta do campo de Rindler por um detector uniformemente acelerado interagindo com um campo escalar massivo. Utilizando a teoria de foto-detecção de Glauber, avaliou-se a taxa de excitação de um detector acelerado interagindo com o campo escalar. Obtivemos o resultado de que um detector uniformemente acelerado acoplado a um campo no estado de vácuo de Minkowski tem a mesma taxa de transição de um detector acelerado interagindo com o campo em uma térmica de Rindler em alguma temperatura β^{-1} .

Nossos resultados mostram que uma interpretação inercial dos processos radiativos associados a observadores em repouso no referencial do detector uniformemente acelerado está presente no formalismo de Glauber. Em outras palavras, mostramos como o observador inercial interpreta a excitação do detector acelerado. A diferença fundamental entre o detector Unruh-DeWitt e o detector de Glauber é a contribuição proveniente de F_2 . Apresentamos argumentos detalhados acima que mostraram que tal termo não contribui de fato para a taxa de excitação para grandes intervalos de tempo de observação.

Também usando a teoria de Glauber de foto-detecção, discutimos um modelo com estados de vácuo unitários não equivalentes no passado remoto em um futuro distante. Este detector apresenta um comportamento semelhante ao detector interagindo com um campo em um cenário de colapso gravitacional. Para o caso sem massa, obtivemos que a taxa de probabilidade de transição do detector no futuro distante é equivalente à taxa de probabilidade de transição do detector em repouso em um referencial não inercial interagindo com o campo preparado em um estado térmico usual. Nesse cenário, a introdução de uma condição de contorno permite investigar como gerar o vácuo de Fulling.

Usando a teoria de sistemas quânticos abertos, fomos capazes de derivar uma equação mestra generalizada para um sistema de dois níveis viajando ao longo de linhas de universo diferentes. Também estabelecemos uma forma generalizada da equação de Lindblad-Kossakowski e fizemos uso do formalismo matricial de Kossakowski. Observamos que esta equação tem uma forma semelhante à usada para sistemas de dois níveis nas mesmas linhas do universo. A distinção crucial aqui se baseia na função dada pela Eq. (4.30), que nos permite investigar como as diferenças nas acelerações apropriadas dos sistemas de dois níveis afetam a dinâmica do emaranhamento.

Estudamos o fenômeno da degradação do emaranhamento e observamos que à

medida que a aceleração própria dos sistemas de dois níveis diminui, o tempo de vida do estado emaranhado aumenta, de acordo com o efeito Unruh-Davies. Em particular, o estado emaranhado antissimétrico apresenta uma decoerência mais lenta em comparação com o estado emaranhado simétrico. De qualquer forma, pudemos observar a ocorrência da morte súbita do emaranhamento em todas as situações estudadas. Por outro lado, também observamos que a colheita de emaranhamento também é possível neste cenário e investigamos sua dependência dos valores da aceleração própria de ambos os sistemas de dois níveis. Demonstramos que um sistema quântico inicialmente preparado no estado fundamental suporta o emaranhamento por mais tempo em comparação com um sistema preparado inicialmente no estado separável excitado. Além disso, a criação de emaranhamento é favorecida quando o sistema sofre pequenos valores de acelerações.

O formalismo desenvolvido neste trabalho nos fornece uma nova forma de entender a dinâmica do emaranhamento em referenciais não inerciais. O procedimento usado aqui pode ser usado para estudar uma situação mais física, por exemplo, um par de dipolos interagindo com o campo eletromagnético, e situações ainda mais complexas, como sistemas de dois níveis em diferentes regiões do espaço-tempo em um buraco negro de Kerr. Esses assuntos estão sob investigação pelos autores.

