



Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

CORRELAÇÃO, DEPENDÊNCIA E MATRIZES
ALEATÓRIAS. APRIMORANDO A CARATERIZAÇÃO
DE SISTEMAS COMPLEXOS.

T E S I S

Para obtenção do TÍTULO DE:

DOUTORA EM FÍSICA

MICHELLE BAU GRACZYK

TUTOR

PROF.DR. SÍLVIO MANUEL DUARTE QUEIRÓS



RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO, 2023

"CORRELAÇÃO, DEPENDÊNCIA E MATRIZES ALEATÓRIAS.
APRIMORANDO A CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS COMPLEXOS"

MICHELLE BAU GRACZYK

Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:

Silvio Manuel Duarte Queirós

Silvio Manuel Duarte Queirós – Orientador/CBPF

Sabrina Camargo

Sabrina Camargo - UNSAM

Alexandre Souto Martinez

Alexandre Souto Martinez – USP

José Roberto Iglesias

José Roberto Iglesias – UFRGS

Renio dos Santos Mendes

Renio dos Santos Mendes - UEM

Rio de Janeiro, 14 de novembro de 2023.

À Souraya, cuja amizade transformou minha vida. Com todo amor e gratidão que existem em mim.

Agradecimentos

Muito obrigada à todos que diretamente ou indiretamente fizeram parte deste ciclo.

Obrigada Professor Doutor Silvio Manuel Duarte Queirós por tudo o que me ensinou, por todo os conhecimentos que comigo foram compartilhados e por ser um verdadeiro orientador.

Obrigada Mãe, Babi e Leila, por segurarem a minha mão e me ajudarem a atravessar os momentos mais sombrios e multiplicar os momentos mais alegres.

Obrigada Souraya, por ser um contínuo agente de transformação na minha vida e nesse mundo.

Resumo

Neste trabalho de doutorado abordamos no contexto de física estatística primeiramente duas importantes teorias financeiras para a explicabilidade da relação entre volume e volatilidade e preço: a Hipótese de Mistura de Distribuições e a Hipótese de Chegada de Informação Sequencial. Foi observado e discutido como cada tem seu papel principal em diferentes momentos da sessão intradiária.

Em seguida, usamos a Teoria de Matrizes de Aleatórias e Análise de Componentes Principais, foram usadas para explorar a dinâmica não estacionária consequente pela forma com a qual as informações dadas por variáveis como volume transacionado e volatilidade são incorporadas pelos agentes de um sistema financeiro causando variação em uma das suas variáveis observáveis, o preço.

Com foco na análise e descrição da relação entre volume transacionado e volatilidade e volume transacionado e preço já que o primeiro pode ser tomado como um indicador de antecipação das mudanças na dinâmica de preço do mercado uma vez que as decisões de compra e venda de ativos dependem de como uma informação é incorporada pelos agentes financeiros que compõe esse sistema. A análise para o volume transacionado foi feita de maneira individual e transversal e verificou-se:

- a) diferenças significativas no perfil intradiário do volume mostrando a diferença na forma que cada período, matutino e vespertino, os agentes financeiros absorvem as informações refletindo em dinâmicas bem distintas;
- b) uma clara não estacionariedade nos dois casos com mudanças evidentes em seus cumulantes após eventos significativos como a *subprime crisis* em 2008 e mudanças nas regras de negociação de venda a descoberto *uptick rule* em 2007

e 2012.

As flutuações de preço também foram analisadas dentro do mesmo período e frequência. Estas, mostraram um comportamento evidente não estacionário, afirmando a necessidade da expansão da teoria de matrizes aleatórias através do uso de distribuição de matrizes de Wishart e matrizes de Wishart inversas.

Usamos uma abordagem (numérica) para analisar de Wishart e matrizes Inversas de Wishart independentes construídas com distribuições Gaussianas e distribuições Gamma, sendo esta última muito mais consistente com uma distribuição de probabilidades de variáveis de um sistema complexo financeiro, com o objetivo de melhor entender sistemas complexos não estacionários.

Abstract

In this doctoral dissertation, we first delve into the context of statistical physics to address two important financial theories aimed at explaining the relationship between volume, volatility, and price: the Mixture of Distributions Hypothesis and the Sequential Information Arrival Hypothesis. We observed and discussed how each of them plays a primary role at different moments during the intraday session.

Subsequently, we employed Random Matrix Theory and Principal Component Analysis to explore the non-stationary dynamics resulting from how information provided by variables such as traded volume and volatility is incorporated by agents within a financial system, causing variations in one of its observable variables, price.

With a focus on analyzing and describing the relationship between traded volume and volatility, as well as traded volume and price, as the former can be considered an indicator of anticipation of changes in market price dynamics. This is because buying and selling decisions depend on how information is absorbed by the financial agents comprising this system. The analysis of traded volume was conducted both individually and across time, and the following was observed:

- a) significant differences in the intraday volume profile, indicating how financial agents absorb information differently during morning and afternoon periods, resulting in distinct dynamics;
- b) clear non-stationarity in both cases, with evident changes in their cumulants following significant events such as the subprime crisis in 2008 and changes in short selling trading rules (uptick rule) in 2007 and 2012.

Price fluctuations were also analyzed within the same time and frequency framework. These fluctuations exhibited an evident non-stationary behavior, affirming the need to expand the theory of random matrices through the use of Wishart matrix distributions and inverse Wishart matrices.

We employed a numerical approach to analyze Wishart matrices and independent Inverse Wishart matrices constructed using Gaussian and Gamma distributions, with the latter proving to be more consistent with the probability distribution of variables in a complex financial system. This approach aimed to enhance our understanding of non-stationary complex systems.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	vi
Prólogo	xvii
1 Introdução	1
2 Abordagem Empírica	6
2.1 O Volume Transacionado como antecipador de informação da dinâmica do mercado	6
2.1.1 Comportamento Individual e Transversal das sazonalidades e não-estacionariedade do volume transacionado intradiário	7
2.1.2 Comportamento Coletivo das sazonalidades e não-estacionariedade do volume transacionado intradiário	15
2.2 Perfis coletivos e individuais da não-estacionariedade das flutuações de preço	20
2.3 Perfis de correlação e não-estacionariedade entre o volume transacionado e a volatilidade.	27
3 Modelos de matrizes aleatórias	33
3.1 Distribuição de Wishart e Distribuição de Wishart Inversa	37
3.1.1 Ensemble de Wishart	42

3.1.2	Entropia relativa e a Distância de Kullback-Leibler	46
3.1.3	Tratamento das matrizes de dependência via distância de Kullback-Leibler	49
4	Abordagem Teórica	55
4.1	Multiplicação entre uma distribuição de Wishart e Whishart Inversa Independentes	55
4.2	Abordagem Numérica	62
5	Discussão e Perspectivas Futuras	76

Lista de Figuras

2.1	Perfil intradiário da curva do volume médio transacionado. A figura à esquerda representas os valores pertencentes ao 2S06 enquanto a figura à direita representa os valores pertencentes ao 1S13. O valor médio do expoente α até o 1S08 é de 0.29 e passa a ser de 0.37 após 2S08. A linha vermelha representa o ajuste numérico em lei de potência. Nas duas figuras os valores do volume transacionado médio estão divididos por 10^4 para uma melhor observação.	10
-----	---	----

- 2.2 **Expoente de ajuste α' em função dos semestres s .** Valor do expoente α para o ajuste em lei de potência dos valores de volumes transacionados pertencentes ao período matutino em função dos semestres s . As duas linhas horizontais evidenciam a mudança do valor médio do expoente α dividindo a dinâmica em dois cenários: antes e após o segundo semestre de 2008 ($s=10$). O valor de t para o teste de Wech foi de 5.56 sendo significativamente maior que o valor crítico de t dentro de um nível de 95% de confiança $t_{critico} = 1.86$ reforçando o resultado do teste de Mann-Whitney-Wilcoxon para também um nível de confiança de 95%. **Expoente de ajuste α' em função dos semestres s .** Valor do expoente α' para o ajuste em lei de potência dos valores de volumes transacionados pertencentes ao período vespertino em função dos semestres s . As duas linhas em negrito representam os melhores ajustes para dois regimes diferentes: para o período de 1S04 até 1S07 com o valor de declive de 0.046 ± 0.004 ; e o período de 2S07 adiante cujo declive é de 0.1 ± 0.01 . O coeficiente de correlação para esses dois ajustes são de $R = 0.97$ e $R = 0.836$ respectivamente. . . . 11
- 2.3 **Perfil intradiário da assimetria.** Painel à esquerda: Os pontos negros representam os valores da assimetria pertencentes ao 1S04 e as linhas vermelhas os ajustes lineares do período matutino com declive de $10^{-3} \pm 10^{-4}$ e do período vespertino com declive de $1.5 \times 10^{-3} \pm 10^{-4}$. Painel à direita: Valores dos declives dos ajustes em função dos semestres. Os pontos em azul claro representam os valores dos declives para o período matutino enquanto os em azul escuro os valores dos declives pertencentes ao período vespertino da sessão de negociação. . . 12

2.4 **Perfil intradiário da curtose.** Os pontos negros representam os valores da curtose para o 1S04 enquanto as linhas azul claro e azul escuro representam os ajustes exponenciais matutino $\beta_m = 0.11 \pm 0.02$ e vespertino $\beta_a = 2.16 \pm 0.03$, respectivamente. **Evolução dos expoentes de relaxação do ajuste das curtoses matutina β_m e vespertina β_a ao longo dos semestres.** Os dois expoentes diferem em um fator de 10. 14

2.5 **Perfil intradiário dos três maiores autovalores.** Evolução dos três maiores autovalores do 2S04 $\lambda_{=(1,2,3)}(t; 2S04)$ das respectivas matrizes de correlação $C(t; 2S04)$. Os pontos vermelhos representam os autovalores $\lambda_1(t; 2S04)$, os triângulos azuis $\lambda_2(t; 2S04)$ e os losângulos verdes $\lambda_3(t; 2S04)$. A linha rosa representa os 95% maiores autovalores das matrizes de correlação obtidas de distribuições Gamma de mesma média e variância dos volumes transacionados das ações do DJIA para um dado instante t 18

2.6 Evolução do produto escalar entre os versores $\Lambda_\alpha(s)$ e $\Lambda_\alpha(1)$ em função dos semestres s representada pela figura à esquerda e entre $\Lambda_\alpha(s)$ e $\Lambda_\alpha(109)$ representada pela figura à direita 20

2.7 **Curvas da média dos retornos absolutos, $\tilde{v}(t; s)$ em azul, $\tilde{\sigma}^2(t; s)$ em vermelho e $\hat{\sigma}^2(t; s)$ em bordô, em função dos minutos intradiários e suas estatísticas ao longo dos semestres.** As linhas azuis e rosa representam os expoentes de lei de potência e coeficiente de segunda ordem de um ajuste polinomial, respectivamente. 24

- 2.8 **Evolução temporal do maior autovalor $\lambda(t; s)$ respectiva à matriz de correlação das flutuações de preço $C(t; s)$ em função do período intradiário.** A linha bordo representa a média dos maiores autovalores referentes ao 1S04 até 1S07, a linha rosa a média dos maiores autovalores referentes aos semestres 2S07 até 2S08 e a linha azul escuro a média dos maiores autovalores referentes ao 1S09 ao 1S13. A curva cinza corresponde aos valores pertencentes ao 2S11 enquanto a rosa clara aos valores pertencentes ao 2S06. Os dois outros gráficos representam o coeficiente linear dos ajustes dos maiores autovalores considerando os últimos 100 minutos feitos numa frequência de 1 minuto e de 5 minutos, respectivamente. 26
- 2.9 **Valor médio das matrizes de correlação entre o volume transacionado e a volatilidade ao longo da sessão de negociação para uma frequência de 5 min.** As linhas coloridas representam cada uma a média de cada companhia ao longo dos semestres sendo a linha preta em destaque a média sobre todas as companhias, tonando a ainda mais visível a diferença de comportamentos entre os períodos matutino e vespertino. Há um pico claro em $t = 60$ consequente da divulgação da Ata do Comitê Federal do Mercado Aberto e outras publicações do FED como o Beige Book [27]. 28
- 2.10 **Fração de valores negativos das diagonais das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade ao longo da sessão de negociação em uma frequência de 5 min.** Cada linha representa uma companhia e as linhas em destaque pretas representam a média sobre todas as empresas que compõe o *Blue Chip* entre 2004 e 2013. 30

2.11	Gráficos superiores: Variância dos elementos diagonais das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade . Gráficos inferiores: Variância de todos os elementos das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade . As linhas coloridas representam cada companhia em sua média ao longo dos semestres enquanto as linhas pretas em destaque representam a média sobre todas as companhias. Note que para os gráficos inferiores, é nítida a diferença dos comportamentos referentes a cada período da sessão de negociação, com um pico crescente próximo ao fecho do mercado.	31
4.1	Exemplos de distribuições Gamma para valores diferentes de forma (shape) e escala(factor).	64
4.2	Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gaussianas sendo todas de dimensões [100,100].	65
4.3	Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e formas [0.5, 1.0, 1.5] sendo todas de dimensões [100, 100].	66
4.4	Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 1.0 e formas [0.5, 1.0, 1.5] sendo todas de dimensões [100, 100].	66

4.5 Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 2.0 e formas [0.5, 1.0, 1.5] sendo todas de dimensões [100, 100]. 67

4.6 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições gaussianas em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 69

4.7 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 70

4.8 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 1.0 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 70

4.9 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 2.0 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 71

4.10 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{inW}_b\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 72

4.11 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 73

4.12 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 73

4.13 Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100]. 74

Prólogo

O conteúdo dessa tese encontra-se baseada nos seguintes trabalhos por mim publicados:

- 1 - Intraday Seasonalities and Nonstationarity of Trading Volume in Financial Markets: Individual and Cross-Sectional Features. PLOS ONE 11(11): e0165057 [1].
- 2 - Intraday seasonalities and nonstationarity of trading volume in financial markets: Collective features. PLOS ONE 12(7): e0179198 [2].
- 3 - Nonstationarity of the intraday individual and collective seasonalities of price fluctuations; Journal of Network Theory in Finance [3].
- 4 - Volatility–Trading volume intraday correlation profiles and its nonstationary features; Physica A: Statistical Mechanics and its Applications [4].

Capítulo 1

Introdução

Diferentemente dos Sistemas Simples nos quais se incluem os sistemas Hamiltonianos, um Sistema Complexo se opõe aos postulados fundamentais da Termodinâmica de que toda a informação necessária para a descrição microscópica de um sistema está contida em uma função de poucas quantidades extensivas [5].

Por conseguinte, uma eventual equação fundamental para a descrição de um Sistema Complexo derivaria de uma série de detalhes de natureza microscópica que são desprezíveis na descrição de um sistema simples. Adicionalmente, em um sistema complexo, os mecanismos de influência mútua em diferentes escalas são todos contabilizados de tal forma que o comportamento do sistema como um todo impacta diretamente no comportamento individual de cada elemento e vice-versa.

Nesse âmbito, a Física Estatística tem ganhado cada vez mais importância ao estudar sistemas financeiros, amplamente citados como complexos, que representam um dos casos de maior sucesso na extensão dos limites de aplicabilidade de conceitos e técnicas nascidas na Mecânica Estatística.

Essa necessidade surge por motivos diversos tais como: a invalidação da teoria do mercado eficiente a qual sustenta a afirmação de que toda a informação a respeito de um ativo pode ser extraída a partir da sua série de preços; constantes ineficiências geradas por fatores externos – e.g., medidas econômicas tomadas por bancos centrais, cenários políticos, relações internacionais – e internos – e.g., gestão de portfólios, interação entre o preço de ações e o setor de atividade (denominado ‘beta setorial’),

relação do ativo com outros instrumentos financeiros – por serem muito importantes ao determinar o estado de um mercado. Podemos tomar como exemplo um resultado obtido no decurso do meu trabalho de pesquisa no CBPF: variações das quantidades de volume transacionado são absorvidas pelo sistema como informações reais e relevantes sobre mudanças na dinâmica do sistema estudado, tanto de maneira coletiva quanto individual, muitas vezes precedendo os sinais dados pela volatilidade ou da flutuação de preço (também conhecida como retorno).

Até o momento, usamos a Teoria de Matrizes de Correlação (RMT) e Análise das Componentes Principais para analisar como o conjunto de ações se relacionavam entre si e com o conjunto. Sendo o sistema financeiro contido dentro do sistema social no qual vivemos, a volatilidade e o volume transacionado são meios de quantificar o sentimento dos participantes do mercado [6, 7], cujas ações dependem do estado macroscópico do mercado de forma não-trivial; ou seja, o preço de um ativo muda quando um comprador e um vendedor concordam em trocar uma quantidade (volume) desse bem por um valor (preço) diferente do que vem sendo operado. Esta vontade de comprar ou vender baseia-se principalmente na avaliação da sobre/sub-precificação do ativo financeiro e sua evolução esperada, a qual pode ser estabelecida através de análises dos cenários econômicos atuais e futuros, incluindo os fundamentos da empresa ou de seu setor de atividades de forma ser necessário o tratamento destas informações [8]. Cada vez que um determinado volume é negociado, a informação relativa ao sobre/sub-preço - mesmo que subjacente ou envolvida como uma percepção - se propaga através dos constituintes microscópicos do sistema e, eventualmente, alimenta o surgimento de fenômenos posteriores [9, 10]. A forma como o fluxo de informação evolui e afeta a dinâmica dos preços separa duas das teorias mais importantes nas finanças: a Hipótese de Mistura de Distribuições [11] e a Hipótese de Chegada de Informação Sequencial [12].

A Hipótese de Mistura de Distribuições relaciona a volatilidade e o volume de negociação com a informação e os eventos latentes em mercados financeiros. Originalmente proposta por Clark (1973), defende que a série de retornos pode ser obtida através da distribuição conjunta de volume e preço condicionada à informação atual

de tal forma que as mudanças de preço e volume transacionados são impulsionadas pelo mesmo processo subjacente de chegada das informações e, portanto, o volume e a volatilidade são correlacionados. As críticas a respeito desta hipótese assentam em dois pontos: primeiramente, não há volatilidade condicionada ao volume de forma a deixar de indicar a persistência da volatilidade após a inclusão do volume; e segundo, como Fong (2003) e Xu et al. (2006) argumentaram, os modelos desta hipótese não permitem a dependência temporal entre a volatilidade e volume de retorno.

Em contraste, a Hipótese de Chegada de Informação Sequencial (Copeland 1976, 1977) assume que as novas informações são disseminadas sequencialmente para os agentes de mercado informados e desinformados. Devido ao fluxo sequencial de informações, os retornos absolutos das ações poderiam ter poder preditivo para o volume atual de negociação e vice-versa, o que implica causalidade bidirecional entre volume e volatilidade. Isto é, uma determinada quantidade de informação que alimenta o mercado se propagará de tal forma a inflamar uma série de estados estacionários locais até chegar ao equilíbrio econômico finalmente. Adicionalmente, se tivermos em mente situações de liquidez - típicas dos mercados de ações americanos - para as quais os livros de ordens são apertados (i.e., a diferença entre a melhor oferta de compra e a melhor oferta de venda é mínima), resilientes e não muito profundos, um grande volume de negociação é considerado necessário para estimar uma grande variação de preço. Dito isto, entendemos que o surgimento de informações relevantes tende a se materializar em grandes volumes de negociação, que criam pressão em seus livros de ordens desencadeando grandes flutuações de preços. Embora estudos recentes [13] argumentem que a principal origem das grandes flutuações de preços seja o surgimento de desequilíbrios no livro de ordens ao invés de grandes valores de volume, a realidade é que em mais de 70% das flutuações de preços diários nas ações *Blue Chip* - ações com alta liquidez e grande volume de negociação de empresas de grande porte, que tenham boa reputação e uma situação financeira saudável - acima de 4% ¹ coincidem com volumes de negociação pelo menos duas vezes maiores do que a média, uma observação que reforça a famosa palavra de ordem "é preciso de volume para fazer com

¹Que correspondem a quatro desvios-padrão.

o preço se mova", oitavo mandamento da Teoria de Dow.

Por estas razões, analisamos o volume transacionado, os retornos e diferentes tipos de volatilidade para entendermos o comportamento do sistema financeiro em questão. Nessas análises, um dos resultados mais relevantes foi que, dependendo do período do dia, tínhamos comportamentos bem distintos em todos os momentos até quarta ordem. Destes resultados, surgiu a necessidade de entender como essa informação, que identificamos ser uma variável temporal, é incorporada pelo sistema de forma a se verificar a perturbação consequente. Ou seja, cada informação tem um tempo de se incorporar ao mercado e um tempo para causar mudanças (neste segundo, podemos pensar que esse tempo entre a causa e a consequência é dependente da importância de cada informação).

Usando mais uma vez a Física dos Sistemas Complexos, podemos pensar que a informação é absorvida pelo sistema causando uma perturbação de modo que o sistema deva relaxar para atingir um novo estado de equilíbrio ². Dito isso, podemos interpretar a informação como intimamente relacionada com variações de entropia do sistema. Aqui podemos perceber mais uma quebra da segunda lei da termodinâmica (a qual afirma que a entropia de um sistema isolado não pode decrescer ou continuar constante) nos permitindo elucidar "O Demônio de Maxwell" dentro de um sistema financeiro:

Assim como existem informações que quando absorvidas pelo mercado geram um cenário de estresse, existem também informações que ao serem absorvidas tendem a dar mais confiança para os operadores de forma a diminuir o estresse, por exemplo quando informações sobre o cenário político reflete um cenário econômico melhor do que o esperado. Assim, se dentro do mercado, se pudesse colocar um "Demônio de Maxwell" capaz de distinguir as informações que poderiam gerar uma perturbação maior do que o esperado das informações que poderiam contribuir para um "jogo mais justo", teríamos o controle sobre a entropia do sistema.

Deste paradoxo, Léo Szirlárd em 1929 propõe que, em um sistema real, para o "Demônio" saber distinguir cada informação, ele precisa mensurá-las de alguma ma-

²Tratamos aqui a palavra equilíbrio num sentido econômico.

neira e esta medição acarretaria em um gasto de energia. Deste modo, ao quantificarmos a entropia do sistema, precisaríamos somar a entropia de cada informação e a energia gasta pelo "Demônio" ao mensurar cada uma delas de forma a fazer com que o sistema volte respeitar a segunda lei da termodinâmica. Posteriormente, Rolf Landauer percebeu que nem toda medição ou informação acarretaria num aumento de entropia do sistema. Ele também propôs que a obtenção de informação por um computador (ou "Demônio") pode se tornar um processo reversível, não acarretando num aumento de energia do sistema sendo irreversível o ato de apagar as informações já contidas dentro do sistema. Isto ficou conhecido como Princípio de Landauer: apagar um bit de informação requer um aumento de entropia do sistema maior ou igual a $k \times \ln(2)$; ou seja, para se eliminar informação é preciso realizar trabalho, estabelecendo mais uma relação entre informação e quantidades termodinâmicas. Assim, o "Demônio de Maxwell" teria que limpar a sua memória a cada vez que ele precisasse classificar uma nova informação (ou atualizar as informações do sistema) acarretando num aumento de entropia do sistema e solucionando o paradoxo do "Demônio de Maxwell".

Dentro disso, a Física trouxe uma nova concepção sobre quais elementos contêm informações importantes para descrever um sistema financeiro e como cada uma dessas informações é absorvida por este sistema, de modo a ser essencialmente importante para entender as causas e consequências das mudanças de comportamento e dinâmica que cada elemento do sistema, mutualmente do sistema como um todo, financeiro analisado. Desta forma o nosso próximo passo é conseguir mensurar como cada informação interage com o sistema, desde a sua chegada, evoluindo para a sua absorção e entendimento, até as consequentes mudanças no sistema.

Capítulo 2

Abordagem Empírica

Analisando o mercado financeiro sob a teoria de sistemas complexos, nos deparamos com uma grande gama de variáveis que são necessárias para o descrever. Uma dessas variáveis é o volume transacionado que muitas vezes é tratado como uma variável secundária, mas quando analisada corretamente pode ser preditora da variação dos preços dos ativos.

No intuito de entendermos melhor como o volume transacionado por nos dar informações sobre o movimento do preço, analisamos seu comportamento usando a teoria de matrizes aleatórias e os estudos de dinâmicas não estacionárias.

2.1 O Volume Transacionado como antecipador de informação da dinâmica do mercado

O estado de um ativo financeiro, assim como dos índices compostos, são tradicionalmente caracterizado pelo seu preço, $S(t)$, e sua variação percentual dentro de um dado período de tempo Δt , $r_{\Delta t}(t)$. Porém, atualmente, é bem estabelecido que a natureza complexa de um sistema financeiro não pode ser satisfatoriamente descrita por um número reduzido de quantidades [7, 5, 14], sendo necessário incorporarmos quantidades como o volume transacionado - ou seja, a quantidade negociada de um ativo-, o preço de referência, níveis de resistência, entre outras quantidades, à medida

que nos movemos das mídias informativas para as plataformas financeiras.

Sendo o mercado financeiro parte de um sistema social, em um segundo plano, tanto a volatilidade quanto o volume transacionado fornecem um meio de quantificar o sentimento dos agentes de mercado, cujas ações dependem do estado macroscópico do mercado de maneira não trivial. Em outras palavras, se excluirmos episódios como o pagamento de dividendos, desdobramentos (reversos) e efeitos exógenos,³ - o preço de um ativo muda quando um comprador e o vendedor concordam em negociar uma quantidade desse ativo por um valor S diferente do seu atual.

A tomada de decisão de comprar ou vender baseia-se principalmente na avaliação do preço do ativo e de sua evolução esperada, exercício que obviamente envolve o manuseio de informações [8]. Portanto, toda vez que um determinado volume v é transacionado, a informação - mesmo que subjacente ou em forma de percepção - se propaga através de componentes microscópicos do sistema, ou seja, os agentes financeiros, e eventualmente alimentam o surgimento de fenômenos coletivos [9, 10].

2.1.1 Comportamento Individual e Transversal das sazonalidades e não-estacionariedade do volume transacionado intradiário

Sob o ponto de vista do tratamento individual de cada ativo dentro do sistema *Blue Chip*, calculamos os momentos de primeira ordem e de ordens superiores - variância, simetria, e curtose - usando relações resultantes da expansão da função de densidade de probabilidade de Gram-Charlier (ou Edgeworth) assumindo a distribuição normal como referência [15] como podem ser observadas abaixo.

