

Tese de  
Doutorado

# Transições de fase fluorescente-superradiante em modelos de spin-boson

Martin Jesus Aparicio Alcalde

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, Fevereiro de 2010.

## Resumo

Nessa tese estudamos dois tópicos distintos. O primeiro tópico que abordamos tratou de campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas que confinam o campo. Bekenstein mostrou que existe uma cota superior para entropia específica de sistemas físicos nessa situação. Investigamos uma generalização a desigualdade de Bekenstein. O sistema físico estudado consistiu de um campo escalar real com auto-interação do tipo  $g\varphi^p$  no regime de acoplamento forte. O segundo assunto correspondeu a aplicação de métodos funcionais em modelos que são utilizados na ótica quântica. Uma transição de fase de segunda ordem do tipo fluorescente-superradiante foi investigada nos quatro seguintes modelos: o modelo de Dicke generalizado, o modelo de Chang-Chakravarty, o modelo de Dicke com acoplamento entre os átomos e o sistema bosônico dependente da intensidade e finalmente o modelo de Dicke onde consideramos uma interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos.

## Abstract

In this thesis we studied two distinct topics. The first one deals with confined quantized field by the presence of macroscopic structures. Bekenstein shown that there is an upper bound in the specific entropy in systems with such conditions. We investigated a generalization to the Bekenstein bound. We studied a real self-interacting  $g\varphi^p$  field in the strong coupling regime. The second subject consists of application of functional methods in quantum optics. A second order phase transition, fluorescent-superradiation, was investigated. The thermodynamics of the fluorescent-superradiation phase transition was investigated in the following four models: The full Dicke model, the Chang-Chakravarty model, the intensity dependent coupling constant model and finally the full Dicke model where we included a dipole-dipole interaction between the atoms.

*Aos meus pais*

## Agradecimentos

- Em primeiro lugar eu gostaria de agradecer ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas e ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter pela orientação e o conhecimento compartilhado em todo este período.
- A minha família e Juliana, pelo amor, paciência e apoio oferecidas durante este tempo.
- Agradeço também aos meus colegas e amigos, Gabriel Menezes, André de Lemos, Enrique Arias pelas interessantes discussões que tivemos nos trabalhos feitos em colaboração.
- A todas as outras pessoas do CBPF que me ajudaram direta ou indiretamente.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A entropia específica para campos com interação</b>	<b>17</b>
2.1	A expansão perturbativa para um acoplamento forte numa teoria es- calar com auto-interação . . . . .	17
2.2	A integral funcional de valor independente e a função zeta-espectral .	20
2.3	A entropia específica para a teoria $(g_0 \varphi^p)_d$ acoplada fortemente . . .	27
<b>3</b>	<b>A transição de fase fluorescente-superradiante</b>	<b>39</b>
3.1	Descrição hamiltoniana: sistema de dois níveis interagindo com campo bosônico . . . . .	39
3.2	O espaço de Hilbert do modelo de Dicke fermiônico . . . . .	46
3.3	A integração funcional para o modelo de Dicke fermiônico generalizado	51
<b>4</b>	<b>Modelo de Chang e Chakravarty</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Modelo de Dicke com acoplamento dependente da intensidade</b>	<b>73</b>

6	Modelo de Dicke generalizado considerando a interação do tipo dipolo-dipolo	79
7	Conclusões	91
A	Demonstração de que o valor da função zeta espectral se anula na origem do plano complexo $s$ , i.e., $\zeta_D(s) _{s=0} = 0$	95
B	A representação de Klauder para o gerador funcional de valor independente	99

# Capítulo 1

## Introdução

Nesta tese estudaremos dois tópicos distintos. O primeiro trata de campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas que confinam o campo. Bekenstein mostrou que existe uma cota superior para entropia específica de sistemas físicos nessa situação. Investigamos uma generalização a desigualdade de Bekenstein. O sistema físico estudado consiste de um campo escalar real com auto-interação do tipo  $g\varphi^p$  no regime de acoplamento forte. O segundo assunto corresponde a aplicação de métodos funcionais em ótica quântica. Uma transição de fase de segunda ordem do tipo fluorescente-superradiante é investigada nos quatro seguinte modelos: o modelo de Dicke generalizado, o modelo de Chang-Chakravarty, o modelo de Dicke com acoplamento entre os átomos e o sistema bosônico dependente da intensidade e finalmente o modelo de Dicke onde consideramos uma interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos.

Campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas introduzem situações

bastante interessantes. Um exemplo é a existência de uma desigualdade entre quantidades físicas relacionando a entropia e a energia média de um sistema quantizado com comprimento linear associado as fronteiras que confinam o sistema. Essa desigualdade proposta por Bekenstein reflete uma condição de consistência entre termodinâmica de buracos negros e as leis da mecânica estatística. Assim vamos rapidamente discutir a física de buracos negros. Consideremos uma estrela composta de matéria com uma estrutura interna, a qual colapsa para formar um buraco negro estacionário. O teorema que diz que o buraco negro não tem cabelos, estabelece que o estado final do buraco negro está caracterizado unicamente pela massa, o momento angular e a carga elétrica do sistema. Neste processo físico de colapso, independentemente da estrutura que possua inicialmente o sistema, o estado final sempre será o mesmo. Por outro lado, Hawking [1] apresenta o teorema da área o qual estabelece que a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca decresce com o transcorrer do tempo. Este resultado levou Bekenstein [2] a formular que as leis da termodinâmica do buraco negro, onde identifica a entropia do buraco negro sendo proporcional a área do horizonte de eventos. Esta é a segunda lei generalizada da termodinâmica para buracos negros [3] [4]. Em um trabalho posterior, Hawking [5] determina a constante de proporcionalidade entre a entropia e a área para o buraco negro, i.e.,  $S_{BH} = (1/4)A$ , isto em unidades de Planck. Quando matéria é absorvida por um buraco negro, ao passar pelo horizonte de eventos, a entropia dessa matéria se perde para um observador que observa o processo de um ponto fora

do horizonte de eventos. Por outro lado, a segunda lei generalizada nos diz que a entropia do conjunto nesse processo não pode diminuir. Portanto a soma da entropia inicial da matéria com a entropia do buraco negro antes da matéria atravessar o horizonte de eventos deve ser menor ou igual que a entropia do buraco negro após ter absorvido aquela matéria. Para que isto sempre aconteça, a entropia de qualquer sistema físico de volume finito e energia finita não pode ser arbitrariamente grande. Seguindo essa linha de raciocínio Bekenstein conjecturou a existencia de um limite superior para a entropia de qualquer sistema físico [6]. Este limite natural estabelece que  $S \leq 2\pi E R/\hbar c$ , sendo que  $S$  e  $E$  são a energia e a entropia média do sistema e  $R$  é o raio da menor esfera que pode circunscrever tal sistema. Sendo que em um buraco negro de Schwarzschild a entropia de Bekenstein, que é proporcional a área do horizonte de eventos, exatamente satura essa desigualdade. Outra conjectura com respeito a entropia da matéria é o chamado “*principio holográfico*” proposto por Gerard 't Hooft [7] [8]. Esta conjectura também preserva a segunda lei generalizada em qualquer processo físico. O principio holográfico nos diz que a informação física de toda matéria contida dentro de um volume  $V$  pode ser projetada na superfície que contém o volume  $V$ . Esta informação projetada na superfície não deve exceder a densidade de informação de um bit por unidade de area de Planck [9]. Nessa tese não discutiremos o princípio holográfico.

Como na dedução original de Bekenstein [6] não aparece em nenhum momento a constante gravitacional, Bekenstein conjecturou que a desigualdade valeria também

para campos na ausência de campos gravitacionais e analisa uma série de exemplos onde este limite seria válido. Sistemas não-relativistas com massa, onde a massa contribui consideravelmente para energia total do sistema se verifica o limite de Bekenstein. Outra situação onde também se verifica esse limite e para o caso da radiação de corpo negro confinado e para campos sem massa e sem interação, como o caso do campo escalar, eletromagnético e neutrino. Após Bekenstein apresentar essa desigualdade, varios exemplos apareceram na literatura tentando invalidar esta conjectura [10] [11] [12] [13]. Nas referências [10] [11] os autores argumentam que em um sistema físico bosônico livre com um número  $N$  suficientemente grande de campos o limite de Bekenstein pode ser violado. Na referência [11] os autores sustentam que devido a existencia de uma força agindo sobre um corpo devido que ele esta acelerado [14] ao ser levado dentro de um buraco negro, ela naturalmente evita a violação da segunda lei generalizada. Esta força é do tipo força de empuxo que exercem os líquidos sobre os corpos quando estão imersos nele. Esse argumento nos remete a situação onde o limite de Bekenstein não é fundamental para preservar a segunda lei generalizada da termodinâmica. Na referência [12] argumentou-se que a desigualdade de Bekenstein não é satisfeita em sistemas físicos a baixas temperaturas. Na referência [13] usa-se o argumento que para sistemas físicos com energia de Casimir negativa o limite de Bekenstein não seria válido. Bekenstein em trabalhos posteriores mostra que esas críticas podem ser refutadas [15] [16] [17] [18]. Com respeito ao problema da proliferação de especies Bekenstein consegue mostrar

que o limite de Bekenstein seria violado se o número de espécies  $N$  é da ordem ou maior que  $\approx 10^9$ . Este número enorme de espécies fisicamente não é observado na natureza, de forma que o argumento seria fisicamente inconsistente. Com respeito a existencia da força do tipo empuxo que faz com que o limite de Bekenstein não seja necessário, pode-se mostrar que em muitos casos esta força é desprezível. Assim teríamos a possibilidade de violar a segunda lei generalizada e portanto o limite de Bekenstein faz-se necessário. No caso de baixas temperaturas onde a energia de Casimir é negativa, deve se considerar necessariamente a presença das placas no sistema, dessa forma a energia em repouso das placas contribuiria consideravelmente de tal forma a se satisfazer o limite de Bekenstein.

Trabalhos posteriores [19] [20] [21] provaram a validade do limite de Bekenstein para outros sistemas físicos. Entre estes sistemas temos o oscilador harmônico da mecânica quântica, rotor rígido e poço potencial. Os autores também analisam sistemas de campos livres elaborando-se uma prova geral no caso de dimensão  $3 + 1$ . Finalmente, com respeito ao limite de Bekenstein, gostaríamos mencionar o resultado de Unruh que argumenta que sistemas como um modo zero também violariam a desigualdade [22]. Esse argumento foi rebatido por Bekenstein e colaboradores [23]. Recentemente apareceu na literatura uma referência onde Bekenstein discute situações controversas com respeito a este limite [18].

Queremos enfatizar que todas as situações, no caso de teorias de campos, descritas anteriormente, correspondem a teorias gaussianas. Um problema que merece

ser estudado é a validade da desigualdade para campos com interação. Como foi enfatizado [20] [24], interações não-lineares poderiam alterar bastante o espectro de energia do sistema confinado, invalidando a desigualdade. Temos duas distintas direções a seguir. A primeira seria investigar sistemas onde uma expansão perturbativa para um acoplamento fraco pode ser utilizada. Como enfatizou Symanzik [25], um procedimento de regularização e renormalização pode ser implementado em qualquer ordem da expansão perturbativa. Uma outra direção é estudar sistemas confinados onde a auto-interação é forte.

Mostraremos nessa tese que podemos generalizar a desigualdade de Bekenstein acima discutida [26] [27], se assumirmos que o sistema em questão está sendo descrito por uma teoria escalar do tipo  $(g_0 \varphi^p)_d$  na presença de estruturas macroscópicas. Devemos também assumir que a auto-interação é forte o suficiente para que usemos a expansão perturbativa para o acoplamento forte. Vamos admitir que o campo escalar está confinado no interior de um hipercubo de aresta  $L$ , e que também está em equilíbrio térmico a temperatura  $\beta^{-1}$ . A energia renormalizada por unidade de comprimento, correspondente ao ponto-zero da teoria livre será representada por  $\varepsilon_d^{(r)}$ . No caso de altas temperaturas podemos mostrar que a entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi$ , onde  $h_1(d)$  e  $h_2(d)$  são funções analíticas do número de dimensões euclidianas  $d$ , e  $\xi = \frac{\beta}{L}$ . Para baixas temperaturas, temos que entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1}}$ . Note que a condição de uma energia do ponto-zero renormalizada positiva é fundamental para que a última

desigualdade seja válida.

Na expansão perturbativa para o acoplamento forte, o problema fundamental é dar sentido operacional ao gerador funcional de valor independente. A solução desse problema foi apresentada por Klauder em várias publicações [28] [29] [30]. Em vez de utilizar uma medida funcional que possui invariância translacional, Klauder utilizou uma medida onde a invariância translacional foi perdida, dada por  $[d\phi] = \prod_x \frac{d\phi(x)}{|\phi(x)|}$ , como enfatizamos anteriormente.

Assumindo que a fonte externa é constante, o gerador funcional de valor independente se transforma na função geradora de valor independente. Até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$  é possível separar  $\ln Z(V, h)$  em duas contribuições. Uma que contém apenas a função geradora de valor independente, e outra que contém a função-zeta espectral. As condições de contorno serão impostas fazendo uso da função zeta espectral [31] [32] [33] [34].

Na segunda parte da tese discutiremos transições de fase em ótica quântica, para ser mais específicos nos modelos do tipo spin-boson. Os modelos de spin-boson, de forma geral, descrevem um conjunto de  $N$  átomos (ou spins) idênticos, todos interagindo simultaneamente com o campo eletromagnético. Como consequência desta interação, os átomos podem absorver ou emitir fótons. Uma forma de acoplarmos apenas alguns modos do campo eletromagnético com os átomos é considerarmos que o sistema está confinado em uma cavidade de grande “Q”. Desta forma, garantimos que apenas alguns dos modos do campo eletromagnético sejam ressonantes com as

diferenças de energia entre os níveis atômicos. Estes átomos excitados podem decair devido às flutuações do campo eletromagnético. Na situação em que os átomos estão suficientemente diluídos, a radiação emitida pelos átomos é do tipo fluorescente, em que a intensidade da radiação é proporcional ao número de átomos  $N$  e o tempo de emissão independente de  $N$ . Ao aumentar suficientemente a densidade dos átomos, pode-se produzir uma radiação de fótons rápida, intensa, coerente e com uma direção espacial bem definida dependente da configuração geométrica dos átomos. Neste caso, a intensidade da radiação chamada na literatura de super-radiância, é proporcional a  $N^2$  e o tempo de emissão é inversamente proporcional a  $N$ . Em princípio, seria natural pensar que para descrever o fenômeno da super-radiância, poderíamos começar estudando este sistema físico com o uso direto da eletrodinâmica e, para descrever os átomos com seus elétrons, um sistema de muitos corpos. No entanto, este estudo é árduo e por este motivo é razoável começar estudando o modelo de Dicke que apresenta certas simplificações que permitem um estudo mais direto e desde já, descreve o fenômeno da super-radiância.

Como já mencionamos anteriormente, na radiação fluorescente a intensidade da irradiação é proporcional a  $N$  e o tempo de emissão independente de  $N$ , e na super-radiância, temos que a intensidade da radiação é proporcional a  $N^2$  e o tempo de emissão é proporcional ao inverso de  $N$ . Desta discussão, concluímos que não devemos considerar os átomos irradiando independentemente um dos outros, pois se assim fosse a radiação deveria ser somente do tipo fluorescente. Isto levou Dicke [35]

a formular o seguinte modelo: consideremos  $N$  átomos de dois níveis fixos e confinados no interior de uma cavidade com volume  $V$ , a separação entre os átomos é tal de forma que podemos desprezar a interação do tipo dipolo-dipolo. Um fato importantíssimo é que as dimensões lineares da região que contém os átomos são menores do que o comprimento de onda monocromático emitidos nas transições atômicas. Como os átomos interagem apenas com um modo do campo eletromagnético eles não podem ser considerados independentes. Com este modelo, Dicke consegue descrever corretamente a super-radiância. A Hamiltoniana do modelo de Dicke é dada por

$$H = \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{(i)}^z + \omega_0 b^\dagger b + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( b \sigma_{(i)}^+ + b^\dagger \sigma_{(i)}^- \right), \quad (1.1)$$

onde as matrizes de Pauli  $\sigma_{(i)}^z$ ,  $\sigma_{(i)}^+$  e  $\sigma_{(i)}^-$  são operadores que geram transições atômicas. O operador  $\sigma_{(i)}^z$  representa o sistema de dois níveis correspondente ao  $i$ -ésimo átomo. Os operadores  $b^\dagger$  e  $b$  estão associados ao único modo do campo bosônico. Na expressão acima  $\Omega$  é a separação energética dos níveis de energia de cada átomo,  $\omega_0$  é a energia do campo bosônico e  $g$  é a constante de acoplamento da interação entre o modo bosônico e os sistemas de dois níveis. Gostaríamos de ressaltar que neste modelo, duas aproximações estão sendo consideradas: a primeira vem a ser dada pela aproximação de dipolo, na interação dos átomos com o campo bosônico; a segunda é a aproximação da onda-girante (RWA), em que se desprezam os termos na Hamiltoniana de interação do tipo  $(b^\dagger \sigma_{(i)}^+)$  e  $(b \sigma_{(i)}^-)$ . Esses termos

geram processos onde não existe conservação de energia em primeira ordem de teoria de perturbação. Convém ressaltar que a contribuição destes termos deve ser considerada ao estudarmos átomos interagindo com campos eletromagnéticos intensos [36].

Uma forma de produzir processos radiativos nos átomos é fazermos incidir radiação eletromagnética sobre eles. Outra forma, seria colocar o sistema em contato com um banho térmico a temperatura  $\beta^{-1}$  (estamos considerando unidades onde a constante de Boltzman  $k_B = 1$ ), e considerarmos o sistema em equilíbrio térmico. Neste último caso a natureza deste fenômeno coletivo da super-radiância corresponde a uma transição de fase de segunda ordem. Hepp e Lieb [37], calcularam de forma exata as propriedades termodinâmicas do modelo de Dicke, especialmente a energia livre do sistema no limite termodinâmico, i.e.,  $N \rightarrow \infty$  e  $V \rightarrow \infty$  entretanto  $N/V < \infty$ . Eles provaram que a partir de certo valor da constante de acoplamento entre os átomos e o campo bosônico, o sistema experimenta uma transição de fase de segunda ordem, com a passagem da fase fluorescênte para a fase superradiante em alguma temperatura crítica. Wang e Hioe [38] usando um conjunto de estados coerentes de Glauber [39], chegaram aos mesmos resultados de forma mais direta. Subseqüentes trabalhos abordam generalizações do modelo de Dicke. Hioe [40] analisou a termodinâmica do modelo de Dicke sem utilizar a aproximação da onda-girante, isto é, ele inclui os termos  $(b^\dagger \sigma_{(i)}^+)$  e  $(b \sigma_{(i)}^-)$  na Hamiltoniana de interação. A importância dos termos ressonantes e não-ressonantes pode ser me-

didamente introduzindo duas constantes de acoplamento distintas na Hamiltoniana de interação. Hioe mostrou como esses termos contribuem para a transição de fase. Neste mesmo trabalho, o autor analisa o modelo de Dicke considerando o comprimento de onda sendo menor do que uma das dimensões lineares da cavidade que contém os átomos. Finalmente estuda o modelo de Dicke em que considera a vibração dos átomos. Pimentel e Zimmerman [41] em um trabalho posterior, estudam os modelos considerados por Hioe [40] utilizando o método de “gap equation” [42]. Estes autores analisaram também o modelo de Thompson, que considera fônons acústicos no modelo de Dicke. Hepp e Lieb [43] estudaram átomos de vários níveis interagindo com o campo de radiação. O caso do sistema com infinitos modos do campo bosônico em que a aproximação da onda-girante é desconsiderada também foi estudado. Queremos ressaltar que Pimentel e Zimmerman [44] utilizando o método de “gap equation” também estudam este modelo de Dicke sem a aproximação de dipolo e, no caso do sistema ter um número muito grande de modos do campo bosônico.

Diferentes métodos matemáticos foram utilizados para abordar tais problemas na literatura. Por exemplo, alguns autores [45] [46] utilizaram o mapa de Holstein-Primakoff [47] no modelo de Dicke, o qual transforma as matrizes de Pauli em operadores bosônicos sem alterar a descrição do modelo. Holstein e Primakoff [47] já aplicavam esta transformação em modelos ferromagnéticos. Outra transformação dos operadores de spin para operadores bosônicos é a transformação de Dyson-Maleev [48] [49]. Estas duas transformações anteriormente citadas, são bosonizações,

pois mapeiam os operadores de spin em operadores bosônicos. No entanto, é possível fermionizar o modelo, ou seja implementar uma transformação entre os operadores de spin do modelo e operadores fermiônicos. Um mapa muito utilizado é o mapa de Jordan-Wigner [49] [50] [51] [52]. Outra transformação deste tipo foi implementada por Popov e Fedotov [53]. Esses autores substituem os operadores de spin por combinações bilineares de operadores fermiônicos. O modelo de Heisenberg e o modelo de Dicke no limite termodinâmico, isto é,  $N \rightarrow \infty$  também são estudados por eles que trabalharam utilizando o formalismo de integrais funcionais no tempo imaginário [54], calculando a função de partição do sistema, as funções de Green e o espectro do condensado bosônico.

