



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
COSMO - COORDENAÇÃO DE COSMOLOGIA, ASTROFÍSICA E INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

TESE DE DOUTORADO

# Renormalizabilidade e unitariedade em modelos eletromagnéticos e gravitacionais $D$ -dimensionais de ordem superior

JOSÉ MONSAIR DE ALMEIDA MARTUCHELI JUNIOR

Orientador  
Antonio José Accioly

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2019



**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

Rua Doutor Xavier Sigaud, 150, Rio de Janeiro, Brasil  
Tel.: +55 21 2141-7100 Fax.: +55 21 2141-7400 - CEP:22290-180  
<http://www.cbpf.br>

MINISTÉRIO DA  
**CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES**



**“RENORMALIZABILIDADE E UNITARIEDADE EM MODELOS  
ELETROMAGNÉTICOS E GRAVITACIONAIS D-DIMENSIONAIS DE ORDEM  
SUPERIOR”**

**JOSÉ MONSAIR DE ALMEIDA MARTUCHELI JUNIOR**

Tese de Doutorado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os  
seguintes professores:

Antonio José Accioly – Presidente/Orientador/CBPF

Fabricio Augusto Barone Rangel

Henrique Boschi Filho

Gilvan Augusto Alves

José Abdalla Helayel-Neto

Rio de Janeiro, 12 de março de 2019.

Ele não sentia nenhum comichão por cavar glórias

Fundo na poeira que o tempo assentava

*Alexandre Pushkin*

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador Antonio Accioly, pela seriedade com que guia o grupo de pesquisa e pela prestatividade.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, e ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas.

Aos colegas que foram essenciais para a realização desta tese - Gustavo, Wallace e Gilson.

Aos colegas de sala e todos que fizeram parte de um cotidiano amável.

Aos velhos amigos e à minha família.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Uma prescrição simples para o cálculo do potencial <math>D</math>-dimensional em modelos eletromagnéticos a partir de um modelo correspondente escalar</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
<b>3</b>	<b>A eletrodinâmica de Lee-Wick em <math>D</math>-dimensões</b>	<b>13</b>
3.1	Introdução . . . . .	13
3.2	Regularidade do potencial na origem para $D = 3$ . . . . .	14
3.3	Regularidade do potencial na origem para $D = 4$ . . . . .	15
3.4	Regularidade do potencial na origem para $D = 5$ . . . . .	15
3.5	Investigando a conjectura para a eletrodinâmica de Lee-Wick . . . . .	16
3.6	Unitariedade ao nível de árvore da eletrodinâmica de Lee-Wick . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Uma classe geral de teorias locais de gravitação de ordem superior</b>	<b>18</b>
4.1	Introdução . . . . .	18
4.2	Propagador livre, espectro de partículas e unitariedade ao nível de árvore	20
4.2.1	Caso I - $D \geq 4$ : . . . . .	25
4.2.2	Caso II - $D = 3$ : . . . . .	26
4.3	Contagem de potência e renormalizabilidade . . . . .	27
4.4	Potencial gravitacional não-relativístico . . . . .	29
4.4.1	Regularidade do potencial na origem para $D > 3$ - $D$ par . . . . .	31

4.4.2	Regularidade do potencial na origem para $D > 3$ - $D$ ímpar . . .	33
4.4.3	Regularidade do potencial na origem para $D = 3$ . . . . .	34
4.5	Representação gráfica dos resultados . . . . .	35
4.6	Verificando a conjectura para uma classe geral de gravitação de ordem superior $D$ -dimensional . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Recobrando resultados anteriores: A Nova Gravitação Massiva e as Gravitações de Quarta e Sexta Ordem</b>	<b>41</b>
5.1	Introdução . . . . .	41
5.2	Nova Gravitação Massiva . . . . .	41
5.3	Gravitação de quarta ordem . . . . .	45
5.3.1	Um caso particular com potencial clássico finito em $D = 5$ . . .	45
5.4	Gravitação de sexta ordem . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Calibre generalizado de Teyssandier para uma classe geral de gravitação de ordem superior <math>D</math>-dimensional</b>	<b>48</b>
6.1	Introdução . . . . .	48
6.2	Equações linearizadas de campo e calibre generalizado de Teyssandier .	49
6.3	Calibre generalizado de Teyssandier . . . . .	51
6.4	Fatores de forma polinomiais . . . . .	54
6.4.1	Decomposições dos campos $\psi_{\mu\nu}$ e $\phi$ . . . . .	54
6.4.2	Soluções das equações de campo para fontes estáticas . . . . .	57
6.5	Um fator de forma não-local: a gravidade BGKM . . . . .	61
6.5.1	Fonte massiva pontual e potencial não-relativístico . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Quem tem medo de fantasmas (de ordem superior)?</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Investigando a conjectura para teorias gravitacionais de ordem superior com polos complexos</b>	<b>70</b>
<b>C</b>	<b>Uma prescrição simples para o cálculo do propagador para teorias gravitacionais de ordem superior</b>	<b>74</b>

D	Condição de calibre para os campos desacoplados $H_{\mu\nu}$ e $\psi_{\mu\nu}$	77
E	Tabela de integrais	79
	Referências Bibliográficas	81

# Resumo

Neste trabalho investigamos uma conjectura recentemente proposta que afirma que a finitude do potencial na origem é uma condição necessária mas não suficiente para a renormalizabilidade de teorias eletromagnéticas e gravitacionais de ordem superior. Para tal, consideramos extensões da eletrodinâmica de Maxwell, incluindo a apresentação de uma forma de obter o potencial eletromagnético de tais teorias a partir de um sistema escalar correspondente, e, por outro lado, modelos gravitacionais, onde consideramos uma classe geral de teorias de ordem superior.

**Palavras-chave:** modelos eletromagnéticos e gravitacionais  $D$ -dimensionais de ordem superior, renormalizabilidade, unitariedade.



# Abstract

In this work we investigate a recently proposed conjecture which states that the finiteness of the potential at the origin is a necessary but not sufficient condition for the renormalizability of higher order electromagnetic and gravitational theories. For this, we consider extensions of Maxwell's electrodynamics, including the presentation of a way to obtain the electromagnetic potential of such theories from a corresponding scalar system, and, on the other hand, gravitational models, where we consider a general class of higher order models.

# Capítulo 1

## Introdução

A construção de uma teoria de gravitação quântica, isto é, uma teoria que unifique a relatividade geral e a teoria quântica de campos, é um dos maiores desafios da física atual. Descrevendo fenômenos sobretudo na escala de Planck, tal teoria nos permitiria, em princípio, descrever fenômenos como o início do universo e resolver o paradoxo da informação de um buraco negro. Contudo, devido a dificuldades teóricas e a ausência de dados empíricos, não há consenso sobre o assunto, mesmo que diversas propostas tenham sido apresentadas até então, como teoria de cordas, gravitação quântica em laços, teoria de twistor, triangulação dinâmica causal, etc [1].

Uma forma de solucionar-se tais problemas é construir a gravitação quântica como uma teoria de flutuações da métrica sobre um espaço-tempo não-dinâmico plano. Para realizar tal construção, separa-se a métrica em uma parte de fundo, a qual continuará clássica e não dinâmica (que nos permite definir microcausalidade, produto interno, etc), e em uma parte que representa as pequenas perturbações em relação à primeira, a qual será quantizada. Comumente se escolhe o espaço de Minkowski como espaço de fundo, isto é,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , sobretudo nesta tese. Uma breve história sobre esta construção pode ser vista em [1].

Ao separarmos os papéis da métrica desta forma, podemos dizer que gravitação é uma teoria de campos de gauge que descreve um bóson sem massa, auto-interagente e de spin 2 (o assim chamado *gráviton*), e utilizar as ferramentas desenvolvidas em teoria quântica de campos para estudar fenômenos gravitacionais. Por exemplo, tal teoria reproduz resultados anteriores da relatividade geral no que se refere ao desvio

gravitacional da luz, acrescido de correções quânticas [2] [3]. No entanto, tal teoria não é renormalizável - isto é, a teoria quântica possui infinitos parâmetros não determinados.

Uma forma possível de contornar este problema é a introdução de termos de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert. Em 1977, Stelle demonstrou que a teoria de quarta ordem, descrita por uma ação contendo termos proporcionais ao quadrado do tensor e escalar de Ricci, é renormalizável a todas as ordens em teoria de perturbação [4]. No entanto, tal teoria é infestada por fantasmas, que dão origem a estados de norma negativa, quebrando a unitariedade da teoria. Desta forma, a incompatibilidade entre a unitariedade e a renormalizabilidade é um dos maiores problemas teóricos no que se refere à gravitação quântica.

Na literatura existem propostas de se contornar tal problema: se permitirmos termos com seis ou mais derivadas de ordem superior na ação, então a teoria se torna superrenormalizável e é possível encontrar uma região no espaço dos parâmetros onde todos os polos não-triviais do propagador ao nível de árvore são massivos e complexos e, neste caso, a teoria pode ser formulada como unitária no sentido de Lee-Wick [5]. Outra possibilidade surge se permitirmos termos não-locais na ação, possibilitando a construção de teorias cujo único polo corresponde ao gráviton usual [6] [7], as quais, em anos recentes, foram aplicadas a processos de espalhamento, para se obter propriedades astrofísicas, etc [8]. Embora não haja consenso se tais formulações são válidas e coerentes, podemos dizer, de qualquer modo, que se nos restringimos a teorias locais com polos reais, a unitariedade e a renormalizabilidade são propriedades incompatíveis em modelos gravitacionais de ordem superior.

Recentemente, diversos autores investigaram a conjectura de que teorias renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem [9] [10] [11] [12]. Mais tarde foi demonstrado que o contrário não é verdadeiro, isto é, que o potencial finito na origem é uma condição necessária mas não suficiente para a teoria ser renormalizável [13]. Se verdadeira, esta conjectura traz consigo uma forma diferente de considerar a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade de modelos de ordem superior, já que a quebra de unitariedade também está relacionada ao potencial finito na origem [9]. Além disto, tal conjectura permite uma forma simples de se verificar se uma teoria de ordem superior é não-renormalizável: basta que a teoria tenha um potencial divergente na origem. Por exemplo, durante o tempo em que se debatia se a *Nova Gravitação Massiva* (NGM) era renormalizável, o que Oda afirmou [14] e três

anos mais tarde Muneyuki e Ohta [15] mostraram ser não-renormalizável, poder-se-ia utilizar esta conjectura e afirmar que a NGM é não-renormalizável, já que esta possui um potencial divergente na origem.

Nosso objetivo principal nesta tese é investigar esta conjectura tanto para modelos de ordem superior gravitacionais quanto para modelos eletromagnéticos em  $D$ -dimensões. Para tal, analisaremos o comportamento do potencial não-relativístico na origem para uma classe geral de modelos gravitacionais e a eletrodinâmica de Lee-Wick, e compararemos com, no que tange a eletrodinâmica de Lee-Wick, resultados obtidos previamente acerca da renormalizabilidade, e, no que tange a classe geral de modelos gravitacionais, a renormalizabilidade por contagem de potência. Por completude, verificaremos a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias locais com polos reais ao conferir que os modelos renormalizáveis encontrados (por contagem de potência ou não) são não unitários.

Nosso intuito em estudar teorias em dimensões arbitrária é verificar se a conjectura é válida em qualquer dimensão ou se é uma particularidade da quarta. No mais, ressaltamos que ao longo da tese nos restringiremos às assim chamadas *teorias completas*, nas quais não existem restrições entre os parâmetros da lagrangiana, com exceção de uma seção, onde discutiremos a NGM. Em um primeiro momento nos restringiremos também a modelos locais cujos propagadores possuem polos simples e reais.

Em seguida, faremos uma incursão ao regime linearizado de teorias gravitacionais clássicas de ordem superior. Apresentaremos uma nova condição de calibre, inspirada no assim chamado calibre de Teyssandier, originalmente proposto para teorias gravitacionais de quarta ordem [16]. Esta nova condição de calibre, nomeada ‘calibre generalizado de Teyssandier’, pode ser utilizada tanto para a classe geral de modelos gravitacionais locais estudada nos capítulos anteriores, quanto para modelos gravitacionais não-locais. No geral, esta condição de gauge facilita a obtenção de resultados matemáticos que contrastam as consequências empíricas destas teorias com a relatividade geral no nível clássico. Naturalmente, desvios clássicos da relatividade geral possuem uma chance maior de serem medidos do que desvios resultantes da quantização do campo gravitacional. Por exemplo, a queda proporcional ao inverso da distância do potencial gravitacional foi testada até a distância de  $5.6 \cdot 10^{-5}$  metros em experimentos de balanças de torção [17], cerca de 30 ordens de magnitude distante da escala de Planck.

Como aplicação deste calibre, obteremos a solução das equações de campo linearizadas para uma fonte pontual parada, o que nos permitirá obter o potencial clássico obtido anteriormente por outros meios, tanto para modelos locais (obtido no capítulo 4), quanto para o modelo não-local conhecido como gravidade BGKM [7]. De posse deste último resultado, poderemos investigar a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem para uma teoria não-local.

Esta tese é organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo, com o intuito de facilitar o cálculo do potencial clássico e baseando-se em [18], construiremos uma prescrição simples para se determinar o potencial clássico  $D$ -dimensional de modelos escalares e demonstraremos que é possível calcular o potencial de modelos eletromagnéticos a partir de um sistema escalar equivalente, utilizando-se de um “princípio de correspondência”. Enunciaremos também a prescrição que será utilizada para o cálculo do potencial gravitacional  $D$ -dimensional, a qual foi apresentada em [13]. No segundo capítulo analisaremos a unitariedade ao nível de árvore e a regularidade do potencial na origem da eletrodinâmica de Lee-Wick, investigando a conjectura citada acima. No terceiro capítulo apresentaremos uma classe geral de teorias gravitacionais a ser analisada, para então estudarmos a unitariedade de tais teorias e determinarmos o comportamento ultra-violeta deste modelo por contagem de potência. Em seguida calcularemos o potencial gravitacional na origem e investigaremos a conjectura para estes modelos. Terminaremos este capítulo discutindo os mecanismos de cancelamento da singularidade newtoniana, que permitem relacionar unitariedade, renormalizabilidade e a regularidade do potencial na origem, para em seguida dedicar um capítulo a recobrar resultados obtidos anteriormente na literatura acerca da Nova Gravitação Massiva e as teorias gravitacionais de quarta e sexta ordem. Finalizaremos a tese apresentando uma nova condição de calibre, o ‘calibre generalizado de Teysandier’, a qual facilita a obtenção de soluções para as equações de campo no regime linearizado, o que nos permitirá estender a investigação da conjectura para uma teoria não-local, a gravidade BGKM. Resumiremos nossas descobertas e perspectivas em uma última seção. Em um apêndice revisaremos o que afinal de contas são fantasmas e como detectá-los ao nível de árvore. Em outros apêndices detalharemos aspectos técnicos da tese.

Ao longo de todo o trabalho utilizamos unidades naturais e as seguintes convenções:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, \dots, -)$ ,  $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta)$ ,  $R_{\mu\nu} = R^\beta_{\mu\nu\beta}$  e  $R =$

$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ .

No mais, por completude, mencionamos que teorias não unitárias ou não renormalizáveis ainda podem ser implementadas como teorias quânticas de campo efetivas [3], ou, ainda, serem renormalizáveis ao nível não perturbativo [19].

# Capítulo 2

Uma prescrição simples para o cálculo do potencial  $D$ -dimensional em modelos eletromagnéticos a partir de um modelo correspondente escalar

## 2.1 Introdução

Novos modelos eletromagnéticos e gravitacionais são comumente propostos pela comunidade científica para resolver os problemas inerentes destas interações. Todavia, estes sistemas inevitavelmente devem reproduzir no limite não-relativístico o potencial coulombiano ou newtoniano, acrescidos possivelmente de uma correção. Desta forma, é importante uma prescrição simples para se encontrar o potencial clássico, o qual pretendemos estudar aqui a pequenas distâncias da origem. Uma tal prescrição foi apresentada por Accioly et al. [18] para modelos eletromagnéticos e mais tarde [13] para modelos gravitacionais. Nesta tese faremos a mesma construção para modelos escalares e demonstraremos que pode-se obter o potencial eletromagnético a partir de um modelo escalar através de “princípio de correspondência”, que agirá como uma ponte entre os modelos escalares e eletromagnéticos. Uma vez que modelos escalares são mais simples do que eletromagnéticos, tal construção nos permite determinar o potencial com maior facilidade. É esta construção que faremos agora, a qual mais

tarde será utilizada no nosso estudo de extensões da eletrodinâmica de Maxwell e que foi publicada em [20].

Como é bem conhecido, o gerador funcional para diagramas de Feynman conexos  $W_D(J)$  é definido de forma que esteja relacionado ao gerador funcional  $Z_D(J)$  por  $Z_D(J) = e^{iW_D(J)}$ , onde, para um campo escalar,

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \int d^D x d^D y J(x) D(x-y) J(y). \quad (2.1)$$

Nesta expressão  $J(x)$  e  $D(x-y)$  são, respectivamente, a corrente externa e o propagador. Agora, tendo em mente que

$$D(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D(k) \quad (2.2)$$

e

$$J(k) = \int d^D x e^{-ikx} J(x), \quad (2.3)$$

nós obtemos

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} J(k)^* D(k) J(k). \quad (2.4)$$

Supondo que a corrente externa seja independente do tempo, nós obtemos da equação acima que

$$W_D(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \delta(k^0) T D(k) \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} J(\mathbf{x}) J(\mathbf{y}), \quad (2.5)$$

onde o intervalo temporal  $T$  surge da integral  $\int dx^0$ .

Manipulações algébricas simples nos permitem escrever (2.5) como

$$W_D(J) = -T \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} D(\mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}), \quad (2.6)$$

onde  $D(\mathbf{k}) \equiv D(k)|_{k^0=0}$  e

$$\Delta(\mathbf{k}) \equiv \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{J(\mathbf{x}) J(\mathbf{y})}{2}. \quad (2.7)$$

No caso particular de duas cargas escalares  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  localizadas, respectivamente, em  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , a corrente é dada por

$$J(\mathbf{x}) = \sigma_1 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + \sigma_2 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2). \quad (2.8)$$



Consequentemente,

$$\Delta(\mathbf{k}) = \sigma_1 \sigma_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ , e

$$W_D(J) = -T \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D(\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

Levando em consideração que [21]

$$Z_D(J) = \langle 0 | e^{-iH_D T} | 0 \rangle = e^{-iE_D^{(scal)} T} \quad (2.11)$$

implica

$$E_D^{(scal)} = -\frac{W_D(J)}{T}, \quad (2.12)$$

nós chegamos à conclusão que a energia  $D$ -dimensional pode ser calculada através da simples expressão

$$E_D^{(scal)}(r) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D(\mathbf{k}). \quad (2.13)$$

Logo, o potencial  $D$ -dimensional gerado por uma fonte pontual de carga  $\sigma$  é dado por

$$V_D^{(scal)}(r) = \frac{\sigma}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D(\mathbf{k}). \quad (2.14)$$

Nós intencionamos calcular o potencial para modelos eletromagnéticos e gravitacionais. De maneira análoga obtém-se que o potencial elétrico  $D$ -dimensional gerado por uma carga pontual  $q$  é dado por [18]

$$V_D^{(elet)}(r) = \frac{q}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{00}(\mathbf{k}), \quad (2.15)$$

onde  $P_{\mu\nu}$  é o “propagador modificado” no espaço de momenta excluindo-se os termos ortogonais à corrente externa, que foi suposta conservada, e  $P_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv P_{\mu\nu}(k)|_{k^0=0}$ . Da mesma forma, o potencial gravitacional gerado por uma fonte pontual de massa  $M$  é dado por [13]

$$V_D^{(grav)}(r) = k_D \frac{M}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{00,00}(\mathbf{k}), \quad (2.16)$$

onde  $P_{\mu\nu,\alpha\beta}$  é também um “propagador modificado” no espaço de momenta excluindo-se os termos ortogonais à corrente conservada externa e  $\kappa_D$  pode ser escrito em termos da constante gravitacional  $D$ -dimensional por  $\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3}\right) \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)} G_D$  para  $D > 3$  [15].

