



# Combinatória enumerativa e diagramas de Feynman: algumas contribuições

Erick Ramon Castro Mora

Tese de Doutorado

**Orientadores:**

Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, RJ

2019





“COMBINATÓRIA ENUMERATIVA E DIAGRAMAS DE FEYNMAN:  
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES”

ERICK RAMON CASTRO MORA

Tese de Doutorado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os  
seguintes professores:

Itzhak Roditi – Presidente/Orientador/CBPF

José Francisco Gomes – IFT-UNESP

Rudnei de Oliveira Ramos - UERJ

Tobias Micklitz - CBPF

Roberto Silva Sarthour Junior - CBPF

Rio de Janeiro, 13 de setembro de 2019.





Erick Ramon Castro Mora

# Combinatória enumerativa e diagramas de Feynman: algumas contribuições

Tese de Doutorado

Trabalho apresentado no programa de pós-graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

**Orientadores:**

Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, RJ

2019



# RESUMO

Neste trabalho introduzimos várias ferramentas para a contagem de diagramas de Feynman conectados usados em diversas teorias físicas. A base da enumeração explora as propriedades combinatórias do teorema de Wick, obtendo recorrências que relacionam o número total de diagramas e o número total de diagramas conectados. As recorrências podem ser resolvidas numericamente, permitindo obter o número exato de diagramas conectados para grandes ordens de perturbação. Soluções exatas das recorrências também são possíveis, e quando são encontradas levam à expansão assintótica do número de diagramas com grande grau de precisão. Na teoria de muitos corpos, os diagramas de Feynman conectados com duas pernas externas são colocados em correspondência com mapas enraizados, objetos usados em topologia algébrica. A partir da literatura matemática, damos uma introdução concisa e acessível destes interessantes objetos. Por último, introduzimos um novo algoritmo para construir explicitamente os diagramas de Feynman do vácuo na teoria  $\phi^4$  com suas multiplicidades (ou fatores de simetria) extensível facilmente a qualquer teoria  $\phi^N$ , explorando novas inter-relações combinatórias inerentes ao processo de construção dos diagramas. **Palavras chave:** Diagramas de Feynman, mapas enraizados, combinatória enumerativa, teoria de grafos, análises assintótico, algoritmos.



# ABSTRACT

In this work, we introduce various tools for count Feynman connected diagrams used in some physical theories. The enumerative process exploit the combinatoric properties of the Wick theorem, getting recurrences relating the total number of Feynman diagrams with the number of connected Feynman diagrams. The recurrences can be solved using simple numerical methods, allowing to obtain the exact number of diagrams for big perturbation orders. Exact solutions also are possible, and when are founded they lead to asymptotic expansion of the number of diagrams with great accuracy. In the many body case, the Feynman connected diagrams with two external legs are put in correspondence with the rooted maps (objects in algebraic topology). From the mathematical literature we give a concise and accessible introduction of these interesting objects. At last, we introduce a new algorithm to explicitly build the Feynman vacuum graphs in  $\phi^4$  theory and their respective multiplicities (symmetry factors) extensible for any  $\phi^N$  theory, exploring new combinatorial interrelations inherent in the process of diagrams construction. **Keywords:**

Feynman diagrams, rooted maps, enumerative combinatorics, graph theory, asymptotic analysis, Algorithms.



*Dedico a mis padres, sobrevivientes en las cenizas de lo que alguna vez fue un País*



# Agradecimentos

Agradeço primeiro aos meus pais, afrontando a senectude em solidão, longe de filhos e netos. Espero algum dia corresponder o seu esforço abnegado.

Às minhas irmãs e sobrinhos, todos na diáspora forçada.

Aos amigos, afortunadamente numerosos!

Ao Professor Itzhak, pela sua guia e inspiração nos últimos dois anos.

Ao CBPF, pela oportunidade concedida, foi um verdadeiro prazer formar parte da sua comunidade durante os últimos seis anos (igualmente agradeço ao CNPq pelo financiamento).

Muchas Gracias.



Que cada um diga o que acha que  
é verdade, e que a própria  
verdade seja confiada a Deus!

– G. E. LESSING.



# Lista de Figuras

2.1	Uma rede quadrada $6 \times 6$ .	9
2.2	Uma trajetória possível na rede $7 \times 7$ .	9
2.3	Trajetoórias de Dyck na rede quadrada $5 \times 5$ .	10
3.1	As quatro primeiras superfícies compactas, orientáveis e sem borda.	14
3.2	Um multígrafo com três vértices.	15
3.3	Um multígrafo $G$ com 5 lados	16
3.4	Um multígrafo com três vértices e uma indexação arbitraria das suas pontas.	18
3.5	Vizinhança de um vértice qualquer de um mapa	19
3.6	A permutação $\alpha$	19
3.7	Caraterização do polígono em função da permutação $\sigma \circ \alpha$	20
3.8	Automorfismos e mapas	21
3.9	Um mapa planar com um ciclo	23
3.10	Construção das arvores enraizadas	24
3.11	O conjunto $\mathfrak{S}_m$	25
3.12	As primeiras árvores enraizadas	26
3.13	Uma face enraizada	27
3.14	Mapa enraizado e seu dual	28
3.15	Caso 1, a eliminação do lado que contem a raiz desconecta o mapa enraizado	30
3.16	Caso 2, a eliminação do lado que contem a raiz não desconecta o mapa enraizado	31
3.17	O lado enraizado é um loop planar com a face enraizada o interior do loop	36
3.18	O lado enraizado incide em dois vértices diferentes da face enraizada inicial	37
3.19	O lado enraizado incide em dois vértices diferentes a ponta não enraizadas incide em uma ponta distinta da enraizada	38
4.1	Diagrama de Feynman conectado de ordem 1 com duas pernas externas	46
4.2	Diagrama de Feynman desconectado de ordem 1 com duas pernas externas	46
4.3	Correspondência entre uma parte do diagrama de Feynman e um mapa enraizado	51
4.4	Correspondência entre uma parte do diagrama de Feynman e um mapa enraizado	52
4.5	Diagramas com 2 e 4 pernas externas e os correspondentes mapas enraizados	57
4.6	Menor ordem possível de um diagrama conectado	57
4.7	Os diferentes diagramas de Feynman para o caso $N = 3$ e $m = 2$	58

4.8	Os dez diagramas de Feynman conectados para $m = 2$ e $N = 1$ .	63
4.9	Os treze diagramas de Feynman conectados para $m = 2$ e $N = 2$	64
5.1	Um diagrama de ordem 4 com seus 8 automorfismos	82
5.2	Representação diagramática das funções $\aleph$	88

# Lista de Tabelas

4.1	Primeiros valores dos números $h_m^{(N)}$ . . . . .	63
5.1	Primeiros valores dos números $\mathfrak{N}_{cm}^{(N)}$ . . . . .	79
5.2	Primeiros valores dos números $\mathfrak{N}_{cm}^{(N)}$ . . . . .	79
5.3	Primeiros valores dos números $\mathfrak{B}_{cm}$ . . . . .	81
5.4	Uma configuração arbitraria no problema da distribuição das 4 bolas. . . . .	86
5.5	Construção dos produtos contendo as funções $\aleph$ a partir da matriz na expressão (5.26). . . . .	86
D.1	Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria. . . . .	126
D.2	Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria. . . . .	127
D.3	Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria . . . . .	128



# Sumário

<b>folha</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Dedicatória</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>vii</b>
<b>Epigrafe</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2 Combinatória enumerativa</b>	<b>7</b>
2.1 Contagem de conjuntos finitos . . . . .	7
2.2 Contagem por bijeção . . . . .	11
<b>3 Mapas enraizados</b>	<b>13</b>
3.1 Mapas enraizados . . . . .	13
3.2 Mapas enraizados e permutações . . . . .	17
3.3 Caracterização dos mapas enraizados . . . . .	22
<b>4 Diagramas de Feynman e mapas enraizados</b>	<b>43</b>
4.1 Teorema de Wick e os diagramas de Feynman da Teoria . . . . .	43
4.2 Bijeção entre os diagramas de Feynman conectados e os mapas enraizados . .	50
4.3 Uma fórmula de contagem para os diagramas de Feynman conectados . . . . .	53
4.4 Generalização para o caso de diagramas de Feynman conectados com um número arbitrário de pernas externas . . . . .	56

4.5	Expansão assintótica para o caso $N = 1$ . . . . .	65
4.6	Uma nova contribuição: Contribuição multinomial centrada . . . . .	69
4.7	Solução exata e expansão assintótica para o caso $N = 2$ . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Diagramas de Feynman na Teoria <math>\phi^N</math></b> . . . . .	<b>77</b>
5.1	Contrações totais e diagramas de Feynman com pernas externas na teoria $\phi^4$ . . . . .	77
5.2	Contrações totais e diagramas de Feynman do vácuo na teoria $\phi^4$ . . . . .	80
5.3	Diagramas de Feynman do vácuo na teoria $\phi^4$ . . . . .	81
5.4	O grupo de permutações e as matrizes mágicas . . . . .	91
5.5	Algoritmo para o cálculo das matrizes mágicas representativas . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>Relação de equivalência</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>Partições e composições</b> . . . . .	<b>104</b>
B.1	Partições e composições de um número . . . . .	104
<b>C</b>	<b>Resultantes</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>D</b>	<b>Implementação computacional dos algoritmos</b> . . . . .	<b>110</b>
D.1	Implementação computacional dos algoritmos . . . . .	110
<b>E</b>	<b>Um critério para distinguir equivalência entre matrizes mágicas</b> . . . . .	<b>129</b>
E.1	O teorema de Birkhoff–von Neumann . . . . .	129
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>132</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Esta tese versa sobre alguns aspectos de certos objetos chamados diagramas de Feynman, amplamente associados ao tratamento perturbativo na teoria quântica. Seu uso é preponderante em teoria quântica de campos (na formulação relativística e euclidiana) como em teoria quântica de muitos corpos. Basicamente, temos um sistema plenamente formulado (um campo quântico com um estado fundamental estável -chamado vácuo- e as excitações do campo chamadas partículas; ou, no caso de muitos corpos, um ensemble de entidades bem definidas -partículas- tomadas em conjunto e atendendo unicamente ao princípio de simetrização ou anti-simetrização em que seus estados são descritos em conjunto) chamado sistema livre, e o sistema interagente geralmente entendido nos termos do sistema livre. Se a solução dos dois (diferentes) problemas existe, então obtemos dois conjuntos completos de auto-estados, que descrevem os dois espaços de Hilbert dos sistemas. A assunção é que o espaço de Hilbert dos dois sistemas são equivalentes e que a solução do sistema interagente pode ser formulada a partir do sistema livre no *quadro de interação*. A teoria interagente é compreendida como uma perturbação da teoria livre através de uma série perturbativa cujos termos expressam todas as “flutuações” da teoria com interação a respeito da teoria livre. Os diagramas de Feynman são uma forma de ilustrar todos os termos da série perturbativa.

Se as condições são satisfeitas, isto é, se a teoria interagente existe e também é unitariamente conectada com a teoria livre, então, o quadro de interação fornece uma forma de calcular, até a ordem de precisão desejada, os elementos da teoria interagente a partir da teoria livre. Nos primórdios da teoria quântica de campos a aplicação deste conjunto de receitas levou a uma particular comoção: a maioria dos termos da série perturbativa eram expressões divergentes. Felizmente, uma série de procedimentos sistemáticos foram encontrados para eliminar consistentemente estas divergências. E melhor ainda, parâmetros obtidos diretamente a partir dos experimentos podiam ser

introduzidos nestes procedimentos para obter predições extremamente precisas. Estes procedimentos, conhecidos hoje como renormalização, foram um marco crucial para nosso atual conhecimento do microcosmo.

Porém, uma parte do estupor inicial causado pelas expressões divergentes ainda persiste: é válido considerar garantida a existência da teoria interagente a partir da grande precisão obtida e em acordo com a experiência? A corrente construtivista tem um particular foco em mostrar a existência de teorias interagentes, já que a teoria livre (apesar de existir) só é conectada unitariamente com teorias livres (Teorema de Hagg), ou em outros termos, em teoria quântica de campos o quadro de interação (o fundamento do cálculo perturbativo em TQC) não existe!

Talvez a questão esteja em como interpretar estes termos da série perturbativa e o procedimento de renormalização. Um dos procedimentos usado para renormalizar estes termos é o procedimento BPHZ. A particular estrutura das subdivergências neste procedimento é encontrada em conexão com as álgebras de Hopf, uma particular e rica estrutura matemática, sendo expressa a conexão em termos diagramáticos [35]. Outro assunto de interesse é o estudo da série perturbativa como um todo. A série perturbativa em geral tem um caráter assintótico, simplesmente significando que o raio de convergência associado é zero ou, em outros termos, que a série como um todo diverge. O estudo de séries divergentes é uma área estabelecida da matemática e é comumente estudado métodos para associar valores numéricos a séries divergentes (somabilidade). Estes métodos podem ser aplicados a QFT e de fato dão indícios sobre o caráter das séries perturbativas. Em particular, o incremento fatorial do número de diagramas para ordens crescentes aparenta ser a causa do caráter divergente da série perturbativa [51].

Um fato interessante acontece quando tomamos a teoria em dimensão zero. Na abordagem funcional, o gerador funcional expresso em função da ação da teoria converte-se explicitamente na função geradora do número de diagramas de Feynman. Em outras palavras, fazer teoria quântica de campos em dimensão zero corresponde ao estudo da combinatória enumerativa dos diagramas de Feynman. Isto é conhecido desde longa data [19], e tem-se estendido como o método usual para contar diagramas em TQC [9]. Na combinatória enumerativa, o uso da técnica de funções geradoras entra em correspondência com técnicas de análise complexa [27].

Os diagramas de Feynman tem-se convertido também em uma maneira qualitativa de representar processos em teorias não tão bem estabelecidas (por exemplo, em sistemas de muitos corpos fortemente correlacionados, ou na física nuclear). A principal razão para estudar os diagramas de Feynman é certamente obter a amplitude de espalhamento de um determinado processo em alguma teoria (ao final é o que o experimentalista vai precisar). Porém, desprovidos da sua amplitude de espalhamento associada, os diagramas de Feynman continuam tendo uma rica estrutura. Este vai ser nosso tema de estudo nesta

tese, em contexto com três contribuições obtidas por nós recentemente:

- A primeira contribuição [14] relaciona explicitamente a contagem dos diagramas de Feynman em teoria de muitos corpos (ou também em eletrodinâmica escalar) com a contagem de certos grafos usados em topologia algébrica (rooted maps ou mapas enraizados). Em particular, é mostrado que o número destes diferentes tipos de objetos é o mesmo. A partir do teorema de Wick é obtida uma recorrência relacionando o número de diagramas de Feynman. Logo, é encontrada uma solução explícita da equação recorrente e mostrada sua equivalência com uma fórmula de contagem para os mapas enraizados. O artigo em questão, usa a fórmula da contagem para os mapas enraizados sem aprofundar nestes interessantes objetos. O capítulo 3 deste trabalho supera este gap, sendo uma introdução concisa deste tipo de objetos, poucos conhecidos pelos físicos. Parte do capítulo 4 apresenta detalhes da respectiva prova encontrada em [14].
- Na parte restante do capítulo 4, exporemos com certo detalhe a segunda contribuição [16] (terceira cronologicamente) a qual generaliza amplamente os métodos recursivos usados em [14], agora generalizados para diagramas de Feynman com um número arbitrário de pernas externas. Em particular, obtemos uma recorrência para diagramas com  $2N$  pernas externas. É encontrada a solução explícita para o caso  $N = 2$  (a solução do caso  $N = 1$  encontra-se em [14]), e a partir destas soluções criamos um método para obter a expansão assintótica do número deste tipo de diagramas até a ordem de precisão desejada. Ainda mais, o nosso método, encontra outras contribuições assintóticas (desprezíveis ante a contribuição principal) não encontrada pelos métodos analíticos convencionais.
- O capítulo 5 aplica os métodos introduzidos no capítulo 4 para o caso da teoria  $\phi^4$  (facilmente extensível para qualquer teoria  $\phi^N$  com  $N \geq 3$ ). Os métodos possibilitam a contagem das contrações que geram os diagramas na teoria  $\phi^4$  com o mesmo grau de exatidão que no caso da teoria de muitos corpos. Porém, os métodos não são úteis para a contagem de diagramas e suas multiplicidades. Na referência [15] introduzimos um método algorítmico para construir os diagramas e obter as suas respectivas multiplicidades. Este método codifica o método funcional, que usa derivadas funcionais para a construção dos diagramas, numa relação com o conjunto particular de matrizes combinatorias com coeficientes inteiros não negativos, cujas somas de filas e colunas é igual a 4. A nova relação simplifica enormemente o cálculo, relacionando-o explicitamente com o problema de isomorfismo de grafos, (importante em teoria de complexidade).

A estrutura combinatória dos diagramas e Feynman parece pertencer à intersecção de várias metodologias e teorias em física e matemática. Esperamos que esta monografia

sucinta mostre uma pequena parte destas interessantes inter-relações.

# Capítulo 2

## Combinatória enumerativa

### 2.1 Contagem de conjuntos finitos

A combinatória enumerativa procura estabelecer técnicas e ferramentas de contagem para determinar a cardinalidade (número de elementos) de conjuntos finitos. Isto em conjuntos pequenos poderia parecer uma mera trivialidade. Desde os primeiros anos de vida assimilamos facilmente a capacidade de pôr em correspondência os nossos dedos com os diversos objetos que povoam nosso entorno (coisas, seres vivos etc), e desde que estes objetos tenham uma existência concreta, contar é uma atividade simples e de rotina, incluindo a possibilidade de que o número de objetos concretos seja grande.

Se os objetos contados não têm “existência concreta” (física, desde uma perspectiva puramente materialista) será que contar tem sentido? A combinatória enumerativa pressupõe que a resposta é afirmativa: efetivamente podemos contar elementos de conjuntos formados a partir de estruturas e entidades matemáticas, incluindo estruturas formais, isto é objetos com caráter puramente operacional. Muitos destes objetos matemáticos são computáveis, significando que podem ser colocados em correspondência com um objeto físico programado (um computador) para “realizar” o objeto matemático. Evidentemente, as limitações físicas do computador impõem um limite à computabilidade de conjuntos matemáticos, isto em relação ao tempo da computação e ao tamanho dos dados processados.

Se prescindimos por agora do caráter computável de um conjunto matemático (sendo a computação uma questão de suma importância teórica e prática [10]) o que realmente significa contar? No começo do seu livro *Enumerative combinatorics* [50], R.P Stanley, estabelece que, dado um conjunto  $\mathcal{S}$ , possivelmente com um número infinito de

elementos, e uma classe de subconjuntos  $\{\mathcal{C}_i\}$  de  $\mathcal{S}$  satisfazendo

$$\bigcup_i \mathcal{C}_i = \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \text{ for } i \neq j, \quad (2.1)$$

onde  $i$  são elementos de algum outro conjunto que indexam cada  $\mathcal{C}_i$  (geralmente  $i$  pertence ao conjunto dos inteiros positivos), contar os elementos de  $\mathcal{C}_i$  é fornecer uma função  $f(i) \rightarrow \mathbb{N}$  para cada  $i$ . É evidente que  $f(i)$  gera uma sequência, possivelmente infinita de números naturais. Esta função pode ser dada a partir de:

- Uma forma fechada  $f(i)$ , isto é uma formula explicita e direta.
- Uma soma finita de  $N$  termos, onde o número  $N$  geralmente depende de  $i$ , ou cada termo representa uma possível solução de alguma relação dependente de  $i$  (nesse caso, a relação pode ser a solução de algum outro problema numérico ou inclusive, combinatório).
- Uma relação de recorrência, cuja solução iterativa determina a sequência numérica  $f(i)$ .
- Algum comportamento assintótico de  $f(i)$  para  $i \rightarrow i_0$  (possivelmente  $i_0 \rightarrow \infty$ ).
- Os coeficientes de algum gerador funcional, por exemplo, se  $i$  é um número natural  $Z(x) = \sum_i f(i)x^i$ .

Exemplos específicos são os seguintes

## Trajetórias na rede

Sejam todas as possíveis redes quadradas  $n \times n$  com  $n \in \mathbb{N}$ , (ver exemplo na figura 2.1) e seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as possíveis trajetórias na rede começando no ponto  $(0,0)$  (esquina inferior esquerda) e acabando no ponto  $(n,n)$  (esquina superior direita) de tal forma que só são permitidos passos na direção  $(0,1)$  (direção up) e na direção  $(1,0)$  (direção right, ver figura 2.2)

O conjunto  $\mathcal{C}_i$  neste caso é conformado por todas as possíveis trajetórias na rede  $i \times i$ . A condição (2.1) é satisfeita e a função  $f(i)$  conta todas as possíveis trajetórias no conjunto  $\mathcal{C}_i$ . A trajetória da figura 2.2 pode escreverse esquematicamente assim (right,up,up,right,up,up,right,right,up,right,up,right)=(r,u,u,r,u,u,r,r,u,r,u,r).

Evidentemente, todas as trajetórias na rede  $7 \times 7$  tem um total de 12 passos com 6 passos à direita e 6 para acima. O número total de trajetórias em  $\mathcal{C}_7$  são as possíveis combinações

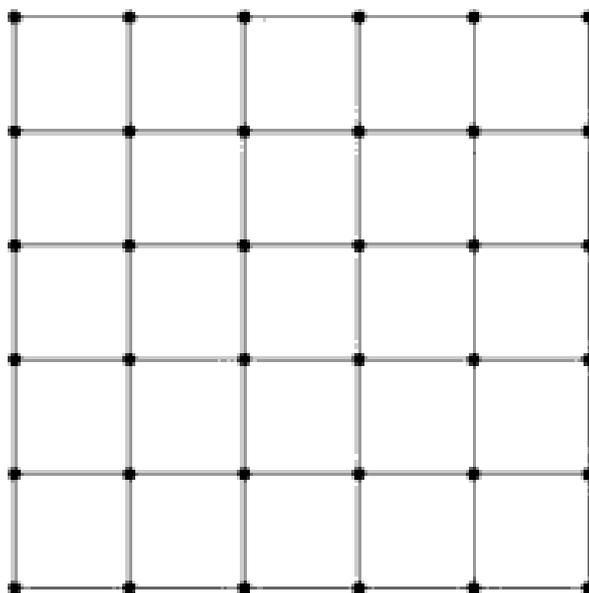


Figura 2.1: Uma rede quadrada  $6 \times 6$ .

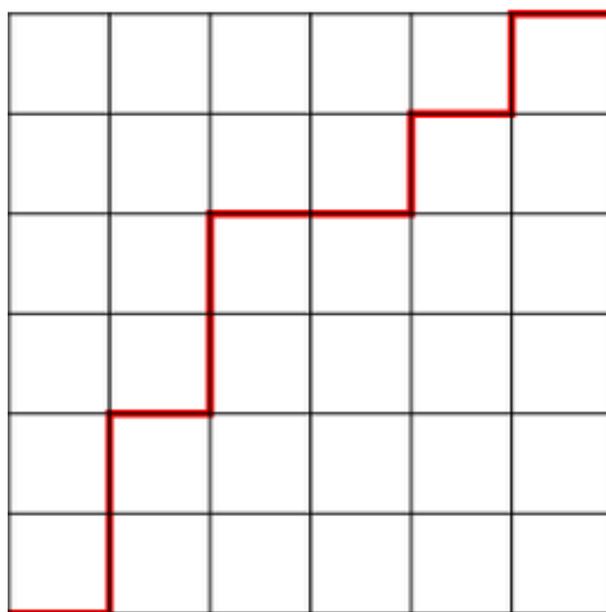


Figura 2.2: Uma trajetória possível na rede  $7 \times 7$ .

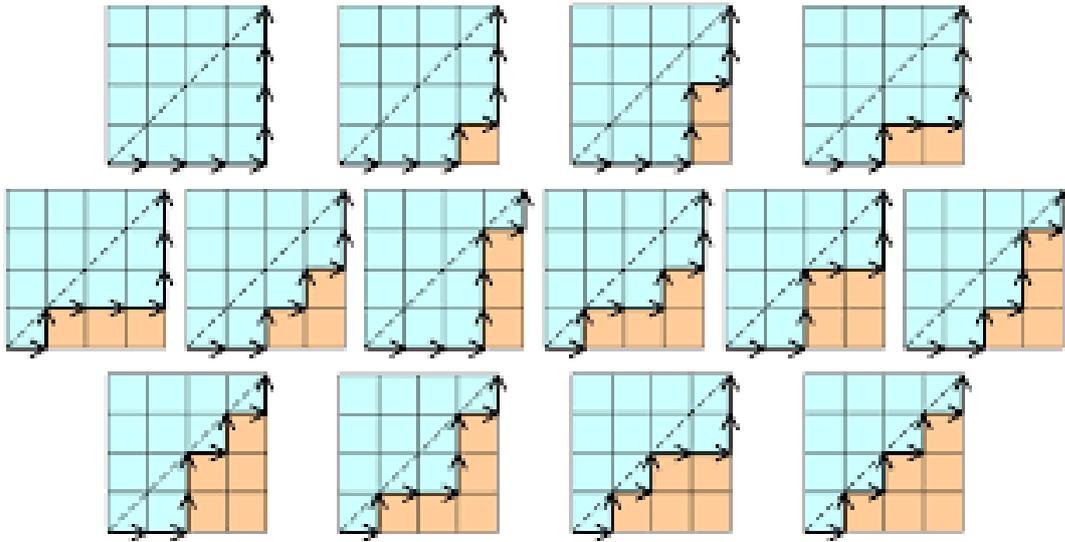


Figura 2.3: Trajetórias de Dyck na rede quadrada  $5 \times 5$ .

das letras

$(r,r,r,r,r,u,u,u,u,u)$ . Isto é facilmente generalizável para todo  $i$ , em particular

$$f(i) = \frac{[2(i-1)]!}{[(i-1)]^2} = \binom{2(i-1)}{i-1} \quad (2.2)$$

O Problema anterior admite uma solução simples para  $f(i)$ , porém, não sempre é o caso. Por exemplo, as vezes contar um conjunto particular pode ser fácil, mas contar os elementos de algum subconjunto que satisfazem uma certa propriedade pode ser não trivial. Um exemplo, o conjunto total de permutações em um conjunto com  $i$  elementos tem

$$f(i) = i!.$$

Agora, consideremos o subconjunto das permutações em um conjunto com  $i$  elementos, as quais não deixam nenhum elemento do conjunto fixo depois da aplicação. Quantas permutações com esta propriedade existem? Pode se provar que a função  $f(i)$  neste caso é

$$f(i) = i! \sum_{m=0}^{i-1} \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Esta expressão não tem um formato tão simples como a formula de contagem para o número total de permutações.

No caso particular das trajetórias na rede estudadas anteriormente, um subconjunto interessante é o conjunto das trajetórias na região limitada pela diagonal da rede quadrada (chamadas trajetórias de Dyck, ver figura 2.3.)

Neste caso, a função de contagem  $f(i)$  gera a seguinte sequência para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots$$

A qual parece corresponder com os números de Catalan. Pode mostrar-se que os números de Catalan  $C_n$  correspondem com a função  $f(i)$  para as trajetórias de Dyck. Em particular

$$f(i) = \frac{1}{i} \binom{2(i-1)}{i-1} = C_{i-1}. \quad (2.3)$$

Esta fórmula de contagem é bastante simples, porém, sua dedução não é tão evidente como no caso do conjunto total de trajetórias primeiramente estudadas. Em particular, este caso condensa os três métodos mencionados no começo para a determinação da função  $f(i)$ :

- Uma relação de recorrência:

$$f(i+1) = \sum_{j=0}^{i-1} f(j+1)f(i-j)$$

- O seguinte comportamento assintótico para  $i \rightarrow \infty$

$$f(i) \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4^{i-1}}{(i-1)^{3/2} \sqrt{\pi}}$$

- Um gerador funcional  $F(x)$  com expansão de Taylor ao redor de  $x = 0$

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i+1)x^i$$

## 2.2 Contagem por bijeção

Outra forma de contar os elementos do conjunto  $\mathcal{C}_i$  é por meio de um isomorfismo ou bijeção dos elementos de  $\mathcal{C}_i$  com os elementos de algum outro conjunto  $\mathcal{D}_j$  o qual tem uma função de contagem conhecida  $f(j) \equiv f(\mathcal{D}_j)$ . Já que ambos conjuntos são por hipótese isomorfos, podemos corresponder  $i$  com  $j$  com alguma redefinição do índice  $j$ . O isomorfismo em questão  $\psi : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_i$  garante que  $f(\mathcal{C}_i) = f(\mathcal{D}_i) \equiv f(i)$ . Se o isomorfismo  $\psi : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_i$  existe para todo  $i$ , então a função  $f(i)$  é a função de contagem para todos os subconjuntos das classes  $\{\mathcal{C}_i\}$  e  $\{\mathcal{D}_i\}$ .

Stanley [50] chama a contagem por bijeção entre classes de diferentes conjuntos de *prova combinatória*. Aqui a igualdade da função de contagem  $f(i)$  para as duas classes é consequência da bijeção  $\psi$ . A importância da distinção repousa na construção da bijeção a qual relaciona conjuntos que são a principio diferentes. Pode acontecer que as classes em questão derivem-se de estruturas matemáticas completamente diferentes. No caso das teorias físicas (as quais podem estar escritas em uma linguagem matemática bem definida,

ou no pior dos casos escritas em estruturas operacionais formais) provas combinatórias entre teorias diferentes podem remeter a alguma relação ou correspondência [34].

Um simples exemplo é o seguinte, uma cadeia unidimensional de  $N$  spins, cada um com dois possíveis valores da componente  $z$ . Seja  $\mathcal{C}_N$  o conjunto de possíveis configurações deste sistema. Sendo  $f(\mathcal{C}_N) = \#\mathcal{C}_N$ , temos que o número de configurações possíveis é

$$\#\mathcal{C}_N = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{N\text{-spins}} = 2^N \quad (2.4)$$

Seja agora um conjunto qualquer  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  com  $N$  elementos, e  $\mathcal{D}_N$  a classe de todos os possíveis subconjuntos de  $X$ . É conhecido que a cardinalidade  $\#\mathcal{D}_N = 2^N$ , mas provemos este fato construindo uma bijeção explícita entre  $\mathcal{C}_N$  e  $\mathcal{D}_N$ . Representemos as configurações da cadeia unidimensional de spins por meio de uma cadeia de zeros e uns. Spins com componente  $z$  positiva são representados por 1, do contrario são representados por 0. Um exemplo explícito para  $N = 6$

$$\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \Leftrightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 0) \quad (2.5)$$

Seja a função  $\psi_N : \mathcal{C}_N \rightarrow \mathcal{D}_N$  definida assim:

$$\psi_N(s_1, \dots, s_N) = \begin{cases} \text{se } s_i = 1, x_i \in \psi(s_1, \dots, s_N) \\ \text{se } s_i = 0, x_i \notin \psi(s_1, \dots, s_N) \end{cases} \quad (2.6)$$

por exemplo  $\psi_6(1, 1, 0, 1, 0, 0) = \{x_1, x_2, x_4\}$ . A imagem inversa para qualquer subconjunto de  $X$  existe, e, em particular, é única (da definição de  $\psi_N$  temos que  $\psi_N(s_1, \dots, s_N) = \psi_N(s'_1, \dots, s'_N)$  implica em  $s_i = s'_i$  para cada  $i$ ) assim  $\psi_N$  é sobrejetiva (onto) e injetiva. Por tanto,  $\psi_N$  é uma bijeção. O que significa

$$\#\mathcal{C}_N = \#\mathcal{D}_N = 2^N \quad (2.7)$$

Vemos que o princípio de contagem por bijeção, conceitualmente, é muito simples. Porém, estabelecer uma bijeção explícita entre dois conjuntos de objetos diferentes pode ser algo não trivial. Geralmente, é requerido “representar” os objetos de uma forma adequada, e de tal forma poder estabelecer a bijeção.

Neste trabalho, estabeleceremos conexões enumerativas entre diversos tipos de objetos (permutações, matrizes, grafos e diagramas de Feynman.) O princípio a seguir é o exposto em este breve capítulo: estabelecer bijeções, deduzir fórmulas de contagem, relações recursivas, expansões assintóticas etc.,. A diversidade dos possíveis problemas a estudar em combinatória enumerativa é gigantesca. De aqui em adiante estudaremos só uma pequena parcela.

# Capítulo 3

## Mapas enraizados

### 3.1 Mapas enraizados

Mapas enraizados são objetos combinatórios bem definidos, e nosso objetivo será contar eles de acordo com os princípios estabelecidos no capítulo 2. O título deste trabalho evoca outros objetos chamados diagramas de Feynman, e de aqui podemos inferir alguma conexão existente entre estes conjuntos de diferentes objetos. Começamos primeiro com os mapas enraizados, estes são mapas com uma raiz. Enquanto que mapas são objetos topológicos que caracterizam superfícies bidimensionais *compactas e orientáveis*. Como veremos, a adição da raiz faz dos mapas (em princípio, objetos definidos topologicamente) objetos “combinatórios”. Este é um proceder semelhante ao usado na topologia algébrica: objetos topológicos com pouca estrutura são dotados de estruturas algébricas adicionais. Esta adição muitas vezes faz com que alguma propriedade topológica (independente da estrutura algébrica adicional), seja explicitamente manifesta com o uso de ferramentas algébricas. Em nosso caso, o interesse em estudar mapas com raiz é puramente combinatório. No entanto, ao falar de mapas será inevitável usar termos vindos da topologia.

Um objetivo da topologia é a classificação de regiões pertencente a um espaço topológico dado. Duas regiões de um espaço topológico são equivalentes se existe um homeomorfismo (transformação bijetiva que preserva continuidade) entre as duas regiões. Em  $\mathbb{R}^3$  com a topologia convencional, as diferentes superfícies (salvo homeomorfismos) sem borda, compactas e orientáveis são dadas na figura 3.1 (para ver uma definição precisa destes termos, ver qualquer texto de topologia em  $\mathbb{R}^N$ .) Para nós, estas serão as únicas superfícies de interesse. O número inteiro não negativo  $g$  chamado genus conta o número de buracos e portanto indexa estas superfícies denotadas como  $\mathbb{S}_g$ .

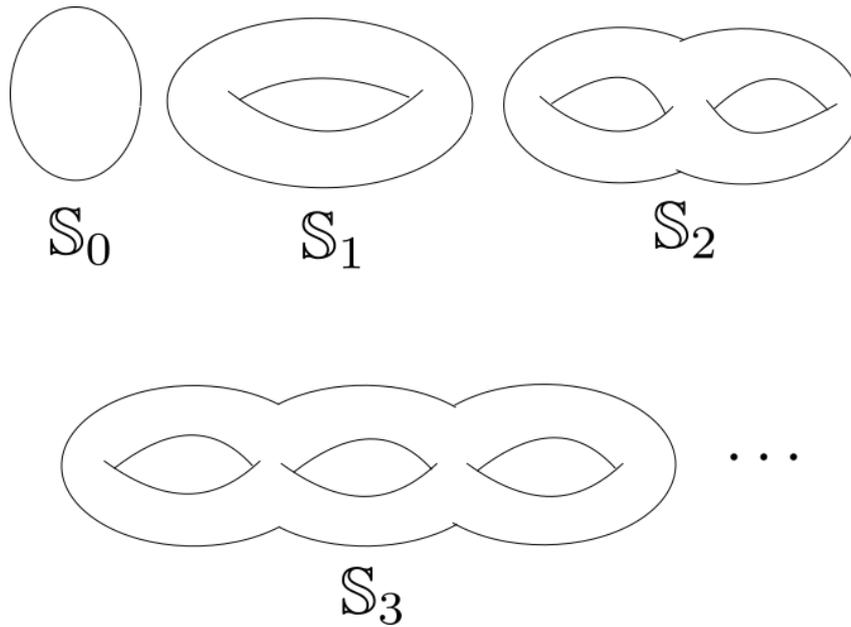


Figura 3.1: As quatro primeiras superfícies compactas, orientáveis e sem borda.