Sendo v o volume transacionado, podemos obter a média ao longo dos dias através da equação

$$\mu_i(t; s) \equiv \frac{1}{N_D} \sum_{d=d_1}^{d_l} v(d, t; s) \equiv \overline{v_i(d, t; s)}, \quad (2.1)$$

³Como por exemplo, as empresas que lidam com *commodities* têm seu preço fortemente correlacionado com o produto no qual seus negócios se baseiam, por exemplo, as crises políticas do Oriente Médio têm consistentemente afetado os preços do petróleo bruto e o valor das corporações petrolíferas, qualquer que seja sua nacionalidade

para cada empresa i pertencente ao conjunto de N_C empresas *Blue Chip* e a média ao longo das empresas para cada dia d através da equação

$$\mu(d, t) \equiv \frac{1}{N_C} \sum_i v_i(d, t; s) \equiv \langle v_i(d, t; s) \rangle \quad (2.2)$$

$d1(dl)$ o primeiro(último) dia de cada semestre s e t representa cada 1 minuto de cotação para os N_D dias úteis de cada semestre.

Desta maneira, podemos escrever a variância θ^2 , a assimetria ζ como

$$\theta_i^2(t; s) \equiv \overline{v_i^2(d, t; s)} - \mu_i(t; s)^2, \quad \theta_i^2(d, t; s) \equiv \langle v_i^2(d, t; s) \rangle - \mu_i(t; s)^2, \quad (2.3)$$

$$\zeta_i(t; s) \equiv \frac{6}{\sigma_i(t; s)} [\mu_i(t; s) - m_i(t; s)], \quad \zeta(d, t; s) \equiv \frac{6}{\sigma(d, t; s)} [\mu(d, t; s) - m(d, t; s)], \quad (2.4)$$

sendo $m_i(t; s)$ a mediana do volume transacionado de cada empresa i ao longo do semestre s e $m(d, t; s)$ a mediana do volume transacionado de cada semestre s sobre as empresas i e, por fim, e a curtose κ dada por

$$\begin{aligned} \kappa_i(t; s) &\equiv 24 \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{\overline{|v_i(d, t; s) - \mu_i(t; s)|}}{\sigma_i(t; s)} \right) + \zeta_i(t; s)^2, \\ \kappa(d, t; s) &\equiv 24 \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{\langle |v_i(d, t; s) - \mu(d, t; s)| \rangle}{\sigma(d, t; s)} \right) + \zeta(d, t; s)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usamos as séries temporais dos ativos das 30 empresas pertencentes ao Down Jones Industrial Average, no período entre os anos de 2003 e 2014. Estudando o comportamento intradiário, especificamente o perfil dos cumulantes do volume transacionado e depois olhamos para as características não-estacionárias desses perfis. Para esta última análise, dividimos nossos dados em intervalos contínuos de seis meses. Além disso, consideramos dois tipos de abordagem: i) análise individual na qual executamos as estatísticas de cada empresa e, em seguida, calculamos a média delas

e a ii) análise transversal na qual calculamos os momentos estatísticos do volume transacionado em relação ao conjunto da empresas. Em ambos os casos, confirmamos que o volume transacionado é significativamente não-estacionário dentro do período estudado.

Dentro da abordagem individual, usando uma analogia entre o decréscimo no volume transacionado médio logo após a abertura do mercado e a relaxação observada após avalanches e terremotos em sistemas [16, 17, 18]; ajustamos o primeiro quarto da curva do volume transacionado médio à uma função de lei de potência

$$\tilde{\mu}(t; s) = t^\alpha \quad (2.6)$$

e verificamos que este primeiro comportamento muda após o segundo semestre de 2008 no qual ocorreu o clímax da crise *subprime*. Explicitamente, o volume transacionado médio decai mais lentamente antes do segundo semestre de 2008 como pode ser visto na figura 2.1, reafirmada por todos os testes de significância estatística que fizemos, representa o seguinte cenário:

Antes do segundo semestre de 2008, o mercado levava 10 minutos para diminuir pela metade a quantidade de volume transacionado logo após a abertura do mercado enquanto que, a partir do segundo semestre de 2008, este cai para 6 minutos, representando uma queda de 40%. Dentro do período estudado, as modificações com maior potencial impacto nas negociações que conseguimos encontrar correspondem à retirada da *uptick rule*⁴ em 2007 [19] e à sua reintrodução após revisão em 2010 [20].

Ao olharmos a figura abaixo 2.2, podemos observar que o valor do expoente não muda até o segundo semestre de 2008 e, de modo equivalente, após a tal regra ser reinstituída, o expoente de relaxação continua dentro do valor médio pós segundo semestre de 2008. Desta forma, podemos atribuir tal mudança no valor do expoente de relaxação à mudança de conduta dos agentes financeiros pós crise.

Tal afirmação pode ser reforçada ao analisarmos o comportamento da curva próximo ao horário do encerramento da sessão de negociações, ou seja, às 16:30 horas,

⁴Regra para vendas de ações a descoberto

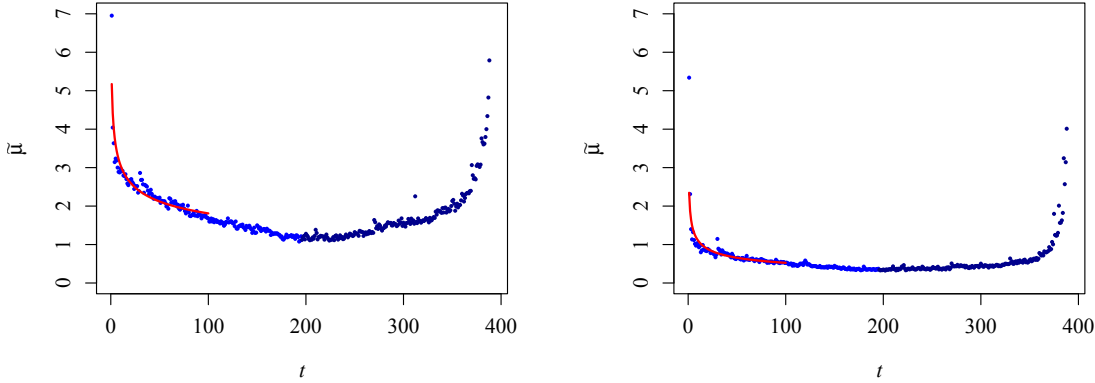


Figura 2.1: **Perfil intradiário da curva do volume médio transacionado.** A figura à esquerda representa os valores pertencentes ao 2S06 enquanto a figura à direita representa os valores pertencentes ao 1S13. O valor médio do expoente α até o 1S08 é de 0.29 e passa a ser de 0.37 após 2S08. A linha vermelha representa o ajuste numérico em lei de potência. Nas duas figuras os valores do volume transacionado médio estão divididos por 10^4 para uma melhor observação.

como ilustrado na 2.1. Novamente, ajustamos o último quartil da curva e o resultado foi um consistente aumento no valor do expoente da função de ajuste seguido de um cruzamento no primeiro semestre de 2007. A partir deste resultado, acreditamos que o modo como as agentes de mercado operam e se organizam perto do término da sessão foram afetadas pelas mudanças na regra de venda a descoberto - *uptick rule* [21] - mas não impactaram de modo significativo o começo da sessão.

O estudo feito sobre as flutuações de preços [22, 23] mostrou que seu desvio padrão - dependente do tempo intradiário - decai na primeira parte da sessão, similarmente a uma lei de potência t^α com um expoente em torno de 0.3. A proximidade desse expoente com o valor que calculamos para o relaxamento α sugere uma relação entre a volatilidade e o volume transacionado que caberia à Hipótese da Mistura de Distribuição. Para afirmar a mudança do perfil de negociação, avaliamos a concavidade do formato U através da expressão

$$C \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{d^2 \mu_i(t; s)}{dt^2} \quad (2.7)$$

e verificamos que essa quantidade diminuiu com o tempo 2.2, o que sustenta nossa afirmação de que o conhecido perfil intradiário U está cada vez mais se transfor-

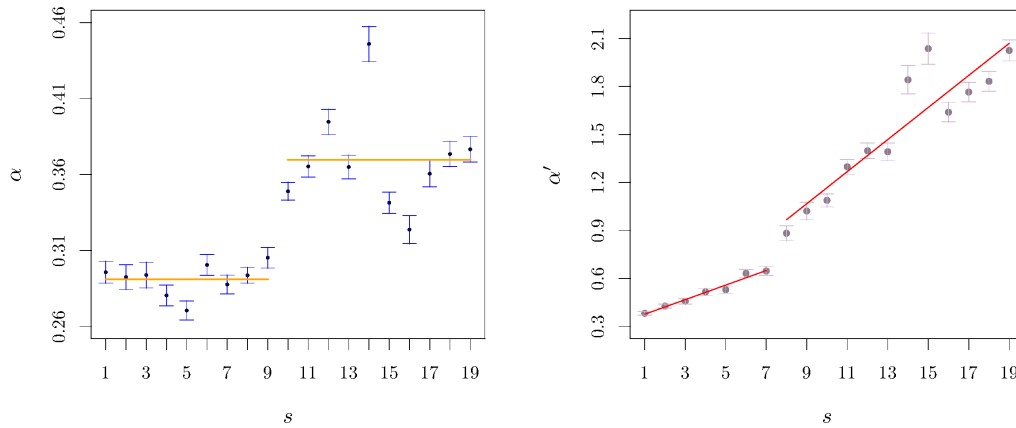


Figura 2.2: **Expoente de ajuste α' em função dos semestres s .** Valor do expoente α para o ajuste em lei de potência dos valores de volumes transacionados pertencentes ao período matutino em função dos semestres s . As duas linhas horizontais evidenciam a mudança do valor médio do expoente α dividindo a dinâmica em dois cenários: antes e após o segundo semestre de 2008 ($s=10$). O valor de t para o teste de Wech foi de 5.56 sendo significativamente maior que o valor crítico de t dentro de um nível de 95% de confiança $t_{critico} = 1.86$ reforçando o resultado do teste de Mann-Whitney-Wilcoxon para também um nível de confiança de 95%. **Expoente de ajuste α' em função dos semestres s .** Valor do expoente α' para o ajuste em lei de potência dos valores de volumes transacionados pertencentes ao período vespertino em função dos semestres s . As duas linhas em negrito representam os melhores ajustes para dois regimes diferentes: para o período de 1S04 até 1S07 com o valor de declive de 0.046 ± 0.004 ; e o período de 2S07 adiante cujo declive é de 0.1 ± 0.01 . O coeficiente de correlação para esses dois ajustes são de $R = 0.97$ e $R = 0.836$ respectivamente.

mando em \square . Além disso, verificamos que existe uma assimetria na curva do volume transacionado médio em função do tempo intradiário, porém, para este caso não foi impossível especificar qualquer tendência.

A assimetria apresenta um perfil circunflexo - $\hat{\smile}$ - figura 2.3; no entanto, a concavidade desse perfil é tão pequena que optamos por estudá-lo sob um ajuste linear. Tal ajuste substanciou a existência de comportamentos diferentes nos períodos de negociações matutino e vespertino, já que a inclinação média da última é 150% maior que a inclinação média da primeira, como se mostra na Fig.2.3. No entanto, a expressão mais vívida de que o comportamento das negociações matutinas e o comportamento

das negociações vespertinas são governados por mecanismos diferentes vem da curtose, para a qual obtemos um perfil tipo tilde - \sim - tal como apresentado na Fig.2.4, onde a parte vespertina da curva coincide com o começo do decréscimo do perfil. Quantitativamente descrevemos o início e o fim do perfil através das seguintes expressões,

sendo β_m correspondente ao coeficiente do período da manhã e β_a do período da tarde.

Curiosamente, a forma intradiária da curtose é capaz de identificar o chamado “efeito almoço”, para o qual se espera um aumento na atividade após muitos agentes retomarem seus trabalhos. No entanto, nossa análise mostrou que seu impacto vai além do mero retorno à negociação plena: é possível notar que, além de alguns pontos muito localizados, o efeito não aparece nas curvas da média e nem nas curvas da variância, mas fica totalmente claro para a curtose.

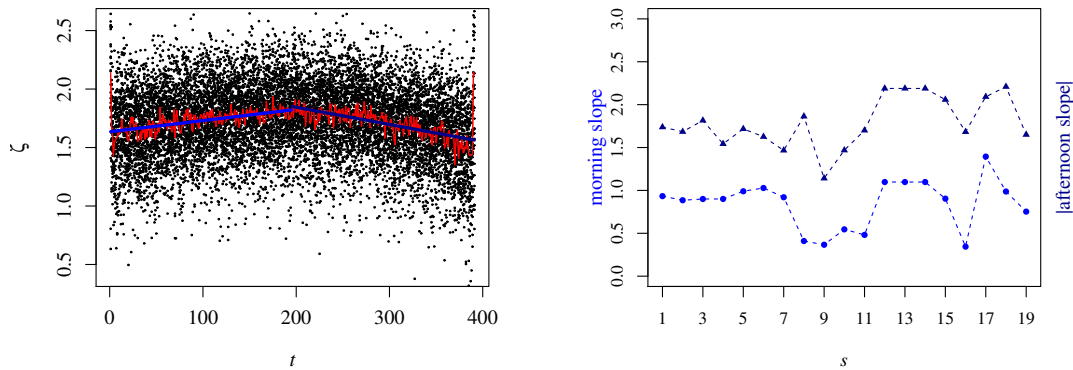


Figura 2.3: **Perfil intradiário da assimetria.** Painel à esquerda: Os pontos negros representam os valores da assimetria pertencentes ao 1S04 e as linhas vermelhas os ajustes lineares do período matutino com declive de $10^{-3} \pm 10^{-4}$ e do período vespertino com declive de $1.5 \times 10^{-3} \pm 10^{-4}$. Painel à direita: Valores dos declives dos ajustes em função dos semestres. Os pontos em azul claro representam os valores dos declives para o período matutino enquanto os em azul escuro os valores dos declives pertencentes ao período vespertino da sessão de negociação.

Como a curtose - também chamada de "excesso de curtose- é uma forma de medir a distância até uma distribuição normal, podemos interpretá-la como uma medida

da "surpresa" incorporada na distribuição. Dentro desta visão, compreendemos que no início do pregão há uma grande incerteza na quantidade de volume transacionado que é mantido com um grande valor da surpresa também. Essa relação está em contraste com a última parte da sessão, em que o aumento das flutuações não é tão surpreendente e a curtose diminui. Lemos esses fatos como se, em certo sentido, parte das informações transferidas para o preço das ações na primeira metade da manhã fosse assimilada pelo mercado durante a sessão - ou seja, a formação de um consenso sobre o preço dos ativos - enquanto a última parte da sessão é dominada por correções nos preços (sem nenhuma atualização significativa de informações relevantes/impactantes) que acompanha o fechamento das posições do agente intradiário. Pareando a curtose com a média do volume transacionado, notamos que pela manhã sua relação é fortemente parabólica enquanto que no período vespertino verificamos que o coeficiente parabólico (de segunda ordem) diminuiu até o semestre da crise, o segundo semestre de 2008, e efetivamente desapareceu pelos semestre em diante, tal como apresentado na 2.4.

Os nossos resultados nos apresentaram três lições importantes: i) Além da conhecida sazonalidade intradiária em forma de \cup , a sessão de negociação tem diferenças claras entre a dinâmica matutina e vespertina do sistema; ii) a relação diferente entre os cumulantes, especialmente a curtose e a média, para cada parte do período intradiário indica uma mudança na forma da distribuição além de uma simples modificação dos valores dos parâmetros, um efeito que pode ser obtido por (não) zerar parâmetros dinâmicos no conjunto de equações estocásticas que são apresentadas para imitar séries temporais de volume transacionado; e iii) essas características evoluíram, pelo menos, na última década com o segundo semestre de 2008 - o semestre em que a crise do *subprime* atingiu seu clímax - marcando o surgimento de mudanças no comportamento das negociações que modificaram as estatísticas do volume transacionado significativamente.

Analisando o comportamento de cada ativo como elemento de um grupo (estatística transversal), observamos o mesmo comportamento qualitativo encontrado na análise individual da variância e curtose. Quantitativamente, os valores da análise

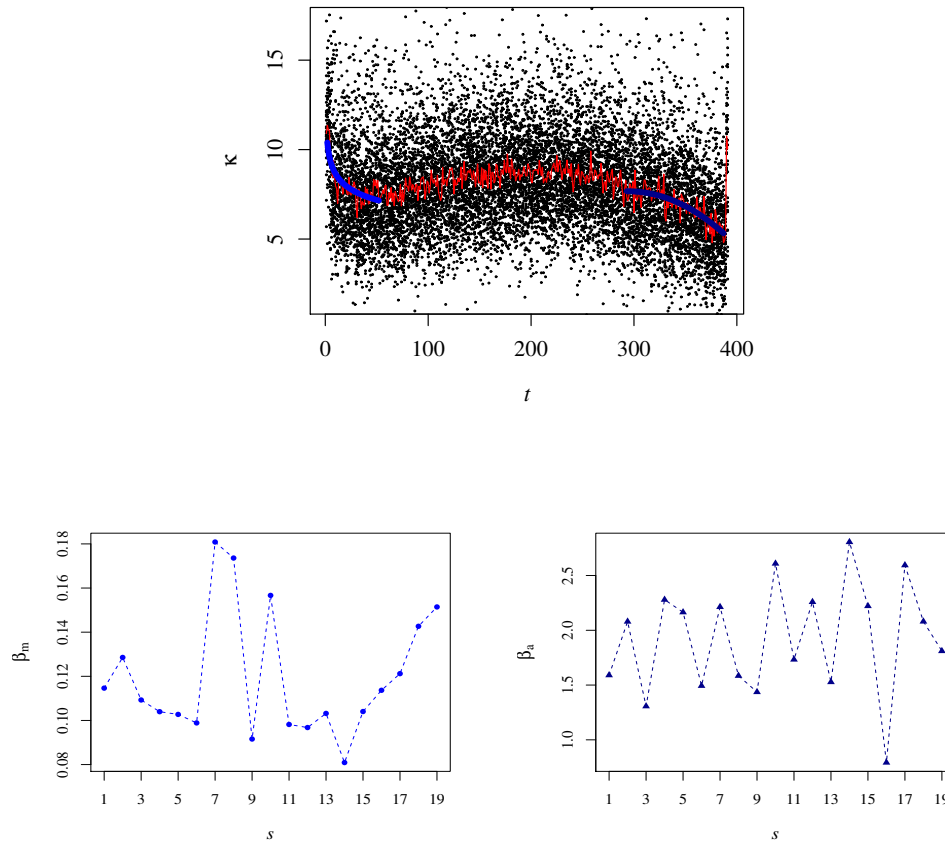


Figura 2.4: **Perfil intradiário da curtose.** Os pontos negros representam os valores da curtose para o 1S04 enquanto as linhas azul claro e azul escuro representam os ajustes exponenciais matutino $\beta_m = 0.11 \pm 0.02$ e vespertino $\beta_a = 2.16 \pm 0.03$, respectivamente. **Evolução dos expoentes de relaxação do ajuste das curtoses matutina β_m e vespertina β_a ao longo dos semestres.** Os dois expoentes diferem em um fator de 10.

transversal são menores que os obtidos para a abordagem individual. Na primeira parte da manhã, observamos que tanto a variância quanto a curtose se deterioram; isso pode ser lido da seguinte forma: principalmente devido a episódios após o encerramento da seção de operações do mercado, há um nível diferente de atividade entre os ativos, com alguns deles - eventualmente vinculados às informações relevantes divulgadas quando o mercado está fechado - com valores anormais de negociação. Essa turbulência é então dissipada - isto é, transferida para os preços dos ativos - na primeira hora de negociação com os volumes transacionados dos ativos relaxando

para uma distribuição.

Sobre o começo do período vespertino da sessão de negociação, a curtose aumenta, um fato que nós associamos com o efeito duplo de estratégias contrárias ou operadores intradiários dispostos a garantir algum lucro sobre as ações que mostraram atividade anormal na abertura. Posteriormente, há um relaxamento para uma distribuição Gaussiana e os ativos se comportam entre eles como o esperado - ou seja, nenhum deles apresenta níveis (relativos) de negociação fora de linha e apontando para um aumento do valor médio de negociação $\mu_i(t; s)$ - embora se dispersem à medida que o fim da sessão se aproxima. Com relação ao comportamento transversal não estacionário, notamos que o período entre o primeiro semestre de 2009 e o primeiro semestre de 2011 é marcado por um aumento sólido na curtose da seção transversal, sinalizando que o as disputas de 35% do DJIA naquele período provavelmente será abastecido por ativos que tinham níveis de negociação anormais.

Dito isto, ao contrário das flutuações de preço médio [24], concluímos que as diferenças do perfil \cup do volume transacionado decorre de razões que dependem do ramo da curva: na parte da manhã, temos consequência de fortes negociações de empresas que foram atingidas por eventos *overnight* e que precisam ser transferidos para o preço assim que o mercado abra - seja apenas para evitar as oportunidades de arbitragem -, enquanto a ascendência na última parte da sessão está relacionada à um aumento mais geral no nível de negociação entre todos os ativos.

2.1.2 Comportamento Coletivo das sazonalidades e não-estacionariedade do volume transacionado intradiário

Com o objetivo de expandir o estudo sobre comportamentos intradiários do volume transacionado, construímos matrizes de correlação para cada instante intradiário t entre os mesmo trinta ativos que compunham o grupo *Blue Chip* entre os anos de 2004 até 2013.

Para cada companhia i , podemos agrupar o volume transacionado $v_i(t, d; s)$ em relação ao parâmetro d - isto é, agrupar por dia - e em relação ao parâmetro s -

ou seja, agrupar por semestre - de tal forma a termos um conjunto $v_i(t, d; s)|_{d,s}$ com N_D elementos correspondentes ao número de dias em cada semestre s em um dado instante intradiário t . A combinação destas matrizes $N \times N_D$, sendo N o número de companhias, variáveis aleatórias é usada para definir cada matriz de correlação $C(t; s)$ de dimensão $N \times N$, cujas entradas correspondem ao coeficiente de correlação de Pearson, $(-1 \leq C(t; s)_{ij} \leq 1)$,

$$C(t; s)_{ij} \equiv \frac{\overline{v_i(t, d; s)v_j(t, d; s)} - \mu_i(t; s)\mu_j(t; s)}{\sigma_i(t; s)\sigma_j(t; s)}, \quad (2.8)$$

sendo a barra a representação da média em relação ao número de dias N_D de cada semestre. A média $\mu_i(t; s)$ e o desvio padrão $\sigma_i(t; s)$ são obtidos através do cálculo estatístico da média e desvio padrão para os dados pertencentes a cada conjunto de dias. Por consequência, os resultados são matrizes de correlação cujos elementos diagonais são unitários e, conseqüentemente, o traço sempre igual a 30.

Usando a Teoria das Matrizes Aleatórias e dentro do limite assintótico, $1 < \frac{N_D}{N} < \infty$, temos que o espectro de probabilidade dos autovalores λ segue uma distribuição de Marchenko-Pastur

$$\rho_{t;s} = \frac{N_D}{N} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{2\pi\lambda}, \quad (2.9)$$

para $\lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+$ e $\rho_{t;s}(\lambda) = 0$ e o autovalor máximo λ_+ e autovalor mínimo λ_- dados por

$$\lambda_{\pm} = 1 + \frac{N}{N_D} \pm 2\sqrt{\frac{N}{N_D}}, \quad (2.10)$$

para os quais os autovalores maiores que λ_+ formam a estrutura de correlações significantes das variáveis aleatórias enquanto os que ficam abaixo do "mar" de Marchenko-Pastur, $[\lambda_-, \lambda_+]$, são considerados ruídos.

Usando conjuntamente a Análise da Componente Principal e Teoria das Matrizes Aleatórias calculamos para cada minuto de negociação t o espectro de autovalores e verificamos que todos os primeiros autovalores correspondente a cada t , $\lambda_1(t; s)$ estão consistentemente fora do "mar" de Marchenko-Pastur, pois são maiores que o limite

superior λ_+ , provando que o comportamento coletivo dos ativos que compõe a DJIA são regidos por um modo de mercado apresentada na Fig. 2.9 (painel à esquerda).

De modo complementar, temos que os demais autovalores estão dentro do "mar" de Marchenko-Pastur (dentro do intervalo $[\lambda_-, \lambda_+]$), com exceção do segundo maior autovalor que nos primeiros instantes da sessão de negociação ficam bem acima do limite superior λ_+ - onde este pode também ser considerado um modo de mercado - e na transição entre o período matutino e vespertino ficam levemente acima de λ_+ conforme representado na Fig. 2.6. Este comportamento estabelece uma diferença clara entre o comportamento coletivo do volume transacionado e o comportamento coletivo das flutuações de preço em relação ao ruído branco das funções de autocorrelação já que para este último foram encontrados um conjunto bem maior de autovalores relevantes [25]. O que ainda se torna mais surpreendente ao vermos que o volume transacionado exibe uma curva da função de correlação com decaimento mais lento do que o encontrado para flutuações de preço ao mesmo tempo que para o volume transacionado foi encontrado sistematicamente apenas um modo coletivo de mercado estatisticamente significativo. Adicionalmente, embora λ_1/N seja maior para flutuações de preço, a diferença de quantidade de autovalores significativos se torna mais significativa quando entendemos que λ_2/N é igual a 0.07 para o volume transacionado enquanto para a flutuações de preço esse valor é de 0.02 obtido em [25].

Em um primeiro momento, assumimos ser um tanto conflitantes tais resultados mas uma análise subsequente nos mostrou que, apesar da defasagem, quanto maior o peso do modo de mercado do volume transacionado no espectro de autovalores, os próximos maiores autovalores continuam rentes ao limite superior. Isto é, quando consideramos os efeitos da assincronicidade nas negociações nas análises do comportamento coletivo do volume transacionado nós fortalecemos fundamentalmente a dinâmica coletiva dentro de uma linearidade de primeira ordem. A ausência de mudanças significativas para os segundos e terceiros maiores autovalores está certamente relacionada à alta liquidez característica do conjunto de ativos que estamos estudando, os *blue chip*, e os efeitos de segunda ordem se tornam mais claros ao considerarmos companhias menos capitalizadas e conseqüentemente com um ativo de menor liquidez.