Vamos agora construir uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial D-dimensional em modelos eletromagnéticos a partir de um modelo correspondente escalar. Para fazer isto, lembremos que a lagrangiana associada a um modelo eletromagnético pode ser escrita como

$$L^{(elctr)}(x) = \frac{1}{2}A^\mu(x)O_{\mu\nu}(x)A^\nu(x), \quad (2.17)$$

onde  $O_{\mu\nu}(x) \equiv a(x)\theta_{\mu\nu}(x) + b(x)w_{\mu\nu}(x)$  é o operador de onda e  $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}$  e  $w_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}$  são os operadores de projeção transversais e longitudinais, respectivamente. Portanto, temos para o propagador, no espaço dos momenta,

$$O_{\mu\nu}^{-1}(k) = \frac{1}{a(k)}\theta_{\mu\nu}(k) + \frac{1}{b(k)}w_{\mu\nu}(k), \quad (2.18)$$

onde  $\theta_{\mu\nu}(k) \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$  e  $w_{\mu\nu}(k) \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ . Assim sendo, temos que  $P_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{1}{a(\mathbf{k})}\eta_{\mu\nu}$ , de onde se deduz

$$P_{00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{a(\mathbf{k})}. \quad (2.19)$$

Por outro lado, formularemos um modelo escalar a partir do eletromagnético de acordo com a correspondência

$$\begin{aligned} A^\mu \text{ (ou } A_\mu) &\rightarrow \phi \\ \partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu &\rightarrow 0 \\ J^\mu \text{ (ou } J_\mu) &\rightarrow J. \end{aligned}$$

Chamamos atenção ao fato de que na segunda expressão listada acima,  $\partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu$  representa todas expressões que podem ser obtidas desta a partir de integração por partes. Para uso futuro, nós também queremos notar que, como consequência direta desta correspondência,  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \rightarrow -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ , onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor eletromagnético. Com esta correspondência nós temos que, de (2.17),

$$L^{(scal)}(x) = \frac{1}{2}\phi(x)a(x)\phi(x). \quad (2.20)$$

Portanto, o propagador escalar é dado por

$$D(k) = \frac{1}{a(k)}. \quad (2.21)$$

Como consequência,  $D(\mathbf{k}) = \frac{1}{a(\mathbf{k})}$ , implicando  $P_{00}(\mathbf{k}) = D(\mathbf{k})$ , isto é, ao invés de determinarmos o propagador do modelo eletromagnético que pretendemos calcular o potencial clássico, podemos utilizar este modelo escalar equivalente, o que nos retira a necessidade de lidar com operadores de projeção e liberdade de gauge. Em resumo, temos a seguinte prescrição para o cálculo do potencial clássico para modelos eletromagnéticos cuja corrente é conservada:

- Utiliza-se o princípio de correspondência para se encontrar o modelo escalar correspondente ao eletromagnético.
- Calcula-se  $D(\mathbf{k})$ .
- Obtém-se o potencial D-dimensional cuja fonte é uma carga pontual  $q$  pela expressão

$$V_D^{(elctr)}(r) = \frac{q}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D(\mathbf{k}). \quad (2.22)$$

Como um comentário à parte, mencionamos que o modelo escalar obtido por este princípio da correspondência difere do modelo escalar usual por um sinal negativo. Naturalmente, não há problema neste fato, uma vez que este modelo é apenas um modelo fictício utilizado por conveniência para o cálculo do potencial eletromagnético não-relativístico.

# A eletrodinâmica de Lee-Wick em $D$ -dimensões

## 3.1 Introdução

Como teste para a eficiência e a simplicidade da prescrição desenvolvida e, principalmente, para verificar a conjectura que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial finito na origem, analisaremos a eletrodinâmica de Lee-Wick, descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(electr)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (3.1)$$

onde  $m$  é o parâmetro de massa de Lee-Wick, o qual esperamos ser grande a ponto desta teoria reduzir-se à eletrodinâmica de Maxwell no limite apropriado, e que possui a equação de movimento

$$\left[1 + \frac{\square}{m^2}\right] \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (3.2)$$

O modelo escalar correspondente a este a ser utilizado, pelo princípio da correspondência, é

$$\mathcal{L}^{(scal)} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2m^2}\partial_\mu\phi\square\partial^\mu\phi - J\phi. \quad (3.3)$$

No espaço dos momenta, o propagador deste modelo pode ser escrito como

$$D(k) = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)}. \quad (3.4)$$

O potencial elétrico portanto é dado por

$$V_D(r) = \frac{Q}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} - \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right]. \quad (3.5)$$

Segue que, realizando a integração conforme explicitado no apêndice E, para  $D = 4, 5$ ,

$$V_D(r) = \frac{q}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \frac{2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{r^{D-3}} - \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \right], \quad (3.6)$$

onde  $K_{\frac{D-3}{2}}$  é a função modificada de Bessel de segunda espécie, enquanto que, para  $D = 3$ ,

$$V_3(r) = \frac{q}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{r_0} + K_0(mr) \right], \quad (3.7)$$

onde  $r_0$  é um regulador infravermelho. Tais resultados concordam com [18]. Para  $D > 5$  é necessário um procedimento de regularização; o procedimento usualmente utilizado para este caso é o de regularização dimensional [22]. Tal procedimento será utilizado no estudo da gravitação de ordem superior; para os nossos propósitos, no entanto, bastará o comportamento para pequenas distâncias do potencial elétrico em  $D = 3$ ,  $D = 4$  e  $D = 5$ , o que será estudado em seguida e depois discutido.

## 3.2 Regularidade do potencial na origem para $D = 3$

Lembrando que, para pequenos valores de  $x$ ,

$$K_0(x) \approx - \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) + \frac{x^2}{4} \left( 1 - \gamma - \ln \frac{x}{2} \right) + x^4 \left( \frac{1}{128} (3 - 2\gamma) - \frac{1}{64} \ln \frac{x}{2} \right), \quad (3.8)$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni, podemos reescrever o potencial elétrico como, substituindo (3.8) em (3.7),

$$V_3(r) \approx -\frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{r_0} - \left( \gamma + \ln \frac{mr}{2} \right) + \frac{m^2 r^2}{4} \left( 1 - \gamma - \ln \frac{mr}{2} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Logo, conforme  $r \rightarrow 0$ ,

$$V_3(0) = \frac{Q}{2\pi} \left( \ln \frac{mr_0}{2} + \gamma \right). \quad (3.10)$$

E vemos que o potencial-não relativístico é finito na origem para  $D = 3$ .

### 3.3 Regularidade do potencial na origem para $D = 4$

Tendo em mente que

$$K_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad (3.11)$$

nós obtemos para o potencial elétrico em quatro dimensões que, substituindo a relação (3.11) em (3.6),

$$V_4(r) = \frac{Q}{4\pi r} (1 - e^{-mr}). \quad (3.12)$$

Expandindo a função exponencial ao redor da origem em uma série de potência é trivial ver que

$$V_4(0) = \frac{Qm}{4\pi}. \quad (3.13)$$

O cancelamento da singularidade ocorre devido ao sinal contrário - e logo uma interação atrativa para cargas iguais - do segundo termo de (3.13), termo originado da presença do fantasma.

### 3.4 Regularidade do potencial na origem para $D = 5$

Já que a função de Bessel de segunda espécie  $K_1(x)$  pode ser expandida como, para pequenos valores,

$$\begin{aligned} K_1(x) \approx & \frac{1}{x} + \frac{x}{4} \left[ 2\gamma - 1 + \frac{1}{8} \left( 2\gamma - \frac{5}{2} \right) x^2 + \frac{1}{192} \left( 2\gamma - \frac{10}{3} \right) \right] + \\ & + \frac{x}{2} \ln \frac{x}{2} \left[ 1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

nós podemos reescrever  $V_5(r)$  como, substituindo (3.14) em (3.6),

$$V_5(r) = -\frac{Q}{(2\pi)^2} \left[ \frac{m^2}{4} \left( 2\gamma - 1 + 2 \ln \frac{mr}{2} \right) + \dots \right]. \quad (3.15)$$

Consequentemente, a eletrodinâmica de Lee-Wick em cinco dimensões tem potencial elétrico divergente na origem.

### 3.5 Investigando a conjectura para a eletrodinâmica de Lee-Wick

De acordo com a nossa conjectura, uma condição necessária para que um modelo  $D$ -dimensional de ordem superior seja renormalizável é que o potencial não-relativístico seja finito na origem. Como demonstramos, a eletrodinâmica de Lee-Wick é finita na origem para  $D = 3$  e  $D = 4$  e divergente para  $D = 5$ . Logo, se a conjectura estiver correta, tanto o modelo tri-dimensional quanto o modelo quadri-dimensional podem ser renormalizáveis, enquanto os modelos para  $D = 5$  devem ser não-renormalizáveis.

Como se sabe, a eletrodinâmica de Lee-Wick em  $D = 4$  é renormalizável a todas as ordens de teoria de perturbação com o acoplamento com a matéria [32] e com o campo escalar no modelo conhecido como eletrodinâmica escalar [33]. Como em  $D = 3$  o comportamento no regime ultravioleta é melhorado em relação a  $D = 4$ , espera-se que em tal dimensão a teoria também seja renormalizável. Assim sendo, verificou-se a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial finito na origem em  $D = 4$  e há fortes indícios de que a conjectura seja válida em  $D = 3$ .

Por outro lado, como o potencial explode na origem em  $D = 5$ , espera-se que a eletrodinâmica de Lee-Wick seja não-renormalizável. Não há até hoje, no entanto, provas acerca da renormalizabilidade de tal teoria em tal dimensão com qualquer tipo de acoplamento. Como a conjectura é válida em  $D = 4$  e há fortes indícios de que seja válida em  $D = 3$ , espera-se que o resultado obtido seja negativo quando a renormalizabilidade for investigada.

### 3.6 Unitariedade ao nível de árvore da eletrodinâmica de Lee-Wick

Para analisar a unitariedade da eletrodinâmica de Lee-Wick ao nível de árvore, faremos a análise da estrutura de polos do propagador saturado (vide apêndice A). Conforme esta análise, se os resíduos dos polos do propagador saturado são positivos ou nulos, o sistema é unitário ao nível de árvore, mas se um ou mais dos resíduos forem negativo, o modelo é infestado por fantasma(s) e é não-unitário ao nível de árvore.

O propagador da eletrodinâmica de Lee-Wick é dado por

$$D_{\mu\nu} = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)}\theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}w_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro fixador de gauge. Segue, então, que o propagador saturado  $SP(k)$  é dado por

$$SP(k) = -\frac{J^\mu(k)J_\mu(k)}{k^2} + \frac{J^\mu(k)J_\mu(k)}{k^2 - m^2}. \quad (3.17)$$

Nós estamos supondo  $m^2 > 0$  para evitarmos táquions. Como anteriormente,  $J^\mu(k)$  é a corrente externa conservada. Por fim, uma vez que [23]

$$(J^\mu(k)J_\mu(k))|_{k^2=\alpha^2} < 0, \quad \alpha^2 \geq 0, \quad (3.18)$$

deduz-se

$$\text{Res}(SP)|_{k^2=0} \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{Res}(SP)|_{k^2=m^2} \leq 0. \quad (3.19)$$

Portanto, concluímos que a eletrodinâmica de Lee-Wick é não unitária em qualquer dimensão. Este resultado confirma o esperado: que teorias renormalizáveis de ordem superior são sempre não-unitárias.



# Capítulo 4

## Uma classe geral de teorias locais de gravitação de ordem superior

### 4.1 Introdução

Neste capítulo pretendemos verificar a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem para uma classe geral de teorias locais de gravitação e, por outro lado, que os modelos renormalizáveis por contagem de potência encontrados são não unitários. Realizaremos a quantização considerando-se pequenas flutuações sobre o espaço de fundo de Minkowski, i.e.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde  $\kappa^2$  está relacionado à constante  $D$ -dimensional de Einstein  $k_D$  através de  $\kappa^2 = 4k_D$ . Além disto, para  $D \geq 4$  podemos expressar  $\kappa_D$  em termos da constante de Newton  $D$ -dimensional por  $\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3}\right) \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)} G_D$ . Em  $D = 4$  recuperamos o resultado usual<sup>1</sup>  $\kappa^2 = 32\pi G$ .

A ação a ser considerada será

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left( \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{1}{2\kappa^2} R F_1(\square) R + \frac{1}{2\kappa^2} R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} \right), \quad (4.2)$$

onde  $\sigma$  é um parâmetro incluído que pode tomar o valor  $\sigma = +1$  ou  $\sigma = -1$  e  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$  são funções do operador d'Alambertiano covariante ( $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ ), chamadas

---

<sup>1</sup>Para maiores detalhes, consulte o apêndice A do artigo [15].

de *fatores de forma* (*form factors*) [14]. Além disto, assumiremos que estas funções tem uma representação polinomial finita. Neste momento alguns comentários são necessários.

- À primeira vista poderíamos perguntar porquê não incluímos o termo invariante

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}F_3(\square)R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (4.3)$$

De fato, este termo é legítimo do ponto de vista de simetrias espaço-temporais. Contudo, de  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$  nós temos que, pelo teorema generalizado linearizado de Gauss-Bonnet [23],

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}F_3(\square)R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu}F_3(\square)R^{\mu\nu} - RF_3(\square)R + \partial\Omega + O(h^3). \quad (4.4)$$

Já que para os nossos propósitos - investigar a unitariedade ao nível de árvore e determinar o potencial não-relativístico - apenas o setor quadrático é relevante<sup>2</sup>, podemos descartar a contribuição de  $R_{\mu\nu\alpha\beta}F_3(\square)R^{\mu\nu\alpha\beta}$  por uma redefinição das funções  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$  da seguinte maneira: se a ação é dada por

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^Dx \sqrt{|g|} \left( \frac{2\sigma}{\kappa^2}R + \frac{1}{2\kappa^2}RF_1(\square)R + \frac{1}{2\kappa^2}R_{\mu\nu}F_2(\square)R^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa^2}R_{\mu\nu\alpha\beta}F_3(\square)R^{\mu\nu\alpha\beta} \right), \quad (4.5)$$

ao considerarmos (4.4) podemos reescrever a última expressão como

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^Dx \sqrt{|g|} \left[ \frac{2\sigma}{\kappa^2}R + \frac{1}{2\kappa^2}R(F_1(\square) - F_3(\square))R + \frac{1}{2\kappa^2}R_{\mu\nu}(F_2(\square) + 4F_3(\square))R^{\mu\nu} \right] + \int d^Dx \partial\Omega, \quad (4.6)$$

onde removemos a contribuição  $O(h^3)$ . Uma vez que  $\int d^Dx \partial\Omega = 0$  devido às condições de fronteira e utilizando as redifinições

$$F_1(\square) - F_3(\square) \mapsto F_1(\square) \quad \text{e} \quad F_2(\square) + 4F_3(\square) \mapsto F_2(\square), \quad (4.7)$$

recobramos a ação original (4.2).

---

<sup>2</sup>Naturalmente, a discussão de renormalizabilidade levará em consideração os termos não quadráticos. Mas a forma específica destas contribuições não nos será relevante.

- De forma análoga, outros termos compatíveis com as simetrias espaço-temporais poderiam ser adicionados à ação, construídos por todas combinações invariantes possíveis do tensor de Riemann, do tensor do Ricci e do escalar de Ricci, isto é,  $R^3$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}R$ ,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\alpha}R^{\nu\beta}$ ,  $R^4$ ,  $(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^2$ , etc. Contudo, tais termos contribuem apenas na ordem de  $O(\hbar^3)$ .
- Por último, introduzimos o parâmetro constante  $\sigma$  com o objetivo de explorar aspectos interessantes da unitariedade destes modelos em três dimensões, como a existência da Nova Gravitação Massiva, uma teoria unitária e não-renormalizável.

Como para determinar o potencial gravitacional não-relativístico (i.e. o potencial gravitacional ao nível de árvore) através da prescrição enunciada no primeiro capítulo é necessário determinar o propagador livre, dedicamos a próxima seção a este cálculo e, para verificar mais tarde a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em tais modelos, analisamos a unitariedade ao nível de árvore. Em seguida será analisado sob quais condições a teoria descrita pela ação acima tem o potencial regular na origem e é renormalizável por contagem de potência, para então terminarmos esta seção discutindo a conjectura de que modelos renormalizáveis gravitacionais de ordem superior possuem potencial finito na origem.

## 4.2 Propagador livre, espectro de partículas e unitariedade ao nível de árvore

Como mencionado na seção anterior, determinaremos o propagador livre da teoria descrita pela ação (4.2) e, por completude, estudaremos a unitariedade ao nível de árvore analisando a estrutura de polos do propagador saturado com as correntes externas. Quantizando a gravitação como uma teoria de flutuações da métrica sobre um espaço-tempo clássico e não-dinâmico, o qual será escolhido o espaço de Minkowski, isto é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

podemos reescrever a lagrangiana da classe geral de teorias gravitacionais de ordem superior como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + O(\hbar^3), \quad (4.9)$$

e, então, obter o propagador livre pela inversão do operador  $\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ , o que será feito no espaço de momenta. Por conveniência, separaremos a lagrangiana em quatro termos,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} + \mathcal{L}_{fg}, \quad (4.10)$$

onde  $\mathcal{L}_R = \frac{2\sigma}{\kappa^2} \sqrt{|g|} R$ ,  $\mathcal{L}_{R^2} = \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{|g|} R F_1(\square) R$ ,  $\mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{|g|} R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu}$  e, por último, temos o termo fixador de gauge  $\mathcal{L}_{fg} = \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})$ , onde  $\lambda$  é um parâmetro fixador de gauge e  $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ . Utilizando (4.8) podemos escrever estes termos como

$$\mathcal{L}_R = \frac{\sigma}{2} h_{\mu\nu} [2\eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta - 2\eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \square] h_{\alpha\beta} + O(h^3), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_{R^2} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} [F_1(\square) (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square^2 - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta)] h_{\alpha\beta} + O(h^3), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} = & \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ \frac{F_2(\square)}{4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square^2 + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \square^2 - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \right. \\ & \left. - 2\eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha \square + 2\partial^\nu \partial^\mu \partial^\alpha \partial^\beta) \right] h_{\alpha\beta} + O(h^3), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{\lambda} \left( \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right) \right] h_{\alpha\beta} + O(h^3). \quad (4.14)$$

Utilizando a decomposição em operadores de Barnes-Rivers (vide apêndice C para maiores detalhes) e passando para o espaço dos momenta, podemos então escrever o operador de onda como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = & \left( \sigma + \frac{k^2}{4} F_2(-k^2) \right) k^2 P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} + \frac{k^2}{2\lambda} P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(1)} + \frac{k^2}{4\lambda} P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0-w)} + \\ & + \left( \frac{D-1}{4\lambda} - \sigma(D-2) + (D-1)k^2 F_1(-k^2) + \frac{D}{4} k^2 F_2(-k^2) \right) k^2 P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0-s)} + \\ & - \frac{\sqrt{D-1}}{4\lambda} k^2 \left( P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0-sw)} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $\{P^{(2)}, \dots, P^{(0-sw)}\}$  denota o conjunto dos operadores de Barnes-Rivers em  $D$ -dimensões, definidos por

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} \theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda}, \quad (4.16)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} w_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} w_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda} w_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa} w_{\mu\lambda}), \quad (4.17)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda}, \quad (4.18)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = w_{\mu\nu} w_{\kappa\lambda}, \quad (4.19)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \theta_{\mu\nu} w_{\kappa\lambda}, \quad (4.20)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} w_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda}, \quad (4.21)$$

onde  $\theta \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$  e  $w_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$  são os operadores de projeção transversal e longitudinal definidos no primeiro capítulo.

