



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

**MODELOS DE DIFUSÃO PARA REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE SINAIS E
IMAGENS**

UMA ABORDAGEM PARA A TEORIA DA INFORMAÇÃO EM ESPAÇOS-ESCALA

André Persechino Américo de Oliveira

Documento apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física pelo Programa de pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Orientador

Márcio Portes de Albuquerque

Campinas - SP
Rio de Janeiro - RJ
Maio - 2021

ANDRÉ PERSECHINO AMÉRICO DE OLIVEIRA

MODELOS DE DIFUSÃO PARA REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE SINAIS E IMAGENS

UMA ABORDAGEM PARA A TEORIA DA INFORMAÇÃO EM ESPAÇOS-ESCALA

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física pelo programa de pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Aprovada em 20 de Julho de 2021

Márcio Portes de Albuquerque
(Orientador)
(CBPF)

Bernardo Coutinho Camilo dos Santos
(CENPES - Petrobras)

Ricardo Fabbri
(IPRJ - UERJ)

Fernando Dantas Nobre
(CBPF)

Ivan dos Santos Oliveira Junior
(CBPF)

O desenvolvimento deste Trabalho de Tese ocorreu de maneira conturbada, por diversas razões: há aquelas naturalmente esperadas em um doutorado em Física; aquelas obviamente derivadas do fato de ter me tornado pai no meio da jornada; e, por fim, algumas derivadas das dificuldades em se propor um projeto na interface entre física, engenharia e tecnologia. Em cada uma destas facetas, devo muito a muita gente, e é preciso dizer que sem muito estímulo destas pessoas, não teria chegado até aqui. Concretamente, a lista de pessoas a agradecer é enorme, de modo que listarei apenas uma parcela. Aos que forem omitidos, ficam minhas sinceras desculpas e a promessa de que – sempre que possível – as farei lembrar *pessoalmente* de sua ajuda.

A João Paulo Sinnecker, Flávio Garcia, Henrique Lins de Barros e Carlos Baraldi Sato Dias, meus agradecimentos por proporcionarem, cada um à sua moda ou medida, apoio para os desenvolvimentos deste Trabalho. Desde o “cantinho” em um dos Laboratórios de Magnetismo, até a apresentação do universo da Óptica de Fourier, seu apoio foi fundamental para firmar os pés deste Trabalho no que em cada época foi tido como “o possível”.

A Fernando Loureiro Stavale Junior, meus agradecimentos por permitir que eu integrasse a equipe do Laboratório de Superfícies e Fenômenos de Interface do CBPF. A esta equipe singular, elenco meus agradecimentos sinceros pelos excelentes meses de parceria. Em especial, agradeço a seu líder *de facto*, Guilherme de Lima Félix, pelo suporte e amizade.

A Marcos Costa e Silva, um agradecimento pelos bons anos de trabalho e parceria – nascida ainda na graduação na UFV. Aos muitos colegas da UFV: obrigado por compartilharem um pouco de sua jornada comigo. Só quem esteve lá consegue entender o carinho com que se olha para trás. A Gustavo Pazzini, Judismar Guaitolini, Pedro Malta, Fábio Lúcio Alves e Yuri Müller ficam os agradecimentos pelo bom convívio e pela amizade construída ao longo destes últimos anos. A estes grandes teóricos, fica a provocação de que não aboli o $j = \sqrt{-1}$, e de que não pretendo fazê-lo.

A Bruno Cauper e Mateus Gemelle, obrigado pela dedicação e por terem trazido a curiosidade de volta a nosso laboratório. Orientá-los foi um dos pontos altos deste Trabalho, e a presença de uma juventude interessada em ciência e tecnologia mostra que ainda há esperança.

A Márcio e Marcelo Portes de Albuquerque, ficam meus agradecimentos especiais por permitirem que, de todas as maneiras e com todas as dificuldades, fosse dado espaço para que eu exercesse minha liberdade técnica, científica e criativa. A vocês, registro aqui que os bons anos de parceria ajudaram a fortalecer em mim a cultura de que Instrumentação Científica é uma necessidade real, e que transcende os limites da física “usual”. Na esteira de tal cultura, devo reconhecer os estímulos pela busca de um trabalho autoral por parte de Ivan dos Santos Oliveira Junior, líder do Grupo de Ressonância Magnética Nuclear do CBPF. Ainda que de modo discreto e pontual, suas opiniões sobre coragem científica me animaram a ir em frente com um projeto “fora da caixa”.

A Flávio Américo Persechino: a consolidação deste Trabalho é mais uma prova de que não simplesmente sobrevivemos àquele passado sombrio em São Paulo, mas o vencemos.

Por fim, sobre ter me tornado pai ao longo do doutorado e seus efeitos turbulentos sobre o desenvolvimento do Trabalho: *valeu a pena*. Fiz escolhas que vários colegas pós-graduandos vêm postergando por múltiplas razões ¹ e venho arcando com os custos delas derivados. De todo modo, sorrisos francos; aprendizados constantes e a certeza de que a vida é muito maior que um doutorado me fizeram e me fazem mais forte.

Assumindo o risco de me estender: às vezes escapa às pessoas que um trabalho científico possui lugar no tempo e espaço, e se propaga por estes. Dito isto, não é possível ignorar o passado, negligenciar o presente e não temer – ainda que minimamente – a dúvida acerca do futuro. Sobre estes três “lugares no tempo”:

Ana Maria Persechino, seu esforço valeu a pena. Embora a existência tenha resolvido encurtar sua história, deixando-a no passado, este Trabalho faz parte – necessariamente – da sua obra póstuma.

Fernanda, seu amor e dedicação tornam meu presente possível. Obrigado por escolher trilhar esta jornada absurda ao meu lado.

A Francisco e Vicente, meu muito obrigado por existirem. Obrigado por mostrarem o melhor do ser humano para um pai cansado e por vezes decepcionado. Vocês (e todas as crianças) são o futuro, e é por este futuro que vale a pena lutar.

¹Não estenderei esta Seção de Agradecimentos falando sobre como é desalentador pesquisar num país que dia após dia desmerece e sabota a ciência. O próprio contexto social em que esta Tese se encerra demonstra a violência para com a ciência brasileira.

*What looked like morning was the beginning of
endless night.*

(William Peter Blatty)

Resumo

É realizada neste trabalho a introdução de um aparato informacional para a descrição multi-escala de imagens, com vistas à formulação de uma Teoria da Informação dos estágios primários da visão humana, segundo as teorias de Marr e Hildreth-Marr. Análises aprofundadas sobre a formulação axiomática dos espaços-escala e sobre a Equação de Perona-Malik são realizadas de forma a constituir o substrato teórico para a questão do atrelamento entre escala e dimensões características em uma imagem. São apresentados resultados de experimentações computacionais que subsidiam discussões posteriores sobre o papel da entropia de Shannon e, principalmente, da Informação de Fisher na iniciativa de se buscar a viabilização de um sistema de visão computacional capaz de estimar escalas características em cenas complexas em analogia ao sistema visual humano.

Abstract

It is introduced in this work an informational apparatus for the multi-scale description on images, aiming a formulation of an Information Theory for the primary stages of human vision, based on Marr and Hildreth-Marr theories. Detailed analyzes on the axiomatic formulation of scale-spaces and the Perona-Malik Equation are carried out in order to constitute a theoretical substrate for the challenge of linking scale and characteristic dimensions of an image. Results of computer experiments are presented and used to support discussions on the role of Shannon entropy and, mainly, Fisher Information, within an initiative whose main goal is to pave the way for a computational vision capable of estimating characteristic scales in complex scenes in analogy to the human visual system.

Résumé²

Ce travail introduit une méthode informationnelle pour la description multiéchelle sur images, visant une formulation d'une Théorie de l'Information des étapes primaires de la vision humaine, basée sur les théories de Marr et Hildreth-Marr. Des analyses détaillées sur la formulation axiomatique des espaces-échelles et l'équation de Perona-Malik sont réalisées afin de constituer un substrat théorique pour le défi de lier l'échelle et la dimension caractéristique d'une image. Les résultats d'expériences informatiques sont présentés et utilisés pour soutenir les discussions sur le rôle de l'entropie de Shannon et, principalement, de l'information de Fisher, dans le cadre d'une initiative dont l'objectif principal est d'ouvrir la voie à une vision computationnelle capable d'estimer des échelles caractéristiques dans des scènes complexes par analogie au système visuel humain.

²Contribuição de Márcio Portes de Albuquerque

1	Introdução	3
2	Conceitos em teoria de sinais	6
2.1	Introdução	6
2.2	Sistemas lineares invariantes ao deslocamento	7
2.3	Causalidade e memória	9
2.4	Amostragem	11
2.5	Sistemas LSI discretos	15
3	Conceitos em Teoria da Informação	20
3.1	Resolução	20
3.2	Graus de liberdade e o quantum de informação	22
3.3	Os harmônicos prolato-esferoidais	25
3.4	Entropia	30
3.5	Divergência de Kullback-Leibler	36
3.6	Informação de Fisher	37
4	Descrição multiescala	40
4.1	Visão em baixo nível: teoria do esboço primitivo	40
4.2	Construção axiomática	43
4.3	Abordagens de Witkin e Koenderink: a equação de difusão	47
4.3.1	Difusão linear: características básicas	49
4.4	Difusão não-linear: a Equação de Perona-Malik	51
4.4.1	Críticas ao espaço-escala linear	51
4.4.2	Aspectos variacionais	52
4.4.3	Difusibilidade negativa e mau-condicionamento	55
4.5	Entropia revisitada: leis de conservação	57
4.6	Métodos numéricos	60
4.6.1	Difusão linear	60
4.6.2	Difusão-não linear	64
4.7	Teoria da Informação em Espaços-Escala	65
4.7.1	Informação no casos contínuos	65
4.7.2	Informação no contexto numérico	67

5	Experimentação computacional	68
5.1	Recursos computacionais	68
5.2	Bases de imagens	69
5.2.1	Luminância e crominância: sistema YUV	70
5.3	Evolução dos observáveis	72
5.4	Potencialidade em compressão de dados com preservação estrutural	84
5.5	Estimação de escala característica	86
5.5.1	Experimento I: variância nula, sem adição de ruído	89
5.5.2	Experimento II: variância nula, com adição de ruído	89
5.5.3	Experimento III: variância não-nula, sem adição de ruído	89
5.5.4	Experimento IV: variância não-nula, com adição de ruído	90
5.6	Discussão	91
6	Uma teoria da informação para a visão primária	100
6.1	Um modelo informacional	100
6.2	Dinâmica <i>ad-hoc</i> para a entropia de Shannon	102
6.3	Releitura em termos da Informação de Fisher	103
6.3.1	A ausência de escala característica para a EPM	104
7	Sobre não-linearidades, caracteres fracionais, complexidade e outros: propostas de incursões futuras	105
8	Referências	108
	Apêndices	121
A	Óptica de Fourier	122
A.1	Introdução	122
A.2	Modelagem determinística de um sistema LSI de imagens	122
A.3	Teoria escalar da difração	125
A.3.1	Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff	126
A.3.2	Abordagem de Kirchhoff para difração numa tela plana	127
A.3.3	Abordagem de Rayleigh-Sommerfeld para difração numa tela plana	128
A.3.4	Regimes de Fresnel e Fraunhofer	129
B	Cálculo Fracionário	132
B.1	Introdução	132
B.2	Conceitos fundamentais	132
B.3	Abordagem de Riemann-Liouville	134
B.4	Abordagem de Grünwald-Letnikov	134
B.5	Sobre a pluralidade de definições: critérios de identificação	135
B.6	Conexão entre as abordagens RL e GL: métodos numéricos	135
C	A desigualdade de Cramér-Rao	138

Este é um trabalho de investigação em Física Computacional, com enfoque à área de processamento de sinais & imagens para instrumentação em física e tecnologia. Um de seus objetivos é abordar detalhadamente a tendência – por vezes corriqueira – de se cancelar processos numéricos e computacionais de análise de dados e extração de informação quando estes derivam de analogias físicas gerais, ligadas por exemplo a fenômenos de transporte [82, 8] e mecânica estatística [36].

Mais particularmente, aborda-se aqui a questão de um eventual uso inadequado (ou no mínimo superestimado) de elementos da Teoria da Informação [190, 191] em descrições Multiescala de sinais digitais. Esta última teoria, pouco usual em física¹, foi originalmente proposta por T. Iijima [231, 234] no Japão na década de 60, mas popularizou-se no ocidente devido aos trabalhos de A. Witkin [237], J. Koenderink [109] e, principalmente, D. Marr [136]. A Teoria dos Espaços-Escala² tenta modelizar a hierarquia inerente ao sistema visual humano [136], que nos confere a vantagem evolutiva de saber diferenciar objetos em múltiplas escalas (ou dimensões, ou comprimentos característicos) em uma mesma cena. Grosso modo, descrever um sinal em múltiplas escalas permite que a detecção de estruturas relevantes possa ser particularizada para cada nível de *resolução*.

Se por um lado cada uma das teorias acima goza de evidente solidez conceitual [106, 175, 233, 8], por outro sua interconexão não é simples, tampouco consolidada. Mais: devido a interessantes coincidências em certas expressões presentes em ambas teorias – tal como a da entropia –, advoga-se frequentemente [199, 201, 202, 206] em favor de uma suposta equivalência entre estes objetos/conceitos. Infelizmente, tal ímpeto de se associar conceitos semelhantes – porém distintos – das teorias da informação e espaços-escala às suas *supostas* analogias físicas acaba levando a incompreensões importantes no campo teórico e, colateralmente, alimenta ceticismos e até mesmo objeções frente a potenciais desenvolvimentos aplicados, geralmente baseados no sofisma de que *todo* tratamento de dados leva a perdas de informação.

A proposta deste trabalho, portanto, é de aprofundar a discussão visando contribuir para o esclarecimento do papel da informação em espaços-escala – lineares ou não. Nesse sentido, equações de difusão surgem como os arquétipos físicos que inspiram os desenvolvimentos das técnicas de processamento de sinais e imagens.

Embora em primeira vista as duas teorias envolvidas pareçam não ter correlação, discute-se aqui que *uma* possível conexão entre ambas resida no estabelecimento de um elo entre dois atributos particulares:

- i. informação; e
- ii. resolução.

Ambos os conceitos são usados por nós diariamente em senso lato, embora existam definições específicas

¹Esta área vem sendo tradicionalmente investigadas em círculos matemáticos; vide, e.g., [8, 82].

²Descrição multiescala e espaço-escala são denominações equivalentes de um mesmo processo, e usadas doravante como sinônimos.

para eles. Obviamente, informação e resolução são os conceitos-chave nas teorias da informação [190, 29] e de espaços-escala [231, 237, 8], respectivamente. Contudo, a teoria *clássica*³ da informação, tal como concebida por Shannon, não se aprofunda em aspectos de resolução, exigindo que recorramos a extensões da teoria, tais como as interpretações de D. Gabor [64, 65, 66, 67, 68]. Por outro lado, a teoria de espaços-escala se apropria [199, 201, 202] da entropia da Shannon para definir o conceito de informação, e deriva daí algumas conjecturas que tentaremos ao longo do texto questionar. Para tanto, traremos à discussão dois elementos unificadores. Um deles, a entropia no contexto de equações diferenciais parciais (EDPs) [49, 50, 102, 115, 116] – que segundo Evans [49, 50] e Jünger [101, 102] constitui recurso adequado para caracterização *qualitativa* de estados de equilíbrio e irreversibilidade – aparece de modo relativamente discreto na teoria multiescala [233, 199, 201, 202]. O outro, aparentemente negligenciado (ou pelo menos subestimado) pela comunidades de pesquisa em espaços-escala corresponde à Informação de Fisher [61, 63, 183]. Esta grandeza surge neste trabalho como o ente capaz de, minimamente – ou de maneira aproximada –, criar o esperado elo entre informação e resolução.

Ambiciosa como pode parecer, a proposta acima está longe de ser trivial: a delimitação do escopo de atuação de tal empreitada demanda a adoção de arcabouços teóricos que sejam válidos em um contexto ou outro, mesmo que parcialmente. De fato, se por um lado a teoria de espaços-escala contempla de modo absolutamente natural uma abordagem baseada em EDPs, por outro a teoria da informação não apresenta – em princípio – aberturas que nos permitam investigar sistemas de comunicação via métodos determinísticos clássicos. A teoria de entropia em EDPs é investigada, portanto, como um recurso teórico potencial para a elucidação de uma *Teoria da Informação em Espaços-Escala*.

Importante ressaltar que embora boa parte dos desenvolvimentos contidos neste Trabalho residam no campo teórico, a proposta de investigação acima é aplicada sempre que possível ao caso numérico, devido a duas razões principais:

- i. muito frequentemente, as opiniões que atribuem um caráter físico a técnicas numéricas derivadas de analogias em física são construídas a partir dos casos contínuos dos fenômenos considerados, de modo que tende-se a ignorar completamente o fato de que um método numérico “tem vida própria”, como dizem Cuminato e Meneguete em [39]. Isto é, suas propriedades podem simplesmente diferir do caso contínuo análogo; e
- ii. em um contexto de instrumentação científica e tecnológica corriqueiro⁴, não há mais espaço para fluxos de trabalho *exclusivamente* analógicos, demandando assim que as técnicas empregadas sejam conhecidas – desde a fase de *design* – quanto a suas propriedades em versão discreta.

Com vistas a pavimentar a iniciativa em se estabelecer um elo entre informação e resolução em espaços-escala, ou na produção do esboço primitivo [136, 137], incursões detalhadas nas teorias clássicas da análise de sinais e informação são realizadas nos Capítulos 2 e 3, respectivamente. A teoria multiescala é descrita em detalhes no Capítulo 4, em que são apresentadas as formulações axiomáticas de Iijima e as expostas as limitações destas, que culminam na Equação de Perona-Malik [170]. Este Capítulo é fechado com uma breve discussão sobre o que já existe em termos de informação em espaços-escala, muito do que é devido aos trabalhos de Sparring e Weickert [200].

Indo de encontro com o exposto acima sobre a necessidade de prospectar e investigar aspectos práticos e computacionais das técnicas discutidas em âmbito teórico, o Capítulo 5 traz uma série de investigações de cunho prático, tais como sobre uma possível aplicação dos paradigmas multiescala linear e não-linear em representação e compressão de dados, além do atrelamento da escala de difusão às dimensões características.

A consolidação dos resultados, bem como a elaboração dos argumentos que levam à proposta de uma teoria da informação para a visão primária (ou equivalentemente, em espaços-escala) são expostas no Capítulo 6, onde é mostrado que existe sim a possibilidade de se vincular as dimensões das estruturas características das cena retratada no espaço-escala com a escala de difusão deste último. A informação de Fisher surge como o recurso formal a criar esta ponte. Finalmente, o Capítulo 7 fecha o corpo principal do Trabalho com conclusões e perspectivas.

O texto contém três apêndices que visam subsidiar pontos importantes abordados ao longo do texto. São eles: óptica de Fourier (Apêndice A); cálculo fracionário (Apêndice B) e a desigualdade de Crámer-Rao (Apêndice C).

³Não abordaremos neste trabalho a área de informação quântica.

⁴Excluam-se aqui casos extremos, em que processamentos em nível de hardware, em altíssimas velocidades, com condições ambientais hostis, restrições de recursos etc. se fazem presentes. Em tais casos, processos altamente especializados e otimizados para plataformas específicas de hardware são empregados.

SÍMBOLO / NOTAÇÃO	SIGNIFICADO
j	$\sqrt{-1}$
$x(t), y(t), u(t), v(t), \dots$	sinais unidimensionais definidos sobre variável contínua t
$\hat{x}(\omega)$	transformada de Fourier do sinal $x(t)$
$\mathcal{F}[\cdot](\omega)$	operador Transformada de Fourier
f, ω	frequências linear e angular: $\omega = 2\pi f$
k	número de onda: $k = 2\pi/\lambda$
$x_n, y_n, u_n, v_n, \dots$	sinais unidimensionais definidos sobre variável discreta n
$u(\mathbf{x})$	campo escalar definido sobre variável vetorial $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	operadores matriciais
$\hat{x}(\omega)$	transformada de Fourier em tempo discreto do sinal x_n
\hat{x}_k	transformada discreta de Fourier sinal x_n
$\theta(t)$	função degrau unitário, ou de Heaviside
$\Pi_\eta(t)$	função retângulo / porta normalizado(a)
$\text{sinc}(t)$	função seno cardinal / "sinc" normalizado(a)
$\delta(t)$	delta de Dirac
δ_{ij}	delta de Kronecker
$\text{III}(t; T_0)$	trem de impulsos T_0 -periódico
\mathbf{R}	vetor posição relativa: $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$
\mathbf{R}_{ij}	vetor posição relativa entre os pontos i e j : $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$

2.1 Introdução

A investigação de um sistema físico desconhecido *a priori* constitui tarefa não-trivial. De modo geral, são formuladas hipóteses e realizados experimentos até que se chegue a uma descrição satisfatória do fenômeno em questão. Neste processo, *realimentação* é fundamental: à medida em que hipóteses são refutadas e os experimentos divergem das predições, faz-se necessário lançar mão de novas premissas, até que se chegue a um nível descritivo aceitável. Nesse espírito, é evidente que as primeiras hipóteses formuladas devem ser as mais simples possíveis, a fim de que se possa elaborar o modelo progressivamente.

De modo bastante geral, um sistema físico pode ser visto como um certo processo A que recebe como entrada um estímulo x e fornece uma saída (ou resposta) y . Note a generalidade dos entes envolvidos: podemos, segundo esse paradigma, tratar de sinais elétricos, mecânicos, ópticos, textuais etc., de forma que o processo A acaba operando como um mapeamento, ou transformação dos objetos considerados. Em outras palavras, temos uma relação da forma

$$y = A[x]. \tag{2.1}$$

A Equação (2.1) traz o famoso modelo “caixa-preta”, tão celebrado na engenharia [164, 11, 78, 133], em que não há necessidade de se detalhar inicialmente a estrutura interna do processo A , pois este é caracterizado pelo seu efeito sobre um estímulo impulsivo.

A idéia deste capítulo é apresentar os aspectos mais básicos do paradigma da transformação de sinais. Mais particularmente, detalharemos em alguma medida uma Teoria *Linear* de Sinais [157, 11, 133, 78, 164, 166], visto que modelos de formação da imagem [11, 133], propagação da informação [157, 78] e filtragem/processamento [166, 45, 41] podem ser investigados segundo um único arcabouço teórico¹. Uma abordagem detalhada pela Teoria de Sinais envolveria imersões em análise funcional [42], equações diferenciais [55, 95], processos estocásticos [167], equações integrais [111], teoria das distribuições [7], medida e integração [7] etc. Obviamente, isto não será feito aqui. Conforme dito acima, é nossa intenção que este capítulo embase a abordagem unificada adotada ao longo de todo o Trabalho, em que os entes portadores de informação serão modelizados de maneira bastante geral, sendo chamados apenas de *sinais*. Para tanto, conceitos como linearidade, invariância ao deslocamento, causalidade e memória serão abordados.

¹É importante enfatizar que a Teoria de Sinais corresponde a um campo extremamente interdisciplinar, de modo que é ingênua a opinião frequente em física de que processamento de sinais e Análise de Fourier são sinônimos. Para aqueles que ainda possuem tal visão, sugere-se uma consulta aos livros de Damelin e Miller Jr. [41] e Mallat [135].

2.2 Sistemas lineares invariantes ao deslocamento

A Equação (2.1) mostra que segundo o modelo “caixa-preta”, os sinais x e y se relacionam por meio de uma transformação arbitrária A . Tal como está colocada, esta Equação apresenta um grau extremo de generalidade. De fato, não formamos juízo nem mesmo sobre a natureza dos sinais: se são contínuos, discretos etc. Objetivamente, a natureza de x e y influenciará o tipo de mapeamento (contínuo-discreto, discreto-contínuo etc.) [12]. Uma hipótese adicional a ser colocada, que deriva da observação², é que lidamos com sistemas lineares, isto é, em que a resposta a um coletivo de estímulos é o coletivo das respostas individuais. Mais formalmente, sejam $x_1, x_2 \in X$ dois estímulos e $A : X \rightarrow Y$ um operador genérico. A é dito linear se dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, valer

$$A[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha A x_1 + \beta A x_2. \quad (2.2)$$

A hipótese da linearidade de A traz toda a análise para um terreno mais familiar: a depender da finitude (ou infinitude) dos espaços X e Y , lida-se com o aparato da álgebra linear ou da análise funcional, respectivamente. Conforme será visto ao longo dos desenvolvimentos, conceitos como norma e produto interno estarão presentes, de modo que assumiremos daqui em diante que os espaços envolvidos são espaços de Hilbert [41, 135].

A linearidade do sistema A pode ser expressa como uma superposição de um número finito N de entradas, mas também pode exigir que consideremos um número infinito de estímulos, levando assim a uma representação em séries, de forma que surgem questões de convergência. Nesse caso, novamente, realizar as análises em espaços de Hilbert nos permite avaliar tais questões. Entretanto, estamos interessados em superposições na forma de integrais, de tal modo que o sistema passa a ser expresso como

$$y(t) = A[x](t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t') x(t') dt', \quad (2.3)$$

em que $h(t, t')$ é a resposta ao impulso do sistema A , a ser discutida mais adiante. Uma justificativa para a representação mostrada na Equação (2.3) reside no fato desta poder ser representada por uma equação diferencial ordinária (EDO) linear [111]. Visto que sistemas físicos são modelizados muito frequentemente por meio de EDOs [29], ou sistemas destas, faz sentido partir de uma representação como aquela mostrada na Equação (2.3). Uma justificativa mais direcionada à física-matemática relacionaria a Equação (2.3) à resolução de uma certa equação diferencial por meio da função de Green $h(t, t')$ [7, 95].

Em adição à linearidade, vamos concentrar as análises em sistemas invariantes a deslocamentos, ou LSI – *linear shift invariant*. Tais sistemas são concebidos de forma que um deslocamento no sinal de entrada $x(t) \mapsto x(t \pm t_0)$ leva a um deslocamento idêntico na saída, ou seja, $y(t) \mapsto y(t \pm t_0)$. Essa invariância ao deslocamento simplifica a estrutura da superposição mostrada na Equação (2.3). Para chegar a essa simplificação, precisamos do operador de translação, definido por

$$T_{t_0} [y] \equiv y(t + t_0), \quad (2.4)$$

claramente linear. A idéia é que verifiquemos quais condições sobre $h(t, t')$ – que é o núcleo do operador integral A mostrado na Equação (2.3) [111] – garantem que seja obedecida a relação de comutação

$$T_{t_0} A[x](t) = A T_{t_0}[x](t). \quad (2.5)$$

Explicitamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t + t_0, t') x(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t' - t_0) x(t') dt', \quad (2.6)$$

que leva a

$$\begin{aligned} h(t + t_0, t') &= h(t, t' - t_0) \\ h(t, t') &= h(t - t_0, t' - t_0) \\ h(t, t') &= h(t - t', 0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

²Processos de difusão, propagação de ondas [55, 95] e sinais elétricos em redes de comunicação [29], dentre outros, são tratados bem em contextos lineares, pelos menos em primeiras aproximações.

A Equação (2.6) mostra que existe uma direção específica no \mathbb{R}^2 em que a relação (2.5) é satisfeita³. Os rearranjos que culminam na Equação (2.7) ocorrem com vistas a evidenciar os efeitos do estabelecimento desta direção. Vê-se, explicitamente, que para sistemas LSI o núcleo $h(\cdot, \cdot)$ depende da diferença entre as coordenadas, fazendo com que a Equação (2.3) tome a forma de um produto de convolução:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')x(t')dt' = (h * x)(t). \quad (2.8)$$

O ganho com a transição da Equação (2.3) para a Equação (2.8) é significativo: reduz-se a dimensionalidade do núcleo h , além de se equipar o desenvolvimento com todo o ferramental da Análise de Fourier. Aliás, exponenciais complexas desempenham papel fundamental em sistemas LSI, pois constituem autofunções dessa classe de sistemas. De fato, tomando $x(t) = \exp(j\omega t)$ e fazendo uso da propriedade comutativa da convolução [55, 95], temos [164, 166, 135]

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp[j\omega(t-t')] dt' \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-j\omega t'} dt' \\ &= \hat{h}(\omega)x(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) mostra que, de fato, $x(t) = \exp(j\omega t)$ é uma autofunção de um sistema LSI, cujo autovalor associado corresponde à transformada de Fourier da resposta ao impulso $h(t)$, chamada função de transferência [164, 166, 135, 45, 12].

Deve-se notar que, embora muito simples, a característica de se alterar a amplitude (complexa) de $x(t)$ por meio de $\hat{h}(\omega)$ abre portas para toda a área de filtragem no domínio da frequência [166]. De um ponto de vista mais formal, isso explica o porque de usarmos exaustivamente em Teoria de Sinais representações via exponenciais complexas (séries e transformadas de Fourier), ao invés de outras bases, tais como polinômios ortogonais. A fala de Richard Hamming ([84], p. 88), grande contribuidor para as áreas de Teoria de Sinais [85] e Análise Numérica [83], resume perfeitamente essa questão:

[...]As a result I early asked the question, “Why should I do all the analysis in terms of Fourier integrals? Why are they the natural tools for the problem?” I soon found out, as many of you already know, that the eigenfunctions of translation are the complex exponentials. If you want time invariance, and certainly physicists and engineers do (so that an experiment done today or tomorrow will give the same results), then you are led to these functions. Similarly, if you believe in linearity then they are again the eigenfunctions. In quantum mechanics the quantum states are absolutely additive; they are not just a convenient linear approximation. Thus the trigonometric functions are the eigenfunctions one needs in both digital filter theory and quantum mechanics, to name but two places.

O emprego de exponenciais complexas em sistemas LSI exige que flexibilizemos a classe de sinais considerados; afinal, funções trigonométricas não são integráveis e não têm, no sentido usual, transformada de Fourier. Visto que a transformada de Fourier corresponde, segundo a discussão acima, à principal ferramenta para análise de sistemas LSI, devemos buscar generalizações que nos permitam operar sinais ou objetos cujo suporte seja infinito, isto é, que estejam definidos sobre toda a reta. Podemos destacar duas estratégias clássicas [118, 7] para tal generalização:

- i. adotar a Transformada de Laplace; ou
- ii. migrar para Teoria de Distribuições.

A primeira introduz um fator de convergência $\exp(-\sigma t)$; $\sigma \in \mathbb{R}^+$ aos integrandos, de forma que “força-se” uma convergência da Transformada de Fourier. Por outro lado, uma abordagem segundo a Teoria de Distribuições consiste em se tomar limites de funções “bem-comportadas”, sobre os quais calcula-se o valor de um

³Tal direção tem como vetor diretor $\mathbf{a} = (1, -1)$.

dado funcional linear [7, 95]. Embora esta última abordagem possua uma carga razoável de formalismo, seus “processos-limite” são intuitivos, e serão usados neste trabalho. Uma discussão aprofundada sobre as Teorias de Laplace e de Distribuições, bem como suas conexões, é realizada por Appel em [7]. Uma discussão aplicada sobre a Transformada de Laplace em sistemas em tempo contínuo é realizada por Apolinário Jr. e Liberal em [6].

Neste cenário mais amplo – complementado por distribuições –, sinais impulsivos têm sua representação viabilizada. Naturalmente, o objeto mais representativo é a delta de Dirac, $\delta(t)$ [55, 95, 7, 164], bastante corriqueira em física. Nos interessa aqui a propriedade de que um sinal $x(t)$ pode ser representado como uma combinação linear de deltas deslocadas, isto é,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t-t')dt' = (x * \delta)(t). \quad (2.10)$$

Embora a Equação (2.10) pareça redundante à primeira vista, já que os coeficientes da expansão de x são seus próprios valores $x(t')$, ela permite que se obtenha o principal resultado da Teoria de Sinais LSI. De fato, aplicando o operador integral A em ambos os lados, obtém-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t-t')dt' \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') A[\delta(t-t')]dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt' \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na Equação (2.11), vemos que a resposta ao impulso h é dada pela ação do sistema em questão sobre um estímulo perfeitamente impulsivo, centrado em t' . Mas, como o sistema é LSI, temos então que

$$h(t) \equiv A[\delta](t). \quad (2.12)$$

A Equação (2.12) confirma o que foi dito no início da discussão: h é a função de Green do sistema $A[\cdot]$. De um ponto de vista mais aplicado [29, 164, 166], vê-se que a resposta h carrega consigo a informação da ação do sistema A sobre todas as frequências, visto que $\mathcal{F}[\delta](\omega) = 1 \forall \omega \in \mathbb{R}$. Sob essa óptica, o sistema A poderia ser caracterizado no espaço recíproco. Para visualizar essa possibilidade, basta perceber que se A é LSI, então $y(t) = (x * h)(t)$, tal como mostrado nas Equações (2.8) e (2.11). Portanto, tomando a transformada de Fourier sobre esta relação, chega-se a

$$\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{h}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)}. \quad (2.13)$$

Em um contexto linear, nos quais y e x estejam vinculados por uma equação diferencial a coeficientes constantes, a função de transferência $\hat{h}(\omega)$ dada pela Equação (2.13) corresponderá a uma função racional em ω . Claramente, os pólos de \hat{h} , isto é, os pontos em que $\hat{x}(\omega) = 0$, caracterizam o sistema quanto a sua estabilidade [6].

2.3 Causalidade e memória

Causalidade e factibilidade

De um ponto de vista puramente formal, é cômodo admitir que os sinais considerados têm duração infinita, de modo que ao se avaliar respostas de sistemas LSI possamos tranquilamente operar produtos de

convolução (ou transformadas de Fourier) sem nos preocuparmos com os efeitos de eventuais truncamentos. Naturalmente, em um cenário físico tal suposição se torna absurda, já que toda medida tem início num instante de tempo arbitrário $t = 0$. Mais profundamente, um sistema fisicamente realizável não pode *anticipar* sua saída, pois isto viola os princípios mais básicos da *causalidade*. Afinal, como poderia a resposta vir antes do estímulo? Objetivamente, consideremos um sistema LSI cuja resposta ao impulso é dada pela função de Heaviside,

$$h(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Com essa resposta ao impulso, a saída será dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt', \quad (2.15)$$

evidenciando que, de fato, apenas o *passado* do sinal de entrada x é relevante para o cômputo de y no instante t . No que tange à causalidade, a Equação (2.15) representa um sistema fisicamente realizável. Ocorre portanto que, na prática⁴, toda resposta ao impulso é causal e tem a forma

$$h_c(t) = h(t)\theta(t). \quad (2.16)$$

Deve-se notar que a Equação (2.16) traz questões extremamente importantes para a área de desenho de filtros. Por conta da presença de um produto com uma função degrau, as componentes real e imaginária da função de transferência $\hat{h}_c(\omega)$ não são independentes entre si, mas formam um par de transformadas de Hilbert [29, 164, 166]. Dentro desse formalismo, há a importante condição de Paley-Wiener [164, 166], que mostra que para se assegurar a causalidade do sistema é necessário (mas não suficiente) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|\hat{h}_c(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (2.17)$$

A restrição imposta pela condição de Paley-Wiener mostrada na Equação (2.17) põe em solo matemático a assertiva de natureza física sobre a impossibilidade de se desenvolver filtros *ideais*, isto é, que sejam perfeitamente limitados em banda. Conforme apontado por Carlson [29] e Papoulis [166], a função de transferência \hat{h}_c não pode se anular em nenhum intervalo, por menor que este seja. Afinal, qualquer possibilidade em contrário levaria a uma violação da Equação (2.17).

Janelamento e memória

O desenvolvimento acima teve por finalidade evidenciar a questão da causalidade na teoria de sistemas LSI. Em adição a questões sobre causalidade e factibilidade de filtros lineares, há outros aspectos a serem considerados. Um deles diz respeito a sistemas com memória. Grosso modo, um sistema com memória é aquele cuja saída $y(t)$ depende, em alguma medida⁵ do passado da entrada $x(t)$. Talvez o arquétipo mais simples de sistema com memória seja o integrador mostrado na Equação (2.15): nesse sistema, *todo* o passado de $x(t)$ é considerado. Além disso, todos os instantes pregressos têm o mesmo “peso”, visto que $h_c \equiv 1 \forall t' < t$. É claro que pode-se conceber um sistema no qual o estímulo contribua de maneira diferente ao longo do tempo, já que teríamos simplesmente a saída LSI

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')w(t-t')dt', \quad (2.18)$$

⁴A discussão sobre causalidade só faz sentido em sistemas cuja variável independente seja o tempo. Sistemas *espaciais* prescindem de causalidade [157], uma vez que nestes não existe nada parecido com uma “seta do tempo”.

⁵Veja que, neste ponto, não existe exigência alguma quanto a invariância ou linearidade.

cuja entrada é ponderada pela função $w(\cdot)$. Na representação acima ignoramos, por ora, a questão da causalidade previamente discutida. O que deve ser ressaltado aqui é o fato de que a forma e, principalmente, o suporte da função w determinam o quanto do passado do sistema é levado em consideração na definição da resposta. Para compreender melhor este ponto, basta perceber que se por um lado a saída do integrador (Eq. (2.15)) depende de todas as entradas anteriores do sistema, um sistema completamente sem memória seria formalmente dado por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')\delta(t-t')dt' = (x \cdot h)(t). \quad (2.19)$$

O que mudou entre estes dois casos extremos foi justamente o suporte da função w . De fato, ambos os casos são contemplados ao se regular continuamente a largura desta “janela de observação”. Consideremos

$$w(t) = \Pi_{\eta}(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\eta} & \text{se } |t| \leq \frac{\eta}{2}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Deve-se notar que $\Pi_{\eta}(t)$ dada pela Equação (2.20) constitui uma identidade aproximada [95], ou, segundo Figueiredo [55], um núcleo de Dirac. Isto é, a sequência $\{\Pi_{\eta}; \eta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ é construída de tal forma que $(x * \Pi_{\eta})(t)$ converge uniformemente a $x(t)$ quando $\eta \rightarrow 0^+$ [95, 55]. Em caso de descontinuidade a sequência convergirá para o valor médio da função em torno do referido ponto⁶. No caso extremo oposto, para $\eta \rightarrow \infty$, recupera-se o integrador clássico. Naturalmente, em se tratando de um sistema LSI, a mesma análise poderia ter ocorrido no espaço recíproco. Nesse caso, deveríamos analisar o comportamento assintótico de

$$\hat{\Pi}_{\eta}(\omega) = \frac{\sin\left[\frac{\eta}{2}\omega\right]}{\frac{\eta}{2}\omega} = \text{sinc}\left(\frac{\eta}{2\pi}\omega\right). \quad (2.21)$$

A Figura 2.1 ilustra essa análise dual tempo/frequência da função Π_{η} . Por fim, cabe lembrar que na construção de uma teoria sobre a Transformada de Fourier [55, 95, 135], o problema da inversão de $\hat{\Pi}_{\eta}(\omega)$ exige que consideremos um espaço mais diverso de funções: o das funções de quadrado da norma integrável, isto é, $\int |x|^2 < \infty$, que, na prática, corresponde ao conjunto de sinais com energia finita. Com isso, nos munimos de todo o aparato dos espaços vetoriais com produto interno e, conseqüentemente, de conceitos como norma e distâncias [42]. Tais recursos são imprescindíveis em teoria de sinais.

Nas próximas seções o conceito de resolução será melhor elaborado, visto que permeará todo este Trabalho. Antes disso, há de se notar que existe toda uma sub-área da Análise de Sinais que lida justamente com *janelamento*⁷. Nela, investiga-se como a limitação no domínio do tempo pode ser realizada de forma que um determinado atributo seja aperfeiçoado ou mitigado. Por exemplo, pode-se planejar uma janela $w(t)$ de forma a se maximizar a energia do sinal [166]. É justamente a questão do janelamento que impõe as restrições mais severas em termos de resolução do sinal [166], pois os suportes de w e \hat{w} estão vinculados pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg [41, 42, 164, 12, 135]: sejam σ_t^2 e σ_{ω}^2 as variâncias⁸ de um sinal x de quadrado integrável sobre os espaços direto e recíproco, respectivamente. O princípio de incerteza estabelece que

$$\sigma_t^2 \sigma_{\omega}^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.22)$$

2.4 Amostragem

A discussão sobre amostragem é antecipada a este ponto uma vez que os resultados que derivam de seu principal teorema serão necessários para as discussões subseqüentes sobre os harmônicos prolatos-esferoidais.

⁶Este resultado garante, no contexto de distribuições [95], a existência de uma identidade para o produto de convolução.

⁷Neologismo derivado de *windowing*.

⁸O cômputo de estatísticas do sinal x é operacionalizado sobre a distribuição $\|x(t)\|^2$ devidamente normalizada.

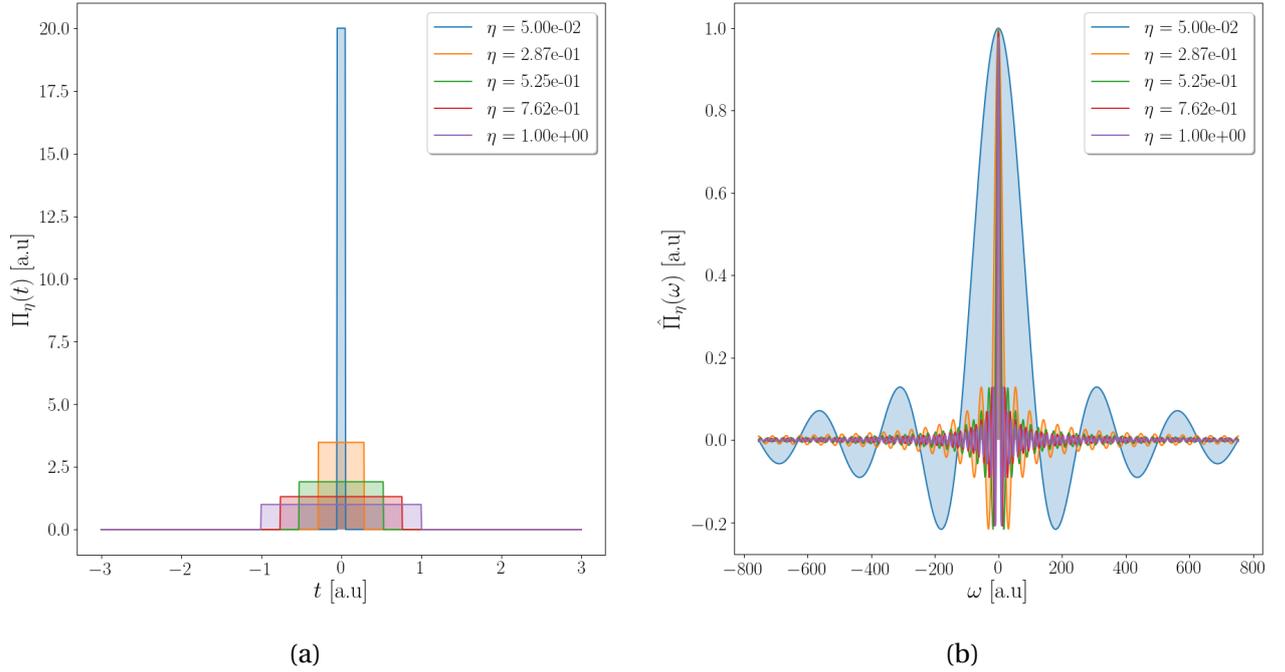


Figura 2.1: Identidade aproximada para a delta de Dirac (a) e sua transformada de Fourier (b). Conforme discutido no texto, as larguras de cada identidade e seus respectivos espectros são inversamente proporcionais, respeitando-se o Princípio de Incerteza de Heisenberg.

Além desse suporte teórico, o processo de amostragem marca a transição de uma teoria de sinais em variáveis contínuas para uma versão híbrida, no sentido que passaremos a lidar com tempo (ou espaço, ou qualquer outra variável independente) discreto, mas com frequências contínuas e discretas. Comecemos enunciando o

TEOREMA 1: (AMOSTRAGEM UNIFORME) [110, 190, 191, 236]

Seja $x(t)$ um sinal limitado em banda no intervalo $\omega \in [-2\pi B, 2\pi B]$ amostrado a uma taxa $f_s \geq (2B)$. Então $x(t)$ pode ser recuperado, sem perdas ou distorções, das amostras $x_n \equiv x(t = n/f_s)$ por meio da interpolação

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \operatorname{sinc}(2Bt - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin[\pi(2Bt - n)]}{\pi(2Bt - n)}. \quad (2.23)$$

A demonstração deste consagrado Teorema⁹ é simples e bastante elucidativa, de modo que a exporemos aqui. Naturalmente, devido à sua importância, é possível encontrá-la facilmente [191, 110, 78, 164, 166, 29, 41].

Para começar, faremos uso de um *trem de impulsos*, definido por

$$\text{III}(t; T_0) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0). \quad (2.24)$$

O trem de impulsos mostrado na Equação (2.24) é identificado coloquialmente por “pente de Dirac”. Esta denominação não será usada aqui.

⁹Encontra-se frequentemente na literatura o Teorema 1 com denominações diversas, tais como “Teorema de Nyquist”, “Teorema de Whittaker-Shannon”, “Teorema de Kotel’nikov”, além de concatenações com os nomes destes indivíduos. Refletindo a influência estadunidense nos desenvolvimentos cultural e científico brasileiros, acabamos ignorando a contribuição do cientista russo Vladimir Kotel’nikov na área de amostragem de sinais. Para manter o Teorema 1 isento de rivalidades geopolíticas, o autor deste trabalho prefere denominá-lo de maneira pragmática, esperando que esta minúscula nota de rodapé entregue algum reconhecimento à contribuição fundamental de V. A. Kotel’nikov [110].

O aspecto fundamental de $\text{III}(t; T_0)$ é que ele corresponde a uma estrutura T_0 -periódica, cuja “função” fundamental é a delta de Dirac. Em se tratando de uma função periódica, III possui série de Fourier, dada por

$$\text{III}(t; T_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}, \quad (2.25)$$

cuja frequência angular fundamental ω_0 é dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (2.26)$$

O processo de amostragem uniforme consiste em se armazenar os valores de um dado sinal x em intervalos de tempo iguais, múltiplos de um período fundamental T_s (daí o “uniforme”). Matematicamente, isso corresponde a se obter um sinal $x_s(t)$ dado pelo produto entre $x(t)$ e $\text{III}(t; T_s)$. No espaço de Fourier temos então uma convolução da forma

$$\begin{aligned} \hat{x}_s(\omega) &= \hat{x}(\omega) * \widehat{\text{III}}(\omega; T_s) \\ &= \omega_s \hat{x}(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega - n\omega_s). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para obtenção do resultado mostrado na Equação (2.27), usamos o fato de que se $\text{III}(t; T_s)$ tem representação em série de Fourier, sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\text{III}}(\omega; \omega_s) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \quad (2.28)$$

em que $\omega_s = 2\pi/T_s$. A Equação (2.27) mostra que a amostragem de $x(t)$ leva à replicação de seu espectro, cujas cópias distam ω_s umas das outras. Como, por hipótese, x é limitado em banda, vemos que existe um compromisso entre a frequência de amostragem ω_s e a frequência máxima do sinal, B . De fato, para que não ocorram superposições entre as réplicas, devemos ter

$$\omega_s - 2\pi B \geq 2\pi B \quad \Rightarrow \quad f_s \geq 2B. \quad (2.29)$$

A Equação (2.29) traz o famoso Critério de Nyquist [166, 29, 152]. Este critério mostra que a representação do sinal amostrado será fidedigna à do sinal original se a frequência de amostragem for pelo menos duas vezes maior que a frequência máxima do sinal.

Embora obtido a partir de hipóteses bastante simplificadoras e que não têm realizabilidade física (limitação em banda, por exemplo), o Critério de Nyquist fornece um limitante inferior para a frequência de amostragem. Assim, o primeiro passo para a reconstrução fidedigna de um sinal por meio de suas amostras é que as amostras tenham sido obtidas de forma que a *informação* original não tenha se perdido ou corrompido no processo de amostragem. O passo final na demonstração do Teorema 1 parte da observação de que se o sinal $x_s(\omega)$ for gerado por meio de amostragem com taxa maior ou igual à de Nyquist, ele pode ser submetido em segurança a um filtro passa-baixas ideal, cuja resposta ao impulso é uma função porta da forma

$$\hat{h}_{\text{LP}}(\omega) = \frac{1}{\omega_s} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad (2.30)$$

em que $4\pi B \leq \omega_c \leq \omega_s$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\hat{x}(\omega) * \widehat{\Pi}(\omega; \omega_s) \right) \cdot \hat{h}_{\text{LP}}(\omega) \right] (t) \\
&= (x(t) \cdot \text{III}(t; T_s)) * \frac{\sin \left[\frac{\omega_c}{2} t \right]}{\frac{\omega_c}{2} t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t' - nT_s) x(t') \frac{\sin \left[\frac{\omega_c}{2} (t - t') \right]}{\frac{\omega_c}{2} (t - t')} dt' \right] \right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin \left[\frac{\omega_c}{2} (t - nT_s) \right]}{\frac{\omega_c}{2} (t - nT_s)}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\omega_c = \omega_s = 4\pi B$, obtemos finalmente

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x \left(\frac{n}{2B} \right) \frac{\sin[\pi(2Bt - n)]}{\pi(2Bt - n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \text{sinc}(2Bt - n), \tag{2.32}$$

que é justamente a fórmula de interpolação dada pela Equação (2.23). Para completar a prova, basta perceber que a saída do sistema $y(t)$ é simplesmente a própria entrada, já que seu conteúdo espectral é exatamente o mesmo de $x(t)$ no intervalo $[-B, B]$, visto que o critério de Nyquist é atendido e não há superposição de réplicas. Como x é limitado em banda neste intervalo, segue, portanto, que $y(t) \equiv x(t)$.

Em se tratando fundamentalmente de uma fórmula de interpolação, poderíamos nos perguntar qual seria a vantagem de se escolher sincs como funções interpoladoras, ao invés de optarmos por objetos mais simples, como polinômios. Uma primeira resposta, de cunho prático, baseia-se no fato de que sincs têm largura de banda finita, de forma que – pelo menos inicialmente – torna-se mais simples evitar a superposição das réplicas espectrais. Uma discussão detalhada sobre os aspectos experimentais da amostragem, incluindo larguras de banda não-finitas e ruídos pode ser encontrada no livro de Carlson [29]. Para nós, interessa além da finitude da largura de banda das sincs, sua ortogonalidade. De fato, denotando as funções interpoladoras do Teorema da Amostragem Uniforme por

$$\phi_n^{\text{SH}}(t) \equiv \text{sinc}(2Bt - n), \tag{2.33}$$

temos que

$$\langle \phi_m^{\text{SH}}, \phi_n^{\text{SH}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^{\text{SH}*}(t) \phi_n^{\text{SH}}(t) dt = \frac{1}{2B} \delta_{mn}, \tag{2.34}$$

sendo δ_{mn} a Delta de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.35}$$

e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno (nesse caso, no espaço de funções de quadrado da norma integrável). A Equação (2.34) é facilmente demonstrável por meio do Teorema de Plancherel-Parseval [55, 135, 95], em que é estabelecida a igualdade $\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-1} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$. Deve-se chamar atenção para o fato de que ao normalizarmos as funções ϕ_n^{SH} , construindo o conjunto

$$\mathcal{B}_{\text{SH}} = \{ \phi_n^{\text{SH}}(t); n \in \mathbb{Z} \} \quad \text{com } \phi_n^{\text{SH}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2B}} \text{sinc}(2Bt - n), \tag{2.36}$$

obtemos uma sequência ortonormal completa [42], visto que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, \phi_n^{\text{SH}} \rangle \phi_n^{\text{SH}}(t) \tag{2.37}$$

e

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle \phi_n^{\text{SH}}, x \rangle|^2. \quad (2.38)$$

As Equações (2.37) e (2.38) são obtidas por meio do uso do produto interno e da propriedade de ortonormalidade dos elementos de \mathcal{B}_{SH} . Veja que neste caso lidamos com séries de Fourier generalizadas, em que a geometria da melhor aproximação [55, 42] se manifesta¹⁰.

Para finalizar, há de se notar que a base \mathcal{B}_{SH} pode, devido às propriedades destacadas acima, ser investigada em um contexto de análise multi-resolução via *wavelets* [135, 31]. Uma revisão extensa das propriedades das *wavelets de Shannon* é realizada por Cattani em [31].

2.5 Sistemas LSI discretos

O processo de amostragem detalhado na Seção 2.4 marca a transição da representação de um sinal para um cenário discreto. Isso não quer dizer, contudo, que todas as análises devam ocorrer em variáveis discretas. Tal como comentado anteriormente, lidaremos com transformadas cuja frequência é ainda uma variável contínua. A migração definitiva para um cenário de tempo e frequência discretos é obtida posteriormente. Chegaremos aí ao pináculo do Processamento *Linear* Digital de Sinais, com a Transformada Discreta de Fourier.

A abordagem dos tópicos a seguir é padrão na área de Processamento de Sinais, de forma que há várias referências disponíveis para aprofundamento, segundo ópticas particulares. A razão de se abordar tais conteúdos aqui reside na intenção de construir o conceito de *graus de liberdade* de um sistema de imagens de maneira autocontida, sem direcionar a leitura às muitas fontes externas possíveis. De todo modo, para uma visão de Sinais dentro do contexto de engenharia eletrônica, sugere-se o livro de Diniz *et al.* [45]. Para abordagens muito mais matematicamente vocacionadas, pode-se consultar Damelin e Miller Jr. [41] e a importante obra de Mallat [135]. Para abordagens em óptica, os clássicos de Goodman [78] e O'Neil [157] são fundamentais, literalmente.

Transformada Z

O processo de amostragem segundo os critérios explicitados na Seção 2.4 opera efetivamente mapeando o sinal $x(t)$ a uma sequência infinita enumerável $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Deve-se notar que a infinitude de entradas desta sequência é herdada da não-limitação temporal do sinal de origem¹¹. Dessa forma, é natural que se busquem ferramentas análogas àquelas de domínio contínuo para se investigar as propriedades do sistema discreto recém-obtido. Assim, se a transformada (bilateral) de Laplace [7, 164] de $x(t)$, dada por

$$\mathcal{L}[x](s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad \text{em que } s = \sigma + j\omega \quad (2.39)$$

desempenha papel relevante na análise de estabilidade sistemas lineares, especialmente aqueles representados por equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes [118, 6], faz sentido contar com ferramenta para caracterização de sequências em tempo discreto. De fato, temos a

DEFINIÇÃO 1: (TRANSFORMADA Z) [41, 7, 45]

Dada a sequência complexa $x = \{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$, sua Transformada Z é definida como

$$\mathcal{Z}[x](z) = \hat{x}(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \quad (2.40)$$

¹⁰Por geometria da melhor aproximação nos referimos à propriedade de sistemas ortogonais minimizarem a norma de $\|x - \sum_n c_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n\|$.

¹¹Naturalmente, em contextos práticos, o janelamento desempenha papel relevante, tal como será evidenciado mais adiante.

Deve-se notar que à semelhança da Transformada de Laplace, a Transformada Z mostrada na Equação (2.40) também exige que seja especificada uma região de convergência, ou ROC – do inglês *region of convergence*. Contudo, há a diferença de que se por um lado as ROCs associadas a \mathcal{L} correspondem a faixas do plano complexo, delimitadas por duas abscissas de convergência¹², por outro as ROCs típicas de \mathcal{Z} correspondem a anéis neste mesmo plano. Adicionalmente, deve-se notar que se o sinal x_n tem um número finito de entradas, $\mathcal{Z}[x]$ é um polinômio em z^{-1} [41], mas corresponde no caso mais geral a uma série formal de potências [41, 87]. Por fim, ressalte-se que a transformada Z aqui apresentada será de grande valia na análise de métodos numéricos em EDPs discutidos no Capítulo 4.

Há um conjunto razoavelmente grande de propriedades da transformada Z que pode ser visto em detalhes nas referências sugeridas acima, em particular Damelin e Miller [41] e Diniz *et al.* [45]. Nos interessam em particular duas delas: deslocamento temporal e convolução. A primeira diz que

$$\mathcal{Z}[x_{n\pm l}](z) = z^{\pm l} \hat{x}(z) \quad (2.41)$$

e tem demonstração trivial, bastando trocar os índices da soma na Equação (2.40), Definição (1). A segunda, de maior interesse, está relacionada à transformada Z do *produto de convolução* entre dois sinais, $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$. Tal produto é definido em completa analogia ao caso contínuo, e sua transformada Z é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{n-m} \right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{n-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p z^{-(p+m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m z^{-m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p z^{-p} \\ &= \hat{x}(z) \hat{y}(z) \end{aligned} \quad (2.42)$$

A Equação (2.42) herda das Transformadas de Laplace e Fourier a propriedade de levar um produto de convolução a um produto usual¹³. Com isso, fica claro que a Transformada Z constitui recurso valioso no estudo de sistemas LSI discretos. De fato, sistemas LSI contínuos e discretos são bastante semelhantes quanto às suas propriedades. A questão das autofunções exponenciais, por exemplo, também se verifica. Seja $x = \{z^n\}$ com $z \in \mathbb{C}$ o sinal de entrada de um sistema e $h = \{h_n\}$ sua resposta ao impulso. Temos então que

$$\begin{aligned} y_n &= (x * h)_n \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{n-m} h_m \\ &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^{-m} \right) z^n \\ &= \hat{h}(z) x_n. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Transformada de Fourier em tempo discreto

Embora bastante direto, o desenvolvimento mostrado na Equação (2.43) abre portas para o estabelecimento da ferramenta canônica para avaliação de estabilidade e resposta em frequência de um sistema LSI discreto: a Transformada de Fourier em Tempo Discreto, ou DTFT – *Discrete Time Fourier Transform*. Começemos evidenciando o fato de que a função de transferência de um sistema LSI discreto pode ser expressa

¹²Note que este caso difere significativamente do uso mais corriqueiro da transformada unilateral de Laplace, para a qual a região de convergência corresponde a semiplanos definidos à direita da abscissa de convergência [7]

¹³Deve-se notar, entretanto, que sendo $\hat{x}(z)$ e $\hat{y}(z)$ séries, estamos falando de um produto de Cauchy [87, 41], de forma que o resultado mostrado na Equação (2.42) não é necessariamente surpreendente.

como uma função racional em z . De fato:

$$\begin{aligned} y_n &= (x * h)_n \\ \mathcal{Z}[y](z) &= \mathcal{Z}[(x * h)](z) \\ \hat{y}(z) &= \hat{x}(z) \cdot \hat{h}(z) \implies \hat{h}(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{x}(z)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mas a Equação (2.44) é simplesmente a Transformada Z da resposta ao impulso, $\{h_n\}$:

$$\hat{h}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}. \quad (2.45)$$

As Equações (2.44) e (2.45) mostram, de maneiras ligeiramente diferentes, que para o sistema se manter estável, alguma restrição deve ser imposta sobre $\{h_n\}$. Uma das condições para estabilidade é que a resposta $\{h_n\}$ seja absolutamente somável. Por outro lado, temos para $\hat{h}(z)$:

$$|\hat{h}(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| |z^{-n}| < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| < \infty. \quad (2.46)$$

A obtenção do resultado mostrado na Equação (2.46) é legítima para os casos em que $|z| = 1$. Nesse caso, como por hipótese $\{h_n\}$ é absolutamente somável, vemos que um sistema estável deve necessariamente possuir em sua ROC o círculo de raio unitário, representado pelo conjunto $\{z \in \mathbb{C}; z = \exp(j\omega), \omega \in [0, 2\pi]\}$.

A avaliação de \hat{h} em $z = \exp(j\omega)$ leva à resposta em frequência do sistema [45, 166], de modo completamente análogo ao caso em variável contínua. Adicionalmente, no cenário discreto, essa avaliação também nos fornece a

DEFINIÇÃO 2: (TRANSE. DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO) [41, 45]

Dada a sequência complexa $x = \{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$, sua DTFT é definida como

$$\hat{x}(e^{j\omega}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}, \quad \text{com } \omega \in [0, 2\pi]. \quad (2.47)$$

Por sua vez, a inversa (IDTFT) é dada por

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.48)$$

As expressões das DTFTs mostradas nas Equações (2.47) e (2.52) evidenciam o que foi dito no início desta Seção: mesmo em sistemas em tempo discreto, análises em frequência contínua são completamente pertinentes. Cabe notar que $\hat{x}(e^{j\omega})$ é 2π -periódica, de forma que a IDFT poderia ser calculada sobre qualquer intervalo de largura 2π , tomando-se frequentemente como $[-\pi, \pi]$. Novamente, as propriedades (herdadas da transformada Z) da DTFT e sua inversa têm muito em comum com seus análogos em tempo contínuo. Sua utilidade “prática” neste trabalho ficará mais evidente no Capítulo 4. Por enquanto, prosseguiremos à obtenção da forma completamente discreta.

Transformada Discreta de Fourier

Em um contexto de cálculo numérico-computacional, as DTFTs apresentadas acima ainda não constituem ferramentas adequadas para síntese e análise, visto que a frequência ω é contínua. Nesse sentido, poderíamos simplesmente amostrar a DTFT $\hat{x}(e^{j\omega})$ em pontos equidistantes $k\Delta\omega$, com $k \in \mathbb{Z}$. Uma vez que a DTFT é

2π -periódica, poderíamos também restringir $\Delta\omega$ de forma que no intervalo $\omega \in [0, 2\pi[$ houvessem precisamente M amostras. Desse modo, teríamos a seguinte transformação de amostragem:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(e^{j\omega}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}k\right). \quad (2.49)$$

Se encararmos a DTFT como uma transformação de coordenadas que mapeia o domínio discreto n a seu correspondente contínuo ω , vemos que a Equação (2.49) corresponde a uma transformação de domínio discreto para domínio contínuo, $n \rightarrow k$. Para o que segue, é importante notar que o efeito da amostragem no espaço ω tem exatamente as mesmas consequências discutidas na Seção (2.4). De fato, tomando-se a inversa na Equação (2.49) chega-se a uma replicação do sinal original:

$$\frac{M}{2\pi} x_n * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n-kM}. \quad (2.50)$$

Vemos pela Equação (2.50) que a amostragem de $\hat{x}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/M}$ leva a uma representação M -periódica do sinal original x_n , além de acarretar o aparecimento de um mero fator de escala. Para que a representação de x_n seja fidedigna – caracterizando assim o estabelecimento de uma transformada inversa completamente discreta –, é preciso evitar a superposição das réplicas. Isso demanda a definição de um número finito de entradas do sinais envolvidos ou, em outras palavras, um janelamento de x_n [12, 45]. Este janelamento se faz necessário também porque buscamos uma transformada operacional em ambiente numérico-computacional, de forma que não é razoável supor uma infinidade de amostras. Se estabelecermos que o sinal x_n possui N entradas, temos finalmente a

DEFINIÇÃO 3: (TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER) [41, 45]

Dada a sequência complexa $x = \{x_n; 0 \leq n < N\}$, sua DFT é definida como

$$\hat{x}_k \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}kn\right]. \quad (2.51)$$

Por sua vez, a inversa (IDFT) é dada por

$$x_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \exp\left[j\frac{2\pi}{N}kn\right]. \quad (2.52)$$

As Equações (2.51) e (2.52) apresentam as DFTs – *Discrete Fourier Transforms*. Tais transformações operam entre domínios discretos e são finitas¹⁴, sendo portanto adequadas a processamento digital de sinais. Poderíamos dissertar por todo este texto sobre as características peculiares da DFT e sobre suas quase infinitas aplicações. Entretanto, no mesmo espírito das definições anteriores, mostramos aqui apenas o mínimo para sustentar aplicações ao longo deste Trabalho. A literatura da DFT é tão extensa quanto seu rol de aplicações, de forma que nos limitamos a recomendar, além de toda bibliografia supracitada, o importante artigo de Peter Henrici sobre aplicações da DFT em análise complexa computacional [88]. Neste trabalho são apresentadas aplicações surpreendentemente diversas da DFT, para muito além do Processamento de Sinais.

