

Tese de Doutorado

**Estudo de perturbações
escalares e tensoriais no
formalismo Quasi-Maxwelliano
da Gravitação**

Marcela Campista Borges de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. José Martins Salim

Coordenação de Cosmologia Relatividade e Astrofísica-ICRA Centro
Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Resumo

Apresentação do método Quasi-Maxwelliano da gravitação para estudar a estabilidade de modelos cosmológicos conformalmente planos. O método é invariante de calibre e as variáveis perturbadas tem interpretação física ou geométrica. Esse método mostrou-se especialmente apropriado para descrever modelos com ricochete.

Em memória do meu irmão Bruno Campista, com quem aprendi a dar valor a cada instante da tênue linha de Universo que representa nossa vida.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Grupo de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-ICRA, que conheci ainda, durante a minha graduação em física na UFRJ. Agradeço pelo ambiente peculiar de trabalho, pelas discussões essenciais para minha formação e pela oportunidade de participar do histórico "pequeno seminário", onde tive o espaço para expor minhas idéias, pontos de vistas e trabalhos inacabados. Obrigada à todos os pesquisadores, colaboradores e secretárias da grande família ICRA, pelas considerações, apoio e boa vontade indispensáveis para a realização deste trabalho. Em particular agradeço aos pesquisadores Mario Novello, Santiago, Martin Makler, Nelson Pinto Netto e Felipe Tovar pelas críticas e sugestões referentes à este trabalho.

Agradeço em especial uma pessoa admirável, amável e muitas vezes teimosa que para mim representa um verdadeiro mestre, uma espécie de guru, guia espiritual, pajé, amigo e orientador José Martins Salim, com quem estou desde 2003 estudando o Universo e também aprendendo muito sobre questões da vida, da mente e do espírito. Obrigada por todas as respostas às minhas perguntas!

Aos meus colegas de sala que participaram de perto da realização deste trabalho, Felipe Poullis, mesmo me congelando com o ar condicionado no máximo, ao peruano-carioca e agora paulista Martin Apańcio, Diego Pantoja e suas divertidas piadas, a Stella Fernandes pela compreensão que só uma alma feminina pode dispor... Aos colegas da divertida sala 509, "sala da mãe Joana": Aline Nogueira, Rafael Perez, Vicente Antunes, querido Nilton,

Maria Borba , Rafael Aranha e ao meu "irmão mais velho" no Rio, Érico Goulart. Se esqueci de alguém, me desculpe afinal essa sala não obedece a lei conservação de partículas.

Aos amigos que chegaram e somaram muito, os mineiros de Itajubá Grasielle e Eduardo, os brasilienses Mariana e Sandro Vitenti, Gabriel, Hab- bib, Pedro e as meninas Cristina Furlanetto, Cláudia Azucena, Josefini , sem esquecer do Carlos Brandt, bah! Como poderia esquecer de ti guri! Aos amigos de divulgação científica Denise e Cássio.

À família lá das Minas Gerais, agradeço em primeiro lugar aos meus pais e irmão Bruno que não tiveram o tempo para poder ver a conclusão de mais uma etapa importante na minha vida, mas com a certeza de que estariam muito felizes. Agradeço o apoio incondicional das minhas tias Lenilda, Lau- rinda e Tio Maurício, meus primos-irmãos Kátia, Marcelo e sua família. Em especial agradeço minha irmã Vanessa e meu irmão Matheus por me lembrar de olhar o céu mais vezes.

Agradeço ao Leonardo Guerra que me deu um novo fôlego, essencial para o término desse trabalho. Obrigada pela paciência e compreensão!

Gostaria de agradecer também aos amigos que fiz na Itália, no ICRA-Net em Pescara e na La Sapienza de Roma: Xue Che Cheng, Federica, Gustavo, Juraci, Roberto Guida, Letizia Caito, Maria Giovanna e ao amigo que fiz durante a Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Ugo Moschella. *Grazie per tutti, amici!*

Finalizando, gostaria de agradecer a Coordenação de Formação Científica do CBPF, Ivan, Elisabete, Ricardo e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Muito obrigada à todos!

O Universo não é uma idéia minha.

A minha idéia do Universo é que é uma idéia minha. A noite não anoitece pelos meus olhos,

A minha idéia da noite é que anoitece por meus olhos. Fora de eu pensar e de haver quaisquer pensamentos A noite anoitece concretamente

E o fulgor das estrelas existe como se tivesse peso.

Fernando Pessoa

Introdução

Desde a antiguidade, a humanidade busca o conhecimento e o entendimento dos fatos que acontecem a sua volta tentando responder as questões intrínsecas ao espírito: quem somos, de onde viemos e para onde vamos? A resposta para essas perguntas evolui de tempos em tempos de acordo com a evolução do pensamento humano no que diz respeito à ciência, à filosofia e até mesmo à religião. Na minha opinião, essa evolução do pensamento está relacionada com a maneira em que os fatos são observados e interpretados ao longo do tempo. No meio a tantos questionamentos surgem diversos cenários na tentativa de saciar o questionamento humano sobre porque existe alguma coisa ao invés do nada e entre os cenários surge a cosmologia que tem como objeto de estudo o Universo, no sentido físico de **tudo que existe**. Em outras palavras, a Cosmologia tem como objetivo estudar a totalidade e através dela refundar as bases da física com o desejo que as leis possam ser válidas em todas as escalas [1].

O Universo, simplesmente acontece, inerente à nossa vontade e muitas vezes bem distante dos nossos olhos e dos nossos sentidos. Um cientista, no papel de um mero expectador, constrói modelos para representar o que está sendo observado e como o Universo observado é uma pequena parte do Universo ao qual temos acesso, certamente, não observamos tudo o que acontece e nossos modelos, muitas vezes, estão longe de representar a totalidade. Se precisamos construir modelos gerais que expliquem o Universo no qual estamos imersos, porque considerar uma pequena fração da totalidade para impor

condições e restrições aos nossos modelos? Pergunto ainda, porque considerar que o Universo nasceu de uma singularidade ao invés de considerar que o Universo sempre existiu e sempre existirá e que antes de se expandir, passou por uma fase de contração. Por que considerar que a geometria do Universo

é Riemanniana, onde o comprimento das réguas nas quais realizamos medidas se mantém constante durante seu deslocamento pelo espaço, ao invés de considerar uma geometria mais geral, sem impor tal condição?

Neste trabalho, através do meu entendimento limitado do que realmente é o Universo em toda a sua totalidade, apresento a minha própria interpretação, tentando me libertar de amarras e pensá-lo de maneira mais livre

possível. É fato que, todo modelo deve satisfazer de algum modo, certas condições impostas pelas observações. De uma maneira bem simples e sem pretensões, mostro como a escolha de uma geometria mais geral pode criar um Universo não-singular e amplificar as perturbações iniciais que deram origem a estruturas em larga escala no Universo como galáxias e aglomerados assim como a amplificação de ondas gravitacionais, fonte de anisotropia de temperatura observada na Radiação Cósmica de Fundo. Embora, o mecanismo de gerar não-homogeneidades, em nosso modelo, não reproduza o Universo observado, é possível tratar de forma analítica a amplificação de perturbações escalares e tensoriais.

Este trabalho se divide em três partes principais. Na primeira parte, descrevemos o Universo de Fundo, homogêneo e isotrópico, livre de qualquer perturbação do campo gravitacional. Definimos parâmetros matemáticos que representam a cinemática e a dinâmica do Universo assim como sua descrição segundo o Formalismo Quasi-Maxwelliano da Gravitação. Consideramos um

Universo descrito por uma geometria de Weyl Integrável (WIST) que produz um ricochete puramente geométrico, ou seja, o Universo sofre uma fase de contração antes da fase de expansão. Na segunda parte, descrevemos o Universo real, constituído de perturbações do campo gravitacional e o tratamento matemático das perturbações. Duas teorias de perturbações cosmológicas são apresentadas: Formalismo de Bardeen e Formalismo Quasi-Maxwelliano. A primeira descreve quantidades perturbadas de interesse físico, através de perturbações do tensor métrico que não é um observável físico e por isso, torna-se necessário construir quantidades invariantes causando muitas vezes dificuldades de interpretação. O segundo formalismo descreve as quantidades perturbadas em termos de quantidades que são observáveis físicos e por isso constituem perturbações verdadeiras, eliminando o problema de calibre. Uma comparação entre os dois formalismos é discutida. Na terceira parte, consideramos apenas perturbações escalares do campo gravitacional e aplicamos a teoria de perturbação cosmológica segundo o formalismo Quasi-Maxwelliano, para estudar perturbações na densidade de matéria. Desenvolvemos um formalismo hamiltoniano, permitindo a quantização canônica da variável que representa a perturbação de densidade de matéria. Como aplicação, estudamos a amplificação das perturbações escalares por um modelo com ricochete geométrico e calculamos o espectro de potência. Na quarta parte, levamos em conta apenas perturbações tensoriais com o objetivo de estudar ondas gravitacionais. De maneira análoga ao caso escalar, também descrevemos as perturbações segundo o formalismo Quasi-Maxwelliano e realizamos a quantização canônica da variável que representa perturbações tensoriais. O espectro de potência também é obtido.

Notação

Na convenção de índices tensoriais, os índices espaço-temporais, denotado pelo alfabeto grego variam como $\alpha = 0...3$, enquanto os índices espaciais denotados pelo alfabeto latino, $i = 1...3$.

Neste trabalho, as unidades de medidas são geometrizadas por $c = 1 = \frac{8\pi\mu}{c^2}$. Adotamos a assinatura (+,-,-,-) para o tensor métrico.

Em relação às derivadas, convencionamos o uso de $(;)$ para derivadas covariantes na geometria de Weyl e no caso da geometria riemanniana, $(//)$ para as derivadas covariantes, sendo $(/)$ para as derivadas covariantes no 3-espço e $(,)$ para derivadas simples.

Sumário

I	Descrevendo o Universo	13
1	Descrição matemática do Universo	14
2	Equações Quasi-Maxwellianas	21
3	Modelos de Universo com Ricochete	26
3.1	Modelo Cosmológico Padrão	27
3.2	Ricochete Geométrico	28
3.2.1	Geometria de Weyl Integrável	28
II	O Universo Perturbado	33
4	Calibre em Perturbações Cosmológicas	34
4.1	Fixação de calibre	36
5	Teoria de Perturbações Cosmológicas	39

5.1	Formalismo de Bardeen	40
5.1.1	Formalismo de Mukhanov	41
5.2	Formalismo Quasi-Maxwelliano	45
5.2.1	Decomposição em autofunções de Helmholtz	48
5.3	Conjunto Mínimo de variáveis	52
6	Comparação entre as Variáveis Perturbadas	55
III	Formação de Estruturas no Universo	57
7	Introdução	59
7.1	Amplificação das perturbações de matéria	60
8	Descrevendo as perturbações de matéria	62
8.1	Formulação Hamiltoniana	64
9	Quantização	67
9.1	Espaço de Soluções	67
9.2	Base Completa de Soluções	69
9.3	Quantização das Perturbações	70
9.4	Transformação de Bogoliubov	71
10	Energia do sistema clássico	75
10.1	Antes do Ricochete	75
10.2	Depois do Ricochete	76
11	Energia do sistema Quântico	79

11.1	Antes do ricochete.....	79
11.2	Depois do ricochete.....	80
11.2.1	Interpretação da Hamiltoniana no estado Out	82
12	Aplicação: Modelo com ricochete geométrico.	84
13	Espectro de Potência	89
13.1	Introdução	89
13.2	Aplicação no modelo com ricochete geométrico.	93
IV	Ondas Gravitacionais	97
14	Introdução	99
14.1	Pulsar Binário PSR 1913+16	100
14.2	Fontes de Ondas Gravitacionais	101
14.3	Fundo Estocástico	102
15	Descrevendo as Perturbações Tensoriais	104
15.1	Linearização das equações de Einstein	104
15.2	Desvio Geodésico	108
15.3	Formalismo Quase-Maxwelliano.....	110
15.4	Formulação Hamiltoniana	113
16	Modelo com Ricochete Geométrico	117

16.1	Hamiltoniana do modelo	118
16.2	Quantização	124
17	Lei de Balanço	131
17.1	Campo eletromagnético	131
17.2	Campo Gravitacional	136
18	Conclusão	141

Parte I

Descrivendo o Universo

Capítulo 1

Descrição matemática do Universo

O Universo em uma determinada escala é representado por um modelo cosmológico. Podemos definir um dado modelo cosmológico especificando a geometria do espaço-tempo, a matéria contida nele e a interação da matéria com a geometria. Isso significa especificar, respectivamente, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ e as equações dinâmicas do campo gravitacional [2].

Segundo a Teoria da relatividade Geral (TRG), as equações de campo são dadas pelas equações de Einstein ¹[3]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

e a equação de conservação do tensor momento-energia, dada pela identidade de Bianchi

¹De acordo com a convenção usada $k=1$. (Vide seção Notação).

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2)$$

O tensor métrico pode ser descrito em um particular sistema de coordenadas fazendo conexão com os símbolos de Cristoffel, ou em termos de um sistema de tetradas fazendo conexão com coeficientes de rotação de Ricci, ou ainda, descrito covariantemente através da formulação 3+1. Para referências sobre o assunto, pode-se consultar os livros-textos [2]-[5].

No que diz respeito a matéria, considera-se o Universo usualmente composto por alguma espécie de fluido ou um conjunto de partículas representadas pela teoria cinética, um campo escalar ou campo eletromagnético e até mesmo uma mistura das possibilidades anteriores.

O movimento da matéria no espaço pode ser descrito através de **quantidades cinemáticas**:

a) Velocidade

Como a matéria não está concentrada em uma dada região do espaço, é necessário definir um campo de velocidade em toda a variedade, denominado campo de observadores fundamentais, representados por uma família de linhas de Universo (linhas do tipo-tempo):

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (1.3)$$

onde τ é o tempo próprio medido ao longo das linhas de Universo fundamentais. Se V^α é um vetor do tipo tempo, ou seja, $V_\alpha V_\beta g^{\mu\nu} > 0$, podemos normalizá-lo, segundo a assinatura métrica (+, - - -), como $V^\alpha V_\alpha = -1$. Em geral, esse campo de observadores é tomado como **comovente** com o conteúdo material do modelo.

b) Tensor de Projeção

Dado V^α , podemos definir um tensor de projeção $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + V^\mu V^\nu$ que projeta objetos 4-dimensionais no 3-espaço do observador ortogonalmente ao campo de velocidade. É fácil verificar que o projetor $h^{\mu\nu}$ possui as seguintes propriedades:

$$h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu}; \quad h^\mu{}_\mu = 3; \quad h^\mu{}_\alpha h_{\mu\beta} = h_{\alpha\beta}; \quad h^\beta{}_\alpha V_\beta = 0. \quad (1.4)$$

Para a caracterização completa do estado cinemático da matéria descrita por um fluido, precisamos conhecer a derivada covariante do campo de velocidades que pode ser decomposta em suas partes irreduzíveis da direção de V^α :

$$V_{\mu/\nu} = a_\mu V_\nu + \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + w_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

onde o escalar θ representa a taxa de expansão do Universo, $\sigma_{\alpha\beta}$ o tensor de cisalhamento, $w_{\alpha\beta}$ o tensor de rotação e a_α a aceleração das linhas de fluxo do fluido.

c) Taxa de Expansão

A taxa de expansão do fluxo de linhas do fluido também representa uma variação do fluido em relação ao volume (volume específico do fluido).

$$\theta = h^{\alpha\beta} V_{\alpha/\beta} = V^\alpha{}_{/\alpha}, \quad (1.6)$$

onde:

$$V_{\alpha/\lambda} = V_{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha} V^{\lambda} = V_{,\alpha} + \frac{(V^{\lambda})_{,\alpha}}{\sqrt{-g}} V^{\alpha} = \frac{(V^{\alpha})_{,\alpha}}{\sqrt{-g}} \quad (1.7)$$

d) Cisalhamento

O tensor simétrico $\sigma_{\alpha\beta}$, nos diz como as linhas de fluxo do fluido se de-formam:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\mu}_{[\alpha} h^{\lambda}_{\beta]} V_{\mu/\lambda} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad , \quad (1.8)$$

e) Rotação

Representada pelo tensor antissimétrico $w_{\alpha\beta}$, nos diz sobre a rotação das linhas de fluxo do fluido.

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\mu}_{[\alpha} h^{\lambda}_{\beta]} V_{\mu/\lambda} \quad (1.9)$$

f) Aceleração

A aceleração do fluido é dada por:

$$\dot{\alpha}_{\alpha} = V_{\alpha/\beta} V^{\beta} \quad (1.10)$$

Antes de descrever as equações dinâmicas para essas quantidades, precisamos definir como a matéria é representada pelo tensor momento-energia.

Tensor Momento Energia

O Tensor momento-energia, fonte da geometria nas equações de Einstein (1.1), pode ser decomposto em suas partes irredutíveis em relação a 4-velocidade V^α :

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta - p h_{\alpha\beta} + 2q_{(\alpha} V_{\beta)} + \pi_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

onde ρ é a densidade de energia, q^α é o fluxo de calor, p é a pressão isotrópica e $\pi_{\alpha\beta}$ é a pressão anisotrópica sem traço. Essas quantidades satisfazem as seguintes propriedades:

$$q_\alpha V^\alpha = 0 = \pi^\alpha{}_\alpha; \quad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}; \quad \pi_{\alpha\beta} V^\beta = 0. \quad (1.12)$$

Segue da equação de conservação $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ as equações:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + q^\alpha V_\alpha + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.13)$$

e

$$(\rho + p)a_\alpha - p_{;\mu} h^\mu{}_\alpha + \dot{q}_\alpha + q^\nu \Theta_{\alpha\nu} + q^\nu w_{\alpha\nu} + (\pi^\nu{}_\nu)_{;\alpha} + \pi^{\mu\nu}{}_{;\alpha} V_\mu = 0, \quad \text{onde } \Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{h}_{\mu\nu} +$$

$\sigma_{\mu\nu}$.

3

Um fluido perfeito é caracterizado por $q^\alpha = \pi^{\alpha\beta} = 0$, o que implica em um tensor momento-energia

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta - p h_{\alpha\beta}. \quad (1.15)$$

Equações de Propagação:

Para examinar as equações de evolução das quantidades cinemáticas ao longo das linhas de fluxo fundamentais, precisamos utilizar a definição de curvatura,

$$V_{\mu//\alpha//\beta} - V_{\mu//\beta//\alpha} = R_{\mu\epsilon\alpha\beta} V^{\epsilon}. \quad (1.16)$$

O tensor de curvatura $R_{\mu\epsilon\alpha\beta}$, pode ser definido em termos dos seus traços $R_{\mu\alpha}$ e R e do tensor de Weyl $W_{\mu\epsilon\alpha\beta}$:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} [R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}] + \frac{1}{6} [R g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}], \quad (1.17)$$

$$R_{\mu\epsilon\alpha\beta} = R_{\mu\alpha} R W_{\mu\epsilon\alpha\beta} \quad (1.18)$$

Utilizando as equações de Einstein (1.1) para substituir os traços do tensor de curvatura e realizando projeções adequadas, obtemos três equações de propagação e três equações de vínculo:

Equação de propagação para o escalar θ ou equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2(\sigma^2 + w^2) - a_{//\alpha} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad (1.19)$$

com $\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$ e $w^2 = w^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}$.

Equação de propagação para $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} & h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (-2w^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda{}_{;\lambda}) - \\ & \frac{1}{2} h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta a_{(\mu;\nu)} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + w_{\alpha\mu} w^\mu{}_\beta = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Equação de propagação para $w_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} & h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta \dot{w}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta a_{(\mu;\nu)} + \frac{2}{3} \theta w_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} w^\mu{}_\beta - \sigma_{\beta\mu} w^\mu{}_\alpha \\ & = -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.21)$$

As equações de vínculo para as quantidades cinemáticas são dadas por:

$$\frac{2}{3} \dot{\theta} h^\mu{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma w)^\alpha{}_\gamma{}_{;\alpha} h^\gamma{}_\lambda - a(\sigma_{\lambda\nu} + w_{\lambda\nu}) = -q_{\lambda}; \quad (1.22)$$

$$w^\alpha{}_\alpha + 2w^\alpha a_\alpha = 0; \quad (1.23)$$

$$H_{\delta\lambda} = -\frac{1}{2} h^\epsilon{}_\delta h^\alpha{}_\lambda \eta^{\beta\gamma\gamma}{}_\epsilon V(\sigma_{\nu\alpha\beta} + w_{\alpha\beta})_{;\gamma} + a w_{\delta\lambda}. \quad (1.24)$$

As equações de evolução para os parâmetros cinemáticos $(\sigma_{\mu\nu}, w_{\mu\nu}, a_{\mu\nu})$ que obtivemos, envolvem a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl, por isso, torna-se necessário obter as equações de evolução para esses tensores, que será feito no próximo capítulo.

Capítulo 2

Equações Quasi-Maxwellianas

O formalismo Quasi-Maxwelliano da gravitação foi introduzido por Jordan, Ehlers e Kundt em (1960) [6] e consiste em considerar as Identidades de Bianchi como equações de campo para as partes irreduzíveis do tensor de Weyl.

O tensor de Weyl, ou tensor de curvatura conforme $W_{\alpha\beta\mu\nu}$, pode ser decomposto em tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ e tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ da seguinte forma:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} R \left[g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \right] - \frac{1}{6} R \left[g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \right], \quad (2.1)$$

com propriedades $W_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\alpha\mu} = 0$ e $W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\beta\alpha\mu\nu} = W_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Na ausência de matéria, $R_{\mu\nu} = R = 0$ e conseqüentemente $W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$, ou seja, podemos dizer que $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ representa o campo gravitacional livre, determinado não-localmente pela matéria.

Substituindo o tensor de Weyl, na identidade de Bianchi:

$$R^{\alpha\beta}_{\mu\nu//\lambda} + R^{\alpha\beta}_{\nu\lambda//\mu} + R^{\alpha\beta}_{\lambda\mu//\nu} = 0 \quad (2.2)$$

obtemos as equações de campo:

$$W^{\nu}_{\alpha\beta\mu//\nu} = k \left(-\frac{1}{2} R_{\mu[\alpha//\beta]} + \frac{1}{6} g_{\mu[\alpha} R_{\beta]} \right). \quad (2.3)$$

ou, com o auxílio das equações de Einstein (1.1):

$$W^{\nu}_{\alpha\beta\mu//\nu} = k \left(-\frac{1}{2} T_{\mu[\alpha//\beta]} + \frac{1}{6} g_{\mu[\alpha} T_{\beta]} \right). \quad (2.4)$$

relacionando a geometria com o tensor momento-energia.