Invertendo o operador de onda (4.15) conforme explicitado no apêndice C, obtemos, finalmente, o propagador livre (no espaço dos momenta)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{\sigma k^2 Q_2(k^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{(D-2)} \frac{1}{\sigma k^2 Q_0(k^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} + \\ &+ \frac{2\lambda}{k^2} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(1)} + \left( \frac{4\lambda}{k^2} - \frac{(D-1)}{\sigma(D-2)k^2 Q_0(k^2)} \right) P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)} + \\ &- \frac{\sqrt{D-1}}{\sigma(D-2)k^2 Q_0(k^2)} \left( P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-ws)} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde nós definimos

$$Q_2(k^2) = 1 + \frac{1}{4\sigma} k^2 F_2(-k^2), \quad (4.23)$$

e

$$Q_0(k^2) = 1 - \frac{k^2}{\sigma(D-2)} \left( (D-1)F_1(-k^2) + \frac{D}{4}F_2(-k^2) \right). \quad (4.24)$$

Estudemos, agora, a unitariedade ao nível de árvore analisando a estrutura de polos do propagador saturado com as correntes externas. Por definição, o propagador saturado se escreve

$$SP(k) = T^{\mu\nu}(k) \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) T^{\alpha\beta}(k), \quad (4.25)$$

onde  $T^{\mu\nu}$  denota a corrente externa conservada. Usando a equação (4.22), nós chegamos ao resultado

$$SP(k) = \frac{1}{\sigma k^2 Q_2(k^2)} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) - \frac{1}{\sigma k^2 Q_0(k^2)} \frac{T^2}{(D-1)(D-2)}. \quad (4.26)$$

Neste momento, para prosseguirmos, precisamos especificar os fatores de forma  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$ . Como mencionado anteriormente, consideraremos que estes fatores são funções polinomiais do operador d'Alembertiano, ou seja

$$F_1(\square) = \sum_{n=0}^p \alpha_n (-\square)^n \quad \text{e} \quad F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n, \quad (4.27)$$

onde  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são coeficientes reais com dimensão canônica de massa  $M^{-2(n+1)}$ . Utilizando as funções acima no espaço dos momenta e utilizando (4.23) e (4.24), chegamos a

$$Q_2(k^2) = 1 + \frac{1}{4\sigma} \sum_{n=0}^q \beta_n k^{2n+2}, \quad (4.28a)$$

e

$$Q_0(k^2) = 1 - \frac{1}{\sigma(D-2)} \left( (D-1) \sum_{n=0}^p \alpha_n k^{2n+2} - \frac{D}{4} \sum_{n=0}^q \beta_n k^{2n+2} \right). \quad (4.28b)$$

Denotaremos por

$$\{m_{(2),1}^2, m_{(2),2}^2, \dots, m_{(2),q+1}^2\} \quad \text{e} \quad \{m_{(0),1}^2, m_{(0),2}^2, \dots, m_{(0),N+1}^2\} \quad (4.29)$$

o conjunto das raízes reais, respectivamente, das funções polinomiais  $Q_2(k^2)$  e  $Q_0(k^2)$ , onde  $\max\{p, q\} = N$ . Utilizando o teorema fundamental da álgebra podemos reescrever  $Q_2(k^2)$  e  $Q_0(k^2)$  como<sup>3</sup>

$$Q_2(k^2) = \prod_{i=1}^{q+1} \left( \frac{m_{(2),i}^2 - k^2}{m_{(2),i}^2} \right), \quad (4.30a)$$

e

$$Q_0(k^2) = \prod_{i=1}^{N+1} \left( \frac{m_{(0),i}^2 - k^2}{m_{(0),i}^2} \right). \quad (4.30b)$$

Como pretendemos decompor o propagador em modos distintos de propagação, vamos decompor o propagador saturado utilizando-se do método de frações parciais. Considerando-se que

$$\frac{1}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q'(\alpha_i)} \frac{1}{(x - \alpha_i)}, \quad (4.31)$$

---

<sup>3</sup>Usualmente, fatora-se um polinômio  $ax^n + \dots + c$  como  $a(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , onde  $x_1, \dots, x_n$  são raízes do polinômio. A forma aqui encontrada reescreve esta expressão utilizando-se da fórmula de Vieta.

onde  $\alpha_i$  são as raízes do polinômio  $Q(x)$ , podemos decompor  $\frac{1}{k^2 Q_2(k^2)}$  como

$$\frac{1}{k^2 Q_2(k^2)} = \frac{1}{k^2} - \sum_{i=1}^{q+1} \frac{\xi_{(2),i}}{k^2 - m_{(2),i}^2}, \quad (4.32)$$

onde

$$\xi_{(2),i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2}. \quad (4.33)$$

Naturalmente, o mesmo pode ser feito em relação à fração  $\frac{1}{k^2 Q_0(k^2)}$ , isto é,

$$\frac{1}{k^2 Q_0(k^2)} = \frac{1}{k^2} - \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\xi_{(0),i}}{k^2 - m_{(0),i}^2}, \quad (4.34)$$

onde

$$\xi_{(0),i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2}. \quad (4.35)$$

Como consequência, substituindo estas decomposições no propagador saturado, obtemos

$$\begin{aligned} SP(k) &= \frac{1}{\sigma k^2} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} T^2 \right) + \frac{T^2}{\sigma(D-1)(D-2)} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\xi_{(0),i}}{k^2 - m_{(0),i}^2} + \\ &\quad - \frac{1}{\sigma} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) \sum_{i=1}^{q+1} \frac{\xi_{(2),i}}{k^2 - m_{(2),i}^2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por sua vez, os resíduos do propagador são dados por, onde utilizamos (4.36),

$$\text{Res SP(k)}|_{k^2=0} = \sigma^{-1} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} T^2 \right) \Big|_{k^2=0}, \quad (4.37a)$$

$$\text{Res SP(k)}|_{k^2=m_{(2),i}^2} = -\sigma^{-1} \xi_{(2),i} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) \Big|_{k^2=m_{(2),i}^2}, \quad (4.37b)$$

$$\text{Res SP(k)}|_{k^2=m_{(0),i}^2} = \frac{\sigma^{-1} \xi_{(0),i}}{(D-1)(D-2)} T^2 \Big|_{k^2=m_{(0),i}^2}. \quad (4.37c)$$

Supondo que as massas reais obedecem a hierarquia<sup>4</sup>

$$m_{(2),1}^2 < m_{(2),2}^2 < \cdots < m_{(2),q+1}^2 \quad \text{e} \quad m_{(0),1}^2 < m_{(0),2}^2 < \cdots < m_{(0),N+1}^2, \quad (4.38)$$

chegamos à conclusão

$$\begin{cases} \xi_{(2),i} > 0, & \text{se } i = \text{for ímpar,} \\ \xi_{(2),i} < 0, & \text{se } i = \text{for par,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \xi_{(0),i} > 0, & \text{se } i = \text{for ímpar,} \\ \xi_{(0),i} < 0, & \text{se } i = \text{for par.} \end{cases} \quad (4.39)$$

A partir de agora dividiremos nossa análise em dois casos:  $D \geq 4$  e  $D = 3$ .

#### 4.2.1 Caso I - $D \geq 4$ :

Para  $D \geq 4$  temos que as seguintes desigualdades são válidas

$$\left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} T^2 \right) \Big|_{k^2=0} > 0, \quad (4.40a)$$

e

$$\left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) \Big|_{k^2=\mu^2} > 0, \quad \mu^2 = m_{(2),i}^2, m_{(0),i}^2. \quad (4.40b)$$

Assim sendo, obtemos os resultados

$$\text{Res SP(k)} \Big|_{k^2=0} \begin{cases} > 0, & \text{para } \sigma = +1 \\ < 0, & \text{para } \sigma = -1 \end{cases}, \quad (4.41a)$$

$$\text{Res SP(k)} \Big|_{k^2=m_{(2),i}^2} \begin{cases} < 0, & \text{para } \sigma = +1 \\ > 0, & \text{para } \sigma = -1 \end{cases}, \quad \text{se } i \text{ for ímpar,} \quad (4.41b)$$

$$\text{Res SP(k)} \Big|_{k^2=m_{(2),i}^2} \begin{cases} > 0, & \text{para } \sigma = +1 \\ < 0, & \text{para } \sigma = -1 \end{cases}, \quad \text{se } i \text{ for par,} \quad (4.41c)$$

$$\text{Res SP(k)} \Big|_{k^2=m_{(0),i}^2} \begin{cases} > 0, & \text{para } \sigma = +1 \\ < 0, & \text{para } \sigma = -1 \end{cases}, \quad \text{se } i \text{ for ímpar,} \quad (4.41d)$$

---

<sup>4</sup>Enfatizamos que este ordenamento sempre pode ser feito ao renomearmos as massas.



$$\text{Res SP}(\mathbf{k})|_{k^2=m_{(0),i}^2} \begin{cases} < 0, & \text{para } \sigma = +1 \\ > 0, & \text{para } \sigma = -1 \end{cases}, \quad \text{se } i \text{ for par.} \quad (4.41e)$$

Estas desigualdades nos permitem realizar as seguintes conclusões.

- Embora nossa discussão seja válida tanto para  $\sigma = +1$  quanto  $\sigma = -1$ , a relação (4.41a) implica  $\sigma = +1$ , já que se espera no espectro uma partícula sem massa e de spin 2, o gráviton usual.
- O único caso onde a teoria não exhibe um fantasma é dado pela escolha  $F_1(\square) = \alpha_0$  e  $F_2(\square) = 0$ . Neste caso o propagador possui dois polos,  $k^2 = 0$  and  $k^2 = m_{(0),1}^2$ , e ambos correspondem à partículas físicas. Afora este caso, um caso particular das teorias  $f(R)$  da gravitação conhecido como gravitação de Starobinsky, os sinais alternantes dos parâmetros  $\xi_{(2),i}$  e  $\xi_{(0),i}$  garantem a existência de ao menos um fantasma.

Em suma, para dimensões  $D \geq 4$ , a classe geral de teorias de ordem superior aqui apresentada só não possui fantasmas em um caso específico, a gravitação de Starobinsky.

### 4.2.2 Caso II - $D = 3$ :

Para o caso tridimensional, o tensor momento-energia satisfaz as relações

$$\left( T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - T^2 \right) \Big|_{k^2=0} = 0, \quad (4.42a)$$

e

$$\left( T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^2 \right) \Big|_{k^2=\mu^2} > 0, \quad \mu^2 = m_{(2),i}^2, m_{(0),i}^2. \quad (4.42b)$$

Temos então que a equação (4.42a) implica que

$$\text{Res SP}(\mathbf{k})|_{k^2=0} = 0, \quad (4.43)$$

isto é, não há modo de propagação para partículas sem massa em três dimensões. Como consequencia não podemos fixar o parâmetro  $\sigma$  como fizemos no caso anterior. Este fato será significativo quando estudarmos a *Nova Gravitação Massiva*. Por sua vez, a desigualdade (4.42b) implica que as desigualdades (4.41b)-(4.41e) permanecem válidas, assim como os comentários feitos sobre fantasmas massivos em dimensões  $D \geq 4$ .

### 4.3 Contagem de potência e renormalizabilidade

Como é bem conhecido, a motivação para se considerar teorias de gravitação de ordem superior como candidatas a modelos de gravitação quântica é seu comportamento no regime ultravioleta. Nesta seção estudaremos por contagem de potência o comportamento neste regime da classe geral de teorias  $D$ -dimensionais de ordem superior descrita pela ação (4.2). Para tais teorias, os propagadores e vértices tem o seguinte comportamento no regime ultravioleta<sup>5</sup>

$$\text{Propagators} \sim \frac{1}{k^{2q+4}} \quad \text{e} \quad \text{Vertices} \sim k^{2N+4}. \quad (4.44)$$

Consequentemente, para um dado diagrama de Feynman arbitrário o comportamento ultravioleta de integrações devido a loops é dado por

$$\mathcal{I}_{UV}^{Loops} \sim \int (d^D k)^L \frac{(k^{2N+4})^V}{(k^{2q+4})^I}, \quad (4.45)$$

onde  $I$  é o número de linhas internas,  $L$  é o número de loops e  $V$  o número de vértices. Portanto o grau superficial de divergência associado com esta integral é dado por

$$\delta = DL + (2N + 4)V - (2q + 4)I. \quad (4.46)$$

Tendo em mente as relações topológicas

$$L - 1 = I - V, \quad (4.47a)$$

e

$$2I + E = \sum_{n=3}^{\infty} nV_n, \quad (4.47b)$$

onde  $E$  denota o número de linhas externas e  $V_n$  denota o número de vértices conectando  $n$ -linhas, podemos reescrever o grau superficial de divergência como

$$\delta = D - \sum_{n=3}^{\infty} \left[ \frac{n-2}{2}(2q+4-D) - 2\lambda \right] V_n + \left( \frac{2q+4-D}{2} \right) E, \quad (4.48)$$

---

<sup>5</sup>Lembrete: os parâmetros  $q$  and  $N$  foram introduzidos na seção (4.2) e estão relacionados com o número de derivadas contidas na ação através dos fatores de forma  $F_1(\square) = \sum_{n=0}^p \alpha_n (-\square)^n$  e  $F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n$ .

onde o parâmetro  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \begin{cases} p - q, & \text{se } q < p, \\ 0, & \text{se } q \geq p. \end{cases} \quad (4.49)$$

Como é bem conhecido, por contagem de potência uma teoria é renormalizável se o grau superficial de divergência não depende do número de vértices, isto é

$$2q + 4 - D = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = 0. \quad (4.50)$$

A primeira condição relaciona o número de derivadas no setor do tensor de Ricci elevado ao quadrado com a dimensão do espaço-tempo. Vemos que em dimensões ímpares não podemos ter uma teoria renormalizável, já que seria necessário potências fracionárias do operador d'Alambertiano. A segunda condição implica que  $q \geq p$ . Esta desigualdade nos diz que o número de derivadas no setor do escalar de Ricci ao quadrado não pode ser maior do que o número de derivadas no setor do tensor de Ricci elevado ao quadrado.

Além disto, se quisermos formular a teoria como superrenormalizável por contagem de potência, devemos ter um grau superficial de divergência decrescente com o número de vértices, isto é

$$2q + 4 - D \geq 4\lambda. \quad (4.51)$$

Como no caso anterior, se esta desigualdade relaciona o número de derivadas no setor do tensor de Ricci elevado ao quadrado com a dimensão do espaço-tempo. Além disto, se  $p > q$  ela determina um valor mínimo para o parâmetro  $q$  em termos da dimensão do espaço-tempo e o número de derivadas no setor do escalar de Ricci elevado ao quadrado.

Na última seção, vimos que a única teoria gravitacional sem fantasmas<sup>6</sup> é a gravitação de Starobinsky. Poderia esta teoria ser renormalizável e, portanto, nos permitir reconciliar unitariedade e renormalizabilidade em modelos gravitacionais de ordem superior? De posse do critério acima, podemos dizer gravitação de Starobinsky - i.e. a

---

<sup>6</sup>Lembremos que estamos nos restringindo a teorias sem restrição nos parâmetros da lagrangiana. No capítulo dedicado à Nova Gravitação Massiva ficará claro como tal restrição pode modificar nossas conclusões.

escolha  $F_1(\square) = \alpha_0$  e  $F_2(\square) = 0$  - é não-renormalizável. Em suma, não foi possível construir uma teoria que seja simultaneamente renormalizável e livre de fantasmas.

Enfim, de acordo com a conjectura investigada nesta tese, esperamos que se ou a equação (4.50) ou a equação (4.51) forem obedecidas, o potencial não-relativístico seja finito na origem. No mais, destacamos que, mesmo se uma teoria renormalizável por contagem de potência sem a singularidade newtoniana se mostrar não-renormalizável, esta conjectura ainda não é falseada. A conjectura afirma que a finitude do potencial em  $r = 0$  é uma condição necessária para a renormalizabilidade, e não uma condição suficiente.

## 4.4 Potencial gravitacional não-relativístico

Para determinar o potencial de modelos gravitacionais, utilizaremos a prescrição descrita pela equação (2.16). Para a conveniência do leitor, nós a repetimos: o potencial não-relativístico é determinado por

$$V(r) = \kappa_D \frac{M}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P_{00,00}(k)|_{k_0=0}, \quad (4.52)$$

onde  $P_{00,00}$  é a componente  $\mu = \nu = \alpha = \beta = 0$  do propagador modificado  $P_{\mu\nu,\alpha\beta} = D_{\mu\nu,\alpha\beta} - D_{\mu\nu,\alpha\beta}^\perp$ , com  $D_{\mu\nu,\alpha\beta}^\perp$  sendo a contribuição ao propagador que é ortogonal ao tensor energia-momento, enquanto

$$\kappa_D = \left( \frac{D-2}{D-3} \right) G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \quad (4.53)$$

é a constante  $D$ -dimensional de Einstein para  $D > 3$ , onde  $G_D$  é a constante de Newton em  $D$ -dimensões. Quando  $D = 3$  a relatividade geral não tem limite newtoniano, de forma que não é possível relacionar  $\kappa_3$  com  $G_3$ .

Ora, já que o propagador foi determinado em (4.22), pode-se conferir que

$$P_{00,00}(k) = \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\sigma k^2 Q_2(k^2)} - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{\sigma k^2 Q_0(k^2)}. \quad (4.54)$$

Consideraremos novamente que  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$  são funções polinomiais do d'Alembertiano.

Realizando novamente a decomposição em frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned}
P_{00,00}(k)|_{k_0=0} = & -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{D-3}{D-2} \right) \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_{(2),i}^2} + \\
& + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_{(0),i}^2}, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.55) em (4.52) e realizando as integrações conforme (vide apêndice E)

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\mu}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(\mu r), \quad \text{para } D \geq 3 \tag{4.56a}$$

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right), \quad \text{para } D \geq 4, \tag{4.56b}$$

nós encontramos que o potencial  $D$ -dimensional gravitacional é dada por (para  $D \geq 4$ )

$$\begin{aligned}
V(r) = & -\frac{\kappa_D M}{\sigma (2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \left( \frac{D-3}{D-2} \right) 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \frac{1}{r^{D-3}} + \right. \\
& - \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} \left( \frac{m_{(2),i}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),i} r) + \\
& \left. + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} \left( \frac{m_{(0),i}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),i} r) \right\}, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

enquanto, para  $D = 3$ ,

$$\begin{aligned}
V_3(r) = & \frac{\kappa_3 M}{2\sigma (2\pi)} \left\{ \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} K_0(m_{(2),i} r) + \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} K_0(m_{(0),i} r) \right\}. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Devido a sua fundamental importância física, escrevemos explicitamente o potencial  $D$ -dimensional gravitacional para  $D = 4$  e  $\sigma = 1$ , lembrando que

$$k_4 = 8\pi G_4 \text{ e } K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad (4.59)$$

e portanto

$$\begin{aligned} V(r) = & -MG \left[ \frac{1}{r} - \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} \frac{e^{m_{(2),i}r}}{r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} \frac{e^{m_{(0),i}r}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Neste ponto, poderíamos nos perguntar: será que a escolha  $\sigma = 1$  é obrigatória, uma vez que potencial deve reproduzir o potencial newtoniano no limite apropriado? Ora, realizando a seguinte expansão assintótica da função de Bessel modificada de segunda espécie

$$K_\nu(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \text{ para } r \rightarrow \infty, \quad (4.61)$$

é trivial verificar que (4.57) só concorda assintoticamente com o limite newtoniano se  $\sigma = 1$ .

Nosso próximo passo será analisar o comportamento destes potenciais clássicos para pequenas distâncias. Definindo  $\nu = \frac{D-3}{2}$ , nós distinguiremos entre  $D$  ímpar e par, uma vez que a função de Bessel modificada de segunda espécie  $K_\nu(x)$  tem expansões em série de Taylor distintas para  $\nu$  inteiro ou semi-inteiro.