Antes de prosseguir, devemos chamar atenção para dois detalhes importantes na construção da DFT. São eles:

- i. A existência de uma relação entre o número de amostras nos espaços direto e recíproco (N e M , respectivamente) para que a DFT corresponda, de fato, a uma representação correta dos sinais envolvidos; e
- ii. O efeito do janelamento na resolução da DFT.

Quanto a (i), basta perceber que se $M < N$, ocorrerá superposição das réplicas, e a transformada inversa não corresponderá à aproximação de x_n . Assim sendo, é necessário que o número de entradas de \hat{h}_k , M , seja maior ou igual ao número de entradas do sinal x_n , N . Quanto a (ii), ocorre uma completa analogia com o caso contínuo, conforme mostrado a seguir.

¹⁴No sentido que requerem um número finito de entradas.

Na construção da DFT foi exigido de antemão que a frequência de amostragem $\Delta\omega$ fosse tal que houvessem exatamente $M \geq N$ entradas no intervalo $\omega \in [0, 2\pi[$. Note que, de modo sutil, realizamos um janelamento sobre $\hat{x}(e^{j\omega})$, visto que limitamos o número de pontos do sinal. Portanto, uma dedução alternativa da DFT pode explicitamente levar esse último fato em consideração, juntamente com a discretização da integral em ω devido à seleção dos pontos $\hat{x}(e^{j\omega})_{\omega=2\pi k/N}$. Considerando que a largura da janela de observação é igual a W , temos que

$$\begin{aligned} x_n &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right\} \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} * \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{j\omega n} d\omega \\ &\approx \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \exp \left[j \frac{2\pi}{N} kn \right] \right\} * \frac{W}{2\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{W}{2\pi} n \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

O fator $1/N$ aparece na aproximação mostrada na Equação (2.53) ao fazermos $\Delta\omega = 2\pi/N$. Com isso, a largura da janela deve ser $W = 2\pi N$. Assim, chega-se finalmente a

$$x_n \approx \text{DFT}^{-1} [\hat{x}]_n * N \operatorname{sinc} (Nn). \quad (2.54)$$

A convolução entre x_n e $\operatorname{sinc} (Nn)$ faz com que todas as componentes impulsivas de x , isto é, que têm a forma $x_n \delta_n$, tenham seu conteúdo distribuído às entradas adjacentes, ponderado pelo perfil da sinc. Portanto, se uma característica de x tem largura efetiva de uma entrada, após a DFT seu conteúdo estará contido majoritariamente num intervalo de largura $2/N$ em torno da entrada em questão.

3.1 Resolução

É surpreendentemente difícil definir de modo preciso ou inequívoco o que é, de fato, resolução: inicialmente, porque há uma forte dependência do contexto. Em óptica, por exemplo, o conceito de resolução pode ser associado à capacidade de se discernir, ou *resolver*, duas estruturas adjacentes em uma mesma imagem (eis o critério de resolução de Rayleigh [78, 157]). Segundo, porque há uma profusão de métricas – objetivas ou não – para se avaliar a “acuidade” de um sistema [24, 157, 78, 12, 133, 21]. Tais métricas são definidas geralmente em aproximações LSI dos sistemas considerados, de modo que estão, em última instância, relacionadas à resposta ao impulso do sistema modelizado. No final, estas figuras dependem de parâmetros físicos dos *setups* experimentais, de modo que não têm um caráter, digamos, intrínseco. Por outro lado, o Princípio de Incerteza de Heisenberg está ligado fundamentalmente à natureza quântica dos sistemas diminutos. Parece não haver um ponto-médio em que o conceito de resolução não seja tão explicitamente dependente do modelo adotado, nem que diga respeito a aspectos da física fundamental no mundo (sub)atômico.

Em face das dificuldades explicitadas acima, adotamos neste trabalho uma abordagem “informacional” para o conceito de resolução. Fazemos isso pois nos parece que a Teoria da Informação, tal como concebida por Shannon [190], mas aplicada à óptica por Gabor [64, 65, 66, 67, 68], transita muito bem entre os extremos colocados acima: é possível abordar a mecânica quântica (e portanto o Princípio de Incerteza) via o formalismo da matriz de densidade [145, 10], e usar este mesmo aparato para descrever o conteúdo informacional de uma imagem (e portanto de um sinal) [70, 156, 157, 124].

Revisitemos mais uma vez a Equação (2.15). Claramente, no domínio da frequência teremos uma relação da forma $\hat{y}(\omega) = (\hat{x} * \hat{\theta})(\omega)$. Assim, a análise sobre o espectro do sinal de saída exige a determinação da transformada de Fourier da função de Heaviside, $\hat{\theta}(\omega)$. Ocorre, pois, que esta função não é integrável e, portanto, não possui transformada de Fourier no sentido usual. Somos obrigados a fazer uso de ferramentas adicionais para estimar o sinal de interesse. Uma estratégia simples e que combina abordagens das Teorias da Transformada de Laplace e de Distribuições [7] consiste em se calcular a transformada de Fourier da seguinte resposta:

$$\theta_\eta(t) = \begin{cases} \exp(-\eta t) & \text{se } t \geq 0; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.1)$$

com $\eta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Note que $\theta_\eta(t) \rightarrow \theta(t)$ conforme $\eta \rightarrow 0^+$. Portanto, podemos calcular a transformada de Fourier de θ_η e, somente após esta etapa, tomar o limite, contornando assim a questão da integrabilidade, já

que θ_η decai a zero no infinito. Vejamos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \mathcal{F}[\theta_\eta](\omega) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \theta_\eta(t) dt \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \exp[-(j\omega + \eta)t] dt \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\eta \left[1 + \left(\frac{\omega}{\eta} \right)^2 \right]} + j \frac{\omega}{\eta^2 + \omega^2} \right\} \\
 &= \pi \delta(\omega) + j \frac{1}{\omega}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

O primeiro termo da Equação (3.2), $\pi \delta(\omega)$, é obtido de maneira semelhante àquela usada na Equação (2.20), visto que a sequência $\{\phi_\eta(t) = 1/\pi\eta[1 + (t/\eta)^2]; \eta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ também constitui uma identidade aproximada [164, 55] (vide Figura 3.1).

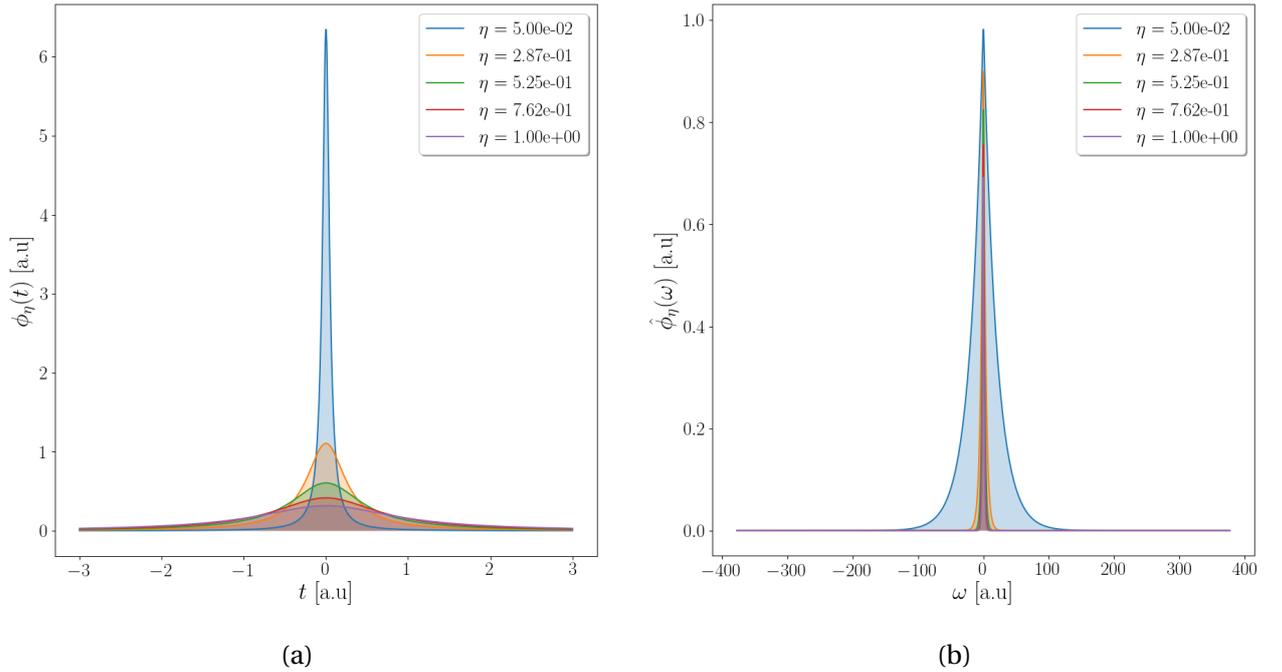


Figura 3.1: Identidade aproximada para a delta de Dirac (a) e sua transformada de Fourier (b) por meio de Lorentzianas $\{\phi_\eta(t) = 1/\pi\eta[1 + (t/\eta)^2]; \eta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$.

Ignorando a delta na origem¹, percebe-se imediatamente pela Equação (3.2) que o integrador causal modelizado pela Equação (2.15) corresponde a um filtro passa-baixas, isto é, que permite a manutenção das baixas frequências em detrimento das componentes mais altas. Em particular, para este sistema, temos um comportamento do tipo $|\hat{\theta}(\omega)|^2 \propto \omega^{-2}$. Isto é, o integrador causal implementa um sistema do tipo $1/f$. Tais sistemas têm sido extensivamente investigados em física teórica e experimental, e constituem um dos pilares

¹Há um certo embaraço em simplesmente ignorarmos a delta em $\hat{\theta}(\omega)$, já que o produto entre distribuições não está bem-definido no cenário em questão (levando assim a uma indeterminação na forma final de $|\hat{\theta}(\omega)|^2$). Entretanto, nos acalenta o fato que tal supressão faz sentido num contexto físico [29], já que – conforme discutido – não existem na prática sinais com duração ou largura de banda infinitas e, portanto, deltas. Estas surgem nos desenvolvimentos devido à necessidade de lidar com sinais que não se enquadram na classe de funções (usuais) integráveis [7].

da chamada teoria dos sistemas complexos. Para uma primeira leitura sobre o assunto, recomenda-se o livro organizado por H. M. Nussenzveig [150]. Uma discussão sobre processos $1/f$ (generalizados) à luz da Teoria de Sinais é desenvolvida na dissertação de H. Braga [25].

Retornaremos à questão do comportamento $1/f$ no Apêndice B, mas nos interessa agora a ação desse tipo de filtro: enquanto representante dos filtros passa-baixas, este tipo de sistema tem como característica mais marcante a capacidade de suprimir variações abruptas ou oscilações rápidas no sinal. Por esta razão, filtros passa-baixas são frequentemente usados para remoção de ruídos, que correspondem justamente a variações aleatórias abruptas em sinais. Entretanto, há o efeito colateral de que quaisquer atributos sintáticos relevantes do sinal que, por ventura, tenham uma estrutura de variação abrupta / oscilação rápida serão igualmente suprimidos no processo de filtragem. Em outras palavras, um filtro passa-baixas (ou, equivalentemente, um sistema com memória) levará a uma *perda* de resolução, já que em certa escala será impossível distinguir duas componentes consecutivas do sinal. Alternativamente, poderíamos dizer que a resolução *fina* de qualquer sinal está contida necessariamente nas regiões de alta frequência de seu espectro².

Para elucidar melhor a questão do efeito de um passa-baixas sobre a resolução (ou acuidade) de um sinal, recorreremos a um exemplo. Consideremos um sinal sintético $x(t)$, constituído de picos diversos superpostos a um ruído Gaussiano de média nula e a uma linha de base suave, tal como mostrado na Figura 3.2 (a). Com vistas à remoção do ruído aleatório, submetemos $x(t)$ a uma filtragem segundo a seguinte resposta ao impulso:

$$h_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right], \quad (3.3)$$

de tal forma que sua variância σ^2 seja um parâmetro regulável. A escolha por um filtro Gaussiano não é arbitrária: diferentemente da função de Heaviside, h_σ é infinitamente diferenciável e embora não possua suporte estritamente compacto, mais de 99% de sua energia está contida no intervalo simétrico 3σ . Em adição a estas propriedades, junta-se o fato de que funções Gaussianas transformam o Princípio de Incerteza de Heisenberg, Eq. (2.22), em uma igualdade. Estas propriedades as tornam objetos canônicos na área de *wavelets* [135, 41] e multiescala [136, 237].

Ao submetermos $x(t)$ a convoluções com $h_\sigma(t)$ obtemos uma família de sinais resultante, $y(t; \sigma)$, mostrada nas Figuras 3.2 (b) e (c). Nestas, vê-se claramente que, embora bem-sucedido na remoção dos ruídos, este sistema hipotético leva a uma completa degradação do sinal. De fato, conforme a variância aumenta, mais larga se torna h_σ . Com isso, mais elementos em torno de um dado t' são usados para computar $y(t'; \sigma)$, “redistribuído” a estrutura de $x(t')$ por entre as entradas vizinhas, no intervalo “prático” $[t' - 3\sigma, t' + 3\sigma]$. Alternativamente: $x(t')$ recebe contribuições de todos os elementos do intervalo considerado. Claro que, em função do perfil de h_σ , quão mais próxima dos extremos do intervalo estiver determinada entrada, menos significativa será sua contribuição. De todo modo, essa dinâmica explica a perda de acuidade em todas as entradas do sinal. Assim, se seguirmos o conceito de resolução da óptica, vemos que um filtro passa-baixas levará a uma perda de resolução tão intensa quanto maior for sua largura. Segundo nossa discussão pregressa, sistemas com grande capacidade de memória teriam, dentro de um contexto LSI, piores resoluções.

3.2 Graus de liberdade e o quantum de informação

Nas discussões pregressas, tentamos enfatizar o papel do Teorema 1, da Amostragem Uniforme, quanto ao estabelecimento de uma possibilidade de se representar corretamente um sinal $x(t)$ por meio de suas amostras $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Nesse cenário, o papel principal é desempenhado pelas funções interpoladoras $\{\phi_n^{\text{SI}}(t); n \in \mathbb{Z}\}$, dadas pela Equação (2.33). As duas condições mais fundamentais para que a interpolação seja operacionalizável estão ligadas à largura de banda de $x(t)$: tal como colocado, $\hat{x}(\omega)$ deve se anular para $|\omega| > 2\pi B$ e a frequência de amostragem ω_s deve ser maior ou igual a $4\pi B$. Por outro lado, discutimos rapidamente na Seção 2.3 que as larguras dos suportes de x e \hat{x} são inversamente proporcionais uma à outra, de modo que um sinal completamente localizado no tempo, por exemplo $\delta(t)$, seja completamente disperso em frequência, e vice-versa. Tal vínculo é estabelecido pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg, Equação (2.22). Baseado nesses elementos, podemos elencar duas questões fundamentais:

²Essa interpretação é o ponto de partida para as técnicas de *super-resolução* [104, 7, 78].

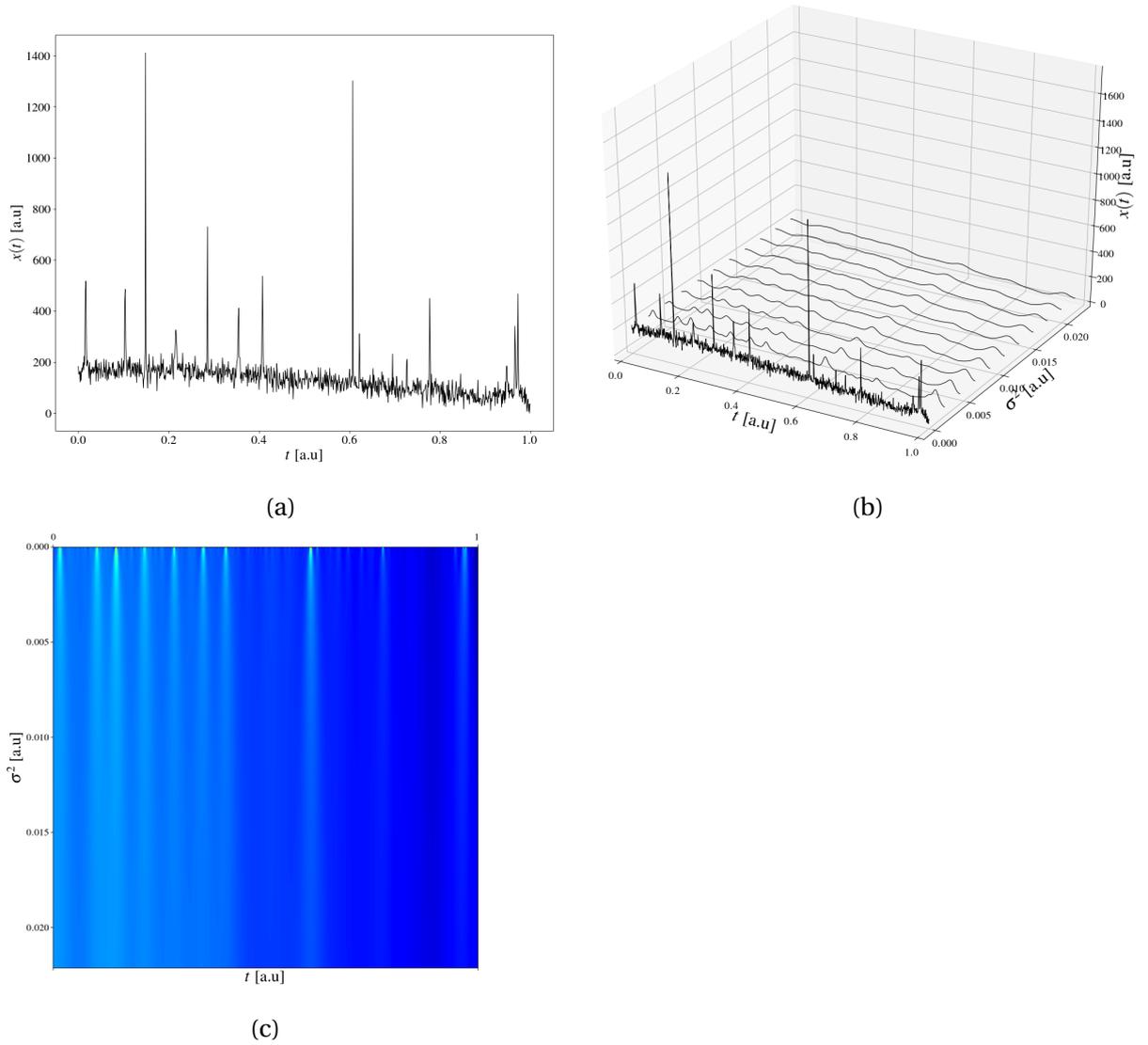


Figura 3.2: Ilustração da ação de um passa-baixas Gaussiano sobre a resolução de um sinal simulado. Em (a) é mostrado o sinal gerado com $SNR = -3$ dB, composto por uma superposição dos picos posicionados aleatoriamente, ruído Gaussiano de média nula e uma linha de base (*baseline*) suave decrescente. Este sinal é submetido a uma sequência de filtros passa-baixas do tipo Gaussiano (vide Eq. (3.3)) de forma que a variância efetiva do filtro aumenta ao longo do processo. Nota-se claramente como a supressão dos ruídos vem ao custo da completa descaracterização do sinal, já que a largura dos picos aumenta conforme a variância do filtro evolui, levando à superposição de picos adjacentes. Em adição a essa degradação, nota-se também a diminuição das amplitudes dos picos. Em (c) é mostrada a evolução completa do sinal projetada sobre o plano, de forma que fica evidente a degradação dos picos ao longo da evolução.

- i. qual o sinal (ou classe de sinais) que minimiza a incerteza inerente a sistemas que obedecem ao Princípio de Incerteza?
- ii. qual a quantidade mínima de dados, ou *informação*, necessária para representar um sinal corretamente?

A primeira questão tem resposta consolidada pela teoria [164, 135]: sinais de perfil Gaussiano, isto é, sinais da forma

$$x_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.4)$$

transformam a desigualdade dada pela Equação (2.22) em uma igualdade. Importante ressaltar que Gaussia-

nas são autofunções da transformada de Fourier, visto que há a relação

$$\mathcal{F}[x_\sigma][\omega] = \exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] = x_{\frac{1}{\sigma}}(\omega). \quad (3.5)$$

Já a segunda pergunta não tem uma resposta tão imediata, necessitando que alteremos a maneira com que analisamos os sinais. Se até este ponto abordávamos de maneira complementar os domínios direto e recíproco – ora analisando o sinal no tempo, ora na frequência³ – faz-se necessário agora avaliar o sinal no espaço *tempo-frequência*, (t, ω) . As duas estratégias básicas para tal análise são a Transformada Janelada de Fourier e Wavelets [135, 41]. Equanto estas últimas não serão abordadas neste trabalho, investigaremos de modo sintético a estrutura da primeira, seguindo de perto as motivações de Gabor [64, 65, 66].

A questão de janelas já foi abordada na Seção (2.3), e lá foi antecipado que o janelamento afeta significativamente a resolução do sinal. Consideremos [135, 41] uma janela $w_\sigma(t)$ de quadrado integrável, normalizada, isto é,

$$\|w_\sigma\|^2 = \langle w_\sigma, w_\sigma \rangle = 1. \quad (3.6)$$

O sub-índice σ reflete o fato que a janela é “programável”, isto é, podemos controlar sua largura (exata ou efetiva) por meio do parâmetro contínuo⁴ $\sigma > 0$. Exemplos já abordados neste trabalho são a função porta normalizada, $\Pi_\sigma(t)$ e a própria Gaussiana, $x_\sigma(t) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-t^2/(2\sigma^2)]$. Munidos dessa janela, temos de ser capazes de transladá-la pelo espaço (t, ω') , de modo que podemos reescrevê-la numa forma complexa dada por [64, 41]

$$w_\sigma(t, \omega; t', \omega') = e^{j\omega't} w_\sigma(t - t'). \quad (3.7)$$

Tal como posta na Equação (3.7), a janela $w_\sigma(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ está centrada no ponto genérico (t', ω') . Alterando estas duas quantidades, varre-se o *espaço de fase* (t, ω) , seguindo a denominação usada por Damelin e Miller Jr. [41].

O desdobramento natural do estabelecimento da janela duplamente deslocada, dada pela Equação (3.7) é a definição da Transformada “Janelada” de Fourier, ou STFT – *Short Time Fourier Transform*, dada pelo produto interno [135, 41]

$$\text{STFT}[x; \sigma] \equiv \langle w_\sigma(t, \omega; t', \omega'), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - \omega')t] w_\sigma(t - t') x(t) dt. \quad (3.8)$$

Embora não pretendamos dar sequência às aplicações da STFT, tiramos proveito de sua concepção: se por um lado exponenciais complexas da forma $\exp(j\omega t)$ proporcionam informação *perfeitamente* localizada no espaço recíproco, não fornecem *insight* algum no espaço direto, já que aqui são completamente dispersas. Nesse sentido, a estratégia de se limitar as exponenciais em uma região em torno do ponto (t', ω') tem por objetivo analisar o sinal no entorno do instante t' num intervalo de frequências centrado em ω' . Em face da limitação imposta pelo Princípio de Incerteza, os suportes em t e ω são inversamente proporcionais um ao outro, e a área mínima dessa *célula*, ou *quantum* de informação [64] é obtida quando do uso de uma janela w_σ de perfil Gaussiano. A Figura 3.3 ilustra este conceito.

Chegamos agora a um ponto da discussão em que é possível concatenar os elementos apresentados anteriormente e concluir que embora – formalmente – um sinal $x(t)$ de banda limitada $|\omega| \leq 2\pi B$ não possa ter duração finita, deve existir um tempo de duração *ótimo*, T , tal que a fração de informação perdida seja mínima e ainda vigore a limitação imposta pelo princípio de incerteza. Assim, vemos que, nesse cenário, a quantidade BT está associada ao número de *graus de liberdade* do sinal x [60, 64], isto é, a quantidade máxima de dados independentes disponibilizados por $x(t)$.

De posse do conceito de graus de liberdade de um sinal $x(t)$, podemos apreciar o efeito da amostragem, discutida na Seção 2.4: nela é mostrado que o sinal x_n só corresponderá a uma representação fidedigna de $x(t)$ se a frequência de amostragem for maior ou igual a $2B$. Desse modo, temos que o número de graus de

³Obviamente, a terminologia frequência aqui deve ser entendida como o “espaço recíproco ao da variável independente do sinal em questão”. Assim, sinais ópticos, de espectroscopia etc. também são perfeitamente abrangidos pela discussão.

⁴Note aqui a semelhança com a questão das identidades aproximadas usadas na Seção 2.3.

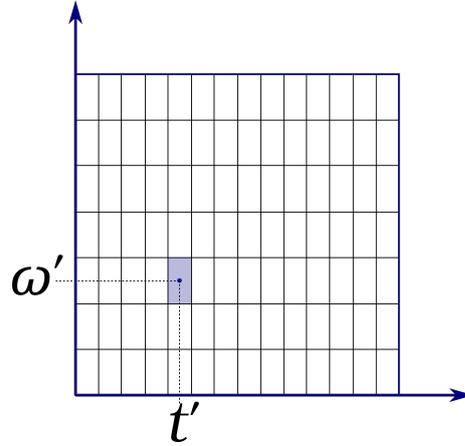


Figura 3.3: Ilustração do conceito de espaço tempo-frequência (ou espaço de fase) particionado em células mínimas de informação. Conforme discussão no texto, há um compromisso entre os suportes em tempo e frequência, limitado em última instância pelo Princípio de Incerteza (Eq. (2.22)).

liberdade de um sinal limitado em banda ($|\omega| \leq 2\pi B$) e em tempo ($|t| \leq T/2$) submetido a um processo de amostragem é dado por [191, 190]

$$c = 2BT, \quad (3.9)$$

sendo chamado eventualmente de *Número de Shannon* [60, 64]. Deve-se notar que, embora $T, B \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, c é um número inteiro, por construção. Deve-se notar ainda que uma vez que é definido o número c de elementos de informação que descrevem completamente o sinal em análise, pode-se adotar uma representação geométrica [191], ou matricial, em ele é visto como um vetor $[x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{c-1}]^T$ num *espaço de sinais* [29, 191, 190]. Essa representação é usada nos desenvolvimentos de Shannon em seu dois trabalhos seminais [191, 190] sobre Teoria da Informação.

3.3 Os harmônicos prolato-esferoidais

As discussões anteriores evidenciaram que existe um característico numérico, $c \propto TB$, que define o número máximo de entradas independentes de um sinal $x(t)$ no espaço de fase. Esta quantidade pode ser alterada em função de limitações instrumentais típicas, mas também está sujeita ao Princípio de Incerteza, de natureza muito mais fundamental, associada à construção do espaço dos sinais admissíveis à teoria. Também foi colocado na Seção 2.3 que o desenho de janelas pode ocorrer com vistas à otimização de certo atributo, tal como a energia do sinal limitado. Esse é o ponto de partida para a nossa última consideração sobre graus de liberdade, ou *quanta* de informação: quais são os sistemas (filtros, janelas etc.) que têm a capacidade de maximizar a energia de um sinal $x(t)$ com número de Shannon igual a $c = BT$?⁵ Conforme será apresentado a seguir, existe uma classe de funções – os harmônicos prolato-esferoidais [192, 112, 113, 193, 195, 103, 225, 227] – que gozam de propriedades surpreendentes, dentre as quais a capacidade de maximizar a energia do sinal $x(t)$ em ambos os domínios [112, 164]:

$$\alpha^2(T) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt} \quad \text{e} \quad \beta^2(B) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{x}(\omega)\|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{x}(\omega)\|^2 d\omega}. \quad (3.10)$$

A busca por sistemas que concentrem otimamente energia na célula de informação de área $c = BT$ tem caráter prático, embora enfoquemos aqui os principais aspectos teóricos do assunto. De fato, em 1949, Shannon [191] apresentou desenvolvimentos que elucidaram sobre como podemos reduzir a dimensionalidade do sinal, isto é, seus graus de liberdade, mas mantendo íntegra a mensagem transmitida.

⁵O fator 2 na expressão para c não é considerado pois o formalismo apresentado é inicialmente construído sobre domínios contínuos.

São devidos a Slepian, Pollak e Landau [192, 112, 113, 193, 195] os passos iniciais no estabelecimento da aplicação dos harmônicos (funções de onda) prolato-esferoidais – ou PSWFs⁶ na Teoria da Informação. Para se ter uma idéia da profundidade do tema, basta perceber que se por um lado o primeiro artigo da série foi escrito por Slepian e Pollak em 1961 [192], por outro, a discussão sobre a discretização só foi publicada em 1978 [195], com Slepian como único autor. O nome rebuscado deriva do fato de que os harmônicos constituem parte das soluções da Equação de Onda em coordenadas prolato-esferoidais [192]. Naturalmente, um tópico envolvente como as PSWFs ainda apresenta muitos desafios, principalmente na questão numérica. Discussões detalhadas sobre aspectos teóricos e numéricos dos harmônicos prolato-esferoidais são realizadas por Wang [227] e Moore e Cada [143]. Uma apresentação extensa das PSWFs e suas interconexões com a teoria de wavelets é realizada por Walter [225]. Por fim, os trabalhos de Varah [217] e Soni *et al.* [198] constituem bons pontos de partida para a investigação sobre implementações numéricas.

Há de se notar que não existe rota “simples” para uma exposição sobre as PSWFs, de forma que seguiremos aqui as abordagens do próprio Slepian [196] e de Khare e George [103], por nos parecerem as mais intuitivas. No mesmo espírito dos desenvolvimentos expostos sobre Amostragem, Seção 2.4, acreditamos ser útil o detalhamento de certas passagens, para que não restem dúvidas sobre a relação dos objetos manipulados com a questão da maximização da energia e do volume de informação ótimo de um sinal. Começemos sobre a concentração $\alpha^2(T)$. Da Equação (3.10), temos que

$$\begin{aligned}
\alpha^2(T) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t)dt \\
\frac{\alpha^2(T)}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega')\hat{x}(\omega)d\omega' &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega') \exp(-j\omega't)d\omega' \int_{2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}(\omega) \exp(j\omega t)d\omega \right] dt \\
\alpha^2(T) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega')\hat{x}(\omega)d\omega' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega')\hat{x}(\omega) \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp[-j(\omega' - \omega)t]dt \right] d\omega d\omega' \\
\alpha^2(T) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega')\hat{x}(\omega)d\omega' &= \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}^*(\omega')\hat{x}(\omega) \operatorname{sinc} \left[\frac{T}{2\pi}(\omega' - \omega) \right] d\omega d\omega' \tag{3.11}
\end{aligned}$$

A igualdade mostrada na Equação (3.11) foi obtida por meio de aplicação do Teorema de Plancherel-Parseval no membro do lado esquerdo e por mudança da ordem de integração no membro do lado direito. Para a igualdade se verificar, o integrandos devem ser iguais. Logo:

$$\alpha^2(T)\hat{x}(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{x}(\omega') \operatorname{sinc} \left[\frac{T}{2\pi}(\omega - \omega') \right] d\omega'. \tag{3.12}$$

Podemos definir uma nova frequências *linear* normalizada, $\xi = \omega/(2\pi B)$. Com isso, reescrevemos a Equação (3.12) como

$$\alpha^2(T)\hat{x}(2\pi B\xi) = BT \int_{-1}^1 \hat{x}(2\pi B\xi') \operatorname{sinc}[BT(\xi - \xi')]d\xi' \tag{3.13}$$

Reconhecemos aqui a presença do número de Shannon $c = BT$. Denotando [196] $\hat{x}(2\pi B\xi)$ por $\phi^{\text{ps}}(\xi)$ e o escalar $\alpha^2(T)/c$ por λ , chegamos finalmente a [103, 196, 192]

$$\lambda\phi^{\text{ps}}(\xi) = \int_{-1}^1 \phi^{\text{ps}}(\xi') \operatorname{sinc}[c(\xi - \xi')]d\xi', \quad \text{com } |\xi| \leq 1. \tag{3.14}$$

⁶Do inglês *prolate-spheroidal wave-functions*.

A Equação (3.14) corresponde a uma equação integral [111] de autovalor, cujas soluções são as PSWFs de Slepian, Pollak e Landau. Constatamos imediatamente que $\phi^{\text{ps}}(\xi)$ não tem representação explícita, de forma que quase nada pode ser dito sobre ela quando posta na forma mostrada na Equação (3.14). A presença de uma sinc no núcleo do operador integral de convolução é, naturalmente, um reminescente da limitação em tempo e em banda do sinal original, vide o fator c no argumento.

As propriedades mais relevantes das PSWFs podem ser obtidas por meio de considerações sobre a natureza da equação integral de autovalor mostrada na Equação (3.14). De fato, essa é a rota tomada por Slepian *et al.* nos trabalhos seminais [192, 112, 113, 193, 195]. Entretanto, ir nessa direção exigiria uma digressão substancial sobre um ferramental suficientemente rebuscado; vide, por exemplo, o livro de Krasnov *et al.* sobre equações integrais. Uma rota alternativa proposta independentemente por Khare e George [103] e Walter e Shen [222, 223], muito mais sugestiva para os nossos propósitos, parte do ferramental derivado do Teorema da Amostragem Uniforme (Seção 2.4, p. 12). Apresentaremos aqui apenas o necessário para nosso propósito final, que tem a ver com a magnitude dos autovalores da Equação (3.14). Desenvolvimentos muito mais detalhados podem ser encontrados nas referências citadas.

De início, precisamos da

DEFINIÇÃO 4: NÚCLEO DEGENERADO [111, 42]

O núcleo $h(\xi, \xi')$ da equação integral $\lambda\psi(\xi) = \int_a^b h(\xi, \xi')\psi(\xi')d\xi'$ é dito *degenerado* se puder ser escrito como a soma

$$h(\xi, \xi') = \sum_{k \in \mathbb{P}} a_k(\xi)b_k(\xi'), \quad (3.15)$$

em que $\{a_k(\xi)\}_k$ e $\{b_k(\xi)\}_k$ são funções linearmente independentes contínuas no quadrado $[a, b] \times [a, b]$, indexadas em $k \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$.

Note-se que o núcleo $\text{sinc}[c(\xi - \xi')]$ é degenerado em $(\xi, \xi') \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. De fato, sincs são funções de banda limitada e, por isso, podem ser representadas via o Teorema da Amostragem Uniforme. Isto é,

$$\begin{aligned} \text{sinc}[c(\xi - \xi')] &= \sum_k \text{sinc}[c\xi - k] \text{sinc}\left[c\left(\frac{k}{c} - \xi'\right)\right] \\ &= \sum_k \text{sinc}(c\xi - k) \text{sinc}(c\xi' - k) \\ &= \sum_k a_k(\xi)b_k(\xi'), \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que

$$a_k(\xi) \equiv \text{sinc}(c\xi - k) \quad \text{e} \quad b_k(\xi') \equiv \text{sinc}(c\xi' - k), \quad \text{com } (\xi, \xi') \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.17)$$

A Equação (3.16) mostra que o núcleo $\text{sinc}[c(\xi - \xi')]$ pode ser escrito como uma soma de produtos das funções $\{a_k(\xi)\}_k$ e $\{b_k(\xi)\}_k$. A independência linear destes conjuntos é uma consequência da ortogonalidade das funções que os compõem, tal como mostrado na Equação (2.34), página 14. Contudo, deve-se atentar para o fato de que aqui lidamos com um intervalo finito da reta, ao passo que na Equação (2.34) foi considerada a reta toda. De todo modo, este detalhe não altera em nada a presente análise.

De posse do núcleo degenerado, podemos substituí-lo na Equação (3.14), obtendo [111, 103]

$$\begin{aligned} \phi^{\text{ps}}(\xi) &= \lambda \sum_k a_k(\xi) \langle b_k, \phi^{\text{ps}} \rangle \\ &= \lambda \sum_k c_k a_k(\xi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que

$$c_k \equiv \langle b_k, \phi^{\text{ps}} \rangle = \int_{-1}^1 b_k(\xi') \phi^{\text{ps}}(\xi') d\xi'. \quad (3.19)$$

De posse das Equações (3.19) e (3.18), podemos voltar à Equação integral (3.14), obtendo então

$$\begin{aligned} \sum_k c_k a_k(\xi) &= \frac{1}{\lambda} \sum_l \sum_m c_l \langle a_l, b_m \rangle a_m(\xi) \\ \lambda \sum_k c_k a_k(\xi) &= \sum_k \sum_l c_l \langle a_l, b_k \rangle a_k(\xi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

A troca de índices na última passagem é perfeitamente válida, visto que tratam-se de variáveis mudas. Por fim, agrupando os todos os termos indexados em k , chegamos finalmente a

$$\sum_k \left\{ \lambda c_k - \sum_l c_l \langle a_l, b_k \rangle \right\} a_k(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda c_k - \sum_{l \in \mathbb{P}} A_{kl} c_l = 0, \quad (3.21)$$

em que as entradas (i, j) da matriz *infinita e simétrica* \mathbf{A} são dadas por [103]

$$A_{ij} \equiv \int_{-1}^1 \text{sinc}(c\xi - i) \text{sinc}(c\xi - j) d\xi \quad \text{com } i, j \in \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

A igualdade na Equação (3.21) é garantida em função da ortogonalidade do conjunto $\{a_k(\xi); k \in \mathbb{P}\}$ associada ao fato de que nenhum dos elementos a_k deste conjunto é identicamente nulo.

O desenvolvimento anterior culminou nas Equações (3.21) e (3.22), que conferem ao problema original das PSWFs um caráter matricial. De fato, embora lidemos por ora com um número infinito de entradas, a Equação (3.21) corresponde a um sistema matricial da forma $\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$. É sobre esse sistema que Khare e George [103] demonstram de modo simples uma gama de propriedades das PSWFs. De fato, é simples mostrar que devido à sua natureza real e simétrica, o operador \mathbf{A} é auto-adjunto. Com isso, ficam asseguradas a realidade e não-degenerescência de seus autovalores, além da possibilidade de diagonalização do operador em questão [42, 14].

Conforme discutido no início da Seção as PSWFs gozam de um conjunto expressivo de propriedades interessantes⁷, fazendo com que constituam aparato adequado a processos de amostragem [103], extrapolação e super-resolução [165, 96]. Entretanto, sua determinação numérica é não-trivial. De fato, a pesquisa em métodos numéricos para aproximação das PSWFs continua intensa ao longo dos anos [227, 103, 198, 217, 222, 223, 225]. Como aqui seguimos a abordagem de Khare e George [103], reformulando o problema para um sistema matricial, os autovalores deste sistema carregam consigo as informações desejadas sobre as concentrações de energia de um sinal limitado no espaço de fase. Desse modo, é necessário resolver o problema

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}, \quad (3.23)$$

em que \mathbf{A} é a matriz cujas entradas são dadas pela Equação (3.22) e \mathbf{c} é a matriz de autovetores do sistema, cujas entradas são simplesmente as PSWFs amostradas, isto é,

$$c_k \equiv \phi^{\text{ps}}\left(\frac{k}{c}\right). \quad (3.24)$$

Deve-se notar que o sistema mostrado na Equação (3.23) é infinito, de forma que quaisquer métodos aproximativos empregados para sua solução envolverão o truncamento da matriz \mathbf{A} , chamada por Varah em [217] de

⁷Propriedades estas não mostradas aqui por uma questão de contexto: aspectos ligados à dupla ortogonalidade, número exato de trocas de sinal, banda passante bem-definida etc. não serão usados neste trabalho, de forma que o leitor interessado pode recorrer às várias referências citadas ao longo da Seção para melhor formar juízo sobre o assunto.

matriz prolata. Tal como mostrado por este autor, sistemas de equações que envolvam matrizes prolatas são extremamente mal-postos, de modo que métodos usuais de determinação de seus autovalores podem falhar. Não entraremos no mérito das discussões sobre algoritmos numéricos para resolução do sistema dado pela Equação (3.23), nos limitando a recomendar as referências [217, 198, 103] para análises mais detalhadas.

Antes de apresentar as propriedades mais relevantes dos autovalores λ_k – que por construção representam a concentração da energia do sinal – admitiremos que $\mathbb{P} = \mathbb{N}$; isto é, abriremos mão dos índices negativos. Se necessário, voltaremos aos inteiros por meio de uma transformação adequada de índices⁸.

As seguintes propriedades dos autovalores das Equações (3.14) e (3.23) [192, 227] merecem atenção:

- i. se $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, então os autovalores $\{\lambda_n(c); n \in \mathbb{N}\}$ são reais, positivos e distintos; e
- ii. para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, há a relação de ordem $\lambda_n(c) > \lambda_m(c)$.

A propriedade (i) é basicamente devida à estrutura auto-adjunta do operador integral de núcleo $h(\xi, \xi')$ e da matriz prolata A [42]. Já a segunda propriedade mostra que há uma relação de ordem entre os autovalores sob análise [192], mas sem maiores esclarecimentos sobre as magnitudes dos entes envolvidos. Na ausência de expressão fechada para λ_n , análises assintóticas têm papel importante no desenvolvimento. De fato, conforme mostrado “informalmente” por Slepian em [194, 195] e provado por Landau e Widom em [114], temos que para c “grande” (formalmente: $c \rightarrow \infty$) e n fixo,

$$\lambda_n \sim \begin{cases} 1, & \text{se } n \ll 2c; \\ [1 + \exp(b)]^{-1}, & \text{se } |n - 2c| < b \ln(c); \text{ e} \\ 0, & \text{se } n > 2c. \end{cases} \quad (3.25)$$

A Equação (3.25) evidencia que, assintoticamente, o inteiro $n = \lfloor 2c \rfloor$ corresponde a uma espécie de limiar, já que separa dois regimes: para $n < 2c$ os valores dos autovalores são aproximadamente iguais a 1, ao passo que para $n > 0$ a magnitude destes cai basicamente o perfil de $\lambda_n(c)$ é um dos principais responsáveis pelas dificuldades numéricas, já que para $n > \lfloor 2c \rfloor$ a magnitude de λ_n é da ordem da precisão da máquina, ao passo que para $n < \lfloor 2c \rfloor$ os λ_n são praticamente idênticos.

Podemos, finalmente, entender a contribuição das PSWFs para a discussão sobre o volume de informação de um sinal. No início dos desenvolvimentos sobre estes objetos, definimos os autovalores como a concentração relativa de energia do sinal, isto é,

$$\lambda_n(c) = \frac{\alpha^2}{c}, \quad (3.26)$$

em que $c = BT$ é o número de Shannon do sinal (devidamente limitado no tempo e em banda). Assim sendo, vemos que um volume apreciável de energia, ou *conteúdo*, do sinal está limitado a $n = \lfloor 2c \rfloor$ graus de liberdade. Note aqui a conexão flagrante com a teoria da amostragem uniforme, materializada pelo Teorema 2.23: por meio deste último, sabemos que um sinal x limitado em banda, isto é, $|\hat{x}(\omega)| \leq 2\pi B$, pode ser recuperado se a frequência de amostragem for maior ou igual ao dobro da sua frequência máxima: $\omega_s \geq 4\pi B$. Naturalmente, um sinal reconstruído nestas condições não pode ser limitado no tempo, mas já há o indicativo que a grandeza $2B$ desempenha papel fundamental no processo. Por sua vez, o desenvolvimento anterior, que culminou na apresentação da análise assintótica dos $\lambda_n(c)$, mostra que o sinal $x(t)$ limitado em banda – mas agora limitado também no tempo – necessita aproximadamente $\lfloor 2BT \rfloor$ *quanta* de informação para ser descrito satisfatoriamente.

A discussão pregressa nos leva à conclusão acerca do questionamento clássico sobre a compactação ótima de um sinal: se limitarmos o sinal $x(t)$ em banda e em tempo, de forma que seu número de Shannon seja igual a $c = BT$, o conteúdo máximo de informação será dado aproximadamente por $2c$. Ou, seguindo a linha do próprio Shannon [191], a dimensão do espaço que abriga sinais de $c = BT$ é igual a $\lfloor 2c \rfloor$

⁸Transformações de índices são comuns em matemática computacional. Uma estratégia simples para mapear \mathbb{Z} em \mathbb{N} consiste em se atribuir números pares aos inteiros negativos e ímpares aos positivos. A transformação inversa seria dada então por $k = \lceil n/2 \rceil (-1)^{n \bmod 2}$.

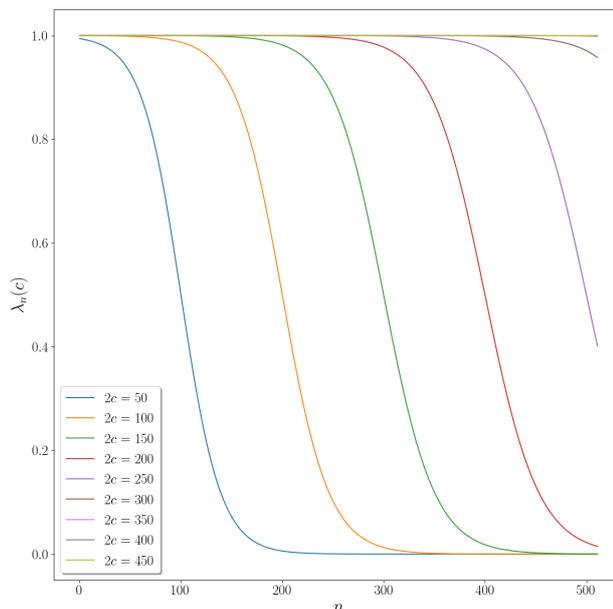


Figura 3.4: Visão qualitativa dos autovalores λ_n dos harmônicos prolato-esferoidais. Nota-se um decaimento abrupto para $n \gtrsim 2c$.

3.4 Entropia

Embora os trabalhos seminais de C. E. Shannon [190, 191] tragam consigo múltiplos elementos que embasam de modo profundo as relações de sistemas gerais de comunicação, parece haver uma espécie de veneração por parte da comunidade em Física direcionada à figura da entropia da informação, como se esta grandeza sozinha fosse capaz de resumir toda a complexidade inerente à Teoria que a contém. *Nada mais longe da verdade.*

Um estudo sério dos dois artigos de Shannon que fundam a Teoria da Informação como a conhecemos hoje permite ao leitor contemplar um conjunto belíssimo de discussões sobre a natureza abstrata de mensagens, transmissores, canais, decodificadores, sinais etc. [190, 191]. Nestes trabalhos, a entropia surge como uma importante métrica estatística relacionada à capacidade de uma fonte em transmitir certo volume de informação, e não tem – em princípio – relação alguma com a entropia da mecânica estatística. Em um importante artigo de 1957, E. T. Jaynes ([100], p. 621) pontua que

The mere fact that the same mathematical expression [...] occurs both in statistical mechanics and in information theory does not in itself establish any connection between these fields. This can be done only by finding new viewpoints from which thermodynamic entropy and information-theory appear as the same *concept*.

Em face do papel praticamente ubíquo da entropia na questão da Informação, se faz necessária uma discussão mínima sobre o papel dessa grandeza nos contextos da termodinâmica, mecânica estatística e, finalmente, teoria dos espaços-escala. Mesmo que de forma sucinta, a discussão que segue tem por finalidade apontar de modo preciso onde cada “versão” de entropia deve ser estar. Só assim, na opinião deste autor, poderemos fazer uso de analogias fisicamente motivadas que envolvam entropia sem que, erroneamente, nos escoremos em conceitos imprecisos ou ambíguos. Uma discussão conceitual detalhada sobre a confusão em se associar automaticamente Teoria da Informação à Mecânica Estatística e vice-versa é realizada por Pierce em [175].

Começemos com uma visão clássico-termodinâmica: a energia interna U de um sistema é definida por

$$U = U(S, V, N), \quad (3.27)$$

em que S , V e N correspondem à entropia, volume e número de partículas⁹, respectivamente. Tal como U , estas grandezas correspondem a variáveis termodinâmicas extensivas [80, 73] do sistema; isto é, são aditivas, de

⁹Consideramos aqui, por simplicidade, apenas um espécime químico, de modo que há apenas um N . Entretanto, esta não é, absolu-

modo que dependem do “tamanho” do sistema. Variáveis termodinâmicas não-extensivas, tais como pressão e densidade, são chamadas de intensivas [73].

A fim de se avaliar as alterações sobre a energia (ou qualquer outra variável extensiva) apela-se frequentemente à representação diferencial da Equação (3.27):

$$dU = \partial_S U|_{V,N} dS + \partial_V U|_{S,N} dV + \partial_N U|_{S,V} dN \Rightarrow dU = TdS - PdV + \mu dN, \quad (3.28)$$

cujas derivadas parciais T , $-P$ e μ correspondem à temperatura, pressão e potencial químico, respectivamente. Da Equação (3.28) pode-se visualizar uma expressão da Primeira Lei da Termodinâmica [80]:

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (3.29)$$

em que δQ e δW correspondem às variações não-exatas do calor dissipado/absorvido e trabalho realizado/recebido, respectivamente. Se por um lado estas grandezas dependem do processo termodinâmico, a variação da energia é exata; isto é, independe do trajeto no espaço de fase, variando apenas de acordo com os extremos de tal trajetória. A Primeira Lei, descrita pela Equação (3.29), mostra que um sistema termodinâmico capaz de interagir com o ambiente que o circunda terá sua energia alterada não apenas em função do trabalho (mecânico, eletromagnético, químico etc.) exercido por (ou sobre) si, mas também por eventuais trocas de calor.

De um ponto de vista mais formal, $U(S, V, N)$ corresponde a uma das relações fundamentais [80, 27] do sistema termodinâmico sob análise, de modo que toda informação deste pode ser obtida desta grandeza. Alternativamente, poderíamos descrever o sistema em termos de sua entropia, pois esta corresponde também a um potencial termodinâmico:

$$S = S(U, V, N) \Rightarrow dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN. \quad (3.30)$$

O interesse em se descrever o sistema em termos da entropia S ao invés de sua energia total U vem do fato de que a S também está associada uma diferencial é exata, intimamente ligada à (im)possibilidade de reversibilidade do processo global. No caso de processos reversíveis, observa-se que

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (3.31)$$

ao passo que uma assinatura característica de processos irreversíveis é dada por

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} > 0. \quad (3.32)$$

Muito frequentemente o caráter experimental da termodinâmica é usado como guia nos desenvolvimentos conceituais [80, 73]. Mesmo abordagens axiomáticas tentam iluminar uma rota para o que parece ser a “razão de ser” da termodinâmica, que segundo Callen ([27], p. 42) é “[...] a determinação do estado de equilíbrio que eventualmente resulta da remoção de vínculos em um sistema composto fechado”. Em outras palavras, uma vez que o sistema físico é liberado¹⁰, busca-se entender suas propriedades após atingido o equilíbrio. Claramente, tal escopo de atribuição não contempla o que acontece nas “rotas” para o equilíbrio, sendo estas abordadas – obviamente – pela termodinâmica de não-equilíbrio. É nesta última que começa a fazer sentido a avaliação de sistemas submetidos a difusão, a serem usados no contexto de descrição multiescala, no Capítulo 4.

De acordo com o exposto na parágrafo anterior, poderia ser formado um juízo de que a termodinâmica de equilíbrio [80, 73, 27] não é uma figura útil no presente contexto, em que lidamos com conceitos de transmissão (“transporte”) de informação. Entretanto, é justamente a abordagem axiomática proposta por Callen em [27] que nos permitirá em breve entender a raiz da conexão entre Mecânica Estatística e Teoria da Informação. Estes postulados são apresentados¹¹ na

tamente, uma condição essencial para as discussões que seguem.

¹⁰“Liberar” o sistema termodinâmico deve ser entendido basicamente como o ato de remover vínculos e restrições internas, de forma que sejam iniciados processos de evolução temporal rumo ao seu estado de equilíbrio, qualquer que seja.

¹¹Mostramos aqui apenas dois postulados, relacionados à entropia propriamente dita. Outros dois postulados acerca de estados de equilíbrio e o zero absoluto também são enunciados por Callen [27].

DEFINIÇÃO 5: (ENTROPIA NA TERMODINÂMICA DE EQUILÍBRIO) [27]

- i. **Maximização.** A entropia $S = S(U, V, N)$ é um potencial termodinâmico cujos parâmetros extensivos se ajustam no equilíbrio de forma a sempre maximizá-lo.
- ii. **Aditividade e monotonicidade.** A entropia S é uma grandeza extensiva; isto é, é aditiva sobre as constituintes do sistema que representa. Ademais, é função monotônica-crescente da energia U .

O primeiro postulado mostra que no equilíbrio termodinâmico $dS = 0$. Entretanto, para que esse ponto de extremo seja, de fato, um máximo, é necessário também que $d^2S < 0$; ou, posto de uma forma mais geral, que a entropia seja uma função *côncava* sobre seus parâmetros extensivos [49, 205, 102, 27]. A concavidade de $S(U, V, N)$ está ligada à estabilidade do ponto de equilíbrio [27] e tem importância capital nos desenvolvimentos da Teoria da Informação [190] e Leis de Conservação [49, 205, 102].

Os elementos anteriores não demandam um conhecimento em nível molecular dos sistemas sob análise, mesmo porque tal empreitada seria basicamente impossível, dado o número colossal de partículas envolvidas. De todo modo, o aparato da Mecânica Estatística mostra [80, 10] que análises sobre médias dos referidos sistemas são capazes de aprofundar grandemente o poderio da termodinâmica. Dentro deste contexto, a análise dos potenciais termodinâmicos como figuras de mérito representativas dos sistemas em questão dá lugar a uma descrição direcionada à distribuição dos *microestados* [80] do sistema. A cada *macroestado* termodinâmico do sistema ($U(S, V, N)$, $S(U, V, N)$ etc.) correspondem diferentes microestados – que em nível clássico-mecânico poderiam ser representados pelas posições e velocidades generalizadas das partículas [80].

Uma das hipóteses fundamentais da Mecânica Estatística é que estes microestados têm ocorrência equiprovável [80, 151] e são independentes entre si. Nesse contexto, o macroestado que representa o equilíbrio o faz simplesmente por ter associado a si o maior número de microestados possíveis. A entropia surge então como uma medida da multiplicidade $\Omega(U, V, N)$ de microestados para este dado macroestado [80, 151]. Partindo da equiprobabilidade de ocorrência dos microestados, de sua independência estatística e da maximização da multiplicidade associada ao equilíbrio, traça-se, finalmente, o paralelo entre entropia e probabilidade [80]:

$$S = k \ln[\Omega(U, V, N)], \quad (3.33)$$

em que a constante k serve para fixar unidades, e a base do logaritmo pode ser alterada conforme a conveniência. Por vezes, pode ser interessante tomar a entropia como o negativo do definido na Equação (3.33) visto que $\Omega \in [0, 1] \Rightarrow \ln(\Omega) < 0$. O negativo da entropia é chamada por Brillouin de *negentropia*¹² [26].

A interpretação probabilística da entropia expressa na Equação (3.33) vem do fato de que a multiplicidade Ω é uma contagem dos microestados e pode, mediante a correta normalização, ser tomada como uma distribuição [167]. Mais profundamente, caso se flexibilize em alguma medida o postulado da equiprobabilidade dos microestados¹³, deve existir uma ponderação estatística destas grandezas, representada por uma densidade de probabilidade ρ , dependente dos graus de liberdade que compõem o espaço de fase [80, 105], que consideraremos ser – sem perda de generalidade – constituído pelas coordenadas generalizadas $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ de um número muito grande de partículas clássicas. Nessa configuração, faz sentido tratar da estimação de um dado observável A por meio de uma média de *ensemble* [105, 80]:

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^{3N}p d^{3N}q}{\int \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^{3N}p d^{3N}q}, \quad (3.34)$$

em que foi considerado um sistema de N partículas para a construção do espaço de fase.

Interessantemente, ao se computar a média de ensemble do observável $-k \ln(\rho)$, chega-se [80] ao resultado que, em princípio, realiza a ligação entre Mecânica Estatística e Teoria da Informação:

$$S = \langle -k \ln(\rho) \rangle, \quad (3.35)$$

¹²No inglês: *negentropy*.

¹³Tal situação pode ocorrer, por exemplo, em sistemas abertos. De fato, essa é a diferença básica entre os ensembles microcanônico (sistema isolado) e canônico (sistema em contato com reservatório) [80, 105].

isto é, a entropia pode ser compreendida como uma média de ensemble do negativo do logaritmo da densidade ρ . Caso lidássemos com uma distribuição discreta $\{p_i; i \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}\}$, seríamos levados a uma expressão da forma

$$S = -k \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (3.36)$$

que nada mais é que a Entropia de Shannon [190, 191, 175]. Resta saber qual o significado do observável $-k \ln(\rho_i)$.

Uma importante divisão histórico-conceitual é discutida por Carlson [29] e também por Yu *et al.* [240]: embora os desenvolvimentos da Teoria da Informação tenham sido impulsionados por demandas oriundas da Segunda Grande Guerra, estes não foram concebidos em uma frente única. De fato, pode-se elencar duas escolas principais [29, 240]: a derivada da abordagem de C. E. Shannon [190, 191] e aquela decorrente dos trabalhos de N. Wiener [240]. A primeira, sobre a qual este trabalho se inspira, diz respeito à codificação da informação e suas posteriores transmissão e decodificação [175], ao passo que a segunda está muito mais relacionada à detecção de sinais em ambiente ruidoso. A diferença fundamental entre as escolas diz respeito ao controle sobre a *fonte* da informação: Wiener não cogita que o operador tenha controle algum sobre a fonte, de modo que deve-se esperar sempre uma degradação da mensagem transmitida, caracterizada pela presença de ruído. Dentro deste contexto, trabalha-se com um conjunto – ou *ensemble* – de sinais ruidosos, sobre os quais tenta-se estimar de maneira ótima a mensagem recebida [29]. No outro extremo, Shannon pressupõe algum controle sobre a fonte, de modo que é possível escolher como as mensagens são *codificadas* [29, 175]. De todo modo, o controle sobre a fonte exigido por Shannon não diz respeito algum sobre *quais* mensagens serão emitidas.

Nossa análise ficará restrita à questão da entropia, de modo que os principais teoremas sobre transmissão sem erros em canais ruidosos não serão discutidos, já que dizem respeito muito mais à Engenharia de Telecomunicações do que a Física básica propriamente dita. Para discussões detalhadas sobre aplicações em sistemas de comunicação, recomenda-se o livro de Carlson [29]. Consideraremos de modo abstrato um sistema físico completamente diferente dos discutidos anteriormente: uma fonte de informação [190, 191, 175]. Por fonte, devemos entender um objeto físico, ou mesmo conceitual, composto por um conjunto de símbolos (*alfabeto*) ou mensagens que serão emitidas em algum momento, e ao longo do tempo. Note que o conteúdo emitido prescinde, em princípio, de qualquer carga semântica ou inteligibilidade; poderíamos emitir caracteres a esmo, caso assim fosse desejado.

De modo mais formal, consideremos uma fonte $B = \{x_i; i \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}\}$ que emite seus elementos a uma certa taxa¹⁴. A cada caractere (ou mensagem) x_i está associada uma probabilidade de ocorrência p_i , conhecida *a priori*. Queremos agora quantificar, tanto quanto possível, o teor de “escolha” ou – analogamente –, “incerteza” característico dessa fonte [29]. Este processo de quantificação se inicia com o estabelecimento do conceito de *autoinformação* do caractere x_i .

A autoinformação associada ao caractere x_i , cuja probabilidade de ocorrência é p_i , é uma função que – conforme dito acima – reflete o grau de escolha ou incerteza acerca da ocorrência de sua referida mensagem. Dito isto, Shannon aponta ([191], pp. 10–12) para propriedades desejáveis desta medida:

- i. A medida de autoinformação do caractere x_i , denotada doravante por S_i , deve ser contínua sobre a probabilidade x_i ;
- ii. $S_i = 0 \Leftrightarrow p_i = \delta_{ij}$. Isto é, a incerteza associada ao i -ésimo caractere é nula se seu evento é certo, ou seja, $p_i = 1$;
- iii. Se duas mensagens, estatisticamente independentes, x_i e x_j , forem emitidas pela fonte B , a autoinformação associada deve ser dada pela soma das autoinformações individuais. Em outras palavras, trata-se de uma grandeza aditiva.

É justamente a propriedade (iii) que leva ao resultado esperado da Teoria: se x_i e x_j são eventos independentes, temos $p_{i,j} = p_i p_j$. Por outro lado, a medida $S_{i,j}$ deve, de acordo com os requisitos acima, ser dada por $S_i + S_j$. Com base nesta propriedade, chega-se à única forma possível para a autoinformação [191]:

$$S_i = -k \ln(p_i), \quad \text{com } i \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}, \quad (3.37)$$

¹⁴A taxa de emissão é, em certa medida, atributo característico do canal de propagação [190]. Entretanto, para as discussões que seguem, a figura do canal não desempenha papel essencial, de modo que seu papel aqui será relegado a um atributo da fonte.

em que, novamente, k fixa unidades e a base do logaritmo não é relevante.

Uma vez que a autoinformação S_i corresponde a uma medida da incerteza associada ao caractere x_i , é razoável estender esta medida à fonte como um todo. Nesse sentido, calcula-se a média dada pela Equação (3.36). Vemos, finalmente, que a referida expressão para a entropia de Shannon corresponde, portanto, ao volume médio de incerteza associada a uma certa fonte de informação.

Da Equação (3.36) extraem-se propriedades importantes, a começar pela análise de extremos. Se por um lado $S = 0$ quando há um evento certo, isto é, quando existe um evento com $p_i = 1$; por outro, é fácil mostrar que no caso de uma distribuição equiprovável, a entropia é maximizada. Objetivamente, tal constatação deriva do fato em que se buscam os valores $\{p_i; i \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}\}$ tais que o seguinte funcional é extremado [10, 26]:

$$J = - \sum_i p_i \ln(p_i) + \lambda \left(1 - \sum_i p_i \right). \quad (3.38)$$

Na Equação (3.38) a constante k foi igualada a 1 e λ é um multiplicador de Lagrange associado ao vínculo que normaliza a distribuição. Os pontos de extremo do funcional $J[\{p_i\}]$ são aqueles que verificam a identidade $\nabla J = \mathbf{0}$. Contudo, é importante notar que a qualidade deste extremo (se é máximo ou mínimo) demanda também desenvolvimentos envolvendo a matriz Hessiana, cujas entradas são as derivadas segundas $\partial_{ij} J$. Tais desenvolvimentos são apresentados, por exemplo, por Brillouin ([26] pp. 14–16). De todo modo, visto que usaremos técnicas de extremos em funcionais no contexto de Equação de Difusão, é interessante antecipar minimamente tal protocolo.