Referências

- 1 SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.
- 2 WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. 1972. Citado na página 21.
- 3 BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. Cambridge university press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 75.
- 4 MENEZES, G.; SVAITER, N. F. Radiative processes of uniformly accelerated entangled atoms. *Phys. Rev. A*, v. 93, n. 5, p. 052117, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 36.
- 5 RODRÍGUEZ-CAMARGO, C. D.; SVAITER, N. F.; MENEZES, G. Finite-time response function of uniformly accelerated entangled atoms. *Annals Phys.*, v. 396, p. 266–291, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 21, 54 e 55.
- 6 ARIAS, E. et al. Boundary effects on radiative processes of two entangled atoms. *JHEP*, v. 07, p. 147, 2016. Citado na página 21.
- 7 MENEZES, G.; SVAITER, N. F.; ZARRO, C. A. D. Entanglement dynamics in random media. *Phys. Rev. A*, v. 96, n. 6, p. 062119, 2017. Citado na página 21.
- 8 PICANÇO, G.; SVAITER, N. F.; ZARRO, C. A. D. Radiative processes of entangled detectors in rotating frames. *JHEP*, v. 08, p. 025, 2020. Citado na página 21.
- 9 ZHOU, W.; YU, H. Radiation-reaction-induced transitions of two maximally entangled atoms in noninertial motion. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 101, p. 025009, Jan 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.025009>>. Citado na página 21.
- 10 FULLING, S. A. *Scalar Quantum Field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature*. Tese (Ph.D. thesis) — Princeton University, 1972. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1969.1/187150>>. Citado na página 21.
- 11 DAVIES, P. C. Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 8, n. 4, p. 609, 1975. Citado na página 21.
- 12 UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 4, p. 870, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 34.
- 13 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, Aug 1975. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 34.
- 14 DEWITT, B. S. Quantum Field Theory in Curved Spacetime. *Phys. Rep.*, Elsevier Science, v. 19, n. 6, p. 295–357, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 34.

- 15 GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, APS, v. 130, n. 6, p. 2529, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 33.
- 16 GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, APS, v. 131, n. 6, p. 2766, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 33.
- 17 NUSSENZVEIG, H. M. *Introduction to Quantum Optics*. New York, NY: Gordon and Breach, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 38.
- 18 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 22.
- 19 MANN, R.; FUENTES-SCHULLER, I. Quantum entanglement in noninertial frames. *Physics Essays*, Physics Essays Publication PO BOX 8141 STATION T, OTTAWA, ONTARIO K1G 3H6 . . . , v. 21, n. 1, p. 1, 2008. Citado na página 23.
- 20 ALSING, P. M.; FUENTES, I. Observer-dependent entanglement. *Class. Quantum Grav.*, IOP Publishing, v. 29, n. 22, p. 224001, oct 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/22/224001>>. Citado na página 23.
- 21 SALTON, G.; MANN, R. B.; MENICUCCI, N. C. Acceleration-assisted entanglement harvesting and ranging. *New J. Phys.*, IOP Publishing, v. 17, n. 3, p. 035001, mar 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/3/035001>>. Citado na página 23.
- 22 GALLOCK-YOSHIMURA, K.; TJOA, E.; MANN, R. B. Harvesting entanglement with detectors freely falling into a black hole. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 025001, Jul 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.025001>>. Citado na página 23.
- 23 POZAS-KERSTJENS, A.; MARTÍN-MARTÍNEZ, E. Harvesting correlations from the quantum vacuum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 92, p. 064042, Sep 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.064042>>. Citado na página 23.
- 24 TJOA, E.; MARTÍN-MARTÍNEZ, E. When entanglement harvesting is not really harvesting. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 125005, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.125005>>. Citado na página 23.
- 25 ZAMBIANCO, M. H.; LANDULFO, A. G. S.; MATSAS, G. E. A. Observer dependence of entanglement in nonrelativistic quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 100, p. 062126, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.062126>>. Citado na página 23.
- 26 ZHANG, J.; YU, H. Entanglement harvesting for unruh-dewitt detectors in circular motion. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 102, p. 065013, Sep 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.065013>>. Citado na página 23.
- 27 CONG, W. et al. Effects of horizons on entanglement harvesting. *JHEP*, Springer, v. 2020, n. 10, p. 1–19, 2020. Citado na página 23.
- 28 LIU, Z. et al. Does acceleration assist entanglement harvesting? *arXiv preprint arXiv:2111.04392*, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 62.