#### 4.4.1 Regularidade do potencial na origem para $D > 3$ - $D$ par

Se o potencial é definido em um espaço-tempo com dimensões pares, podemos expandir a função modificada de Bessel de acordo com (expressão que não é válida para  $\nu$  inteiro) [24]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi \csc \pi \nu}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k - \nu + 1)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \right),$$

e, substituindo (4.62) em (4.57), nós determinamos o potencial gravitacional para pequenas distâncias

$$\begin{aligned}
V(r) = & -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\nu+1}} \left\{ \frac{1}{r^{2\nu}} \Delta_\nu^{\text{par}}(r; q, N) + \frac{\pi \csc \pi\nu}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \left[ \left( \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \right) \times \right. \right. \\
& \times \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2\nu} - \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2\nu} \left. \right] \Big\} + \\
& + \mathcal{O}(r), \tag{4.62}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_\nu^{\text{par}}(r; q, N) = & \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{2\nu+1} - \pi \csc(\pi\nu) \sum_{k=0}^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{r^{2k}}{2^{2k-\nu+1} \Gamma(k-\nu+1) k!} \times \\
& \times \left( \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2k} - \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2k} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, o cancelamento da singularidade Newtoniana depende do comportamento da função  $\Delta_\nu^{\text{par}}(r; q, N)$ . Com a ajuda de um sistema de álgebra computacional nós verificamos que esta função será nula se a seguinte condição for satisfeita

$$2q + 4 - D \geq 0, \tag{4.63}$$

o potencial é finito na origem.

À primeira vista este resultado é surpreendente, afinal, estamos concluindo que a finitude do potencial perto da origem é independente do setor do tensor escalar de curvatura ao quadrado.

#### 4.4.2 Regularidade do potencial na origem para $D > 3 - D$ ímpar

Para um espaço-tempo com dimensões ímpares e  $D > 4$ , podemos expandir a função modificada de Bessel do segundo tipo de acordo com [25]

$$K_\nu(z) = (-1)^{\nu-1} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k (\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \frac{(-1)^\nu}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (4.64)$$

e, substituindo a expressão acima em (4.57), nós determinamos que o potencial gravitacional na origem é dada por

$$V(r) = -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \frac{1}{r^{2\nu}} \Delta_\nu^{\text{ímpar}}(r; q, N) + \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{\nu+1} \nu!} \left[ (\psi(1) + \psi(\nu+1)) \times \right. \right. \\ \times \left( \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2\nu} - \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2\nu} \right) + \\ - \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2\nu} \ln(m_{(2),i}^2) + \\ \left. \left. + \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)} \left( \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2\nu} \ln(m_{(0),i}^2) \right) + \mathcal{O}(r) \right] \right\}, \quad (4.65)$$



onde nós definimos

$$\begin{aligned}
\Delta_\nu^{\text{ímpar}}(r; q, N) &= \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{2\nu + 1} - \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k 2^{\nu-1} (\nu - k - 1)!}{k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \times \\
&\times \left( \frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2k} - \frac{1}{(2\nu + 2)(2\nu + 1)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2k} \right) \\
&+ \frac{(-1)^\nu}{2^\nu \nu!} r^{2\nu} \ln \left(\frac{r}{2}\right) \left( \frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} m_{(2),i}^{2\nu} + \right. \\
&\left. - \frac{1}{(2\nu + 2)(2\nu + 1)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} m_{(0),i}^{2\nu} \right). \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Analogamente à seção acima, a regularidade do potencial quando  $r = 0$  dependerá da condição  $\Delta_\nu^{\text{ímpar}}(r; q, N) = 0$  para todo valor da coordenada  $r$ . Com a ajuda de um sistema de computação algébrica nós verificamos que uma condição necessária para termos  $\Delta_\nu^{\text{ímpar}}(r; q, N) = 0$  é dada por

$$2q + 3 - D \geq 0. \tag{4.67}$$

### 4.4.3 Regularidade do potencial na origem para $D = 3$

Desta vez nós investigaremos o caso 3-dimensional. Considerando a expansão para pequenos valores

$$K_0(z) = -\ln \left(\frac{z}{2}\right) - \gamma + \mathcal{O}(z^2), \tag{4.68}$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Marcheroni, pode-se verificar que o potencial gravitacional para pequenas distâncias é

$$\begin{aligned}
V_3(r) &= -\frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} \right] \left( \ln \left(\frac{r}{2}\right) + \gamma \right) + \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} \ln m_{(2),i} - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} \ln m_{(0),i} + \mathcal{O}(r) \right\}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Neste caso podemos utilizar a identidade

$$\sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_i} = 1, \quad (4.70)$$

válida para qualquer conjunto de números complexos  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$  com  $n \geq 0$ , com o intuito de verificar as equações

$$\sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} = 1, \quad (4.71)$$

para  $q \geq 0$  (note que  $q \geq 0$  automaticamente implica  $N \geq 0$ ). Utilizando o resultado acima podemos reescrever o potencial para pequenas distâncias como

$$V_3(r) = -\frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} \left\{ \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2 \ln m_{(2),i}}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2 \ln m_{(0),i}}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} + \mathcal{O}(r) \right\}. \quad (4.72)$$

Portanto, uma condição suficiente para o cancelamento da singularidade newtoniana em três dimensões é dada por  $q \geq 0$ , isto é, a existência do setor de Ricci elevado ao quadrado já torna o potencial finito na origem.

## 4.5 Representação gráfica dos resultados

Nesta seção analisaremos o comportamento gráfico do potencial gravitacional não-relativístico calculada acima. Com o intuito de lidar com gráficos associados a quantidades adimensionais, definimos um potencial de referência

$$E_0 = \frac{4M}{(2\pi)^{\frac{D-3}{2}} M_{Pl}}, \quad (4.73)$$

onde  $M_{Pl}$  é a massa de Planck, para então podermos analisar o gráfico de  $V_D(r)/E_0$  em função de  $M_{Pl}r$ , onde será feita a escolha  $\sigma = 1$ .

Na figura 4.1 é ilustrado o comportamento de modelos gravitacionais de quarta ordem para três valores diferentes da dimensão espaço-temporal, a saber,  $D = 3, 4$  e  $5$ . Foram considerados diversos valores dos parâmetros de massa próximos da massa

de Planck, valores os quais não se mostraram relevantes para a análise da finitude do potencial na origem. Como podemos ver, o potencial da teoria gravitacional de quarta ordem é regular na origem em  $D = 3$  e, ao contrário da gravitação newtoniana, também o é para  $D = 4$ . No entanto, o potencial diverge na origem para  $D = 5$ , e, de fato, para qualquer dimensão  $D > 4$ .

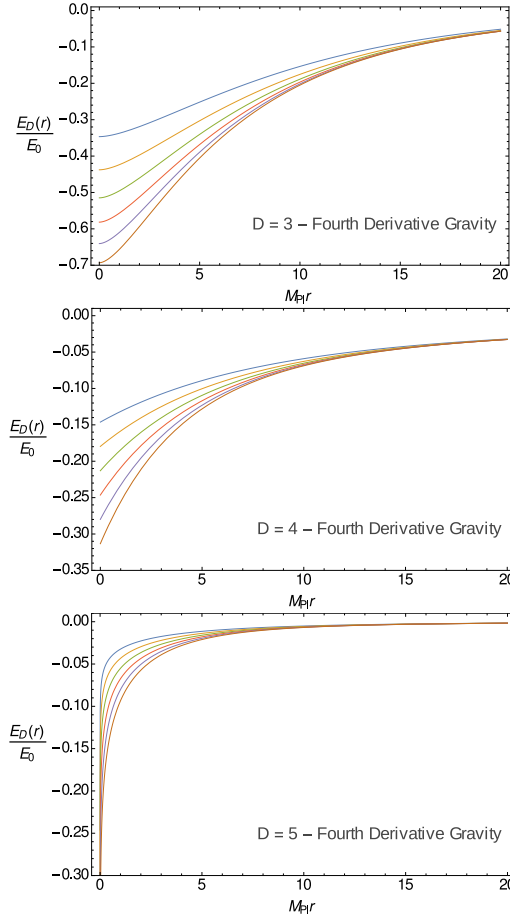


Figura 4.1: Potencial gravitacional não-relativístico associado a modelos de quarta ordem, aqui denotado  $E_D$ .

Por outro lado, a figura 4.2 ilustra o comportamento de modelos gravitacionais de sexta ordem em  $D = 3, 4, 5, 6$  e  $7$  para diversos valores dos parâmetros de massa que, mais uma vez, não influenciam no comportamento do potencial quando  $r$  tende a  $0$ . Vemos que, ao contrário dos modelos de quarta ordem, o potencial gravitacional é finito em  $D = 5$  e  $D = 6$ , e, como o modelo de quarta ordem, diverge em  $D = 7$  e, de fato,

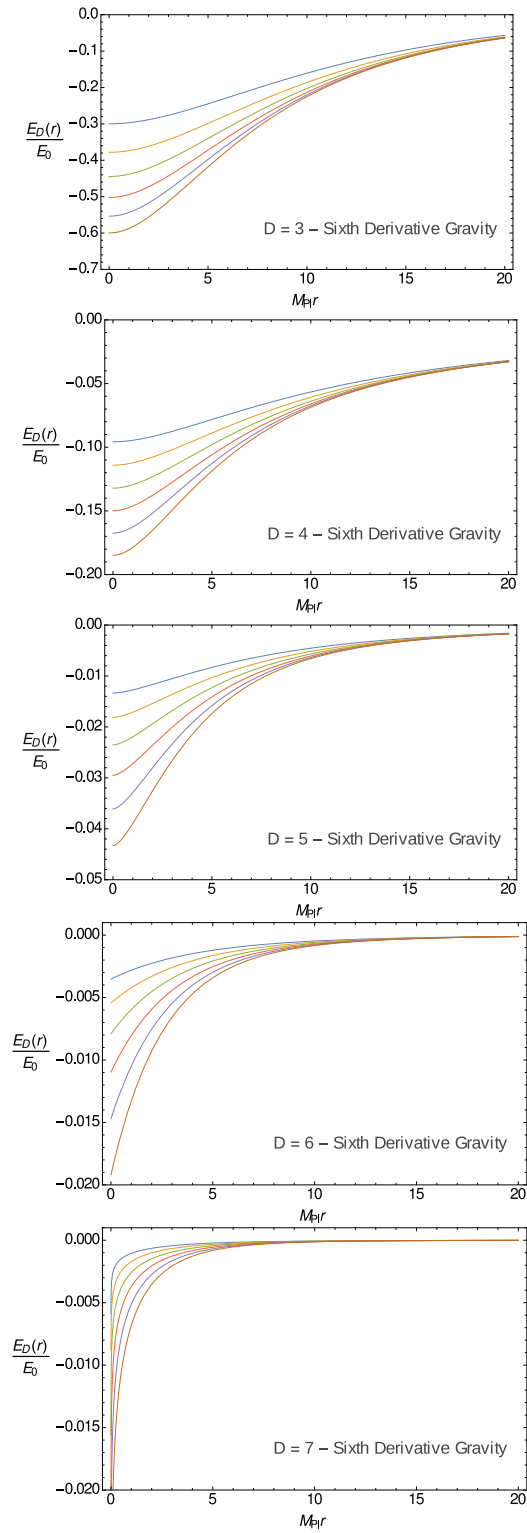


Figura 4.2: Potencial gravitacional não-relativístico associado a modelos de sexta ordem, aqui denotado  $E_D$ .

para qualquer dimensão maior do que 6.

Um padrão, portanto, emerge. Se a gravitação de quarta ordem é finita até  $D = 4$ , e a gravitação de sexta ordem até  $D = 6$ , será que o modelo de oitava ordem seria finito até  $D = 8$ ? De fato, pelo comportamento obtido na seção anterior para pequenos valores de  $r$  perto da origem, podemos ver que, substituindo  $q = 2$  nas equações (4.63) e (4.67), este modelo tem potencial finito para  $D \leq 8$ . Da mesma forma, a gravitação de quinta ordem (com  $q = 3$ ) tem potencial regular na origem para  $D \leq 10$ .

Como o aumento do número de dimensões piora o comportamento no regime ultra-violeta de uma teoria quântica de campos, e, em contrapartida, o aumento da ordem da equação de movimento melhora o comportamento no regime ultra-violeta, uma relação entre a renormalizabilidade e o potencial finito na origem se sugere. De fato, dedicaremos a próxima seção para a verificação da conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem.

Antes disso, destacamos que, para valores específicos do parâmetro de massa, é possível que o potencial seja divergente na origem, embora no geral (para esta ordem de modelos gravitacionais) não o seja. De fato, no próximo capítulo exemplificaremos isto ao vermos que uma escolha específica de parâmetros que define a Nova Gravitação Massiva torna o potencial desta teoria de quarta ordem divergente para  $r$  tendendo a 0. Tais comportamentos, no entanto, não violarão a conjectura se estes modelos forem não-renormalizáveis (como é o caso da NGM).

## 4.6 Verificando a conjectura para uma classe geral de gravitação de ordem superior $D$ -dimensional

De posse dos resultados obtidos neste capítulo, podemos verificar a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem para a classe geral de teorias de ordem superior em  $D$  dimensões dada por (4.2).

Relembremos os resultados obtidos. Primeiramente, ao investigarmos as propriedades no regime ultravioleta encontramos a seguinte condição necessária para a (super)renormalizabilidade:

- $2q + 4 - D = 0 \sim$  renormalizável por contagem de potência;

- $2q + 4 - D \geq 4\lambda \sim$  superrenormalizável por contagem de potência.

Para a conveniência do leitor, relembramos que  $D$  indica a dimensão do espaço-tempo e  $q$  o grau do polinômio referente ao fator de forma do setor do tensor de Ricci<sup>7</sup> (i.e.  $F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n$ ).

No mais, a investigação do comportamento do potencial gravitacional para pequenas distância nos permite concluir a seguinte condição suficiente para o cancelamento de singularidades newtonianas:

- $2q + 4 - D \geq 0$ , para dimensões pares;
- $2q + 3 - D \geq 0$ , para dimensões ímpares.

De posse desses resultados, podemos concluir que a condição necessária para a (super)renormalizabilidade implica na condição suficiente para o cancelamento da singularidade newtoniana, isto é,

$$\text{(Super)renormalizabilidade por contagem de potência} \quad \Rightarrow \quad \text{Potencial finito em } r = 0.$$

Assim verificamos que a conjectura mencionada acima para esta classe geral de teorias estudada. Ademais, nós destacamos que o cancelamento de singularidades newtonianas não implica em renormalizabilidade. De fato, como demonstrado por Accioly et al., é possível construir uma teoria de ordem superior com potencial finito em  $r = 0$  e não-renormalizável [13].

Por último, discutimos brevemente o papel da não-unitariedade no cancelamento da singularidade newtoniana. Como verificamos em seções anteriores, não é possível construir uma teoria (local) de ordem superior sem fantasmas e renormalizável. De acordo com a conjectura desta seção, o potencial deve ser finito para uma teoria ser renormalizável; no entanto, para que este seja finito devem existir fantasmas, uma vez que eles contribuem para o potencial com uma interação de sinal oposta - isto é, repulsiva entre duas massas para a interação gravitacional - e assim impedem a singularidade newtoniana de ocorrer. Tal afirmação foi recentemente discutida na literatura. Giacchini [13] demonstrou que é necessário ao menos um fantasma massivo e uma partícula física massiva (isto é, sem ser o gráviton usual) para que haja o cancelamento da

---

<sup>7</sup>Assim sendo,  $q = 0$  constrói uma teoria de quarta ordem,  $q = 1$  constrói um modelo de sexta ordem, etc.

singularidade newtoniana em  $D = 4$ . No caso de teorias tridimensionais, não é difícil adaptar a demonstração de Giacchini e chegar à mesma conclusão. No entanto, para dimensões  $D > 4$ , a situação é mais sutil. Embora não tenhamos uma demonstração, os mesmos argumentos parecem ser válidos. Mesmo assim, o número mínimo de fantasmas e partículas massivas aumentam com a dimensão do espaço-tempo.

Em resumo, se é verdadeira a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial finito na origem, como é necessária a existência de fantasmas para a finitude deste potencial, renormalizabilidade e unitariedade são dois conceitos incompatíveis em teorias de ordem superior locais. Portanto, tal conjectura nos permite olhar esta incompatibilidade sob outro prisma.

# Capítulo 5

## Recobrando resultados anteriores: A Nova Gravitação Massiva e as Gravitações de Quarta e Sexta Ordem

### 5.1 Introdução

Neste capítulo será certificado que os resultados obtidos nesta tese para uma classe geral de teorias recaem em modelos previamente estudados pelo nosso grupo, a saber, a gravitação de ordem superior em quarta e sexta ordem em  $D = 3, 4, 5$  [10] e a Nova Gravitação Massiva (NGM) [29]. Além disto, a Nova Gravitação Massiva exemplificará como pressupondo relações específicas entre os parâmetros da lagrangiana as conclusões obtidas na seção anterior sobre unitariedade e renormalizabilidade podem ser modificadas, sem, contudo, violar a conjectura de que teorias de ordem superior renormalizáveis possuem potencial não-relativístico finito na origem. Além disto, o estudo deste modelo mostrará claramente como esta conjectura pode demonstrar de forma simples e eficiente que um modelo é não-renormalizável.

### 5.2 Nova Gravitação Massiva

O interesse em construir uma teoria gravitacional em três dimensões nos leva a considerar uma gravitação massiva, já que em três dimensões não há modos de propa-



gação associado a um gráviton sem massa. Dentre as inúmeras possibilidades de uma gravitação massiva em  $D = 3$  está a Nova Gravitação Massiva, uma teoria de quarta ordem unitária ao nível de árvore contendo tanto o termo  $R^2$  quanto  $R_{\mu\nu}$  em sua ação.

Como pode esta teoria ser unitária, se concluímos previamente na seção 4.2 que tais teorias são no geral não unitárias? Relembremos de nossa análise prévia que no caso geral da teoria de quarta ordem em três dimensões temos que

$$\text{Res}(\text{SP})|_{k^2=0} = -\frac{1}{\sigma} (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0}, \quad (5.1)$$

$$\text{Res}(\text{SP})|_{k^2=m_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left( T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2 \right)|_{k^2=m_2^2}, \quad (5.2)$$

$$\text{Res}(\text{SP})|_{k^2=m_0^2} = -\frac{1}{\sigma} (T^2)|_{k^2=m_0^2}. \quad (5.3)$$

Uma vez que em três dimensões  $(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - T^2)|_{k^2=0} = 0$ , não há modo de propagação sem massa e não precisamos escolher  $\sigma = 1$  para recuperarmos a descrição do gráviton. Podemos então escolher  $\sigma = -1$  e obter de  $(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - T^2)|_{k^2=m_2^2} > 0$  que  $\text{Res}(\text{SP})|_{k^2=m_2^2} > 0$ , isto é, o modelo assim escolhido descreve uma partícula física de massa  $m_2$ . Ainda resta, no entanto, o polo problemático  $k^2 = m_0^2$ , que descreve um fantasma, i.e.,  $\text{Res}(\text{SP})|_{k^2=m_0^2} < 0$ . Uma forma de evitar a ocorrência deste fantasma é considerar o limite  $m_0 \rightarrow \infty$ , o que, de acordo com (4.28b), é obtido com a escolha  $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$ . É esta escolha que define a Nova Gravitação Massiva, descrita pela ação

$$S_{\text{NGM}} = \int d^3x \sqrt{|g|} \left( -\frac{2}{\kappa^2}R + \frac{\beta_0}{2\kappa^2} \left( R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right). \quad (5.4)$$

Temos, então, uma teoria em três dimensões livre de fantasmas ao nível de árvore<sup>1</sup>.