Um multígrafo é um conjunto  $V$  de  $n$  pontos chamados vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$  e um conjunto de “linhas” chamadas lados, os quais unem dois vértices diferentes ou um mesmo vértice (loop). É permitido várias linhas unir o mesmo par de vértices, e também mais de um loop em um mesmo vértice. Uma linha ou lado é na realidade uma associação de um par de vértices  $(v_i, v_j)$  com  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . A palavra linha aqui remete ao fato de que os lados do multígrafo sempre podem ser desenhado como linhas no plano. Assim o multígrafo com três vértices  $\{v_1, v_2, v_3\}$  da figura 3.2, corresponde com a associação:

$$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_3)\} \quad (3.1)$$

Dado um multígrafo, este sempre poderá ser representado em um plano. Duas situações podem acontecer

- Os lados do multígrafo se intersecam somente nos vertices.
- No importa como o multígrafo seja desenhado, sempre teremos lados que se intersectam fora dos vértices.

O primeiro caso corresponde com multígrafos planares. Estes sempre podem ser desenhados, além no plano, nas superfícies bidimensionais da figura. Em particular, todos os multígrafos planares podem ser desenhados na esfera  $g = 0$ .

Para o segundo caso, se desenharmos este tipo de multígrafo na esfera  $g = 0$  ao igual que no plano, teremos que sempre algumas linhas se seguiram intersectando. Em particular, existe um  $g$  mínimo maior que zero, onde poderemos desenhar o multígrafo, tal que nenhum

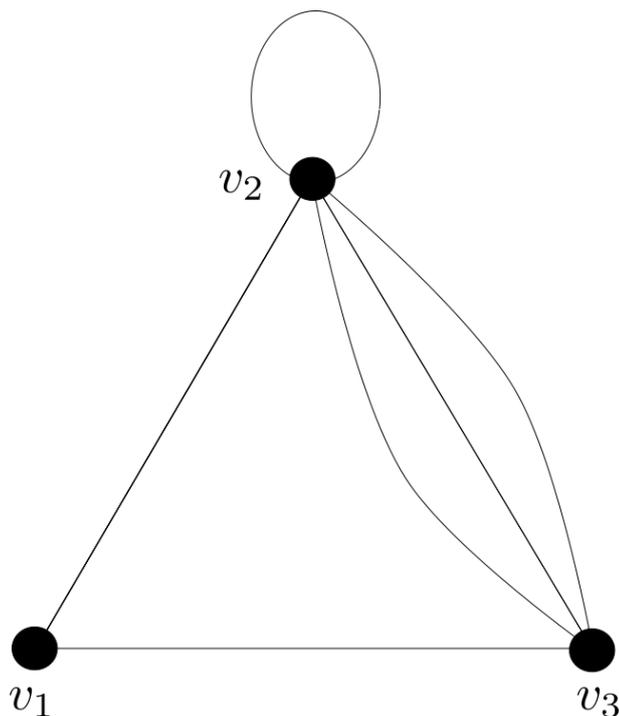


Figura 3.2: Um multigrafo com três vértices.

dos lados se intersecta fora dos vértices. Assim, com cada multigrafo podemos associar uma única superfície bidimensional de genus  $g$ .

Seja o conjunto de possíveis multigrafos *conectados* com um número arbitrário  $|v|$  e  $|e|$  de vértices e lados respectivamente, cada um embebido na correspondente superfície bidimensional  $\mathbb{S}_g$  (a noção de multigrafo conectado é clara, mas pode ser bem definida a partir de subgrafos chamados arvores [6].) Então para cada multigrafo  $G$  a relação de Euler é válida:

$$|v| + f = |e| + 2 - 2g \quad (3.2)$$

onde  $f$  é o número de superfícies nas que o multigrafo  $G$  particiona a superfície  $\mathbb{S}_g$ . Isto é  $\mathbb{S}_g/G$  é a união de  $f$  superfícies bidimensionais conectadas (intuitivamente, se pegamos uma tesoura e recortamos  $\mathbb{S}_g$  seguindo as linhas do multigrafo  $G$  então obtemos as  $f$  superfícies conectadas que conformam  $\mathbb{S}_g/G$ .) O multigrafo  $G$  é um mapa se todas as  $f$  superfícies da partição  $\mathbb{S}_g/G$  são topologicamente equivalente a um disco (ver figura 3.3).

Surge aqui uma pergunta, como classificar os diferentes mapas? Intuitivamente, deformações contínuas das linhas que preservem a relação de incidência entre vértices e lados geram mapas equivalentes. Mas, lembremos que o conceito de linhas não é intrínseco em mapas (já que estes são grafos). O verdadeiramente importante aqui é a relação de incidência, que sempre será preservada por homeomorfismos. Assim um conjunto diferente de transformações devem servir para caracterizar os mapas. Em particular, em teoria de grafos, o grupo de permutações fornece um meio para distinguir diferentes grafos. Usando

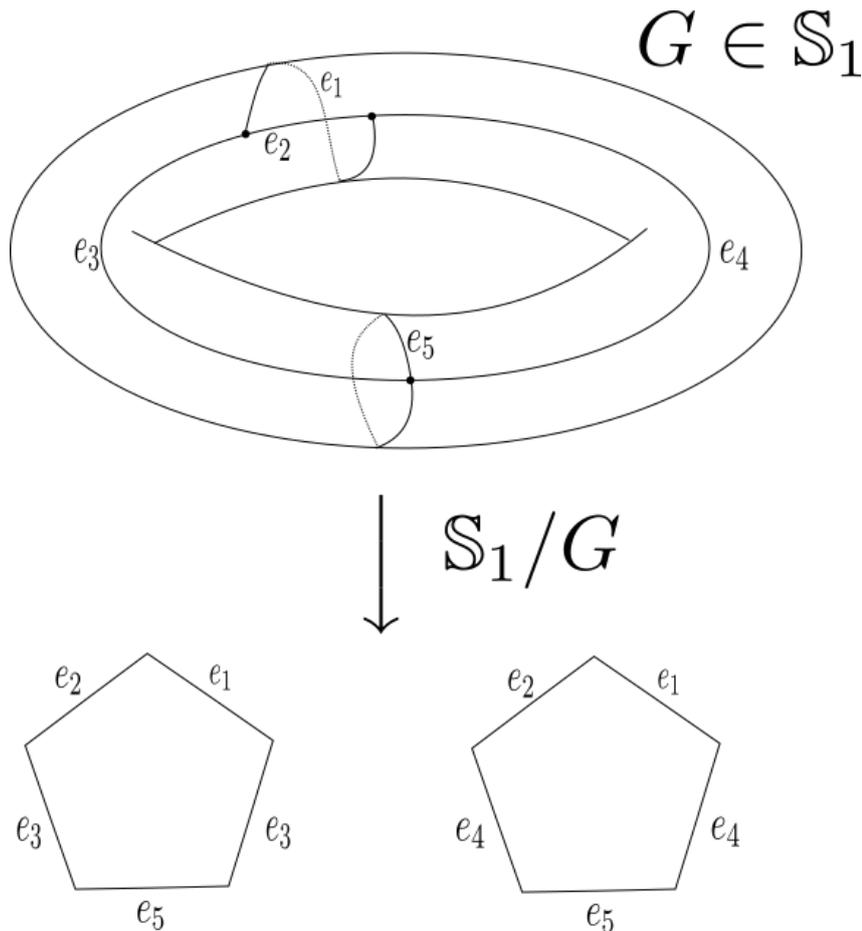


Figura 3.3: Um multigrafo  $G$  com 5 lados  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e embebido em  $\mathbb{S}_1$ . A partição  $\mathbb{S}_1/G$  gera duas superfícies poligonais (discos topológicos.) Portanto  $G$  é um mapa. Para gerar  $\mathbb{S}_1$  a partir dos dois polígonos, simplesmente colamos os lados que tem o mesmo  $e_i$ .

permutações é possível, obter uma construção que, salvo automorfismos, caracteriza aos mapas.

## Permutações

Uma permutação  $\sigma$  de  $n$  elementos é uma transformação bijetiva de um conjunto  $A_n$  de  $n$  elementos em se mesmo. Isto é  $\sigma : A_n \rightarrow A_n$ . Denotando  $A_n$  como  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , a transformação  $I(i) = i$  para todo  $i \in [n]$  pertence ao conjunto de permutações de  $n$  elementos. A composição de permutações é uma permutação, isto permite definir o produto de duas permutações como  $\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$ . Em particular o conjunto de permutações forma um grupo com  $I$  a identidade. Denotemos o conjunto de permutações de  $n$  elementos simplesmente como  $\mathcal{P}_n$

Existem várias maneiras de representar uma permutação  $\sigma$ . Uma muito econômica é representar  $\sigma$  pelos ciclos que conformam ela. Se tomamos um elemento  $i \in [n]$  e aplicamos

sucessivamente  $\sigma$  em  $i$ , para algum  $0 < m \leq n$  obteremos

$$\sigma^m(i) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_m(i) = i. \quad (3.3)$$

Evidentemente se  $\sigma(i) = j$ , teremos

$$\sigma^m(j) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_m(j) = j. \quad (3.4)$$

Sendo  $m$  o menor de tais números, teremos o seguinte ciclo  $(\sigma(i) \sigma^2(i) \cdots \sigma^{m-1}(i))$  de  $\sigma$ . Para  $k \notin \{\sigma(i), \sigma^2(i), \cdots, \sigma^{m-1}(i)\}$ , repetimos o procedimento, obtendo outro ciclo. Então todos os elementos de  $[n]$  pertencem a um ciclo de  $\sigma$ . Se  $\sigma(i) = i$  teremos um ciclo com um único elemento  $(i)$ . O número de ciclos de uma permutação  $\sigma \in \mathcal{P}_n$  pode estar entre 1 e  $n$  (este último caso corresponde com a identidade). Por exemplo, a permutação com três ciclos  $\sigma = (135)(24)(6) \in \mathcal{P}_6$  denota a ação:

$$\sigma(1) = 3; \sigma(3) = 5; \sigma(5) = 1; \sigma(2) = 4; \sigma(4) = 2; \sigma(6) = 6. \quad (3.5)$$

Para mais detalhes sobre permutações, ver [50] ou [39].

## 3.2 Mapas enraizados e permutações

Para ver a conexão de mapas e permutações, em vez de associar um número a cada vértice do mapa (como é natural em teoria de grafos,) vamos corresponder um número com as pontas de cada lado do mapa (na literatura half-edges [36].) Assim, se existem  $n$  lados, teremos  $2n$  pontas. Evidentemente, como é visível na figura 3.4, se o mapa é conectado, então cada vértice será incidido pelo menos por uma ponta. Definindo uma orientação (por exemplo anti-horária,) teremos que o conjunto de vértices podem ser representados por uma única permutação  $\sigma \in \mathcal{P}_{2n}$ , cujos ciclos correspondem com os vértices do mapa (ver figura 3.5).

De forma semelhante podemos caracterizar os  $n$  lados do mapa, com uma única permutação  $\alpha$  de  $n$  ciclos pertencente a  $\mathcal{P}_{2n}$ , com cada ciclo contendo dois pontas. É evidente que cada ciclo corresponde com um lado do mapa (ver figura 3.6). Em particular, temos  $\alpha \circ \alpha = I$ , e  $\alpha(i) \neq i \forall i \in [2n]$ . Tal  $\alpha$  é chamada de uma involução sem ponto fixo (fixed point free involution).

Em particular para qualquer multigrafo conectado esta construção é válida, porém só para mapas é possível uma representação explícita das caras (superfícies) por meio dos ciclos da permutação  $\sigma \circ \alpha \in \mathcal{P}_{2n}$ . Para ver isto consideremos uma das caras de  $\mathbb{S}_g/G$  com  $G$  um dado mapa, a qual pode ser representada por um polígono de  $m$  arestas (que

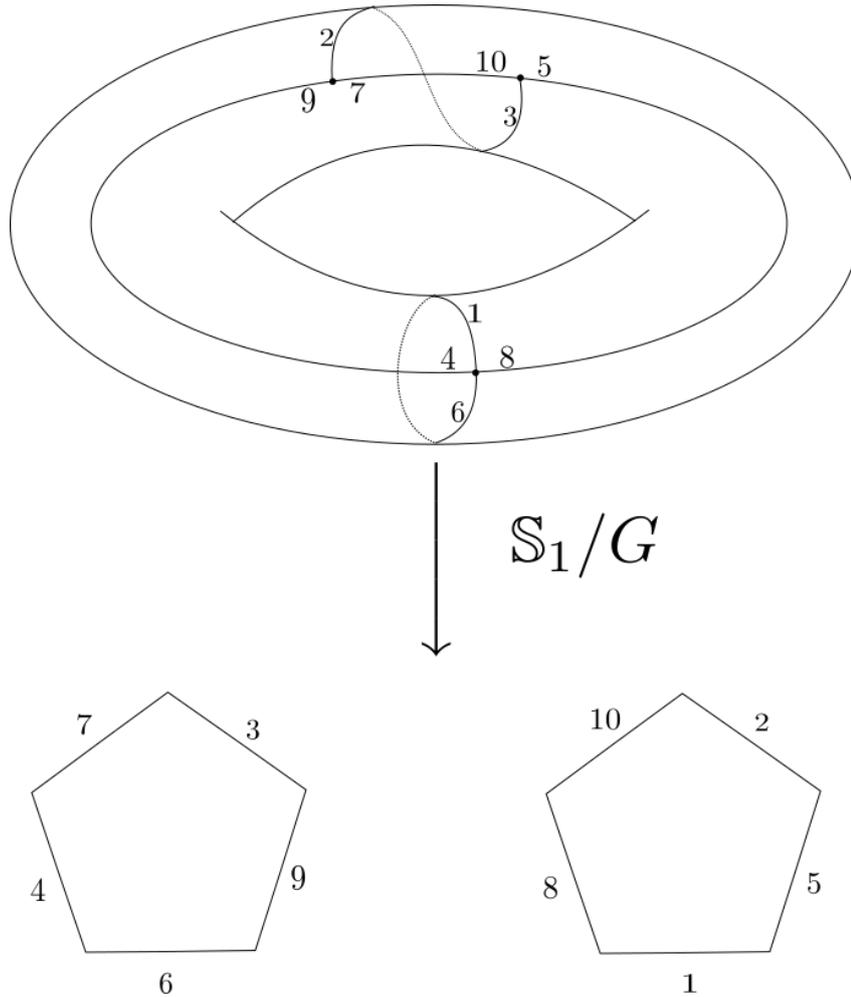


Figura 3.4: Um multígrafo com três vértices e uma indexação arbitraria das suas pontas. Cada vértice é incidido por uma certa quantidade de pontas. A permutação  $\sigma$  que caracteriza estes tres vértices é  $\sigma = (1\ 4\ 6\ 8)(2\ 9\ 7)(10\ 3\ 5)$ . Entretanto, a permutação  $\alpha$  que caracteriza os lados é  $\alpha = (2\ 3)(7\ 10)(9\ 4)(5\ 8)(1\ 6)$ . Por último, a permutação  $\sigma \circ \alpha = (10\ 2\ 5\ 1\ 8)(7\ 3\ 9\ 6\ 4)$  caracteriza os dois polígonos em que o toro é particionado. Para obter o toro a partir dos polígonos, simplesmente colamos os lados dos polígonos de acordo com a permutação  $\alpha$ , isto é colamos 2 com 3, 7 com 10, etc.,

correspondem com  $m$  lados do mapa), e com  $m$  vértices (também vértices do mapa). Vamos escolher um vértice qualquer do polígono, chamemos ele  $v_1$  e indexemos os demais vértices do polígono  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  em sentido horário (ver figura 3.7) e consideremos a ponta incidente pela direita a  $v_1$  indexada por  $i \in [2n]$ . A ação  $\sigma \circ \alpha(i)$  fornece o índice da ponta incidente pela direita a  $v_2$ . Isto é claro,  $\alpha(i)$  é o índice da outra ponta do mesmo lado a qual incide pela esquerda em  $v_2$ , entanto que  $\sigma(\alpha(i))$  fornece o índice da ponta que incide pela direita a  $v_2$ , de acordo com nossa construção de  $\sigma$ . Pelo mesmo raciocínio  $(\sigma \circ \alpha)^2(i)$  fornece a ponta incidente pela direita a  $v_3$ . Então teremos  $(\sigma \circ \alpha)^m(i) = i$  obtendo um ciclo de  $\sigma \circ \alpha$  o qual caracteriza completamente o polígono considerado pelos índices das  $m$  pontas incidentes pela direita a  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Para mapas é evidente que os outros ciclos de  $\sigma \circ \alpha$  determinam as outras caras (polígonos) de  $\mathbb{S}_g/G$ .

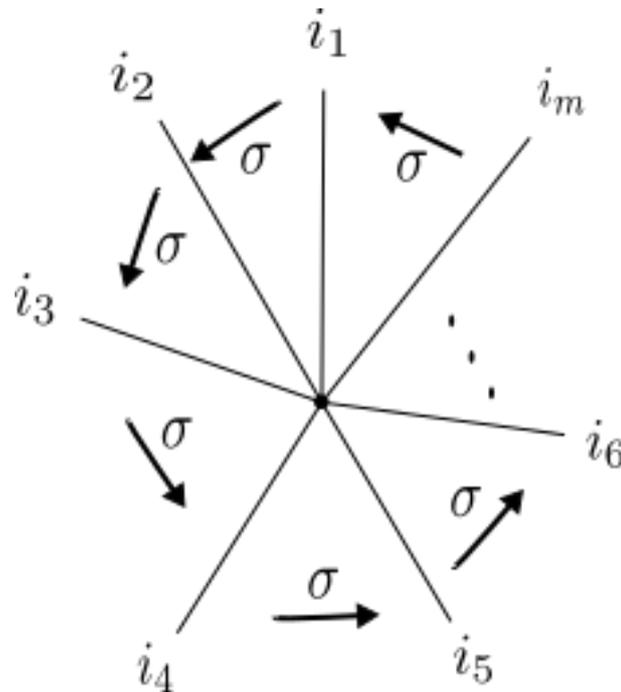


Figura 3.5: Vizinhança de um vértice qualquer de um mapa. Note que, dado o mapa, a numeração das pontas incidentes no vértice tem uma ordem precisa. Eligindo o sentido anti-horário,  $(i_1 i_2 \cdots i_m)$  é um ciclo da permutação  $\sigma$ . Como o mapa é um multigrafo conectado, pelo mesmo princípio, os demais vertices definem os ciclos de uma única permutação  $\sigma$ .

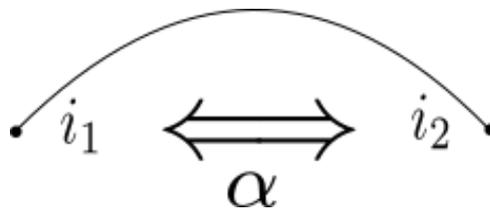


Figura 3.6: A permutação  $\alpha$  caracteriza completamente os lados do mapa, dado uma lado qualquer com pontas  $i_1$  e  $i_2$ , temos que  $\alpha(i_1) = i_2$  e  $\alpha(i_2) = i_1$ .

Por último, se o mapa é conectado, teremos que dado qualquer  $j \in [2n]$ , podemos obter  $j$  a partir de um  $i \in [2n]$  arbitrário, aplicando um número finito de composições de  $\sigma$  e  $\alpha$  em  $i$  (tais composições vão sempre existir, por exemplo  $\sigma \circ \sigma \circ \alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \sigma(i) = j$ ) Isto é equivalente a afirmar que o subgrupo de permutações geradas por  $\sigma$  e  $\alpha$  é transitivo em  $[2n]$ .

É claro que dado um mapa  $G$  em  $\mathbb{S}_g$ , indexando suas pontas, pela construção anterior obtemos permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  transitivas em  $[2n]$  que o caracterizam. Porém, surge a seguinte pergunta: dadas duas permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  (com  $\alpha$  uma involução sem ponto fixo) transitivas em  $[2n]$ , estas determinam um mapa com uma única indexação da suas pontas? A resposta é não, podem existir simetrias (automorfismos) do multigrafo, que determinam diferentes indexações caracterizadas pelo mesmo conjunto de permutações  $\sigma$  e

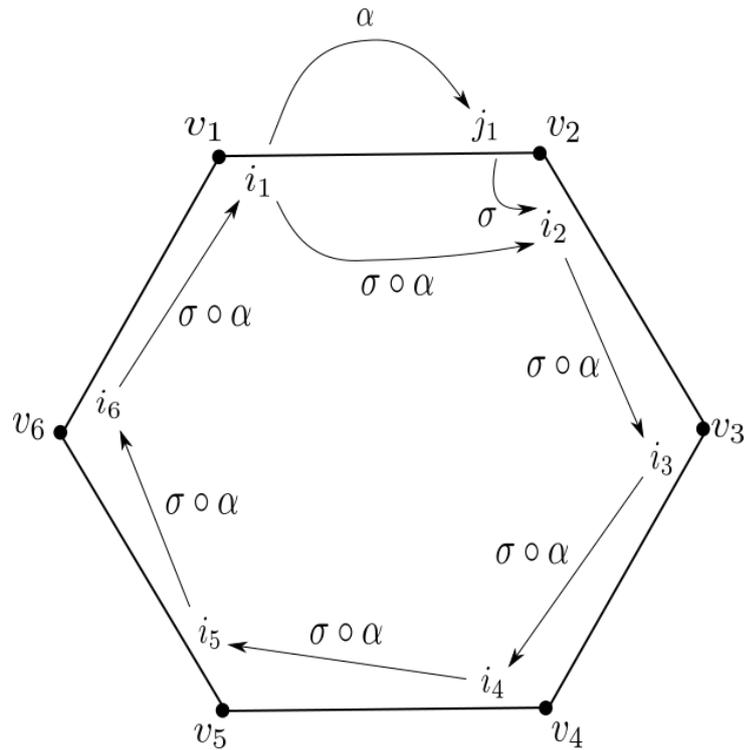


Figura 3.7: Caracterização do polígono em função da permutação  $\sigma \circ \alpha$ . O ciclo  $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)$  é um ciclo de  $\sigma \circ \alpha$  o qual caracteriza uma das caras do mapa. As outras caras do mapa correspondem com os outros ciclos de  $\sigma \circ \alpha$ .

$\alpha$ . A equivalência é alcançada definindo um novo objeto a partir dos mapas, chamado mapa enraizado. Um mapa enraizado é um mapa com uma das suas pontas sendo diferenciada das outras. Tal ponta é chamada de raiz e é representada orientando o lado que contém a raiz (a convenção é desenhar uma flecha no lado que contém a raiz “indo” na direção oposta ao vértice incidido pela ponta diferenciada.) A raiz sempre é associada com um único índice (a convenção é  $1 \in [2n]$ ). Já que para um mapa existe ao sumo  $2n$  diferentes formas de tomar a raiz, para cada mapa existem ao sumo  $2n$  mapas enraizados associados (o número de mapas enraizados associados a um mapa é estritamente menor a  $2n$  quando o mapa tem automorfismos diferentes da identidade) Assim, dadas duas permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  (com  $\alpha$  uma involução sem ponto fixo) transitivas em  $[2n]$ , estas determinam um único mapa enraizado com suas pontas indexadas.

Em particular, dado um mapa enraizado, existem  $(2n - 1)!$  diferentes possíveis indexações das pontas que não são raiz. Dizemos que estas indexações são todas equivalentes já que definem o mesmo mapa enraizado. Isto é uma relação de equivalência no conjunto de possíveis indexações de todos os mapas enraizados com  $[2n]$  pontas. Como indexações de mapas enraizados são completamente determinadas por permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  transitivas em  $[2n]$ , isto gera naturalmente uma relação de equivalência (ver apêndice A) entre todas as possíveis pares de permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  transitivas em  $[2n]$ . As classes de equivalência em questão correspondem com os mapas enraizados.

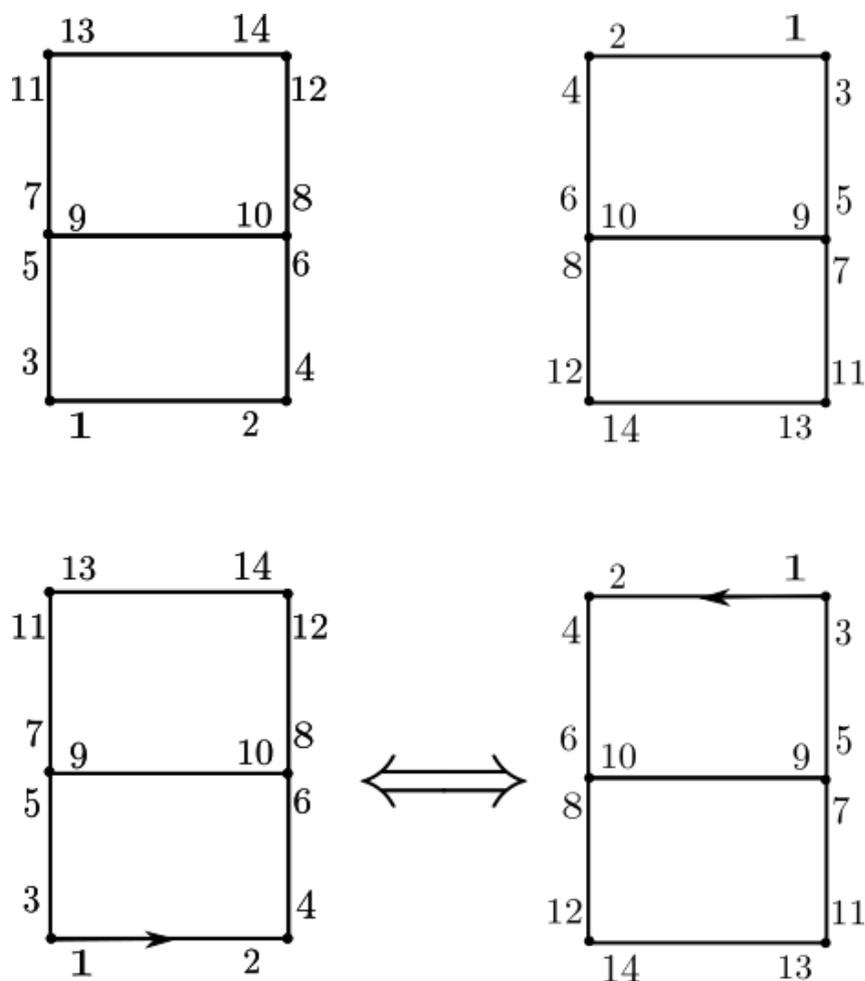


Figura 3.8: As duas figuras superiores correspondem a diferentes indexações do mesmo mapa em  $\mathbb{S}_0$ , dentro das possíveis  $14!$  indexações estas duas tem o mesmo conjunto  $\alpha = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)(9\ 10)(7\ 11)(12\ 8)(13\ 14)$  e  $\sigma = (3\ 1)(2\ 4)(5\ 9\ 7)(10\ 6\ 8)(11\ 13)(14\ 12)$ . A figura situada na esquerda inferior é um mapa enraizado com a ponta 1 como a raiz e uma escolha particular das outras pontas. Com esta escolha da raiz, temos um conjunto de  $13!$  possíveis indexações das outras pontas, todas correspondendo com diferentes permutações  $\sigma$  e  $\alpha$ . A figura situada na direita inferior é outra escolha da raiz, porém, leva ao mesmo conjunto de  $13!$  possíveis escolhas de  $\sigma$  e  $\alpha$  e portanto é equivalente ao mapa enraizado da esquerda. Uma escolha de outra raiz é um mapa enraizado diferente se e somente se leva a outro conjunto de  $13!$  possíveis par de permutações  $\sigma$  e  $\alpha$ .

### 3.3 Caraterização dos mapas enraizados

#### Mapas enraizados de uma face

Como vimos no final da secção anterior, contar mapas enraizados equivale a contar classes de equivalências no conjunto de possíveis indexações dos mapas enraizados. Em particular, duas indexações caraterizadas respetivamente por  $(\alpha, \sigma)$  e  $(\alpha', \sigma')$  são equivalentes (correspondem ao mesmo mapa enraizado) se existe uma permutação  $p \in \mathcal{P}_{2n}$  tal que  $p(1) = 1$  e

$$\alpha' = p \circ \alpha \circ p^{-1}, \quad \sigma' = p \circ \sigma \circ p^{-1} \quad (3.6)$$

Isto expressa nossa anterior afirmação, qualquer das  $(2n - 1)!$  Indexações que deixem fixa a raiz do mapa enraizado, é uma indexação equivalente. Evidentemente a permutação que carateriza a partição em polígonos da superfície  $\mathbb{S}_g$  também satisfaz  $\sigma' \circ \alpha' = p \circ \sigma \circ \alpha \circ p^{-1}$ .

Consideremos agora o problema da enumeração de todos os possíveis mapas enraizados com  $2n$  pontas que particionam a respectiva superfície  $\mathbb{S}_g$  em um único polígono de  $2n$  lados. Em particular isto significa que a permutação  $\sigma \circ \alpha$  tem um único ciclo. O número de permutações de  $\mathcal{P}_{2n}$  com um único ciclo é  $(2n - 1)!$ . Exatamente o mesmo número que as permutações de  $\mathcal{P}_{2n}$  que deixam o elemento 1 fixo. Assim estes dois conjuntos de diferentes permutações devem ter uma bijeção. Vemos que  $f_\phi(p) = p \circ \phi \circ p^{-1}$  com  $\phi = (1\ 2 \cdots 2n)$  é uma possível bijeção (evidentemente  $f_\phi(I) = \phi$ , com  $I$  a identidade). Tomando  $\sigma \circ \alpha = \phi$  como o representante da respectiva classe (o que implica ter escolhido uma determinada indexação do mapa enraizado caraterizado por  $(\sigma, \alpha)$ ), se  $p \neq I$  temos que  $f_\phi(p) \neq \phi$  e também

$$\sigma' \circ \alpha' = p \circ \sigma \circ p^{-1} \circ p \circ \alpha \circ p^{-1} = f_\phi(p) \neq (1\ 2\ 3 \cdots 2n) \quad (3.7)$$

Portanto,  $(\sigma', \alpha')$  corresponde com outra indexação do mesmo mapa enraizado. Em outras palavras

- Para um mapa enraizado com uma única face, se dois pares de permutações  $(\sigma, \alpha)$  e  $(\sigma', \alpha')$  são equivalentes, com  $\sigma \circ \alpha = (1\ 2 \cdots 2n)$  então

$$\sigma' \circ \alpha' = p \circ \sigma \circ \alpha \circ p^{-1} \neq (1\ 2 \cdots 2n)$$

para algum  $p \neq I$  e  $p(1) = 1$ .

Isto equivale a dizer que dentro do conjunto de indexações equivalentes de um mapa, a solução de  $\sigma \circ \alpha = \phi = (1\ 2 \cdots 2n)$  é única.

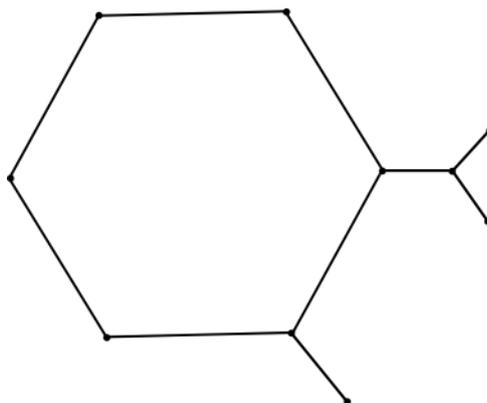


Figura 3.9: Um mapa planar com um ciclo (lados e vértices que conformam o hexágono) tal mapa na esfera  $\mathbb{S}_0$  particiona esta superfície em dois polígonos. Em particular se um mapa tem ao menos um ciclo, então a partição é conformada ao menos por dois polígonos.

Não obstante, dentro do conjunto de todas as permutações  $(\sigma, \alpha)$  que geram mapas enraizados com uma face esta solução não é única. Em particular, soluções diferentes necessariamente correspondem a indexações de diferentes mapas. Isto significa

- Se dois pares de diferentes permutações  $(\sigma, \alpha)$  e  $(\sigma', \alpha')$  satisfazem  $\sigma' \circ \alpha' = \sigma \circ \alpha = (1\ 2 \cdots 2n)$  então  $(\sigma, \alpha)$  e  $(\sigma', \alpha')$  não são equivalentes.

Em particular como  $\sigma = (1\ 2 \cdots 2n)\alpha$ , o número de diferentes classes de equivalências (representadas pelos diferentes pares  $(\sigma, \alpha)$ ) é idêntico ao número de possíveis escolhas de  $\alpha$ . O primeiro ciclo de  $\alpha$  pode ser escolhido de  $(2n - 1)$  maneiras, o segundo de  $(2n - 3)$  maneiras, o terceiro de  $(2n - 5)$  maneiras. Como  $\alpha$  tem  $n$  ciclos temos que o número total de diferentes mapas enraizados que particionam a superfície  $\mathbb{S}_g$  em um único polígono é:

$$(2n - 1)(2n - 3)(2n - 5) \cdots (3)(1) = (2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (3.8)$$

### Mapas enraizados planares de uma face

Em particular, existem dois diferentes tipos de mapas enraizados que particionam  $\mathbb{S}_g$  em um único polígono: Planares e não planares. Os mapas enraizados planares que particionam  $\mathbb{S}_g$  em um único polígono não podem ter ciclos (ver figura 3.9) já que de ter um ciclo isto implica em uma partição de  $\mathbb{S}_g$  em ao menos dois polígonos.

Isto significa que os mapas enraizados planares com uma face são necessariamente árvores com uma raiz. Como enumerar este subconjunto de árvores enraizadas de  $n$  lados? Suponha que o número de tais árvores é  $C_n$ . Este problema é determinado se encontramos uma forma explícita de construir estes objetos. Se uma árvore tem  $n$  lados, então necessariamente tem  $n + 1$  vértices (ver a fórmula de Euler). Tomemos o lado que



Figura 3.10:  $\mathfrak{S}_m$  (ou respetivamente  $\mathfrak{S}_l$ ) são um conjunto de árvores de  $m$  (ou respetivamente  $l$ ) lados com um certo vértice diferenciado o qual será identificado com o vértice da direita (esquerda) na figura e tal que, ao escolher todas as possibilidades, obtemos todas as possíveis árvores de uma face.

contem a raiz e é adjacente a dois vértices (ver figura 3.10), em cada um destes vértices podemos construir duas subárvores de  $m$  e  $l$  lados respetivamente. Se  $m + l = n - 1$ , então, obtemos uma árvore enraizada de  $n$  lados. Consideremos todas as possíveis subárvores  $\mathfrak{S}_m$  de  $m$  lados, tal que ao ser colocadas de todas as formas possíveis nos dois vértices leve ao conjunto  $C_n$  de árvores enraizadas. Seja  $S_m$  o número de elementos de  $\mathfrak{S}_m$  então

$$C_n = \sum_{m=0}^{n-1} S_m S_{n-1-m} \quad (3.9)$$

O conjunto de árvores enraizadas “quebra” todas as possíveis simetrias de uma árvore. Isto é consequência da raiz. Mas vemos que o conjunto de subárvores  $\mathfrak{S}_m$  inseridas não tem raiz. No entanto, devem ser inseridas todas as possíveis subárvores, mesmo sendo simétricas (ver figura 3.11). Assim, temos que  $S_m = C_m$  e obtemos a seguinte recorrência

$$C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m C_{n-1-m} \quad (3.10)$$

que é a recorrência dos números de Catalan (ver cap. 2), assim

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (3.11)$$

Note que o número de mapas enraizados não planares de uma cara é simplesmente

$$(2n-1)!! - C_n = \frac{(2n)!}{n!} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \quad (3.12)$$

### Mapas enraizados planares

Na subsecção anterior enumeramos o conjunto de mapas enraizados planares de uma cara. Estes estão embebidos na esfera bidimensional  $\mathbb{S}_0$ , em particular existem mapas enraizados planares de 2, 3, 4, ... faces, os quais estão em  $\mathbb{S}_0$  e não são árvores. O número destes mapas é evidentemente não finito, mas podemos particionar este conjunto em subconjuntos de acordo as regras do capítulo 2. Por exemplo, quantos mapas enraizados planares de  $n$  lados existem? Quantos mapas de  $m$  vértices existem? Quantos mapas com  $n$  lados e  $m$  vértices existem? (O último subconjunto é simplesmente a intersecção dos

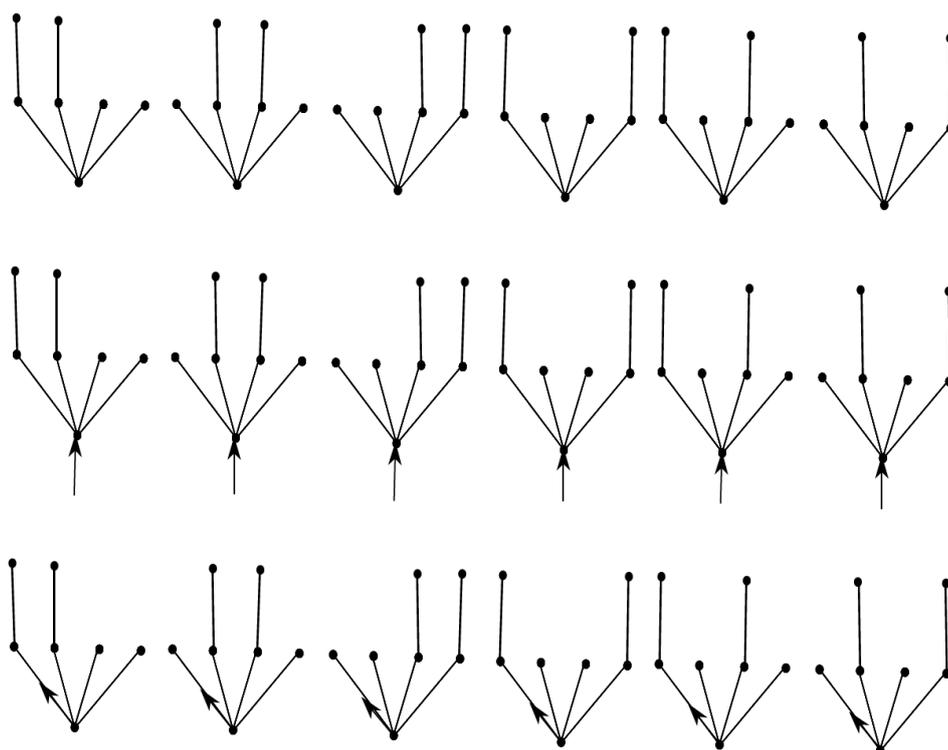


Figura 3.11: Os seis primeiros grafos da parte superior correspondem a árvores sem raiz gerados a partir de um vértice particular, eles formam parte de  $\mathfrak{S}_6$ , porem, apresentam simetrias, fazendo com que só dois deles sejam diferentes. O vértice particular é identificado com o vértice direito da figura 3.10, formando as seis árvores do meio. A inserção do lado com uma raiz faz com que a simetria seja perdida, implicando em que os seis subgrafos do meio sejam todos diferentes. Os últimos seis grafos correspondem com árvores enraizadas, e temos uma associação univoca com cada grafo do meio. A construção anterior pode ser generalizada para cada subárvore de  $\mathfrak{S}_m$ . Assim temos  $|\mathfrak{S}_m| = C_m$ .

dois anteriores.) Para  $n$  e  $m \in \mathbb{N}$ , obtemos uma partição do conjunto de infinitos mapas enraizados planares em subconjuntos finitos.