- 29 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. et al. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 45.
- 30 KRYSZEWSKI, S.; CZECHOWSKA-KRYSZK, J. Master equation-tutorial approach. *arXiv preprint arXiv:0801.1757*, 2008. Citado na página 23.
- 31 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics, volume 2. *Quantum Mechanics*, v. 2, p. 626, 1986. Citado na página 23.
- 32 BENATTI, F.; FLOREANINI, R. Entanglement generation in uniformly accelerating atoms: Reexamination of the unruh effect. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 70, p. 012112, Jul 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.012112>>. Citado 6 vezes nas páginas 23, 51, 52, 57, 58 e 60.
- 33 YANG, Y.; HU, J.; YU, H. Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms coupled with electromagnetic vacuum fluctuations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 94, p. 032337, Sep 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.032337>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 57 e 58.
- 34 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 2245–2248, Mar 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>>. Citado na página 23.
- 35 PESKIN, M. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 28.
- 36 DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2020. Citado na página 28.
- 37 RINDLER, W. Kruskal space and the uniformly accelerated frame. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 34, n. 12, p. 1174–1178, 1966. Citado na página 30.
- 38 BALIAN, R. *From Microphysics to Macrophysics, vol. 1 (translated by D. ter Haar and JF Gregg)*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1991. Citado na página 32.
- 39 MANDEL, L.; SUDARSHAN, E. G.; WOLF, E. Theory of photoelectric detection of light fluctuations. *Proceedings of the Physical Society*, IOP Publishing, v. 84, n. 3, p. 435, 1964. Citado na página 33.
- 40 UNRUH, W. G.; WALD, R. M. What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle. *Phys. Rev. D*, APS, v. 29, n. 6, p. 1047, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 41 GINZBURG, V. L.; FROLOV, V. P. Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of a uniformly accelerated detector. *Soviet Physics Uspekhi*, IOP Publishing, v. 30, n. 12, p. 1073, 1987. Citado na página 33.
- 42 BARUT, A.; DOWLING, J. P. Quantum electrodynamics based on self-fields: On the origin of thermal radiation detected by an accelerating observer. *Physical Review A*, APS, v. 41, n. 5, p. 2277, 1990. Citado na página 33.

- 43 BELYANIN, A. et al. Quantum electrodynamics of accelerated atoms in free space and in cavities. *Physical Review A*, APS, v. 74, n. 2, p. 023807, 2006. Citado na página 33.
- 44 SOARES, M. S. et al. Uniformly accelerated quantum counting detector in minkowski and fulling vacuum states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 042225, Apr 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.042225>>. Citado na página 33.
- 45 SVAITER, B. F.; SVAITER, N. F. Inertial and noninertial particle detectors and vacuum fluctuations. *Phys. Rev. D*, APS, v. 46, n. 12, p. 5267, 1992. [Erratum: *Phys. Rev. D* 47, 4802(E) (1993)]. Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 37, 38 e 41.
- 46 SRIRAMKUMAR, L.; PADMANABHAN, T. Response of finite time particle detectors in noninertial frames and curved space-time. *Class. Quant. Grav.*, v. 13, p. 2061–2079, 1996. Citado na página 36.
- 47 AUDRETSCH, J.; MÜLLER, R. Spontaneous excitation of an accelerated atom: The contributions of vacuum fluctuations and radiation reaction. *Phys. Rev. A*, v. 50, p. 1755, 1994. Citado na página 36.
- 48 LIN, S.-Y.; HU, B. L. Accelerated Detector - Quantum Field Correlations: From Vacuum Fluctuations to Radiation Flux. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 124018, 2006. Citado na página 36.
- 49 LIN, S.-Y.; HU, B. L. Backreaction and the Unruh effect: New insights from exact solutions of uniformly accelerated detectors. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 064008, 2007. Citado na página 36.
- 50 ZHU, Z.; YU, H. Fulling–Davies–Unruh effect and spontaneous excitation of an accelerated atom interacting with a quantum scalar field. *Phys. Lett. B*, v. 645, p. 459, 2007. Citado na página 36.
- 51 HU, B. L.; LIN, S.-Y.; LOUKO, J. Relativistic quantum information in detectors–field interactions. *Class. Quantum Grav.*, v. 29, p. 224005, 2012. Citado na página 36.
- 52 MENEZES, G.; SVAITER, N. F. Vacuum fluctuations and radiation reaction in radiative processes of entangled states. *Phys. Rev. A*, v. 92, n. 6, p. 062131, 2015. Citado na página 36.
- 53 FEWSTER, C. J.; JUÁREZ-AUBRY, B. A.; LOUKO, J. Waiting for Unruh. *Class. Quantum Grav.*, v. 33, p. 165003, 2016. Citado na página 36.
- 54 CARBALLO-RUBIO, R. et al. Unruh Effect without Thermalit. *Phys. Rev. Lett.*, v. 123, p. 041601, 2019. Citado na página 36.
- 55 KNIGHT, P.; ALLEN, L. Chapter 4 - coherence functions. In: KNIGHT, P.; ALLEN, L. (Ed.). *Concepts of Quantum Optics*. Pergamon, 1983. p. 44 – 53. ISBN 978-0-08-029160-4. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080291604500099>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- 56 TOLMAN, R. C. On the use of the energy-momentum principle in general relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 35, p. 875–895, Apr 1930. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.35.875>>. Citado na página 40.