Poderia esta teoria ser renormalizável? Será que se construiu uma teoria de ordem superior simultaneamente renormalizável e unitária? De acordo com Oda [14], a NGM é renormalizável. No entanto, Oda tratou a NGM como uma teoria tridimensional completa (com  $\sigma = -1$ ) sem considerar a restrição entre os parâmetros. É esta relação que é responsável por quebrar a renormalizabilidade da teoria, conforme demonstrado por Muneyuki e Ohta [15].

A não-renormalizabilidade desta teoria é sugerida pela análise por contagem de potência. O critério de renormalizabilidade por contagem de potência para teorias

---

<sup>1</sup>Enfatizamos que estamos nos referindo a fantasmas ruins quando dizemos que uma teoria de ordem superior é ‘livre de fantasmas’, como de costume na literatura.

gravitacionais de ordem superior desenvolvido no capítulo anterior aparentemente determina que a NGM é superrenormalizável por contagem de potência. No entanto, caso haja relação entre os parâmetros da lagrangiana, este critério deve ser reavaliado. De fato, a condição  $3\alpha_0 + 8\beta_0 = 0$  deve ser considerada de tal modo que o comportamento ultravioleta do propagador ao nível de árvore é dado por  $\sim 1/k^2$ . Assim sendo, a contagem de potência correta para a NGM é

$$\delta_{\text{NGM}} = 3 - \frac{1}{2}E + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (n+2)V_n. \quad (5.5)$$

Como se pode ver, o grau superficial de divergência aumenta com o número de vértices e a teoria é não-renormalizável por contagem de potência.

O estudo do potencial permite uma forma mais simples de se decidir a não renormalizabilidade da NGM, no entanto, junto com a conjectura desenvolvida nesta tese. Substituindo  $m_0 \rightarrow \infty$  em (4.58), nós temos que o potencial da NGM é dado por

$$V_3(r) = - \frac{\kappa_3 M}{4\pi} K_0(m_2 r) \quad (5.6)$$

e, ao contrário da teoria de ordem superior habitual em três dimensões, temos divergência na origem. A figura 5.1 compara o potencial da NGM com o potencial da teoria completa em  $D = 3$ ,  $\sigma = -1$  e  $m_2 < m_0$ . Enfim, da expressão para pequenos valores perto da origem para a teoria completa, i.e. (4.72), podemos ver que é o limite  $m_0 \rightarrow \infty$  que torna o potencial não regular na origem. Em suma, a mesma condição que causa a unitariedade da teoria - e a ausência do fantasma massivo de spin 0 - também causa a divergência do potencial em  $r = 0$ : vemos, então, de forma simples como estes conceitos estão conectados.

Podemos ainda relacionar tais conceitos com a renormalizabilidade ao utilizar a conjectura de que modelos de ordem superior possuem potencial regular na origem - e desta conjectura concluir de forma simples que a NGM é não-renormalizável, já que (5.6) diverge na origem. Por fim, a figura 5.2 sumariza as conclusões desta seção.

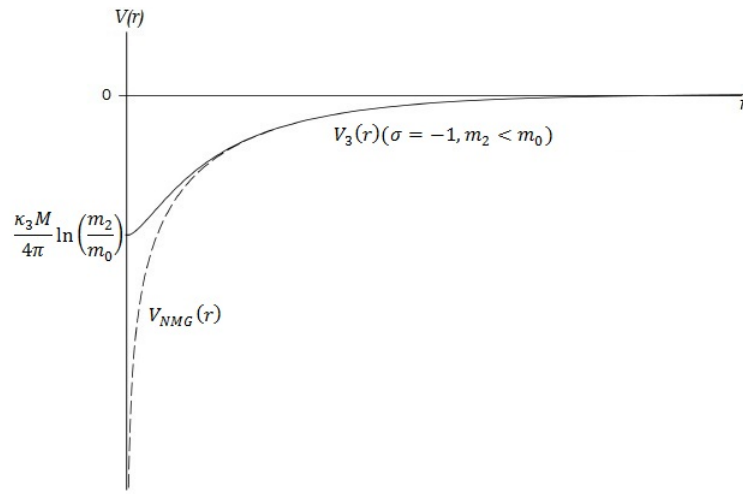


Figura 5.1: Potencial gravitacional o modelo gravitacional de quarta ordem completo em três dimensões com  $\sigma = -1$  e  $m_2 < m_0$  (linha contínua) e a NGM (linha tracejada).

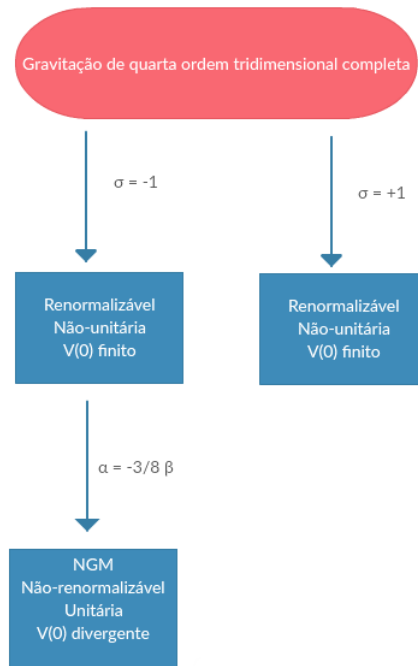


Figura 5.2: Renormalizabilidade, unitariedade, e o potencial gravitacional na origem referente à gravitação de quarta ordem completa em  $D = 3$ .

## 5.3 Gravitação de quarta ordem

A ação da gravitação de quarta ordem é dada por

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left( \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2\kappa^2} R^2 + \frac{\beta}{2\kappa^2} R_{\mu\nu}^2 \right). \quad (5.7)$$

Vemos que esta ação é um caso particular da ação estudada previamente, com  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\beta_0 = \beta$  e os outros parâmetros nulos. Lembremos que os parâmetros de massa são dadas pelas raízes de (4.28b) e (4.28a). Resolvendo esta equação obtém-se as raízes

$$m_2^2 = -\frac{4\sigma}{\beta} \text{ e } m_0^2 = \frac{4\sigma(D-2)}{4\alpha(D-1) + D\beta}. \quad (5.8)$$

Consequentemente, o potencial para esta teoria, substituindo em (4.4) os parâmetros de massa apropriados (para  $D > 4$ ),

$$\begin{aligned} V_D^{(4^a \text{ ordem})}(r) = & -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \left( \frac{D-3}{D-2} \right) 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \frac{1}{r^{D-3}} + \right. \\ & - \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \left( \frac{m_2}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_2 r) + \\ & \left. + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \left( \frac{m_0}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_0 r) \right\}, \quad (5.9) \end{aligned}$$

enquanto que, para  $D = 3$ ,

$$V_3^{(4^a \text{ ordem})}(r) = \frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} [K_0(m_2 r) - K_0(m_0 r)]. \quad (5.10)$$

Assim sendo, lembrando-se de tomar o limite  $D = 4, 5$  em (5.9), recobramos os resultados obtidos em [10].

### 5.3.1 Um caso particular com potencial clássico finito em $D = 5$

Nesta subseção mencionamos que a gravitação de quarta ordem contém um modelo particular cujo potencial não-relativístico é finito na origem e não-renormalizável [10], isto é, vemos que o potencial finito não é uma condição suficiente para uma teoria de

ordem superior ser renormalizável. Tal modelo é definido em cinco dimensões, com  $m_0^2 = 9m_2^2$ . De (4.65) podemos deduzir que, onde escolhemos  $\sigma = 1$ ,

$$V_5^{(4^a \text{ ordem})}(r) \approx \frac{K_5 M}{48(2\pi)^2} \left[ (m_0^2 - 9m_2^2)(2\gamma - 1 + 2 \ln r) + m_0^2 \ln \frac{m_0^2}{4} - 9m_2^2 \ln \frac{m_2^2}{4} \right] + \dots \quad (5.11)$$

Vemos então que a escolha  $m_0^2 = 9m_2^2$  torna o potencial não-relativístico regular em  $r = 0$ , isto é,  $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$ , com o potencial na origem dado pela expressão

$$V_5^{(4^a \text{ ordem})}(0) = -\frac{3k_5 M m_2^2 \ln 3}{32\pi^2}. \quad (5.12)$$

## 5.4 Gravitação de sexta ordem

Por sua vez, a ação da gravitação de sexta ordem é dada por

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left( \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{1}{2\kappa^2} R(\alpha_0 - \alpha_1 \square) R + \frac{1}{2\kappa^2} R_{\mu\nu}(\beta_0 - \beta_1 \square) R^{\mu\nu} \right). \quad (5.13)$$

Uma vez que os parâmetros de massa são dadas pelas raízes de (4.28b) e (4.28a), obtemos as seguintes quatro raízes:

$$\begin{aligned} m_{(2),1}^2 &= -\frac{\beta_0}{2\beta_1} \left( 1 + \sqrt{1 - 16\sigma \frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \right), \\ m_{(2),2}^2 &= -\frac{\beta_0}{2\beta_1} \left( 1 - \sqrt{1 - 16\sigma \frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \right), \\ m_{(0),1}^2 &= -\frac{\xi_0}{2\xi_1} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\sigma(D-2) \frac{\xi_1}{\xi_0^2}} \right), \\ m_{(0),2}^2 &= -\frac{\xi_0}{2\xi_1} \left( 1 - \sqrt{1 + 4\sigma(D-2) \frac{\xi_1}{\xi_0^2}} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $\xi_i = (D-1)\alpha_i - \frac{D}{4}\beta_i$  para  $i = 1, 2$ . Em vista disso, o potencial gravitacional para

esta teoria, substituindo em (4.4) os parâmetros de massa apropriados (para  $D > 4$ ),

$$\begin{aligned}
V_D^{(6^a \text{ ordem})}(r) = & -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \left( \frac{D-3}{D-2} \right) 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \frac{1}{r^{D-3}} + \right. \\
& - \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \frac{m_{(2),2}^2}{m_{(2),2}^2 - m_{(2),1}^2} \left( \frac{m_{(2),1}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),1}r) + \\
& - \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \frac{m_{(2),1}^2}{m_{(2),1}^2 - m_{(2),2}^2} \left( \frac{m_{(2),2}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),2}r) + \\
& + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{(0),2}^2}{m_{(0),2}^2 - m_{(0),1}^2} \left( \frac{m_{(0),1}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),1}r) + \\
& \left. + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{(0),1}^2}{m_{(0),1}^2 - m_{(0),2}^2} \left( \frac{m_{(0),2}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),2}r) \right\}, \quad (5.15)
\end{aligned}$$

enquanto que, para  $D = 3$ ,

$$\begin{aligned}
V_3^{(6^a \text{ ordem})}(r) = & \frac{K_3 M}{4\pi\sigma} \left[ \frac{m_{(2),1}^2}{m_{(2),1}^2 - m_{(2),2}^2} K_0(m_{(2),2}) + \frac{m_{(2),2}^2}{m_{(2),2}^2 - m_{(2),1}^2} K_0(m_{(2),1}) + \right. \\
& \left. + \frac{m_{(0),1}^2}{m_{(0),1}^2 - m_{(0),2}^2} K_0(m_{(0),2}) + \frac{m_{(0),2}^2}{m_{(0),2}^2 - m_{(0),1}^2} K_0(m_{(0),1}) \right]. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Assim sendo, lembrando-se de tomar o limite  $D = 4, 5$  em (5.15) e de que no artigo [10] definiu-se  $\beta_1$  e  $\alpha_1$  com sinal oposto a da convenção utilizada aqui, recobramos os resultados obtidos anteriormente.

# Capítulo 6

## Calibre generalizado de Teyssandier para uma classe geral de gravitação de ordem superior $D$ -dimensional

### 6.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo uma nova condição de calibre, a qual facilitará a obtenção de soluções, na aproximação de campo fraco, das equações de campo para a classe geral de modelos gravitacionais de ordem superior apresentada no capítulo 4. Incluiremos, desta vez, o estudo de modelos não-locais.

A condição de calibre a ser apresentada é uma generalização do assim chamado calibre de Teyssandier, o qual foi apresentado originalmente para teorias de quarta ordem [16]. Este ‘calibre generalizado de Teyssandier’ nos permitirá obter a solução para as equações linearizadas de campo  $D$ -dimensionais para uma fonte pontual parada, rederivando, por um lado, os resultados obtidos previamente nesta tese sobre o potencial não-relativístico para uma classe geral de modelos gravitacionais locais<sup>1</sup>, e, por outro lado, resultados obtidos por outros meios acerca do potencial não-relativístico do modelo não-local conhecido como gravidade BGKM. De posse deste último resultado, poderemos investigar se este modelo não-local obedece a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial clássico regular na origem.

---

<sup>1</sup>Isto é, cujos fatores de forma são dados por funções polinomiais do operador d’alambertiano.

Desta forma, temos dois objetivos neste capítulo. Em primeiro lugar, apresentaremos uma nova condição de calibre e demonstraremos sua utilidade ao facilitar a resolução das equações linearizadas de campo e, portanto, contrastar as previsões de teorias gravitacionais de ordem superior com a relatividade geral no nível linearizado<sup>2</sup>. Em segundo lugar, utilizaremos esta condição de calibre para verificar se a gravidade BGKM obedece a conjectura a qual é o tema principal desta tese.

## 6.2 Equações linearizadas de campo e calibre generalizado de Teyssandier

Iniciamos esta seção lembrando ao leitor a classe geral de teorias gravitacionais de ordem superior a qual estamos considerando, i.e.

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left( \frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{1}{2\kappa^2} R F_1(\square) R + \frac{1}{2\kappa^2} R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} \right), \quad (6.1)$$

onde  $\kappa^2$  está relacionado à constante  $D$ -dimensional de Einstein  $k_D$  através de  $\kappa^2 = 4k_D$ . Além disto, para  $D \geq 4$  podemos expressar  $\kappa_D$  em termos da constante de Newton  $D$ -dimensional por  $\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3}\right) \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)} G_D$ . Em  $D = 4$  recuperamos o resultado usual<sup>3</sup>  $\kappa^2 = 32\pi G$ . Por outro lado,  $\sigma$  é um parametro que pode tomar o valor  $\sigma = +1$  ou  $\sigma = -1$ , e  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$  são funções do operador d'Alembertiano ( $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ ), os assim chamados fatores de forma. Outros termos invariantes como  $R_{\mu\nu\alpha\beta} F_3(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R^3$ ,  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} R$ , etc. serão ignorados, uma vez que empregaremos a aproximação de campo fraco<sup>4</sup> e, portanto, consideraremos apenas o setor quadrático da ação.

Restringindo-nos então ao regime linearizado, podemos demonstrar que as equações de movimento que resultam de (6.1) são

---

<sup>2</sup>Conforme dito na introdução, desvios clássicos da relatividade geral possuem uma chance maior de serem medidos do que desvios resultantes da quantização do campo gravitacional. Por exemplo, a queda proporcional ao inverso do quadrado do potencial gravitacional foi testada até a distância de  $5.6 \cdot 10^{-5}$  metros em experimentos de balanças de torção, cerca de 30 ordens de magnitude distante da escala de Planck.

<sup>3</sup>Para maiores detalhes, consulte o apêndice A do artigo [15].

<sup>4</sup>Isto é,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ , onde  $h_{\mu\nu}$  denota pequenos desvios em relação ao espaço-tempo de Minkowski.



$$\begin{aligned} & \left(2\sigma - \frac{1}{2}F_2(\square)\square\right)\left(R_{\mu\nu}^{(\text{lin})} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}\right) + \\ & - \left(F_1(\square) + \frac{1}{2}F_2(\square)\right)\left(\eta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu\right)R^{(\text{lin})} = -\frac{\kappa^2}{2}T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde  $R_{\mu\nu}^{(\text{lin})}$  e  $R^{(\text{lin})}$  representam, respectivamente, as versões linearizadas do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, a saber,

$$R_{\mu\nu}^{(\text{lin})} = \frac{\kappa}{2}\left(\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h - \partial_\mu\partial^\alpha h_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial^\alpha h_{\mu\alpha}\right) \quad (6.3a)$$

e

$$R^{(\text{lin})} = \kappa\left(\square h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right). \quad (6.3b)$$

Ao tomar o traço de (6.2), obtemos

$$\left(F_1(\square) + \frac{1}{2}F_2(\square)\right)\square R^{(\text{lin})} = \frac{\kappa^2}{2(D-1)}T - \frac{D-2}{2(D-1)}\left(2\sigma - \frac{1}{2}F_2(\square)\square\right)R^{(\text{lin})}, \quad (6.4)$$

onde  $T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ . Substituindo a equação acima em (6.2) temos que

$$\begin{aligned} & \left(2\sigma - \frac{1}{2}F_2(\square)\square\right)\left(R_{\mu\nu}^{(\text{lin})} - \frac{1}{2(D-1)}\eta_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}\right) + \\ & + \left(F_1(\square) + \frac{1}{2}F_2(\square)\right)\partial_\mu\partial_\nu R^{(\text{lin})} = \frac{\kappa^2}{2}\left(\frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}T - T_{\mu\nu}\right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por outro lado, levando em consideração a equação (6.3a) e definindo

$$\Gamma_\mu = \left(\sigma - \frac{1}{4}F_2(\square)\square\right)\partial^\alpha\gamma_{\alpha\mu} - \frac{1}{2\kappa}\left(F_1(\square) + \frac{1}{2}F_2(\square)\right)\partial_\mu R^{(\text{lin})}, \quad (6.6)$$

onde  $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ , nós podemos reescrever a equação (6.5) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \left(\sigma - \frac{1}{4}F_2(\square)\square\right)\left(-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa(D-1)}\eta_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\Gamma_\mu + \partial_\mu\Gamma_\nu\right) = \frac{\kappa}{4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}T\right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Embora este último resultado seja apenas uma forma de reescrever a equação de movimento (6.2), ele nos será útil na próxima seção.

### 6.3 Calibre generalizado de Teyssandier

Uma vez que estamos considerando uma teoria invariante sob transformações de coordenada quaisquer, há uma liberdade de calibre a ser fixada. No regime linearizado esta liberdade de calibre se manifesta em termos da transformação  $h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$  [34]. No contexto da relatividade geral, a escolha comum de calibre é o gauge de de Donder, *i.e.*  $\partial^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0$ . Contudo, quando consideramos teorias de ordem superior, há outros calibres que podem ser mais convenientes - por exemplo, no contexto da gravitação de quarta ordem, o calibre de Teyssandier [16] é comumente utilizado, já que neste calibre as equações de campo são desacopladas.

Neste espírito, apresentamos uma generalização do calibre de Teyssandier, o qual terá um papel similar no contexto da classe geral de modelos gravitacionais descrita pela ação (6.1). Esta condição de calibre é dada por

$$\Gamma_\mu = 0, \quad (6.8)$$

onde  $\Gamma_\mu$  é definido por (6.6). Para demonstrar que é sempre possível escolher um sistema de coordenada tal que a condição acima seja satisfeita, supomos que  $\Gamma_\mu \neq 0$ ; conseqüentemente, sob a transformação geral de coordenadas  $h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$ , nós podemos reescrever

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu - \left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \square \xi_\mu. \quad (6.9)$$

Portanto o calibre  $\Gamma_\mu = 0$  pode ser obtido se escolhermos  $\xi_\mu$  tal que

$$\left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \square \xi_\mu = \Gamma_\mu. \quad (6.10)$$

Uma vez que o operador diferencial  $(\sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square) \square$  não é singular, esta condição de calibre pode, portanto, sempre ser imposta. Desta forma, podemos reescrever a equação de movimento no regime linearizado como

$$\left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \left( -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{2\kappa(D-1)} R^{(\text{lin})} \right) = \frac{\kappa}{4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (6.11)$$

onde temos a condição de calibre

$$\Gamma_\mu = \left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \partial^\alpha \gamma_{\alpha\mu} - \frac{1}{2\kappa} \left( F_1(\square) + \frac{1}{2} F_2(\square) \right) \partial_\mu R^{(\text{lin})} = 0. \quad (6.12)$$

Demonstraremos, agora, como esta escolha de calibre pode simplificar ainda mais a equação de movimento acima.