Objetivamente, se $\nabla J = \mathbf{0}$, temos que cada componente $(\nabla J)_j = 0$ individualmente. Logo,

$$\left. \begin{aligned} \partial_j J &= \partial_j \left\{ - \sum_i p_i \ln(p_i) + \lambda \left(1 - \sum_i p_i \right) \right\} \\ &= \sum_i \delta_{ij} [- \ln(p_i) - 1 + \lambda] \\ &= - \ln(p_j) - 1 + \lambda \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_j \equiv e^{(\lambda-1)} \quad (3.39)$$

Como na Equação (3.39) todos os p_j são iguais, do vínculo de normalização da distribuição se evidencia que

$$\arg \max_{\sum p_i=1} (S) = \left\{ p_i = \frac{1}{N}; 0 \leq i < N \right\}, \quad (3.40)$$

tal como antecipado. Note que a Equação (3.40) mostra, em conjunto com a discussão sobre evento certo, que a entropia de Shannon para uma fonte discreta é limitada inferior e superiormente por

$$0 \leq S \leq \ln(N). \quad (3.41)$$

De um ponto de vista informacional, faz sentido que a entropia seja maximizada quando as probabilidades de ocorrência dos caracteres/mensagens da fonte forem iguais, já que nesse caso há uma incerteza – ou teor de escolha – máxima sobre o sistema. Note-se que tal maximização não tem relação com conceitos termodinâmicos, tais como degradação de energia ou irreversibilidade.

Deve-se atentar para o fato de que as discussões anteriores partiram de um pressuposto de que a multiplicidade de estados de um sistema e o número de caracteres de uma fonte são conjuntos discretos enumeráveis. Não há, em princípio, razão para nos atermos apenas a este caso, de modo que o caso contínuo também merece atenção. De fato, funcionais convexos definidos sobre funções de variáveis contínuas constituem o arquétipo da análise de entropia em Equações Diferenciais Parciais [115, 116, 49, 102] e, em particular, em espaços-escala [229, 230, 233, 199, 201]. Nesse espírito, e seguindo Shannon em [190], dada uma distribuição contínua $p(x)$, sua entropia associada é definida como

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln[p(x)] dx. \quad (3.42)$$

A entropia definida pela Equação (3.42) goza de propriedades análogas à sua contraparte discreta, mas se diferencia desta principalmente devido ao fato de que depende do sistema de coordenadas, ao passo que no

caso discreto lida-se com uma medida absoluta [29, 190]. Este caráter relativo da entropia de uma distribuição contínua não constitui um impedimento, visto que em termodinâmica clássica [27, 80], por exemplo, a noção de entropia também exige um nível de referência. De todo modo, essa dependência da entropia sobre os sistema de coordenadas abre porta para a importante análise de sistemas LSI. Elaboremos abaixo melhor este ponto.

É pertinente perguntar o que ocorre com a entropia dentro de um cenário de processamento via filtros LSI. Shannon anteviu tal situação [190] e enunciou o

TEOREMA 2: (VARIACÃO DE ENTROPIA EM PROCESSOS LSI) [190, 43, 1, 167]

Dado um ensemble de funções $2B$ -limitadas em banda cuja entropia é igual a S , a entropia do ensemble resultante de um processo de filtragem LSI com função de transferência $\hat{h}(\omega)$ é dada por

$$S' = S + \frac{1}{2\pi B} \int_{2\pi B} \ln \left(|\hat{h}(\omega)|^2 \right) d\omega. \quad (3.43)$$

A demonstração deste teorema para filtros LSI discretos pode ser vista em Papoulis ([167], p. 534) e no artigo de Aaron, McDonald e Protonotarios [1]. Desenvolvimentos detalhados sobre este assunto são apresentados por Derpich, Müller e Østergaard em [43]. Explicitaremos aqui a idéia geral da demonstração, segundo os desenvolvimentos do próprio Shannon [190] e Aaron *et al.* [1], já que – embora análogo – o caso contínuo se torna bem mais envolvente [43].

Parte-se da constatação de que se $y = Ax$, em que entrada e saída são variáveis aleatórias com distribuições $p_y(\cdot)$ e $p_x(\cdot)$, respectivamente, então deve valer [98, 167, 7]

$$p_y(y) = \begin{cases} p_x(A^{-1}y) |J(x, y)| & \text{para } y \in I\{A\}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.44)$$

Na Equação (3.44) $I\{\cdot\}$ e $|J(x, y)|$ denotam conjunto imagem e o determinante do Jacobiano. Nesse contexto, ao calcularmos a entropia associada a $p_y(\cdot)$ obtemos

$$\begin{aligned} S_y &= - \int p_y(y) \ln [p_y(y)] dy \\ &= - \int p_x(A^{-1}y) |J(x, y)| \ln [p_x(A^{-1}y) |J(x, y)|] dy \\ &= S_x - \int p_x(x) \ln [|J(x, y)|] dx. \end{aligned} \quad (3.45)$$

O desenvolvimento que culmina na Equação (3.45) mostra de modo geral como a entropia de uma distribuição transformada é aumentada quando a transformação em questão é uma troca de coordenadas¹⁵. A transição da Equação (3.45) para a (3.43) guarda sutilezas técnicas importantes, tal como apontado por Derpich *et al.* [43]. De todo modo, o argumento usado por estes autores – bem como pelo próprio Shannon [190] – reside no fato de que uma convolução corresponde a uma transformação de coordenadas no espaço recíproco, de modo que o Jacobiano do sistema corresponde às próprias entradas do filtro.

O Teorema 2 faz referência a um ensemble de funções. Tal conceito deve ser entendido simplesmente como um conjunto de funções $f(t|\theta)$, em que $\theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ é um vetor de parâmetros cujas probabilidades são conhecidas [167, 190]. Nesse sentido, é importante destacar que a Teoria erigida por Shannon assume que todas as fontes são ergódicas [190, 167, 80]; isto é, tratam-se de fontes cujas médias de ensemble são idênticas às médias temporais dos processos estocásticos associados.

O aspecto mais relevante apresentado no Teorema 2 diz respeito ao *aumento* da entropia de uma distribuição quanto da submissão desta a um filtro LSI. Este talvez seja o resultado mais crítico para a análise da informação em espaços-escala [199, 201], a ser detalhado no Capítulo 4. Tal criticalidade se deve exatamente ao fato de que uma descrição multiescala corresponde efetivamente a uma sucessão de sinais resultantes

¹⁵Representada pelo caráter linear bijetivo de $A[\cdot]$.

de processos LSI. Assim, quaisquer discussões sobre aumento, redução, manutenção etc. da entropia em espaços-escala devem levar em consideração o aumento descrito na Equação (3.43).

Para finalizar a discussão sobre o aumento da entropia em sistemas LSI, cabe aqui uma observação de caráter dual, prático e teórico: foi suposto, desde sempre, que a transformação $A[\cdot]$ é bijetiva. Embora existam possibilidades para se explorar a entropia para transformações mais gerais [167], é inegável a comodidade trazida pela hipótese em questão. Entretanto, para sistemas LSI, a inversa A^{-1} corresponderia a uma operação de *deconvolução*¹⁶, sabidamente mal-posta [96, 99]. De fato – para o caso contínuo –, trata-se da inversão de um operador integral, cujos pólos do núcleo devem ser administrados para que faça sentido a solução. No caso discreto, muito mais corriqueiro na prática, lida-se com o caráter singular da matriz \mathbf{A} . Concretamente, dados dois vetores de variáveis aleatórias, y e x tais que y é resultado da convolução de x por um filtro LSI causal¹⁷ \mathbf{A} , tem-se que

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & a_{N-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

A matriz \mathbf{A} na Equação (3.46) tem uma estrutura de Toeplitz [96, 12, 88, 166]. Para que se atinja algo “parecido” com a inversão do sistema mostrado, pode-se lançar mão de métodos de regularização, por exemplo. No presente contexto, não é necessário ir adiante na discussão; mas fica registrada a palavra de cautela sobre a força da hipótese de transformação LSI bijetiva usada na discussão. Desenvolvimentos muito mais detalhados acerca deste ponto podem ser acessados em [43].

3.5 Divergência de Kullback-Leibler

A questão do caráter relativo da entropia contínua e da mudança desta quando da sua submissão a processos LSI já foi clarificada. Com vistas a complementar esta discussão, é pertinente questionar como se mensura – ou pelo menos se estima – o *quão* distintas são duas distribuições, $p(x)$ e $q(x)$. Podemos elencar duas razões principais para justificar a necessidade desta compreensão:

- i. de um ponto de vista prático, em um cenário de manipulação de informação representada por processos estocásticos e do uso de transformações arbitrárias entre as variáveis aleatórias envolvidas, é relevante ter em mãos um discriminante numérico – análogo a uma *distância* – para que se afira o impacto do processamento sobre os dados originais [183]; e
- ii. de um ponto de vista teórico, a idéia de distância entre distribuições permite a dedução da expressão para a Informação de Fisher [61, 63, 183] sem a necessidade de se adotar uma óptica particularizada a temas de inferência estatística [19].

Nortearmos nossa análise de modo análogo ao exposto por Rioul em [183]. Concretamente, começa-se pela

DEFINIÇÃO 6: (DIVERGÊNCIA DE KULLBACK-LEIBLER) [183]

Dadas duas distribuições p e q definidas sobre o mesmo alfabeto $\{x\}$, a divergência de Kullback-Leibler (dora-vante divergência KL) de q em relação a p é dada pelo valor esperado do observável $\ln[p(x)/q(x)]$:

$$D_{\text{kl}}(p, q) \equiv \int p(x) \ln \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] dx. \quad (3.47)$$

¹⁶Uma nota pessoal: este neologismo, derivado do inglês *convolution*, parece despertar em algumas pessoas questões mal-resolvidas quanto à aceitação de termos cunhados de modo ingênuo, ainda que deliberadamente objetivo. Para tais audiências, o termo *filtro inverso* pode soar mais adequado, embora este careça de especificidade. Ainda sobre este ponto, impossível não lembrar da provocação de Richard Feynman (1918 – 1988), que em sua palestra “Gravitação, um exemplo de lei física” ([54], p. 34), ao explicar o experimento de Cavendish com a balança de torção, diz: “Cavendish chamou seu experimento de ‘pesando a terra’. Com o ensino metucioso e pedante de hoje, não deixaríamos nossos alunos dizerem isso; diríamos ‘medindo a massa da Terra!’”

¹⁷Causalidade aqui serve apenas para limitar o número de entradas das matrizes envolvidas.

Note-se que a divergência KL apresentada na Definição (6) e dada pela Equação (3.47) guarda relações com a entropia de Shannon, já que pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} D_{\text{KL}}(p, q) &= \int p(x) \ln \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] dx \\ &= \int p(x) \ln[p(x)] dx - \langle \ln[q(x)] \rangle \\ &= -S[p] - \langle \ln[q(x)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por conta desta relação com a figura da entropia, a divergência KL é também denominada entropia cruzada, ou relativa [183].

A divergência KL não pode ser encarada formalmente como uma métrica, pois não respeita duas propriedades essenciais: comutatividade e a desigualdade triangular. De todo modo, ela possui a desejável propriedade de positividade e se anula apenas quando as distribuições $p(x)$ e $q(x)$ se igualam. Tal propriedade pode ser derivada do fato de a função logaritmo ser convexa e superiormente limitada por $f(x) = x - 1$. Explicitamente [183]:

$$\begin{aligned} D_{\text{KL}}(q, p) &= - \int p(x) \ln \left[\frac{q(x)}{p(x)} \right] dx \\ &\leq - \int p(x) \left[\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right] dx \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Portanto, $D_{\text{KL}}(p, q) \geq 0$, e esta se anula apenas quando $p = q$.

3.6 Informação de Fisher

A divergência KL é o ponto de partida para a dedução da expressão da Informação de Fisher. Para tanto, consideremos ao invés de duas distribuições completamente distintas $p(x)$ e $q(x)$, duas distribuições idênticas, mas que variam segundo dois parâmetros distintos; isto é, $p(x; \theta)$ e $p(x; \theta')$. A idéia é que avaliemos a divergência de KL quando $\theta' \rightarrow \theta$, sendo este último parâmetro tomado como o “verdadeiro” [183]. Colocando de outro modo, poderíamos fazer $\theta' = \theta + \Delta\theta$ [63].

Na vizinhança em torno de θ temos

$$D_{\text{KL}}(\theta, \theta') = (\theta' - \theta) D'_{\text{KL}}(\theta, \theta') + \frac{(\theta' - \theta)^2}{2} D''_{\text{KL}}(\theta, \theta') + \dots, \quad (3.50)$$

em que se fez uso da notação reduzida $D_{\text{KL}}(p_\theta, p_{\theta'}) = D_{\text{KL}}(\theta, \theta')$. Note que o termo para $\theta = \theta'$ não aparece, conforme esperado da discussão anterior. Adicionalmente, gostaríamos de avaliar a expansão acima em um contexto de extremo, mais particularmente um mínimo. Com isso, a derivada primeira $D'_{\text{KL}}(\theta, \theta')$ também se anula. Truncando a série até o termo de segunda ordem, devemos por fim analisar

$$\begin{aligned} D''_{\text{KL}}(\theta, \theta')|_{\theta' \rightarrow \theta} &\approx \frac{d^2}{d\theta'^2} \int p(x; \theta) \ln \left[\frac{p(x; \theta)}{p(x; \theta')} \right] dx \\ &= - \frac{d^2}{d\theta'^2} \int p(x; \theta) \ln[p(x; \theta')] dx \\ &= - \int p(x; \theta) \frac{\partial_{\theta' \theta'} p(x; \theta')}{p(x; \theta')} dx + \int p(x; \theta) \frac{[\partial_{\theta'} p(x; \theta')]^2}{p^2(x; \theta')} dx \\ &= - \int \partial_{p_{\theta' \theta'}} p(x; \theta) dx + \int \frac{[\partial_{\theta'} p(x; \theta)]^2}{p(x; \theta)} dx \\ &= \int \frac{[\partial_{p_\theta} p(x; \theta)]^2}{p(x; \theta)} dx \equiv I_F(\theta). \end{aligned} \quad (3.51)$$

A Equação (3.51) é obtida tomando-se $\theta' = \theta$ a partir da penúltima linha do desenvolvimento.

Conforme exposto acima, vê-se que a Informação de Fisher [183, 61, 63] corresponde à curvatura da divergência de Kullback-Leibler quando esta é avaliada em um ponto de mínimo. Deve-se notar que para o caso de um vetor x de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a informação total é dada pela soma das Informações de Fisher individuais [19, 183].

No contexto de inferência estatística, o inverso de $I_F(\theta)$ define um limite inferior para a variância de um estimador de θ (desigualdade de Cramér-Rao [19, 183] – vide Apêndice C.). Isto é, ao observarmos realizações x cuja distribuição $p(x; \theta)$ é conhecida a menos do parâmetro θ , este será melhor estimado quão maior for a Informação de Fisher associada. Nota-se aqui um paralelo interessante com a questão da maximização da entropia: neste último caso, dentre o universo amostral disponível, manifesta-se o resultado que maximiza a entropia do sistema [100], ao passo que num cenário de estimação, a “melhor” determinação dos parâmetros¹⁸ θ que definem a distribuição subjacente ao processo observado vem “ao custo” da maximização da informação [61, 63, 183, 19]. Esta diferença na restrição¹⁹ imposta sobre um sistema com vistas à determinação de seus observáveis constitui um dos pilares fundamentais de toda a discussão deste Trabalho.

Dando continuidade à exposição sobre a Informação de Fisher, deve-se notar que esta aparece como um característico numérico associado à distribuição $p_\theta(\cdot)$, que por sua vez depende de um parâmetro θ segundo uma relação arbitrária. Particularizemos agora esta relação para o caso de uma *família de translação* [63, 203, 138]:

$$p(x; \theta) = p(x - \theta). \quad (3.52)$$

Note que este caso, dado pela Equação (3.52), compreende parâmetros de posição, como a média. Dentro deste cenário, um desenvolvimento completamente análogo àquele que leva à Equação (3.51) nos fornece a Informação de Fisher *não-paramétrica* [183]:

$$I_F \equiv \int \frac{[p'(x)]^2}{p(x)} dx. \quad (3.53)$$

Como é de se esperar – em função do caráter translacional mostrado na Equação (3.52) –, a Informação de Fisher não-paramétrica mostrada na Equação (3.53) independe do parâmetro θ . Esta mudança sutil (de uma derivada parcial para total) nas expressões da Informação nos permite agora realizar estimação diretamente sobre a distribuição, tornando o processo determinístico [183].

Antecipe-se aqui que a expressão dada por (3.53) aparece no contexto dos espaços-escala lineares, a serem discutidos no Capítulo 4. A fim de explicitar a conveniência de uma notação a ser adotada naquele Capítulo, consideremos que a distribuição – translacional, ou não-paramétrica – $p(x)$ deriva de uma grandeza complexa, em completa analogia com a interpretação probabilística da mecânica quântica [81]. Nesse caso, $p(x) = |v(x)|^2 = v^*(x)v(x)$ e obtém-se diretamente da Equação (3.53) que [203]

$$I_F = 4 \int \left[\frac{d}{dx} |v(x)| \right]^2 dx. \quad (3.54)$$

Embora baseada numa hipótese *ad hoc* – e despida de qualquer discussão mais elementar²⁰ – sobre a origem da distribuição $p(x)$, a expressão mostrada na Equação (3.54) mostra de modo evidente uma diferença importante em relação à entropia de Shannon: se por um lado esta última – dada pela Equação (3.42) tem um caráter global, explicitado pelo termo $p(\cdot) \ln[p(\cdot)]$ sob o signo de integral; a Informação de Fisher mostrada na Equação (3.54) mostra depender das variações locais da distribuição, explicitadas pelo aparecimento da derivada espacial $p'(\cdot)$ dentro da integral. Esta diferença relativa entre as localidades de I_F e S faz parte do rol de

¹⁸Deve-se notar que os desenvolvimentos descritos aqui supõem θ escalar. Entretanto, a Informação de Fisher pode –sem impedimento algum– ser estendida ao caso vetorial $\theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dots \ \theta_{N-1}]$ [183, 19].

¹⁹O termo “restrição” usado nesta passagem refere-se a um caráter variacional do processo de estimação. O ponto-chave é expor uma alternativa ao consagrado método da maximização de entropia por meio de outros funcionais, mais diretamente ligados ao processo de observação e estimação.

²⁰Tal como dito na Introdução deste Trabalho, o interessante universo da Informação Quântica não é discutido aqui, de modo que – seguindo o espírito de todo o desenvolvimento – deve-se atentar para que não se criem juízos equivocados sobre a natureza dos objetos que aqui aparecem. De fato, o artifício da origem de $p(x)$ por meio da “função de onda” $v(x)$ é adotado por Stam [203] para provar algumas desigualdades acerca da Informação de Fisher e Entropia de Shannon num contexto puramente ligado à inferência estatística.

argumentos usados por Frieden em [61, 63], em que é proposto por este autor uma “reescrita” da física em termos da Informação de Fisher e de uma dinâmica baseada em extremos de um funcional de *informação física* [61, 63]. Nosso objetivo, contudo, é muito mais modesto: explorar a localidade de I_F num contexto de visão baseada em detecção de bordas e arestas; entidades estas justamente detectáveis por operadores diferenciais, tais como aquele nas expressões para Informação de Fisher.

4.1 Visão em baixo nível: teoria do esboço primitivo

Há duas colocações de Marr e Hildreth [136] sobre a visão humana que devem ser vistas como os alicerces de uma teoria multiescala da visão. A primeira diz respeito à *finalidade* dos estágios iniciais da visão:

[...] the purpose of early visual processing is to construct a primitive but rich description of the image that is to be used to determine the reflectance and illumination of the visible surfaces, and their orientation and distance relative to the viewer.

A segunda reconhece a natureza multi-resolução, ou *multiescala*, de tais sistemas:

A major difficulty with natural images is that changes can and do occur over a wide range of scales [...], so it follows that one should seek a way of dealing separately with the changes occurring at different scales.

Postas de modo isolado, as colocações acima poderiam levar a um entendimento que tratam-se de partes de mais uma teoria computacional da visão, sem maiores apegos a caracteres cognitivos e fisiológicos. Entretanto, o modelo de detecção de arestas concebido por Ellen Hildreth e David Marr [136] é fortemente baseado em aspectos da fisiologia da visão humana, de modo que não deve ser visto com um constructo desgarrado de realidade, mas sim como um modelo de representação computacional para os estágios iniciais do intrincado sistema visual humano. Num panorama mais amplo, poderíamos dizer que a teoria de Hildreth-Marr é um elemento das neurociências computacionais. Para uma interessante discussão sobre este campo sob a óptica da psicologia, recomenda-se o artigo de Leopoldo e Joselevitch [117].

Os parágrafos anteriores tiveram a finalidade de, muito modestamente, posicionar sobre o terreno complexo em que presente Trabalho se situa. Se por um lado a teoria da visão de Marr [137] – que ampara em grande parte a teoria de Hildreth-Marr [136] – goza de uma razoável simplicidade computacional, seus desdobramentos na neurociência computacional têm magnitude absolutamente colossal¹. Nesse sentido, uma delimitação do modelo de visão é necessária, mesmo às expensas de se contornar aspectos interessantes da cognição. Trata-se neste Trabalho o domínio sintático da visão primordial humana; isto é, aquele em que ainda não existem significados subjetivos para o que se vê, mas sim elementos objetivos derivado da primeira observação da cena. Seguindo Hildreth e Marr [136], estes elementos correspondem a bordas e arestas em múltiplas escalas.

¹Basta notar que o paradigma das Redes Neurais Convolucionais – CNNs, *convolutional neural networks* – é baseado em grande parte por modelos de resposta a estímulos preconizados pela Teoria de Marr.

A Teoria do Esboço Primitivo de Hildreth-Marr [136, 137] parte da constatação de que as fontes de informação visual, sejam elas derivadas de auto-iluminação ou reflexão, são – em suas respectivas escalas – espacialmente localizadas. Ademais, impera a necessidade de se filtrar a cena previamente, a fim de que se possa reduzir o espaço de escalas disponíveis para análise. Para que se tenha controle fino das escalas afetadas, a variância do filtro deve ser pequena [136]. Isto impõe uma restrição automática sobre a variância no domínio espacial, conforme exposto e discutido no Capítulo 3, Seções 3.1 e 3.2. daquelas discussões, sabe-se que o candidato perfeito a preencher as limitações de largura de banda é o filtro Gaussiano, visto seu caráter ótimo ante ao princípio de incerteza. Resta definir como as alterações de intensidade podem ser detectadas.

Diferentemente de sinais 1-D, a detecção de bordas, arestas e descontinuidades em duas ou mais dimensões requer a especificação de uma direção específica. No caso contínuo haveria a necessidade de se estimar derivadas direcionais sobre todo o intervalo $\theta \in [0, 2\pi[$, ao passo que em cenários discretos um conjunto discreto e enumerável $\theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dots \ \theta_{N-1}]$, dependente da resolução da malha, deveria ser varrido. Em tais direções, procuraríamos por valores “pequenos” das derivadas. Alternativamente, poderíamos procurar por *cruzamentos pelo zero*, ou *zero-crossings* [136, 137, 213], nas derivadas segundas. Entretanto, ainda permanece o incômodo de ter de se inspecionar ângulo por ângulo. Hildreth e Marr propõem [136] então o uso do Laplaciano, já que este é invariante a rotações².

Dada a natureza linear dos processos evidenciados acima (filtragem passa-baixas com Gaussiano e diferenciação com Laplaciano), pode-se operar de uma única vez, já que

$$\nabla^2[h_\sigma * u](\mathbf{x}) = [\nabla^2 h_\sigma(\mathbf{x})] * u(\mathbf{x}) \equiv \text{LoG}_\sigma[u](\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

O filtro $\text{LoG}_\sigma[\cdot]$ é conhecido como *Laplacian of Gaussian* [97, 136, 137] e sua expressão em 1-D é da forma

$$\text{LoG}_\sigma(x) = -\frac{1}{\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.2)$$

e seu perfil tem a forma mostrada na Figura 4.1. O efeito de LoG sobre uma imagem monocromática³ é mos-

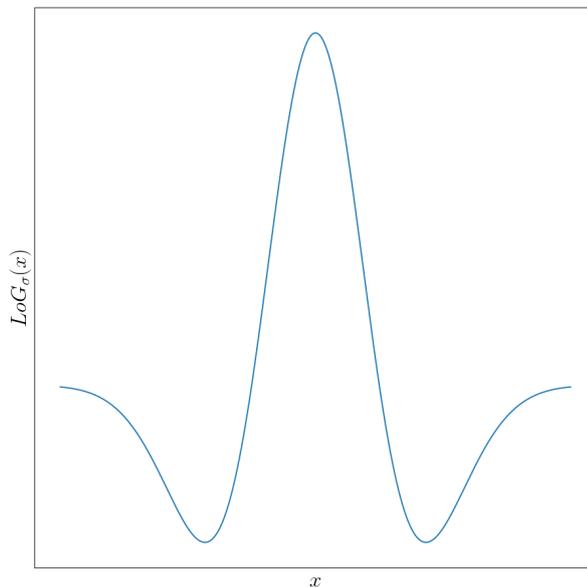


Figura 4.1: Laplaciano da Gaussiana em 1D.

trado na Figura 4.2.

²No caso contínuo. Em um cenário discreto operacionalizado por diferenças finitas, perde-se tal propriedade quando do uso de uma aproximação direta. É possível contornar tal questão usando mais termos vizinhos na expansão, tal como mostrado por Aubert e Kornprobst em [8], Apêndice A, Seção 3.

³Vide Seção 5.2 para uma discussão sobre sistemas de cores e adoção de imagens em tons de cinza neste Trabalho.

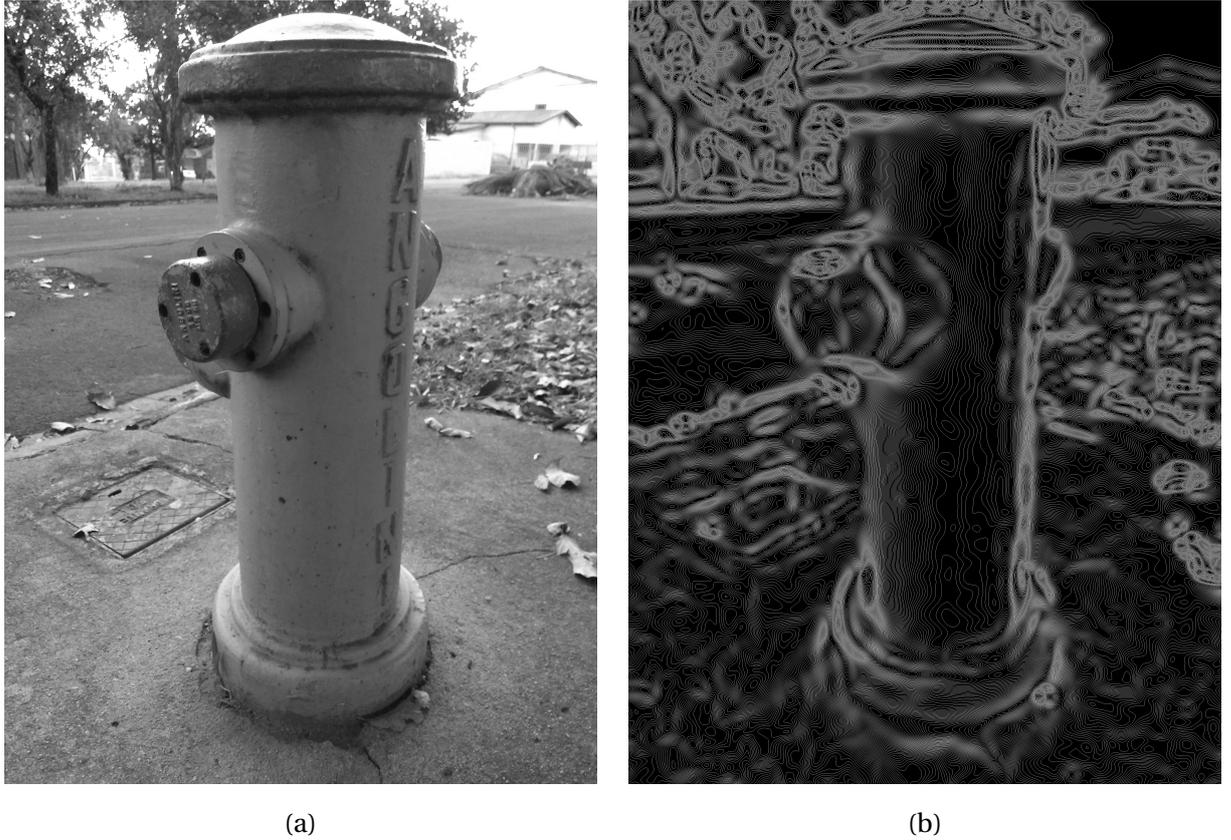


Figura 4.2: Ilustração de detecção de bordas via Laplaciano da Gaussiana sobre uma imagem de dimensões 3120×4160 pixels. A escala usada neste caso é $\sigma = 50$ px e a versão RGB da imagem original foi convertida para tons de cinza, isolando-se a componente Y das luminâncias. A fim de se melhorar a visualização, o resultado foi submetido a uma limiarização global, cujo limiar foi escolhido como igual a três desvios-padrão na distribuição dos níveis de luminância.

O caráter multiescala da Teoria de Hildreth-Marr é evidente, e traz à tona o questionamento de *como se especificar a escala para a detecção desejada*, que é o problema fundamental discutido neste Trabalho. A conexão da teoria do esboço primitivo com as equações diferenciais se dá ao se constatar [136, 137, 82] que o operador $\text{LoG}[\cdot]$ pode ser aproximado por uma *diferença entre Gaussianas*, isto é,

$$\text{LoG}_\sigma(x) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \text{DoG}(x; \sigma, \sigma + \Delta\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma + \Delta\sigma)} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\sigma + \Delta\sigma)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \right\}, \quad (4.3)$$

em que DoG denota *difference of Gaussian*. A ponte com as EDPs torna-se explícita à medida em que se percebe que convoluções com núcleos Gaussianos constituem solução da equação linear da difusão/calor [55, 95, 8]. Embora isto seja discutido em grande detalhe nas Seções seguintes, é interessante antecipar este ponto sobre o caráter aproximativo em questão. Em uma dimensão, temos:

$$\begin{aligned} \text{LoG}_\sigma[u](x) &= \partial_{xx}[h_\sigma * u](x) \\ &= h_\sigma * [\partial_{xx}u](x) \\ &= c^2 h_{\sigma(t)} * [\partial_t u](x, t) \\ &\approx \frac{c^2}{\Delta t} h_{\sigma(t)}(x) * [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

O desenvolvimento mostrado na Equação (4.4) foi possível tomando-se $\partial_u u(x, t) = c^2 \partial_{xx} u(x, t)$. Uma discussão bastante detalhada sobre esta equação é realizada nas próximas seções, de modo que enfatiza-se aqui o

detalhe, talvez sutil, na Equação (4.4) de uma relação – ainda não explicitada – entre σ e t . De fato, não é mistério que para o caso linear tal relação seja dada por $\sigma^2(t) = 2t$ [55, 95, 8]. Entretanto, muito mais importante que a expressão em si é a simples existência de uma relação entre resolução e escala/tempo dentro do arcabouço da visão primordial.

4.2 Construção axiomática

Espaços-escala podem ser construídos de modo axiomático: uma vez colocadas as premissas que o processo deve assegurar, deduzem-se os aspectos mais específicos do sistema. De fato, esta foi a estratégia adotada por Taizo Iijima nos anos 60 [231, 234], no contexto de reconhecimento de padrões. Tais desenvolvimentos passaram despercebidos pela comunidade científica ocidental, para a qual o importante artigo de Andrew Witkin [237] constituía o embrião conceitual das Teorias de espaços-escala⁴. Tentaremos nesta seção abordar a construção axiomática dos espaços-escala Gaussianos, seguindo de perto os requisitos colocados por Iijima [231, 234] e Witkin [237]. Os desenvolvimentos apresentados por Pauwels *et al.* [168] nortearão nossa análise.

Partindo de um pressuposto de máxima ignorância sobre a estrutura (sinal) a ser mergulhada no espaço-escala [122, 56], pode-se considerar que talvez o primeiro requisito a ser instalado na teoria seja a invariância ao deslocamento, visto que com isso assume-se uma “isonomia” no processo em seus diversos níveis locais. Em um contexto de sinais multidimensionais / imagens, também é razoável que transformações (uniformes) de intensidade não alterem o conteúdo investigado. Por exemplo, uma alteração de iluminação sobre uma cena, ou a imposição de um *offset* ao sinal, não deveriam ser capazes de distorcer a resposta global do processo.

Os dois requisitos acima são bastante intuitivos e, de certa forma, esperados. A eles devem se somar outros dois, menos óbvios e com consequências profundas: primeiro, o sistema deve apresentar algum tipo de invariância a transformações de escala. Esta condição é inspirada no aspecto físico do processo de medida [56, 122], já que um observável físico deve se manter inalterado sobre mudanças das unidades fundamentais envolvidas. No contexto de multiescala, a imposição da invariância à escala está associada à já comentada ignorância sobre a estrutura investigada: na ausência de informações *a priori*, não deve existir uma escala preferencial [237, 168].

Ligado diretamente à questão da invariância em escala, o último requisito a ser exigido está associado à existência de uma propriedade de semigrupo [122, 168, 56]. Grosso modo, esta está ligada ao fato de que todas as escalas devem ser tratadas da mesma forma [122] e um efeito cumulativo deve ser observável; isto é, ao analisarmos um mesmo sinal em duas escalas distintas, de modo sucessivo, deve haver uma escala sobre a qual a resposta do processo retorne um resultado que incorpore estas duas escalas, em um único processo de medida.

A discussão conceitual acima traz a essência da construção axiomática de um espaço-escala. Há de se notar, contudo, que frequentemente lidamos com variações ou até mesmo violações dos requisitos impostos. Veremos mais adiante que o espaço-escala Gaussiano sofre de limitações insuperáveis, a menos que flexibilizemos alguns de seus axiomas fundamentais. Aliás, foi esse “archo” em se violar uma sistemática extremamente elegante que levou Perona e Malik a apresentar em [170] um recurso que viria a revolucionar toda a área de Processamento de Imagens.

Seguindo Iijima [231, 234], admitiremos que um sinal $u(x)$ submetido a um operador em um espaço escala é transformado de modo geral por

$$u_\sigma(x) = \Phi_\sigma[u](x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(x, x', u, \sigma) dx', \quad (4.5)$$

em que σ é um parâmetro de escala estritamente positivo e $h(\cdot)$ é o núcleo do operador, a ser determinado. Note-se a extrema generalidade da transformação $\Phi_\sigma[\cdot]$. Veremos adiante como os axiomas refinam o escopo de atribuição deste operador. A fim de permitir um desenvolvimento sistemático, os requisitos discutidos an-

⁴Graças a Weickert, Ishikawa e Imiya [231, 234], as idéias principais da Axiomática de Iijima podem ser consultadas em inglês, de modo que não há mais motivos para não atribuímos a “alvorada” dos Espaços-Escala àquele cientista.

teriormente podem, baseados na Equação (4.5), ser sistematizados na

DEFINIÇÃO 7: (AXIOMAS DE IJIMA) [231, 234]

- i. **Linearidade sobre multiplicação.** Se α é uma constante arbitrária, a resposta do sistema a uma entrada amplificada $\alpha u(x)$ deve ser tal que valha

$$\Phi_\sigma[\alpha u](x) = \alpha \Phi_\sigma[u](x). \quad (4.6)$$

- ii. **Invariância ao deslocamento.** O operador $\Phi_\sigma[\cdot]$ comuta com o operador de translação T_{x_0} :

$$\Phi_\sigma[T_{x_0} u](x) = T_{x_0} \Phi_\sigma[u](x) \quad (4.7)$$

- iii. **Invariância de escala.** O sistema é invariante sobre transformações de escala:

$$x \mapsto \lambda x \quad \Rightarrow \quad \Phi_\sigma[\tilde{u}](x) = \Phi_{\tilde{\sigma}}\left[\frac{x}{\lambda}\right], \quad (4.8)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tilde{u}(x) \equiv u(x/\lambda)$ e $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\lambda)$.

- iv. **Semigrupo.** O sistema deve obedecer a uma propriedade de semigrupo *generalizada*:

$$\Phi_{\sigma_2} \Phi_{\sigma_1}[u](x) = \Phi_{\sigma_3}[u](x), \quad (4.9)$$

em que $\sigma_3 = \sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

Os Axiomas mostrados nas Equações (4.6)–(4.9) trazem para solo matemático os requisitos discutidos anteriormente. Chamamos a atenção para a propriedade de semigrupo generalizada, Equação (4.9): de acordo com o discutido acima, seria de se esperar uma relação da forma $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$. Veremos mais adiante a necessidade em se colocar a relação $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$ com tal grau de generalidade.

Os Axiomas (i) e (ii), dados pelas Equações (4.6) e (4.7) imediatamente estabelecem que o sistema é LSI, conforme discutido na Seção 2.2, Equação (2.8). Temos então que

$$\Phi_\sigma[u](x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x'; \sigma) u(x') dx' = (h_\sigma * u)(x), \quad (4.10)$$

em que adotamos a notação $h_\sigma(\cdot)$ para indicar que a escala é fixa ao longo do processo de convolução. Por sua vez, o Axioma (iii), dado pela Equação (4.9), estabele a existência de um fator de escala sobre o núcleo h , geralmente dependente de σ . De fato, das Equações (4.8) e (4.10), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_\sigma(x - x') u\left(\frac{x'}{\lambda(\sigma)}\right) dx' &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\tilde{\sigma}}\left(\frac{x}{\lambda(\sigma)} - x'\right) u(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\sigma)} h_{\tilde{\sigma}}\left[\frac{1}{\lambda(\sigma)}(x - x')\right] u\left(\frac{x'}{\lambda(\sigma)}\right) dx' \end{aligned} \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) é de grande valor conceitual e operacional nos espaços-escala: ao postularmos a não-existência de uma escala preferencial a um sistema LSI, restringimos a definição de seu núcleo. Isto é, nos resguardamos do risco de que h possa mudar sua lei de formação ao longo da variação de σ . De fato, lidamos no final com versões dilatadas ou comprimidas de uma única função:

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{\lambda(\sigma)} \phi\left(\frac{x}{\lambda(\sigma)}\right), \quad (4.12)$$

em que $\phi(\cdot)$ é o núcleo-matriz⁵, que quando submetido a transformações de escala regidas pela função $\lambda(\sigma)$ dá origem ao núcleo $h_\sigma(x)$. Veja que há uma generalidade sobre o fator de escala, pois não há razão alguma – a esta altura – de se restringir a discussão a escalas lineares, isto é, $\lambda(\sigma) \propto \sigma$. Entretanto, visando manter a integridade (continuidade, integrabilidade etc.) de $h_\sigma(\cdot)$, é usual que se coloquem algumas condições sobre $\lambda(\cdot)$, tais como monotonicidade e bijetividade [168].

A questão da propriedade de semigrupo generalizada é bem mais específica, e leva ao principal resultado da construção, permitindo que o núcleo Gaussiano surja em definitivo. Para chegar a este resultado, precisamos de hipóteses adicionais sobre $h_\sigma(\cdot)$ [168, 147]: ao lidarmos com um sistema LSI, é claro que $h_\sigma(\cdot)$ deve ser absolutamente integrável. A integrabilidade do núcleo nos proporciona também a existência de sua transformada de Fourier $\hat{h}_\sigma(k)$, em que k é o número de onda (ou frequência espacial). Adicionalmente, do ponto de vista de Análise de Sinais, é interessante que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\sigma(x) dx = 1, \quad (4.13)$$

isto é, que o núcleo seja normalizado. Isso garante que o sistema não amplifique sinais constantes, e permitirá – no presente desenvolvimento – a aplicação de um resultado técnico da Teoria de Grupos [186]. Exigiremos por fim que o núcleo do operador seja par, isto é, que

$$h_\sigma(x) = h_\sigma(-x). \quad (4.14)$$

A exigência expressa na Equação (4.14) é remanescente de uma teoria de Imagens: no caso multidimensional, espera-se que não exista direção preferencial sobre a qual o núcleo atue. Nesse caso, exige-se do filtro ser invariante a rotações. Como aqui lidamos com uma única dimensão espacial, a paridade é requerida. Juntamente com a realidade de $h_\sigma(\cdot)$, vemos que a transformada de Fourier $\hat{h}_\sigma(k)$ seja também real e par.

Embora os requisitos adicionais sobre $h_\sigma(\cdot)$ tenham sido colocados sob um justificativa baseada em percepção de imagens, eles desempenham um papel muito mais abstrato. Para elaborar melhor este ponto, precisamos da

DEFINIÇÃO 8: (FILTROS RECURSIVOS EM ESCALA) [147]

O núcleo $h_\sigma(x)$ é dito recursivo em escala se dados $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ valer

$$h_{\sigma_2} \circ h_{\sigma_1} = h_{\sigma_1 \oplus \sigma_2}, \quad (4.15)$$

em que \circ é o operador de composição e \oplus é uma operação de adição geral, no sentido de Teoria de Grupos [7, 12].

A Definição 8 coloca que é esperado de um sistema recursivo em escala uma alteração nesta, regida pela “adição” \oplus . Dentro das nossas discussões, contudo, podemos particularizar esta definição de forma que a adição de escalas é usual, isto é, $\sigma_1 \oplus \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2$, e o operador de composição é a convolução. Dito isto, dentro do atual contexto, o Axioma (iv) de Iijima, dado pela Equação (4.9), pode ser reescrito como

$$(h_{\sigma_1} * h_{\sigma_2})(x) = h_{\sigma_1 + \sigma_2}(x). \quad (4.16)$$

Para além da evidente familiaridade, a Equação (4.16) – acompanhada dos requisitos adicionais colocados anteriormente – nos permite formar juízo sobre a forma geral de $h_\sigma(\cdot)$. Inicialmente, deve-se ter em mente que o espaço dos núcleos $h_\sigma(\cdot)$ indexados por $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um espaço de Banach⁶. Ademais, consideradas as propriedades do produto de convolução e a integrabilidade dos $h_\sigma(\cdot)$, temos na verdade uma álgebra de Banach [186]. Sob uma óptica de Teoria de Grupos, a transformada de Fourier de um produto de convolução corresponde a um homomorfismo [186, 7, 12], visto que preserva produtos entre grupos. No presente caso, o grupo de “origem” é a álgebra de Banach formada pelo espaço dos $h_\sigma(\cdot)$ equipado com o produto $*$, e o grupo de “destino” é o corpo dos complexos, equipado com o produto usual. Dentro deste arcabouço, é mostrado

⁵Aqui o termo matriz é usado em sua acepção mais literal – semelhante a *geratriz* – e não deve ser confundido com seu sentido matemático.

⁶De fato, é um espaço de Hilbert, já que está equipado com produto interno.

(vide, e.g., Rudin [186], p. 191–193) que a transformada de Fourier de $h_\sigma(x)$ deve ser necessariamente uma exponencial. Isto é,

$$\hat{h}_\sigma(k) = \exp[-p(k)\sigma], \quad (4.17)$$

em que $p(k)$ é uma função par, visto que \hat{h}_σ também o é.

O resultado mostrado na Equação (4.17) já dá indícios sobre onde queremos chegar; afinal, se a transformada de Fourier do filtro é uma exponencial real cujo expoente é uma função par, núcleos Gaussianos são abrangidos de maneira bastante natural. Entretanto, eles não são os únicos que cumprem com estes requisitos. De fato, a questão da invariância à escala é essencial para uma delimitação mais firme deste espaço de núcleos admissíveis.

É provado por Pauwels *et al.* [168] e Nilsen [147] que se $h_\sigma(\cdot)$ cumpre com todos os requisitos colocados⁷, a função de transferência do Espaço-Escala erigido sobre a Axiomática de Iijima é dada por

$$\hat{h}_\sigma(k) = \exp(-a\sigma|k|^\alpha), \quad (4.18)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um parâmetro livre, bem como a constante real a .

A Equação (4.18) evidencia a existência de um segundo parâmetro contínuo, α . A variação deste novo parâmetro claramente influencia a estrutura do espaço-escala. Para o caso em que $\alpha = 2$, temos finalmente que

$$\hat{h}_\sigma(k) = \exp(-a\sigma k^2) \Rightarrow h_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right], \quad (4.19)$$

que corresponde precisamente ao núcleo Gaussiano, já abordado na Seção 3.1 (vide Equação (3.3), p. 22). Neste caso, deve-se notar que o fator de escala é dado por

$$\lambda(\sigma) = \sqrt{\sigma}. \quad (4.20)$$

Veja que lidamos aqui com uma questão essencial: porque deveríamos escolher $\alpha = 2$ se, em princípio, poderíamos excursionar por uma gama de valores? De fato, esse novo grau de liberdade possibilita extensões e generalizações à Teoria dos Espaços-Escala via Cálculo Fracionário, tal como feito por Duits *et al.* em [46]. Uma discussão sucinta sobre o cálculo fracionário é realizada no Apêndice B

Nilsen [147] apresenta uma prova bastante direta de que se $\alpha = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, o espaço-escala de Iijima admite sinais no sentido de distribuições (deltas, degraus etc.). Dentre as infinitas (mas agora enumeráveis) possibilidades sobre α , a escolha $\alpha = 2$ é a única [231, 234, 168] que preserva a positividade do sinal analisado no Espaço. O próprio Iijima foi forçado a considerar este um quinto Axioma [231, 234]:

DEFINIÇÃO 9: (AXIOMAS DE IIJIMA - SUPLEMENTO) [231, 234]

- v. **Preservação da positividade.** O sistema não altera o sinal de entradas (quando positivas), independentemente da escala:

$$u(x) > 0 \Rightarrow \Phi_\sigma[u](x) > 0, \quad \forall \sigma. \quad (4.21)$$

Por fim, há um resultado mais profundo discutido em detalhes por Pauwels *et al.* [168] em que é evidenciada a *necessidade* de se ajustar $\alpha = 2$ caso se queira operacionalizar o Espaço-Escala de Iijima (equipado finalmente com a preservação da positividade) via EDPs [147]. Naturalmente, este é atributo extremamente desejável, de modo que não parece haver – dentro do contexto linear clássico – maiores objeções à escolha de $\alpha = 2$ e suas boas consequências.

Deve-se notar, por fim, que o Espaço-Escala Gaussiano vai de encontro com várias colocações sobre o sistema visual humano segundo Marr [136], de forma que quaisquer mudanças que tentemos implementar nos afastará necessariamente desta importante teoria da visão primária.

⁷Tanto aqueles derivados dos Axiomas de Iijima quanto aqueles colocados posteriormente, de modo *ad hoc*.

4.3 Abordagens de Witkin e Koenderink: a equação de difusão

A construção axiomática de Iijima, descrita na Seção anterior, mostrou que é possível, a partir de postulados fundamentais, construir uma família de sinais (ou, equivalentemente, um banco de filtros) que decompõe um sinal $u(x)$ em múltiplas escalas. Discutiremos aqui alguns de seus aspectos mais importantes, ligado à *descrição multiescala*, que fará a conexão “final” da Teoria dos Espaços-Escala *Lineares* às Equações Diferenciais. Em particular, se o Espaço-Escala é Gaussiano, lidaremos diretamente com a Equação de Difusão.

Embora a abordagem de Witkin [237] seja bastante diferente daquela seguida por Iijima [231, 234], a idéia de ambos era a mesma: decompor o sinal de interesse em múltiplas resoluções, de forma a permitir uma análise particularizada para cada nível de detalhe desejado. Nas palavras do próprio Witkin [237]:

[...] The problem of *scale* has emerged consistently as a fundamental source of difficulty, because the events we perceive and find meaningful vary enormously in size and extent. The problem is not so much to eliminate fine-scale noise, as to separate events at different scales arising from distinct physical processes. It is possible to introduce a *parameter of scale* by smoothing the signal with a mask of variable size, but with the introduction of scale-dependence comes ambiguity: every setting of the scale parameter yields a different description; new extremal points may appear, and existing ones may move or disappear. How can we decide which if any of this continuum of descriptions is “right”?

A idéia de Witkin de resolver a ambiguidade em escala era simples, mas engenhosa: uma vez *detectados* os extremos em determinada escala, pode-se – em princípio⁸ – seguir sobre a curva que contém o extremo em questão até escalas mais finas, conforme desejado. Surgem, de imediato, algumas questões acerca deste *modus operandi*:

- i. a que extremos nos referimos; ou, em outras palavras, qual a ordem da derivada do sinal que nos interessa?
- ii. sob quais condições garantimos que as curvas de extremos no espaço-escala não se interceptem, gerando ambiguidade na representação?

A resposta da questão (i) vem da Teoria de Detecção de Arestas, de Marr e Hildreth [136]: embora seja bastante claro que o módulo do gradiente do sinal de interesse, $|\nabla u(\mathbf{x})|$, funcione como detector de bordas, ele não é invariante a rotações, de modo que exige-se a submissão da imagem a filtragens diversas com derivadas direcionais para que se forme algum juízo sobre a existência de bordas em determinado ponto \mathbf{x} . O Laplaciano $\nabla^2 u(\mathbf{x})$, por sua vez, é invariante sobre rotações no plano [136, 8], e a análise de extremos adotada por Witkin em [237] se baseia nos pontos em que ocorrem cruzamentos no zero [237, 136, 213], isto é, em pontos em que

$$\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_{xxx}\Phi_\sigma[u](x) \neq 0. \quad (4.22)$$

A Figura 4.3 ilustra como se dá a descrição multiescala proposta por Witkin, que se baseia na observação da evolução das curvas $\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0$ no espaço-escala (x, σ) . A descrição qualitativa proposta por Witkin em [237] consistia em se mudar a representação dos sinais para aquela gerada pelas curvas $\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0$, explorando a hierarquia estabelecida em escala. Em outras palavras: pode-se, em uma dada escala σ' , escolher uma curva $\partial_{xx}\Phi_{\sigma'}[u](x) = 0$, acompanhando-a até $\sigma = 0$. Para isso, Witkin explicita a necessidade de duas hipóteses fundamentais, enunciadas na

DEFINIÇÃO 10: (HIPÓTESES DE WITKIN) [237]

- i. **Identidade:** extremos observados sobre uma mesma curva $\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0$, mas em diferentes escalas, têm origem em um mesmo evento; e
 - ii. **Localização:** a posição correta x de um evento observado em uma escala σ pode ser determinada seguindo sobre a respectiva curva $\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0$ conforme $\sigma \rightarrow 0$.
-

Em alguma medida, Witkin também foi “forçado” a postular propriedades fundamentais do espaço-escala

⁸Ao formular a Teoria de Witkin por meio da Equação de Difusão veremos que haverá uma restrição “termodinâmica” no processo de rastreamento de extremos sobre a superfície no Espaço-Escala.

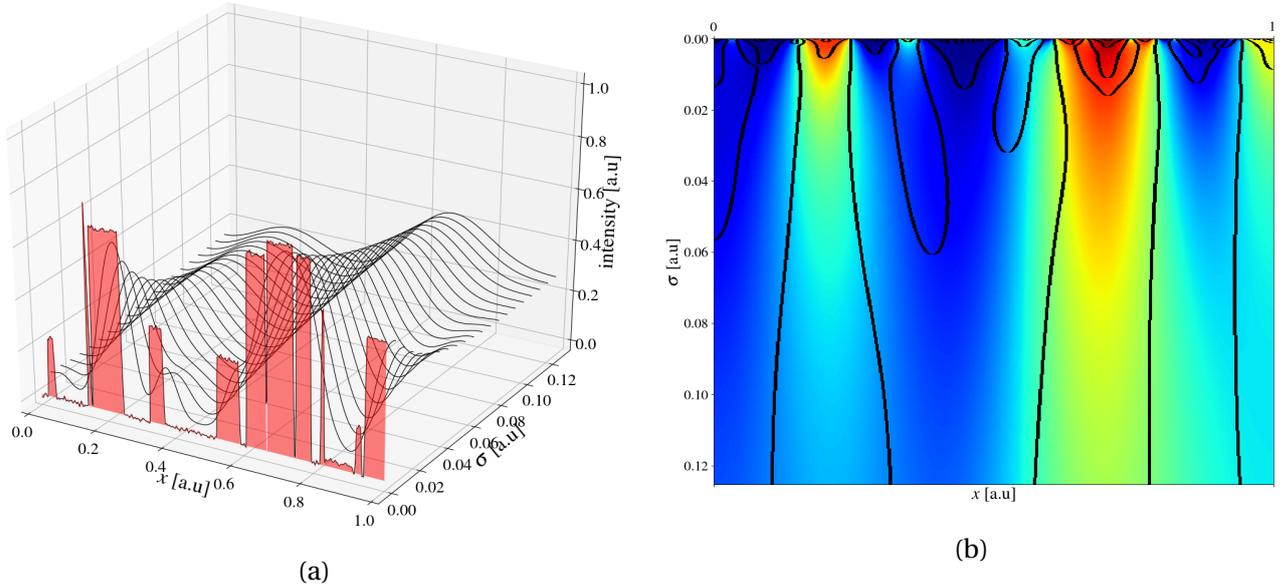


Figura 4.3: Descrição multiescala de acordo com Witkin. Em (a) é mostrado um sinal sintético (curva vermelha preenchida) decomposto em múltiplas versões de menor resolução, obtidas por convoluções com núcleos gaussianos cuja escala σ é sucessivamente incrementada. Nota-se claramente uma degradação irrecuperável no sinal conforme aumenta-se o parâmetro de escala. Em (b) é mostrada a imagem do espaço-escala projetada sobre o plano, superposta pelas curvas em que a derivada segunda de $u_\sigma(x)$ se anula. Para melhor visualização, estas curvas foram submetidas a um espessamento via morfologia matemática, com elemento estruturante retangular de diâmetro igual a 3 pixels. Neste exemplo, a resolução inicial do sinal é de $\Delta x = 1,96 \cdot 10^{-3}$ [u.a] e o parâmetro de escala máxima é $\sigma_{\max} = 1,25 \cdot 10^{-1}$ [u.a.].

desejado. As hipóteses (ou axiomas) colocadas restringem, de uma maneira bastante cômoda, a classe dos filtros passa-baixa permitidos para a construção do sistema. De fato, é provado por Babaud, Witkin, Baudin e Duda em [9] que o único núcleo $h_\sigma[\cdot]$ capaz de respeitar as hipóteses de Witkin, listadas na Definição 10, é a Gaussiana normalizada, dada pela Equação (4.19). Nota-se, enfim, a convergência entre as abordagens de Iijima e de Witkin.

O detalhe mais relevante na escolha dos filtros Gaussianos para o espaço-escala de Witkin reside na capacidade de tais estruturas em se impedir a criação de cruzamentos por zero. Já que este último evento corresponde ao registro de uma detecção na teoria, é imprescindível que detalhes espúrios não sejam criados ao longo das excursões em escala. Note aqui que a influência da hipótese de Identidade.

Em paralelo aos desenvolvimentos teóricos de Witkin, que optou por enfatizar a hierarquia de extremos no espaço-escala, Jan Koenderink também mostrou [109], segundo uma abordagem baseada em geometria diferencial, que um espaço-escala linear que obedeça aos princípios de identidade⁹ e invariância ao deslocamento leva necessariamente ao caso Gaussiano. Entretanto, o resultado que nos interessa aqui é que a abordagem geométrica de Koenderink leva à equação de difusão:

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 u(\mathbf{x}, t), \quad (4.23)$$

cujas solução é bem-estabelecida [55, 95], e corresponde ao produto de convolução $h_{2t}(\mathbf{x}, t) * u(\mathbf{x}, 0)$. Há de relevante neste resultado que podemos, a partir de agora, encarar a descrição multiescala de Iijima-Witkin como um processo de evolução regido pela Equação do calor (4.23), cujo parâmetro de escala σ está vinculado ao “tempo” t na forma

$$\sigma^2(t) = 2t. \quad (4.24)$$

Deve-se enfatizar aqui que a despeito de certa obviedade sobre a analogia entre descrição multiescala e a equação do calor (já que tratamos sempre de convoluções com núcleos Gaussianos), o trabalho de Koenderink estabelece um marco, ou mudança de paradigma. Podemos, agora, considerar um espaço-escala linear

⁹Koenderink usa em [109] o termo *causalidade*.

como um registro em múltiplos instantes de tempo da evolução de um sistema físico (o sinal inicial) submetido um processo de difusão. Tal óptica abre espaço para interpretações mais fisicamente motivadas dos espaços-escala, passíveis de análise à luz de termodinâmica, física estatística e, finalmente, teoria da informação. É sobre este solo que prosseguiremos o Trabalho e detalharemos mais os atributos da equação de difusão, caminhando de modo natural a generalizações que nos levarão à Equação de Perona-Malik [170].

4.3.1 Difusão linear: características básicas

O problema que nos dispomos a analisar agora corresponde à Equação de difusão em uma dimensão espacial e com condições de fronteira homogêneas, mostrado na Equação (4.25):

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) &= c^2 \partial_{xx} u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \partial_x u(0, t) &= 0 \\ \partial_x u(L, t) &= 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

em que $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Na medida em que se mostrar necessário, estenderemos as análises a dimensões superiores. Quanto às condições de fronteira, ficará claro ao longo dos desenvolvimentos seguintes como estas proporcionam propriedades interessantes¹⁰ – inclusive no caso numérico –, além de facilitar certas passagens.

Antes de detalhar certos aspectos do PVIF (4.25), lembremos que ele modeliza um fenômeno físico *irreversível*. Desse modo, seguindo uma intuição inspirada em termodinâmica, deve soar razoável que a energia do sistema representado por u decresça ao longo do tempo e que a *entropia* aumente. De fato, o sistema em análise é dissipativo, no sentido que

$$E(t) \equiv \langle u, u \rangle (t) = \int_0^L u^2(x, t) dx \quad (4.26)$$

é uma função decrescente a limitada superiormente por $E(0) = \langle f, f \rangle$. Para ver isso, desenvolve-se a derivada temporal da energia explicitamente,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \int_0^L \partial_t [u^2(x, t)] dx \\ &= -2c^2 \|\partial_x u\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A Equação (4.27) é facilmente obtida por integração por partes e aplicação das condições de fronteira dadas por (4.25). Ela mostra que a variação temporal da energia do sistema é negativa, conforme conjecturado acima.

A dissipação da energia nos indica que o sistema evolui para uma configuração estacionária. Interpretando este processo à luz da termodinâmica clássica, somos levados a cogitar uma variação positiva da entropia ao longo da evolução. Entretanto, é necessário cautela no uso de tais analogias, já que o processo modelizado pelo PVIF (4.25) não pertence à termodinâmica de equilíbrio. Corre-se um risco, portanto, de se seguir uma intuição legítima num cenário completamente inadequado.

De um ponto de vista formal, a questão da entropia no PVIF (4.25) envolve technicalidades profundas segundo diversos pontos de vista, como por exemplo nas áreas de equações diferenciais [49], física computacional [16, 17] e análise numérica [205]. Nestes cenários a entropia não possui necessariamente a mesma interpretação daquela associada à termodinâmica, mas está ligada – não necessariamente de modo direto – a algum

¹⁰Deve-se notar, entretanto, que a imposição de condições de fronteira ao problema de difusão faz com que o aparato das Séries de Fourier seja necessário, ao passo que na Teoria dos Espaços-Escala muitos resultados partem da premissa que u é avaliada sobre toda a reta, de modo que a Transformada de Fourier é fundamental. A própria relação com os núcleos Gaussianos depende disso. Entretanto, como estamos interessados nas propriedades comuns aos cenários discreto e contínuo, não é possível desconsiderar a limitação do suporte de u .

traço de irreversibilidade. Neste ponto de nosso Trabalho, tais conceitos não se fazem estritamente necessários, de forma que abordaremos a questão da entropia de modo análogo à da energia; isto é, trataremos de um funcional $S(t)$ cujo argumento é o sinal $u(x, t) > 0$. A suposição acerca da positividade de u é razoável tanto de um ponto de vista físico, em que u poderia ser encarado como uma função densidade de probabilidade, quanto num cenário de Teoria de Sinais, já que podemos sempre alterar o *offset* de um sinal para mantê-lo estritamente positivo.

Começemos definindo a entropia por

$$S(t) \equiv - \int_0^L u(x, t) \ln[u(x, t)] dx. \quad (4.28)$$

Queremos avaliar a variação temporal de $S(t)$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= - \int_0^L \partial_t [u(x, t) \ln[u(x, t)]] dx \\ &= -c^2 \int_0^L \partial_{xx} u(x, t) \{1 + \ln[u(x, t)]\} dx \\ &= c^2 \int_0^L \frac{[\partial_x u(x, t)]^2}{u(x, t)} dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

A Equação (4.29) foi obtida substituindo-se $\partial_t u$ por $c^2 \partial_{xx} u$ dentro da integral e, após integração por partes, aplicação das condições de fronteira. Para simplificar (4.29) podemos fazer a substituição $v(x, t) = 2\sqrt{u(x, t)}$. Com isso obtemos, finalmente, que

$$\frac{dS}{dt}(t) = c^2 \|\partial_x v\|^2 \geq 0. \quad (4.30)$$

A Equação (4.30) mostra que, indo de acordo com a intuição clássico-termodinâmica, o PVIF (4.25) leva a uma degradação do sistema, no sentido de que o estado $u(x, t_1)$ não pode ser recuperado a partir de $u(x, t_2)$, com $t_2 > t_1$. Essa irreversibilidade impõe uma seta do tempo ao sistema e, no contexto de espaços-escala Gaussiano, tem importância capital, já que é responsável pela *causalidade*.

Além da questão de energia e entropia, podemos nos perguntar sobre as estatísticas de u , tais como média e variância. É simples mostrar que o valor médio $\langle u \rangle(t)$ não se altera ao longo da evolução. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle u \rangle}{dt}(t) &= \frac{\int_0^L \partial_t u(x, t) dx}{\int_0^L dx} \\ &= \frac{c^2}{L} \int_0^L \partial_{xx} u(x, t) dx \\ &= \frac{c^2}{L} \partial_x u(x, y)|_0^L = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que o último resultado é devido às condições homogêneas de fronteira. Usando esta invariância de $\langle u \rangle$ mostra-se facilmente que a variância σ^2 decresce no tempo, isto é,

$$\frac{d\sigma^2}{dt}(t) \equiv \langle [u - \langle u \rangle]^2 \rangle(t) \leq 0. \quad (4.32)$$

Em síntese, os desenvolvimentos acima mostram que a difusão linear equipada com condições homogêneas de Neumann corresponde a um processo dissipativo, visto que a energia decresce com o tempo. Mais

do que isso, esta degradação é irreversível, no sentido em que a entropia varia positivamente ao longo do processo, caminhando para uma maximização¹¹. Por fim, ao mostrar que o valor médio permanece constante ao longo da evolução, ao passo que a variância σ^2 decresce, mostramos indiretamente que o “destino” do sistema representado por u é um estado estacionário constante, isto é, $u(x, t \rightarrow \infty) \propto \langle f \rangle$, $\forall x \in [0, L]$. Felizmente, o PVIF (4.25) não reservou surpresas na análise, de tal forma que a já comentada intuição clássico-termodinâmica se mostrou acertada.