- 57 TOLMAN, R. C.; EHRENFEST, P. Temperature equilibrium in a static gravitational field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 36, p. 1791–1798, Dec 1930. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.1791>>. Citado na página 40.
- 58 BISOGNANO, J.; WICHMANN, E. On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field. *J. Math. Phys.*, v. 16, p. 985–1007, 1975. Citado na página 41.
- 59 BISOGNANO, J.; WICHMANN, E. On the Duality Condition for Quantum Fields. *J. Math. Phys.*, v. 17, p. 303–321, 1976. Citado na página 41.
- 60 KUBO, R. Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems. *J. Phys. Soc. Jap.*, v. 12, p. 570–586, 1957. Citado na página 41.
- 61 MARTIN, P. C.; SCHWINGER, J. S. Theory of many particle systems. 1. *Phys. Rev.*, v. 115, p. 1342–1373, 1959. Citado na página 41.
- 62 BOYER, C.; KALNINS, E.; MILLER W., J. Lie Theory and Separation of Variables. 6. The Equation $iU(t) + \Delta^2 U = 0$. *J. Math. Phys.*, v. 16, p. 499, 1975. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118795636>>. Citado na página 42.
- 63 BOYER, C.; KALNINS, E.; MILLER, W. Symmetry and separation of variables for the Helmholtz and Laplace equations. *Nagoya Mathematical Journal*, Cambridge University Press, v. 60, p. 35–80, 1976. Citado na página 42.
- 64 KALNINS, E. G.; JR, W. M. Lie theory and the wave equation in space–time. 3. semisubgroup coordinates. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 18, n. 2, p. 271–280, 1977. Citado na página 42.
- 65 COSTA, I. Separable Coordinates and Particle Creation. I. The Klein-Gordon Equation. *Rev. Bras. Fis.*, v. 17, p. 585–600, 1987. Disponível em: <<http://sbfisica.org.br/bjp/download/v17/v17a36.pdf>>. Citado na página 42.
- 66 COSTA, I.; SVAITER, N. F. Separable Coordinates and Particle Creation III: Accelerating Observers, Rindler’s and Milne Vacuum, I. *Rev. Bras. Fis.*, v. 19, p. 271, 1989. Disponível em: <<http://sbfisica.org.br/bjp/download/v19/v19a33.pdf>>. Citado na página 42.
- 67 COSTA, I. Separable Coordinates and Particle Creation. II: Two new Vacua Related to Accelerating Observers. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 30, n. 4, p. 888–891, 1989. Citado na página 42.
- 68 SVAITER, N. F. *Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-Tempo de Minkowski e em Espaços Curvos*. Tese (Ph.D. thesis) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1989. (In Portuguese). Disponível em: <<http://cbpfindex.cbpf.br/index.php?module=main&moduleFile=pubDetails&pubId=6421&typeId=9>>. Citado na página 42.
- 69 PAOLA, R. D.; SVAITER, N. Radiative processes for Rindler and accelerating observers and the stress - tensor detector. 4 1996. Citado na página 42.
- 70 diSessa, A. Quantization on Hyperboloids and Full Space-time Field Expansion. *Journal of Mathematical Physics*, v. 15, n. 11, p. 1892–1900, nov. 1974. Citado na página 43.