Em primeiro lugar, definimos a seguinte função do operador d'Alembertiano

$$\mu_2^2(\square) = -\frac{4\sigma}{F_2(\square)}. \quad (6.13)$$

Ao substituirmos esta equação em (6.11), chegamos a

$$\left(\square + \mu_2^2(\square)\right) \left[ \frac{1}{\mu_2^2(\square)} \left( -\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa(D-1)} \eta_{\mu\nu} R^{(\text{lin})} \right) \right] = \frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right).$$

Podemos ainda reescrever a equação acima como

$$\left(\square + \mu_2^2(\square)\right) \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (6.14)$$

onde definimos

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_2^2(\square)} \left( -\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa(D-1)} \eta_{\mu\nu} R^{(\text{lin})} \right). \quad (6.15)$$

Por outro lado, tomando o traço da equação (6.11), temos que

$$\left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \left[ -\frac{1}{2} \square h + \frac{D}{2\kappa(D-1)} R^{(\text{lin})} \right] = -\frac{\kappa}{4(D-1)} T, \quad (6.16)$$

e tomando a divergência de (6.12) temos que

$$\partial^\mu \Gamma_\mu = \left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \partial^\mu \partial^\nu \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \left( F_1(\square) + \frac{1}{2} F_2(\square) \right) \square R^{(\text{lin})} = 0. \quad (6.17)$$

Combinando as duas últimas equações, resulta-se que

$$R^{(\text{lin})} = \frac{\kappa^2}{2\sigma(D-2)} T - \frac{1}{\mu_0^2(\square)} \square R^{(\text{lin})}, \quad (6.18)$$

onde definimos

$$\mu_0^2(\square) = \frac{4\sigma(D-2)}{4(D-1)F_1(\square) + DF_2(\square)}. \quad (6.19)$$

Utilizando (6.18), junto com (6.14), mostra-se que

$$\square \left( h_{\mu\nu} - \psi_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{\kappa(D-1)\mu_0^2(\square)} R^{(\text{lin})} \right) = -\frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{D-1}{(D-1)(D-2)} \eta_{\mu\nu} T \right). \quad (6.20)$$

Definindo

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \psi_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa(D-1)\mu_0^2(\square)}\eta_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}, \quad (6.21)$$

podemos escrever a equação (6.20) na forma

$$\square H_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\sigma} \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right). \quad (6.22)$$

Por último, definindo

$$\phi = \frac{1}{\kappa(D-1)\mu_0^2(\square)} R^{(\text{lin})} \quad (6.23)$$

e utilizando esta definição em (6.18), obtemos que

$$\left( \square + \mu_0^2(\square) \right) \phi = \frac{\kappa}{2\sigma(D-1)(D-2)} T. \quad (6.24)$$

Relembrando as equações (6.15), (6.21) e (6.23), podemos expressar os desvios da métrica de Minkowski  $h_{\mu\nu}$  na seguinte forma:

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\phi. \quad (6.25)$$

Portanto, a solução geral da equação linearizada de campo (6.11) no calibre generalizado de Teyssandier se desacopla e se torna igual a soma das soluções de (6.14), (6.22) e (6.24). Além do mais, a condição de calibre (6.12) pode ser escrita em termos de condições nos campos independentes  $H_{\mu\nu}$  and  $\psi_{\mu\nu}$ . Após algumas manipulações algébricas, explicitadas no apêndice D, podemos deduzir as seguintes condições de calibre

$$\partial^\mu \gamma_{\mu\nu}^{(H)} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = \square \psi, \quad (6.26)$$

onde definimos  $\gamma_{\mu\nu}^{(H)} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}H$  e  $\psi = \eta^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ .

Em resumo, a solução geral da equação de campo (6.11) satisfazendo a condição de calibre (6.12) pode ser escrita como

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\phi, \quad (6.27)$$

onde  $H_{\mu\nu}$ ,  $\psi_{\mu\nu}$  e  $\phi$  satisfazem

$$\square H_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\sigma} \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right), \quad \text{com} \quad \partial^\mu \gamma_{\mu\nu}^{(H)} = 0, \quad (6.28a)$$

$$\left(\square + \mu_2^2(\square)\right)\psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\sigma}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}T\right), \quad \text{com } \partial_\mu\partial_\nu\psi^{\mu\nu} = \square\psi, \quad (6.28b)$$

e

$$\left(\square + \mu_0^2(\square)\right)\phi = \frac{\kappa}{2\sigma(D-1)(D-2)}T. \quad (6.28c)$$

O conjunto de equações acima é análogo ao conjunto obtido pelo calibre de Teysandier usual no contexto da gravitação de quarta ordem: a solução geral se desacopla em termos de campos tensoriais e escalares satisfazendo equações diferenciais independentes, com condições de calibre próprias. Em particular, o campo  $H_{\mu\nu}$  satisfaz a mesma equação diferencial da gravidade linearizada da Relatividade Geral no gauge de de Donder.

Em seguida, faremos uma análise separada para os casos onde o fator de forma é dado por uma função polinomial do d'alambertiano e para o caso não-local conhecido como gravidade BGKM.

## 6.4 Fatores de forma polinomiais

Nesta seção consideraremos que os fatores de forma são dados por funções polinomiais do operador d'Alambertiano, ou seja

$$F_1(\square) = \sum_{n=0}^p \alpha_n (-\square)^n \quad \text{e} \quad F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n. \quad (6.29)$$

Para tais fatores de forma, decomposições adicionais das equações de campo de  $\psi_{\mu\nu}(x)$  e  $\phi(x)$  facilitam suas resoluções. É esta decomposição que realizaremos na próxima seção, para, em seguida, resolvermos as equações de campo linearizadas para fontes estáticas genéricas e, em especial, para uma fonte pontual parada.

### 6.4.1 Decomposições dos campos $\psi_{\mu\nu}$ e $\phi$

Antes de realizarmos as decomposições dos campos  $\psi_{\mu\nu}$  e  $\phi$ , demonstraremos um resultado preliminar que facilitará nossa tarefa.

Notemos que o inverso dos operadores diferenciais  $(\square + \mu_2^2(\square))$  e  $(\square + \mu_0^2(\square))$  podem ser escritos como

$$\left(\square + \mu_2^2(\square)\right)^{-1} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square P_2(\square)} \quad (6.30)$$

e

$$(\square + \mu_0^2(\square))^{-1} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square P_0(\square)}, \quad (6.31)$$

onde

$$P_2(\square) = 1 - \frac{1}{4\sigma} F_2(\square) \square \quad (6.32)$$

e

$$P_0(\square) = 1 + \frac{4(D-1)F_1(\square)\square + DF_2(\square)\square}{4\sigma(D-2)}. \quad (6.33)$$

Denotaremos por

$$\{-m_{(2),1}^2, -m_{(2),2}^2, \dots, -m_{(2),q+1}^2\} \quad \text{e} \quad \{-m_{(0),1}^2, -m_{(0),2}^2, \dots, -m_{(0),N+1}^2\} \quad (6.34)$$

o conjunto de raízes, respectivamente, das funções polinomiais  $P_2(\square)$  e  $P_0(\square)$ , onde  $\max\{p, q\} = N$ . Em nossa análise, nos restringiremos aos casos em que estes polinômios possuem somente raízes simples.

Pelo teorema fundamental da álgebra, podemos reescrever os polinômios  $P_2(\square)$  e  $P_0(\square)$  como

$$P_2(\square) = \prod_{i=1}^{q+1} \frac{(\square + m_{(2),i}^2)}{m_{(2),i}} \quad (6.35)$$

e

$$P_0(\square) = \prod_{i=1}^{N+1} \frac{(\square + m_{(0),i}^2)}{m_{(0),i}}. \quad (6.36)$$

Substituindo estas expressões em (6.30) e (6.31) e realizando a decomposição em frações parciais, temos que

$$(\square + \mu_2^2(\square))^{-1} = \sum_{n=1}^{q+1} \frac{\xi_{(2),n}}{(\square + m_{(2),n}^2)} \quad (6.37)$$

e

$$(\square + \mu_0^2(\square))^{-1} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\xi_{(0),n}}{(\square + m_{(0),n}^2)}, \quad (6.38)$$

onde, por conveniência futura, definimos

$$\xi_{(2),n} = \prod_{m=1, m \neq n}^{q+1} \left( \frac{m_{(2),m}^2}{m_{(2),m}^2 - m_{(2),n}^2} \right) \quad \text{e} \quad \xi_{(0),n} = \prod_{m=1, m \neq n}^{N+1} \left( \frac{m_{(0),m}^2}{m_{(0),m}^2 - m_{(0),n}^2} \right). \quad (6.39)$$

Assim sendo, podemos escrever

$$(\square + \mu_2^2(\square)) = \frac{\prod_{i=1}^{q+1} (\square + m_{(2),i})}{\sum_{j=1}^{q+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{q+1} \xi_{(2),j}(\square + m_{(2),i})} \quad (6.40)$$

e

$$(\square + \mu_0^2(\square)) = \frac{\prod_{i=1}^{N+1} (\square + m_{(0),i})}{\sum_{j=1}^{N+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N+1} \xi_{(0),j}(\square + m_{(0),i})}. \quad (6.41)$$

De posse destes resultados podemos demonstrar a seguinte decomposição com facilidade.

Sejam  $\psi_{\mu\nu}(x)$  e  $\phi(x)$  soluções das equações de campo (6.28b) e (6.28c), onde  $F_1(\square)$  e  $F_2(\square)$  são funções polinomiais (tais que  $P_0(\square)$  e  $P_2(\square)$  admitem somente raízes simples). Podemos então decompor  $\psi_{\mu\nu}(x)$  e  $\phi(x)$  como

$$\psi_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n} \psi_{\mu\nu}^{(n)} \quad (6.42)$$

e

$$\phi = \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n} \phi^{(n)}, \quad (6.43)$$

tais que

$$(\square + m_{(2),n}) \psi_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (6.44)$$

e

$$(\square + m_{(0),n}) \phi^{(n)} = \frac{\kappa}{2\sigma(D-1)(D-2)} T. \quad (6.45)$$

Verifiquemos este resultado para o campo  $\psi_{\mu\nu}$ . Substituindo (6.41) e (6.43) em (6.28c), temos que

$$(\square + \mu_2^2(\square)) \psi_{\mu\nu} = \frac{\sum_{n=1}^{q+1} \prod_{i=1}^{q+1} \xi_{(2),n}(\square + m_{(2),i}) \psi_{\mu\nu}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{q+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{q+1} \xi_{(2),n}(\square + m_{(2),i})}. \quad (6.46)$$

Substituindo então a equação de movimento dos campos  $\psi_{\mu\nu}^{(n)}$  na equação acima temos que

$$\begin{aligned} (\square + \mu_2^2(\square)) \psi_{\mu\nu} &= \frac{\sum_{n=1}^{q+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{q+1} \xi_{(2),n}(\square + m_{(2),i})}{\sum_{n=1}^{q+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{q+1} \xi_{(2),n}(\square + m_{(2),i})} \frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right) \\ &= \frac{\kappa}{2\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right), \end{aligned} \quad (6.47)$$

exatamente como esperado. A verificação para o campo  $\phi$  se dá de maneira similar.

Em suma, para fatores de forma dados por funções polinomiais, podemos simplificar ainda mais a equação de movimento: ao invés de resolver uma equação onde o operador diferencial é dado por  $(\square + \mu_2^2(\square))$  (ou, analogamente,  $(\square + \mu_0^2(\square))$ ), podemos resolver equações onde os operadores diferenciais são dados por  $(\square + m_{(2),n})$  (ou  $(\square + m_{(0),n})$ ): basta resolver as equações (6.44) e substituir em (6.43) (ou resolver (6.45) e substituir em (6.42)).

## 6.4.2 Soluções das equações de campo para fontes estáticas

Ao estudarmos soluções estáticas, as equações de campo se reduzem a

$$-\nabla^2 H_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}^H, \quad (6.48)$$

$$(-\nabla^2 + m_{(2),n})\psi_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}^\psi \quad (6.49)$$

e

$$(-\nabla^2 + m_{(0),n})\phi^{(n)} = \frac{\kappa}{2} T^\phi, \quad (6.50)$$

onde definimos

$$T_{\mu\nu}^H = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right), \quad (6.51)$$

$$T_{\mu\nu}^\psi = \frac{1}{\sigma} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (6.52)$$

$$T^\phi = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(D-1)(D-2)} T. \quad (6.53)$$

As equações acima podem ser resolvidas pela técnica das funções de Green. Neste caso, obtemos os seguintes resultados

$$H_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \int d^{D-1}\mathbf{y} \left( \frac{1}{-\nabla^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) T_{\mu\nu}^H(\mathbf{y}), \quad (6.54)$$

$$\psi_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \int d^{D-1}\mathbf{y} \left( \frac{1}{-\nabla^2 + m_{(2),n}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) T_{\mu\nu}^\psi(\mathbf{y}), \quad (6.55)$$

$$\phi^{(n)}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \int d^{D-1}\mathbf{y} \left( \frac{1}{-\nabla^2 + m_{(0),n}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) T^\phi(\mathbf{y}). \quad (6.56)$$



Utilizando a representação de Fourier da delta de Dirac, a saber,

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (6.57)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\nabla^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} \\ &= \begin{cases} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{D-3}}, & \text{se } D \geq 4, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{r_0}\right), & \text{se } D = 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde  $r_0$  denota um regulador infravermelho, e, para  $D \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\nabla^2 + m_{(2),n}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_{(2),n}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{m_{(2),n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \end{aligned} \quad (6.59)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\nabla^2 + m_{(0),n}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_{(0),n}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{m_{(0),n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Segue que

$$H_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\kappa}{2} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \int d^{D-1}\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{D-3}} T_{\mu\nu}^H(\mathbf{y}) & \text{se } D \geq 4, \\ -\frac{\kappa}{2} \frac{1}{2\pi} \int d^{D-1}\mathbf{y} \ln\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{r_0}\right) T_{\mu\nu}^H(\mathbf{y}) & \text{se } D = 3, \end{cases} \quad (6.61)$$

e, para  $D \geq 3$ ,

$$\psi_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \frac{(m_{(2),n})^{\frac{D-3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1}\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) T_{\mu\nu}^\psi(\mathbf{y}), \quad (6.62)$$

$$\phi^{(n)}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \frac{(m_{(0),n})^{\frac{D-3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1}\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) T^\phi(\mathbf{y}). \quad (6.63)$$

Destá forma, lembrando que  $h_{\mu\nu}$  é dado por (6.27), onde  $\psi_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n} \psi_{\mu\nu}^{(n)}$  e  $\phi = \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n} \phi^{(n)}$ , temos que a solução das equações de campo para uma fonte estática genérica são dadas por, para  $D \geq 4$ ,

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = & \frac{\kappa}{2\sigma} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1}\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} \left( \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}) + \right. \right. \\
& \left. \left. - T_{\mu\nu}(\mathbf{y}) \right) + \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n} (m_{(2),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \left( T_{\mu\nu}(\mathbf{y}) - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}) \right) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n} (m_{(0),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}), \quad (6.64)
\end{aligned}$$

enquanto que, para  $D = 3$ ,

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = & \frac{\kappa}{4\pi\sigma} \int d^{D-1}\mathbf{y} \left( \ln \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{r_0} (T_{\mu\nu}(\mathbf{y}) - \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y})) + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n} K_0(m_{(2),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \left( T_{\mu\nu}(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}) \right) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n} K_0(m_{(0),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}) \right). \quad (6.65)
\end{aligned}$$

Na próxima seção analisaremos o caso onde a fonte do campo gravitacional é uma fonte esfericamente simétrica e, além disto, pontual e parada.

#### 6.4.2.1 Solução das equações para uma fonte massiva pontual

Vamos nos restringir ao caso de fontes esfericamente simétricas, a saber:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}. \quad (6.66)$$

Em primeiro lugar, determinaremos a solução das equações de campo para  $D > 4$ . Para estas dimensões, substituindo a equação acima em (6.64) podemos reescrever  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$

como

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = & \frac{\kappa}{2\sigma} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1}\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} \left( \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{D-3}{2}}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right) + \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n}(m_{(2),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \left( \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \frac{1}{D-1} \eta_{m\mu\nu} \right) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n}(m_{(0),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \eta_{\mu\nu} \right), \quad (6.67)
\end{aligned}$$

Além de ser esfericamente simétrica, considereremos uma fonte massiva, pontual e parada na origem, isto é,  $\rho(\mathbf{y}) = M\delta(\mathbf{y})$ . Por consequência, as soluções das equações de campo são

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(r) = & \frac{\kappa}{2\sigma} \frac{M}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-3}{2}}} \left( \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{r^{\frac{D-3}{2}}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \left( \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n}(m_{(2),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}r) \left( \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \frac{1}{D-1} \eta_{m\mu\nu} \right) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n}(m_{(0),n})^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}r) \eta_{\mu\nu} \right), \quad (6.68)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a notação  $r = |\mathbf{x}|$ . Podemos agora determinar o potencial não-relativístico, uma vez que  $V_D = \frac{\kappa}{2} h_{00}$  e  $\kappa^2 = 4\kappa_d$ . Assim sendo,

$$\begin{aligned}
V_D(r) = & - \frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \left( \frac{D-3}{D-2} \right) 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \frac{1}{r^{D-3}} + \right. \\
& - \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \sum_{n=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),n}^2} \left( \frac{m_{(2),n}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(2),n}r) + \\
& \left. + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{n=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),n}^2} \left( \frac{m_{(0),n}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{(0),n}r) \right\}, \quad (6.69)
\end{aligned}$$

onde substituímos as definições de  $\xi_{(2),n}$  e  $\xi_{(0),n}$ .

Conferimos, então, que, conforme o esperado, o potencial gravitacional obtido resolvendo as equações de campo utilizando o gauge generalizado de Teyssandier recuperam o resultado do potencial obtido no capítulo 4 para  $D \geq 4$ .

De forma análoga, para  $D = 3$  temos que o campo  $h_{\mu\nu}(r)$  é dado por

$$h_{\mu\nu}(r) = \frac{\kappa M}{4\pi\sigma} \left( \ln \frac{r}{r_0} (\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \eta_{\mu\nu}) + \sum_{n=1}^{q+1} \xi_{(2),n} K_0(m_{(2),n} r) \left( \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \xi_{(0),n} K_0(m_{(0),n} r) \eta_{\mu\nu} \right). \quad (6.70)$$

Por sua vez, o potencial não-relativístico é dado por

$$V_3(r) = \frac{\kappa_3 M}{4\sigma\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{m_{(2),j}^2}{m_{(2),j}^2 - m_{(2),i}^2} K_0(m_{(2),i} r) + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{m_{(0),j}^2}{m_{(0),j}^2 - m_{(0),i}^2} K_0(m_{(0),i} r) \right\}, \quad (6.71)$$

onde, mais uma vez, derivamos o mesmo resultado que o obtido no capítulo 4.

## 6.5 Um fator de forma não-local: a gravidade BGKM

Nesta seção aplicaremos o gauge generalizado de Teyssandier para obter a solução das equações de campo para uma fonte pontual de massa  $M$  para uma teoria com fator de forma não-local: a gravidade BGKM [7].

A gravidade BGKM é uma teoria simultaneamente livre de fantasmas ao nível de árvore e renormalizável [27]. A não-localidade desta teoria surge da existência de infinitas derivadas na equação de campo e pode ser entendida, heurísticamente, da seguinte forma [27]: para resolver as equações de campo em uma região em uma teoria de derivadas infinitas, nós temos que informar uma quantidade infinita de quantidades iniciais, o que equivale a conhecer a condição inicial não apenas em uma pequena região, mas em todo espaço, isto é, a função completa, incluindo informação não-local.