Em analogia com o eletromagnetismo, o tensor de Weyl pode ser decomposto em suas partes irreduzíveis $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, denominadas respectivamente como parte elétrica e magnética:

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta} \quad (2.5)$$

$$H_{\alpha\beta} = -W^*_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta} \quad (2.6)$$

com propriedades

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}; \quad (2.7)$$

$$E_{\mu\nu} V^{\mu} = 0; \quad (2.8)$$

$$E_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0; \quad (2.9)$$

$$H_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}; \quad (2.10)$$

$$H_{\mu\nu} V^\mu = 0; \quad (2.11)$$

$$E_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Escrevendo o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ em termos de suas partes irredutíveis $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\mu\nu}$ temos,

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu} = & (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} - g^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon}) V_\lambda V_\tau E_{\sigma\epsilon} \\ & + (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} + g^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon}) V_\lambda V_\tau H_{\sigma\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O tensor $W^{\alpha\beta\mu\nu}_{//V}$ é um tensor de ordem 3 e admite quatro projeções independentes em relação ao vetor tangente as curvas da congruência V^μ , gerando dois vetores e dois tensores de ordem 2:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}_{//V} V_\beta V_\mu h^\sigma_\alpha \quad (2.14)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}_{//V} \eta^{\sigma\lambda}_{\alpha\beta} V_\mu V_\lambda \quad (2.15)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}_{//V} h^{(\sigma}_{\mu} \eta^{\tau)\lambda}_{\alpha\beta} V_\lambda \quad (2.16)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}_{//V} V_\beta h_{\mu(\tau} h_{\sigma)\alpha} \quad (2.17)$$

Através dessas projeções e do uso de (2.4), que relaciona o traço do tensor de Weyl ao tensor momento-energia, obtemos as Equações Quasi- Maxwellianas da Gravitação:

$$h^{\epsilon\alpha}h^{\lambda\gamma}E_{\alpha\lambda//\gamma} + \eta^{\epsilon}{}_{\beta\mu\nu}V^{\beta}H^{\nu\lambda}\sigma^{\mu}{}_{\lambda} + 3H^{\epsilon\nu}w_{\nu} = \frac{1}{3}h^{\epsilon\alpha}\rho_{,\alpha} + \frac{\Theta}{3}q^{\epsilon} - \frac{1}{2}\sigma^{\epsilon}{}_{\nu} - 3w^{\epsilon}{}_{\nu}q^{\nu} + \frac{1}{2}\pi^{\epsilon\mu}a_{\mu} + \frac{1}{2}h^{\epsilon\alpha}\pi^{\nu}{}_{\alpha;\nu} \quad (2.18)$$

$$h^{\epsilon\alpha}h^{\lambda\gamma}H_{\alpha\lambda//\gamma} + \eta^{\epsilon}{}_{\beta\mu\nu}V^{\beta}E^{\nu\lambda}\sigma^{\mu}{}_{\lambda} + 3E^{\epsilon\nu}w_{\nu} = (\rho+p)w^{\epsilon} - \frac{1}{2}\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda}V_{\lambda}q_{\alpha//\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda}(\sigma_{\mu\beta} + w_{\mu\beta})\pi^{\mu}{}_{\alpha}V_{\lambda} \quad (2.19)$$

$$h^{\epsilon}{}_{\mu}h^{\lambda}{}_{\nu}\dot{H}^{\mu\nu} + \Theta H^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}H^{(\epsilon}h^{\lambda)}V^{\mu//\nu}{}_{\mu} + \eta^{\lambda\nu\mu\gamma}\eta^{\epsilon\beta\tau\alpha}V_{\nu}V_{\tau}H_{\mu\tau}{}_{\alpha\gamma}\Theta_{\nu\beta} - a_{\alpha}E_{\beta}\eta^{\lambda\gamma}V_{\gamma} + \frac{1}{2}E_{\beta//\alpha}h_{\mu}\eta^{\lambda\gamma}V_{\gamma} = \frac{3}{4}q^{\epsilon\lambda}w + \frac{1}{2}h^{\epsilon\lambda}q^{\mu}w_{\mu} + \frac{1}{4}\sigma^{(\epsilon}\eta^{\lambda)\alpha\beta\mu}V_{\mu}q_{\alpha} + \frac{1}{4}h^{\nu(\epsilon}\eta^{\lambda)\alpha\beta\mu}V_{\mu}\pi_{\nu\alpha//\beta} \quad (2.20)$$

$$h^{\epsilon}{}_{\mu}h^{\lambda}{}_{\nu}\dot{E}^{\mu\nu} + \Theta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}E^{(\epsilon}h^{\lambda)}V^{\mu//\nu}{}_{\mu} + \eta^{\lambda\nu\mu\gamma}\eta^{\epsilon\beta\tau\alpha}V_{\nu}V_{\tau}E_{\mu\tau}{}_{\alpha\gamma}\Theta_{\nu\beta} - a_{\alpha}H^{(\lambda}{}_{\beta}\eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta}V_{\gamma} + \frac{1}{2}H^{\mu}{}_{\beta//\alpha}h_{\mu}\eta^{\epsilon\lambda\gamma\alpha\beta}V_{\gamma} = \frac{1}{6}h^{\epsilon\alpha}(q^{\mu}{}_{//\mu} - q^{\mu}a_{\mu} - \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\rho+p)\sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{2}q^{\epsilon\lambda}a^{\lambda} - \frac{1}{4}h^{\mu(\epsilon}h^{\lambda)\alpha}q_{\mu//\alpha} + \frac{1}{6}h^{\epsilon}{}_{\alpha}h^{\lambda}{}_{\mu}\pi^{\alpha\mu} + 14\pi^{(\epsilon}w^{\lambda)\beta} + \frac{1}{6}\theta\pi^{\epsilon\lambda} \quad (2.21)$$

onde $\Theta_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$.

As Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação são equações diferenci- ais de terceira ordem em $g_{\mu\nu}$ e exigem como condições iniciais as Equações de Einstein sob uma superfície de Cauchy [11]. Pode-se também ver uma demonstração deste teorema em [12].

Capítulo 3

Modelos de Universo com Ricochete

Nesta seção, vamos tratar especificamente de uma classe de modelos não-singulares, que constitui os modelos com ricochete (bounce). Nos modelos com ricochete, o Universo é eterno e passa por uma fase de contração no infinito passado até atingir um raio mínimo e depois se expande infinitamente. Esse modelo possui uma vantagem sobre o modelo cosmológico padrão, visto que, o problema da singularidade inicial e do horizonte é resolvido. Além disso, da mesma maneira como ocorre com os modelos inflacionários, o ricochete atua como um mecanismo de amplificação das perturbações cosmológicas.

3.1 Modelo Cosmológico Padrão

De acordo com o modelo padrão da cosmologia, o Universo teve sua origem numa singularidade inicial (Hot Big-Bang) e sua geometria é descrita por um modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) caracterizando homogeneidade e isotropia.

Essa descrição do universo foi muito bem sucedida, se mostrando de acordo com muitas observações como por exemplo a homogeneidade do Universo em larga escala, a radiação cósmica de fundo (RCF) e abundância de elementos químicos. Apesar do sucesso dessas previsões, o modelo (HBB) possui um problema estrutural intratável que consiste na singularidade inicial, onde as quantidades físicas divergem. Além disso, esse modelo gera alguns problemas conhecidos como problemas padrões da cosmologia:

- problema de horizonte: limitação causal para homogeneidade do Universo;
- problema de planeza: aparente natureza euclidiana do Universo;
- assimetria de bárions: prevalescência de matéria sobre a anti-matéria.

Para resolver esses problemas, foi introduzida uma fase inflacionária no modelo padrão. Nessa fase, o Universo após o Big Bang passa por uma fase de expansão exponencial [7].

Além do modelo inflacionário, foram sugeridos muitos outros modelos para resolver os problemas padrões da cosmologia, entre eles, modelos de Universo não singular onde o Universo começa de um raio mínimo. Para referências sobre esses modelos, consulte ([8]) e ([9]). Esses modelos possuem uma vantagem sobre o modelo cosmológico padrão, visto que, o problema da singularidade inicial é resolvido e da mesma maneira como ocorre com os

modelos inflacionários, o ricochete atua como um mecanismo de amplificação das perturbações cosmológicas.

3.2 Ricochete Geométrico

Nessa seção, vamos tratar especificamente de um determinado tipo de modelo cosmológico com ricochete gerado puramente pela geometria do espaço-tempo ([10]). Para gerar um ricochete geométrico, consideramos que o Universo inicialmente não possui matéria e que sua geometria é descrita pela geometria de Weyl como veremos a seguir.

3.2.1 Geometria de Weyl Integrável

Ao contrário do modelo padrão, vamos considerar que a geometria do Universo é descrita por uma generalização da geometria riemanniana denominada geometria de Weyl. Nessa geometria, consideramos que o comprimento de um vetor varia com o seu deslocamento espacial. Isso significa dizer que $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} \neq 0$.

Originalmente, a geometria de Weyl foi proposta com o intuito de unificar o eletromagnetismo com a gravitação, porém exibiu uma grave inconsistência com as observações, já que em sua formulação, o comprimento e portanto o espectro atômico varia com a posição e o caminho para atingir essa posição, quando na presença de um campo eletromagnético. Em nosso modelo, o campo de Weyl não está associado ao campo eletromagnético e ademais, é o gradiente de um campo escalar. Nesse caso, a variação do comprimento depende apenas da posição, não importando o caminho para atingi-la. Essa

geometria passou a ser denominada WIST, sigla em inglês para Espaço- Tempo de Weyl Integrável. Assim,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu} w_{\lambda}. \quad (3.1)$$

onde $w_{\lambda}(x) = w_{,\lambda}(x)$ é o gradiente de um campo escalar.

Com essa modificação na derivada covariante do tensor métrico, surgem termos adicionais na afinidade riemanniana $\{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} [g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}]$:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} [w_{\mu} \delta^{\alpha}_{\nu} + w_{\nu} \delta^{\alpha}_{\mu} - g_{\mu\nu} w^{\alpha}], \quad (3.2)$$

consequentemente no tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - w_{\mu//\nu} - \frac{1}{2} w_{\mu} w_{\nu} - \frac{1}{2} [\hat{Q}_{\mu\nu} - w_{\alpha} w^{\alpha}], \quad (3.3)$$

e no escalar de Ricci

$$R = \hat{R} - 3[\hat{Q} + \frac{3}{2} w_{\mu} w^{\mu}], \quad (3.4)$$

onde

$$\hat{Q} = w^{\mu}_{//\mu} \quad (3.5)$$

e $\{\hat{\cdot}\}$ denota uma quantidade calculada na geometria riemanniana, note que

$$w_{\alpha} \equiv w_{,\alpha}.$$

O cenário dinâmico para essa geometria é dado através de duas variáveis geométricas fundamentais $(g_{\mu\nu}, w_{\lambda})$ e a ação mais simples envolvendo esse par de variáveis é escrita como

$$S = \int \sqrt{-g} [R + \xi w^{\mu}_{;\mu}] d^4x \quad (3.6)$$

onde ξ é um parâmetro adimensional.

As equações dinâmicas são obtidas através do princípio variacional, variando a ação S em relação ao par de variáveis $(g_{\mu\nu}, w_\lambda)$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\mu\nu} - \lambda w_\mu w_\nu + \frac{\lambda^2}{2} w_\alpha w^\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.7)$$

$$\hat{Q}w = 0, \quad (3.8)$$

com $\lambda^2 = \left[\frac{4\kappa-3}{2} \right]$,

A primeira integral da equação (3.8) nos dá

$$\dot{w} = \gamma a^{-3} \quad (3.9)$$

onde γ é uma constante de integração.

Podemos interpretar esse resultado, como o equivalente das equações de Einstein onde a fonte da geometria é o próprio campo escalar e escrever (3.7) como

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}(w), \quad (3.10)$$

onde o tensor momento energia dado por $T_{\mu\nu}(w) = [\rho_w + p_w]V_\mu V_\nu - p_w g_{\mu\nu}$. Através de projeções adequadas do tensor momento-energia e dos vetores do tipo tempo V_μ , obtemos uma densidade de energia ρ_w e pressão anisotrópica p_w negativas.

$$\rho_w = p_w = -\frac{\lambda^2}{2} \dot{w}^2 \quad (3.11)$$

É importante notar que a origem dos termos envolvendo w é puramente geométrica. A interpretação em termos de um fluido é apenas formal, para

aproximar as equações da forma que elas tomariam em uma geometria Riemanniana.

Substituindo (3.11) e (3.9) nas Equações de Friedman, obtemos

$$\dot{a}^2 + \epsilon + \frac{\lambda^2}{6} \dot{a} a^2 = 0 \quad (3.12)$$

e

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon - \frac{\lambda^2}{2} \dot{a}^2 a^2 = 0. \quad (3.13)$$

Resolvendo esse sistema temos necessariamente um Universo de FRW aberto, ou seja $\epsilon = 1$ e substituindo (3.9) em (3.12) e (3.13) temos a seguinte solução para o fator de escala:

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{[a_0]^4}{a^4}, \quad (3.14)$$

$$\text{com } a_0 = \left[\frac{\lambda^2}{24} \right]^{1/4}.$$

Temos então, um modelo cosmológico com solução [13]:

$$a(\eta) = a_0 \sqrt{\cosh(2\eta)}. \quad (3.15)$$

o que implica em um Universo com ricochete ou seja, possui uma fase de contração precedida por uma fase de expansão como mostra a figura [3.1].

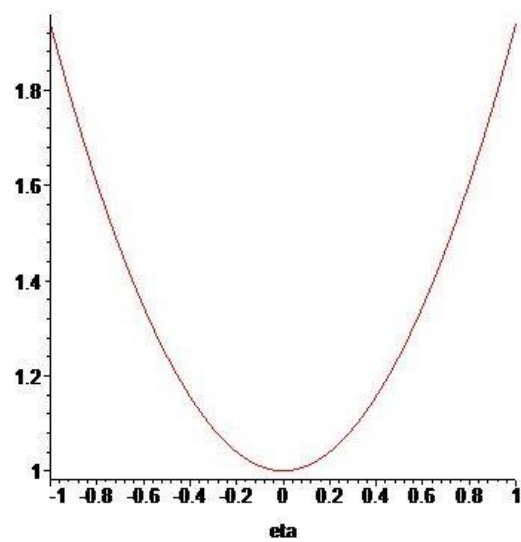


Figura 3.1: Fator de escala do Universo. Nesse gráfico consideramos a constante $a_0 = 1$.

Parte II

O Universo Perturbado

Capítulo 4

Calibre em Perturbações Cosmológicas

Evidências observacionais mostram que o Universo primordial era homogêneo e isotrópico. Acredita-se que existiram pequenas perturbações iniciais que vagarosamente foram aumentando de amplitude devido a instabilidade gravitacional. Essas perturbações iniciais são sementes para a formação de estruturas no Universo em larga escala como galáxias e aglomerado de galáxias além de ser responsável pela variação de temperatura observada na Radiação Cósmica de Fundo (RCF).

Para definir perturbações cosmológicas, precisamos primeiramente definir um espaço-tempo fictício, denominado espaço-tempo de fundo e um espaço-tempo físico, denominado espaço-tempo real. O espaço-tempo de fundo é livre de qualquer tipo de perturbação enquanto o espaço-tempo real contém as não-homogeneidades do Universo [14]. Nesse cenário, o termo calibre representa a liberdade do observador na escolha do mapeamento entre o

espaço-tempo de fundo e o espaço-tempo perturbado. Fazer uma escolha de calibre significa realizar um mapeamento, determinando a correspondência ponto a ponto entre os dois espaços-tempo como está representado na figura (1.1).

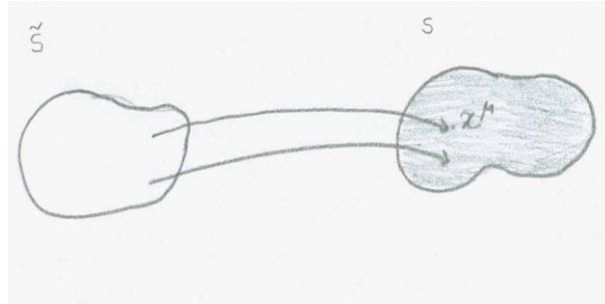


Figura 4.1: Espaço tempo real e fictício.

Uma mudança nessa correspondência, mantendo a coordenada x^μ fixa, é chamada transformação de calibre (muda o ponto do espaço-tempo de fundo correspondente ao ponto no espaço-tempo perturbado) enquanto uma transformação de coordenadas muda as coordenadas do espaço-tempo de fundo e perturbado simultaneamente.

Uma quantidade perturbada é definida como sendo a diferença entre o valor dessa quantidade em uma dada hipersuperfície $\tilde{S}$ do espaço-tempo perturbado e o seu valor correspondente em uma dada hipersuperfície S no espaço tempo de fundo através de um mapeamento arbitrário representado por Ω :

$$\delta q = \tilde{q} - q. \quad (4.1)$$

Uma vez definido Ω , não existe nenhuma arbitrariedade em δq , porém, não significa que exista algo que relacione de maneira direta os dois espaços-

tempo, ou seja, não é possível determinar unicamente S de $\tilde{S}$ e por isso, essa definição de perturbação deve ser vista com atenção.

Já vimos anteriormente que as perturbações definidas são completamente dependente de um mapeamento escolhido e nesse contexto, a definição de um modelo de fundo em S é equivalente a definir um mapa Ω de S em $\tilde{S}$. Como exemplo, podemos ver o caso da densidade de energia que é dependente de calibre. A densidade de energia perturbada $\delta\mu$ é definida por um mapeamento Ω do espaço-tempo de fundo no espaço tempo perturbado. Só é possível comparar a quantidade μ com $\tilde{\mu}$ após o mapeamento como representado na figura [4.1].

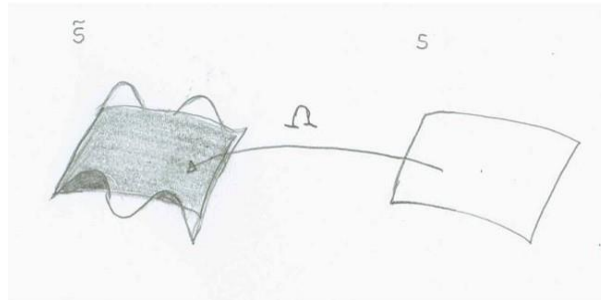


Figura 4.2: Mapeamento do espaço-tempo de fundo no espaço-tempo perturbado.

4.1 Fixação de calibre

Um espaço-tempo pode ser descrito através de uma família de curvas do tipo tempo (A) ou através de hipersuperfícies espaciais com tempo constante (C) como na figura (1.3).

O calibre pode ser especificado de várias formas dependendo de que

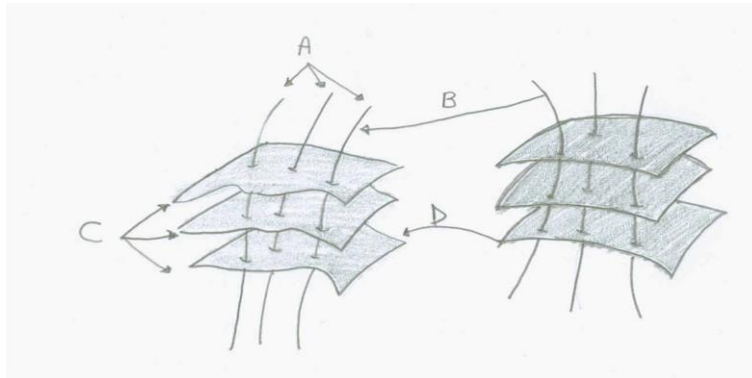


Figura 4.3: Aspectos do mapeamento.

maneira a quantidade μ é alocada nas hipersuperfícies ou nas curvas do tipo tempo:

a) **Calibre Sincrono:**

O calibre sincrono ou de tempo conforme é aquele em que o tempo próprio é fixado ao longo das linhas de fluxo do fluido no espaço-tempo de fundo e no espaço tempo perturbado e o calibre é fixado através da relação entre eles. O problema dessa escolha é que ela é não local, já que é preciso integrar as equações de campo ao longo das curvas do tipo tempo.

b) **Hipersuperfícies de fluxo ortogonal:**

As hipersuperfícies de fluxo ortogonal também conhecidas como hipersuperfícies comoverentes são escolhidas de maneira que sejam ortogonais as linhas de fluxo do fundo, porém essa escolha só é possível se o sistema for livre de vorticidade. A dificuldade dessa escolha está em definir valores do tempo unicamente nessas superfícies pois se existir aceleração, o tempo próprio medido ao longo de uma curva do tipo tempo será diferente da curva vizinha.

c) Equivalentes escalares:

Uma outra possibilidade é identificar quantidades escalares que são invariantes de calibre nos dois espaços-tempo e através delas definir superfícies espaciais em S e fixar o mapeamento entre os dois espaços-tempo. O problema dessa escolha é que é muito difícil decodificar a perturbação de densidade obtida.

Existem outras escolhas para fixar o calibre e sua escolha vai depender da perturbação estudada.

Capítulo 5

Teoria de Perturbações Cosmológicas

Matematicamente, o crescimento das perturbações iniciais no Universo é descrito pela Teoria de Perturbações Cosmológicas e o tratamento relativístico dessas perturbações, foi apresentado primeiramente por Lifshitz em (1946) [15], considerando um modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e posteriormente resumido em [16] onde foi introduzido a decomposição das perturbações em harmônicos escalares, vetoriais e tensoriais. Como vimos anteriormente, o estudo de perturbações cosmológicas implica numa liberdade de escolha de calibre. Diversos trabalhos foram realizados com diferentes escolhas de calibre mas todos eles, exibindo dificuldades de interpretação das quantidades perturbadas.

Para resolver o problema, seria necessário introduzir um formalismo invariante de calibre e nessa direção, podemos destacar dois trabalhos importantes: a teoria de perturbações cosmológicas no formalismo Quasi-Maxwelliano

da gravitação, desenvolvido por Hawking em (1966) [18] e o formalismo in- variante de calibre apresentado por Bardeen (1980) [20].

5.1 Formalismo de Bardeen

Nesse formalismo, as perturbações do Universo estão diretamente relacionadas com as perturbações da geometria representada por $g^{\mu\nu}$ e perturbações da matéria representadas por $T_{\mu\nu}$.

Considerando apenas perturbações lineares, podemos escrever o tensor métrico acrescido de uma variação infinitesimal $\delta g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = {}^{(0)}g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde ${}^{(0)}g^{\mu\nu}$ representa o tensor métrico do espaço-tempo de fundo.

Uma perturbação métrica, gera perturbações nas equações de Einstein $\delta G_{\mu\nu} = k\delta T_{\mu\nu}$ e usualmente, para resolvê-las, aplica-se condições de calibre para simplificar a forma das perturbações da geometria e da matéria, trabalhando apenas com componentes do tensor métrico perturbado. O problema desse método está no fato de que o próprio tensor métrico não é um observável físico diretamente mas apenas sua derivada segunda associada com o tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, portanto, não é uma quantidade invariante de calibre e isso dificulta a distinção de uma não-homogeneidade física (geométrica) de uma não-homogeneidade criada por uma mera escolha inconveniente do sistema de coordenadas.