- 71 SOMMERFIELD, C. Quantization on Spacetime Hyperboloids. *Annals Phys.*, v. 84, p. 285–302, 1974. Citado na página 43.
- 72 SOARES, M. S.; SVAITER, N. F.; MENEZES, G. Entanglement dynamics: Generalized master equation for uniformly accelerated two-level systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 106, p. 062440, Dec 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.106.062440>>. Citado na página 45.
- 73 KRYSZEWSKI, S.; CZECHOWSKA-KRYSZK, J. Master equation - tutorial approach. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 49.
- 74 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 48, n. 2, p. 119–130, 1976. Citado na página 50.
- 75 GORINI, V.; KOSSAKOWSKI, A.; SUDARSHAN, E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 17, n. 5, p. 821–825, 1976. Citado na página 50.
- 76 FICEK, Z.; TANAS, R. Entangled states and collective nonclassical effects in two-atom systems. *Phys. Rep.*, v. 372, n. 5, p. 369–443, 2002. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730200368X>>. Citado na página 55.
- 77 HU, J.; YU, H. Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 91, p. 012327, Jan 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.012327>>. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 62.
- 78 TANAS, R.; FICEK, Z. Entangling two atoms via spontaneous emission. *J. opt., B Quantum semiclass. opt.*, IOP Publishing, v. 6, n. 3, p. S90–S97, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/3/015>>. Citado na página 58.
- 79 GALLOCK-YOSHIMURA, K.; MANN, R. B. Entangled detectors nonperturbatively harvest mutual information. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 125017, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.125017>>. Citado na página 58.
- 80 YU, T.; EBERLY, J. H. Sudden death of entanglement. *Science*, v. 323, n. 5914, p. 598–601, 2009. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1167343>>. Citado na página 59.
- 81 POZAS-KERSTJENS, A.; MARTÍN-MARTÍNEZ, E. Harvesting correlations from the quantum vacuum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 92, p. 064042, Sep 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.064042>>. Citado na página 61.
- 82 TJOA, E.; MARTÍN-MARTÍNEZ, E. When entanglement harvesting is not really harvesting. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 125005, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.125005>>. Citado na página 61.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo das funções $\Gamma^{(\alpha\beta)}$

A.1 Cálculo das funções $\Gamma^{(\alpha\beta)}$ para o campo escalar

Para calcularmos a função $\Gamma^{(\alpha\beta)}$ a partir da Eq. (4.54) temos dois caminhos alternativos a serem seguidos. Um deles é calcular diretamente através da transformada de Fourier apresentada na Eq. (4.55). Este procedimento é direto e bastante conhecido na literatura quando estamos lidando com as contribuições para $\alpha = \beta$. Para as contribuições cruzadas, é mais conveniente calcular as funções $W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega)$ e depois usar a Eq. (4.54).

Vamos começar com a contribuição $\alpha = \beta$. Pro simplicidade, escrevemos $\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = \Gamma^{(\beta)}(\omega)$. Usamos a função de Wightman das frequências positivas dada pela Eq.(4.51) na Eq. (4.55) e então

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = -\frac{a_\beta^2}{16\pi^2\alpha_\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{i\omega a_\beta s}}{\sinh^2\left(\frac{1}{2\alpha_1}(s - 2i\epsilon)\right)}. \quad (\text{A.1})$$

Para resolver essa integral usando a identidade [3]

$$\csc^2(\pi x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - k)^2} \quad \text{and} \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{csch} x = i \csc(ix). \quad (\text{A.3})$$

Então a Eq. (A.1) pode ser escrita como

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = -\frac{a_\beta^2\alpha_1^2}{4\pi^2\alpha_\beta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{i\omega a_\beta s}}{(s - 2i\epsilon + 2\pi ik\alpha_1)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Realizando a mudança de variáveis $u = a_\beta s$ na Eq. (A.4) encontramos

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = -\frac{a_\beta^3\alpha_1^2}{4\pi^2\alpha_\beta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{i\omega u}}{(u - 2ia_\beta\epsilon + 2\pi ik\alpha_1 a_\beta)^2}. \quad (\text{A.5})$$

A integral apresentada na Eq. (A.5) pode ser resolvida com a ajuda de métodos de integração de contorno. Nesta integral observamos a existência de pólos de segunda ordem dados por $u = 2ia_\beta\epsilon - 2\pi ik\alpha_1 a_\beta$, onde k é um inteiro. Para diferentes valores de k ($k \geq 0$ e $k < 0$) temos pólos acima e abaixo do plano complexo. Para $\omega > 0$ usamos um semicírculo de raio R que fechamos na metade superior do plano ($\operatorname{Im}[u] \geq 0$). Este contorno envolve os pólos de $k \leq 0$ e corre no sentido anti-horário. Para $\omega < 0$ fechamos o contorno com o semicírculo inferior ($\operatorname{Im}[u] \leq 0$ de raio R . Neste contorno temos $k > 0$ e ele corre no sentido horário. Consideramos o limite $R \rightarrow \infty$ tal que a contribuição dos arcos se anule