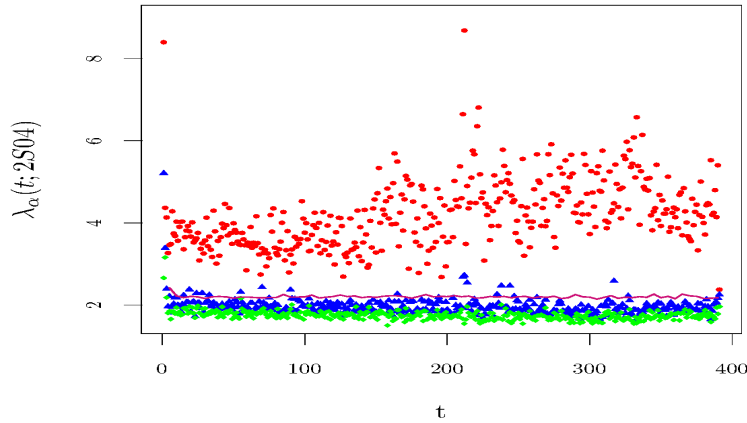


Figura 2.5: **Perfil intradiário dos três maiores autovalores.** Evolução dos três maiores autovalores do 2S04 $\lambda_{=(1,2,3)}(t; 2S04)$ das respectivas matrizes de correlação $C(t; 2S04)$. Os pontos vermelhos representam os autovalores $\lambda_1(t; 2S04)$, os triângulos azuis $\lambda_2(t; 2S04)$ e os losângulos verdes $\lambda_3(t; 2S04)$. A linha rosa representa os 95% maiores autovalores das matrizes de correlação obtidas de distribuições Gamma de mesma média e variância dos volumes transacionados das ações do DJIA para um dado instante t .

Ao longo da sessão, $\lambda_1(t; s)$ define aproximadamente uma forma de degrau pontuada com picos nos primeiros minutos da sessão e no início da parte vespertina, para a qual não é distinguível um processo de relaxamento. Aplicando o teste estatístico padrão t-Student, confirmamos com um nível de confiança de 95% que o volume transacionado também é definido coletivamente por dois regimes diferentes: antes e depois do almoço. Esse recurso une-se ao que afirmamos para uma análise transversal anterior: no período da manhã, a correlação entre os volume transacionados dos ativos do DJIA é menor e os grandes volumes transacionados decorrem principalmente do impacto das notícias divulgadas no *overnight* que passam tais informações para o preço assim que o mercado abre; à tarde, o modo coletivo do volume transacionado aumenta na sequência de um comportamento mais sincronizado dos ativos da DJIA, de forma que as caudas da distribuição do volume transacionado são o resultado de grandes volumes transacionados entre as empresas que compõem o índice.

As conclusões que acabamos de transmitir são ainda apoiadas pela análise da evolução do produto escalar entre o primeiro auto versor - isto é, primeiro auto versor

correspondente a cada instante t - e o versor uniforme

$$\vec{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{30}}(\hat{z}_{AA} + \hat{z}_{AIG} + \dots + \hat{z}_{XOM}). \quad (2.11)$$

O valor da projeção da primeira sobre a segunda aumenta com o tempo intradiário t significando que as empresas tendem a assumir pesos equivalentes na dinâmica coletiva à medida que o tempo passa; além disso, os picos na curtose do volume transacionado coincidem com as quedas abruptas do produto escalar, ou seja, partimos da quase-homogeneidade com algumas empresas assumindo algum tipo de papel de liderança.

Uma análise subsequente da matriz de correlação restrita aos maiores valores de volume transacionado provou que na abertura e após o almoço - que são os períodos para os quais temos o maior autovalor claramente além dos limites Marchenko-Pastur - a sobreposição (produto escalar) entre os primeiros auto versores da matriz de correlação completa e a matriz de correlação restrita atinge um valor em torno de 0.8 indicando que o elemento chave no comportamento coletivo do volume transacionado é o surgimento de grandes valores de v . Mais uma vez, somos capazes de quantificar o 'efeito almoço' mostrando que os agentes ainda levam em conta o início da segunda metade da seção em suas estratégias de negociação.

Com o objetivo de entender o grau de robustez do perfil intradiário dos autovalores, definimos os valores de autovalores assumindo cada minuto da sessão de negociação como uma dimensão ortogonal. A sobreposição de tais versores, ou seja, aqueles compostos de $\lambda_1(t; s)$ segundo a equação

$$\Lambda_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{t=1}^{390} \lambda_\alpha(t; s)^2}}(\lambda_\alpha(1; s)\hat{z}_1 + \lambda_\alpha(2; s)\hat{z}_2 + \dots + \lambda_\alpha(390; s)\hat{z}_{390}) \quad (2.12)$$

mostra que há uma mudança definitiva - apoiada por um teste F de significância estatística - no comportamento das flutuações de sobreposição antes e depois do segundo semestre de 2008, no qual houve o clímax da crise *sub-prime*. Este resultado

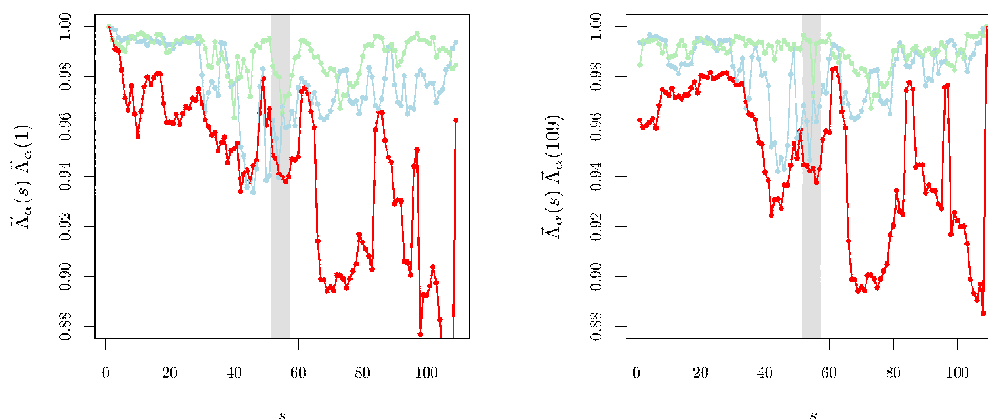


Figura 2.6: Evolução do produto escalar entre os vetores $\Lambda_\alpha(s)$ e $\Lambda_\alpha(1)$ em função dos semestres s representada pela figura à esquerda e entre $\Lambda_\alpha(s)$ e $\Lambda_\alpha(109)$ representada pela figura à direita .

também foi verificado assumindo outros semestres como referência.

2.2 Perfis coletivos e individuais da não-estacionariedade das flutuações de preço

Buscando uma forma efetiva de comparar as diferenças encontradas entre os resultados aqui apresentados e os trabalhos publicados por outros autores em temas correlatos, resolvemos então analisar as flutuações de preços do nosso conjunto de empresas dentro do mesmo período para qual avaliamos o volume transacionado.

Enquanto alguns mercados financeiros estão fechados, existem outros abertos e o mercado continua a funcionar, de modo que as variáveis que afetam o preço justo de um ativo e seus derivativos também mudam de acordo com os acontecimentos *overnight*. Como, nos mercados fechados, durante esse período não se pode negociar, há um acúmulo de tensão na abertura do mesmo causado pela movimentação dos agentes de mercado na tentativa de acertar suas posições de acordo com os acontecimentos gerando um excesso de volatilidade nos preços ao incorporarem as informações *overnight*.

O período próximo ao encerramento da seção é caracterizado pelo conhecido *warm up* da volatilidade pois é o momento no qual os agentes de mercado, principalmente os pequenos investidores e/ou fundamentalistas, tendem a montar posições seguindo uma estratégia protecionista contra más notícias que possam surgir durante o período *overnight*. Isso também é particularmente verdadeiro para os investidores que operam principalmente no intradiário e, por assumirem posições curtas, tendem a terminar o dia com posições abertas.

Esses dois momentos nos ajudam a entender o formato em U, como já foi discutido acima, para o volume transacionado, atividade de negociação e volatilidade intradiários (Admati e Pfleiderer, 1988; Andersen e Bollerslev, 1997; Duarte Queirós, 2016; Jain e Joh, 1988). Recentemente, o comportamento das sazonalidades intradiárias das flutuações de preços e volume transacionado foi estendido para momentos de ordem superiores, com resultados relevantes (Allez e Bouchaud 2011; Graczyk e Duarte Queirós 2016, 2017).

Adicionalmente, e assim como acontece para o volume transacionado, ainda na escala intradiária, foi possível observar comportamentos completamente distintos entre o período matutino - da abertura até as 12:59 - e o período vespertino - das 13:00 horas até o fechamento do mercado - de modo a sugerir que existem mecanismo dinâmicos diferentes para cada parte da seção. Ainda que a economia tenha períodos de expansão e recessão, bem como períodos de turbulência financeira, não esperamos que as características intradiárias sejam seriamente afetadas (pelo menos qualitativamente) por uma evolução de baixa frequência relacionada aos ciclos econômicos, de modo a ser possível verificar mudanças no comportamento quantitativo, assim como pôde ser visto para o volume transacionado nas seções anteriores.

Até onde sabemos, todos os tipos similares de estudos sobre a evolução das sazonalidades intradiárias não levam em conta as flutuações de preços (ou retornos) sendo esse, então, o objetivo deste estudo.

Especificamente, para nossa análise individual, identificamos assinaturas de não-estacionariedade em seus cumulantes de primeira ordem. Coletivamente, olhamos para a estatística dos resíduos, aplicando uma análise transversal e empregando a

Teoria da Matriz Aleatória (RMT) e Análise de Componentes Principais (PCA) para que pudéssemos estudar como o perfil intradiário das correlações entre retornos de ações evoluiu ao longo do período de tempo coberto pelos nossos dados históricos.

Para atingirmos nossos objetivos, usamos a mesma base de dados usados para as análises relatadas nas seções anteriores para o volume transacionado, e calculamos os retornos para diferentes intervalos temporais Δ . Sendo S_i o preço da ação de uma dada companhia i , podemos calcular o retorno $r_{\Delta,i}(t, d; s)$ desta ação para um dado tempo intradiário t , pertencente a um dado dia d e a um dado semestre s :

$$r_{\Delta,i}(t, d; s) = \ln S_i(t, d; s) - \ln S_i(t - \Delta, d; s). \quad (2.13)$$

A partir disso, calculamos as médias sobre as companhias, Ω e sobre os dias como podem ser descritos a seguir:

$$\overline{\Omega_{\Delta,i}(t; s)} \equiv \frac{1}{N_D} \sum_{d=d_f}^{d_t} \Omega_{\Delta}(d, t; s), \quad (2.14)$$

a média sobre os dias, e

$$\langle \Omega_{\Delta}(d, t; s) \rangle \equiv \frac{1}{N_C} \sum_t \Omega_{\Delta,i}(d, t; s), \quad (2.15)$$

a média sobre as companhias, sendo N_D os dias úteis pertencentes a um dado semestre s e N_C a quantidade de companhias.

As combinações das médias foram usadas para quantificar o comportamento individual de uma quantidade em um determinado período de negociação em um dado semestre,

$$\tilde{\Omega}_{\Delta}(t; s) \equiv \langle \overline{\Omega_{\Delta}(d, t; s)} \rangle; \quad (2.16)$$

e para quantificar o comportamento de uma dada empresa i em relação ao conjunto de empresas pertencentes ao DJIA,

$$\hat{\Omega}_{\Delta}(t; s) \equiv \langle \overline{\Omega_{\Delta}(d, t; s)} \rangle. \quad (2.17)$$

Dentro disso, denotamos μ o retorno médio e ν o retorno médio absoluto e, por conseguinte, suas médias sobre os dias

$$\mu_{\Delta,i}(t; s) \equiv \overline{r_{\Delta,i}(d, t; s)} \quad (2.18)$$

e

$$\nu_{\Delta,i}(t; s) \equiv \overline{|r_{\Delta,i}(d, t; s)|}, \quad (2.19)$$

e suas médias sobre as companhias

$$\mu_{\Delta}(t; s) \equiv \langle r_{\Delta,i}(d, t; s) \rangle \quad (2.20)$$

e

$$\nu_{\Delta}(t; s) \equiv \langle |r_{\Delta,i}(d, t; s)| \rangle; \quad (2.21)$$

similarmente a mediana tomada sobre os dias, $m_{\Delta,i}(t; s)$, e a mediana tomada sobre as companhias, $m_{\Delta}(d, t; s)$. A média sobre as companhias pode ser tomada como uma flutuação de um índice que representa as companhias dentro de uma igualdade de pesos sobre o log dos preços destas.

Reunindo os resultados e conclusões importantes, partimos da certeza advinda destes de que as sazonalidades dos retornos não são, de nenhuma maneira, estacionárias apresentando uma evolução temporal de comportamento extremamente clara e observável. Isso afirma que o mercado financeiro é um espelho da atividade humana, sendo está um comportamento totalmente mutável a cada dia em consequência de variáveis tais como o desenvolvimento tecnológico que mudou a forma de se operar no mercado. Não somente quanto ao uso de novas ferramentas de envio de ordens, que antes era feito tudo por telefone, mas com também o crescente uso de algoritmos robotizados operando no mercado ao invés de *traders* humanos: 85% em 2012 em contrapartida com 20% em 2004, de acordo com estudo realizado por Glantz e Kissell (2013). Um algoritmo hoje é capaz de operar com parâmetros que estudam desde o comportamento estatístico do mercado como também parâmetros que representam possíveis perturbações no mercado como notícias sobre índices econômicos, guerras,

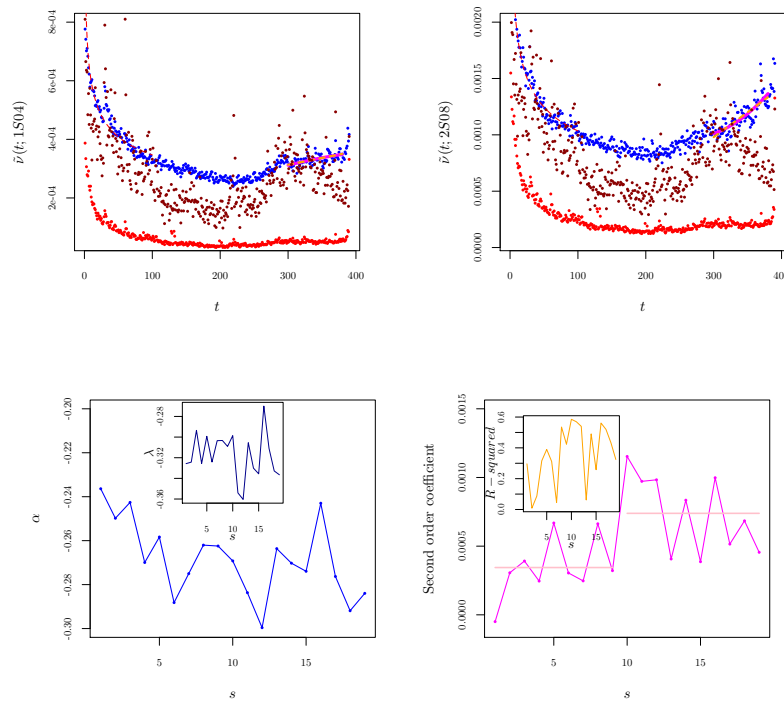


Figura 2.7: **Curvas da média dos retornos absolutos**, $\tilde{v}(t; s)$ em azul, $\tilde{\sigma}^2(t; s)$ em vermelho e $\hat{\sigma}^2(t; s)$ em bordô, **em função dos minutos intradiários e suas estatísticas ao longo dos semestres**. As linhas azuis e rosa representam os expoentes de lei de potência e coeficiente de segunda ordem de um ajuste polinomial, respectivamente.

decisões política, dentre outros.

Neste âmbito de evolução intrínseca do mercado iniciada pelo desenvolvimento humano, assim como fomos capazes de identificar para o comportamento do volume transacionado mudanças claras e significativas da concavidade das curvas, as mudanças de concavidade foram observada também nas curvas dos valores absolutos dos retornos no último quartil do período intradiário, mostrando uma relação íntima entre nervosismo dos agentes de mercado e o desconforto em operar devido às dificuldades em estipular seus parâmetros pelo imenso número de variáveis que influenciam os preços dos ativos e que, em períodos de crises, se tonam ainda mais difíceis de serem interpretadas devido à uma adicional instabilidade consequente. Esta característica pode ser materializada ao observarmos o fato de que os semestres mais côncavos correspondem ao semestre no qual houve a *sub-prime* e ao semestre no qual houve a

crise da dívida pública. Portanto, os valores da concavidade entre 0.006 e 0.008 juntamente com valores de simetria acima de 2.5×10^{-6} , podem ser usados como um sinal de alerta em relação a avaliação de risco em investimento de longo prazo.

Também foi possível verificar que tanto a concavidade quanto a simetria permaneceram ligeiramente acima dos valores anteriores ao do segundo semestre de 2008. Apesar do fato de que poderíamos interpretar isso como uma mudança permanente no perfil das ações *blue chip* pertinente à *sub prime*, apenas uma análise mais aprofundada, considerando um período maior, bem como outros mercados, poderia conferir significância a essa hipótese. É plausível afirmar que o aumento da concavidade começou no primeiro semestre de 2007, o semestre em que a *uptick rule* foi alterada, mas isso não explicaria o forte pico no segundo semestre de 2008. Além disso, verificamos que a curvatura no último quartil do período intradiário só muda depois disso.

Outro efeito desta modificação da regra de venda a descoberto no primeiro semestre de 2007 pode ser observado na curva do modo de mercado. Até este semestre, o modo de mercado decrescia com a aproximação do fechamento do mercado exibindo um comportamento de menor convergência das ações ao passo do encerramento da sessão. A partir do primeiro semestre de 2017 é possível observar um aumento consistente entre as ações, com valores mais próximos de λ_1 ao mesmo tempo que nos aproximamos de um comportamento mesocúrtico (Gaussiano) para os resíduos das flutuação de preços e um retorno a uma situação de declive negativo da curtose em função do tempo intradiário vespertino. As razões para tal evolução não são muito claras mas é razoável entendê-las como uma mistura dos episódios que descrevemos. No âmbito da função de correlação e sua relação íntima com o estabelecimento de conexões entre as ações, nossos resultados mostram que as mudanças que identificamos sugerem que a rede de ações evoluiu naturalmente.

Quando consideramos a estatística intradiária por um longo período de tempo, encontramos um conjunto de relações equivalentes àquelas que apresentamos anteriormente, mas apenas até o primeiro semestre de 2008. Em outras palavras, a partir da análise empírica anterior, foi estabelecido que quanto maior a volatilidade, menor a curtose. Essa relação estava associada à contribuição dominante da exposição de

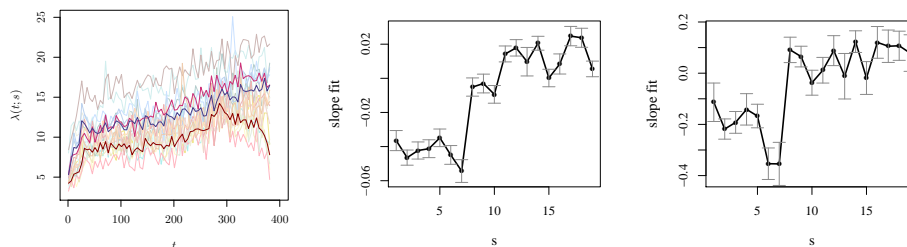


Figura 2.8: **Evolução temporal do maior autovalor $\lambda(t; s)$ respectiva à matriz de correlação das flutuações de preço $C(t; s)$ em função do período intradiário.** A linha bordo representa a média dos maiores autovalores referentes ao 1S04 até 1S07, a linha rosa a média dos maiores autovalores referentes aos semestres 2S07 até 2S08 e a linha azul escuro a média dos maiores autovalores referentes ao 1S09 ao 1S13. A curva cinza corresponde aos valores pertencentes ao 2S11 enquanto a rosa clara aos valores pertencentes ao 2S06. Os dois outros gráficos representam o coeficiente linear dos ajustes dos maiores autovalores considerando os últimos 100 minutos feitos numa frequência de 1 minuto e de 5 minutos, respectivamente.

mercado e não aos resíduos das ações que implicavam uma relação sublinear entre ν e σ . Ao mesmo tempo, o peso do modo de mercado diminuiu no último quartil do período intradiário indicando que as ações tiveram a intensidade de suas inter-relações diminuídas, sendo isso compatível com o aumento da variância transversal. Apesar do aumento do maior autovalor das matrizes de correlação, a dispersão transversal continuou mostrando o mesmo perfil intradiário anterior ao primeiro semestre de 2008, mas o perfil da curtose foi modificado. Isso nos leva a considerar o equilíbrio entre a exposição de mercado e os valores residuais, que sofreu modificações emergentes das transições entre relações sublineares e superlineares entre ν e σ . Além disso, para as várias formas da volatilidade, nos deparamos com perfis diferentes daqueles que encontramos para o volume transacionado, uma característica que representa uma grande desvantagem do MDH.

Por fim, vale lembrar que analisamos um conjunto específico de ações, as *blue chip* são ações que apresentam grande capitalização, alta liquidez e resiliência, isto é, seus preços tendem a convergir para um valor subjacente. Portanto, é plausível que ao se analisar um grupo maior de ações com um intervalo de capitalização mais amplo, seja possível determinar propriedades estatísticas diferentes entre as ações e

relacioná-las com essa quantidade financeira.

2.3 Perfis de correlação e não-estacionariedade entre o volume transacionado e a volatilidade.

Para completar a abordagem empírica de forma a termos resultados suficientes para tratar da parte teórica analisando o sistema financeiro sob o âmbito de um sistema complexo não-linear, tomamos a análise das relações entre o volume transacionado e a volatilidade.

Em sistemas complexos existem inter-relações entre cada elemento e também de cada elemento com a totalidade do conjunto tornando o estudo das observáveis, como flutuações de preço e volume transacionado, essencial para o entendimento da dinâmica de correlação entre as mesmas. Por este motivo, a abordagem de sistemas financeiros tem sido frequentemente analisada sob o âmbito de ferramentas e teorias oriundas da Física, como é o caso da aplicação da Teoria das Matrizes Aleatórias (RMT), em conjunto com a Análise da Componente Principal (PCA), que já geraram vários *insights* sobre as características coletivas das quantidades mencionadas anteriormente que impactam no gerenciamento de risco da carteira.

Assumindo a hipótese dos analistas técnicos (grafistas) de que o preço contém toda a informação que precisamos conhecer, entendemos que sempre ao existir uma negociação temos transferência de informações. Nesse sentido, é possível supor que o volume é uma aproximação para as informações de mercado e a volatilidade como forma de quantificar essa transferência [26].

Como exemplos de abordagens quantitativas que assumem o MDH, apontamos estudos sobre a natureza estocástica da volatilidade, bem como modelos heterocásticos semelhantes a ARCH [28, 29],

$$X_t = \epsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * X_{t-1}^2 \quad (2.22)$$

que consideram as flutuações de preço e o volume transacionado tendo o mesmo

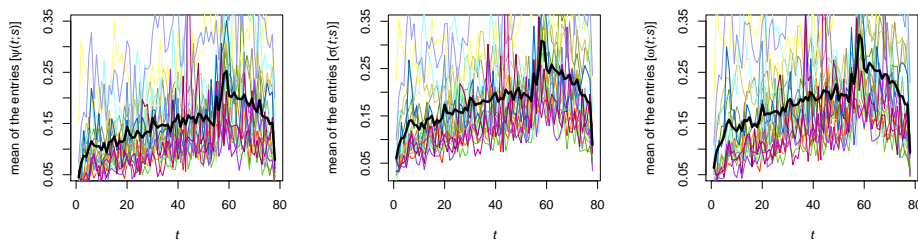


Figura 2.9: **Valor médio das matrizes de correlação entre o volume transacionado e a volatilidade ao longo da sessão de negociação para uma frequência de 5 min.** As linhas coloridas representam cada uma a média de cada companhia ao longo dos semestres sendo a linha preta em destaque a média sobre todas as companhias, tonando a ainda mais visível a diferença de comportamentos entre os períodos matutino e vespertino. Há um pico claro em $t = 60$ conseqüente da divulgação da Ata do Comitê Federal do Mercado Aberto e outras publicações do FED como o Beige Book [27].

subjacente.

Até o momento, vimos propriedades importantes sobre como o fluxo de informação evolui dentro do período intradiário e até que ponto tais características mudaram por influência de regras de negociação e de crises financeiras. Pretendemos concluir essa descrição avaliando se o fluxo de informação relacionado a uma dada empresa afeta as outras e como essa relação evolui ao longo do tempo.

Apesar de ser uma quantidade instrumental, a volatilidade não é diretamente observada, conseqüentemente, o seu valor pode ser sensível às suas diversas definições. A fim de calcular a volatilidade de maneiras diferentes, nós granulamos esses dados a uma escala de 5 minutos, de modo a termos um total de 78 intervalos temporais dentro de um período intradiário de negociação. Dito isto, empregamos as seguintes notações:

- $\nu_i(d, t; s)$, como a soma do volume transacionado de uma dada empresa i dentro de um intervalo de 5 minutos, sendo t a marcação intradiária temporal - $t = 1$ equivale ao tempo de relógio 09 : 35 horas, $t = 2$ equivale ao tempo de relógio de 09 : 40 horas e assim por diante-, d refere-se ao dia e s o semestre, que os dados foram divididos em semestres contínuos para avaliarmos a não-estacionariedade das propriedades intradiárias. Esta divisão nos permitiu

chegar a um bom equilíbrio entre a quase-estacionariedade e um número de dias estatisticamente significativo dentro de cada intervalo, tornando possível as análises estatísticas de ordens mais altas.