Antes de prosseguirmos, cabe ressaltar que a conclusão acima possui uma conexão importante com a Teoria da Informação, a ser muito usada neste Trabalho: ao dizer que o sistema analisado marcha para um estado de uniformidade perpétua, e considerando este mesmo sinal como uma distribuição, estamos afirmando que qualquer *caractere* $x \in [0, L]$ é equiprovável. Com isso, há mais incerteza no resultado de um experimento aleatório cujo resultado seja a escolha de um dos caracteres e sua posterior transmissão por meio de um canal de comunicação [190].

Outra observação que deve ser feita é que o PVIF (4.25) tem solução explícita, dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \left[\frac{n\pi}{L} x \right] \exp \left[- \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right], \quad (4.33)$$

em que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ são os coeficientes de Fourier de $u(x, 0) = f(x)$. A solução apresentada na Equação (4.33) poderia ter sido usada diretamente para as avaliações sobre energia, entropia, valor médio etc. Por exemplo, é simples mostrar que energia e valor médio do sinal são dados explicitamente por

$$E(t) = \frac{L}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \exp \left[-2 \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right] \quad \text{e} \quad \langle u \rangle (t) = \langle f \rangle. \quad (4.34)$$

A razão para não se conduzir as análises explicitamente, obtendo por exemplo $E(t)$ e $\langle u \rangle (t)$ tais como mostradas na Equação (4.34), ficará mais clara adiante, quando métodos numéricos aproximativos do PVIF (4.25) forem discutidos.

4.4 Difusão não-linear: a Equação de Perona-Malik

4.4.1 Críticas ao espaço-escala linear

Se por um lado a formulação do espaço-escala Gaussiano por meio da Equação do calor traz à descrição multiescala uma intuição termodinâmica, é justamente este caráter físico que introduz um elemento ausente na teoria inicial: *irreversibilidade*. De fato, segundo a sistemática de Witkin, em que vigora o princípio de localização (Def. 10, p. 47), podemos migrar de escalas tanto quanto queiramos, visto que as etapas de pior resolução são *construídas*, e não *medidas*. Em outras palavras, não há impedimento algum a seguirmos sobre as curvas $\Phi_\sigma[u](x) = 0$ até $\sigma = 0$.

O cenário fica um pouco mais complexo quando se pretende usar o espaço-escala para representar o *conteúdo semântico*¹² relevante do sinal [170]. Tal como ilustrado na Figura 4.3-(b), os extremos se movem ao longo da evolução em σ , de modo que caso observássemos um sinal $u_{\sigma'}(x)$ em que $\sigma' \neq 0$, não teríamos acesso às posições reais dos eventos semânticos de interesse, já nesta escala não há garantia alguma de que os extremos detectados estejam localizados em suas posições originais. Face a esta limitação observacional dos espaços-escala Gaussianos, Perona e Malik conjecturam [170] que um sistema capaz de recuperar o conteúdo semanticamente relevante de um sinal ao longo de quaisquer escalas deve ser tal que valham três critérios fundamentais, dados pela

¹¹Note que para tanto, S deve ser convexa.

¹²Em imagens: bordas, junções e descontinuidades em geral. Em sinais 1-D a noção de junção não faz sentido, de modo que os elementos “semânticos” correspondem a quaisquer descontinuidades.

DEFINIÇÃO 11: (CRITÉRIOS DE PERONA E MALIK) [170]

- i. **Causalidade:** de maneira absolutamente idêntica às abordagens de Witkin e Koenderink, extremos observados sobre uma mesma curva $\partial_{xx}\Phi_\sigma[u](x) = 0$, mas em diferentes escalas, têm origem em um mesmo evento;
- ii. **Localização imediata:** a posição x de um evento observado em uma escala $\sigma > 0$, bem como sua definição estrutural, devem ser bem-definidas (ou *resolvidas*), coincidindo com os eventos (ou estruturas) semanticamente relevantes do sinal; e
- iii. **Homogeneização seletiva:** em quaisquer escalas, regiões delimitadas por eventos semanticamente relevantes devem ser suavizadas.

Existem algumas direções iniciais que podem ser tomadas com vistas à implementação de um espaço-escala estruturado segundo os Critérios de Perona-Malik, dados pela Definição (11). Poderíamos, caso não quiséssemos violar qualquer traço ligado à linearidade, considerar expoentes $\alpha \neq 2$ na Equação (4.18). Entretanto, podemos adotar mudanças muito mais radicais, abdicando da linearidade do sistema. De fato, este é um dos axiomas de Iijima e Witkin, mas sua razão de ser parece muito mais de caráter simplificador do que, de fato, um requisito. O próprio Koenderink pondera este ponto [109]. Foi esta “janela de oportunidade” a explorada por Perona e Malik em [170]: segundo estes, a chave para o aperfeiçoamento dos espaços-escala reside na difusibilidade.

Ao invés de explicitar já a Equação de Perona-Malik, tal como estes autores fizeram em seu trabalho seminal [170], iniciaremos a construção da difusão não-linear através de uma abordagem variacional, feita a seguir. Este autor acredita que tal rota, um pouco mais longa e indireta, traz consigo *insights* úteis sobre o porquê de adotar uma flexibilização justamente sobre a difusibilidade.

4.4.2 Aspectos variacionais

Conforme dito acima, a solução proposta por Perona e Malik em [170] foi colocada em forma de EDP, explicitando tanto quanto possível o comportamento da difusibilidade $c(\cdot, \cdot)$. Em adição, fica claro agora que os atributos do processo evolutivo dependem basicamente da capacidade da EPM de se descolar de uma difusão clássica, linear. Do ponto de vista teórico, contudo, sobram perguntas sobre os atributos da EPM, inclusive sobre seus métodos numéricos. Nesse sentido, You, Tannenbaum e Kaveh apresentaram em 1996 [239] uma contribuição fundamental para compreensão acerca do *comportamento* de difusões anisotrópicas, incluindo naturalmente o processo de Perona-Malik. A abordagem de You *et al.* é baseada em métodos variacionais e será apresentada aqui de modo particularizado para uma única dimensão espacial.

Consideraremos que o sinal $u(x)$ possui suporte compacto $x \in I = [0, L]$. Estamos interessados em investigar o comportamento ótimo da seguinte energia:

$$J[u] = \int_I \tilde{c}(|u'(x)|) dx. \quad (4.35)$$

Note que, a depender de $\tilde{c}(\cdot)$, o funcional $J[u]$ pode operar como uma medida de regularidade espacial de u . De fato, caso $\tilde{c}(\cdot)$ seja positiva monotonicamente crescente, quão mais suave for o sinal, menor será J . Por outro lado, se u for um sinal de variações intensas, J tenderá a assumir maiores valores. De todo modo, não formaremos – ainda – juízo sobre a lei de formação de $\tilde{c}(\cdot)$. Suporemos apenas de antemão que $\tilde{c}(|u'|) \geq 0$ e $\tilde{c}'(|u'|) > 0$. A primeira destas condições garante a positividade de J , ao passo que a segunda será importante para a determinação do comportamento da EPM.

Tentaremos, inspirados por You *et al.* [239] e Aubert e Kornprobst [8], fazer com que alguns atributos necessários a \tilde{c} sejam obtidos ao longo dos desenvolvimentos. Tal estratégia mostra de modo profundo a “construção” da EPM a partir de preceitos clássico-mecânicos. A estratégia clássica para se buscar os pontos de extremo de $J[\cdot]$ corresponde em se usar a Equação de Euler-Lagrange [8, 13] ou, mais fundamentalmente,

investigar as condições em que a derivada de Gâteaux [8, 13, 239]

$$\delta J(u; h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{J[u + \lambda h] - J[u]}{\lambda} \quad (4.36)$$

se anula. Da Equação (4.35) e da discussão sobre o papel deste funcional, fica claro que há uma dependência exclusiva de $\tilde{c}(\cdot)$ sobre u' , de forma que podemos representar $\tilde{c}(u + \lambda h)$ por sua série de Taylor:

$$\tilde{c}(|u' + \lambda h'|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda h')^n}{n!} \tilde{c}^{(n)}(|u'|), \quad (4.37)$$

em que a dependência de u e h sobre x foi suprimida. Expandindo $\tilde{c}(u + \lambda h)$ em primeira ordem na Equação (4.36) obtemos

$$\delta J(u; h) = \int_I h' \tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} dx, \quad (4.38)$$

em que foi usado o fato de que

$$\frac{d}{du'} [\tilde{c}(|u'|)] = \tilde{c}'(|u'|) \frac{u'}{|u'|}. \quad (4.39)$$

O passo seguinte consiste em se igualar δJ dado pela Equação (4.38) a zero, em busca dos pontos de extremo, isto é,

$$\delta J(u; h) = \int_I h' \tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} dx = 0. \quad (4.40)$$

Contudo, há de se considerar que a variação δJ não é bem-definida para os pontos de $I_0 \subset I = \{x \in I; |u'(x)| = 0\}$. De fato, uma estratégia simples consiste em definir $|u'(x)|^{-1} u'(x) = 0$ para os pontos $x \in I_0$ em que $u'(x) = 0$ [239]. Embora não retornemos mais a essa questão da indeterminação, deve-se notar que é possível obter uma primeira condição sobre a função $\tilde{c}(\cdot)$: ao escolhermos h tal que $h'(x) \neq 0$ para $x \in I_0$, teremos

$$\tilde{c}'(0) \int_{I_0} h'(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}'(0) = 0. \quad (4.41)$$

De volta ao problema original, deve-se notar que podemos reescrever a Equação (4.38) como

$$\delta J(u; h) = \int_I \frac{d}{dx} \left[h \tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} \right] dx - \int_I h \frac{d}{dx} \left[\tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} \right] dx. \quad (4.42)$$

Para tanto, basta desenvolver a derivada do produto $h \tilde{c}' u' / |u'|$. O primeiro termo da Equação (4.42) se anulará se adotarmos as condições de fronteira

$$u'(0) = u'(L) = 0. \quad (4.43)$$

Agora, usando (4.43) em (4.42), obtemos finalmente que

$$\delta J(u; h) = - \int_I h \frac{d}{dx} \left[\tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} \right] dx. \quad (4.44)$$

Deve-se notar que poderíamos ter abordado o problema de mimizar δJ sob uma óptica ligeiramente diferente da desenvolvida acima: ao invés de determinar as condições em que a variação δJ se anula, poderíamos

identificar a *direção* em que isto ocorre. De fato, observando a Equação (4.42), identificamos uma derivada direcional¹³ de J com relação a $h(x)$. Desse modo, temos

$$\frac{dE}{du} = -\frac{d}{dx} \left[\tilde{c}' \frac{u'}{|u'|} \right]. \quad (4.45)$$

A vantagem em considerarmos a derivada direcional mostrada na Equação (4.45) é que podemos agora recorrer a uma intuição geométrica para o desenvolvimento. De fato, se a idéia é mimizar J , devemos seguir a direção em que dE/du se anula, mas no sentido inverso àquele que leva à maximização do funcional. Desse modo, a *marcha no tempo* que descreve a minimização do funcional considerado é dada por [239, 8]

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x \left[\frac{\tilde{c}'(|\partial_x u|)}{|\partial_x u|} \partial_x u \right], \quad (4.46)$$

que abrange a EPM, caso a difusibilidade

$$c(|\partial_x u|) \equiv \frac{\tilde{c}'(|\partial_x u|)}{|\partial_x u|}. \quad (4.47)$$

obedeça aos critérios específicos do processo original proposto por Perona e Malik [170]. Em outras palavras, a Equação de Perona-Malik é dada por

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) &= \partial_x [c(|\partial_x u(x, t)|) \partial_x u(x, t)] \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \partial_x u(0, t) &= 0 \\ \partial_x u(L, t) &= 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

em que, mais uma vez, condições homogêneas de fronteira foram colocadas com vistas à manifestação de propriedades desejáveis, a serem discutidas mais adiante.

Os desenvolvimentos anteriores mostram que, de modo geral, é possível obter uma equação de difusão mais geral que a linear partindo-se de princípios variacionais. Isto é, vemos agora que a EPM pertence a uma família de processos que têm em comum a minimização do funcional $J[u]$ dado pela Equação (4.35). Claramente, a definição do processo como uma “difusão de Perona-Malik” reside no comportamento da função $c(\cdot)$ ou, equivalentemente, de $\tilde{c}(\cdot)$. No início dos desenvolvimentos colocamos as condições de positividade e não-negatividade para \tilde{c}' e \tilde{c} , respectivamente. Para além da positividade de J , estas condições nos permitem obter uma informação adicional sobre a EPM, acerca de seu comportamento estacionário. De fato, poderíamos apresentar a seguinte questão:

Qual o “destino” termodinâmico de um sistema que evolui segundo uma difusão não-linear modelizada pela Equação de Perona-Malik?

Colocando de outro modo: qual é o estado de equilíbrio do sistema submetido à EPM? Vimos para o caso linear que:

- o valor médio $\langle u \rangle$ se mantém inalterado ao longo do processo;
- a variância de u decresce ao longo do processo;
- a energia E do sistema é minimizada; e
- a entropia S do sistema é maximizada.

Vejamos o que ocorre com estas grandezas na difusão não-linear. Antes de particularizar a análise à EPM, vejamos qual o estado de equilíbrio em termos da energia J . No espírito dos desenvolvimentos anteriores, e de modo análogo ao feito por You *et al.* [239], queremos avaliar a variação temporal de J , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{dJ}{d\lambda} [u + \lambda h] \Big|_{\substack{h=-\partial_t u \\ \lambda=0}} = - \int_I \partial_x [\tilde{c}'(|\partial_x u|) \partial_x u] \partial_x [\tilde{c}'(|\partial_x u|) \partial_x u] dx \\ &= - \|\partial_x [\tilde{c}'(|\partial_x u|) \partial_x u]\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

¹³Há aqui certo abuso de linguagem, pois J é função de uma variável. Entretanto, a Equação (4.44) é coerente com a definição de derivada direcional do funcional em questão [13].

O resultado mostrado na Equação (4.49) mostra que a energia dos sistemas considerados se dissipa no tempo. Uma vez que a EPM pode ser tomada como pertencente à esta classe, vemos então que a energia do sinal u caminha para um mínimo, de modo análogo ao caso linear. De fato, para a EPM temos

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}(t) &= 2 \int_0^L u \partial_t u dx \\ &= -2 \int_0^L c(|\partial_x u|) \partial_x u \partial_x u dx \\ &= -2 \langle \partial_x u, \partial_x u \rangle_c \leq 0\end{aligned}\tag{4.50}$$

O último passo na Equação (4.50) parte do fato de que a função $c(\cdot)$ é não-negativa, de modo que atua como um peso no produto interno em questão, simbolizado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$.

Em sequência, é simples verificar que o valor médio $\langle u \rangle$ se conserva, pois:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle u \rangle}{dt}(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L \partial_t u(x, t) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \partial_x [c(|\partial_x u|) \partial_x u] dx \\ &= \frac{1}{L} c(|\partial_x u|) \partial_x u \Big|_0^L = 0\end{aligned}\tag{4.51}$$

Das Equações (4.50) e (4.51) pode-se mostrar também que a variância $\sigma^2(t)$ decresce no tempo para a EPM. Vejamos, finalmente, a questão da entropia. Para esta, o desenvolvimento é bastante semelhante ao caso linear (vide Eq. (4.29)):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}(t) &= - \int_0^L \partial_t u \{1 + \ln[u]\} dx \\ &= - \int_0^L \partial_x [c(|\partial_x u|) \partial_x u] \{1 + \ln[u]\} dx \\ &= \int_0^L c(|\partial_x u|) (\partial_x u)^2 dx \geq 0,\end{aligned}\tag{4.52}$$

em que usamos novamente a substituição $v(x, t) = 2\sqrt{u(x, t)}$ e a não-negatividade de $c(\cdot)$.

Das Equações (4.49) – (4.52), juntamente com a constatação acerca do decréscimo da variância $\sigma^2(t)$, vemos que o “destino termodinâmico” de um sistema sujeito à difusão não-linear regida pela EPM é semelhante àquele imposto pela caso linear: minimização da energia; marcha a um estado estacionário completamente indefinido, caracterizado por entradas constantes $u(x, t \rightarrow \infty) = \langle u \rangle$ e maximização da entropia. Surge então a questão sobre o porque da EPM ser tão mais eficiente que a difusão linear no que concerne à remoção de ruídos concomitantemente à manutenção (ou mesmo aperfeiçoamento) de detalhes semanticamente relevantes, como bordas.

4.4.3 Difusibilidade negativa e mau-condicionamento

É importante notar que os desenvolvimentos anteriores demandam que $u(x, t)$ seja minimamente suave, visto que seu gradiente (peça fundamental na teoria) precisa estar bem-definido. Entretanto, supor u “suficientemente” suave implica em admitirmos apenas sinais sem conteúdo semântico relevante, já que discontinuidades não fazem sentido neste contexto. Um desenvolvimento mais convincente exige que passemos a

admitir saltos em u , isto é, que os sinais sejam tomados como distribuições¹⁴. Obviamente, as deduções se tornam razoavelmente mais complexas, embora as idéias sejam semelhantes às do caso suave [239]. No que diz respeito à “superioridade” da EPM em conservar bordas, o elemento principal da análise reside, como é de se esperar, na função $c(\cdot)$. Elaboremos abaixo melhor este ponto.

A abordagem variacional exposta acima impõe alguns vínculos sobre a difusibilidade $c(\cdot)$ para que possamos obter a EPM. Em suma, vimos que as seguintes condições são necessárias:

$$\begin{cases} c(\zeta) & \geq 0 \\ c'(\zeta) & > 0, \\ c'(0) & = 0 \end{cases}, \quad (4.53)$$

em que usamos ζ como variável muda. Por outro lado, desenvolvendo a derivada espacial na EPM dada pela Equação (4.48), obtemos

$$\partial_t u(x, t) = \left[c'(|\partial_x u|) \frac{(\partial_x u)^2}{|\partial_x u|} + c(|\partial_x u|) \right] \partial_{xx} u(x, t). \quad (4.54)$$

Note-se que a Equação (4.54) é simplesmente uma equação de difusão cuja difusibilidade é dada por

$$b(\zeta) = \zeta c'(\zeta) + c(\zeta), \quad \text{com } \zeta \in \mathbb{R}^+. \quad (4.55)$$

De acordo com os requisitos mostrados na Equação (4.53), teremos sempre uma difusão não-linear *direta*, visto que $b(\zeta) \geq 0 \forall \zeta \in \mathbb{R}^+$. Com esse mecanismo, somos capazes de modular a intensidade da difusão em função da magnitude $\zeta = |\partial_x u(x, t)|$. Tal modulação seria aplicada à manutenção de bordas/variações abruptas, e dependeria basicamente do valor de $b(\zeta)$.

Veja que dentro cenário exposto, a “termodinâmica” do processo é bem-comportada: não há violação alguma da minimização (maximização) da energia (entropia). Perona e Malik [170] perceberam que poderiam explorar outras propriedades do processo de difusão, mas no sentido *inverso*. A motivação é simples: se a difusão direta leva as componentes do sinal a um estado de máxima homogeneidade conforme o tempo é incrementado, poderia-se conjecturar que evoluir o sistema em um esquema de “tempo reverso” faria com que uma região homogeneizada do sinal pudesse ser aperfeiçoada. Em outras palavras, poderíamos controlar também o *sinal* do coeficiente de difusão $b(\zeta)$ dado pela Equação (4.55). De fato, ao estabelecer $b(\zeta) > 0$, garantimos uma evolução regida por uma EDP parabólica [95, 8], que goza das propriedades já mostradas acima. Por outro lado, nos casos em que $b(\zeta) < 0$, lidaríamos com uma EDP hiperbólica [95, 8], que sabidamente produz e propaga descontinuidades na solução. É exatamente esta possibilidade de propagação (ou manutenção) de descontinuidades na solução que faz a EPM ser capaz de conservar regiões de borda em imagens e sinais.

Como visto, o ingrediente para a construção da EPM segundo o desenvolvimento variacional apresentado consiste em se violar uma das condições impostas *a priori* no problema. De acordo com o exposto, fica claro que devemos flexibilizar a condição de positividade sobre $c'(\zeta)$. As duas funções propostas originalmente por Perona e Malik em [170] – de perfis Gaussiano e Lorentziano, respectivamente – cumprem com esse novo requisito:

$$c_G(|\partial_x u|) \equiv \exp \left[- \left(\frac{|\partial_x u|}{K} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad c_L(|\partial_x u|) \equiv \frac{1}{1 + \left(\frac{|\partial_x u|}{K} \right)^2}. \quad (4.56)$$

Deve-se notar na Equação (4.56) a presença do parâmetro K , que desempenha talvez o papel mais importante na implementação da EPM. É uma questão simples de cálculo notar que os fluxos $\zeta_{c_L}(\zeta)$ e $\zeta_{c_G}(\zeta)$ têm ponto de máximo em $\zeta = K/\sqrt{2}$. Isto é, para $|\partial_x u| < K/\sqrt{2}$ a EPM opera uma difusão direta (regime parabólico), em que as entradas do sinal evoluem rumo à homogeneização. Por outro lado, se $\zeta > K/\sqrt{2}$, toma lugar uma difusão inversa (regime hiperbólico), que tenderá a manter ou até mesmo aperfeiçoar descontinuidades detectadas por $|\partial_x u(x, t)|$. Em outras palavras, o parâmetro K desempenha um papel de *limiar de separação entre regimes*. De um ponto de vista numérico, a difícil determinação (semi)automática deste limiar constitui o principal empecilho para uma utilização mais consistente da EPM. De todo modo, os resultados práticos são impressionantes, tal como os mostrados na Figura 4.4.

¹⁴Em alguma medida, o fato de falarmos em ruído já demandaria tal suposição.

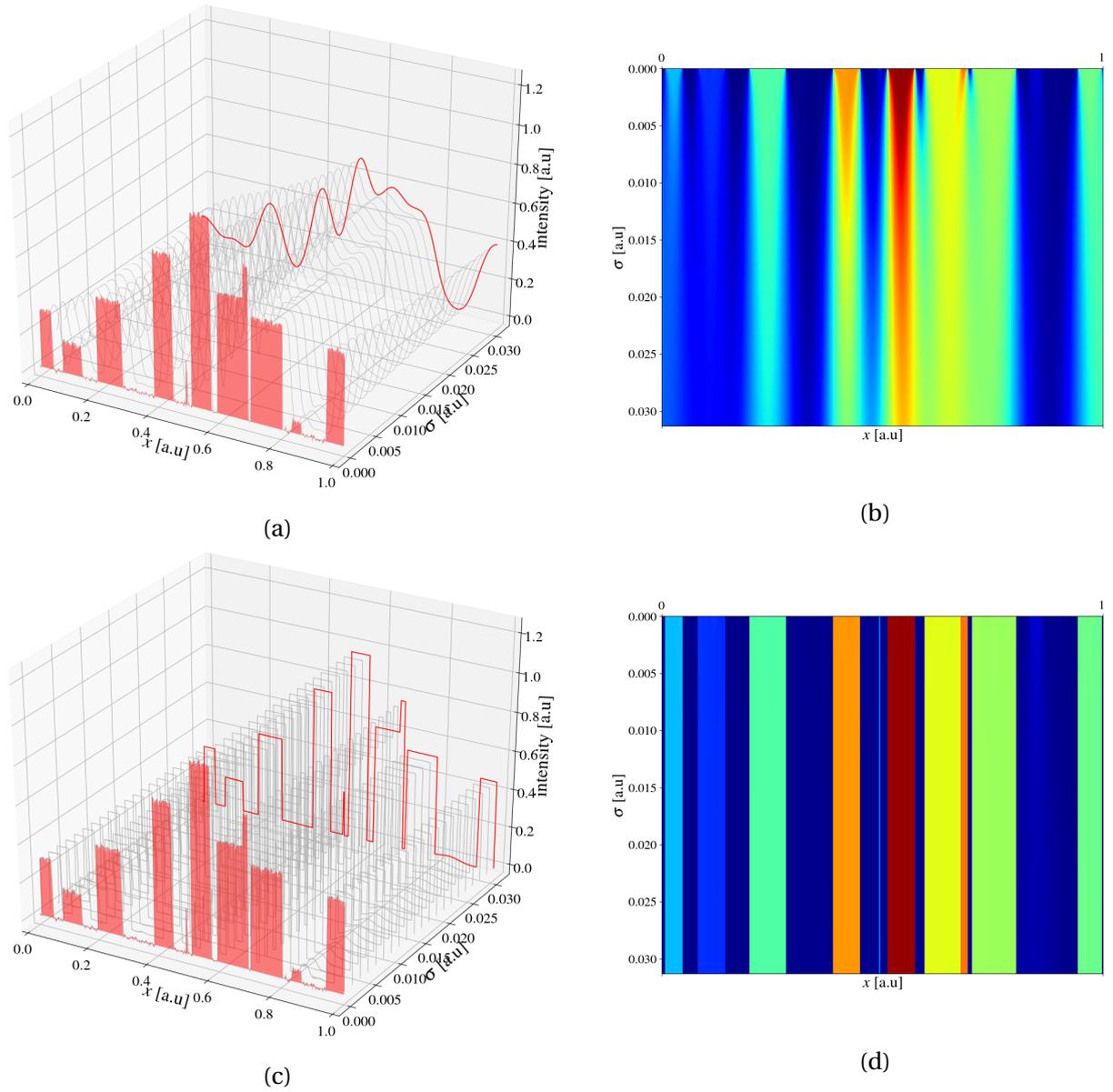


Figura 4.4: Comparação entre difusão linear e não-linear, segundo a Equação de Perona-Malik. Em (a) é mostrado um sinal sintético (curva vermelha preenchida) decomposto em versões de menor resolução, obtidas por convoluções com núcleos Gaussianos, cuja escala σ é sucessivamente incrementada. Em (b) é mostrada a imagem do espaço-escala deste sinal projetada sobre o plano para o caso linear. Por sua vez, em (c) e (d) são mostradas a decomposição do sinal segundo a Equação de Perona-Malik do mesmo sinal em (a), bem como sua projeção da superfície do espaço-escala. É evidente a superioridade da EPM frente ao caso linear, no que tange à remoção de ruídos e manutenção dos extremos, que nesta teoria correspondem aos eventos semanticamente relevantes.

4.5 Entropia revisitada: leis de conservação

Neste ponto do trabalho revisitamos a questão da entropia, tratando minimamente de sua aplicabilidade em um contexto de EDPs. Mais particularmente, em leis de conservação em uma única dimensão espacial [115, 205]:

$$\begin{cases} \partial_t u(x) = -\partial_x F(u); & (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (4.57)$$

em que $F(\cdot)$ é a função fluxo [115, 116, 205, 49, 50] e $f(\cdot)$ é o dado inicial. O nome lei de conservação vem do fato de que ao integrar a Equação (4.57) sobre um intervalo $I = [0, L]$, chega-se a

$$\frac{d}{dt} \left[\int_I u(x) dx \right] = -F(u)|_I, \quad (4.58)$$

que é simplesmente a representação da conservação de u , que passa a ser considerada como uma densidade qualquer. É possível incorporar processos de difusão à Equação (4.57) se adicionarmos a esta o fluxo difusivo $-c\partial_x u(x, t)$, com $c > 0$. Obtemos assim uma equação de advecção-difusão [119]:

$$\begin{cases} \partial_t u &= -\partial_x [F(u) - c\partial_x u] \\ u(x, 0) &= f(x). \end{cases} \quad (4.59)$$

Note-se que a lei de conservação expressa pela Equação (4.57) pode ser tomada como um limite do processo de advecção-difusão representado pela Equação (4.59) à medida em que a difusibilidade c tender a zero. Para além do caráter físico inerente a esta possibilidade, tal estratégia é empregada em matemática para se determinar soluções de EDPs de primeira ordem não-lineares: eis o método da viscosidade evanescente [8, 50, 13].

Conforme apontado por Lax em [115, 116], o PVI associado à lei de conservação dada pela Equação (4.57) apresenta dificuldades técnicas importantes quando os dados iniciais possuem descontinuidades. De fato, trata-se de um sistema hiperbólico, que transporta os dados iniciais domínio adentro segundo trajetórias definidas pelas curvas características associadas [39]. Nesse sentido, a adoção de soluções mais gerais, ditas *fracas* [115, 116, 49, 50, 101, 102] ocorre com vistas a garantir a existência de soluções para todo $t > 0$. Contudo, em contrapartida à garantia da existência de soluções fracas, no sentido de distribuições, perde-se a unicidade da solução em relação aos dados iniciais [115, 116].

A adoção de uma solução fraca para a lei de conservação considerada pode ser interpretada como um “retorno” à formulação integral expressa na Equação (4.58), de caráter mais físico. De um ponto de vista formal, como é de se esperar em uma abordagem via distribuições [7], a diferenciabilidade de u pode agora ser relaxada. Este apelo a uma solução fisicamente plausível é usado por Lax [115, 116] como critério de definição da solução *relevante* para o problema em questão. Em outras palavras, face à pluralidade de soluções fracas disponíveis para a lei de conservação hiperbólica expressa pela Equação (4.57), a solução relevante é escolhida dentre aquelas que correspondem ao limite de $\epsilon \rightarrow 0$ do problema de advecção-difusão auxiliar [115, 116, 49]

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon(x, t) &= -\partial_x F[u^\epsilon(x, t)] + \epsilon \partial_{xx} u^\epsilon(x, t) \\ u^\epsilon(x, 0) &= f(x). \end{cases} \quad (4.60)$$

A introdução do fluxo difusivo $\epsilon \partial_{xx} u^\epsilon$ torna o problema parabólico [119, 115], e corresponde precisamente ao método da viscosidade evanescente citado acima. Do ponto de vista físico, verifica-se portanto que há uma carga de regularização no problema.

Nos importa aqui um desdobramento fundamental decorrente do problema auxiliar expresso na Equação (4.60), relacionado finalmente à figura da entropia. Para tanto, precisamos da

DEFINIÇÃO 12: (PAR ENTROPIA / FLUXO DE ENTROPIA) [116, 49, 50, 102] —————

O par de funcionais (Φ, Ψ) de $u(x)$ é chamado par entropia/fluxo de entropia se $\Phi[u]$ é convexo e Ψ for dado por

$$\Psi'[u] \equiv F'[u]\Phi'[u], \quad (4.61)$$

em que $F[\cdot]$ é um fluxo oriundo de lei de conservação expressa pela Equação (4.59).

A existência do par (Φ, Ψ) apresentado na Definição (12) se justifica ao se desenvolver o problema de

adveção-difusão auxiliar com estes funcionais [49, 50]:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Phi[u^\epsilon] + \partial_x \Psi[u^\epsilon] &= \Phi'[u^\epsilon] \partial_t u^\epsilon + \Psi'[u^\epsilon] \partial_x u^\epsilon \\
&= \Phi'[u^\epsilon] \{ -\partial_x F[u^\epsilon] + \epsilon \partial_{xx} u^\epsilon \} + \Phi'[u^\epsilon] F'[u^\epsilon] \partial_x u^\epsilon \\
&= \epsilon \partial_x [\Phi'[u^\epsilon] \partial_x u^\epsilon] - \epsilon \Phi''[u^\epsilon] |\partial_x u^\epsilon|^2 \\
&\leq \epsilon \partial_x [\Phi'[u^\epsilon] \partial_x u^\epsilon],
\end{aligned} \tag{4.62}$$

em que a penúltima passagem é obtida desenvolvendo-se $\partial_x [\Phi'[u^\epsilon] \partial_x u^\epsilon]$ e a desigualdade na última expressão se sustenta pois $\Phi[\cdot]$ é convexa, por definição (logo, $\Phi'' \geq 0$). No limite de $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos finalmente a *condição de entropia* [115, 116] associada à lei de conservação expressa na Equação (4.57):

$$\partial_t \Phi[u] + \partial_x \Psi[u] \leq 0. \tag{4.63}$$

Partindo da forma conservativa da Equação de Euler para um gás compressível, Lax ([116], p. 161–164) mostra que a condição de entropia expressa na Equação (4.63) está associada, de fato, ao caráter irreversível do fluxo hidrodinâmico no sistema, sendo caracterizado por um aumento gradativo da entropia *termodinâmica*. Seguindo uma rota mais formal, Evans ([50], p. 122–125) também mostra que a condição de entropia expressa pela Equação (4.63) confere à lei de conservação associada um caráter irreversível, no sentido termodinâmico.

Amparado por um resultado técnico associado à variação total de $u(x, t)$ ao longo da evolução regida por uma lei de conservação hiperbólica, Lax ([116], p. 164) traça um paralelo entre o nível de detalhamento de $u(x, t)$ – representado por sua variação total – e seu nível de *informação*. Segundo este paralelo, observa-se em leis de conservação da forma expressa (4.57) um decréscimo ao longo do tempo da variação total de $u(x, t)$, expressa por [55, 8, 119]

$$TV(u)(t) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N_P-1} |u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)| \right\}, \tag{4.64}$$

em que o supremo é tomado sobre todas as N_P partições do domínio espacial de u [119]. Se u for diferenciável, $TV(u)$ pode ser expressa também por [119, 8]

$$TV(u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x u(x, t)| dx. \tag{4.65}$$

Portanto, Lax [116] entende a perda de informação de uma fonte como a perda dos detalhes estruturais de sua distribuição correspondente, u .

Embora intuitiva, deve-se notar que o conceito de perda de informação de Lax não diz respeito a resolução, mas sim a amplitude / intensidade do campo escalar $u(x, t)$. De todo modo, há elementos muito úteis nessa interpretação, dos quais faremos uso neste Trabalho. Listemos dois destes elementos:

- i. **Viscosidade e dissipação.** Embora tenhamos tratado de leis de conservação hiperbólicas e espaços-escala sejam modelizados por EDPs do calor/difusão, a introdução de um termo de viscosidade nas referidas leis torna o problema parabólico. Mesmo que no estado final ($\epsilon = 0, t \rightarrow \infty$) o caráter parabólico cesse, nos importa que a “rota” termodinâmica que leva ao estado de equilíbrio conta sempre com o elemento difusivo; e
- ii. **Convexidade do funcional Φ .** A condição entrópica expressa na Equação (4.63) depende fundamentalmente da propriedade de convexidade do funcional $\Phi[u]$. Tal dependência encontra análogos tanto na formulação axiomática da termodinâmica [27] quanto nas construções original [190] e puramente probabilística [106] da teoria da informação.

O próprio Lax argumenta [115, 116] que a abordagem via viscosidade evanescente não é única para se chegar à condição entrópica (4.63): uma outra possibilidade, de interesse especial neste trabalho, consiste na *discretização* das derivadas envolvidas, de forma que migra-se a análise de uma EDP para uma equação de diferenças. Tal estratégia vem de encontro com os métodos deste trabalho, já que buscamos um entendimento da informação em espaços-escala discretos. Adiaremos a exposição sobre mecanismos de dissipação induzidos numericamente até a Seção 4.6, onde o aparato de discretização dos espaços-escala será apresentado.

Os elementos apresentados acima sobre entropia em EDPs são muito mais gerais e extrapolam a questão das leis de conservação. Jüngel [101, 102], Evans [49, 50] e Matthes [140] trazem análises detalhadas sobre o

assunto, em que são discutidos, dentre vários outros, problemas de transporte e mecânica estatística de não-equilíbrio. Destas mesmas referências, nos interessam as definições de Funcionais de Lyapunov e de Entropia, dadas abaixo.

DEFINIÇÃO 13: (FUNCIONAL DE LYAPUNOV) [101, 102, 233]

Dada a lei de conservação expressa pela Equação (4.57), e denotando o domínio do fluxo F por $D(F)$, definimos o funcional de Lyapunov $\Phi : D(F) \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\frac{d}{dt}\Phi[u](t) \leq 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (4.66)$$

para todas as soluções suaves $u(x, t)$ para a lei em questão.

Vemos que as estimativas obtidas para a variação temporal da entropia nas difusões linear e de Perona-Malik, realizadas nas Seções 4.3.1 e 4.4, empregam este conceito, embora não sejam baseadas em EDPs hiperbólicas. Isto não chega a ser um problema grave: Jüngel [101, 102] e Matthes [140] reconhecem em seus tratados a ausência de uma definição clara de entropia.

Denotando por $u_\infty(x)$ o estado de equilíbrio $u(x, t \rightarrow \infty)$, temos agora a

DEFINIÇÃO 14: (FUNCIONAL DE ENTROPIA) [101, 102, 140]

O funcional de Lyapunov $S : D(F) \rightarrow \mathbb{R}$ será chamado de entropia se for convexo e existirem uma métrica $d(\cdot, \cdot)$ definida sobre o domínio de u e uma função crescente contínua $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(0) = 0$ tais que

$$d(u, u_\infty) \leq \Gamma(S[u] - S[u_\infty]) \quad \text{para } u \in D(F). \quad (4.67)$$

Aparece na Equação (4.67) pela primeira vez de forma explícita uma entropia relativa, dada por $\Delta S(t) \equiv S[u](t) - S[u_\infty]$. Nota-se aqui outra semelhança com a entropia *contínua* da teoria da informação (vide Seção 3.4), que também apresenta um caráter relativo.

A necessidade em se empregar funcionais de entropia no espaço-escala agora é colocada em solo mais firme: tais funcionais nos permitem avaliar eventuais comportamentos dissipativos em processos de evolução modelizados por equações de transporte e difusão. Embora $S[u]$ (ou, mais geralmente, $\Phi[u]$) não digam respeito diretamente à teoria da informação, verifica-se que a Entropia de Shannon dada pela Equação (3.33) atende os requisitos colocados pelas Definições 13 e 14. Obviamente, isto não estabelece o vínculo que tanto se deseja; mas, juntamente com os *insights* de Lax [115, 116] sobre a perda de informação em sistemas hiperbólicos, permite que pelo menos comecemos a aventar a possibilidade de que a questão da informação dos espaços-escala possa, sim, incorporar análises locais¹⁵. Embora não tenhamos ainda os elementos para fortalecer tal conjectura, será mostrado em breve que uma figura mais geral pode formar a ponte entre informação e resolução espacial. Tal grandeza é a Informação de Fisher [61, 63].

4.6 Métodos numéricos

4.6.1 Difusão linear

Esquema explícito: análise de estabilidade

Ficou claro no Capítulo 2 que do ponto de vista numérico-computacional, as equações e objetos da análise de sinais devem ser adaptados a um cenário completamente discreto, com vistas à possibilidade de implementação. Com as EDPs a história se repete e devemos ser capazes de migrar para um cenário em que Equações de *diferença* constituem os objetos básicos a serem investigados. Embora análises semi-discretas sejam muito pertinentes, em última instância o método numérico dedicado a emular uma EDP deve ser completamente

¹⁵Note que a entropia de Shannon é uma métrica global da fonte de informação, de modo que não é possível, por meio desta, formar juízo sobre aspectos de resolução espacial.

discretizado. Assim, discutiremos aqui os aspectos mais básicos de aproximação das Equações do calor e de Perona-Malik, focando na questão da estabilidade dos métodos envolvidos. O ferramental usado é consolidado na teoria, de forma que sugerimos os livros de Cuminato e Meneguete Jr. [39] e Morton e Mayers [144] para aprofundamentos. De todo modo, até onde este autor sabe, a abordagem do Critério de von Neumann [39, 144] segundo uma óptica de processamento digital de sinais não é usual na literatura técnica brasileira, de modo que há uma certa componente de originalidade nesse sentido.

Partiremos do PVI¹⁶ dado pela Equação (4.25). Para aproximá-lo, a estratégia mais simples consiste em se adotar um esquema FTCS¹⁶ de diferenças progressivas no tempo e centradas no espaço [39, 144], que leva a um esquema explícito [144]. De acordo com a esta estratégia, temos

$$\partial_t u(x, t) \approx \frac{\Delta_t^+ [u(x, t)]}{\Delta t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}, \quad (4.68)$$

e

$$\partial_x u(x, t) \approx \frac{\delta_{\Delta_x} [u(x, t)]}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta_x, t) - u(x - \Delta_x, t)}{2\Delta x}. \quad (4.69)$$

Inicialmente, poderíamos simplesmente aplicar as Equações (4.68) e (4.69) na Equação (4.25). Entranto, como lidamos com uma derivada segunda no espaço, pontos distantes $\pm 2\Delta_x$ seriam requeridos na aproximação. Isso pode trazer problemas no caso de sinais ruidosos, já que a aproximação da derivada seria bastante ineficiente, demandando eventualmente pré-processamento do sinal – o que é claramente indesejável. Uma alternativa simples consiste em se usar incrementos menores: ao invés de incrementarmos a abcissa em Δ_x , poderíamos usar simplesmente $\Delta_x/2$. Desse modo, aplicando as Equações (4.68) e (4.69) (esta devidamente calculada com $\Delta_x/2$) na Equação (4.25), obtemos

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \kappa [u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n] \quad (4.70)$$

em que $u_{m+a}^{n+b} \equiv u(x + a\Delta x, t + b\Delta t)$ e

$$\kappa \equiv \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (4.71)$$

Como esperado, a aproximação das derivadas na EDP leva a uma equação de diferenças. O detalhe interessante a respeito da Equação (4.70) está ligado ao fato de que esta, herdando a linearidade da EDP subjacente, possui uma estrutura “convolucional” quando avaliada sobre o índice espacial m . De fato, se o sinal u_m fosse de extensão infinita, isto é, se $m \in \mathbb{Z}$, de modo que pudéssemos ignorar a questão dos valores de fronteira do problema original, teríamos uma equação de convolução discreta da forma

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \kappa (u^n * h^n)_m, \quad (4.72)$$

cuja “resposta ao impulso” h^n seria dada por

$$h^n \equiv \{1, -2, 1\}. \quad (4.73)$$

Esta analogia entre a equação de diferenças com um problema de convolução discreta sugere que o ferramental desenvolvido ao longo do Capítulo 2, mais particularmente na Seção 2.5, seja aplicável aqui. De fato, tal aplicação é possível e nos auxiliará a esclarecer questões de estabilidade da aproximação dada pela Equação (4.70). Por estabilidade, deve-se entender a capacidade de um método numérico permanecer limitado conforme o processo que ele emula evolui [144]. Elaboraremos melhor este ponto a seguir.

Começemos tomando a transformada Z , definida na Equação (2.40), p. 15, sobre a equação de diferenças (4.70). Os deslocamentos em m levam ao surgimento de monômios em z^{-1} conforme mostrado na Equação (2.41). Assim, obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(z) = \hat{A}(z)u^n(z), \quad (4.74)$$

¹⁶Do inglês *forward time central space*.

Os autovalores λ_n são calculados tomando-se a DFT na equação de autovalor $\tilde{\mathbf{A}}u = \lambda u$. Para N muito grande, a soma na Equação (4.86) convergirá se $|\lambda_n| < 1$. Veja que esta condição impõe restrição sobre κ semelhante àquela obtida na Equação (4.77).

Devemos notar que, ao seu modo, as estimativas da “termodinâmica” do esquema FTCS (4.70) são de difícil obtenção. De fato, a condição da energia mostrada na Equação (4.86) serve apenas quando se abdica da influência das fronteiras e o número N de entradas do sinal é muito grande. Se fôssemos seguir a estratégia de desenvolver os produtos explicitamente sem alteração alguma do PVIF original, lidaríamos com expressões bastante tediosas e, para nossas análises, contraproducentes. A idéia do desenvolvimento anterior foi de mostrar a interconexão profunda entre Teoria de Sinais e métodos numéricos para EDPs. No contexto dos espaços-escala, iremos sustentar nossas análises num arcabouço muito mais robusto.

4.6.2 Difusão-não linear

Esquema explícito: análise de estabilidade

No contexto da Equação de Perona-Malik, queremos discretizar o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) &= \partial_x [c(|\partial_x u(x, t)|) \partial_x u(x, t)] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ \partial_n u(x, 0) &= 0. \end{cases} \quad (4.88)$$

De modo completamente análogo ao caso linear, pontos intermediários aparecem na aproximação FTCS. Nesta, como não há dados disponíveis, podemos usar algum tipo de interpolação. O caso mais simples consiste em se tomar

$$c_{m\pm 1/2}^n = \frac{c_m^n + c_{m\pm 1}^n}{2}. \quad (4.89)$$

Com a Equação (4.89) em mãos, aproximamos o PVIF dado pela Equação (4.88) por

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = - \left[\frac{c_m^n + c_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{c_m^n + c_{m-1}^n}{2(\Delta x)^2} \right] u_m^n + \frac{c_m^n + c_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} u_{m+1}^n + \frac{c_m^n + c_{m-1}^n}{2(\Delta x)^2} u_{m-1}^n. \quad (4.90)$$

A forma matricial do esquema FTCS para a EPM é claramente mais complexo do que seu correspondente linear, dado pela Equação (4.80). De fato, temos

$$\mathbf{u}^{n+1} = [\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{u}^n)] \mathbf{u}^n, \quad (4.91)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{B} é um operador tridiagonal dependente de \mathbf{u}^n cujas entradas são dadas por

$$B_{ij} = \begin{cases} - \left[\frac{c_i^n + c_{i+1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{c_i^n + c_{i-1}^n}{2(\Delta x)^2} \right] & \text{se } j = i; \\ \frac{c_i^n + c_i^n}{2(\Delta x)^2} & \text{se } j = i \pm 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.92)$$

A primeira característica explicitada pela Equação (4.92) é que os coeficientes de \mathbf{B} não são mais independentes das coordenadas $n \in [0, N[$. Isto é obviamente devido à não-linearidade do problema considerado, e representa uma ruptura drástica das premissas anteriores de invariância ao deslocamento. De fato, pode-se afirmar quase nada sobre o sistema em questão; apenas que ele é explícito, por exemplo. Há ainda uma dificuldade adicional: devido à não-linearidade e não-invariância do esquema FTCS (4.92), a análise de Fourier não traz informação alguma sobre estabilidade. Em suma, o sistema obtido não pode ser avaliado de forma alguma pelos métodos anteriormente discutidos.

4.7 Teoria da Informação em Espaços-Escala

4.7.1 Informação no casos contínuos

As discussões anteriores foram feitas com vistas à elucidação do conceito de entropia em sistemas evolutivos modelizados por EDPs. Tal esclarecimento se faz necessário para que possamos contemplar e eventualmente questionar o papel deste conceito em espaços-escala. Neste ponto do trabalho, portanto, a idéia é mostrar a abordagem mais básica para incorporação do conceito de informação em descrição multiescala, e se este se associa à figura de resolução espacial.

Embora existam abordagens interessantes para se lidar com informação em nível local em espaços-escala, principalmente devidas a J. Sparring [199, 200, 201, 202], ainda há muito a ser feito no campo teórico. No geral, tais abordagens partem da interpretação de que o sinal $u(x, t)$ deve, *per se*, ser visto como uma distribuição de probabilidades. Isto é, o sinal é tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 1 \quad \text{e} \quad u(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[. \quad (4.93)$$

Nesse contexto, a entropia tomaria a forma familiar abordada nos Capítulos 3 e 4 (vide, por exemplo, as Equações (3.42) e (4.28)):

$$S(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \ln[u(x, t)] dx. \quad (4.94)$$

Na própria Seção (4.3.1) é mostrado que a entropia contínua $S(t)$ dada pela Equação (4.94) tem variação temporal dada por $dS/dt = c^2 \|\partial_x v(x, t)\|^2$, em que $v(x, t)$ é uma distribuição auxiliar, definida por

$$v(x, t) = 2\sqrt{u(x, t)}. \quad (4.95)$$

Deve-se, neste ponto, chamar atenção à conexão flagrante entre as expressões para a Informação de Fisher paramétrica, não-paramétrica e baseada em “funções de onda” complexas – dadas pelas Equações (3.51), (3.53) e (3.54), respectivamente – e a derivada temporal da entropia. De fato, quando observadas sob a óptica da mecânica estatística de não-equilíbrio, tais figuras correspondem a um mesmo objeto: a produção local de entropia [74, 131]. Portanto, para um sistema submetido a uma difusão linear e com condições de fronteira do tipo Neumann homogêneas, tem-se que

$$\frac{dS}{dt}(t) = c^2 I_F(t). \quad (4.96)$$

A expressão mostrada na Equação (4.96) não é uma ocorrência isolada dos espaços-escala, mas sim da termodinâmica de não-equilíbrio [74, 71]. O que parece ter passado despercebido por Sparring ao longo de suas investigações nos anos 90 [199, 200, 201] é que a construção de uma ponte entre variação temporal e capacidade de estimação da resolução característica é basicamente imediata – pelo menos no caso linear.

Como dito acima, deve-se a J. Sparring o início das investigações mais aprofundadas em informação em espaços-escalas. Contudo, em uma série de trabalhos desenvolvidos no final dos anos 90 e ao longo da década de 2000, Boccignone, Ferraro e Caelli [51, 52, 18, 53] introduzem um ferramental estatístico de não-equilíbrio para a *representação* da informação em espaços-escala, lineares ou não. Em [53] Ferraro e Boccignone advogam que

[...] the key to a successful definition of image information across different scales is to visualise fine-to-coarse transformations as an irreversible process during which local production of entropy takes places, entailing destruction of order, or structures in the system; likewise in images, structure and information are destroyed along a fine-to-coarse transformation.

Estes mesmos autores – juntamente com Caelli – definem em [51] uma medida de *atividade* que, em princípio, contabiliza a perda local de informação ao longo da evolução:

$$a(x) = \int_0^{\infty} \frac{[\partial_x u(x, t)]^2}{u(x, t)} dt = \langle S_t^2(x) \rangle_t, \quad (4.97)$$

em que $\langle \cdot \rangle_t$ e $S_t(\cdot)$ correspondem à média *temporal*¹⁸ e à função *escore* (vide Apêndice C, Definição (16)) definida sobre o parâmetro $t = \sigma^2/2$. O característico $a(\cdot)$ é usado pelos autores como estimativa de um limiar de separação *espacial* entre regimes de atividade intensa ou reduzida. Esta separação baseada em conteúdo constitui um processo bastante interessante de *codificação* de informação em espaços-escala, e permite que se realizem incursões em uma teoria dinâmica da observação [53]. Entretanto, tais elaborações teóricas não explicitam relações informação-resolução. De fato, o arcabouço fundado por Ferraro, Boccignone e Caelli em [51, 52, 18, 53] surge muito mais como uma teoria de *detecção* baseada em métricas informacionais.

A discussão acima baseou-se integralmente no caso linear, em que há o conforto de se lidar diretamente com a expressão da Informação de Fisher. Entretanto, conforme todo o exposto até aqui, a difusão linear sofre de restrições incontornáveis. No caso da difusão não-linear de Perona-Malik, tem-se da Equação (4.52):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= \int_I c(|\partial_x u(x, t)|) \frac{[\partial_x u(x, t)]^2}{u(x, t)} dx \\ &= \int_I u(x, t) c(|\partial_x u(x, t)|) \frac{[\partial_x u(x, t)]^2}{u^2(x, t)} dx \\ &= \left\langle \sqrt{c(|\partial_x u(x, t)|)} S_t^2(x) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.98)$$

que claramente contempla o caso linear no caso em que $c(\cdot)$ é constante. Na prática – e por construção da EPM – os regimes se aproximam e basta que \sqrt{c} seja aproximadamente constante para que a evolução temporal da entropia carregue explicitamente sua representação em termos de I_F . O fato da Informação de Fisher não aparecer explicitamente na difusão de Perona-Malik significa apenas que seu cômputo deve ocorrer diretamente sobre a distribuição $u(x, t)$ tal como mostrado na Equação (3.51). No caso de várias dimensões espaciais, tem-se que

$$I_F(t) \equiv \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2}{u(\mathbf{x}, t)} d^N x, \quad (4.99)$$

em que Ω é o suporte do campo escalar normalizado $u(\mathbf{x}, t)$ e t deve ser visto tanto como tempo/escala quanto uma função do parâmetro de resolução σ , dada explicitamente no caso linear por $t(\sigma) = \sigma^2/2$. Note que no caso não-linear, não há uma relação funcional analítica – ou ao menos explícita – entre t e σ . De fato, em contextos práticos costuma-se usar o “pior caso possível”, em que a EPM opera um processo análogo ao linear, de forma que a relação quadrática aqui explicitada se torna aproximadamente válida¹⁹.

Os pontos abordados acima fornecem um substrato interessante para a informação em espaços-escala: munidos das considerações de Sparring sobre entropia [199, 200, 201, 202], de Ferraro, Boccignone e Caelli sobre representação e codificação [51, 52, 18, 53], e inspirados pelo aparecimento frequente da Informação de Fisher em todas estas discussões, podemos enfim considerar que o setor ligado à *estimação* dentro do arcabouço multiescala pode ser descrito pela evolução da Informação de Fisher ou – equivalentemente – da divergência de Kullback-Leibler. Direcionaremos a o foco à primeira, já que se persegue a capacidade operacional de estimar resoluções em imagens. Contudo, deve-se notar que a menos deste propósito aplicado, todo o desenvolvido da dinâmica da informação poderia ser baseado na divergência KL [59].

¹⁸Deve-se atentar aqui para o fato de que na ausência de quaisquer hipóteses acerca de ergodicidades da fonte de informação, não é possível vincular a função atividade de Ferraro *et al.* [51] à informação de Fisher, visto que esta é uma média sobre um *ensemble* espacial.

¹⁹É claro que com esta escolha, corre-se o risco de se estimar o parâmetro de escala em completo *desacordo* com a evolução real das estruturas retratadas.

4.7.2 Informação no contexto numérico

Uma vez explicitado o papel frequente da entropia e informação de Fisher nos casos contínuos, se faz necessário averiguar a pertinência de tais ponderações nos casos discretos. Em seu importante tratado sobre difusões anisotrópicas em imagens, J. Weickert [233] mostra que as difusões linear e de Perona-Malik correspondem a processos entrópicos, no sentido que seus funcionais de entropia (vide Definição (14)), são levados a pontos de extremo no equilíbrio. Para isso, no contexto numérico, Weickert [233] e Benhamouda [229] listam uma série de propriedades que os operadores \mathbf{A} e \mathbf{B} (vide Equações (4.80) e (4.92), respectivamente) devem obedecer. Tais propriedades são listadas abaixo, na

DEFINIÇÃO 15: (OPERADOR MATRICIAL DE ESPAÇO-ESCALA) [229, 233]

A evolução discreta explícita

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{A}(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n \quad (4.100)$$

corresponderá a uma descrição multiescala obedecendo a condição de entropia se o operador \mathbf{A} for tal que valham as seguintes propriedades:

i. **Simetria**

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \forall (i, j); \quad (4.101)$$

ii. **Soma unitária sobre linhas**

$$\sum_j A_{ij} = 1 \quad \forall (i, j); \quad (4.102)$$

iii. **Não-negatividade**

$$A_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j); \quad (4.103)$$

iv. **Diagonal-positividade**

$$A_{ii} > 0 \quad i; \mathbf{e} \quad (4.104)$$

v. **Irreduzibilidade** [76] Para quaisquer entradas (i, j) de \mathbf{A} existe um subconjunto de índices $l = \{i, l_0, l_1, \dots, l_{M-1}, j\}$ tal que a sequência

$$\{A_{i,l_0}, A_{l_1,l_2}, A_{l_3,l_4}, \dots, A_{l_{M-1},j}\} \quad (4.105)$$

é não-nula. Alternativamente [76], existe uma matriz de permutação \mathbf{P} tal que a operação de similaridade \mathbf{PAP}^T leva a uma matriz em blocos triangular superior, isto é:

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (4.106)$$

em que \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes quadradas.

A colocação da Definição (15) neste ponto justifica o adiamento das discussões sobre as propriedades de equilíbrio da Equação de Perona-Malik, iniciadas na Seção 4.6.2. Por meio das propriedades listadas na definição de um operador de espaço-escala, prescindimos dos cálculos explícitos que envolvem aproximações em séries de potências das matrizes envolvidas. Assim, é possível verificar que as evoluções discretas linear e não-linear, dadas pelas Equações (4.79) e (4.91), correspondem, de fato, a descrições multiescala. Tal constatação é extremamente importante, pois nos coloca, a partir de agora, em condições de não nos preocuparmos com eventuais inconsistências entre os problemas contínuo e discreto abordados. Em outras palavras, ao fazer uso de método numérico que obedeça as propriedades da Definição (15), qualquer juízo formado sobre energia, entropia e outros funcionais convexos estará associado à estrutura do método numérico subjacente, e não mais a uma pretensa analogia física. No próximo Capítulo serão apresentadas as experimentações realizadas sobre imagens com base nos conceitos aqui discutidos.

5.1 Recursos computacionais

Optou-se neste trabalho pela utilização da linguagem Python versão 3.9.1 para os desenvolvimentos. Desnecessário dizer o quão importante é esta linguagem ou o quão longe se pode ir com ela. Mais importante é que com Python pode-se focar nos aspectos mais conceituais dos algoritmos, sem maiores necessidades de implementações de alta performance, geradas com C++, por exemplo¹. Para entrada/saída (I/O) de imagens, optou-se pela biblioteca OpenCV [23]. Por fim, a biblioteca de métodos numéricos e abstração de dados matriciais NumPy [220, 86] foi utilizada extensivamente. A Tabela 5.1 lista os recursos de software usados.

Recurso	Descrição
Sistema operacional	Ubuntu 20.04.2 LTS
Linguagem de programação	Python 3.9.1
Biblioteca para I/O de imagens	OpenCV 4.5.1
Biblioteca para computação científica	NumPy 1.20.0

Tabela 5.1: Recursos de software usados neste Trabalho.

Em paralelo à questão de software, a Tabela 5.2 lista os principais recursos de hardware usados no trabalho. A máquina utilizada faz parte do parque computacional do CBPF, mais particularmente do CBPF Data Center. Esta iniciativa de alto nível é realizada pela Coordenação de Desenvolvimento Tecnológico – COTEC –, e permite que a comunidade científica (local ou não) tenha acesso a estruturas avançadas para processamento massivo. A Tabela 5.2 mostra alguns dos atributos da máquina utilizada.

Recurso	Quantidade/Descrição
Número de núcleos	40
Frequência máxima nominal	3 GHz
Memória RAM	256 GB
Disco	2 TB

Tabela 5.2: Recursos de hardware usados neste Trabalho.

¹Nesta pequena nota de rodapé o autor gostaria de deixar registrado que tentou ao máximo prosseguir com os desenvolvimentos em SCILAB, pois realmente acreditou – por anos – no projeto desta excelente ferramenta para computação científica. Contudo, a falta de aperfeiçoamentos diversos, tais como operacionalização de um paradigma orientado a objetos, paralelismo e entrada e saída (descomplicados) de imagens fez com que SCILAB se tornasse uma ferramenta sem competitividade.

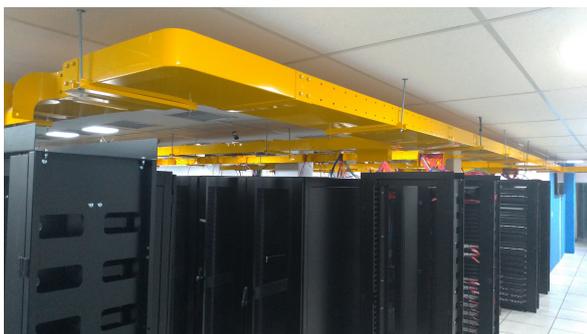


Figura 5.1: Área interna do CBPF Data Center. Créditos: Ailton Silva da Rosa, Marita Campos Maestrelli, Márcio Portes de Albuquerque e Marcelo Portes de Albuquerque.

5.2 Bases de imagens

Para as experimentações e investigações práticas deste Trabalho, foi constituída uma pequena base autoral de imagens, capturadas com um *smartphone* tanto em modo automático quanto manual. A idéia é que os levantamentos descritos ao longo deste Capítulo possam ser facilmente reproduzidos, sem que se dependa de um dispositivo sofisticado para imagens.

A base de imagens é constituída por um total de 35 fotografias, classificadas do seguinte modo:

Classe	Quantidade
Bokeh	10
Miscelânea	5
Objeto	8
Textura	12

Tabela 5.3: Distribuição das imagens no *dataset* autoral construído para este trabalho.

A primeira classe descrita na Tabela 5.3 refere-se ao recurso estético de se provocar, em uma mesma cena, diferentes resoluções entre planos, com um deles deliberadamente fora de foco. Um exemplo do uso deste recurso artístico pode ser visualizado na Figura 5.2. A idéia em se utilizar imagens com bokeh derivou do fato de que estas trazem uma estrutura extrema de espaço-escala, já que sempre haverá uma região “borrada” e outra nítida. Tais estruturas são interessantes para se observar o efeito de filtros em múltiplas resoluções em uma mesma cena.

A classe miscelânea compreende imagens que contêm mais de um elemento ou atributo característicos, de modo que não se enquadram exatamente em nenhuma das outras categorias. Dois exemplos podem ser visualizados na Figura 5.3.

As classes objeto e textura diferem substancialmente entre si devido ao fato de que a última prioriza componentes estruturais que se estendam por – idealmente – todo o campo da cena, configurando assim o que se pode chamar de “padrão”. A primeira, por outro lado, é muito mais arbitrária e visa simplesmente retratar cenas com objetos sem maiores preocupações. Exemplos podem ser visualizados na Figura 5.4.

Todas as imagens da base foram coletadas com o *smartphone* do autor, cujas características básicas podem ver vistas na Tabela 5.4. Deve-se atentar que o espaço sRGB (ou RGB padrão [169, 77]) é multidimensional; isto é, sinais pertencentes a esta representação são compostos por 3 canais. Nesse sentido, as discussões teóricas realizadas neste Trabalho deveriam cobrir sinais em dimensões superiores. Acerca deste ponto, postergaremos a discussão para a próxima Seção, em que o espaço YUV será apresentado.

As dimensões das imagens usadas também devem ser consideradas. Embora estejam muito longe do estado da arte em imagens de alta resolução ², as imagens aqui utilizadas possuem 13 Mega pixels (MP), o que está muito além dos padrões das décadas de 90 e 2000, em que se utilizavam corriqueiramente imagens com

²Hoje é possível capturar, com *smartphones* mais avançados, imagens com mais de 100 MP.



Figura 5.2: Ilustração da utilização do recurso de bokeh.

Atributo	Especificação
Espaço de cores	sRGB
Dimensões (px)	3120 × 4160
Profundidade em bits (por canal)	8

Tabela 5.4: Algumas características comuns a todas as imagens não-sintéticas usadas neste trabalho.

menos de 1 MP. Claramente, isso reflete no tempo de computação.

Por fim, deve-se notar que a profundidade em bits das imagens é baixa (câmeras mais atuais permitem aquisições em 16 bits). Se por um lado ganha-se espaço em disco com tal quantização, por outro perdem-se detalhes finos nas escalas radiométrica e colorimétrica. A Figura 5.5 ilustra os efeitos da redução da escala dinâmica de uma imagem.