Nessa tese apresentaremos o estudo de fenômenos críticos para quatro modelos do tipo spin-boson [27] [55] [56] [57]. Nesse caso, utilizando o método implementado por Popov e Fedotov [53]. O primeiro dos modelos a estudar corresponde ao modelo de Dicke completo, no qual não se considera a aproximação da onda-girante e o limite termodinâmico foi utilizado. Similarmente ao trabalho de Hioe [40] nesse primeiro modelo [55], foram incluídos os termos  $(b^\dagger \sigma_{(i)}^+)$  e  $(b \sigma_{(i)}^-)$  com uma constante de acoplamento distinta daquela utilizada para os termos ressonantes. Foi possível reproduzir o valor da temperatura crítica obtida por Hioe. Neste trabalho, além de ser obtida a temperatura crítica do modelo, se obtém o espectro do condensado bosônico aparecendo uma contribuição devido aos termos não-ressonantes. Na referência [56] estuda se outros dois modelos, um deles é o modelo de Chang-Chakravarty em que a

interação entre os átomos e os bósons é do tipo  $g \sum_i^N (b^\dagger + b) \sigma_i^z$ , sendo ele também um termo que não conserva energia na primeira ordem em teoria de perturbações. Este tipo de interação foi estudada por Chang e Chakravarty [58] mas no caso de um único átomo. Como resultado neste trabalho [56], se obteve que o modelo de Chang-Chakravarty no limite termodinâmico não apresenta transição de fase fluorescente super-radiante. Neste modelo o modo zero contribui com valores negativos para a entropia e energia no caso de temperaturas baixas. Para contornar este problema podemos elegir entre duas alternativas: a primeira consiste em desconsiderar o modo zero e a segunda em colocar um limite superior na constante de acoplamento do modelo. O terceiro modelo estudado também nesta referência, corresponde ao modelo de Dicke generalizado em que se considera a dependência na intensidade da radiação no termo que conserva energia. Este modelo é estudado a temperatura zero, encontrando uma transição de fase. O quarto modelo [57], corresponde ao modelo de Dicke generalizado no qual se inclui a interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos, sendo o caso em que esta interação é de alcance infinito. O propósito era analisar a dependência da transição de fase, devido à inclusão do termo de interação dipolo-dipolo. Como resultado desta inclusão, se tem que a temperatura crítica para transição de fase não muda, nem o espectro do condensado bosônico.

Todos estes modelos são de grande interesse para a ótica quântica e a informação quântica [59], onde o estudo da interação da matéria com o campo eletromagnético no nível quântico adquire importância fundamental. O análogo aos bits na in-

formação clássica, na informação quântica são os qubits. Os bits tomam dois valores bem determinados, no entanto, os qubits são estados quânticos que pertencem a um espaço de Hilbert bi-dimensional. Devido aos princípios da mecânica quântica, um conjunto de  $N$  qubits, diferente a um conjunto de  $N$  bits, pode estar em um estado físico chamado de estado emaranhado o qual não possui um equivalente clássico. Os algoritmos utilizados para processar informação via estes sistemas quânticos de qubits, utilizam portas lógicas para a qual os estados de qubits emaranhados são necessários. Estes algoritmos quânticos são de utilidade na criptografia e na implementação do computador quântico. O modelo de Dicke na informação quântica, serve como modelo para o sistema físico de qubits, neste caso os  $N$  átomos representariam os  $N$  qubits e o campo eletromagnético seria responsável para controlar o estado dos qubits.

Como já se sabia desde o trabalho de Dicke [35], o fenômeno da super-radiância é causado pela correlação dos átomos entre si. No estudo de sistemas puros existe uma conexão de estados correlacionados com estados emaranhados, então nesses casos, a relação entre a super-radiância e o emaranhamento do sistema é direta. Nas referências [60] [61] se estuda a correlação e a super-radiância no modelo de Dicke no caso de dois átomos. A literatura tem sugerido que pode haver uma relação entre transições de fase e o máximo emaranhamento em sistemas de muitos corpos. Para o modelo  $XY$  de uma cadeia de spins, foi achado uma relação da transição de fase com o máximo emaranhamento do sistema [62] [63] [64]. Máximo emaranhamento é

estudado no modelo de Dicke e também em outros modelos do tipo spin-bóson [65] [66]. No modelo de Dicke generalizado que inclui a interação do tipo dipolo-dipolo estudado nessa tese [57], se pretendia mostrar que os estados emaranhados, que surgem devido a interação do tipo dipolo-dipolo, poderiam as propriedades críticas do sistema.

Para finalizar, pretendemos discutir rapidamente as transições de fase quânticas. As transições de fase acontecem normalmente na presença das flutuações térmicas, mas também existem transições de fase que são geradas apenas por flutuações quânticas. A literatura chamou-as de transição de fase quântica [49], em que as flutuações quânticas adquirem relevância. Tanto o modelo de Dicke, como o modelo de Dicke completo apresentam transição de fase quântica. Outro conceito estudado corresponde ao caos, em que o modelo de Dicke semiclássico apresenta comportamento caótico [67], o que leva à suposição de que na versão quântica do modelo exista também caos, chamado de caos quântico [68]. Estas análises de caos também foram feitas para o modelo de Dicke completo [69] [70]. Trabalhos recentes de Emary e Brandes [71] [72] estudam a relação entre a transição de fase quântica e o caos quântico no modelo de Dicke. Estes autores encontraram que no limite termodinâmico a transição de fase quântica acontece com a aparição de caos quântico.

Ao longo desta tese, utilizaremos o sistema de unidades natural, qual seja,  $\hbar = c = k_B = G = 1$ .



## Capítulo 2

# A entropia específica para campos com interação

### 2.1 A expansão perturbativa para um acoplamento forte numa teoria escalar com auto-interação

Vamos estudar um campo escalar neutro com uma auto-interação do tipo  $(g_0 \varphi^p)$ , definido em um espaço euclidiano  $d$ -dimensional. A contribuição para a ação que vem do termo de auto-interação é dada por

$$S_I(\varphi) = \int d^d x \frac{g_0}{p!} \varphi^p(x). \quad (2.1)$$

Como já discutimos anteriormente, a idéia básica da expansão perturbativa para um acoplamento forte é tratar a parte gaussiana da ação como uma perturbação com respeito aos outros termos no gerador funcional das funções de Schwinger. Vamos assumir que o campo escalar está definido num espaço euclidiano compacto, com ou

sem fronteiras, com um volume  $V$ . Vamos também supor que existe um operador elíptico, semi-positivo e auto-adjunto que age sobre funções escalares nesse espaço. Um exemplo padrão é o operador  $O$  definido por  $O = (-\Delta + m_0^2)$ , onde  $\Delta$  é o laplaciano  $d$ -dimensional. O núcleo  $K(m_0; x, y) \equiv K(m_0; x - y)$  é definido por

$$K(m_0; x - y) = (-\Delta + m_0^2) \delta^d(x - y). \quad (2.2)$$

Vamos usar o fato de que o gerador funcional das funções de Schwinger  $Z[V, h]$  é invariante com respeito a escolha da contribuição quadrática. Vamos então considerar uma modificação da expansão perturbativa para um acoplamento forte. O gerador funcional das funções de Schwinger  $Z[V, h]$  passa a ser definido como

$$\begin{aligned} Z[V, h] &= \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0, \sigma; x - y) \frac{\delta}{\delta h(y)} \right) \\ &\times Q_0[\sigma, h], \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde a nova integral funcional de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$ , é dada por

$$\begin{aligned} Q_0[\sigma, h] &= \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp \left( \int d^d x \left( -\frac{1}{2} \sigma m_0^2 \varphi^2(x) + h(x) \varphi(x) \right) \right) \\ &\times \exp \left( \int d^d x \left( -\frac{g_0}{p!} \varphi^p(x) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

e o núcleo modificado  $K(m_0, \sigma; x - y)$  que aparece na equação (2.3), é definido por

$$K(m_0, \sigma; x - y) = (-\Delta + (1 - \sigma)m_0^2) \delta^d(x - y), \quad (2.5)$$

onde  $\sigma$  é um parametro complexo definido na região  $0 \leq \text{Re}(\sigma) < 1$ . O fator  $\mathcal{N}$  é introduzido para normalizar a teoria onde devemos impor a condição  $Q_0[\sigma, h]|_{h=0} =$

1. Nesse momento vamos passar a considerar  $h(x)$  como uma variável complexa. Para facilitar os cálculos podemos impor  $\text{Re}(h) = 0$ .

Estamos assumindo que o sistema que é espacialmente limitado está em equilíbrio com um reservatório térmico a temperatura  $\beta^{-1}$ . Dessa forma podemos utilizar a expansão perturbativa para um acoplamento forte para computarmos a função de partição do sistema definida por  $Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$ , onde já comentamos que  $h$  é uma fonte externa e estamos definindo o volume da variedade  $(d - 1)$ -dimensional  $V_{d-1} \equiv \Omega$ . Da função de partição definida por  $Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$  podemos encontrar a energia livre do sistema, que vem a ser dada por  $F(\beta, \Omega) = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$ .

A energia média do sistema  $E(\beta, \Omega)$  é definida como

$$E(\beta, \Omega) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}, \quad (2.6)$$

assim como a entropia canônica do sistema  $S(\beta, \Omega)$  espacialmente limitado em equilíbrio com um reservatório térmico

$$S(\beta, \Omega) = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}. \quad (2.7)$$

Na próxima seção vamos repetir o que fizemos quando estudamos o oscilador anarmônico no regime do acoplamento forte. Até ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , vamos escrever  $\ln Z[\beta, \Omega, h]$  como um produto envolvendo a integral funcional de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$  e uma outra contribuição que nos dá informações sobre as condições de contorno que estamos impondo sobre o campo escalar. Este termo está associado a derivada da função zeta espectral.

## 2.2 A integral funcional de valor independente e a função zeta-espectral

Como estamos interessados em calcular a entropia específica de sistemas confinados, apenas quantidades globais são envolvidas nos nossos cálculos. Conseqüentemente podemos assumir que a fonte externa  $h(x)$  é constante. Nessa nova situação chamaremos  $Z(V, h)$  de função geradora. A temperatura zero, até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , podemos escrever

$$\ln Z(V, h) = -\frac{1}{2Q_0(\sigma, h)} \frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h) \int d^d x \int d^d y K(m_0, \sigma; x - y). \quad (2.8)$$

Como estamos assumindo a presença de estruturas macroscópicas que fazem com que o espectro do operador  $D = (-\Delta + (1 - \sigma)m_0^2)$  tenha uma contribuição discreta, um procedimento de regularização analítica pode ser utilizado para controlar as divergências da teoria.

Temos então que  $\ln Z(\beta, \Omega, h)$  pode ser escrito como

$$\ln Z(\beta, \Omega, h) = \frac{1}{Q_0(\sigma, h)} \frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h) \left( -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s) \Big|_{s=0} \right), \quad (2.9)$$

onde  $\alpha$  é uma constante infinita e  $\zeta_D(s)$  é a função zeta espectral, associada ao operador  $D$ .

Vamos considerar a situação onde o sistema é finito em todas as direções espaciais, i.e.,  $x_i \in [0, L]$ ,  $i = 1, 2, \dots, d-1$ . Para a coordenada euclidiana temporal vamos assumir condições periódicas (condições periódicas de Kubo-Martin-Schwinger KMS

[73] [74]) e para as dimensões euclidianas espaciais vamos assumir condições de contorno de Dirichlet. Chamaremos essa última situação de condições de contorno duras. Veja por exemplo [75]. Outras condições de contorno foram discutidas nos trabalhos [76] [77]. A escolha das condições de contorno de Dirichlet permite uma fácil solução para o problema de autovalores de forma que a função zeta espectral associada ao operador  $D$  pode ser facilmente encontrada.

O operador  $D$  tem um espectro dado por  $\lambda_{n_1, \dots, n_d}$  onde

$$\lambda_{n_1, \dots, n_d} = \left[ \left( \frac{n_1 \pi}{L} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n_{d-1} \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{2n_d \pi}{\beta} \right)^2 + (1 - \sigma)m_0^2 \right], \quad (2.10)$$

$n_1, n_2, \dots, n_{d-1}$  são números naturais diferentes de zero enquanto que  $n_d$  são números inteiros. A função zeta espectral associada ao operador  $D$  é dada por

$$\zeta_D(s) = \sum_{n_1, \dots, n_d}^{\infty} \lambda_{n_1, \dots, n_d}^{-s}, \quad (2.11)$$

onde  $s$  é um parâmetro complexo. A série acima converge para  $\text{Re } s > \frac{d}{2}$  e a sua continuação analítica define uma função meromórfica de  $s$ , analítica em  $s = 0$ . Como em todo procedimento de regularização devemos introduzir um parâmetro de massa  $\mu$  para trabalharmos com quantidades adimensionais, de forma que a seguinte transformação pode ser feita, a saber

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right) \zeta_D(s)|_{s=0}. \quad (2.12)$$

É possível mostrar que na situação onde estamos interessados a transformação apresentada acima nos dá uma identidade (ver apêndice A). Primeiramente mostraremos

esse resultado para o caso das dimensões do hipercubo serem muito maiores do que  $\beta$ . A função zeta espectral nessa situação é dada por

$$\zeta_D(s) \equiv \frac{V}{(2\pi)^{d-1}\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}k \frac{1}{\left(\vec{k}^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + (1-\sigma)m_0^2\right)^s}. \quad (2.13)$$

Definindo a quantidade  $\nu^2 = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \left(\vec{k}^2 + (1-\sigma)m_0^2\right)$ , temos que a função zeta espectral passa a ser escrita como

$$\zeta_D(s) = \frac{V}{(2\pi)^{d-1}\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s} \int d^{d-1}k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\nu^2 + n^2)^s}. \quad (2.14)$$

Nesse momento vamos definir a função zeta de Epstein-Hurwitz modificada no plano complexo  $s$ ,  $\zeta(s, \nu)$ , que vem a ser dada por:

$$\zeta(s, \nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + \nu^2)^{-s}, \quad \nu^2 > 0. \quad (2.15)$$

Gostaríamos de salientar que escrevemos a função zeta espectral nessa situação em termos da função zeta de Epstein-Hurwitz modificada. A série definida pela equação (2.15) converge absolutamente e define no plano complexo uma função analítica para  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ . É possível estender analiticamente a função zeta de Epstein-Hurwitz modificada para todo o plano complexo. Na região  $\text{Re}(s) < 1$  a literatura apresenta uma representação integral para a extensão analítica [78] [79]. Para uma diferente representação dessa extensão analítica, escrita em termos das funções de Bessel modificadas  $K_\alpha(z)$ , as funções de Macdonald, veja a referência [80]. Como já enfatizamos, a representação em série de  $\zeta(s, \nu)$  converge para  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$  e a sua extensão analítica define uma função meromórfica de  $s$  que é analítica em

$s = 0$ . A função zeta de Epstein-Hurwitz modificada em todo o plano complexo  $s$  tem polos para  $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ , etc. Não é difícil mostrar que os valores da função zeta de Epstein-Hurwitz modificada  $\zeta(s, \nu)$ , em  $s = 0$  sua derivada  $\frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, \nu)|_{s=0}$  são dados por

$$\zeta(s, \nu)|_{s=0} = 0 \quad (2.16)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, \nu)|_{s=0} = -2 \ln(2 \sinh \pi \nu). \quad (2.17)$$

Dessa forma o parâmetro de massa  $\mu$  não traz nenhuma ambigüidade nessa situação. Esse mesmo resultado foi obtido por Hawking [32]. Para o caso  $d = 4$  e duas somas, utilizando os resultados apresentados por vários autores [78] [79] e [80], pode se mostrar que  $\zeta_D(s)|_{s=0} = 0$ . Novamente o parâmetro de massa  $\mu$  não traz nenhuma ambigüidade nessa situação. Esse resultado pode ser generalizado para outras situações. A função zeta espectral esta relacionada ao núcleo de calor ou operador de difusão por uma transformada de Mellin. O traço do operador de difusão vem a ser a integral da parte diagonal do núcleo de calor sobre a variedade que estamos trabalhando. Se utilizamos uma expansão assintótica da parte diagonal do núcleo de calor, podemos mostrar que a função zeta espectral é uma função meromórfica no plano complexo  $s$ , possuindo polos simples cujos resíduos dependem dos coeficientes  $B_n$ . Por sua vez, esses coeficientes dependem dos coeficientes de Seeley-DeWitt, da segunda forma fundamental das fronteiras e da geometria induzida na fronteira [31]

and [81]. Pode-se mostrar que a estrutura polar da extensão analítica da função zeta espectral numa variedade compacta com fronteiras vem a ser dada por

$$\zeta_D(s) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n - \frac{d}{2} + s} + g_2(s) \right], \quad (2.18)$$

onde  $n$  é um inteiro ou um semi-inteiro. Ademais,  $g_2(s)$  é uma função analítica em  $\mathbf{C}$ . Como foi enfatizado por Blau e colaboradores [82], num espaço-tempo quadridimensional sem curvatura e com partículas sem massa e fronteiras suaves, os coeficientes  $B_2$  se anulam. Mostraremos que na situação que estamos interessados, i.e., um hipercubo onde os campos satisfazem as condições de fronteira de Dirichlet esse coeficiente se anula (apêndice A).

Para prosseguirmos, vamos analisar em (2.9) a contribuição da função zeta espectral associada ao operador  $D$ , quando levamos em consideração as restrições geométricas que as fronteiras impõem sobre o campo escalar. Utilizando o espectro do operador  $D$ , dado pela equação (2.10), e também a definição da função-zeta espectral dada por (2.11), podemos mostrar que a derivada da função-zeta espectral em  $s = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} &= - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln \left( \left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2 + (2\pi n_d)^2 \right) + \\ &\quad - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{a^2 \beta^2}{4n_d^2 L^2 + q^2 \beta^2} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\vec{n}_{d-1} = (n_1, n_2, \dots, n_{d-1})$ ,  $q^2 = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{d-1}^2$  e  $a^2 = \left( \frac{(1-\sigma)m_0^2 L^2}{\pi^2} \right)$ . Queremos ressaltar que na equação (2.19) estamos usando o resultado de que  $\zeta(s, \nu)|_{s=0} = 0$ .

Fazendo uso da identidade [83]

$$\ln\left(\left(\frac{\pi\beta q}{L}\right)^2 + (2\pi n_d)^2\right) = \int_1^{\left(\frac{\pi\beta q}{L}\right)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} + \ln\left(1 + (2\pi n_d)^2\right), \quad (2.20)$$

podemos ver que o primeiro termo do lado direito de (2.19) nos dá uma contribuição divergente. Para prosseguirmos vamos utilizar a seguinte identidade

$$\sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} = \frac{1}{2\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1}\right). \quad (2.21)$$

Utilizando ambas as identidades dadas pelas equações (2.20) e (2.21), é possível expressar a soma dupla que aparece em (2.19) como uma soma simples dada por

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln\left(\left(\frac{\pi\beta q}{L}\right)^2 + (2\pi n_d)^2\right) = \\ & 2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \int_1^{\left(\frac{\pi\beta q}{L}\right)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1}\right) d\theta + \alpha_1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\alpha_1 = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + (2\pi n_d)^2\right)$ . Integrando em  $\theta$ , obtemos que (2.22)

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln\left(\left(\frac{\pi\beta q}{L}\right)^2 + (2\pi n_d)^2\right) = \\ & 2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left(\frac{\pi\beta q}{2L} + \ln\left(1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}\right)\right) + \alpha_2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\alpha_2 = \alpha_1 - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left(1 + 2\ln(1 - e^{-1})\right)$ . Usaremos o fato de que a contribuição divergente dada por  $\alpha_2$  é independente de  $\beta$ , de forma que o uso da terceira lei da termodinâmica eliminará esta contribuição. O primeiro termo do lado direito da

equação (2.23) é uma contribuição divergente correspondente a energia do ponto-zero. Utilizando o conhecido resultado matemático [84] [85] dado por

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{a^2}{n^2 + b^2} \right) = \frac{\sinh^2(\pi \sqrt{a^2 + b^2})}{\sinh^2(\pi b)}, \quad (2.24)$$

podemos escrever o último termo de (2.19) de forma mais simples. Usando as equações (2.23) e (2.24), a derivada da função-zeta espectral associada ao operador  $D$  avaliada em  $s = 0$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} &= -2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \ln \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L} \sqrt{q^2 + a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)} \right) + \\ &-2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[ \ln\left(1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}\right) + \frac{\pi\beta q}{2L} \right] - \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pode-se mostrar que a função geradora de valor independente  $Q_0(\sigma, h)$  satisfaz à condição  $Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = 1$  e também à

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{2p g_0^{\frac{2}{p}} (p!)^{\frac{p}{2}}}. \quad (2.26)$$

A prova das identidades acima mencionadas pode ser encontrada no apêndice  $B$ . Em seguida mostraremos que é sempre possível encontrar um valor máximo para a entropia específica num sistema a altas temperaturas onde um campo escalar com auto-interação se encontra num regime de acoplamento forte. Para o caso de baixas temperaturas ou também temperaturas intermediárias, o sinal da energia de Casimir é fundamental para a existência do valor máximo para a entropia específica.