E as formas de medida de volatilidade, ϑ , expressas por

- $\sigma_i(d, t; s)$, o desvio padrão dos log-preços $\ln S_i(d, t; s)$ dentro de um intervalo de 5 minutos como a primeira forma de medir a volatilidade;
- $\omega_i(d, t; s)$ a volatilidade *High-Low-Close-Open*, conhecida como volatilidade de Garman-Klass, sendo a secundar forma de medirmos a volatilidade:

$$\omega_i(d, t; s) \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \left(\ln \frac{H_i(d, t; s)}{L_i(d, t; s)} \right)^2 - (2 \ln 2 - 1) \left(\ln \frac{C_i(d, t; s)}{O_i(d, t; s)} \right)^2};$$
- $\psi_i(d, t; s)$, como a flutuação de preço absoluta dentro de um intervalo de 5 minutos:

$$\psi_i(d, t; s) \equiv |\ln S_i(d, hh : mm; s) - \ln S_i(d, hh : (mm - 5); s)|.$$

Com essas quantidades calculadas, montamos as matrizes de correlação usando a definição abaixo para cálculo de cada entrada:

$$c_{ij}(t; s) \equiv \frac{\overline{v_i(d, t; s) \vartheta_j(d, d; t)} - \overline{v_i(d, t; s)} \overline{\vartheta_j(d, t; s)}}{\sqrt{\overline{v_i(d, t; s)^2} - \overline{v_i(d, t; s)}^2} \sqrt{\overline{\vartheta_j(d, t; s)^2} - \overline{\vartheta_j(d, dt; s)}^2}} \quad (2.23)$$

sendo as barras representações da média sobre todos os dias de um dado semestre s .

Dado que estas matrizes de correlação são calculadas entre quantidades distintas, os elementos das diagonais não representam os desvios padrões das distribuições, sendo possível apresentarem valores negativos fornecendo-nos autovalores pertencentes ao conjunto dos números complexos. A fração de elementos negativos nessas matrizes de correlação volume volatilidade é apresentada na Fig. 2.11. Adicionalmente, temos que essas matrizes 30×30 correspondem as submatrizes sem a diagonal principal de uma matriz maior 60×60 cuja diagonal desta corresponde as correlações entre volumes e entre volatilidades. Esta abordagem pode ser vista de maneira mais detalhadas nas referências [30] e [1]. Sabendo disso, nossa análise desenvolveu-se em torno

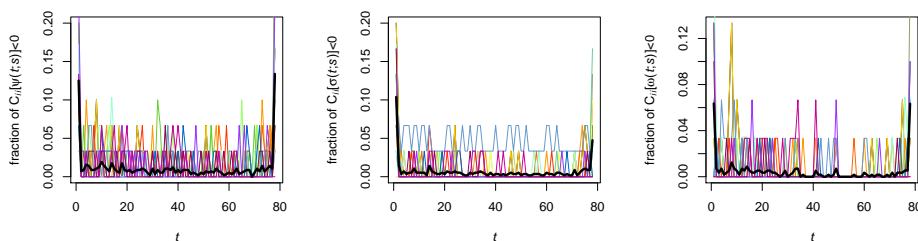


Figura 2.10: **Fração de valores negativos das diagonais das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade ao longo da sessão de negociação em uma frequência de 5 min.** Cada linha representa uma companhia e as linhas em destaque pretas representam a média sobre todas as empresas que compõem o *Blue Chip* entre 2004 e 2013.

do cálculo dos cumulantes das matrizes inteiras de correlação volume-volatilidade, considerando inclusive os elementos das diagonais.

Ainda assim, para mitigar os efeitos da finitude das matrizes C , calculamos todos os cumulantes assumindo as seguintes fórmulas para a variância, assimetria e curtose da mesma forma como nas equações (2.1) a (2.5).

Com todos esses resultados em mãos, analisamos suas implicações e a relação com outros resultados conhecidos. Começamos nossa análise na disputa do MDH-SIAH; nossos resultados sugerem que ambos ocorrem ao longo da sessão, em diferentes períodos: a SIAH domina as primeiras e últimas partes da sessão intradiária de negociações onde há pouca relação entre a *proxy* de informação (volume de negociação) e seu impacto (volatilidade). Isso é facilmente compreensível quando nos concentramos no fechamento: à medida que o mercado se aproxima deste, os investidores intradiários - muitas vezes lucrando com as condições de alavancagem oferecidas pelos corretores - têm que zerar suas posições, não importa como, enquanto durante a sessão a flutuação do preço de uma determinada empresa pode induzir a negociação de outra empresa ou porque estão dentro da mesma classe econômica ou porque representam um par adequado para uma estratégia de negociação de curto prazo.

Em outras palavras, depois que uma parcela relevante do dinheiro entra no mercado e até que ele seja descontado há significância para a hipótese do MDH. Contudo, nos extremos do dia útil a dinâmica segue a SIAH. Isso é enfatizado pela fração de

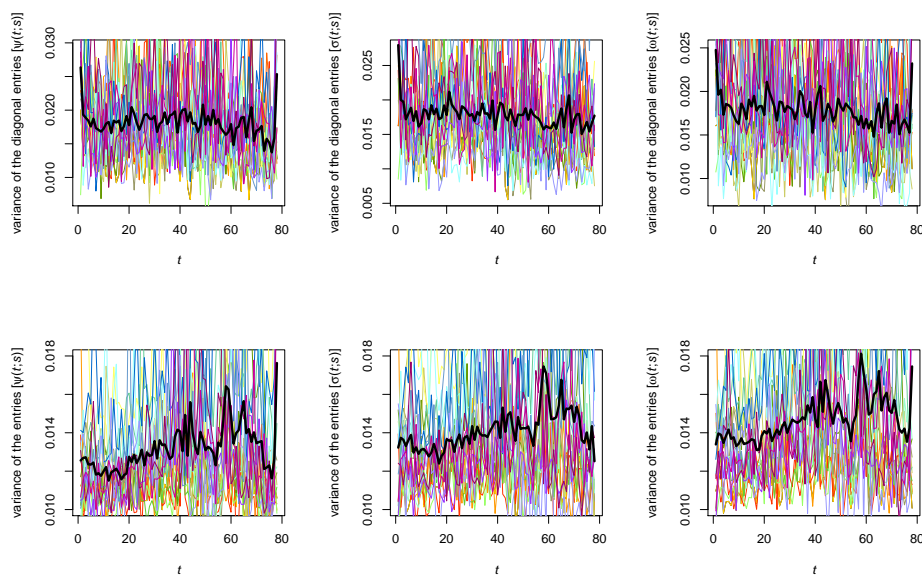


Figura 2.11: Gráficos superiores: **Variância dos elementos diagonais das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade** . Gráficos inferiores: **Variância de todos os elementos das matrizes de correlação entre volume transacionado e volatilidade** . As linhas coloridas representam cada companhia em sua média ao longo dos semestres enquanto as linhas pretas em destaque representam a média sobre todas as companhias. Note que para os gráficos inferiores, é nítida a diferença dos comportamentos referentes a cada período da sessão de negociação, com um pico crescente próximo ao fecho do mercado.

elementos diagonais negativos que foram vistos.

Ainda dentro das propriedades intradiárias, descobrimos que o decréscimo relativo da variância das matrizes de correlação cruzada – mostrada nos painéis da Fig. 2.12 – enfatiza a existência de dois regimes dinâmicos, com o pós-almoço marcando o ponto de virada; essa diminuição está de acordo com um movimento síncrono mais elevado dos preços das ações, enquanto no início da sessão a dinâmica é controlada pelas surpresas.

Em relação ao comportamento não-estacionário, os resultados obtidos estão em linha com o estudo de não-estacionariedade de longo prazo mostrando mais uma vez a mudança notável no décimo semestre, ou o segundo semestre de 2008, semestre marcado pela aplicação da chamada regra *up tick* que começou a permitir a entrada em posições de venda a descoberto em uma queda de preço [31]. A repressão da

restrição anterior tornou o comércio global mais flexível, particularmente à abertura e ao fechamento de estratégias de curto prazo.

Com este estudo, fechamos a abordagem sobre as sazonalidades intradiárias financeiras fundamentais. Em relação ao comportamento coletivo, usando a RMT e PCA, nos deparamos com a existência de um modo coletivo dominante associado ao maior valor próprio considerando os autovalores remanescentes - exceto o segundo maior que está robustamente acima do limite superior na abertura e um pouco acima durante a transição da manhã para a tarde - estão dentro do chamado mar Marcenko–Pastur [32, 30, 1]. O respectivo autovetor se aproxima da uniformidade à medida que a sessão de negociação avança. Aqui, não poderíamos usar as mesmas ferramentas porque os elementos da diagonal não correspondem à variância, mas sim a valores de correlação cruzada entre o volume transacionado e a volatilidade. No entanto, sua análise apontou para uma questão relevante: a dinâmica do mercado é propensa à SIAH na abertura e fechamento do dia útil e se aproxima do MDH na maior parte da sessão. Esta observação harmoniza dois quadros fundamentais da dinâmica financeira.

Para concluir, trazemos duas possíveis aplicações da análise atual. O primeiro consiste em uma extensão multivariada do modelo heterocástico proposto em [33], onde as flutuações de preços da empresa i no tempo t são dadas por

$$r_i(t) = \vartheta_i(t)\xi(t), \quad (2.24)$$

$$\vartheta_i^2(t) = a + b \sum_j m_{ij}^{(\sigma)} r_j^2(t-1) + c \sum_j C_{ij} v_j(t), \quad (2.25)$$

onde $\xi(t)$ é uma variável aleatória normal i.i.d. e as matrizes b e c seguindo as propriedades determinadas na escala intradiária. O segundo exemplo - que pode ser ligado ao primeiro - tem a ver com o efeito de alavancagem [34], que é sobre a anti-correlação entre retornos passados e volatilidade futura. Em [35], os autores separaram contribuições diferentes para esse efeito em um índice levando em consideração o comportamento coletivo descrito pelas matrizes de correlação. Essa separação pode ser levada mais longe, determinando a contribuição do volume transacionado tendo em mente as características de C_{ij} sobre as quais expomos acima.

Capítulo 3

Modelos de matrizes aleatórias

No que se refere à abordagem analítica é bem sabido – e já mencionado nesta tese – que para Sistemas Complexos sempre é possível utilizarmos as Leis da Termodinâmica numa perspectiva canônica para descrever a dinâmica de interações micro e macroscópicas. Adicionalmente, através dos resultados obtidos ao longo de meu percurso de pesquisa, para ir mais além se faz necessário analisar o sistema sob um ponto de vista de interações não-lineares.

Para tal, iremos abordar uma matriz de interdependência não-linear cujas entradas serão funções de entropia relativa. Para mais além, no que se refere à abordagem teórica, os resultados dessa análise serão usados para a formulação de uma teoria consistente capaz de descrever interações não-lineares em Sistemas Complexos e, como dito anteriormente, que possam ser utilizadas para além de tão somente sistemas financeiros.

Dentro de uma frequência inferior à uma hora, a primeira análise feita para volume transacionado foi realizada por Gopikrishnan P et al em 2000 [36] cujos resultados mostraram que a distribuição de probabilidade é consistente com uma lei de potência $p(v) \sim v^{-\beta}$, sendo $\beta = 2.7 \pm 0.01$ mostrando-se consistente com o regime de Lévy de modo a não ter um desvio padrão finito.

Apesar de o estudo da cauda da distribuição de densidade de probabilidade já ser bem conhecida em finanças, em maior parte é assumida uma distribuição log-Normal, pois se baseiam na definição que: os logaritmos das transações são variáveis aleatórias

de variância finita e por isso ao se levar em conta o teorema do limite central, para um dado período de tempo, o volume transacionado convergirá para uma distribuição log-Normal.

Sabemos, porém, que este tipo de distribuição está longe de ser a ideal para descrever a distribuição de volume transacionado principalmente quanto aos pequenos valores. Por este motivo, foi proposto por Osorio R et al em 2004 [37] que a distribuição do volume transacionado segue uma distribuição Gamma generalizada definida juntamente com a entropia não aditiva de Tsallis de forma a ser consistente com uma distribuição F para um α e um q pertencentes aos inteiros. Ainda no que se diz ao cenário dinâmico das correlações, estudados anteriores e cujos resultados principais foram já aqui expostos, a equação de correlação entre duas variáveis aleatórias x e y , que como já mencionado, pode ser expressa através do coeficiente de Pearson dado por

$$C_{xy}(t, \tau) = \frac{\langle x(t + \tau)y(t) \rangle - \langle x(t + \tau) \rangle \langle y(t) \rangle}{\sigma_x(t + \tau)\sigma_y(t)} \quad (3.1)$$

sendo $\sigma_x(t) = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2}$ a variância.

Quando as séries são consideradas estacionárias, a dependência do tempo t passa a não mais existir e, por conseguinte, há outras formas de calcular a correlação linear como a análise da característica difusa das séries aleatórias temporais feita através da Análise de Flutuação Retificada [38], cujo método consiste em determinar a auto afinidade estatística de uma série temporal a qual tem suas tendências de períodos grandes removidas para clarividenciar as tendências de curto prazo. Assim, quando $x = y$, espera-se que a função de flutuação retificada seja da forma $F(\tau) \sin \tau^{\hat{\alpha}}$ e, conseqüentemente, $C(\tau) \sim \tau^{2(\hat{\alpha}-1)}$. Em trabalhos nos quais foi usado tal método, tanto para ações pertencentes à NYSE [22] quanto para DJIA [39], o resultado foi que a função $C(\tau)$ é melhor descrita quando usada a superposição de duas funções exponenciais tal como

$$C_v = a \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_1}\right] + b \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_2}\right] \quad (3.2)$$

para uma normalização $a + b = 1$. Destas análises, foi verificado a nítida existência de duas escalas distintas cuja razão é de $\tau_2/\tau_1 = 28 \pm 11$.

Para o volume transacionado, os primeiros estudos para dados de alta frequência foram reportados em [40, 41, 42]. Em [41], foi verificado um nível relevante de multifractalidade com o $\alpha_{min} = 0.31 \pm 0.04$ e o $\alpha_{max} = 1.09 \pm 0.04$ e, em relação aos seus componentes, verificou-se ser o comportamento da lei de potência da função densidade de probabilidade o maior responsável (66%) indicando uma forte bifractalidade do volume transacionada [43] e uma residual contribuição (4%) de relações lineares de dependência. Além disso foi encontrado uma forte assimetria da curva $f(\alpha)$ indicando que flutuações grandes e pequenas aparecem devido a diferentes mecanismos dinâmicos.

Dito isso, podemos entrar na abordagem diferencial estocástica já que a equação acima da sobreposição de duas funções exponencial para descrever a correlação do volume transacionado sugere a existência de diferentes regimes dinâmicos que compõe o regime de evolução deste. Adicionalmente, a análise de multifractalidade mostrou que o volume transacionado é basicamente um bi-fractal devido ao comportamento da lei de potência assintótica que descreve a função de densidade de probabilidade.

É bem sabido que o volume transacionado é formalmente não-estacionário, principalmente pela grande variação na quantidade e agentes que compõe o mercado [44]. Inspirado pelo conceito de superestatística introduzido em [45] emergido da estrutura da mecânica estatística de não-equilíbrio [46], pode-se assumir localmente que o volume transacionado segue uma dinâmica dada pelo processo de Feller

$$dv = -\gamma(v - w) dt + \chi \sqrt{v} W_t, \quad (3.3)$$

sendo W_t um processo de Wiener padrão e $\chi = \sqrt{\frac{2}{\phi} w \gamma}$ associado à distribuição Gamma de tal maneira que

$$p(v; w) = \frac{\Phi^\Phi}{w \Gamma[\Phi]} \left(\frac{v}{w}\right)^{\Phi-1} \exp\left[-\frac{\Phi}{w} v\right] \quad (3.4)$$

para um valor médio $\langle v \rangle = w$.

Ao se levar em conta a variação ao longo do tempo na quantidade de agentes ativos no sistema, tem-se uma variação de w em longa escala quando comparada com a escala local de relaxação; ou seja, w passa a ser uma variável ao invés de

um parâmetro e pode ser considerado localmente constante para escalas de tempo longas. Isto vem em acordo com as observações empíricas de modo a ser possível ser conectado a duas significantes escalas da função de correlação: uma escala local de ordem $\gamma^{-1} \simeq \tau_1$ correspondendo à uma nova média local w tomada por v e uma segunda escala $T \simeq \tau_2$ a qual representa a evolução do número de agentes ativos de mercado ao longo do tempo.

Se qualquer um desses dois tipos de escala assume que a média local para grandes escalas de tempo segue uma distribuição Gamma inversa tal que

$$f'(w) = \left(\frac{\Phi}{\lambda}\right)^\delta \frac{w^{-\delta-1}}{\Gamma[\delta]} \exp\left[-\frac{\Phi}{w\lambda}\right] \quad (3.5)$$

então a distribuição de v de grande escala será dada pela integral

$$p(v) = \int p(v; w) f(w) dw \quad (3.6)$$

sendo correspondente a distribuição Gamma generalizada

$$p(v) = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^\alpha [1 + (q-1)\frac{v}{\theta}]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^\alpha \exp_q\left[-\frac{v}{\theta}\right] \quad (3.7)$$

com $\lambda = \frac{q-1}{\theta}$, $\Phi = (q-1)^{-1} - \delta$ e $\alpha = \delta - 1$.

Posteriormente, foi verificado que ao se considerar uma relação linear entre w e o número de agentes ativos no mercado para um dado intervalo temporal N , a função de densidade de probabilidade segue aproximadamente $p(N) \sim N^{-\delta-1}$. Em um exame mais minucioso e em linha com o expoente da distribuição de agentes ativos, uma análise dos momentos Kramers-Moyal do volume transacionado do DJIA evidenciou um perfil parabólico para o segundo momento que é diferente da forma linear implícita na equação de Feller. Para acomodar essa propriedade, o cenário foi alterado em um trabalho subsequente [39] assumindo uma dinâmica local dada por

$$dv = -\gamma\left(v - \frac{w}{\delta}\right)dt + \sqrt{2\frac{\gamma}{\delta}}v dW_t \quad (3.8)$$

com

$$f(w) = \frac{\Phi^\Phi}{\lambda \Gamma[\Phi]} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{\Phi-1} \exp\left[-\frac{w}{\lambda}\right] \quad (3.9)$$

levando à distribuição Gamma inversa

$$P(v) = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{-\delta-2} \left[1 + (q-1)\frac{\theta}{v}\right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.10)$$

onde $\lambda = \theta(q-1)$ e $\delta = \frac{1}{q-1} - \Phi - 1$.

É fácil notar que, redefinindo os parâmetros, existe correspondência entre a equação acima e a equação 3 de modo a ser possível chegarmos de uma distribuição q-Gamma inversa para uma distribuição q-Gamma e vice-versa. Uma primeira análise de valor médio local de volume transacionado [47] sugere uma distribuição Gamma.

3.1 Distribuição de Wishart e Distribuição de Wishart Inversa

A distribuição de Wishart é a distribuição amostral de uma matriz de somas de quadrados e produtos, mais explicitamente: Seja W uma matriz aleatória de dimensões $d \times d$ cuja distribuição d-dimensional de Wishart de n graus de liberdade e de variância Σ é dada por

$$W = \sum_{i=1}^n X_i X_i^T \quad (3.11)$$

onde $X_i \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$ nos permitindo a escrever de tal forma

$$W \sim \mathcal{W}_d(n, \Sigma). \quad (3.12)$$

Como a matriz de Wishart é análoga a uma distribuição multivariada de χ^2 , podemos escrevê-la como $\mathcal{W}_1(n, \sigma^2) = \sigma^2 \chi^2(n)$ de modo que, se $W \sim \mathcal{W}_d(n, \Sigma)$, então podemos inferir a igualdade $\mathbf{E}(W) = n\Sigma$.

Para duas distribuições independentes, W_1 e W_2 , com $W_i \sim \mathcal{W}_d(n_i, \Sigma)$ temos a

seguinte propriedade:

$$W_1 + W_2 \sim \mathcal{W}_d(n_1 + n_2, \Sigma). \quad (3.13)$$

E, para uma matriz aleatória A de dimensões $r \times d$ e novamente a matriz de Wishart $W \sim \mathcal{W}_d(n, \Sigma)$, temos a seguinte propriedade:

$$AWA^\top \sim \mathcal{W}_r(n, A\Sigma A^\top). \quad (3.14)$$

Para o caso de $r = 1$ e sendo $\lambda \in R^d$, temos então que $\lambda^\top W \lambda \sim \sigma_\lambda^2 \chi^2(n)$ sendo $\sigma_\lambda^2 = \lambda^\top \Sigma \lambda$.

Se a variância Σ é regular para a distribuição $W \sim \mathcal{W}_d(n, \Sigma)$, então W é também regular com uma probabilidade unitária se, e somente se, $n \geq d$. Para este caso, quando $n \geq d$, a distribuição de Wishart tem uma função de densidade de probabilidade definida por

$$f_d(w \mid n, \Sigma) = c(d, n)^{-1} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |w|^{\frac{n-d-1}{2}} \exp\left[-\frac{\text{Tr}(\Sigma^{-1})w}{2}\right] \quad (3.15)$$

para uma matriz w definida positiva - e zero para os demais casos - e onde a constante de Wishart $c(d, n)$ é

$$c(d, n) = 2^{\frac{nd}{2}} (2\pi)^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{i=1}^d \Gamma\left[\frac{(n+1-i)}{2}\right] \quad (3.16)$$

sendo Γ uma função Gamma e $|\Sigma|$ o determinante da matriz Σ . Desta forma, para um Σ regular e para $n > d$, temos então que W_{22} é regular com probabilidade unitária e tem as seguintes propriedades:

1. $W_{1|2}$ é independente de (W_{12}, W_{22}) ;
2. $W_{1|2} \sim \mathcal{W}_r(n - s, \Sigma_{1|2})$;
3. $W_{22} \sim \mathcal{W}_s(n, \Sigma_{22})$;
4. E a distribuição condicional W_{12} nos leva a igualdade $W_{22} = w_{22}$ a qual é uma distribuição multivariável Gaussiana $\mathcal{N}_{r \times s}(\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} w_{22}, \Lambda)$ onde a variância Λ é

uma matriz de covariância dada por $\Lambda_{ij,k} = Cov(W_{ij}, W_{kl} \mid W_{22} = w_{22}) = \sigma_{ik}^{\frac{1}{2}} w_{jl}$.