Bardeen através de combinações adequadas do componente do tensor métrico construiu dois potenciais invariantes de calibre e através desses po-

tenciais escreveu as equações de Einstein perturbadas de uma forma totalmente independente de calibre.

5.1.1 Formalismo de Mukhanov

Em um trabalho mais recente [22], Mukhanov et al. simplifica a derivação das equações de campo perturbadas, mostradas por Bardeen, trabalhando no calibre longitudinal. Nesse mesmo trabalho, Mukhanov trata perturbações clássicas e quânticas e aplica em alguns modelos relevantes. Aqui, vamos nos deter em perturbações do espaço-tempo de fundo do ponto de vista clássico.

Assumindo um Universo homogêneo e isotrópico em larga escala, iremos considerar a métrica conforme de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (5.2)$$

onde $\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[1 + \frac{\epsilon}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \right]$, com curvatura espacial $\epsilon = 0, \pm 1$.

As perturbações do espaço-tempo de fundo, representadas pelo tensor métrico, podem ser classificadas em perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, dependendo de como as perturbações se comportam sob uma transformação de coordenadas no espaço-tempo de fundo.

Neste trabalho, estamos interessados apenas em perturbações escalares, responsáveis pela formação de estruturas no Universo em larga escala, e perturbações tensoriais responsáveis pela descrição de ondas gravitacionais. As perturbações vetoriais responsáveis por vorticidades serão desconsideradas.

De uma forma geral, podemos escrever uma perturbação métrica escalar, através de 4 quantidades escalares ϕ, ψ, B e E :

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Levando-se em conta essas perturbações, podemos escrever a métrica de fundo dada por (5.2) como:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i} dx^i d\eta - (1 - 2\psi)\gamma_{ij} dx^i dx^j + 2E_{|ij} dx^i dx^j \right]. \quad (5.4)$$

Claramente, esse elemento de linha não é invariante de calibre, porém, podemos escrevê-lo em termos dos potenciais de Bardeen Φ e Ψ , dados por:

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} [(B - E')a]' \quad (5.5)$$

$$\Psi = \psi - \frac{a'}{a} (B - E') \quad (5.6)$$

e obter um elemento de linha totalmente independente de calibre:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (5.7)$$

Nessa formulação invariantes de calibre, as perturbações da geometria generalizadas para o caso em que a 3-curvatura é não-nula, são dadas por:

$${}^{(ig)}\delta G^0_0 = 2a^{-2} \left[-3H(H\Phi + \Phi') + \nabla^2\Phi + 3\varepsilon\Phi \right];$$

$${}^{(ig)}\delta G^0_i = 2a^{-2} [H\Phi + \Phi'] ; \quad (5.8)$$

$${}^{(ig)}\delta G^i_j = -2a^{-2} [(2H' + H^2)\Phi + H\Phi' + \Phi'' + 2H\Phi' - \epsilon\Phi] \delta^i_j.$$

Para o caso de um modelo de Universo que experimenta um ricochete geométrico como descrito anteriormente por uma variedade de Weyl in-tegrável (WIST) com solução do tipo Friedmann aberta $\epsilon = -1$, e densidade de energia negativa $\rho = -\lambda^2 \frac{\phi'^2}{a^2}$ obtemos as perturbações de matéria, igualmente invariantes de calibre:

$${}^{(ig)}\delta T^0_0 = -\lambda^2 a^2 (-\phi'^2 \Phi + \phi' {}^{(ig)}\delta \phi')$$

;

$${}^{(ig)}\delta T^i_j = -\lambda^2 a^2 \phi' {}^{(ig)}\delta \phi_{,i} , \quad (5.9)$$

$${}^{(ig)}\delta T^i_j = -\lambda^2 a^2 (\phi'^2 \Phi + \phi' {}^{(ig)}\delta \phi') \delta^i_j$$

onde

$${}^{(ig)}\delta \phi = \delta \phi + \phi' (B - E) \quad (5.10)$$

,

é a variação do campo escalar construída de forma invariante de calibre.

Através do conjunto de equações (5.8) e (5.9), podemos obter as equações de Einstein para um Universo com campo escalar geometrizado,

$$\nabla^2 \Phi - 3H(H\Phi + \Phi') + 3\varepsilon\Phi = -\frac{3l^2}{2} \lambda^2 (-\phi'^2 \Phi + \phi' \delta\phi')$$

$$[H\Phi + \Phi']_{;i} = -\frac{3l^2}{2} \lambda^2 \phi' \delta\phi_{,i} \quad (5.11)$$

$$\Phi'' + (2H' + H^2)\Phi + 3H\Phi' - \varepsilon\Phi = \frac{3l^2}{2} \lambda^2 (\phi'^2 \Phi - \phi' \delta\phi')$$

onde λ é uma constante.

Usando a relação

$$\frac{3l^2}{2} \lambda^2 \phi'^2 = H^2 - H' - \varepsilon,$$

podemos escrever :

$$\nabla^2 \Phi - 2H\Phi - 3H\Phi' - H^2\Phi + 4\varepsilon\Phi = -\frac{3l^2}{2} \lambda^2 \phi' \delta\phi$$

$$[H\Phi + \Phi'] = -\frac{3l^2}{2} \lambda^2 \phi' \delta\phi \quad (5.12)$$

$$\Phi'' + 2H^2\Phi + H^2\Phi + 3H\Phi' = -\frac{3l^2}{2} \lambda^2 \phi' \delta\phi$$

A equação para o potencial de Bardeen Φ , associado a perturbação da métrica, pode ser encontrada subtraindo a equação (0-0) da equação (i-j) :

$$\Phi'' - \nabla^2 \Phi + 6H\Phi' + 2(H^2 + H')\Phi - 4\varepsilon\Phi = 0 \quad (5.13)$$

onde as quantidades H^2 e H' são relacionadas através da equação

$$2H^2 + H' = -2\varepsilon, \quad (5.14)$$

permitindo escrever

$$\Phi'' - \nabla^2 \Phi + 6H\Phi' - 8\varepsilon\Phi = 0. \quad (5.15)$$

Resolvendo essa equação, podemos obter a variável invariante de calibre Φ , responsável pela descrição das perturbações.

5.2 Formalismo Quasi-Maxwelliano

Em 1966, baseado na descrição Quasi-Maxwelliana da gravitação, Hawking [18] propôs um novo método para tratar as perturbações cosmológicas. Ao invés de considerar as perturbações cosmológicas descritas por pequenas variações no tensor métrico, que não é um observável físico e por isso introduz dificuldades de interpretação das quantidades perturbadas, Hawking considera perturbações provenientes de pequenas flutuações do tensor de Weyl conforme que é um observável físico e portanto, invariante de calibre. Nesse formalismo, a interpretação dos objetos físicos perturbados é direta. Adicionalmente, no tratamento de perturbações tensoriais para descrever radiação gravitacional, esse método introduz uma vantagem em relação aos outros, visto que é o único a levar em conta a interação da radiação com a matéria como será visto adiante.

De acordo com formalismo Quasi-Maxwelliano da Gravitação descrito anteriormente, podemos decompor o tensor de Weyl, também chamado de tensor de curvatura conforme, em suas partes irreduzíveis, denominadas parte

elétrica $E_{\alpha\beta}$ e magnética $H_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu} = & (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} - g^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon}) V_\lambda V_\tau E_{\sigma\beta} \\ & + (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} + g^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon}) V_\lambda V_\tau H_{\sigma\beta}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para modelos cosmológicos conformalmente planos, como é o caso de um modelo de FRW, o tensor de curvatura se anula em toda variedade, $W_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv 0$ e isso garante que a sua variação seja uma perturbação verdadeira e não apenas um resíduo da transformação do sistema de coordenadas. Segue diretamente de (5.16) que as perturbações do campo gravitacional são descritas através de perturbações das partes elétricas e magnéticas. A vantagem desse método é que além de eliminar problemas de calibre existentes em outras teorias, a dinâmica dos observáveis não requer sequer o conhecimento das componentes de $\delta g_{\mu\nu}$.

As equações dinâmicas perturbadas, para os observáveis $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ são dadas em primeira ordem por:

$$\begin{aligned} & h^\alpha_\mu h^\beta_\nu (\delta E^{\mu\nu})^\cdot + \theta (\delta E^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta E^{(\alpha} h^{\beta)})_\mu V^{\mu;\nu} \\ & + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau (\delta E_{\epsilon\lambda})_{\gamma\nu} - \frac{1}{2} (\delta H^\mu)_{\lambda;\nu} h^{(\alpha} h^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\tau \\ & - \frac{1}{2} (\bar{p} + \bar{\rho}) (\delta \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{1}{6} h_{\alpha\beta} (\delta q)_{;\mu} - \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} (\delta q_{\mu\nu})_{;\nu} + \\ & \frac{1}{2} h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta \pi_{\mu\nu})^\cdot + \frac{1}{6} \theta (\delta \pi^{\mu\nu}); \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
 & h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} (\delta H^{\mu\nu})^{\cdot} + \theta (\delta H^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta H^{(\alpha}) h^{\beta)} \\
 & + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\lambda\tau\gamma} V_{\mu\tau} (\delta H_{\epsilon\gamma}) h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} (\delta E_{\lambda}{}^{\mu})_{;\tau} h^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_{\gamma} = \\
 & \frac{1}{4} h^{\nu\alpha} \eta^{\beta\epsilon\tau\mu} V_{\mu} (\delta \pi_{\nu\epsilon})_{;\tau}; \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

$$(\delta H_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = (p + \rho) (\delta w^{\epsilon}) - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\mu} V_{\mu} (\delta q_{\alpha})_{;\beta}; \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}
 & (\delta E_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (\delta \rho)_{;\alpha} - \frac{1}{3} \theta (\delta q^{\epsilon})_{;\alpha} - \frac{1}{3} \rho (\delta V^{\epsilon}) - \frac{1}{3} \rho (\delta V^0) V^{\epsilon} + \\
 & \frac{1}{2} h^{\epsilon}{}_{\lambda} (\delta \pi^{\alpha\mu})_{;\mu} + \frac{\theta}{3} (\delta q^{\epsilon})_{;\alpha}. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

As equações Quasi-Maxwellianas perturbadas, juntamente com as equações de evolução das quantidades cinemáticas perturbadas

$$(\delta \theta)^{\cdot} + \theta (\delta V^0) + \frac{2}{3} \theta (\delta \theta) = (\delta a^{\alpha})_{;\alpha} = - \frac{1+3\lambda}{2} (\delta \rho); \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 & (\delta \sigma_{\mu\nu})^{\cdot} + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} (\delta a^{\alpha})_{;\alpha} - \frac{1}{2} (\delta a_{(\alpha}) h^{\alpha}{}_{\mu} h^{\beta}{}_{\nu} \\
 & \frac{2}{3} \theta (\delta \sigma_{\mu\nu}) = - (\delta E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\delta \pi_{\mu\nu})); \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

$$(\delta w^{\mu})^{\cdot} + \frac{2}{3} \theta (\delta w^{\mu}) = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\mu} (\delta a^{\beta})_{;\gamma} V_{\alpha}; \quad (5.23)$$

restringidas pelas equações de vínculo

$$\frac{2}{3}(\delta\theta)_{;\lambda} - \frac{2}{3}\dot{\theta}(\delta V_{\mu}) + \frac{2}{3}\dot{\theta}(\delta V^0)\delta^0_{\mu} - (\delta\sigma^{\alpha}_{\beta} + \delta w^{\alpha}_{\beta})_{;\alpha} h^{\beta}_{\mu} = -\delta q_{\mu}; \quad (5.24)$$

$$(\delta w^{\alpha})_{;\alpha} = 0; \quad (5.25)$$

$$(\delta H_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}h^{\alpha}_{(\mu} h^{\beta}_{\nu)} [(\delta\sigma_{\alpha\gamma})_{;\lambda} + (\delta w_{\alpha\gamma})_{;\lambda}] \eta^{\epsilon\gamma\lambda}_{\beta} V_{\epsilon}; \quad (5.26)$$

e satisfazendo as equações de conservação:

$$(\delta\rho)^{\cdot} + \rho^{\cdot}(\delta V^0) + \theta(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)(\delta\theta) + (\delta q^{\alpha})_{;\alpha} = 0; \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & \rho^{\cdot}(\delta V_{\mu} + p_{,0}\delta V^0)\delta^0_{\mu} - (\delta p)_{;\beta} h^{\beta}_{\mu} + (\rho + p)(\delta a_{\mu}) \\ & + h_{\mu\alpha}(\delta q_{\mu}) + h_{\mu\alpha}(\delta\pi^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

constituem o conjunto completo de equações capazes de descrever a evolução das perturbações em modelos conformalmente planos.

5.2.1 Decomposição em autofunções de Helmholtz

Para facilitar o estudo das perturbações, como proposto por Lifshitz em [16], as perturbações cosmológicas podem ser expandidas em base de harmônicos

escalares, vetoriais e tensoriais. Esses harmônicos formam bases completas, permitindo o estudo independente de cada uma das perturbações.

É importante salientar que nem sempre é possível decompor uma perturbação em modos escalares, vetoriais e tensoriais. A ausência de um determinado modo está ligado com o comportamento da quantidade perturbada, sob uma transformação de coordenadas no espaço-tempo de fundo. Na tabela (5.29) escrevemos de maneira sucinta a contribuição escalar, vetorial e tensorial para cada quantidade perturbada de interesse. Para uma versão mais completa, consultar [23].

Quantidade	Modo Escalar	Modo Vetorial	Modo Tensorial
E_{ij}	sim	sim	sim
$\sigma_{i,j}$	sim	sim	sim
$\dot{u}_i$	sim	sim	não
H_{ij}	não	sim	sim
w_{ij}	não	sim	não

(5.29)

É importante notar que apenas as quantidades E_{ij} e σ_{ij} possuem todos os modos e que não existe nenhuma contribuição escalar para H_{ij} . Nesse trabalho, vamos nos deter somente nas perturbações escalares e tensoriais, por isso omitiremos a expansão em harmônicos vetoriais das perturbações cosmológicas.

a) Harmônicos Escalares:

Podemos definir uma base escalar através da função modo $Q(x^l)$ independente do tempo que satisfaz a equação escalar de Helmholtz:

$${}^{(3)}\nabla^2 Q = -k \tilde{Q}. \quad (5.30)$$

O símbolo ${}^{(3)}\nabla^2$ denota o laplaciano 3-dimensional definido pela operação

$${}^{(3)}\nabla^2 \equiv \gamma^{ij} Q_{,i//j} \quad (5.31)$$

e k está associado com o número de onda assumindo valores:

$$k^2 = \begin{cases} n^2 + 1, & 0 < n < \infty \quad \epsilon = 1 \\ n^2, & 0 < n < \infty \quad \epsilon = 0 \\ n^2 - 1, & n = 1, 2, \dots \quad \epsilon = -1 \end{cases} \quad (5.32)$$

Através do escalar Q , podemos definir, respectivamente, vetores e tensores:

$$Q_i \equiv Q_{,i}, \quad (5.33)$$

$$Q_{ij} \equiv Q_{,i//j}, \quad (5.34)$$

Visando a decomposição de quantidades tensoriais simétricas, podemos definir um operador sem traço $\hat{Q}_{ij}$:

$$\hat{Q}_{ij} = -\frac{1}{k^2} Q_{,ij} - \frac{1}{3} Q \gamma_{ij} \quad (5.35)$$

com divergência dada por:

$$\hat{Q}^{ij}_{//j} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\epsilon}{k^2}\right) \overline{Q}^{,i} \quad (5.36)$$

onde ϵ é a 3-curvatura espacial.

Podemos escrever as quantidades perturbadas, através da expansão na base escalar :

$$\delta E_{ij} = \sum_k E_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^{ij} \quad (5.37)$$

$$\delta \sigma_{ij} = \sum_k \Sigma_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^{ij} \quad (5.38)$$

$$\delta \pi_{ij} = \sum_k \Pi_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^{ij} \quad (5.39)$$

$$\delta a_i = \sum_k \aleph_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^i \quad (5.40)$$

$$\delta q_i = \sum_k q_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^i \quad (5.41)$$

$$\delta V_i = \sum_k V_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^i \quad (5.42)$$

$$\delta V_0 = \sum_k U_k^{(0)}(t) \hat{Q}_k^i \quad (5.43)$$

b) Harmônicos Tensoriais:

De maneira análoga ao caso escalar, podemos definir um tensor simétrico através da base tensorial sem traço $U^{ij}(x^l) = U^{ji}(x^l)$ e com divergência nula. A base deve satisfazer a equação tensorial de Helmholtz:

$${}^{(3)}\nabla^2 U^{ij} = -k^2 U^{ij}. \quad (5.44)$$

com laplaciano 3-dimensional definido pela operação

$$\nabla^2 U^{(3)} \equiv U_{/k}^{ij // k} . \quad (5.45)$$

Para o caso tensorial, k assume valores:

$$k^2 = \begin{cases} n^2 + 3, & 0 < n < \infty \quad \varepsilon = 1 \\ n^2, & 0 < n < \infty \quad \varepsilon = 0 \\ n^2 - 3, & n = 3, 4, \dots \quad \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (5.46)$$

As quantidades perturbadas expandidas na base tensorial são escritas como:

$$\delta E_{ij} = \sum_k E_k^{(2)}(t) U_{ij}^k \quad (5.47)$$

$$\delta \sigma_{ij} = \sum_k \Sigma_k^{(2)}(t) U_{ij}^k \quad (5.48)$$

$$\delta H_{ij} = \sum_k H_k^{(2)}(t) U_{ij}^k \quad (5.49)$$

$$\delta \Pi_{ij} = \sum_k \Pi_k^{(2)}(t) U_{ij}^k \quad (5.50)$$

5.3 Conjunto Mínimo de variáveis

Novello et al.[21], simplifica esse formalismo, mostrando que existe um conjunto mínimo fechado de variáveis $\mathbf{E}$ e Σ com as quais pode-se escrever todas as outras variáveis que representam quantidades perturbadas. As variáveis do conjunto mínimo, são as únicas variáveis que possuem todos os modos da expansão na base de harmônicos como pode ser visto na tabela (5.29).

Considerando apenas o caso escalar, as equações Quasi-Maxwelliana perturbadas dadas por (5.17)-(5.20), são expandidas na base de harmônicos (5.37)-(5.43). Através da equação perturbada para o cisalhamento $\delta\sigma_{ij}$ e para a parte elétrica do tensor de Weyl E_{ij} , obtém-se respectivamente:

$$\dot{\Sigma} = -E - \frac{1}{2}\xi - \frac{k^2}{2}\chi \quad (5.51)$$

e

$$\dot{E} = -\frac{1+\lambda}{2}\rho\Sigma - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2}\right)E - \frac{\xi(\xi + \frac{\theta}{3})}{2}\Sigma - \frac{k^2}{2}\chi, \quad (5.52)$$

onde a equação de estado é dada por $p = \lambda\rho$. Aqui estamos tratando o caso em que $\lambda \neq 1$, ou seja, caso em que o termo com a densidade de matéria ρ não desaparece. A generalização para o caso de vácuo, pode ser vista em [21].

Para resolver esse sistema, precisamos conhecer a variável χ e escrevê-la em termos das quantidades do espaço-tempo de fundo e das variáveis E e Σ . De maneira simples pode-se obter χ através da projeção no tri-espaço da equação de conservação $h^\nu{}_\alpha T^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0$:

$$(1 + \lambda)\rho\delta a_i - \lambda(\delta\rho)_{;i} + \lambda\dot{\rho}\delta V_i = 0. \quad (5.53)$$

Usando a expansão em harmônicos juntamente com a equação perturbada da divergência do tensor elétrico (5.20) podemos escrever:

$$\chi = \frac{2}{a^2\rho(1+\lambda)} \left(1 + \frac{\xi}{k^2}\right) \left[-\lambda E + \frac{1}{2}\lambda\xi\Sigma + \frac{1}{3}\xi\Sigma\right] \quad (5.54)$$

mostrando que realmente, basta conhecer as variáveis E e Σ para conhecer todo o sistema:

$$\dot{\Sigma} = -E - \frac{1}{2}\xi - k^2 \frac{2}{a^2 \rho(1+\lambda)} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{k^2} \right) \left[-\lambda E + \frac{1}{2}\lambda \xi \Sigma + \frac{1}{3}\xi \Sigma \right] \quad (5.55)$$

e

$$\dot{E} = -\frac{1+\lambda}{2} \rho \Sigma - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2} \right) E - \frac{\xi(\xi + \frac{\theta}{2})}{2+3} \Sigma - \frac{k^2}{a^2 \rho(1+\lambda)} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{k^2} \right) \left[-\lambda E + \frac{1}{2}\lambda \xi \Sigma + \frac{1}{3}\xi \Sigma \right], \quad (5.56)$$

Desacoplando essas equações, para o caso de um fluido perfeito, $\xi = 0$, $\rho = \rho, \lambda = 1$, obtemos as equações de evolução para as variáveis E e Σ :

$$\ddot{E} + \dot{E} (4+3\lambda) - \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{a^2} [\lambda(k^2 - 3\varepsilon) - \varepsilon(2+3\lambda)] E = 0 \quad (5.57)$$

$$\ddot{\Sigma} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\rho a^2 - 3\lambda b}{\rho a^2 + b} \right) \Sigma - \frac{(1+\lambda)}{2} \left(\frac{b}{a^2 \rho} \right) \Sigma = 0 \quad (5.58)$$

Obtendo as equações dinâmicas, aplicaremos o formalismo Quasi-Maxwelliano em um modelo com ricochete geométrico descrito no Capítulo 3.

Capítulo 6

Comparação entre as Variáveis Perturbadas

Na teoria de perturbações cosmológicas descrita no capítulo anterior, apresentamos dois formalismos distintos. O formalismo de Bardeen consiste em resolver as equações de Einstein perturbadas encontrando uma equação para a variável invariante de calibre denominada potencial de Bardeen Φ e Ψ , enquanto o formalismo Quasi-Maxwelliano consiste em resolver as equações para o conjunto mínimo de variáveis (E, Σ) . Já que todas essas variáveis representam a perturbação do campo gravitacional, deve existir alguma relação entre elas.