Antes de começar nossa enumeração, vamos definir dois novos conceitos. A face enraizada de um mapa enraizado é a face que contem a raiz de tal modo que o polígono em questão tenha orientação horaria (desta forma foi que caracterizamos os polígonos quando realizamos sua caracterização pela permutação  $\sigma \circ \alpha$ , ver figura 3.7 e figura 3.13)

Uma segunda definição é a de mapa enraizado dual: dado um mapa enraizado, seu dual é um mapa enraizado associado univocamente cujos vértices correspondem com as faces do primeiro mapa, e cujas faces cobrem os vértices do primeiro mapa. Se  $m$  lados separam duas caras do primeiro mapa, então teremos  $m$  lados no mapa dual conectando os dois vértices duais correspondentes, de tal forma que cada lado do mapa dual atravesse um dos  $m$  lados do primeiro mapa (ver figura 3.14.) O vértice ligado com a raiz do dual corresponde com a face enraizada do primeiro mapa. Em termos combinatórios, o mapa

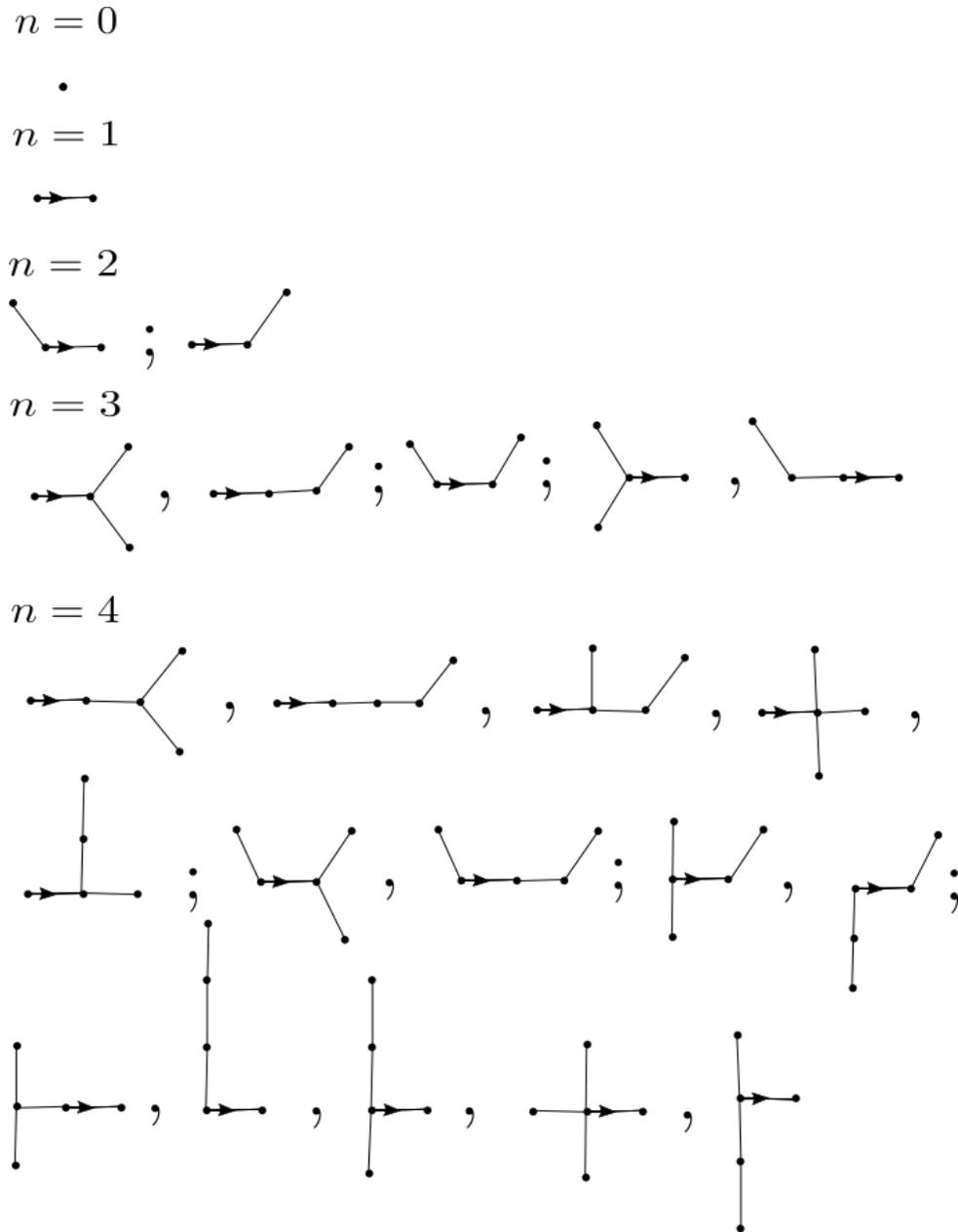


Figura 3.12: Construção recursiva das árvores enraizadas até  $n = 4$ , note que para  $m < n$  temos que  $\mathfrak{S}_m$  corresponde com as árvores enraizadas de  $m$  lados. A recorrência (3.11) também determina simbolicamente a construção das árvores enraizadas. Por exemplo para  $n = 4$  temos que cada termo de  $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0$  determina as respectivas árvores em concordância com a figura 3.10. As cinco primeiras arvores são determinadas por  $C_0C_3$ , as seguintes duas por  $C_1C_2$ , assim sucesivamente.

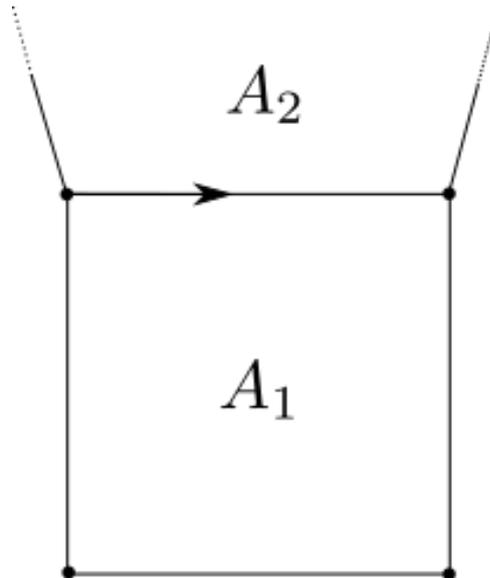


Figura 3.13: As regiões  $A_1$  e  $A_2$  são adjacentes à raiz. A região  $A_1$  é a face enraizada já que o sentido dado pela raiz a esta face é horário (note que a raiz dá um sentido anti-horário à região  $A_2$ ).

dual é caracterizado pela transformação  $\sigma_d = (\sigma \circ \alpha)^{-1}$  e  $\alpha_d = \alpha$ . Particularmente

$$\sigma_d \circ \alpha_d = \alpha \circ \sigma^{-1} \circ \alpha$$

é a permutação que caracteriza as faces duais.

A partir de aqui usaremos a ferramenta do gerador funcional para contar explicitamente o número de mapas enraizados planares em função do número de lados. Como vimos no capítulo 2, dada uma classe de conjuntos  $\{\mathcal{C}_n\}$  indexada por  $n \geq 0$  e inteiro, com  $c_n = |\mathcal{C}_n|$  a cardinalidade dos conjuntos. O gerador funcional é a serie formal

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (3.13)$$

Dada outra classe  $\{\mathcal{D}_n\}$  de conjuntos indexado pelos inteiros não negativos, com gerador funcional  $W(x)$  e com  $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{C}_n = \emptyset$ , a união  $\mathcal{D}_n \cup \mathcal{C}_n \forall n$  forma outra classe de conjuntos  $\mathcal{E}_n$  com gerador funcional  $V(x)$  igual a

$$V(x) = W(x) + Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n + c_n) x^n \quad (3.14)$$

Outra construção consiste em tomar todos os possíveis pares ordenados  $\mathcal{C}_n \times \mathcal{D}_m$  e tomar uma nova classe de conjuntos

$$\mathcal{F}_\ell = \bigcup_{n+m=\ell} \mathcal{C}_n \times \mathcal{D}_m,$$

aqui, a união é feita sobre todos os pares  $(n, m)$  que satisfazem a condição  $\ell = n + m$

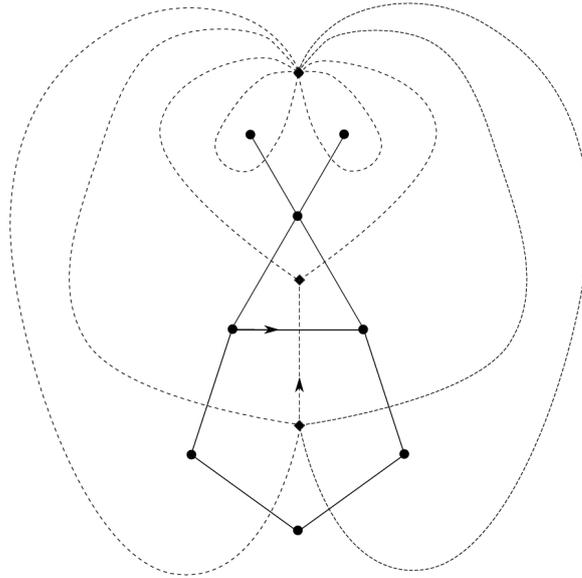


Figura 3.14: Um mapa enraizado (vértices em formato de círculos e linhas grossas) e seu dual (vértices em formato de losangos e linhas a traços.) Vértices são mapeados nas faces dos dual e vice-versa. Os lados são mapeados em uma correspondência um a um; na figura a correspondência é dada pelos lados que se interceptam. O vértice adjacente à raiz é mapeado ao vértice correspondente com a face enraizada, neste caso o pentágono.

O gerador funcional para o número de elementos de  $\mathcal{F}_n$  neste caso é

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = Z(x)W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n c_m d_{n-m} \right) x^n \quad (3.15)$$

A moral da história é simples, operações sobre conjuntos tem uma representação explícita nos respectivos geradores funcionais. Em nosso caso, veremos como certas operações sobre os mapas enraizados, tem uma expressão explícita no respectivo funcional gerador. Chamemos o funcional gerador dos mapas enraizados planares respeito ao número de lados  $M_0(x)$

$$M_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_0(n) x^n.$$

Onde  $m_0(n)$  conta o número de mapas enraizados planares com  $n$  lados. Se desejamos contar os mapas pelo número de lados e por outra variável adicional, por exemplo, o número de lados na face enraizada (a qual, na realidade, correspondem com pontas do mapa, ver a caracterização de um polígono pela permutação  $\sigma \circ \alpha$ ), podemos generalizar o gerador funcional usando duas variáveis

$$M_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m_0(n, l) x^n y^l \quad (3.16)$$

Onde  $m_0(n, l)$  conta o número de mapas planares com  $n$  lados e  $l$  pontas da face enraizada. Calculemos  $M_0(x, 1)$

$$M_0(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} m_0(n, l) \right) x^n \quad (3.17)$$

Evidentemente, temos que  $m_0(n, 1) + m_0(n, 2) + \dots = m_0(n)$  já que a soma da esquerda conta todas as possibilidades, dando no final todos os mapas enraizados planares com  $n$  lados (já que  $m_0(n)$  é um inteiro positivo ao igual que  $m_0(n, l)$ , temos que  $m_0(n, l) \neq 0$  só para um número finito de diferentes valores de  $l$ .) Assim, temos que  $M_0(x, 1) = M_0(x)$ .

A variável adicional  $y$  é chamada na literatura de variável catalítica, isto porque fornece uma relação direta que o funcional gerador  $M_0(x, y)$  deve satisfazer. A técnica para o cálculo de  $m_0(n)$  é devida a W. Tutte, [52] em um trabalho que influenciou toda a posterior literatura.

Tomemos um mapa planar enraizado qualquer, se eliminamos o lado que contem a raiz, duas possibilidades podem acontecer:

- Se eliminamos o lado que contem a raiz, então o mapa que resta desta operação é desconectado em duas componentes.
- Se eliminamos o lado que contem a raiz, então o mapa que resta desta operação continua sendo conectado.

O primeiro caso é semelhante ao caso das árvores planares descritos nas figuras 3.10 e 3.11, com a diferença que o conjunto  $\mathfrak{S}_I$  neste caso não são árvores. Porém, pelo mesmo argumento, pode ver-se que a cardinalidade dos conjuntos  $\mathfrak{S}(n_i, l_i)$  (agora indexados por  $n_i$  e  $l_i$ , onde  $i \in \{1, 2\}$ , com  $n_1 + n_2 = n - 1$  e  $l_1 + l_2 = l - 2$ ) satisfazem  $|\mathfrak{S}(n_i, l_i)| = m_0(n_i, l_i)$ .

A ideia é simples, da figura 3.15, vemos que os dois mapas planares  $\in \mathfrak{S}(n_i, l_i)$ , que conformam o mapa enraizado planar principal (ao adicionar o lado que contem a raiz) tem a face externa conformada por  $l_1$  e  $l_2$  pontas respectivamente. O mapa enraizado planar principal tem como face enraizada a face externa, também tem  $n_1 + n_2$  lados mais um lado adicional (os antigos e o novo que contem a raiz), entanto que o número de pontas que conformam a face enraizada externa contem  $l_1 + l_2$  pontas e dois pontas adicionais.

Em particular, todos os mapas enraizados planares que são desconectados ao eliminar a raiz, podem se obter do gerador funcional  $M_0(x, y)$  a partir de

$$xy^2 M_0^2(x, y) \quad (3.18)$$

Onde  $M_0^2(x, y)$  corresponde com todas as possíveis componentes de  $\mathfrak{S}(n_i, l_i)$  inseridas,  $x$  corresponde com o lado adicional que contem a raiz e  $y^2$  corresponde com os dois lados

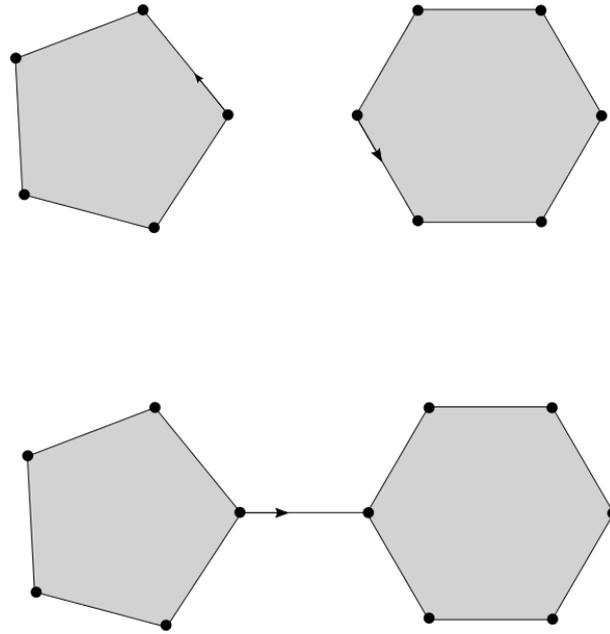


Figura 3.15: A figura superior corresponde com dois mapas enraizados planares desconectados pertencentes a  $\mathfrak{S}(n_1, 5)$  e  $\mathfrak{S}(n_2, 6)$  com a face enraizada de cada um a face externa (esta escolha sempre é possível, lembre que os mapas enraizados planares estão embebidos na esfera  $\mathbb{S}_0$  e o que parece interno e externo localmente e intercambiável por um simples homeomorfismo na esfera.) A figura inferior corresponde a um mapa planar enraizado de  $n = n_1 + n_2 + 1$  lados e a face enraizada (face externa) sendo um polígono de  $5 + 6 + 2 = 13$  lados. Para construir todos os  $m_0(n+1, 13)$  mapas enraizados planares, pelo mesmo argumento da árvores planares enraizadas, inserimos todos os possíveis mapas enraizados planares em  $\mathfrak{S}(n_1, l_1)$  (esquerda) e em  $\mathfrak{S}(n_2, l_2)$  (direita) com a condição  $n_1 + n_2 + 1 = n$  e  $l_1 + l_2 + 2 = 13$ .

adicionais do polígono correspondente com a face enraizada (face externa na figura 3.15 inferior)

Estudemos agora o segundo caso: o mapa planar que fica ao eliminar o lado que contem a raiz do mapa planar enraizado é conectado. Suponha um mapa planar enraizado arbitrário  $m \in \mathfrak{S}(n, l)$  de  $n$  lados com uma face enraizada de  $l$  lados (na figura 3.16 tal face enraizada pode sempre ser escolhida como a face externa.) de quantas diferentes formas podemos obter um novo mapa planar enraizado de  $n + 1$  lados a partir de  $m$ ? Consideremos o vértice adjacente à raiz de  $m$ , inserimos uma das pontas do novo lado neste vértice e consideramos esta ponta como a nova raiz. As diferentes formas de ligar a outra ponta com outro vértice de  $m$  fornece a resposta. É claro que só os vértices correspondentes com a face externa da figura apresentam contribuição (Os vértices das faces internas adjacentes ao vértice enraizado poderiam contribuir, mas só duas situações podem acontecer: ou a face adjacente é simétrica respeito à face externa correspondendo à mesma situação e, por tanto, sendo um caso indistinguível; ou a face adjacente é diferente, mas tal contribuição pode ser estudada em outro mapa  $m'$  de  $\mathfrak{S}(n, l')$ , com esta face adjacente sendo a face enraizada de  $m'$ . Faces não adjacentes não apresentam contribuição já que o novo mapa enraizado seria

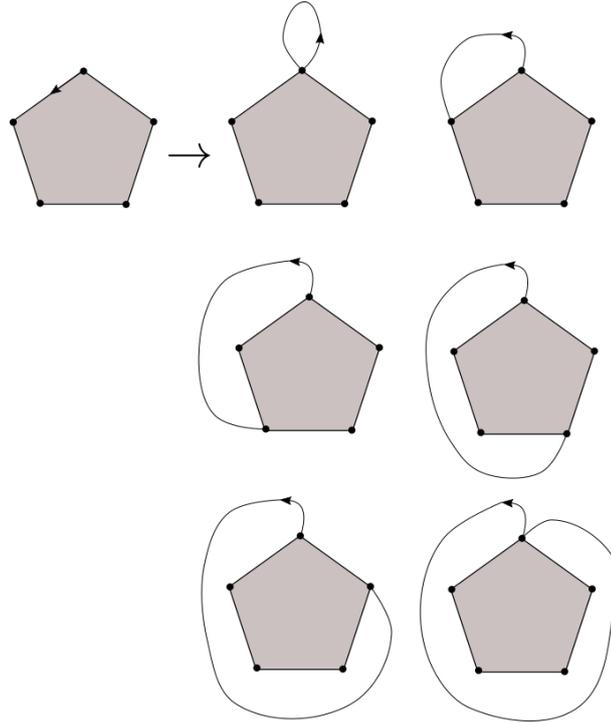


Figura 3.16: O mapa da esquerda corresponde a um mapa planar enraizado arbitrário de  $n$  lados e face enraizada (na figura a face externa) de 5 lados. Na direita, as diferentes formas (únicas) de construir um mapa enraizado de  $n + 1$  lados e face enraizada de  $l$  lados ao adicionar um novo lado ao mapa da esquerda e que contenha a raiz adjacente ao mesmo vértice. Neste caso temos  $l = 6, 5, 4, 3, 2, 1$ , seis possibilidades, todas mostradas no lado direito.

não planar.) Assim temos  $l + 1$  diferentes possíveis construções, cada uma com uma face externa enraizada de  $1, 2, 3, \dots, l + 1$  lados (ver figura 3.16).

Em particular, no gerador funcional, o mapa  $m$  corresponde a um termo  $x^n y^l$ . Ao adicionar o novo lado enraizado, temos que os novos  $l + 1$  mapas enraizados gerados a partir de  $m$  correspondem no gerador funcional com

$$x^n y^l \rightarrow x^{n+1} (y + y^2 + y^3 + \dots + y^{l+1}) = xy \frac{y(x^n y^l) - x^n}{y-1} \quad (3.19)$$

A relação anterior é válida para um mapa enraizado, em particular é válida para todos os mapas, isto é

$$M_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_0(n, l) x^n y^l \rightarrow xy \frac{y(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_0(n, l) x^n y^l) - (\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_0(n, l) x^n)}{y-1}$$

ou, usando (3.16) e (3.17)

$$M_0(x, y) \rightarrow xy \frac{yM_0(x, y) - M_0(x, 1)}{y-1} \quad (3.20)$$

Por último, o mapa enraizado planar correspondente com  $n = 0$  e  $l = 0$  (um só vértice, no gerador funcional corresponde com o termo  $x^0 y^0 = 1$ ) é o único que não entra nesta construção. Os demais entram em algum dos dois casos estudados. Assim todos os mapas podem ser gerados desta 3 formas, significando que o gerador funcional  $M_0(x, y)$  deve satisfazer:

$$M_0(x, y) = 1 + xy^2 M_0^2(x, y) + xy \frac{yM_0(x, y) - M_0(x, 1)}{y - 1} \quad (3.21)$$

Como dar uma solução a este problema? E tera uma solução ou múltiplas soluções? Pode-se demonstrar-se por métodos algébricos que a solução existe e é necessariamente única. Tendo isto em mente, o seguinte procedimento possibilita o cálculo de  $M_0(x, 1)$ . Primeiro, definamos o seguinte funcional

$$\Phi(M, N, x, y) = xy^2(1 - y)M^2 - (xy^2 + 1 - y)M + (1 - y) + xyN \quad (3.22)$$

de tal forma que 3.21 implica

$$\Phi(M_0(x, y), M_0(x, 1), x, y) = 0 \quad (3.23)$$

Suponhamos agora o funcional obtido ao derivar parcialmente  $\Phi$  respeito a  $M$ . Em princípio, este é outro funcional,  $\Phi_1(M, x, y)$  que satisfaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M} = \Phi_1(M, x, y) = 2xy^2(1 - y)M - (xy^2 + 1 - y). \quad (3.24)$$

Suponhamos agora que existe um  $y = Y(x)$  tal que  $\Phi_1(M, x, Y(x)) = 0$ . Pode-se verificar que esta condição determina um certo  $M'$

$$M' = \frac{xY^2 + 1 - Y}{2(1 - Y)xY^2} \quad (3.25)$$

Completando quadrados para  $M$  em (3.22), podemos reescrever  $\Phi$  como

$$\Phi(M, N, x, y) = xy^2(1 - y) \left[ \left( M - \frac{xy^2 + 1 - y}{2xy^2(1 - y)} \right)^2 + \frac{1}{xy^2} - \frac{(xy^2 + 1 - y)^2}{4x^2y^4(1 - y)^2} + \frac{xyN}{xy^2(1 - y)} \right] \quad (3.26)$$

Em particular, usando o resultado para  $\Phi_1$  devemos ter que

$$\Phi(M', N, x, Y(x)) = xY^2(1 - Y) \left[ + \frac{1}{xY^2} - \frac{(xY^2 + 1 - Y)^2}{4x^2Y^4(1 - Y)^2} + \frac{xYN}{xY^2(1 - Y)} \right] \quad (3.27)$$

Suponhamos agora que existe um  $N'$  tal que  $\Phi(M', N', x, Y(x)) = 0$ . Como a solução de (3.21) é única, necessariamente  $N' = M_0(x, 1)$ .

Esta condição implica

$$\frac{1}{xY^2} - \frac{(xY^2 + 1 - Y)^2}{4x^2Y^4(1 - Y)^2} + \frac{N'}{Y(1 - Y)} = 0 \quad (3.28)$$

Definamos agora outro funcional  $\Phi_2$  como

$$\Phi_2(M, N, x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.29)$$

Como a solução  $\phi(M', N', x, y)$  em (3.23) é identicamente igual a zero (isto é, corresponde com a função zero) necessariamente

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(M', N', x, y) = 0 \quad (3.30)$$

A equação anterior implica que  $\Phi_2(M', N', x, Y(x)) = 0$ . Usando (3.28) e (3.25) ao derivar explicitamente respeito a  $y = Y(x)$ , chegamos à seguinte condição:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{1}{xY^2} - \frac{(xY^2 + 1 - Y)^2}{4x^2Y^4(1 - Y)^2} + \frac{N'}{Y(1 - Y)} \right] = 0 \quad (3.31)$$

Das equações (3.28) e (3.31) é fácil eliminar  $N'$  e obter uma equação explícita que relaciona  $x$  e  $Y$ . Em particular

$$(xY^2 + Y - 1)(xY^2 - (Y - 1)(3 - 2Y)) = 0 \quad (3.32)$$

Temos duas possíveis escolhas de  $Y(x)$ . A correta (que leva à contagem certa) é

$$x = \frac{(Y - 1)(3 - 2Y)}{Y^2}. \quad (3.33)$$

Introduzindo esta relação para  $x$  em (3.28), obtemos

$$N' = M_0(x, 1) = M_0(x) = \frac{Y(x)[4 - 3Y(x)]}{(2Y(x) - 3)^2} \quad (3.34)$$

As duas equações anteriores podem reescrever-se como dois diferentes polinômios em  $y$

$$P_1(y) = (2 + x)y^2 - 5y + 3, \quad P_2(y) = (4M_0 + 3)y^2 - (12M_0 + 4)y + 9M_0 \quad (3.35)$$

Satisfazendo a condição  $P_1(Y) = P_2(Y) = 0$ , isto implica que os dois polinômios tem  $Y$  como raiz em comum. Em particular, isto implica que o resultante de  $P_1$  e  $P_2$  seja zero. O

resultante em questão é o seguinte determinante (Em apêndice C definimos o resultante de dois polinômios)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2+x & 0 & 4M_0+3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2+x & -(12M_0+4) & 4M_0+3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 9M_0 & -(12M_0+4) & 4M_0+3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9M_0 & -(12M_0+4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9M_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

simplificando obtemos a seguinte relação entre  $M_0$  e  $x$

$$27x^2M_0^2 + (1-18x)M_0 + 16x - 1 = 0 \quad (3.37)$$

Existem duas soluções a esta equação. A que corresponde com o nosso problema é

$$M_0(x) = \frac{18x - 1 + (1 - 12x)^{3/2}}{54x^2} \quad (3.38)$$

função que corresponde com o gerador funcional do número de mapas enraizados planares respeito ao número de lados. Expandindo em série de Taylor a expressão  $(1 - 12x)^{3/2}$  ao redor de  $x = 0$

$$(1 - 12x)^{3/2} = 1 - 18x + 54x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{3^{n+1}2^3 [2(n-3)+1]! x^n}{n!(n-3)!} \right) \quad (3.39)$$

onde usamos o seguinte fato para  $n \geq 3$

$$\frac{d^n}{dx^n} (1 - 12x)^{3/2} = \frac{3(12)^n [2(n-2)-1]!}{2^n 2^{n-3} (n-3)!} (1 - 12x)^{\frac{3}{2}-n} \quad (3.40)$$

Inserindo (3.39) em (3.38), obtemos

$$M_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_0(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 2^2 (2n-1)!}{(n+2)!(n-1)!} x^n. \quad (3.41)$$

Assim, podemos escrever o número  $m_0(n)$  de mapas enraizados planares em função dos velhos conhecidos números de Catalan

$$m_0(n) = \frac{2 \times 3^n}{n+2} C_n. \quad (3.42)$$

Que é uma fórmula extremamente simples. O seguinte passo seria contar o número de mapas enraizados de  $n$  lados para um dado  $g$  diferente de zero. Ampla literatura existe apresentando diferentes métodos para obter  $m_g(n)$  [53] [20] [5]. Porém, agora vamos focar só no caso específico do número total  $m(n)$  de mapas enraizados de  $n$  lados para todos

os possíveis  $g$ 's. Como veremos mais tarde, o número  $m(n)$  também conta o número de diferentes diagramas de Feynman de ordem  $n$  para o caso fermiônico não relativista de muitos corpos.

### Número total de mapas enraizados de $n$ lados

A abordagem de Tutte da subseção anterior usada para a contagem de todos os mapas enraizados planares respeito ao número de lados, pode ser generalizada para a contagem de todos os mapas enraizados de  $n$  lados. Isto foi conseguido por D. Arquès e J. Béraud obtendo uma fórmula geral de contagem [20]. A primeira diferença é o uso de um novo gerador funcional  $M(x, z)$  com  $z$  uma nova variável catalítica que corresponde com o número de vértices dos mapas. Assim temos

$$M(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(n, k) x^n z^k \quad (3.43)$$

onde  $m(n, k)$  conta o número de mapas enraizados com  $n$  lados e  $k$  vértices. Evidentemente  $M(x, 1)$  corresponde com o gerador funcional dos mapas enraizados de  $n$  lados. Como antes, temos que  $m(n) = m(n, 1) + m(n, 2) + \dots$  é sempre um número finito.

Como no caso planar, temos exatamente duas possibilidades: a eliminação do lado que contem a raiz desconecta o mapa em duas componentes, ou deixa o mapa conectado. O primeiro caso contribui exatamente como o caso planar, isto é, todos estes mapas podem ser obtidos a partir de

$$xM^2(x, z) \quad (3.44)$$

A diferença do caso planar (onde a variável catalítica correspondente se relaciona com a face enraizada do mapa), vemos que aqui o número de vértice é o mesmo.

A diferença com os mapas planares, repousa substancialmente no segundo caso. Podem verificar-se duas contribuições. A primeira corresponde com a situação em que o lado enraizado eliminado corresponde a um loop planar com a face enraizada sendo a região interna do loop (um loop corresponde a um lado cujas pontas incidem em um único vértice, entanto que um loop planar tem como interior uma parte da superfície  $\mathbb{S}_g$ ). Dado um mapa enraizado qualquer, podemos adicionar o loop planar em questão dentro da face enraizada, de tal forma que as duas pontas incidam no vértice enraizado do primeiro mapa (ver figura 3.17. A nova raiz corresponderá com a ponta adjacente à antiga raiz em sentido horário (ou na linguagem de permutações, com a ponta  $\sigma^{-1}(r)$ , sendo  $r$  a antiga raiz.) Todas as possíveis construções dentro desta contribuição vem dadas por

$$xM(x, z) \quad (3.45)$$

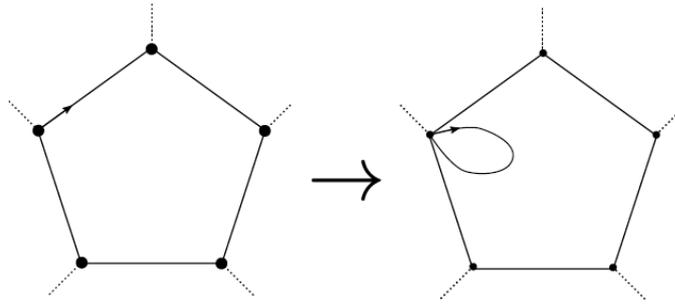


Figura 3.17: Construção de um mapa enraizado, com o lado enraizado sendo um loop planar. O mapa enraizado da esquerda tem como face enraizada o pentágono. O loop planar é adicionado na figura da direita, dentro da face enraizada (polígono), com as duas pontas incidindo no vértice enraizado do primeiro mapa (esquerda.) A nova raiz (direita) está na ponta adjacente à antiga raiz girando em sentido horário. A face enraizada do mapa da direita corresponde à região interna do loop.

A segunda contribuição corresponde ao caso em que o lado enraizado eliminado não é o loop planar considerado na primeira contribuição. Isto significa que o lado enraizado eliminado é adjacente a dois vértices diferentes, ou é um loop cuja região interior não corresponde com a face enraizada (lembramos também a condição original, a eliminação do lado enraizado, não desconecta o mapa). Dado um mapa enraizado arbitrário de  $n$  lados e  $k$  vértices, existem  $2n$  diferentes formas de construir um novo mapa enraizado, satisfazendo a condição, e que tem  $n + 1$  lados e  $k$  vértices. Para ver isto consideremos um mapa enraizado arbitrário de  $n$  lados com a face enraizada sendo um polígono de  $l$  lados ( $l$  pontas do mapa). Primeiramente, vamos adicionar um novo lado com uma das suas pontas incidindo no vértice enraizado do mapa inicial, esta será a nova raiz. Existem  $2n$  diferentes formas de conectar a outra ponta aos  $k$  vértices do mapa. Enumeremos todos estes casos:

- A outra ponta é conectada ao vértice adjacente à raiz do mapa inicial com o novo lado associado sendo contido na face enraizada do mapa inicial, de tal forma que a nova face enraizada seja a região externa ao loop. Veja-se que isto é diferente à primeira contribuição antes estudada, já que simplesmente muda a orientação do lado enraizado, gerando outro mapa diferente. Note que estes casos são sempre diferentes já que os dois geram diferentes faces enraizadas. (Na figura 3.17 simplesmente mudamos a orientação da raiz na figura da esquerda, fazendo que a região externa ao loop planar seja a face enraizada de 6 lados. Esta nova face enraizada sempre tem ao menos dois lados e portanto sempre difere da primeira contribuição).
- A outra ponta incide em algum dos  $l - 1$  vértices adjacentes às outras  $l - 1$  pontas que correspondem aos  $l - 1$  lados da face enraizada do mapa inicial, de tal forma que o novo lado enraizado esteja contido na face enraizada do mapa inicial (ver figura 3.18).
- A outra ponta incide em algum dos vértices adjacentes às outras  $2n - l$  pontas que

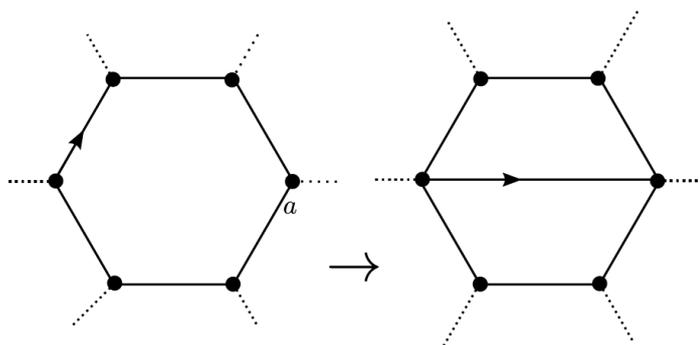


Figura 3.18: A figura da esquerda corresponde com um mapa enraizado arbitrário, com face enraizada de seis lados, a ponta  $a$  corresponde a um lado de esta face. O mapa da direita, tem um novo lado enraizado, com a raiz incidindo no mesmo vértice que o mapa da esquerda, a outra ponta do novo lado incide no vértice adjacente à ponta  $a$ . Note que para este caso existem 5 escolhas diferentes da ponta  $a$  tal que o novo lado enraizado incida em dois vértices diferentes. Note que o mapa enraizado da direita, além de ter um lado a mais, tem uma face adicional.

correspondem aos lados das outras faces do mapa (já consideramos a face enraizada do mapa inicial). Em particular, este novo lado não pode ser desenhado na superfície  $\mathbb{S}_g$  do mapa inicial, já que o lado interceptaria outros lados do mapa fora dos vértices. Para evitar isto, temos que aumentar o genus da superfície para  $\mathbb{S}_{g+1}$  com a seguinte construção: consideramos a face enraizada do mapa inicial e a face correspondente ao outro vértice elegido, desenhamos um círculo dentro de cada uma destas duas faces e tiramos a região interna destes dois círculos. Logo colamos as duas bordas e conectamos os correspondentes vértices (ver figura 3.19). Em total temos  $2n - l$  diferentes novos mapas enraizados.