Como, por exemplo, podemos ilustrar o caso especial o qual a matriz de variância $\Sigma_{12} = 0$ de modo a podermos simplificar as equações $W_1 \mid 2 \sim \mathcal{W}_r(n-s, \Sigma_{11})$ e $W_{12} \mid W_{22} = w_{22} \sim \mathcal{N}_{r \times s}(0, \lambda)$ sendo $\lambda_{ij,kl} = \sigma_{ik} w_{jl}$. Este caso então nos leva a $W_{12} W_{22}^{-1} W + 21 \sim \mathcal{W}_r(s, \Sigma_{11})$. Vamos considerar agora uma distribuição normal $\mathcal{N}_3(0, \Sigma)$ cuja matriz de covariância Σ é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

de forma que a distribuição condicional de (X_1, X_2) para um dado X_3 tem uma matriz de covariância dada por

$$\Sigma_{12|3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Agora suponhamos que temos uma distribuição $W \sim \mathcal{W}(n, \Sigma)$ com a matriz de covariância especificada acima. Então podemos escrever:

$$W_{12|3} = \begin{pmatrix} W_{11} - W_{33}^{-1} W_{12}^2 & W_{12} - W_{33}^{-1} W_{13} W_{23} \\ W_{21} - W_{33}^{-1} W_{21} W_{23} & W_{22} - W_{33}^{-1} W_{23}^2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{W}(n-1, \Sigma_{12|3}) \quad (3.18)$$

de forma a ser independente de (W_{13}, W_{23}, W_{33}) . A distribuição condicional de $(W_{13}, W_{23})^\top$ dada por $W_{33} = w_{33}$ é do tipo Gaussiana bivariada com média

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_{33}^{-1} w_{33} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{33} \\ w_{33} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e matriz de covariância dada por:

$$w_{33}\Sigma_{12|3} = \frac{w_{33}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Porém, se $W_1 \sim \mathcal{W}_d(f_1, \Sigma)$ e $W_2 \sim \mathcal{W}_d(f_2, \Sigma)$ com $f_1 \geq d$, então a distribuição

$$\Lambda = \frac{|W_1|}{|W_1 + W_2|} \quad (3.21)$$

trata-se de uma distribuição de Wilk, podemos denotá-la por $\Lambda(d, f_1, f_2)$, o que nos leva a igualdade

$$\Lambda = \prod_{i=1}^d B_i \quad (3.22)$$

onde os componentes B_i são independentes e seguem uma distribuição Beta tal que

$$B_i = \mathcal{B}\left\{\frac{(f_1 + 1 - i)}{2}, \frac{f_2}{2}\right\}. \quad (3.23)$$

Podemos perceber que a distribuição de Wilks ocorre como o teste de verossimilhança para independência de modo que: Considerarmos uma matriz $W \sim \mathcal{W}_d(f, \Sigma)$ e a hipótese de que $\Sigma_{12} = 0$ para um bloco fixo de Σ particionado em matrizes de dimensões $r \times r$, $r \times s$ e $s \times s$, de forma que a estatística do teste é dada por

$$\frac{L(\hat{K}_{11}, \hat{K}_{22})}{L(\hat{K})} = \left[\frac{|W|}{|W_{11}||W_{22}|} \right]^{\frac{n}{2}} = M^{\frac{n}{2}}, \quad (3.24)$$

sendo M a matriz de covariância dada por

$$M \sim \lambda(r, f - s, s) = \Lambda(s, f - r, r) \quad (3.25)$$

de forma a termos, por conseguinte,

$$\Lambda(d, f_1, f_2) = \Lambda(f_2, f_1 + f_2 - d, d). \quad (3.26)$$

Como exemplo, vamos usar um caso multivariado onde consideramos uma distribuição

$Z = (X, Y)^\top$ na forma de $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ onde a matriz de covariância é dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{W}(n-1, \Sigma_{12|3}) \quad (3.27)$$

e a matriz de Wishart derivada do conjunto Z_1, Z_2, \dots, Z_n é descrita como

$$W = \begin{pmatrix} \sum_i X_i^2 & \sum_i X_i Y_i \\ \sum_i X_i Y_i & \sum_i Y_i^2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{W}(n-1, \Sigma_{12|3}) \quad (3.28)$$

tornando possível a expressar o parâmetro de Wilks para independência Λ

$$\Lambda = LR^{\frac{2}{n}} = \frac{\sum_i X_i^2 \sum_i Y_i^2 - (\sum_i X_i Y_i)^2}{\sum_i X_i^2 \sum_i Y_i^2} = 1 - R^2. \quad (3.29)$$

Como $\Lambda(1, n-1, 1)$, então

$$\frac{(n-1)R^2}{(1-R^2)} \sim F(n-1, 1). \quad (3.30)$$

Através da distribuição de Wishart também podemos chegar à distribuição T^2 de Hotelling. Sejam duas matrizes ortogonais Y e W cujas distribuições são dadas por $Y \sim \mathcal{N}_d(\mu, c\Sigma)$ e $W \sim \mathcal{W}_d(f, \Sigma)$ com $f \geq d$. A matriz T^2 de Hotellings, então, é escrita como

$$T^2 = \frac{f(Y - \mu)^\top W^{-1}(Y - \mu)}{c} \quad (3.31)$$

nos levando à

$$\frac{1}{1 + \frac{T^2}{f}} \sim \Lambda(d, f, 1) = \Lambda(1, f-d+1, d) \quad (3.32)$$

e

$$\frac{f-d+1}{fd} T^2 \sim F(d, f+1-d) \quad (3.33)$$

onde F denota a distribuição F de Fisher. Relembrando que a densidade de Wishart é escrita na forma

$$f_d(w | n, \Sigma) \propto |W|^{\frac{(n-d-1)}{2}} \exp^{-\frac{\text{Tr}(KW)}{2}} \quad (3.34)$$

e desde que a função de verossimilhança para Σ é dada por

$$L(K) = |K|^{\frac{n}{2}} \exp^{-\frac{\text{Tr}(KW)}{2}} \quad (3.35)$$

podemos obter a família conjugada da distribuição para K

$$\pi(K; a, \Psi) \propto |K|^{\frac{a}{2}-1} \exp^{-\frac{\text{Tr}(K\Psi)}{2}} \quad (3.36)$$

que assim especifica uma distribuição de Wishart para a matriz concentrada. Desta forma podemos dizer que Σ segue uma distribuição de Wishart inversa se $K = \Sigma^{-1}$ segue a distribuição de Wishart, formalmente expressa por

$$\Sigma \sim \mathcal{IW}_d(\delta, \Psi) \leftrightarrow K = \Sigma^{-1} \sim \mathcal{W}_d(\delta + d - 1, \Psi^{-1}), \quad (3.37)$$

ou seja, se a densidade da matriz K tem a forma de

$$f(K | \delta, \Psi) \propto |K|^{\frac{\delta}{2}-1} \exp^{-\frac{\text{Tr}\Psi K}{2}}. \quad (3.38)$$

Então repetimos a expressão para a densidade da distribuição padrão de Wishart $f_d(w | n, \Sigma) \propto |w|^{\frac{n-d-1}{2}} \exp^{-\frac{\text{Tr}(\Sigma^{-1}w)}{2}}$ de modo a nos dizer que a família da distribuição de Wishart inversa é a família conjugada para Σ . Se a distribuição inicial de Σ é $\mathcal{IW}_d(\delta, \Psi)$ e $W | \Sigma \sim \mathcal{W}_d(n, \Sigma)$, então podemos obter a densidade posterior de K

$$f(K | \delta, \Psi, W) \propto |K|^{\frac{n}{2}} \exp^{-\frac{\text{Tr}(Kw)}{2}} \times |K|^{\frac{\delta}{2}-1} \exp^{-\frac{\Psi K}{2}} = |K|^{\frac{n+\delta}{2}-1} \exp^{-\frac{\text{Tr}((\Psi+W)K)}{2}} \quad (3.39)$$

nos fornecendo então a distribuição posterior $\mathcal{IW}_d(\delta + n, \Psi + W) = \mathcal{IW}_d(\delta^*, \Psi^*)$.

3.1.1 Ensemble de Wishart

Construída originalmente para se estudar detalhadamente o espectro de um núcleo pesado já que interações entre partículas era demasiadamente complicado, apesar de Wigner e Dyson serem os pioneiros neste campo, foi Josh Wishart quem introduziu

em 1982 as matrizes aleatórias para o estudo de populações multivariadas.

Atualmente, os ensembles de Wigner-Dyson, também conhecido como ensembles Gaussianos, e os ensembles de Wishart, ou ensembles de Laguerre, são a base das matrizes invariantes para um sistema clássico. Estas matrizes são caracterizadas por:

1. A distribuição de probabilidade conjunta das entradas da matriz $P[\mathbf{x}]$ se mantém inalterada sob transformações do tipo $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1}$, sendo: \mathbf{B} uma matriz ortogonal quando \mathbf{X} é uma matriz real e simétrica; \mathbf{B} unitária quando \mathbf{X} é uma matriz complexa e Hermitiana; ou \mathbf{B} uma matriz simplética quando \mathbf{X} se trata de uma matriz auto-dual quatérnia; sendo seus autovetores uniformemente distribuídos dentro dos seus respectivos grupos.
2. A distribuição conjunta $P(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ dos N autovalores reais pode ser escrita na forma de Gibbs-Boltzmann de uma forma genérica para uma dada função de partição

$$Z_N = \int \dots \int \prod_i d\lambda_i \exp(-\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)) \quad (3.40)$$

e Hamiltoniana \mathcal{H}

$$\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^N V(\lambda_i) - \beta \sum_{j < k} \log |\lambda_j - \lambda_k| \quad (3.41)$$

é dada por

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} \exp(-\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)), \quad (3.42)$$

onde potencial de confinamento $V(x)$ depende da forma de distribuição conjunta $P[\mathbf{X}]$, que no caso de Wishart é dada por $v(x) = \infty$ para $x < 0$ e $V(x) = \frac{x}{2\sigma^2} - \alpha \log x$ para $x \geq 0$.

Da equação (2.1), podemos deduzir que um sistema de N autovalores de um ensemble clássico invariante se comporta como um sistema termodinâmico de partículas carregadas distribuídas em linha e em equilíbrio com o inverso da temperatura β sob a qual as interações acontecem dentro de um potencial de confinamento $V(x)$.

Porém, em contraste ao ensemble canônico usual na mecânica estatística, podemos abordar β como o índice quantizado de Dyson o qual pode assumir os valores de $\beta = 1$ para matrizes simétricas reais, $\beta = 2$ para matrizes hermitianas complexas e $\beta = 4$ as matrizes auto-duais quatérnias. Através desta bordagem tríplice de Dyson, Dimitriu e Edelman [48] conseguiram construir ensembles de matrizes triangonais de entradas independentes distribuídas de acordo com a equação (2.1) com $\beta > 0$. No entanto, tais ensembles não invariantes sob transformações de similaridades e os autovetores não seguem uma distribuição uniforme (distribuição de Haar) para o grupo de simetria apropriado.

Mas, depois de uma tentativa para matrizes 2×2 [49], foi apresentada para um ensemble Gaussiano em [50] e [51] a construção explícita de um ensemble de matrizes $N \times N$ exibindo ao mesmo tempo invariância rotacional e β contínuo. Adicionalmente também no trabalho de [50], foi mostrado que, apenas fazendo a escala do índice de Dyson β deste ensemble proporcional ao tamanho da matriz N - nomeadamente $\beta = \frac{c}{N}$ - obtém-se um conjunto contínuo de densidades espectrais deformadas parametrizadas por c , sendo este a interpolação entre o semicírculo de Wigner típico para ensembles invariantes $\beta \sim \mathcal{O}(1)$ e a Lei Gauss que descreve adequadamente o limite de não-interação $\beta \rightarrow 0$. Deste modo, pode-se implicar que

- Ao começarmos por uma distribuição estacionária conjunta de autovalores, tomando $\beta = c/N$ e obtendo assim a função média de densidade dos autovalores dada por $\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \langle \sum_i \sigma(\lambda - \lambda_i) \rangle$, podemos analisar tal densidade no limite onde N é suficientemente grande de tal forma que a função de densidade média pode ser obtido através da análise padrão do ponto de sela da função de partição. Nomeadamente, quando $\beta \sim \mathcal{O}(1)$, somente o termo de energia $\sim \mathcal{O}(N^2)$ domina e o termo de entropia $\sim \mathcal{O}(N)$ é subliminado. Porém, quando temos um $\beta \sim c/N$, tanto a energia quanto a entropia possuem a mesma ordem $\sim \mathcal{O}(N)$ e, portanto, as duas devem ser consideradas nos levando a uma abordagem não trivial de modificação da função de densidade que, quando referida ao ponto de sela da função, a equação integro-diferencial não-linear singular pode ser reduzida à uma equação de Riccati usando uma transformada Stieltjes para

a função de densidade, obtendo-a através da parte imaginária da transformada.

- Se, ao invés, começarmos por uma equação da dinâmica de movimento dos autovalores, podemos derivar diretamente da equação de movimento de transformada de Stieltjes da função de densidade através do cálculo de Itô, tornando possível obtermos a solução estacionária e a função de densidade média tomando a parte imaginária da transformada.

Assim, podemos definir o ensemble de Wishart \mathcal{W}^β como, seja \mathbf{X} uma matriz gaussiana aleatória real ou complexa no espaço de dimensões $M \times N$ reais ou complexas cuja distribuição é descrita por

$$P(\mathbf{X})d\mathbf{X} \propto \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\text{Tr}(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{X})\right)d\mathbf{X} \quad (3.43)$$

de tal forma que o Ensemble de Wishart é uma matriz quadrada de dimensões $N \times N$ obtida através do produto $\mathbf{W} := \mathbf{X}^\dagger\mathbf{X}$. Quando $M \leq N$, temos a propriedade de que todos os N autovalores positivos do ensemble de Wishart apresentam uma distribuição de densidade de probabilidade conjunta

$$P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i \lambda_i\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (3.44)$$

na qual \mathcal{Z} é o fator de normalização para o caso real $\beta = 1$, complexo $\beta = 2$, quatérnio $\beta = 4$ ou para quaisquer $\beta > 0$. Para uma abordagem contínua, pode-se definir uma matriz em um tempo fictício $t \leq 0$ para um processo difusivo no qual a matriz convergirá a um Ensemble Wishart para um t suficientemente grande. Ou seja, sendo \mathbf{X}_t uma matriz de processo aleatório real ou complexa de dimensões $M \times N$ que segue a lei de Ornstein-Uhlenbeck

$$d\mathbf{X}_t = \Theta\mathbf{X}_t dt + \Sigma^T d\mathbf{B}_t \quad (3.45)$$

para uma matriz aleatória real ou complexa cujas entradas são movimentos padrões independentes Brownianos, sendo μ seu valor esperado, σ a variância e α a escala

de relaxamento da distribuição. Para um processo Browniano padrão de média zero, temos o processo Gaussiano com uma função de covariância $\langle B_t B_{t'} \rangle = \min(t, t')$. Já que esta lei estacionária do processo de Ornstein-Uhlenbeck é a Lei de Gauss, a matriz real (ou complexa, respectivamente) \mathbf{X}_t converge para a lei Gaussiana real (complexa) da matriz aleatória quando $t \rightarrow \infty$ de forma a podermos deduzir que a matriz real (complexa) \mathbf{W}_t define uma matriz de processo difusivo que converge para $\mathbf{W} \in \mathcal{W}^\beta$ com $\beta = 1, 2$.

Podemos facilmente verificar que, no caso em que \mathbf{W}_t é uma matriz positiva definida verifica a equação estocástica diferencial apresentada por Bru [52], para uma matriz aleatória Browniana real $\beta = 1$ ou complexa $\beta = 2$:

$$d\mathbf{W}_t = (\beta \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{W}_t + \mathbf{W}_t \boldsymbol{\Theta}^T) dt + \sqrt{\mathbf{W}_t} d\mathbf{B}_t \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}^T d\mathbf{B}_t^T \sqrt{\mathbf{W}_t}. \quad (3.46)$$

Usando a teoria da perturbação em segunda ordem, podemos obter a evolução dos autovalores $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$:

$$d\lambda_i = -\lambda_i dt + 2\sigma \sqrt{\lambda_i} db_i + \sigma^2 \beta (\boldsymbol{\Theta} + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}) \quad (3.47)$$

para o caso real $\beta = 1$ e o caso complexo $\beta = 2$ onde b_i Brownianos independentes. A distribuição estacionária do processo $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)(t)$ é necessariamente uma função de densidade conjunta de probabilidade $P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ sendo esta igualdade verdadeira para todos os valores de $\beta > 0$ e pode ser recorrida usando a equação de Fokker-Planck para uma difusão multivariada $d\lambda_i$.

3.1.2 Entropia relativa e a Distância de Kullback-Leibler

Muitas situações em sistemas complexos requerem uma estimativa quantitativa da entropia relativa a duas distribuições de probabilidades distintas, como por exemplo uma predição da variação do preço de um ativo deve envolver a entropia relativa na série histórica do volume transacionado comparado ao ensemble de predição, ou a entropia relativa em um ensemble Gaussiano de estratégia de precisão que envolve o

primeiro e segundo momentos comparado com um ensemble não-Gaussiano. Ou seja, quando é preciso entender como duas variáveis distintas evoluem comparativamente uma a outra, a entropia relativa pode ser usada como uma ferramenta quantitativa para tal fim.

A entropia relativa é uma forma natural de quantificar esta informação pois esta é uma medida da distância entre duas distribuições de probabilidade, conhecida como fórmula de Kullback-Leibler. Desta forma, podemos estimar a dependência média para um sistema de multivariáveis de tal forma a medir a dispersão de um conjunto de dados quantitativos.

Dito isso, iremos analisar a entropia relativa de sistema composto por dois conjuntos distintos de variáveis aleatórias, volume transacionado e preço. Primeiramente, a entropia, sendo uma medida de incerteza de uma variável aleatória, é uma medida da quantidade média de informação necessária para descrevê-la - como por exemplo a série de preços de um ativo financeiro - e pode ser descrita como:

Seja X um conjunto discreto de variáveis aleatórias de n observações, que tem uma função de densidade de probabilidade dada por $p(x) = PrX = x$ com $x \in X$. Então a entropia $H(X)$ de uma variável aleatória discreta X é definida por

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log p(x). \quad (3.48)$$

Já a entropia relativa, ou a distância de Kullback-Leibler, uma medida da distância entre duas distribuições de probabilidade de uma variável aleatória X . Esta surge como um logaritmo esperado da razão de verossimilhança entre as variáveis:

$$D(p||q) = \sum_{x \in X} p(x) [\log p(x) - \log q(x)] = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (3.49)$$

A entropia relativa $D(p||q)$ é uma medida de ineficiência ao assumir que a função de distribuição é q quando a verdadeira distribuição é p . Um exemplo: Se conhecermos a verdadeira distribuição p de uma variável aleatória, será possível então construir um código com um comprimento médio de descrição dado por $H(p)$. Assim, se ao invés, usarmos o código para a distribuição q , precisamos de $H(p) + D(p||q)$ de informação

média para descrever a variável aleatória X .

Se quisermos medir a quantidade de informação que uma variável aleatória X contém sobre uma outra variável aleatória Y , ou seja, a incerteza que uma variável aleatória tem por ter informação sobre a outra variável aleatória, podemos calcular a entropia relativa entre a distribuição conjunta $p(x, y)$ e o produto de distribuições $p(x)p(y)$:

$$D(p(x, y) \| p(x)p(y)) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{(p(x)p(y))}, \quad (3.50)$$

também conhecida como informação mútua $I(X; Y)$.

Esta pode ser reescrita como:

$$D(p(x, y) \| p(x)p(y)) = \sum_{x, y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \quad (3.51)$$

$$= \sum_{x, y} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \quad (3.52)$$

$$= - \sum_{x, y} p(x, y) \log p(x) + \sum_{x, y} p(x, y) \log p(x|y) \quad (3.53)$$

$$= H(X) - H(X|Y), \quad (3.54)$$

mostrando que a entropia relativa se relaciona com a informação mútua de tal forma ser uma redução na incerteza de X gerada pelo conhecimento de Y .

Desta forma, iremos usar as séries temporais de volume X e preço Y e calcular as entropias relativas nomeadamente usando $p(x, y)$ em relação a $p(x)p(y)$ sendo x e y o volume e preço de ações de duas companhias j e f , sendo possível j e f serem a mesma companhia, pertencentes ao conjunto de empresas k .

Um detalhe muito importante é que, como o cálculo de entropia é sensível à largura dos histogramas utilizados para a determinação das Funções de Densidade de Probabilidade, iremos utilizar técnicas de cálculo de entropia *binless* [53, 54] sendo esta baseada no algoritmo de Kozachenko-Leonenko. Essa técnica é baseada na distância Euclidiana ao elemento vizinho mais próximo sendo útil para análises de séries

de dados que tenham tanto o aspecto de precisão temporal quanto de uma estrutura de extensão de intervalo temporal.

Sob o âmbito da fluidez da informação para o sistema e a dinâmica de comportamento do sistema em consequência, como já descrito anteriormente, usaremos o paralelo com o Demônio de Maxwell assim como os trabalhos no século XX da Máquina de Szillard e Landauer:

Dentro do âmbito da Teoria das Matrizes Aleatórias, para um conjunto de N empresas, iremos construir matrizes $N \times N$ na qual cada entrada da matriz terá como valor a entropia relativa para o volume e preço. Posteriormente, iremos tratar essas matrizes similarmente ao processo da Análise da Componente Principal, ou seja, iremos analisar se a extração de informações como modos de mercado, não-estacionariedade da interdependência não-linear, possíveis sazonalidades e padrões de dinâmica, densidade de autovalores, estrutura dos autovetores, entre outros.

Outro ponto que deve levar destaque é a diferença de características fundamentais entre as matrizes de correlação e as matrizes de co-entropia como, por exemplo, o fato de as diagonais não serem intrinsecamente unitárias e os elementos não serem necessariamente positivos levando-nos a necessidade de introduzir uma série de questões paralelas de natureza matemática.

3.1.3 Tratamento das matrizes de dependência via distância de Kullback-Leibler

Aqui usaremos a distância de Kullback-Leibler também para tratarmos as matrizes de dependência que serão calculadas segundo descrito na seção acima, trataremos ela como uma medida de informação filtrada das matrizes de dependência.

Seja $K(p, q)$ a distância de Kullback-Leibler, ou entropia mútua, entre duas densidades de probabilidades p e q e sendo E_p o valor esperado em relação a densidade de probabilidade p , podemos definir como:

$$K(p, q) = E_p\left[\log \frac{p}{q}\right] \quad (3.55)$$

sendo esta uma distância assimétrica e medida de acordo com a distribuição p . Quando é necessário a simetrização desta distância, podemos usar a J-divergência de Jefferys-Kullback-Leibler.

Para uma distribuição multivariada Gaussiana associada à variável aleatória X de dimensão N , podemos defini-la através de uma matriz de dependência Σ do sistema de forma que a função densidade de probabilidade possa ser representada por $P(\Sigma, X)$.

Assim, para duas funções distintas de densidade de probabilidade $P(\Sigma_1, X)$ e $P(\Sigma_2, X)$, a distância de Kullback-Leibler é dada por

$$\begin{aligned} K(P(\Sigma_1, X), P(\Sigma_2, X)) &= E_{P(\Sigma_1, X)}[\log \frac{P(\Sigma_1, X)}{P(\Sigma_2, X)}] \\ &= \int P(\Sigma_1, X) [\log \frac{P(\Sigma_1, X)}{P(\Sigma_2, X)}] dX \\ &= \frac{1}{2} [\log(\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}) + \text{Tr}(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1) - N]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Sendo esta distância apenas bem definida quando as matrizes Σ_1 e Σ_2 são definidas positivas ou seja, são distribuições multivariadas Gaussianas. Em casos nos quais o tamanho de cada série temporal T é menor que a quantidade de séries (elementos) do sistema N cuja matriz de dependência será semi-positiva não podem ser analisados sob a abordagem deste método.

Já é sabido que a distância de Kullback-Leibler se relaciona com a Análise do Fator de Máxima Verossimilhança (AFMV): podemos maximizar uma log-função de verossimilhança com o objetivo de descrever um sistema. Seja \mathcal{C} uma matriz de dependência estimada a partir de um conjunto de dados de tamanho T e quantidade de elementos N e seja uma matriz de dependência Σ_k que segue uma dada k -distribuição. Este sistema então pode ser descrito através da Lagrangiana:

$$L(\mathcal{C}, \Sigma_k) = -TK(\mathcal{C}, \Sigma_k) - \frac{1}{2}T[\log(\det(2\pi\mathcal{C})) - N]. \quad (3.57)$$

Sob a AFMV, a Lagrangiana $L(\mathcal{C}, \Sigma_k)$ é maximizada em relação à matriz de dependência Σ_k sendo equivalente a minimizar a função distância de Kullback-Leibler $\mathcal{K}(\mathcal{C}, \Sigma_k)$ também em relação à Σ_k pois pela equação acima podemos ver que os demais termos

são independentes desta matriz de dependência. Isto nos afirma que a matriz de dependência \mathcal{C} é a única a ser estimada a partir dos dados investigados e a única a calibrar a matriz de dependência do modelo Σ_k através da maximização de $L(\mathcal{C}, \Sigma_k)$, explicando o fato de que a log-função de verossimilhança depende da função de distância de Kullback-Leibler $K(\mathcal{C}, \Sigma_k)$ e não $K(\Sigma_k, \mathcal{C})$.

Vamos considerar então duas matrizes de dependências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 obtidas através de dois cálculos independentes de um mesmo sistema de tamanho N . Seja então \pm a matriz de dependência de dimensão N obtida através dos do vetor aleatório de distribuição multivariada X . Usando as propriedades do Ensemble de Wishart explicitados nas seções anteriores, podemos escrever o valor esperado:

$$E[K(\Sigma, \mathcal{C}_1)] = \frac{1}{2} \left\{ N \log\left(\frac{2}{T}\right) + \sum_{p=T-N+1}^T \left[\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} \right] + \frac{N(N+1)}{T-N-1} \right\} \quad (3.58)$$

e

$$E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)] = \frac{1}{2} \left\{ N \log\left(\frac{T}{2}\right) - \sum_{p=T-N+1}^T \left[\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} \right] \right\} \quad (3.59)$$

sendo $\Gamma(x)$ uma função Gamma e $\Gamma'(x)$ sua derivada. Desta forma, obtemos um valor esperado independente de Σ e, então, independente do modelo específico usado para a descrição ou geração dos dados:

$$E[K(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)] = \frac{1}{2} \frac{N(N+1)}{T-N-1}. \quad (3.60)$$

Esta independência nos fornece duas propriedades, como também suas consequências, muito importantes e úteis:

- A distância de Kullback-Leibler é uma boa ferramenta para medirmos a incerteza estatística das matrizes de correlação calculadas com séries temporais de tamanho finito e
- O valor esperado da distância de Kullback-Leibler pode ser calculado mesmo quando o modelo hipotético que descreve o sistema é desconhecido.

A primeira implicabilidade é a utilização desta distância para filtrar as matrizes de correlação provindas de séries temporais finitas de modo a remover as incertezas estatísticas empíricas. Vamos elucidar da seguinte maneira:

Suponhamos C uma matriz de correlação advinda de um conjunto série de observáveis finitas que pode ser bem aproximado de uma distribuição Gaussiana multivariada e que o observador aplica um processo para remover as inevitáveis incertezas estatísticas obtendo assim uma matriz de correlação filtrada C^f . Se a técnica utilizada para a filtragem é capaz recuperar a matriz de correlação modelo, teremos então a igualdade $C^f = \Sigma$ e, por conseguinte, a distância de Kullback-Leibler será necessariamente ao valor médio fornecido pela equação $E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)] = \frac{1}{2} \{N \log(\frac{T}{2}) - \sum_{p=T-N+1}^T [\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}]\}$. Mas como esse valor esperado é independente deste modelo desconhecido da matriz de correlação Σ , então grandes desvios deste valor esperado indicam que a matriz filtrada C^f não é consistente com a verdadeira matriz do sistema C .

Adicionalmente, se $K(C, C_f)$ é significativamente menor que o valor esperado $E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)]$, nos indica que a matriz filtrada continua a apresentar incerteza estatística consequente do tamanho finito T da série de dados; enquanto, se $K(C, C_f)$ é significativamente maior que o valor esperado $E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)]$, nos indica que a matriz de correlação filtrada apresenta uma distorção da realidade por ter suas informações filtradas demais. Desta forma, podemos verificar a distância entre $K(C, C_f)$ e $E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)]$ como um indicador de qualidade do processo de filtragem em manter a maior quantidade de informação relevante presente dentro de uma amostra da matriz de correlação estimada com um número finito de dados. A segunda implicabilidade se refere à estabilidade da matriz filtrada obtida a partir da matriz de correlação calculada, isto é, quão reproduzível é o processo de filtragem da matriz:

Seja C_{f1} e C_{f2} duas matrizes filtradas de dois cálculos independentes de matrizes de correlação C_1 e C_2 , respectivamente, do mesmo sistema. Então, a estabilidade pode ser medida usando as distâncias de Kullback-Leibler entre a matrizes originais comparadas às matrizes filtradas. Se $K(C_{f1}, C_{f2})$ é maior que o valor esperado para $K(C_1, C_2)$ podemos concluir que o processo de filtragem produz matrizes menos reproduzíveis quando comparado as matrizes de correlação da mesma amostra inferindo,

assim, que o processo não é capaz de filtrar as informações mais robustas das matrizes de correlação \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 empíricas do sistema.