No formalismo Quasi-Maxwelliano, foi mostrado que as variáveis do conjunto mínimo E e Σ , consiste na parte temporal da expansão na base de harmônicos escalares:

$$\delta E_{ij} = \sum_k E_k^{(0)}(t) \hat{Q}^k_{,ij} \quad (6.1)$$

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_k \Sigma_k^{(2)}(t) U^k_{ij} \quad (6.2)$$

Goode em 1989, [23], baseado no formalismo de Bardeen, relacionou as quantidades físicas observáveis em termos das quantidades geométricas, caracterizando completamente os modos perturbados e escreveu em primeira ordem para o caso escalar:

$$\Xi_\alpha^\beta = \frac{a^{-2}}{2} [k^2 (\Phi - \Psi) Q_\alpha^{(0)\beta}] \quad (6.3)$$

Para o caso de um fluido perfeito, $\Phi = -\Psi$, reduzindo a equação anterior a:

$$\Xi_\alpha^\beta = -\frac{a^{-2}}{2} k^2 (\Phi) Q_\alpha^{(0)\beta}. \quad (6.4)$$

A parte elétrica do tensor de Weyl, pode ser expandida na base escalar na base escalar $Q_\beta^\alpha(x^i)$ definida anteriormente como: $E^\alpha = E(\eta) Q_\beta^\alpha$. Substituindo essa expansão na equação dada por Bardeen (6.4), obtemos a relação

$$E = -k^2 \Phi \quad (6.5)$$

para o caso de um fluido perfeito [24]. É importante salientar que as variáveis E e Φ , satisfazem a mesma equação diferencial que determina a sua evolução.

Parte III

Formação de Estruturas no

Universo

*Se as coisas são inatingíveis...ora!
não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
a mágica presença das estrelas!*

Mário Quintana

Capítulo 7

Introdução

O princípio cosmológico nos diz que o Universo é homogêneo e isotrópico porém isso é observado apenas em grandes escalas. Em pequena escala, observamos um Universo altamente heterogêneo, constituído de diversas estruturas como galáxias e aglomerados,¹ que estão distribuídas randomicamente no espaço. Muitas vezes observamos as galáxias agrupadas formando filamentos e paredes e outras vezes, observamos regiões de grande vazio entre elas.

Atualmente, o conhecimento do mecanismo de geração de estruturas no Universo, constitui uma área da cosmologia de muita importância por está ligada com as anisotropias observadas na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Para referências sobre o assunto, consultar os livros-texto [25] e [26].

Supondo que na época do desacoplamento, existiam pequenas irregu-¹Os aglomerados são formados por galáxias que seguem uma atração gravitacional mútua. Diferente de grupos de galáxias isoladas que estão sobre a ação apenas da força gravitacional gerada pelo próprio centro de massa.

laridades na distribuição de matéria, na região com maior concentração de matéria, surge uma força gravitacional atrativa que atua nas regiões vizinhas atraindo mais matéria e consequentemente aumentando a atração gravitacional. Uma distribuição de matéria irregular é instável sob a influência da gravidade e será cada vez mais irregular com o passar do tempo. Essa instabilidade gravitacional é responsável pela formação das estruturas que vemos hoje.

Uma densidade irregular de matéria gera outros processos. Sabemos que a pressão de radiação é proporcional a densidade de matéria, então a irregularidade na densidade cria gradientes de pressão e surgem forças que irão se opor ao colapso gravitacional. A formação de objetos astrofísicos não será tratada neste trabalho. Nos restringiremos aqui ao estudo de formação das sementes que irão dar origem as estruturas, considerando como bloco fundamental, galáxias ou aglomerados.

7.1 Amplificação das perturbações de matéria

Para que essas sementes iniciais cresçam dando origem a galáxias e aglomerados, é necessário que tenha existido algum mecanismo de amplificação. As perturbações geradas em escala microscópica através de flutuações quânticas do vácuo, possuem comprimento de onda menor do que o raio de Hubble definido por $R_H = H^{-1}$. Durante a fase inflacionária, fase de expansão acelerada, o raio de Hubble é constante e o comprimento de onda físico das perturbações são amplificadas extrapolando o raio de Hubble. No caso de modelos com ricochete, as perturbações são amplificadas pelo potencial do ricochete. Nesses modelos, o Universo começa com uma fase de contração

em que o raio de Hubble é contraído mais rápido do que o comprimento de onda físico das perturbações. A fase de contração, termina em um ricochete cosmológico, fase em que o Universo expande como no caso inflacionário e as perturbações são amplificadas até a escala de super-horizonte. No caso de modelos com ricochete, a escala de sub-horizonte acontece na fase de contração do espaço-tempo enquanto no caso inflacionário, essa fase ocorre antes do período inflacionário. Para uma revisão sobre modelos com ricochete, consultar [8].

Capítulo 8

Descrevendo as perturbações de matéria

No estudo de formação de estruturas em larga escala no Universo, estamos interessados na perturbação de densidade de energia $\delta\rho$, que é uma quantidade dependente de calibre. Como foi visto anteriormente, existem na literatura diversas possibilidades de construir uma quantidade invariante de calibre, através de combinações adequadas de variáveis. Segundo Bardeen, podemos escrever uma densidade de matéria invariante de calibre como:

$$\delta\epsilon_m^{(1tt)} = 2 \frac{k^2 - 3\epsilon}{3(H)^2 + 3\epsilon} \Phi \quad (8.1)$$

permitindo observar que a perturbação de matéria é descrita em termos das variáveis Φ ou analogamente E , através da relação entre as variáveis dada por: $E = -k^2\Phi$. Para o caso de um modelo de Universo com campo escalar $\phi(t)$, representando a matéria, as equações dinâmicas para as variáveis E e Φ se reduzem a:

CAPÍTULO 8. DESCREVENDO AS PERTURBAÇÕES DE MATÉRIA 63

$$\Phi'' - \nabla^2 \Phi + 6(H)\Phi' - 8\epsilon\Phi = 0 \quad (8.2)$$

$$E'' - \nabla^2 E + 6(H)E' - 8\epsilon E = 0 \quad (8.3)$$

Com o objetivo de tratar quanticamente as perturbações, Mukhanov [22], introduziu uma variável canônica:

$$v = \left[\frac{\phi_0'}{H} \right] \Phi, \quad (8.4)$$

permitindo escrever a ação:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[v'^2 - v \nabla_i^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right] \quad (8.5)$$

onde ϕ_0' representa o campo escalar no espaço-tempo de fundo e $z = \frac{a\phi_0'}{H}$.

Segue de (8.5), a equação de movimento

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (8.6)$$

Observamos que essa equação é exatamente a de um oscilador harmônico e por isso nada mais natural do que fixar as condições iniciais através da escolha:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} e^{i\omega_k \eta}. \quad (8.7)$$

O problema é que a variável v , diverge no ricochete, onde $\dot{a} = 0$. No formalismo Quasi-Maxwelliano esse problema não aparece, pois é possível encontrar uma variável canônica bem comportada durante o ricochete, nos permitindo de maneira direta impor as condições iniciais como flutuações

CAPÍTULO 8. DESCRREVENDO AS PERTURBAÇÕES DE MATÉRIA⁶⁴

quânticas do vácuo, como veremos na próxima seção. Por esse motivo, daqui em diante, vamos tratar perturbações segundo o formalismo Quasi- Maxwelliano, onde as variáveis responsáveis pela perturbação de matéria são dadas por E e Σ .

8.1 Formulação Hamiltoniana

As equações para as variáveis perturbadas E e Σ nos mostra que essas variáveis não são canonicamente conjugadas e por isso esse sistema não pode ser descrito por uma Hamiltoniana, porém é possível construir um conjunto canônico de variáveis P e Q através de combinações adequadas de E e Σ . Podemos escrever de uma maneira geral

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ E \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

onde os coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são ajustados de acordo com o modelo do espaço-tempo de fundo.¹

Pela relação (8.8), podemos escrever o sistema :

$$P = \alpha \Sigma + \beta E \quad (8.9)$$

$$Q = \gamma \Sigma + \delta E \quad (8.10)$$

Conhecemos a relação entre as variáveis E e Σ e suas derivadas para o caso escalar:

¹É importante ressaltar que a escolha dos coeficientes não é única.

CAPÍTULO 8. DESCREVENDO AS PERTURBAÇÕES DE MATÉRIA⁶⁵

$$\begin{pmatrix} \dot{\Sigma} \\ \dot{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ E \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

com

$$h_1 = -a(\eta) \left[1 + \frac{2\lambda(3\varepsilon - k^2)}{(1+\lambda)} \frac{1}{\rho a(\eta)^2} \right] \quad (8.12)$$

$$h_2 = \frac{-a'}{a}$$

$$h_3 = -\frac{(1+\lambda)}{2} \rho a(\eta) \quad (8.13)$$

Considerando esse sistema como um conjunto de variáveis canônicas podemos relacionar as variáveis P e Q com suas derivadas $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ através de uma Hamiltoniana. Essa relação é expressa matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

A condição para a existência de uma Hamiltoniana é dada pelas equações de Hamilton

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}. \quad (8.15)$$

Segue da igualdade

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} = -\frac{\partial^2 H}{\partial P \partial Q} + \frac{\partial^2 H}{\partial Q \partial P} = 0 \quad (8.16)$$

a condição necessária para que o sistema seja Hamiltoniano:

$$\text{tr}H = 0. \quad (8.17)$$

A Hamiltoniana escritas em termos dos coeficientes das matrizes S e M pode ser escrita:

$$H = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \beta \delta h_3 - \alpha \gamma h_1 - \beta \gamma h_2 + \alpha' \delta - \beta' \gamma & -\beta^2 h_3 + \alpha^2 h_1 + \alpha \beta h_2 - \beta \alpha' + \alpha \beta' \\ \delta^2 h_3 - \gamma^2 h_1 - \gamma \delta h_2 + \gamma \delta' - \delta \gamma' & -\beta \delta h_3 + \alpha \gamma h_1 + \delta \alpha h_2 - \gamma \beta' + \delta \alpha' \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

Capítulo 9

Quantização

Vimos nos capítulos anteriores, que a instabilidade gravitacional gerada pelas flutuações quânticas do vácuo é responsável pela geração de sementes das estruturas observadas. Por isso, para dar condições iniciais quânticas num espaço-tempo de fundo clássico, realizamos a quantização das variáveis perturbadas através do Formalismo Hamiltoniano.

9.1 Espaço de Soluções

Nesta seção, será descrito em detalhes o formalismo de quantização canônica. Esse formalismo pode ser encontrado no livro-texto [27]. O primeiro passo para o processo de quantização canônica é expandir as perturbações em modos de Fourier:

$$Q(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} Q_k(\eta) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (9.1)$$

onde $l(\vec{k}, \vec{x})$ é a base espacial hiperbólica e $Q_k(\eta)$ é a solução da equação

$$Q_k''(\eta) + w_k^2(\eta) Q_k(\eta) = 0 \quad (9.2)$$

A equação (9.2) forma um espaço de soluções bidimensionais $Q_k(\eta) = \{Q_1(\eta), Q_2(\eta)\}$, com $Q_1(\eta)$ e $Q_2(\eta)$ sendo funções reais e linearmente independentes.

É conveniente definir funções

$$v(\eta) = Q_1(\eta) + iQ_2(\eta) \quad (9.3)$$

$$v^*(\eta) = Q_1^*(\eta) - iQ_2^*(\eta) \quad (9.4)$$

linearmente independentes, que formam uma base no espaço de soluções complexas da equação (9.2).

Se

$$\text{Im}(v \cdot v^*) = \frac{1}{2i} [v, v^*] = -\frac{1}{2i} W[Q_1(\eta), Q_2(\eta)] = 1, \quad (9.5)$$

$v(\eta)$ é chamada FUNÇÃO MODO, onde $W[Q_1(\eta), Q_2(\eta)]$ é o Wronskiano das funções.

Considerando o espaço homogêneo e isotrópico, $k_1 = k_2 = k$, podemos escolher uma base normalizada

$$\{Q_1(\eta), Q_2(\eta)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{w_k}} e^{i w_k \eta}, \frac{1}{\sqrt{w_k}} e^{-i w_k \eta} \right\} \quad (9.6)$$

e escrever

$$v(\eta) = \frac{1}{\sqrt{W_k}} (e^{iW_k\eta} + ie^{-iW_k\eta}) \quad (9.7)$$

$$v^*(\eta) = \frac{1}{\sqrt{W_k}} (e^{-iW_k\eta} - ie^{iW_k\eta}) \quad (9.8)$$

com normalização:

$$W[Q_1, Q_2] = Q_1' Q_2 - Q_1 Q_2' = \frac{iW_k + iW_k}{W_k} = 2i. \quad (9.9)$$

Daqui em diante, vamos denominar a base de soluções de (9.2) como

$$\{Q_1(\eta), Q_2(\eta)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{W_k}} e^{iW_k\eta}, \frac{1}{\sqrt{W_k}} e^{-iW_k\eta} \right\} = \{v_k(\eta), v_k^*(\eta)\} \quad (9.10)$$

9.2 Base Completa de Soluções

De uma maneira geral, a solução $Q_k(\eta)$ da equação (9.2), pode ser escrita como uma combinação linear de $v(\eta)$ e $v^*(\eta)$.

Podemos escrever a solução geral $Q_{\vec{k}}(\eta)$ da equação (9.2) como uma combinação linear de $v(\eta)$ e $v^*(\eta)$

$$Q_{\vec{k}}(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\bar{a}_{\vec{k}} v_k^* + a_{-\vec{k}}^+ v_k \right] \quad (9.11)$$

desde que $Q_{\vec{k}}(\eta)$ é real, temos $Q_{\vec{k}}^*(\eta) = Q_{-\vec{k}}(\eta)$ o que implica através de 9.11 que

$$a_{\vec{k}}^+ = \bar{a}_{-\vec{k}} \quad (9.12)$$

A base completa formada pelo conjunto de soluções do espaço bidimensional é dada pela integral:

$$Q(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} Q_k(\eta) l(\vec{k}, \vec{x}) \quad (9.13)$$

$$Q(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}}^- v_k^* + a_{-\vec{k}}^+ v_k \right] l(\vec{k}, \vec{x}) \quad (9.14)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}}^- v_k^* + a_{-\vec{k}}^+ v_k \right] l(\vec{k}, \vec{x})$$

$$Q(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}}^- v_k(\eta) l(\vec{k}, \vec{x}) + a_{-\vec{k}}^+ v_k(\eta) l(-\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (9.15)$$

lembrando que $v_k(\eta)$ é a função modo normalizada

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{W_k}} (e^{iW_k \eta} + e^{-iW_k \eta}) \quad (9.16)$$

9.3 Quantização das Perturbações

O processo de quantização segue repassamos a função canônica Q_k dada por (9.11) por operadores $\hat{Q}_k$, e consequentemente a_k por $\hat{a}_k$ satisfazendo os comutadores

$$[\hat{a}_k^-, \hat{a}_k^+] = 1 \quad (9.17)$$

$$[\hat{a}_k^-, \hat{a}_k^-] = 0 \quad (9.18)$$

$$[\hat{a}_k^+, \hat{a}_k^+] = 0 \quad (9.19)$$

onde $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$ são operadores de criação e aniquilação definidos por:

$$\hat{a}_{\alpha}^{\pm} = \frac{\sqrt{\omega_{\alpha}}}{2} \left(\hat{Q}(\vec{k}, t) \mp i \hat{P}(\vec{k}, t) \right) \quad (9.20)$$

Então, a base completa é descrita pelo operador

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3 \vec{k} \left[- \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial t} \hat{Q}(\vec{k}, t) + \hat{P}(\vec{k}, t) \right] \\ Q(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} v_{\vec{k}}(\eta) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}} v_{\vec{k}}(\eta) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \end{aligned} \quad (9.21)$$

que atua no estado $|0\rangle$ definindo o vácuo. Daqui em diante, vamos denominar esse operador como

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3 \vec{k} \left[- \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial t} \hat{Q}(\vec{k}, t) + \hat{P}(\vec{k}, t) \right] \\ Q(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} v_{\vec{k}}(\eta) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}} v_{\vec{k}}(\eta) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \end{aligned} \quad (9.22)$$

para representar uma base inicial.

9.4 Transformação de Bogoliubov

Uma transformação de Bogoliubov, permite representar uma nova base em termos de uma base inicial. Consideramos duas funções modos conhecidas $u_{\vec{k}}(\eta)$ e $v_{\vec{k}}(\eta)$. Desde que $u_{\vec{k}}(\eta)$ e $u_{\vec{k}}^{\dagger}(\eta)$ formam uma base e a função $v_{\vec{k}}(\eta)$ é uma combinação linear dessa base, podemos escrever de maneira geral:

$$v_{\vec{k}}^{\dagger} = \alpha_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{\dagger} - \beta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} \quad (9.23)$$

onde os coeficientes $\alpha_{\vec{k}}$ e $\beta_{\vec{k}}$ são complexos.

Decorre da condição de normalização $W[v_k, v_k^*] = 2i$ que os coeficientes α_k e β_k devem obedecer a relação

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (9.24)$$

$$|\alpha_k|^2 \geq 1 \quad (9.25)$$

Podemos expandir a função $Q^{\text{OUT}}(\vec{x}, \eta)$ em uma outra base completa

$$Q^{\text{OUT}}(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \left[b_{\vec{k}} u_k(\eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + b_{\vec{k}}^* u_k^*(\eta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \quad (9.26)$$

através do conjunto de funções modos $u_k(\eta)$ que define um outro conjunto de operadores $\hat{b}^\pm$. Não sabemos como $\hat{b}^\pm$ atua no estado $|0\rangle_{\text{in}}$ e por isso, precisamos escrever $\hat{b}^\pm$ em função de $\hat{a}^\pm$.
Multiplicando as bases

$$v_k^* = \alpha_k u_k^* - \beta_k u_k \quad (9.27)$$

$$v_k = \alpha_k^* u_k + \beta_k^* u_k^* \quad (9.28)$$

pelos coeficientes de Bogoliubov, obtemos:

$$\beta_k^* v_k^* = \beta_k^* \alpha_k u_k^* - |\beta_k|^2 u_k \quad (9.29)$$

$$\alpha_k v_k = |\alpha_k|^2 u_k + \alpha_k \beta_k^* u_k^*. \quad (9.30)$$

Subtraindo essas equações e fazendo o uso da normalização desses coeficientes dada por (9.24), temos a relação inversa entre as bases:

$$u_k = \alpha_k v_k - \beta_k^* v_k^*; \quad (9.31)$$

$$u_k^* = \alpha_k^* v_k^* - \beta_k v_k. \quad (9.32)$$

permitindo escrever a base completa

$$Q^{\text{OUT}}(\vec{x}, \eta) = \frac{\int d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} u_k(\eta) |(\vec{k}, \vec{x}) + \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} u_k(\eta) |(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (9.33)$$

$$Q^{\text{OUT}}(\vec{x}, \eta) = \frac{\int d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} (\alpha_k v_k - \beta_k v_k) |(\vec{k}, \vec{x}) + \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} (\alpha_k v_k - \beta_k v_k) |(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (9.34)$$

Analisando a componente temporal da expansão,

$$Q^{\text{OUT}}(\vec{x}, \eta) = \frac{\int d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} (\alpha_k v_k - \beta_k v_k) + \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} (\alpha_{-k} v_k - \beta_{-k} v_k) \right] |(\vec{k}, \vec{x}) \quad (9.35)$$

$$Q_k^{\text{OUT}}(\eta) = \left[\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} (\alpha_k^* v_k^* - \beta_k v_k) + \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} (\alpha_{-k} v_k - \beta_{-k}^* v_k^*) \right] \quad (9.36)$$

$$Q_k^{\text{OUT}}(\eta) = \left[\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} \alpha_k^* v_k^* - \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} \beta_k v_k + \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} \alpha_{-k} v_k - \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} \beta_{-k}^* v_k^* \right] \quad (9.37)$$

$$Q_k^{\text{OUT}}(\eta) = \left[v_k^* (\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} \alpha_k^* - \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} \beta_{-k}^*) + v_k (\hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge +} \alpha_{-k} - \hat{b}_{\vec{k}}^{\wedge -} \beta_k) \right] \quad (9.38)$$

podemos associar os operadores $\hat{b}_{\vec{k}}^{\pm}$ aos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$ que atuam no estado de vácuo $|0\rangle_{\text{in}}$

$$\hat{a}_{-\vec{k}}^- = \alpha^* \hat{b}_{\vec{k}} - \beta^* \hat{b}_{-\vec{k}}^+ \quad (9.39)$$

$$\hat{a}_{-\vec{k}}^+ = \alpha_{-\vec{k}} \hat{b}_{-\vec{k}}^+ - \beta_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}} \quad (9.40)$$

com a relação inversa dada por

$$\hat{b}_{\vec{k}}^- = \alpha \hat{a}_{\vec{k}} + \beta^* \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \quad (9.41)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}}^+ = \alpha^* \hat{a}_{\vec{k}}^+ + \beta_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \quad (9.42)$$

permitindo assim, conhecer como o operador $\hat{b}_{\vec{k}}$ atua no estado de vácuo, ou seja, $\hat{b}_{\vec{k}}|0\rangle$.

Capítulo 10

Energia do sistema clássico

10.1 Antes do Ricochete

Antes do bounce, a hamiltoniana do sistema se reduz a de um oscilador harmônico

$$H_k = \frac{1}{2} (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) \quad (10.1)$$

A variável canônica Q_k pode ser expandida em modos de Fourier da seguinte forma

$$Q_{\vec{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{\vec{k}} v_k(\eta) + a_{-\vec{k}}^* v_k(\eta)] \quad (10.2)$$

onde $a_{\vec{k}}^{\pm}$ são constantes complexas de integração e $v_k \propto e^{i\omega_k \eta}$ a base temporal. A variável P_k , canonicamente conjugada a Q_k é obtida através da relação $P_k = \dot{Q}_k$

$$P_{\vec{k}}(\eta) = \frac{i\omega_k}{\sqrt{2}} [a_{\vec{k}}^* v_k(\eta) - a_{-\vec{k}}^+ v_k(\eta)] \quad (10.3)$$

Com essa expansão, podemos escrever (10.1)

$$H_k^{\text{OHS}} = \frac{w_k}{4} \left(\begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^*(\eta) - a_{-\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}(\eta) \\ a_{\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}(\eta) - a_{-\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^*(\eta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^*(\eta) + a_{-\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}(\eta) \\ a_{\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}(\eta) + a_{-\vec{k}}^- v_{\vec{k}}^*(\eta) \end{pmatrix} \right) \quad (10.4)$$

$$H_k^{\text{OHS}} = \frac{w_k^2}{2} \left[\begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^- a_{-\vec{k}}^+ v_{\vec{k}}^*(\eta) v_{\vec{k}}(\eta) + a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^- v_{\vec{k}}(\eta) v_{\vec{k}}^*(\eta) \end{pmatrix} \right] \quad (10.5)$$

as constantes $a_{\vec{k}}^{\pm}$ são escolhidas de maneira que a base $v_{\vec{k}}(\eta)$ seja normalizada, então, podemos fazer $a_{-\vec{k}}^+ = a_{\vec{k}}^- = \sqrt{\frac{1}{w_k}}$

$$H_k^{\text{OHS}} = |v_{\vec{k}}(\eta)|^2 \quad (10.6)$$

A energia total do sistema é dada pela integral em todo os modos k :

$$H = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} H_k \quad (10.7)$$

10.2 Depois do Ricochete

Depois do Ricochete, temos a presença de um termo de correção H_{11} na Hamiltoniana e esse termo surge da evolução da hamiltoniana inicial, antes do bounce

$$H_k = \frac{H_{12}}{2} P_k^2 - \frac{H_{21}}{2} Q_k^2 + \frac{H_{11}}{2} (P_k Q_k + Q_k P_k) \quad (10.8)$$

com $H_{12} = 1, H_{21} = -\omega_k^2$ e $H_{11} = 2\hbar\omega_k$.