### 2.3 A entropia específica para a teoria $(g_0 \varphi^p)_d$ acoplada fortemente

Nesta seção, vamos calcular a entropia específica  $\frac{S}{E}$  do sistema. Por simplicidade, vamos definir  $\ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0} = \ln Z(\beta, \Omega)$ . Das equações (2.6) e (2.7), e fazendo as seguintes identificações para a energia média  $E(\beta, \Omega) = E$  e para a entropia  $S(\beta, \Omega) = S$ , temos que

$$\frac{S}{E} = \beta - \ln Z(\beta, \Omega) \left( \frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta, \Omega) \right)^{-1}. \quad (2.27)$$

Levando as equações (2.25) e (2.26) na equação (2.9), temos que  $\ln Z(\beta, \Omega)$  é dado por

$$\ln Z(\beta, \Omega) = - \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{2p (p!)^{\frac{p}{2}} g_0^{\frac{p}{2}}} \left( \frac{\alpha'}{2} + I_2(\beta) \right), \quad (2.28)$$

onde  $\alpha' = \alpha + \alpha_2$  e a quantidade  $I_2(\beta)$  escreve-se:

$$\begin{aligned} I_2(\beta) &= \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \ln \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L} \sqrt{q^2 + a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)} \right) + \\ &+ \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{2L}} \right) + \frac{\pi\beta q}{2L} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Definamos  $C_1$  e  $C_2 = -\frac{2C_1}{\alpha'}$ , que dependem apenas de  $p$  e  $g_0$  e não de  $\beta$ , como sendo:

$$C_1 = - \frac{\alpha' \Gamma(\frac{2}{p})}{4p (p!)^{\frac{p}{2}} g_0^{\frac{p}{2}}}. \quad (2.30)$$

Deste modo, a quantidade  $\ln Z(\beta, \Omega)$  pode ser escrita de uma maneira geral como

$$\ln Z(\beta, \Omega) = C_1 - C_2 I_2(\beta). \quad (2.31)$$

Aproveitamos para aludir ao fato que a quantidade  $C_1$  corresponde a uma expressão divergente,  $C_2$  é finito e o último termo da soma no lado direito da equação (2.25) é proporcional a energia do ponto zero. De modo a renormalizar  $\ln Z(\beta, \Omega)$  podemos utilizar, primeiramente, a terceira lei da termodinâmica. A derivada de  $\ln Z(\beta, \Omega)$  com respeito à  $\beta$  vale

$$\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta, \Omega) = -C_2 \frac{d}{d\beta} I_2(\beta), \quad (2.32)$$

onde a derivada de  $I_2(\beta)$  com respeito à  $\beta$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) &= \frac{\pi}{2L} \sum_{\bar{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( \sqrt{q^2 + a^2} \coth\left(\frac{\pi\beta}{2L} \sqrt{q^2 + a^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - q \coth\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right) + \frac{2q}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}} - 1} + q \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Substituindo as equações (2.31) e (2.32) na definição da entropia (2.7), temos a seguinte expressão para a entropia do sistema

$$S = C_1 - \beta C_2 \left( \frac{I_2(\beta)}{\beta} - \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) \right). \quad (2.34)$$

Esta expressão da entropia deve satisfazer a terceira lei da termodinâmica, i.e., a entropia de um sistema tem a propriedade restritiva  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} S = 0$ . Para continuarmos, vamos analisar o seguinte limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{I_2(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) = \frac{\pi a^2}{2L} \sum_{\bar{n}_{d-1}=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q^2 + a^2} + q} + \frac{\pi}{2L} \sum_{\bar{n}_{d-1}=1}^{\infty} q. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.34) e usando a terceira lei da termodinâmica, chegamos a

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} S = C_1 = 0. \quad (2.36)$$

Portanto, o primeiro passo a se dar para obtermos um resultado finito para  $\ln Z(\beta, \Omega)$  foi alcançado, já que fomos capazes de renormalizar  $C_1$  para zero usando a lei citada anteriormente. Após isso, temos

$$\ln Z(\beta, \Omega) = -C_2 I_2(\beta). \quad (2.37)$$

Note que em  $\ln Z(\beta, \Omega)$  (veja (2.29)) ainda temos a contribuição que vem da energia do ponto zero, a qual é dada por

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Após uma continuação analítica, obtemos a energia renormalizada do ponto zero, definida por  $E_0^{(r)}$ , e, conseqüentemente, um resultado finita para  $\ln Z(\beta, \Omega)$ .

Substituindo a equação (2.37) na equação (2.27), podemos observar que, para o caso  $a = 0$ , i.e., sem massa, o quociente  $\frac{S}{E}$  nos dá

$$\frac{S}{E} = 2\pi R T_d(\xi), \quad (2.39)$$

onde estamos definindo uma variável sem dimensões  $\xi$  dada por  $\xi = \beta/L$ . Devido ao fato que o campo está confinado dentro do hipercubo, o raio da menor esfera  $(d-1)$ -dimensional que circunscreve este sistema deveria ser dado pela expressão  $R = \frac{1}{2}\sqrt{(d-1)}L$ . A função  $T_d(\xi)$ , definida na equação (2.39), é dada por

$$T_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P_d(\xi) + R_d(\xi)}{\varepsilon_d^{(r)} + P_d(\xi)}, \quad (2.40)$$

onde  $\varepsilon_d^{(r)} = LE_0^{(r)}$  e as funções positivas  $P_d(\xi)$  e  $R_d(\xi)$  estão definidas, respectivamente, por

$$P_d(\xi) = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \pi q (e^{\pi \xi q} - 1)^{-1} \quad (2.41)$$

e

$$R_d(\xi) = - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \ln (1 - e^{-\pi \xi q}) . \quad (2.42)$$

Agora, vamos estudar a função  $T_d(\xi)$ , dada por (2.39). O limite quântico vale sempre que  $T_d(\xi) \leq 1$  para todos os valores de  $\xi$ . A partir da definição da função  $T_d(\xi)$ , dada por (2.40), temos que  $T_d(\xi)$  possui um valor divergente apenas quando a energia renormalizada do ponto zero for negativa. Para o ponto  $\xi = \xi_0$ , o qual satisfaz  $\varepsilon_d^{(r)} + P_d(\xi_0) = 0$ , a cota quântica não é legítima.

Cálculos numéricos podem nos ajudar a entender tal cota quântica. Na figura (2.1), apresentamos o gráfico da função  $T_d(\xi)$  para o caso  $d = 3$  sobre o intervalo  $0 < \xi < 2$ . Como a energia renormalizada do ponto zero é positiva [86], a função  $T_d(\xi)$  também será positiva para todos os valores de  $\xi$ . Há um máximo para algum valor de  $\xi$ , que denominamos  $\xi_{max}$ , o qual é perto da unidade. Para este caso, verificamos a existência de uma cota quântica. Na figura (2.2), apresentamos a mesma função  $T_d(\xi)$  para o caso  $d = 4$  sobre o intervalo  $0 < \xi < 2$ . Como neste caso a energia renormalizada do ponto zero é negativa, temos que, para alguns valores de  $\xi = \xi_0$  a função  $T_d(\xi)$  diverge. Há um valor crítico  $\xi_c$  onde, para  $\xi > \xi_c$ , a entropia específica encontra-se sem limite superior.

Vamos investigar dois casos. O primeiro será onde a energia renormalizada do ponto zero é positiva (veja Fig. 2.1), onde um valor máximo para  $T_d(\xi)$  aparece. O segundo caso, com uma energia renormalizada do ponto zero negativa, invalida a cota quântica. Para dimensões do espaço-tempo pares, a energia renormalizada do ponto zero é sempre negativa. Para o caso de espaço-tempo com dimensão ímpar, sabe-se que, para  $d \leq 29$ , esta quantidade é positiva, e para  $d > 29$ , ela muda o seu sinal [87].

Para os casos de energia renormalizada do ponto zero positiva, uma equação para o valor máximo de  $T_d(\xi)$  pode ser encontrada. A equação para o máximo é dada por  $R_d(\xi_{max}) = \varepsilon_d^{(r)} \xi_{max}$ . Substituindo este  $\xi_{max}$  na equação (2.40) podemos achar que  $T_d(\xi_{max}) = \frac{\xi_{max}}{\pi\sqrt{d-1}}$ . Usando o mesmo procedimento na equação (2.39), teremos que  $\frac{S}{E} = \beta_{max}$ , onde  $\beta_{max} = L \xi_{max}$ . Portanto, podemos concluir que, para espaço-tempo com dimensões ímpares  $d \leq 29$ , existe um valor máximo para a função  $T_d(\xi)$ .

Podemos ver que o valor máximo de  $T_d(\xi)$  depende da energia renormalizada do ponto zero, onde, para o caso  $d = 3$ , é menor que um. Para provar que, para  $d \leq 29$  ímpar,  $T_d(\xi)$  satisfaz a desigualdade  $T_d(\xi) < 1$ , vamos definir uma função auxiliar  $R'_d(\xi)$  que satisfaz  $R_d(\xi) < R'_d(\xi)$ . Tal função é dada por

$$R'_d(\xi) = - \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr r^{d-2} \ln(1 - e^{-\pi \xi r}) , \quad (2.43)$$

onde a parte angular da integração  $\Omega_R$  corresponde à região onde  $r_i > 0$ . Efetuando

esta integral [85], teremos que

$$R'_d(\xi) = S_{d-1} \Gamma(d-1) \zeta(d) \left( \frac{1}{\pi \xi} \right)^{d-1}. \quad (2.44)$$

onde o termo angular é  $S_{d-1} = \frac{(\sqrt{\pi})^{d-1}}{2^{d-2} \Gamma(\frac{d-1}{2})}$ . Usando a equação (2.44) na equação para o máximo, i.e.,  $R_d(\xi_{max}) = \varepsilon_d^{(r)} \xi_{max}$ , podemos encontrar que  $\xi_{max} < \xi'_{max}$ , onde

$$\xi'_{max} = \left( \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^{d-1}} \frac{\Gamma(d-1) \zeta(d)}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \varepsilon_d^{(r)}} \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (2.45)$$

e  $T_d(\xi_{max}) < \frac{\xi'_{max}}{\pi \sqrt{d-1}}$ . Na tabela (2.1) apresentamos os valores máximos para dimensões ímpares, no intervalo de  $d = 3$  até  $d = 29$ .

<b>d</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$6.2 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-4}$	$4.4 \times 10^{-5}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.3763	0.2645	0.2303	0.2130	0.2025

<b>d</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	<b>19</b>	<b>21</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$9.4 \times 10^{-6}$	$2.0 \times 10^{-6}$	$4.5 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-8}$	$2.2 \times 10^{-8}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1953	0.1901	0.1861	0.1829	0.1804

<b>d</b>	<b>23</b>	<b>25</b>	<b>27</b>	<b>29</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$5.0 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-9}$	$2.3 \times 10^{-10}$	$3.0 \times 10^{-11}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1784	0.1769	0.1761	0.1781

<b>d</b>	<b>31</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$-1.1 \times 10^{-11}$
$T_d(\xi_{max}) <$	sem máximo

Tabela 2.1: Valores da energia do vácuo  $\varepsilon_d^{(r)}$  e valores máximos para a função

$T_d(\xi_{max})$  em dimensões ímpares, no intervalo de  $d = 3$  até  $d = 29$ .

Até agora, temos estudado a cota quântica para dimensões gerais, baseado nas somas dadas por (2.41) e (2.42). Contudo, podemos encontrar uma função  $T'_d(\xi)$

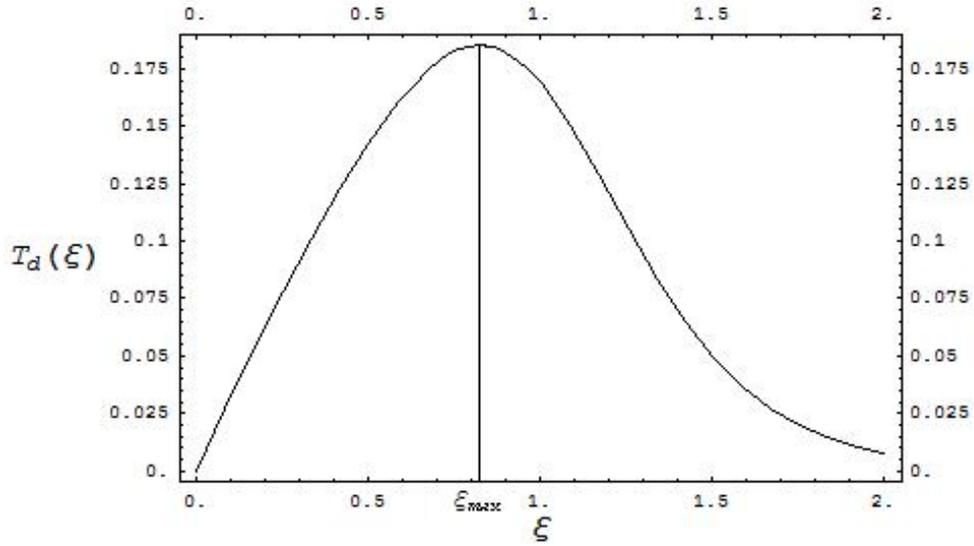


Figura 2.1:  $T_d(\xi)$  como uma função de  $\xi$  para o caso de energia renormalizada positiva do ponto zero para  $d = 3$ .

que limita superiormente a função  $T_d(\xi)$  a qual é mais fácil de se lidar. Para este propósito, de modo similar ao definirmos a função  $R'_d(\xi)$ , vamos também definir as funções auxiliares  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$ , que obedecem às seguintes relações

$$P_d(\xi) < P'_d(\xi), \quad (2.46)$$

e

$$P_d(\xi) > P''_d(\xi), \quad (2.47)$$

de modo que a entropia específica satisfaz à desigualdade

$$\frac{S}{E} < 2\pi R T'_d(\xi), \quad (2.48)$$

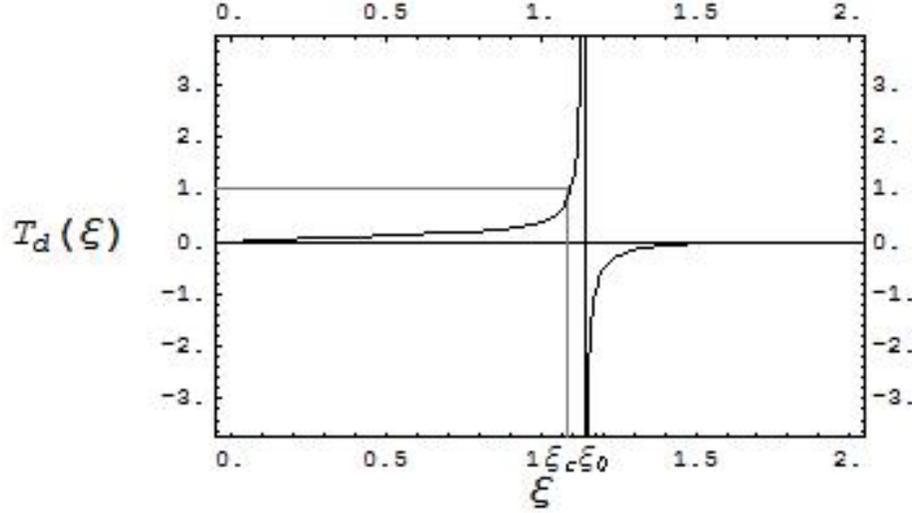


Figura 2.2:  $T_d(\xi)$  como uma função de  $\xi$  para o caso de energia renormalizada negativa do ponto zero para  $d = 4$ .

onde

$$T'_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P'_d(\xi) + R'_d(\xi)}{\varepsilon_d^{(r)} + P''_d(\xi)}. \quad (2.49)$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher como funções auxiliares  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$

as integrais

$$P'_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr r^{d-1} (e^{\pi\xi r} - 1)^{-1} \quad (2.50)$$

e

$$P''_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_1^\infty dr r^{d-1} (e^{\pi\xi r} - 1)^{-1}. \quad (2.51)$$

Efetuada tais integrais [85], obtemos que  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$  são dadas por

$$P'_d(\xi) = \pi S_{d-1} \Gamma(d) \zeta(d) \left( \frac{1}{\pi\xi} \right)^d \quad (2.52)$$

e

$$P_d''(\xi) = \pi S_{d-1} \left( \Gamma(d) \zeta(d) - f(d) \right) \left( \frac{1}{\pi \xi} \right)^d, \quad (2.53)$$

onde a série  $f(d)$  é dada por

$$f(d) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{(d+l-1)l!}. \quad (2.54)$$

Para atingirmos um limite superior para a entropia específica em um espaço-tempo euclidiano  $d$ -dimensional genérico, temos apenas que substituir as equações (2.44), (2.52) e (2.53) na equação (2.49). Teremos

$$T_d'(\xi) = \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1} + h_2(d) \xi^{-1}}, \quad (2.55)$$

onde

$$h_1(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^d \sqrt{d-1}} \zeta(d) \left( \Gamma(d) + \Gamma(d-1) \right), \quad (2.56)$$

e

$$h_2(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^{d-1}} \left( \Gamma(d) \zeta(d) - f(d) \right). \quad (2.57)$$

Vamos estudar o comportamento da entropia específica para altas e baixas temperaturas. Para o primeiro caso, temos:

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi. \quad (2.58)$$

Este comportamento da entropia específica, que aumenta com  $\beta$  neste limite de altas temperaturas, foi obtido por Deutsch na referência [12]. Bekenstein, usando

a condição  $\beta \ll R$  (limite de altas temperaturas), também obteve o mesmo comportamento na referência [16]. Como a energia térmica pode compensar a energia renormalizada do ponto zero negativa, o limite quântico é válido.

Quando consideramos o limite de baixas temperaturas para a entropia específica, podemos ver que o problema do sinal da energia renormalizada do ponto zero aparece, podendo invalidar o limite quântico. Neste limite, temos:

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)}} \xi^{1-d}. \quad (2.59)$$

É bem conhecido que a energia renormalizada do ponto zero para campos escalares não-massivos dentro de um cubo, assumindo condições de contorno de Dirichlet, muda de sinal com a dimensão, i.e., para  $d = 2$ , temos que  $E_0^{(r)} < 0$ , para  $d = 3$ , temos que  $E_0^{(r)} > 0$ , e para o caso importante  $d = 4$ , tem-se  $E_0^{(r)} < 0$ . Muito embora muitos autores afirmem que a energia das fronteiras de tais sistemas podem compensar a energia renormalizada do ponto zero negativa, produzindo uma energia líquida positiva, esta é uma questão ainda em aberto na literatura.

Em resumo, examinamos campos escalares com auto-interação no regime de forte acoplamento em equilíbrio com um banho térmico na presença de fronteiras macroscópicas. Na expansão perturbativa de acoplamento forte, podemos dividir o problema de definir o funcional gerador em duas partes: como definir precisamente o funcional gerador de valor independente e como ir além desta aproximação de valor independente, levando em conta a parte da perturbação. Utilizando a representação

de Klauder para o funcional gerador de valor independente, e até a ordem de  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , mostramos que é possível obter um limite quântico para o sistema definido por um campo escalar com auto-interação no regime de forte acoplamento. Estabelecemos, assim, um limite na capacidade de armazenamento de informação de um sistema fortemente acoplado em um tratamento independente da física gravitacional.

Mostramos que, no regime de forte acoplamento, a temperaturas baixas e intermediárias ( $\beta \approx L$ ), a cota quântica depende do sinal da energia renormalizada do ponto zero  $E_0^{(r)}$ . Para dimensões  $d$  pares do espaço-tempo e também para valores ímpares que satisfazem à desigualdade  $d > 29$ ,  $E_0^{(r)}$  é uma quantidade negativa. Portanto, a cota quântica não é válido. Para valores ímpares de  $d$  que satisfazem à  $d \leq 29$ ,  $E_0^{(r)}$  é uma quantidade positiva. Nesta situação, a entropia específica obedece a uma cota quântica. Definindo  $\varepsilon_d^{(r)}$  como sendo a energia renormalizada do ponto para a teoria livre por unidade de comprimento, atingimos as seguintes dependências funcionais: para baixas temperaturas:  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1}}$ , onde  $R$  é o raio da menor esfera que circunscreve o sistema; para o caso de altas temperaturas, temos que a entropia específica sempre satisfaz a uma cota quântica, dado por  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi$ .

Muito embora nossos resultados estejam baseados em uma escolha bem particular de um formato para as fronteiras macroscópicas que confinam o campo no volume  $\Omega$ , é interessante observar que a cota quântica é independente de qualquer configuração das fronteiras. Em outras palavras, mesmo tendo escolhido um hipercubo para

confinar os campos em um volume finito, uma fronteira arbitrária deveria dar os mesmos resultados. Se tivermos um domínio  $G$  e se considerarmos o problema de autovalor para um operador diferencial parcial de segunda ordem auto-adjunto que atua em funções escalares, uma propriedade importante de monotonicidade dos autovalores associados com a condição de contorno de Dirichlet nos leva ao resultado de que, sob tais condições de contorno, o  $n$ -ésimo autovalor do domínio  $G$  nunca excede ao  $n$ -ésimo autovalor do subdomínio  $G^*$ . Da mesma maneira, o comportamento assintótico dos autovalores não dependem do formato, mas apenas do tamanho do domínio fundamental. Estes dois resultados podem ser usados para se demonstrar que, para qualquer configuração, encontraremos os mesmos resultados.