Em 2007, os resultados obtidos para uma distribuição Gaussiana foram estendidos para uma classe geral de distribuições num estudo feito por Biroli et al:

Considerando um conjunto de variáveis aleatórias $Y = (y_1, \dots, y_N)$ que segue uma dada distribuição multivariada genérica de tal forma que, ao considerarmos s uma variável aleatória positiva, podemos gerar o conjunto de variáveis aleatórias $X = (x_1, \dots, x_N)$ usando a igualdade $x_i = sy_i$. Vamos tomar como exemplo a distribuição t-Student multivariada, como exposto em [55]. Neste caso temos que as variáveis aleatórias Y seguem uma distribuição normal com matriz de correlação Σ e s segue a distribuição dada por

$$P(s) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \exp[-\frac{s_0^2}{s^2}] \frac{s_0^\mu}{s^{1+\mu}} \quad (3.61)$$

onde $s_0^2 = \frac{2\mu}{\mu-2}$ de tal forma a s ter variância unitária. Por conseguinte, a função de densidade de probabilidade conjunta para X será dada por

$$P(X) = \frac{\Gamma(\frac{N+\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2}) \sqrt{(\mu\pi)^N |\Sigma|}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{\mu} \sum_{i,j} x_i (\Sigma^{-1})_{ij} x_j)^{\frac{N+\mu}{2}}} \quad (3.62)$$

onde μ é o grau de liberdade da distribuição de forma a descrever, também, o comportamento da cauda da distribuição marginal de qualquer variável aleatória X desde que seja verdadeira $P(x_i) \sim x_i^{-(1+\mu)}$. Se usarmos o coeficiente de Pearson para o cálculo da matriz de correlação, como feito em nossas análises anteriores, teríamos uma distância de Kullback-Leibler entre duas distribuições t-Student multivariadas com a mesma escala μ de graus de liberdade e matrizes de correlação Σ_1 e Σ_2 dada por

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{1}{2} [\log(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}) + (N + \mu) \int ds P(s) \log(\frac{1 + \frac{\text{Tr}(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1)}{2s}}{1 + \frac{N}{2s}})]. \quad (3.63)$$

No limite onde a escala μ é muito maior que o comprimento da série N , $\frac{\mu}{N} \rightarrow \infty$, o resultado coincide com o qual obtivemos para o caso Gaussiano; enquanto que, no limite onde o comprimento N é muito maior que o grau de liberdade μ , $\frac{\mu}{N} \rightarrow 0$, Biroli

et al. obteve

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{1}{2} \left[\log \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} + (N \log(\frac{\text{Tr}(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1)}{N})) \right]. \quad (3.64)$$

Similarmente, assim como para o caso Gaussiano, podemos calcular os valores esperados $E[K(\Sigma, \mathcal{C}_1)]$, $E[K(\mathcal{C}_1, \Sigma)]$ e $E[K(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)]$ calculando-os de acordo com as distâncias de Kullback-Leibler mostradas acima, de maneira que também teremos que os valores esperados são independentes de Σ , ou seja, são independentes do modelo. Isso mostra que esta é uma propriedade válida também para distribuições multivariadas elípticas permitindo-nos escrever que

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) = \text{tr}[f(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1)] \quad (3.65)$$

onde f é uma função independente da estrutura de correlação do sistema.

Muito importante colocarmos que, para o cálculo do valor esperado da distância de Kullback-Leibler, não é bom tratarmos com o coeficiente de Pearson já que esta não apresenta uma máxima verossimilhança quando se trata de variáveis aleatórias não-Gaussianas. Para o caso de variáveis aleatórias que seguem uma distribuição t-Student, já existe uma equação recursiva para o cálculo de correlação com um coeficiente de correlação C_{ij} de máxima verossimilhança obtido por Bouchaud ad Potters, 2003

$$C_{ij} = \frac{N + \mu}{T} \sum_{t=1}^T \frac{x_i(t)x_j(t)}{\mu + \sum_{pq} x_p(t)C_{pq}^{-1}x_q(t)}. \quad (3.66)$$

Se, este estimador de máxima verossimilhança C da matriz de correlação segue uma distribuição Wishart num limite para N muito grande, podemos usar a teoria das matrizes de Wishart também para o caso de variáveis que seguem a distribuição t-Student.

Capítulo 4

Abordagem Teórica

4.1 Multiplicação entre uma distribuição de Wishart e Whishart Inversa Independentes

Seja \mathbf{V} uma matriz aleatória que segue uma distribuição de Wishart $V \sim Wishart(\Sigma, t)$ de variância Σ , dada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}, \quad (4.1)$$

sendo \mathbf{v} uma matriz cuja cada coluna n , com $n = 1, 2, \dots, n$, e composta pela série temporal de tamanho t de uma dada variável aleatória $v_n = \{v_n(1), v_n(2), \dots, v_n(t)\}$, tal que \mathbf{v} pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_2(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_n(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_n(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1(t-1) & v_2(t-1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_n(t-1) \\ v_1(t) & v_2(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_n(t) \end{bmatrix}$$

Sendo v_n uma variável aleatória, por completez, v_n segue um processo estocástico

$$dv_n(t) = -\gamma(v_n(t) - \theta_n)dt + \sigma_n \sqrt{(v_n(t))}dW_n(t) \quad (4.2)$$

cujo valor esperado θ_n e a variância σ_n^2 são descritos matricialmente por

$$\theta_n = \frac{\alpha + 1}{\beta_{\mathbf{m}}} \quad (4.3)$$

e

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{2\gamma}{\beta_{\mathbf{m}}}}. \quad (4.4)$$

Ao considerarmos $\beta \sim Wishart(\Phi, t)$ e usando as duas relações acima, temos que

$$\theta_{AB} = \frac{\alpha + 1}{\beta_{AB}}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{2\gamma}{\beta_{AB}} \quad (4.6)$$

e, por conseguinte

$$\theta_{AB} = \frac{\alpha + 1}{2\gamma} \sigma_{AB}^2, \quad (4.7)$$

então θ e $\sigma^2 = \Sigma$ seguem uma distribuição Wishart Inversa.

Usando a estatística Bayesiana conjugada, podemos escrever a distribuição para a matriz \mathbf{V} :

$$f(\mathbf{V}) = f(\mathbf{V}|\Sigma)f(\Sigma|\Psi)f(\Psi|\Xi) = \quad (4.8)$$

$$= \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2}Tr(\Sigma^{-1}\mathbf{V})\right] \times \frac{|\Psi|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t+n+1}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2}Tr(\Psi\Sigma^{-1})\right] \times \quad (4.9)$$

$$\times \frac{|\Psi|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Xi|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2}Tr(\Xi^{-1}\Psi)\right], \quad (4.10)$$

num limite onde $t \gg n$, ou seja, o tamanho de cada série temporal e muito maior que a quantidade de séries que formam a matriz \mathbf{v} .

Dados o regime acoplado, podemos tomar o comportamento de Ξ local o suficiente

para que o $t > t_{relaxao}$ de tal forma que as series não apresentam qualquer dependência entre si e, portanto, a matriz de interdependência é unitária de propriedades

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\Xi| = 1 \quad (4.11)$$

$$\Xi^{-1} = \Xi; \Xi \mathbf{A} = \mathbf{A} \Xi = \mathbf{A} \quad (4.12)$$

Podemos então reescrever a função de distribuição, usando a propriedade matemática a qual a soma dos traços e o traço das somas, como

$$f(\mathbf{V}) = f(\mathbf{V}|\Sigma)f(\Sigma|\Psi)f(\Psi|\Xi) = f(\mathbf{V}) = f(\mathbf{V}|\Sigma)f(\Sigma|\Psi)f(\Psi) = \quad (4.13)$$

$$= \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\Psi|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t+n+1}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\Psi|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Xi|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \quad (4.14)$$

$$\exp[-\frac{1}{2}Tr(\Sigma^{-1}\mathbf{V})] \times \exp[-\frac{1}{2}Tr(\Psi\Sigma^{-1})] \times \exp[-\frac{1}{2}Tr(\Xi^{-1}\Psi)] = \quad (4.15)$$

$$= \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\Psi|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t+n+1}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\Psi|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\mathbb{1}|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \quad (4.16)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{1}^{-1}\boldsymbol{\Psi})\right] = \quad (4.17)$$

$$= \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{t}{2}}|\Gamma_n(\frac{t}{2})|} \times \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{t+n+1}{2}}\Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}\Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \quad (4.18)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{1}\boldsymbol{\Psi})\right] = \quad (4.19)$$

$$= \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{t}{2}}|\Gamma_n(\frac{t}{2})|} \times \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{t+n+1}{2}}\Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}}\Gamma_n(\frac{t}{2})} \times \quad (4.20)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi})\right] = \quad (4.21)$$

$$= \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})|}\right)^3 \times |\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}} \times \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{2t+n+1}{2}}} \times |\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{2t-n-1}{2}} \times \quad (4.22)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\Psi})\right] = \quad (4.23)$$

$$= \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})|}\right)^3 \times |\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}} \times \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{2t+n+1}{2}}} \times |\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{2t-n-1}{2}} \times \quad (4.24)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}) + \text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \text{Tr}(\boldsymbol{\Psi}))\right] = \quad (4.25)$$

$$= \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})|}\right)^3 \times |\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}} \times \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{2t+n+1}{2}}} \times |\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{2t-n-1}{2}} \times \quad (4.26)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{V} + \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}))\right] = \quad (4.27)$$

Dado que \mathbf{v} segue uma distribuição de Wishart e $\boldsymbol{\Sigma}$, por consequência, segue uma distribuição Wishart invertida e $\boldsymbol{\Psi}$ uma distribuição Wishart, então a distribuição conjugada terá as seguintes características:

- I. A multiplicação

$$\left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right)^3 \times |\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}} \times |\Sigma|^{-\frac{2t+n+1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{2t-n-1}{2}} \quad (4.28)$$

resultara numa multiplicação entre uma distribuição Wishart, uma distribuição Wishart invertida e uma distribuição Wishart;

- II. Enquanto a soma entre as multiplicações nos termos exponenciais

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{V} + \Psi\Sigma^{-1} + \Psi))\right] \quad (4.29)$$

contará com duas multiplicações entre uma distribuição Wishart e a inversa de uma distribuição Wishart Inversa, ou seja entre duas distribuições Wishart.

Ao olharmos para o limite considerado onde $t \gg n$; $\frac{t}{n} \rightarrow \infty$; podemos recriar o item I como

$$\left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right)^3 \times |\mathbf{V}|^{\frac{t}{2}} \times |\Sigma|^{-t} \times |\Psi|^t = \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{|\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right)^3 \times [(|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}} \times |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{1}{2}}) \times (|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{1}{2}})] \quad (4.31)$$

Dado que a multiplicação entre uma distribuição de Wishart e uma distribuição de Wishart inversa resulta numa distribuição do tipo T2-Hotelling, podemos reescrever a equação acima como uma multiplicação de uma distribuição de Wishart e duas distribuições de T2-hotelling dado que

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{1}{2}} \sim T2 - Hotelling \quad (4.32)$$

$$(|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}} \times |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{1}{2}}) \times (|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times |\Psi|^{\frac{1}{2}}) = (|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}} + \mathbb{1}) \times |\mathbf{T}| \quad (4.33)$$

Olhando para o resultado exposto no item II, podemos usar as propriedades de equações matriciais para fazer a seguinte manipulação:

Em seguida, sob a luz de distribuições superestatísticas, podemos olhar a distribuição conjunta acima como

$$p(v) \rightarrow p(v|\sigma^2) \quad (4.34)$$

$$P(v, \sigma^2) = p(v|\sigma^2) P(\sigma^2) \quad (4.35)$$

$$P(v) = \int P(v, \sigma^2) d\sigma^2 = \int p(v|\sigma^2) P(\sigma^2) d\sigma^2 \quad (4.36)$$

e, em completude,

$$P(V, \Sigma) = \int p(v|\Sigma) P(\Sigma) d\Sigma \quad (4.37)$$

$$P(V, \Sigma) = \int p(v|\Sigma) p(\Sigma|\Psi) P(\Psi) d\Psi \quad (4.38)$$

Conectando as abordagens, temos:

$$p(v|\Sigma) = \frac{|\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp[-\frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{V})] \quad (4.39)$$

$$p(\Sigma|\Psi) = \frac{|\Psi|^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Sigma|^{\frac{t+n+1}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp[-\frac{1}{2} \text{Tr}(\Psi \Sigma^{-1})] \quad (4.40)$$

$$p(\Psi|\Xi) = \frac{|\Psi|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} |\Xi|^{\frac{t}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp[-\frac{1}{2} \text{Tr}(\Xi^{-1} \Psi)] \quad (4.41)$$

Tomando as mesmas premissas anteriores das quais temos em consequência Ξ uma matriz diagonal unitária

$$p(\Psi|\Xi) \longrightarrow p(\Psi) \quad (4.42)$$

de tal forma que podemos reescrever

$$p(\Psi|\Xi) = \frac{|\Psi|^{\frac{t-n-1}{2}}}{2^{\frac{tn}{2}} \Gamma_n(\frac{t}{2})} \exp[-\frac{1}{2} \text{Tr}(\Psi)] \quad (4.43)$$

e, por conseguinte,

$$P(v; \Sigma) = \int p(v|\Sigma) p(\Sigma|\Psi) P(\Psi) d\Psi = \quad (4.44)$$

$$P(v; \Sigma) = \int \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^3 \left(\frac{1}{\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right)^3 |\mathbf{V}|^{\frac{t-n-1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{2t+n+1}{2}} |\Psi|^{\frac{2t-n-1}{2}} \exp[-\frac{1}{2} (\text{Tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{V} + \Psi \Sigma^{-1} + \Psi))] d\Psi \quad (4.45)$$

Usando as propriedades dos ensembles superestatísticos, temos

$$P(v; \Sigma) = \int p(v|\Sigma) p(\Sigma|\Psi) P(\Psi) d\Psi = \int p(v|\Sigma) P(\Sigma) d\Sigma \quad (4.46)$$

com

$$P(\Psi) = \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right) \left(\frac{1}{\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right) |\Psi|^{\frac{2t-n-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Tr}(\Psi))\right] \quad (4.47)$$

e

$$P(\Sigma) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2^{\frac{tn}{2}}}\right)^2 \left(\frac{1}{\Gamma_n(\frac{t}{2})}\right)^2 |\Psi|^{\frac{2t-n-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Tr}(\Psi\Sigma^{-1} + \Psi))\right] d\Psi. \quad (4.48)$$

Quando as matrizes a serem multiplicadas não são comutativas, o que representa a grande maioria dos casos encontrados em sistemas complexos, uma abordagem diferente de matrizes livre deve ser aplicada para obter os momentos cumulantes estatísticos assim como o espectro de autovalores da matriz resultante de tal multiplicação.

Pode se dizer que duas matrizes são livres quando seus autovectores se relacionam através de uma rotação aleatória. Quando essa relação existe, pode se fazer uso das propriedades aditivas e multiplicativas das transformadas R e S para duas matrizes livres **A** e **B**:

$$R_{\mathbf{A+B}(x)} = R_{\mathbf{A}}(x) + R_{\mathbf{B}}(x) \quad (4.49)$$

e

$$S_{\mathbf{A+B}(x)} = S_{\mathbf{A}}(x) * S_{\mathbf{B}}(x), \quad (4.50)$$

.

Como apresentado anteriormente, para uma matriz de Wishart **W** e uma matriz de Wishart Inversa **W^I** de parâmetro $q = N/T$, suas transformadas R são respectivamente:

$$R_{\mathbf{W}}(x) = \frac{1}{1 - qx} \quad (4.51)$$

e

$$R_{\mathbf{W}^{\mathbf{I}}}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4px}}{2px} \quad (4.52)$$

com $p := \frac{q}{(1-q)}$, e suas transformadas S são:

$$S_{\mathbf{W}(t)} = \frac{1}{1 + qt} \quad (4.53)$$

e

$$S_{\mathbf{inW}(t)} = 1 - pt \quad (4.54)$$

Mesmo considerando tal relação de rotação livre aleatória entre os autovetores de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart inversa, não é possível chegar numa forma fechada para a distribuição de seus autovalores.

Usando uma metodologia de cálculo recursivo, os autores [56] e [57] obtiveram os resultados espectrais para matrizes resultantes de multiplicações entre duas matrizes de Wishart idênticas e entre uma matriz de Wishart e sua inversa, sendo todas essas matrizes oriundas de distribuições Gaussianas.

Porém, é bem sabido que, os sistemas complexos em grande maioria não são formados por componentes que seguem uma distribuição Gaussiana, mas são melhores descritos através de distribuições Gamma.

Além disso, para o caso em que queremos multiplicar uma matriz de Wishart e uma Wishart inversa diferentes, não existe resolução na literatura e, apesar dos nossos esforços, também não conseguimos chegar a uma fórmula fechada já que pra esse caso as técnicas conhecidas, como a de cálculo recursivo, não podem ser aplicadas.

4.2 Abordagem Numérica

Com o intuito de entender o impacto da substituição das distribuições Gaussianas por distribuições Gamma na formação das matrizes \mathbf{M} e, por conseguinte, conseguir avaliar se os resultados obtidos por [56] e [57] podem ser também aplicados para o caso do uso de distribuições do tipo Gamma, fizemos um estudo comparativo numérico entre o comportamento dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação

entre duas matrizes de Wishart \mathbf{W} formadas pela multiplicação entre a matriz \mathbf{M} e sua transposta, sendo as duas últimas formadas por distribuições Gaussianas ou distribuições Gamma de valores de escalas de 0.5, 1.0 e 2.0 e valores de forma de 0.5, 1.0 e 1.5. Em seguida a mesma análise foi feita para matrizes $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultantes da multiplicação entre uma matriz de Wishart inversa \mathbf{W}^I e uma matriz de Wishart \mathbf{W} .

Para que seja possível analisar também casos nos quais não necessariamente uma rotação aleatória entre os autovetores das matrizes a serem multiplicadas, fizemos um estudo numérico sobre a multiplicação de uma matriz que segue uma distribuição de Wishart e uma matriz que segue uma distribuição de Wishart inversa para compararmos com o estudo mais recente [56] no qual, usando uma equação recursiva baseada nos resultados encontrados por [57], os autores encontraram a distribuição dos valores esperados para a distribuição resultante de uma matriz Wishart e uma matriz Wishart inversa.

Essa comparação tem como objetivo expandirmos esse estudo para a multiplicação entre uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart inversa construídas a partir de distribuições Gamma. Distribuições tipo Gamma, são o tipo de distribuição que melhores descrevem as variáveis que compõe um sistema complexos pelo comportamento de suas caudas e seus momentos estatísticos.

Para esse estudo, construímos matrizes \mathbf{M} de dimensão $T \times N$ onde cuja cada coluna $N = [1, \dots, 100]$ é uma distribuição aleatórias Gaussianas (para o caso de estudo com matrizes oriundas de distribuições Gaussianas) de média zero e variância 1 com 1.000 elementos ou uma distribuição aleatória Gamma de parâmetro forma que podem tomar os valores $[0.5, 1.5, 3]$ e escala $[0.5, 1, 2]$ cujas representações podem ser vistas nos gráficos da figura 4.1.

Em seguida multiplicamos a transposta desta matriz por sua original obtendo uma matriz de Wishart $\mathbf{W}_a = \mathbf{M}_a^T \mathbf{M}_a$ e uma matriz de Wishart Inversa $\mathbf{W}_b^I = \mathbf{W}_b^{-1}$ usando o cálculo algébrico de inversão de matrizes. Usando este mesmo processo obtemos 7.000 amostras de matrizes de Wishart e matrizes de Whishart Inversa.

Em seguida, usando as matrizes calculadas, fizemos a multipliação entre duas matrizes de Wishart $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b = \mathbf{W}_b^T \mathbf{W}_a$ e uma matriz de Wishart com uma matriz

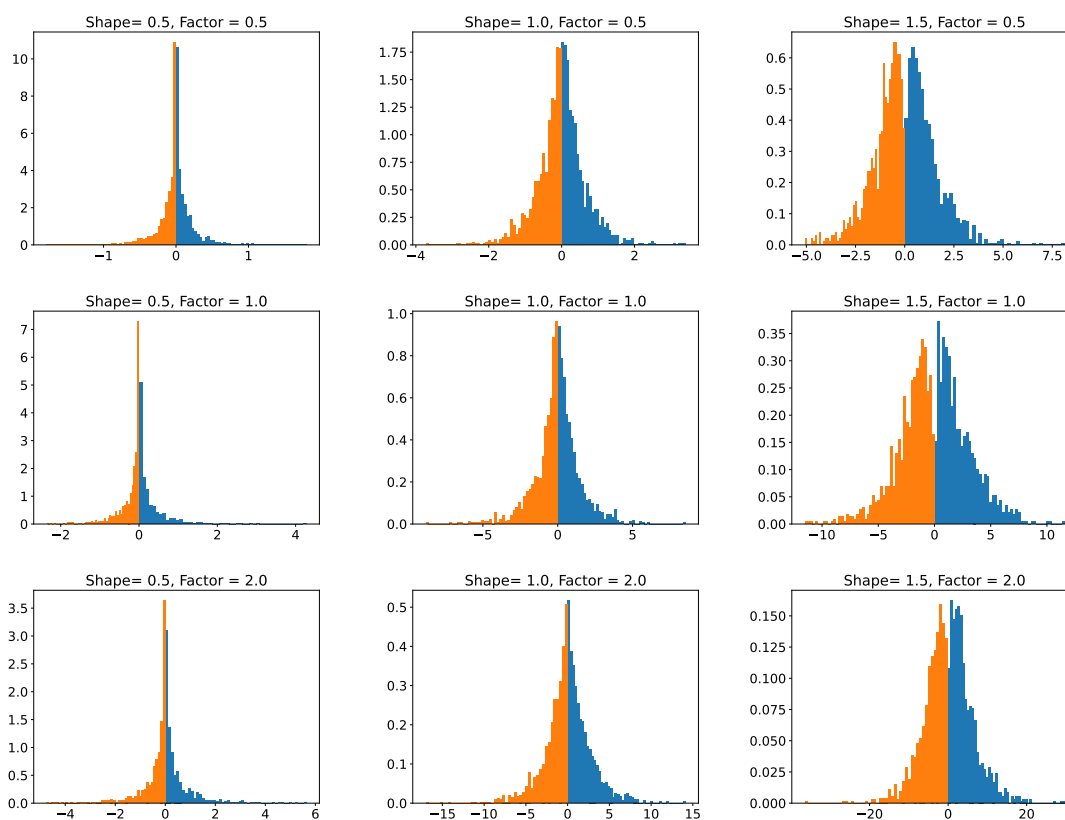


Figura 4.1: Exemplos de distribuições Gamma para valores diferentes de forma (shape) e escala(factor).

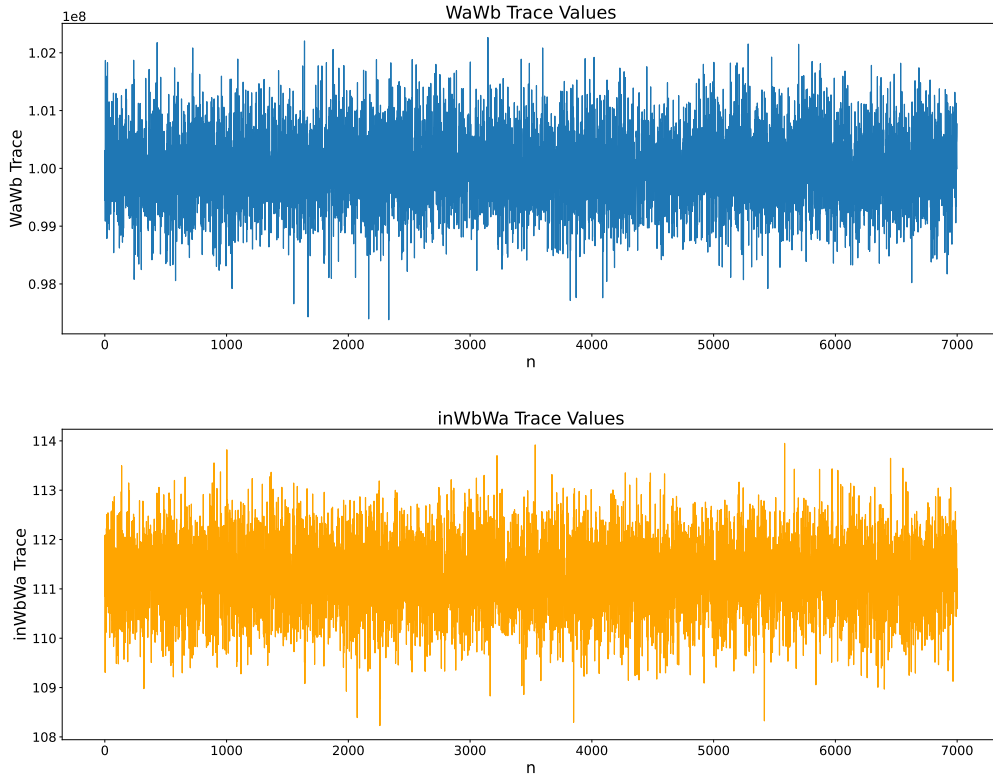


Figura 4.2: Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gaussianas sendo todas de dimensões $[100,100]$.

de Wishart Inversa $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a = \mathbf{inW}_b^T \mathbf{W}_a$ e analisamos os traços dessas matrizes resultantes.

Para que possamos avaliar os traços das matrizes resultantes das multiplicações entre duas matrizes de Whishat e entre uma matriz de Wishart inversa e uma matriz de Wishart, precisamos avaliar a distribuição das entradas de cada matriz calculada usando a distribuição normal e os diferentes tipos de distribuição Gamma.