A variável canônica Q_k pode ser expandida em modos de Fourier da seguinte forma

$$Q_{\vec{k}}(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[b_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\eta) + b_{-\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right] \quad (10.9)$$

onde $a_{\vec{k}}^{\pm}$ são constantes complexas de integração e $u_{\vec{k}} \propto e^{i\omega_k \eta}$ a base temporal. A variável P_k , canonicamente conjugada a Q_k é obtida através da relação $P_k = \dot{Q}_k$

$$P_{\vec{k}}(\eta) = \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2}} \left[b_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}(\eta) - b_{-\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right] \quad (10.10)$$

Para uma análise mais clara do sistema, vamos reescrever a Hamiltoniana (10.8), separando o termo de correção da hamiltoniana do oscilador harmônico

$$H_k = H_k^{\text{OHS}} + H_k^{\text{C}} \quad (10.11)$$

e escrever cada hamiltoniana na base $u_{\vec{k}}(\eta)$:

Termo de correção

$$H_k^{\text{C}} = \hbar\omega_k P_k Q_k$$

$$H_k^{\text{C}} = \frac{-i\omega_k}{2} \hbar \left[b_{\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) - b_{-\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right] \left[b_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\eta) + b_{-\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right]$$

$$H_k^{\text{C}} = \frac{i\omega_k}{2} \hbar \left\{ \left[b_{\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right]^2 - \left[b_{-\vec{k}}^+ u_{\vec{k}}(\eta) \right]^2 \right\}$$

$$k \quad \vec{k} \quad k$$

as constantes $b_{\vec{k}}^{\pm}$ são escolhidas de maneira que a base $u_k(\eta)$ seja normalizada, então, podemos fazer $b_{-\vec{k}}^{-} = b_{\vec{k}}^{+} = \sqrt{\frac{1}{w_k}}$

$$H_k^C = \frac{i}{2} h_0 \{ [u_k(\eta)]^2 - [u_k^*(\eta)]^2 \}$$

$$H_k^C = \frac{i}{2} h_0 \{ 2i \sin(2w_k \eta) \}$$

$$H_k^C = -h_0 \sin(2w_k \eta) \quad (10.12)$$

Escrevendo a Hamiltoniana total dada por 10.11, temos

$$H_k = |u_k(\eta)|^2 - h_0 \sin(2w_k \eta) \quad (10.13)$$

Capítulo 11

Energia do sistema Quântico

No caso do sistema quântico, consideramos as variáveis Q_k e P_k como operadores $\hat{Q}_k$ e $\hat{P}_k$.

11.1 Antes do ricochete

Antes do bounce, a hamiltoniana do sistema se reduz a de um oscilador harmônico

$$H_k = \frac{1}{2} (P_k^2 + \omega^2 Q_k^2) \quad (11.1)$$

O operador canônico $\hat{Q}_k$ pode ser expandida em modos de Fourier da seguinte forma

$$\hat{Q}_{\vec{k}}(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^* v_k(\eta) + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ v_k(\eta) \right] \quad (11.2)$$

$$\hat{P}_{\vec{k}}(\eta) = -\sqrt{\frac{\omega_k}{2i}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} v_k(\eta) - \hat{a}_{-\vec{k}} v_k(\eta) \right] \quad (11.3)$$

substituindo em 11.1

$$\hat{H}_k = \frac{w_k}{2} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}}^+ + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- \right) |v_k(\eta)|^2 \quad (11.4)$$

$$\text{onde } v_k(\eta) = \sqrt{\frac{1}{w_k}} e^{-i w_k \eta}.$$

Usando a relação de comutação $[\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}}^+] = 1$

$$\hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{\vec{k}}^+ = 1 + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- \quad (11.5)$$

$$\hat{H}_k = w_k \left(\hat{a}_{-\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- + \frac{1}{2} \right) \quad (11.6)$$

11.2 Depois do ricochete

Depois do ricochete, temos a hamiltoniana quântica com o termo de interação

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{P}_k^2 + w_k^2 \hat{Q}_k^2 \right) + \hbar \left(\hat{P}_k \hat{Q}_k + \hat{Q}_k \hat{P}_k \right) \quad (11.7)$$

No caso do sistema quântico, consideramos as variáveis Q_k e P_k como operadores $\hat{Q}_k$ e $\hat{P}_k$:

$$\hat{Q}_{\vec{k}}(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\hat{b}_{\vec{k}}^- u_k(\eta) + \hat{b}_{-\vec{k}}^+ u_k(\eta) \right] \quad (11.8)$$

$$\hat{P}_{\vec{k}}(\eta) = \frac{-i w_k}{\sqrt{2}} \left[\hat{b}_{\vec{k}}^- u_k(\eta) - \hat{b}_{-\vec{k}}^+ u_k(\eta) \right] \quad (11.9)$$

onde $\hat{b}_k^\pm$ são os operadores de criação e aniquilação definidos anteriormente.

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, temos em acordo com (10.5)

$$\hat{H}_k^{\text{OHS}} = \frac{w_k}{2} \left[\hat{b}_k^- \hat{b}_k^+ u_k(\eta) u_k(\eta) + \hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k}^- u_k(\eta) u_k^*(\eta) \right] \quad (11.10)$$

$$\hat{H}_k^{\text{OHS}} = \frac{w_k}{2} \left[\hat{b}_k^- \hat{b}_k^+ + \hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k}^- \right] |u_k(\eta)|^2 \quad (11.11)$$

$$\hat{H}_k^{\text{OHS}} = w_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{b}_k^- + \frac{1}{2} \right) |u_k(\eta)|^2 \quad (11.12)$$

Termo de correção

$$\hat{H}_k^{\text{C}} = \hbar_0 \hat{P}_k \hat{Q}_k$$

$$\hat{H}_k^{\text{C}} = \frac{-i w_k}{2} \hbar_0 \left[\hat{b}_k^- u_k^*(\eta) \hat{b}_k^- u_k(\eta) - \hat{b}_{-k}^+ u_k(\eta) \hat{b}_{-k}^+ u_k(\eta) \right]$$

$$\hat{H}_k^{\text{C}} = \frac{i w_k}{2} \hbar_0 \left[\hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k}^+ u_k(\eta)^2 - \hat{b}_k^- \hat{b}_k^- u_k^*(\eta)^2 \right] \quad (11.13)$$

Hamiltoniana Total

$$\hat{H}_k = \hat{H}_k^{\text{OHS}} + \hat{H}_k^{\text{C}} \quad (11.14)$$

$$\hat{H}_k = w_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{b}_k^- + \frac{1}{2} \right) |u_k(\eta)|^2 + \frac{i w_k}{2} \hbar_0 \left[\hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k}^+ u_k(\eta)^2 - \hat{b}_k^- \hat{b}_k^- u_k^*(\eta)^2 \right] \quad (11.15)$$

Para calcular o valor esperado da hamiltoniana quantica no estado de vácuo $|0\rangle_{\text{in}}$, precisamos escrever os operadores $\hat{b}^{\pm}$ usando os coeficientes de Bogouliubov, em termos dos operadores $\hat{a}^{\pm}$, pois não sabemos como os operadores $\hat{b}^{\pm}$ atua no estado inicial de vácuo $|0\rangle_{\text{in}}$. Usando

$$\hat{b}_k^- = \alpha_k \hat{a}_k^- + \beta_k^* \hat{a}_{-k}^+ \quad (11.16)$$

$$\hat{b}_k^+ = \alpha_k^* \hat{a}_k^+ + \beta_k \hat{a}_{-k}^- \quad (11.17)$$

$$\hat{b}_k^+ \hat{b}_{-k}^- = |\alpha_k|^2 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + \alpha_k^* \beta_k^* \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ + \alpha_k \beta_k \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^- + |\beta_k|^2 \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^+ \quad (11.18)$$

$$\hat{b}_k^+ \hat{b}_k^+ = (\alpha_k^*)^2 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^+ + \alpha_k^* \beta_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + \beta \alpha_k^* \hat{a}_k^- \hat{a}_k^+ + (\beta_k)^2 \hat{a}_k^- \hat{a}_k^- \quad (11.19)$$

$$\hat{b}_{-k}^- \hat{b}_k^- = (\alpha_k)^2 \hat{a}_k^- \hat{a}_k^- + \alpha \beta^* \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^+ + \beta^* \alpha \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_k^- + (\beta^*)^2 \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k}^+ \quad (11.20)$$

Valor esperado

$$\langle 0 | \hat{H}_k^{\text{OHS}} | 0 \rangle_{\text{in}} = w_k \left(\langle 0 | \hat{b}_k^+ \hat{b}_{-k}^- | 0 \rangle + \frac{1}{2} \right) |u_{-k}(\eta)|^2 \quad (11.21)$$

$$\langle 0 | \hat{H}_k^{\text{OHS}} | 0 \rangle_{\text{in}} = w_k \left(|\beta_k|^2 + \frac{1}{2} \right) |u_{-k}(\eta)|^2 \quad (11.22)$$

$$\langle 0 | \hat{H}_k^{\text{C}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \frac{i w_k \hbar}{2} \left[\langle 0 | \hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_k^+ | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{b}_{-k}^- \hat{b}_k^- | 0 \rangle \right] \quad (11.23)$$

$$\langle 0 | \hat{H}_k^{\text{C}} | 0 \rangle_{\text{in}} = -2w_k d_1 d_2 \quad (11.24)$$

11.2.1 Interpretação da Hamiltoniana no estado Out

$$\hat{H}_k = w_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{b}_{-k}^- + \frac{1}{2} \right) \quad (11.25)$$

Densidade média de b- partículas no estado de vácuo inicial $|0\rangle_{in}$

$$n_k = \langle 0 | \hat{b}_k^+ \hat{b}_k^- | 0 \rangle_{in} \quad (11.26)$$

substituindo ??e ??, temos

$$\hat{b}_k^+ \hat{b}_k^- = |\alpha_k|^2 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + \alpha_k^* \beta_k^* \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ + \alpha_k \beta_k \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^- + |\beta_k|^2 \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^+ \quad (11.27)$$

Assim, o único termo não nulo

$$n_k = |\beta_k|^2 \langle 0 | \hat{a}_k^- \hat{a}_{-k}^+ | 0 \rangle_{in} \quad (11.28)$$

$$n_k = |\beta_k|^2 \quad (11.29)$$

A densidade de partículas é relacionado com o coeficiente de Bogouliubov, A interpretação de partícula, depende da escolha da função modo. O estado

$|0\rangle_{in}$ é um estado sem a-partículas mas com densidade n_k de b-partículas em cada modo Q_k .

Capítulo 12

Aplicação: Modelo com ricochete geométrico.

Neste trabalho, vamos estudar a amplificação das perturbações de matéria através de um ricochete geométrico motivado pela geometria de Weyl e com fator de escala dado por:

$$a(\eta) = a_0 \sqrt{\cosh(2\eta)}. \quad (12.1)$$

As equações Quasi-Maxwellianas desacopladas, para a parte elétrica do tensor de Weyl e o tensor de cisalhamento, podem ser escritas respectivamente como:

$$E'' - \nabla^2 E + 6HE' + 8E = 0 \quad (12.2)$$

$$\Sigma'' - H \left(\frac{4E_0 a^4}{1 + E_0 a^4} \right) \Sigma' + \frac{\Sigma_0}{a^4} (1 + E_0 a^4) \Sigma = 0 \quad (12.3)$$

com constantes:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{-(3\varepsilon - k^2)}{3a_0^4} \\ \Sigma_0 &= 3a_0^4 \\ H &= \tanh(2\eta) \end{aligned} \quad (12.4)$$

Para esse modelo os coeficientes das equações que relacionam as variáveis E e Σ com as variáveis canônicas P e Q

$$P = \alpha \Sigma + \beta E \quad (12.5)$$

$$Q = \gamma \Sigma + \delta E \quad (12.6)$$

foram calculados, satisfazendo a equação (8.17) e obtemos:

$$\alpha = 3a^4 a^{-2} \quad \beta = -2a^3 \quad \delta = a^3 \quad \gamma = 0 \quad (12.7)$$

possibilitando escrever,

$$Q_k(\eta) = a^3 E_k(\eta). \quad (12.8)$$

Com essa transformação de variável, podemos escrever (12.2) como uma equação para um oscilador harmônico,

$$\ddot{Q}_k(\eta) + w_k(\eta)^2 Q_k(\eta) = 0 \quad (12.9)$$

com

$$w_k^2 = [k^2 - (3 \tanh(2\eta)^2 - 2)] . \quad (12.10)$$

No caso de um Universo aberto, $k^2 = n^2 + 1$, com $n > 0$ e então:

$$w_k^2(\eta) = n^2 - V_{\text{eff}} \quad (12.11)$$

onde denotamos, $V_{\text{eff}} = 3(\tanh(2\eta)^2 - 1)$.

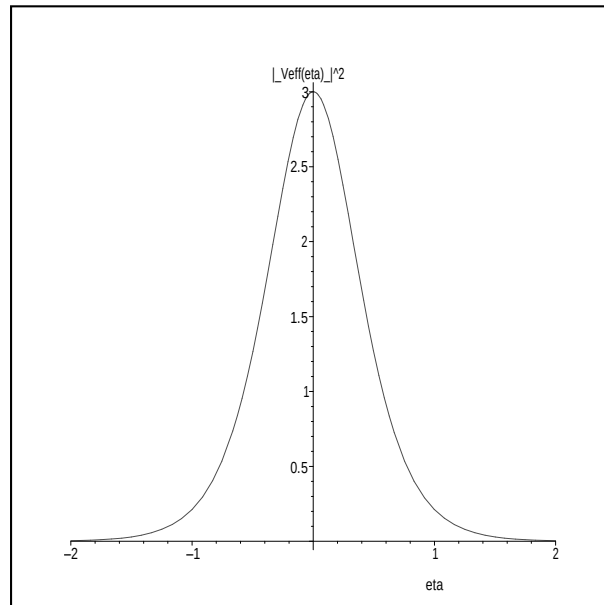


Figura 12.1: Potencial efetivo da equação do oscilador harmônico. A solução exata é

dada em termos de duas hipergeométricas

$$Q_k(\eta) = a^3(\eta) [A F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z) + B \sinh(2\eta) F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)] \quad (12.12)$$

onde A e B são constantes de integração a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema e

$$z = -\sinh^2(2\eta)$$

$$f_i(k) = \frac{\Gamma(\gamma_i)\Gamma(\beta_i - \alpha_i)}{\Gamma(\beta_i)\Gamma(\gamma_i - \alpha_i)} \quad g_i(k) = \frac{\Gamma(\gamma_i)\Gamma(\alpha_i - \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\gamma_i - \beta_i)} \quad (12.13)$$

com parâmetros

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{k^2 - 1} & \alpha_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{k^2 - 1} \\ \beta_1 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{k^2 - 1} & \beta_2 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{k^2 - 1} \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} & \gamma_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (12.14)$$

No regime assintótico, (12.12) se reduz à

$$\begin{aligned} Q_k(\eta) = A & \left[f_1(k)(-1)^{\alpha_1}(z)^{-\alpha_1} + g_1(k)(-1)^{\beta_1}(z)^{-\beta_1} \right] \\ & + B \sinh(2\eta) \\ & \left[f_2(k)(-1)^{\alpha_2}(z)^{-\alpha_2} + g_2(k)(-1)^{\beta_2}(z)^{-\beta_2} \right] \end{aligned}$$

No limite de $\eta \rightarrow \pm\infty$, temos uma solução do oscilador harmônico:

$$Q_k^{\text{IN}}(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow -\infty} Q_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{w_k}} e^{-i n \eta} \quad (12.15)$$

$$Q_k^{\text{OUT}}(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_k(\eta) = d_1(k) e^{-i n \eta} + d_2(k) e^{i n \eta} \quad (12.16)$$

com

$$d_1 = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{n(n^2 + 1)} \Gamma\left(\frac{\ln}{2}\right)^2 \sinh\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\ln}{2}\right)^2 \left[\sin\left(\frac{4}{\pi} + \frac{1 \pi n}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1 \pi n}{4}\right)^2 \right]} \quad (12.17)$$

$$d_2 = \frac{-2 + \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{1\pi n}{4}\right)^2 + \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1\pi n}{4}\right)^2}{\sqrt{-n} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{1\pi n}{4}\right)^2 - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1\pi n}{4}\right)^2} \quad (12.18)$$

É possível notar que quanto menor o valor de k , maior a amplificação dos modos.

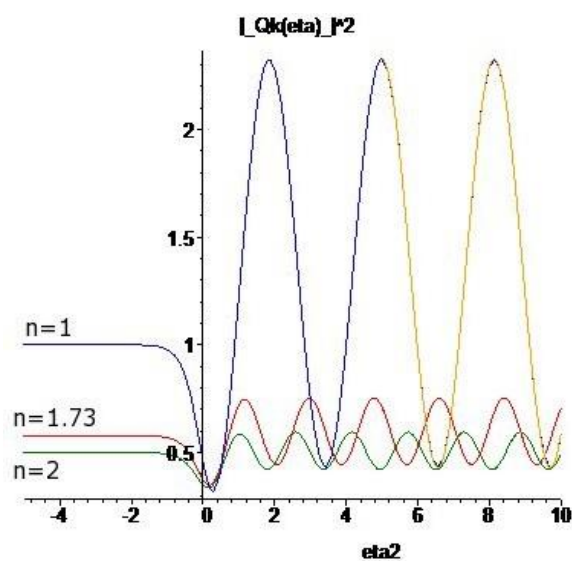


Figura 12.2: Amplificação das perturbações iniciais pelo potencial do rico-chete.

Capítulo 13

Espectro de Potência

13.1 Introdução

O paradigma padrão para a formação de estruturas em larga escala no Universo é que as pequenas perturbações iniciais na densidade de matéria são amplificadas de alguma forma pela gravidade e nesse trabalho, mostramos que as perturbações iniciais, originárias das flutuações quânticas do vácuo, são amplificadas pelo bounce. Estamos interessados em conhecer o espectro de potência das perturbações depois do bounce, tanto no caso clássico quanto no quântico. A diferença entre os dois casos se dá devido a própria diferença da definição de vácuo na mecânica clássica e quântica.

Podemos dividir o Universo em pequenas células cúbicas de volume V_u com condições de contorno periódicas em cada face do cubo de comprimento L , ou seja, $f(L, y, z) = f(0, y, z)$.

A densidade média de matéria em cada

volume V_u é denotada por $\langle \rho \rangle$ enquanto $\rho(\vec{x})$ representa a densidade

de matéria local em um dado vetor posição $\vec{x}$ em relação à uma 89

origem arbitrária. É conveniente definirmos uma quantidade representativa para a flutuação de densidade que seja invariante sobre o volume e para isso definimos a quantidade $\delta(\vec{x})$, conhecida na literatura como contraste de densidade

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (13.1)$$

Essa quantidade não é invariante de calibre e por isso, não podemos dizer se essa variação na densidade é realmente uma flutuação verdadeira ou se é apenas um problema da escolha do sistema de coordenadas. Para solucionar esse problema, vamos considerar uma densidade invariante de calibre

$$\delta^{ig}(\vec{x}) = \frac{\rho^{ig}(\vec{x}) - \langle \rho^{ig} \rangle}{\langle \rho^{ig} \rangle} \quad (13.2)$$

A densidade invariante de gauge pode ser relacionada com a parte elétrica do tensor de Weyl da seguinte forma (??)

$$E_j^i(x, \eta) = -\frac{k^2 \rho_0}{2(k^2 - 3\varepsilon)} \rho^{ig} Q_j^i(x) \quad (13.3)$$

e por isso, podemos tratar a quantidade $\delta^{ig}(\vec{x}) = \delta_E(\vec{x})$.

Podemos tratar a flutuação de densidade $\delta_E(\vec{x})$ como um campo randômico. Isso significa que o número relativo de regiões onde uma dada configuração $\delta_E(\vec{x})$ ocorre, pode ser descrito como uma função de distribuição de probabilidade

e a média sobre o ensemble estatístico é equivalente a média sobre todos os infinitos volumes do Universo. A distribuição de matéria é tratada como uma superposição de ondas planas que evoluem independentemente para cada vetor de onda $\vec{k}$, sendo assim, o espectro de potência retrata a contribuição em amplitude das flutuações para cada modo k .

A expansão de Fourier de $\delta_E(\vec{x})$ é dada por

$$\delta_E(\vec{x}) = \int \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} = \int \delta_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (13.4)$$

essa quantidade retrata a flutuação de densidade em um dado ponto do Universo para um determinado valor de k e para nós, o importante é conhecer como essa flutuação varia ponto a ponto. Para isso, precisamos calcular a covariância ou a função de correlação de dois pontos, que nada mais é do que a medida da diferença entre as flutuações adimensionais de densidade em dois pontos do Universo:

$$\langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int |\delta_{\vec{k}}|^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k} \quad (13.5)$$

com $\vec{r} = |\vec{x} - \vec{y}|$ e $d^3 \vec{k} = (4\pi k^2) dk$

$$\langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int |\delta_{\vec{k}}|^2 k^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk \quad (13.6)$$

podemos escrever ainda o integrando como um fator adimensional

$$\langle \delta(x) \delta(y) \rangle = \frac{\int |\delta_{\vec{k}}|^2 k^3}{2\pi^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{dk}{k} \quad (13.7)$$

e definir o espectro de potência da flutuação $\delta_E(\vec{x})$ como

$$P_k = \frac{|\delta_{\vec{k}}|^2 k^3}{2\pi^2} \quad (13.8)$$

O espectro de potência nada mais é do que a transformada de Fourier da função de correlação $\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{y}) \rangle$

$$P_k = \int \xi(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (13.9) \text{ e}$$

se ϑ é o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{k}$ e $\vec{r}$ a integral sobre todas as direções $\vec{r}$ é dada por

$$\int_{\Omega} e^{-ikr\vartheta} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 e^{-ikr\vartheta} d\vartheta = 4\pi \frac{\sin kr}{kr} \quad (13.10)$$

substituindo em 13.9

$$P_k = 4\pi \int_0^{\infty} \xi(\vec{r}) \frac{\sin kr}{kr} d\vec{r} \quad (13.11)$$

e

$$\xi(\vec{r}) = 4\pi \int_0^{\infty} P_k \frac{\sin kr}{kr} d\vec{k} \quad (13.12)$$

Estamos interessados na quantidade que definimos como espectro de potência, que nos fornece a amplitude de perturbação para cada valor k e por isso vamos nos deter apenas a quantidade adimensional

$$P_k = \frac{|\delta^E|^2 k^3}{2\pi^2} \quad (13.13)$$

que nos dá a completa descrição estatística do sistema físico.