pelo lema de Jordan. Dessa discussão temos

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = -\frac{\alpha_\beta^3 \alpha_1^2}{4\pi^2 \alpha_\beta^2} \left\{ 2\pi i \theta(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{e^{i\omega u}}{(u - 2ia_\beta \epsilon - 2\pi i k \alpha_1 a_\beta)^2}; u = 2ia_\beta \epsilon + 2\pi i k \alpha_1 a_\beta \right] \right. \\ \left. - 2\pi i \theta(-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{e^{-i|\omega|u}}{(u + 2\pi i k \alpha_1 a_\beta)^2}; u = -2\pi i k \alpha_1 a_\beta \right] \right\}, \quad (\text{A.6})$$

onde na primeira soma realizamos a mudança $k \rightarrow -k$. Encontrando os resíduos da integral da Eq. (A.6) e considerando que $a_\beta = \alpha_\beta/\alpha_1$, obtemos finalmente

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = \frac{|\omega| \alpha_\beta}{2\pi \alpha_1} \left[\theta(\omega) \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi \omega \alpha_1 a_\beta k} \right) + \theta(-\omega) \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi |\omega| \alpha_1 a_\beta k} \right) \right] \\ = \frac{|\omega| \alpha_\beta}{2\pi \alpha_1} \left[\theta(\omega) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi \omega \alpha_1 a_\beta} - 1} \right) + \theta(-\omega) \left(\frac{1}{e^{2\pi |\omega| \alpha_1 a_\beta} - 1} \right) \right], \quad (\text{A.7})$$

ou, podemos escrever essa função na forma

$$\Gamma^{(\beta)}(\omega) = \frac{\omega \alpha_\beta}{2\pi \alpha_1} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi \omega \alpha_\beta}} \right). \quad (\text{A.8})$$

Como discutido acima, para calcular $\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega)$ para $\alpha \neq \beta$ primeiro calculamos as funções $W^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega)$. Usando a Eq. (4.52) na Eq. (4.49)

$$W^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega) = -\frac{a_\alpha a_\beta}{16\pi^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty ds \frac{e^{i\omega a_\beta s}}{\sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\phi}{2}\right) \sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\phi}{2}\right)}. \quad (\text{A.9})$$

Vamos começar com $W^{(21)}(\omega)$. Pela equação (A.9) temos

$$W^{(21)}(\omega) = -\frac{1}{16\pi^2 \alpha_1^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{i\omega s}}{\sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\phi}{2}\right) \sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\phi}{2}\right)} \\ = -\frac{1}{16\pi^2 \alpha_1^2} \int_0^\infty ds f(s). \quad (\text{A.10})$$

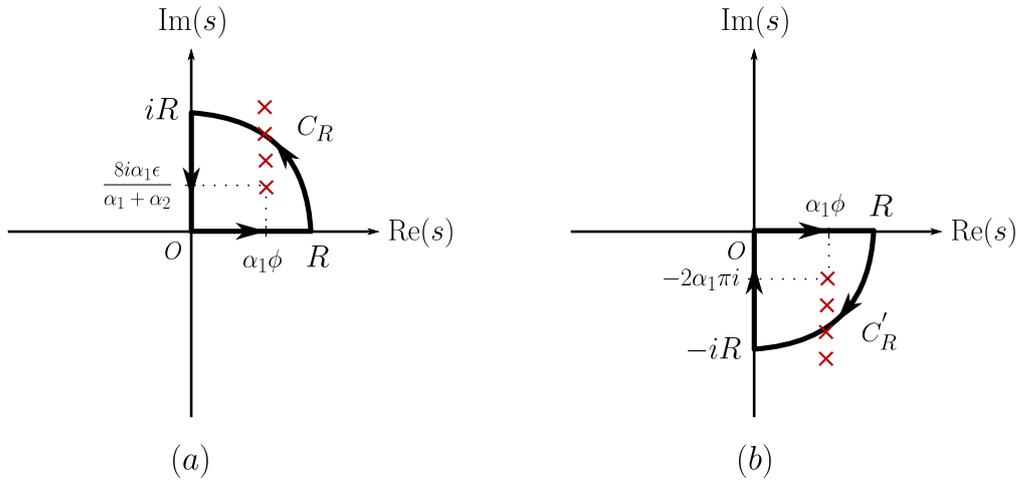


Figura 7 – Contornos no plano complexo para a avaliação das integrais de $W^{(\alpha\beta)}(a_\beta \omega)$. Em (a) temos o contorno para $\omega > 0$. Observamos que neste caso os pólos dentro do contorno para $R \rightarrow \infty$ têm $n \geq 0$. A figura (b) corresponde a $\omega < 0$ e temos $n \geq 1$.