Resultados promissores foram apresentados para a gravidade BGKM, como a ausência de singularidade de buracos negros no regime linearizado [35] e a ausência de singularidades cosmológicas [7]. Contudo, quando considerada correções de 1-loop, a teoria deixa de ser livre de fantasmas [36].

Em nossas convenções, os fatores de forma para a gravidade BGKM são dados por

$$F_1(\square) = 2 \frac{e^{\frac{\square}{m^2}} - 1}{\square} \quad \text{e} \quad F_2(\square) = -4 \frac{e^{\frac{\square}{m^2}} - 1}{\square}, \quad (6.72)$$

onde o parâmetro  $m$  está associado a uma escala de não localidade  $L \sim m^{-1}$ . Desta forma, podemos reescrever a ação da seguinte forma,

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{2}{\kappa^2} \int d^D x \sqrt{|g|} \left( R - G_{\mu\nu} \frac{e^{\frac{\square}{m^2}} - 1}{\square} R^{\mu\nu} \right), \quad (6.73)$$

onde fixamos  $\sigma = 1$  e  $G_{\mu\nu}$  representa o tensor de Einstein. Por sua vez, as equações de movimento para os campos  $\psi_{\mu\nu}$  e  $\phi$  são dadas por, onde substituímos (6.72) em (6.28b) e (6.28c),

$$\frac{e^{\frac{\square}{m^2}}}{e^{\frac{\square}{m^2}} - 1} \square \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (6.74)$$

e

$$\frac{e^{\frac{\square}{m^2}}}{e^{\frac{\square}{m^2}} - 1} \square \phi = \frac{\kappa}{2(D-1)(D-2)} T. \quad (6.75)$$

Como estamos interessados em estudar soluções estáticas, as equações de movimento se reduzem a

$$-\nabla^2 H_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}^H, \quad (6.76)$$

$$\frac{e^{\frac{\nabla^2}{m^2}}}{e^{\frac{\nabla^2}{m^2}} - 1} (-\nabla^2) \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}^\psi, \quad (6.77)$$

e

$$\frac{e^{\frac{\nabla^2}{m^2}}}{e^{\frac{\nabla^2}{m^2}} - 1} (-\nabla^2) \phi = \frac{\kappa}{2} T^\phi, \quad (6.78)$$

onde  $T_{\mu\nu}^H$ ,  $T_{\mu\nu}^\psi$  e  $T^\phi$  são novamente dados por (6.51), (6.53) e (6.52).

Resolvendo as equações acima pela técnica das funções de Green, obtemos:

$$H_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{(D-1)}y \int d^{(D-1)}k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} T_{\mu\nu}^H(\mathbf{y}), \quad (6.79)$$

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{(D-1)}y \int d^{(D-1)}k \frac{e^{\frac{\mathbf{k}^2}{m^2}} - 1}{e^{\frac{\mathbf{k}^2}{m^2}}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} T_{\mu\nu}^\psi(\mathbf{y}), \quad (6.80)$$

e

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{(D-1)}y \int d^{(D-1)}k \frac{e^{\frac{k^2}{m^2}} - 1}{e^{\frac{k^2}{m^2}}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} T^\phi(\mathbf{y}). \quad (6.81)$$

Substituindo as equações acima em (6.27) e realizando a integral em  $\mathbf{k}$ , temos que a solução da equação de campo de  $h_{\mu\nu}(r)$  (onde utilizamos novamente a notação  $r = |\mathbf{x}|$ ) para uma fonte estática qualquer é dada por

$$h_{\mu\nu}(r) = -\kappa \frac{2^{\frac{D-7}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1} \mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{D-4}} \left[ \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) + \right. \\ \left. - \Gamma\left(\frac{D-3}{2}, \frac{m^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4}\right) \right] \left( T_{\mu\nu}(\mathbf{y}) - \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{y}) \right), \quad (6.82)$$

onde  $D \geq 3$  e  $\Gamma(x, y)$  denota a função gamma incompleta.

### 6.5.1 Fonte massiva pontual e potencial não-relativístico

Restringindo-nos ao caso de fontes esfericamente simétricas, a saber,

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}, \quad (6.83)$$

temos que a equação de campo de  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  pode ser escrita como

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\kappa \frac{2^{\frac{D-7}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int d^{D-1} \mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{D-3}} \left[ \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) + \right. \\ \left. - \Gamma\left(\frac{D-3}{2}, \frac{m^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4}\right) \right] \times \left( \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} \right), \quad (6.84)$$

Particularizando ainda mais o nosso estudo, vamos considerar uma fonte pontual parada na origem do nosso sistemas de coordenadas, ou seja,

$$\rho(\mathbf{x}) = M \delta(\mathbf{x}). \quad (6.85)$$

Por consequencia, a solução da equação de campo de  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  é dada por

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\kappa \frac{2^{\frac{D-7}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{M}{r^{D-3}} \left[ \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{D-3}{2}, \frac{m^2 r^2}{4}\right) \right] \times \left( \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} \right). \quad (6.86)$$

Uma vez que  $V_D = \frac{\kappa}{2}h_{00}$ , o potencial gravitacional  $D$ -dimensional da gravidade BGKM se escreve como

$$V_D(r) = -\kappa^2 \frac{2^{\frac{D-9}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{D-3}{D-2} \frac{M}{r^{D-3}} \left[ \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{D-3}{2}, \frac{m^2 r^2}{4}\right) \right], \quad (6.87)$$

onde, lembremos, este resultado é válido para  $D \geq 3$ . Além disto, notamos que este potencial concorda com resultados obtidos anteriormente por outros meios [37].

Para obter o comportamento na origem do potencial gravitacional, substituímos em (6.87) a seguinte expansão em série de potência da função gamma modificada:

$$\Gamma(a, z) = \Gamma(a) - z^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(a+k)k!}. \quad (6.88)$$

Obtemos, assim, que

$$V_D(r) = -\kappa^2 \frac{2^{\frac{D-9}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{D-3}{D-2} M \left(\frac{m}{2}\right)^{D-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-(\frac{mr}{2})^2]^k}{(\frac{D-3}{2} + (\frac{mr}{2})^2)k!}. \quad (6.89)$$

Tomando o limite  $r \rightarrow 0$ , temos que o potencial gravitacional na origem é dado por

$$V_D(0) = -\kappa^2 \frac{2^{\frac{D-7}{2}}}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{m}{2}\right)^{D-3} \frac{M}{D-2}, \quad (6.90)$$

isto é, um potencial regular independente da dimensão do espaço-tempo. Dado que a gravidade BGKM é super-renormalizável independentemente da dimensão [38], vemos que a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial finito na origem é verificada para esta teoria não-local.

## Conclusões e perspectivas futuras

Nesta tese intencionamos verificar a conjectura de que teorias de campos de ordem superior possuem potencial não-relativístico regular na origem ao estudarmos uma extensão da eletrodinâmica de Maxwell, a eletrodinâmica de Lee-Wick, e uma classe geral de teorias gravitacionais de ordem superior.

Ao estudarmos a eletrodinâmica de Lee-Wick  $D$ -dimensional, verificamos sob quais condições esta teoria obedeceria a conjectura em qualquer dimensão: a saber, que para  $D \geq 5$  estes modelos apresentem apenas teorias não-renormalizáveis. Como subproduto desta investigação, apresentamos uma prescrição simples para o cálculo do potencial  $D$ -dimensional de modelos eletromagnéticos a partir de um modelo correspondente escalar.

No que tange à classe geral de teorias de gravitação de ordem superior, restringimo-nos inicialmente - no capítulo 4 - a uma classe geral de teorias locais, cujos fatores de forma são funções polinomiais, e que possuem polos simples e reais. Deduzimos então que a condição necessária para (super)renormalizabilidade por contagem de potência implica na condição suficiente para o cancelamento de singularidades newtonianas, verificando, assim, a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico regular na origem para estas teorias. No apêndice B relaxamos a condição anterior e incluímos teorias que possuem polos complexos, obtendo o mesmo resultado que o anterior. Ademais, obtemos no capítulo 6 o potencial gravitacional para uma teoria não-local - a gravidade BGKM - e pudemos verificar a conjectura para este modelo. Esperamos que o resultado se generalize para uma teoria



não-local genérica.

Nosso outro objetivo no capítulo 6 foi apresentar uma nova condição de calibre que generaliza o assim chamado calibre de Teyssandier, o qual foi proposto originalmente para a teoria gravitacional de quarta ordem quadri-dimensional. Válida para a classe geral de teorias gravitacionais de ordem superior estudada nesta tese - possibilitando, inclusive, o estudo de modelos não-locais -, esta condição de calibre facilita a tarefa de determinar a solução das equações de campo de uma teoria gravitacional no regime linearizado. Em suma, esta condição desacopla as equações de campo em diferentes setores e condições de calibre, com um dos setores reproduzindo a dinâmica da Relatividade Geral.

De posse deste calibre generalizado de Teyssandier, obtemos a solução da equação de campo linearizada para uma fonte pontual parada, de massa  $M$ , tanto para teorias polinomiais genéricas quanto para o modelo não-local aludido anteriormente, a gravidade BGKM. Desta forma, por um lado, pudemos recobrar os resultados obtidos anteriormente acerca do potencial gravitacional de uma classe geral de modelos gravitacionais cujos fatores de forma são funções polinomiais, e, por outro lado, pudemos estender o estudo da conjectura para a gravidade BGKM. Futuramente, nosso grupo de pesquisa investigará a estrutura dos invariantes de Kretschmann de tais soluções, a ser publicada em [41].

Outras aplicações do calibre generalizado de Teyssandier incluem a discussão dos graus de liberdade de ondas gravitacionais<sup>1</sup>, a solução de distribuições de matéria estáticas e esfericamente simétricas que não sejam pontuais - e conseqüentemente a discussão da estrutura de singularidades para tais casos - e a determinação do campo gravitacional de uma corda cósmica reta.

Outras investigações possíveis acerca da conjectura inclui a sua extensão para uma teoria não-local genérica, cujo potencial já foi determinado na referência [42].

---

<sup>1</sup>Esta aplicação já foi realizada por Patric Hölscher na referência [39].

# Apêndice **A**

## Quem tem medo de fantasmas (de ordem superior)?

Assim como seu título, o conteúdo deste apêndice será baseado na referência [26]. Nosso objetivo é demonstrar, através de um sistema simples, os problemas associados a teorias de ordem superior, a saber, a presença de fantasmas e a instabilidade clássica.

O sistema considerado descreve um campo escalar de ordem superior através da lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi (\square + m_1^2) (\square + m_2^2) \phi - \lambda\phi^4, \quad (\text{A.1})$$

onde a dependência espaço-temporal dos campos está subentendida. Definindo

$$\psi_1 = \frac{(\square + m_2^2)\phi}{[2(m_2^2 - m_1^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\psi_2 = \frac{(\square + m_1^2)\phi}{[2(m_2^2 - m_1^2)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.3})$$

podemos reescrever (A.1) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\psi_1 (\square + m_1^2) \psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 (\square + m_2^2) \psi_2 - \frac{4\lambda}{(m_2^2 + m_1^2)^2}(\psi_1 - \psi_2)^4. \quad (\text{A.4})$$

Desta forma, decompomos a lagrangiana original de quarta ordem em uma lagrangiana composta por dois campos de segunda ordem interagindo por um acoplamento quártico. Contudo, o termo cinemático e o termo de massa para  $\psi_2$  tem sinais opostos daquele

dos campos usuais. Podemos ver seu significado ao determinarmos a hamiltoniana, isto é,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\psi_1^2 + (\nabla\psi_1)^2 + m_2^2\psi_2^2 - \psi_2^2 - (\nabla\psi_2)^2 - m_2^2\psi_2^2] + \frac{4\lambda}{(m_2^2 + m_1^2)^2}(\psi_1 - \psi_2)^2,$$

onde  $\pi_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial t}$  e  $\pi_2 = -\frac{\partial\psi_1}{\partial t}$ .

Vemos portanto que, classicamente ao menos, excitações do campo  $\psi_2$  tem energia negativa. Se  $\lambda \neq 0$  os campos podem trocar energia através do acoplamento quártico e apenas a energia total é conservada; se os campo  $\psi_1$  e  $\psi_2$  irão adquirir, respectivamente, irrestrita e enorme energia positiva e negativa dependerá das condições iniciais, isto é, tais teorias no geral são classicamente instáveis.

Um *campo de fantasmas* (*ghost field*) é definido como sendo um campo com energia cinética negativa [26]. Neste momento é bom destacar a importância de se distinguir os fantasmas *bons* dos fantasmas *ruins* em uma teoria quântica. Um bom fantasma não viola princípios físicos uma vez que não estão associados a estados fisicamente observáveis, ao contrário de fantasmas ruins. Como exemplos de bons fantasmas citamos a componente temporal do campo vetorial  $A_\mu$ , associada à eletrodinâmica quântica, e aos ghosts de Faddeev-Popov. De fato, ambos ghosts são necessários para manter a consistência da teoria<sup>1</sup>. Tendo dito isto, prosseguiremos a explorar a aparência de fantasmas no modelo de ordem superior aqui estudado.

No nível quântico, mesmo na ausência de interação podemos ter problemas. Para vermos isto, utilizemos os métodos usuais para determinarmos o propagador da teoria livre descrita por (A.1) no espaço de momentum, encontrando

$$\mathcal{D}(k) = \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_1^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right), \quad (\text{A.5})$$

o que é, também, a diferença entre os propagadores dos campos  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Estudemos o significado do sinal negativo do segundo termo. Podemos associar este termo como o propagador do campo  $\psi_2$  com massa  $m_2$  e expandir tal campo em operadores de criação e destruição, a saber,

$$\psi_2(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[ \hat{a}_2(k)e^{ikx} + \hat{a}_2^\dagger(k)e^{-ikx} \right]. \quad (\text{A.6})$$

---

<sup>1</sup>No primeiro caso, tais fantasmas são necessários para cancelar a componente longitudinal do campo vetorial. No segundo caso, nos referimos à consistência da formulação funcional de uma teoria de gauge.

Os operadores de criação e destruição desta expansão, uma vez que dão origem ao propagador acima descrito, obedecem relações de comutação com o sinal oposto ao caso usual,

$$\left[ \hat{a}_2(k), \hat{a}_2^\dagger(k') \right] = -2k^0 \delta^3(k - k'). \quad (\text{A.7})$$

Isto implica que o estado  $\int (d^3k/2k^0) f(k) \hat{a}_2^\dagger(k) |0\rangle$  contém uma partícula com norma negativa

$$- \int \frac{d^3k}{2k^0} f^*(k) f(k). \quad (\text{A.8})$$

Tais estados tornam o espaço de Hilbert em um espaço com métrica indefinida. A matriz  $S$  deve ser unitária para que haja conservação da probabilidade, isto é, deveria obedecer  $S^\dagger \eta S = \eta$  em um espaço com métrica indefinida, onde  $\eta$  pode assumir valores negativos. No entanto, a matriz  $S$  obedece a condição  $SS^\dagger = 1$ , uma vez que é a exponencial de um operador anti-hermitiano (i.e.,  $S = T e^{(-i \int H_{int} dt)}$ ). Portanto temos violação da unitariedade da teoria e vemos que a presença de fantasmas como o acima levam à perda da unitariedade.

Note que, se encontrarmos subespaços de norma positiva do espaço de Hilbert dos estados assintóticos de entrada e saída, denotados por  $\mathcal{H}_{in}^\dagger$  e  $\mathcal{H}_{out}^\dagger$ , tal que  $S : \mathcal{H}_{in}^\dagger \rightarrow \mathcal{H}_{out}^\dagger$ , então a matriz  $S$  restringida a este subespaço é unitária. Em outras palavras, a unitariedade pode não ser violada se os estados físicos encontrarem-se em um subespaço de norma positiva do espaço de Hilbert que é preservado pela interação. Desta forma, pode-se tentar formular teorias de ordem superior unitárias, conforme referenciado na introdução.

Em seguida, podemos nos perguntar: como determinar, em uma teoria qualquer, se estão presentes fantasmas ruins? Conforme determinado em [27], em uma expansão perturbativa ao nível de árvore basta determinar o sinal da parte imaginária do resíduo do propagador saturado com as correntes externas: se este for positivo não há fantasmas que violam a unitariedade, se for negativo, sim. É esta prescrição que será utilizada no estudo de unitariedade ao nível de árvore dos modelos estudados.

## Investigando a conjectura para teorias gravitacionais de ordem superior com polos complexos

Neste apêndice reinvestigaremos a conjectura de que modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis possuem potencial não-relativístico finito na origem, incluindo, desta vez, modelos que possuem estados massivos correspondentes a polos complexos. De acordo com a literatura [40], se incluirmos apenas fantasmas correspondentes a polos complexos, a teoria pode ser formulada como unitária no sentido de Lee-Wick, já que todos os fantasmas são instáveis.

No que tange ao conteúdo de partículas de tais teorias, pode ser demonstrado que cada partícula “física”<sup>1</sup> associada a um polo complexo corresponde a um fantasma cujo polo, no plano complexo, está localizado no ponto o qual é o complexo conjugado do ponto onde reside o polo da partícula física [30].