Somando estas três diferentes contribuições, temos  $2n$  diferentes novos mapas a partir do mapa inicial. Como considerar este processo a partir de  $M(x, z)$ ? Todos os possíveis mapas dentro desta última contribuição podem ser construídos a partir de

$$(2x)x \frac{d}{dx} M(x, z) \quad (3.46)$$

Isto é fácil de ver, o mapa enraizado inicial de  $n$  lados e  $k$  vértices a partir da qual os outros  $2n$  são construídos, corresponde a um termo  $x^n z^k$  do gerador funcional. O operador  $2x^2 d/dx$  aplicado a  $x^n z^k$  produz  $2nx^{n+1} z^k$  que corresponde com os  $2n$  novos mapas gerados de  $n + 1$  lados (isto é  $2n$  novos termos com  $x^{n+1} z^k$ )

O único caso não considerado corresponde com o caso de um único vértice e nenhum lado. O que simplesmente corresponde a um termo  $z$ . Assim o gerador funcional

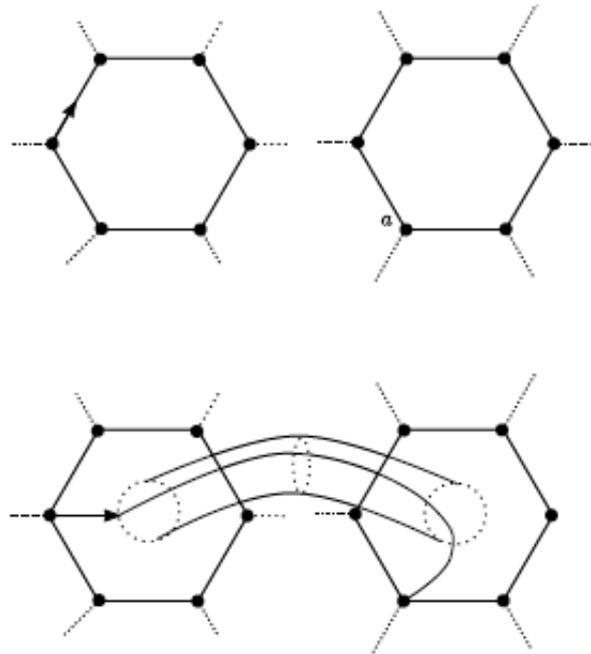


Figura 3.19: A figura de acima corresponde a duas faces de um mapa arbitrário, a da esquerda sendo a face enraizada. Na figura de embaixo adicionamos um novo lado que será o novo lado enraizado. A nova raiz incide no mesmo vértice que o mapa de acima, porém a outra ponta deve incidir no vértice incidido pela ponta  $a$  na outra face. Isto não pode ser realizado sobre a superfície  $\mathbb{S}_g$ , já que o lado adicionado interceptaria outro lado de mapa. Para evitar isto, fazemos em cada face um círculo, tiramos a região interna e conectamos as bordas (cilindro na figura). A nova superfície é  $\mathbb{S}_{g+1}$ , e o novo mapa enraizado embebido nela tem um lado a mais. As duas faces na figura superior agora se reduzem a uma só, com seus lados sendo a soma dos lados das faces mais as duas pontas do novo lado enraizado, pode constatar-se isto diretamente na fórmula de Euler (lembre que os lados das faces correspondem às pontas dos lados do mapa).

$M(x, z)$  deve satisfazer

$$M(x, z) = z + xM^2(x, z) + xM(x, z) + 2x^2 \frac{d}{dx} [M(x, z)] \quad (3.47)$$

Considerando  $z = 1$ , e somando sobre todos os  $k$  em (3.43) obtemos o gerador funcional do número de mapas enraizados.

$$M(x, 1) = M(x) = 1 + xM^2(x) + xM(x) + 2x^2 \frac{d}{dx} [M(x)] \quad (3.48)$$

Antes de continuar e tentar resolver esta equação, primeiro vamos ver quem é  $m(n, 1)$ , isto é, o número de mapas enraizados de  $n$  lados e um único vértice. Como a transformação de um mapa enraizado em seu dual é uma bijeção, o subconjunto de mapas enraizados de um único vértice é mapeado em algum subconjunto dos mapas enraizados. Pode mostrar-se que os mapas duais em questão são os mapas enraizados de uma única

cara. Estes foram estudados na subseção 3.3, e seu número é

$$m(n, 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (3.49)$$

Considerando  $T(x) = \sum_n m(n, 1)x^n$  como o gerador funcional dos mapas enraizados de uma face, vemos que estes podem ser gerados a partir do mesmo subconjunto de mapas enraizados de uma face pelas mesmas operações analisadas para o conjunto de todos os mapas enraizados deduzida na equação (3.48), com a única diferença que o termo  $xM^2(x)$  não apresenta contribuição neste caso (já que para desconectar o mapa eliminando o lado enraizado, o mapa em questão deve ter ao menos dois vértices.) assim  $T(x)$  deve satisfazer

$$T(x) = 1 + xT(x) + 2x^2 \frac{d}{dx} [T(x)] \quad (3.50)$$

Temos também que, da definição  $T(x)$  e do gerador (3.43)

$$T(x) = \left[ \frac{M(x, z)}{z} \right]_{z=0} = \left( \frac{\partial M(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (3.51)$$

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar explicitamente uma fórmula (devida a Arqués e Beraud) que determina o número total de mapas enraizados de  $n$  lados. Para calcular ela, convém determinar outra relação que é satisfeita pelo gerador funcional  $M(x, z)$ . Vamos definir o novo funcional,  $M^{(w)}(x, z)$ , com  $w$  um inteiro positivo, que satisfaz

$$M^{(w)}(x, z) = z + w + x(M^{(w)}(x, z))^2 + xM^{(w)}(x, z) + 2x^2 \frac{d}{dx} [M^{(w)}(x, z)] \quad (3.52)$$

Evidentemente  $M^{(0)}(x, z) = M(x, z)$ . Suponha que podemos escrever  $M^{(w)}(x, z)$  da seguinte forma

$$M^{(w)}(x, z) = \frac{z + w}{1 - xW(x, z)} \quad (3.53)$$

com  $W(x, z)$  uma função de  $x$  e  $z$ . Substituindo (3.53) em (3.52) obtemos

$$\frac{z + w}{1 - xW(x, z)} = z + w + x \left( \frac{z + w}{1 - xW(x, z)} \right)^2 + x \frac{z + w}{1 - xW(x, z)} + 2x^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{z + w}{1 - xW(x, z)} \right] \quad (3.54)$$

Esta equação pode se reescrever, depois de um calculo tedioso, como

$$W(x, z) = z + w + 1 + xW^2(x, z) + xW(x, z) + 2x^2 \frac{d}{dx} [W(x, z)] \quad (3.55)$$

esta é exatamente a equação (3.52) para  $w + 1$ , portanto temos que  $W(x, z) = M^{(w+1)}(x, z)$ , significando que

$$M^{(w)}(x, z) = \frac{z + w}{1 - xM^{(w+1)}(x, z)} \quad (3.56)$$

Em particular, temos que

$$M(x, z) = \frac{z}{1 - xM^{(1)}(x, z)} = \frac{z}{1 - x \left[ \frac{z+1}{1 - xM^{(2)}(x, z)} \right]} = \frac{z}{1 - x \left[ \frac{z+1}{1 - x \left[ \frac{z+2}{1 - xM^{(3)}(x, z)} \right]} \right]} \quad (3.57)$$

Evidentemente, isto leva à seguinte fracção continuada.

$$M(x, z) = \frac{z}{1 - x \frac{z+1}{1 - x \frac{z+2}{1 - x \frac{z+3}{1 - x \frac{z+4}{1 - x \frac{z+5}{1 - x [\dots]}}}}} \quad (3.58)$$

Em particular

$$M(x, z+1) = \frac{z+1}{1 - x \frac{z+2}{1 - x \frac{z+3}{1 - x \frac{z+4}{1 - x \frac{z+5}{1 - x \frac{z+6}{1 - x [\dots]}}}}} \quad (3.59)$$

Assim, podemos escrever

$$M(x, z) = \frac{z}{1 - xM(x, z+1)} \quad (3.60)$$

ou, usando (3.51)

$$T(x) = \left[ \frac{M(x, z)}{z} \right]_{z=0} = \frac{1}{1 - xM(x, 1)} = \frac{1}{1 - xM(x)} \quad (3.61)$$

A equação que determina  $m(n)$  é

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(n)x^n = M(x) = \frac{1}{x} \left[ 1 - \frac{1}{T(x)} \right] \quad (3.62)$$

$1/T(x)$  tem a seguinte forma

$$\frac{1}{T(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (3.63)$$

Substituindo em (3.62) obtemos simplesmente

$$m(n) = -b_{n+1} \quad (3.64)$$

Portanto, só é necessário determinar os coeficientes  $b_n$  de  $1/T(x)$ . Sabendo que

$$T(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(2a)!}{2^a a!} x^a$$

a equação que determina os coeficientes  $b_n$  é

$$1 = T(x) \left( \frac{1}{T(x)} \right) = b_0 \left( \frac{(2(0))!}{2^0 0!} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \left[ b_{n-k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \right] \right) x^n \quad (3.65)$$

ou

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^n \left[ b_{n-k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \right] = 0 \quad (3.66)$$

Equação que pode ser resolvida explicitamente para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Porém, todas as soluções parecem ter a seguinte forma

$$b_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1+\dots+a_{i+1}, n} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (3.67)$$

Esta formula pode ser mostrada por indução (ver apêndice B). Assim, o número  $m(n)$  de mapas enraizados de  $n$  lados é simplesmente

$$m(n) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1+\dots+a_{i+1}, n+1} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (3.68)$$

Que gera a seguinte sequência de números

$$2, 10, 74, 706, 8162, 110410, 1708394, \dots \quad (3.69)$$

está é a sequência OEIS A000698. No seguinte capítulo veremos esta sequência aparecer novamente, associada com outros objetos combinatórios, os diagramas de Feynman.

## Capítulo 4

# Diagramas de Feynman e mapas enraizados

Neste capítulo, vamos continuar nosso estudo enumerativo focando em outros objetos chamados diagramas de Feynman, ligados ao tratamento perturbativo em teoria quântica de campos. Eles estão relacionados a expansões perturbativas de importantes funções da teoria (funções de Green, funções de correlação, etc.) quando existe interação. Este tratamento parte do conhecido interaction picture, onde o operador de evolução do sistema (matrix  $S$ ) é determinado em uma expansão. Geralmente, cada diagrama esta associado com alguma integral, possivelmente divergente, e depois de ser resolvida (diretamente, ou por métodos de renormalização no caso da integral ser divergente) ela da sua contribuição em uma dada ordem de perturbação. Neste capítulo, vamos mostrar que o número de mapas enraizados com  $m$  lados coincide com o número de diagramas de Feynman de um gás fermiônico com interação a dois corpos na ordem  $m$ .

### 4.1 Teorema de Wick e os diagramas de Feynman da Teoria

Imaginemos um gás fermiônico de  $N$  partículas, com interação a dois corpos dependendo da distância entre as partículas. O Hamiltoniano de tal sistema pode-se expressar como

$$H = H_0 + H_I \tag{4.1}$$

Onde  $H_0$  é um operador composto pela soma de  $N$  operadores correspondentes à energia cinética de cada partícula e  $H_I$  é o operador composto pelas  $N(N - 1)/2$  interações a dois corpos. Convém formular este problema de muitos corpos, no espaço de Fock do

sistema (uma decomposição especial do espaço de Hilbert do sistema.) A partir de uma base particular do espaço de Hilbert para uma partícula (por exemplo a base de autoestados do operador energia cinética de uma partícula,) constrói-se uma base para o espaço de Fock, na que todos os operadores relevantes da teoria podem ser representados. Isto é o chamado formalismo de segunda quantização. No quadro de Heisenberg, este formalismo leva à função de Green exata do sistema, que possibilita o calculo das propriedades fundamentais do sistema em zero temperatura (o formalismo também é adequado para a introdução de temperatura, em total correspondência com o ensemble gran-canónico da mecânica estatística.) A função de Green exata do sistema no quadro Heisenberg pode escrever-se assim

$$i\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\langle \psi_0 | T \left[ \hat{\psi}_{H\alpha}(x) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(y) \right] | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \quad (4.2)$$

Onde  $|\psi_0\rangle$  representa o estado fundamental do sistema (Vácuo),  $x = (\vec{x}, t)$  a coordenada espaço-temporal,  $\hat{\psi}_H$  e  $\hat{\psi}_H^\dagger$  os respetivos operadores de campo de destruição e criação no Heisenberg picture. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  são índices espinoriais.  $T[\dots]$  simplesmente indica que o produto de operadores de campo dentro do parênteses é temporalmente ordenado. A resolução deste problema precisa de um calculo exato do estado fundamental do sistema. Questão absolutamente não trivial. O quadro de interação oferece um tratamento do problema exato em função da teoria livre (o gás não interagente). Em função do estado fundamental da teoria livre  $|\phi_0\rangle$  o problema se reduz a

$$i\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle \phi_0 | T \left[ H_I(t_1) \cdots H_I(t_m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y) \right] | \phi_0 \rangle_{\text{conectado}} \quad (4.3)$$

onde a dependência temporal dos operadores de campo vem dada por

$$\hat{\psi}_\alpha(x) = e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}) e^{-iH_0 t/\hbar}.$$

O índice "conectado" será explicado depois. O operador de interação pode escrever-se assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_i H_I(t_i) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \int d^4 x_i \int d^4 x'_i \hat{\psi}_\lambda^\dagger(x_i) \hat{\psi}_\mu^\dagger(x'_i) U(x_i, x'_i)_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \hat{\psi}_{\lambda'}(x_i) \hat{\psi}_{\mu'}(x'_i) \quad (4.4)$$

onde  $U(x_i, x'_i)_{\lambda\lambda'\mu\mu'} = \delta(t_i - t'_i) V(\vec{x}_i, \vec{x}'_i)_{\lambda\lambda'\mu\mu'}$ , e  $V$  o potencial de interação de duas partículas fermiônicas.

O valor esperado do produto ordenado de operadores pode-se decompor em duas operações, ordem normal e contrações. Pode-se mostrar que só as contrações que

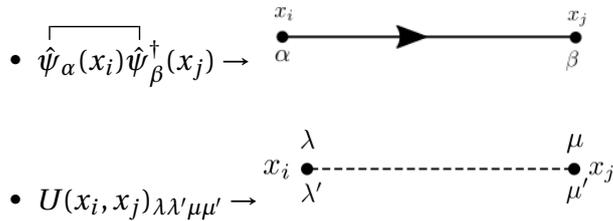
involucram todos os operadores dentro do produto ordenado são as únicas que contribuem, chamaremos estas contrações de contrações totais. Uma contração é simplesmente uma associação em pares dos operadores dentro de um produto ordenado. Pode mostrar-se que cada par se reduz a

$$\overbrace{\hat{\psi}_\alpha(x_i)\hat{\psi}_\beta(x_j)} = \overbrace{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x_i)\hat{\psi}_\beta^\dagger(x_j)} = 0 \quad (4.5)$$

$$\overbrace{\hat{\psi}_\alpha(x_i)\hat{\psi}_\beta^\dagger(x_j)} = -\overbrace{\hat{\psi}_\beta^\dagger(x_j)\hat{\psi}_\alpha(x_i)} = i\mathcal{G}_{\alpha\beta}^0(x_i, x_j) \quad (4.6)$$

com  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^0(x_i, x_j)$  o propagador da teoria livre

Outra propriedade das contrações é que todos os operadores de campo dentro do produto temporal ordenado devem ser contraídos para dar uma contribuição diferente de zero, isto acontece só quando o número de operadores dentro de  $T[\dots]$  é par. Este é sempre o caso para a interação  $H_I$  considerada. Assim, o princípio é o seguinte: toda contração total tem associado um único diagrama de Feynman. A correspondência é a seguinte



Por exemplo, para a seguinte contração total em  $m = 1$

$$\left(\frac{-i}{2\hbar}\right) \sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x'_1 U(x_1, x'_1)_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \langle \phi_0 | \overbrace{\hat{\psi}_\lambda^\dagger(x_1)\hat{\psi}_\mu^\dagger(x'_1)\hat{\psi}_{\lambda'}(x_1)\hat{\psi}_{\mu'}(x'_1)\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta^\dagger(y)} | \phi_0 \rangle$$

corresponde à contribuição

$$\frac{i^4}{2\hbar} \sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x'_1 U(x_1, x'_1)_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \mathcal{G}_{\alpha\lambda}^0(x, x_1) \mathcal{G}_{\lambda'\mu}^0(x_1, x'_1) \mathcal{G}_{\mu'\beta}^0(x'_1, y) \quad (4.7)$$

Cada contribuição é em realidade uma matriz  $2 \times 2$ , e a expressão anterior corresponde com a componente  $\alpha\beta$ . A cada contribuição matricial corresponde um diagrama de Feynman. Com a contração (4.7) temos associado o diagrama de Feynman connectado da figura 4.1

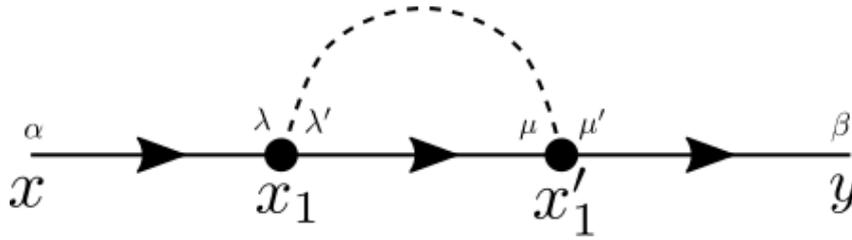


Figura 4.1: Diagrama de Feynman correspondente à contração total (4.7) Com cada diagrama temos uma matriz  $2 \times 2$  com as componentes uma função explícita de  $x$  e  $y$  (variáveis dos dois vértices externos.) A ordem do diagrama vem dada pelo número de interações representadas pelas linhas tracejadas (neste caso uma linha.) Os vértices internos correspondem às variáveis internas, que são integradas (ou somadas para o caso dos índices de spin.)

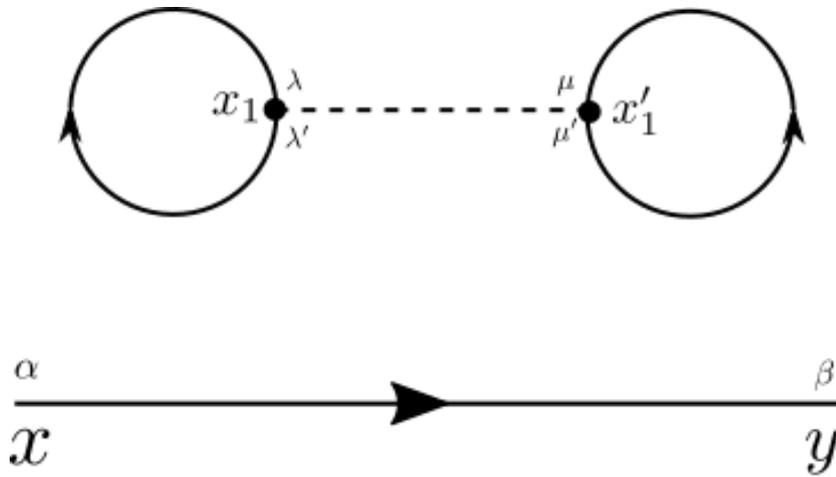


Figura 4.2: Diagrama de Feynman correspondente à contração total (4.8). O diagrama está conformado por duas componentes conectadas. A superior correspondem com uma bolbulha de vácuo, caraterizada por não ter pernas externas.

Em particular temos dois tipos de diagramas, conectados e desconectados. A contração que gera o diagrama desconectado de ordem 1 da figura 4.2 é a seguinte,

$$\langle \phi_0 | \hat{\psi}_\lambda^\dagger(x_1) \hat{\psi}_\mu^\dagger(x'_1) \hat{\psi}_{\lambda'}(x_1) \hat{\psi}_{\mu'}(x'_1) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y) | \phi_0 \rangle \quad (4.8)$$

O conjunto de todas as possíveis contrações que geram diagramas de Feynman de ordem  $m$  esta contido no valor esperado

$$\langle \phi_0 | T [ H_I(t_1) \cdots H_I(t_m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y) ] | \phi_0 \rangle \quad (4.9)$$

que envolve um número dado de contrações. Em particular, todas estas contrações totais estão conformadas por  $2m + 1$  operadores de criação  $\hat{\psi}^\dagger$  e  $2m + 1$  operadores de destruição  $\hat{\psi}$ . O número total de contrações possíveis é  $(2m + 1)!$ . Isto é simples de ver lembrando o fato que só contrações entre operadores de criação e destruição fornecem uma contribuição não

nula. Assim  $\hat{\psi}(x)$  pode ser contraído com  $2m + 1$  possíveis  $\hat{\psi}^\dagger$ ,  $\hat{\psi}(x_1)$  com os  $2m$  restantes  $\hat{\psi}^\dagger$ . Assim o número total de contrações é simplesmente  $(2m + 1)(2m) \cdots (2)(1) = (2m + 1)!$ . Chamaremos este número de  $\mathcal{N}_m^{(1)}$  (o índice (1) aqui significa que os diagramas associados a todas estas contrações têm duas pernas externas, isto será de utilidade mais tarde quando estudemos o caso geral de  $2N$  pernas externas.) Assim

$$\mathcal{N}_m^{(1)} = (2m + 1)! \quad (4.10)$$

Uma parte de estas  $(2m + 1)!$  contrações geram diagramas conectados, as restantes geram diagramas desconectados. Um fato interessante é que a contribuição de um diagrama desconectado pode-se expressar como um produto de uma contribuição correspondente a um diagrama conectado e uma contribuição que corresponde a uma borbulha de vácuo. Isto pode se ver diretamente do fato que (4.8) pode ser escrito assim

$$\langle \phi_0 | \hat{\psi}_\lambda^\dagger(x_1) \hat{\psi}_\mu^\dagger(x'_1) \hat{\psi}_{\lambda'}(x_1) \hat{\psi}_{\mu'}(x'_1) | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y) | \phi_0 \rangle \quad (4.11)$$

O conjunto de todas as possíveis contrações que geram diagramas de Feynman tipo borbulhas de vácuo de ordem  $m$  esta contido no valor esperado

$$\langle \phi_0 | T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_m)] | \phi_0 \rangle, \quad (4.12)$$

todas estas contrações contem  $2m$  diferentes operadores  $\hat{\psi}$  e  $2m$  operadores  $\hat{\psi}^\dagger$ . Usando um análise semelhante ao feito para os diagramas de Feynman de ordem  $m$ , temos aqui  $(2m)!$  borbulhas de vácuo. Chamemos este número de

$$\mathfrak{D}_m = (2m)!. \quad (4.13)$$

Suponhamos agora que todos os possíveis diagramas de Feynman conectados de ordem  $m$  são gerados a partir de

$$\langle \phi_0 | T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y)] | \phi_0 \rangle_{\text{conectado}} \quad (4.14)$$

neste valor esperado estamos considerando todas as possíveis contrações que geram diagramas de Feynman conectados (na função de Green (4.3) só os diagramas de Feynman conectados contribuem). Chamemos o número total de contrações que geram diagramas de Feynman conectados como  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$ .

Já que cada uma das  $\mathcal{N}_m^{(1)}$  contrações podem-se decompor em um produto de duas contrações que geram diagramas totalmente diferentes (conectados e borbulhas de vácuo,) e já que os valores esperados (4.12) e (4.14) geram todas as possíveis diferentes contrações em cada caso, o seguinte produto

$$\langle \phi_0 | T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)] | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | T [H_I(t_{n+1}) \cdots H_I(t_{n+l}) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y)] | \phi_0 \rangle_{\text{conectado}} \quad (4.15)$$

que satisfaz  $m = n + l$ , gera uma parte das  $\mathcal{N}_m^{(1)}$  possíveis contrações.

Lembremos que com cada  $H_I(t_i)$  vem associadas as coordenadas  $(x_i, x'_i)$ . Devido a que (4.12) e (4.14) geram todos os possíveis diagramas de vácuo e conectados, respectivamente, uma permutação dos índices  $i$  e  $j$  correspondentes ao par de variáveis  $(x_i, x'_i)$  e  $(x_j, x'_j)$  dentro do mesmo valor esperado (4.12) (ou, respectivamente, de (4.14)) gera exatamente as mesmas contrações que (4.12) (ou, respectivamente, de (4.14)). No entanto, a mesma permutação com  $i$  em (4.12) e com  $j$  em (4.14) na equação (4.15) gera um conjunto de diferentes contrações em (4.9). Em particular, todas as possíveis permutações entre as variáveis dos dois valores esperados em (4.15) geram diferentes contrações em (4.9). O número de tais permutações é então  $\binom{m}{n} = \binom{m}{l} = \frac{m!}{n!l!}$

Somando sobre todos os valores de  $n$  e  $l$  que satisfazem  $n + l = m$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y)] | \phi_0 \rangle &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \langle \phi_0 | T [H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)] | \phi_0 \rangle \times \\ &\langle \phi_0 | T [H_I(t_{n+1}) \cdots H_I(t_m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^\dagger(y)] | \phi_0 \rangle_{\text{conectado}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

A equação anterior permite relacionar diferentes tipos de contrações. Em princípio, cada contração contribui de forma diferente ao resolver explicitamente a integral associada. Porém, a equação permite enumerar explicitamente os diferentes tipos de contrações, já que cada valor esperado contém todas as possibilidades. Como o número de contrações é independente da correspondente contribuição, podemos supor sem perder a generalidade que todas as diferentes contrações dão a mesma contribuição (situação que acontece explicitamente quando se estuda o problema em dimensão zero) a equação anterior leva a

$$\mathcal{N}_m^{(1)} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \mathcal{N}_{cn}^{(1)} \mathfrak{D}_{m-n} \quad (4.17)$$

Esta equação permite encontrar  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  recursivamente. Em ordem  $m = 0$  a equação anterior se reduz a

$$\mathcal{N}_0^{(1)} = \mathcal{N}_{c0}^{(1)} \mathfrak{D}_0 \quad (4.18)$$

Usando (4.10) e (4.13) para  $m = 0$  obtemos  $\mathcal{N}_{c0}^{(1)} = 1$ . Os outros valores de  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  podem-se encontrar recursivamente, explicitamente:

$$\mathcal{N}_{c_1}^{(1)} = \mathcal{N}_1^{(1)} - \mathfrak{D}_1 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{N}_{c_2}^{(1)} = \mathcal{N}_2^{(1)} - \mathfrak{D}_2 - \binom{2}{1} \mathcal{N}_{c_1}^{(1)} \mathfrak{D}_1 \quad (4.20)$$

$$\mathcal{N}_{c_3}^{(1)} = \mathcal{N}_3^{(1)} - \mathfrak{D}_3 - \binom{3}{2} \mathcal{N}_{c_1}^{(1)} \mathfrak{D}_2 - \binom{3}{1} \mathcal{N}_{c_2}^{(1)} \mathfrak{D}_1 \quad (4.21)$$

$$\mathcal{N}_{c_4}^{(1)} = \mathcal{N}_4^{(1)} - \mathfrak{D}_4 - \binom{4}{3} \mathcal{N}_{c_1}^{(1)} \mathfrak{D}_3 - \binom{4}{2} \mathcal{N}_{c_2}^{(1)} \mathfrak{D}_2 - \binom{4}{1} \mathcal{N}_{c_3}^{(1)} \mathfrak{D}_1 \quad (4.22)$$

$$\vdots \quad (4.23)$$

Pode-se verificar a partir de estas equações que os primeiros valores de  $\mathcal{N}_{c_m}^{(1)}$  para  $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  são

$$1, 4, 80, 3552, 271104, 31342080, 5087692800 \dots \quad (4.24)$$

Não é difícil prever que existem contrações que geram o mesmo tipo de diagrama. Para este problema em específico a relação entre contrações e diagramas de Feynman é simples. Em particular, o número de diferentes contrações que geram o mesmo diagrama de ordem  $m$  depende unicamente da ordem  $m$ . Para ver isto, dado um diagrama de ordem  $m$ , este tem  $m$  linhas tracejadas que representam uma das interações  $U(x_i, x'_i)$ . Enumerando estas linhas, a primeira pode ser escolhida de um total de  $2m$  possibilidades (que correspondem com os  $m$  possíveis pares  $(x_i, x'_i)$  mais os  $m$  intercâmbios  $(x'_i, x_i)$ , note que este intercâmbio corresponde com uma contração diferente.) A segunda linha pode ser escolhida dos restantes  $(2m - 2)$  pares, e assim sucessivamente. Portanto o número de diferentes contrações que geram o mesmo diagrama é

$$(2m)(2m - 2)(2m - 4) \dots (4)(2) = (2m)!! = 2^m m!$$

Assim, cada diagrama de ordem  $m$  é gerado a partir de  $(2m)!$  contrações. Portanto o número total de diagramas conectados  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  é

$$\mathfrak{h}_m^{(1)} = \frac{\mathcal{N}_{c_m}^{(1)}}{2^m m!} \quad (4.25)$$

que, para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  gera a seguinte sequência

$$1, 2, 10, 74, 706, 8162, 110410, 1708394, \dots$$

Comparando com a sequência do número de mapas enraizados em função do número de lados e para todos os possíveis  $g$  (genus), vemos que as duas sequências parecem coincidir. Se elas coincidirem, implicaria que o número de diagramas de Feynman

conectados de ordem  $m$  é idêntico ao número de mapas enraizados de  $m$  lados para todos os possíveis valores de  $m$ . Duas diferentes formas de provar a última afirmação, são as seguintes:

- Encontrar uma bijeção explícita entre os mapas enraizados de  $m$  lados e os diagramas de Feynman conectados de ordem  $m$ .
- Encontrar uma formula explícita para os diagramas de Feynman conectados, e mostrar a equivalência com a formula de Arqués-Béraud.

Vamos analisar estas duas diferentes provas do mesmo resultado.

## 4.2 Bijeção entre os diagramas de Feynman conectados e os mapas enraizados

A seguinte bijeção é inspirada por K. Gopala et al., em um trabalho recente [36]. Consideremos uma contração arbitraria que gera um diagramas conectado de ordem  $m$ , vejamos que tal contração define um único par de permutações  $\alpha$ , e  $\sigma$  transitivas em um conjunto  $[2m]$ . As  $m$  interações  $U(x_i, x'_i)$  definem uma associação em pares das  $2m$  variáveis  $\{x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m\}$ . Este conjunto de variáveis está em correspondência direta com o conjunto  $[2m]$  (já que contem o mesmo número de elementos), assim podemos considerar este conjunto de variáveis como uma enumeração arbitraria de um conjunto com  $2m$  elementos. Se consideramos a seguinte associação  $\alpha = (x_1 x'_1)(x_2 x'_2) \cdots (x_m x'_m)$  com a decomposição de uma permutação  $\alpha$  em seus ciclos, é claro que  $\alpha$  é uma involução sem ponto fixo (ver capítulo 3.) Agora consideremos uma das variáveis  $z_a \in \{x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m\}$ ,  $z_a$  é também a variável de somente dois operadores de campo  $\hat{\psi}(z_a)$  e  $\hat{\psi}^\dagger(z_a)$  (por simplicidade, consideramos os indices spinorais subentendidos). Duas possibilidades acontecem na contração: ou  $\hat{\psi}(z_a)$  é contraído com  $\hat{\psi}^\dagger(z_a)$ , ou  $\hat{\psi}(z_a)$  é contraído com  $\hat{\psi}^\dagger(z_b)$  e  $\hat{\psi}^\dagger(z_a)$  com  $\hat{\psi}(z_c)$  (aqui  $z_a \neq z_b$  e  $z_a \neq z_c$ ).

Nos dois casos, as linhas fermiônicas do diagrama de Feynman geradas pela contração de varios operadores de campos formam trilhas fermiônicas orientadas que são ciclos, ou formam uma trilha fermiônica (única) que começa na perna externa  $x$  e acaba na perna externa  $y$ , ver figuras 4.3 e 4.4. Esta caracterização determina a permutação  $\sigma$ , cujos ciclos fornecem os vértices e as correspondentes pontas incidentes de um mapa enraizado. A permutação  $\sigma$  é obtida “contraíndo” os trilhos fermiônicos a um ponto que corresponderá com um vértice do mapa enraizado. O trilha principal (o único que contem as pernas externas  $x$  e  $y$  do diagrama) é contraído ao vértice enraizado, a raiz correspondendo á variável  $z_a$  que fica mais perto de  $x$  no diagrama. O trilha tem uma ordem das respectivas variáveis  $\{z_i\}$  o que determina um único ciclo da permutação  $\sigma$  (ver figura 4.3). Os outros

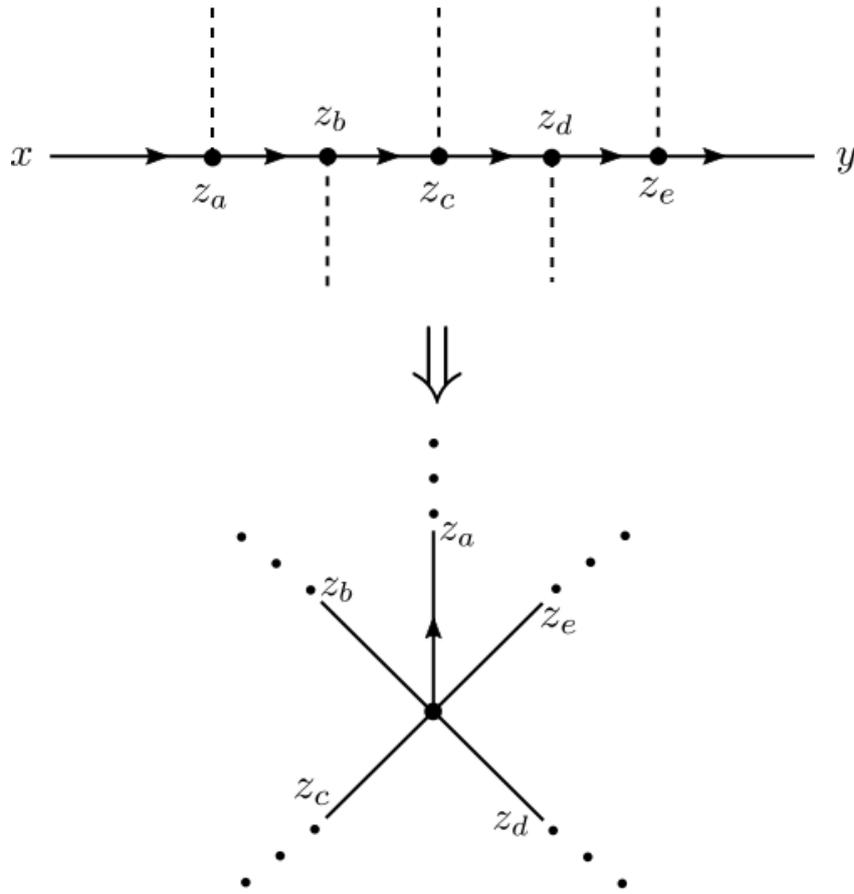


Figura 4.3: O trilho fermiônico (único para um diagrama de Feynman conectado de duas pernas) descrito pelo produto de contrações  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(z_a)\hat{\psi}(z_a)\hat{\psi}^\dagger(z_b)\cdots\hat{\psi}(z_e)\hat{\psi}^\dagger(y)$ . O trilho é “contraído” em um vértice do mapa enraizado e as linhas tracejadas passam ser os lados do mapa, com as pontas sendo indexadas pelos  $z_i$  (na figura a outra ponta das linhas tracejadas podem incidir no mesmo trilho, formando um loop do mapa enraizado ou podem incidir em outro trilho do diagrama). O vértice do mapa é dado pela permutação  $(z_a z_b z_c z_d z_e)$  de acordo com nossa caracterização dos mapas por permutações, e a ponta  $z_a$  como é a única adjacente a  $x$  no diagrama (no diagrama  $z_a$  é um vertice), pode-se escolher como a raiz.

ciclos da permutação  $\sigma$  são determinados a partir dos outros trilhos do diagrama associado com a contração considerada (ver figura 4.4). Já que a contração gera um diagrama conectado as duas permutações  $\sigma$  e  $\alpha$  são transitivas em  $[2m]$ . Assim com cada contração temos uma única enumeração associada a um único mapa enraizado.