A variância $|\delta^E|^2$ pode ser determinada por E^2 e assim

$$P_k = \frac{|E|^2 k^3}{2\pi^2} \quad (13.14)$$

Como estamos trabalhando com a variável η , que se relaciona com E pela transformação

$$\hat{Q}_k(\eta) = a^3 \hat{E}_k(\eta) \quad (13.15)$$

podemos simplesmente calcular

$$P_k = \frac{|Q_k|^2 k^3}{2\pi^2} \quad (13.16)$$

que nos também nos fornece a contribuição em amplitude para cada modo k .

13.2 Aplicação no modelo com ricochete geométrico.

Temos:

$$Q(\vec{x}, k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}} v_k(\eta) I(\vec{k}, \vec{x}) + a_{-\vec{k}} v_k(\eta) I^*(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (13.17)$$

$$Q(\vec{x}, k) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[b_{\vec{k}} u_k(\eta) I(\vec{k}, \vec{x}) + b_{-\vec{k}} u_k(\eta) I^*(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (13.18)$$

mesmo $Q(\vec{x}, k)$ escrito através de dois conjuntos diferentes de funções.

Podemos associar as expansões acima às soluções antes e depois do bounce, denominadas IN e OUT respectivamente.

$$Q_{\text{IN}}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3 \mathbf{k}' \left[\bar{a}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'}(\eta) + a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\eta) \right] e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (13.19)$$

$$Q_{\text{OUT}}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3 \mathbf{k}' \left[\bar{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}(\eta) + b_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\eta) \right] e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (13.20)$$

onde

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{k}}}} e^{i w_{\mathbf{k}} \eta} \quad (13.21)$$

$$u_{\mathbf{k}} = d_1 e^{i w_{\mathbf{k}} \eta} + d_2 e^{-i w_{\mathbf{k}} \eta} \quad (13.22)$$

escrevendo na base complexa

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{IN}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ v_{\mathbf{k}} \right] \quad (13.23)$$

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{IN}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{a}_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i w_{\mathbf{k}} \eta}}{\sqrt{w_{\mathbf{k}}}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ \frac{e^{i w_{\mathbf{k}} \eta}}{\sqrt{w_{\mathbf{k}}}} \right] \quad (13.24)$$

e

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{OUT}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{b}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* + b_{-\mathbf{k}}^+ u_{\mathbf{k}} \right] \quad (13.25)$$

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{OUT}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{b}_{\mathbf{k}} (d_1 e^{i w_{\mathbf{k}} \eta} + d_2 e^{-i w_{\mathbf{k}} \eta}) + b_{-\mathbf{k}}^+ (d_1 e^{i w_{\mathbf{k}} \eta} + d_2 e^{-i w_{\mathbf{k}} \eta}) \right] \quad (13.26)$$

No caso quântico, a nova base $u_{\mathbf{k}}$ é relacionada com $v_{\mathbf{k}}$, a antiga base, através dos coeficientes de Bogoliubov

$$u_k = \alpha_k v_k - \beta_k^* v_k^* \quad (13.27)$$

$$\text{onde } v_k = \sqrt{\frac{1}{w_k}} e^{i w_k \eta}.$$

O espectro de potência é dado por

$$P_k = \frac{k^3}{2\pi^2} [|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 - 2\text{Re}(\alpha_k \beta_k^* e^{-2i w_k \eta})] \quad (13.28)$$

com coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} \alpha_{-k} &= \sqrt{w_k d_1^*} \\ \beta_k &= -\sqrt{w_k d_2} \end{aligned} \quad (13.29)$$

Lembrando que $n^2 = k^2 + 1$ e $w_k = n$, podemos escrever:

$$P_k = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{(n^2 + 1)^{3/2}}{n} [|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 - 2\text{Re}(\alpha_n \beta_n^* e^{-2i n \eta})] . \quad (13.30)$$

O espectro é calculado no tempo em que o potencial $V_{\text{eff}} = 3(\tanh(2\eta)^2 - 1)$, deixa de ser relevante, isto é, quando $\tanh(2\eta)^2 \sim 1$. Obtemos para o modelo, segundo a equação (13.30), o espectro para as perturbações escalares. O gráfico obtido pode ser visto na figura (13.1).

Observamos que para pequenos valores de n ,¹ observamos um comportamento que claramente não obedece uma lei de potência. Poderíamos re-alizar um cut-off nessa região, motivado pelo raio de Hubble do modelo $R_H = H^{-1} = \frac{1}{H}$, que nos define um horizonte, porém no modelo $\tanh(2\eta)$

¹Para o nosso modelo, o universo é aberto ($\varepsilon = -1$), portanto $0 < n < \infty$. Note que n não pode assumir um valor nulo, mas pode ser tão próximo de zero quanto desejarmos.

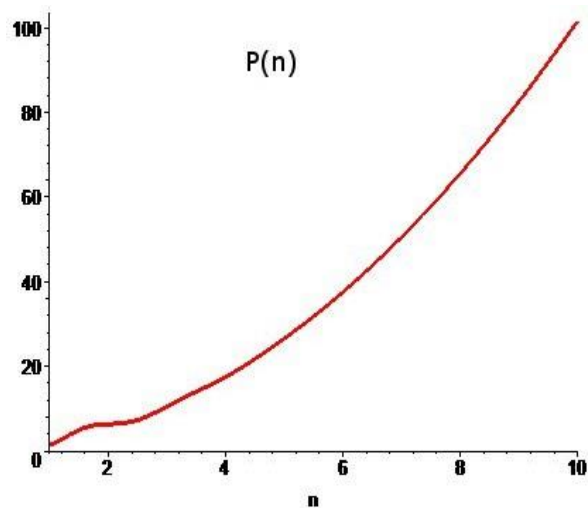


Figura 13.1: Espectro de Potencia para perturbações escalares, com $a_0 = 1$.

tratado, temos um horizonte muito grande e a escolha de um cutt-off não seria justificada.

É preciso lembrar que o modelo tratado não possui matéria e por isso, não pode ser comparado com as observações onde um espectro invariante de escala é requerido.

Parte IV

Ondas Gravitacionais

*Ora (dizeis) ouvir estrelas! Certo Perdeste
o senso! E eu vos direi, no entanto,
Que, para ouvi-las, muita vez desperto,
E abro as janelas, pálido de espanto...*
(Olavo Bilac)

Capítulo 14

Introdução

Uma das predições da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) é a existência de ondas gravitacionais (OG) associadas à descontinuidade do campo gravitacional. As ondas gravitacionais estão intimamente conectadas com a geometria do espaço-tempo. De acordo com a TRG, quando uma massa m de um sistema acelera, o espaço-tempo vizinho é afetado e a curvatura modificada. Essa mudança na curvatura do espaço-tempo é propagada através de ondas gravitacionais com velocidade da luz c , transportando energia e momento angular do sistema [3].

As ondas gravitacionais causam distorções na métrica do espaço-tempo da mesma maneira que as flutuações na densidade de matéria estudadas anteriormente. A diferença é que as ondas gravitacionais induzem uma distorção na geometria do espaço que não muda com o volume e por isso em termos técnicos são conhecidas como flutuações de densidade transversa sem traço, enquanto as perturbações na densidade de matéria resultam em uma expansão ou contração gerando ondas longitudinais [25].

De maneira análoga ao eletromagnetismo, as equações de Einstein no regime linear, possuem soluções de ondas planas da mesma forma que as equações de Maxwell, com dois estados ortogonais de polarização, denominados h_+ e $h_\times$ carregando informação sobre o tipo de fonte emissora e sua direção.

A radiação eletromagnética, assim como a radiação de neutrinos, é absorvida ou espalhada pela matéria assim como a radiação de neutrinos. As ondas gravitacionais, em contrapartida, interagem fracamente com a matéria e por isso não se espalham quando passam na vizinhança de objetos massivos. e por isso, é extremamente difícil detectar diretamente a radiação gravitacional.

14.1 Pulsar Binário PSR 1913+16

Uma das evidências indiretas da existência de ondas gravitacionais é o pulsar binário PSR 1913+16¹ observado por Joseph Taylor e Russel Hulse em 1974, ganhadores do prêmio nobel em 1993.

Um pulsar binário, segue uma órbita elíptica em torno do seu centro de massa e o seu período orbital varia com o tempo de acordo com a proximidade do sistema com a Terra, isto é, quando o sistema está próximo da Terra, seu pulso é emitido mais cedo do que o pulso de quando o pulsar está afastado da Terra. Porém, Hulse e Taylor observaram que a frequência dos pulsos emitidos desse sistema chegava cada vez mais adiantado implicando na diminuição ¹A sigla PSR 1913+16 significa que estamos tratando de um pulsar com ascensão reta 19h13m e com declinação 16°.

do seu período orbital. Com a observação desse fato, pôde-se concluir que o sistema perde energia através da emissão radiação gravitacional.

14.2 Fontes de Ondas Gravitacionais

As fontes de ondas gravitacionais são divididas de acordo com a faixa de frequência emitida, em fontes de origem astrofísicas e fontes de origem cosmológicas. As fontes de origem astrofísicas emitem radiação gravitacional na faixa de frequência de 10^{-9} - 10^4 Hz, enquanto as fontes de origem cosmológicas emitem em uma faixa de frequência extremamente baixa, 10^{-15} - 10^{-18} Hz. Para uma revisão sobre fontes de ondas gravitacionais, pode-se consultar [31] e [32]. Neste trabalho, estamos interessados no estudo de ondas gravitacionais de origem cosmológica nos primórdios do Universo. As ondas emitidas nesse período, não são localizadas e formam um fundo de radiação que preenche todo o Universo da mesma maneira que a radiação cósmica de fundo (RCF) e o fundo cosmológico de neutrinos. O estudo de ondas gravitacionais de origem cosmológicas abre uma importante janela para o conhecimento dos instantes iniciais do Universo.

1. Modelo Inflacionário

Na cosmologia inflacionária, as ondas gravitacionais produzidas por flutuações quânticas do vácuo em uma escala de sub-horizonte definido pelo raio de Hubble, são amplificadas pelo potencial inflacionário da mesma forma que as perturbações do campo escalar. Grishchuk foi quem primeiramente estudou a amplificação paramétrica de ondas gravita-

cionais pelo universo em expansão.

É importante salientar que se as

ondas gravitacionais geradas no Universo primordial não forem amplificadas por algum mecanismo, dificilmente seria observada seu efeito na RCF, mesmo que indiretamente, devido a sua fraca interação com a matéria.

A amplitude característica das ondas gravitacionais, depende da razão de expansão do horizonte e consequentemente da energia e do instante em que ocorreu a fase inflacionária. Por isso, o estudo de ondas gravitacionais constitui uma poderosa investigação na escala de energia do modelo inflacionário.

O processo de quantização de ondas gravitacionais é o mesmo aplicado ao caso escalar levando-se em conta agora o carácter tensorial das perturbações e o espectro obtido para o caso de modelos inflacionários pode ser visto em [22].

2. Modelos com Ricochete

Os modelos com ricochete, são caracterizados por uma fase de contração antes da fase de expansão. Durante a contração, o raio de Hubble, decresce muito mais rapidamente que o comprimento de onda físico e as perturbações tensoriais são amplificadas assim como ocorre com modelos inflacionários. Para uma revisão sobre modelos com ricochete, consultar [8].

14.3 Fundo Estocástico

Além da contribuição de ondas gravitacionais de origem primordial, o background estocástico também é constituído de superposições incoerentes da

radiação gravitacional emitida por grande população de objetos astrofísicos que não podem ser resolvidos individualmente.

Devido a sua fraca interação com a matéria, o fundo de ondas gravitacionais se desacopla da matéria desde os instantes iniciais do Universo e a partir daí, qualquer processo que venha contribuir para esse fundo de radiação deixa impresso sua marca, que permanecerá inalterada até o momento presente. Obter um mapa de radiação gravitacional da mesma forma que o mapa da radiação cósmica de fundo seria um avanço extraordinário no conhecimento sobre o "nascimento do universo". Embora seja de extrema importância a sua fraca interação com a matéria, esse fato constitui um problema na sua detecção já que dificilmente a radiação irá interagir com o detector mas mesmo com essa dificuldade, tem se dispensado muito estudo na construção de detectores levando em conta todas as possibilidades práticas de detecção. Por dificuldades técnicas, não se espera detectar diretamente a radiação gravitacional mas sim as suas evidências indiretas como por exemplo o seu efeito sobre a polarização da radiação cósmica de fundo.

Capítulo 15

Descrevendo as Perturbações Tensoriais

Podemos descrever perturbações tensoriais do campo gravitacional através de perturbações do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou através do Formalismo Quasi- Maxwelliano da gravitação.

15.1 Linearização das equações de Einstein

De acordo com a TRG, a relação entre a curvatura do espaço e a fonte é dada pela equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (15.1)$$

Para estudar ondas gravitacionais precisamos resolver essa equação e devido a sua não linearidade é extremamente complicado encontrar soluções exatas para grandes amplitudes, já que nesse regime as ondas gravitacionais

começam a sofrer auto-interação. Para superar essa dificuldade podemos re- solver as equações de Einstein no regime de campo fraco, já que a intensidade da radiação gravitacional é extremamente baixa [3].

A aproximação de campo fraco consiste em linearizar as equações de Einstein sob um espaço de fundo de Minkowski, ou seja, escrever a métrica do espaço- tempo considerando uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$ da métrica do espaço plano $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (15.2)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$.

Em primeira ordem, podemos escrever a conexão afim e o tensor de cur- vatura como

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\nu\lambda} (\partial_{\rho} h_{\lambda\mu} + \partial_{\mu} h_{\lambda\rho} - \partial_{\lambda} h_{\mu\rho}) \quad (15.3)$$

$$R_{\mu\rho\sigma}^{\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} + O(h^2) \quad (15.4)$$

ou de forma mais explícita

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\rho\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma\nu} h_{\mu\rho}). \quad (15.5)$$

Introduzindo um tensor sem traço

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \quad (15.6)$$

com $h = \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$ e $\bar{h} = \bar{h}$, podemos escrever a equação (15.1) de uma forma compacta

$$Q\bar{h}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\partial^\rho\partial^\lambda\bar{h}_{\rho\lambda} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\sigma\bar{h}_{\rho\nu} + O(h^2) = kT_{\nu\sigma} \quad (15.7)$$

onde $Q = \eta_{\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma$.

A solução das equações de campo não é única, pois dada uma solução, podemos sempre gerar uma outra solução através de uma mudança no sistema de coordenadas do tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ onde $\xi(x)$ é uma função arbitrária.

Podemos realizar uma pequena transformação de coordenada na perturbação métrica $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu \quad (15.8)$$

sob a qual o tensor de Riemann permanece invariante e impor quatro condições de calibre conhecido como calibre de Lorentz

$$\partial_\alpha h^\alpha_\beta(x) - \frac{1}{2}\partial_\beta h^\alpha_\alpha(x) = 0 \quad (15.9)$$

que pode ser reescrito como

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (15.10)$$

usando o tensor sem traço dado em (15.6).

Nesse calibre, também conhecido na literatura como calibre harmônico ou de De Donder, podemos escrever as equações de Einstein linearizadas, (15.7) como

$$Q\bar{h}_{\nu\sigma} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{\nu\sigma}. \quad (15.11)$$

CAPÍTULO 15. DESCRREVENDO AS PERTURBAÇÕES TENSORIAIS 107

Uma vez que ondas gravitacionais são geradas, estamos interessadas na sua propagação. Fazendo $T_{\nu\sigma} = 0$ obtemos a solução de onda no vácuo

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} = 0. \quad (15.12)$$

Logo, na aproximação de campo fraco e no calibre de Lorentz, as equações de campo são lineares e possuem soluções do tipo onda que se propagam transversalmente à velocidade da luz c . Das 16 componentes de $h_{\mu\nu}$ apenas 2 são independentes

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

onde $h_{xx} = -h_{yy}$ e $h_{xy} = h_{yx}$, dando origem a ondas com dois estados de polarização denominados h_+ e $h_\times$ que podem ser escritas sem perda de generalidade se propagando na direção z

$$h_+ = h_{xx} = \Re [A_+ \exp(-i\omega(t - z/c))] \quad (15.14)$$

$$h_\times = h_{xy} = \Re [A_\times \exp(-i\omega(t - z/c))] \quad (15.15)$$

onde A_+ e $A_\times$, são amplitudes representando os dois estados diferentes de polarização.

A figura a seguir, mostra o efeito dessas polarização em um anel de partículas teste.

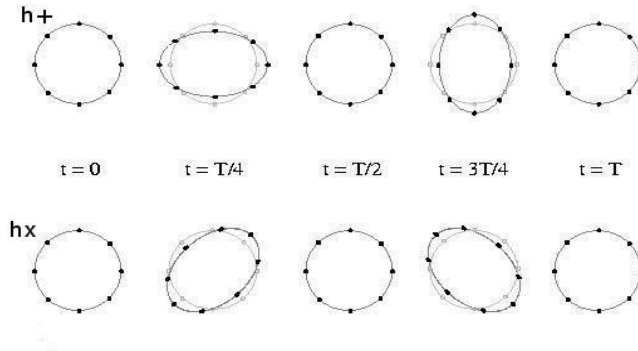


Figura 15.1: Estados de polarização de ondas gravitacionais.

15.2 Desvio Geodésico

Na TRG, partículas testes¹ e raios de luz, livres de qualquer outra força que não seja a gravitacional, se movem no espaço-tempo curvo seguindo trajetórias geodéticas do tipo-tempo $x^\mu(\tau)$ com equação de movimento dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (15.16)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula.

Para estudar o efeito de ondas gravitacionais, precisamos saber como a separação entre duas partículas vizinhas é modificada pela incidência de uma onda gravitacional. É importante ressaltar que uma única partícula não é o suficiente para estudar o efeito de ondas gravitacionais já que a sua posição no espaço não muda com a passagem da onda, mas sim o deslocamento relativo entre duas partículas adjacentes.

Consideramos duas partículas **A** e **B**, se ¹Partículas com massa desprezíveis que não produzem

nenhuma curvatura no espaço mas se movem devido ao efeito da curvatura produzida por outros corpos.

movendo livremente ao longo de duas geodésicas, $x^\mu(\tau)$ e $x^\mu(\tau) + \xi^\mu$ onde o quadrivetor ξ^μ representando a separação entre as partículas. Qualquer mudança na separação entre as partículas, é dada pela equação do desvio geodésico:

$$V^\gamma V^\beta \xi^\alpha_{;\beta\gamma} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta \xi^\gamma, \quad (15.17)$$

onde $\xi^\alpha_{;\beta\gamma}$ corresponde a equação da geodésica definida em (15.16) e V^β é o quadrivetor velocidade da partícula tangente a trajetória.

A equação do desvio geodético (15.17) pode ser simplificada usando o **calibre transversal sem traço**² ou calibre de radiação descrito anteriormente em (15.6).

Considerando que as partículas se movem vagarosamente ao longo de suas trajetórias, podemos expressar o vetor-quadri-velocidade na direção temporal com correções da ordem de $h_{\mu\nu}$ e superior, porém, como o tensor de Riemann () já é de primeira ordem, podemos ignorar as correções de V^γ e escrever:

$$V^\gamma = (1, 0, 0, 0). \quad (15.18)$$

Sendo assim, precisamos calcular a única componente não nula do tensor de Riemann $R^\alpha_{00\delta}$, ou equivalentemente,

$$R_{\alpha 00\delta} = \frac{1}{2} (\partial_{00} h_{\alpha\delta} + \partial_{\delta\alpha} h_{00} - \partial_{\delta 0} h_{\alpha 0} - \partial_{\alpha 0} h_{\delta 0}). \quad (15.19)$$

Como pode ser visto em (15.13), o tensor $h_{\mu\nu}$, não possui termos fora da diagonal, ou seja, $h_{\alpha 0} = 0$. Logo,

²O nome vem do fato de que nesse calibre o tensor métrico é sem traço e perpendicular ao vetor de onda.

$$R_{\alpha 0 0 \delta} = \frac{1}{2}(\partial_{00} h_{\alpha \delta}). \quad (15.20)$$

Sem perda de generalidade, podemos parametrizar $\tau = x^0 = t$, para partículas que se movem vagarosamente ao longo das curvas e escrever a equação do desvio geodésico (15.17):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\alpha = \frac{1}{2}(\partial_{00} h^\alpha_\delta) \xi^\delta \quad (15.21)$$

15.3 Formalismo Quase-Maxwelliano

O método covariante no estudo de perturbações tensoriais foi introduzido por Hawking [18].

Esse método possui uma enorme vantagem em relação

às outras teorias de perturbações cosmológicas já que inclui a interação da radiação com a matéria que não está presente em outra formulação.