Iniciaremos o apêndice determinando o potencial não-relativístico para tais teorias. Consideremos novamente uma classe geral de teorias gravitacionais de ordem superior descritas pela ação (4.2), cujo propagador livre (no espaço de momenta) pode ser escrito

---

<sup>1</sup>Isto é, uma partícula que não seja um fantasma.

como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{\sigma k^2 Q_2(k^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{(D-2)} \frac{1}{\sigma k^2 Q_0(k^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} + \frac{2\lambda}{k^2} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(1)} + \\ &+ \left( \frac{4\lambda}{k^2} - \frac{(D-1)}{\sigma(D-2)k^2 Q_0(k^2)} \right) P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)} - \frac{\sqrt{D-1}}{\sigma(D-2)k^2 Q_0(k^2)} \left( P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-ws)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\{P^{(2)}, \dots, P^{(0-ws)}\}$  denota o conjunto de operadores de Barnes-Rivers e nós definimos

$$Q_2(k^2) = 1 + \frac{1}{4\sigma} k^2 F_2(-k^2), \quad (\text{B.2})$$

e

$$Q_0(k^2) = 1 - \frac{k^2}{\sigma(D-2)} \left( (D-1)F_1(-k^2) + \frac{D}{4}F_2(-k^2) \right). \quad (\text{B.3})$$

Desta vez, ao reescrevermos (B.2) e (B.3) utilizando o teorema fundamental da álgebra, incluiremos a possibilidade de raízes complexas. Consideraremos, mais uma vez, que os fatores de forma são funções polinomiais do operador d'Alembertiano, isto é

$$F_1(\square) = \sum_{n=0}^p \alpha_n (-\square)^n \quad \text{e} \quad F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n. \quad (\text{B.4})$$

Seja

$$\{m_{(2),1}^2, m_{(2),2}^2, \dots, m_{(2),\tilde{q}+1}^2\} \quad \text{e} \quad \{m_{(0),1}^2, m_{(0),2}^2, \dots, m_{(0),\tilde{N}+1}^2\}, \quad (\text{B.5})$$

o conjunto, respectivamente, de raízes reais das funções polinomiais  $Q_2(k^2)$  e  $Q_0(k^2)$ , enquanto

$$\{\eta_{(2),1}^2, \eta_{(2),1}^{*2}, \dots, \eta_{(2),r}^2, \eta_{(2),r}^{*2}\} \quad \text{e} \quad \{\eta_{(0),1}^2, \eta_{(0),1}^{*2}, \dots, \eta_{(0),s}^2, \eta_{(0),s}^{*2}\}, \quad (\text{B.6})$$

são, respectivamente, o conjunto de raízes complexas dos polinômios  $Q_2(k^2)$  e  $Q_0(k^2)$ . Assim sendo, como um polinômio de grau  $n$  tem  $n$  raízes, temos os seguintes vínculos

$$q = \tilde{q} + 2r \quad \text{e} \quad \max\{p, q\} = \tilde{N} + 2s \equiv N. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando-se do teorema fundamental da álgebra e realizando a decomposição em frações parciais, podemos reescrever o propagador como

$$\begin{aligned}
P_{00,00}(k)|_{k_0=0} &= -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{D-3}{D-2} \right) \frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{\mu_{(2),j}^2}{\mu_{(2),j}^2 - \mu_{(2),i}^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu_{(2),i}^2} + \\
&+ \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{\mu_{(0),j}^2}{\mu_{(0),j}^2 - \mu_{(0),i}^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu_{(0),i}^2}, \tag{B.8}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\mu_{(2),i} = \begin{cases} m_{(2),i} & , i = 1, \dots, \tilde{q} + 1, \\ \eta_{(2),i} & , i = \tilde{q} + 2, \dots, \tilde{q} + r + 1, \\ \eta_{(2),i}^* & , i = \tilde{q} + r + 2, \dots, \tilde{q} + 2r + 1, \end{cases} \tag{B.9}$$

e

$$\mu_{(0),i} = \begin{cases} m_{(0),i} & , i = 1, \dots, \tilde{N} + 1, \\ \eta_{(0),i} & , i = \tilde{N} + 2, \dots, \tilde{N} + s + 1, \\ \eta_{(0),i}^* & , i = \tilde{N} + s + 2, \dots, \tilde{N} + 2s + 1. \end{cases} \tag{B.10}$$

Ao seguirmos a prescrição para o cálculo do potencial não-relativístico para modelos gravitacionais enunciada no capítulo 2, encontramos que o potencial gravitacional é dado por (para  $D \geq 4$ )

$$\begin{aligned}
V_D(r) &= -\frac{\kappa^2 M}{4\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \left( \frac{D-3}{D-2} \right) 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma \left( \frac{D-3}{2} \right) \frac{1}{r^{D-3}} + \right. \\
&- \left( \frac{D-2}{D-1} \right) \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{\mu_{(2),j}^2}{\mu_{(2),j}^2 - \mu_{(2),i}^2} \left( \frac{\mu_{(2),i}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(\mu_{(2),i}r) + \\
&+ \left. \frac{1}{(D-1)(D-2)} \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{\mu_{(0),j}^2}{\mu_{(0),j}^2 - \mu_{(0),i}^2} \left( \frac{\mu_{(0),i}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(\mu_{(0),i}r) \right\}, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

enquanto que, para  $D = 3$ ,

$$V_3(r) = \frac{\kappa^2 M}{8\sigma(2\pi)} \left\{ \sum_{i=1}^{q+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \frac{\mu_{(2),j}^2}{\mu_{(2),j}^2 - \mu_{(2),i}^2} K_0(m_{(2),i} r) + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{N+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{\mu_{(0),j}^2}{\mu_{(0),j}^2 - \mu_{(0),i}^2} K_0(m_{(0),i} r) \right\}. \quad (\text{B.12})$$

Conforme esperado, o potencial gravitacional é uma quantidade real, uma vez que os polos complexos surgem em pares, um complexo conjugado ao outro. Além disto, verifica-se diretamente que as condições suficientes para o cancelamento da singularidade newtoniana não são alteradas pela presença de polos complexos, isto é

- $2q + 4 - D \geq 0$  implica cancelamento da singularidade newtoniana para  $D$  par;
- $2q + 3 - D \geq 0$  implica cancelamento da singularidade newtoniana para  $D$  ímpar.

Uma vez que as condições necessárias para a (super)renormalizabilidade por contagem de potência também não são alteradas, i.e.

- $2q + 4 - D = 0 \sim$  implica renormalizabilidade por contagem de potência;
- $2q + 4 - D \geq 4\lambda \sim$  implica superrenormalizável por contagem de potência,

podemos mais uma vez concluir que a condição necessária para a (super)renormalizabilidade implica na condição suficiente para o cancelamento da singularidade newtoniana, verificando, assim, a conjectura de que modelos renormalizáveis de ordem superior possuem potencial não-relativístico finito na origem, mesmo que tais modelos possuam polos complexos.



# Apêndice **C**

## Uma prescrição simples para o cálculo do propagador para teorias gravitacionais de ordem superior

Para se determinar o propagador livre para teorias gravitacionais de ordem superior, realizamos o seguinte procedimento.

- A métrica  $g_{\mu\nu}$  é decomposta como

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \quad (\text{C.1})$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e  $h_{\mu\nu}$  é o campo quantizado que representa pequenas flutuações em relação à primeira. Ao substituir esta decomposição na lagrangiana original, nós a linearizamos. Esta lagrangiana será denotada  $\mathcal{L}_g$ .

- Adicionamos a  $\mathcal{L}_g$  uma lagrangiana apropriada  $\mathcal{L}_{gf}$  que fixará o gauge.
- Reescrevemos a parte livre da lagrangiana resultante  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gf}$  em sua forma bilinear

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.2})$$

- Invertemos o operador  $\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ .

Tabela C.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers.

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

A última etapa é facilitada pelo uso dos operadores de Barnes-Rivers [31]. Os operadores de Barnes-Rivers  $D$ -dimensionais no espaço dos momentos são dados por <sup>1</sup>

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \theta_{\mu\kappa} \theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\kappa} \right) - \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda},$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \theta_{\mu\kappa} \omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} \omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda} \omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa} \omega_{\mu\lambda} \right),$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu} \omega_{\kappa\lambda},$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \theta_{\mu\nu} \omega_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \omega_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda},$$

onde  $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$  e  $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu \tilde{k}_\nu}{k^2}$  são, respectivamente, os operadores de projeção vetorial transversal e longitudinal usuais, que satisfazem as relações

$$\theta_{\mu\alpha} \theta_\nu^\alpha = \theta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\alpha} \omega_\nu^\alpha = \omega_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \theta_{\nu\alpha} \omega_\nu^\alpha = 0. \quad (\text{C.3})$$

A tabela multiplicativa para esses operadores é exibida na Tabela C.1.

É importante frisar que a tarefa de calcular o operador  $\mathcal{O}$  é enormemente facilitada se utilizarmos as seguintes identidades

$$\left[ P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)} \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa}),$$

---

<sup>1</sup>A construção dos operadores de Barnes-Rivers e o porquê de termos proporcionais a estes operadores no propagador corresponder à existência de uma partícula com determinado spin (com exceção de  $P^{(0-sw)}$  e  $P^{(0-ws)}$ ) pode ser encontrada em [27].

$$\begin{aligned}
& \left[ 2P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \eta_{\nu\mu}\eta_{\kappa\lambda}, \\
& [2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\kappa}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa}k_\mu k_\lambda), \\
& \left[ 2P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\nu k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda}k_\mu k_\nu), \\
& P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \frac{1}{k^4}(k_\mu + k_\nu + k_\kappa + k_\lambda).
\end{aligned}$$

Se escrevermos agora o operador  $\mathcal{O}$  na forma genérica

$$\mathcal{O} = x_1 P^{(1)} + x_2 P^{(2)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)} \quad (\text{C.4})$$

e levarmos em conta que  $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$ , onde  $\mathcal{O}^{-1}$  é o propagador, obtemos prontamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} = & \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} [x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} + \\
& - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)}].
\end{aligned}$$

## Apêndice **D**

### Condição de calibre para os campos desacoplados $H_{\mu\nu}$ e $\psi_{\mu\nu}$

Neste apêndice nós demonstraremos que a condição de calibre  $\Gamma_\nu = 0$  implica condições de calibre independentes para os campos desacoplados  $H_{\mu\nu}$  e  $\psi_{\mu\nu}$ , a saber  $\partial^\mu \gamma_{\mu\nu}^{(H)} = 0$  e  $\partial_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = \square \psi$ .

No intuito de provar a primeira condição, vamos reescrever  $\Gamma_\nu = 0$  como  $\partial^\mu B_{\mu\nu} = 0$ , onde, por (6.6), nós temos

$$B_{\mu\nu} = \left( \sigma - \frac{1}{4} F_2(\square) \square \right) \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \left( F_1(\square) + \frac{1}{2} F_2(\square) \right) \eta_{\mu\nu} R^{(\text{lin})}. \quad (\text{D.1})$$

Nós iremos agora reescrever o primeiro termo na equação acima em termo dos campos desacoplados. Já que por definição  $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ , utilizando (6.25) nós podemos reescrever  $\gamma_{\mu\nu}$  como

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{(H)} + \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi + \eta_{\mu\nu} \left( \frac{D-2}{2} \right) \phi, \quad (\text{D.2})$$

onde  $\gamma_{\mu\nu}^{(H)} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} H$ . Substituindo a equação acima em (D.1) e levando em consideração a definição do parâmetro  $\mu_2^2(\square)$  (isto é, a equação (6.13)), nós temos que

$$B_{\mu\nu} = \frac{\sigma}{\mu_2^2(\square)} \left[ (\mu_2^2(\square) + \square) \left( \gamma_{\mu\nu}^{(H)} + \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi + \eta_{\mu\nu} \left( \frac{D-2}{2} \right) \phi \right) \right] + \frac{1}{2\kappa} \left[ F_1(\square) + \frac{1}{2} F_2(\square) \right] \eta_{\mu\nu} R^{(\text{lin})}. \quad (\text{D.3})$$

Assim sendo, utilizando as equações de movimento dos campos desacoplados, isto é, as equações (6.14), (6.22) e (6.24), nós temos

$$B_{\mu\nu} = \sigma\gamma_{\mu\nu}^{(H)} + \frac{\sigma}{\mu_2^2(\square)} (\mu_2^2(\square) - \mu_0^2(\square)) \left(\frac{D-2}{2}\right) \eta_{\mu\nu}\phi + \\ - \frac{1}{2\kappa} \left[ F_1(\square) + \frac{1}{2}F_2(\square) \right] \eta_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}. \quad (\text{D.4})$$

Por último, pela definição do campo  $\phi$ , isto é, a equação (6.23), e pela definição dos parâmetros  $\mu_0^2(\square)$  and  $\mu_2^2(\square)$ , nós podemos deduzir que

$$B_{\mu\nu} = \sigma\gamma_{\mu\nu}^{(H)}. \quad (\text{D.5})$$

Portanto, a condição de calibre  $\Gamma_\nu = \partial^\mu B_{\mu\nu} = 0$  implica  $\partial^\mu \gamma_{\mu\nu}^{(H)} = 0$ .

A condição de calibre restante pode ser demonstrada com facilidade. Uma vez que o parâmetro  $\gamma_{\mu\nu}$  pode ser escrito em termos da versão linearizada do escalar de Ricci por

$$\partial^\mu \partial^\nu \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\square h - \frac{1}{k}R^{(\text{lin})}, \quad (\text{D.6})$$

nós temos que, utilizando (6.23), (6.25) e (D.2),

$$\partial_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = \square \psi. \quad (\text{D.7})$$

# Apêndice E

## Tabela de integrais

As integrais relacionadas ao potencial não-relativístico dos modelos estudados nesta tese podem ser escritas como

$$I(r) = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(|\mathbf{k}|). \quad (\text{E.1})$$

Iniciaremos a resolução desta integral por reduzi-la a uma integral unidimensional. Como esta integral é independente de quais direções são escolhidas para os eixos cartesianos de  $\mathbf{k}$ , podemos, para um valor fixo de  $\mathbf{r}$ , escolher a direção de  $\mathbf{k}_1$  ao longo de  $\mathbf{r}$ . Escrevendo o elemento de volume infinitesimal em coordenadas esféricas em  $D - 1$  dimensões ( $k, \theta_1, \dots, \theta_{D-2}$ ), onde  $k$  denota  $|\mathbf{k}|$  e  $\theta_1$  é o ângulo entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}$ , temos

$$d^{D-1}\mathbf{k} = k^{D-2} \prod_{i=1}^{D-2} \sin^{D-2-i}\theta_i d\theta_i \quad (\text{E.2})$$

Da equação (E.1) concluímos então

$$I(r) = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dk k^{D-2} f(k) \int_0^\pi d\theta_1 e^{ikx \cos \theta_1} S_{D-3}, \quad (\text{E.3})$$

onde  $S_{D-3}$  é a área da superfície de uma  $D - 3$ -esfera, isto é,

$$S_{D-3} = \frac{2\pi^{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma(\frac{D-2}{2})}. \quad (\text{E.4})$$

Agora, tendo em mente que [25]

$$\int_0^\pi dk e^{i\beta \cos k} \sin^{2\nu} k = \sqrt{\pi} \left(\frac{2\nu}{\beta}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(\beta), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (\text{E.5})$$

nós chegamos à conclusão

$$I(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} r^{\frac{D-3}{2}}} \int_0^\infty dk k^{\frac{D-1}{2}} f(k) J_{\frac{D-3}{2}}(kr), \quad (\text{E.6})$$

onde  $D > 2$ . Nesta tese será considerado os casos onde  $f(k) = \frac{1}{k^2}$  ou  $f(k) = \frac{1}{k^2+m^2}$ . Consultando [25] ou resolvendo em um software de computação algébrica temos que

$$\int_0^\infty dk k^{\frac{D-5}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(kr) = 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right), \quad (D = 4, 5), \quad (\text{E.7})$$

$$\int_0^\infty dk \frac{k^{\frac{D-1}{2}}}{k^2 + m^2} J_{\frac{D-3}{2}}(kr) = m^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr), \quad (D = 3, 4, 5), \quad (\text{E.8})$$

de forma que

$$\frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right), \quad D > 4, \quad (\text{E.9})$$

e

$$\frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr), \quad D > 3. \quad (\text{E.10})$$

De (E.7) para (E.9) um procedimento de regularização foi utilizado. Como (E.7) diverge para  $D > 5$ , realizamos o procedimento de regularização dimensional, isto é, realizamos uma continuação analítica da função definida em  $4 < D < 5$  para obter sua expressão para dimensões  $D > 5$ , o que é permitido, uma vez que esta função é analítica neste domínio. Realizamos o procedimento análogo de (E.8) para (E.10). Tal procedimento foi inspirado na referência [22].

## Referências Bibliográficas

- [1] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, 1st ed. (Cambridge Univ. Press, Cambridge) (2007).
- [2] R. Feynman, *Acta Physical Polonica* **24**, 697 (1963).
- [3] J.F. Donoghue, *Phys. Rev. D* **50** 3874 (1994). doi:10.1103/PhysRevD.50.3874
- [4] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977). doi: 10.1103/PhysRevD.16.953
- [5] L. Modesto, *Nucl. Phys. B* **909**, 584 (2016). doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.06.004
- [6] L. Modesto e L. Rachwal, *Int. J. Mod. Phys. D* **26**, (2017). doi: 10.1142/S0218271817300208
- [7] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto e A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.*, **108** 0311017 (2012). doi:10.1103/PhysRevLett.108.031101
- [8] S. Talaganis e A. Mazumdar, *Class. Quantum Gravity.*, **33** 145005 (2016). doi: 10.1088/0264-9381/33/14/145005
- [9] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, e R. Turcati, *Int. J. Mod. Phys. D* **22**, 1342015 (2013). doi: 10.1142/S0218271813420157
- [10] **A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito e J. de Almeida**, *Phys. Rev. D* **95**, 084007 (2017). doi: 10.1103/PhysRevD.95.084007
- [11] **A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, J. de Almeida e W. Herdy**, *Mod. Phys. Lett. A* **32**, 1750048 (2017). doi:10.1142/S0217732317500481



- [12] B.L. Giacchini, *Phys.Lett. B*, **766** 206 (2017). doi:10.1016/j.physletb.2017.01.019
- [13] A. Accioly, J. Helayel-Neto, F.E. Barone e W. Herdy, *Class. Quantum Gravity* **32**, (2015). doi:10.1088/0264-9381/32/17/1750
- [14] I. Oda, *J. High Energy Phys.*, **05** 064 (2009). doi:10.1088/1126-6708/2009/05/064
- [15] K. Muneyuki e N. Ohta, *Phys. Rev. D*, **85** 101501 (2012). doi:10.1103/PhysRevD.85.101501
- [16] P. Teyssandier, *Class. Quantum Gravity.*, **6** 219 (1989). doi:10.1088/0264-9381/6/2/016
- [17] D.J. Kapner et al., *Phys. Rev. Lett.*, **98** 021101 (2007). doi:10.1103/PhysRevLett.98.021101
- [18] A. Accioly, J. Helayel-Neto, F.E. Barone e P. Gaete, *Phys. Rev. D* **90**, 105029 (2014). doi:10.1088/0264-9381/32/3/035021
- [19] R. Percacci, *An Introduction to Covariant Quantum Gravity and Asymptotic Safety*, 1st ed. (World Scientific Pub Co. Pte. Ltd., Singapore) (2017).
- [20] **A. Accioly, J. Helayel-Neto, G. Correia, G. Brito, J. de Almeida and W. Herdy**, *Phys. Rev. D*, **93** 105042 (2016). doi:10.1103/PhysRevD.93.105042
- [21] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton, NJ) (2010).
- [22] H. Zhang, K. Feng, S. Qiu, A. Zhao, X. Li, *Chin.Phys.*, **C34** 1576 (2010). doi: 10.1088/1674-1137/34/10/005
- [23] A. Accioly, S. Ragusa, H. Mukai e E. de Rey Neto *International Journal of Theoretical Physics* **39**, 1599 (2000). doi:10.1023/A:1003632311419
- [24] Disponível na internet via WWW. URL: <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/BesselK/06/ShowAll.html>. 09/12/2017.
- [25] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed. (Academic, New York) (1994).

- [26] S. Hawking, *Physica Scripta* T15, 115 (1987). doi:10.1088/0031-8949/1987/T15/020
- [27] L. Buoninfante, arXiv:1610.08744.
- [28] A. Starobinsky *Physics Letters B.* **91**, 99 (1980). doi:10.1016/0370-2693(80)90670-X
- [29] E. A. Bergshoeff, O. Hohm e P.K. Townsend, *Phys. Rev. Lett*, **102** 201301 (2009). doi: 10.1103/PhysRevLett.102.201301
- [30] **A. Accioly, J. de Almeida, G. P. Brito e W. Herdy**, *Phys. Rev. D*, **98** 064029 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.064029
- [31] R.J. Rivers, *Nuovo Cimento*, **34** 3876 (1964). doi:10.1007/BF02734585
- [32] R. Bufalo, B. M. Pimentel, e D. E. Sot, *Int. J. Mod. Phys., A* **32** 1750165 (2017). doi:https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X17501652
- [33] M. Duetsch, F. Krahe e G. Scharf, *Nuovo Cimento A*, **106** 277 (1993).
- [34] A. Zee, *Einstein gravity in a nutshell*, 1st ed. (Princeton University Press, Princeton) (2013).
- [35] L. Modesto, *Phys. Rev. D.*, **86** 044005 (2012). doi:10.1103/PhysRevD.86.044005
- [36] I. Shapiro, *Phys. Lett.*, **B744** 67-73 (2015). doi:10.1016/j.physletb.2015.03.037
- [37] V. P. Frolov, A. Zelnikov e T. de P. Netto, *JHEP.*, **1506** 107 (2015). doi:10.1007/JHEP06(2015)107
- [38] L. Modesto, *Astron. Rev.*, **8** 4 (2013). doi:10.1080/21672857.2013.11519717
- [39] Patric Hölscher, arXiv:1806.09336.
- [40] L. Modesto e I. Shapiro, *Phys. Lett. B*, **B745** 279-284 (2016). doi:10.1016/j.physletb.2016.02.021
- [41] **J. de Almeida, G.P. de Brito e F.A. Silveira**, **Generalized Teyssandier gauge condition for a general class of higher-derivative gravity, no prelo.**

- [42] J. Edholm, A. S. Koshelev e A. Mazumdar, *Phys. Rev. D*, **94** 104033 (2016).  
doi:10.1103/PhysRevD.94.104033