Dada uma contração total, evidentemente temos  $(2m - 1)!$  possíveis enumerações do mapa enraizado associado já que a variável  $z_a$  em  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(z_a)$  é escolhida como a raiz.

Como vimos o número de contrações associadas ao mesmo diagrama de Feynman é  $2^m m!$  entanto que o número de possíveis enumerações de um mesmo mapa enraizado é  $(2m - 1)!$ . Evidentemente,  $2^m m! < (2m - 1)!$  para  $m \geq 3$  ( $2^m m! > (2m - 1)!$  para  $m < 3$ ), assim contrações para um dado diagramas de Feynman, não podem estar em bijeção com

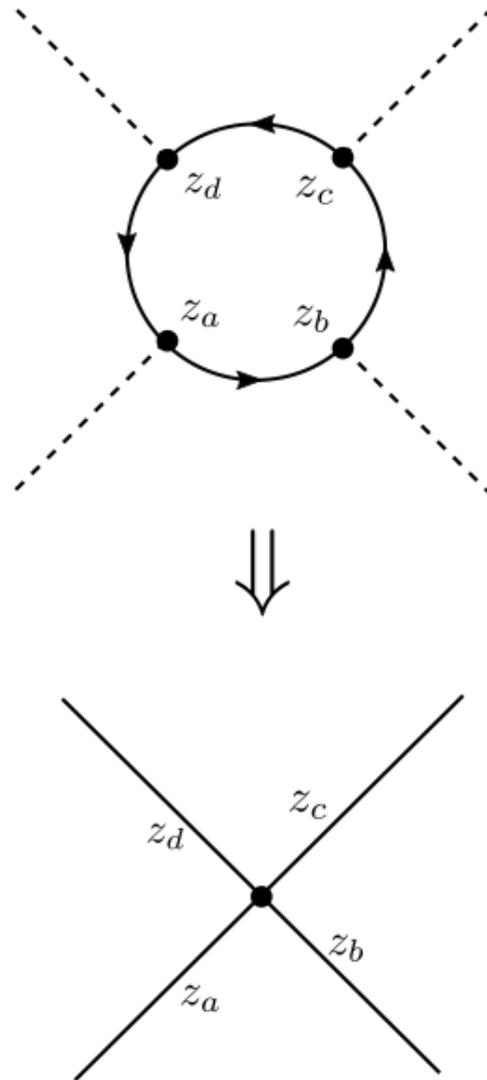


Figura 4.4: O trilha fermiônico fechado (ciclo) descrito pelo produto de contrações  $\overbrace{\hat{\psi}(z_a)\hat{\psi}^\dagger(z_b)}\overbrace{\hat{\psi}(z_b)\hat{\psi}^\dagger(z_c)}\overbrace{\hat{\psi}(z_c)\hat{\psi}^\dagger(z_d)}\overbrace{\hat{\psi}(z_d)\hat{\psi}^\dagger(z_a)}$  é “contraído” em um vértice do mapa enraizado e as linhas tracejadas passam ser os lados do mapa, com as pontas sendo indexadas pelos  $z_i$  (na figura a outra ponta das linhas tracejadas podem incidir no mesmo trilha, formando um loop do mapa enraizado ou podem incidir em outro trilha do diagrama). O vértice do mapa é dado pela permutação  $(z_a z_b z_c z_d)$  de acordo com nossa caracterização dos mapas por permutações.

### 4.3. UMA FÓRMULA DE CONTAGEM PARA OS DIAGRAMAS DE FEYNMAN CONECTADOS

enumerações de um mapa enraizado para o mesmo número  $m$ . No entanto, para nosso interesse, basta escolher uma função sobrejetiva entre o conjunto de enumerações e o número de contrações quando  $m \geq 3$  (de forma inversa para  $m < 3$ ). Assim, com esta construção, para duas diferentes contrações associadas ao mesmo diagrama, teremos uma permutação  $r \in \mathcal{P}_{2m}$  (com  $r(1) = 1$ ) tal que se para uma contração temos associado o mapa enraizado  $(\alpha, \sigma)$ , então a outra contração terá associado o mesmo mapa enraizado com a enumeração equivalente  $(r \circ \alpha \circ r^{-1}, r \circ \sigma \circ r^{-1})$

Da mesma forma, duas diferentes enumerções de um mesmo mapa enraizado corresponderam ao sumo com duas diferentes contrações que geram o mesmo diagramas de Feynman. Portanto o número de diagramas de Feynman conectados de ordem  $m$  é igual ao número total de mapas enraizados com  $m$  lados. Portanto

$$\mathfrak{h}_m^{(1)} = \frac{\mathcal{N}_{cm}^{(1)}}{2^m m!} = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1+\cdots+a_{i+1}, m+1} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (4.26)$$

### 4.3 Uma fórmula de contagem para os diagramas de Feynman conectados

Na secção anterior mostramos uma bijeção explicita entre diagramas de Feynman conectados e mapas enraizados. Nesta secção deduziremos uma fórmula de contagem para os diagramas de Feynman diretamente da recorrência (4.17) que é equivalente à fórmula de Arqués-Béraud. Para mais detalhes ver [14].

O conjunto de relações recorrentes (4.19) podem-se resolver da seguinte forma: Substituir a primeira relação para  $\mathcal{N}_{c_1}^{(1)}$  na segunda equação. Logo, substituímos a expressão de  $\mathcal{N}_{c_2}^{(1)}$  na terceira equação. E assim sucessivamente. Este processo finito faz com que  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  dependa unicamente de  $\mathcal{N}_l^{(1)}$  e  $\mathcal{D}_n$  para  $0 < l \leq m$  e  $0 < n \leq m$ . Particularmente,  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  parece ter a seguinte forma

$$\mathcal{N}_{cm}^{(1)} = \sum_{n=1}^m \mathcal{C}_n^m (\mathcal{N}_n^{(1)} - \mathcal{D}_n) \quad (4.27)$$

com

$$\mathcal{C}_n^m = \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^i \sum_{a_1, \dots, a_i=1}^{\infty} \delta_{a_1+\cdots+a_i, m-n} \prod_{j=1}^i \binom{m-\cdots-a_{j-1}}{m-a_1-\cdots-a_{j-1}-a_j} \mathcal{D}_j \quad (4.28)$$

para  $n < m$  e  $\mathcal{C}_m^m = 1$ .

A fórmula (4.27) pode ser mostrada por indução. Detalhes encontram-se em nosso trabalho [14]. Primeiro consideramos válida a fórmula (4.27) até o inteiro positivo  $m$  e

usamos a recorrência (4.17) para o caso  $m + 1$

$$\mathcal{N}_{m+1}^{(1)} = \sum_{n=0}^{m+1} \binom{m+1}{n} \mathcal{N}_{cn}^{(1)} \mathfrak{D}_{m-n+1} \quad (4.29)$$

ou

$$\mathcal{N}_{cm+1}^{(1)} = \mathcal{N}_{m+1}^{(1)} - \mathfrak{D}_{m+1} - \sum_{n=1}^m \binom{m+1}{n} \mathcal{N}_{cn}^{(1)} \mathfrak{D}_{m-n+1}. \quad (4.30)$$

A hipótese de indução é válida para  $n \leq m$ , permitindo escrever a equação anterior como

$$\mathcal{N}_{cm+1}^{(1)} = \mathcal{N}_{m+1}^{(1)} - \mathfrak{D}_{m+1} - \sum_{n=1}^m \sum_{r=1}^n \binom{m+1}{n} \mathfrak{D}_{m-n+1} \mathcal{C}_r^n (\mathcal{N}_r^{(1)} - \mathfrak{D}_r). \quad (4.31)$$

A terceira soma do lado direito pode escrever-se assim

$$\sum_{n=1}^m \sum_{r=1}^n \binom{m+1}{n} \mathfrak{D}_{m-n+1} \mathcal{C}_n^r (\mathcal{N}_r^{(1)} - \mathfrak{D}_r) = \sum_{s=1}^m \left[ \sum_{n=s}^m \binom{m+1}{n} \mathfrak{D}_{m-n+1} \mathcal{C}_s^n \right] (N_s^{(1)} - N_{ds}) \quad (4.32)$$

em particular, pode-se mostrar que

$$\mathcal{C}_s^{m+1} = - \sum_{n=s}^m \binom{m+1}{n} \mathfrak{D}_{m-n+1} \mathcal{C}_s^n \quad (4.33)$$

por tanto

$$\mathcal{N}_{cm+1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{C}_s^{m+1} (\mathcal{N}_s^{(1)} - \mathfrak{D}_s) \quad (4.34)$$

Provando assim (4.27). A relação (4.33) (importante para a validade de esta prova) é mostrada detalhadamente em [14]. Veja que o símbolo  $\mathcal{C}_n^m$  tem um formato muito parecido com a fórmula de Arqués-Béraud. Em particular, cada termo de  $\mathcal{C}_n^m$  em (4.28), ao expandir a soma, é representado explicitamente por uma composição do número  $m - n$ . A prova de (4.33) em [14] considera o lado esquerdo e direito como dois conjuntos, cujos termos são indexados por composições. Então a prova da validade da fórmula é conseguida provando que estes dois conjuntos são idênticos. Em realidade a prova poderia obter-se de um jeito mais simples, em base de propriedades das composições, como foi feito no Apêndice B para provar a fórmula de Arqués-Béraud. Mas, o mesmo procedimento é usado logo para mostrar a equivalência da fórmula (4.27) (dividida sobre  $2^m m!$ ) com a formula de Arqués-Béraud.

### Equivalência com a formula de Arqués-Béraud

Os termos da fórmula de Arqués-Béraud são indexados por todas as possíveis composições de  $m + 1$ . Dada uma composição de  $m + 1$ , digamos  $a_1 + \dots + a_{i+1} = m + 1$ , o termo correspondente é

$$(-1)^i \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{(a_j)!} \quad (4.35)$$

### 4.3. UMA FÓRMULA DE CONTAGEM PARA OS DIAGRAMAS DE FEYNMAN CONECTADOS 65

Entanto, os símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  em (4.27) tem termos que representam todas as composições de  $m - n$ . Para provar que (4.27) dividido entre  $2^m m!$  é idêntico à fórmula de Arqués-Béraud reescrevemos os termos que multiplicam os símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  em (4.27) da seguinte forma

$$\mathcal{N}_n^{(1)} = \frac{n!}{2} \frac{\mathfrak{D}_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \mathfrak{D}_n = \frac{1}{2} \mathfrak{D}_1 N_{dn} \quad (4.36)$$

Como antes, consideramos os termos das duas fórmulas como elementos de dois conjuntos indexados pelas respectivas composições. Então, a igualdade das duas fórmulas passa pela verificação que os dois conjuntos assim definidos são idênticos. Primeiro pode comprovar-se que eles tem o mesmo número de elementos ( $2^m$ ), logo que um termo arbitrário do primeiro conjunto sempre esta no segundo e vice-versa. Dethales da prova estão em ref [14].

Assim, mostramos de outra forma que o número de diagramas de Feynman conectados de ordem  $m$  da teoria estudada é idêntico ao número de mapas enraizados de  $m$  lados para todos os possíveis números  $g$ .

Vamos reescrever  $\mathcal{C}_n^m$  de outra forma, usando

$$\prod_{j=1}^i \binom{m - \dots - a_{j-1}}{m - a_1 - \dots - a_{j-1} - a_j} \mathfrak{D}_j = \frac{m!}{(m - a_1 - a_2 - \dots - a_i)} \prod_{j=1}^i \frac{(2a_j)!}{a_j!},$$

usando  $a_1 + \dots + a_j = m - n$  em cada termo da soma, e redefinindo o índice  $i \rightarrow i - 1$ , temos que os símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  a partir de (4.28) podem ser escritos assim

$$\mathcal{C}_n^m = \frac{m!}{n!} \sum_{i=0}^{m-n-1} (-1)^{i+1} \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{i+1}=1}^{m-n-1} \delta_{a_1+a_2+\dots+a_{i+1}=m-n} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{(a_j)!} \quad (4.37)$$

Usando a fórmula de Arqués-Béraud, os símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  podem-se escrever em função dos números  $\mathcal{N}_{ca}^{(1)}$

$$\mathcal{C}_n^m = -2(m-n) \binom{m}{n} \mathcal{N}_{cm-n-1}^{(1)} \quad (4.38)$$

Esta fórmula será de utilidade para a expansão assintótica de  $\mathcal{N}_m^{(1)}$  para  $m \rightarrow \infty$ . Note que os símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  são sempre negativos para  $n < m$ .

## 4.4 Generalização para o caso de diagramas de Feynman conectados com um número arbitrário de pernas externas

Na secção anterior somente focamos no estudo de diagramas de Feynman com duas pernas externas, o estudo pode-se generalizar para o caso de um número arbitrário de pernas externas. Antes de começar o nosso análise, vamos ver duas propriedades dos diagramas de Feynman, que serão importantes para a sua contagem.

- O número de pernas externas é sempre par: Na secção 4.2, analisamos como as contrações que geram os diagramas conectados podiam ser representados por trilhos fermiônicos direcionados. Vimos que só podíamos ter um trilho fermiônico aberto entanto que os demais necessariamente eram fechados. Para gerar um diagramas conectado, os trilhos se conetavam com linhas tracejadas (que representam a interação) de tal forma que sempre era possível passar de um trilho a outro. Se queremos mais pernas externas, simplesmente temos que adicionar mais trilhos fermiônicos abertos. Assim para  $N$  trilhos fermiônicos teremos sempre  $2N$  linhas externas. Uma forma explicita de aumentar os trilhos abertos, dado um diagrama conectado, é cortando uma das suas linhas fermiônicas, pertencente a algum trilho fechado, pela metade e fora dos vértices (ver figura (4.5)). Ou, para diminuir o número de trilhos abertos, conectando a perna externa sainte e entrante de um mesmo trilho. A questão interessante é que tal operação deixa intacto o mapa correspondente, mais aumenta (ou diminui, no caso de conectar pernas externas de um mesmo trilho) o número de raízes. É fácil generalizar a bijeção estudada na secção 4.2, assim com cada diagrama de Feynman com  $2N$  pernas externas, temos um único mapa enraizado com  $N$  raízes.
- Dada um número de  $N$  trilhos fermionicos (abertos), o menor número de linhas tracejadas possíveis para gerar um diagramas de Feynman conectado de  $2N$  pernas externas é  $N - 1$ . Assim para um diagrama de Feynman conectado com  $2N$  pernas, a menor ordem possível que pode ter é  $m = N - 1$ , ver figura 4.6.

A generalização de (4.9) que gera todas as possíveis contrações totais associadas com diagramas de Feynman com  $2N$  pernas externas é simplesmente

$$\langle \phi_0 | T[\hat{H}_I(t_1) \cdots \hat{H}_I(t_m) \hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \cdots \hat{\psi}_{\alpha_N}(x_N) \hat{\psi}_{\beta_1}^\dagger(y_1) \hat{\psi}_{\beta_2}^\dagger(y_2) \cdots \hat{\psi}_{\beta_N}^\dagger(y_N)] | \phi_0 \rangle. \quad (4.39)$$

Transformar este objeto em uma fórmula recursiva que generalize a fórmula (4.17) foi conseguido por nos recentemente em [16]. Chamando  $\mathcal{N}_m^{(N)}$  o número total de contrações

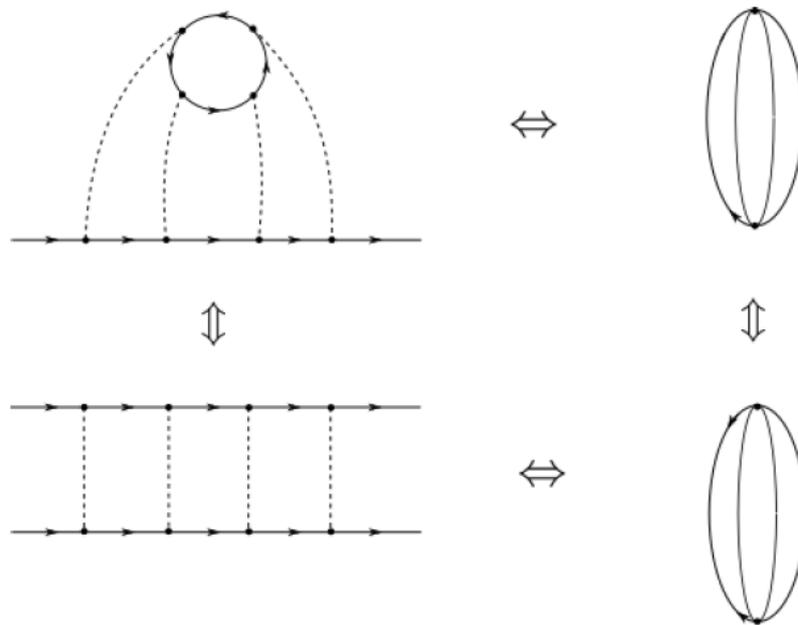


Figura 4.5: O diagrama superior esquerdo é um diagrama com duas pernas externas e dois trilhos fermiônicos, um deles fechado. O trilho fechado está conformado por 4 linhas fermiônicas, cortando a linha superior pela metade, obtemos o diagrama inferior da esquerda com 4 pernas externas e dois trilhos fermiônicos abertos. Da bijeção estudada na seção 4.2, obtemos os correspondentes mapas enraizados. Ao ter duas pernas externas incidentes, o diagrama inferior da esquerda distingue as duas pontas da linha tracejada, que correspondem as pontas de um lado do mapa inferior da direita. Note que os mapas da direita são topologicamente idênticos, mas o superior tem uma raiz, enquanto que o segundo consta de duas raízes.

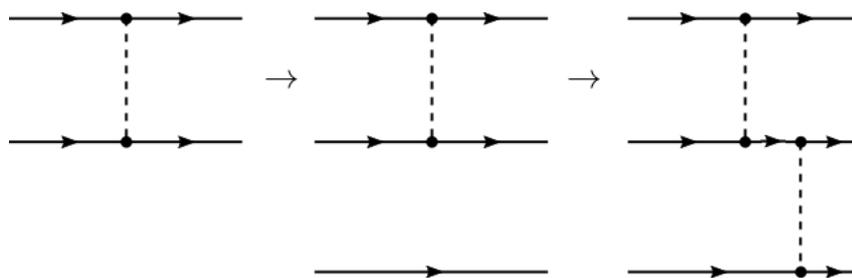


Figura 4.6: O primeiro diagrama corresponde com o único diagrama de Feynman conectado de ordem  $m = 1$  e 4 pernas externas ( $N=2$ ), por ser o único é evidentemente o diagrama com menor ordem possível para  $N = 2$ . A partir de ele, podemos construir o diagrama conectado com menor ordem possível para  $N = 3$ . Temos que adicionar um trilho adicional e conectar este ao diagrama conectado  $N = 2$ . A forma mais econômica de fazer isto é primeiro, adicionando um vértice a um dos trilhos do primeiro diagrama. Segundo adicionando outro vértice ao novo trilho e terceiro conectando estes dois novos vértices por uma linha tracejada. O diagrama assim criado tem  $m = 2$  e para  $N = 3$  é o diagrama conectado de menor ordem possível. Este procedimento pode ser generalizado para  $N$  arbitrário, fazendo com que a mínima ordem possível seja  $m = N - 1$ .

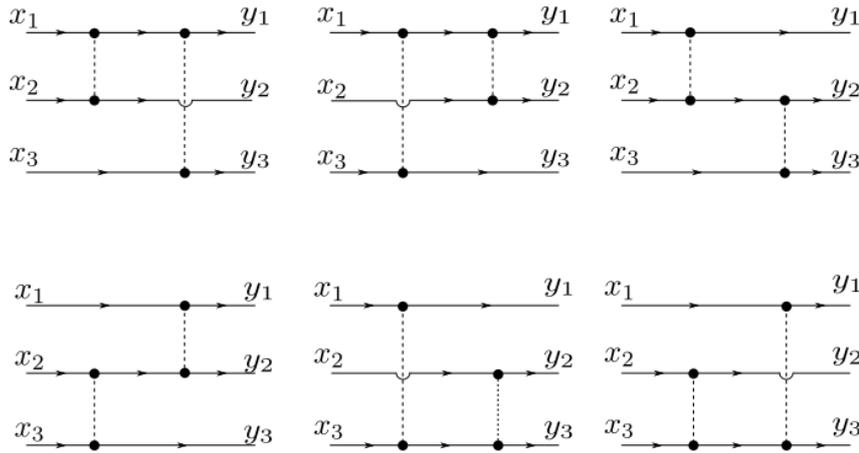


Figura 4.7: Os diferentes 6 diagramas de Feynman para o caso  $N = 3$  e  $m = 2$ . Note que uma escolha particular das pernas externas foi feita. Em particular, se as pernas externas não fossem nomeadas, estes diagramas de Feynman seriam todos equivalentes. Se as pernas externas não são nomeadas, contar os diferentes diagramas conectados dependeria da simetria interna do diagrama. E em princípio, contar diagramas neste caso seria algo não trivial (lembre a distinção feita entre mapas enraizados e mapas topológicos, é exatamente a mesma distinção que nos estamos fazendo aqui.) Assim, em  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  é sobre-entendido que as pernas externas tem uma única nomeação e contamos respeito de tal nomeação.

em (4.39), pelo mesmo argumento usado para obter (4.10), é trivial ver que

$$\mathcal{N}_m^{(N)} = (2m + N)! \quad (4.40)$$

Uma parte destas contrações totais geram diagramas conectados. A única diferença com o caso anterior é que (4.39) contem todas as possíveis formas de escolher as pernas externas dos diagramas, e, em um diagrama desconectado, isto não gera uma única possível escolha das pernas externa de cada componente conectada. O objeto que gera os diagramas de Feynman conectado é

$$\langle \phi_0 | T[\hat{H}_I(t_1) \cdots \hat{H}_I(t_m) \hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \cdots \hat{\psi}_{\alpha_N}(x_N) \hat{\psi}_{\beta_1}^\dagger(y_1) \hat{\psi}_{\beta_2}^\dagger(y_2) \cdots \hat{\psi}_{\beta_N}^\dagger(y_N)] | \phi_0 \rangle_{\text{Conectado}}. \quad (4.41)$$

Que tem as pernas externas fixas e gera unicamente diagramas conectados. Se queremos obter uma fórmula recursiva para o número de contrações totais em (4.41) a partir de (4.39) devemos contar devidamente todas as possíveis formas de escolher as pernas externas de cada componente conectada em (4.39). Isto foi feito explicitamente em [16] usando argumentos combinatórios. Assim, quando falamos do número de contrações totais  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  que geram diagramas de Feynman conectados com  $N$  pernas externas, assumimos que uma escolha específica das pernas externas ja foi feita. A escolha corresponde a ordenar os trilhos fermiônicos de arriba para abaixo (ou de esquerda para direita, no caso de ser

desenhados verticalmente) e o primeiro trilho tem as pernas  $\{x_1, y_1\}$ , o segundo trilho tem as pernas  $\{x_2, y_2\}$  e assim sucessivamente (ver figura 4.7).

Em correspondência com o nosso trabalho [16], a partir dos resultados obtidos ai, podem-se usar geradores funcionais para obter especificamente os mesmos resultados por puro cálculo. As técnicas de geradores funcionais são uma poderosa ferramenta para fazer combinatória. Mas sempre é de proveito não esquecer a interpretação combinatória detrás da álgebra das séries formais. Utilizaremos aqui geradores funcionais para determinar as recorrências que determinan os números  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$ .

O gerador funcional do número de todas as possíveis contrações totais  $\mathcal{N}_m^{(N)}$  pode ser escrito como

$$Z(x, y) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_m^{(N)}}{(N!)^2 m!} x^N y^m \quad (4.42)$$

$\mathcal{N}_m^{(N)}$  conta todas as possíveis contrações totais (tanto as que geram diagramas conectados como desconectados.)  $x$  e  $y$  são os parâmetros arbitrários da série formal. Pensando  $Z(x, y)$  como o limite formal  $d \rightarrow 0$  (com  $d$  a dimensão) de algum gerador de funções de correlação  $\mathcal{Z}$ ,  $x$  pode ser interpretado como uma constante de acoplamento entanto que  $y$  seria uma corrente externa. Uma contração total que gera um diagrama desconectado tem elementos sem correlação. Particularmente é de interesse conhecer os processos com correlação total, isto é aquelas contrações que geram diagramas conectados. Se o gerador deste tipo de função de correlação é  $\mathcal{W}$ , em geral,  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{Z}$  encontram-se relacionados por

$$\mathcal{Z} = \exp \mathcal{W} \quad (4.43)$$

Esta relação é preservada em dimensão zero, correspondendo a uma relação entre os nossos geradores funcionais do número de possíveis contrações  $Z(x, y)$  e  $W(x, y)$ . Em particular

$$Z(x, y) = \exp W(x, y) \quad (4.44)$$

com

$$W(x, y) = \text{Log} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_m}{m!} y^m \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{cm}^{(n)}}{n! m!} x^n y^m \quad (4.45)$$

Note como a soma do lado direito começa em  $m = n - 1$  que corresponde com a mínima ordem possível de um diagrama de Feynman conectado. Usando (4.44), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_m^{(N)}}{(N!)^2 m!} x^N y^m &= \sum_{m_a=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{D}_{m_a}}{m_a!} y^{m_a} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_b=n-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{c m_b}^{(n)}}{n! m_b!} x^n y^{m_b} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_c=n-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{c m_c}^{(n)}}{n! m_c!} x^n y^{m_c} \right]^2 + \dots \\
&\quad \left. + \frac{1}{l!} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_d=n-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{c m_d}^{(n)}}{n! m_d!} x^n y^{m_d} \right]^l + \dots \right). \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Vamos igualar termo a termo em  $N$  para obter fórmulas que relacionem  $\mathcal{N}_m^{(N)}$  e  $\mathcal{N}_{cr}^{(n)}$

Para  $N = 0$  é evidente que

$$\mathcal{N}_m^{(0)} = \mathfrak{D}_m. \quad (4.47)$$

Para  $N = 1$ , só a segunda soma dentro do parêntese da direita contribui, obtendo

$$\mathcal{N}_m^{(1)} = \sum_{m_1=0}^m \sum_{m_2=0}^m \delta_{m_1+m_2, m} \frac{m!}{m_1! m_2!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(1)} \mathfrak{D}_{m_2}. \quad (4.48)$$

vemos que esta é exatamente a equação (4.17), aqui obtida de outra forma.

Para  $N = 2$ , só as duas primeiras somas dentro do parêntese da direita contribuem, a primeira contribuição é

$$\sum_{m_1=1}^m \sum_{m_2=0}^m \delta_{m_1+m_2, m} \frac{1}{m_1! m_2!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(2)} \mathfrak{D}_{m_2}.$$

Entanto que a segunda contribuição vem de

$$\frac{1}{2!} \left[ \sum_{m_a=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{D}_{m_a}}{m_a!} y^{m_a} \right] \left[ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_c=n_1-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{c m_c}^{(n_1)}}{n_1! m_c!} x^{n_1} y^{m_c} \right] \left[ \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{m_d=n_2-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{c m_d}^{(n_2)}}{n_2! m_d!} x^{n_2} y^{m_d} \right],$$

os únicos casos que contribuem aqui são  $N = 2 = n_1 + n_2$ . e portanto  $n_1 = n_2 = 1$ . Igualando as duas contribuições ao termo do lado esquerdo com coeficiente  $\mathcal{N}_m^{(2)} / ((2!)^2 m!)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_m^{(2)} &= 2 \sum_{m_1=0}^m \sum_{m_2=0}^m \sum_{m_3=0}^m \delta_{m_1+m_2+m_3, m} \frac{m!}{m_1! m_2! m_3!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(1)} \mathcal{N}_{c m_2}^{(1)} \mathfrak{D}_{m_3} \\
&\quad + 2 \sum_{m_1=1}^m \sum_{m_2=0}^m \delta_{m_1+m_2, m} \frac{m!}{m_1! m_2!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(2)} \mathfrak{D}_{m_2}. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Para  $N = 3$ , repetindo o procedimento obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_m^{(3)} &= 6 \sum_{m_1=0}^m \sum_{m_2=0}^m \sum_{m_3=0}^m \sum_{m_4=0}^m \delta_{m_1+m_2+m_3+m_4, m} \frac{m!}{m_1! m_2! m_3! m_4!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(1)} \mathcal{N}_{c m_2}^{(1)} \mathcal{N}_{c m_3}^{(1)} \mathfrak{D}_{m_4} \\
&\quad + 18 \sum_{m_1=1}^m \sum_{m_2=0}^m \sum_{m_3=0}^m \delta_{m_1+m_2+m_3, m} \frac{m!}{m_1! m_2! m_3!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(2)} \mathcal{N}_{c m_2}^{(1)} \mathfrak{D}_{m_3} \\
&\quad + 6 \sum_{m_1=2}^m \sum_{m_2=0}^m \delta_{m_1+m_2, m} \frac{m!}{m_1! m_2!} \mathcal{N}_{c m_1}^{(3)} \mathfrak{D}_{m_2}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Para  $N$  arbitrário basta com analisar a  $l$ -ésima soma dentro do parêntese do lado direito de (4.46). Esta tem a seguinte forma

$$\frac{1}{l!} \left[ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=n_1-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{cm_1}^{(n_1)}}{n_1!m_1!} x^{n_1} y^{m_1} \right] \left[ \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{cm_2}^{(n_2)}}{n_2!m_2!} x^{n_2} y^{m_2} \right] \cdots \left[ \sum_{n_l=1}^{\infty} \sum_{m_l=n_l-1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{cm_l}^{(n_l)}}{n_l!m_l!} x^{n_l} y^{m_l} \right],$$

Este termo tem contribuição em  $\mathcal{N}_m^{(N)}$  se  $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$ . Como cada  $n_i > 0$ , temos que os termo que contribuem são composições de  $l$  elementos de  $N$ . Em particular, pode-se ver da equação anterior que, dada uma  $l$ -composição qualquer de  $N$ , outra composição com os mesmos elementos mas em diferente ordem leva ao mesmo coeficiente. Isto implica que podemos representar cada termo que contribui por uma partição de  $N$  multiplicando pelo devido fator correspondente às composições equivalentes. Se dos números  $\{n_1, \dots, n_l\}$  temos só  $r$  diferentes números  $n_i$ , então  $N = d_1 n_1 + d_2 n_2 + \cdots + d_r n_r$ , com  $d_i$  as vezes que o número  $n_i$  se repete na partição. Evidentemente temos  $r \leq l$  e  $l = d_1 + d_2 + \cdots + d_r$ . O respetivo fator multiplicativo que considera as composições com a mesma contribuição é

$$\frac{l!}{d_1!d_2!\cdots d_r!}$$

Assim para uma dada partição de  $N$  temos a seguinte cocontribuição

$$\sum_{m_1=n_1-1}^m \cdots \sum_{m_l=n_l-1}^m \sum_{m_{l+1}=0}^m \delta_{m_1+\cdots+m_{l+1},m} \frac{1}{d_1!d_2!\cdots d_r!} \times \frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_l!} \times \frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_{l+1}!} \mathcal{N}_{cm_1}^{(n_1)} \mathcal{N}_{cm_2}^{(n_2)} \cdots \mathcal{N}_{cm_l}^{(n_l)} \mathfrak{D}_{m_{l+1}} \quad (4.51)$$

Somando sobre todas as possíveis partições e igualando ao termo do lado direito de (4.46) que tem coeficiente  $\mathcal{N}_m^{(N)} / ((N!)^2 m!)$ , obtemos

$$\mathcal{N}_m^{(N)} = \sum_{(n_1, \dots, n_l) \in \mathcal{P}_N} \left[ \sum_{m_1=n_1-1}^m \cdots \sum_{m_l=n_l-1}^m \sum_{m_{l+1}=0}^m \delta_{m_1+\cdots+m_{l+1},m} \frac{1}{d_1!d_2!\cdots d_r!} \times \frac{(N!)^2}{n_1!n_2!\cdots n_l!} \times \frac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_{l+1}!} \mathcal{N}_{cm_1}^{(n_1)} \mathcal{N}_{cm_2}^{(n_2)} \cdots \mathcal{N}_{cm_l}^{(n_l)} \mathfrak{D}_{m_{l+1}} \right]. \quad (4.52)$$

com  $\mathcal{P}_N$  o conjunto de todas as partições numéricas de  $N$ . Assim obtivemos um conjunto de recorrências que podem ser resolvidas iterativamente para obter  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  Para  $N = 1, 2, 3, \dots$  Na secção seguinte veremos que esta recorrência pode ser enormemente simplificada.

### Simplificação da recorrência

Para obter uma simplificação explícita da recorrência anterior, tomemos derivadas sucessivas de  $Z(x, y)$  respeito de  $x$  e avaliamos depois em  $x = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(0, y) = Z'(0, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_m^{(1)}}{m!} y^m \quad (4.53)$$

Da mesma forma, usando (4.44) obtemos

$$Z'(0, y) = Z(0, y) W'(0, y) = \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{D}_{m_1}}{m_1!} y^{m_1} \right) \left( \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{cm_2}^{(1)}}{m_2!} y^{m_2} \right) \quad (4.54)$$

Igualando termo a termo, obtemos

$$\mathcal{N}_m^{(1)} = \sum_{m_1=0}^m \sum_{m_2=0}^m \delta_{m_1+m_2, m} \frac{m!}{m_1! m_2!} \mathcal{N}_{cm_1}^{(1)} \mathfrak{D}_{m_2} \quad (4.55)$$

Sendo exatamente a formula (4.48).