Como podemos observar nos gráficos pertencentes a figura 4.2 para o caso gaussiano, vemos valores que oscilam em torno de 10^8 para as matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e em torno de 10^2 para as matrizes $\mathbf{inW}_b \mathbf{W}_a$. Esses dois valores estão dentro do esperado:

- I. Como cada matriz \mathbf{W} é uma matriz quadrada $[100, 100]$ resultante da multiplicação entre duas matrizes retangulares \mathbf{M} cuja cada coluna segue uma distribuição gaussiana randomica de média 0 e variância unitária (como são

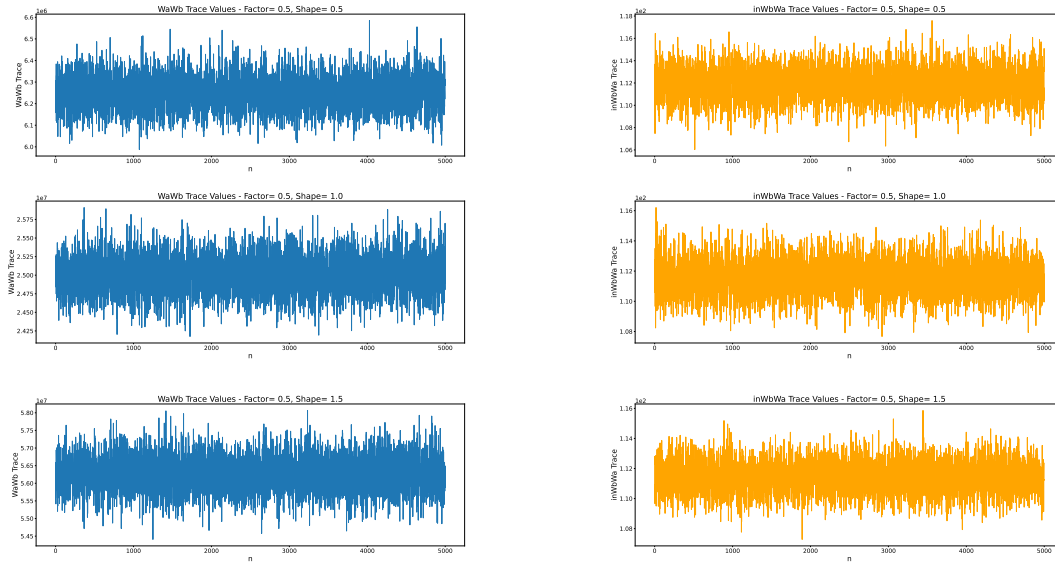


Figura 4.3: Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e formas [0.5, 1.0, 1.5] sendo todas de dimensões [100, 100].

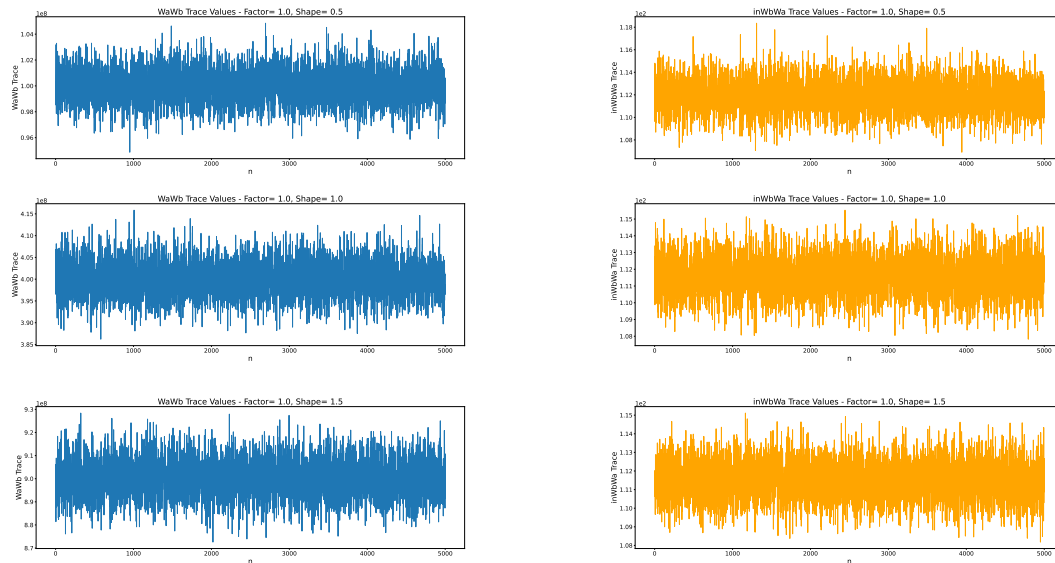


Figura 4.4: Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 1.0 e formas [0.5, 1.0, 1.5] sendo todas de dimensões [100, 100].

distribuições aleatórias, a média tende a zero mas não será zero em absoluto), os valores das diagonais da matriz \mathbf{W} são da ordem de 10^3 enquanto \mathbf{W}^I tem

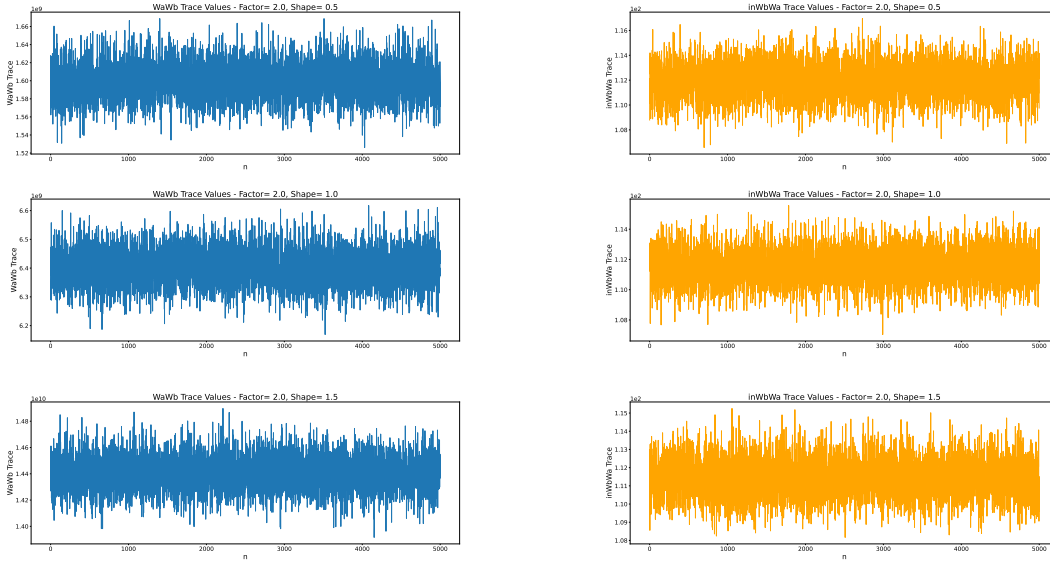


Figura 4.5: Valores dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart e $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 2.0 e formas $[0.5, 1.0, 1.5]$ sendo todas de dimensões $[100, 100]$.

um valor esperado para as diagonais da ordem de 10^{-3} ;

- II. Desta maneira, o valor médio da diagonal da matriz $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ é de 10^6 com traços da ordem de 10^8 enquanto $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ apresenta valores das diagonais de ordem 10^0 com traços da ordem de 10^2 .

Para os casos de distribuição Gamma, seguindo o mesmo tipo de construção, temos que o valor médio das distribuições Gamma de forma 0.5 e escala 0.5 é zero com um desvio padrão de 0.5. Consequentemente, os valores das diagonais da matriz \mathbf{W} tem um valor esperado de 0.2×10^3 , enquanto as diagonais da matriz \mathbf{W}^I apresentam um valor médio de 9×10^{-3} . O valor esperado para a diagonal da matriz $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ é de 0.4×10^6 com um traço médio de 0.4×10^8 enquanto que a diagonal da matriz $\mathbf{inW}_b\mathbf{W}_a$ apresenta um valor médio de 1.1×10^0 com um traço de 1.1×10^2 .

De maneira sussinta, colocamos os resultados para cada tipo de distribuição Gamma analisados na tabela 4.1, onde $E(d)$ representa o valor esperado das distribuições que formam a matriz M , $SD(d)$ o desvio padrão médio das distribuições que formam a matriz \mathbf{M} , $E(dg\mathbf{W})$, $E(dg\mathbf{W}^I)$, $E(dg\mathbf{W}\mathbf{W})$ e $E(dg\mathbf{W}^I\mathbf{W})$ os valores espe-

rado das diagonais das matrizes \mathbf{W} , \mathbf{W}^I , $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ e $E(\text{tr} \mathbf{W} \mathbf{W})$ e $E(\text{tr} \mathbf{W}^I \mathbf{W})$ os valores esperados dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$.

Com o objetivo de avaliarmos como se comporta os valores da distribuição dos traços a medida que a quantidade de matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ aumenta, calculamos a porcentagem de variação da soma acumulada dos traços para as matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ como pode ser visto na 4.6 para o caso Gaussiano: O resultado é que a dinâmica de variação da soma acumulada dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ tem um comportamento muito semelhante a medida que a quantidade de matrizes aumenta. Com matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ a variação da soma acumulada já passa a ser inferior a 10% com a soma acumulada de 12 matrizes, com 102 matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ a variação já passa a ser menor que 1% e menor que 0.1% a partir de 996 matrizes. Muito semelhantemente, a variação da soma acumulada dos traços das matrizes $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ fica abaixo de 10% a partir de 11 matrizes, abaixo de 1% a partir de 102 matrizes e abaixo de 0.1% a partir de 1004 matrizes. Assim, podemos afirmar que para uma quantidade Q suficientemente grande de número de matrizes, tal que $Q/N > 10$, a variação da soma acumulada vai a zero.

Para os casos nos quais as matrizes \mathbf{M} são formadas por distribuições Gamma, podemos verificar que o comportamento da variação percentual das somas dos traços é muito semelhante entre si e também ao caso Gaussiano: quantidades entre [11, 12] de matrizes $\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b$ e $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ já são suficientes para ter uma variação menor que 10%, quantidades entre [100, 102] para ter uma variação menor que 1% e quantidades entre [982, 1003] já são suficientes para ter uma variação menor que 0.1%.

Para que este comportamento seja melhor analisado, esta análise foi expandida para distribuições Gammas de escala 0.5 e forma [0.5,1.0,1.5] da seguinte maneira: primeiro somou-se o valor de 10 para que a média das distribuições passasse a ser 10 ao invés de zero com o intuito de avaliar se os comportamentos achados acima tinham uma relação direta com o fato de a média ser nula. Em seguida, pegou-se essas distribuições de média zero e as multiplicamos por 10 para entender se o comportamento descrito acima era impactado com uma maior variância.

Os resultados para a variação percentual da soma dos traços para as médias de

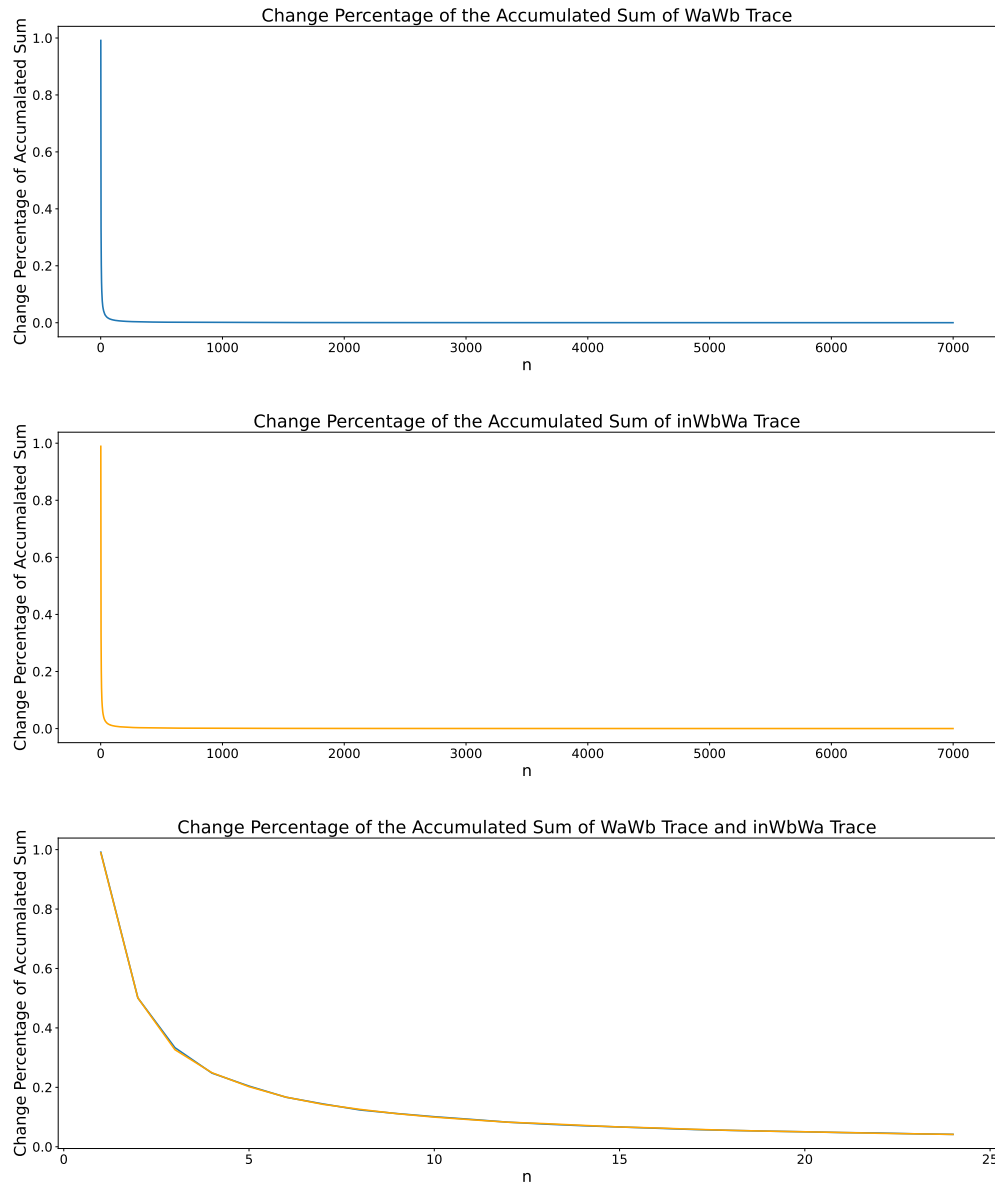


Figura 4.6: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $W_a W_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $W_b^I W_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições gaussianas em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

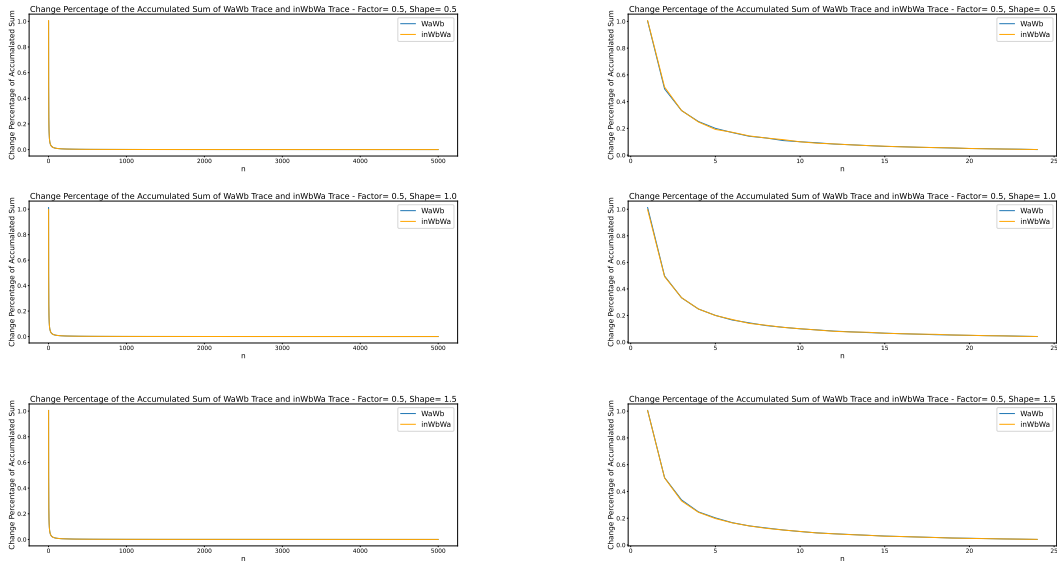


Figura 4.7: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

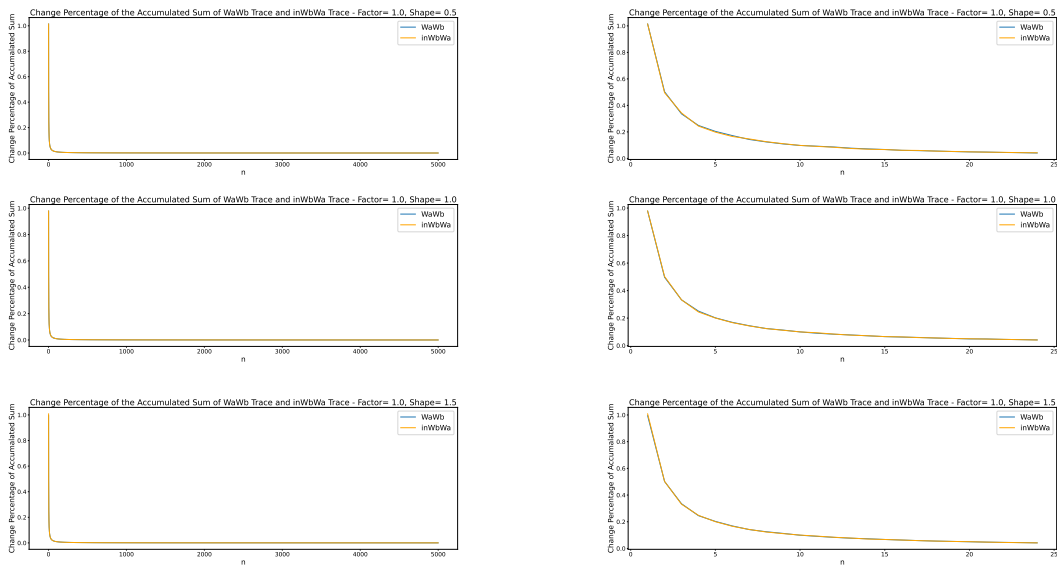


Figura 4.8: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 1.0 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

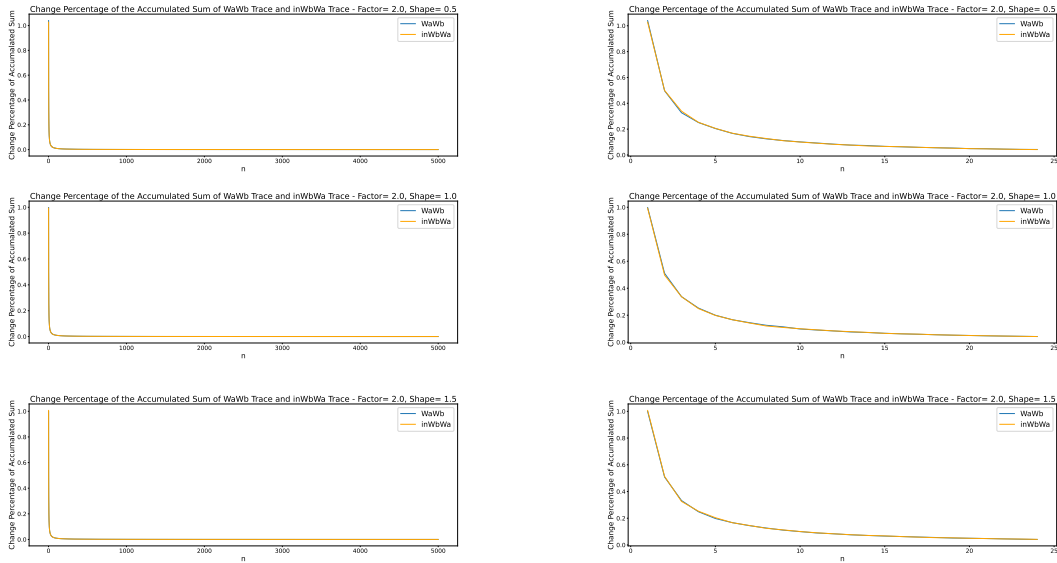


Figura 4.9: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 2.0 e forma [0.5, 1.0, 1.5] em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

10 são observados nas 4.10 enquanto para a variação percentual da soma dos traços para as distribuições de média zero e os desvios padrões multiplicados por 10 pode ser observados na figura 4.11. E, como pode ser observado, o comportamento do decaimento segue as mesmas características.

Enquanto que para a soma acumulada dos traços, os resultados para as distribuições de média zero podem ser observados nas 4.12 e para as distribuições de desvio padrão multiplicados por 10 na figura 4.13.

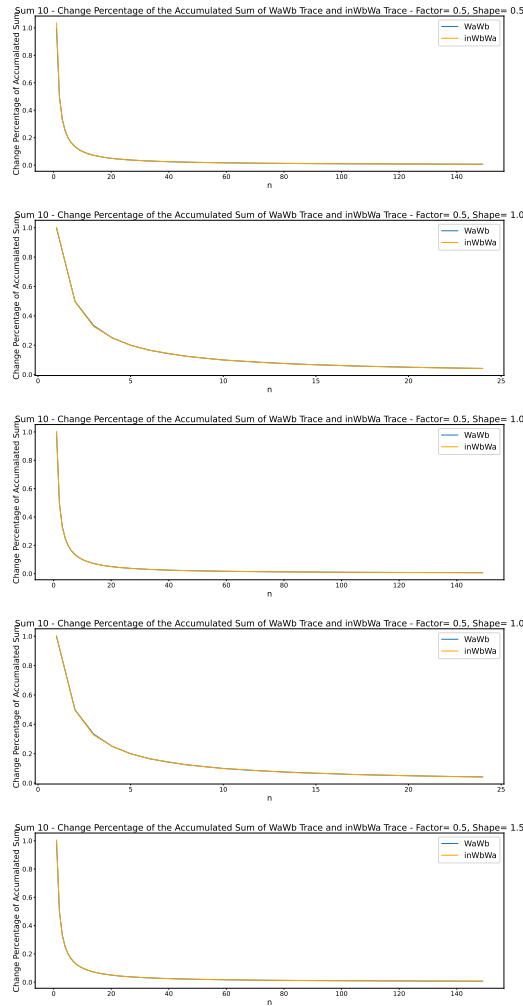


Figura 4.10: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{inW}_b\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma $[0.5, 1.0, 1.5]$ para as distribuições de média 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões $[100,100]$.

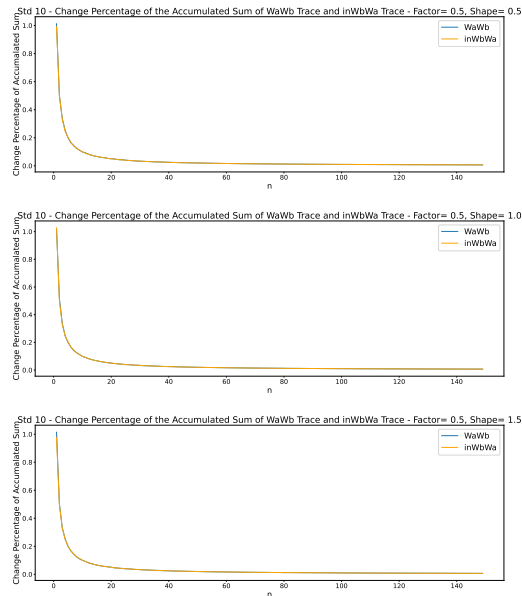


Figura 4.11: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

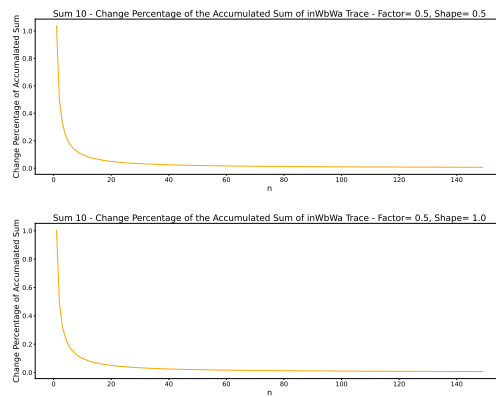


Figura 4.12: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma [0.5, 1.0, 1.5] para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões [100,100].

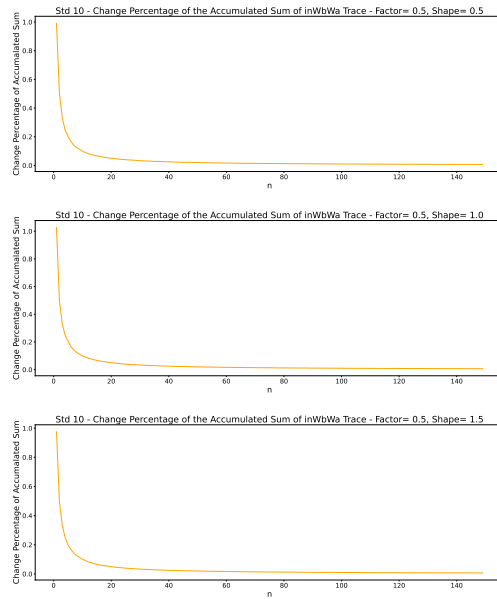


Figura 4.13: Variação percentual das somas dos traços das matrizes $\mathbf{W}_a\mathbf{W}_b$ resultantes da multiplicação entre duas matrizes de Wishart em função da quantidade e das matrizes $\mathbf{W}_b^I\mathbf{W}_a$ resultante de uma matriz de Wishart e uma matriz de Wishart Inversa oriundas de distribuições Gamma de escala 0.5 e forma $[0.5, 1.0, 1.5]$ para as distribuições de média 0 com desvio padrão de 10 em função da quantidade sendo todas de dimensões $[100,100]$.

Tabela 4.1: Valores esperados das distribuições, diagonais e traço das matrizes de Wishart, matrizes de Wishart inversa e suas multiplicações.