# Capítulo 3

## A transição de fase fluorescente-superradiante

### 3.1 Descrição hamiltoniana: sistema de dois níveis interagindo com campo bosônico

Estamos interessados no presente capítulo em estudar um sistema de  $N$  átomos idênticos de dois níveis interagindo com um campo bosônico quantizado [88]. Vamos brevemente examinar a construção de hamiltonianas que descrevam a interação entre campos bosônicos e sistemas de dois níveis. Consideremos então um sistema quântico bosônico  $S$ , com os estados quânticos definidos em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}^{(S)}$ , acoplado a um reservatório de sistemas de dois níveis que, por brevidade, chamaremos de qubits, com estados definidos em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}^{(R)}$ . Vamos assumir que o reservatório está em equilíbrio térmico a uma temperatura  $\beta^{-1}$ . O sistema quântico definido pelos graus de liberdade bosônicos é um subsistema do sistema total definido em um espaço de Hilbert cujos vetores-estado estão definidos

no espaço de Hilbert dado pelo produto tensorial  $\mathcal{H}^{(S)} \otimes \mathcal{H}^{(R)}$ .

Denotemos por  $H_S$  a hamiltoniana do sistema bosônico quantizado, por  $H_R$  a hamiltoniana livre dos  $N$  qubits e por  $H_I$  a hamiltoniana que descreve a interação entre o campo bosônico quantizado e o reservatório de qubits. A hamiltoniana para o sistema total pode ser escrita como sendo

$$H = H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + H_I, \quad (3.1)$$

onde  $I_S$  e  $I_R$  denotam as identidades nos espaço de Hilbert do sistema e reservatório respectivamente.

A hamiltoniana livre do  $j$ -ésimo qubit será denotada por  $H_D^j$ . Então, temos que

$$H_D^{(j)} |i\rangle_j = \omega_i^{(j)} |i\rangle_j, \quad (3.2)$$

onde  $|i\rangle_j$ ,  $i = 1, 2$ , são autoestados ortogonais de energia acessíveis ao  $j$ -ésimo qubit e  $\omega_i^{(j)}$  as respectivas autofrequências. Usando a equação (3.2) e a ortonormalidade dos autoestados de energia, podemos escrever a hamiltoniana do  $j$ -ésimo qubit  $H_D^j$  como sendo

$$H_D^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \omega_i^{(j)} \left( |i\rangle_j \langle i| \right)_j. \quad (3.3)$$

Vamos definir os operadores de pseudo-spin para cada qubit por  $\sigma_{(j)}^z$ ,  $\sigma_{(j)}^+$  e  $\sigma_{(j)}^-$ , onde cada um desses operadores são dados respectivamente por

$$\sigma_{(j)}^z = \left( |2\rangle_j \langle 2| - |1\rangle_j \langle 1| \right)_j, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{(j)}^+ = \left( |2\rangle_j \langle 1| \right)_j \quad (3.5)$$

e finalmente

$$\sigma_{(j)}^- = \left( |1\rangle \langle 2| \right)_j. \quad (3.6)$$

Esta representação é uma segunda quantização dos sistemas de dois níveis. Combinando as equações (3.3) e (3.4), a hamiltoniana do  $j$ -ésimo qubit pode ser escrita como sendo

$$H_D^{(j)} = \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \frac{1}{2} \left( \omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)} \right), \quad (3.7)$$

onde o intervalo entre os autoestados de energia do  $j$ -ésimo qubit é dado por

$$\Omega^{(j)} = \omega_2^{(j)} - \omega_1^{(j)}. \quad (3.8)$$

Deslocando-se o zero de energia de  $\frac{1}{2}(\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)})$  para cada qubit, a hamiltoniana do  $j$ -ésimo qubit dada pela equação (3.7) pode ser reescrita como

$$H_D^{(j)} = \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z. \quad (3.9)$$

Note que os operadores  $\sigma_{(j)}^+$ ,  $\sigma_{(j)}^-$  e  $\sigma_{(j)}^z$  satisfazem as relações de comutação de momento angular correspondente a operadores de spin  $\frac{1}{2}$ , isto é,

$$\left[ \sigma_{(i)}^+, \sigma_{(j)}^- \right] = \delta_{(i)(j)} \sigma_{(j)}^z, \quad (3.10)$$

$$\left[ \sigma_{(i)}^z, \sigma_{(j)}^+ \right] = 2 \delta_{(i)(j)} \sigma_{(j)}^+, \quad (3.11)$$

e, finalmente

$$\left[ \sigma_{(i)}^z, \sigma_{(j)}^- \right] = -2 \delta_{(i)(j)} \sigma_{(j)}^-. \quad (3.12)$$

onde  $\delta_{(i)(j)}$  é a delta de Kronecker. Para introduzir o acoplamento entre o campo bosônico e os qubits, vamos assumir que apenas um modo do campo interage com

o sistema de dois níveis e vamos admitir também um acoplamento linear com os qubits. Com isso, a hamiltoniana total do  $j$ -ésimo qubit é dada por

$$\begin{aligned} I_S \otimes H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + H_I^{(j)} = \\ I_S \otimes \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + g (b + b^\dagger) \otimes (\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^-), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o segundo termo na equação (3.13) possui a contribuição de apenas um modo do campo bosônico quantizado, e o último termo é a hamiltoniana de interação do  $j$ -ésimo qubit com este modo do campo bosônico. Na equação acima,  $g$  é uma constante de acoplamento entre o qubit e o campo bosônico quantizado. A generalização para  $N$  qubits é imediata e vem a ser descrita por

$$\begin{aligned} I_S \otimes \sum_{j=1}^N H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + \sum_{j=1}^N H_I^{(j)} = \\ = I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_B + \\ + (b + b^\dagger) \otimes \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^-). \end{aligned} \quad (3.14)$$

A hamiltoniana de interação é simplificada se assumirmos o modelo de Jaynes-Cummings. Considerando este para apenas um qubit, temos

$$\begin{aligned} I_S \otimes \sum_{j=1}^N H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + \sum_{j=1}^N H_I^{(j)} = \\ = I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + \\ + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (b \otimes \sigma_{(j)}^+ + b^\dagger \otimes \sigma_{(j)}^-). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Com os termos que foram ignorados na equação (3.15), chamamos esta situação de aproximação de onda girante. Nesta aproximação, desprezamos os termos que não conservam energia nos quais a emissão (absorção) de um quantum do campo quantizado é acompanhado pela transição de um qubit do seu estado fundamental (excitado) para seu estado excitado (fundamental). A aproximação da onda girante ignora termos nos quais os operadores de levantamento (abaixamento) de estado do  $j$ -ésimo qubit multiplicam os operadores de criação (aniquilação) do campo bosônico.

Uma outra situação, onde o comportamento é bastante interessante do ponto de vista físico e matemático, seria o caso onde a constante de acoplamento entre os  $N$  qubits e o campo bosônico depende da intensidade do campo bosônico [89] [90] [91]. Neste caso, a hamiltoniana pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& I_S \otimes \sum_{j=1}^N H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + \sum_{j=1}^N H_I^{(j)} = \\
& = I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + \\
& + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left( b (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^+ + b^\dagger (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^- \right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é discutir a interação entre um sistema de  $N$  qubits idênticos, com um intervalo de energia  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ , com um número infinito de osciladores harmônicos. Sejam  $a_k^\dagger$  e  $a_k$  os operadores de criação e aniquilação do  $k$ -ésimo oscilador harmônico de frequência  $\omega_k$ . A hamiltoniana total na aproximação de onda

girante é dada por

$$\begin{aligned}
H &= I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \\
&+ \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left( a_k \otimes \sigma_{(j)}^+ + a_k^\dagger \otimes \sigma_{(j)}^- \right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Na equação (3.17) o primeiro termo do lado direito é a hamiltoniana livre dos  $N$  qubits idênticos, o segundo termo é a hamiltoniana livre do reservatório e, finalmente, o terceiro termo é a hamiltoniana de interação entre o reservatório e os  $N$  qubits idênticos. Notem que deslocamos o zero de energia para cada qubit, como fizemos anteriormente, e admitimos a aproximação da onda girante, onde  $g(\sqrt{N})^{-1}$  é a constante de acoplamento entre o  $j$ -ésimo qubit e o  $k$ -ésimo oscilador harmônico. Podemos também usar diferentes hamiltonianas de interação para estudar a influência da descoerência em computadores quânticos como foi introduzida por Di Vincenzo [92] [93] [94]. Este autor propôs o seguinte modelo descrevendo um sistema de apenas um qubit acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos:

$$\begin{aligned}
I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = \\
I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sigma^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_k \left( a_k^\dagger + a_k \right) \otimes \sigma^z, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

onde  $\Omega$  é a diferença de energia entre os níveis de energia do qubit e  $a_k^\dagger$  e  $a_k$  são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação dos osciladores harmônicos.

O leitor pode notar o tipo de acoplamento bastante particular entre o reservatório

e o qubit. A generalização para  $N$  qubits é dada por

$$\begin{aligned}
I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = \\
I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \\
+ \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left( a_k^\dagger + a_k \right) \otimes \sigma_{(j)}^z. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Uma outra generalização seria introduzir uma constante de acoplamento dependente do modo. Usando este modelo, teríamos a seguinte hamiltoniana descrevendo um sistema de um qubit acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos:

$$\begin{aligned}
I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = \\
I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sigma^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \sum_k \left( \lambda_k a_k^\dagger + \lambda_k^* a_k \right) \otimes \sigma^z. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Uma outra possibilidade não assumir a aproximação da onda girante na hamiltoniana de interação. Retornando à equação (3.17), sem a aproximação mencionada, a hamiltoniana de interação entre os  $N$  qubits e o reservatório de osciladores harmônicos é dada por

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left( a_k + a_k^\dagger \right) \otimes \left( \sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^- \right). \tag{3.21}$$

Em seguida estudaremos o modelo de Dicke, onde apenas um modo do campo esta interagindo com  $N$  qubits. É importante salientar que não estaremos assumindo a aproximação de onda-girante, denominando-o de modelo de Dicke generalizado. Nosso interesse passa a ser analisar a estrutura analítica da função de partição no plano complexo da constante de acoplamento (assumindo, obviamente, que  $Re(\beta) \geq$

0). Para que possamos utilizar métodos funcionais para estudar o comportamento crítico do modelo, escreveremos os operadores de pseudo-spin como combinações bilineares de operadores fermiônicos. Dessa forma estaremos definindo o modelo de Dicke fermiônico generalizado.

## 3.2 O espaço de Hilbert do modelo de Dicke fermiônico

Como enfatizamos anteriormente, é possível escrever os operadores de pseudo-spin do modelo de Dicke utilizando combinações lineares de operadores de Fermi e assim definir o modelo de Dicke fermiônico. A dimensionalidade do espaço onde as combinações de operadores de Fermi atuam é maior que a do espaço onde estes operadores atuam. Sendo assim temos um problema na eliminação dos estados excedentes. Começemos então com a hamiltoniana do modelo de Dicke,  $H_D$  dada por

$$H_D = \omega_0 b^\dagger b \otimes I_B + I_S \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{(i)}^z + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( b \otimes \sigma_{(i)}^+ + b^\dagger \otimes \sigma_{(i)}^- \right), \quad (3.22)$$

onde os termos da hamiltoniana que geram os processos virtuais foram descartados.

A hamiltoniana  $H_D$  contém os operadores de pseudo-spin usados para se obter a segunda quantização para o sistema não interagente de átomos de dois níveis e também os operadores de criação e aniquilação de um modo do campo bosônico quantizado. Como discutimos anteriormente, as matrizes  $\sigma_{(i)}^z$ ,  $\sigma_{(i)}^+$  e  $\sigma_{(i)}^-$  obedecem as relações usuais de comutação associadas a álgebra do momento angular.

Vamos definir as variáveis de Grassmann  $\alpha^\dagger$ ,  $\alpha$ ,  $\beta^\dagger$  e  $\beta$ . Também podemos definir a combinação linear destas variáveis de Grassmann,  $\alpha^\dagger\alpha - \beta^\dagger\beta$ ,  $\alpha^\dagger\beta$  e finalmente  $\beta^\dagger\alpha$ . Note que  $\sigma^z$ ,  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  obedecem às mesmas relações de comutação que as apresentadas acima para a combinação bilinear das variáveis de Grassmann. Para a construção do modelo de Dicke fermiônico devemos então substituir os operadores de pseudo-spin do modelo de Dicke pela seguintes combinações bilineares de variáveis de Grassmann:

$$\sigma_{(i)}^z \longrightarrow (\alpha_i^\dagger\alpha_i - \beta_i^\dagger\beta_i), \quad (3.23)$$

$$\sigma_{(i)}^+ \longrightarrow \alpha_i^\dagger\beta_i, \quad (3.24)$$

e, finalmente

$$\sigma_{(i)}^- \longrightarrow \beta_i^\dagger\alpha_i. \quad (3.25)$$

De agora em diante usaremos a notação usual ao invés da notação que enfatiza o produto tensorial do espaço de Hilbert total do sistema. Utilizando as equações (3.23), (3.24) e (3.25), a hamiltoniana do modelo de Dicke fermiônico é escrita como

$$H_F = \omega_0 b^\dagger b + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N (\alpha_i^\dagger\alpha_i - \beta_i^\dagger\beta_i) + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (b^\dagger\beta_i^\dagger\alpha_i + b\alpha_i^\dagger\beta_i). \quad (3.26)$$

Note que na equação (3.26) estamos adotando a aproximação da onda girante. A hamiltoniana de interação entre um modo do campo bosônico quantizado com os  $N$  qubits sem assumir a aproximação da onda girante é dada por

$$\frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (b^\dagger + b) (\beta_i^\dagger\alpha_i + \alpha_i^\dagger\beta_i). \quad (3.27)$$

Esta hamiltoniana de interação inclui quatro tipos de processos correspondentes a absorção ou emissão de quanta do campo com a transição dos qubits do estado fundamental (excitado) para o estado excitado (fundamental).

Como estamos interessados em estudar a estrutura analítica da função de partição, podemos investigar as diferentes contribuições dos processos reais e virtuais à transição de fase. Para tanto, vamos introduzir na equação (3.27) duas constantes de acoplamentos distintas, a primeira associada aos processos que conservam energia e a segunda associada aos processos onde não há conservação de energia. Voltaremos para este ponto mais tarde.

Vamos analisar o espaço de Hilbert para o modelo de Dicke fermiônico. O espaço de Hilbert fermiônico para cada átomo é quadridimensional. O espaço de Hilbert para o  $i$ -ésimo átomo é gerado pelos seguintes vetores de base. O primeiro deles é o estado de vácuo:

$$\phi_0 = |0, 0\rangle_i. \quad (3.28)$$

Podemos definir mais dois vetores aplicando os operadores  $\alpha_i^\dagger$  e  $\beta_i^\dagger$  no estado de vácuo, ou seja,  $\alpha_i^\dagger \phi_0$  e  $\beta_i^\dagger \phi_0$ . Com isso temos

$$\alpha_i^\dagger |0, 0\rangle_i = |1, 0\rangle_i \quad (3.29)$$

e

$$\beta_i^\dagger |0, 0\rangle_i = |0, 1\rangle_i. \quad (3.30)$$

Finalmente, a combinação bilinear das variáveis de Grassmann ( $\alpha_i^\dagger \beta_i^\dagger$ ) atuando no

estado de vácuo nos gera

$$\alpha_i^\dagger \beta_i^\dagger |0, 0\rangle_i = |1, 1\rangle_i. \quad (3.31)$$

Os vetores  $|1, 0\rangle_i$  and  $|0, 1\rangle_i$  geram um subespaço bidimensional, no qual é caracterizado pelas seguintes condições com a combinação bilinear das variáveis de Grassmann

$$\left(\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i\right) |0, 1\rangle_i = |0, 1\rangle_i \quad (3.32)$$

e

$$\left(\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i\right) |1, 0\rangle_i = |1, 0\rangle_i. \quad (3.33)$$

Definamos  $N_i = (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)$  como sendo o operador de número fermiônico que atua no espaço de Hilbert correspondente ao  $i$ -ésimo átomo. Com o espaço de Hilbert quadridimensional podemos construir um espaço de Hilbert físico e um espaço não-físico gerados respectivamente pelos vetores  $|\Psi\rangle_i$  and  $|\Phi\rangle_i$ . Com isso temos

$$c_1^i |0, 1\rangle_i + c_2^i |1, 0\rangle_i = |\Psi\rangle_i \quad (3.34)$$

e

$$d_1^i |0, 0\rangle_i + d_2^i |1, 1\rangle_i = |\Phi\rangle_i. \quad (3.35)$$

Em seguida iremos obter a formula que conecta a função de partição do modelo de Dicke de spin com o modelo de Dicke fermiônico. Usando a definição do operador número fermiônico para todos os qubits, e que  $N_i = (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)$  temos então que

$$N = N_i + \sum_{j \neq i} N_j. \quad (3.36)$$

Desde que o operador número e a hamiltoniana comutem e usando a mesma notação, temos que

$$H_F = H_i + \sum_{j \neq i} H_j. \quad (3.37)$$

Usando o fato que

$$H_i |0, 0\rangle_i = H_i |1, 1\rangle_i = 0, \quad (3.38)$$

temos que

$$H_i |\Phi\rangle_i = 0, \quad (3.39)$$

onde  $|\Phi\rangle_i$  é o vetor de estado geral no subespaço não-físico do  $i$ -ésimo qubit. O traço sobre os estados não-físicos do  $i$ -ésimo qubit se anula. Com isso temos

$${}_i\langle\Phi | \exp[-\beta(H_i + \sum_{j \neq i} H_j + \frac{i\pi}{2\beta}N)] | \Phi\rangle_i = \quad (3.40)$$

$${}_i\langle\Phi | \exp[-\beta(H_i + \sum_{j \neq i} H_j) + \frac{i\pi}{2}(N_i + \sum_{j \neq i} N_j)] | \Phi\rangle_i = 0. \quad (3.41)$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} Tr \exp[-\beta(H_F + \frac{i\pi}{2\beta}N)] &= (-i)^N Tr_{fis} \exp[-\beta H_F] = \\ &= (-i)^N Tr \exp[-\beta H_\sigma], \end{aligned} \quad (3.42)$$

e podemos apresentar a relação entre a função de partição do modelo de Dicke de spin e o modelo de Dicke fermiônico.

$$Tr \exp[-\beta H_\sigma] = i^N Tr \exp [(-\beta H_F + \frac{i\pi}{2}N)]. \quad (3.43)$$

De acordo com a equação acima, podemos usar a hamiltoniana fermiônica para estudar o modelo de Dicke de spin adicionando para isso um termo de fase  $\frac{i\pi N}{2\beta}$ , ou seja um potencial químico  $\mu = \frac{i\pi N}{2\beta}$ .

### 3.3 A integração funcional para o modelo de Dicke fermiônico generalizado

Vamos agora considerar o problema de definir a função de partição  $Z_F$  para o modelo de Dicke fermiônico. Para que esse intuito tenha sucesso, devemos determinar o quociente de duas integrais funcionais, a saber, a função de partição do modelo de Dicke fermiônico e a função partição para o modelo de Dicke fermiônico sem a interação entre os férmions e bósons. Estamos portanto interessados em calcular a seguinte quantidade

$$\frac{Z_F}{Z_{F_0}} = \frac{\int [d\eta] e^S}{\int [d\eta] e^{S_0}}, \quad (3.44)$$

onde  $S$  é a ação euclidiana do modelo de Dicke fermiônico generalizado e  $S_0$  a ação euclidiana livre, sem a interação entre os  $N$  qubits e o modo do campo bosônico quantizado. Temos então

$$\begin{aligned} S = & \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} b(\tau) + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \alpha_i(\tau) + \beta_i^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \beta_i(\tau) \right) \right) + \\ & - \int_0^\beta d\tau H_F(\tau), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $H_F$  é a hamiltoniana completa para o modelo de Dicke fermiônico generalizado.

Serão introduzidas duas constantes de acoplamento,  $g_1$  e  $g_2$ , associadas aos termos

que conservam e os termos que não conservam energia, respectivamente. Desta forma poderemos identificar as contribuições dos processos reais e virtuais perto da transição de fase fluorescente superradiante com a formação do condensado. A hamiltoniana para o modelo de Dicke fermiônico generalizado é dada por

$$\begin{aligned}
H_F = & \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) - \beta_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \right) + \\
& + \frac{g_1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) b(\tau) + \beta_i^*(\tau) b^*(\tau) \alpha_i(\tau) \right) + \\
& + \frac{g_2}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( \beta_i^*(\tau) b(\tau) \alpha_i(\tau) + \alpha_i^*(\tau) b^*(\tau) \beta_i(\tau) \right).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Vamos assumir que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório a uma temperatura  $\beta^{-1}$ . As integrais funcionais na equação acima são integrais com respeito a funções complexas  $b^*(\tau)$ ,  $b(\tau)$  e variáveis de Grassmann  $\alpha_i^*(\tau)$ ,  $\alpha_i(\tau)$ ,  $\beta_i^*(\tau)$  and  $\beta_i(\tau)$ . Como utilizaremos formalismo de tempo imaginário, as variáveis de integração na função de partição obedecem às seguintes condições de contorno:  $b(\beta) = b(0)$  para os campos bosônicos e  $\alpha_i(\beta) = -\alpha_i(0)$ ,  $\beta_i(\beta) = -\beta_i(0)$  para os campos fermiônicos.