Para resolvermos essa integral usamos os contornos ilustrados na Fig. (7). O sinal de ω define se fechamos o contorno pela metade do semicírculo superior de raio R ou pela metade inferior. Para $\omega > 0$, os pólos dentro do contorno superior, veja a Fig. (7), são dados por

$$s_n^{(1)} = \alpha_1\phi + \frac{8\alpha_1 i\epsilon}{\alpha_1 + \alpha_2} + 2\alpha_1\pi in, \quad (\text{A.11})$$

com $n \geq 0$. O contorno associado à integral pode ser separado como

$$\begin{aligned} \oint_{\omega>0} dsf(s) &= \int_0^R dsf(s) + \int_{C_R} dsf(s) + \int_{iR}^0 dsf(s) \\ &= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f(s); s = s_n^{(1)}) \\ &= \frac{4\pi i\alpha_1}{\sinh \phi} e^{i\omega\alpha_1\phi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi\omega\alpha_1 n} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

com C_R o quarto de círculo presente na Fig. (7) onde tomamos $\epsilon \rightarrow 0$. Para $\omega < 0$, os pólos dentro do contorno inferior, veja a Fig. (7), são dados por

$$s_n^{(2)} = \alpha_1\phi - 2\alpha_1\pi in, \quad (\text{A.13})$$

com $n > 0$. O contorno associado à essa integral pode ser separado como

$$\begin{aligned} \oint_{\omega<0} dsf(s) &= \int_0^R dsf(s) + \int_{C'_R} dsf(s) + \int_{-iR}^0 dsf(s) \\ &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(f(s); s = s_n^{(2)}) \\ &= -\frac{4\pi i\alpha_1}{\sinh \phi} e^{-i|\omega|\alpha_1\phi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\alpha_1|\omega|n}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

com C'_R o quarto de círculo presente na Fig. (7). Tomando o limite $R \rightarrow \infty$ as integrais ao longo de C_R e C'_R se anulam pelo lema de Jordan. Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} W^{(21)}(\omega) &= \frac{\text{csch}\phi}{4\pi\alpha_1} \left\{ \theta(\omega) \left[\mathcal{U}(\alpha_1\omega) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\alpha_1\omega} - 1} \right) + \mathcal{V}(\alpha_1\omega) \right] \right. \\ &\quad \left. + \theta(-\omega) \left(\frac{\mathcal{U}^*(\alpha_1|\omega|)}{e^{2\pi\alpha_1|\omega|} - 1} + \mathcal{V}^*(\alpha_1|\omega|) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde definimos as funções

$$\mathcal{U}(\alpha_1\omega) = -ie^{i\omega\alpha_1\phi}, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{V}(\alpha_1\omega) = \frac{i \sinh \phi}{2} \int_0^{2\pi} du \frac{e^{u\alpha_1\omega}}{\cos u - \cosh \phi}. \quad (\text{A.17})$$

Agora olhamos a solução para $W^{(12)}(a_2\omega)$. A partir da Eq. (A.9) temos

$$W^{(12)}(a_2\omega) = W^{(12)}\left(\frac{\alpha_2\omega}{\alpha_1}\right) = -\frac{1}{16\pi^2\alpha_1^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{i\omega\frac{\alpha_2}{\alpha_1}s}}{\sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\phi}{2}\right) \sinh\left(\frac{s}{2\alpha_1} - \frac{4i\epsilon}{\alpha_1+\alpha_2} - \frac{\phi}{2}\right)}. \quad (\text{A.18})$$

Observamos que a integral apresentada na Eq. (A.18) pode ser resolvida de maneira similar àquela dada pela Eq. (A.10) após realizarmos uma mudança $w \rightarrow w\alpha_2/\alpha_1$. Então, podemos escrever

$$W^{(12)}(a_2\omega) = \frac{\text{csch}\phi}{4\pi\alpha_1} \left\{ \theta(\omega) \left[\mathcal{U}(\alpha_2\omega) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\alpha_2\omega} - 1}\right) + \mathcal{V}(\alpha_2\omega) \right] + \theta(-\omega) \left(\frac{\mathcal{U}^*(\alpha_2|\omega|)}{e^{2\pi\alpha_2|\omega|} - 1} + \mathcal{V}^*(\alpha_2|\omega|) \right) \right\}, \quad (\text{A.19})$$