Distribuição	E(d)	SD(d)	E(dg W)	E(dg invW)	E(dg WW)	E(tr WW)	E(dg invWW)	E(tr invWW)
Gaussiana	0	1.0	1.0×10^3	1.0×10^{-3}	1.0×10^6	1.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=0.5,s=0.5	0	0.5	0.2×10^3	9.0×10^{-3}	0.4×10^6	0.4×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=0.5,s=1.0	0	1.0	1.0×10^3	1.0×10^{-3}	1.0×10^6	1.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=0.5,s=2.0	0	2.0	4.0×10^3	0.3×10^{-3}	16.0×10^6	16.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.0,s=0.5	0	0.7	0.5×10^3	1.0×10^{-3}	0.25×10^6	0.25×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.0,s=1.0	0	1.4	2.0×10^3	0.5×10^{-3}	4.0×10^6	4.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.0,s=2.0	0	2.8	8.0×10^3	0.1×10^{-3}	64.0×10^6	64.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.5,s=0.5	0	0.9	0.75×10^3	1.5×10^{-3}	0.55×10^6	0.55×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.5,s=1.0	0	1.8	3.0×10^3	0.4×10^{-3}	9.0×10^6	9.0×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2
Gamma f=1.5,s=2.0	0	3.6	12.0×10^3	0.1×10^{-3}	143.5×10^6	143.5×10^8	1.0×10^0	1.0×10^2

Capítulo 5

Discussão e Perspectivas Futuras

Para que fosse possível ter uma perspectiva do quanto a teoria de matrizes aleatória e tudo aquilo que a compõe consegue descrever sistemas financeiros; já que este é entendido como um dos sistemas mais complexos existentes por ser formado por componentes completamente heterogêneos como fatores econômicos, políticos, naturais e até comportamentais; analisamos o volume transacionado e a volatilidade para as empresas que compõe o *Blue Chip* numa frequência intradiária de dados de 1 minuto.

A primeira abordagem foi tratar o volume transacionado como antecipador de informação da dinâmica do mercado. O motivo para tal advém do fato que decisões de compra ou venda de um ativo se baseia na evolução do preço do mesmo e o movimento do preço de um ativo é conseqüente da propagação da informação através dos agentes financeiros. O comportamento intradiário dos volumes transacionados foram estudados sob os perfis dos cumulantes até quarta ordem usando para isso as relações resultantes da expansão da função de densidade de probabilidade de Gram-Charlier e as componentes não-estacionárias desses perfis. Para isso, os dados foram divididos em períodos de 6 meses e fizemos as análises separadamente para cada empresa ao longo do tempo e em seguida de maneira transversal ao longo de todas as empresas para um dado intervalo de tempo.

Tanto ao analisar cada empresa individualmente quanto a mesma fazendo parte de um grupo (análise transversal), confirmamos que o volume transacionado é significativamente não estacionário. Dentro da análise individual, através de uma analogia

entre o decréscimo do volume transacionado médio após a abertura do mercado e o movimento de relaxação ocorrido após avalanches e terremotos em sistemas complexos naturais, verificamos que o decaimento da quantidade de volume transacionado logo após a abertura do mercado mudou a partir do segundo semestre de 2008 em diante, período do auge da crise *suprime*. Antes desse período, as ações *Blue Chip* em média demoravam 10 minutos para que o volume transacionado fosse reduzido pela metade, este valor passou para 6 minutos a partir do segundo semestre de 2008 refletindo uma mudança de conduta dos agentes financeiros pós crise. Além deste, o cancelamento em 2007 e reintrodução em 2010 da regra *uptick* também causou impacto no comportamento do volume transacionado, podendo ser claramente visto no gráfico de segundo cumulante.

Para que a mudança do perfil intradiário de negociação ao longo dos semestres fosse analisada, medimos a concavidade e assimetria dessa curva. O resultado encontrado expõe uma mudança visível no tão conhecido formato \cup que foi se aproximando cada vez mais a um formato \sqcup com características diferentes para a primeira parte do período intradiário e o período posterior ao almoço, que refletem o fato de estarem sendo afetadas por mecanismos diferentes. Esta divisão do período, também conhecida como *lunch time*, cujo efeito pode ser visto na curva de curtose, pode ser lida da seguinte maneira: dado que a curtose reflete a variável surpresa incorporada na distribuição, é possível compreender que no começo da sessão existe uma grande incerteza na quantidade de volume transacionado sendo esta informação transferida ao preço das ações na primeira parte da manhã e corrigida no período pré-fechamento do mercado.

A confirmação de que o volume transacionado é regido por dinâmicas diferentes para os dois períodos é refletida por relações diferentes entre os cumulantes para cada período expondo que cada parte da seção intradiária de trading apresenta diferenças na distribuição de valores que vão além de uma simples mudança de parâmetros.

Olhando para esse conjunto de ações de maneira transversal, foi possível verificar o mesmo tipo de comportamento do segundo e quarto cumulantes observado na análise individual. Na primeira parte na manhã, estes dois cumulantes decaem certamente

devido ao efeito *overnight* onde existe um nível diferente de atividade sendo parte deste causado por informações relevantes sobre as ações quando o mercado está fechado e que são transferida aos preços na primeira hora da sessão de trading fazendo que os volumes das ações relaxem para uma distribuição Gaussiana.

Pós almoço, a curtose aumenta consequente do efeito dual das estratégias intradiárias ou *tarders* que tentam segurar algum ganho quando o mercado passa a se comportar de uma maneira inesperada. Ainda sobre a curtose e a evidente não estacionariedade da dinâmica do volume transacionado, foi observado que o período da manhã é governado por empresas que apresentam níveis de operação não usuais devido a alguma evento *overnight* enquanto a dinâmica de volume transacionado antes do fechamento é governado por um comportamento geral das ações, quando todas elas tem o volume de transações aumentado.

Para a compreensão do comportamento coletivo das sazonalidades e não estacionariedade do volume transacionado intradiário dessas ações, construímos matrizes de correlação e analisamos seus autovetores e seus espectros de autovalores. Usando a teoria de matrizes aleatórias e a análise de componentes principais, estudamos os autovalores sobre a distribuição de Marchenko-Pastur e os resultados mostraram que o volume transacionado das ações *Blue Chip* são governada consistentemente por apenas um único modo já que apenas o primeiro autovalor fica acima do limite superior de Marchenko-Pastur durante todo o período analisado. E, de maneira complementar, os autovalores que são ficam acima do limite superior de Marchenko-Pastur, i.e. não são modos, ficaram consistentemente entre os limites superior e inferior podendo então ser associados a ruídos.

Porém, o comportamento achado para o segundo maior autovalor expõe um contraste do que foi encontrado para flutuações de preço [7]. No começo da sessão de trading, o segundo autovalor fica acima do limite superior e por tanto pode ser visto como um modo, mas na transição entre o período matutino e vespertino, este fica fracamente abaixo do limite superior. A presença de apenas um modo estatisticamente significativo se mostra contraditório ao fato de o volume transacionado ter exibido um decaimento lento na função de autocorrelação.

Para que fosse possível melhor comparar as dinâmicas dos volumes transacionados e das flutuações de preço, estudamos as mesmas abordagens para esse último.

Dentro da análise dos perfis coletivos e individuais da não estacionariedade das flutuações de preço, encontramos três mudanças na concavidade do perfil intradiário. A primeira causada pela mudança da regra *uptick rule* no primeiro semestre de 2007, o estouro da crise *subprime* no segundo semestre de 2008 e a crise de débito público dos Estados Unidos no segundo semestre de 2011. A concavidade no último quarto da curva de valores absolutos dos retornos está intimamente relacionada ao nervosismo dos *traders* e, por conseguinte, a confiança que o mercado tem naquele ativo. Os semestres mais côncavos são aqueles onde houve a crise *subprime* e a de dívida pública, podendo ser considerada uma medida de risco para investimentos de longo prazo.

O efeito da modificação da regra *short-selling* no primeiro semestre de 2007 pode ser observada no comportamento do modo de mercado: antes o valor do modo de mercado diminuía ao passo que a sessão ia chegando ao fim, depois do primeiro semestre de 2007 passou a ter um aumento consistente em consequência em um aumento entre as correlações das ações.

Por fim, com o objetivo de entender como o volume transacionado visto como uma informação que é incorporada pelos agentes de mercado e afeta os preços, estudamos a relação entre volume transacionado e volatilidade sob a percepção de informação-impacto. A percepção de causa e efeito desses componentes começa na interpretação dentro desta para as Hipótese de Misturas de Distribuições e Hipótese de Chegada Sequencial de Informações onde cada um tem mais força em diferentes intervalos do período intradiário de operação: SIAH domina a abertura e fechamento do mercado onde há uma pequena relação entre a *proxy* de informação(i.e, o volume transacionado) e seu impacto (volatilidade); que fica mais claro seu entendimento para o período de fechamento dado que neste período os *traders* intradiários precisam fechar suas operações independente do que esteja acontecendo com suas posições; enquanto durante a sessão de operações as flutuações de preços de uma dada empresa pode introduzir uma volatilidade em uma outra empresa do mesmo setor ou sobre aquela com a que faz par em estratégias de operações de pares. Assim, a MDH tem seu lugar

no intervalo entre a introdução de uma parcela relevante de dinheiro no mercado e sua absorção que acontece durante a sessão de operação intradiária. Mas é a SIAH que está presente nos maiores movimentos de volume financeiros.

A existência de duas dinâmicas diferentes durante a sessão de operações intradiárias é enfatizada por um decréscimo da variância da matriz transversal durante a sessão sendo este em acordo com o movimento sincronizado das ações cujos preços são dominados por movimentos incomuns no começo da sessão.

Sobre o comportamento não estacionário da relação volume transacionado e volatilidade, os resultados estão em linha com aqueles encontrados para as flutuações de preços onde mais uma vez a mudança causada nos perfis pela regra *up tick rule* é evidente.

A partir das análises acima, foi possível entender até que ponto as teorias estabelecidas até o momento poderiam extrair informações sobre um sistema complexo como o encontrado no mercado de ações. A conclusão foi que se faz necessário aprimorar a descrição desses tipos de sistemas complexos para que seja possível extrair informações mais limpas sobre o mesmo.

Com o objetivo de aprimorar a descrição desses sistemas e com os resultados das análises feitas anteriormente, buscamos introduzir a não estacionariedade da variância para dentro da dinâmica de interação entre as variáveis de um sistema complexo.

Para tal, partimos da estatística Bayesiana conjugada para a descrição da distribuição de uma matriz \mathbf{V} obtida através de uma multiplicação entre duas matrizes \mathbf{v} formada por séries temporais das componentes de um sistema complexo. Usando tal abordagem, para obter a função de distribuição da matriz \mathbf{V} passou a ser necessário obter a distribuição dos valores dos traços resultando da multiplicação entre matrizes de Whishat inversa e de matrizes de Wishart.

Tal função de distribuição para traços de matrizes resultantes entre multiplicações entre matrizes de Wishart e matrizes de Wishart Inversa só teve sua fórmula fechada encontrada quando essa multiplicação com matrizes inversas que são obtidas invertendo a mesma matriz de Wishart e depois aplicando o cálculo recursivo [58, 59]. Utilizando a mesma abordagem, não é possível obter a distribuição para os traços

das matrizes resultantes da multiplicação entre uma matriz de Wishart e uma matriz inversa de Wishart onde esta última não seja a inversa da primeira.

Neste trabalho, a necessidade de se obter a distribuição dos traços resultantes da multiplicação entre uma matrix de Wishart e uma matrix de Wishart Inversa que não é a inversa desta primeira vem de se resolver a equação 4.46. Porém, não foi possível achar uma solução fechada para tal equação e, por conseguinte, utilizamos uma abordagem numérica.

Para isso, construímos matrizes de Wishart e matrizes inversas de Wisharts independentes advindas de distribuições Gamma que tinham o parâmetro de escala e parâmetro de forma de diferentes. Para cada combinação entre parâmetro de escala e forma diferentes, foram obtidos os traços das matrizes resultantes da multiplicação entre uma matriz de Wishart inversa e uma matriz de Wishart e observados seus valores esperados e a variação percentual destes traços em função do número de matrizes consideradas.

Observando os valores da tabela 4.1, concluímos que para todos os tipos de distribuição Gamma analisadas e também para uma distribuição Gaussiana, os valores esperados para os traços e para as diagonais das matrizes $\mathbf{W}_b^I \mathbf{W}_a$ pode ser ditos iguais provando que para esse tipo de matriz resultante, o espectro será dependente apenas da razão entre as dimensões das matrizes.

O resultado que encontramos para uma análise numérica do valor esperado do traço da multiplicação entre matrizes de Wishart inversas e matrizes de Wishart serem proporcionais a razão entre as dimensões das matrizes nos levou ao questionamento se este resultado se deve ao fator comum de a médias das distribuições Gammas que formaram as matrizes terem média 0 ou desvio padrões pequenos. Fizemos uma segunda análise com distribuições de desvio padrão maiores e médias diferentes de zero e o resultado encontrado foi o mesmo.

Como perspectivas e continuação deste trabalho, ao invés de matrizes de Wishart e sua inversa, construiremos matrizes cuja cada entrada são medida de entropia entre distribuições Gamma com o objetivo de entender relações não lineares entre os componentes de um sistema complexo e poder delinear melhor a dinâmica não estaci-

onária desses sistemas sem ficar limitados aos momentos estatísticos e suas derivadas como covariâncias e correlações.

Como a entropia de Kullback-Leibler quantifica a distância entre duas distribuições de probabilidades, podemos avaliar a não-estacionariedade da interação entre, por exemplo, preço e volume transacionado já que é possível comparar a evolução temporal entre duas variáveis distintas que apresentam uma medida de interdependência dada por essa entropia relativa.

Tal medida ainda tem seu valor ao ser usada para quantificar a incerteza estatística de matrizes de correlação ou dependência entre séries temporais de tamanho finito independentemente do modelo usado para a geração ou modelagem dos dados já que seu valor esperado é independente dessas matrizes e de suas distribuições multivariadas.

Para mais além, analisando como um sistema não necessariamente ergótico ¹, iremos usar também a entropia não extensiva para mensurar as interdependências de longo prazo e expor se o comportamento não estacionário reside em relação não-lienares de horizontes mais longos e, se sim, em qual limite podemos tomá-los como um movimento suficientemente bem definidos para que seja possível usar metodologias preditivas com o menor erro de predicabilidade possível.

Quando consideramos horizontes de tempo mais longos, podemos nos deparar com estados onde existem condições de quase-equilíbrio onde as interdependências - como por exemplo, as correlações - se tornam fortes o suficiente de tal forma que a entropia aditiva é perdida. Para estes casos precisamos utilizar uma entropia não aditiva como a entropia não-extensiva de Tsallis [60].

¹Sistema dinâmico no qual a porção de tempo no ele permanece em um estado particular é o mesmo que a probabilidade na qual este sistema será encontrado neste estado para um momento aleatório no tempo

Bibliografia

- [1] Michelle B. Graczyk e Sílvio M. Duarte Queirós. “Intraday Seasonalities and Nonstationarity of Trading Volume in Financial Markets: Individual and Cross-Sectional Features”. Em: *Plos One* 11.11 (mar. de 2016). DOI: 10.1371/journal.pone.0165057.
- [2] Michelle B. Graczyk e Sílvio M. Duarte Queirós. “Intraday seasonalities and nonstationarity of trading volume in financial markets: Collective features”. Em: *PLOS ONE* 12.7 (jul. de 2017), pp. 1–23. DOI: 10.1371/journal.pone.0179198. URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0179198>.
- [3] Sílvio M. Duarte Queirós e Michelle B. Graczyk. “Nonstationarity of the intraday individual and collective seasonalities of price fluctuations.” Em: *Journal of Network Theory in Finance* 03.1 (mar. de 2017). DOI: 10.21314/JNTF.2017.026. URL: <https://www.risk.net/journal-of-network-theory-in-finance/3950896/nonstationarity-of-the-intraday-individual-and-collective-seasonalities-of-price-fluctuations>.
- [4] Michelle B. Graczyk e Sílvio M. Duarte Queirós. “Volatility–Trading volume intraday correlation profiles and its nonstationary features”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 508 (2018), pp. 28–34. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.05.066>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437118306125>.
- [5] Jean-Philippe Bouchaud e Marc Potters. *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. Cambridge University Press, 2009.

- [6] “Focus on Complex networks in finance.” Em: *Nature Phys* 9 (2013), (3:):119.
- [7] Sílvio M. Duarte Queirós e Celia Anteneodo. “Complexity in quantitative finance and economics”. Em: *Chaos, Solutions I& Fractals* 88 (2016), pp. 1–2. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.03.022.
- [8] Hal R. Varian. *Variants in economic theory: selected works of Hal R. Varian*. E. Elgar, 1999.
- [9] Mark B. Garman. “Market microstructure”. Em: *Journal of Financial Economics* 3.3 (1976), pp. 257–275. DOI: 10.1016/0304-405x(76)90006-4.
- [10] Jonathan M. Karpoff. “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”. Em: *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22.1 (1987), p. 109. DOI: 10.2307/2330874.
- [11] Peter K. Clark. “A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices”. Em: *Econometrica* 41.1 (1973), p. 135. DOI: 10.2307/1913889.
- [12] Thomas E. Copeland Economics. “A Model Of Asset Trading Under The Assumption Of Sequential Information Arrival”. Em: *The Journal of Finance* 31.4 (1976), pp. 1149–1168. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1976.tb01966.x.
- [13] Jean-Philippe, J. Doyne e Fabrizio. *How markets slowly digest changes in supply and demand*. Set. de 2008.
- [14] Rosario N. Mantegna e H. Eugene Stanley. *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, 1999.
- [15] Phillip I. Good. *Resampling Methods: A Practical Guide to Data Analysis*. Birkhauser, 2001.
- [16] Henrik Jeldtoft Jensen. *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [17] P. Bak. *How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality*. Oxford University Press, 1997. ISBN: 9780198501640. URL: <https://books.google.com.br/books?id=Bth4QgAACAAJ>.

- [18] M. E. J. Newman. *Self-Organized Criticality, Evolution, and Extinction*. Rel. técn. USA, 1996.
- [19] *Securities and Exchange Commision*.
- [20] *Securities and Exchange Commision*.
- [21] Valentina Alfi, Andrea Gabrielli e Luciano Pietronero. “How people react to a deadline: time distribution of conference registrations and fee payments”. Em: *Open Physics* 7.3 (jan. de 2009). DOI: 10.2478/s11534-009-0059-z.
- [22] Romain Allez e Jean-Philippe Bouchaud. “Individual and collective stock dynamics: intra-day seasonalities”. Em: *New Journal of Physics* 13 (2010), p. 025010.
- [23] Lisa Borland. “Exploring the dynamics of financial markets: from stock prices to strategy returns”. Em: *Chaos, Solutions I& Fractals* 88 (2016). Complexity in Quantitative Finance and Economics, pp. 59–74. ISSN: 0960-0779. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.03.014>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077916300947>.
- [24] Romain Allez e Jean-Philippe Bouchaud. “Individual and collective stock dynamics: intra-day seasonalities”. Em: *New Journal of Physics* 13.2 (2011), p. 025010. DOI: 10.1088/1367-2630/13/2/025010.
- [25] Romain Allez e Jean-Philippe Bouchaud. “Individual and collective stock dynamics: intra-day seasonalities”. Em: *New Journal of Physics* 13.2 (2011), p. 025010. DOI: 10.1088/1367-2630/13/2/025010.
- [26] Jonathan M. Karpoff. “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”. Em: *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22.1 (1987), p. 109. DOI: 10.2307/2330874.
- [27] L. Kullmann, J. Kertész e K. Kaski. “Time-dependent cross-correlations between different stock returns: A directed network of influence”. Em: *Phys. Rev. E* 66 (2 ago. de 2002), p. 026125. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026125. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.026125>.

- [28] Didier Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools (Springer Series in Synergetics)*. Springer, 2006. ISBN: 3540308822.
- [29] Robert F. Engle, Sergio M. Focardi e Frank J. Fabozzi. “ARCH/GARCH Models in Applied Financial Econometrics”. Em: *Handbook of Finance* (2008). DOI: 10.1002/9780470404324.hof003060.
- [30] V A Marčenko e L A Pastur. “DISTRIBUTION OF EIGENVALUES FOR SOME SETS OF RANDOM MATRICES”. Em: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 1.4 (1967), p. 457.
- [31] L. Kullmann, J. Kertész e K. Kaski. “Time-dependent cross-correlations between different stock returns: A directed network of influence”. Em: *Physical Review E* 66.2 (2002). DOI: 10.1103/physreve.66.026125.
- [32] V A Marčenko e L A Pastur. “DISTRIBUTION OF EIGENVALUES FOR SOME SETS OF RANDOM MATRICES”. Em: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 1.4 (abr. de 1967), p. 457. DOI: 10.1070/SM1967v001n04ABEH001994. URL: <https://dx.doi.org/10.1070/SM1967v001n04ABEH001994>.
- [33] Boris Podobnik et al. “Cross-correlations between volume change and price change”. Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106.52 (2009), pp. 22079–22084. DOI: 10.1073/pnas.0911983106. eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.0911983106>. URL: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0911983106>.
- [34] Jean-Philippe Bouchaud, Andrew Matacz e Marc Potters. “Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model”. Em: *Physical Review Letters* 87.22 (ago. de 2001). DOI: 10.1103/physrevlett.87.228701.
- [35] Pierre-Alain Reigeron, Romain Allez e Jean-Philippe Bouchaud. “Principal regression analysis and the index leverage effect”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390.17 (2011), pp. 3026–3035. DOI: 10.1016/j.physa.2011.04.007.

- [36] Xavier Gabaix et al. “A Theory of Power-Law Distributions in Financial Market Fluctuations”. Em: 423 (jun. de 2003), pp. 267–70.
- [37] *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications (Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity)*. Oxford University Press, 2004. ISBN: 0195159772.
- [38] C.-K. Peng et al. “Mosaic organization of DNA nucleotides”. Em: *Physical Review E* 49.2 (jan. de 1994), pp. 1685–1689. DOI: 10.1103/physreve.49.1685.
- [39] de Souza, J., Moyano, L. G. e Duarte Queirós, S. M. “On statistical properties of traded volume in financial markets”. Em: *Eur. Phys. J. B* 50 (2006), pp. 165–168. DOI: 10.1140/epjb/e2006-00130-1.
- [40] Parameswaran Gopikrishnan et al. “Statistical properties of share volume traded in financial markets”. Em: *Phys. Rev. E* 62 (4 out. de 2000), R4493–R4496. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.R4493. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.R4493>.
- [41] L.G. Moyano, J. de Souza e S.M. Duarte Queirós. “Multi-fractal structure of traded volume in financial markets”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 371.1 (2006). LAWNP 2005, pp. 118–121. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.04.098>.
- [42] Guo-Hua Mu et al. “Long-term correlations and multifractality in trading volumes for Chinese stocks”. Em: *Physics Procedia* 3.5 (2010). The International Conference on Complexity and Interdisciplinary Sciences. The 3rd China-Europe Summer School on Complexity Sciences, pp. 1631–1640. ISSN: 1875-3892. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2010.07.003>.
- [43] Jan W. Kantelhardt et al. “Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 316.1 (2002), pp. 87–114. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3).

- [44] Thomas Lux e Michele Marchesi. “Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market”. Em: *Nature* 397.6719 (1999), pp. 498–500. DOI: 10.1038/17290.
- [45] S. M. Duarte Queirós. “On the emergence of a generalised Gamma distribution. Application to traded volume in financial markets”. Em: *Europhysics Letters (EPL)* 71.3 (2005), pp. 339–345. DOI: 10.1209/epl/i2005-10109-0.
- [46] C. Beck e E.G.D. Cohen. “Superstatistics”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 322 (2003), pp. 267–275. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0).
- [47] C. Beck e F. Schögl. *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, 1995. ISBN: 9780521484510. URL: <https://books.google.com.br/books?id=GyPpZ-Lg6KAC>.
- [48] Ioana Dumitriu e Alan Edelman. “Matrix models for beta ensembles”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 43.11 (2002), pp. 5830–5847. DOI: 10.1063/1.1507823.
- [49] Ioana Dumitriu e Alan Edelman. “Matrix models for beta ensembles”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 43.11 (2002), pp. 5830–5847. DOI: 10.1063/1.1507823.
- [50] Romain Allez, Jean-Philippe Bouchaud e Alice Guionnet. “Invariant Beta Ensembles and the Gauss-Wigner Crossover”. Em: *Physical Review Letters* 109.9 (2012). DOI: 10.1103/physrevlett.109.094102.
- [51] Romain Allez e Alice Guionnet. “A diffusive matrix model for invariant β -ensembles”. Em: *Electronic Journal of Probability* 18 (2013). DOI: 10.1214/ejp.v18-2073.
- [52] Lisa Borland, Angel R. Plastino e Constantino Tsallis. “Information gain within nonextensive thermostatics”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 39.12 (1998), pp. 6490–6501. DOI: 10.1063/1.532660.

- [53] Sílvio M. Duarte Queirós. “Effectiveness of the Kozachenko-Leonenko estimator for generalized entropic forms”. Em: *Physical Review E* 80.6 (mar. de 2009). DOI: 10.1103/physreve.80.062101.
- [54] Jonathan D. Victor. “Binless strategies for estimation of information from neural data”. Em: *Physical Review E* 66.5 (nov. de 2002). DOI: 10.1103/physreve.66.051903.
- [55] M. Tumminello, F. Lillo e R. N. Mantegna. “Kullback-Leibler distance as a measure of the information filtered from multivariate data”. Em: *Physical Review E* 76.3, 031123 (set. de 2007), p. 031123. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.031123. arXiv: 0706.0168 [physics.data-an].
- [56] Jolanta Pielaszkiwicz e Thomas Holgersson. “Mixtures of traces of Wishart and inverse Wishart matrices”. Em: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 50.21 (2021), pp. 5084–5100. DOI: 10.1080/03610926.2019.1691733. eprint: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1691733>. URL: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1691733>.
- [57] Jolanta Pielaszkiwicz, Dietrich Von Rosen e Martin Singull. “On , where”. Em: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 46.6 (2017), pp. 2990–3005. DOI: 10.1080/03610926.2015.1053942. eprint: <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1053942>. URL: <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1053942>.
- [58] Jolanta Pielaszkiwicz, Dietrich Von Rosen e Martin Singull. “On , where”. Em: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 46.6 (2017), pp. 2990–3005. DOI: 10.1080/03610926.2015.1053942. eprint: <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1053942>. URL: <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1053942>.
- [59] Jolanta Pielaszkiwicz e Thomas Holgersson. “Mixtures of traces of Wishart and inverse Wishart matrices”. Em: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 50.21 (2021), pp. 5084–5100. DOI: 10.1080/03610926.2019.1691733.

eprint: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1691733>. URL: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1691733>.

- [60] Constantino Tsallis. “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”. Em: *Journal of Statistical Physics* (jul. de 1988). DOI: 10.1007/bf01016429.