A ação livre do campo bosônico  $S_0(b)$  é dada por:

$$S_0(b) = \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} - \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) \right). \tag{3.47}$$

Podemos expressar a equação (3.45) usando a ação livre dada pela equação acima mais um termo adicional que pode ser expresso na forma matricial. Desta forma a

ação total  $S$  vem a ser dada por

$$S = S_0(b) + \int_0^\beta d\tau \rho_i^\dagger(\tau) M \rho_i(\tau), \quad (3.48)$$

onde  $\rho$  e  $\rho^\dagger$  são vetores em termos das variáveis de Grassmann dados por

$$\rho_i(\tau) = \begin{pmatrix} \beta_i(\tau) \\ \alpha_i(\tau) \end{pmatrix}, \rho_i^\dagger(\tau) = \left( \beta_i^*(\tau) \quad \alpha_i^*(\tau) \right) \quad (3.49)$$

e a matriz  $M(b^*, b)$ , sem assumir a aproximação de onda girante, é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \frac{\Omega}{2} & -\frac{1}{\sqrt{N}} \left( g_1 b^*(\tau) + g_2 b(\tau) \right) \\ -\frac{1}{\sqrt{N}} \left( g_1 b(\tau) + g_2 b^*(\tau) \right) & \partial_\tau - \frac{\Omega}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Para prosseguirmos, vamos usar o fato de que as variáveis  $b(\tau)$ ,  $\alpha_i(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$  podem ser representadas como séries de Fourier. Sendo assim, temos

$$b(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_{\omega} b(\omega) e^{i\omega\tau}, \quad (3.51)$$

$$\alpha_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_p \alpha_i(p) e^{ip\tau} \quad (3.52)$$

e, finalmente

$$\beta_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_q \beta_i(q) e^{iq\tau}. \quad (3.53)$$

Nas equações acima  $\omega = \frac{2\pi n}{\beta}$ ,  $p = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$  e  $q = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$  são respectivamente as frequências de Matsubara bosônicas e fermiônicas, e  $n$  é um número inteiro. Substituindo a representação de Fourier associada à função complexa  $b(\tau)$  na ação total, obtemos, para a ação livre do campo bosônico

$$S_0(b) = \sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega) \quad (3.54)$$

e para a matriz  $M_{p,q}(b^*, b)$  dada pela equação (3.50):

$$M_{p,q}(b^*, b) = \begin{pmatrix} (ip + \frac{\Omega}{2}) \delta_{pq} & -\frac{1}{\sqrt{N\beta}} \left( g_1 b^*(q-p) + g_2 b(p-q) \right) \\ -\frac{1}{\sqrt{N\beta}} \left( g_1 b(p-q) + g_2 b^*(q-p) \right) & (ip - \frac{\Omega}{2}) \delta_{pq} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

A razão entre as duas integrais funcionais  $Z$  e  $Z_0$  pode ser expressa por

$$\frac{\int [d\eta(b)] \exp\left(\sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)\right) \int [d\eta(\rho)] \exp\left(\rho^\dagger M_{p,q}(b, b^*) \rho\right)}{\int [d\eta(b)] \exp\left(\sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)\right) \int [d\eta(\rho)] \exp\left(\rho^\dagger M_{p,q}(0, 0) \rho\right)} \quad (3.56)$$

onde  $[d\eta(b)]$ ,  $[d\eta(\rho)]$  são definidas da forma:

$$[d\eta(b)] = \prod_{\omega} db(\omega) db^*(\omega) \quad (3.57)$$

e

$$[d\eta(\rho)] = \prod_{i,p} d\rho_i(p) d\rho_i^\dagger(p). \quad (3.58)$$

A fim de que a razão entre as integrais seja matematicamente consistente, devemos impor cortes sobre as frequências de Matsubara bosônica e fermiônica. Este procedimento é necessário para garantir que a razão entre as duas integrais funcionais dada por  $\frac{Z}{Z_0}$  seja finita. Como as integrais com respeito aos campos fermiônicos são gaussianas, temos que

$$\int [d\eta(\rho)] \exp\left(\rho^\dagger M_{p,q} \rho\right) = \prod_{\omega} \left( \det {}^N M_{p,q} \right). \quad (3.59)$$

Por simplicidade, vamos efetuar a seguinte mudança de variáveis:

$$b(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b(\omega) \quad (3.60)$$

e

$$b^*(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b^*(\omega). \quad (3.61)$$

Após essas mudanças de variáveis, o denominador da equação (3.56), se transforma na unidade:

$$\int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) = 1. \quad (3.62)$$

Podemos portanto expressar a razão  $\frac{Z}{Z_0}$  da seguinte maneira:

$$\frac{Z}{Z_0} = \int [d\eta(b)] \exp\left(S_{eff}(b)\right), \quad (3.63)$$

onde  $S_{eff}(b)$  é a ação efetiva associada ao modo bosônico. Esta é dada por

$$S_{eff}(b) = -\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + \ln \det^N (I + A), \quad (3.64)$$

onde o determinante desta equação pode ser escrito do seguinte modo:

$$\det(I + A) = \det\left(M^{-1/2}(0,0)M(b^*,b)M^{-1/2}(0,0)\right). \quad (3.65)$$

A matriz  $A$  é definida por

$$A = A_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & B_{pq} \\ -C_{pq} & 0 \end{pmatrix}.$$

Na equação acima, as quantidades  $B_{pq}$  e  $C_{pq}$  são dadas por

$$B_{pq} = -\left(\frac{\pi}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{g_1 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + \frac{g_2 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}}\right) \left(iq - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.67)$$

e

$$C_{pq} = \left(\frac{\pi}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{g_1 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} + \frac{g_2 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}}\right) \left(iq + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.68)$$

Portanto, teremos apenas uma integração funcional e podemos tomar o limite para o infinito das frequências de Matsubara bosônica e fermiônica sem nenhum problema de divergência. Essa é uma boa representação para se obter a expressão assintótica para  $\frac{Z}{Z_0}$  no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ).

Para obter o comportamento assintótico das integrais funcionais, podemos utilizar o método de fase estacionária. Para uma certa temperatura crítica  $T_c$ , temos que, para  $T > T_c$  observa-se apenas um ponto de fase estacionária, enquanto que para  $T < T_c$  temos um círculo de fase estacionária. Para calcular esta integral para  $T > T_c$ , vamos fazer a seguinte substituição:

$$\det^N(I + A) = \det^N(I + BC) \rightarrow \exp\left(N \operatorname{tr}(BC)\right). \quad (3.69)$$

Essa substituição pode ser feita e assim podemos estimar o erro se dividirmos todo

o espaço funcional em dois domínios  $C_1$  e  $C_2$

$$\text{tr}(BC)(BC)^\dagger \leq (4N)^{-1} \mapsto C_1, \quad (3.70)$$

$$\text{tr}(BC)(BC)^\dagger \geq (4N)^{-1} \mapsto C_2. \quad (3.71)$$

Denotando

$$K_N = \det^N(I + A) - \exp\left(N \text{tr}(BC)\right), \quad (3.72)$$

para a razão  $\frac{Z}{Z_0}$ , temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + N \text{tr}(BC)\right) + \\ &+ \int_{C_1} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) + \\ &+ \int_{C_2} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

A primeira integral da equação acima é gaussiana. Vamos defini-la por  $I_0$ . Um cálculo simples nos fornece

$$\begin{aligned} I_0 &= \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a(\omega)\right) b(\omega) + \right. \\ &\left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega) c(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c(\omega) b^*(-\omega)\right)\right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde  $a(\omega)$  e  $c(\omega)$  da equação acima são dados por

$$a(\omega) = \left(\frac{g_1^2 (\Omega - i\omega)^{-1} + g_2^2 (\Omega + i\omega)^{-1}}{(\omega_0 - i\omega)}\right) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right) \quad (3.75)$$

e

$$c(\omega) = \left(\frac{g_1 g_2 \Omega}{(\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2} (\Omega^2 + \omega^2)}\right) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right). \quad (3.76)$$

Para recuperar o resultado obtido por Popov e Fedotov temos apenas que assumir  $g_2 = 0$ . Neste caso, após a integração sobre a medida bosônica, temos que  $M_{p,q}(b^*, b)$  é dado por

$$M_{p,q}(b^*, b) = \begin{pmatrix} (ip + \frac{\Omega}{2}) \delta_{pq} & \frac{g}{\sqrt{N\beta}} b^*(q-p) \\ \frac{g}{\sqrt{N\beta}} b(p-q) & (ip - \frac{\Omega}{2}) \delta_{pq} \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Voltando para o caso geral, temos que  $I_0$  é dado por

$$I_0 = I_0(\omega = 0) \prod_{\omega > 0} \left[ c(\omega)^2 - \left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) \right]^{-1}, \quad (3.78)$$

onde  $I_0(\omega = 0)$  é a contribuição do condensado, dada por

$$I_0(\omega = 0) = \left[ \left(1 - a(0) + 2c(0)\right) \left(1 - a(0) - 2c(0)\right) \right]^{-1/2}. \quad (3.79)$$

Nesse momento, podemos estimar o erro de  $I_0$ :

$$\frac{16}{\epsilon^2 N} \prod_{\omega} \left(1 - (1 + \epsilon)a_0(\omega)\right)^{-1}, \quad (3.80)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0(\omega) &= \left(\frac{\pi}{\beta N}\right) \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{(\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2}} + \frac{2g_1 g_2 \omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}\right) \\ &\times \sum_{p-q=\omega} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + q^2)^{1/2}} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + p^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Se  $T \geq T_c + \delta$ ,  $\delta > 0$ , então

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \left[ \left(1 - a(0) + 2c(0)\right) \left(1 - a(0) - 2c(0)\right) \right]^{-1/2} \\ &\times \prod_{\omega > 0} \left[ c(\omega)^2 - \left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) \right]^{-1} + \\ &+ O(N^{-1}), \end{aligned} \quad (3.82)$$

A temperatura crítica  $T_c = \beta_c^{-1}$  da transição para a fase superradiante é obtida para  $N \rightarrow \infty$  por

$$a(0) + 2c(0) = 1 \quad (3.83)$$

e também

$$\tanh\left(\frac{\Omega}{4T_c}\right) = \frac{\Omega\omega_0}{(g_1 + g_2)^2}. \quad (3.84)$$

As expressões acima implicam em uma descontinuidade na energia livre na temperatura crítica  $T_c$ . O inverso da temperatura crítica  $\beta_c$  é dado por

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\Omega\omega_0}{(g_1 + g_2)^2}\right). \quad (3.85)$$

Neste momento, vamos lembrar que uma transição de fase a temperatura finita se caracteriza pela propriedade que a energia livre do sistema deixa de ser uma função analítica na vizinhança de uma temperatura  $\beta_c^{-1}$ . Quando isso acontece a uma temperatura zero, dizemos que o sistema sofreu uma transição de fase quântica [95] [49]. Note, portanto, que existe uma transição de fase quântica quando as constantes de acoplamento  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem à  $g_1 + g_2 = (\omega_0\Omega)^{\frac{1}{2}}$ . Para valores tais que  $g_1 + g_2 \neq (\omega_0\Omega)^{\frac{1}{2}}$ , existe uma temperatura  $\beta_c^{-1}$  dada acima onde a função de partição não é analítica no semi-plano complexo da constante de acoplamento (para  $\operatorname{Re}(\beta) \geq 0$ ), e o sistema entra na fase superradiante.

Vamos agora fazer uma discussão sobre as excitações elementares associadas ao estado fundamental. Para encontrarmos o espectro de excitações coletivas, devemos

usar:

$$c(\omega)^2 - \left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) = 0. \quad (3.86)$$

Fazendo a continuação analítica ( $i\omega \rightarrow E$ ), obtemos:

$$\begin{aligned} 1 = & - \left( \frac{g_1^4 + g_2^4}{(\omega_0^2 - E^2)(\Omega^2 - E^2)} \right) \tanh^2 \left( \frac{\Omega}{4T_c} \right) + \\ & - \frac{g_1^2 g_2^2}{(\omega_0^2 - E^2)} \left( \frac{1}{(\Omega - E)^2} + \frac{1}{(\Omega + E)^2} - \frac{4\Omega^2}{(\Omega^2 - E^2)^2} \right) \tanh^2 \left( \frac{\Omega}{4T_c} \right) + \\ & + \left( \frac{g_1^2(\Omega - E)^{-1} + g_2^2(\Omega + E)^{-1}}{(\omega_0 - E)} + \frac{g_1^2(\Omega + E)^{-1} + g_2^2(\Omega - E)^{-1}}{(\omega_0 + E)} \right) \\ & \times \tanh \left( \frac{\Omega}{4T_c} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Resolvendo a equação acima, encontramos as seguintes raízes

$$E_1 = 0 \quad (3.88)$$

e

$$E_2 = \left( \frac{g_1(\omega_0 + \Omega)^2 + g_2(\omega_0 - \Omega)^2}{g_1 + g_2} \right)^2. \quad (3.89)$$

Primeiramente, vamos apresentar a temperatura crítica e o espectro bosônico de excitações coletivas do modelo com a aproximação da onda girante, onde  $g_1 \neq 0$  e  $g_2 = 0$ . O resultado obtido por Popov e Fedotov é recuperado, onde as equações

$$a(0) = 1 \quad (3.90)$$

e

$$\frac{g_1^2}{\omega_0 \Omega} \tanh\left(\frac{\Omega}{4T_c}\right) = 1, \quad (3.91)$$

forneem o inverso da temperatura crítica,  $\beta_c$ . Esta vale

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\omega_0 \Omega}{g_1^2}\right). \quad (3.92)$$

Neste caso, também existe uma transição de fase quântica ( $T_c = 0$ ), isto é, uma transição de fase quando  $g_1 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$ . Para  $g_1 \neq (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$ , a função de partição deixa de ser analítica e ocorre uma transição para uma fase superradiante na temperatura dada pela equação acima. O espectro bosônico das excitações coletivas neste caso é

$$E_1 = 0, \quad (3.93)$$

e

$$E_2 = \Omega + \omega_0. \quad (3.94)$$

Vamos mostrar que é possível obter um condensado se considerarmos apenas os termos que não conservam energia, i.e.,  $g_1 = 0$  e  $g_2 \neq 0$ . O inverso da temperatura crítica neste caso é dado por

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\omega_0 \Omega}{g_2^2}\right). \quad (3.95)$$

O espectro bosônico das excitações coletivas é dado por

$$E_1 = 0 \quad (3.96)$$

e

$$E_2 = | \omega_0 - \Omega | . \quad (3.97)$$

Em ambos os casos, usando ou não a aproximação da onda girante, existe uma transição de fase. No caso da aproximação da onda girante  $g_1 \neq 0$  e  $g_2 = 0$ , existe um modo de Nambu-Goldstone ( $E_1 = 0$ ). No caso puro onde  $g_1 = 0$  e  $g_2 \neq 0$ , também verifica-se a existência de um modo de Goldstone. Desta forma, mostramos que é possível a formação de um condensado com superradiância em um sistema de  $N$  átomos de dois níveis no limite termodinâmico onde apenas os processos virtuais contribuem. Como a energia  $E_2 \approx 0$ , excitações elementares associadas ao estado fundamental com baixíssima energia podem ser criadas, causando um efeito de flutuações significativos.

## Capítulo 4

# Modelo de Chang e Chakravarty

Neste capítulo continuaremos a utilizar técnicas funcionais para estudar uma versão modificada de um modelo discutido por Chang e Chakravarty, Legget e outros [96] [93] [97] [98], que tem sido usado para se analisar dissipação em computadores quânticos. Esse capítulo está baseado na referência [56] onde foram considerados diversos modelos assumindo que um único modo associado a um campo bosônico interage com um *ensemble* de  $N$  átomos idênticos de dois níveis em equilíbrio com um reservatório térmico a uma temperatura  $\beta^{-1}$ . Primeiramente foi estudado o modelo acima discutido. Como a hamiltoniana de interação deste modelo gera um processo virtual particular, pode-se mostrar que a função de partição é analítica para todas as temperaturas. Desta forma, não existe uma transição de fase de segunda ordem no modelo. Foi estudado também um modelo onde o acoplamento entre o modo bosônico e  $N$  átomos de dois níveis depende da intensidade do campo de radiação. Foi mostrado a existência de uma transição de fase quântica neste modelo.

Neste capítulo estudamos o comportamento analítico das quantidades termodinâmicas

do modelo de Chang-Chakravarty, isto nos permitirá saber se o sistema apresenta ou não uma transição de fase fluorescente-super-radiante. Pode-se também encontrar a temperatura crítica do sistema e o espectro do condensado bosônico. Esse modelo é similar a aquele introduzido por Chang e Chakravarty [58], Legget e outros. Estes autores estudam um átomo de dois níveis acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos sendo o acoplamento via o operador  $\sigma^z$  para o átomo. A Hamiltoniana deste modelo generalizado é

$$H = I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left( g_{jk} a_k^\dagger + g_{jk}^* a_k \right) \otimes \sigma_{(j)}^z, \quad (4.1)$$

sendo que, como já havíamos visto em modelos anteriores, as matrizes de Pauli  $\sigma_{(j)}^+$ ,  $\sigma_{(j)}^-$  e  $\sigma_{(j)}^z$  representam os processos radiativos,  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  são os operadores bosônicos usuais e  $g_{jk}$  corresponde ao acoplamento entre  $j$ -ésimo átomo com o  $k$ -ésimo modo do reservatório.

O sistema átomos-reservatório esta confinado em uma cavidade capaz de filtrar os modos de vibração do reservatório, permitindo que somente um modo do campo bosônico interaja com os átomos. Também vamos considerar a situação na qual os átomos estão confinados numa região de comprimento característico menor que o comprimento de onda associado ao modo bosônico que interaje com os átomos.

Similarmente como fizemos no capítulo anterior, definiremos o modelo de Chang-Chakravarty fermiônico. Com este propósito definiremos as variáveis fermiônicas  $\alpha_i^\dagger$ ,

$\alpha_i$ ,  $\beta_i^\dagger$  e  $\beta_i$  satisfazendo a correspondência

$$\sigma_{(i)}^z \longrightarrow (\alpha_i^\dagger \alpha_i - \beta_i^\dagger \beta_i), \quad (4.2)$$

$$\sigma_{(i)}^+ \longrightarrow \alpha_i^\dagger \beta_i, \quad (4.3)$$

e finalmente

$$\sigma_{(i)}^- \longrightarrow \beta_i^\dagger \alpha_i. \quad (4.4)$$

Com as simplificações mencionadas anteriormente e substituindo as variáveis fermiônicas obtemos que a ação do sistema pode ser escrita como

$$S = \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \frac{\partial \alpha_i(\tau)}{\partial \tau} + \beta_i^*(\tau) \frac{\partial \beta_i(\tau)}{\partial \tau} \right) \right) - \int_0^\beta d\tau H_F(\tau), \quad (4.5)$$

sendo que  $H_F$  é dada pela expressão

$$\begin{aligned} H_F &= \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) - \beta_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \right) \\ &+ \frac{g}{N} \sum_{i=1}^N \left( \left( \alpha_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) - \beta_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \right) \left( b(\tau) + b^*(\tau) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Devemos notar que a constante de acoplamento tem uma dependência do tipo  $\frac{1}{N}$  ao invés de  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  como inicialmente havíamos colocado na Eq. (4.1). Esta modificação é por motivos de renormalização, dando quantidades convergentes no limite termodinâmico.

Para estudar a termodinâmica do modelo é importante achar a função de partição do sistema, com este propósito resolveremos a seguinte integral funcional sobre os

campos anteriormente definidos

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\int [d\eta] e^S}{\int [d\eta] e^{S_0}}, \quad (4.7)$$

sendo  $S = S(b, b^*, \alpha, \alpha^\dagger, \beta, \beta^\dagger)$  a ação Euclideana definida na Eq. (6.5),  $S_0 = S_0(b, b^*, \alpha, \alpha^\dagger, \beta, \beta^\dagger)$  corresponde à ação Euclideana para o sistema sem interação. Finalmente  $[d\eta]$  é a medida da integral funcional do sistema. Na Eq. (4.7) estamos integrando funcionalmente com respeito aos campos escalares complexos  $b^*(\tau)$  e  $b(\tau)$  e os campos fermiônicos  $\alpha_i^*(\tau)$ ,  $\alpha_i(\tau)$ ,  $\beta_i^*(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$ . Como estamos estudando o sistema no equilíbrio termodinâmico, utilizaremos o formalismo de Matsubara no qual se compactifica o tempo imaginário, sendo desse modo que os campos bosônicos satisfazem condições periódicas, i.e.,  $b(\beta) = b(0)$  e os campos fermiônicos condições anti-periódicas, i.e.,  $\alpha_i(\beta) = -\alpha_i(0)$  e  $\beta_i(\beta) = -\beta_i(0)$ .