Embora claramente nocivo, o efeito de requantização encontra aplicações importantes, principalmente em compressão de dados [97, 169, 175]. Obviamente, simplesmente requantizar uma imagem para um profundidade em bits inferior constitui uma estratégia demasiadamente simples, já que existem alternativas muito mais eficientes [85, 97, 175]. De todo modo, conforme será visto mais adiante, o potencial da EPM em se preservar estruturas, somado ao “efeito escada” [15, 229, 230] – a ser ilustrado também mais adiante – permite que se contemple a aplicabilidade de difusões não-lineares em compressão de dados.

5.2.1 Luminância e crominância: sistema YUV

Conforme antecipado na Seção 5.2, a experimentação computacional neste Trabalho se deu sobre imagens coloridas, ao passo que basicamente todo o ferramental teórico apresentado ao longo do texto considerou sinais 1-D ou campos escalares. De fato, questões relativas a espaço-escala em imagens coloridas ainda constituem terreno relativamente pouco explorado [233]. Uma estratégia ingênua a ser adotada poderia considerar que os canais de uma imagem são objetos independentes, e que deveriam ser processados desse modo. Entretanto, ignora-se nesse caso as importantes correlações entre canais [24, 97]. Aqui, segue-se uma rota que prescinde das componentes de cor das imagens, baseadas em aspectos da percepção visual humana.

Atualmente, o manuseio de imagens RGB é praticamente ubíquo. Câmeras de celulares, computadores etc.

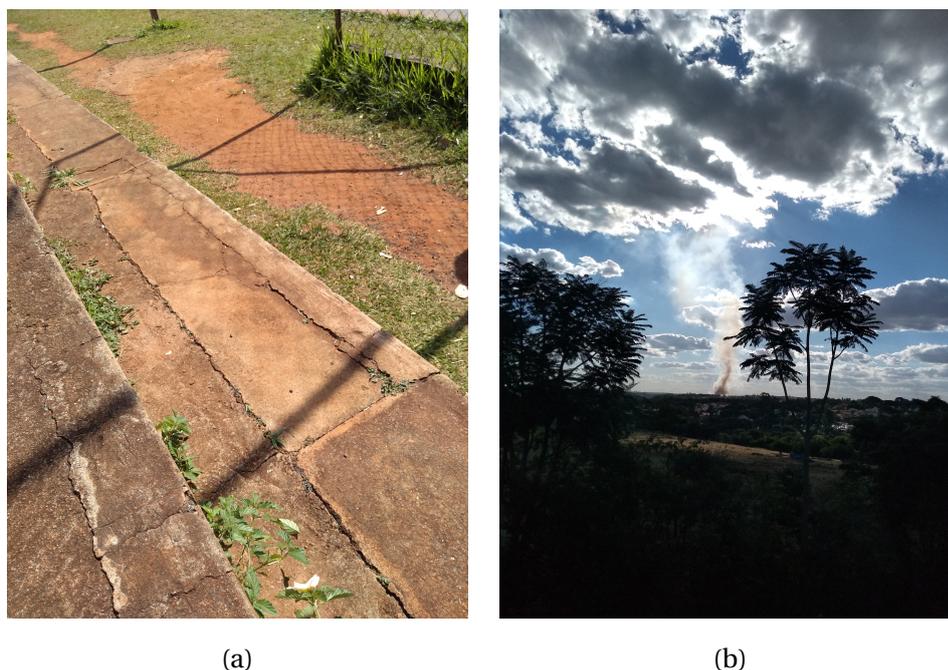


Figura 5.3: Duas amostras da classe miscelânea.

fornecem esse tipo de formato devido às praticidades de veiculação da informação codificada desse modo. Entretanto, existe uma profusão de representações de cores, baseadas em diferentes aspectos técnicos, fisiológicos e matemáticos. Para uma discussão detalhada sobre assunto, sugerem-se os Capítulos 3 e 4 do livro de Gomes e Velho [77], bem como o Capítulo 3 do clássico de Jain [97].

Dentre a gama de representações possíveis, nos interessa aquela que caracteriza a imagem em suas componentes de luminância e cromaticidade. Antes de apresentar seus principais aspectos, é relevante contextualizar sua relação com sistemas de três cores, tais como o RGB padrão. De fato, devido aos estudos pioneiros de Young, Helmholtz e Maxwell [97], formularam-se modelos em que os diferentes tipos de cones presentes numa retina normal mostrariam picos de absorção no azul, verde e vermelho, com consideráveis superposições entre as curvas [97, 77]. Segundo este paradigma, qualquer cor poderia ser obtida por superposições ponderadas das componentes fundamentais; eis a teoria do *tristimulus* [97]. Entretanto, conforme apontado por Gomes e Velho em [77], tal ferramental não explica bem certos aspectos perceptuais, de forma que o modelo mais aceito hoje contempla o *tristimulus* juntamente com uma habilidade humana de se separarem informações espaciais, ligadas à resolução (luminância) e aquelas que carregam conteúdo espectral, relacionado às cores (cromaticidade). Embora não pretendamos adentrar em profundidade neste tema, o ponto principal é que a percepção humana privilegia muito mais a luminância do que aspectos de cromaticidade [77, 204].

Dentre os sistemas capazes de converter informação RGB em luminância/cromaticidade [77], destaca-se o sistema YUV, que pode ser obtido diretamente do RGB por meio de uma transformação linear da forma [169, 97]

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,147 & -0,289 & 0,436 \\ 0,615 & -0,515 & -0,100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

De posse da Equação (5.1) é possível obter as luminâncias (canal Y) e cromaticidades (canais U e V) a partir de imagens RGB. A Figuras 5.6 e 5.7 ilustram o fato apontado acima sobre a menor dependência na percepção sobre as componentes cromáticas.

De acordo com o exposto acima, justifica-se então a adoção do sistema YUV para as experimentações; mais particularmente, a componente Y referentes aos níveis luminâncias. Afinal, os processos discutidos aqui



Figura 5.4: Duas amostras da classes objeto e textura, respectivamente.

dizem respeito exclusivamente aos aspectos espaciais de sinais, imagens e visão³.

5.3 Evolução dos observáveis

O propósito desta Seção é mostrar alguns resultados de levantamento de observáveis de interesse sobre as imagens submetidas às difusões linear e de Perona-Malik. A idéia é que se possa visualizar concretamente como se comportam valor médio, variância, entropia e Informação de Fisher ao longo dos processos sob observação. Adicionalmente, a visualização dos resultados serve para mostrar que, a despeito da dependência da EPM sobre seus parâmetros, existe uma clara superioridade perceptual desta ante sua contraparte linear.

A questão da dependência da EPM sobre seus parâmetros (expoente da função difusibilidade, limiar de separação entre regimes etc.) é tida como um dos principais desafios em se empregar difusões não-lineares em imagens, e foi estudada em grande detalhe por Benhamouda [15] nos anos 90. Uma análise sobre a variabilidade dos parâmetros da EPM em processamento de imagens mamográficas é realizada por Persechino em [172]. Os parâmetros de processamento podem ser vistos na Tabela 5.5.

Atributo/Parâmetro	Valor/Método
Resolução da malha temporal Δt	0,25
Desvio padrão máximo σ (px)	30
Expoente da função difusibilidade α	2
Método de estimação do limiar de separação K	média

Tabela 5.5: Métodos e parâmetros usados para os experimentos de levantamento de observáveis.

Com vistas a aumentar a variabilidade do estudo e de se reduzir o tempo de computação, sobre cada imagem da base de dados foram selecionados aleatoriamente 10 sub-amostras de dimensões 1000×1000 pixels obtidas sobre cada imagem da base. Com as dimensões fixadas, é possível relativizar a medida de entropia,

³Não se deve pensar, contudo, que não há espaço ou interesse em aspectos colorimétricos. Em tempos em que uma *selfie* pode valer milhões, há um emprego efetivo de pesquisa e desenvolvimento direcionados a aspectos perceptuais colorimétricos em fotografia digital.

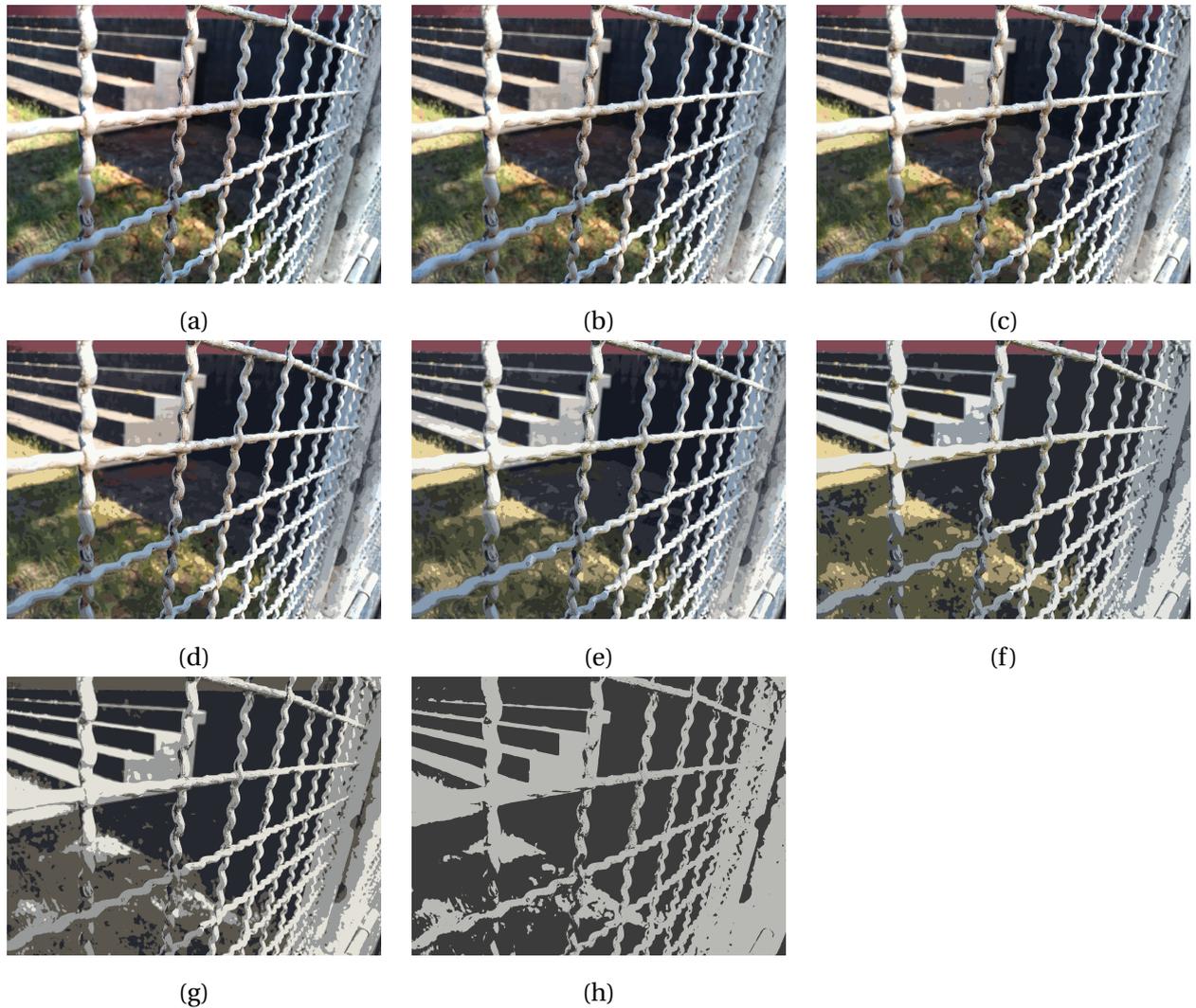


Figura 5.5: Visualização do efeito da redução da escala dinâmica de uma imagem. Em (a) é mostrada a original, quantizada em 8 bits. De (b) a (h) são apresentadas reduções da escala dinâmica de 7 bits a 1 bit, sequencialmente em decrementos de 1 bit.

visto que esta é maximizada para uma distribuição uniforme. Como a normalização de tal distribuição demanda uma divisão pela área de seu suporte, a expressão da entropia normalizada é dada por

$$S_{\text{norm}} \equiv \frac{- \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{ij} \ln(u_{ij})}{\ln(MN)}, \quad (5.2)$$

em que M e N correspondem ao número de linhas e colunas da imagem, respectivamente.

As Figuras 5.8, 5.12, 5.9, 5.13, 5.10, 5.14, 5.11 e 5.15 trazem, de modo padronizado, alguns estudos de caso interessantes sobre a variedade de amostras investigadas. Primeiramente são mostrados o recorte em si e suas difusões linear e não-linear. Em seguida são mostradas as evoluções dos valores médios, variâncias, entropias e informações de Fisher destas, respectivamente.

Quanto à evolução do valor médio, tal como foi discutido no Capítulo 4, deveríamos esperar a constância deste característico numérico em ambos cenários, visto que as condições de fronteira homogêneas do tipo Neumann sempre foram adotadas. De fato, é isto que se percebe nos gráficos. Mais: em função da construção do método numérico usado, caso $\langle u \rangle$ mostrasse alguma variabilidade temporal, esta seria um indicativo de um processo de dissipação numericamente induzida. Em outras palavras, o monitoramento da variação de

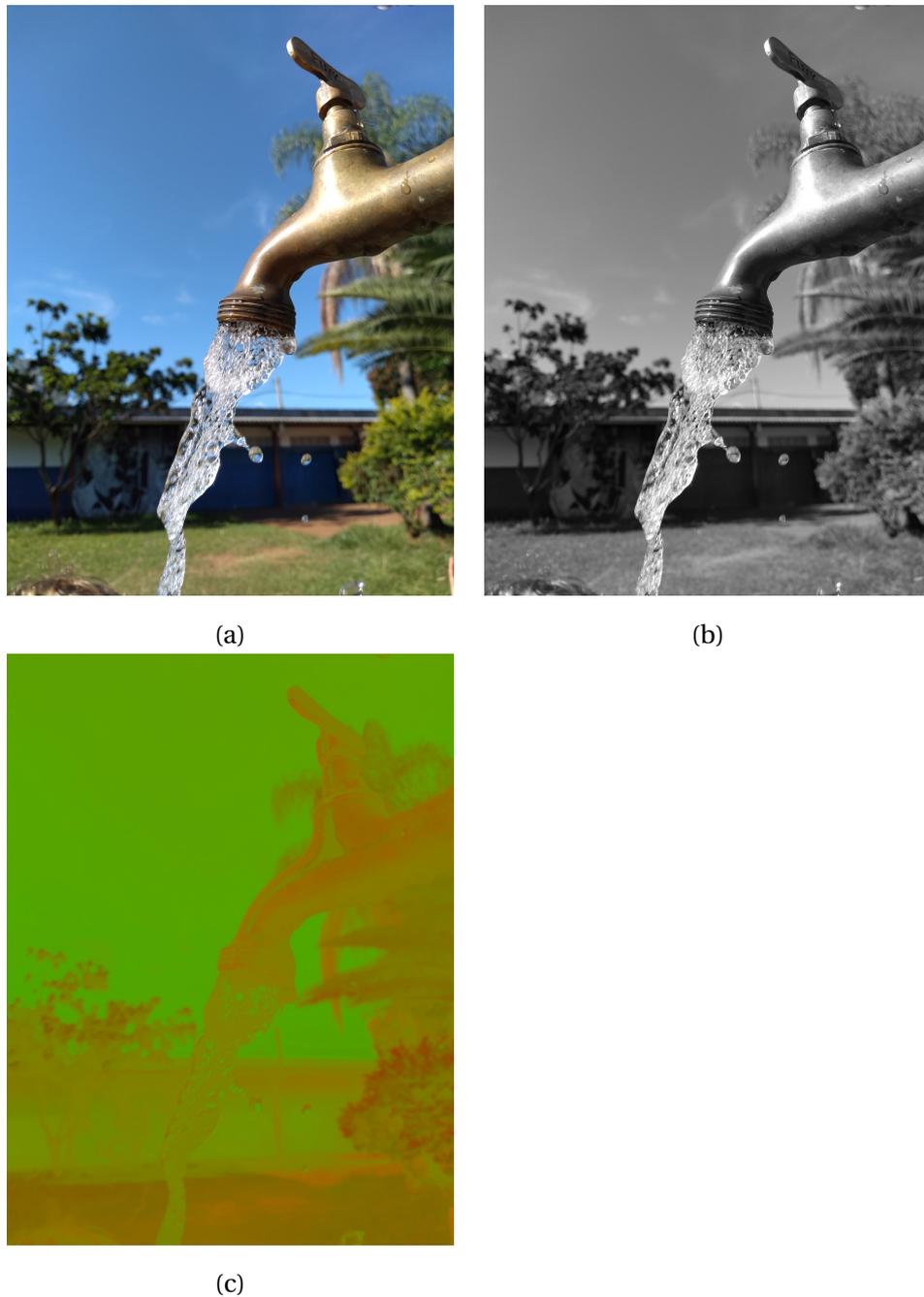


Figura 5.6: Exemplo de decomposição de uma imagem RGB em suas componentes de luminância e crominância, respectivamente.

$\langle u \rangle$ tem um caráter diagnóstico.

No que diz respeito às entropias, observa-se uma evolução deste observável rumo ao valor máximo normalizado, cuja taxa depende diretamente da informação de Fisher. Entretanto, embora tal dependência se manifeste de modo explícito num contexto teórico, num cenário numérico pode-se eventualmente não se observar uma concordância perfeita. As Figuras 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19 evidenciam que há, de fato, uma semelhança das evoluções de δS e I_F no caso linear.

A razão mais imediata para que os desvios observados ocorram reside na natureza discreta das operações envolvidas e na diferença entre os espaços onde os observáveis foram computados. Objetivamente, os pontos

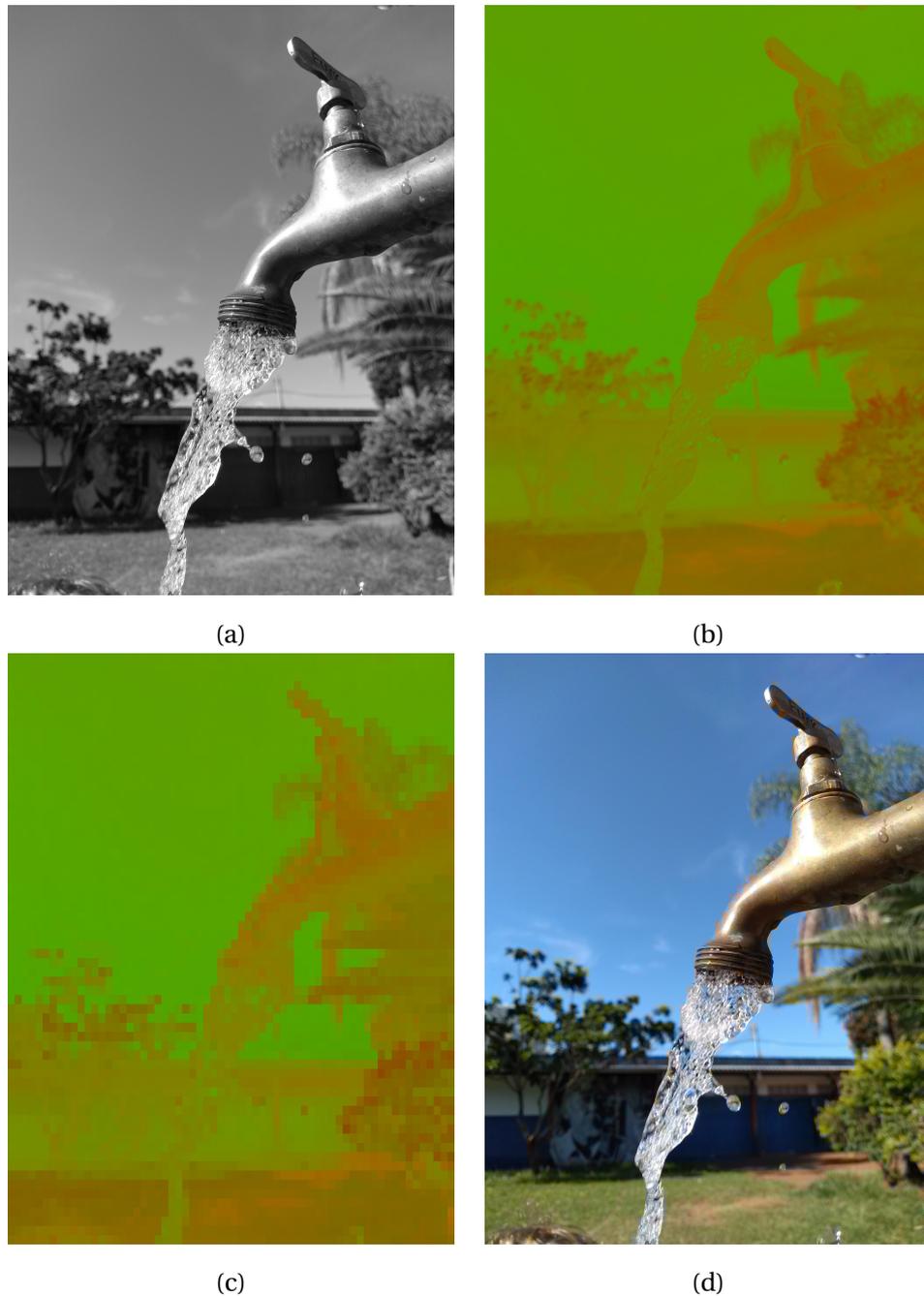


Figura 5.7: Exemplo de menor influência das componentes cromáticas na percepção de uma imagem. Em (a) e (b) são mostrados os mesmos canais de luminância e crominância da Figura 5.6. Em (c) é mostrada uma versão deliberadamente sub-amostrada por um fator 64 da crominância original. Em (d) é mostrado o resultado da composição de (a) e (c), evidenciando que mesmo ante a sub-amostragens expressivas, a percepção da imagem final não sofre maiores alterações pelo fato da luminância ter sido preservada. Naturalmente, devido à amostragem expressiva, artefatos são visíveis.

obtidos para δS_n foram computados por meio de diferenças centradas sobre os valores de entropia normalizada, isto é,

$$\delta S_n = \frac{1}{2} (S_{n+1} - S_{n-1}), \quad (5.3)$$

para cada passo de iteração $n < N_{\text{ITER}}$, sendo este último o número de iterações. Por sua vez, as entradas I_{Fn}

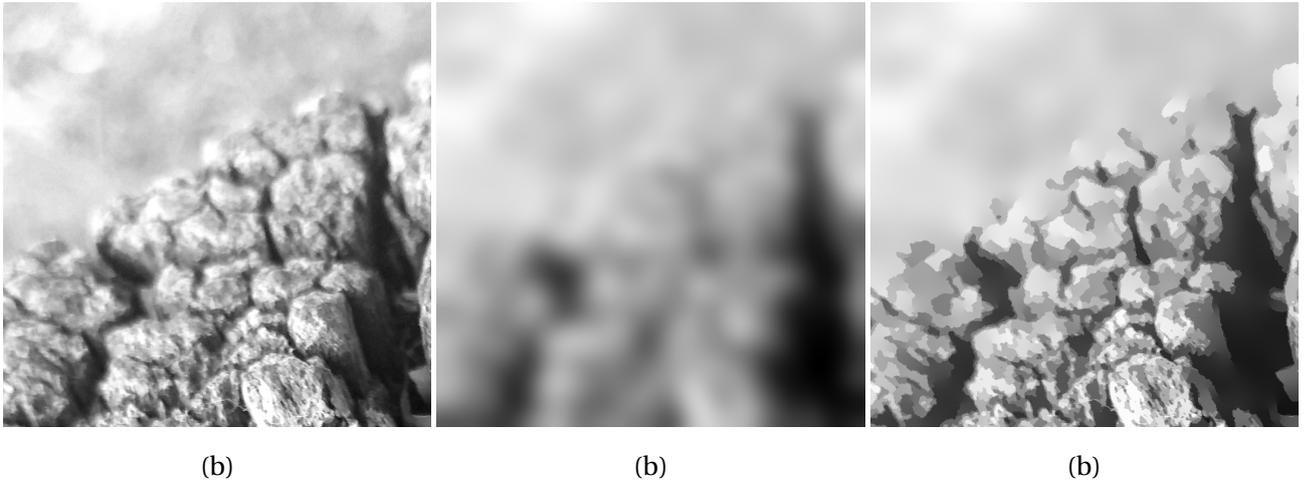


Figura 5.8: Recorte da amostra `bokeh000` (a) e saídas das difusões linear e de Perona-Malik, respectivamente.

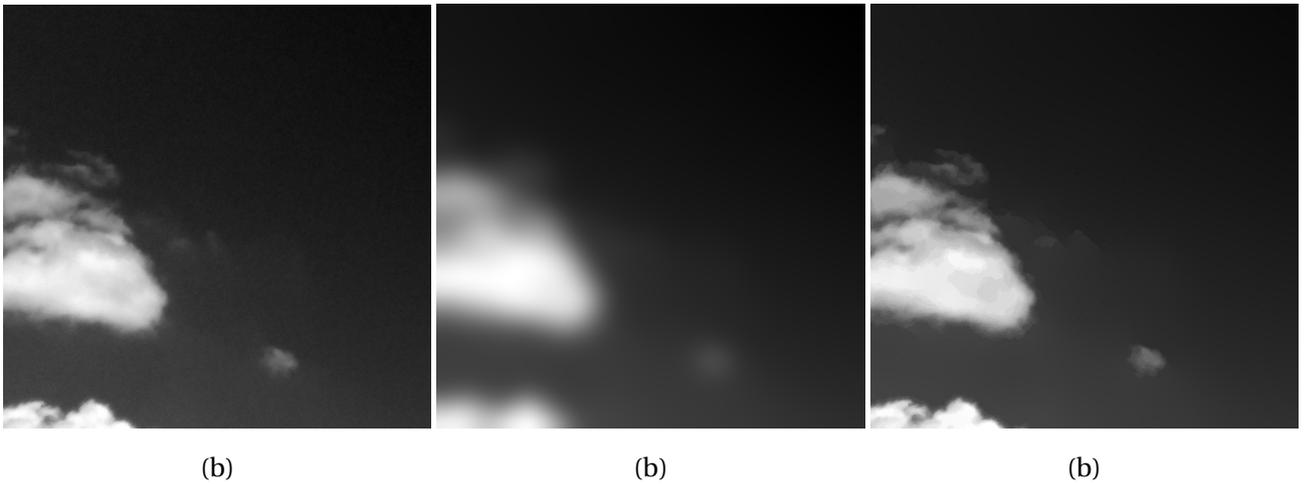


Figura 5.9: Recorte da amostra `misc002` (a) e saídas das difusões linear e de Perona-Malik, respectivamente.

foram computadas diretamente sobre os dados da imagem, por meio da aproximação

$$I_{F_n} = \sum_{i=0}^{N_L-1} \sum_{j=0}^{N_C-1} \frac{|(\delta_x u_{ij})^2 + (\delta_y u_{ij})^2|^2}{u_{ij} + \epsilon}, \quad (5.4)$$

em que $\epsilon \sim 10^{-6}$ é uma constante usada para evitar ocorrências de infinito numérico nas expressões com denominador passível de assumir valores nulos.

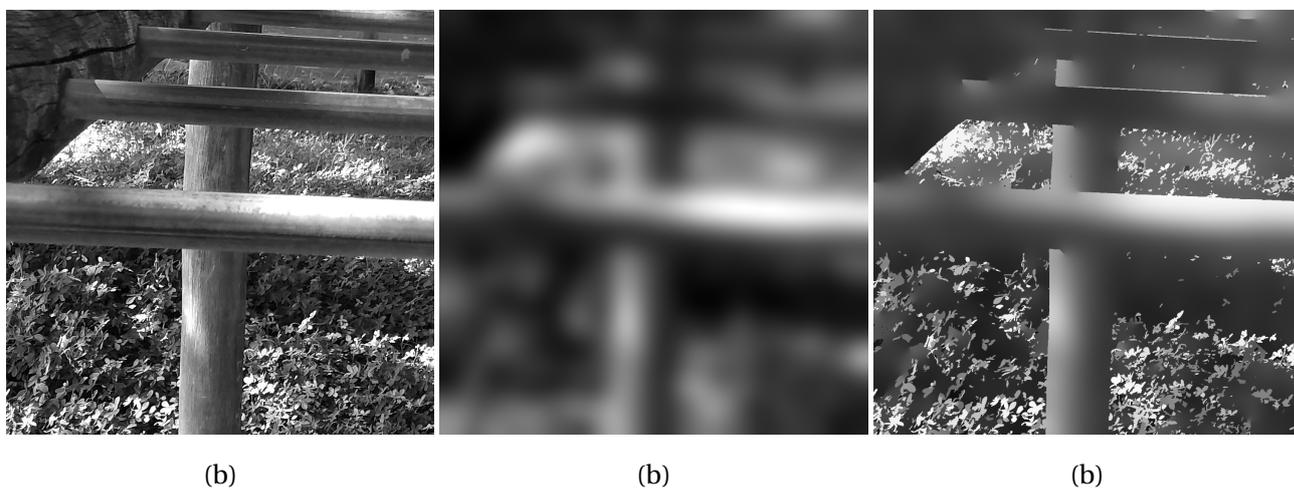


Figura 5.10: Recorte da amostra obj002 (a) e saídas das difusões linear e de Perona-Malik, respectivamente.

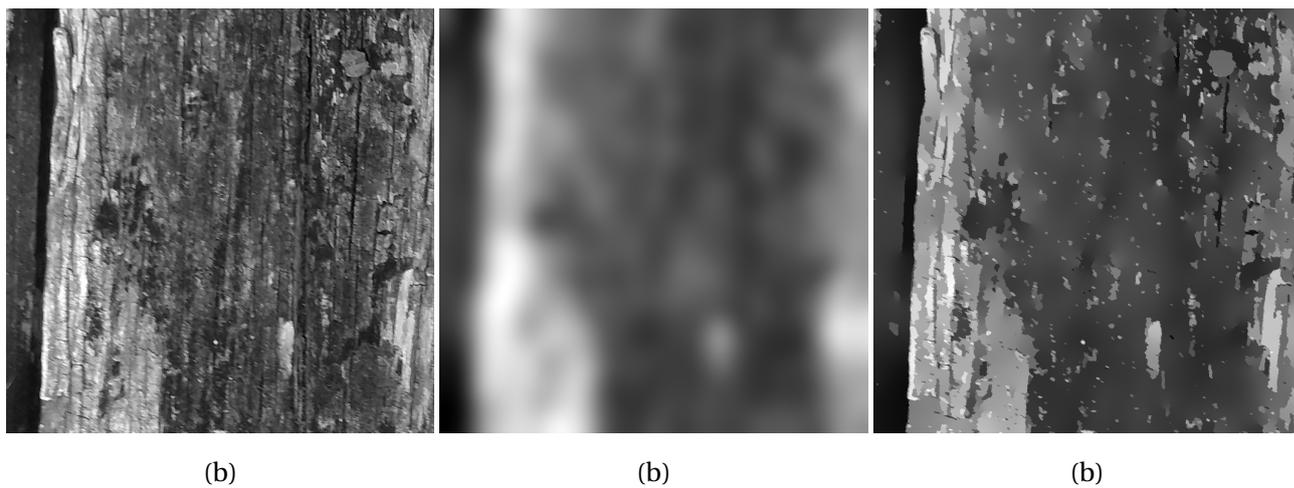


Figura 5.11: Recorte da amostra texture006 (a) e saídas das difusões linear e de Perona-Malik, respectivamente.

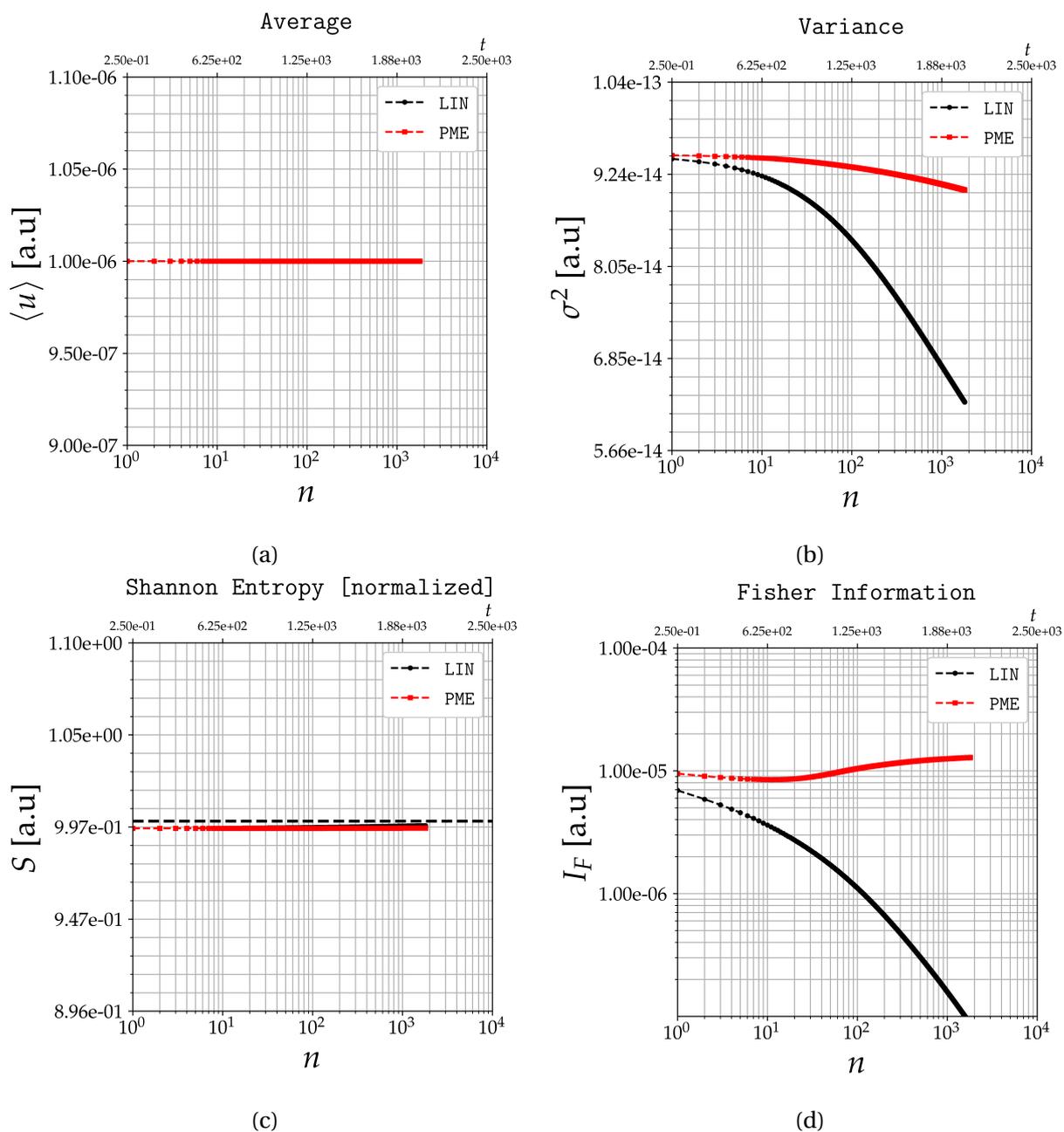


Figura 5.12: Evolução dos observáveis de interesse da amostra bokeh000. São mostrados, em ordem, valor médio, variância, entropia de Shannon normalizada e Informação de Fisher.

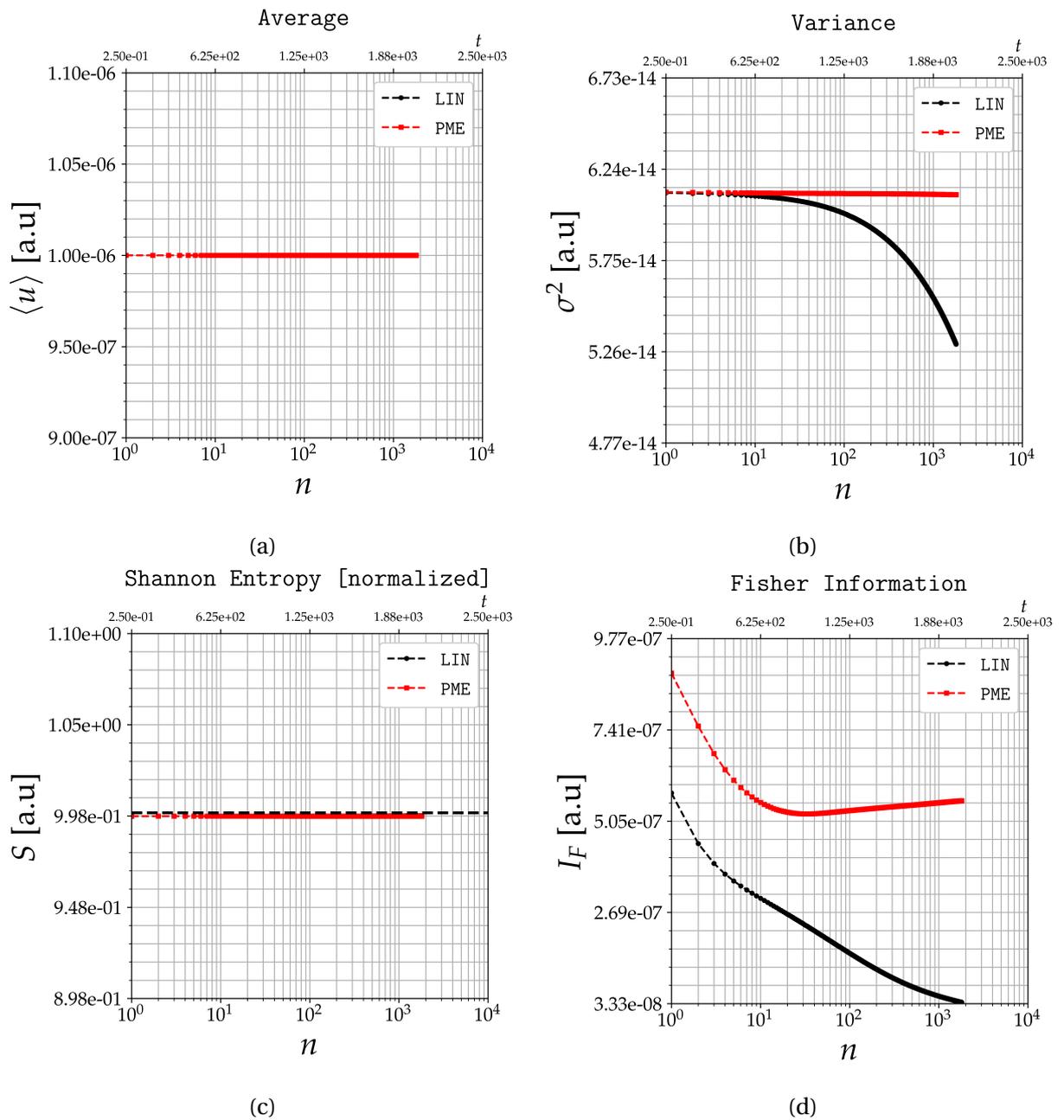


Figura 5.13: Evolução dos observáveis de interesse da amostra `misc002`. São mostrados, em ordem, valor médio, variância, entropia de Shannon normalizada e Informação de Fisher.

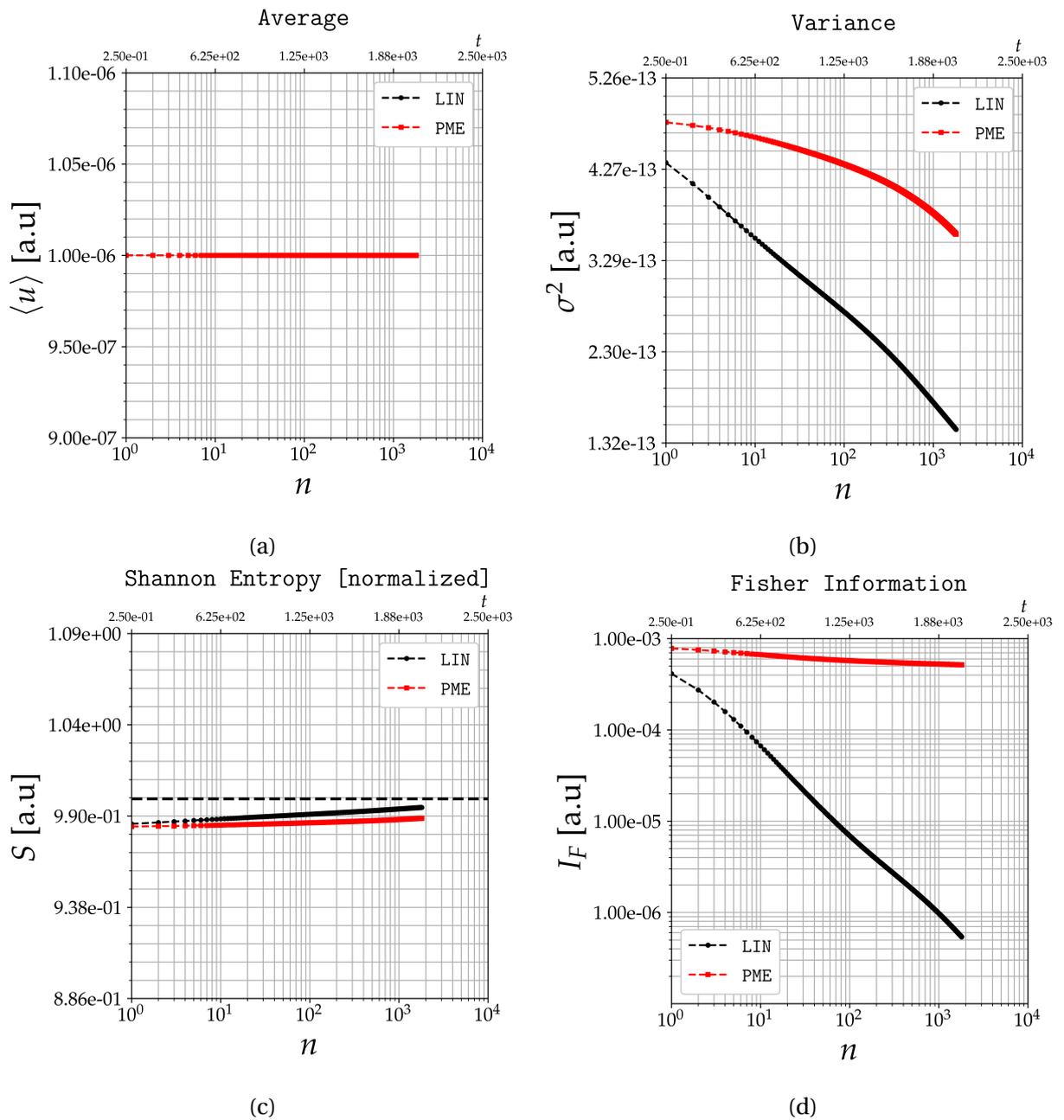


Figura 5.14: Evolução dos observáveis de interesse da amostra object002. São mostrados, em ordem, valor médio, variância, entropia de Shannon normalizada e Informação de Fisher.

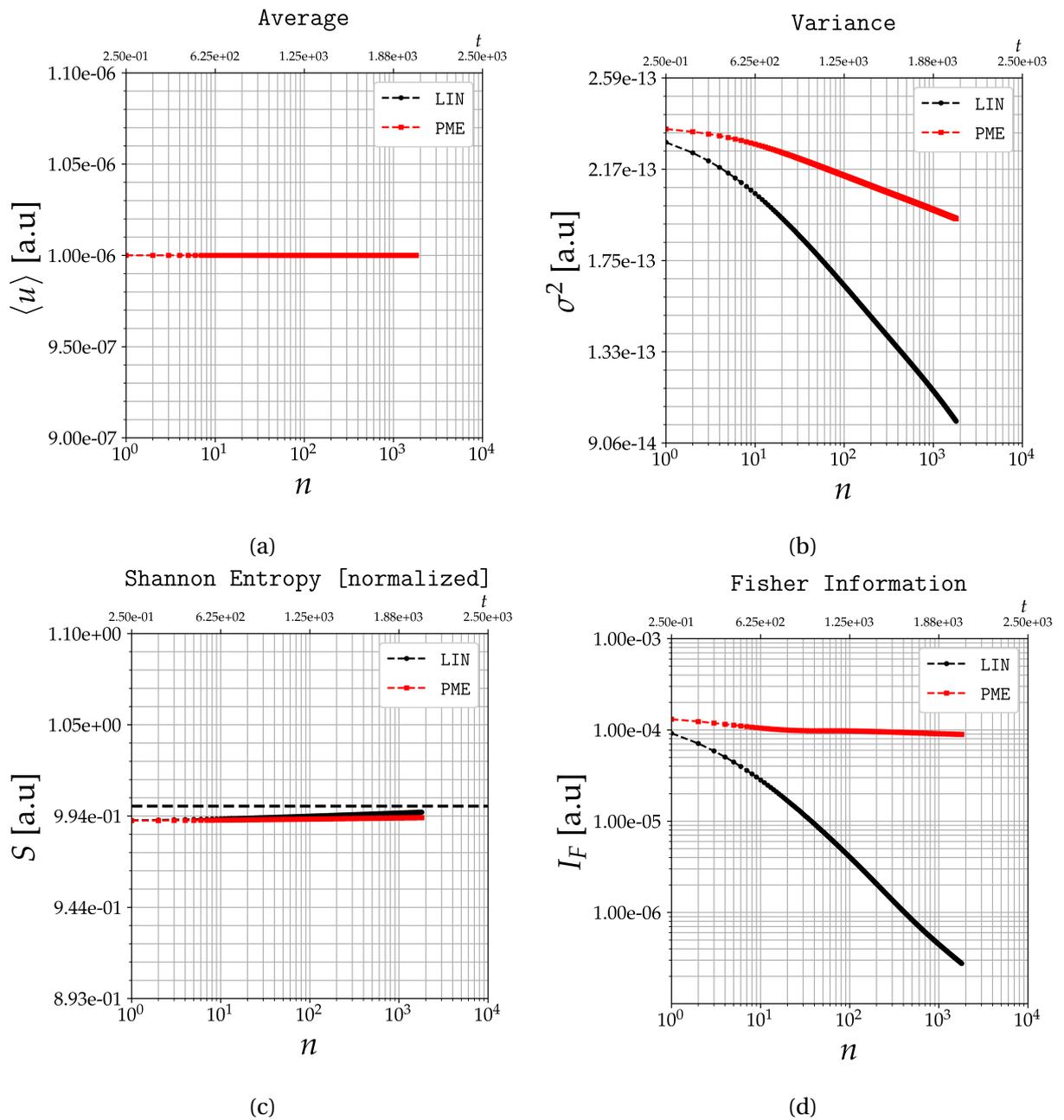


Figura 5.15: Evolução dos observáveis de interesse da amostra texture006. São mostrados, em ordem, valor médio, variância, entropia de Shannon normalizada e Informação de Fisher.

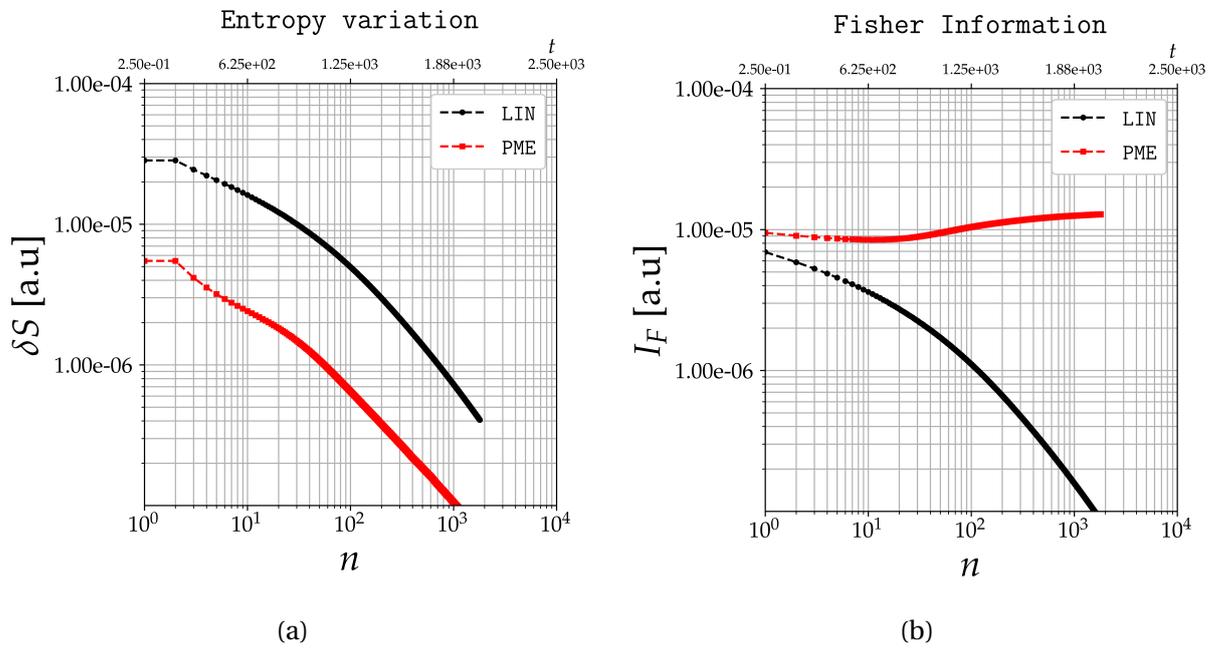


Figura 5.16: Evolução dos observáveis δS e I_F da amostra bokeh000.

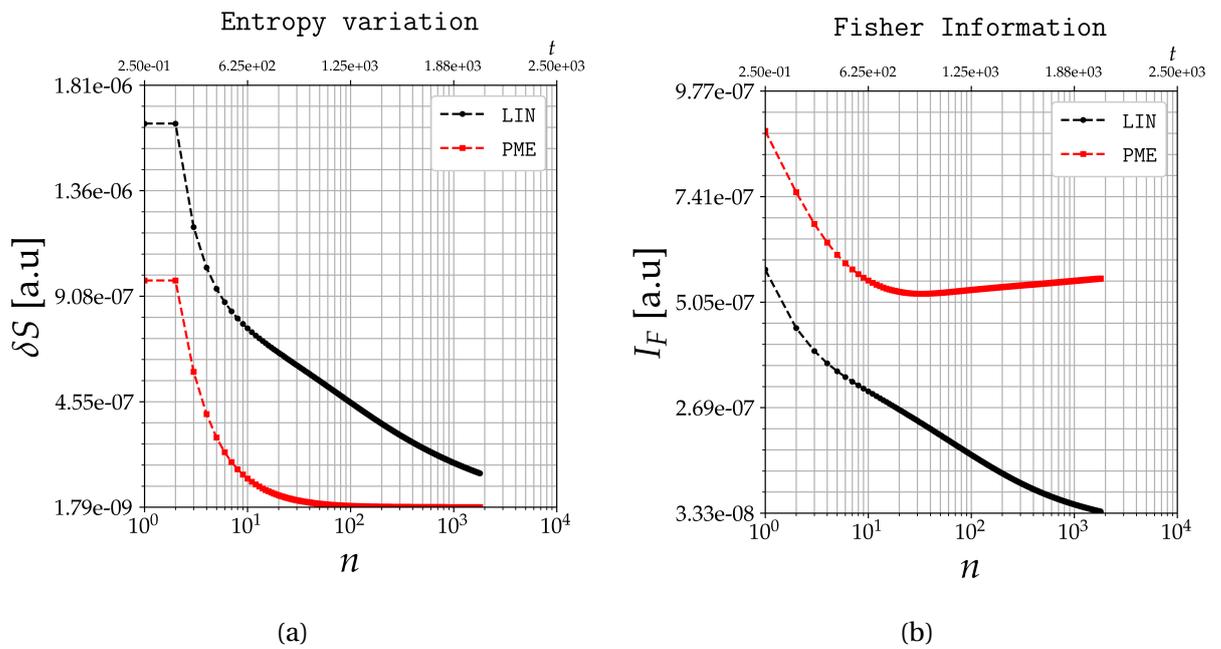


Figura 5.17: Evolução dos observáveis δS e I_F da amostra misc002.

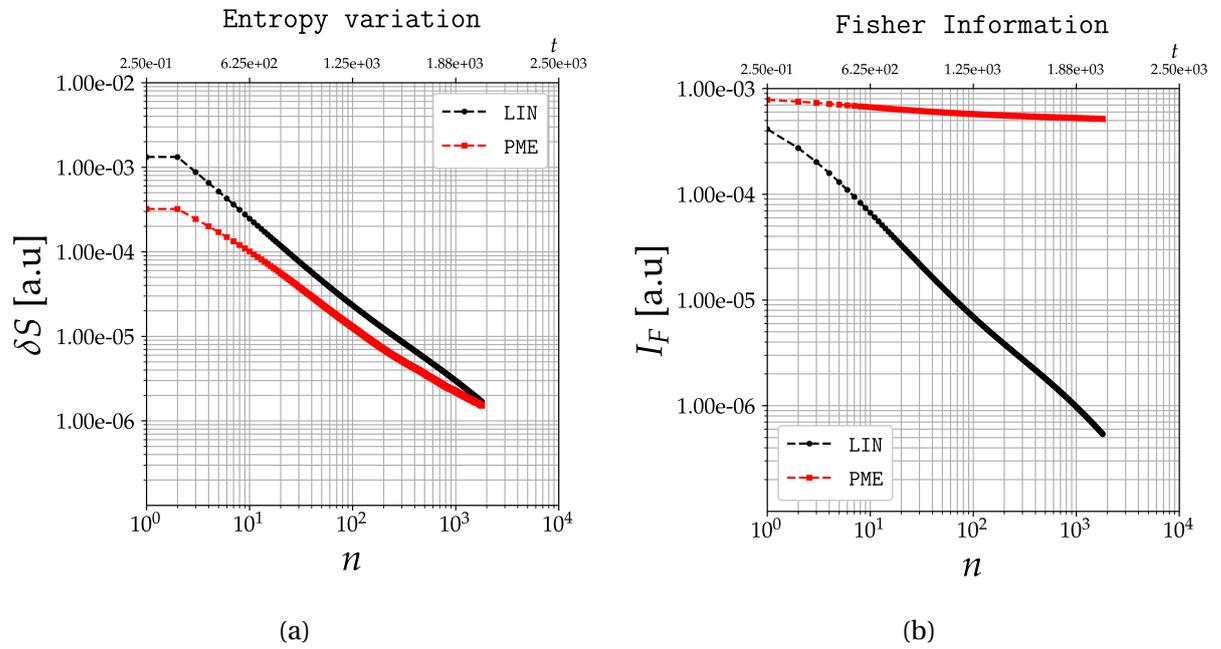


Figura 5.18: Evolução dos observáveis δS e I_F da amostra `object002`.

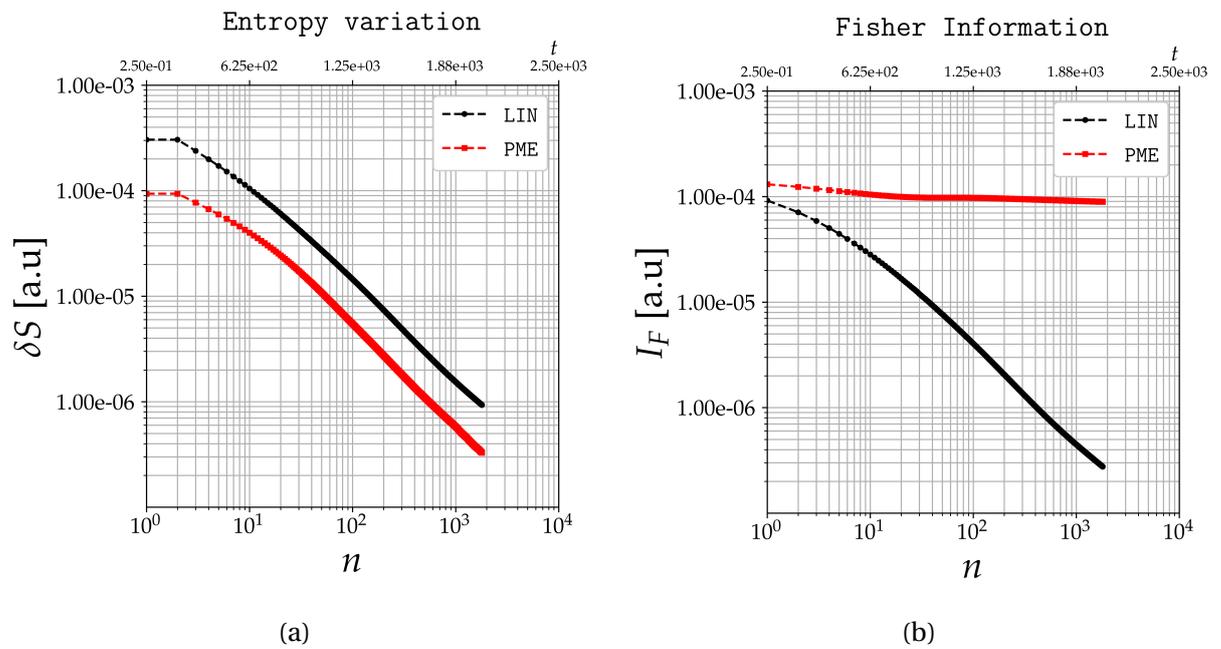


Figura 5.19: Evolução dos observáveis δS e I_F da amostra `texture006`.

5.4 Potencialidade em compressão de dados com preservação estrutural

A idéia desta Seção é mostrar que um dos “efeitos colaterais” da discretização da EPM, conhecido na literatura como efeito escada⁴ [170, 171, 229], pode ser visto como um recurso à compressão de dados, visto que leva a uma representação com modas mais definidas nos histogramas de luminâncias, mantendo o caráter sintático – ou estrutural – da imagem muito mais conservado do que no caso linear. Tal como discutido e visualizado nos capítulos anteriores, ambas difusões tendem a levar o dado inicial a uma configuração homogênea, embora no caso não-linear se chegue, de fato, a uma configuração homogênea *por partes*; eis o referido efeito escada.

A rota para um estado de máxima entropia contempla também uma redução concreta da variância de u . Portanto, o histograma de intensidades⁵ deve, no caso mais extremo, se aproximar de $\delta_{i-i'}$, em que $i' \equiv \arg\{x_i = \langle u \rangle\}$. Entretanto, mesmo no caso linear, valores excessivamente altos para σ são necessários para que atinja um histograma unimodal. Concretamente, o que se observa para valores de σ variando entre ordens 10^0 e 10^2 é uma redução da variância em torno das modas presentes na imagem original, tal como mostrado nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22.

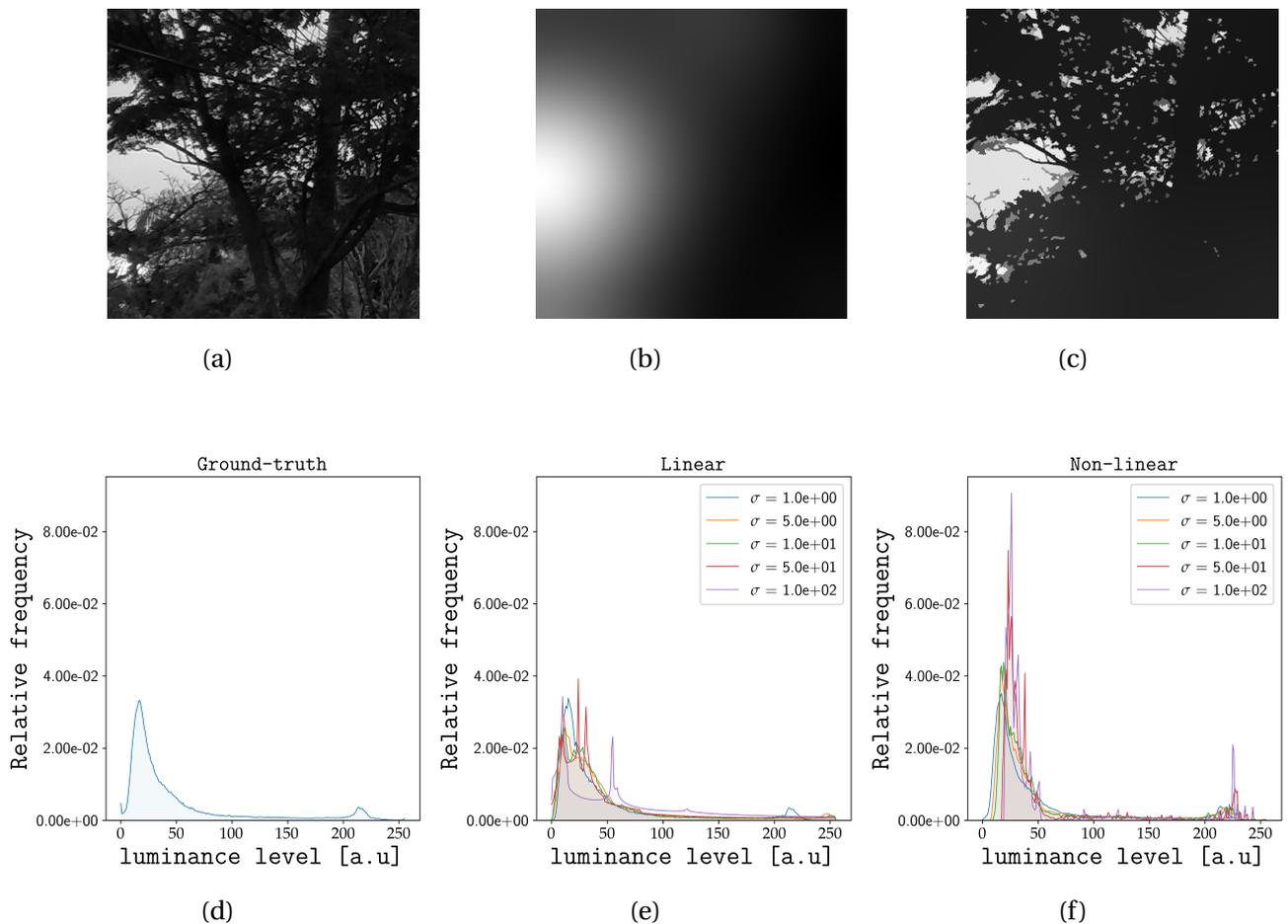


Figura 5.20: Recorte da amostra `misc004` e suas versões difundidas linear e não-linearmente com $\sigma_{\text{MAX}} = 100$ px, respectivamente. Em (d), (e) e (f) são mostrados os respectivos histogramas de luminância superpostos para diferentes valores de σ .

O comportamento de redução da variância em torno das modas opera de modo que pode-se explorar a redundância psicovisual do sistema visual humano [169, 77], reduzindo a profundidade em bits das imagens

⁴No inglês: *staircasing effect*.

⁵Note-se aqui que não foi usado o termo luminância, pois tal análise se aplica igualmente aos canais cromáticos. De fato, este argumento pode ser estendido para qualquer distribuição cujos observáveis sejam positivos (magnitude, energia etc).