Derivando  $Z(x, y)$  novamente respeito de  $x$  e avaliando em  $x = 0$  obtemos

$$Z''(0, y) = Z(0, y) W''(0, y) + Z'(0, y) W'(0, y), \quad (4.56)$$

Igualando o lado direito com o esquerdo termo a termo, obtemos

$$\mathcal{N}_m^{(2)} = 2 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(1)} \mathcal{N}_{m-j}^{(1)} + 2 \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(2)} \mathfrak{D}_{m-j}. \quad (4.57)$$

Tal fórmula tem um formato mais simples que (4.49). Calculemos o caso  $N = 3$

$$Z'''(0, y) = Z(0, y) W'''(0, y) + 2Z'(0, y) W''(0, y) + Z''(0, y) W'(0, y), \quad (4.58)$$

Igualando termo a termo, obtemos

$$\mathcal{N}_m^{(3)} = 3 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(1)} \mathcal{N}_{m-j}^{(2)} + 12 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(2)} \mathcal{N}_{m-j}^{(1)} + 6 \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(3)} \mathfrak{D}_{m-j}. \quad (4.59)$$

Esta fórmula é evidentemente mais simples que (4.50). Em particular, podemos generalizar este procedimento para  $N$  arbitrário, obtendo

$$\mathcal{N}_m^{(N)} = N \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(1)} \mathcal{N}_{m-j}^{(N-1)} + N \sum_{i=2}^N \frac{(N-1)^2 (N-2)^2 \cdots (N-i+1)^2}{(i-1)!} \sum_{j=i-1}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(i)} \mathcal{N}_{m-j}^{(N-i)}, \quad (4.60)$$

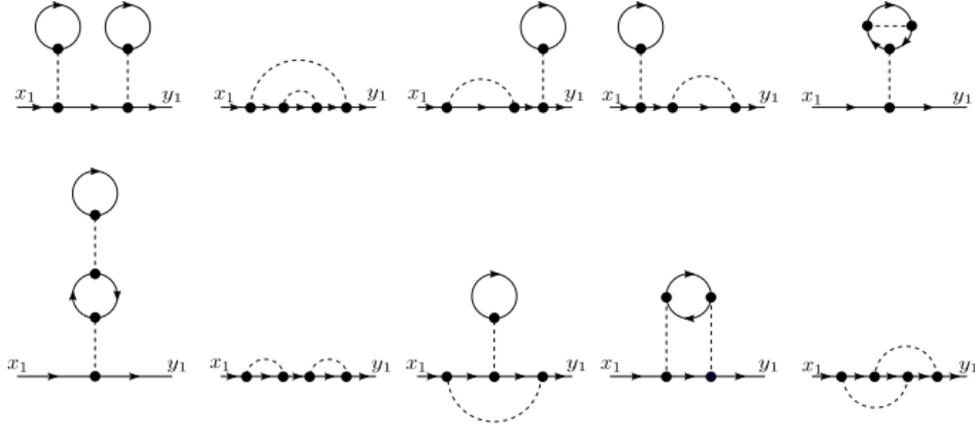


Figura 4.8: Os dez diagramas de Feynman conectados para  $m = 2$  e  $N = 1$ .

Computacionalmente esta recorrência é muito mais simples que (4.52). Em particular permite calcular  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  para uma grande quantidade de casos em  $N$  e para grandes valores de  $m$ . O procedimento é o seguinte, resolvemos o caso  $N = 1$  até uma ordem finita  $m$  usando equação (4.48). Todos estes valores são usados em equação (4.57) até ordem  $m$  para calcular  $\mathcal{N}_{cm}^{(2)}$  e assim sucessivamente até o  $N$  desejado.

Lembrando que em  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  fizemos uma escolha particular das pernas externas. Portanto, as contrações em  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  consideram só a estrutura interna dos diagramas gerados. Como em fórmula (4.25), para cada uma de estas contrações existem  $2^m m!$  diferentes contrações em  $\mathcal{N}_{cm}^{(N)}$  que determinam o mesmo diagrama. Assim, o número de diferentes diagramas de Feynman com  $2N$  pernas externas (com nossa escolha particular de tais pernas externas) é

$$h_m^{(N)} = \frac{\mathcal{N}_{cm}^{(N)}}{2^m m!} \quad (4.61)$$

	$h_m^{(1)}$	$h_m^{(2)}$	$h_m^{(3)}$	$h_m^{(4)}$	$h_m^{(5)}$	$h_m^{(6)}$	$h_m^{(7)}$
$m = 0$	1	0	0	0	0	0	0
$m = 1$	2	1	0	0	0	0	0
$m = 2$	10	13	6	0	0	0	0
$m = 3$	74	165	172	72	0	0	0
$m = 4$	706	2273	3834	3438	1320	0	0
$m = 5$	8162	34577	81720	115008	91968	32760	0
$m = 6$	110410	581133	1775198	3432864	4227840	3082080	1028160
$m = 7$	1708394	10749877	40320516	99431808	166020720	184019040	124126560

Tabela 4.1: Primeiros valores dos números  $h_m^{(N)}$ .

Para ver os respectivos diagrams no caso  $m = 2$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$  ver figuras (4.8), (4.9) e (4.6), respectivamente.

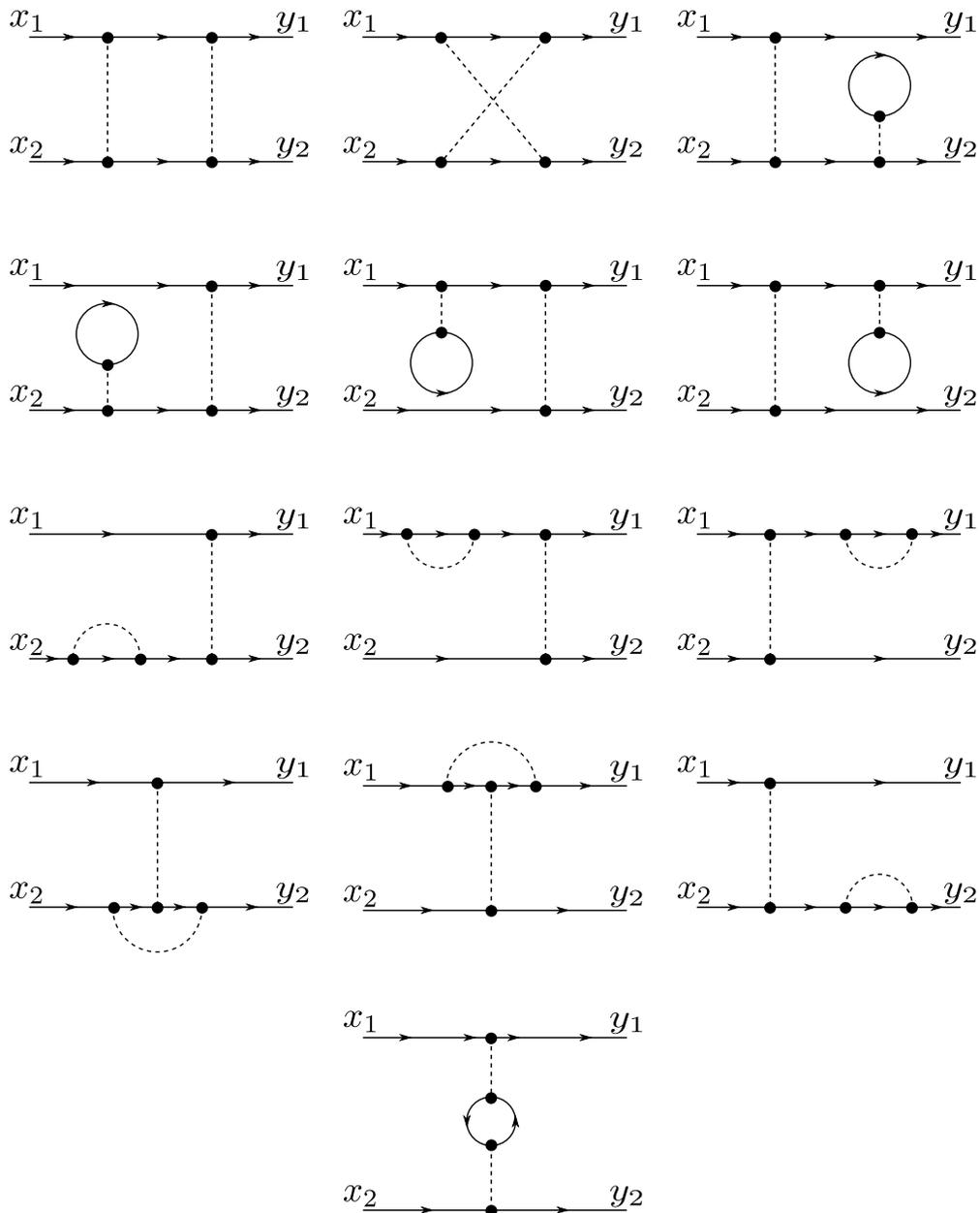


Figura 4.9: Os treze diagramas de Feynman conectados para  $m = 2$  e  $N = 2$ . Note que as pernas externas são nomeadas com uma particular escolha dos índices. Para o caso de pernas externas sem nome, só teríamos 8 diagramas.

## 4.5 Expansão assintótica para o caso $N = 1$

A equação (4.27) é a solução da recorrência (4.48). Se desejamos avaliar ela para ordens grandes encontramos uma dificuldade já que o símbolo  $\mathcal{C}_n^m$  para  $n \ll m$  contem uma grande quantidade de termos (em particular, tem o número de possíveis composições do número  $m - n$ ). Assim, avaliar explicitamente  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  para  $m$  grande é inviável. Trabalhar com a recorrência resulta muito mais econômico, e de fato, computacionalmente pode-se determinar os números  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  e  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$ , por exemplo, para  $m = 4000$  em poucos minutos. Mas a solução (4.27) é útil para determinar  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  e  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  para  $m$  arbitrariamente grande, obtendo-se assim a expansão assintótica destes números.

A primeira condição para apreciar isto é ver  $m$  não como um simples número, se não como uma variável (real ou inclusive complexa, o importante é que contenha os inteiros não negativos). Fazendo isto, os termos dentro dos símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  passam ser simples quociente de polinômios em  $m$ . Em particular, temos uma grande quantidade destes termos. Escrevamos, então,  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  usando expressão (4.27) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_m^{(1)} &= \frac{\mathcal{N}_{cm}^{(1)}}{2^m m!} = \frac{\mathcal{N}_m^{(1)} - \mathfrak{D}_m}{2^m m!} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \mathcal{C}_n^m \frac{\mathcal{N}_n^{(1)} - \mathfrak{D}_n}{\mathcal{N}_m^{(1)} - \mathfrak{D}_m} \right] \\ &= \frac{m!m}{2^{m-1}} \binom{2m}{m} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Estudemos primeiramente os termos com  $k \ll m$

### Primeira contribuição $k \ll m$

Estudemos um termo arbitrário entre os colchetes de (4.62) satisfazendo  $k \ll m$ . Usando a formula (4.38) para símbolo  $\mathcal{C}_n^m$ , o termo toma a seguinte simples forma

$$\frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = \frac{-1}{2^{k-2}(k-1)!} \frac{(m-k)}{(2m)(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-(2k-1))} \mathcal{N}_{ck-1}^{(1)} \quad (4.63)$$

Como  $k \ll m$  o número  $\mathcal{N}_{ck-1}^{(1)}$  independe de  $m$ , e pode ser calculado a partir da recorrência (4.48). Definindo a soma dos primeiros  $\ell$  termos como  $P(m, \ell)$ , não é difícil ver que eles tem a seguinte forma

$$P(m, \ell) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = - \frac{A^{(\ell)} m^{\ell} + B^{(\ell)} m^{\ell-1} + \cdots + X^{(\ell)} m^2 + Y^{(\ell)} m + Z^{(\ell)}}{(2m)(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-(2\ell-1))} \quad (4.64)$$

Com os factores  $A^{(\ell)}, B^{(\ell)}, \dots, Z^{(\ell)}$  simples inteiros obtidos ao fatorizar os cocientes (4.63). Por exemplo, os primeiros valores da função  $P(m, \ell)$  são, para  $\ell = 1$

$$P(m, 1) = \sum_{k=1}^1 \frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = \frac{(m-1)[2(m-1)]!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-1}^m = -\frac{2m-2}{(2m)(2m-1)}. \quad (4.65)$$

Para  $\ell = 2$

$$P(m, 2) = \sum_{k=1}^2 \frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = -\frac{4m^2 - 6m - 2}{(2m)(2m-1)(2m-3)}. \quad (4.66)$$

Para  $\ell = 3$

$$P(m, 3) = \sum_{k=1}^3 \frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = -\frac{8m^3 - 28m^2 + 36m - 44}{(2m)(2m-1)(2m-3)(2m-5)} \quad (4.67)$$

e assim sucessivamente.

A questão importante é que as propriedades analíticas das funções  $P(m, \ell)$  são simples para  $\ell$  inteiro. Estas são funções analíticas com  $\ell + 1$  polos em

$$m = 0, 1/2, 3/2, \dots, (2\ell - 1)/2.$$

Estas funções são regulares em  $m = \infty$  admitindo uma expansão em séries de Taylor neste ponto. Em particular  $P(m, \ell)$  é uma soma de  $\ell$  funções regulares em infinito. Assim, para algum rádio de convergência, a serie de Taylor de  $P(m, \ell)$  pode obter-se somando a série de Taylor dos  $\ell$  termos de (4.63), que têm a seguinte forma

$$\frac{2k}{2^{k-1}k!} \mathcal{N}_{c^{k-1}} \frac{(m-k)}{(2m)(2m-1)(2m-3)\dots(2m-(2k-1))} = \frac{a_1}{m^k} + \frac{a_2}{m^{k+1}} + \dots, \quad m > k - \frac{1}{2}. \quad (4.68)$$

Da fórmula anterior podemos deduzir o seguinte: considerando  $r < \ell$ , para obter os primeiros  $r$  termos da expansão de Taylor de  $P(m, \ell)$  só precisamos somar os  $r$  primeiros termos de Taylor das funções (4.63) (já que a  $q$ -ésima função com  $q > r$  tem primeiro termo de Taylor de ordem  $1/m^q$ . Portanto, a  $q$ -ésima função não contribui aos  $r$  primeiros termos da serie de Taylor de  $P(m, \ell)$ ). Em particular, para  $\ell$  arbitrário, a soma das 6 primeiras funções (4.63) é

$$\frac{\frac{2(m-1)}{2m(2m-1)} - \frac{4(m-2)}{2m(2m-1)(2m-3)} - \frac{20(m-3)}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)}}{\frac{148(m-4)}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)(2m-7)} - \frac{1412(m-5)}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)(2m-7)(2m-9)}} - \frac{16324(m-6)}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)(2m-7)(2m-9)(2m-11)}. \quad (4.69)$$

Que contribuem aos seis primeiros termos de Taylor de  $P(m, \ell)$  quando  $\ell > 6$  é arbitrário. Estes termos são:

$$-\frac{1}{2m} - \frac{1}{4m^2} - \frac{9}{8m^3} - \frac{97}{16m^4} - \frac{1313}{32m^5} - \frac{21601}{64m^6} \dots \quad (4.70)$$

A primeira vista parece ser que estas são as únicas funções que contribuem aos seis primeiros termos de Taylor da expansão. Mas tem outra contribuição. Em particular para  $k \lesssim m$  as funções (4.63) mudam o seu comportamento assintótico, já que, na fórmula (4.63) vemos uma explícita dependência em  $m$  de  $\mathcal{N}_{c, k-1}^{(1)}$  já que  $k \lesssim m$ . Assim estas funções poderiam fornecer contribuição aos primeiros termos da expansão assintótica total. De fato este é o caso como veremos agora.

### Segunda contribuição $k \lesssim m$

A fórmula (4.38) não pode ser usada neste caso, assim temos que usar, em princípio, a expressão completa (4.37) dos símbolos  $\mathcal{C}_{m-k}^m$ . Por sorte, só um número finito de termos de (4.37) contribui aos  $n$  primeiros termos da expansão assintótica total. A fórmula (4.37) pode ser reescrita assim:

$$\mathcal{C}_n^m = -\frac{m!}{n!} \sum_{i=0}^{m-n-1} (-1)^i \sum_{a_1, \dots, a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1 + \dots + a_{i+1}, m-n} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!}, \quad (4.71)$$

ou

$$\mathcal{C}_{m-k}^m = -\frac{m!}{(m-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sum_{a_1, \dots, a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1 + \dots + a_{i+1}, k} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!}. \quad (4.72)$$

Os casos específicos a estudar são  $k = m-1, m-2, m-3, \dots$  em  $P(m, m-1)$ , especificamente, o termo em  $k$  tem a forma

$$\frac{(m-k)(2[m-k])!}{m(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m = -\frac{(m-1)!(2[m-k])!}{(m-k-1)!(2m)!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sum_{a_1, \dots, a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1 + \dots + a_{i+1}, k} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (4.73)$$

Como  $k$  é da ordem de  $m$  a anterior soma tem uma quantidade gigantesca de termos. E estritamente no limite  $m \rightarrow \infty$  contem infinitos termos. Os termos em questão para  $m$  finito são representados por composições de um número finito. No caso infinito, será generalizável o conceito de composições e partições de um número?. Intuitivamente, veremos que sim já que a expansão assintótica que vamos obter parte dessa “generalização”. Em particular, várias possibilidades acontecem e podemos tomar “composições” de  $k$  do seguinte tipo (com  $k \rightarrow \infty$ ). Em particular, várias possibilidades acontecem e podemos tomar “composições” de  $k$  do seguinte tipo (com  $k \rightarrow \infty$ )

- Composições de  $k = a(k) + b_1 + b_2 + \dots + b_l$ , com  $b_i$  e  $l$  números naturais finitos.

- Composições de  $k = a_1(k) + \dots + a_n(k) + b_1 + b_2 + \dots + b_l$ , com  $b_i$ ,  $n$  e  $l$  números naturais finitos.
- Composições de  $k = b_1 + b_2 + \dots + b_{l(k)}$ , com  $b_i$  números naturais finitos.
- Uma combinação dos dois casos anteriores.

Acreditamos que todas estas afirmações podem considerar-se rigorosamente. Analisaremos só os dois primeiros casos, e em particular só o primeiro caso parece ser o único em dar uma contribuição no desprezível à expansão assintótica convencional. Vejamos então nesta subsecção só o primeiro caso. Para  $k = m - 1$ , os termos em (4.73) tem a forma

$$\begin{aligned}
& -\frac{(m-1)!2!}{0!(2m!)} \left[ \frac{[2(m-1)]!}{(m-1)!} - 2\frac{[2(m-2)]!2!}{(m-2)!1!} - 2\frac{[2(m-3)]!4!}{(m-3)!2!} + \dots \right. \\
& \quad + 3\frac{[2(m-3)]!2!2!}{(m-3)!1!1!} + 6\frac{[2(m-4)]!4!2!}{(m-4)!2!1!} + 3\frac{[2(m-5)]!4!4!}{(m-5)!2!2!} \dots \\
& \quad \left. - 4\frac{[2(m-4)]!2!2!2!}{(m-4)!1!1!1!} - 12\frac{[2(m-5)]!4!2!2!}{(m-5)!2!1!1!} - \dots \right]. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Os termos que aparecem na fórmula anterior são representados pelas seguintes composições de  $m - 1$ , estas composições são

$$(m-1), (m-2)+1, (m-3)+2, (m-3)+1+1, (m-4)+2+1, (m-5)+2+2 \tag{4.75}$$

$$(m-4)+1+1+1, (m-5)+2+1+1. \tag{4.76}$$

O fator que acompanha ao respetivo termo representa o número de composições com os mesmos elementos, mas tomados em diferente ordem. Por exemplo, o 12 do último termo corresponde às doze possíveis composições com elementos  $m - 5, 2, 1, 1$ .

O análise feito na subsecção anterior também é valido neste regímen. Isto é, só um número finito de termos contribuem aos  $l$  primeiros termos assintóticos da expansão principal. Pode verificar-se que para os  $l$  primeiros termos de Taylor contribuem todos os termos de (4.74) representados pelas composições que contem algum dos elemento  $(m - 1)$ ,  $(m - 2)$ ,  $\dots$   $(m - l + 1)$ . Em particular, para  $k = m - 1$ , só 12 termos de (4.74) contribuem aos seis primeiros termos assintóticos. Aqui também as expressões em (4.73) contribuem para os casos  $k = m - 2, m - 3, m - 4, m - 5$ . Em particular  $k = m - 2$  contribui com 8 termos,  $k = m - 3$  com 4 termos,  $k = m - 4$  com 2 termos e  $k = m - 5$  com um único termo. Somando todas estas contribuições, obtemos.

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{2m(2m-1)} - \frac{8}{2m(2m-1)(2m-3)} - \frac{60}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)} \\
& \quad \frac{592}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)(2m-7)} - \frac{7060}{2m(2m-1)(2m-3)(2m-5)(2m-7)(2m-9)}.
\end{aligned}$$

Expressão que tem a seguinte expansão em séries de Taylor ate ordem 6

$$-\frac{1}{2m^2} - \frac{5}{4m^3} - \frac{47}{8m^4} - \frac{619}{16m^5} - \frac{10167}{32m^6} \dots \quad (4.77)$$

### Expansão assintótica para $\mathfrak{h}_m^{(1)}$

Somando as duas expressões (4.70) e (4.77), obtemos

$$f(m) = -\frac{1}{2m} - \frac{3}{4m^2} - \frac{19}{8m^3} - \frac{191}{16m^4} - \frac{2551}{32m^5} - \frac{41935}{64m^6} \dots \quad (4.78)$$

Assim, a expressão assintótica para  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  é

$$\mathfrak{h}_m^{(1)} = \frac{m!m}{2^{m-1}} \binom{2m}{m} [1 + f(m)] \quad (4.79)$$

O coeficiente binomial  $\binom{2m}{m}$  é chamado de coeficiente binomial central, e, no limite  $m \rightarrow \infty$  tem uma expansão assintótica bem definida [25], em particular:

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{m\pi}} \left[ 1 - \frac{1}{8m} + \frac{1}{128m^2} + \frac{5}{1024m^3} - \frac{21}{32768m^4} - \frac{399}{262144m^5} + \frac{869}{4194304m^6} \dots \right]. \quad (4.80)$$

Introduzindo a expressão (4.80) para  $\binom{2m}{m}$  em (4.79) e multiplicando termo a termo obtemos a expansão assintótica para  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$

$$h_m^{(1)} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m!m^{\frac{1}{2}} 2^m \left[ 1 - \frac{5}{8m} - \frac{87}{128m^2} - \frac{2335}{1024m^3} - \frac{381733}{32768m^4} - \frac{20512763}{262144m^5} - \frac{2706890307}{4194304m^6} \dots \right]. \quad (4.81)$$

Os dois primeiros termos são dados pela referência [19], que usa a abordagem funcional. Nessa referencia a variável usada é  $m' = 2m$  e somente é calculado o primeiro termo da expansão. Para  $m = 1000, 2000$  e  $3000$  esta expansão coincide com o valor exato de  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  nos primeiros 17, 19 e 20 dígitos respetivamente.

## 4.6 Uma nova contribuição: Contribuição multinomial centrada

Como vimos na secção anterior, a expansão assintótica obtida parece coincidir excelentemente com o valor exato de  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  para grandes valores de  $m$ . Porem, no limite  $k \lesssim m$

não analisamos todas as possibilidades. Escrivamos um dos termos analisados na subsecção anterior, Por exemplo o último termo na expressão (4.74) pode ser reescrito assim.

$$12 \frac{(m-1)! [2(m-5)]! 2! 4! 2! 2!}{(2m)! (m-5)! 2! 1! 1! 0!} = 12 \frac{\binom{m-1}{m-5, 2, 1, 1}}{\binom{2m}{2m-10, 4, 2, 2, 2}}. \quad (4.82)$$

Isto é, um quociente de dois coeficientes multinomiais. Todos os termos estudados no limite  $k \lesssim m$  são deste tipo. Em particular, estes coeficientes multinomiais são não centrados. Os outros casos mencionados no começo correspondem com coeficientes multinomiais centrados. Estes tem alguma contribuição na expansão assintótica total? A resposta é afirmativa, mas como é de esperar (devido à excelente concordância de (4.81) com o valor exato), tal contribuição é desprezível ante a contribuição principal anteriormente calculada.

Por exemplo, consideremos um termo arbitrário deste novo tipo de contribuição. Por exemplo um termo binomial (Em realidade o termo é multinomial mas só dois elementos da respetiva composição dependem explicitamente de  $m$ ). O termo em questão é

$$12 \frac{(m-1)! (m-6)! 2! (m)! 2! 2!}{(2m)! (m/2-3)! (m/2)! 1! 1! 0!} = 12 \frac{\binom{m-1}{m/2-3, m/2, 1, 1}}{\binom{2m}{m-6, m, 2, 2, 2}}. \quad (4.83)$$

Para  $m \rightarrow \infty$  este termo é da ordem de

$$\sim \frac{12\sqrt{2}}{2^m m^4} \quad (4.84)$$

Diferindo enormemente do comportamento dos termos multinomiais não centrados, os quais, não possuem a dependência respeito à potência  $2^m$ . Para ver isto explicitamente, consideremos ao fator  $c = m/2$  como um número finito. Ao fazer isto o termo (4.83) pode ser escrito como

$$12 \frac{(m-1)! [2(m-c-3)]! 2! (2c)! 2! 2!}{(2m)! (m-c-3)! c! 1! 1! 0!}. \quad (4.85)$$

Para  $c$  finito, este termo corresponde com um termo multinomial não centrado. Particularmente podemos ver o comportamento assintótico deste termo, considerando  $c$  finito, e ver como difere explicitamente com o comportamento do termo multinomial centrado. (4.85) tem o seguinte comportamento assintótico

$$\sim \frac{3}{2^{2c+1}} \frac{1}{m^{4+c}} \frac{(2c)!}{c!} \underset{c \rightarrow m/2}{=} \frac{3}{2} \frac{1}{2^m m^4} \underbrace{\left[ \frac{m}{m} \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-2)}{m} \dots \frac{(m - \frac{m}{2} + 1)}{m} \right]}_{g(m)} \quad (4.86)$$

Já que

$$\frac{12\sqrt{2}}{2^m m^4} \sim \frac{3}{2} \frac{1}{2^m m^4} \quad (4.87)$$

Podemos considerar  $g(m)$  como o desvio dos termos multinomiais não centrados respeito dos termos multinomiais centrados. Em particular  $g(m)$  satisfaz

$$\frac{1}{2^{m/2}} < g(m) \ll 1.$$

Como considerar a contribuição destes termos à expansão assintótica total? Consideremos os termos representados pelas composições de  $b-1, b-2, b-3, \dots$  com  $b \rightarrow m$  e ao menos dois termos da composição dependendo explicitamente de  $b$ . Chamaremos à contribuição binomial centrada, aquela conformada por termos multinomiais com só dois elementos da respetiva composição dependendo de  $b$ . Dois fatores são relevantes para que esta contribuição seja bem definida:

- A forma da composição depende da natureza do número  $b$ , isto é, depende de se  $b$  é considerado como um número par ou ímpar. Esta aparente ambiguidade pode ser resolvida considerando

$$b = \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil,$$

com  $\lfloor r \rfloor$  ( $\lceil r \rceil$ ) o inteiro mais próximo por abaixo (acima) ao número racional  $r$ . Assim, se  $b$  é par temos

$$\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil = \frac{b}{2},$$

entanto se  $b$  é ímpar

$$\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor = \frac{b-1}{2}, \quad \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil = \frac{b+1}{2}$$

- Algumas destas composições generalizadas geram termos assintóticos indeterminados na expansão assintótica total. Por exemplo, este é o caso de  $(\frac{b}{2} - n) + (\frac{b}{2} + n)$  para  $n$  um inteiro positivo e finito. Pode verificar-se que todos os respetivos termos têm o mesmo primeiro termo de Taylor e portanto ao somar todas as contribuições o primeiro termo assintótico total é indeterminado já que teríamos que somar o primeiro termo de Taylor (idêntico para todos os casos) para todos os  $n \in \mathbb{N}$ . Para evitar este problema, só consideraremos composições contendo elementos dependendo explicitamente de  $b$  do tipo

$$\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left( \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil - 1 \right); \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left( \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil - 2 \right); \left( \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left( \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil - 1 \right) \dots \quad (4.88)$$

Com esta eleição, evitamos ter elementos da composição do tipo  $(\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + a)$  com  $a$  um número positivo. Com nossa eleição teremos que os elementos dependentes de  $b$  da

respetiva composição serão do tipo  $\left(\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil - a\right)$ . Isto é desejável, já que além de fornecer termos bem definidos na expansão assintótica total, é acorde com a noção de  $b = m$  como uma cota superior quando  $m$  é arbitrariamente grande.

Como exemplo, calculemos explicitamente os três primeiros termos assintóticos da contribuição binomial centrada em  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$ . Escribamos explicitamente os termos de (4.73) que contribuem. Suponhamos  $m$  ímpar. Então

$$m = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} \quad (4.89)$$

Na equação (4.73) temos 10 termos dando contribuição quando  $k = m - 1$  representados pelas seguintes composições:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{2} \right\}; \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-3}{2} \right\}; \left\{ \frac{m-1}{2} + \frac{m-3}{2} + 1 \right\}; \left\{ \frac{m-3}{2} + \frac{m-3}{2} + 2 \right\}; \\ & \left\{ \frac{m-1}{2} + \frac{m-5}{2} + 2 \right\}; \left\{ \frac{m-1}{2} + \frac{m-5}{2} + 1 + 1 \right\}; \left\{ \frac{m-3}{2} + \frac{m-3}{2} + 1 + 1 \right\} \\ & \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-5}{2} + 1 \right\}; \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-7}{2} + 2 \right\}; \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-7}{2} + 1 + 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

para  $k = m - 2$  temos os seguintes termos em (4.73) representados pelas composições

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{m-3}{2} + \frac{m-1}{2} \right\}; \left\{ \frac{m-3}{2} + \frac{m-3}{2} + 1 \right\}; \left\{ \frac{m-5}{2} + \frac{m-1}{2} + 1 \right\}; \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-5}{2} \right\}; \\ & \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-7}{2} + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

e por último para  $k = m - 3$  temos que os termos que contribuem são representados por

$$\left\{ \frac{m-5}{2} + \frac{m-1}{2} \right\}; \left\{ \frac{m-3}{2} + \frac{m-3}{2} \right\}; \left\{ \frac{m+1}{2} + \frac{m-7}{2} + 1 \right\}. \quad (4.92)$$

De acordo com a nossa convenção, estes são os únicos 18 termos que apresentam contribuição. Somando eles obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{192 [(m-3)!]^2 (m-1)!}{\left[\left(\frac{m-3}{2}\right)!\right]^2 (2m)!} + \frac{384(m-5)! [(m-1)!]^2}{\left(\frac{m-5}{2}\right)! \left(\frac{m-1}{2}\right)! (2m)!} + \frac{24(m-3)! [(m-1)!]^2}{\left(\frac{m-3}{2}\right)! \left(\frac{m-1}{2}\right)! (2m)!} + \frac{2 [(m-3)!]^3}{\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right]^2 (2m)!} \\ & + \frac{384(m-7)! (m-1)! (m+1)!}{\left(\frac{m-7}{2}\right)! \left(\frac{m+1}{2}\right)! (2m)!} + \frac{24(m-7)! (m-1)! (m+1)!}{\left(\frac{m-7}{2}\right)! \left(\frac{m+1}{2}\right)! (2m)!} + \frac{4(m-3)! (m-1)! (m+1)!}{\left(\frac{m-3}{2}\right)! \left(\frac{m+1}{2}\right)! (2m)!} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Expandindo em série de Taylor ao redor de  $m = \infty$  obtemos

$$\frac{3\sqrt{2}}{m^2} + \frac{137}{4\sqrt{2}m^3} + \frac{23323}{64\sqrt{2}m^4} + \dots \quad (4.94)$$

Introduzindo esta expansão no colchete de (4.62) e multiplicando pela expansão assintótica (4.80) obtemos a seguinte contribuição assintótica para  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3\sqrt{2}}{m^2} + \frac{67}{2\sqrt{2}m^3} + \frac{5763}{16\sqrt{2}m^4} + \dots \right] \quad (4.95)$$

Para  $m$  par podemos repetir o procedimento, neste caso temos 13 termos que contribuem na expansão assintótica total. A contribuição binomial centrada para  $\mathfrak{h}_m^{(1)}$  é neste caso

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{m^2} + \frac{21}{\sqrt{2}m^3} + \frac{2005}{8\sqrt{2}m^4} + \dots \right] \quad (4.96)$$

A importante questão é que estas duas contribuições são desprezíveis ante a expansão assintótica principal (4.81). Podemos generalizar esta análise para o caso de termos com forma  $n$ -nomial centrada para  $n \in \mathbb{N}$ . Assim teremos uma família de contribuições assintóticas associada com cada  $n$ . O caso  $n = 1$  corresponde com a contribuição principal (4.81). As demais parecem ser desprezíveis ante a contribuição assintótica principal. No caso da contribuição 3-nomial centrada teremos três possibilidades:

- Se  $b = m \equiv 0 \pmod{3}$  (ou  $m$  é divisível entre 3), teremos

$$b = \frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3},$$

e, seguindo o mesmo procedimento anterior, os dois primeiros termos da expansão assintótica são

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{3} \right)^m \left[ \frac{9}{m^2} + \frac{507}{8m^3} + \dots \right] \quad (4.97)$$

- Se  $b = m \equiv 1 \pmod{3}$  (ao dividir  $m$  entre 3 o resto é 1), teremos

$$b = \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor = \frac{m-1}{3} + \frac{m+2}{3} + \frac{m-1}{3},$$

neste caso os dois primeiros termos da expansão assintótica são

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{3} \right)^m \left[ \frac{21}{m^2} + \frac{1303}{8m^3} + \dots \right] \quad (4.98)$$

- Se  $b = m \equiv 2 \pmod{3}$  (ao dividir  $m$  entre 3 o resto é 2) teremos

$$b = \left\lceil \frac{b}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{3} \right\rceil = \frac{m+1}{3} + \frac{m-2}{3} + \frac{m+1}{3},$$

os dois primeiros termos da expansão assintótica são

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^m \left[ \frac{18}{m^2} + \frac{543}{4m^3} + \dots \right] \quad (4.99)$$

O cálculo é generalizável para qualquer termo  $n$ -nomial centrado.

## 4.7 Solução exata e expansão assintótica para o caso $N = 2$

Para finalizar este capítulo, vamos agora mostrar o caso  $N = 2$ . Como este caso é uma generalização do caso  $N = 1$  vamos simplesmente mostrar os resultados obtidos com uma explicação breve de como foram obtidas as respectivas soluções. A recorrência que determina os números  $\mathcal{N}_{cm}^{(2)}$  é

$$\mathcal{N}_m^{(2)} = 2 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(1)} \mathcal{N}_{m-j}^{(1)} + 2 \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \mathcal{N}_{cj}^{(2)} \mathfrak{D}_{m-j}. \quad (4.100)$$

Usando a propriedade (4.33) dos símbolos  $\mathcal{E}_n^m$  pode mostrar-se por indução (ver apêndice b da referência [16]) que a solução de esta recorrência é

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{cm}^{(2)} &= \sum_{n=1}^m \mathcal{E}_n^m \left( \frac{\mathcal{N}_n^{(2)}}{2} - \mathcal{N}_n^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^m [2(m-n) - 1] \mathcal{E}_n^m (\mathcal{N}_n^{(1)} - \mathfrak{D}_n). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Reescrevamos esta equação em um formato parecido com equação (4.62) para o caso  $N = 1$ . Para isto usamos

$$\frac{\mathcal{N}_k^{(2)}}{2} - \mathcal{N}_k^{(1)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) (\mathcal{N}_k^{(1)} - \mathfrak{D}_k), \quad (4.102)$$

Obtendo

$$\mathcal{N}_{cm}^{(2)} = \left( \frac{\mathfrak{N}_m^{(2)}}{2} - \mathfrak{N}_m^{(1)} \right) \frac{2m-1}{2m+1} + \sum_{n=1}^{m-1} \mathcal{E}_n^m \left( \frac{\mathfrak{N}_n^{(2)}}{2} - \mathfrak{N}_n^{(1)} \right) \frac{4m-2n-1}{2n+1}. \quad (4.103)$$

Usando a equação anterior em

$$\mathfrak{h}_m^{(2)} = \frac{\mathcal{N}_{cm}^{(2)}}{2^m m!}$$

e com algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_m^{(2)} &= \frac{mm!}{2^m} (2m-1) \binom{2m}{m} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{n}{m} \frac{(4m-2n-1)}{(2m-1)} \frac{(2n)!}{(2m)!} \mathcal{C}_n^m \right] \\ &= \frac{mm!}{2^m} (2m-1) \binom{2m}{m} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)}{m} \frac{(2(m+k)-1)}{(2m-1)} \frac{(2[m-k])!}{(2m)!} \mathcal{C}_{m-k}^m \right], \end{aligned} \quad (4.104)$$

Este formato é muito semelhante a (4.62) para o caso  $N = 1$ . Os termos que contribuem na expansão assintótica são exatamente os mesmos com a diferença que eles são multiplicados pelo factor

$$\frac{(2(m+k)-1)}{(2m-1)}$$

Fazendo a respectiva substituição deste fator multiplicativo, obtemos a expansão assintótica principal estudando os casos  $k \ll m$  e  $k \leq m$ . Até sexta ordem, a expansão assintótica é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_m^{(2)} &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} m! \sqrt{m} (2m-1) 2^m \\ &\times \left[ 1 - \frac{5}{8m} - \frac{215}{128m^2} - \frac{4255}{1024m^3} - \frac{627749}{32768m^4} - \frac{32650491}{262144m^5} - \frac{4251341763}{4194304m^6} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Calculando a solução exata de  $\mathfrak{h}_m^{(2)}$  diretamente a partir da recorrência, vemos que para os casos  $m = 1000, 2000$  e  $m = 3000$ , o valor dado pela expansão assintótica coincide com o valor exato nos primeiros 17, 19 e 20 dígitos respetivamente.