Começaremos nosso processo de integração com os campos fermiônicos. Dessa forma vamos definir a ação livre do campo bosônico como

$$S_0(b) = \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} - \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) \right). \quad (4.8)$$

Com essa separação podemos observar que a dependência nos campos fermiônicos é do tipo Gaussiano, temos então

$$S = S_0(b) + \int_0^\beta d\tau \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(\tau) M(b^*, b) \rho_i(\tau), \quad (4.9)$$

em que  $\rho_i(\tau)$  é uma matriz coluna composta pelos campos fermiônicos que tem a

forma

$$\begin{aligned}\rho_i(\tau) &= \begin{pmatrix} \beta_i(\tau) \\ \alpha_i(\tau) \end{pmatrix}, \\ \rho_i^\dagger(\tau) &= \left( \beta_i^*(\tau) \quad \alpha_i^*(\tau) \right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

e a matriz  $M(b^*, b)$  vem dada por

$$M(b^*(\tau), b(\tau)) = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \frac{\Omega}{2} + \frac{g}{N}(b(\tau) + b^*(\tau)) & 0 \\ 0 & \partial_\tau - \frac{\Omega}{2} - \frac{g}{N}(b(\tau) + b^*(\tau)) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Podemos expressar os campos bosônicos e fermiônicos  $b(\tau)$ ,  $\alpha_i(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$  por uma serie de Fourier. Podemos escrever

$$b(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_{\omega} b(\omega) e^{i\omega\tau} \quad (4.12)$$

e

$$\rho_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_p \rho_i(p) e^{ip\tau}. \quad (4.13)$$

Devido as condições de periodicidade nas funções complexas  $b(\tau)$  e as condições de anti-periodicidade nas funções Grassmanianas  $\alpha_i(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$  temos que  $\omega = \frac{2\pi n}{\beta}$  e  $p = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$  sendo frequências de Matsubara bosônicas e fermiônicas respectivamente.

Substituindo a expansão de Fourier dadas pela Eq. (6.16) e a Eq. (6.17) na matriz  $M_{pq}(b^*, b)$  dada pela Eq. (6.14) obtemos que

$$M_{pq}(b^*, b) = \begin{pmatrix} (ip + \frac{\Omega}{2})\delta_{pq} + Q & 0 \\ 0 & (ip - \frac{\Omega}{2})\delta_{pq} - Q \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

sendo que

$$Q = g N^{-1} \beta^{-1/2} \left( b^*(q-p) + b(p-q) \right). \quad (4.15)$$

Por motivo de simplificação vamos introduzir a seguinte transformação de variáveis

$$b(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b(\omega) \quad (4.16)$$

e

$$b^*(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b^*(\omega). \quad (4.17)$$

Após esse procedimento, o denominador na Eq. (4.7) se escreve como

$$\int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) = 1. \quad (4.18)$$

Dessa forma, podemos expressar nosso quociente  $\frac{Z}{Z_0}$  pela integral

$$\frac{Z}{Z_0} = \int [d\eta(b)] \exp\left(S_{eff}(b)\right), \quad (4.19)$$

em que  $S_{eff}(b)$  corresponde a uma ação efetiva para o modo bosônico a qual vem dada por

$$S_{eff} = -\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + N \ln \det(I + A). \quad (4.20)$$

Neste caso a matriz  $A$  que aparece no determinante da equação anterior tem a forma

$$(I + A) = \begin{pmatrix} I + E & 0 \\ 0 & I + D \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

sendo  $E$  e  $D$  matrices cuja forma vem dada pelas expressões

$$E_{pq} = -\left(\frac{\pi g}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + \frac{b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}}\right) \left(iq - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

e

$$D_{pq} = \left( \frac{\pi g}{\beta N} \right)^{\frac{1}{2}} \left( ip + \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + \frac{b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} \right) \left( iq + \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Com o objetivo de integrar funcionalmente a expressão da função de partição dada pela Eq. (4.19) devemos achar uma expressão mais adequada para o  $\det(I + A)$ , por tanto utilizamos a seguinte identidade

$$\det(I + A) = \det(I + E + D + ED) \simeq e^{\text{tr} E + \text{tr} D - \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{2}D^2} \quad (4.24)$$

sendo que no expoente do lado direito na Eq. (4.24) esta sendo efetuada uma aproximação em segunda ordem com respeito as matrizes  $E$  e  $D$ . Por tanto substituindo as expressões para  $E$  e  $D$  dadas em Eq. (4.22) e Eq. (4.23) respectivamente na Eq. (4.24), obtemos que a razão  $\frac{Z}{Z_0}$  definida na Eq. (4.19) adquire a forma

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \int [d\eta(b)] \exp \left( -\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) b(\omega) + a_0 (b(0) + b^*(0)) \right. \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{\omega} c(\omega) (b(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) b^*(-\omega)) + \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{\omega} d(\omega) (b(\omega) b^*(\omega)) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo que os termos  $a_0$ ,  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  se expressam como

$$a_0 = g \left( \frac{\pi \beta}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right), \quad (4.26)$$

$$c(\omega) = \frac{g^2 \pi}{\beta(\omega_0^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_p \frac{\frac{\Omega^2}{4} - p(p-\omega)}{\left( p^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right) \left( (p-\omega)^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right)}, \quad (4.27)$$

$$d(\omega) = \frac{2g^2 \pi}{\beta(\omega_0 - i\omega)} \sum_p \frac{\frac{\Omega^2}{4} - p(p-\omega)}{\left( p^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right) \left( (p-\omega)^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right)}. \quad (4.28)$$

É possível verificar que os coeficientes  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  se cancelam no caso em que  $\omega \neq 0$  e  $c(0)$  junto com  $d(0)$  são distintos de zero. Embora os valores de  $c(0)$  e  $d(0)$  não contribuam no limite termodinâmico, i.e.,  $N \rightarrow \infty$ . Então neste limite temos que  $\frac{Z}{Z_0}$  resulta ser da forma

$$\frac{Z}{Z_0} = \int \prod_{\omega \neq 0} db(\omega) db^*(\omega) e^{-\pi \sum_{\omega \neq 0} b^*(\omega) b(\omega)} \times \int db(0) db^*(0) e^{-\pi b^*(0) b(0) + a_0 (b(0) + b^*(0))}. \quad (4.29)$$

As integrais sobre as variáveis em que  $\omega \neq 0$  são independentes dos parâmetros termodinâmicos, por tanto, elas são absorvidas por uma constante de normalização, i.e.,

$$\frac{Z}{Z_0} = C_0 \int db(0) db^*(0) e^{-\pi b^*(0) b(0) + a_0 (b(0) + b^*(0))}. \quad (4.30)$$

Então a função de partição possui uma forma exata, dada por

$$\ln Z = \ln Z_0 + \ln C_0 + \frac{g^2 \beta}{\omega_0} \tanh^2 \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right). \quad (4.31)$$

Da Eq. (4.31) todas as quantidades termodinâmicas associadas ao modelo podem ser derivadas. A energia média  $E$  e a entropia do sistema  $S$  são dadas por

$$E = E_0 - \frac{g^2}{2\omega_0} \tanh \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right) \frac{\sinh \left( \frac{\Omega \beta}{2} \right) + \Omega \beta}{\cosh^2 \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right)}, \quad (4.32)$$

e

$$S = S_0 + \ln C_0 - \frac{g^2 \beta^2 \Omega}{2\omega_0} \frac{\tanh \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{\Omega \beta}{4} \right)}, \quad (4.33)$$

onde  $S_0$  corresponde a entropia do sistema sem interação e utilizando a terceira lei da termodinâmica achamos que  $C_0 = 1$ .

Devemos salientar que a contribuição do último termo do lado direito da Eq. (4.31) vem dos termos com modo zero. Estes modos zero estão contribuindo com valores negativos tanto na energia como na entropia do sistema. Já é conhecido na literatura que estes modos zero conduzem a resultados problemáticos [31]. Em modelos discutidos por Dowker a entropia fica negativa e também na energia livre aparecem polos dependentes da temperatura [99]. Devido a esta observação podemos adotar duas posturas com respeito ao problema do modo zero para nosso caso. A primeira é desconsiderar o modo zero. E a segunda postura menos radical é assumir que  $g^2$  possui uma cota máxima, cujo valor se deduz da Eq. (4.33). Neste caso, para valores de  $g^2$  inferiores à da cota máxima, o sistema possui entropia positiva. Ambas posturas, para nosso caso, resolvem o problema do modo zero, evitando entropias negativas, fazendo consistente nosso modelo do ponto de vista da termodinâmica. Adotando qualquer destas posturas a função de partição resulta ser analítica para qualquer valor da temperatura, mostrando assim ausência de uma transição de fase.



## Capítulo 5

# Modelo de Dicke com acoplamento dependente da intensidade

Um modelo interessante e bastante estudado na literatura é aquele que estamos chamando de modelo de Dicke com acoplamento dependente da intensidade, o qual inclui uma dependência com a intensidade, na constante de acoplamento entre os átomos e o modo do campo bosônico do modelo de Dicke. Embora, o modelo que estudaremos com dependência na intensidade corresponde ao modelo de Dicke generalizado, i.e., consideraremos os termos ressonantes e os termos anti-ressonantes. Neste caso, a contribuição dependente da intensidade aparece somente nos termos ressonantes e não nos termos anti-ressonantes. Por tanto a Hamiltoniana deste

modelo tem a forma

$$\begin{aligned}
H &= I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_B + \\
&+ \frac{g_1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left( b (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^+ + b^\dagger (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^- \right) + \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left( b^\dagger \otimes \sigma_{(j)}^+ + b \otimes \sigma_{(j)}^- \right). \tag{5.1}
\end{aligned}$$

Como a integral funcional associada a Hamiltoniana acima é não Gaussiana nos restringiremos ao estudo de baixas temperaturas. Mostraremos que nesse caso a função de partição é exatamente solúvel.

Prosseguindo com o processo de integração funcional, aplicaremos a mudança de variável das matrizes de Pauli para combinações bilineares de campos Grassmannianos. Depois desta transformação a Hamiltoniana dada pela Eq. (5.1) adquire a forma

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{j=1}^N \frac{\Omega}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b + \\
&+ \frac{g_1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left( b (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \alpha_i^\dagger \beta_i + b^\dagger (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \beta_i^\dagger \alpha_i \right) + \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left( b \beta_i^\dagger \alpha_i + b^\dagger \alpha_i^\dagger \beta_i \right). \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Note que estaremos utilizando duas constantes de acoplamento distintas,  $g_1$  e  $g_2$  para os termos ressonantes e os termos anti-ressonantes respectivamente. Gostariamos salientar que a única diferença entre a Hamiltoniana do modelo de Dicke generalizado dependente da intensidade dada pela Eq. (5.2) e a Hamiltoniana do

modelo de Dicke generalizado dada pela Eq. (3.47) corresponde ao termo  $(b^\dagger b)^{\frac{1}{2}}$ , o qual aparece multiplicando a parte da Hamiltoniana que gera os processos ressonantes. Conseqüentemente, neste caso o procedimento de integrar funcionalmente com respeito as variáveis Grassmanianas se repete da mesma maneira. Então, temos expressões da forma dadas pela Eq. (4.19) e a Eq. (6.30), sendo que neste caso a matriz  $A$  vem dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Em que as matrizes  $B$  e  $C$  tem as seguintes componentes

$$\begin{aligned}
 B_{pq} = & - \left( \frac{\pi}{N\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( ip + \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( iq - \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \times \left( g_1 \left( \frac{\pi}{\beta\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} (b^*(0)b(0))^{\frac{1}{2}} \frac{b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + g_2 \frac{b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} \right)
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

e

$$\begin{aligned}
 C_{pq} = & \left( \frac{\pi}{N\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( ip - \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( iq + \frac{\Omega}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \times \left( g_1 \left( \frac{\pi}{\beta\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} (b^*(0)b(0))^{\frac{1}{2}} \frac{b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} + g_2 \frac{b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} \right).
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Com o propósito de efetuar a integral funcional no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), utilizamos a aproximação  $\det(I+A) = \det(I+BC) \simeq \exp(\text{tr}BC)$ . Então chegamos

a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} = & \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} (1-c(\omega)) b^*(\omega) b(\omega)\right. \\ & + \pi \sum_{\omega} a(\omega) b^*(0) b(0) b^*(\omega) b(\omega) + \pi \sum_{\omega} d(\omega) \left(b^*(0) b(0)\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \left. \times \left(b(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) b^*(-\omega)\right)\right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo que os termos  $a(\omega)$  e  $c(\omega)$  que aparecem na equação anterior, são dados respectivamente por

$$a(\omega) = \frac{\pi g_1^2}{\beta \omega_0} \tanh\left(\frac{\beta \Omega}{4}\right) \frac{1}{(\Omega - i\omega)(\omega_0 - i\omega)}, \quad (5.7)$$

$$c(\omega) = g_2^2 \tanh\left(\frac{\beta \Omega}{4}\right) \frac{1}{(\Omega + i\omega)(\omega_0 - i\omega)}, \quad (5.8)$$

e

$$d(\omega) = g_1 g_2 \left(\frac{\pi}{\beta \omega_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\frac{\beta \Omega}{4}\right) \frac{1}{(\Omega + i\omega)(\omega_0^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.9)$$

Na Eq. (5.6) estamos separando o modo zero dos modos diferentes de zero, por tanto podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} = & \int db(0) db^*(0) e^{\pi \left(a(0) (b^*(0))^2 b^2(0) + (c(0)-1) b(0) b^*(0)\right)} \\ & \int \prod_{\omega \neq 0} db(\omega) db^*(\omega) e^{-\pi \sum_{\omega \neq 0} (1-c(\omega)) b^*(\omega) b(\omega)} \\ & \times e^{\pi \sum_{\omega \neq 0} a(\omega) b^*(0) b(0) b^*(\omega) b(\omega) + d(\omega) \left(b^*(0) b(0)\right)^{\frac{1}{2}} \left(b(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) b^*(-\omega)\right)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aqui vemos a dificuldade de integrar devido a termos não Gaussianos nesta última expressão dada pela Eq. (5.10). No entanto, no regime de temperaturas baixas

( $\beta \rightarrow \infty$ ), podemos ver que a contribuição dos termos anti-ressonantes dominam com respeito aos ressonantes. Então tomando este limite nas expressões dadas pela Eq. (5.7), Eq. (5.8) e Eq. (5.9), obtemos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{Z}{Z_0} = \int \prod_{\omega} db(\omega) db^*(\omega) e^{-\pi \sum_{\omega} (1-c(\omega)) b^*(\omega) b(\omega)}. \quad (5.11)$$

Efetuando esta integral anterior, chegamos a seguinte expressão

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{Z}{Z_0} = \prod_{\omega} \left( 1 - c(\omega) \right)^{-1}, \quad (5.12)$$

sendo que  $c(\omega)$  no limite  $\beta \rightarrow \infty$  tem a forma

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} c(\omega) = \frac{g_2^2}{(\Omega + i\omega)(\omega_0 - i\omega)}. \quad (5.13)$$

Este resultado para a quantidade  $Z/Z_0$  apresenta um comportamento não analítico no caso em que  $g_2 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$ , evidenciando uma transição de fase quântica, i.e., para  $T = 0$ .



## Capítulo 6

# Modelo de Dicke generalizado considerando a interação do tipo dipolo-dipolo

Vamos agora examinar como o formalismo apresentado no capítulo 2, pode ser usado para a detecção dos estados emaranhados. O teorema de Bell [100] [101] [102] e os experimentos relacionados a este teorema nos dizem que a mecânica quântica é uma teoria não-local. Mostrou-se que qualquer estado puro emaranhado de duas partículas de spin- $\frac{1}{2}$  viola a desigualdade de Bell [103] [104] [105]. Estados de um sistema composto que não podem ser fatorizados em um produto dos estados que descrevem seus subsistemas são chamados estados emaranhados [106] [107]. Com o desenvolvimento da informação quântica [108] [109] [110] e suas aplicações em computação e comunicação [92] [111] [112] [113] [114] [115], os estados emaranhados têm atraído atenção da comunidade científica, pois vários protocolos quânticos podem ser realizados exclusivamente com a ajuda de tais estados [116] [117]. Um prob-

lema fundamental que aparece nesta área de pesquisa é como assegurarmos que um sistema de muitos corpos se encontra em um estado emaranhado. Uma mudança na temperatura crítica de transição de fase fluorescente-superradiante em um sistema de  $N$  átomos interagindo com um campo bosônico pode trazer uma resposta a esta questão.

Existem na literatura diferentes métodos para a detecção de estados emaranhados em um sistema composto de dois átomos. Um deles baseia-se em medir a intensidade da distribuição angular de um campo fluorescente emitidos pelos dois átomos. Esta proposta se fundamenta no fato que o campo fluorescente emitido por átomos exibe propriedades direcionais [118] [119] [120] [121] [122] [123]. Esta propriedade direcional nos prove um método viável de detectar os estados internos deste sistema composto por dois átomos interagentes. Nesse momento é interessante salientar que as propriedades de emissão espontânea de dois átomos idênticos emaranhados interagindo com os modos do vácuo de um campo bosônico foram investigadas por Guo e Yang [124]. Estes autores mostraram que a evolução temporal da inversão de população, que é proporcional à intensidade da radiação, depende do grau de emaranhamento inicial do sistema. Lambert et al. [125] [126] investigaram o hamiltoniano de Dicke estudando o emaranhamento entre o *ensemble* atômico e o modo do campo, calculando a entropia de von Neumann no limite termodinâmico na fase superradiante.

Neste capítulo mostraremos que interação dipolo-dipolo de alcance infinito entre

os átomos do modelo de Dicke generalizado não modifica a temperatura crítica da transição de fase fluorescente super-radiante e o espectro do condensado bosônico. Neste caso também estaremos utilizando o método de integral funcional, sendo que devido ao termo de interação do tipo dipolo-dipolo a integral funcional não é Gaussiana. Para superar este problema utilizaremos campos auxiliares as quais permitem resolver a integral funcional de forma exata sempre que tomemos o limite termodinâmico. A Hamiltoniana deste modelo se define como

$$\begin{aligned}
 H_T = & \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N H_{(ij)} \sigma_{(i)}^+ \otimes \sigma_{(j)}^- + I_B \otimes \Omega \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b_k^\dagger b_k \otimes I_Q + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} (b_k + b_k^\dagger) \otimes (\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^-). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Similarmente como nos modelos anteriores, os operadores  $b$  e  $b^\dagger$  são os operadores de criação e aniquilação do campo bosônico. Os operadores  $\sigma_{(j)}^+$ ,  $\sigma_{(j)}^-$  e  $\sigma_{(j)}^z$  que satisfazem a álgebra de comutação do momentum angular, representam os átomos. Finalmente,  $g$  é a constante de acoplamento entre os átomos e o modo bosônico e cada valor de  $H_{ij}$  corresponde a constante de acoplamento da interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos  $i$  e  $j$  respectivamente.