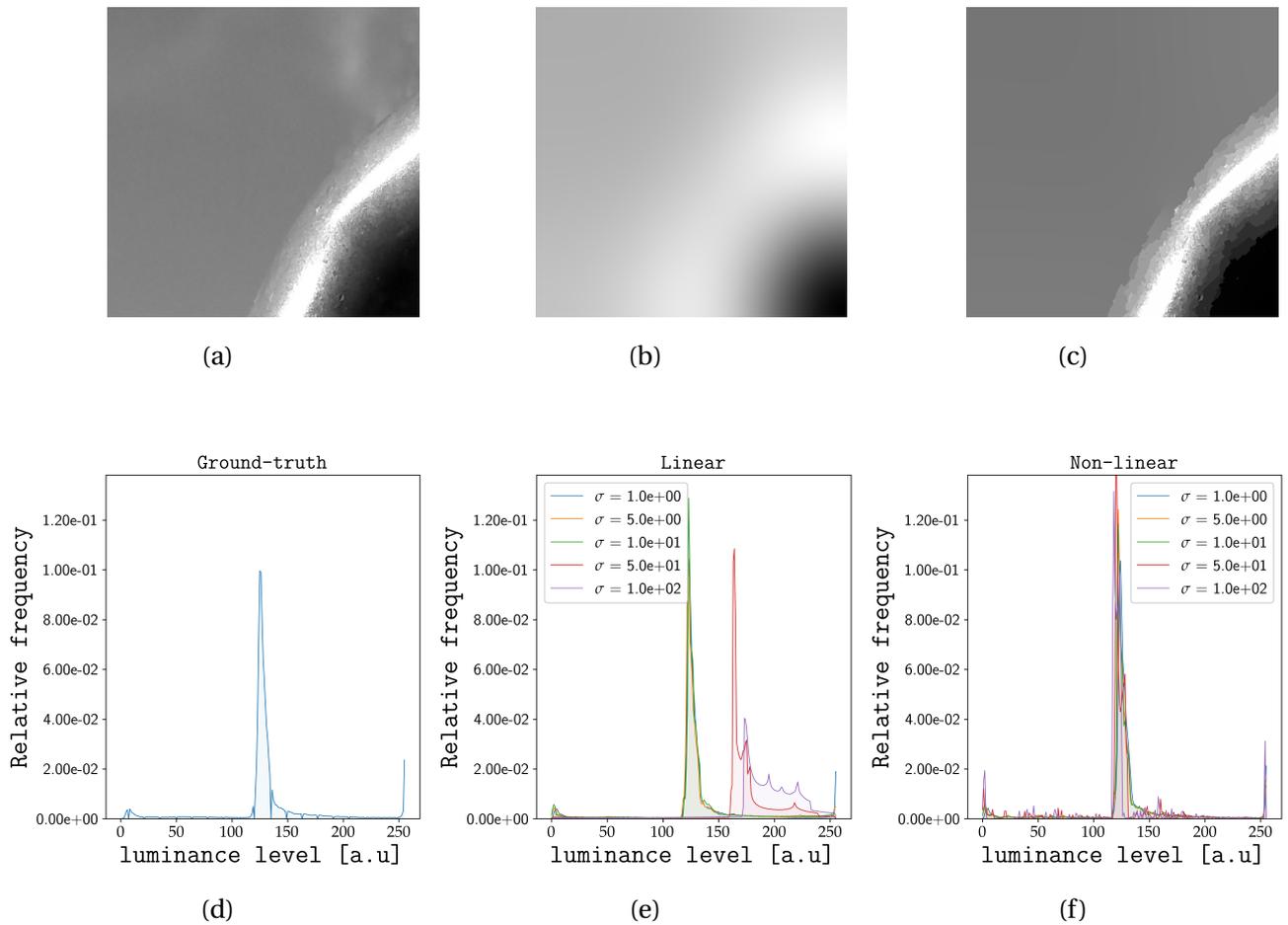


Figura 5.21: Recorte da amostra *obj001* e suas versões difundidas linear e não-linearmente com $\sigma_{\text{MAX}} = 100$ px, respectivamente. Em (d), (e) e (f) são mostrados os respectivos histogramas de luminância superpostos para diferentes valores de σ .

difundidas. Entretanto, deve-se chamar atenção para o fato de que não foi possível, em todos os experimentos realizados, observar uma consistência nas evoluções dos histogramas. Isto é, foram observados casos em que os histogramas das imagens difundidas linearmente guardaram maior semelhança com os histogramas originais, bem como casos em que as difusões não-lineares guardaram maior semelhança com os padrões de referência. A Figura 5.23 mostra a evolução das divergências KL entre referência, linear e não-linear para $\sigma \in \{1, 5, 10, 50, 100\}$ sobre as imagens mostradas nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22.

Interessantemente, pode-se observar três evoluções distintas, quantificadas pela divergência KL:

- i. Para o recorte da amostra *misc004*, a divergência KL entre referência e caso não-linear aumenta consistentemente com σ , mantendo-se sempre maior que a divergência no caso linear;
- ii. Analogamente, para o recorte da amostra *obj001*, a divergência KL do caso linear tenha se mantido sempre maior que o caso não-linear;
- iii. Por fim, para o recorte da amostra *obj004*, verifica-se uma inversão na evolução das divergências KL ao longo da variação de σ .

Os três casos listados acima refletem fidedignamente o universo de centenas de imagens processadas para tais levantamentos. Há a indicação, portanto, que a representatividade da compressão de dados via difusões linear e não-linear guarda –como esperado num cenário multiescala– uma dependência com a escala. O desafio reside no fato de que não há uma formulação fechada para que tal dependência seja monotônica⁶.

⁶Note-se aqui que tratamos da divergência KL entre os histogramas das imagens. Para o caso das evoluções das imagens como distribuições propriamente ditas, tomam lugar as discussões do Capítulo 4.

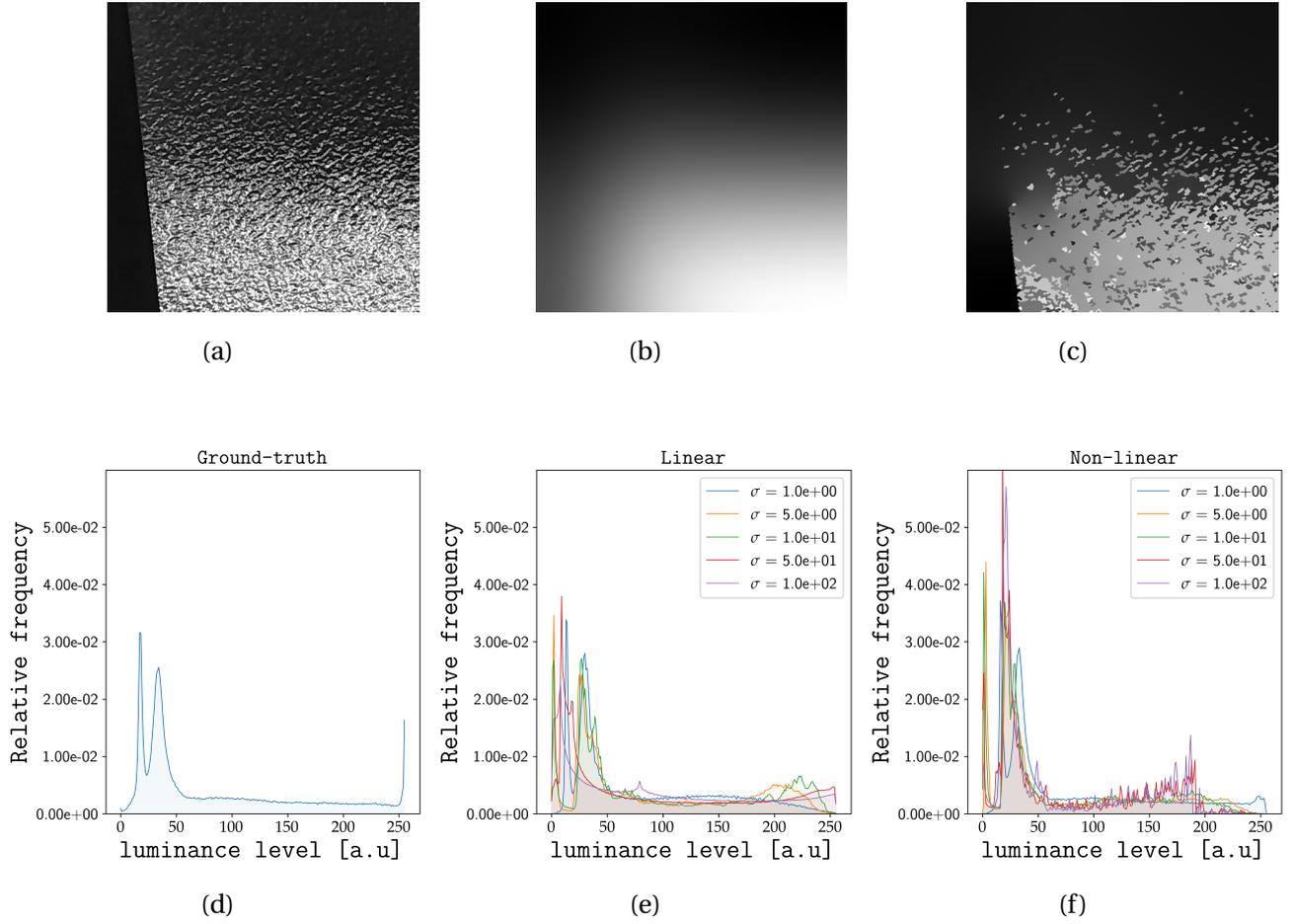


Figura 5.22: Recorte da amostra obj004 e suas versões difundidas linear e não-linearmente com $\sigma_{\text{MAX}} = 100$ px, respectivamente. Em (d), (e) e (f) são mostrados os respectivos histogramas de luminância superpostos para diferentes valores de σ .

5.5 Estimação de escala característica

Esta última Seção traz os resultados de experimentos cuja finalidade consiste em se gerar observações de eventuais relações entre parâmetro de escala e resolução característica de uma imagem. De todas as investigações realizadas até aqui, esta possui o maior potencial prático, visto que a tarefa de estimação da *escala característica* de uma cena não é trivial, muito devido ao fato de que cenas reais possuem alto grau de diversidade. Levantamentos como os mostrados aqui foram realizados por Sporring na segunda metade dos anos 90 [199, 200, 201, 202], mas até onde sabe este autor, a questão não foi mais aprofundada.

A idéia de escala característica em um espaço-escala, tal como proposta por Sporring, é de mapear pontos em que a variação da entropia em relação a σ seja maximizada; isto é, deveríamos observar os extremos de

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\sigma}. \quad (5.5)$$

Das Equações (4.24) e 4.96, temos

$$\frac{dS}{d\sigma} = c^2 \sigma I_F(\sigma), \quad (5.6)$$

em que o parâmetro de estimação passa a ser σ , ao invés de $\sigma^2 = 2t$. Deve-se notar que diferentemente do caso linear, em que há a relação explícita $\sigma^2 = 2t$, não há estabelecida uma conexão $\sigma^2(t)$ para a EPM, de modo que qualquer levantamento da forma $\sigma S'(\sigma)$ para o caso não-linear carregará consigo uma hipótese falsa. Em outras palavras, não há definida uma *escala natural* para a EPM.

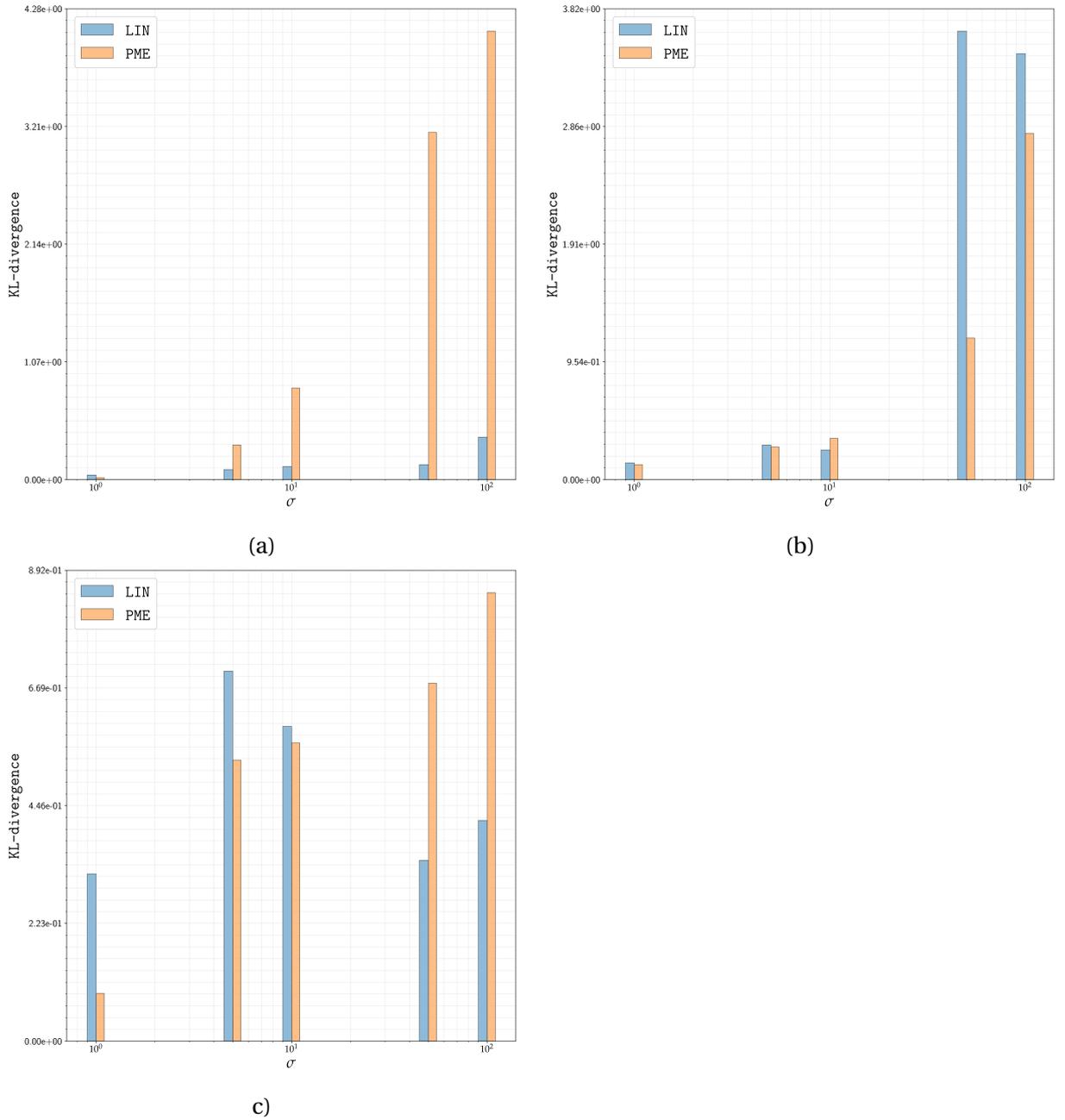


Figura 5.23: Evolução das divergências KL sobre as distribuições de níveis de luminância entre imagem referência e suas versões difundidas linear e não-linearmente para recortes da amostra *misc004*, *obj001* e *obj004*, respectivamente.

Para os experimentos que seguem, ao invés de usarmos diretamente σ , usaremos a reparametrização proposta por Florack *et al.* em [57],

$$\sigma = \sigma_0 e^\tau, \quad (5.7)$$

em que a constante σ_0 fixa unidades. A razão para esta reparametrização é que dessa forma o caráter invariante do espaço-escala linear é explicitado, visto que [57]

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \sigma. \quad (5.8)$$

Note-se que este caso contempla naturalmente – com o devido ajuste das constantes – a difusão linear:

$$\tau = \frac{1}{2} \ln(2t). \quad (5.9)$$

Na prática [200], usa-se

$$\tau = \ln(t) = 2 \ln(\sigma). \quad (5.10)$$

Para o caso linear, portanto, o problema é reescrito em termos da maximização de

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c^2 t(\tau) I_F(t(\tau)), \quad (5.11)$$

com $t = \exp(\tau)$. Na Figura 5.24 é reproduzido um experimento realizado por Sporring e Weickert em [200] sobre uma imagem da base de imagens MIT VisTex[®] [174].

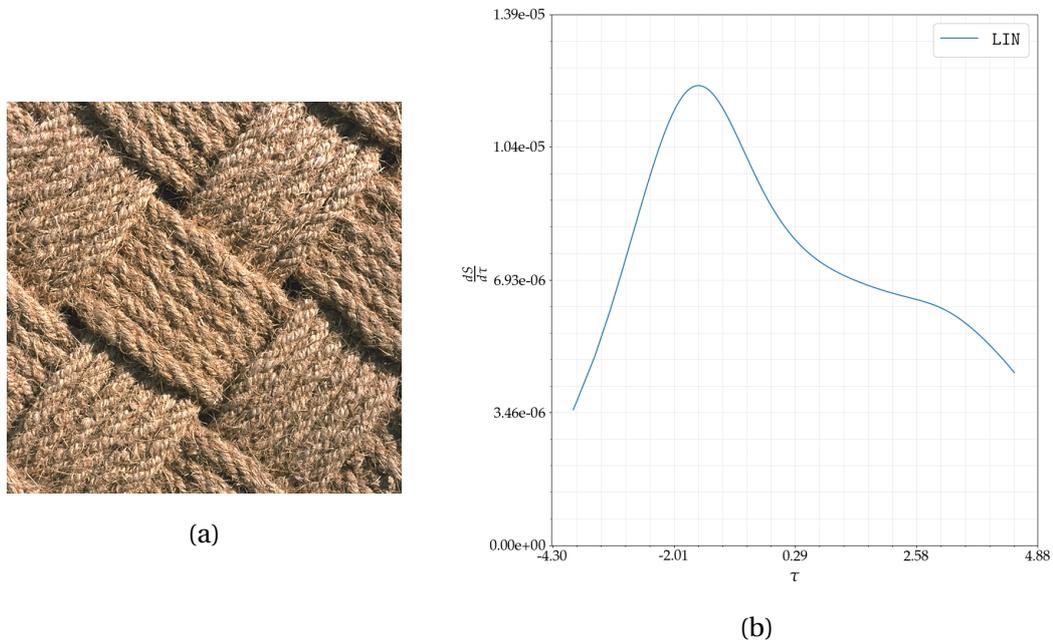


Figura 5.24: Reprodução de um dos experimentos de Sporring [200] sobre a amostra Fabric0012 da base MIT VisTex[®], mostrada em (a). Em (b) é mostrada a evolução da variação da entropia com o fator de escala σ .

Uma vez que imagens naturais trazem consigo uma grande carga de complexidade, é interessante que se realizem levantamentos sobre imagens simuladas, em que os parâmetros sejam ajustáveis. Em um cenário controlado pode-se investigar uma eventual relação entre escala e resolução sem maiores interferências. Nesse sentido, um experimento numérico é descrito a seguir.

Considere que a imagem em questão seja composta por um certo número N_D de discos cujo raio médio $\langle r \rangle$ é estabelecido *a priori* e cujos centros são escolhidos ao acaso, desde que não ocorra superposição entre dois ou mais objetos⁷. A distribuição dos raios é conhecida *a priori*, correspondendo a uma Gaussiana com variância σ_r^2 também pré-estabelecida, ao passo que os centros são distribuídos uniformemente sobre a imagem, desde que nenhum disco ultrapasse os limites desta. Por fim, esta imagem pode ou não ser degradada por ruído gaussiano com média μ e variância σ_n^2 . Um exemplo de tal modelo pode ser visto na Figura 5.25.

⁷Nas simulações realizadas, ao invés de se estabelecer o número N_D , fez-se uso de um processo iterativo que cessasse quando um certo percentual de preenchimento da imagem, i.e., a razão entre área ocupada e total, fosse atingido. Por padrão, em todas as imagens usadas este percentual foi ajustado em 0,50. Contudo, devido à dificuldade natural em se popular a imagem – sem superposições – quando esta encontra-se parcialmente preenchida, um critério de parada foi estabelecido de modo a encerrar a simulação após $N_T = 1 \cdot 10^4$ tentativas de atualização sem mudança na razão de preenchimento.

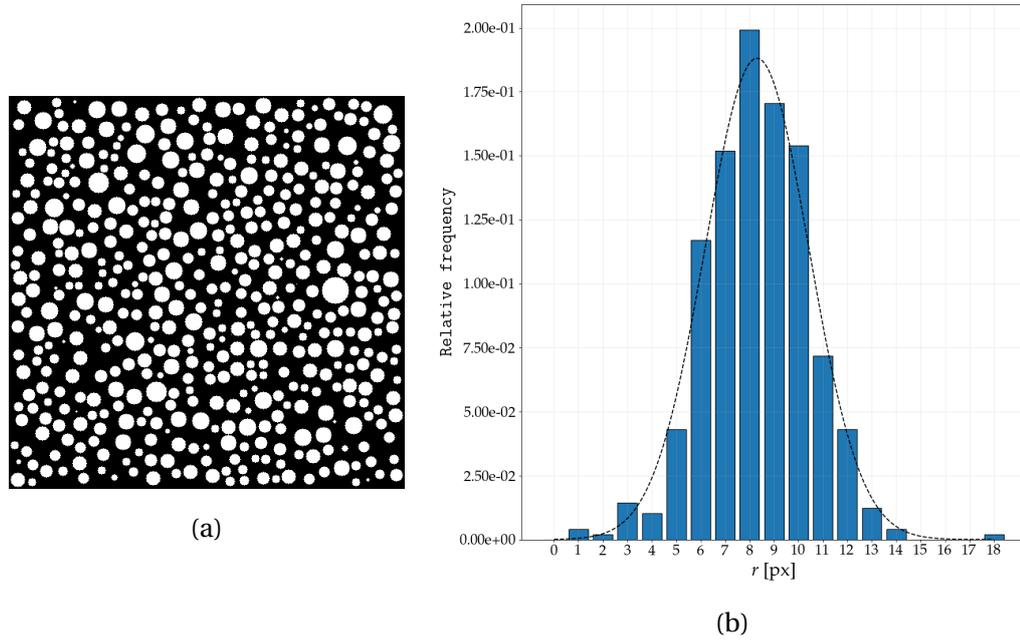


Figura 5.25: Imagem simulada e seu histograma, respectivamente. Para esta distribuição, $\langle r \rangle = 8,23$ e $\sigma = 2,09$ pixels.

5.5.1 Experimento I: variância nula, sem adição de ruído

Para o primeiro experimento foram simulados diversos conjuntos de imagens com σ_r^2 nulos, visando reduzir as incertezas em eventuais estimações. Um conjunto de imagens usados para ilustrar a metodologia é mostrado na Figura 5.27. Neste conjunto os raios variam entre 5 e 24 pixels em incrementos de 1 pixel. Todas as imagens possuem dimensões de 500×500 pixels.

A Figura 5.26 mostra que dentro do intervalo testado, as dimensões características apresentam forte correlação linear com as escalas estimadas τ_E , correspondentes aos máximos de $S'(\tau)$. Por sua vez, a EPM só é capaz de manter alguma correlação para um intervalo restrito, perdendo qualquer correspondência para valores acima de $\langle r \rangle \approx 12$ px.

5.5.2 Experimento II: variância nula, com adição de ruído

Neste segundo experimento, a variância sobre os raios permanece nula. Entretanto, toda a imagem é degradada com ruído Gaussiano de média nula, cujos desvios-padrão – para os casos aqui expostos – variam de acordo com $\sigma_n \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$. Valores muito maiores para σ_n levam a degradações praticamente irreparáveis sobre os dados.

Se o Experimento I mostrou alguma robustez – pelo menos no caso linear – quanto à correlação entre dimensões características e escalas estimadas em um ambiente sem ruído, a idéia agora é provocar perturbações de intensidade crescente, segundo os valores de σ_n acima. Em outras palavras, busca-se observar a capacidade da descrição multiescala em preservar a informação de escala característica ante a introdução de degradações nos dados iniciais. As Figuras 5.28 e 5.29 trazem exemplos de imagens de referência submetidas a ambas as difusões para $\langle r \rangle = 5$ e $\langle 10 \rangle$ pixels, respectivamente. Para além das análises sobre correlação entre $\langle r \rangle$ e τ_E , nota-se por meio destas duas figuras a superioridade em remoção de ruídos das EPM frente à sua contraparte linear.

5.5.3 Experimento III: variância não-nula, sem adição de ruído

O propósito deste penúltimo experimento é de gerar uma maior variabilidade estrutural nas imagens por meio de valores não nulos de σ_r , mas ainda sem introdução de ruído. Este estágio pode ser visto como uma

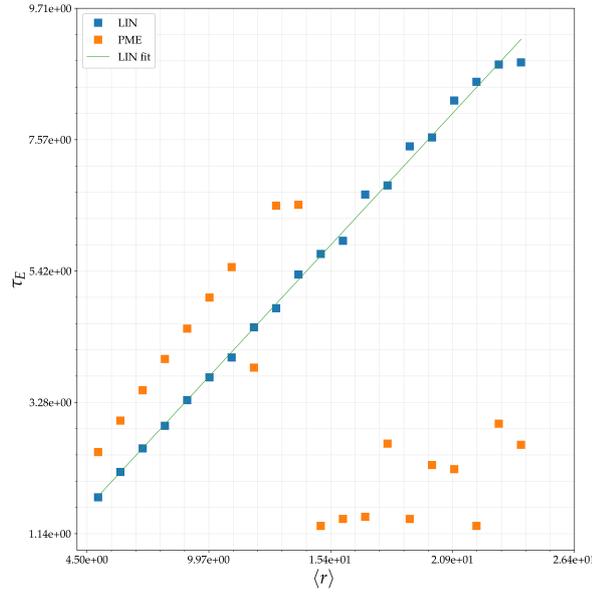


Figura 5.26: Gráfico de escala estimada τ_E versus raios médios de referência. Nota-se claramente que a difusão linear permite – nos sistemas simplificados sob análise – que se correlacione linearmente a escala com o tamanho característico de uma imagem. Por outro lado, a difusão não-linear, como previsto, não é capaz de gerar tal correlação.

preparação para o experimento IV, em que as imagens simuladas apresentam complexidade minimamente condizente com desafios do mundo real.

Neste experimento, o desvio padrão dos raios dos discos foi ajustado como

$$\sigma_r = \left\lceil \max \left\{ \frac{1}{3} \langle r \rangle ; 1 \right\} \right\rceil, \quad (5.12)$$

em que $\lceil \cdot \rceil$ denota a função menor inteiro. Ajustar σ_r em função de $\langle r \rangle$ torna possível explorar um aumento gradativo na diversidade estrutural das imagens sem necessidade de varrer as duas estatísticas de modo independente. A Figura 5.31 traz um exemplo de configuração usada neste experimento.

A Figura 5.32 traz os resultados das maximizações para o Experimento III. Nota-se neste caso mais uma vez a capacidade da difusão linear em se proporcionar uma forte correlação linear entre τ_E e $\langle r \rangle$, mas desta vez acompanhada de uma capacidade mínima de sua contraparte não-linear de fazer o mesmo, pelo menos para escalas intermediárias.

5.5.4 Experimento IV: variância não-nula, com adição de ruído

Neste último experimento busca-se gerar, dentro do modelo adotado, a maior variabilidade estrutural possível nas imagens. Isto é feito ajustando-se valores não nulos de σ_r e σ_n . De modo análogo aos experimentos anteriores, os desvios-padrão dos raios dos discos evolui com a escala segundo a Equação (5.12). O desvio-padrão do ruído varia, novamente, entre 0,1 e 0,5, com incrementos de 0,1. As Figuras 5.33, 5.34 e 5.35 trazem alguns exemplos dos dados gerados para este Experimento.

A Figura 5.36 traz os resultados das maximizações para o Experimento IV. Neste último caso, muito mais complexo, ambas difusões perdem a capacidade de gerar estimativas lineares entre τ_E e $\langle r \rangle$ para níveis de ruído intermediários.

5.6 Discussão

Realiza-se aqui uma síntese sobre a experimentação anterior, que subsidiará as conclusões finais do Trabalho no que diz respeito aos aspectos computacionais estudados. Deve-se deixar claro que embora apenas quatro amostras tenham sido usadas no capítulo anterior, estas representam em boa medida as centenas de observações e análises realizadas. De todo modo, nenhuma conclusão aqui tomada deve ser encarada como de caráter geral, mas sim indicativo. Existem muitos fatores a serem levados em consideração e os experimentos realizados não puderam, por questão de complexidade e agenda, compreender um espectro maior de variáveis⁸.

O primeiro ponto que deve ser levantado é que a evolução dos observáveis nos processos de difusão ocorre como previsto, à medida em que se caminha para um estado de variância e informação de Fisher mínimas e entropia máxima, além de uma variação nula do valor médio $\langle u \rangle$. Entretanto, não foi possível observar um padrão sobre a forma com que tais observáveis evoluem; ou, em outras palavras, se a variação “temporal” destes apresenta alguma estrutura consistente, tal como leis de potência, por exemplo. De todo modo, para as amostras investigadas, pôde-se visualizar que – à exceção da informação de Fisher, que em dois casos (vide Figuras 5.14 e 5.15) evoluiu aproximadamente segundo uma lei de potência – S e σ^2 apresentam uma evolução com estrutura aproximadamente logarítmica. No caso da entropia, a convergência para S_{MAX} segundo um perfil logarítmico se manifestou desde as primeiras décadas, ao passo que σ^2 apresenta uma perfil de estagnação antes de decair propriamente. Note-se também que as taxas de decaimento para os casos linear e não-linear diferem muito para σ^2 , como reflexo da capacidade de preservação estrutural da EPM. Tal preservação estrutural mediante aplicação da EPM possui aplicações interessantes, já que se caminha neste caso para uma *segmentação* de imagens; isto é, a separação da imagem original em suas partes constituintes.

Ainda sobre um eventual atingimento do estado de máxima entropia, mínima variância etc.: para imagens com dimensões da ordem de $1 \cdot 6 \text{ px}^2$, experimentos com valores absolutamente altos de σ (da ordem de 10^3 px) foram realizados. Mesmo com todo o poderio computacional disponível, ao final de quatro semanas ainda não havia se observado uma configuração de equilíbrio, caracterizada por $S_{\text{norm}} = 1$ e $\sigma^2 \approx 0$ (este último referente à variância dos níveis de luminância). Esta questão de performance para longos tempos de difusão é esperada, visto que o método explícito demanda valores pequenos para Δt , e o processo de iterar matrizes de alta ordem é custoso em qualquer estrutura algorítmica serial. Nesse sentido, no que tange à questão computacional, a necessidade em se investigar métodos eficientes e paralelizáveis de difusão é real, ainda mais quando se verifica a qualidade de filtragem e pré-segmentação de imagens pela EPM, recursos estes que podem ser aplicadas em plataformas diversas daquela em que seu deu a experimentação nesta Tese.

A potencialidade em se usar as difusões como recursos para compressão de dados guarda relações com o atingimento dos estados de equilíbrio discutidos acima. Para o caso linear, toda informação seria perdida, ao passo que com a EPM um conjunto de bordas e platôs seria conservado, de modo que a representação da cena ainda seria possível, mesmo que minimamente em um cenário extremo. De todo modo, o que se observa – devido ao custo computacional discutido acima – é que mesmo o caso linear mantém certa regularidade em torno das modas dos histogramas dos níveis de luminância. Entretanto, como as próprias visualizações evidenciam (vide Figuras 5.20, 5.21 e 5.22), a EPM constitui, concretamente, um recurso mais eficiente para requantização do que a difusão-linear.

No caso linear, pelo menos de modo aproximado, puderam ser observadas semelhanças entre o decaimento da entropia e a evolução da informação de Fisher, tal como esperado do ponto de vista teórico, e pela própria construção do método numérico FTCS empregado. Mais relevante de um ponto de vista prático é o fato de que sempre foi possível estimar uma escala característica τ_E para as imagens nos casos discutidos nos Experimentos I a IV. Embora não tenha se chegado em nenhum caso a uma relação linear próxima à identidade, o fato de haver correlação linear permite, ainda sim, que escalas, dimensões e resoluções sejam estimadas, exigindo para tanto um procedimento prévio de calibração. Naturalmente, na presença de ruídos tal calibração deve ocorrer um número mínimo de vezes de modo a incorporar as contribuições estatísticas das perturbações.

⁸Há, objetivamente, um balanço entre complexidade dos modelos adotados, capacidade de *benchmarking* e viabilidade de geração de modelos analíticos. Optou-se neste Trabalho por uma abordagem menos computacional e mais teórico-informacional dos temas abordados. Explorar o espaço de parâmetros das técnicas e maximizar certas métricas com vistas à construção de modelos levaria esta Tese para um outro universo, muito mais próximo do aprendizado de máquina. Embora este seja um tema interessantíssimo, não corresponde ao enfoque do projeto.

A questão da estimação de escala característica no caso não-linear é muito mais delicada. Uma análise baseada somente nos dados obtidos poderia levar à conclusão de que a EPM é pouco eficaz na estimação de dimensões características. Entretanto, deve-se notar que a relação $dS/d\sigma \propto \sigma I_F$ é válida apenas para o caso linear. Mesmo assim, pôde-se observar alguma consistência para pequenas escalas no caso não-linear, indicando que nestes intervalos a EPM opera de modo semelhante à difusão linear.

Com o exposto nesta Seção, finda a discussão sobre aspectos mais práticos observados na experimentação computacional deste trabalho. As conclusões finais de caráter mais teórico serão apresentadas no próximo capítulo.

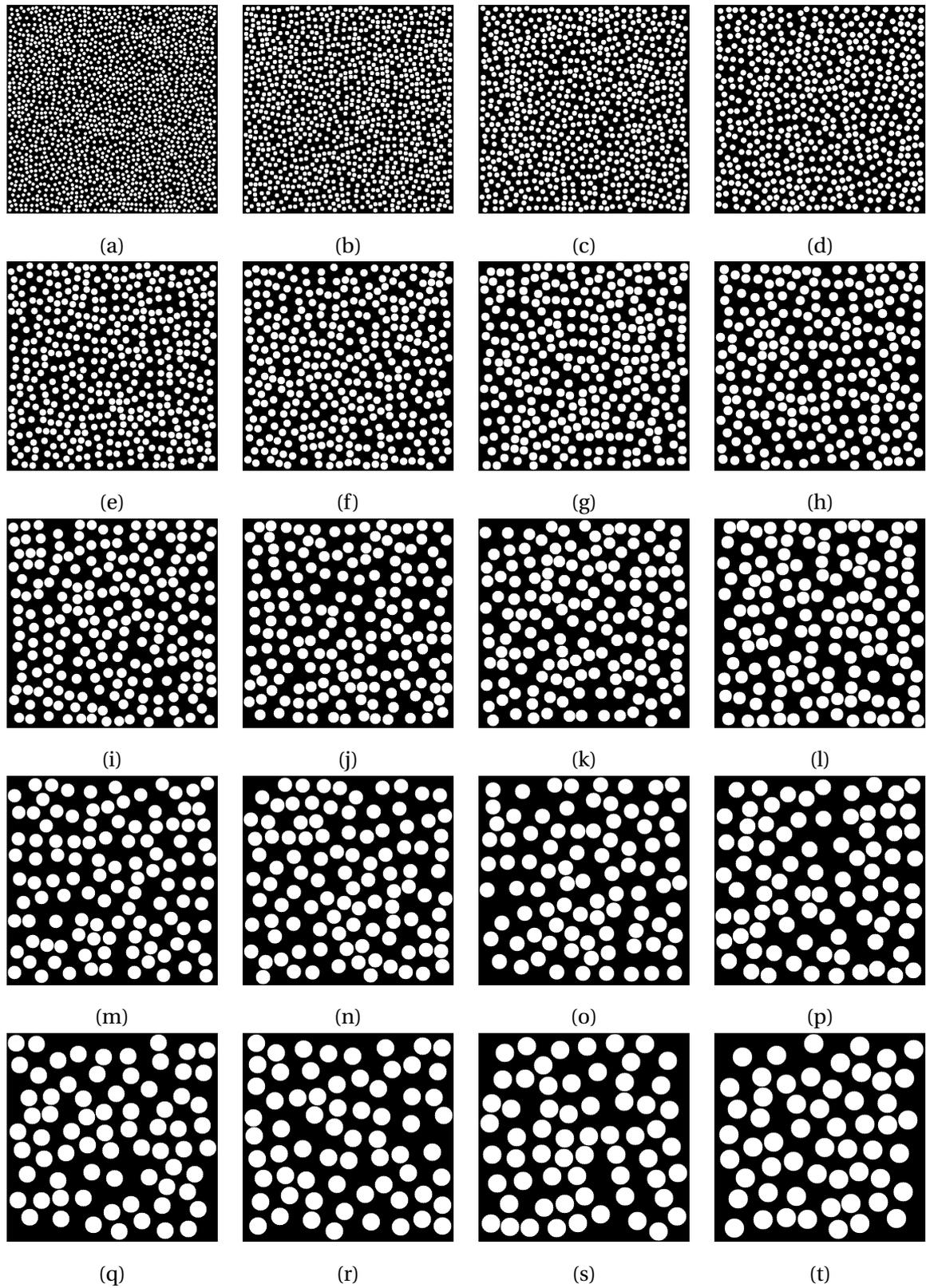


Figura 5.27: Imagens sintéticas usadas para o experimento de estimação de escala característica. Os valores de $\langle r \rangle$ variam de modo crescente de 5 a 24 px, com $\sigma_r^2 = 0$ px.

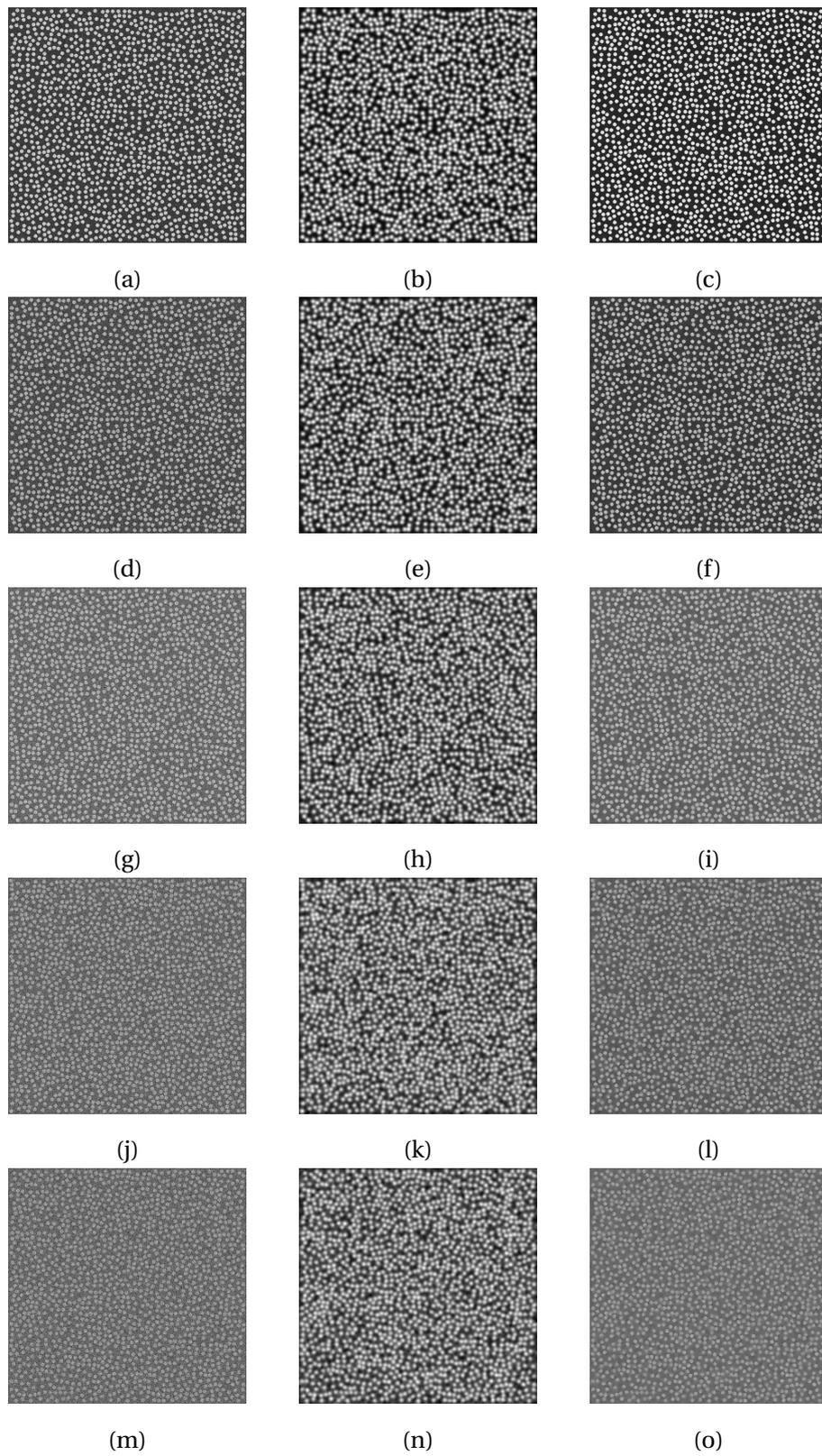


Figura 5.28: Comparação entre referências e casos linear e não-linear, respectivamente. Cada linha corresponde a um valor de σ_n entre 0,1 e 0,5, com incrementos de 0,1. Para todos os casos, são exibidos os resultados de $\langle r \rangle = 5$ px.

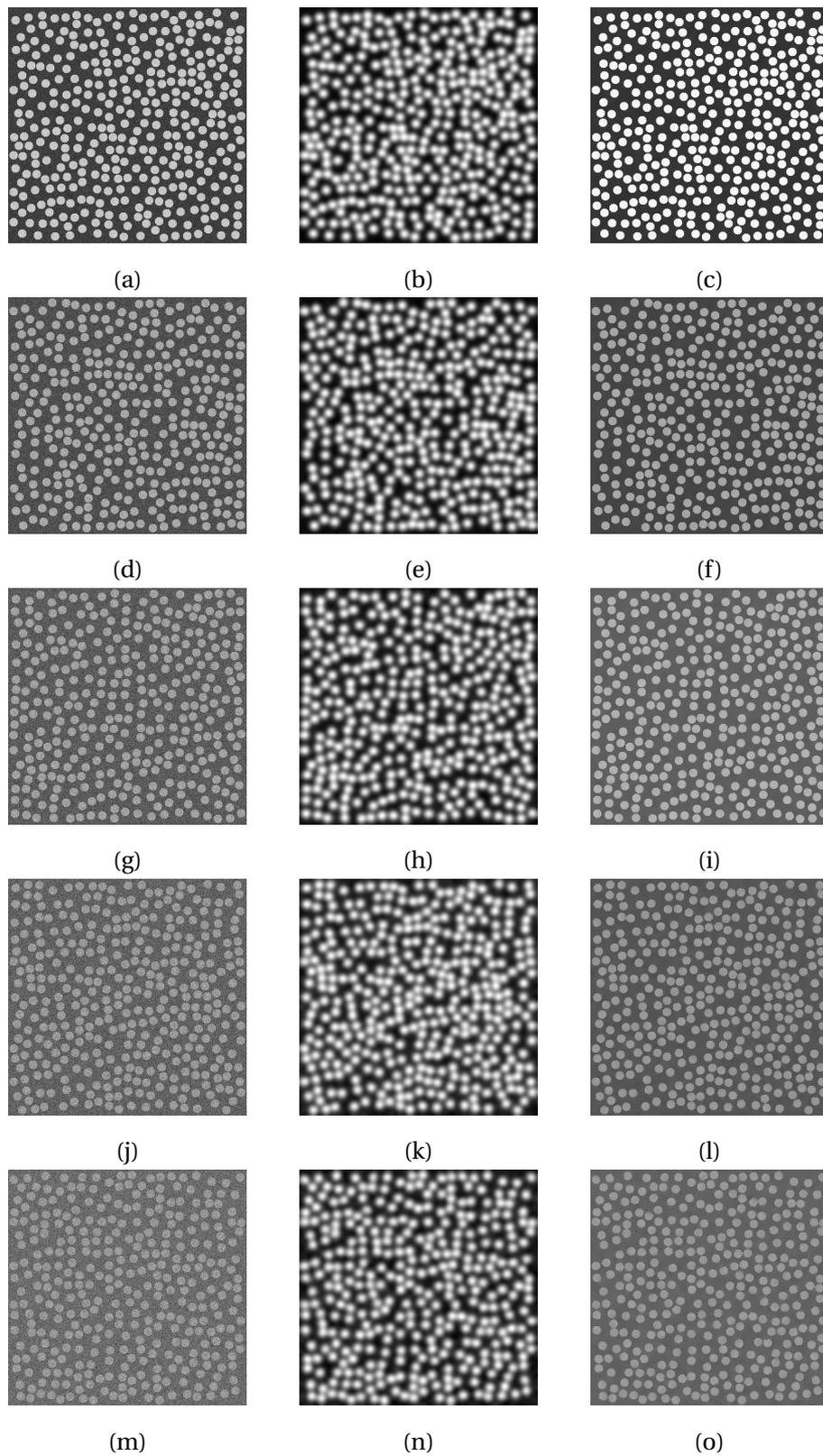


Figura 5.29: Comparação entre referências e casos linear e não-linear, respectivamente. Cada linha corresponde a um valor de σ_n entre 0,1 e 0,5, com incrementos de 0,1. Para todos os casos, são exibidos os resultados de $\langle r \rangle = 10$ px.

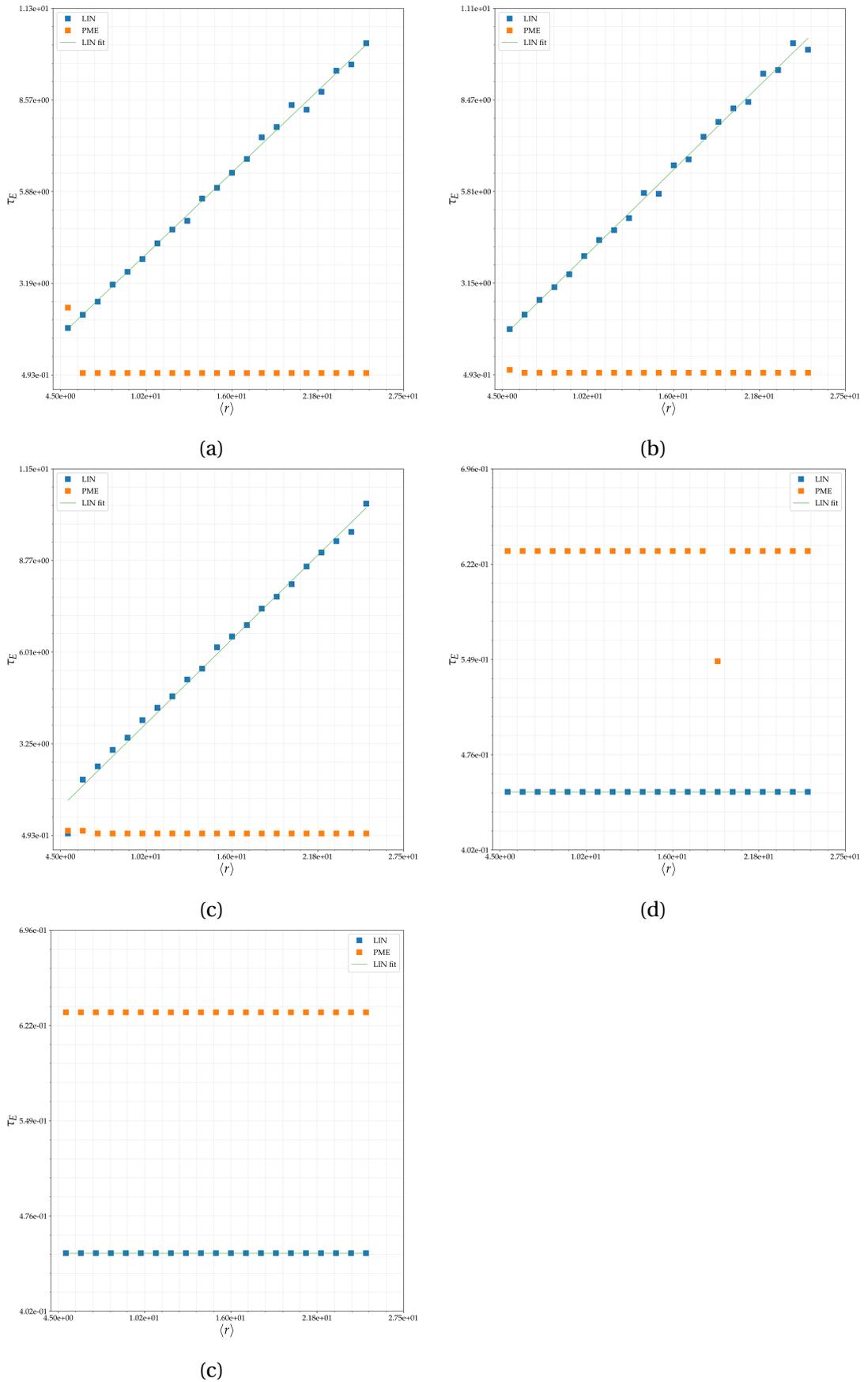


Figura 5.30: Gráficos de escala estimada τ_E versus raios médios de referência no caso de ambiente corrompido com ruído de desvio-padrão σ_n crescente, ordenados segundo este último parâmetro. De modo semelhante ao experimento I, a difusão linear permite que se estabeleça uma correlação notável entre $\langle r \rangle$ e τ_E , embora esta só ocorra para níveis moderados de ruído, a partir dos quais se perde a capacidade de estimação.

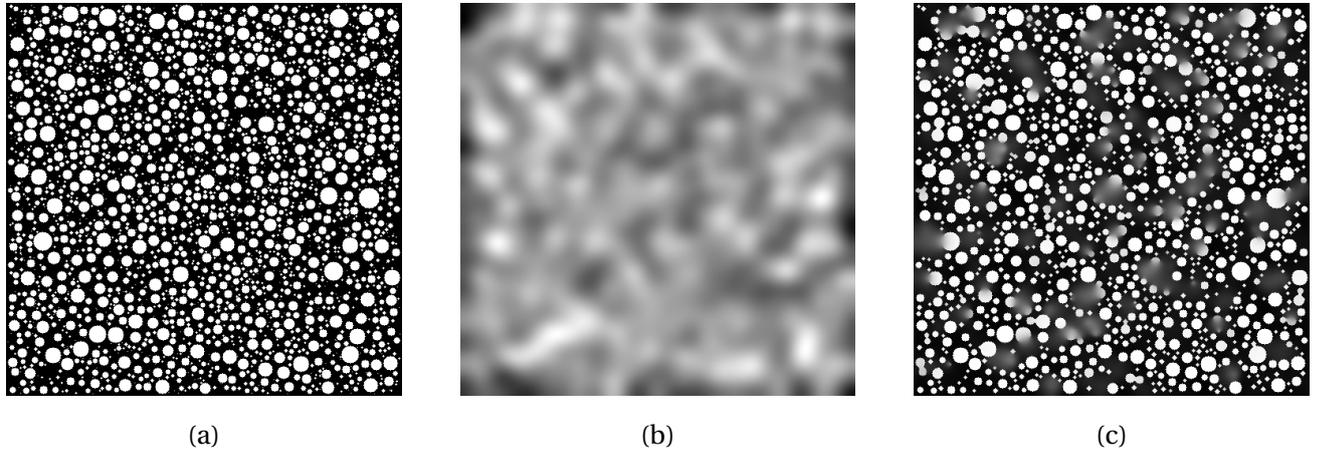


Figura 5.31: Comparação entre referência e casos linear e não-linear, respectivamente. Neste caso, para o Experimento III, são mostrados os resultados com $\langle r \rangle = 7$ e $\sigma_r = 3$ pixels.

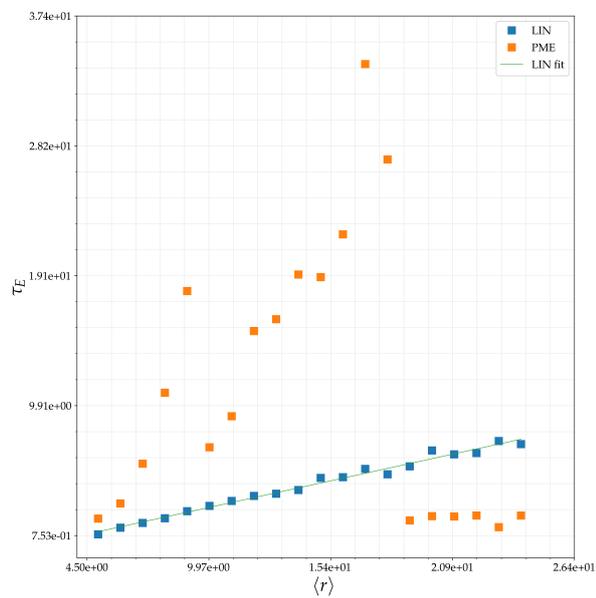


Figura 5.32: Gráfico de escala estimada τ_E versus raios médios de referência para o experimento III, com variância σ_r não-nula e $\sigma_n = 0$. Nota-se neste caso novamente uma superioridade da difusão não linear em se produzir uma correlação apreciável. De todo modo, a difusão não-linear também se mostrou capaz neste caso, pelo menos para valores pequenos e intermediários de $\langle r \rangle$ – dentro do intervalo considerado – de gerar alguma estimativa linear entre τ_E e as dimensões médias.

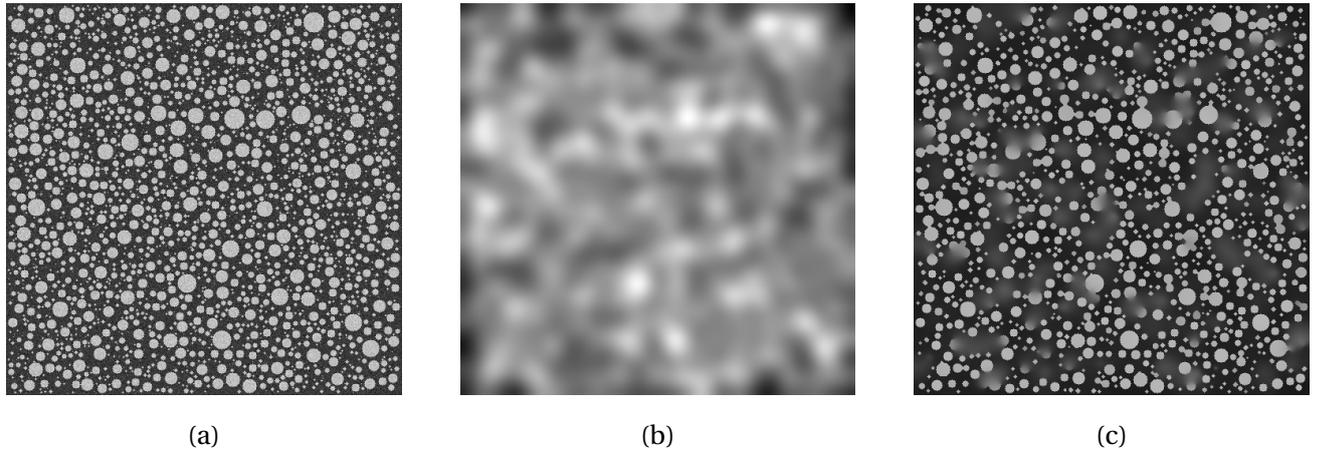


Figura 5.33: Comparação entre referência e casos linear e não-linear, respectivamente. Neste caso são mostrados os resultados com $\langle r \rangle = 7$, $\sigma_r = 3$ pixels e $\sigma_n = 0, 1$.

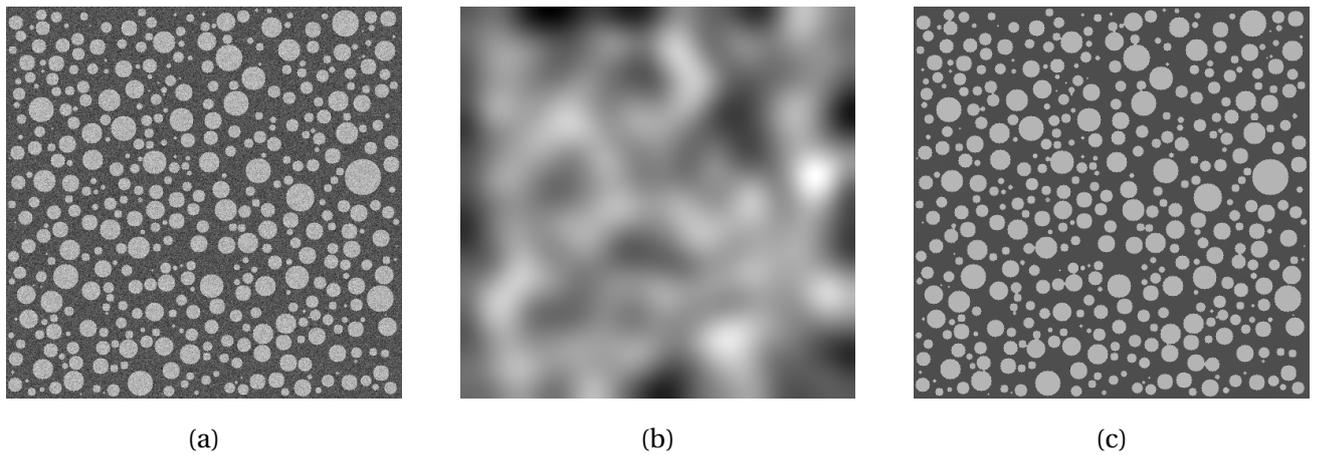


Figura 5.34: Comparação entre referência e casos linear e não-linear, respectivamente. Neste caso são mostrados os resultados com $\langle r \rangle = 12$, $\sigma_r = 4$ pixels e $\sigma_n = 0, 2$.

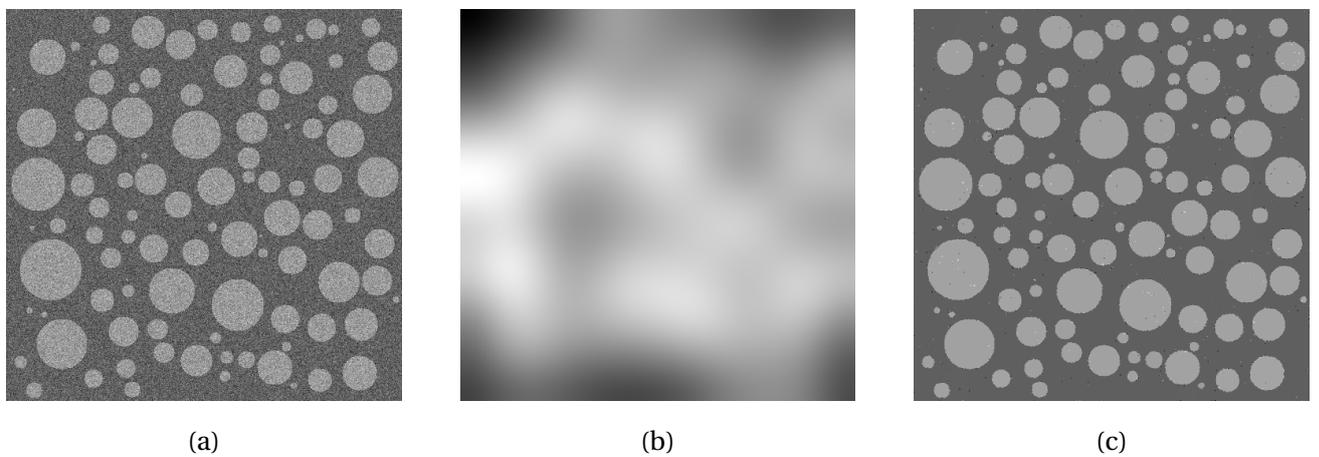


Figura 5.35: Comparação entre referência e casos linear e não-linear, respectivamente. Neste caso são mostrados os resultados com $\langle r \rangle = 24$, $\sigma_r = 8$ pixels e $\sigma_n = 0, 4$.

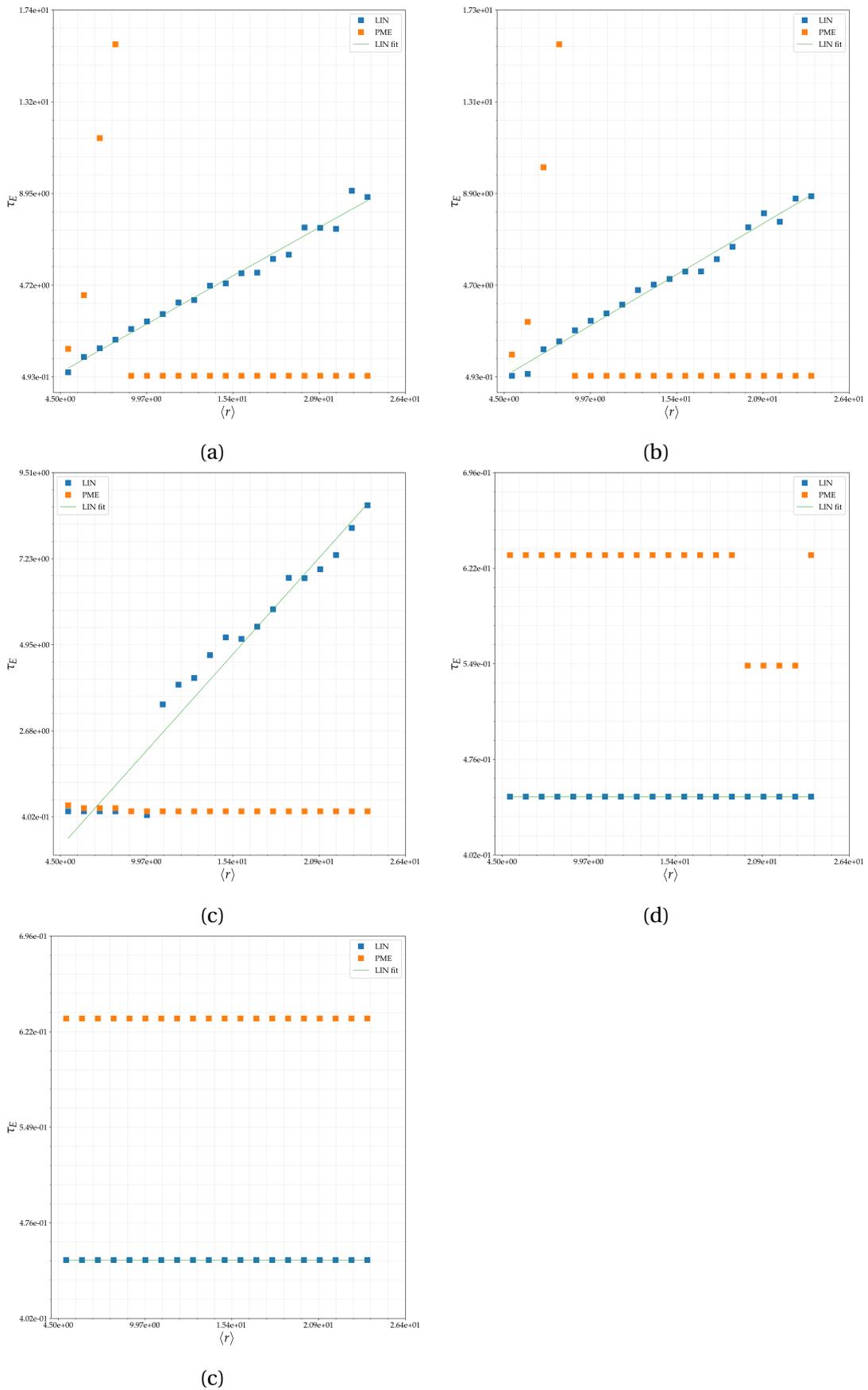


Figura 5.36: Gráficos de escala estimada τ_E versus raios médios de referência no caso de ambiente corrompido com ruído de desvio-padrão σ_n crescente, ordenados segundo este último parâmetro. Neste último levantamento, os raios dos discos possuem variância não-nula. Para este último cenário, apresenta-se mais uma vez a superioridade da difusão linear em se proporcionar estimativas lineares. Entretanto, nenhum caso foi capaz de gerar informação útil para níveis de ruído $\sigma_n \geq 0, 3$.