Para o estudo de ondas gravitacionais, podemos desconsiderar qualquer perturbação escalar e vetorial de um fluido perfeito, ou seja:

$$w_{\alpha\beta} = q_\alpha = \delta V_\beta = \delta\theta = \delta\rho = 0. \quad (15.22)$$

No capítulo 5, introduzimos as componentes do fluido perturbado expandidas em bases de harmônicos tensoriais e as componentes não-nulas são listadas abaixo:

$$\delta E_{ij} = \sum_k E_k^{(2)}(t) U^k_{ij} \quad (15.23)$$

$$\delta \sigma_{ij} = \sum_k \Sigma_k^{(2)}(t) U^k_{ij} \quad (15.24)$$

$$\delta H_{ij} = \sum_k H_k^{(2)}(t) U^k_{ij} \quad (15.25)$$

$$\delta \Pi_{ij} = \sum_k \Pi_k^{(2)}(t) U^k_{ij} \quad (15.26)$$

As equações que descrevem as perturbações tensoriais são dadas por [19]:

$$\dot{E} + \theta E + \frac{1}{2}(p + \rho)\Sigma - \frac{1}{2a^2}(m^2 + 3\varepsilon)H = \frac{1}{3}(\dot{\Pi} + \Pi)\theta \quad (15.27)$$

$$\dot{H} + \frac{2}{3}\Pi\theta H + E = -\frac{\Pi}{2} \quad (15.28)$$

$$\dot{\Sigma} + \frac{2}{3}\theta\Sigma + E = -\frac{\Pi}{2} \quad (15.29)$$

$$H - \Sigma = 0 \quad (15.30)$$

Lembrando que, para o caso do fluido perfeito, existe uma relação linear entre a pressão p e a densidade de energia ρ da forma $p = \lambda\rho$ e que não existe pressão anisotrópica, ou seja, $\Pi = 0$ nas equações acima. Segue da equação de vínculo (15.30) que $H = \Sigma$ e com essa relação pode-se escrever as equações (15.27) e (15.28) como:

$$\dot{E} + \theta E + \left[\frac{1}{2}(1 + \lambda)\rho - \frac{1}{2a^2}(m^2 + 3\varepsilon) \right] H = 0 \quad (15.31)$$

$$\dot{H} + \frac{2}{3}\theta H + E = 0 \quad (15.32)$$

Esta equação pode ser derivada para obter a relação

CAPÍTULO 15. DESCREVENDO AS PERTURBAÇÕES TENSORIAIS 112

$$\dot{E} = -\ddot{H} - \frac{2}{3}\dot{\theta}H^2 - \frac{1}{3}\dot{\theta}H \quad (15.33)$$

e substituindo em (15.31), obtemos uma equação para H desacoplada

$$\ddot{H} + \frac{5}{3}\dot{\theta}\dot{H} + \left[\frac{2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(1+\lambda)\rho - \frac{1}{2a^2}(m^2 - 3\varepsilon) \right] H = 0. \quad (15.34)$$

Usando a equação de Friedmann, podemos escrever a densidade ρ como

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} + \frac{3\varepsilon}{a^2} \quad (15.35)$$

e substituindo em (15.34) obtemos

$$\ddot{H} + \frac{5}{3}\dot{\theta}\dot{H} + \left[\frac{2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{a^2} - \frac{1}{2}(1+\lambda)\frac{3\varepsilon}{a^2} + \frac{1}{2a^2}(m^2 - 3\varepsilon) \right] H = 0 \quad (15.36)$$

Essa equação, dada em termos do tempo cosmológico pode ser escrita em termos do tempo conforme, através da relação $dt = a d\eta$. Podemos definir um parâmetro de Hubble conforme $H = a^{-1} \frac{d}{d\eta}$ e escrever $\theta = 3\frac{\dot{H}}{H}$. Assim, no tempo conforme temos:

$$H'' + 4HH' + \left[\frac{2}{3}H'^2 + H^2 + \frac{m^2 - 3\varepsilon}{2} \right] H = 0 \quad (15.37)$$

H e H^2 pode ser relacionados através da equação de Friedmann

$$H' + 2H^2 = -2\varepsilon \quad (15.38)$$

$$H'' + 4HH' + \left[-3H^2 + k^2 - \frac{11}{2}\varepsilon \right] H = 0 \quad (15.39)$$

Para o caso tensorial,

$$k^2 = n^2 - 3\varepsilon \quad (15.40)$$

com $n \neq 0$.

Temos finalmente a equação

$$H'' + 4HH' - \left[3H^2 - \frac{n^2}{2} - 7 \right] H = 0 \quad (15.41)$$

Nesta equação, por simplicidade, redefinimos uma frequência como $\omega^2 = \frac{n^2}{2}$.

15.4 Formulação Hamiltoniana

Analizando as equações dinâmicas para E e H observamos que essas variáveis não são canonicamente conjugadas, mas como foi feito no caso escalar, podemos contruir um conjunto de variáveis canônicas através da combinação desses objetos permitindo a formulação hamiltoniana da teoria.

Podemos escrever as equações desacopladas (15.31) e (15.32) para E e H na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{E} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}, \quad (15.42)$$

onde M é a matriz definida por

$$M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_4 & f_3 \end{pmatrix} \quad (15.43)$$

com funções

$$f_1 = -2H \quad (15.44)$$

CAPÍTULO 15. DESCRREVENDO AS PERTURBAÇÕES TENSORIAIS114

$$f_2 = -a \quad (15.45)$$

$$f_3 = -3H \quad (15.46)$$

$$f_4 = - \left(\frac{3H^2}{a} - \frac{m^2}{2a} + \frac{3\varepsilon}{2a} \right) \quad (15.47)$$

ou seja, temos o seguinte sistema de equações

$$E' = f_3 E + f_4 H \quad (15.48)$$

$$H' = f_2 E + f_1 H. \quad (15.49)$$

Supondo uma relação linear das variáveis canônicas P e Q com as variáveis H e E sob a forma

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \quad (15.50)$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (15.51)$$

os coeficientes da matriz S serão ajustados de acordo com o modelo.

Sabemos que a Hamiltoniana H de um sistema é dada pela relação das variáveis canônicas com suas derivadas

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (15.52)$$

Derivando (15.50) temos:

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = S' \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}, \quad (15.53)$$

usando a relação (15.50), podemos escrever (15.53) em termos do conjunto de variáveis canônicas Q e P

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = S'S^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} + SMS^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (15.54)$$

logo:

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = S'S^{-1} + SMS^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (15.55)$$

identificando a Hamiltoniana do sistema

$$H = S'S^{-1} + SMS^{-1} \quad (15.56)$$

Substituindo as matrizes S e M temos a seguinte hamiltoniana

$$H = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha\delta f_1 + \beta\delta f_4 - \alpha\gamma f_2 - \beta\gamma f_3 + \alpha'\delta - \beta'\gamma & -\alpha\beta f_1 - \beta^2 f_4 + \alpha^2 f_2 + \alpha\beta f_3 - \alpha'\beta + \beta'\alpha \\ \delta\gamma f_1 + \delta^2 f_4 - \gamma^2 f_2 - \delta\gamma f_3 + \gamma\delta - \delta\gamma & -\gamma\beta f_1 - \beta\delta f_4 + \alpha\gamma f_2 + \alpha\delta f_3 - \beta\gamma \end{pmatrix} + \delta \alpha \quad (15.57)$$

onde $\Delta = \alpha\delta - \gamma\beta$ é o determinante da matriz S .

Devemos ter $\text{tr}H = 0$, isto é $H_{11} + H_{22} = 0$ e esse vínculo nos permite fixar o determinante da matriz S facilitando a escolha dos coeficientes. Segue dessa relação de vínculo que

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 5 \frac{a'}{a} \quad (15.58)$$

integrando essa relação temos

$$\Delta = \Delta_0 a^5 \quad (15.59)$$

onde $\Delta_0 = \alpha_0 \delta_0 - \gamma_0 \beta_0$ que serão constantes fixadas de acordo com o modelo.

Gostaríamos de estudar a solução dessa equação em um modelo com ricochete.

Capítulo 16

Modelo com Ricochete Geométrico

De maneira análoga ao estudo de perturbações de matéria, neste capítulo, vamos estudar a amplificação de ondas gravitacionais através de um ricochete puramente geométrico, como descrito no capítulo 3, motivado pela geometria de WIST. Esse modelo é caracterizado por um fator de escala

$$a(\eta) = a_0 \sqrt{\cosh(2\eta)} \quad (16.1)$$

com curvatura espacial $\varepsilon = -1$ e parâmetro de Hubble conforme $H = \tanh(2\eta)$.

Neste modelo, a equação dinâmica para a parte magnética do tensor de Weyl (15.41), que caracteriza as perturbações tensoriais, pode ser escrita como:

$$H'' + 4\tanh(2\eta)H' - [3\tanh(2\eta)^2 - (w^2 + 7)]H_k = 0 \quad (16.2)$$

com frequência $w^2 = \frac{k^2 - 3}{k}$. A solução dessa equação é dada por:

$$H(\eta) = A \sqrt{\frac{1}{\cosh(2\eta)}} F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z) + B \sqrt{\frac{1}{\cosh(2\eta) \sinh(2\eta)}} F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z) \quad (16.3)$$

onde A e B são constantes de integração que serão determinadas pelas condições iniciais e as funções F_1 e F_2 são hipergeométricas com parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} w_k & \alpha_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} w_k \\ \beta_1 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} w_k & \beta_2 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} w_k \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} & \gamma_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (16.4)$$

e

$$z = -\sinh^2(2\eta). \quad (16.5)$$

As ondas gravitacionais são provenientes de perturbações tensoriais do campo gravitacional originadas de flutuações quânticas do vácuo. A equação obtida para as perturbações é clássica e tendo em vista que as condições iniciais são de origem quântica, realizaremos o mesmo procedimento de quantização do caso escalar através da formulação hamiltoniana.

16.1 Hamiltoniana do modelo

A relação entre as variáveis E e H e suas derivadas foram apresentadas no capítulo anterior em (15.31) e (15.32) e escritas sobre a forma matricial em

(15.43). Para o modelo em questão, temos as componentes da matriz (15.47) dadas por:

$$f_1 = -2 \tanh(2\eta) \quad (16.6)$$

$$f_2 = -a \quad (16.7)$$

$$f_3 = -3 \tanh(2\eta) \quad (16.8)$$

$$f_4 = - \left(\frac{3 \tanh(2\eta)^2}{a} - \frac{m^2}{2a} + E_0 \right) \quad (16.9)$$

$$\text{com } E_0 = \frac{3\varepsilon}{2a}$$

Substituindo essas funções na hamiltoniana do sistema obtida em (15.57), encontramos as seguintes componentes:

$$H_{11} = \frac{(-2\alpha\gamma \tanh(2\eta)a - \beta\gamma(3 \tanh(2\eta)^2 + E_0) + \alpha\gamma a^2 + 3\beta\gamma \tanh(2\eta)a + (\alpha'\delta - \beta'\gamma)a}{a(\alpha\delta - \beta\gamma)} \quad (16.10)$$

$$H_{22} = -h_{11} \quad (16.11)$$

$$H_{12} = \frac{(-2\alpha\beta \tanh(2\eta)a - \beta^2(3 \tanh(2\eta)^2 + E_0) - \alpha^2 a^2 + 3\beta\alpha \tanh(2\eta)a + (\alpha'\beta - \beta'\alpha)a}{a(\alpha\delta - \beta\gamma)} \quad (16.12)$$

$$H_{21} = \frac{(-2\delta\gamma \tanh(2\eta)a - \delta^2(3 \tanh(2\eta)^2 + E_0) + \gamma^2 a^2 + 3\delta\gamma \tanh(2\eta)a + (\gamma'\delta - \delta'\gamma)a}{a(\alpha\delta - \beta\gamma)} \quad (16.13)$$

A hamiltoniana completa do sistema em termos das variáveis canônicas é dada por:

$$H = \frac{h_{21}}{2} P^2 - \frac{h_{12}}{2} Q^2 - \frac{h_{11}}{2} (PQ + QP) \quad (16.14)$$

Desejamos que em $\eta = -\infty$ a hamiltoniana seja a de um oscilador harmônico por isso, precisamos calcular o limite das componentes da hamiltoniana e ajustar as constantes de maneira que

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} h_{12} = 1 \quad (16.15)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} h_{11} = 0 \quad (16.16)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} h_{21} = -w_k^2 \quad (16.17)$$

Através do vínculo (15.59) é possível ajustar os coeficientes da matriz como

$$\alpha = \alpha_0 a^2 \quad (16.18)$$

$$\beta = \beta_0 a^3 \quad (16.19)$$

$$\gamma = \gamma_0 a^2 \quad (16.20)$$

$$\delta = \delta_0 a^3 \quad (16.21)$$

e calculando o limite obtemos os valores das constantes $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \delta_0 = 0$ e $\gamma_0 =$

Assim, podemos associar a variável H à uma variável canônica que pode ser quantizada. Segue de (15.50), que uma variável canônica pode ser construída através da relação:

$$Q(k, \eta) = a(\eta)^2 H(k, \eta) \quad (16.22)$$

onde $H(k, \eta)$, solução de (16) é dada por (16). É importante lembrar que essa escolha não é única.

$$Q(k, \eta) = A [\cosh(4\eta) + 1]^4 F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z) + B \frac{[\sinh(4\eta)]^{\frac{3}{2}}}{[\cosh(4\eta) - 1]^{\frac{3}{4}}} F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z) \quad (16.23)$$

com A e B constantes e F_1, F_2 são funções hipergeométricas com parâmetros :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} w_k & \alpha_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} w_k \\ \beta_1 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} w_k & \beta_2 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{2} w_k \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} & \gamma_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (16.24)$$

e

$$z = -\sinh^2(2\eta). \quad (16.25)$$

Podemos verificar pela simples substituição de variável dada por (16.1) na equação (16), que $Q(k, \eta)$ satisfaz a equação:

$$Q_k'' + [w_k^2 - 3H^2 + 3]Q_k = 0 \quad (16.26)$$

No limite assintótico, $\eta \rightarrow \pm\infty$, temos $H^2 = 1$ resultando numa equação para um oscilador harmônico

$$Q(\eta)'' + w^2 Q(\eta) = 0 \quad (16.27)$$

com frequência $w_k > 0$ e solução

$$Q(k, \eta) = \sqrt{\frac{1}{w_k}} e^{i w_k \eta} \quad (16.28)$$

Para encontrar as constantes A e B na solução (16.1), basta calcular o limite assintótico e fixar a solução assintótica como a de um oscilador harmônico. O limite assintótico pode ser bastante simplificado se realizarmos uma transformação na hipergeométrica de maneira que o seu último argumento $z \rightarrow 0$ em $\eta \rightarrow \pm\infty$, já que por definição $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$. A hipergeométrica pode ser transformada segundo:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-1)^\alpha (z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{z}) + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)} (-1)^\beta (z)^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{z}) \quad (16.29)$$

com limite assintótico

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = f(w_k) (-1)^\alpha (z)^{-\alpha} + g(w_k) (-1)^\beta (z)^{-\beta}, \quad (16.30)$$

onde as funções $f(w_k)$ e $g(w_k)$ são dadas por

$$f(w_k) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \quad (16.31)$$

$$g(w_k) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \quad (16.32)$$

Realizando essa transformação nas hipergeométricas da solução $Q(k, \eta)$ e calculando o limite assintótico, temos

$$Q(k, \eta) = A(w_k) a^2 \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{[\cosh(4\eta) + 1]^3}{4} \left\{ f_1(w_k) (-1)^{\alpha_1} (z)^{-\alpha_1} + g_1(w_k) (-1)^{\beta_1} (z)^{-\beta_1} \right\} +$$

$$B(w_k) a_0^2 \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{[\sinh(4\eta)]^2}{[\cosh(4\eta) - 1]^4} \left\{ f_2(w_k) (-1)^{\alpha_2} (z)^{-\alpha_2} + g_2(w_k) (-1)^{\beta_2} (z)^{-\beta_2} \right\} \quad (16.33)$$

Os limites das funções são mostrados na tabela

Funções	$\lim_{\eta \rightarrow -\infty}$	$\lim_{\eta \rightarrow +\infty}$
$a^2 f(w_k) [\cosh(4\eta) + 1]^3 (-1)^{\alpha_1} (z)^{-\alpha_1}$	$C_1 = a^2 f(w_k) 2^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{4}} e^{I w_k \eta}$	$D_1 = a^2 f(w_k) 2^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{4}} e^{I w_k \eta}$
$a^2 g(w_k) [\cosh(4\eta) + 1]^3 (-1)^{\beta_1} (z)^{-\beta_1}$	$\overline{C}_1 = a^2 g(w_k) 2^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{4}} e^{-I w_k \eta}$	$\overline{D}_1 = a^2 g(w_k) 2^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{4}} e^{-I w_k \eta}$
$a^2 f(w_k) \frac{[\sinh(4\eta)]^2}{[\cosh(4\eta) - 1]^4} (-1)^{\alpha_2} (z)^{-\alpha_2}$	$C_2 = a^2 f(w_k) 2^5 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{2}} e^{I w_k \eta}$	$D_2 = a^2 f(w_k) 2^5 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{2}} e^{I w_k \eta}$
$a^2 g(w_k) \frac{[\sinh(4\eta)]^2}{[\cosh(4\eta) - 1]^4} (-1)^{\beta_2} (z)^{-\beta_2}$	$\overline{C}_2 = a^2 g(w_k) 2^5 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{2}} e^{-I w_k \eta}$	$\overline{D}_2 = a^2 g(w_k) 2^5 \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{k}{2}} e^{-I w_k \eta}$

De acordo com os limites das funções mostrados na tabela, podemos escrever as soluções assintóticas da função $Q(k, \eta)$ como:

$$Q(k, \eta)_{\eta \rightarrow -\infty} = [A(w_k) C_1 + B(w_k) C_2] e^{I w_k \eta} + [A(w_k) \overline{C}_1 + B(w_k) \overline{C}_2] e^{-I w_k \eta} \quad (16.34)$$

$$Q(k, \eta)_{\eta \rightarrow +\infty} = [A(w_k) D_1 + B(w_k) D_2] e^{I w_k \eta} + [A(w_k) \overline{D}_1 + B(w_k) \overline{D}_2] e^{-I w_k \eta} \quad (16.35)$$

Para que $Q(k, \eta)_{\eta \rightarrow -\infty}$, seja a de um oscilador harmônico devemos fazer:

$$A(w_k)C_1 + B(w_k)C_2 = \sqrt{\frac{1}{w_k}} \quad (16.36)$$

$$A(w_k)\overline{C_1} + B(w_k)\overline{C_2} = 0 \quad (16.37)$$

Resolvendo esse sistema de equações temos:

$$A(w_k) = \overline{C_2} \sqrt{\frac{1}{w_k}} [C_2 C_1 - \overline{C_2} \overline{C_1}] \quad (16.38)$$

$$B(w_k) = -\overline{C_1} \sqrt{\frac{1}{w_k}} [C_2 C_1 - \overline{C_2} \overline{C_1}] \quad (16.39)$$

Encontrado o valor dessas constantes, podemos substituir na solução $Q(k, \eta)$ válida $\forall \eta$ e obtemos o gráfico

Podemos observar uma amplificação da onda quando $\eta \rightarrow \infty$ que depende claramente do número de onda, quanto maior o número de onda, menor a amplificação como era de se esperar de acordo com as funções $A(w_k)$ e $B(w_k)$

que dependem do fator $\sqrt{\frac{1}{w_k}}$.

16.2 Quantização

Para a quantização canônica, vamos expandir a função tensorial Q^i

${}_j(\eta, \mathbf{x})$ em modos de Fourier $Q_{k,\lambda}(\eta)$, onde λ introduz dois graus de liberdade referentes à dois estados de polarização das ondas gravitacionais representadas por perturbações tensoriais:

$$Q^i{}_j(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\lambda} Q_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) \epsilon^i{}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \lambda) l(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (16.40)$$

onde $l(\vec{k}, \vec{x})$ é base hiperbólica e $\epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda)$ é o tensor de polarização que satisfaz as equações:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (16.41)$$

$$\epsilon^i_i = 0 \quad (16.42)$$

$$k^i \epsilon_{ij} = 0 \quad (16.43)$$

$$\epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) \epsilon^j_l(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (16.44)$$

$$\epsilon_{ij}(-\vec{k}, \lambda) = \epsilon^*_{ij}(\vec{k}, \lambda) \quad (16.45)$$

Para quantizar o sistema, consideramos Q^i como operadores $\hat{Q}^i$ atuando no espaço de Hilbert

$$\hat{Q}^i_j(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sum_{\lambda} \hat{Q}_{\vec{k}, \lambda}(\eta) \epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) l(\vec{k}, \vec{x}) \quad (16.46)$$

Podemos escrever a função modo $\hat{Q}_{\vec{k}, \lambda}$ em termos de uma nova base

$$\hat{Q}_{\vec{k}, \lambda} = \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} v_k + \hat{a}^*_{-\vec{k}, \lambda} v^*_k \quad (16.47)$$

logo

$$\hat{Q}^i_j(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sum_{\lambda} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} v_k + \hat{a}^*_{-\vec{k}, \lambda} v^*_k] \epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) l(\vec{k}, \vec{x}) \quad (16.48)$$

repassando $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ e considerando $v_{\vec{k}}(\eta) = v_{-\vec{k}}(\eta)$ devido a homogeneidade e isotropia do espaço, podemos escrever

$$\hat{Q}^i_j(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sum_{\lambda} \left[\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} v_{\vec{k}} \epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) I(\vec{k}, \vec{x}) + \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^\dagger v_{\vec{k}} \epsilon^i_j(-\vec{k}, \lambda) I^*(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (16.49)$$

$$(16.49)$$

onde v_k é solução da equação:

$$v_k'' + w_k^2 v_k = 0. \quad (16.50)$$

Podemos sempre construir funções modos em termos de bases diferentes, sendo assim, podemos escrever

Em $\eta \rightarrow -\infty$:

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{w_k}} e^{i w_k \eta} \quad (16.51)$$

Em $\eta \rightarrow \infty$:

$$u_k = d_1 e^{i w_k \eta} + d_2 e^{-i w_k \eta} \quad (16.52)$$

onde

$$d_1 = A(w_k) D_1 + B(w_k) D_2 \quad (16.53)$$

$$d_2 = A(w_k) \overline{D_1} + B(w_k) \overline{D_2} \quad (16.54)$$

e D_1 e D_2 , dados pela tabela [16.1]. Usando essas duas funções modos, representando a função modo em $\eta \rightarrow \pm\infty$ podemos escrever os operadores para os estados IN e OUT

$$\hat{Q}^{(IN)i}_{j(\eta, \vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sum_{\lambda} \left[\hat{a}_{k,\lambda} v_k \epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) l(\vec{k}, \vec{x}) + \hat{a}^\dagger_{-k,\lambda} v_k^* \epsilon^i_j(-\vec{k}, \lambda) l^*(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (16.55)$$

$$\hat{Q}^{(OUT)i}_{j(\eta, \vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sum_{\lambda} \left[\hat{b}_{k,\lambda} u_k \epsilon^i_j(\vec{k}, \lambda) l(\vec{k}, \vec{x}) + \hat{b}^\dagger_{-k,\lambda} u_k^* \epsilon^i_j(-\vec{k}, \lambda) l^*(\vec{k}, \vec{x}) \right] \quad (16.56)$$

Os operadores de criação e aniquilação dos estados IN e OUT se relacionam através dos coeficientes de Bogoliubov $\alpha_{k,\lambda}$ e $\beta_{k,\lambda}$ como

$$\hat{a}_{k,\lambda} = \alpha_{k,\lambda}^* \hat{b}_{k,\lambda} - \beta_{k,\lambda}^* \hat{b}^\dagger_{k,\lambda} \quad (16.57)$$

$$\hat{a}_{-k,\lambda} = \alpha_{-k,\lambda} \hat{b}^\dagger_{-k,\lambda} - \beta_{k,\lambda} \hat{b}_{k,\lambda} \quad (16.58)$$

Desejamos calcular o espectro após o ricochete e para isso, precisamos saber

$$P_{k,\lambda} = k^3 |u_{\square_{k,\lambda}} \xi^i_j(\vec{k}, \lambda)|^2, \quad (16.59)$$

ou seja,

$$P_{k,\lambda} = \sum_{\lambda} k^3 [u_{\square_{k,\lambda}} \xi^i_j(\vec{k}, \lambda)] [u_{\square_{-k,\lambda}}^* \epsilon^i_j(-\vec{k}, \lambda)] \quad (16.60)$$

e lembrando que $\epsilon^i(-\vec{k}, \lambda) = \epsilon^{*i}(\vec{k}, \lambda)$ temos

$$P_{k,\lambda} = 2k^3 |u_{\square_{k,\lambda}}|^2 \quad (16.61)$$

onde o fator 2 que dá a multiplicidade do estado de polarização é obtido naturalmente de (16.44) e a função modo $u_{\vec{k},\lambda}$ é relacionado com $v_{\vec{k},\lambda}$ através dos coeficientes de Bogouliubov

$$u_k = \alpha_k v_k - \beta_k^* v_k^* \quad (16.62)$$

$$u_k^* = \alpha_k^* v_k^* - \beta_k v_k. \quad (16.63)$$

Substituindo essa função modo em (16.61), obtemos

$$P_{k,\lambda} = 2 \frac{k^3}{w_k} [|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 - 2\Re(\alpha\beta e^{2i w_k \eta})] \quad (16.64)$$

Para o modelo estudado, obtemos:

$$\alpha_k = \sqrt{w_k d_1} \quad (16.65)$$

$$\beta_k = -\sqrt{w_k d_2} \quad (16.66)$$

com

$$d_1 = \frac{n^{2(3/4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln)} (2 + n^2) \Gamma(\frac{1}{4} \sqrt{2n^2}) \sinh_4(\frac{1}{4} \pi \sqrt{2n})}{32 \sqrt{n} \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \pi \sqrt{2n}) \sin(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n})^2 - \sin(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n})^2} \quad (16.67)$$

$$d_2 = \frac{2^{(1/4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln)} [\cos(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n}) + \cos(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n})^2]}{\sqrt{n} [\cos(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n})^2 - \cos(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{8} \pi \sqrt{2n})^2]} \quad (16.68)$$

$$e w_k^2 = n^2/2.$$

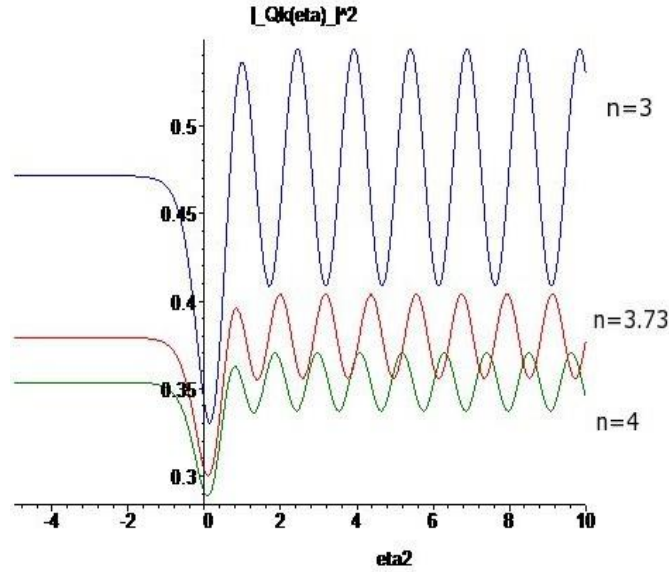


Figura 16.1: Amplificação das perturbações tensoriais com $a_0 = 1$.