Definindo similarmente aos casos anteriores os operadores fermiônicos  $\alpha_i^\dagger$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i^\dagger$  e  $\beta_i$ , que satisfazem regras de anti-comutação  $\alpha_i \alpha_j^\dagger + \alpha_j^\dagger \alpha_i = \delta_{ij}$  e  $\beta_i \beta_j^\dagger + \beta_j^\dagger \beta_i = \delta_{ij}$ . Agora definimos as seguintes expressões bilineares  $\alpha_i^\dagger \alpha_i - \beta_i^\dagger \beta_i$ ,  $\alpha_i^\dagger \beta_i$  e  $\beta_i^\dagger \alpha_i$ , as quais satisfazem as mesmas regras de comutação das matrizes  $\sigma_{(i)}^z$ ,  $\sigma_{(i)}^+$  e  $\sigma_{(i)}^-$ . Então podemos fazer uma mudança de variável dos operadores de spin para as formas

bilineares da seguinte forma:

$$\sigma_{(i)}^z \longrightarrow (\alpha_i^\dagger \alpha_i - \beta_i^\dagger \beta_i), \quad (6.2)$$

$$\sigma_{(i)}^+ \longrightarrow \alpha_i^\dagger \beta_i, \quad (6.3)$$

e finalmente

$$\sigma_{(i)}^- \longrightarrow \beta_i^\dagger \alpha_i. \quad (6.4)$$

Utilizando a Eq. (6.1), a ação Euclideana fermiônica pode ser escrita como

$$S = \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \frac{\partial \alpha_i(\tau)}{\partial \tau} + \beta_i^*(\tau) \frac{\partial \beta_i(\tau)}{\partial \tau} \right) \right) - \int_0^\beta d\tau H_F(\tau). \quad (6.5)$$

Nesta ação Euclideana dada pela Eq. (6.5),  $H_F$  corresponde a Hamiltoniana do modelo. Aqui introduziremos duas constantes de acoplamento  $g_1$  e  $g_2$  para os termos de interação ressonantes e anti-ressonantes respectivamente, então desta forma temos que

$$\begin{aligned} H_F &= \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) - \beta_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \right) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N H_{(ij)} \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \beta_j^*(\tau) \alpha_j(\tau) + \\ &+ \frac{g_1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) b(\tau) + \alpha_i(\tau) \beta_i^*(\tau) b^*(\tau) \right) + \\ &+ \frac{g_2}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i(\tau) \beta_i^*(\tau) b(\tau) + \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) b^*(\tau) \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Estamos interessados em achar a função de partição do modelo, então vamos calcular o quociente definido na Eq. (3.44). Sendo que  $S = S(b, b^*, \alpha, \alpha^\dagger, \beta, \beta^\dagger)$  é a ação

Euclideana dada pela Eq. (6.5),  $S_0 = S_0(b, b^*, \alpha, \alpha^\dagger, \beta, \beta^\dagger)$  é a ação Euclideana livre, i.e., desconsiderando a interação dos átomos com o modo bosônico e a interação dipolo-dipolo entre os átomos. Finalmente  $[d\eta]$  corresponde a medida da integral funcional. Como estamos interessados em analisar as propriedades do sistema no equilíbrio térmico, usaremos novamente o formalismo do tempo imaginário. Neste caso, os campos na integral funcional dada pela Eq. (3.44) satisfazem condições periódicas e antiperiódicas para os campos bosônicos e fermiônicos respectivamente, i.e.,  $b(\beta) = b(0)$ ,  $\alpha_i(\beta) = -\alpha_i(0)$  e  $\beta_i(\beta) = -\beta_i(0)$ . A ação livre para o campo bosônico esta dada pela seguinte expressão

$$S_0(b) = \int_0^\beta d\tau \left( b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} - \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) \right). \quad (6.7)$$

Com a intenção de obter uma ação efetiva para o modo bosônico devemos integrar funcionalmente sobre os campos fermiônicos na Eq. (3.44). O problema desta integração nos campos fermiônicos na Eq. (6.6), diferentemente dos modelos anteriores, vem da interação do tipo dipolo-dipolo, que é claramente um termo não Gaussiano. Introduzindo campos auxiliares na integração funcional podemos superar este problema. Com este propósito apresentamos a seguinte integral

$$\begin{aligned} & \exp \left( -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N x_i^* A_{ij} x_j \right) = (\det A)^{-1} \times \\ & \times \int \prod_{i=1}^N \frac{dy_i^* dy_i}{-2\pi i} e^{\sum_{i,j=1}^N y_i^* A_{ij}^{-1} y_j + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N y_i x_i^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N y_i^* x_i}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

sendo que esta integral é válida para variáveis comutantes. Agora analisemos a

seguinte expressão

$$\begin{aligned} M &= \exp \left( -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \int_0^\beta d\tau \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) H_{ij} \beta_j^*(\tau) \alpha_j(\tau) \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \int_0^\beta d\tau \left( \beta_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) \right)^* H_{ij} \beta_j^*(\tau) \alpha_j(\tau) \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Como cada termo bilinear de variáveis Grassmanianas comutam, i.e.,  $(\alpha_i \beta_i^*)(\alpha_j \beta_j^*) = (\alpha_j \beta_j^*)(\alpha_i \beta_i^*)$ , podemos utilizar a integral Gaussiana dada pela Eq. (6.8) na versão de integral funcional e a Eq. (6.9) adquire a forma

$$\begin{aligned} M &= a_0 (\det H)^{-1} \int Dr D r^* e^{\sum_{i,j=1}^N \int_0^\beta d\tau r_i^*(\tau) H_{ij}^{-1} r_j(\tau)} \times \\ &\times e^{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \int_0^\beta d\tau \left( r_i(\tau) \alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) + r_i^*(\tau) \beta_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) \right)}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

sendo que o campo auxiliar  $r_i(\tau)$  satisfaz condições periódicas, i.e.,  $r_i(0) = r_i(\beta)$  e  $r_i^*(0) = r_i^*(\beta)$ . Substituindo esta última expressão na função de partição  $Z$ , obtemos que

$$Z = a_0 (\det H)^{-1} \int Dr D r^* e^{-\sum_{i,j=1}^N \int_0^\beta d\tau r_i^*(\tau) H_{ij}^{-1} r_j(\tau)} \int [d\eta] e^{S_r}, \quad (6.11)$$

sendo que a integral  $\int [d\eta] e^{S_r}$  depende dos campos  $r_i^*(\tau)$  e  $r_i(\tau)$ . A ação também pode ser separada em uma ação livre para o campo bosônico e uma parte Gaussiana para a parte fermiônica. Então temos que

$$S_r = S_0(b) + \int_0^\beta d\tau \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(\tau) M_r(b^*, b) \rho_i(\tau), \quad (6.12)$$

em que  $\rho_i(\tau)$  é uma matriz coluna com os campos fermiônicos sendo suas compo-

mentes, esta tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\rho_i(\tau) &= \begin{pmatrix} \beta_i(\tau) \\ \alpha_i(\tau) \end{pmatrix}, \\ \rho_i^\dagger(\tau) &= \begin{pmatrix} \beta_i^*(\tau) & \alpha_i^*(\tau) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.13)$$

e a matriz  $M(b^*, b)$  esta dada por

$$M_r(b^*(\tau), b(\tau)) = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \frac{\Omega}{2} & -N^{-1/2} \left( Q_r(b^*(\tau), b(\tau)) \right)^* \\ -N^{-1/2} Q_r(b^*(\tau), b(\tau)) & \partial_\tau - \frac{\Omega}{2} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

sendo que  $Q_r(b^*(\tau), b(\tau)) = g_1 b(\tau) + g_2 b^*(\tau) - r_i(\tau)$ .

Expressando os campos  $r_i(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $\alpha_i(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$  por uma serie de Fourier obtemos que

$$r_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_v r_i(v) e^{iv\tau}, \quad (6.15)$$

$$b(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_\omega b(\omega) e^{i\omega\tau}, \quad (6.16)$$

e

$$\rho_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_p \rho_i(p) e^{ip\tau}. \quad (6.17)$$

Como esses campos  $r_i(\tau)$  e  $b(\tau)$  satisfazem condições de contorno periódicas e os campos fermiônicos  $\alpha_i(\tau)$  e  $\beta_i(\tau)$  satisfazem condições de contorno anti-periódicas, temos que  $v, \omega = \frac{2\pi n}{\beta}$  e  $p = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ , correspondendo as frequências de Matsubara bosônicas e fermiônicas respectivamente. Substituindo as expansões de Fourier na ação dada pela Eq. (6.12) obtemos que

$$S_r = \sum_\omega (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega) + \sum_{p,q} \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(p) M_{pq}(b^*, b) \rho_i(q), \quad (6.18)$$

sendo que a matriz  $M_{pq}(b^*, b)$  é dada por

$$M_{pq}(b^*, b) = \begin{pmatrix} (ip + \Omega/2)\delta_{pq} & -(N\beta)^{-1/2} Q_{pq}^\dagger \\ -(N\beta)^{-1/2} Q_{pq} & (ip - \Omega/2)\delta_{pq} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

e

$$Q_{pq} = g_1 b(p - q) + g_2 b^*(q - p) - r_i(p - q). \quad (6.20)$$

Nesse caso as integrais com respeito aos campos fermiônicos são Gaussianos. Então integrando nos campos fermiônicos obtemos que

$$\int [d\eta(\rho)] \exp\left(\sum_{p,q} \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(p) M_{pq}(b^*, b) \rho_i(q)\right) = \prod_{i=1}^N \det M_i(b^*, b), \quad (6.21)$$

sendo que a matriz  $M_i(b^*, b)$  é uma matriz em bloques a qual possui a seguinte forma

$$M_i(b^*, b) = \begin{pmatrix} iP + \frac{\Omega}{2} I & -(N\beta)^{-1/2} Q^\dagger \\ -(N\beta)^{-1/2} Q & iP - \frac{\Omega}{2} I \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Nesta última equação  $I$  corresponde a matriz identidade e as componentes da matriz  $P$  são  $P_{pq} = p\delta_{pq}$  e da matrix  $Q$  esta definida na Eq. (6.20). Nosso propósito final é obter uma expressão fechada para o quociente  $\frac{Z}{Z_0}$ , definido na Eq. (3.44). Então combinando os resultados dados pela Eq. (6.21), Eq. (6.12) e Eq. (6.11) obtemos que  $\frac{Z}{Z_0}$  fica dado por

$$\frac{(\det H)^{-1} \int Dr D r^* e^{\sum_{i,j=1}^N \sum_v r_i^*(v) H_{ij}^{-1} r_j(v)} \int [d\eta(b)] e^{\sum_\omega (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)} \prod_{j=1}^N \det M_j(b^*, b)}{\int [d\eta(b)] e^{\sum_\omega (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)} \det^N M(0, 0)} \quad (6.23)$$

sendo que a medida funcional  $[d\eta(b)]$  tem a forma

$$[d\eta(b)] = \prod_{\omega} db(\omega) db^*(\omega). \quad (6.24)$$

Na Eq. (6.23) a matriz  $M(0, 0)$  vem dada por

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} iP + \frac{\Omega}{2} I & 0 \\ 0 & iP - \frac{\Omega}{2} I \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Para simplificar nossos cálculos introduzimos a seguinte transformação

$$b(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b(\omega) \quad (6.26)$$

e

$$b^*(\omega) \rightarrow \left( \frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b^*(\omega). \quad (6.27)$$

Observe-se que a Eq. (6.27) não corresponde ao complexo conjugado da Eq. (6.26), embora este tipo de transformação se pode justificar fazendo o procedimento em coordenadas polares. Com esta transformação o denominador da Eq. (6.23) toma o valor da unidade

$$\int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) b(\omega)\right) = 1. \quad (6.28)$$

Por tanto podemos expressar a quantidade  $\frac{Z}{Z_0}$  pela integral

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= (\det H)^{-1} \int Dr Dr^* e^{\sum_{i,j=1}^N \sum_v r_i^*(v) H_{ij}^{-1} r_j(v)} \times \\ &\times \int [d\eta(b)] \exp\left(S_{eff}(b)\right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

em que  $S_{eff}(b)$  corresponde a ação efetiva para o modo bosônico. Neste caso temos que

$$S_{eff} = -\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) b(\omega) + \sum_{i=1}^N \ln \det(I + A_i). \quad (6.30)$$

A matriz  $A_i$  no determinante da equação anterior vem dada por

$$\det(I + A_i) = \det\left(M^{-1/2}(0,0)M_i(b^*, b)M^{-1/2}(0,0)\right). \quad (6.31)$$

Efetuada este produto de matrizes obtemos que a matriz  $A$  tem a forma

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ -C_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

As componentes das matrizes  $B_i$  e  $C_i$  estão dadas por

$$\begin{aligned} B_{ipq} &= -\left(\frac{1}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(iq - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(ip + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{\pi}g_1 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + \frac{\sqrt{\pi}g_2 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} - r_i^*(q-p)\right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

e

$$\begin{aligned} C_{ipq} &= \left(\frac{1}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(iq + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{\pi}g_1 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} + \frac{\sqrt{\pi}g_2 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} - r_i(p-q)\right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Com o propósito de efetuar a integral funcional dada pela Eq. (6.29) devemos achar

uma expressão mais adequada para a determinante  $\det(I + A)$ . Para isto utilizamos

a seguinte aproximação

$$\det(I + A_i) = \det(I + B_i C_i) \rightarrow \exp\left(\text{tr}(B_i C_i)\right). \quad (6.35)$$

Por tanto, com esta expressão da Eq. (6.35) podemos afirmar que o quociente  $\frac{Z}{Z_0}$

definido na Eq. (6.29) tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= (\det H)^{-1} \int Dr Dr^* \times \\ &\times e^{\sum_{i,j=1}^N \sum_v r_i(v) \left(H_{ij}^{-1} - \frac{1}{N} \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right) \frac{\delta_{ij}}{iv-\Omega}\right) r_j^*(v)} \frac{Z_r}{Z_0}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \frac{Z_r}{Z_0} = & \int [d\eta(b)] e^{-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a(\omega)\right) b(\omega)} \times \\ & \times e^{\pi \sum_{\omega} \left( b(\omega) c(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c(\omega) b^*(-\omega) + \frac{1}{N} d_1(\omega) b(\omega) + \frac{1}{N} d_2(\omega) b^*(\omega) \right)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Na Eq. (6.36) os coeficientes  $a(\omega)$  e  $c(\omega)$  vem dados pelas expressões

$$a(\omega) = \left( \frac{g_1^2 (\Omega - i\omega)^{-1} + g_2^2 (\Omega + i\omega)^{-1}}{(\omega_0 - i\omega)} \right) \tanh \left( \frac{\beta \Omega}{4} \right), \quad (6.38)$$

$$c(\omega) = \left( \frac{g_1 g_2 \Omega}{(\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2} (\Omega^2 + \omega^2)} \right) \tanh \left( \frac{\beta \Omega}{4} \right), \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} d_1(\omega) = & -\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\omega_0 - i\omega}} \times \\ & \times \left( \frac{g_1}{\Omega - i\omega} \sum_i r_i^*(\omega) + \frac{g_2}{\Omega + i\omega} \sum_i r_i(-\omega) \right) \tanh \left( \frac{\beta \Omega}{4} \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

e

$$\begin{aligned} d_2(\omega) = & -\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\omega_0 - i\omega}} \times \\ & \times \left( \frac{g_1}{\Omega - i\omega} \sum_i r_i(\omega) + \frac{g_2}{\Omega + i\omega} \sum_i r_i^*(-\omega) \right) \tanh \left( \frac{\beta \Omega}{4} \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Efetuando as integrais Gaussianas nas variáveis bosônicas na Eq. (3.89) finalmente

obtemos que

$$\frac{Z_r}{Z_0} = I_0 \prod_{\omega > 0} \frac{e^{\frac{1}{N} \frac{\tanh\left(\frac{\beta \Omega}{4}\right)}{\Omega^2 + \omega^2} \left( (\Omega + i\omega) \sum_{ij} r_i(\omega) r_j^*(\omega) + (\Omega - i\omega) \sum_{ij} r_i(-\omega) r_j^*(-\omega) \right)}}{a(-\omega)a(\omega) - 4c^2(\omega)}, \quad (6.42)$$

em que

$$I_0 = \frac{e^{\frac{1}{N\Omega} \tanh\left(\frac{\beta \Omega}{4}\right) \sum_{ij} r_i(0) r_j^*(0)}}{\left( a^2(0) - 4c^2(0) \right)^{1/2}}. \quad (6.43)$$

Agora podemos comparar a função de partição do modelo de Dicke generalizado dada na Eq (3.82) com a função de partição deste modelo que acabamos de estudar o qual considera o acoplamento tipo dipolo-dipolo dadas pelas Eqs. (6.42) e (6.43). Podemos ver que os polos em ambas funções de partição são os mesmos, i.e., tanto a temperatura crítica de transição de fase da fluorescência para a super-radiância como o espectro do condensado bosônico não são afetados pela inclusão do termo de interação entre os átomos sendo do tipo dipolo-dipolo.

# Capítulo 7

## Conclusões

Nesta tese estudamos dois tópicos distintos. O primeiro tratou de campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas que confinam o campo. Bekenstein mostrou que existe um limite natural para entropia específica de sistemas físicos nessa situação. Investigamos uma generalização a desigualdade de Bekenstein. O sistema físico estudado consistiu de um campo escalar real com auto-interação do tipo  $g\varphi^p$  no regime de acoplamento forte. O segundo assunto correspondeu a aplicação de métodos funcionais em ótica quântica. Uma transição de fase de segunda ordem do tipo fluorescente-superradiante foi investigada nos quatro seguinte modelos: o modelo de Dicke generalizado, o modelo de Chang-Chakravarty, o modelo de Dicke com acoplamento entre os átomos e o sistema bosônico dependente da intensidade e finalmente o modelo de Dicke onde consideramos uma interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos.

Mostramos nessa tese que podemos generalizar a desigualdade de Bekenstein se assumirmos que o sistema em questão está sendo descrito por uma teoria escalar do

tipo  $(g_0 \varphi^p)_d$  na presença de estruturas macroscópicas [26] [27]. Devemos também assumir que a auto-interação é forte o suficiente para que usemos a expansão perturbativa para o acoplamento forte. Assumimos que o campo escalar está confinado no interior de um hipercubo de aresta  $L$ , e que também está em equilíbrio térmico a temperatura  $\beta^{-1}$ . A energia renormalizada por unidade de comprimento, correspondente ao ponto-zero da teoria livre será representada por  $\varepsilon_d^{(r)}$ . No caso de altas temperaturas podemos mostrar que a entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi$ , onde  $h_1(d)$  e  $h_2(d)$  são funções analíticas do número de dimensões euclidianas  $d$  e  $\xi = \frac{\beta}{L}$ . Para baixas temperaturas, temos que a entropia específica satisfaz a seguinte desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1}}$ . Note que a condição de uma energia do ponto-zero renormalizada positiva é fundamental para que a última desigualdade seja válida.

Com respeito a expansão perturbativa para o acoplamento forte, o problema fundamental é dar sentido operacional ao gerador funcional de valor independente. A solução desse problema foi apresentada por Klauder em várias publicações [28] [29] [30]. Em vez de utilizar uma medida funcional que possui invariância translacional, Klauder utilizou uma medida onde a invariância translacional foi perdida, dada por  $[d\phi] = \prod_x \frac{d\phi(x)}{|\phi(x)|}$ , como enfatizamos anteriormente. Assumindo que a fonte externa é constante, o gerador funcional de valor independente se transforma na função geradora de valor independente. Até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$  é possível separar  $\ln Z(V, h)$  em duas contribuições. Uma que contém apenas a função geradora de

valor independente, e outra que contém a função-zeta espectral. As condições de contorno serão impostas fazendo uso da função zeta espectral [31] [32] [33] [34].

Como já comentamos, nessa tese também apresentamos o estudo de fenômenos críticos para quatro modelos do tipo spin-boson [27] [55] [56] [57]. Nesse caso, utilizando o método implementado por Popov e Fedotov [53]. O primeiro modelo a ser estudado correspondeu ao modelo de Dicke completo, no qual não se considerou a aproximação da onda-girante e o limite termodinâmico foi utilizado. Similarmente ao trabalho de Hioe [40] nesse primeiro modelo [55], foram incluídos os termos  $(b^\dagger \sigma_{(i)}^+)$  e  $(b \sigma_{(i)}^-)$  com uma constante de acoplamento distinta daquela utilizada para os termos ressonantes. Foi possível reproduzir o valor da temperatura crítica obtida por Hioe. Neste trabalho, além de ser obtida a temperatura crítica do modelo, se obteve também o espectro do condensado bosônico aparecendo uma contribuição devido aos termos não-ressonantes. Na referência [56] estudamos outros dois modelos, um deles é o modelo de Chang-Chakravarty em que a interação entre os átomos e os bósons é do tipo  $g \sum_i^N (b^\dagger + b) \sigma_i^z$ , sendo ele também um termo que não conserva energia na primeira ordem em teoria de perturbações. Este tipo de interação foi estudada por Chang e Chakravarty [58] mas no caso de um único átomo. Como resultado neste trabalho [56], se obteve que o modelo de Chang-Chakravarty no limite termodinâmico não apresenta transição de fase fluorescente super-radiante. Neste modelo o modo zero contribui com valores negativos para a entropia e energia no caso de temperaturas baixas. Para contornar esses problemas duas alternativas são

possíveis: a primeira consiste em desconsiderar o modo zero e a segunda em colocar um limite superior na constante de acoplamento do modelo. O terceiro modelo estudado também nesta referência, corresponde ao modelo de Dicke generalizado em que se considera a dependência na intensidade da radiação no termo que conserva energia. Este modelo é estudado a temperatura zero, encontrando uma transição de fase. O quarto modelo [57], corresponde ao modelo de Dicke generalizado no qual se inclui a interação do tipo dipolo-dipolo entre os átomos, sendo o caso em que esta interação é de alcance infinito. O propósito era analisar a dependência da transição de fase, devido à inclusão do termo de interação dipolo-dipolo. Como resultado desta inclusão, se tem que a temperatura crítica para transição de fase não muda, nem o espectro do condensado bosônico.

Podemos vislumbrar diversas linhas de pesquisa a serem trilhadas como continuação natural dessa tese. Com relação ao limite de Bekenstein o estudo desse limite em teorias com liberdade assintótica é de fundamental importância. Nossos resultados também nos remetem ao estudo de outros modelos da teoria quântica de campos como a electrodinâmica escalar por exemplo, na presença de estruturas macroscópicas. Com relação aos modelos de ótica quântica o estudo de sistemas emaranhados e a possibilidade de se alterar propriedades críticas de modelos quando o sistema apresenta um certo grau de emaranhamento também merecem um estudo mais detalhado.