6.1 Um modelo informacional

Chegamos enfim à parte final deste Trabalho, cujo objeto de estudo é a descrição multiescala aplicada ao sistema visual humano segundo a Teoria de Hildreth-Marr. Dentro deste amplo cenário, foi proposto um aprofundamento da questão da informação em espaços-escala linear e não-linear, este último equipado com a Equação de Perona-Malik. Ambas difusões foram escrutinadas teórica e computacionalmente. No caso linear, foram observadas analogias importantes do espaço-escala com a teoria da estimação estatística, em que a informação de Fisher desempenha papel relevante. Tal analogia será usada neste capítulo final para que seja tecida uma proposta de teoria da informação de espaços-escala e, portanto, da visão primitiva segundo Marr. Começemos primeiro por meio do emblemático diagrama usado por Shannon em seu trabalho seminal [190]:

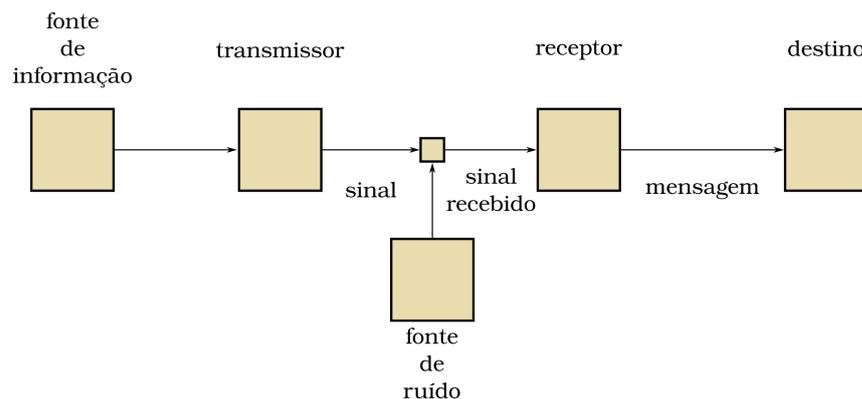


Figura 6.1: Esquema genérico de um sistema de comunicação. Adaptado de Shannon[190].

Neste diagrama estão presentes fonte, canal, fonte de ruído, transmissor, receptor e destino. Antes de abstrair a visão primordial segundo Marr e Hildreth num cenário informacional, é importante entender o papel de seus elementos constituintes. A fonte primária de informação corresponde, num contexto de visão, à parte mundo que cerca o observador e que é avaliada por este. O papel da fonte é selecionar uma imagem(mensagem) dentre as opções disponíveis no espaço de imagens (alfabeto) [161, 190]. O transmissor, ou codificador, tem – segundo Shannon ([190], p.2) – o papel de “(...)operar sobre a mensagem de algum modo

de forma a produzir um sinal adequado para ser transmitido pelo canal". Este último corresponde ao meio de propagação do sinal codificado. O receptor, ou decodificador, opera de modo a finalmente entregar a mensagem ao destino.

A divisão acima não é absoluta ou livre de controvérsias. Por exemplo, O'Sullivan *et al.* [161] consideram que as imagens pertencentes ao espaço de imagens são abstrações da cena real retratada. Note que segundo a divisão feita por Shannon, esta definição compreende tanto a fonte quanto o codificador. Para o desenrolar das conclusões, adotaremos uma convenção baseada em Shannon; isto é, aquela em que a fonte não tem a capacidade de codificar a mensagem. Nesse sentido, e já amparado pelo modelo de Hildreth e Marr, propõe-se a seguinte divisão:

- A fonte de informação é a porção do mundo real compreendida pelo campo visual do observador em um instante de tempo t . Seus caracteres são bastante complexos e, dentro de um cenário de amplitude luminosa, poderiam corresponder à distribuição espaço-temporal do campo eletromagnético resultante emitido por todos os componentes da cena;
- O transmissor é o olho humano, que converterá a energia radiante da cena observada em uma distribuição bidimensional vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, correspondente à imagem formada sobre a retina;
- O receptor opera sobre as componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de forma a entregar o esboço primitivo de cada canal ao destino;
- O destino compreende as etapas posteriores à recepção, já em uma rota muito mais ligada à interpretação em alto nível de abstração.

A compreensão da divisão acima é fundamental para a proposta de uma teoria em espaços-escala para o esboço primitivo. Dito isto, cabem algumas considerações importantes, das quais a primeira refere-se à fonte. Na tentativa de capturar a diversidade estrutural do mundo que nos cerca, bem como seu caráter dinâmico, foi colocado que os caracteres transmitidos correspondem às amplitudes do campo resultante da superposição de tudo que foi retratado. É importante compreender a necessidade de se abranger a amplitude *complexa* destes campos, de modo que relações de profundidade e de paralaxe sejam conservadas.

Adicionalmente, o caráter dinâmico citado anteriormente corresponde à capacidade da mensagem em evoluir no tempo; afinal, um modelo estático para a visão (saúdável) não é razoável. Entretanto, isso traz à tona um segundo parâmetro de escala, o qual devemos sempre compreender como completamente independente do parâmetro de escala das difusões. Para estas, o tempo característico da cena, doravante denotado por t' , não faz sentido e sempre será fixado para o desenrolar das evoluções dos esboços. Deve-se notar que de um ponto de vista de modelo de sistema visual, isto implica em uma geração *instantânea* dos esboços primitivos, o que viola o princípio de causalidade do fenômeno de detecção. Uma maneira de tornar este modelo mais realista seria introduzir um retardo de fase no sistema, de modo que para uma cena retratada em t' fosse gerado um esboço primitivo em $t' + \Delta t'$, sendo este incremento da ordem do tempo de processamento da informação visual no olho humano. Assim, fica explicitado a partir deste ponto que um esboço primitivo gerado em t' teve sua causa primeira em $t' - \Delta t'$.

No que diz respeito ao papel de transmissor/codificador do olho humano, deve-se atentar ao fato de que por si só esta etapa do sistema já implica em uma perda de volume de informação, já que não é sensível à fase do campo incidente¹. Ademais, o olho como codificador possui discriminação em energia, ou comprimento de onda, já que entrega às etapas posteriores do sistema um campo $\mathbf{u} = [u_R \ u_G \ u_B]^T$. Não há aqui a preocupação de se detalhar a eficiência de detecção para cada região do espectro visível, visto que o esboço primitivo – neste modelo – será computado sobre a luminância associada a $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t')$ (vide Capítulo 5, Seção 5.2.1). De fato, este é o papel do receptor/decodificador. Por fim, note-se que nada foi dito – até agora – sobre amostragem do campo \mathbf{u} . Embora este ponto seja crucial para a definição do arcabouço a ser utilizado, trataremos inicialmente do caso contínuo. A amostragem espacial será considerada posteriormente². Note-se também a mudança sutil entre entrada e saída do bloco codificador no que concerne às variáveis espaciais: antes da codificação $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$, ao passo que na saída $\mathbf{x} = [x \ y]^T$; isto é, o elemento de detecção e codificação do sistema informacional sob análise opera em completa analogia com um sensor de imagens, tal como aqueles das famílias CMOS ou CCD. Assumiremos – por simplicidade – que a geometria da retina pode

¹Note contudo que a percepção de profundidade vem com a paralaxe gerada pela separação dos olhos, de modo que trata-se, no final, de um sistema estéreo.

²Em face da não-influência da escala temporal t' do mundo observado sobre a descrição multiescala, aspectos de amostragem temporal não serão levados em consideração.

ser considerada plana, de modo a evitar coordenadas curvilíneas³. Note que isso implica automaticamente no surgimento de aberrações esféricas [78], que serão consideradas no termo de ruído, conforme colocado adiante.

Os dois elementos esquemáticos restantes no esquema mostrado na Figura 6.1 são o blocos de destino e ruído. O primeiro não será abordado aqui⁴, ao passo que o segundo será – infelizmente – tratado com algum nível de superficialidade. De fato, há um universo absolutamente desafiador quanto às fontes de ruído em sistemas de imagem. Este universo contempla desde processos estocásticos aditivos até distorções de alta ordem devido à esfericidade dos perfis de lentes (plásticas, vítreas ou biológicas) presentes nos mais diferentes *setups*. Nesse sentido, trataremos o bloco de ruído de modo genérico, como qualquer fator que *degrade* o campo $u(x, t')$. Reitere-se que esta degradação ocorre antes da geração do esboço primitivo.

Em resumo, vemos pela construção acima que a descrição multiescala toma lugar dentro e ao final do receptor/decodificador. Neste ponto já houve a introdução de ruído, seja este sistemático (deformações de caráter geométrico) ou aleatório e manifesta-se a transformação da mensagem codificada (entrada degradada) em mensagem traduzida, ou decodificada (esboço primitivo). A idéia das próximas seções é de se concatenar progressivamente elementos de dinâmica (evolução) e observação (estimação) ao decodificador.

6.2 Dinâmica *ad-hoc* para a entropia de Shannon

Uma vez explicitado o modelo informacional básico para a visão, trabalharemos nesta Seção a introdução de um caráter dinâmico à etapa final do decodificador; isto é, quando da produção do esboço primitivo. Este processo, conforme visto em múltiplas ocasiões ao longo deste Trabalho, é caracterizado pelo aumento da entropia, mas não possui uma interpretação dinâmica própria – pelo menos em um contexto puramente informacional. De fato, as considerações vinculativas entre informação e entropia, muito devidas a Jaynes [100] e Brillouin [26] demonstram grande razoabilidade num universo físico, mas carecem de maiores esclarecimentos em um contexto de imagens, que são – no final – retratos ou representações do mundo observado.

Seguiremos aqui uma linha de pensamento semelhante àquela proposta por Frieden [61, 63], que traça paralelos entre dinâmicas induzidas por maximização de entropia e informação de Fisher. Diferentemente de Frieden, que tece seus argumentos com vistas a uma reinterpretação de *toda* a física [61, 63], a idéia aqui é de explorar a interpretação estatístico-informacional da informação de Fisher. Começemos enfim com a entropia de um sistema arbitrário cuja distribuição é denotada por $u(x)$. O sistema sob análise está sujeito a N_V vínculos, postos na forma de valor esperado:

$$\langle f_i \rangle = \int_I f_i(x)u(x)dx, \quad \text{com } 0 \leq i < N_V, \quad (6.1)$$

em que I é o espaço amostral. Usando o mesmo procedimento adotado na Seção 3.4 para obtenção da Equação (3.39), chega-se a [80, 167]

$$u(x) = \frac{\exp \left[\sum_{i=0}^{N_V-1} 1 + \lambda_i f_i(x) \right]}{\int_I \exp \left[\sum_{i=0}^{N_V-1} 1 + \lambda_i f_i(x) \right] dx}, \quad (6.2)$$

em que o fator de normalização corresponde à função partição [80].

O ponto levantado por Frieden em [63] sobre a Equação (6.2) reside no fato de que esta não corresponde a uma equação diferencial, exceto nos casos em que a própria distribuição é uma exponencial (como ocorre

³Do ponto de vista de óptica de Fourier (vide Apêndice A), diríamos que o modelo aqui exposto faz parte da aproximação paraxial [78, 157], embora tal classificação não traga maiores mudanças ou implicações. De todo modo, interessante ressaltar que se estivéssemos tratando aqui de sistemas ópticos coerentes [22], um arcabouço informacional entrópico [156, 157] completamente análogo ao da matriz de densidade [155, 145] estaria imediatamente viabilizado.

⁴Ao longo dos anos deste Trabalho, este autor teve mais de uma oportunidade de adentrar efetivamente a área de inteligência artificial, área esta que talvez constitua arcabouço melhor adaptado para o crescente nível de abstração exigido para uma teoria da visão computacional pós-esboço primitivo. Entretanto, a vida é feita de escolhas e compromissos, de modo que um contato tardio com IA não foi capaz de mudar os rumos deste projeto, felizmente.

com frequência na mecânica estatística – vide, e.g. [80]). De modo mais amplo, o que Frieden pontua vai de encontro com uma *ausência* de dinâmica para a entropia de Shannon. De fato, não há nos trabalhos pioneiros de Shannon [190, 191] uma menção explícita a um eventual caráter dinâmico da entropia de um sistema de informação, ou de parte dele. Há, entretanto, uma característica da teoria de Shannon que nos permite introduzir uma dinâmica para a produção do esboço primitivo: o aumento de entropia quando a distribuição associada é submetida a uma filtragem LSI, tal como mostrado Teorema 2, p. 35, cuja expressão é reproduzida abaixo, em forma de variação:

$$\Delta S = \frac{1}{2\pi B} \int_{2\pi B} \ln \left(|\hat{h}(\omega)|^2 \right) d\omega, \quad (6.3)$$

em que B é a largura da banda passante do sinal, ω é a frequência angular e $\hat{h}(\omega)$ é a função de transferência do filtro.

Uma vez que o esboço primitivo é fruto de uma sucessão de filtrações LSI por Gaussianas indexadas em $g^2(t)$ suscedidas por um último processo com filtro Laplaciano, e com base na variação entrópica apresentada na Equação (6.3), pode-se considerar que a descrição multiescala leva ao aumento da entropia informacional, sem que qualquer relação com processos de difusão precise ser posta em questão. Em outras palavras, podemos afirmar que em um espaço-escala é induzida uma dinâmica “autenticamente” informacional; isto é, que prescinde de uma analogia física subjacente, tal qual a da difusão. Embora não exista um impedimento em se fazer uso de analogias, a construção conceitual de uma entropia *ad hoc* do espaço-escala nos auxilia a enfatizar o caráter estatístico do processo.

6.3 Releitura em termos da Informação de Fisher

O objetivo da seção anterior foi de mostrar que a descrição multiescala implica em uma dinâmica própria da entropia sem que necessitemos recorrer aos modelos de difusão. Nesta Seção, o objetivo é que se discuta uma última vez o papel da informação de Fisher dentro do cenário em questão. De fato, se por um lado a informação de Fisher aparece de forma explícita nas derivadas temporais da entropia quando se observa a produção do esboço primitivo à luz de processos de difusão, não fica muito claro qual seu papel estatístico nestas evoluções.

Recordemos que a estimação de escala característica é dada – no caso linear – pelas Equações (5.6) e (5.11), repetidas aqui por comodidade:

$$\frac{dS}{d\sigma} = c^2 \sigma I_F(\sigma) \quad \text{e} \quad \frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c^2 e^\tau I_F(t(\tau)),$$

em que, novamente, aparece a reparametrização $\tau = \ln(t)$. O Experimentos descritos nas Seções 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3 e 5.5.4 mostraram que dentro de determinados limites a maximização das expressões acima guarda forte correlação com as dimensões características de estruturas retratadas em imagens. Pelo menos formalmente, deve sempre existir um valor de τ para o qual ocorram as maximizações. Para verificar esta afirmação, basta que se explicita o ponto de máximo em termos da informação de Fisher. Com isso chega-se à seguinte equação diferencial:

$$I_F(e^\tau) + e^\tau I'_F(e^\tau) = 0, \quad (6.4)$$

cuja solução é dada por

$$I_F(e^\tau) = \frac{C}{e^\tau}, \quad (6.5)$$

em que a constante C deve refletir o comportamento da solução quando $t \rightarrow 0^+$ – ou equivalentemente, $\tau \rightarrow -\infty$. Note que isso traz implicações importantes no caso discreto, já que cria uma dependência da solução com a resolução temporal Δt . Cabe agora entender o papel da Equação (6.5).

Conforme discutido na Seção 3.6 e no Apêndice C, a informação de Fisher define um limite inferior para a variância de um estimador cujo parâmetro se deseja, obviamente, estimar. Nesse sentido, a informação de

Fisher mostrada na Equação (6.5) mostra que, no melhor dos casos, em que o estimador é não-viesado (vide Equação (C.3)), a dispersão em torno da estimativa será dada por

$$\sigma_E^2 \geq \frac{t}{C(\Delta t)} = \frac{e^\tau}{C(\Delta t)} = \frac{\sigma^2}{C(\Delta t)}, \quad (6.6)$$

em que a relação entre τ , t e σ corresponde àquela expressa na Equação (5.10). Note que, dentro deste cenário, a Equação (6.6) cria um elo entre uma medida associada à resolução – ou, mais precisamente, dimensão característica – dada pelo estimador⁵ cuja variância é σ_E^2 e a escala sob a qual o sistema evolui, caracterizada por σ^2 . Em resumo, de acordo com as construções conceituais realizadas até aqui, e a partir de uma releitura da variação entrópica de um espaço-escala linear em termos da informação de Fisher, chega-se a uma relação explícita entre dimensões espaciais e parâmetro de escala em que a variância do estimador de resolução/dimensão característica será tão grande quanto for a variância da estrutura que se quer obter a informação. Em outras palavras, a performance do estimador se deteriorará à mesma taxa em que a cresce a variância da Gaussiana no processo de produção do esboço primitivo. Embora isso possa parecer óbvio, os desenvolvimentos e construções anteriores mostram que a rota para vinculação *formal* entre dimensões características e escala não é nada direta, embora a experimentação indique tal relação com alguma facilidade.

Cabe um último comentário sobre a performance do estimador: caso as estruturas retratadas sejam estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, sua performance pode ser aperfeiçoada continuamente, a depender do número de repetições do processo de medida. Isto porque [183] neste caso lidar-se-ia com um vetor de medidas independentes entre si, de modo que o a função escore (vide Equação (C.1)) seria obtida por

$$S_\theta(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{N_M-1} S_\theta(X_i), \quad (6.7)$$

em que \mathbf{X} é o vetor de medidas, realizadas N_M vezes. Visto que a informação de Fisher pode ser obtida por meio da variância do escore, o resultado deste processo de medidas levaria a

$$I_F(\mathbf{X}) = N_M I_F(X). \quad (6.8)$$

6.3.1 A ausência de escala característica para a EPM

Toda a discussão pregressa sobre potencial de estimação em espaço-escala se aplicou ao caso linear, visto que a relação $\sigma^2 = 2t$ e sua derivação $\tau = \ln(t)$ constituíram os ingredientes principais para a operacionalização do processo de maximização de dS/dt . As experimentações mostradas no Capítulo 5 ilustram como a EPM se mostra ineficaz ao longo de mudanças de escala na estimação. Isso se deve ao fato de que, diferentemente da difusão linear, a difusão segundo o modelo de Perona-Malik não permite que seja estabelecida uma relação de escala explícita. Isto não deve ser visto como uma deficiência, visto que o paradigma multiescala (linear ou não) pressupõe ignorância sobre quais escalas devem ser acessadas para que se tome ciência das estruturas pertinentes àquele nível. Entretanto, salta ao olhos que uma ferramenta definitivamente mais poderosa que a difusão linear no que tange a remoção de ruídos e pré-segmentação não tenha podido ser usada *diretamente* no processo de estimação de dimensões características.

De acordo do que é dito acima, podemos elencar a impossibilidade de aplicação direta da EPM como o único “defeito” – pelo menos em comparação com sua contraparte linear – na proposta de implementação de um viés informacional para a visão primária. Entretanto, tal como as experimentações do Capítulo 5 deixam claro, a EPM é muito mais eficiente que o processo linear quanto à capacidade de preservação de bordas e remoção de ruídos. Nesse aspecto, não há razão para não se cogitar seu uso combinado com a difusão linear na tarefa de segmentação de imagens para estimação de dimensões características. As figuras comparativas mostradas no Capítulo 5 mostram como a EPM se sobressai em termos de pré-segmentação. Entretanto, há de se notar que trazer a EPM para um fluxo de trabalho demanda um esforço extra na determinação de seus parâmetros.

⁵Note que absolutamente nada foi dito sobre o estimador em si, mas sim sobre sua performance.

Sobre não-linearidades, caracteres fracionais, complexidade e outros: propostas de incursões futuras

Este Capítulo aborda alguns pontos norteadores para *um* futuro da linha de investigação seguida neste Trabalho. Afinal, embora seja imperativo que um trabalho de tese tenha um carácter concreto de finalização, o tema abordado por ele não deixará de apresentar – talvez incontáveis – outros desafios e oportunidades. É nesse espírito que elencamos a seguir as considerações finais.

O mundo não é linear: por que o deveria ser a visão?

O modelo aqui investigado – a visão primária via detecção de bordas segundo Hildreth e Marr [136, 137] – e sua abstração por meio de espaços-escala são construções científicas aplicadas à visão computacional que partem de uma premissa importante e ao mesmo tempo limitante, relacionada à linearidade. Naturalmente, a provocação no título desta sub-seção tem pelo menos uma resposta imediata: teorias lineares costumam ser muito mais tratáveis teórica e experimentalmente. A óptica de Fourier, por exemplo, é uma teoria completamente linear que é aplicada em basicamente toda a cadeia produtiva de elementos ópticos e de imagem. Desse modo, uma teoria linear da visão traz consigo a facilidade dos sistemas lineares, mas exige correções e extensões ao longo do percurso.

É uma questão de compromisso entre tratabilidade, factibilidade, tempo e recurso se devemos escolher entre sistemas lineares ou eventuais contrapartes não-lineares. Não é possível formar juízo previamente sobre toda e qualquer aplicação. De todo modo, foi possível apreciar ao longo do texto o potencial de difusões não-lineares no realce de estruturas em imagens, de modo que aparenta ser promissor o estabelecimento de uma teoria não-linear da visão primária. Os desafios são enormes: desde a ruptura dos axiomas de Iijima até a formulação de métodos numéricos eficientes, passando pela determinação de parâmetros (limiar de separação entre regimes, força de difusão etc.), a Equação de Perona-Malik introduz dificuldades adicionais em todas as etapas de investigação, das quais se destacam aquelas ligadas a uma formulação teórica consistente. Surge assim a pergunta: por que ficarmos restritos à EPM se há uma profusão de outros processos de difusão complexos com características eventualmente úteis para uma teoria da visão? A resposta mais imediata, e que será detalhada a seguir, é de que a introdução de outros tipos de ferramental traz consigo níveis ainda mais profundos de dificuldade nas investigações, eventualmente intratáveis atualmente.

Cálculo fracionário e a ausência de arcabouço adequado

Se por um lado a EPM traz consigo toda sorte de dificuldade, por outro há disponível um volume importante de constatações e desenvolvimentos que permitem sua aplicação e investigação efetivos. O cálculo fracionário (vide Apêndice B) foi investigado ao longo do Trabalho¹ como uma possibilidade de se migrar para cenários mais gerais em termos de difusão. Entretanto –tal como pode ser visto no Apêndice B e mais detalhadamente em [173] –, embora fascinante, o cálculo fracionário ainda amadurece nas áreas de métodos numéricos e equações diferenciais, de modo que em determinado momento foi feita a escolha de não seguir esta rota. Entretanto, há trabalhos interessantes em espaços-escala fracionários [44] que podem constituir novas frentes de investigação.

Estatísticas “pós-Shannon”

Em adição a sistemas não-lineares e fracionários, manifesta-se a possibilidade de se migrar para cenários em que a mecânica-estatística transcende Gibbs-Boltzmann ou para uma informação “pós-Shannon”. Os próprios Sparring e Weickert propuseram tal generalização em 1997 [200], alegando que a entropia de Shannon não é capaz de expressar as diferenças de contraste em imagens. De fato, estes autores mostram uma série de resultados em que a entropia de Rényi [215], dada por

$$S_q^R \equiv \frac{1}{1-q} \ln \left[\sum_{i=0}^{N-1} u_i^q \right] \quad (7.1)$$

representa a principal métrica estatística. Outra possibilidade seria incorporar a propalada entropia de Tsallis [214, 215], dada por

$$S_q^T \equiv \frac{1}{q-1} \left[1 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^q \right]. \quad (7.2)$$

O principal argumento para a que não se tenham sido adotadas entropias outras que a de Shannon tem duplo caráter:

- i. a introdução de mais um parâmetro na análise exigiria uma carga adicional de *benchmarking* do lado computacional e, em algum momento, este Trabalho precisava terminar; e
- ii. esta mesma introdução do parâmetro q demandaria a busca por razões ou pelo menos argumentações de “qual física adotar” (sub-extensiva? super-extensiva?).

A primeira razão listada acima é menos importante, à medida que diz respeito apenas a intervalos de trabalho computacional. Entretanto, a segunda é muito mais profunda e, por diversas razões, deveria ser melhor avaliada no contexto de aplicação. Embora estas entropias carreguem um potencial teórico elegante e generalista, no final do dia os resultados devem ser avaliados e a aplicação de tais generalizações deve ser justificada. Um exemplo canônico de tal dificuldade é a técnica apresentada por Albuquerque *et al.* [3] para segmentação de imagens usando a entropia de Tsallis. A influência do valor de q sobre os resultados obtidos é imensa, e não é feita alguma ponderação que balize a escolha deste parâmetro. De fato, surge o questionamento de se realmente existe tal ponderação. Este autor acredita que não. Afinal, uma cena observada contém muito mais complexidade do que um único parâmetro pode comportar. Sob essa óptica, o autor advoga em favor da inteligência artificial².

Rota para uma teoria da informação para formação da imagem

Tecidos os comentários acerca de possíveis caminhos para o enriquecimento do tema da teoria da informação na formação da imagem, o autor gostaria de fechar este Trabalho apontando sobre a necessidade em

¹O autor agradece a José Abdalla Helayël-Neto pela oportunidade, extremamente inusual, de ter podido usar seu curso de Eletromagnetismo como “laboratório” de experimentação com cálculo fracionário.

²Quando usada com critério.

se aprofundarem as investigações sobre o *que seria* a informação em uma imagem. Tal como destacado por Rioul [183], O'Sullivan *et al.* [161] e Carlson [29], a teoria da informação nasceu como uma área aplicada para resolver questões de *comunicação*. Com o passar do anos, se enquadrou como uma sub-área da teoria de probabilidades. Por meio de Jaynes [100], a mecânica estatística adotou um viés informacional. Entretanto, a aplicação de um formalismo informacional em sistemas de imagens ainda engatinha. O trabalho de O'Sullivan *et al.* explora várias frentes passíveis de aplicação, com as quais este autor concorda em grande parte. Algumas delas são:

- detecção;
- estimação;
- representação; e
- avaliação.

As frentes de detecção, estimação e representação foram abordadas neste Trabalho, mas segundo uma lógica procedural aproximadamente unificada. Isto é, a mesma difusão que detecta é a mesma que inicia a estimação e muda a representação dos dados. De fato, o maior esforço empreendido no Trabalho disse respeito ao estabelecimento de uma relação entre escala e dimensão espacial. Esta contribuição individual pode vir a ser útil na questão da detecção, que passa necessariamente pela segmentação de imagens, e na estimação em si, quando o domínio de análise sai do contexto das imagens e vai direto para o que hoje se convencionou chamar ciência de dados. Nesse sentido, pode-se dizer que a definição de uma teoria da informação para imagens ainda precisa de delimitações mais precisas quanto a seus escopos de atuação, sem as quais corre-se o risco de acumular desenvolvimentos tomando emprestado e combinando uma miríade de arcabouços que não necessariamente deveriam estar lá aplicados.

-
-
- [1] AARON, M. R.; MCDONALD, R. A.; PROTONOTARIOS, E. N. *Entropy power loss in linear sampled data filters*. **Proceedings of the IEEE**. v. 55. n. 6. p. 1093–1094. 1967.
- [2] ABERGEL, R.; MOISAN, L. *Fast and accurate evaluation of a generalized incomplete gamma function*. 2016. Disponível em <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01329669>. Acesso em Julho/2020.
- [3] ALBUQUERQUE, M. P.; ALBUQUERQUE, M. P.; ESQUEF, I. A.; MELLO, A. G. *Image thresholding using Tsallis entropy*. **Pattern Recognition Letters**. v. 25. n. 9. p. 1059–1065. 2004
- [4] ALVAREZ, L.; GUICHARD, F.; LIONS, P. L.; MOREL, J. M. *Axioms and fundamental equations of image processing*. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**. v. 123. n. 3. p. 199–257. 1993.
- [5] ALVAREZ, L.; MAZORRA, L. *Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion*. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 31. n. 2. p. 590–605. 1994.
- [6] APOLINÁRIO JR., J. A.; PAGLIARI, C. L. *Continuous-Time Signals and Systems*. In: CHELLAPPA, R.; THEODORIDIS, S. (Edits.). **Academic Press Library in Signal Processing. Vol 1, Signal Processing Theory and Machine Learning**. Chennai: Academic Press, 2014. p. 29–78.
- [7] APPEL, W. *Mathematics for Physics and Physicists*. 1 ed. Princeton: Princeton University Press, 2007. 642 p.
- [8] AUBERT, G.; KORNPROBST, P. *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*. (Applied mathematical sciences. v. 147). New York: Springer, 2001. 286 p.
- [9] BABAUD, J.; WITKIN, A. P.; BAUDIN, M.; DUDA, R. O. *Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. PAMI-8. n. 1. p. 26–33. 1986.
- [10] BALIAN, R. *From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics. Volume I (Theoretical and Mathematical Physics)*. 2 ed. Berlin: Springer, 2006. 465 p.
- [11] BARRETT, H.; SWINDELL, W. *Radiological imaging: the theory of image formation, detection, and processing*. 1 ed. California: Academic Press, 1981. 683 p.
- [12] BARRETT, H. H.; MYERS, K. J. *Foundations of Image Science (Wiley Series in Pure and Applied Optics)*. 1 ed. New Jersey: Wiley-Interscience, 2003. 1582 p.

-
- [13] BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica (Projeto Euclides)*. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 399 p.
- [14] BELLMAN, R. *Introduction to matrix analysis*. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1960. 328 p.
- [15] BENHAMOUDA, B. *Parameter adaptation for nonlinear diffusion in image processing*. Dissertação (Magister of Scientiae in Mathematics). Department of Mathematics, University of Kaiserslautern. 1994.
- [16] BIGERELLE, M.; IOST, A. *Physical interpretations of the numerical instabilities in diffusion equations via statistical thermodynamics*. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**. v. 5. n. 2. 2004.
- [17] BIGERELLE, M.; NACEUR, H.; IOST, A. *Analyses of the Instabilities in the Discretized Diffusion Equations via Information Theory*. **Entropy**. v. 18. n. 4. 2016.
- [18] BOCCIGNONE, G.; FERRARO, M.; CAELLI, T. *Encoding visual information using anisotropic transformations*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 23. n. 2. p. 207–211. 2001
- [19] BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. *Introdução à inferência estatística (Coleção Matemática Aplicada)*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 159p.
- [20] BONNET, N.; VAUTROT, P. *Image Analysis: Is the Fourier Transform becoming obsolete?*. **Microscopy, Microanalysis & Microstructures**. v. 8. n. 1. p. 59–75. 1997.
- [21] BOREMAN, G. D. *Modulation Transfer Function in Optical and ElectroOptical Systems (SPIE Tutorial Texts in Optical Engineering v. TT52)*. 1 ed. Washington: SPIE Press, 2001. 110 p.
- [22] BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 952 p.
- [23] BRADSKI, G. *The OpenCV Library*. **Dr. Dobbs Journal of Software Tools**. v. 25. n. 11. 2000.
- [24] BRADY, D. J. *Optical imaging and spectroscopy*. 1 ed. New Jersey: John Wiley & Sons - Optical Society of America, 2009. 510 p.
- [25] BRAGA, H. L. *Um estudo sobre métodos computacionais de geração de processos 1/f via processamento digital de sinais*. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Física). Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. 2019.
- [26] BRILLOUIN, L. *Science and Information Theory*. 2 ed. New York: Academic Press, 1962. 351 p.
- [27] CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an introduction to Theormostatistics*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1985. 493 p.
- [28] CANNY, J. *A computational approach to edge detection*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 8. n. 6. p. 679–698. 1986.
- [29] CARLSON, A. B. *Communication systems: an introduction to signals and noise in electrical communication (McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series)*. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1968. 470 p.
- [30] CASAS, M.; CHIMENTO, L.; PENNINI, E.; PLASTINO, A.; PLASTINO, A. *Fisher information in a Tsallis non-extensive environment*. **Chaos, Solitons & Fractals**. v. 13. n. 3. p. 451–459. 2002.
- [31] CATTANI, C. *Shannon Wavelets Theory*. **Mathematical Problems in Engineering**. v. 2008. p. 1–24. 2008.
- [32] CATTÉ, F.; LIONS, P.L.; MOREL, J.M.; COLL, T. *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 29. n. 1. p. 182–193. 1992.
- [33] CHANG, W. S. C. *Principles of lasers and optics*. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 247 p.

-
- [34] CHARNEY, J. G.; FJÖRTOFT, R.; VON NEUMANN, J. *Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation*. **Tellus**. v. 2. n. 4. p. 237–254. 1950.
- [35] ČIEGIS, R. *Numerical Solution Of Hyperbolic Heat Conduction Equation*. **Mathematical Modelling and Analysis**. v. 14. n. 1. p. 11–24. 2009.
- [36] COHEN, E.; HEIMAN, R.; CARMI, M.; HADAR, O.; COHEN, A. *When physics meets signal processing: Image and video denoising based on Ising theory*. **Signal Processing: Image Communication**. v. 34. p. 14–21. 2015.
- [37] COUGHLAN, J. J.; HILL, A. T.; LOGEMANN, H. *The Z-transform and linear multistep stability*. **IMA Journal of Numerical Analysis**. v. 27. n. 1 p. 45–73. 2007.
- [38] COX, I. J.; SHEPPARD, C. J. R. *Information capacity and resolution in an optical system*. **Journal of the Optical Society of America**. v. 3. n. 8. p. 1152–1158. 1986.
- [39] CUMINATO, J.A.; MENEGUETE JR., M. *Discretização de equações diferenciais parciais (Coleção Matemática Aplicada)*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 379p.
- [40] DAHLQUIST, G.; BJÖRCK, Å. *Numerical Methods. (Dover Books on Mathematics)*. 1ed. New York: Dover Publications, 2003. 573 p.
- [41] DAMELIN, S. B.; MILLER JR., W. *The mathematics of digital signal processing (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 449 p.
- [42] DEBNATH, L.; MIKUSIŃSKI, P. *Introduction to Hilbert spaces with Applications*. 1 ed. California: Academic Press, 1990. 509 p.
- [43] DERPICH, M.; MÜLLER, M.; ØSTERGAARD, J. *The Entropy Gain of Linear Time-Invariant Filters and Some of its Implications*. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1512.03655>. Acesso em novembro/2020.
- [44] DIDAS, S.; BURGETH, B.; IMIYA, A.; WEICKERT, J. *Regularity and scale-space properties of fractional high-order linear filtering*. In: KIMMEL, R.; SOCHEN, A. N.; WEICKERT, J. (Edits.) **Scale Space and PDE Methods in Computer Vision**. Berlin: Springer Berlin, 2005. p. 13–25.
- [45] DINIZ, P.S.R.; SILVA, E.A.B. da; NETTO, S.L. *Digital signal processing - system analysis and design*. 1 ed. UK: Cambridge University Press. 2002.
- [46] DUIJS, R.; FLORACK, L; de GRAAF, J.; ter HAAR ROMENY. *On the Axioms of Scale Space Theory*. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**. v. 20. n. 3. p.267–268. 2004
- [47] EGMONT-PETERSEN, M.; de RIDDER, D.; HANDELS, H. *Image processing with neural networks – a review*. **Pattern Recognition**. v. 35. n. 10. p. 2279–2301. 2002.
- [48] ELMORE, W. C.; HEALD, M. A. *Physics of waves*. 1 ed. (reprint) New York: Dover Publications, 1985. 477 p.
- [49] EVANS, L. C. *A survey of entropy methods for partial differential equations*. **Bulletin fo the American Mathematical Society**. v. 41. n. 4. p. 49–438. 2004.
- [50] EVANS, L. C. *Entropy and Partial Differential Equations*. Notas de aula. Disponível em <https://math.berkeley.edu/~evans/>. Acesso em novembro/2020.
- [51] FERRARO, M.; BOCCIGNONE, G.; CAELLI, T. *On the representation of image structures via scale space entropy conditions*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 21. n. 11. p. 1199–1203. 1999.
- [52] FERRARO, M.; BOCCIGNONE, G.; CAELLI, T. *Entropy-based representation of image information*. **Pattern Recognition Letters**. v. 23. n. 12. p. 1391–1398. 2002.

- [53] FERRARO, M.; BOCCIGNONE, G. *Coupling the world with the observer: from analysis of information to active vision*. **Spatial Vision**. v. 22. n. 5. p. 361–381. 2009.
- [54] FEYNMAN, R. *Gravitação, um exemplo de lei física*. In: FEYNMAN, R. **Sobre as leis da física**. Tradução de NOVAES, M. 1 ed. Rio de Janeiro: Contraponto / Editora PUC-Rio, 2012. 180p.
- [55] FIGUEIREDO, D.G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais (Projeto Euclides)*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 274p.
- [56] FLORACK, L. M. J.; ter HAAR ROMENY, B. M.; KOENDERINK, J. J.; VIERGEVER, M. A. *Scale and the differential structure of images*. **Image and Vision Computing**. v. 10. n. 6. p. 376–388. 1992.
- [57] FLORACK, L. M. J.; ter HAAR ROMENY, B. M.; KOENDERINK, J. J.; VIERGEVER, M. A. *Linear scale-space*. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**. v. 4. n. 4. p. 325–351. 1994
- [58] FOWLES, G. R. *Introduction to modern optics*. 2 ed. New York: Dover Publications, 1975. 328 p.
- [59] FRADKOV, A.; SHALYMOV, D. *Information Entropy Dynamics And Maximum Entropy Production Principle*. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1401.2921v1>. Acesso em novembro/2020.
- [60] DI FRANCA, T. *Resolving Power and Information*. **Journal of the Optical Society of America**. v. 45. n. 7. p. 497–501. 1955.
- [61] FRIEDEN, B. R. *Fisher information, disorder, and the equilibrium distributions of physics*. **Physical Review A**. v. 41. n. 8. p. 4265–4276. 1990.
- [62] FRIEDEN, B. R. *Some analytical and statistical properties of Fisher information* In: CHEN, S. (Edit.) **Stochastic and neural methods in signal processing, image processing, and computer vision**. San Diego: SPIE, 1991. p. 311–316.
- [63] FRIEDEN, B. R. *Physics from Fisher information : a unification*. 1 ed. Cambridge: Cambridge, 1998. 318 p.
- [64] GABOR, D. *Theory of communication. Part 1: The analysis of information*. **Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering**. v. 93. n. 26. p. 429–441. 1946.
- [65] GABOR, D. *Theory of communication. Part 2: The analysis of hearing*. **Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering**. v. 93. n. 26. p. 442–445. 1946.
- [66] GABOR, D. *Theory of communication. Part 3: Frequency compression and expansion*. **Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering**. v. 93. n. 26. p. 445–457. 1946.
- [67] GABOR, D. *The transmission of information by coherent light. I. Classical theory*. **Journal of Physics E: Scientific Instruments**. v. 8. n. 2. p. 73–78. 1975.
- [68] GABOR, D. *The transmission of information by coherent light. II. Transmission in the presence of noise*. **Journal of Physics E: Scientific Instruments**. v. 8. n. 3. p. 161–163. 1975.
- [69] GALEONE, L.; GARRAPPA, R. *On Multistep Methods for Differential Equations of Fractional Order*. **Mediterranean Journal of Mathematics**. v. 3. n. 3 p. 565–580. 2006.
- [70] GAMO, H. *Mathematical analysis of intensity distribution of the optical image in various degrees of coherence of illumination (representation of intensity by Hermitian matrices)*. **Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS**. v.18. n. 2. p. 021101-1–021101-12. 2019.
- [71] GARBACZEWSKI, P. *Random Dynamics, entropy production and Fisher information*. **Acta Physica Polonica B**. v. 34, n.7. 2003.
- [72] GARBACZEWSKI, P. *Shannon versus Kullback-Leibler entropies in nonequilibrium random motion*. **Physics Letters A**. v. 341. n. 1. p. 33–38. 2005.

-
- [73] GASKELL, D. R.; LAUGHLIN, D. E. *Introduction to the Thermodynamics of Materials*. 6 ed. Boca Raton: CRC Press, 2017. 693 p.
- [74] GASPARD, P. *Entropy production in open volume-preserving systems* **Journal of Statistical Physics**. v. 88. n. 5. 1997.
- [75] GIRDZIUŠAS, R.; LAAKSONEN, J. *When is a Discrete Diffusion a Scale-Space?*. **Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision**. p. 1–6. 2007.
- [76] GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. *Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods*. 1ed. San Diego: Academic Press, 1991. 337 p.
- [77] GOMES, J.; VELHO, L. *Computação gráfica: imagem*. (Série Computação e Matemática). 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 424p.
- [78] GOODMAN, J. *Introduction To Fourier Optics (McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering)*. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1996. 441 p.
- [79] GORI, F.; GUATTARI, G. *Shannon number and degrees of freedom of an image*. **Optics Communications**. v. 7. n. 2. p. 163–165. 1973.
- [80] GREINER, W. *Thermodynamics and Statistical Mechanics (Classical Theoretical Physics)*. 1 ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. 463 p.
- [81] GREINER, W. *Quantum Mechanics: An Introduction (Classical Theoretical Physics)*. 4 ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 485 p.
- [82] GUICHARD, F.; MOISAN, L.; MOREL, J.M. *A review of P.D.E models in image processing and image analysis*. **Journal de Physique IV (Proceedings)**. v. 12. n. 1. 137–154. 2002.
- [83] HAMMING, R. W. *Numerical methods for scientists and engineers (Dover Books on Mathematics)*. 2 ed. New York: Dover Publications, 1973. 721 p.
- [84] HAMMING, R. W. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*. **The American Mathematical Monthly**. v. 87. n. 2. p. 81–90. 1980.
- [85] HAMMING, R. W. *Digital Filters (Dover Civil and Mechanical Engineering)*. 3 ed. New York: Dover Publications, 1989. 304 p.
- [86] HARRIS, C. R. *et al.* *Array programming with NumPy*. **Nature**. v. 585. p. 357–362. 2020.
- [87] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis. v. 1: Power Series, Integration, Conformal Mapping, Location of Zeros*. 1ed. New York: John-Wiley & Sons, 1974. 682 p.
- [88] HENRICI, P. *Fast Fourier Methods in Computational Complex Analysis*. **SIAM Review**. v. 21. n. 4. p. 481–527. 1979.
- [89] HERMANN, R. *Fractional Calculus: an introduction for physicists*. 1ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2014. 479 p.
- [90] HILFER, R. *Applications of fractional calculus in physics*. 1ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2000. 463 p.
- [91] HISTACE, A.; MÉNARD, M. CAVARO-MÉNARD, C. *Selective diffusion for oriented pattern extraction: Application to tagged cardiac MRI enhancement*. **Pattern Recognition Letters**. v. 30. n. 15. p. 1356–1365. 2009.
- [92] HUMMEL, R. A.; KIMIA, B.; ZUCKER, S. W. *Deblurring Gaussian blur*. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**. v. 38. n. 1. p. 66–80. 1987.
- [93] HUMMEL, R. A. *The Scale-Space Formulation of Pyramid Data Structures*. **Robotics Research Technical Report**. n. 239. 1986.

-
- [94] HUMMEL, R. A. *Representations based on Zero-crossings in Scale-Space*. **Robotics Research Technical Report**. n. 225. 1986.
- [95] ÍÓRIO JR., R.; ÍÓRIO, V. de. *Equações diferenciais parciais: uma introdução (Projeto Euclides)*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 343p.
- [96] JAIN, A. K.; RANGANATH, S. *Extrapolation algorithms for discrete signals with application in spectral estimation*. **IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing**. v. 29. n. 4. p. 830–845. 1981.
- [97] JAIN, A. *Fundamentals of digital image processing*. 1 ed. New-Jersey: Prentice-Hall, 1989. 569 p.
- [98] JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário (Projeto Euclides)*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 304p.
- [99] JANSSON, P. A. *Deconvolution: with applications in spectroscopy*. 1 ed. Orlando: Academic Press, 1984. 342 p.
- [100] JAYNES, E. T. *Information theory and statistical mechanics*. **The Physical Review**. v. 106. n. 4. p. 620–630. 1957.
- [101] JÜNGEL, A. *Entropy Dissipation Methods For Nonlinear Partial Differential Equations*. Notas de aula. Disponível em <https://www.asc.tuwien.ac.at/~juengel/scripts/>. Acesso em novembro/2020.
- [102] JÜNGEL, A. *Entropy Methods for Diffusive Partial Differential Equations (SpringerBriefs in Mathematics)*. Vienna: Springer, 2016. 139 p.
- [103] KHARE, K.; GEORGE, N. *Sampling theory approach to prolate spheroidal wavefunctions*. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. v. 36. n. 39. p.10011–10021. 2003.
- [104] KHARE, K. *Fourier Optics and Computational Imaging*. 1 ed. New Delhi: Ane Books, 2015. 312 p.
- [105] KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*. 1 ed. New York: Dover Publications, 1949. 179 p.
- [106] KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory*. 1 ed. New York: Dover Publications, 1957. 120 p.
- [107] KICHENASSAMY, S. *The Perona-Malik Paradox*. **SIAM Journal on Applied Mathematics**. v. 57. n. 5. p. 1328–1342. 1997.
- [108] KICHENASSAMY, S. *Théorie des semi-groupes pour l'équation de Perona-Malik*. **Comptes Rendus Mathématique**. v. 344. n. 4. p. 225–229. 2007.
- [109] KOENDERINK, J. J. *The structure of images*. **Biological cybernetics**. v. 50. p. 363–370. 1984.
- [110] KOTEL'NIKOV, V. A. *On the transmission capacity of 'ether' and wire in electric communications*. **Physics-Uspokhi**. v. 49. n. 7. pp. 1–19. 2006.
- [111] KRASNOV, M.; KISELIOV, A.; MAKARENKO, G. *Ecuaciones integrales*. Tradução de TOLOSA, J. J. 1 ed. Moscou: Editorial Mir, 1970. 188 p.
- [112] LANDAU, H. J.; POLLAK, H. O. *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty – II*. **Bell System Technical Journal**. v. 40. n. 1. p. 65 – 84. 1961.
- [113] LANDAU, H. J.; POLLAK, H. O. *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty – III: The Dimension of the Space of Essentially Time- and Band-Limited Signals*. **Bell System Technical Journal**. v. 41. n. 4. p. 1295 – 1336. 1962.
- [114] LANDAU, H. J.; WIDOM, H. *Eigenvalue distribution of time and frequency limiting*. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. v. 77. n. 2. p. 469–481. 1980.

-
- [115] LAX, P. D. *Shock Waves and Entropy*. In: ZARANTONELLO, E. H. (Edit.) .**Contributions to Nonlinear Functional Analysis**. New York: Academic Press, 1971. p. 603–634.
- [116] LAX, P. D. *Shock Waves, Increase of Entropy and Loss of Information*. In: CHERN, S. S. (Edit.). **Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations**. New York: Springer New York, 1984. p. 129–171.
- [117] LEOPOLDO, K.; JOSELEVITCH, C. *A neurociência computacional no estudo dos processos cognitivos*. **Psicologia USP**. v. 29. n. 1. p. 40–49. 2018
- [118] LEPAGE, W. R. *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers (Dover Books on Mathematics)*. 1ed. New York: Dover Publications, 2010. 512 p.
- [119] LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws (Lectures in Mathematics)*. 2 ed. Berlin: Birkhäuser, 1992. 214 p.
- [120] LI, C.; CHEN, A.; YE, J. *Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation*. **Journal of Computational Physics**. v. 230. n. 9. p. 3352–3368. 2011.
- [121] LI, C.; ZENG, F. *Numerical Methods for Fractional Calculus. (Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series)*. 1ed. Abingdon: Chapman and Hall/CRC, 2015. 281 p.
- [122] LINDEBERG, T.; *Scale-space for discrete signals*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 12. n. 3. p. 234–254. 1990.
- [123] LINDEBERG, T. *On the Axiomatic Foundations of Linear Scale-Space*. In: SPORRING, J.; MADSEN, N.; FLO-RACK, L.; JOHANSEN, P. (Edits.). **Gaussian Scale-Space Theory**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. p. 75–97.
- [124] LINFOOT, E. H. *Information theory and optical images*. **Journal of the Optical Society of America**. v. 45. n. 10. p. 808–819. 1955.
- [125] LOVOIE, J.; OLSER, T.; TREMBLAY, R. *Fractional Derivatives and Special Functions*. *SIAM Review*. v. 18. n. 2. p. 240–268. 1976.
- [126] LUBICH, CH. *On the Stability of Linear Multistep Methods for Volterra Convolution Equations*. **IMA Journal of Numerical Analysis**. v. 3. n. 4. p. 439–465. 1983.
- [127] LUBICH, C. *Discretized Fractional Calculus*. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**. v. 17. n. 3 704–719. 1986.
- [128] LUBICH, C. *Convolution quadrature and discretized operational calculus. I*. **Numerische Mathematik**. v. 52. n. 2. p. 129–146. 1988.
- [129] LUBICH, C. *Convolution quadrature and discretized operational calculus. II*. **Numerische Mathematik**. v. 52. n. 4. p. 413–425. 1988.
- [130] LUTWAK, E.; YANG, D.; ZHANG, G. *Cramér-Rao and moment-entropy inequalities for Renyi entropy and generalized Fisher information*. **IEEE Transactions on Information Theory**. v. 51. n. 2. p. 473–478. 2005.
- [131] LUZZI, R. *Tópicos em termodinâmica estatística de processos dissipativos*. 1 ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000. 163 p.
- [132] LYONS, R. G. *Understanding digital signal processing*. 1 ed. Massachusetts: Pearson Education, 1997. 517p.
- [133] MACOVSKI, A. *Medical Imaging Systems (Prentice-Hall Information and System Sciences Series)*. New Jersey: Prentice-Hall, 1983. 256 p.
- [134] MAISELI, B. J. *On the convexification of the Perona-Malik diffusion model*. **Signal, Image and Video Processing**. v. 14. n. 6. p. 1283–1291. 2020.

-
- [135] MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. 3 ed. Massachusetts: Academic Press, 2009. 805 p.
- [136] MARR, D.; HILDRETH, E. *Theory of edge detection*. **Proceedings of the Royal Society B - Biological Sciences**. v. 207. n. 1167. p. 187 – 217. 1980
- [137] MARR, D. *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. Cambridge: MIT Press, 2010. 429 p.
- [138] MARTIN, M. T.; PENNINI, F.; PLASTINO, A. *Fisher's information and the analysis of complex signals*. **Physics Letters A**. v. 256. n. 2. p. 173–180. 1999.
- [139] ALDAVE-MATAR, R.; LEY-KOO, M. *A statistical mechanics approach to digital image processing: Image enhancement*. **Journal of Applied Physics**. v. 79. n. 12. p. 8930–8935. 1996.
- [140] MATTHES, D. *Entropy Methods and Related Functional Inequalities*. Notas de Aula. Disponível em <https://www.asc.tuwien.ac.at/~matthes/>. Acesso em novembro/2020.
- [141] MATTHYS, J. *A-Stable linear multistep methods for Volterra Integro-Differential Equations*. **Numerische Mathematik**. v. 27. n. 1. p. 85–94. 1976.
- [142] MIKULA, K. *Image processing with partial differential equations*. In: BOURLIOUX, A.; GANDER, M.J.; SABIDUSSI, G. (Edits.). **Modern methods in scientific computing and applications** (NATO Science Series. II - Mathematics, Physics and Chemistry). v. 75. p. 283–321. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002.
- [143] MOORE, I. C.; CADA, M. *Prolate spheroidal wave functions, an introduction to the Slepian series and its properties*. **Applied and Computational Harmonic Analysis**. v. 16. n. 3. p. 208 – 230. 2004.
- [144] MORTON, K. W.; MAYERS, D. F. *Numerical solution of partial differential equations. An introduction*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [145] NAZARENO, H. N. *Mecânica Estatística e Funções de Green*. 1 ed. Brasília: Editora UnB, 2009. 153 p.
- [146] NEIFELD, M. A. *Information, resolution and space-bandwidth product*. **Optics Letters**. v. 23. n. 18. p. 1477–1479. 1998.
- [147] NIELSEN, M. *Scale-space generators and functionals*. In: SPORRING, J.; MADSEN, N.; FLORACK, L.; JOHANSEN, P. (Edits.). **Gaussian Scale-Space Theory**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. p. 99–114.
- [148] NITZBERG, M.; SHIOTA, T. *Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 14. n. 8. p. 826–833. 1992.
- [149] NUSSBAUM, AL.; PHILLIPS, R. A. *Contemporary optics for scientists and engineers (Solid state physical electronics series)*. 1 ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 511 p.
- [150] NUSSENZVEIG, H. M. (Org.). *Complexidade e caos*. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ / COPEA, 1999. 276 p.
- [151] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - II: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. 4 ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 2002. 314 p.
- [152] NYQUIST, H. *Certain Topics in Telegraph Transmission Theory*. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**. v. 47. n. 2. p. 617–644. 1928.
- [153] OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. 1ed. New York: Dover Publications, 2006. 256 p.
- [154] DE OLIVEIRA, E. C.; Machado, J. A. T. *A review of definitions for fractional derivatives and integrals*. **Mathematical Problems in Engineering**. v. 2014. n. 2014 . 2014.

- [155] OLIVEIRA, I. S. *Física Quântica: Fundamentos, formalismo e aplicações*. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física. 2020. 372p.
- [156] O'NEIL, E. L.; ASAKURA, T. *Optical image formation in terms of entropy transformations*. **Journal of the Physical Society of Japan**. v. 16. n. 2. p. 301 – 308. 1961
- [157] O'NEIL, E. L. *Introduction to statistical optics (Addison-Wesley series in advanced physics)*. 1 ed. Massachusetts: Addison-Wesley. 1963. 179p.
- [158] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. *What is a fractional derivative ?*. **Journal of Computational Physics**. v. 293. n. 4–13. 2015.
- [159] OSHER, S.; RUDIN, L. I. *Feature-oriented image enhancement using shock filters*. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 27. n. 4. 919–940. 1990.
- [160] OSIPOV, A.; ROKHLIN, V.; XIAO, H. *Prolate Spheroidal Wave Functions of Order Zero: Mathematical Tools for Bandlimited Approximation (Applied Mathematical Sciences Series)*. v. 187. 1 ed. New York: Springer, 2013. 385 p.
- [161] O'SULLIVAN, J. A.; BLAHUT, R. E.; SNYDER, D. L. *Information-theoretic image formation*. **IEEE Transactions on Information Theory**. v. 44. n. 6. 1998.
- [162] OUGHSTUN, K. E. *Electromagnetic and Optical Pulse Propagation 1: Spectral Representations in Temporally Dispersive Media. (Springer Series in Optical Sciences)*. 1ed. New York: Springer, 2006. 456 p.
- [163] PAK, A. *An alternative proof for the minimum Fisher information of Gaussian distribution*. **Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics**. v. 14. n. 2. p. 5–10. 2018.
- [164] PAPOULIS, A. *The Fourier Integral and Its Applications (McGraw-Hill Electronic Sciences Series)*. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1962. 318 p.
- [165] PAPOULIS, A. *A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation*. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**. v. 22. n. 9. p. 735–742. 1975.
- [166] PAPOULIS, A. *Signal Analysis (McGraw-Hill Electrical & Electronic Engineering Series)*. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1977. 431 p.
- [167] PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes (McGraw-Hill Electrical & Electronic Engineering Series)*. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 1991. 576 p.
- [168] PAUWELS, E. J.; van GOOL, L. J.; FIDDELAERS, P.; MOONS, T. *An extended class of scale-invariant and recursive scale space filters*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v. 17. n. 7. p. 691–701. 1995.
- [169] PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W.R. *Análise de imagens digitais: Princípios, Algoritmos e Aplicações*. São Paulo: Thomson Learning, 2008. 508 p.
- [170] PERONA, P.; MALIK, J. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence** v. 12. n.7. p. 629–639. 1990.
- [171] PERONA, P.; SHIOTA, T.; MALIK, J. *Anisotropic diffusion*. In: ROMENY, B.M. t H. (Edit.) **Geometry-driven diffusion in computer vision**(Computational imaging and vision, v.1). Netherlands: Springer, 1994. p. 73–92.
- [172] PERSECHINO, A. *Influência da difusão não-linear na detecção de calcificações em imagens mamográficas*. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Física com ênfase em Instrumentação Científica). Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. 2015.
- [173] PERSECHINO, A. *An introduction to fractional calculus: numerical methods and application to HF dielectric response*. **Advanced Electromagnetics**. v.9. n. 1. p. 19–30. 2020.

- [174] PICARD, R.; GRACZYK, C.; MANN, S.; WACHMAN, J.; PICARD, L.; CAMPBELL, L. *VisTex[®]: Vision Texture 1.0*. Media Laboratory, MIT. Cambridge, Massachusetts. Disponível em <https://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture/vistex.html>. Acesso em novembro/2020.
- [175] PIERCE, J. R. *An introduction to Information Theory: Symbols, Signals and Noise*. 2 ed. New York: Dover Publications, 1980. 305 p.
- [176] PIZA, A. *Mecânica quântica (Série Acadêmica, v. 51)*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2009. 605 p.
- [177] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to methods of their solution and some of their applications. (Mathematics in Science and Engineering series, v. 198)*. 1 ed. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p.
- [178] POTTERS, M.; BIALEK, W. *Statistical mechanics and visual signal processing*. **Journal de Physique I, EDP Sciences**. v. 4. n. 11. p. 1755–1775. 1994.
- [179] PRATT, W. K. *Vector Space Formulation of Two-Dimensional Signal Processing Operations*. **Computer Graphics and Image Processing**. v. 4. n. 1. p. 1–24. 1975.
- [180] PREWITT, J. M. S. *Object enhancement and extraction*. In: LIPKIN, B. S.; ROSENFELD, A. (Edits.). **Picture processing and psychopictorics**. New York: Academic Press, 1970. p. 75–149.
- [181] RALSTON, A.; RABINOWITZ, P. *A First Course in Numerical Analysis. (Dover Books on Mathematics)*. 2ed. New York: Dover Publications, 2001. p.
- [182] RIOUL, O. *Sur l'extremum d'entropie pour les transformations linéaires*. **XXVIe Colloque GRETSI 2017**, Setembro de 2017, Juan-Les-Pins, França.
- [183] RIOUL, O. *Teoria da Informação e da Codificação*. Tradução: MAGOSSO, J. C. 1 ed. Campinas e Brasília: Editoras da UNICAMP e UNB, 2018. 288 p.
- [184] ROCHE, A.; MALANDAIN, G.; AYACHE, N.; PENNEC, X. *Multimodal Image Registration by Maximization of the Correlation Ratio*. **Rapport de Recherche - INRIA**. n. 3378. 1998. Acesso em Março/2021. Disponível em <https://hal.inria.fr/inria-00073311..>
- [185] ROSS, B. *Fractional Calculus and its Applications. (Lecture Notes in Mathematics)* 1ed. Berlin: Springer, 1975. 381 p.
- [186] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis (International Edition - Mathematics Series)*. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 1987. 416 p.
- [187] SAMKO, S.G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*. 1ed. Singapore: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 p.
- [188] SHAHRAM, M.; MILANFAR, P. *Statistical and information-theoretic analysis of resolution in imaging*. **IEEE Transactions on Information Theory**. v. 52. n. 8. 2006.
- [189] SHALYMOV, D.; FRADKOV, A.; LIUBCHICH, SOKOLOV, B. *Dynamics of the relative entropy minimization processes*. **Cybernetics And Physics**. v. 6. n. 2. p. 80–87. 2017.
- [190] SHANNON, C. E. *A Mathematical Theory of Communication*. **The Bell System Technical Journal**.v. 27. p. 379–623. 1948.
- [191] SHANNON, C. E. *Communication in the Presence of Noise*. **Proceedings of the IRE**.v. 37. n. 1. p. 10–21. 1949.
- [192] SLEPIAN, D.; POLLAK, H. O. *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty – I*. **Bell System Technical Journal**. v. 40. n. 1. p. 43–63. 1961.
- [193] SLEPIAN, D. *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to Many Dimensions; Generalized Prolate Spheroidal Functions*. **Bell System Technical Journal**. v. 43. n. 6. 3009 – 3057. 1964.

- [194] SLEPIAN, D. *Some Asymptotic Expansions for Prolate Spheroidal Wave Functions*. **Journal of Mathematics and Physics**. v. 44. n. 1-4. p. 99–140. 1965.
- [195] SLEPIAN, D. *Prolate spheroidal Wave functions, Fourier analysis, and Uncertainty – V: the discrete case*. **The Bell System Technical Journal**. v. 57. n. 5. p. 1371–1430. 1978.
- [196] SLEPIAN, D. *Some Comments on Fourier Analysis, Uncertainty and Modeling*. **SIAM Review**. v. 25. n. 3. p. 379–393. 1983.
- [197] SMOLLER, J. *Shock waves and reaction-diffusion equation (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 1994. 632 p.
- [198] SONI, H.; BATES, A. P.; KENNEDY, R. A. *Efficient Computation of Slepian Functions on the Real Line*. In: **12th International Conference on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS)**. p. 1–7. 2018.
- [199] SPORRING, J., *The entropy of scale-space*. **Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition**. v. 1. p. 900-904. 1996.
- [200] SPORRING, J.; WEICKERT, J. *On generalized entropies and scale-space*. IN : ROMENY, H. ter; FLORACK, L.; VIERGEVER, M. (Edits.) **Scale-Space Theory in Computer Vision**. Berlin: Springer, 1997. p. 51–64.
- [201] SPORRING, J.; WEICKERT, J. *Information measures in scale-spaces*. **IEEE transactions on information theory**. v. 45. n. 3. p. 1051–1058. 1999.
- [202] SPORRING, J.; COLIOS, C. J.; TRAHANIAS, P. E. *Generalized scale-selection*. **Proceedings 2000 International Conference on Image Processing**. v. 1. p. 920–923. 2000.
- [203] STAM, A. J. *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*. **Information and Control**. v. 2. n. 2. p. 101–112. 1959.
- [204] SZELISKI, R. *Computer Vision: Algorithms and Applications*. 2 ed. Springer-Verlag: London, 2021. 1220 p.
- [205] TADMOR, E. *Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems* **Acta Numerica**. v. 12. p. 451–512. 2003
- [206] TANAKA, M.; WATANABE, T.; MISHIMA, T. *Tsallis entropy in scale spaces*. In: LATECKI, L. J.; MELTER, R. A.; MOUNT, D. M.; WU, A. Y. (Edits.) **Vision Geometry VIII**. Denver: SPIE, 1999. p. 273–283.
- [207] TANAKA, K. *Statistical-mechanical approach to image processing*. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. v. 35. n. 37. p. R81–R150. 2002.
- [208] TARASOV, V. E. *Universal electromagnetic waves in dielectric*. **Journal of Physics: condensed matter**. v. 20. n. 17. p.175223. 2008.
- [209] TARASOV, V. E. *Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media*. **Theoretical and Mathematical Physics**. v. 158. n. 3. p. 355–359. 2009.
- [210] TARASOV, V. E. *Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. (Nonlinear Physical Sciences Series)*. 1ed. Beijing: Higher Education Press, 2010. 504 p.
- [211] TARASOV, V. E. *Review of Some Promising Fractional Physical Models*. **International Journal of Modern Physics B**. v. 27. n. 9. p. 1–38. 2013.
- [212] TARASOV, V. E. *No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative*. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**. v. 18. n. 11. p. 2945 – 2948. 2013.
- [213] TEIXEIRA, R. *Introdução aos espaços de escala (EDPs em Processamento de Imagens) (Coleção Colóquios Brasileiros de Matemática)*. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 230 p.