A amplificação das perturbações pode ser vista no gráfico, para diferentes valores de n . Notamos que quanto menor o valor de n , maior a amplificação pelo potencial do ricochete

O espectro obtido pode ser visto no gráfico a seguir. Novamente, como no caso escalar, nas regiões onde n é pequeno, podemos notar um comportamento que não segue uma lei de potência.

Não temos a intenção aqui de comparar com as observações, já que o modelo com ricochete geométrico não possui matéria. Estamos interessados em apresentar o método Quasi-Maxwelliano para tratar as perturbações e a aplicação nesse modelo em particular, nos permite tratar as equações de forma analítica.

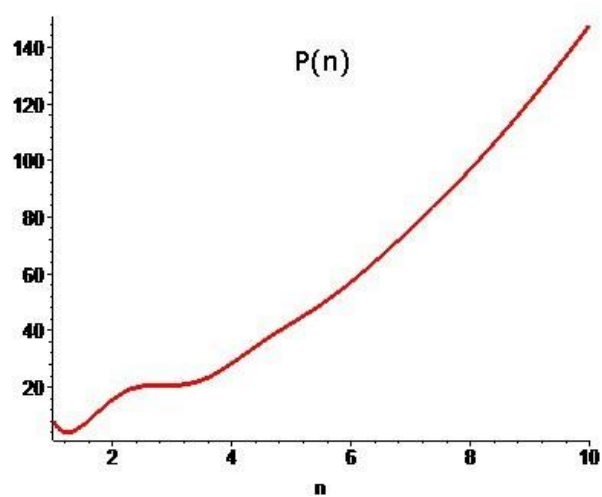


Figura 16.2: Espectro para as perturbações tensoriais com $a_0 = 1$.

Capítulo 17

Lei de Balanço

Neste capítulo, desejamos obter o balanço de energia para o caso de ondas gravitacionais descritas através das equações Quasi-Maxwellianas da gravitação.

Na literatura, muito se tem discutido sobre a própria definição de energia das ondas gravitacionais [44]. Neste capítulo, levando-se em conta a aproximação linear, demonstramos de maneira formal o que representa a energia do sistema e qual a sua correta interpretação.

Antes de prosseguir com o caso de ondas gravitacionais, faremos uma breve introdução do balanço de energia para o campo eletromagnético.

17.1 Campo eletromagnético

No formalismo tensorial, o campo eletromagnético pode ser representado por um tensor antissimétrico $F^{\mu\nu}$, conhecido como tensor de Maxwell. No espaço-tempo de Minkowski, ou seja, no vácuo, as equações dinâmicas para o campo eletromagnético são dadas por:

$$F^{\mu\nu}_{//V} = J^\mu \quad (17.1)$$

$$*F^{\mu\nu}_{//V} = 0. \quad (17.2)$$

A trajetória de uma partícula, com carga e , massa m e velocidade V^α nesse campo é dada pela equação:

$$\frac{DV^\alpha}{DS} = \frac{e}{m} F_{\beta}^{\alpha} V^\beta. \quad (17.3)$$

Consideramos um observador estático que se move com quadrivelocidade U^μ comovetemente com o referencial da partícula no campo eletromagnético. Em relação a esse observador, podemos decompor o tensor de Maxwell em partes elétricas E_α e magnéticas B_α como

$$F_{\alpha\beta} = E_{[\alpha} U_{\beta]} + \eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} U_\mu B_\nu. \quad (17.4)$$

Escrevendo em componentes cartesianas e tomando $U^\mu = \delta^\mu_0$,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.5)$$

reobtemos as equações de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (17.7)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (17.8)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (17.9)$$

Daqui em diante, por simplicidade, vamos considerar as constantes $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$.

Multiplicando a equação (17.9), por $\mathbf{E}$, temos

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (17.10)$$

O lado direito dessa equação expressa a taxa de trabalho por unidade de volume exercido pelo campo sobre a corrente. Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} \quad (17.11)$$

e a lei de Faraday

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (17.12)$$

podemos escrever

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}). \quad (17.13)$$

Substituindo esse resultado na equação (17.10), obtemos a equação que representa a conservação de energia para esse sistema físico:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (17.14)$$

Podemos definir uma quantidade

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (17.15)$$

representando a densidade de energia do campo e

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (17.16)$$

representando o fluxo de energia. Com essas quantidades definidas, podemos escrever (17.14) de uma maneira mais elegante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (17.17)$$

que é a equação de conservação de energia para o campo eletromagnético.

No caso em que o Universo contém matéria, como ocorre com o Universo de Friedmann, o observador ainda que comovente, está em expansão em relação ao referencial da partícula no campo eletromagnético. A equação de conservação deve ser generalizada, levando-se em conta termos representando a expansão.

A velocidade do observador num referencial comovente é dada por:

$$V_\mu = \delta_\mu^0 \quad (17.18)$$

e seu gradiente

$$V_{\mu/\alpha} = \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\alpha}. \quad (17.19)$$

Nesse referencial, as equações de Maxwell são dadas por

$$\dot{\mathbf{E}}_{\alpha} + \frac{2}{3}\theta\mathbf{E}_{\alpha} + \eta_{\alpha}{}^{\beta\rho\sigma}V_{\rho}\mathbf{B}_{\sigma//\beta} = h_{\alpha}{}^{\mu}j_{\mu} \quad (17.20)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_{\alpha} + \frac{2}{3}\theta\mathbf{B}_{\alpha} - \eta_{\alpha}{}^{\beta\rho\sigma}V_{\rho}\mathbf{E}_{\sigma//\beta} = 0 \quad (17.21)$$

$$\mathbf{E}^{\alpha}{}_{//\alpha} = \rho \quad (17.22)$$

$$\mathbf{B}^{\alpha}{}_{//\alpha} = 0 \quad (17.23)$$

onde definimos $(\dot{}) \equiv (\dots)_{//\alpha}V^{\alpha}$.

Como no caso do referencial estático, multiplicamos a equação (17.20) por $\mathbf{E}_{\alpha}$ e (17.21) por $\mathbf{B}_{\alpha}$, podemos escrever a equação de conservação de energia (17.10) para o caso vetorial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha} + \mathbf{B}^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha})' + \frac{2}{3}\theta(\mathbf{E}^{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha} + \mathbf{B}^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha}) + \\ \nabla_{\alpha}\eta^{\beta\alpha\rho\sigma}V_{\rho}\mathbf{E}_{\beta}\mathbf{B}_{\sigma} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{\alpha} \end{aligned} \quad (17.24)$$

ou seja:

$$(u^2)' + \frac{4}{3}\theta(u) + 3 \nabla_{\alpha}S^{\alpha} = -\mathbf{J}^{\square} \cdot \mathbf{E}^{\square} \quad (17.25)$$

com u e $\mathbf{S}^{\square}$, dados por (17.15) e (17.16) respectivamente.

Interpretando ondas eletromagnéticas como um fluido ¹, podemos notar que o termo contendo $\theta(u)$ pode ser associado com $(\rho+p)\theta$, levando a uma equação de estado $p = \frac{1}{3} \rho$.

Comparando o resultado obtido em (17.25), com o resultado obtido no caso de um observador estático (17.17), observamos que aparece o trabalho feito pela pressão $p = \frac{1}{3} \rho$ para variar o volume.

3

17.2 Campo Gravitacional

Para realizar a lei de balanço para ondas gravitacionais², vamos representar o campo gravitacional pelo tensor de Weyl

$$W^{\alpha\beta\mu\nu} = (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma}\eta^{\beta\nu\tau\epsilon} - g^{\alpha\mu\lambda\sigma}g^{\beta\nu\tau\epsilon})V_\lambda V_\tau E_{\sigma\epsilon} + (\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma}g^{\beta\nu\tau\epsilon} + g^{\alpha\mu\lambda\sigma}\eta^{\beta\nu\tau\epsilon})V_\lambda V_\tau H_{\sigma\epsilon} \quad (17.26)$$

na formulação Quasi-Maxwelliana da gravitação. Como visto anteriormente, no regime linear, as equações perturbadas em um espaço-tempo de fundo conformalmente plano, homogêneo e isotrópico em expansão, são dadas por:

¹O fluido possui equação de conservação $\dot{\rho} + (\rho + p)\theta - \dot{V}_\mu q^\mu + q^\nu{}_{//\nu} + V_\mu \pi^{\mu\nu}{}_{//\nu} = 0$. É possível fazer a associação entre as densidades de energias $\rho \rightarrow u$ e os termos contendo fluxo de calor q_μ e pressão anisotrópica $\pi^{\mu\nu}$ com a divergência do vetor de Poyting $\nabla_\alpha S^\alpha$.

²É preciso lembrar que, como estamos tratando de ondas gravitacionais, $\delta T^m_{\mu\nu} \equiv 0$, ou seja, não existe perturbação de matéria.

$$\frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_{\mu\tau} V_{\epsilon\lambda} \delta E_{\gamma\nu} h_{\lambda} - \frac{1}{2} (\delta H_{\lambda})_{//\tau} h^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_{\gamma} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma^{\alpha\beta} \quad (17.27)$$

$$\frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_{\mu\tau} V_{\epsilon\lambda} \delta H_{\gamma\nu} h_{\lambda} - \frac{1}{2} (\delta E_{\lambda})_{//\tau} h^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_{\gamma} = 0 \quad (17.28)$$

$$(\delta H_{\alpha\mu})_{//\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = 0 \quad (17.29)$$

$$(\delta E_{\alpha\mu})_{//\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (\delta \rho)_{,\alpha} h^{\alpha\epsilon} - \frac{1}{3} \rho (\delta V^{\epsilon}) - \frac{1}{3} \rho_{,0} (\delta V^0) V^{\epsilon}. \quad (17.30)$$

No formalismo Quasi-Maxwelliano da gravitação, como o próprio nome já diz, é possível fazer a associação entre a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl com a parte elétrica e magnética do tensor de Maxwell: $E_{\alpha\beta} \rightarrow E_{\alpha}$ e $H_{\alpha\beta} \rightarrow B_{\alpha}$.

De maneira análoga ao caso eletromagnético, podemos multiplicar a equação (17.27) por $E^{\alpha\beta}$ e (17.28) por $H_{\alpha\beta}$ e obter:

$$\frac{1}{2} (E^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta})' + \theta (E^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}) + \nabla_{\alpha} \eta^{\beta\alpha\rho\sigma} V_{\rho} E_{\beta\lambda} H^{\lambda}_{\sigma} = -\frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \quad (17.31)$$

$$\frac{1}{2} (H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta})' + \theta (H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}) + \nabla_{\alpha} \eta^{\beta\alpha\rho\sigma} V_{\rho} H_{\beta\lambda} E^{\lambda}_{\sigma} = 0 \quad (17.32)$$

Neste caso, podemos definir uma densidade de energia $u = \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$, com

$$E^2 = E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} \quad (17.33)$$

e

$$H^2 = H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (17.34)$$

Através da equação de conservação (17.10), generalizada para o caso tensorial, podemos escrever a equação de conservação:

$$(u^2)' + 2\theta(u) - \nabla_{\alpha} \eta^{\alpha\epsilon\lambda\nu} H^{\rho} E_{\rho\epsilon} u_{\lambda} = -J^{\epsilon\rho} \cdot E_{\epsilon\rho}, \quad (17.35)$$

onde a corrente é dada por:

$$J^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\delta\sigma^{\alpha\beta}. \quad (17.36)$$

Na equação de conservação (17.35), podemos notar que o termo associado a expansão θ difere do caso eletromagnético, ou seja, a equação de estado correspondente a interpretação de ondas gravitacionais como fluido é dada

no caso de ondas eletromagnéticas por $p = \rho$, ao invés de $p = \frac{1}{3}\rho$. Logo, sugere-se que, embora as ondas eletromagnéticas e ondas gravitacionais, possuam a mesma velocidade de propagação c , elas possuem equações de estado diferentes.

Precisamos agora, reinterpretar corretamente o termo $J^{\epsilon\rho} E_{\epsilon\rho}$, que representa o trabalho exercido pelo campo gravitacional.

Sabemos que o trabalho de um campo gravitacional quasi-local em uma distribuição de matéria³ é obtido a partir da equação para o desvio geodético

$$\frac{DZ^\alpha}{DS} = R^\alpha_{\eta\xi\gamma} V^\eta V^\gamma Z^\xi. \quad (17.37)$$

No caso em que não existe perturbação de matéria em primeira ordem, a equação $u = {}^1(E^2 + B^2)$ se reduz à

$$\frac{DZ^\alpha}{DS} = E^\alpha_\xi Z^\xi, \quad (17.38)$$

ou seja, a parte elétrica do Tensor de Weyl é responsável por uma força quasi-local dada por $F^\alpha = E^\alpha Z^\beta$.

Multiplicando essa equação por $\dot{Z}^\alpha = \frac{DZ^\alpha}{DS}$ obtemos:

$$Z^\alpha g_{\alpha\beta} \frac{D^2 Z^\beta}{DS^2} = E^\beta_\gamma Z^\gamma g_{\alpha\beta} \dot{Z}^\alpha \quad (17.39)$$

com $\dot{Z}^\alpha = U^\alpha_{\beta} Z^\beta$.

Como estamos considerando apenas perturbações tensoriais, temos $\delta U^\alpha_{\beta} = \delta\sigma_{\alpha\beta}$. A equação (17.39) é escrita como

$$\frac{1}{2} \frac{D}{DS} (Z^\alpha g_{\alpha\beta} \dot{Z}^\beta) = -Z_\beta \delta E^\beta_\gamma \delta\sigma^\gamma_\alpha Z^\alpha \quad (17.40)$$

e como estamos tratando do trabalho executado pelo campo gravitacional em uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica em um espaço igualmente homogêneo e isotrópico, podemos usar que

³A generalização do desvio geodético de uma partícula para uma distribuição de matéria é direta. Nesse último caso, o desvio geodético representa a distância entre duas curvas de congruência do fluido.

$$Z^\alpha Z^\beta = \frac{\langle Z^2 \rangle}{3} h_{\alpha\beta} \quad (17.41)$$

obtendo

$$\frac{D}{DS} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{Z}^\beta \dot{Z}^\alpha \right) = -\frac{1}{2} \delta E_{\alpha\beta} \delta \sigma^{\alpha\beta} \langle Z^2 \rangle. \quad (17.42)$$

Esse resultado nos mostra que a própria geometria, aqui representada pela parte elétrica do tensor de Weyl, produz uma variação na energia cinética relativa entre partículas vizinhas.⁴

⁴Comunicação particular J.M.Salim, ICRA/CBPF.

Capítulo 18

Conclusão

Neste trabalho, investigamos a evolução dinâmica para as flutuações da geometria em um modelo com ricochete geométrico e exemplificamos o uso do formalismo Quasi-Maxwelliano da gravitação para tratar as perturbações escalares e tensoriais. Contrariamente o que acontece com outros formalismos invariantes de calibre baseado em perturbações do tensor métrico, o formalismo usado neste trabalho possui uma variável bem definida através de um ricochete. Além disso, as variáveis que representam as perturbações, são observáveis físicos com interpretação direta. O método aplicado em um modelo com ricochete geométrico nos permite obter uma solução analítica. Obtemos um espectro tanto para o caso escalar quanto para o caso tensorial que não obedece uma lei de potência para valores pequenos de n . O balanço de energia foi feito para o caso tensorial no formalismo Quasi-Maxwelliano e foi mostrado que as variáveis E e H descrevem consistentemente a energia da onda gravitacional na aproximação linear.

Referências Bibliográficas

- [1] M.Novello, *O que é cosmologia?* (1ª edição- Jorge Zahar Editor,(2006).
- [2] G.Ellis,H. Elst, Cargèse Lectures (1998), encontrado em astro-ph/0602280v2,(2006).
- [3] Steven Weynberg- *Gravitation and Cosmology*, (Wiley - 40ª edição, 1976).
- [4] S W Hawking and G F R Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press,Cambridge, 1973).
- [5] R M Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [6] P. Jordan, J. Ehlers e W. Kundt, Akad. Swiss. Mainz. Abh. Math-Nat. Kl. Jahg.,n.2,(1960).
- [7] A. Guth, Phys. Rev. D 23, 347 (1981);
- [8] M. Novello, S.E.Perez Bergliaffa, Physical Reports **463**127-213, (2008).
- [9] PETER Patrick; PINTO-NETON Nelson; Physical review. D. vol. 78 (2008).

- [10] Novello, M.; Oliveira, L. A. R.; Salim, J. M.; Elbaz, E., International Journal of Modern Physics D, Volume 1, Issue 03-04, pp. 641-677 (1992).
- [11] Theories Relativistes de la Gravitation et de l'electromagnetisme. Ed. Masson, Paris (1994).
- [12] J.M. Salim, Monopolos Gravitacionais, Tese de Mestrado CBPF (1976).
- [13] N. Souza, S.E.P Bergliaff a, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 04, pp. 011 (2007).
- [14] G.F.R.Ellis, M. Bruni, Phys.Rev.D **40**, v.6 (1989).
- [15] E.Lifshitz,Zh. Eksp. Teor. Fiz. **16**,587 (1946).
- [16] E.Lifshitz, e I. Khalatnikov, Adv. Phys. **12**,185 (1963).
- [17] Prog. Theo. Phys. Supp., **78**, 1 (1984).
- [18] S.W.Hawking,Ap.Journal 145,544,(1996).
- [19] J.M.Salim,V. Mendez,D. Pavon, Class. Quantum Grav., **14**,77-85, (1997).
- [20] J.Bardeen,Phys. Rev. D 22(1982).
- [21] M.Novello,J.Salim,M.C.Mota da Silva,S.E.Jorás e R.Klippert,Phys.Rev. D 51, 450-461 (1995).
- [22] V.Mukhanov,H.A.Feldmann e R.H.Brandenberger,Phys. Report,**215**, v.5 e 6,203-333,(1992).
- [23] Stephen W. Goode,Phys.Rev. D 22,1882,(1980).

- [24] Perturbações Escalares no Universo de Friedman-Robertson-Walker, S.Jorás, Tese de Mestrado -CBPF, (1994).
- [25] P.Coles e F.Luchin, *Cosmology-The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley-2^a edição, (2002).
- [26] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge -1^a edição, (2005).
- [27] V. Mukhanov and S.Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge (2007).
- [28] M. Campista, J. M. Salim, M. Novello, *International Journal of Modern Physics A*, aceito para publicação (2010).
- [29]
- [30] J.H.Taylor, *Noble Lecture: Binary Pulsars and Relativistic Gravity*, *Rev. Mod. Phys.*, 711-719 (1994)
- [31] Curt Cutler e Kip.S.Thorne et al., *An overview of gravitational-wave sources*- arXiv:gr-qc/0204090v1
- [32] Daniel Sigg, *Gravitational Waves*, Publication LIGO-P98007-00-D
- [33] C.J.Hogan, *Phys. Rev. Letters* **B133**, 172 (1983).
- [34] C.J.Hogan, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **218**, 629 (1986).
- [35] E.Witten, *Phys. Rev. D* **30**, 272 (1984).
- [36] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **121**, 263 (1985).

- [37] F.R.Bouchet,P.Peter,A. Riazuelo and M. Sakellariadou,Phys.Rev.D**65**, 021301 (2001).
- [38] S.Sarangi and S.H.Tye,Phys.Letters **B536**, 185 (2002).
- [39] T.Damour and A.Vilenkin,Phys.Rev.Letters **85**, 3761(2000).
- [40] T.Damour and A.Vilenkin,Phys.Rev.D**64**, 064008(2001).
- [41] X.Martin and A Vilenkin,Phys.Rev.Letters **77**, 2879 (1996).
- [42] R.R.Caldewell and B.Allen,Phys.Rev. **D54**, 3447 (1992).
- [43] M.NOVELLO,L.A. OLIVEIRA,J.M. SALIM,E. ELBAZ, *International Journal of Modern Physics C* , v.1, n. 3 e 4, p. 641-677, (1992).
- [44] Zakharov V.D., Gravitational Waves in Einstein's Theory (1973).