Para o caso  $N = 2$  vemos que a contribuição dos termos multinomiais centrados existe. Porém, analogamente ao caso  $N = 1$ , esta contribuição parece ser desprezível ante a contribuição principal. Tomando em conta novamente o fator multiplicativo

$$\frac{(2(m+k)-1)}{(2m-1)}$$

é possível obter a contribuição bimomial centrada em  $\mathfrak{h}_m^{(2)}$ . Para  $m$  ímpar, seguindo o mesmo procedimento que no caso  $N = 1$ , obtemos

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} (2m-1) \left[ \frac{6\sqrt{2}}{m^2} + \frac{32\sqrt{2}}{m^3} + \frac{5233}{8\sqrt{2}m^4} + \dots \right] \quad (4.106)$$

Entanto que para  $m$  par obtemos

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} m! m^{\frac{1}{2}} (2m-1) \left[ \frac{4\sqrt{2}}{m^2} + \frac{20\sqrt{2}}{m^3} + \frac{1815}{4\sqrt{2}m^4} + \dots \right] \quad (4.107)$$

Aqui também é possível definir as contribuições  $n$ -nomiais de forma semelhante. O nosso método não parece ser facilmente generalizável aos casos  $N > 2$  já que uma solução das recorrências para determinar  $\mathcal{N}_m^{(N)}$  em termos dos símbolos  $\mathcal{C}_n^m$  parece não ser possível.

## Capítulo 5

# Diagramas de Feynman na Teoria $\phi^N$

Neste capítulo vamos continuar nosso estudo enumerativo dos diagramas de Feynman, agora para a teoria  $\phi^N$ . Geralmente nossos cálculos serão feitos para  $N = 4$ , sendo facilmente generalizáveis para qualquer  $N \geq 3$ . Primeiramente, o estudo estará relacionado com os métodos usados no capítulo anterior para diagramas de Feynman na teoria de muitos corpos. O método é efetivo e facilmente generalizável só na contagem do número de contrações numa dada ordem. Porém, a contagem de diagramas de Feynman da teoria  $\phi^4$  resulta mais complicada, já que a multiplicidade (isto é, o número de contrações que geram um determinado diagrama) varia respeito a cada diagrama. No capítulo anterior, a multiplicidade dependia exclusivamente da ordem de cada diagrama conectado. Assim, todos os diagramas de uma dada ordem tinham a mesma multiplicidade o que fazia trivial o cálculo do número de diagramas conectados para uma dada ordem. Agora não é o caso, para teorias  $\phi^N$  só cálculos algorítmicos para o número total de diagramas e suas respectivas multiplicidades são conhecidos. Aqui apresentaremos um cálculo algorítmico baseado em uma relação com um certo tipo de matrizes combinatórias para os diagramas de Feynman do vácuo, encontrada na referencia [15]. Os diagramas do Vácuo são especialmente interessantes, já que correspondem com todos os possíveis multígrafos de grau  $N$ .

### 5.1 Contrações totais e diagramas de Feynman com pernas externas na teoria $\phi^4$

A teoria  $\phi^4$  comumente é usada nos livros de texto como base para introduzir as ferramentas de teoria quântica de campos. Em particular, acostuma ser a teoria usada para introduzir os diagramas de Feynman. Aqui, a diferença do capítulo anterior, usaremos as duas abordagens para falar de diagramas de Feynman (a abordagem funcional para os

diagramas de Feynman do capítulo anterior geralmente é introduzida a partir da teoria electrodinâmica escalar  $\phi^* A\phi$ ).

Concentremos agora na abordagem dos operadores de campo. Neste caso, consideraremos o operador  $\phi = \phi^\dagger$ . (O caso escalar complexo, corresponde com  $\phi \neq \phi^\dagger$  e as linhas dos diagramas de Feynman são orientadas. Não estudaremos tal caso.) Pode mostrar-se por um argumento semelhante ao usado no capítulo anterior que os diagramas de Feynman na teoria  $\phi^4$  só tem um número par de pernas externas. Os diagramas de Feynman de ordem  $m$  com  $2n$  pernas externas são gerados a partir de uma integral nas variáveis  $z_i$  do seguinte valor esperado

$$\langle 0 | \phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1) \cdots \phi(z_m)\phi(z_m)\phi(z_m)\phi(z_m)\phi(x_1) \cdots \phi(x_{2n}) | 0 \rangle \quad (5.1)$$

Onde  $z_i$ , com  $i \in [1, 2, \dots, m]$  correspondem com os vertices do diagrama. O número de contrações totais são simplesmente

$$\mathfrak{N}_m^{(n)} = \frac{(4m+2n)!}{2^{2m+n}(2m+n)!} \quad (5.2)$$

Os diagramas de Feynman do vácuo são gerados tomado  $n = 0$  no valor esperado anterior. Assim o número de contrações nesse caso é

$$\mathfrak{N}_m^{(0)} = \mathfrak{D}_m = \frac{(4m)!}{2^{2m}(2m)!} \quad (5.3)$$

Para uma dada ordem só um subconjunto das contrações totais geram diagramas de Feynman conectados. Chamemos  $\mathfrak{N}_{cm}^{(n)}$  o número de possíveis contrações que geram diagramas de Feynman conectados com  $2n$  pernas externas. A fórmula (4.52) do capítulo 4, que permitia gerar recursivamente os números  $\mathcal{N}_{cm}^{(n)}$ , pode ser generalizada para o nosso caso. Não é difícil ver que generalização é

$$\mathfrak{N}_m^{(n)} = \sum_{(n_1, \dots, n_l) \in \mathcal{P}_n} \left[ \sum_{m_1=n_1-1}^m \cdots \sum_{m_l=n_l-1}^m \sum_{m_{l+1}=0}^m \delta_{m_1+\dots+m_{l+1}, m} \frac{1}{d_1! d_2! \cdots d_r!} \right. \\ \left. \times \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)! \cdots (2n_l)!} \times \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_{l+1}!} \mathfrak{N}_{cm_1}^{(n_1)} \mathfrak{N}_{cm_2}^{(n_2)} \cdots \mathfrak{N}_{cm_l}^{(n_l)} \mathfrak{D}_{m_{l+1}} \right]. \quad (5.4)$$

Como antes temos  $n = d_1 n_1 + \cdots + d_r n_r = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$ .

Como no capítulo anterior (explicitamente usando os mesmos argumentos que no trabalho [16]) esta fórmula pode ser bastante simplificada. A fórmula em questão, que gera

	$\mathfrak{N}_{cm}^{(1)}$	$\mathfrak{N}_{cm}^{(2)}$	$\mathfrak{N}_{cm}^{(3)}$
$m = 0$	1	0	0
$m = 1$	12	24	0
$m = 2$	768	4032	11520
$m = 3$	114048	1029888	6635520
$m = 4$	30081024	392159232	4074209280
$m = 5$	12322160640	211075891200	3060036403200
$m = 6$	7226240532480	153522098012160	2865178253721600
$m = 7$	5741745289297920	145582138188103680	3324314390416588800

Tabela 5.1: Primeiros valores dos números  $\mathfrak{N}_{cm}^{(N)}$ .

	$\mathfrak{N}_{cm}^{(4)}$	$\mathfrak{N}_{cm}^{(5)}$	$\mathfrak{N}_{cm}^{(6)}$
$m = 0$	0	0	0
$m = 1$	0	0	0
$m = 2$	0	0	0
$m = 3$	23224320	0	0
$m = 4$	30377410560	122624409600	0
$m = 5$	35594521804800	297107796787200	1339058552832000
$m = 6$	45533341679616000	581234350620672000	5318563992698880000
$m = 7$	67027840008192000000	1152545338284834816000	15915194609559404544000

Tabela 5.2: Primeiros valores dos números  $\mathfrak{N}_{cm}^{(N)}$ .

recursivamente os mesmos números  $\mathfrak{N}_{cm}^{(n)}$  é

$$\mathfrak{N}_m^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2i+1)}{(2i-1)!} \sum_{j=i-1}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(i)} \mathfrak{N}_{m-j}^{(n-i)} \quad (5.5)$$

Particularmente para  $n = 1, 2, 3, \dots$  temos

$$\mathfrak{N}_m^{(1)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(1)} \mathfrak{D}_{m-j} \quad (5.6)$$

$$\mathfrak{N}_m^{(2)} = 3 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(1)} \mathfrak{N}_{m-j}^{(1)} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(2)} \mathfrak{D}_{m-j} \quad (5.7)$$

$$\mathfrak{N}_m^{(3)} = 5 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(1)} \mathfrak{N}_{m-j}^{(2)} + 10 \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(2)} \mathfrak{N}_{m-j}^{(1)} + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} \mathfrak{N}_{cj}^{(3)} \mathfrak{D}_{m-j} \quad (5.8)$$

Nossa abordagem para determinar uma solução exata para os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  é facilmente generalizável aqui. Assim, poderíamos também encontrar a expansão assintótica para os números  $\mathcal{N}_{cm}^{(1)}$  e  $\mathcal{N}_{cm}^{(2)}$  que representam o número de possíveis contrações totais para cada caso. Porém, estes números aqui não determinam o número de diagramas de Feynman devido a que a multiplicidade depende explicitamente de cada diagrama. Então

para determinar expressões para o número de diagramas, não é suficiente dividir por um fator multiplicativo.

## 5.2 Contrações totais e diagramas de Feynman do vácuo na teoria $\phi^4$

Diagrama de Feynman do vácuo não tem pernas externas. Porém, o nosso método de contagem ainda continua sendo válido para contar todas as possíveis contrações totais que geram borbulhas de vácuo conectadas. O valor esperado, neste caso, corresponde com

$$\langle 0 | \phi(z_1) \phi(z_1) \phi(z_1) \phi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_2) \phi(z_2) \phi(z_2) \cdots \phi(z_m) \phi(z_m) \phi(z_m) \phi(z_m) | 0 \rangle. \quad (5.9)$$

O número de possíveis contrações totais que geram todas as borbulhas de vácuo de ordem  $m$  é  $\mathfrak{D}_m$  dado por (5.3).

Como antes, podemos decompor um diagrama desconexo em suas  $l$  partes conectadas. Mas, neste caso é só a ordem das componentes as que determinam todas as possibilidades. Sendo  $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$  e supondo que só  $r$  destes números são diferentes, isto é  $m = d_1 m_1 + d_2 m_2 + \cdots + d_r m_r$ , com  $d_i \in \mathbb{N}$  as vezes que o número  $m_i$  se repete na soma, obtemos a seguinte relação somando sobre as possíveis partições de  $m$ :

$$\mathfrak{D}_m = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_l \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{d_1! d_2! \cdots d_r!} \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_l!} \mathfrak{B}_{c m_1} \mathfrak{B}_{c m_2} \cdots \mathfrak{B}_{c m_l} \quad (5.10)$$

onde  $\mathfrak{B}_{c m_i}$  é o número de possíveis contrações totais que geram borbulhas de vácuo conectadas com ordem  $m_i$ .

De forma semelhante aos diagramas com pernas externas, esta fórmula pode ser radicalmente simplificada. Em particular, obtemos a seguinte expressão

$$\mathfrak{D}_m = \sum_{i=1}^m \frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i)!} \mathfrak{B}_{c i} \mathfrak{D}_{m-i}. \quad (5.11)$$

Que permite deduzir os números  $\mathfrak{B}_{c m}$  recursivamente. É interessante comparar com a recorrência obtida por [33] a qual obtêm essencialmente os mesmos números  $\mathfrak{B}_{c m}$ . Em particular os primeiros valores de  $m$  estão na tabela 5.3.

Uma solução de  $\mathfrak{B}_{c m}$  em função de uma soma alternante como nos casos anteriores é possível. Da mesma forma, é possível obter expansões assintóticas a partir destas soluções ate a ordem de precisão desejado. Porém, os resultados neste caso correspondem com o número de contrações que geram diagramas conectados e não com o número de diagramas per se. Abordaremos esta questão a partir de agora usando outra abordagem totalmente diferente.

	$\mathfrak{B}_{cm}$
$m = 0$	1
$m = 1$	3
$m = 2$	96
$m = 3$	9504
$m = 4$	1880064
$m = 5$	616108032
$m = 6$	301093355520
$m = 7$	205062331760640
$m = 8$	185587468924354560

Tabela 5.3: Primeiros valores dos números  $\mathfrak{B}_{cm}$ .

### 5.3 Diagramas de Feynman do vácuo na teoria $\phi^4$

Os diagramas de Feynman do vácuo da teoria  $\phi^N$  correspondem com todos os possíveis multígrafos de grau  $N$ . Em teoria quântica de campos o conceito de contrações totais é geralmente considerado no chamado fator de simetria do correspondente diagrama. Suponhamos que na ordem  $m$  temos  $\ell$  diferentes borbulhas de vácuo conectadas, a  $i$ -ésima borbulha é gerada a partir  $\mathfrak{B}_{cm}^{(i)}$  contrações totais. Em particular, para todas as  $\ell(m)$  borbulhas de vácuo conectadas devemos ter

$$\mathfrak{B}_{cm} = \sum_{i=1}^{\ell(m)} \mathfrak{B}_{cm}^{(i)} \quad (5.12)$$

para a  $i$ -ésima borbulha conectada de ordem  $m$  temos o correspondente fator de simetria  $s_i$

$$\frac{1}{s_i} = \frac{\mathfrak{B}_{cm}^{(i)}}{(4!)^m m!} \quad (5.13)$$

Na matemática existe outro conceito relacionado também de forma não ambígua ao número de contrações totais que geram um determinado diagrama. Este conceito é o número de automorfismos do grafo. Dado um grafo, com uma indexação explícita de seus vértices, um automorfismo do grafo é uma transformação feita sobre seus elementos, de tal forma que seja preservada a relação de adjacência entre vértices (ver figura 5.1). Na teoria  $\phi^4$  é possível ter vários lados unindo o mesmo vértice. Dado um diagrama, chamemos  $D$ ,  $T$  e  $Q$  o número de diferentes lados duplos, lados triplos, e lados quádruplos unindo diferentes pares de vértices. Chamemos  $L$  o número de diferentes loops de um diagrama (lados com um mesmo vértice). Então o número de automorfismos  $\mathcal{A}_m^{(i)}$  do  $i$ -ésimo grafo de ordem  $m$  é

$$\mathcal{A}_m^{(i)} = \frac{s_i}{(2!)^{L+D} (3!)^T (4!)^Q} \quad (5.14)$$

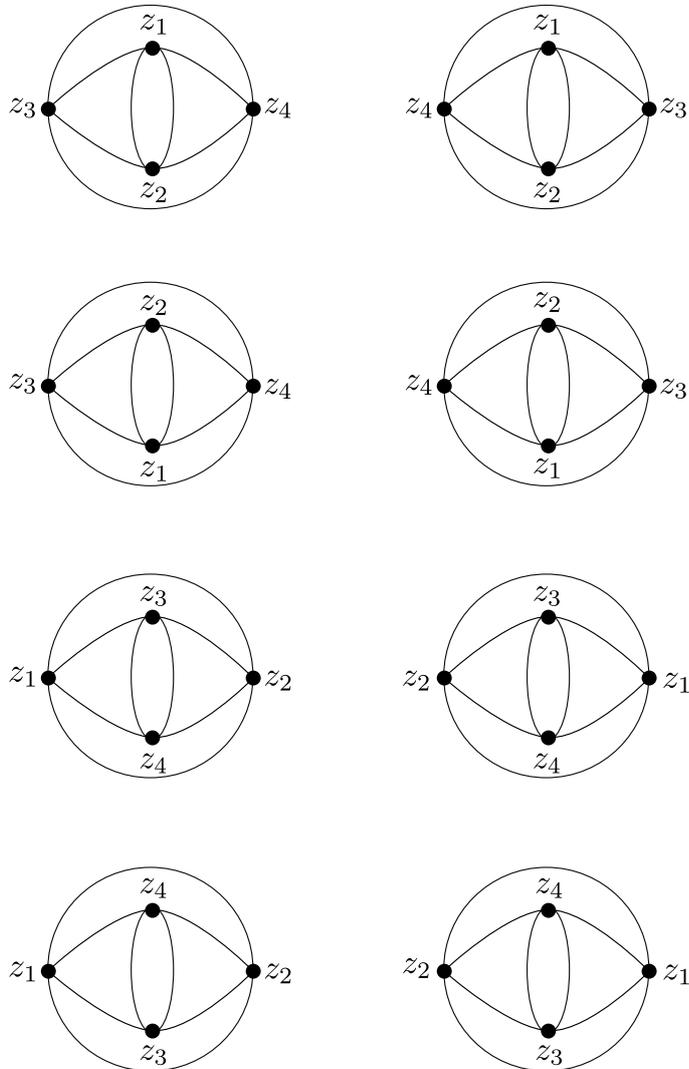


Figura 5.1: Um automorfismo de um grafo, é uma transformação de seus elementos (em particular uma permutação de seus vértices) que preserva a relação de adjacência entre vértices. A figura corresponde com um grafo de ordem 4, note que além do grafo ser o mesmo, para todos os automorfismos a relação de adjacência dos vértices é preservada (por exemplo, em todos os diagramas  $z_1$  é adjacente a  $z_2$  por meio de duas linhas, entanto que  $z_1$  é adjacente a  $z_3$  e  $z_4$  por meio de uma linha.) São 8 possíveis automorfismos (incluída a identidade), assim  $\mathcal{A}_4^{(i)} = 8$ . Com esta informação temos que  $s_i = 32$  (fator de simetria) e o número de possíveis contrações totais que geram o diagrama é  $\mathfrak{B}_{c_4}^{(i)} = 248832$ .

Dado um grafo, determinar o número de seus automorfismos é possível com o uso de algoritmos computacionais. De maneira genérica, determinar se um grafo tem automorfismos diferentes do trivial (identidade) é tratado muitas vezes em estudos de complexidade, em particular tal problema parece estar relacionado com o respectivo problema de contar todos os automorfismos de um dado grafo. Sem entrar em detalhes, em estudos de complexidade para o caso de grafos de grau  $N$ , determinar o número de automorfismos é em essência equivalente a contar todas as contrações totais que geram o respectivo grafo já que estes dois números são relacionados de forma simples.

No que resta deste capítulo, proporemos um algoritmo para o calculo explícito dos números  $\mathfrak{B}_{cm}^{(i)}$  usando a abordagem funcional por meio de uma relação com um certo tipo de matrizes combinatórias.

### **Construção explícita dos diagramas de Feynman do vácuo na teoria $\phi^4$ e relação com o conjunto de certas matrizes com soma idêntica de suas filas e colunas.**

Para evitar a aparição da unidade imaginaria começaremos o nosso estudo com o gerador funcional  $Z$  na teoria Euclidiana  $\phi^4$  acoplada com um campo externo  $J(x)$  com  $x \in \mathbb{R}^d$ . A forma perturbativa de  $Z(J)$  é

$$Z(J) = \exp \left[ -\mathcal{V} \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \exp \left( \frac{1}{2} J \Delta J \right), \quad (5.15)$$

com

$$\frac{1}{2} J \Delta J \rightarrow \frac{1}{2} \int d^d y d^d z J(y) \Delta(y, z) J(z),$$

e

$$\mathcal{V} \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \rightarrow \frac{g}{4!} \int d^d x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)},$$

onde  $\Delta(y, z)$  é o propagador livre e  $g$  a constante de acoplamento.

A expressão anterior tem sentido só perturbativamente. Expandindo em série de Taylor as duas exponenciais e tomando o limite formal  $J \rightarrow 0$ , a expressão  $Z(J \rightarrow 0)$  gera todos os diagramas de Feynman do vácuo. Os diagramas de ordem  $m$  estão na expressão

$$\frac{1}{(2m)! 2^{2m}} \frac{g^m}{(4!)^m m!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_m \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_1)} \cdots \times \frac{\delta^4}{\delta J^4(x_m)} \left[ \left( \int d^d y d^d z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right)^{2m} \right]. \quad (5.16)$$

As derivadas respeito de  $J$  são derivadas funcionais. O termo anterior é o único que sobrevive no limite  $J \rightarrow 0$  já que o número de derivadas funcionais é idêntico ao número de  $J$ 's no argumento da derivada. Ao realizar explicitamente a derivada funcional usando

regra da cadeia, no limite  $J \rightarrow 0$  só ficam uma soma de produtos de  $2m$  propagadores livres, que representam todos os diagramas de Feynman de ordem  $m$ . Os argumentos das funções  $\Delta(x_i, x_j)$  representam os vértices, entanto que a função  $\Delta(x_i, x_j)$  representa uma linha unindo os vértices  $x_i$  e  $x_j$ . Pela forma da interação, só quatro linhas podem incidir em cada vértice, linhas cujas pontas incidem em um único vértice são permitidas, e podemos ter mais de uma linha unindo o mesmo par de vértices. Em particular, estes diagramas de Feynman coincidem com todos os possíveis multígrafos de grau 4. Para  $m = 2$  (supondo que  $\Delta(x_i, x_j) = \Delta(x_j, x_i)$ ) um cálculo direto leva a

$$\frac{1}{48} \int d^d x_1 d^d x_2 [\Delta(x_1, x_2)]^4 + \frac{1}{16} \int d^d x_1 d^d x_2 \Delta(x_1, x_1) [\Delta(x_1, x_2)]^2 \Delta(x_2, x_2) \quad (5.17)$$

$$+ \frac{1}{128} \int d^d x_1 d^d x_2 [\Delta(x_1, x_1)]^2 [\Delta(x_2, x_2)]^2 \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{48} \text{Diagram 1} + \frac{1}{16} \text{Diagram 2} + \frac{1}{128} \text{Diagram 3}$$

Note que o terceiro diagrama é desconectado. Para  $m > 2$  o cálculo aumenta em dificuldade. A questão interessante é que o processo de derivar funcionalmente pode ser entendido de forma combinatória, reduzindo assim enormemente a dificuldade do cálculo. Para ver isto, definimos

$$B(J, J, J, J) = (J\Delta J)^2 \quad (5.19)$$

Aplicando a regra da cadeia sobre o produto dos  $B(J, J, J, J)$  e somando os termos que geram a mesma função, Obtemos uma soma de  $\mathcal{M}(m)$  diferentes termos. Sobre cada  $B$  em esses termos atuam 4 derivadas funcionais. Considerando  $\Delta(x_i, x_j) = \Delta(x_j, x_i)$  e definindo

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(z)} \frac{\delta}{\delta J(w)} [B] \equiv \aleph(x, y, z, w) \quad (5.20)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \aleph(x, y, z, w) = & 8\Delta(x, y)\Delta(z, w) \\ & + 8\Delta(x, z)\Delta(y, w) + 8\Delta(x, w)\Delta(y, z). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Em particular obtemos

$$\aleph(x, x, y, y) = 8\Delta(x, x)\Delta(y, y) + 16\Delta^2(x, y) \quad (5.22)$$

$$\aleph(x, x, y, z) = 8\Delta(x, x)\Delta(y, z) + 16\Delta(x, y)\Delta(x, z) \quad (5.23)$$

$$\aleph(x, x, x, y) = 24\Delta(x, x)\Delta(x, y) \quad (5.24)$$

$$\aleph(x, x, x, x) = 24\Delta^2(x, x). \quad (5.25)$$

Cada um dos  $\mathcal{M}(m)$  termos antes mencionados é formado por um produto de  $m$  funções  $\aleph$ , nas possíveis combinações das variáveis  $x_i$  com  $i \in [1, 2, \dots, m]$ . Cada função  $\aleph$  não é gerada de uma única forma, já que as 4 derivadas funcionais sobre a função  $B$  comutam entre si. É evidente então que com cada função  $\aleph$  existe um fator multiplicativo correspondente a todos estes casos equivalentes. Para as fórmulas (5.21-5.25) os fatores multiplicativos respectivos são 24, 6, 12, 4, 1. Assim, em cada um dos termos  $\mathcal{M}(m)$  devemos considerar a multiplicação dos  $m$  correspondentes fatores de cada  $\aleph$ .

Realizado isto, temos um total de  $\mathcal{M}(m)$  termos cada um com um correspondente fator multiplicativo. Consideremos agora o seguinte problema combinatório: imaginemos um total de  $4m$  bolas de  $m$  cores, de tal forma que para cada cor existem 4 bolas. Imaginemos uma caixa com  $m$  compartimentos de tal forma que em cada compartimento entram 4 bolas. De quantas formas podemos distribuir as  $4m$  bolas nos  $m$  compartimentos da caixa?. Evidentemente em cada compartimento, as bolas não tem nenhuma ordem específica. Note que na equação (5.16) as derivadas funcionais introduzem  $4m$  variáveis, (em particular, 4 para cada  $x_i$ ). Cada função  $\aleph$  contém 4 possíveis variáveis. Das equações (5.21-5.25) observa-se que a ordem das variáveis é irrelevante. Assim, expandindo (5.16) usando a nossa definição de  $\aleph$ , depois de somar os termos equivalentes, cada um dos  $\mathcal{M}(m)$  termos na expansão representam uma possível configuração do problema das  $4m$  bolas. A correspondência é variável  $x_i \iff$  bola  $i$ ,  $\aleph \iff$  compartimento, termo da soma  $\iff$  configuração possível. Assim temos  $\mathcal{M}(m)$  possíveis configurações das  $4m$  bolas.

Cada uma destas configurações pode ser representada por uma matriz  $m \times m$  por meio da tabela 5.4

A componente  $a_{ij}$  representa o número de bolas com cor  $j$  no compartimento  $i$ . Como cada compartimento alberga só 4 bolas temos

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} = 4$$

	color 1	color 2	...	color $m$
Comp 1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1m}$
Comp 2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Comp $m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mm}$

Tabela 5.4: Uma configuração arbitrária no problema da distribuição das 4 bolas.

para todo  $i$ . Entanto só existem 4 bolas de cor  $j$ , portanto

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} = 4$$

para todo  $j$ .

Note que na associação matriz  $\iff$  termo da soma, implicitamente estamos associando uma ordem dada no produto das funções  $\aleph$  dado pela definição usual da regra da cadeia na derivada. A matriz em questão tem a seguinte propriedade: para uma fila (coluna) arbitrária as respectivas componentes pertencentes à fila (coluna) somam 4. Este tipo de matriz é conhecida na literatura [13], e chamaremos de matriz mágica RC (ou simplesmente matriz mágica).

Como exemplo, suponhamos a seguinte matriz  $4 \times 4$  ( $m=4$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &\aleph(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \aleph(x_1, x_1, x_1, x_2) \\ &\times \aleph(x_2, x_2, x_3, x_4) \times \aleph(x_3, x_3, x_4, x_4) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Esta relação é implícita usando a Tabela 5.4, substituindo os compartimentos pelas funções  $\aleph$ , e a cor  $i$  pela variável  $x_i$ . Para o exemplo, a correspondência é entendida melhor usando a tabela 5.5

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
First $\aleph$	1	1	1	1
Second $\aleph$	3	1	0	0
Third $\aleph$	0	2	1	1
Fourth $\aleph$	0	0	2	2

Tabela 5.5: Construção dos produtos contendo as funções  $\aleph$  a partir da matriz na expressão (5.26).

Como mencionamos, um fator multiplicativo sempre acompanha a cada um dos  $\mathcal{M}(m)$  termos (matrizes mágicas  $m \times m$ ). Dada uma matriz mágica  $m \times m$  com soma 4 o

fator multiplicativo em questão vem dado por

$$\prod_{i=1}^m \left[ \frac{4!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{im}!} \right], \quad (5.27)$$

a matriz em (5.26) tem o fator multiplicativo  $24 \times 4 \times 12 \times 6 = 6912$ .

Cada matriz mágica tem associada uma certa quantidade de contrações totais que podem ser decompostas em um determinado conjunto de diagramas do vácuo acompanhados cada um por um certo número correspondente a uma parte das contrações que geram o determinado diagrama. Isto é chamado de um multiconjunto na literatura. Em princípio, para obter todos os diferentes diagramas associados com a matriz, temos que expandir a multiplicação das  $m$  funções  $\aleph$  usando (5.21-5.25), obtendo uma soma de produtos de propagadores livres, os quais correspondem com as respectivas borbulhas de vácuo. Somando os diagramas equivalentes, obtemos o respectivo multiconjunto de diagramas. Computacionalmente isto é complicado já que além de interpretar cada produto de propagadores livres como um determinado diagrama, temos que identificar quais dos diagramas gerados são equivalentes. Para ordens grandes, isto pode ser realmente um problema já que pode não ser direto identificar que dois determinados diagramas sejam equivalentes (isomorfos),

A “transformação” do produto de propagadores em diagramas pode ser alcançada facilmente representando o diagrama por uma matriz de adjacência. Primeiro, representemos as relações (5.21-5.25) diagramaticamente na figura 5.2

Todos os diagramas do vácuo na teoria  $\phi^N$  podem ser representados usando matrizes de adjacência. Para introduzir este conceito, primeiro escolhemos uma ordem nos vértices dos diagramas. Em nosso caso a ordem natural é  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , a matriz de adjacência (denotada por parênteses quadrados) é uma matriz simétrica  $A$  com coeficiente  $A_{ij}$  representando o número de linhas unindo o vértice  $i$  com o vértice  $j$  (evidentemente  $A_{ij} = A_{ji}$ ). O coeficiente  $A_{ii}$  representa o número de loops determinados pelo vértice  $x_i$  e por convenção este número é multiplicado por 2. Assim, se o vértice  $x_i$  tem dois loops, então  $A_{ii} = 4$ . A forma de 5.2 na notação da matrix de adjacencia (supondo a ordem  $\{x_a, x_b, x_c, x_d\}$  e  $1 \leq a < b < c < d \leq m$ ) é

$$\aleph(x_a, x_b, x_c, x_d) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\aleph(x_a, x_a, x_b, x_b) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\aleph(x, y, z, w) = 8 \begin{array}{c} x \text{---} y \\ | \quad | \\ z \text{---} w \end{array} + 8 \begin{array}{c} x \\ | \\ z \end{array} \quad \begin{array}{c} y \\ | \\ w \end{array} + 8 \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagdown \quad \diagup \\ z \quad w \end{array}$$

$$\aleph(x, x, y, y) = 8 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} y \\ | \\ \circ \end{array} + 16 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ y \end{array}$$

$$\aleph(x, x, y, z) = 8 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} z \text{---} y \end{array} + 16 \begin{array}{c} x \\ \diagdown \quad \diagup \\ z \quad y \end{array}$$

$$\aleph(x, x, x, y) = 24 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} y \end{array}$$

$$\aleph(x, x, x, x) = 24 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ x \end{array}$$

Figura 5.2: Representação diagramática das funções  $\aleph$  a partir das formulas (5.21-5.25).

$$\aleph(x_a, x_a, x_b, x_c) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\aleph(x_a, x_b, x_b, x_c) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\aleph(x_a, x_b, x_c, x_c) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\aleph(x_a, x_a, x_a, x_b) \rightarrow 24 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\aleph(x_a, x_b, x_b, x_b) \rightarrow 24 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\aleph(x_a, x_a, x_a, x_a) \rightarrow 24 \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Note que a representação matricial dos diagramas depende da ordem dada aos vértices. Por exemplo, (5.30), (5.31) e (5.32) correspondem com a terceira expressão diagramática em 5.2 com as possíveis escolhas  $\aleph(x, x, y, z)$ ,  $\aleph(x, y, y, z)$  e  $\aleph(x, y, z, z)$ .

Como estamos interessados em construir diagramas de Feynman de ordem  $m$ , é importante representar as matrizes (5.28)-(5.35) em uma representação  $m \times m$ . Tomando todas as variáveis na ordem natural  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , a representação é alcançada colocando zeros nos vértices não incluídos em (5.28)-(5.35). Por exemplo para  $\aleph(x_2, x_2, x_4, x_4)$ , a representação  $5 \times 5$  de (5.29) para  $x_a = x_2$  e  $x_b = x_4$  é

$$\aleph(x_2, x_2, x_4, x_4) \rightarrow 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Ou, a representação  $3 \times 3$  de (5.35) para  $x_a = x_2$  é

$$\aleph(x_2, x_2, x_2, x_2) \rightarrow 24 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

Podemos considerar (5.28)-(5.35), no formato  $m \times m$ , como os 8 blocos de construção básicos para construir os diagramas de Feynman. Dada uma matriz mágica  $m \times m$  ao multiplicar as  $m$  funções  $\aleph$  aplicamos a propriedade distributiva para construir os diagramas a partir destes 8 blocos. Algebricamente, tem uma forma de implementar isto: Os respectivos fatores numéricos são multiplicados de acordo à propriedade distributiva, entanto que as matrizes de adjacência na representação  $m \times m$  em vez de ser multiplicadas de acordo à propriedade distributiva são *somados*.

Computacionalmente, para realizar isto, substituímos cada matriz  $M$  em (5.28-5.35) por uma função formal  $E(\overline{M})$ , com  $\overline{M}$  a representação  $m \times m$  de  $M$ , e a função  $E(\dots)$  satisfazendo a propriedade

$$E(M_1) \times E(M_2) = E(M_1 + M_2) \quad (5.38)$$

Assim garantimos que, ao multiplicar duas funções  $\aleph$ , ao efetuar a propriedade distributiva, as respectivas matrizes de adjacência na representação  $m \times m$  são somadas. Como exemplo, calculemos os diagramas de vácuo associados com (5.26). O produto das funções  $\aleph$  na representação  $4 \times 4$  é

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ 24E \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 16E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 16E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Depois de aplicar a propriedade distributiva e, somar as matrizes de acordo com a propriedade (5.38), obtemos uma soma de 12 funções  $E$ , cada uma com argumento correspondendo a uma matriz de adjacência  $4 \times 4$  que representa uma determinada borbulha de vácuo. Algumas de estas matrizes geram o mesmo diagrama. Para obter explicitamente uma das 12 funções, realizemos o primeiro produto

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ 24E \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ 8E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Multiplicando os fatores numéricos e usando a propriedade (5.38) da função  $E$ , obtemos

$$\begin{aligned}
&\rightarrow 8 \times 24 \times 8 \times 8E \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Somando as matrizes de adjacência, obtemos o diagrama

$$\rightarrow 12288E \left( \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \underbrace{\text{Diagrama}}_{12288} \quad (5.42)$$

Em particular, das 12 borbulhas de vácuo, só 7 são diferentes. Somando os fatores numéricos dos diagramas equivalentes, obtemos

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \underbrace{\text{Diagrama 1}}_{12288} + \underbrace{\text{Diagrama 2}}_{24576} + \underbrace{\text{Diagrama 3}}_{73728} + \underbrace{\text{Diagrama 4}}_{49152} + \underbrace{\text{Diagrama 5}}_{24576} + \underbrace{\text{Diagrama 6}}_{49152} + \underbrace{\text{Diagrama 7}}_{98304} \quad (5.43)$$

No apêndice, implementamos computacionalmente este processo. Em nossa contagem são consideradas também borbulhas de vácuo desconectadas. Este procedimento deve ser repetido para todas as restantes matrizes mágicas. Para cada matriz, devemos multiplicar todos os seus diagramas associados pelo fator (5.27). Depois disto, somamos todas as multiplicidades dos diagramas equivalentes. Se dividimos cada multiplicidade total por  $(2m)!2^{2m}$  obtemos todas as contrações totais que geram o respectivo diagrama (isto é, obtemos o número  $\mathfrak{B}_m^{(i)}$ ). Por outro lado, se dividimos sobre  $(4!)^m m!(2m)!2^{2m}$ , obtemos o respectivo fator de simetria  $s_i$  (ver estes fatores explicitamente em (5.16)).