- [214] TSALLIS, C. *Entropic nonextensivity: a possible measure of complexity*. **Chaos, Solitons & Fractals**. v. 13. n. 3. p. 371–391. 2002.
- [215] TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. 1 ed. New York: Springer, 2009. 382 p.
- [216] TUKEY, J. W. *The Future of Data Analysis*. **The Annals of Mathematical Statistics**. n. 1. p. 1–67. 1962.
- [217] VARAH, J. M. *The prolate matrix*. **Linear Algebra and its Applications**. v. 187. np. p. 269 – 278. 1993.
- [218] VARTIAINEN, E. M.; PEIPONEN, K. *Optical and terahertz spectra analysis by the maximum entropy method*. **Reports on Progress in Physics**. v. 76. n. 6. pp. 066401. 2013.
- [219] VASILYEV, O. V.; YUEN, D. A.; PAOLUCCI, S.; GRUBER, R.; RAPPAZ, J. *Solving PDEs Using Wavelets*. **Computers in Physics**. v. 11. n. 5. p. 429–435. 1997
- [220] VIRTANEN, P. *et al.*. *SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python*. **Nature Methods**. v. 17. p. 261–272. 2020.
- [221] VOELZ, D. G. *Computational Fourier Optics: A MATLAB Tutorial (SPIE Tutorial Texts v. TT89)* 1 ed. Washington: SPIE Press, 2011. 232 p.
- [222] WALTER, G. G.; SHEN, X. *Recovery of digitized signals using Slepian functions*. **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03)**. v. 6. p. VI–241. 2003.
- [223] WALTER, G. G.; SHEN, X. *Sampling with prolate spheroidal wave functions*. **Sampling Theory In Signal And Image Processing**. v. 2. n. 1. p. 25–52. 2003.
- [224] WALTER, G. G.; SOLESKI, T. *A new friendly method of computing prolate spheroidal wave functions and wavelets*. **Applied and Computational Harmonic Analysis**. v. 19. n. 3 p. 432 – 443. 2005.
- [225] WALTER, G. G. *Prolate Spheroidal Wave Functions and Wavelets*. In: HAWKES, P. W. (Edit.). **Advances in Imaging and Electron Physics**. v. 139. San Diego: Elsevier. p. 225 – 295.
- [226] WANG, L. *Analysis of spectral approximations using prolate spheroidal wave functions*. **Mathematics of Computation**. v. 79. n. 270. p. 807–827. 2010.
- [227] WANG, L. *A Review of Prolate Spheroidal Wave Functions from the Perspective of Spectral Methods*. **Journal of Mathematical Study**. v. 50. n. 2. p. 101 – 143. 2017.
- [228] WEERATUNGA, S.K.; KAMATH, C. *PDE-based non-linear diffusion techniques for denoising scientific and industrial images: an empirical study*. In: DOUGHERTY, E. R.; ASTOLA, J. T.; EGIAZARIAN, K. O. (Edits.). **Image Processing: Algorithms and Systems**. v. 4667. p. 279 – 290. Bellingham: International Society for Optics and Photonics .2002.
- [229] WEICKERT, J.; BENHAMOUDA, B. *Why the Perona-Malik filter works?* Technical report. Department of Computer Science, University of Copenhagen. 1997.
- [230] WEICKERT, J.; BENHAMOUDA, B. *A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the Perona—Malik paradox*. In: SOLINA, F.; KROPATSCH, W.; REINHARD, K.; RUZENA, B. (Edits.). **Advances in Computer Vision**. Vienna: Springer-Vienna, 1997. p. 1–10
- [231] WEICKERT, J.; ISHIKAWA, S.; IMIYA, A. *On the History of Gaussian Scale-Space Axiomatics*. In: SPORRING, J.; MADS, N.; FLORACK, L.; JOHANSEN, P. (Edits.). **Gaussian Scale-Space Theory**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. p. 45–59.
- [232] WEICKERT, J.; ROMENY, B.M.T.H.; VIERGEVER, M.A. *Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering*. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 17. n. 3. 398–410. 1998.
- [233] WEICKERT, J. *Anisotropic diffusion in image processing*. B.G. Teubner: Stuttgart, 1998. 170 p.

-
- [234] WEICKERT, J.; ISHIKAWA, S.; IMIYA, A. *Linear Scale-Space has First been Proposed in Japan*. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**. v. 10. n. 3. p. 237–252.
- [235] WHALEN, A. D. *Detection of signals in noise (Electrical Science: A series of Monographs and Texts)*. 1 ed. New York: Academic Press, 1971. 411 p.
- [236] WHITTAKER, E. T. *On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory* **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**. v. 35. p.181–194. 1915.
- [237] WITKIN, A.P. *Scale-space filtering: a new approach to multi-scale description*. **Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '84**, v. 9. p. 150–153. 1984.
- [238] WOLKENFELT, P. H. M. *Reducible quadrature methods for Volterra integral equations of the first kind*. **BIT Numerical Mathematics**. v. 21. n. 2. p. 232–241. 1981.
- [239] YOU, Y. L.; XU, W.; TANNENBAUM, A.; KAVEH, M. *Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing*. **IEEE Transactions on Image Processing**. v. 5. n. 11. p. 1539–1553. 1996.
- [240] YU, F. T. S.; JUTAMULIA, S.; YIN, S. (Edits.) *Introduction to Information Optics*. 1 ed. San Diego: Academic Press, 2001. 734 p.

Apêndices

A.1 Introdução

Parte significativa dos desenvolvimentos discutidos ao longo do texto foi elaborada tomando-se como padrão o fato de que os sinais eram analisados em uma única variável independente, contínua ou discreta. Objetivamente, tal abordagem foi adotada com vistas a permitir que se focasse mais na proposta do que nos cálculos em si. Naturalmente, tal escolha traz certas questões, principalmente sobre a pertinência da aplicação do formalismo da teoria de sinais à formação, manipulação e transmissão de imagens. Visando elucidar este ponto, e com vista à completude deste texto, é realizada uma discussão básica sobre a Óptica de Fourier. Este arcabouço une de maneira absolutamente natural a teoria de sinais à teoria da difração, permitindo que se forme juízo sobre o papel dos mais diversos elementos ópticos (lentes, espelhos etc.) de maneira completamente análoga ao de filtros (passa-baixas, passa-altas etc.).

Os tópicos aqui discutidos são consolidados, de forma que não se realiza uma abordagem exaustiva, mas sim uma exposição robusta com vistas a um entendimento mínimo do fenômeno de difração e sua relação com processos lineares de filtragem. Para aprofundamento em óptica física, sugere-se os clássicos livros de Born e Wolf [22] e Fowles [58]. Um curso completo sobre óptica de Fourier pode ser obtido no livro de Goodman [78]. Aplicações à física do laser e às ciências das imagens podem ser obtidas nos trabalhos de Chang [33] e Barrett e Myers [12], respectivamente.

A.2 Modelagem determinística de um sistema LSI de imagens

Antes de imergirmos na Óptica de Fourier de fato, é salutar preparar terreno apresentando um modelo simplificado para formação de imagens e sua leitura segundo o *modus operandi* da teoria de sinais LSI. A abordagem aqui descrita se baseia fortemente nos modelos apresentados por Macovski [133] e Barrett e Swindell [11] para análise de sistemas radiográficos¹. Contudo, no que segue, não são considerados efeitos de absorção da radiação tratados à luz da Lei de Beer-Lambert², uma vez que as amostras aqui consideradas têm

¹Há de ressaltar que embora a análise aqui seja realizada para sistemas de transmissão, aqueles que operam por reflexão podem ser modelizados de modo análogo, levando-se em conta que nestes casos o objeto é também a fonte luminosa.

²A Lei de Beer-Lambert é mais conhecida em sua versão para feixes monocromáticos e amostras homogêneas: $I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$, em que I_0 é a intensidade registrada sem meio absorvedor, μ é o coeficiente de atenuação linear e $I(x)$ é a intensidade registrada quando uma amostra de espessura x é irradiada por um feixe monocromático. Contudo, no caso mais geral (feixe poli-energético, amostra heterogênea), a lei de Beer-Lambert tem a forma $\int \Phi(E) \exp\left[-\int_C \mu(\mathbf{x}, E) dl\right] dE$, em que E é a energia do feixe, $\Phi(E)$ é a distribuição espectral

espessura nula. Efeitos de espalhamento também não são considerados, de forma que o modelo discutido é basicamente *geométrico*. Ademais, efeitos estocásticos não são incorporados, tendo-se então um modelo *determinístico*.

O sistema físico considerado consiste em três planos infinitos paralelos – S , S' e S'' –, que determinam os três sistemas de coordenadas de interesse: fonte, objeto e detector (ou imagem), respectivamente. As distâncias de interesse são distância fonte-objeto d_{FO} , objeto-detector d_{OD} e fonte-detector d_{FD} . No caso de amostras de espessura nula,

$$d_{FD} = d_{FO} + d_{OD}. \quad (\text{A.1})$$

À fonte de luz está associada uma distribuição $f(\mathbf{x})$, tal que $f(\mathbf{x})d^2x$ corresponde, por exemplo, ao número médio de fótons emitidos por d^2x por unidade de tempo. Por simplicidade, supõe-se que

1. a fonte irradie constantemente ao longo do tempo, de forma que o número de fótons emitidos por d^2x durante um período Δt seja igual a $\Delta t f(\mathbf{x})d^2x$; e
2. a fonte irradie isotropicamente.

A hipótese 1 torna todo o processo independente do tempo, ao passo que a segunda torna mais simples o cômputo da fração de energia coletada pelo detector.

De acordo com a configuração estabelecida, apenas uma fração da energia emitida pela fonte é coletada pelo detector. Analisando a Figura A.1, vê-se que a porção do feixe delimitada por $d\Omega$ atinge o detector. Por-

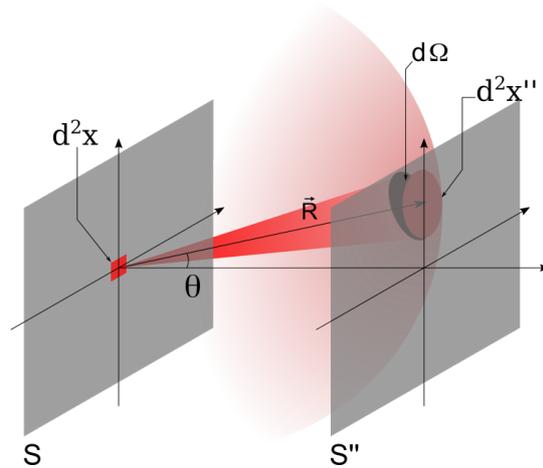


Figura A.1: Emissão isotrópica do elemento de área d^2x . O feixe divergente com abertura dada pelo ângulo sólido $d\Omega$ incide sobre S'' delimitando uma área d^2x'' . Por simplicidade, o elemento d^2x foi posto na origem, não sendo este um requisito geral para a configuração em questão.

tanto, a porção detectada corresponde à fração $d\Omega/4\pi$ da intensidade total. O ângulo sólido infinitesimal Ω é dado por

$$d\Omega = \frac{\cos(\theta)}{R^2} d^2x'', \quad (\text{A.2})$$

em que θ é o ângulo compreendido entre o centro do feixe e o eixo ortogonal aos planos considerados. O vetor \mathbf{R} conecta d^2x e d^2x'' . Por geometria, tem-se que $R \cos(\theta) = d_{FD}$. Logo, $d\Omega$ pode ser reescrito como

$$d\Omega = \frac{\cos^3(\theta)}{d_{FD}^2} d^2x'', \quad \text{em que} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x''-x}{d_{FD}}\right)^2 + \left(\frac{y''-y}{d_{FD}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.3})$$

e C é o trajeto do raio considerado.

A Equação (A.3) mostra que o fator $\cos(\theta)$ depende das posições \mathbf{x} e \mathbf{x}'' . De fato, o termo $\cos^3[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')]$ corresponde ao fator de obliquidade do sistema, alterando as intensidades resultantes sobre S'' de acordo com a posição.

A intensidade registrada em S'' devida à emissão pelo elemento d^2x durante um intervalo de tempo Δt é dada por

$$dI(\mathbf{x}'') = \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \cos^3[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')] f(\mathbf{x}) d^2x. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a intensidade no ponto \mathbf{x}'' é dada pela soma de todas as contribuições infinitesimais:

$$I(\mathbf{x}'') = \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \int_S \cos^3[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')] f(\mathbf{x}) d^2x. \quad (\text{A.5})$$

Deve-se notar que a Equação (A.5) pressupõe um detector perfeito, já que toda a fração do feixe incidente considerada contribui para a formação do sinal I em \mathbf{x}'' . A influência do detector será contabilizada mais adiante.

A Equação (A.5) mostra que a intensidade registrada pelo detector – por ora perfeito – é alterada segundo o fator de obliquidade dado por $\cos[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')]$. Contudo, tal como posta, esta expressão não refere-se a uma distribuição-imagem, pelo simples fato de que não há objeto sendo irradiado. A inserção de um objeto, caracterizada por uma distribuição $u(\mathbf{x}')$ no plano S' altera a intensidade detectada. Nesse caso, a intensidade correspondente à distribuição-imagem $v(\mathbf{x}'')$ é dada por

$$v(\mathbf{x}'') = I(\mathbf{x}'') = \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \int_S \cos^3[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')] f(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}') d^2x. \quad (\text{A.6})$$

Ao examinar a Equação (A.6), vê-se que o cômputo de um sinal sobre S'' demanda uma integração envolvendo os outros dois sistemas de coordenadas, S e S' . Entretanto, as variáveis \mathbf{x} , \mathbf{x}' e \mathbf{x}'' estão vinculadas, sendo o vínculo dado por³

$$\frac{\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'}{d_{\text{OD}}} = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{d_{\text{FO}}}. \quad (\text{A.7})$$

Escrevendo \mathbf{x}' em termos dos outros vetores e usando a Equação (A.1), pode-se reescrever $v(\mathbf{x}'')$ como

$$v(\mathbf{x}'') = \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \int_S \cos^3[\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')] f(\mathbf{x}) u \left[\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{FD}}} \mathbf{x}'' + \frac{d_{\text{OD}}}{d_{\text{FD}}} \mathbf{x} \right] d^2x. \quad (\text{A.8})$$

A Equação (A.8) mostra que a imagem v em \mathbf{x}'' é dada por uma superposição não-trivial envolvendo uma versão magnificada da distribuição-objeto e um fator de obliquidade dependente da posição. Contudo, há sistemas em que as distâncias entre planos é muito maior que as dimensões do objeto e imagem. Para tais sistemas, $\cos(\theta) \approx 1$, ou $\theta \approx 0$ (vide Equação (A.3)). Esta é a aproximação paraxial, fundamental em óptica [78, 157, 12, 58]. Usando-a na Equação (A.8), obtém-se que

$$v(\mathbf{x}'') \approx \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \int_S f(\mathbf{x}) u \left[\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{FD}}} \mathbf{x}'' + \frac{d_{\text{OD}}}{d_{\text{FD}}} \mathbf{x} \right] d^2x. \quad (\text{A.9})$$

Este resultado pode ser posto numa forma mais interessante por meio de uma troca de coordenadas da forma [133, 11, 78]

$$\boldsymbol{\eta}'' = -\frac{d_{\text{OD}}}{d_{\text{FO}}} \mathbf{x}, \quad (\text{A.10})$$

³O vínculo em questão é apresentado de tal forma que pode-se, erroneamente, pensar que os três vetores repousam sobre um mesmo plano. De fato, a relação correta deveria considerar a componente z ortogonal aos planos de cada um destes vetores. Contudo, como quaisquer dois destes três vetores definem um plano – geralmente oblíquo a S , S' e S'' –, a colocação do vínculo na forma expressa pela Equação (A.7) é válida e auxilia muito na compreensão do processo, embora não seja rigorosamente verdadeira nos sistemas de coordenadas considerados. Alternativamente, se encarmos o vínculo (A.7) como uma relação entre os vetores sem a terceira componente, ou seja, $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}' = (x', y')$ e $\mathbf{x}'' = (x'', y'')$, a inconsistência desaparece [11].

com a qual a distribuição-imagem é reescrita como

$$v(\mathbf{x}'') \approx \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \left(\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \right)^2 \int_{S''} f \left(-\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \boldsymbol{\eta}'' \right) u \left[\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{FD}}} (\mathbf{x}'' - \boldsymbol{\eta}'') \right] d^2 \eta'' \quad (\text{A.11})$$

A Equação (A.11) pode ser transformada numa integral de convolução se definirmos versões magnificadas das distribuições da fonte e objeto. Sejam

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) \equiv f \left(-\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \mathbf{x} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{u}(\mathbf{x}'') \equiv u \left(\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{FD}}} \mathbf{x}'' \right) \quad (\text{A.12})$$

versões magnificadas (ou escaladas) das distribuições em questão. Usando-as na Equação (A.11) chega-se finalmente em

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}'') &\approx \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \left(\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \right)^2 \int_{S''} \tilde{f}(\boldsymbol{\eta}'') \tilde{u}(\mathbf{x}'' - \boldsymbol{\eta}'') d^2 \eta'' \\ &\approx \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \left(\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \right)^2 (\tilde{f} * \tilde{u})(\mathbf{x}'') \\ &= C (\tilde{f} * \tilde{u})(\mathbf{x}''), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

em que C é uma constante que incorpora as contribuições de d_{FD} , d_{FO} , d_{OD} e Δt .

O resultado mostrado na Equação (A.13) revela que na aproximações paraxial e de amostras arbitrariamente finas a imagem v é proporcional à convolução entre as distribuições devidamente magnificadas da fonte e do objeto. Nesse sentido, um sistema de imageamento é – dentro do regime das aproximações assumidas – um sistema LSI. Dentro desse cenário, a influência do detector é considerada como mais um termo na convolução, isto é,

$$v(\mathbf{x}'') \approx \frac{\Delta t}{4\pi d_{\text{FD}}^2} \left(\frac{d_{\text{FO}}}{d_{\text{OD}}} \right)^2 (\tilde{f} * \tilde{u} * h_{\text{det}})(\mathbf{x}''), \quad (\text{A.14})$$

em que $h_{\text{det}}(\mathbf{x}'')$ é a resposta ao impulso do detector. Deve-se notar que, por avaliarmos a imagem sobre S'' , a resposta ao impulso h_{det} não precisa ser magnificada, diferentemente do que ocorre com os sinais da fonte e do objeto.

Deve-se ter em mente que o modelo adotado pressupõe amostra de espessura nula, o que dificilmente ocorre na prática. As dificuldades de se introduzir amostras espessas na análise desse sistema são notáveis, levando inevitavelmente à quebra da linearidade. Discussões aprofundadas sobre estes e outros casos, como fontes obliquamente posicionadas, podem ser encontradas em [133] e [11]. Por fim, deve-se notar que o modelo aqui abordado prevê corretamente a influência do tamanho da fonte sobre a resolução espacial do sinal resultante, bem como a redução da intensidade com o quadrado da distância fonte-detector, d_{FD} .

A.3 Teoria escalar da difração

Damos início aqui à construção do aparato formal da óptica de Fourier. Do ponto de vista técnico, apresenta-se basicamente uma aplicação da análise de Fourier à propagação de um campo escalar. Entretanto, o tratamento das condições de fronteira é particularizado de modo a modelizar sistemas planos, fazendo com que emanem dos cálculos os principais resultados almejados, a saber: os regimes de Fresnel e Fraunhofer para a propagação da luz. A construção anterior, de caráter puramente geométrico, encontra sua contrapartida ondulatória, permitindo que se contemple uma abordagem completamente baseada em sinais para a questão da propagação de uma informação codificada em uma onda luminosa.

A.3.1 Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff

Consideremos um campo escalar $u(\mathbf{x}, t)$ ⁴ permeando o espaço livre, suposto homogêneo e isotrópico. Deseja-se determinar a forma com que este campo se propaga quando perturbado pela presença de um anteparo plano arbitrário. Isto é, dado um ponto de observação \mathbf{x} , queremos obter a expressão para $u(\mathbf{x}, t)$ quando da presença de uma abertura plana Σ atravessada pelo campo incidente. Parte-se da premissa que $u(\mathbf{x}, t)$ obedece à equação de onda

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{A.15})$$

em que $v = c/n$, sendo c a velocidade da luz no vácuo e n o índice de refração do meio. Considerando-se uma perturbação da forma $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-j\omega t}$, obtém-se⁵

$$[\nabla^2 + k^2]u(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{com } k \equiv \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi n f}{c}. \quad (\text{A.16})$$

A Equação (A.16) apresenta a Equação de Helmholtz, em que k e f correspondem ao número de onda e à frequência linear de oscilação do campo. Naturalmente, $\omega = 2\pi f$ corresponde à frequência angular de oscilação do campo.

A solução da Equação de Helmholtz (A.16) pode ser obtida por meio da resolução de um problema auxiliar, fazendo uso das funções de Green, equipadas com as condições de contorno apropriadas:

$$[\nabla^2 + k^2]G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (\text{A.17})$$

em que exige-se que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ seja solução da equação de onda, mostrada em (A.15). Para prosseguir em busca da solução, evoca-se a segunda identidade de Green [95]:

$$\int_V [G\nabla^2 u - u\nabla^2 G] d^3r = \oint_S [u\partial_n G - G\partial_n u] dS, \quad (\text{A.18})$$

em que $S = \partial V$ é o bordo do volume V analisado. Usando as Equações (A.16) e (A.17) na Equação (A.18), obtém-se

$$\oint_S [G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\partial_n u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\partial_n G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dS = u(\mathbf{x}_0). \quad (\text{A.19})$$

Até este ponto, nada foi dito sobre a função de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Via diferenciação direta, verifica-se que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(jk|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(jkR)}{R}, \quad \text{com } \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.20})$$

é solução do problema auxiliar (A.17) e pode, portanto, ser usado na solução do problema original através da expressão apresentada na Equação (A.19).

Considerando a forma de $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ dada pela Equação (A.20) sobre a superfície fechada geral S , chega-se ao Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff [78, 22]:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \partial_n u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \partial_n \left(\frac{\exp(jkR)}{R} \right) \right] dS. \quad (\text{A.21})$$

O ponto de maior destaque deste Teorema consiste no fato de que $u(\mathbf{x}_0)$ fica completamente definido por meio da análise de seus valores e de sua derivada na direção normal a S . O passo seguinte consiste em particularizar a superfície S para um sistema planar.

⁴Na teoria escalar da difração, pode-se tomar o campo u como uma das componentes do campo elétrico de uma dada distribuição de carga. Contudo, a discussão sobre a natureza do campo considerado não é relevante para os desenvolvimentos que seguem. De fato, a teoria escalar da difração tal como apresentada neste capítulo ajusta-se muito bem à acústica, por exemplo [48].

⁵De modo mais geral, poderíamos expressar u como sua transformada de Fourier temporal inversa, $u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-1} \int u(\mathbf{x}, \omega) e^{j\omega t} d\omega$, flexibilizando a hipótese de um feixe monocromático [157]. Entretanto, tal possibilidade não é explorada com vistas à clareza do raciocínio desenvolvido. Seguindo esta linha, não mostra-se, contudo, a dependência do campo final com sua derivada temporal [78, 157].

A.3.2 Abordagem de Kirchhoff para difração numa tela plana

De posse do Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff (A.21), deseja-se calcular o campo $u(\mathbf{x}_0)$ devido à propagação de uma onda através de uma abertura Σ em um anteparo plano. A Figura A.2 ilustra a configuração do sistema. Para este problema, adota-se a função de Green originalmente usada por Kirchhoff, dada

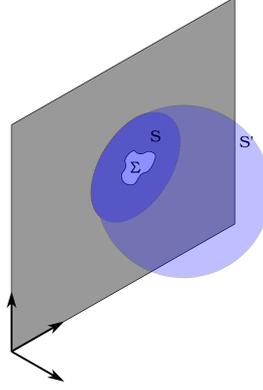


Figura A.2: Esquema do problema de difração por uma abertura plana. A superfície de integração é composta de uma calota S' de raio $R_{S'}$ unida a uma circunferência S que engloba a abertura Σ . A fonte está situada atrás do plano infinito.

pela Equação (A.20). Com isso, lida-se precisamente com a Equação (A.21), em que S e S' correspondem às superfícies indicadas na Figura A.2.

Como se pretende analisar u em todo o espaço, espera-se que $R_{S'}$ se torne arbitrariamente grande. Com isso, uma primeira aproximação consiste em se descartar a integral sobre S' no limite $R_{S'} \rightarrow \infty$, já a amplitude da função de Green considerada cai com $1/R_{S'}$. Contudo, deve-se notar que a área da circunferência cresce com $R_{S'}^2$, de forma que este argumento não é correto [78]. Um argumento alternativo [22] para se descartar a integral sobre S' consiste em considerar que em algum instante de tempo $R_{S'}$ será tão grande que a onda ainda não terá alcançado esta superfície. Contudo, conforme apontado por Goodman [78], o Teorema Integral de Kirchhoff supõe uma perturbação monocromática, de forma que ele *sempre* esteve oscilando, e portanto, sempre ultrapassa infinitamente a superfície em questão. Uma forma mais consistente de se descartar a integral sobre a calota S' reside na Condição de Radiação de Sommerfeld [78, 22], que é expressa por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R [\partial_n u - jku] = 0. \quad (\text{A.22})$$

Uma vez atendida esta condição, o Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff é reescrito como

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \partial_n u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \partial_n \left(\frac{\exp(jkR)}{R} \right) \right] dS.$$

Ou seja, a integração agora ocorre apenas sobre o plano S . Uma simplificação importante ocorre quando se faz uso da seguinte

HIPÓTESE 1: CONDIÇÕES DE CONTORNO DE KIRCHHOFF [78, 22]

- Sobre a abertura Σ , u e $\partial_n u$ são idênticos às suas versões na ausência de anteparo; e
- u e $\partial_n u$ se anulam nas regiões de S compreendidas pela sombra geométrica do anteparo.

Com estas condições, o Teorema Integral sofre mais uma alteração, tomando a forma

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \partial_n u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \partial_n \left(\frac{\exp(jkR)}{R} \right) \right] d\Sigma. \quad (\text{A.23})$$

Enunciadas na forma acima, as condições de contorno de Kirchhoff sobredeterminam o problema. Isto se deve ao fato de que se u e $\partial_n u$ se anulam em uma porção do espaço, então elas devem se anular em todo o espaço [78, 95], sendo esta uma característica de funções que obedecem às Equações de Helmholtz e Laplace. As incoerências proporcionadas por estas condições de contorno motivaram formulações mais rigorosas, a saber, a formulação de Rayleigh-Sommerfeld, a ser discutida na Seção A.3.3. Entretanto, a experiência mostra [78] que os resultados obtidos na abordagem de Kirchhoff são bastante satisfatórios, sendo frequentemente usados para análise.

Dando continuidade à derivação de u quando da presença da abertura Σ , suponhamos que a distância entre um ponto qualquer P_1 sobre a abertura e ponto de observação P_0 seja muito maior que o comprimento de onda da onda incidente, isto é, $R_{01} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \gg \lambda$. Nesse cenário, a Equação (A.23) toma a forma

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\exp(jkR_{01})}{R_{01}} [\partial_n u(\mathbf{x}) - jk \cos(\hat{\mathbf{r}}_{01}, \hat{\mathbf{n}}) u(\mathbf{x})] d\Sigma. \quad (\text{A.24})$$

Se a abertura Σ é iluminada por uma fonte isotrópica pontual posicionada em \mathbf{x}_2 , que dá origem a uma onda esférica da forma $u(\mathbf{x}) = A \exp(jkR_{21})/R_{21}$, em que $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, a integral (A.24) é finalmente reescrita como

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{A}{j\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(jk(R_{01} + R_{21}))}{R_{01}R_{21}} \left[\frac{\cos(\mathbf{R}_{01}, \hat{\mathbf{n}}) - \cos(\mathbf{R}_{21}, \hat{\mathbf{n}})}{2} \right] d\Sigma. \quad (\text{A.25})$$

A expressão mostrada em (A.25) é conhecida como Integral de Fresnel-Kirchhoff [78, 48, 22].

Antes de prosseguirmos com a abordagem de Sommerfeld para a difração no anteparo plano, cabe dizer que a integral de Fresnel-Kirchhoff, deduzida a partir de poucas premissas (condições de contorno de Kirchhoff, condição de radiação de Sommerfeld e aproximação $R_{01} \gg \lambda$) está em completo acordo com o princípio de Huygens-Fresnel [48, 78], que nos diz que todos os pontos de uma frente de onda correspondem, de fato, a fontes pontuais para novas frentes de onda no processo de propagação.

A.3.3 Abordagem de Rayleigh-Sommerfeld para difração numa tela plana

Conforme apontado na Seção A.3.2, as condições de contorno usadas por Kirchhoff sobredeterminam o problema da difração. Embora este seja uma embarço teórico, os resultados experimentais concordam bem com aqueles previstos pela integral de Fresnel-Kirchhoff. De qualquer modo, é instrutivo considerar a formulação de Sommerfeld para este problema, uma vez que o resultado será usado para análise dos regimes de Fresnel e Fraunhofer da difração.

A estratégia adotada por Sommerfeld consiste basicamente em se usar uma função de Green diferente daquela usada por Kirchhoff, mostrada na Equação (A.20), escolhendo uma que se anule completamente sobre Σ^6 . Uma escolha conveniente consiste em se tomar a função de Green como sendo composta por duas fontes puntiformes completamente fora de fase em posições simétricas (especulares) em relação à abertura Σ , ou seja,

$$G(\mathbf{R}_{01}, \mathbf{R}'_{01}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(jR_{01})}{R_{01}} - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(jR'_{01})}{R'_{01}}. \quad (\text{A.26})$$

Considerando novamente um estímulo oriundo de P_2 na forma $A \exp(jR_{21})/R_{21}$ e fazendo uso da aproximação $r \gg \lambda$, chega-se finalmente a

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{A}{j\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp jk(R_{01} + R_{21})}{R_{01}R_{21}} \cos(\mathbf{R}_{01}, \hat{\mathbf{n}}) d\Sigma, \quad (\text{A.27})$$

que corresponde à Fórmula de Rayleigh-Sommerfeld [78, 157, 48, 22]. A Equação (A.27) difere da Fórmula de Fresnel-Kirchhoff não apenas pelo fator de obliquidade, mas também pelo fato de não haver mais inconsistências sobre as condições de contorno. Contudo, há de se notar que a abordagem de Kirchhoff é mais geral,

⁶Neste caso, então, não existe necessidade de se especificar simultaneamente u e $\partial_n u$ sobre Σ .

pois é construída sobre uma superfície fechada arbitrária, ao passo que a formulação de Rayleigh-Sommerfeld parte da premissa de que o sistema é planar.

Antes de discutir os regimes de Fresnel e Fraunhofer, cabe notar que a propagação do campo u corresponde a uma superposição linear da forma

$$u(\mathbf{x}) = \int h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d^2 x',$$

cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{A}{j\lambda} \frac{\exp(jkR)}{R} \cos(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}).$$

Isto é, a difração por um anteparo planar pode, dentro das aproximações envolvidas, ser considerada como um processo linear *variante* ao deslocamento.

No que concerne à linearidade, não deveria haver surpresa alguma na constatação de que o campo u é dado pela superposição de sinais elementares, visto que o desenvolvimento partiu de uma equação diferencial linear e fez uso de funções de Green. O detalhe interessante é que é possível conceber regimes em que o sistema torna-se, além de linear, invariante ao deslocamento.

A.3.4 Regimes de Fresnel e Fraunhofer

O passo seguinte na construção da óptica de Fourier consiste em se investigar a propagação do campo difratado u em um plano posterior à abertura. A Figura A.3 ilustra a configuração do sistema em análise: o plano S' contém a abertura Σ que difrata o feixe incidente, que se propaga pelo espaço, impingindo um segundo plano S paralelo ao primeiro, posicionado a uma distância z deste.

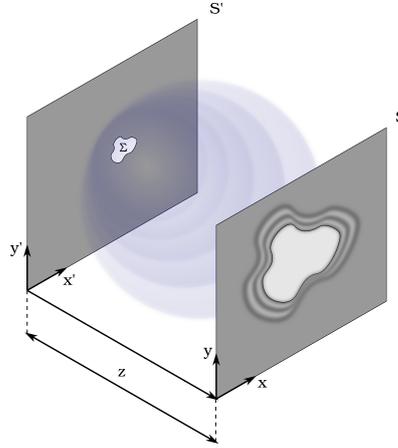


Figura A.3: Arranjo da difração por abertura planar.

Por construção, o fator de obliquidade é dado agora por

$$\cos(\theta) = \frac{z}{R},$$

em que $\mathbf{R} = (x - x', y - y', z)$ é o vetor que conecta um ponto $P' \in \Sigma$ a um ponto $P \in S$. Com isso, a Fórmula de Rayleigh-Sommerfeld toma a forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{z}{j\lambda} \int_{\Sigma} u(\mathbf{x}') \frac{\exp(jkR)}{R^2} d^2 x'. \quad (\text{A.28})$$

Em um regime em que $z \gg x, y$, a magnitude de R pode ser aproximada por uma expansão binomial:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \approx z \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 + 1 \right] \quad (\text{A.29})$$

A expansão binomial mostrada na Equação (A.29) pode ser aplicada à Equação (A.28), mas de modo distinto no expoente e no denominador: no primeiro, pelo menos três termos da série devem ser mantidos devido à magnitude de k ($k \approx 9,93 \cdot 10^6 \text{m}^{-1}$ para $\lambda = 633 \text{nm}$, por exemplo), ao passo que um termo da expansão no denominador é suficiente. Dito isto, tem-se, explicitamente,

$$u(x, y) \approx \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y') \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2] \right\} dx' dy', \quad (\text{A.30})$$

em que os limites de integração foram absorvidos por $u(x', y')$. A Equação (A.30) corresponde a um produto de convolução entre u e a resposta h_{NF} , dada por

$$h_{\text{NF}}(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (\text{A.31})$$

A convolução entre $h_{\text{NF}}(x, y; z)$ e $u(x, y; 0)$ é denominada Integral de Difração de Fresnel [78, 22], sendo válida para observações em campo próximo – ou *near field*. Desse modo, no regime de campo próximo, a propagação do campo corresponde, em essência, a um sistema LSI.

Cabe ressaltar que a estrutura “convolucional” da propagação de um campo no regime de Fresnel faz com que a determinação das figuras de difração seja uma tarefa computacionalmente simples, uma vez que implementa-se convoluções com muita facilidade por meio de algoritmos rápidos para a DFT⁷. A Figura A.4 ilustra a determinação do padrão de difração de uma fenda quadrada. Investigações completas sobre óptica de Fourier computacional podem ser encontradas no livros de Khare [104] e Voelz [221].

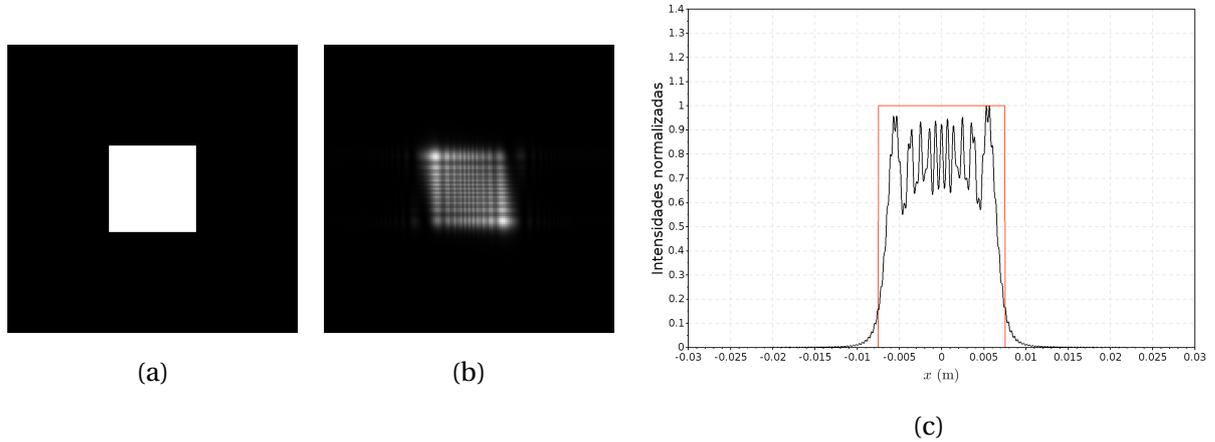


Figura A.4: Simulação de difração de Fresnel para uma abertura quadrada de lados $w = 1,5 \text{cm}$ observada a uma distância $z = 10 \text{m}$ iluminada por luz verde ($\lambda = 532 \text{nm}$). São mostrados em (a), (b) e (c) a abertura, a intensidade da figura de difração e o perfil unidimensional de intensidade normalizado, respectivamente.

Embora a propagação do campo u no regime de campo próximo corresponda a uma convolução, sua expressão também pode ser reescrita em termos de uma transformada de Fourier envolvendo a abertura e um fator de fase quadrática, isto é,

$$u(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \mathcal{F} \left\{ u(x', y') \exp \left[j \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2) \right] \right\}. \quad (\text{A.32})$$

⁷Embora os aspectos de programação sejam simples, há questões bastante sensíveis acerca da amostragem das funções envolvidas [104, 221].

A Equação (A.32) é obtida desenvolvendo-se os quadrados na expansão de R_{01} na Equação (A.30). Deve-se notar que, diferentemente dos fatores de fase externos à integral, que não influenciam a *intensidade* do sinal registrado, a fase quadrática interna à transformada de Fourier impede, pelo menos em princípio, a obtenção do espectro de Fourier da abertura. Entretanto, se as distâncias envolvidas são tais que

$$z \gg k(x'^2 + y'^2), \quad (\text{A.33})$$

o fator de fase quadrática interno é desprezível, levando à expressão da Difração de Fraunhofer [78, 22] para campo distante, ou *far field*:

$$u(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \hat{u} \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right). \quad (\text{A.34})$$

A Figura A.5 mostra uma simulação para difração de Fraunhofer de uma abertura quadrada. Do ponto de vista computacional, tal resultado é ainda mais simples de ser obtido do que no caso de campo próximo, uma vez que não se requer mais uma convolução, mas uma simples transformação de Fourier.

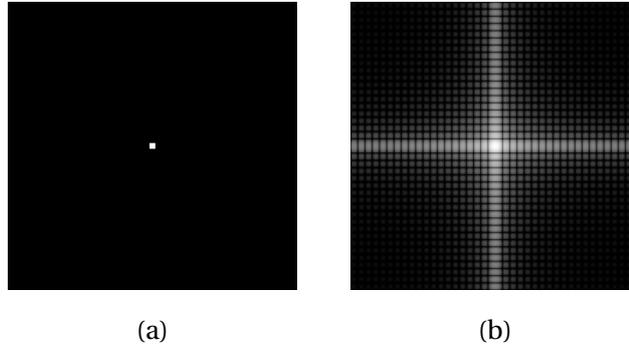


Figura A.5: Simulação de difração de Fraunhofer para uma abertura quadrada de lados $w = 0,1$ cm observada a uma distância $z = 10$ m iluminada por luz verde ($\lambda = 532$ nm). São mostrados em (a) e (b) abertura e a intensidade da figura de difração. Esta última foi submetida a uma transformação logarítmica de contraste para melhorar a visualização.

Em termos de propagação no regime de Fraunhofer, a linearidade é mantida, mas a estrutura invariante ao deslocamento não mais existe, pelo fato de não haver mais uma resposta ao impulso nos mesmos moldes que h_{NF} . Entretanto, sendo o regime de campo distante uma aproximação da difração de Fresnel, é sempre possível retomar a estrutura LSI do sistema, às expensas da reintrodução do fator de fase quadrática no sistema.

B.1 Introdução

O cálculo fracionário tem uma longa história, no mínimo tão antiga quanto a do cálculo usual [185]. Conceitos relativos a derivadas e integrais de ordem generalizada permaneceram no reino da matemática pura por um longo tempo, mas têm sido aplicados nas últimas décadas a uma variedade ampla de campos, desde teoria do controle à eletrodinâmica; das ciências econômicas à mecânica quântica [89]. Em meio a diversas aplicações e interpretações, o cálculo fracionário (CF) aparenta constituir um aparato adequado para modelagem de sistemas com memória, isto é, sistemas cuja resposta a um estímulo local depende de toda sua “história”[89, 211].

No contexto deste Trabalho, um entendimento mínimo sobre CF se fez necessário face à percepção de que poderíamos contemplar o alcance de alternativas aos Espaços-Escala Lineares sem recorrer à Equação de Perona-Malik ou variantes desta. De fato, existem alternativas mais imediatas para generalização da Teoria, baseadas principalmente na flexibilização dos axiomas construtivos. Estas nos afastam em maior ou menor grau das descrições de Iijima, Witkin e Marr e Hildreth [123, 233, 136]. Entretanto, inspirado pelos trabalhos de Duits *et al.* [46] e Didas *et al.* [44], este autor seguiu uma rota diferente, em que operadores diferenciais fracionários desempenham papel relevante na construção do Espaço-Escala.

Este Apêndice é fruto de uma breve imersão do autor na área do CF e corresponde a uma versão traduzida e adaptada de artigo publicado em 2020 [173]. Maiores detalhamentos sobre os assuntos discutidos neste Apêndice podem ser encontrados na referência citada e naquelas lá contidas. Naturalmente, não se propõe aqui uma discussão aprofundada sobre uma área tão complexa, de forma que os conceitos fundamentais são expostos com vistas à formação de substrato mínimo sobre o assunto, a ser relacionado ao resultado apresentado por Pauwels *et al.* [168] (vide Equação (4.18), p. 46.). De todo modo, um tratado profundo sobre os aspectos matemáticos do CF pode ser encontrado no livro de Samko *et al.* [187], ao passo que análises mais aplicadas são expostas por Herman [89], Oldham e Spanier [153] e Tarasov [210].

B.2 Conceitos fundamentais

De acordo com Ross [185], um diálogo entre L'Hospital e Leibniz, em que o significado da operação $d^{1/2}/dt^{1/2}$ foi discutido é considerado o ponto de partida para o estabelecimento do CF. Sua principal idéia consiste em se generalizar a ordem de uma derivada, diga-se n , permitindo que se realizem operações – incluindo integração

– de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$. Imediatamente, surge a questão sobre o significado da operação

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t), \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{B.1})$$

e sobre como esta deve ser operacionalizada. Uma definição intuitiva de derivada fracional é devida a Fourier [89, 90]: é sabido que a Transformada de Fourier mapeia a derivada de seu operando, $f(t)$, a um produto entre a transformada da função original e uma potência inteira de $j\omega$. Isto é,

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] (\omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}[f(t)], \quad \text{com } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.2})$$

Generalizando-se a ordem da derivada para $\alpha \in \mathbb{C}$ e tomando-se a inversa leva a

$$D^\alpha [f](t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (\text{B.3})$$

Por exemplo, se $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, obtém-se $D^\alpha [f](t) = |\omega_0|^\alpha \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\alpha)$, o que leva ao resultado usual quando $\alpha \in \mathbb{Z}$. Isto não é uma coincidência, mas sim uma exigência fundamental para derivadas fracionárias.

A despeito de sua simplicidade, a definição devida a Fourier não é única: há muitas outras. Consultando-se as referências [89], [90] e [154], encontra-se mais de trinta definições, não necessariamente equivalentes. Antes de introduzir duas delas, é importante enfatizar o fato de que a derivada fracionária de Fourier, dada pela Equação (B.3), é uma integral no sentido clássico. Eis mais uma característica dos operadores fracionários: derivadas e integrais possuem um vínculo profundo, em completa analogia ao caso usual, em que se relacionam via Teorema Fundamental do Cálculo. Para evidenciar tal conexão no caso fracionário, parte-se do fato de que um número arbitrário α pode ser decomposto em suas partes inteira e fracionária, isto é, $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, com $[\alpha] \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in [0, 1[$. Assim,

$$D^\alpha [f](t) = D^{[\alpha] + \{\alpha\}} [f](t) = \begin{cases} D^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}} [f](t); \text{ ou} \\ D^{\{\alpha\}} D^{[\alpha]} [f](t). \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

A Equação (B.4) faz uso da importante propriedade de semi-grupo, que basicamente garante a comutatividade de $D[\cdot]$. Com vistas a conectar, de fato, a Equação (B.4) a uma integral fracionária, expande-se D^α em $D^n D^{\alpha-n}$ [89], com $n = [\alpha] + 1$:

$$\begin{aligned} D^\alpha [f](t) &= D^{\alpha-n+n} [f](t) \\ &= D^n D^{\alpha-n} [f](t) \\ &= D^n D^{\{\alpha\}-1} [f](t) \\ &= D^n I^{1-\{\alpha\}} [f](t). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Isto é, uma derivada de ordem α está relacionada a uma integral iterada de ordem $(1 - \alpha)$, aqui denotada por $I^{1-\{\alpha\}}[\cdot]$, seguida de uma derivada usual de ordem $n = [\alpha] + 1$. Essa conexão intrincada fez com que Oldham e Spanier [153] cunhassem termos curiosos, como “diferintegral” e “diferintegração”¹, motivados pela constatação de que ao se definir um operador integral fracionário, sua contrapartida diferencial está simultaneamente definida, de acordo com a Equação (B.5). De fato, para a maioria das definições de operadores fracionários, tais como os de Caputo ou de Riemann-Liouville, define-se inicialmente a integral, já que a derivada decorre desta. Uma exceção importante corresponde à abordagem de Grünwald-Letnikov para a derivada fracionária, que é baseada na generalização do operador de diferenças finitas.

No que segue, abordaremos duas definições: Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov. Estas foram escolhidas devido a sua interessante conexão, de grande importância em contextos de discretização, ou implementação numérica.

¹No inglês: “differintegral” e “differentegration” [153].

B.3 Abordagem de Riemann-Liouville

O seguinte resultado, devido a Cauchy² [90, 89, 187] relaciona uma integral iterada

$${}_a I^n[f](t) = \int_a^t dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} dt_0 f(t_0) \quad (\text{B.6})$$

a uma forma mais simples, dada por

$${}_a I^n[f](t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-t')^{n-1} f(t') dt'. \quad (\text{B.7})$$

Generalizando a ordem na Equação (B.7) para um $\alpha > 0$ arbitrário, obtém-se as integrais de Riemann-Liouville (RL) à esquerda e à direita, respectivamente:

$${}_a I_+^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} dt', \quad \text{com } t > a, \quad (\text{B.8})$$

e

$${}_a I_-^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^a \frac{f(t')}{(t'-t)^{1-\alpha}} dt', \quad \text{com } t < a. \quad (\text{B.9})$$

Em ambas Equações (B.8) e (B.9), $\Gamma(\cdot)$ corresponde à função gama.

B.4 Abordagem de Grünwald-Letnikov

Da definição usual de derivada, tem-se que $f^{(n)}(t)$ é igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n[f](t)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh)}{h^n}, \quad (\text{B.10})$$

em que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{B.11})$$

é o coeficiente binomial. Sugestivamente, pode-se generalizar o operador de diferenças $\Delta_h^n[\cdot]$ para

$$\Delta_h^\alpha[f](t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad \text{com } \alpha > 0. \quad (\text{B.12})$$

Nesse caso, o coeficiente binomial é dado por

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (\text{B.13})$$

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (GL) é definida portanto como o seguinte limite:

$$D^\alpha[f](t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f(t - kh)}{h^\alpha}. \quad (\text{B.14})$$

²De acordo com Ross [185], o resultado mostrado na Equação (B.6) é devido a Dirichlet.

Se $h > 0$, lida-se como diferenças regressivas; caso contrário, com diferenças progressivas. Deve-se tomar cuidado quando $\alpha < 0$, já que a série dada pela Equação (B.12) diverge nesse caso. Contudo, conforme apontado por Samko *et al.* [187], a derivada GL convergirá se $f(t)$ for não-periódica e decair suave e rapidamente a zero no infinito. Dentro destas condições, a Equação (B.14) com $\alpha < 0$ torna-se a integral fracionária de Grünwald-Letnikov [187, 211].

B.5 Sobre a pluralidade de definições: critérios de identificação

Conforme apontado acima, o número de definições distintas para operadores fracionários é considerável. Supreendentemente, diferentes definições levam a resultados diferentes mesmo quando aplicadas sobre um mesmo operando. Em face de tal pluralidade, é natural questionar se é possível identificar um operador fracionário “legítimo”. Em 1975, Ross [185] propôs cinco critérios que asseguram a “fracionalidade” de um dado operador. São eles:

1. a derivada de ordem α de uma função analítica $f(z)$ deve ser analítica sobre z e α ;
2. se $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, o resultado deve ser idêntico àquele obtido por uma diferenciação de ordem inteira. No caso de $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, o resultado deve ser idêntico ao da integral iterada correspondente;
3. o operador deve ser linear;
4. se $\alpha = 0$, o operando deve permanecer inalterado. Em outras palavras, 0 é o elemento neutro;
5. dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, a propriedade de semi-grupo deve valer:

$$D^\alpha D^\beta [f] = D^{\alpha+\beta} [f]. \quad (\text{B.15})$$

Em adição aos critérios propostos por Ross, há uma demonstração dada por Tarasov [212] que mostra que, para um operador legitimamente fracional, a regra usual de Leibniz, dada por

$$\frac{d^n}{dt^n} [fg](t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t), \text{ com } n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.16})$$

deve ser quebrada. Ortigueira e Machado [158] usaram este resultado para aperfeiçoar os critérios de Ross, colocando que

6. Para um operador legitimamente fracional deve valer a regra de Leibniz generalizada:

$$D^\alpha [fg](t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^{\alpha-k} [f](t) D^k [g](t), \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.17})$$

Neste mesmo trabalho, os autores mostram que, dentre várias definições, as derivadas RL e GL obedecem à Equação (B.17), correspondendo assim a operadores verdadeiramente fracionários.

Os seis critérios apresentados acima funcionam como uma espécie de filtro, uma vez que existe uma profusão de operadores alegadamente de ordem não-inteira.

B.6 Conexão entre as abordagens RL e GL: métodos numéricos

Ao se comparar as construções das integrais RL e GL, fica difícil concordar com a assertiva colocada ao final da Introdução, em que é dito que estas duas abordagens estão relacionadas. Para explicitar tal conexão, usaremos aqui uma rota via métodos numéricos. Tal estratégia se deve ao fato de que, sendo este um trabalho de aplicação de técnicas de processamento de sinais, é salutar atacar sem mais delongas as versões discretas das técnicas consideradas.

O primeiro passo consiste em identificar que as integrais fracionárias de RL (Equações (B.8) e (B.8)) possuem uma estrutura “convolucional”; pois, para o caso da integral à esquerda, temos

$${}_a I_+^\alpha [f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{t^{1-\alpha}} * f(t), \quad (\text{B.18})$$

em que $*$ é o símbolo para convolução. Uma expressão análoga existe para a integral à direita.

Num primeiro impulso, poderíamos aproximar a convolução mostrada na Equação (B.18) de maneira direta, isto é, através da discretização da variável independente e do cômputo de uma convolução discreta diretamente, ou por meio da Transformada Discreta de Fourier, DFT. Entretanto, deve-se notar que o núcleo da convolução possui uma singularidade na origem para $\Re(\alpha) < 1$. Desse modo, essa abordagem direta, ou “ingênua”, deve ser conduzida com cuidado.

Consideremos o caso em que o terminal inferior a na integral de RL à esquerda é nulo e a ordem da integral é igual a 1. Nesse caso, lida-se com uma integração usual que pode ser posta na forma de um problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_0^t f(t', y(t')) dt' \quad (\text{B.19})$$

Realizemos então a discretização da variável muda t' , discretizando o intervalo $[0, t]$ em $N + 1$ partições. Por comodidade, considere que estas partições têm a mesma medida, e que portanto $t_n = n\Delta t$, com $0 \leq i \leq N$. A abordagem mais direta para se resolver esta EDO consiste em se utilizar o método de Euler explícito [76, 181]:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{com } i \in [0, N]. \quad (\text{B.20})$$

Embora este seja um método de primeira ordem [76, 181], não estamos preocupados aqui com sua precisão. O principal aspecto a ser considerado é que a Equação (B.20) corresponde a um método de passo simples, isto é, o valor de y_{n+1} depende apenas de informações em t_n . Outro exemplo de método de passo simples é o método de Runge-Kutta. Deve-se notar que não há, em princípio, restrições sobre o uso de outras entradas que não em n para aproximarmos a solução. No caso mais geral, lidaríamos com uma equação de diferenças da forma

$$\sum_{k=0}^M \alpha_k y_{n-k} = \Delta t \sum_{k=0}^M \beta_k f_{n-k} \quad \text{com } n \geq M, \quad (\text{B.21})$$

em que $f_k = y'_k$ e $\{\alpha_k\}_0^M$ e $\{\beta_k\}_0^M$ são dois conjuntos de constantes que dependem do método empregado. Os valores y_n para $n < M$ são chamados termos de inicialização da quadratura [126, 128, 238] e constituem o ponto de partida para a resolução iterativa da Equação (B.21). Esta Equação é chamada de método linear de passo múltiplo – LMM³ e há uma miríade de variações a depender das entradas envolvidas. Dois exemplos importantes são os métodos de Adams-Bahsfort (explícito) e Adams-Moulton (implícito). As referências [76, 181] são recomendadas àqueles que buscam análises aprofundadas no tema.

Está claro que os coeficientes α_k, β_k desempenham um papel fundamental em questões relativas à convergência e estabilidade do LMM mostrado na Equação (B.21). Ademais, visto que lidamos com uma equação de diferenças com coeficientes constantes, a transformada (discreta) de Laplace surge como ferramenta básica para análise dos sistemas considerados. Ela é definida por⁴

$$\mathcal{L}[y](z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n y_n, \quad \text{com } z \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.22})$$

A Equação (B.22) permite obter os polinômios geradores do método de passo múltiplo considerado [181, 69, 126, 141, 238]

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^M \alpha_j z^{n-j} \quad \text{e} \quad \sigma(z) = \sum_{j=0}^M \beta_j z^{n-j}. \quad (\text{B.23})$$

³Do inglês *linear multistep method*.

⁴Nota-se uma similaridade importante entre a Equação (B.22) e a transformada Z de um sinal causal, já que estas diferem apenas no sinal do expoente. De fato, a transformada Z constitui um aparato útil e importante em sistemas em tempo discreto, e pode ser usada sem maiores adaptações para caracterizar um LMM [37, 69].

Uma vez que os polinômios geradores $\rho(z)$ e $\sigma(z)$ determinam completamente o LMM, é costumeiro denotar o método dado pela Equação (B.21) por (ρ, σ) .

Até este ponto, foi mostrado que um problema de valor inicial pode ser resolvido através do emprego de um LMM (ρ, σ) . Voltando ao início da Seção, queremos vincular este PVI a uma integral em forma de convolução (por ora, de ordem inteira $\alpha = 1$). Em outras palavras, buscamos uma aproximação do tipo

$$I_n \equiv I(t = n\Delta t) \approx \sum_{j=0}^n \omega_j g_{n-j} + \sum_{j=0}^s \mu_{nj} g_{n-j}, \quad (\text{B.24})$$

em que ω_j dependem de Δt e $s \leq n$. A segunda soma é necessária para garantir a convergência nas vizinhanças da origem. Estes podem ser obtidos “forçando-se” a aproximação dada pela Equação (B.24) a ser exata para polinômios de graus menores ou iguais a s [128].

É mostrado [126, 238] que o coeficiente ω_j do método descrito pela aproximação (B.24) é dado por

$$\omega(z) = \frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j z^j. \quad (\text{B.25})$$

Caso fossem conhecidos os polinômios $\sigma(z^{-1})$ e $\rho(z^{-1})$, o procedimento natural a ser adotado consistiria na obtenção da transformada discreta *inversa* de Laplace da Equação (B.25). Este método traz complicações operacionais, visto que lida-se, no final das contas, com a transformada de Laplace de uma série de Laurent (REF.) associada a um núcleo descontínuo na origem (vide Equação (B.18)). Tais desafios não serão abordados aqui; objetivamente, nos interessa o resultado produzido por Lubich [127], em que é mostrado que a generalização do LMM para o caso fracionário é bastante direta. De fato, seja $\omega(z)$ o polinômio gerador do LMM *implícito* para o caso $\alpha = 1$. O estabelecimento do método de passo múltiplo fracionário – FLMM⁵ para $\alpha > 0$ qualquer é realizado pelo novo polinômio

$$[\omega(z)]^\alpha, \quad (\text{B.26})$$

em que $\omega(z)$ é dado pela Equação (B.25). Dentro desse novo cenário, a aproximação à integral de ordem α com terminal inferior $a = 0$ é dada agora por

$$I_+^\alpha[f]_n \approx (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_j^\alpha f_{n-j} + (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^s \mu_{nj} f_{n-j}. \quad (\text{B.27})$$

De posse da Equação (B.27) podemos, finalmente, vislumbrar a conexão entre as abordagens RL e GL. Começemos considerando o método de Euler implícito:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_{n+1}. \quad (\text{B.28})$$

É fácil ver que os coeficientes são dados por $\alpha = \{1, -1\}$ e $\beta = \{1, 0\}$, com $-1 \leq n \leq 0$. Portanto, segundo as Equações (B.25) e (B.27), temos que o polinômio gerador do FLMM é dado por

$$\omega^\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\alpha}{n} z^n. \quad (\text{B.29})$$

Usando estes coeficientes na convolução discreta, e descartando por ora os pesos de inicialização da quadratura, obtemos finalmente que

$$I_+^\alpha[f]_n \approx (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-\alpha}{j} f_{n-j}. \quad (\text{B.30})$$

A Equação (B.30) corresponde precisamente a uma versão truncada da derivada fracional de GL de ordem $-\alpha$. Em uma perspectiva teórica, esta Equação contém os rudimentos para a prova sobre a equivalência entre as abordagens RL e GL; vide, por exemplo, [90] e [125]. Na prática, pode-se então abordar um problema teórico usando a abordagem RL, enquanto sua discretização é operacionalizada via diferenças finitas generalizadas, sendo esta uma técnica naturalmente adaptada a cenários discretos. Para uma discussão sobre as limitações do método numérico mostrado na Equação (B.30), vide Persechino [173].

⁵Do inglês *Fractional linear multistep method*.

A desigualdade de Cramér-Rao

A variância de um estimador não-viesado (ou não-viciado) possui um limite inferior relacionado à Informação de Fisher, discutida no Capítulo 3, Seção 3.6. Tal limite é colocado na forma de desigualdade, denominada de Cramér-Rao [183, 235] ou de Informação [19]. A demonstração aqui mostrada é bastante simples e explicitada frequentemente na literatura [183, 235, 19, 203]. Esta é exibida aqui com vistas à completude da discussão sobre Informação de Fisher paramétrica, Seção 3.6.

No contexto da Inferência Estatística, tem-se a função auxiliar dada pela

DEFINIÇÃO 16: (FUNÇÃO ESCORE) [183, 19]

Dada a variável aleatória X com distribuição associada $p(x; \theta)$, em que θ é um parâmetro escalar arbitrário, a função escore é definida como

$$S_\theta = \partial_\theta \ln[p(x; \theta)]. \quad (\text{C.1})$$

É simples mostrar que o valor esperado $\langle S_\theta \rangle$ é sempre nulo. Mais sutil é o fato de que o escore, em si, é uma variável aleatória [183], já que parte da avaliação de saída do processo X . Deve-se notar também que a Informação de Fisher paramétrica, dada pela Equação (3.51) pode ser reescrita como a variância do escore¹:

$$I_F(\theta) = \langle S_\theta^2 \rangle. \quad (\text{C.2})$$

O problema central da inferência paramétrica [19, 235] pode ser posto do seguinte modo: dada uma amostra N -ária de variáveis aleatórias em que se pressupõe conhecida² a distribuição $p(x; \theta)$, como estimar um valor $\hat{\theta}$ relacionado direta ou indiretamente a θ com base apenas em suas estatísticas?

A obtenção da desigualdade de Cramér-Rao se dá por meio do cômputo da correlação *linear* [184] entre um *estimador* não-viesado $\hat{\theta}$ de θ e a função escore [183, 19]. A hipótese de não-viés sobre $\hat{\theta}$ garante que seu valor esperado seja dado por

$$\langle \hat{\theta} \rangle = \theta. \quad (\text{C.3})$$

¹Nesse sentido, deve-se observar que a Informação de Fisher paramétrica, dada pela Equação (3.51) *também* corresponde a uma variável aleatória. Eis a importância de se discutir o caso não-paramétrico, dado pela Equação (3.53), já que neste caso lida-se concretamente com um processo determinístico.

²Fica implícito na descrição acima que as variáveis aleatórias X_i são independentes e identicamente distribuídas. Eis a razão de se considerar apenas uma distribuição.

O Coeficiente de correlação linear entre $\hat{\theta}$ e S_θ é dado por [184, 183, 167]

$$\rho(\hat{\theta}, S_\theta) = \frac{\langle (\hat{\theta} - \langle \hat{\theta} \rangle) (S_\theta - \langle S_\theta \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle [\hat{\theta} - \langle \hat{\theta} \rangle]^2 \rangle \langle [S_\theta - \langle S_\theta \rangle]^2 \rangle}} \quad (\text{C.4})$$

Denotando a variância de $\hat{\theta}$ por $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ e de posse da nulidade de $\langle S_\theta \rangle$, do caráter não-viesado de $\hat{\theta}$ e da expressão da Informação de Fisher em termos da variância de S_θ , chega-se ao resultado esperado:

$$\rho(\hat{\theta}, S_\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\hat{\theta}}^2 I_F(\theta)}} \Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq \frac{1}{I_F(\theta)}, \quad (\text{C.5})$$

visto que $|\rho(\cdot, \cdot)| \leq 1$ [167, 183].