ou em uma forma geral

$$W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = \frac{\text{csch}\phi}{4\pi\alpha_1} \left\{ \theta(\omega) \left[\mathcal{U}(\alpha_\beta\omega) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\alpha_\beta\omega} - 1}\right) + \mathcal{V}(\alpha_\beta\omega) \right] + \theta(-\omega) \left(\frac{\mathcal{U}^*(\alpha_\beta|\omega|)}{e^{2\pi\alpha_\beta|\omega|} - 1} + \mathcal{V}^*(\alpha_\beta|\omega|) \right) \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Com a Eq. (A.20) em mãos, somos capazes de calcular $\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega)$ a partir da Eq. (4.54). Primeiro observamos que ϕ é invariante sob a mudança $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$. Isso nos permite escrever

$$W^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = W^{(\beta\alpha)}(a_\beta\omega). \quad (\text{A.21})$$

Então, usando a Eq. (A.20) na Eq. (4.54) nós finalmente temos

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(a_\beta\omega) = \frac{1}{4\pi\alpha_1 \sinh \phi} \left\{ \theta(\omega) \left[2 \text{Re}(\mathcal{U}(\alpha_\beta\omega)) \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\alpha_\beta\omega} - 1}\right) \right] + \theta(-\omega) \left[\frac{2 \text{Re}(\mathcal{U}(\alpha_\beta|\omega|))}{e^{2\pi\alpha_\beta|\omega|} - 1} \right] \right\}, \quad (\text{A.22})$$

ou, usando a forma de $\mathcal{U}(\alpha_\beta\omega)$ dada pela equação (A.16) temos uma forma mais simples

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(\omega) = \frac{\sin(\omega\alpha_\beta\phi)}{2\pi\alpha_1 \sinh \phi} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega\alpha_\beta}} \right). \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE B – Forma completa da EMG

Neste apêndice apresentamos a forma explícita da equação mestra (4.46) onde consideramos a contribuição apenas da parte dissipativa dela conforme discutido na Seção 5. Da Eq. (5.6) só temos que calcular oito componentes. Elas são dadas pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{GG}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} - B^{(11)} - B^{(22)} \right) \rho_{GG}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} + B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} - A^{(21)} - B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{AA}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} - A^{(22)} + B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{AS}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} - A^{(22)} + B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} - A^{(21)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{SA}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} + B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{SS}(\tau), \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{SS}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} + A^{(12)} + A^{(21)} \right) \rho_{SS}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{AS}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} + B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{EE}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} - B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} - B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{GG}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{SA}(\tau), \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{AA}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} - A^{(12)} - A^{(21)} \right) \rho_{AA}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{AS}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} + B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{EE}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} - B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} - B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{GG}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{SA}(\tau), \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{EE}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} + B^{(11)} + B^{(22)} \right) \rho_{EE}(\tau) \\
& + \left(A^{(22)} - A^{(11)} + B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{SA}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} + A^{(22)} - B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} - A^{(21)} + B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{AA}(\tau) \\
& + \left(A^{(22)} - A^{(11)} + B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} - A^{(21)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{AS}(\tau) \\
& + \left(A^{(22)} + A^{(11)} - B^{(11)} - B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} + A^{(21)} - B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{SS}(\tau), \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{AS}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} \right) \rho_{AS}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{AA}(\tau) \\
& + \left(A^{(22)} - A^{(11)} - B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} - A^{(21)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{EE}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} - A^{(22)} - B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} + A^{(21)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{GG}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{SS}(\tau), \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{SA}(\tau)}{d\tau} = & -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} \right) \rho_{SA}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{AA}(\tau) \\
& + \left(A^{(22)} - A^{(11)} - B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. - A^{(12)} + A^{(21)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{EE}(\tau) \\
& + \left(A^{(11)} - A^{(22)} - B^{(11)} + B^{(22)} \right. \\
& \left. + A^{(12)} - A^{(21)} - B^{(12)} + B^{(21)} \right) \rho_{GG}(\tau) \\
& + \left(B^{(22)} - B^{(11)} + B^{(12)} - B^{(21)} \right) \rho_{SS}(\tau), \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\rho_{GE}(\tau)}{d\tau} = -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} \right) \rho_{GE}(\tau), \tag{B.7}$$

$$\frac{d\rho_{EG}(\tau)}{d\tau} = -2 \left(A^{(11)} + A^{(22)} \right) \rho_{EG}(\tau). \tag{B.8}$$