# Apêndice A

## Demonstração de que o valor da função zeta espectral se anula na origem do plano complexo $s$ , i.e., $\zeta_D(s)|_{s=0} = 0$

Como discutido anteriormente, para levarmos em conta as propriedades de escala (“scaling”, em inglês), devemos introduzir um parâmetro arbitrário com dimensão de massa  $\mu$  para definirmos todas as quantidades físicas adimensionais e, em particular, efetuarmos a mudança

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right) \zeta_D(s)|_{s=0}. \quad (\text{A.1})$$

Neste apêndice, provaremos que a função zeta espectral em  $s = 0$  se anula, por conseguinte a mudança acima representada é trivial. A função zeta de Epstein é definida como sendo

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s) = \sum_{n_1, \dots, n_p = -\infty}^{\infty} \left( (a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2 \right)^{-s}, \quad (\text{A.2})$$

onde a linha indica que o termo referente ao modo zero associado ao operador em questão deve ser omitido. Esta soma é convergente apenas para  $2s > p$ . Não obstante, podemos encontrar uma representação integral que vale em todo o plano complexo com exceção de pólos simples para  $p = 2s$  [127]. Esta representação é dada por

$$\begin{aligned} (\pi \eta)^{-s} \Gamma(s) Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s) = \\ -\frac{1}{s} + \frac{2}{p-2s} + \eta^{-s} \int_{\eta}^{\infty} dx x^{s-1} (\vartheta(0, \dots, 0; a_1^2 x, \dots, a_p^2 x) - 1) + \\ + \eta^{(2s-p)/2} \int_{1/\eta}^{\infty} dx x^{(p-2s)/2-1} (\vartheta(0, \dots, 0; x/a_1^2, \dots, x/a_p^2) - 1) , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\eta^{p/2}$  é o produto de  $p$ 's parâmetros  $a_i$  dados por  $\eta^{p/2} = a_1 \dots a_p$ , e a função de Jacobi generalizada  $\vartheta(z_1, \dots, z_p; x_1, \dots, x_p)$ , é definido por

$$\vartheta(z_1, \dots, z_p; x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p \vartheta(z_i; x_i) , \quad (\text{A.4})$$

com  $\vartheta(z; x)$  sendo a função de Jacobi, i.e.,

$$\vartheta(z; x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi(2nz - n^2x)} . \quad (\text{A.5})$$

Usando esta expressão integral para a função zeta de Epstein, dada por (A.3), podemos achar que

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = -1 , \quad (\text{A.6})$$

para qualquer  $p \geq 1$ . Para continuarmos, vamos definir a seguinte função  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)$ :

$$Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s) = \sum_{n_1, \dots, n_q=1}^{\infty} \sum_{n_{q+1}, \dots, n_p=-\infty}^{\infty} ((a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2)^{-s} . \quad (\text{A.7})$$

Utilizando o resultado da equação (A.6), pode-se mostrar, após efetuarmos a continuação analítica da função  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)$ , que a seguinte propriedade é válida

$$Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0, \quad (\text{A.8})$$

onde este resultado é válido para o intervalo  $0 < q < p$ . Pode-se demonstrar esta propriedade por indução matemática. Para  $q = 1$ , temos:

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = Z_p(a_2, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} + 2Z_p^{(1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0}. \quad (\text{A.9})$$

Como  $p > 1$  podemos usar a propriedade dada pela equação (A.6) para os dois primeiros termos da equação (A.9) e verificar que  $Z_p^{(1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0$ . Vamos, agora, assumir que esta propriedade é válida para  $q$  genérico, i.e.,  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0$ , com  $p$  arbitrário, porém satisfazendo à condição  $0 < q < p$ . Para completarmos a prova, devemos verificar a propriedade para  $q + 1$ , i.e.,  $Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} = 0$  com  $p'$  também arbitrários mas obedecendo à condição  $0 < q + 1 < p'$ . A partir da propriedade

$$\begin{aligned} Z_{p'}^{(q)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} &= Z_{p'-1}^{(q)}(a_1, \dots, a_q, a_{q+2}, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} + \\ &+ 2Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

como  $0 < q < p' - 1$  e admitindo a validade desta para  $q$  arbitrário, dado pela equação (A.8), podemos ver que os dois primeiros termos de (A.10) se anulam. Portanto, conseguimos demonstrar que  $Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} = 0$ . Estamos in-

interessados em um caso particular desta propriedade, a saber:

$$Z_p^{(p-1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0, \quad (\text{A.11})$$

isto é:

$$\left( \sum_{n_1, \dots, n_{p-1}=1}^{\infty} \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} ((a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2)^{-s} \right) \Big|_{s=0} = 0. \quad (\text{A.12})$$

## Apêndice B

# A representação de Klauder para o gerador funcional de valor independente

Para darmos um significado preciso para o funcional gerador de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$ , podemos tanto discretizar o espaço como utilizar o resultado do Klauder que formaliza uma definição para o funcional gerador de valor independente derivado para campos escalares em um espaço euclidiano  $d$ -dimensional. Este funcional gerador é uma integral funcional gaussiana de média zero. Usando o fato que os campos definidos em cada ponto do tempo euclidiano são estatisticamente independentes, podemos escrever

$$Q_0[\sigma, h] = \exp \left( - \int d^d x L(\sigma, h(x)) \right), \quad (\text{B.1})$$

para alguma função  $L(\sigma, h(x))$ . A expressão acima é fundamental para nosso estudo. Vamos ver como é possível extrair alguma informação a partir da mesma. Antes de estudarmos o caso com interação, vamos analisar um simples exemplo, com  $g_0 = 0$ .

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} Z[\beta, \Omega, h]_{g_0=0} &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0, \sigma; x - x') \frac{\delta}{\delta h(x')}\right) \\ &\times Q_0[\sigma, h]|_{g_0=0}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde  $Q_0[\sigma, h]$ , o funcional gerador de valor independente, é dado por

$$\begin{aligned} Q_0[\sigma, h]s|_{g_0=0} &= \mathcal{N} \int [d\varphi(x)] \times \\ &\times \exp\left(\int d^d x \left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 \varphi^2(x) + h(x)\varphi(x)\right)\right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde, mais uma vez, o kernel modificado  $K(m_0, \sigma; x - x')$  está definido pela equação (2.5).

O funcional de valor independente livre deve satisfazer a seguinte equação  $Q_0[\sigma, h]|_{h=g_0=0} =$

1. Gostaríamos de observar que, na derivação de Klauder para o modelo de valor independente livre, um resultado foi obtido o qual é bem definido para todas as funções que são quadrado-integráveis em  $R^n$  i.e.,  $h(x) \in L^2(R^n)$ . Como estamos assumindo que  $h = cte$ , devemos normalizar nossas expressões. Portanto, temos

$$Q_0(\sigma, h)|_{g_0=0} = \exp\left(-\frac{1}{2V\sigma m_0^2} \int d^d x h^2(x)\right). \quad (\text{B.4})$$

A generalização para o campo escalar com auto-interação  $\frac{g_0}{p!} \varphi^p(x)$  é feita de maneira direta. É possível mostrar que o funcional gerador de valor independente pode ser

escrito como sendo

$$Q_0(\sigma, h) = \exp\left(-\frac{1}{2V} \int d^d x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u|} (1 - \cos(hu)) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right)\right). \quad (\text{B.5})$$

Não há necessidade de entrarmos nos pormenores de tal derivação. O leitor interessado pode encontrar maiores detalhes na referência [29]. A fim de estudarmos  $Q_0(\sigma, h)$ , vamos definir  $E(m_0, \sigma, g_0, h)$  dado por

$$E(m_0, \sigma, g_0, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u|} (1 - \cos(hu)) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.6})$$

Empregando uma representação de séries para  $\cos x$  e lembrando o fato que a série obtida ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(u)$ ) converge uniformemente no intervalo  $[0, \infty)$ , a mesma pode ser integrada termo a termo. Não é difícil mostrar que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} h^{2k} \int_0^{\infty} du u^{2k-1} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.7})$$

Agora, vamos usar o fato que o parâmetro  $\sigma$  pode ser escolhido de tal modo a facilitar nossos cálculos. Esta é a principal diferença para o resultado do Klauder. Analisando apenas o funcional gerador de valor independente, não seria possível expressar  $Q_0(\sigma, h)$  de uma forma fechada mesmo sendo a fonte externa constante. Vamos escolher  $\sigma = 0$ . Portanto, temos que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h)|_{\sigma=0} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} h^{2k} \int_0^{\infty} du u^{2k-1} \exp\left(-\frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.8})$$

Neste ponto de nosso estudo vamos aproveitar para introduzir a seguinte representação integral para a função gama [84]

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} \exp(-\mu x^p) = \frac{1}{p} \mu^{-\frac{\nu}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right), \quad (\text{B.9})$$

onde  $\text{Re}(\mu) > 0$ ,  $\text{Re}(\nu) > 0$  e  $p > 0$ . Agora fica claro que podemos estudar a teoria  $(g_0 \varphi^p)$ , para  $p > 4$  par, mais facilmente empregando nosso método. Usando o resultado dado pela equação (B.9) na equação (B.8), temos que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h)|_{\sigma=0} = \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{2k}{p}}}, \quad (\text{B.10})$$

onde os coeficientes  $g(p, k)$  são dados por

$$g(p, k) = \frac{2(-1)^k}{p} \frac{(p!)^{\frac{2k}{p}}}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k}{p}\right). \quad (\text{B.11})$$

Levando as equações (B.10) e (B.11) em (B.5), obtemos que o funcional gerador de valor independente  $Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0}$  pode ser escrito como sendo

$$Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0} = \exp\left[-\frac{1}{2\Omega\beta} \int_0^\beta d\tau \int d^{d-1}x \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{2k}{p}}}\right]. \quad (\text{B.12})$$

É fácil calcular a segunda derivada do funcional gerador de valor independente com respeito à  $h$ . Note que  $Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = 1$ . Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0} &= \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) (2k)(2k-1) \frac{h^{2k-2}}{g_0^{\frac{2k}{p}}}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{2k}{p}}}\right) + G(g_0, p, h), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

onde  $G(g_0, p, h)$  é dada por

$$G(g_0, p, h) = \left( \sum_{k, q=1}^{\infty} g(p, k, q) \frac{h^{2k+2q-2}}{g_0^{\frac{2(k+q)}{p}}} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{2k}{p}}} \right), \quad (\text{B.14})$$

e  $g(k, q) = k q g(k)g(q)$ . Estamos interessados no caso  $h = 0$ , portanto a série dupla não contribui para a equação (B.13), já que  $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$ . Deste modo, apenas o termo  $k = 1$  contribui na equação (B.13). Temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = \frac{1}{2p g_0^{\frac{2}{p}}} \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{(p!)^{\frac{p}{2}}}. \quad (\text{B.15})$$



# Referências Bibliográficas

- [1] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).
- [2] J. D. Bekenstein, Lett. Nuovo Cim. **4**, 737 (1972).
- [3] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973).
- [4] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [5] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [6] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D23**, 287 (1981).
- [7] G. 't Hooft, “*Dimensional Reduction in Quantum Gravity*”, in *Salam-Festschrift*, A. Aly, J. Ellis e S. Randbar-Daemi, Eds., World Scientific, Singapore (1993), ArXiv gr-qc/9310026.
- [8] L. Susskind, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995).
- [9] R. Bousso, Rev. Mod. Phys. **74**, 825 (2002).
- [10] D. N. Page, Phys. Rev **D26**, 947 (1982).

- [11] W. G. Unruh and R. M. Wald, *Phys. Rev.* **D25**, 942 (1982).
- [12] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 286 (1982).
- [13] D. Unwin, *Phys. Rev.* **D26**, 944 (1982).
- [14] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1976).
- [15] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D27**, 2262 (1983).
- [16] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D49**, 1912 (1994).
- [17] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D60**, 124010 (1999).
- [18] J. D. Bekenstein, *Found. Phys.* **35**, 1805 (2005).
- [19] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D30**, 1669 (1984).
- [20] J. D. Bekenstein e E. I. Guendelman, *Phys. Rev.* **D35**, 716 (1987).
- [21] M. Schiffer e J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D39**, 1109 (1989).
- [22] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D42**, 3596 (1990).
- [23] J. D. Bekenstein e M. Schiffer, *Phys. Rev.* **D42**, 3598 (1990).
- [24] J. D. Bekenstein e M. Schiffer, *Int. J. Mod. Phys.* **C1**, 355 (1990).
- [25] K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B190**, 1 (1981).

- [26] M. Aparicio Alcalde, G. Menezes and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D77**, 125024 (2008).
- [27] N. F. Svaiter, G. Menezes e M. A. Alcalde, “*Tópicos em teoria quântica dos campos*”, Livraria da Física, São Paulo (2009).
- [28] J. R. Klauder, Ann. Phys. **117**, 19 (1979).
- [29] J. R. Klauder, “*Beyond Conventional Quantization*”, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [30] J. R. Klauder, Acta Phys. Austr. **41**, 237 (1975).
- [31] J. S. Dowker e R. Critchley, Phys. Rev. **D13**, 224 (1976).
- [32] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [33] R. T. Seeley, Am. Math. Proc. Symp. Pure Math. **10**, 288 (1967).
- [34] A. Voros, Comm. Math. Phys. **110**, 439 (1987).
- [35] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [36] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. Inst. Elect. Eng. **51**, 89 (1963).
- [37] K. Hepp and E. H. Lieb, Ann. Phys. **76**, 360 (1973).
- [38] Y. K. Wang and F. T. Hioe, Phys. Rev. **A7**, 831 (1973).
- [39] R. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

- [40] F. T. Hioe, Phys. Rev. **A8**, 1440 (1973).
- [41] B. M. Pimentel and A. H. Zimerman, Nuovo Cim. **B30**, 43 (1975).
- [42] G. Vertogen and A. S. De Vries, Phys. Lett. **A48**, 451 (1974).
- [43] K. Hepp and E. H. Lieb, Phys. Rev. **A8**, 2517 (1973).
- [44] B. M. Pimentel and A. H. Zimerman, Phys. Lett. **A53**, 200 (1975).
- [45] L. R. Mead and N. Papanicolaou, Phys. Rev. **B28**, 1633 (1983).
- [46] M. Hillery and L. D. Mlodinow, Phys. Rev. **A31**, 797 (1985).
- [47] T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
- [48] F. J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1230 (1956).
- [49] S. Sachdev, “*Quantum Phase Transitions*”, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [50] P. Jordan and E. Wigner, Z. Phys. **47**, 631 (1928).
- [51] E. Lieb, T. Shultz and D. Mattis, Ann. Phys. **16**, 406 (1961).
- [52] C. Itzykson and J. Drouffe, “*Statistical field theory V.1*”, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [53] V. N. Popov and S. A. Fedotov, Sov. Phys. JETP. **67**, 535 (1988).

- [54] V. N. Popov, “*Functional Integrals and Collective Excitations*”, Cambridge University Press (1987).
- [55] M. Aparicio Alcalde, A. L. L. de Lemos and N. F. Svaiter, J. Phys. **A40**, 11961 (2007).
- [56] M. Aparicio Alcalde, R. Kullock and N. F. Svaiter, Journal of Mathematical Physics **50**, 013511-1 (2009).
- [57] M. Aparicio Alcalde, A. H. Cardenas, N. F. Svaiter and V. B. Bezerra, preprint: CBPF-NF-014/09, *sometido a publicação* (2009).
- [58] L. D. Chang and S. Chakravarty, Phys. Rev. **B31**, 154 (1985).
- [59] P. Lambropoulos and D. Petrosyan, “*Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [60] M. Gross and S. Haroche, Phys. Rep. **93**, 301 (1982).
- [61] S. Haroche and J. M. Raimond, “*Exploring the Quantum*”, Oxford University Press, New York (2006).
- [62] T. J. Osborne and M. A. Nielsen, Phys. Rev. **A66**, 032110 (2002).
- [63] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci and R. Fazio, Nature (London) **416**, 600 (2002).
- [64] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico and Kitaev, Phys. Rev. **A90**, 227902 (2003).

- [65] N. Lambert, C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev.* **A71**, 053804 (2005).
- [66] J. Vidal, S. Dusuel and T. Barthel, *J. Stat. Mech.* **P01015** (2007).
- [67] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt and H. W. Galbraith, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 966 (1983).
- [68] R. Graham and M. Hohnerbach, *Phys. Lett.* **A101**, 61 (1984).
- [69] L. Muller, J. Stolze, H. Leschke and P. Nagel, *Phys. Rev.* **A44**, 1022 (1991).
- [70] G. A. Finney and J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev.* **A50**, 2040 (1994).
- [71] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett* **90**, 044101 (2003).
- [72] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev.* **E67**, 066203 (2003).
- [73] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jap.* **12**, 570 (1957).
- [74] P. Martin e J. Schwinger, *Phys. Rev.* **115**, 1342 (1959).
- [75] N. F. Svaiter e B. F. Svaiter, *J. Phys.* **A25**, 979 (1992).
- [76] L. H. Ford e N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D54**, 2640 (1996).
- [77] F. Caruso, R. De Paola e N. F. Svaiter, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A14**, 2077 (1999).
- [78] L. H. Ford, *Phys. Rev.* **D21**, 933 (1980).

- [79] L. H. Ford e N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D51**, 6981 (1995).
- [80] E. Elizalde e A. Romeo, *J. Math. Phys.* **30**, 1133 (1989).
- [81] J. G. Moss, *Class. Quant. Grav* **6**, 759 (1989).
- [82] S. K. Blau, M. Visser e A. Wipf, *Nucl. Phys.* **B310**, 163 (1988).
- [83] J. Kapusta, D. B. Reiss e S. Rudaz, *Nucl. Phys.* **B263**, 207 (1986).
- [84] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, “Tables of Integrals, Series and Products”, Academic Press Inc., New York (1980).
- [85] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, “*Integrals and Series*”, Vol. 1 e 2, Gordon e Breach Science Publishers (1986).
- [86] J. R. Ruggiero, A. H. Zimmerman e A. Villani, *Rev. Bras. Fis.* **7**, 663 (1977).
- [87] F. Caruso, N. P. Neto, B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D43**, 1300 (1991).
- [88] Y. I. Yoo e J. H. Eberly, *Phys. Rep.* **118**, 239 (1985).
- [89] B. Buck e C. V. Sukumar, *Phys. Lett.* **81A**, 132 (1981).
- [90] C. V. Sukumar e B. Buck, *J. Phys.* **A17**, 885 (1984).
- [91] V. Buzek, *Phys. Rev.* **A39**, 3196 (1989).
- [92] D. P. DiVicenzo, *Phys. Rev.* **A51**, 1015 (1995).

- [93] G. M. Palma, K.A. Seiominen e A. K. Ekert, Proc. R. Soc. Lond. **A452**, 567 (1996).
- [94] Heinz-Peter Breuer e Francesco Petruccione, “*The Theory of Open Quantum Systems*”, Oxford University Press, Oxford (2002).
- [95] J. A. Hertz, Phys. Rev. **B14**, 1165 (1976).
- [96] L. D. Chang e S. Chakravarty, Phys. Rev. **B31**, 154 (1985).
- [97] A. J. Legget, C. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A Garg and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
- [98] J. H. Reina, L. Quiroga and N. F. Johnson, Phys. Rev. **A65**, 032326 (2002).
- [99] J. S. Dowker, Class. Quant. Grav. **1**, 359 (1984).
- [100] J. S. Bell e J. M. Leinaas, Nucl. Phys. **B212**, 131 (1983).
- [101] J. S. Bell e J. M. Leinaas, Nucl. Phys. **B284**, 488 (1987).
- [102] J. S. Bell, “*The Foundations of Quantum Mechanics*”, J. Bell, K. Gottfried and M. Veltman (Editors), World Scientific, Singapore (2001).
- [103] B. W. Schumacher, Phys. Rev. **A44**, 7047 (1991).
- [104] N. Gisin, Phys. Lett. **154A**, 201 (1991).
- [105] R. R. Puri, J. Phys. **A29**, 5719 (1996).

- [106] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [107] R. R. Puri, “*Mathematical Methods of Quantum Optics*”, Oxford University Press, Oxford (2001).
- [108] “*Quantum Theory and Measurement*”, J. A. Wheeler and W. H. Zurek (eds.), Princeton University Press, New Jersey (1983).
- [109] V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, “*Quantum Measurement*”, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [110] M. Namiki, S. Pascazio and H. Nakazato, “*Decoherence and Quantum Measurements*”, World Scientific, Singapore (1997).
- [111] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [112] D. Z. Albert, *Phys. Lett.* **A98**, 249 (1983).
- [113] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. Lond.* **A400**, 97 (1985).
- [114] R. P. Feynman, *Found. Phys.* **16**, 507 (1986).
- [115] A. Steane, *Rep. Prog. Theor. Phys.* **61**, 117 (1998).
- [116] F. Benatti and R. Floreani, *Int. J. Mod. Phys.* **B19**, 3063 (2005).
- [117] T. Brandes, *Phys. Rep.* **408**, 315 (2005).
- [118] R. H. Lehmberg, *Phys. Rev.* **A2**, 883 (1970).

- [119] R. H. Lehmberg, Phys. Rev. **A2**, 889 (1970).
- [120] G. S. Agarwal, A. C. Brown, L. M. Narducci and G. Vetri, Phys. Rev. **A15**, 1613 (1977).
- [121] Z. Ficek, R. Tanás and S. Kielich, Physica **A146**, 452 (1987).
- [122] T. G. Rudolph, Z. Ficek and B. J. Dalton, Phys. Rev. **A52**, 636 (1995).
- [123] H. T. Dung and K. Ujihara, Phys. Rev. Lett. **84**, 254 (2000).
- [124] G. C. Guo and c. P. Yang, Physica **A260**, 173 (1998).
- [125] N. Lambert, C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. Lett. **92**, 073602 (2004).
- [126] N. Lambert, C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. **A71**, 053804 (2005).
- [127] J. Ambjorn e S. Wolfram, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).