### 5.4 O grupo de permutações e as matrizes mágicas

Dado o conjunto de todas as possíveis matrizes mágicas com soma 4, encontramos uma forma de gerar todos os diagramas do vácuo na teoria  $\phi^4$ . O número total de matrizes mágicas cresce rapidamente com  $m$ , e um cálculo direto das matrizes cresce em complexidade. Por exemplo, pode constatar-se que para a teoria  $\phi^4$  o número de matrizes mágicas  $\mathcal{N}_m$  nas ordens  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  é

$$1, 5, 120, 10147, 2224955, 1047649905, \dots \quad (5.44)$$

por exemplo, em ordem 4 deveríamos aplicar o mesmo procedimento que levou à formula (5.43) para as restantes 10146 matrizes. A sequência (5.44) é bem conhecida na literatura, ver as sequências OEIS A172806, A257493 e as respectivas referências.

No entanto, existem várias possíveis simplificações deste problema. Em particular, não é preciso conhecer todas o conjunto das matrizes mágicas para gerar todas as borbulhas

de vácuo e as suas multiplicidades. Mostraremos que na realidade, grandes grupos de matrizes geram os mesmos diagramas com as mesmas multiplicidades.

Suponhamos a seguinte operação sobre uma matriz mágica: uma permutação de duas das suas filas. A matriz resultante é evidentemente outra matriz mágica. Na representação com as funções  $\aleph$  (ver (5.26)), isto corresponde com um simples intercâmbio das funções  $\aleph$ . Mas, como aqui a multiplicação é a usual (comutativa), isto gera o mesmo produto e portanto os mesmos diagramas. Suponhamos agora que duas diferentes colunas são permutadas, as colunas representam as variáveis  $x_i$ , assim a permutação troca os coeficientes das duas colunas nas matrizes de adjacência (5.28-5.35) na representação  $m \times m$ . Isto tem o único efeito de intercambiar os índices  $x_i$  e  $x_j$  dos vértices nas borbulhas do vácuo obtidas ao final. Mas os diagramas e suas multiplicidades são exatamente os mesmos. Assim, permutações arbitrárias de filas e colunas de uma matriz mágica não mudam as borbulhas de vácuo associadas. As multiplicidades associadas também são mantidas. Sendo que o fator geral (5.27) que acompanha a cada matriz e as suas permutações é exatamente o mesmo.

## O grupo de permutações

O grupo de permutação de  $m!$  elementos pode ser representado facilmente por matrizes mágicas de soma 1. Para ver isto com um exemplo concreto suponhamos a permutação arbitrária  $\sigma$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

A interpretação da equação anterior é clara,  $\sigma$  transforma o elemento 1 da seguinte forma  $\sigma(1) = 3$ , o elemento 2 como  $\sigma(2) = 1$ , o elemento 3 como  $\sigma(3) = 6$ , etc. Se pensamos nas filas da expressão (5.45) como dois vetores coluna, a representação matricial de  $\sigma$  corresponde com a matriz que transforma um vetor em outro. Assim

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$\sigma$  pode ser representada matricialmente por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

A mesma análise leva a associar com cada permutação de  $m$  elementos uma única matriz de permutação. A identidade  $I$  é um membro do grupo de permutações. E cada  $\sigma$  tem uma única inversa  $\sigma^{-1}$  que também pode ser representada por uma matriz de permutação com a propriedade  $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$

O grupo de permutações de dois elementos  $\mathcal{P}_{2 \times 2}$  pode ser representado pelas matrizes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.48)$$

O grupo de permutações de três elementos  $\mathcal{P}_{3 \times 3}$  pode ser representado pelas 6 matrizes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.49)$$

Em particular, o grupo de matrizes  $\mathcal{P}_{m \times m}$  tem  $m!$  elementos.

### Relação de equivalência induzida pelo grupo de permutações no conjunto das matrizes mágicas

Voltando a nosso problema, dada uma matriz mágica arbitrária  $\mathbf{A}$  de dimensão  $m \times m$ , as possíveis  $m!$  permutações das suas filas podem ser expressas por meio da ação  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}$ , com  $\mathbf{P}_i \in \mathcal{P}_{m \times m}$  e  $\mathcal{P}_{m \times m}$  o conjunto das matrizes  $m \times m$  de permutação. A ação  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_i$  induz as possíveis permutações das colunas. Assim, dada uma matriz  $\mathbf{A}$ , o conjunto de diferentes matrizes mágicas obtidas por  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_j$  contem ao sumo  $(m!)^2$  elementos.

Assim, o grupo de permutações induz naturalmente no conjunto das matrizes mágicas uma relação de equivalência com as classes de equivalência formadas por todas as matrizes relacionadas entre se por permutações da suas filas e das suas colunas.

Evidentemente duas matrizes pertencentes a duas diferentes classes de equivalência não podem ser postas em correspondência por uma permutação. Levando a cabo o procedimento (5.39) e (5.43) em cada matriz  $\mathbf{A}_i$ , obtemos um conjunto de borbulhas de vácuo  $\mathcal{F}[\mathbf{A}_i]$  com as respectivas multiplicidades. Em particular, todos os diagramas e suas multiplicidades são gerados a partir de

$$\sum_i \mathfrak{N}_{\mathbf{A}_i} \times \prod_{j=1}^m \left[ \frac{4!}{a_{j1}! a_{j2}! \cdots a_{jm}!} \right]_i \times \mathcal{F}[\mathbf{A}_i], \tag{5.50}$$

Onde  $i$  indexa cada classe de equivalência,  $\mathfrak{N}_{\mathbf{A}_i}$  é o número de matrizes mágicas que conforma a classe  $i$ , e  $a_{jk}$  são os coeficientes da matriz escolhida para representar cada classe de equivalência. O número de classes de equivalências das matrizes mágicas  $m \times m$  com soma igual a 4 para  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  é

$$1, 3, 9, 43, 264, 2804 \dots \tag{5.51}$$

Como nos calculamos diretamente um representativo de cada classe de equivalência, esta sequência é imediata desse cálculo. O lema de Burnside (um importante resultado em teoria de grupos) pode também ser usado para calcular explicitamente esta sequência.

Como exemplo, calculemos explicitamente todos os diagramas na terceira ordem. Precisamos de nove matrizes representativas, pertencente cada uma às 9 classes de equivalência no conjunto das matrizes mágicas  $3 \times 3$ . Os seguintes 9 representativos são válidos:

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \right\} \tag{5.52}$$

O número de matrizes  $\mathfrak{N}_{3 \times 3}$  em cada uma das classes de equivalências anteriores é respectivamente  $\{6, 18, 9, 18, 12, 36, 6, 9, 6\}$ . Para cada uma destas matrizes  $\mathbf{A}_i$  vamos determinar o conjunto  $\mathcal{F}[\mathbf{A}_i]$  de diagramas de Feynman associados. Usando o mesmo procedimento (5.39) and (5.43), obtemos:

$$\left( \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \underbrace{\text{Diagrama com 4 borbulhas}}_{13824} \tag{5.53}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 1}}_{13824} \tag{5.54}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 2}}_{1536} + \underbrace{\text{Diagram 3}}_{6144} + \underbrace{\text{Diagram 4}}_{6144} \tag{5.55}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 5}}_{4608} + \underbrace{\text{Diagram 6}}_{9216} \tag{5.56}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 7}}_{13824} \tag{5.57}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 8}}_{1536} + \underbrace{\text{Diagram 9}}_{3072} + \underbrace{\text{Diagram 10}}_{3072} + \underbrace{\text{Diagram 11}}_{6144} \tag{5.58}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 12}}_{512} + \underbrace{\text{Diagram 13}}_{3072} + \underbrace{\text{Diagram 14}}_{6144} + \underbrace{\text{Diagram 15}}_{4096} \tag{5.59}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 16}}_{512} + \underbrace{\text{Diagram 17}}_{1024} + \underbrace{\text{Diagram 18}}_{2048} + \underbrace{\text{Diagram 19}}_{4096} + \underbrace{\text{Diagram 20}}_{2048} + \underbrace{\text{Diagram 21}}_{4096} \tag{5.60}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\text{Diagram 1}}_{512} + \underbrace{\text{Diagram 2}}_{3072} + \underbrace{\text{Diagram 3}}_{6144} + \underbrace{\text{Diagram 4}}_{4096} \quad (5.61)$$

O tamanho de cada classe de equivalência é, respectivamente, {6, 18, 9, 18, 12, 36, 6, 9, 6}, e o produto (5.27) associado com cada matriz é, respectivamente, 1, 16, 36, 192, 64, 288, 216, 864, 1728. Assim, aplicando a fórmula (5.50) e somando os fatores dos diagramas topologicamente equivalentes, obtemos as multiplicidades  $\mathcal{M}_T$  de todos os diagramas de ordem  $m = 3$ . Se dividimos  $\mathcal{M}_T$  sobre  $6! \times 2^6$  obtemos o número de contrações totais que geram cada diagrama (chamado aqui de  $\mathfrak{B}_3^{(i)} = \mathcal{M}_K$ , em referência a Kleinert, já que estes números foram calculados por [33] de outra forma). E dividindo por  $(4!)^3 \times 3! \times 6! \times 2^6$  obtemos  $1/s$  com  $s$  o fator de simetria de cada diagrama. Assim, obtemos:

$$\underbrace{\text{Diagram 1}}_{\mathcal{M}_T=1244160, \mathcal{M}_K=27, s=3072} \quad (5.62)$$

$$\underbrace{\text{Diagram 2}}_{\mathcal{M}_T=29859840, \mathcal{M}_K=648, s=128} \quad (5.63)$$

$$\underbrace{\text{Diagram 3}}_{\mathcal{M}_T=9953280, \mathcal{M}_K=216, s=384} \quad (5.64)$$

$$\underbrace{\text{Diagram 4}}_{\mathcal{M}_T=79626240, \mathcal{M}_K=1728, s=48} \quad (5.65)$$

$$\underbrace{\text{Diagram 5}}_{\mathcal{M}_T=119439360, \mathcal{M}_K=2592, s=32} \quad (5.66)$$

$$\underbrace{\text{Diagram 6}}_{\mathcal{M}_T=159252480, \mathcal{M}_K=3456, s=24} \quad (5.67)$$



$$\mathcal{M}_T=79626240, \mathcal{M}_K=1728, s=48$$

(5.68)

## 5.5 Algoritmo para o cálculo das matrizes mágicas representativas

Aqui vamos propor um algoritmo para o cálculo de uma matriz representativa em cada classe de equivalência do conjunto total de matrizes mágicas  $m \times m$ , que será implementado no apêndice D. O algoritmo em questão consiste em duas partes: a primeira é a construção de um conjunto de matrizes  $\mathcal{A}$  que contem ao menos um elemento de cada classe de equivalência. A segunda parte descarta os elementos equivalentes, e preserva só os não equivalentes, cada um sendo um representante válido de cada classe. Uma construção mínima do conjunto  $\mathcal{A}$  é não trivial. Para avançar, somos forçados a usar uma construção que teste todas as possibilidades. Em matrizes  $m \times m$  tal construção pode ser computacionalmente inviável já que equivaleria testar um gigantesco número de possibilidades.

Afortunadamente, a relação de equivalência induzida pelo grupo de permutações pode ser implementada em qualquer conjunto  $n \times m$  de matrizes com  $n \leq m$ . Neste caso a ação  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}$  é induzida pelo conjunto  $\mathcal{P}_{n \times n}$  de matrizes de permutação. Suponhamos que temos o conjunto de  $n \times m$  matrizes com suas filas somando 4 e suas colunas tendo uma soma de seus coeficientes menor ou igual a 4, e suponhamos que conhecemos para cada classe de equivalência (induzidas pelo grupo de permutação) uma matriz representativa válida. Este conjunto de representativos pode ser usado para construir o conjunto  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{n+1}$  que contem ao menos um representativo na classe de equivalência do mesmo conjunto total de matrizes mágicas  $(n+1) \times m$ . A construção é simples, dados os representativos das matrizes  $n \times m$ , adicionamos uma fila adicional a cada representativo e testamos todas as possíveis construções que gerem uma matriz  $(n+1) \times m$  com filas somando 4 e colunas com soma menor ou igual a 4.  $\mathcal{A}_{n+1}$  é conformado por todas estas novas matrizes com a condição específica, e já que testamos todas as possíveis adições da fila  $n+1$  este conjunto deve conter ao menos um representativo de cada classe de equivalência do conjunto  $(n+1) \times m$ .

A segunda parte do algoritmo “filtra” o conjunto  $\mathcal{A}_{n+1}$  e deixa só um representativo de cada classe de equivalência do conjunto das matrizes  $(n+1) \times m$ . Primeiro indexamos todos os elementos de  $\mathcal{A}_{n+1}$  com índice  $i$ . Tomamos o primeiro elemento  $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{A}_{n+1}$  e geramos o conjunto  $\mathfrak{P}_1$  que contem todas as diferentes matrizes geradas por todas as permutações das filas e colunas de  $\mathbf{A}_1$ , logo tomamos  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{A}_1$ . Fazemos a intersecção  $\mathfrak{P}_1 \cap \mathcal{A}_{n+1}$  e redefinimos  $\mathcal{A}_{n+1}^{(1)} \equiv \mathcal{A}_{n+1} - (\mathfrak{P}_1 \cap \mathcal{A}_{n+1})$ . O novo conjunto  $\mathcal{A}_{n+1}^{(1)}$  não contem nenhum elemento de  $\mathfrak{P}_1$ . Tomamos  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{A}_1$  com  $\mathbf{A}_1$  pertencente ao novo conjunto  $\mathcal{A}_{n+1}^{(1)}$ . Repetimos

o procedimento (isto é, definimos o novo  $\mathfrak{P}_1$ , fazemos  $\mathcal{A}_{n+1}^{(2)} \equiv \mathcal{A}_{n+1}^{(1)} - (\mathfrak{P}_1 \cap \mathcal{A}_{n+1}^{(1)})$  e  $\mathbf{H}_3 = \mathbf{A}_1$ ) ate obter  $\mathcal{A}_{n+1}^{(n)} = \emptyset$ . O conjunto de matrizes  $\mathbf{H}_i$  corresponde com os representativos das classes de equivalência das matrizes mágicas  $(n+1) \times m$ .

Uma vez obtidos todos os representativos das matrizes  $(n+1) \times m$ , repetimos o procedimento para  $n+2, n+3, \dots$  ate chegar em  $m-1$ . Ao construir o conjunto  $\mathcal{A}_m$ , basta com exigir que as matrizes de  $\mathcal{A}_m$  sejam matrizes mágicas de soma 4. Pode-se constatar que não é preciso aplicar a segunda parte do algoritmo. Assim, o conjunto  $\mathcal{A}_m$  é um conjunto de representativos das classes de equivalência no conjunto de matrizes mágicas  $m \times m$ .

Este algoritmo é ineficiente, já que na construção do conjunto  $\mathfrak{P}_1$  para cada matriz, precisa efetuar a operação  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{P}_j$  ( $n!m!$  vezes (uma para cada par de matrizes de permutação)). Uma forma diferente seria testar a equivalência de duas matrizes no conjunto  $\mathcal{A}_n$  com um algoritmo mais eficiente. No apêndice, vamos expor alguns resultados simples que poderiam fazer isto possível. Desconhecemos se existe algum algoritmo eficiente para testar se duas matrizes mágicas qualquer são equivalentes.

## Obtenção das borbulhas de vácuo e suas multiplicidades

Dado o conjunto de matrizes mágicas representativas de dimensão  $m \times m$ , o procedimento levado em (5.39), pode ser facilmente levado a cabo computacionalmente. Com cada matriz mágica, existem  $m$  funções  $\aleph$  a ser multiplicadas. Computacionalmente não existe problema em levar a cabo este produto. Em particular pode ser aplicado para todas as demais matrizes representativas. Obtemos para cada caso, uma soma de termos, os quais são formados por uma matriz de adjacência com um respectivo fator numérico. Podemos indexar todos os termos de todas as matrizes representativas e gerar dois conjuntos indexados pelo mesmo índice: Um conjunto (Chamemos de  $\mathfrak{h}$ ) corresponde com o fator numérico de todos os termos, o outro (chamemos de  $\mathfrak{J}$ ) corresponde com as matrizes de adjacência dos respectivos termos. Para determinar as multiplicidades, devemos saber quais diagramas na lista  $\mathfrak{J}$  são isomorfos e somar suas multiplicidades nos correspondentes elementos de  $\mathfrak{h}$ . Ao final obtemos as borbulhas de vácuo com sua respectiva multiplicidade. Assim devemos determinar se duas matrizes na lista das matrizes de adjacência, correspondem ou não correspondem a multígrafos isomorfos. Esta questão é bem estudada em teoria de complexidade: é chamado o problema de Isomorfismo de grafos. O problema em toda a sua generalidade é de interesse em teoria de complexidade. Porem, para casos particulares, existem algoritmos extremamente eficientes para determinar se dois grafos dentro dos casos específicos são isomorfos. Em nosso caso, a história não parece ser tão bem-sucedida: a maioria da literatura parece focar principalmente em grafos convencionais (sem loops e sem multi-lados.) Desconhecemos se existe algum algoritmo eficiente para multígrafos de grau 4, portanto vamos recorrer novamente ao procedimento que testa todas as possibilidades e comparando depois termo a termo.

Dois grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  na lista são isomorfos se e somente se, suas matrizes de adjacência  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}_1}$  e  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}_2}$  satisfazem

$$\mathbf{A}_{\mathcal{G}_1} = \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{G}_2} \cdot \mathbf{P}_b \quad (5.69)$$

Com  $\mathbf{P}_a$  e  $\mathbf{P}_b$  duas matrizes de permutação em  $\mathcal{P}_{m \times m}$  satisfazendo  $\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{P}_b = \mathbf{I}$ , com  $\mathbf{I}$  a matriz identidade  $m \times m$ . Para saber a multiplicidade total da borbulha de vácuo  $\mathcal{G}_1$ , fazemos o produto  $\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{G}_1} \cdot \mathbf{P}_j^{-1}$  para todo  $j$ , e intersectamos com o conjunto de matrizes de adjacência  $\mathfrak{J}$ . Tomamos os correspondentes elementos na lista  $\mathfrak{h}$  e somamos eles. Logo tomamos outra matriz de adjacência na lista não contida na interseção anterior e repetimos o procedimento. Este procedimento é implementado computacionalmente no apêndice D.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho, aplicamos exitosamente alguns métodos combinatórios para enumerar diagramas de Feynman conectados em duas diferentes teorias. Foi mostrado explicitamente que a sequência (3.69), conhecida na literatura, conta explicitamente diagramas de Feynman conectados com duas pernas externas em teoria de muitos corpos e, equivalentemente, mapas enraizados com uma raiz. Os métodos foram generalizados para o caso de um número arbitrário de pernas externas obtendo expressões assintóticas explícitas para os casos  $N = 1$  e  $N = 2$ . Os mesmos métodos podem ser generalizados para contar contrações totais que geram diagramas conectados em teorias do tipo  $\phi^N$ . Para contar explicitamente as contrações que geram um determinado diagrama na teoria  $\phi^N$ , os métodos anteriores são insuficientes. Em particular, só existem métodos algorítmicos para contar diagramas nas teorias  $\phi^N$  e suas respectivas multiplicidades. Aqui propusemos um novo método algorítmico fundamentando a geração dos diagramas a uma relação explícita com as chamadas por nós matrizes mágicas.

Para um físico de campos praticante (particularmente respeito a referência [16]) todas estas “contorções” para contar diagramas de Feynman poderiam parecer mera excentricidade. Ao fim e ao cabo, temos o gerador funcional com a respectiva ação clássica que codifica a nossa teoria, não é mais simples ir a dimensão zero, transformar a integral funcional em uma integral convencional e aplicar o método do descenso mais rápido para obter por simples cálculo o número de diagramas? (foi a opinião de um refere, respeito a nosso trabalho [16]). Certamente, os métodos de enumeração por geração funcional tem um papel fundamental na combinatória enumerativa moderna [27]. Porém, nossa abordagem oferece novas perspectivas, no mínimo interessantes:

- Nossa abordagem guarda relação direta com o teorema de Wick, ficando clara a sua natureza combinatoria.

- As recorrências (4.52) e (4.60) foram obtidas por nós usando argumentos puramente combinatórios em [16]. Neste trabalho, obtemos os mesmos resultados usando a função geradora de todos os diagramas e a função geradora de diagramas conectados e sua simples relação. Mas estes geradores funcionais são conscientemente construídos a partir de nossos resultados [16]. A primeira vista, não é evidente como calcular estas recorrências a partir do gerador funcional baseado na ação clássica da teoria em zero dimensão. De fato, a referência [36] usa o gerador funcional fundamentado na ação clássica, calcula explicitamente o número de diagramas até ordem  $m = 6$  usando derivadas, num cálculo cada vez mais complexo a medida que a ordem aumenta. Nossas recorrências (sobre todo (4.60)) podem ser resolvidas facilmente usando um computador, obtendo por exemplo o número exato de diagramas até ordem  $m = 4000$  em poucos minutos.
- O limite assintótico de nossas soluções (4.61) também apresentam algumas novas perspectivas interessantes. Primeiro, é um novo método que permite um cálculo simples de muitos termos da expansão assintótica em questão. Na abordagem funcional, em geral, poucos termos são calculados. Mas o nosso método não é chamativo só por isto. Permite uma interpretação de cada termo da solução geral em função de coeficientes multinomiais. Mostramos explicitamente que para o cálculo dos  $\ell$  primeiros termos da expansão assintótica, só precisamos de um número finito de termos da solução geral. Em particular, termos expressados em função de coeficientes multinomiais não centrados são os únicos que parecem contribuir à expansão assintótica principal (a mesma que pode ser obtida por métodos funcionais). A questão interessante é que [16] mostra que outras contribuições assintóticas existem se tomamos a contribuição de termos multinomiais centrados. Estas contribuições podem ser definidas sem nenhum problema, e elas aparentam ser desprezíveis (ao menos quando são consideradas individualmente) respeito da contribuição assintótica principal não centrada. O segundo fato interessante é que a abordagem funcional convencional não parece conter (ao menos a primeira vista) estas contribuições. Na teoria assintótica, a análise ressurgente mostra a existência de certas contribuições conhecidas como Trans-Series, desprezíveis ante a contribuição principal, mas perfeitamente definidas [24]. Talvez, a contribuição multinomial centrada encontrada por nós tenha alguma relação com a teoria da ressurgência. Certamente, isto pode ser visto como uma perspectiva futura de nosso trabalho.

Na referência [14] encontramos uma prova da equivalência de duas fórmulas de contagem para diferentes objetos (diagramas de Feynman e mapas enraizados). Como os mapas enraizados até agora não se encontram ligados a alguma teoria física, é difícil tentar encontrar alguma explicação física deste resultado. Em combinatória isto acontece comumente: estruturas combinatórias aparentemente diferentes, encontram-se em mutua

correspondência. E como nosso tratamento foi puramente combinatório acreditamos que a correspondência mostrada aqui é deste tipo. Neste sentido, o capítulo 3 serve como uma introdução concisa a ferramentas combinatórias que poderiam ser de utilidade na física. Uma aplicação mais natural poderia ser encontrada em mecânica estatística onde a natureza discreta dos elementos aí estudados podem guardar relação precisa com a teoria combinatória, também esta possível conexão é sugerida pela importante inter-relação que as duas teorias têm com a teoria das probabilidades. Realmente esta é uma importante perspectiva futura: ampliar o espectro de estudo além dos diagramas de Feynman.

Outra interessante perspectiva seria contar outros tipos de diagramas 1PI, 2PI, skeletons etc. A abordagem geralmente usada é a de dimensão zero, aqui só contamos diagramas conectados. Mas é de interesse expandir nossos métodos para estes casos.

Por último, no capítulo 5 é usado o funcional gerador fundamentado na ação clássica do campo  $\phi^4$  para construir explicitamente todos os diagramas. O processo tradicional consiste em usar derivadas funcionais de acordo com a equação (5.15) e olhar os produtos de propagadores remanentes do cálculo como os diagramas de Feynman. O processo é pesado computacionalmente, não só pela quantidade de derivadas funcionais a realizar (um computador pode ser usado para realizar isto) para ordens crescentes. A dificuldade real encontra-se na interpretação dos produtos de propagadores, no sentido de verificar quais destes são equivalentes. Nos codificamos este procedimento de construção identificando certos blocos básicos de construção (as funções  $\aleph$ ) e mostramos que as regras de ensamblagens são codificadas pelas chamadas matrizes mágicas (matrizes quadradas a coeficientes inteiros cujas filas e colunas somam 4). Mostramos que um grande número de matrizes mágicas equivalentes geram os mesmos diagramas, em particular, todas estas matrizes equivalentes são relacionadas por permutações das suas filas e colunas. Assim só basta conhecer uma matriz representativa de cada classe de equivalência que particiona o conjunto total de matrizes mágicas. Isto simplifica enormemente o procedimento, e damos uma forma explicitamente algébrica (em função de matrizes de adjacência) para determinar os diagramas e suas multiplicidades. A implementação de nosso algoritmo pode ser melhorada, isto porque quando testamos a equivalência de matrizes mágicas e de diagramas, usamos o conjunto de todas as possíveis permutações. No caso explícito dos diagramas, isto guarda conexão com o problema de testar isomorfismos de grafos. Em particular, nós trabalhamos só com multígrafos de grau 4 (entanto que o problema de isomorfismo de grafos é plantado para qualquer grafo genérico). Mas acreditamos que estudos de complexidade na nossa abordagem podem ser de utilidade.

Esperamos que este trabalho seja de utilidade a alguém interessado em estudar estas inter-relações de diferentes teorias e métodos matemáticos. Certamente a física é o principal foco. Em particular, todas estas estruturas terão relevância na física associada com os diagramas de Feynman? Não temos a resposta, mas esperamos ter a oportunidade de continuar explorando estes assuntos.

# Apêndice A

## Relação de equivalência

Seja um conjunto qualquer  $A$ , uma relação  $R$  em  $A$  é um subconjunto qualquer do par ordenado  $A \times A$  (isto é  $R \subset A \times A$ ). Dada uma relação  $R$ , diremos que  $a \in A$  é relacionado a  $b \in A$  (em notação  $aRb$ ) se  $(a, b) \in A \times A$  também pertence a  $R$ , isto é  $(a, b) \in R$ . Note que  $(a, b) \neq (b, a)$ .

Uma relação de equivalência  $R_{\text{eq}}$  em  $A \times A$  é uma relação satisfazendo três propriedades adicionais, suponha  $a, b$  e  $c \in A$ :

- *Reflexividade:*  $aRa$  ( $(a, a) \in R_{\text{eq}}$ ) para todo  $a \in A$ .
- *Simetria:* Se  $aRb$  ( $(a, b) \in R_{\text{eq}}$ ) então temos que  $bRa$  ( $(b, a) \in R_{\text{eq}}$ ).
- *Transitividade:* Se  $aRb$  ( $(a, b) \in R_{\text{eq}}$ ) e  $bRc$  ( $(b, c) \in R_{\text{eq}}$ ) então  $aRc$  ( $(a, c) \in R_{\text{eq}}$ )

Um das consequências de ter uma relação de equivalência em um conjunto  $A$  é que esta particiona de forma natural o conjunto  $A$  em subconjuntos disjuntos. Dado  $a \in A$  chamemos  $[a]$  o conjunto de elementos  $k \in A$  satisfazendo  $aRk$ , pela primeira propriedade este conjunto é não vazio. Se  $(a, b) \notin R_{\text{eq}}$  então  $b \notin [a]$ , em particular  $[b]$  é não vazio, e  $[a] \cap [b] = \emptyset$  (se  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , por transitividade, isto implicaria que  $b \in [a]$  contradizendo nossa suposição inicial). A serie de subconjuntos  $\{[a], [b], [c], \dots\}$  se chamam classes de equivalência e  $a, b, c, \dots$  de representantes. Em particular se  $aRa'$ , então  $[a] = [a']$  e  $a'$  é outro possível representante do mesmo conjunto.

Por último uma partição de  $A$  em subconjuntos disjuntos define naturalmente uma relação de equivalência, onde os subconjuntos da partição conformam as respectivas classes de equivalência.

# Apêndice B

## Partições e composições

Neste apêndice definiremos rapidamente o conjunto de partições e composições de um inteiro positivo  $n$ . Consequentemente, provaremos a fórmula de Arqués-Béraud estabelecendo uma correspondência com composições.

### B.1 Partições e composições de um número

Dado um inteiro positivo  $n$ , de quantas diferentes formas podemos obter  $n$  somando  $k$  inteiros positivos, não necessariamente distintos? Aqui  $k \geq 1$  e  $0 < n_k \leq n$ . Um conjunto de  $k$  inteiros  $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  satisfazem tal condição quando

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \tag{B.1}$$

A pergunta é ainda incompleta, já que dois casos diferentes podem ser estudados, em particular:

- A ordem em que os  $\{n_1, \dots, n_k\}$  números são somados não importa (isto é, a soma dos mesmos  $k$  números em ordem diferentes são consideradas indistinguíveis ou iguais).
- A ordem em que os  $\{n_1, \dots, n_k\}$  números são somados importa (isto é, a soma dos mesmos  $k$  números em ordem diferentes são consideradas distinguíveis, ou diferentes).

As diferentes somas no primeiro caso são conhecidas como partições. Estes objetos são amplamente estudados em combinatória e Teoria de números. Apesar de sua simplicidade, contar partições não é trivial. A função  $p(n)$  que determina o número de partições do número  $n$  se chama função de partição, e não tem uma fórmula explícita. Em particular os primeiros valores de  $p(n)$  são 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135... Explicitamente, até  $n = 5$  as partições são

$$\begin{aligned}
1 &= \{1\}; \\
2 &= \{2\}; \{1+1\} \\
3 &= \{3\}; \{2+1\}; \{1+1+1\} \\
4 &= \{4\}; \{3+1\}; \{2+2\}; \{2+1+1\}; \{1+1+1+1\} \\
5 &= \{5\}; \{4+1\}; \{3+2\}; \{2+2+1\}; \{3+1+1\}; \{2+1+1+1\}; \{1+1+1+1+1\} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{B.2}$$

O segundo caso é conformado por composições. Enumerar este conjunto, em comparação com as partições, é uma tarefa muito mais simples. Mas convém primeiro ver a relação entre composições e partições. Dada uma partição, existem um número de composições associadas, simplesmente mudando a ordem dos elementos da soma. Como vimos para as partições, alguns  $n_i$  podem ser iguais. Vamos a expressar uma partição arbitrária de  $n$  assim

$$n = \underbrace{n_1 + n_1 + \cdots + n_1}_{m_1 \text{ vezes}} + \cdots + \underbrace{n_k + n_k + \cdots + n_k}_{m_k \text{ vezes}} \tag{B.3}$$

Sendo  $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ , vemos que este problema é idêntico a enumerar todas as possíveis maneiras de ordenar  $M$  letras, sendo que  $m_1$  são idênticas,  $m_2$  são idênticas, etc.. O número de possíveis configurações é simplesmente

$$\frac{M!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} \tag{B.4}$$

Chamando  $c(n)$  o número de composições de  $n$ , é evidente a partir de (B.2) que  $c(1) = 1$ ,  $c(2) = 2$ ,  $c(3) = 4$ ,  $c(4) = 8$ ,  $c(5) = 16$ . Em particular, temos que  $c(n) = 2^{n-1}$ . Pode ver-se que o problema de enumerar todas as composições de  $n$  é idêntico a contar todas as possíveis formas de distribuir  $n$  objetos indistinguíveis em  $1, 2, 3, \dots, n$  caixas, com a condição que todas as caixas contenham ao menos um objeto.

Há uma única forma de distribuir  $n$  objetos em  $n$  caixas não vazias:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ caixas não vazias}} \tag{B.5}$$

Para  $n$  objetos idênticos distribuídos em  $n-1$  caixas não vazias, temos  $n-1$  possibilidades

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1 \text{ caixas não vazias}} + \underbrace{1}_{1 \text{ objeto}} \tag{B.6}$$

Por último para distribuir  $m$  objetos em  $n - m$  caixas não vazias

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-m \text{ caixas não vazias}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_m \quad (\text{B.7})$$

temos, de acordo à estatística de Bose-Einstein

$$\frac{(n - m - 1 + m)!}{(n - m - 1)!(m!)} = \binom{n - 1}{m}$$

possibilidades. Somando todos os casos temos então

$$c(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} = 2^{n-1} \quad (\text{B.8})$$

Para finalizar vamos a mostrar a formula (3.67) que determina  $b_n$ . Como a formula em questão esta relacionada com  $m(n)$ , esta determina o número de mapas enraizados para os primeiros números  $n$ . Podemos mostrar a formula por indução. A formula em questão é

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1+\cdots+a_{i+1},n} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (\text{B.9})$$

A delta de Kronecker garante que cada termo desta formula seja representado por uma composição, e o termo sera positivo (negativo) se a composição tem um número par (ímpar) de elementos. Por exemplo, para  $n = 5$  a composição  $5 = 2 + 1 + 2$  terá o correspondente termo em  $b_5$

$$-\frac{1}{2^5} \left( \frac{[2(2)]!}{2!} \right) \left( \frac{[2(1)]!}{1!} \right) \left( \frac{[2(2)]!}{2!} \right)$$

Suponhamos agora que a formula  $b_n$  é certa para todo  $n \leq m$ . Usando (3.66) para  $b_{m+1}$  temos

$$b_{m+1} = - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(2k)!}{k!} b_{m+1-k} = - \frac{[2(1)]!}{1!} b_m - \frac{[2(2)]!}{2!} b_{m-1} - \cdots - \frac{[2(m+1)]!}{(m+1)!} b_0 \quad (\text{B.10})$$

Usando a hipótese de indução, podemos inserir todos os  $b_n$  para  $n \leq m$  no lado direito. Obtendo

$$1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^{m-1} = 1 + \frac{1 - 2^m}{1 - 2} = 2^m$$

termos. Em particular, todos estes termos representam alguma composição de  $m + 1$  e tem o signo correto associado ao fator  $(2k)!/k!$ . Em particular, todas as composições de  $m + 1$  podem escrever-se dessa forma: Fixamos  $n_1 = 1$  e tomamos a composições de  $m$  para os outros termos, logo fixamos  $n_1 = 2$  e tomamos todas as composições de  $m - 1$  para os outros

termos etc.,. O último termo corresponde com a composição  $m + 1 = m + 1$ . Isto gera todas as composições de  $m + 1$ . Portanto  $b_{m+1}$  é

$$b_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{a_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{i+1}=1}^{\infty} \delta_{a_1+\dots+a_{i+1}, m+1} \prod_{j=1}^{i+1} \frac{(2a_j)!}{a_j!} \quad (\text{B.11})$$

Este é o formato desejado. Isto prova a formula de Arqués-Béraud

# Apêndice C

## Resultantes

Neste apêndice definiremos rapidamente a operação chamada de resultante, eles derivam-se da aplicação da teoria de álgebra abstrata ao conjunto de polinômios. Seja o conjunto  $\mathfrak{P}$  de polinômios com coeficientes pertencentes a  $\mathbb{R}$  (em geral, os coeficientes podem pertencer a um corpo arbitrario na linguagem algébrica.) Dados dois polinômios

$$A(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (\text{C.1})$$

e

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (\text{C.2})$$

O resultante é uma função  $\text{Res}(\cdot, \cdot) = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$  definida pelo seguinte determinante

$$\text{Res}(A, B) = \begin{vmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-2} & a_{m-1} & \ddots & \vdots & \vdots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_m & b_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} & 0 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & b_1 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & \vdots & \dots & b_0 \end{vmatrix} \quad (\text{C.3})$$

A notação anterior pode parecer um pouco confusa. O importante é ver que a matriz em questão tem dimensão  $(m+n) \times (m+n)$  e a construção dela é feita a partir da diagonal principal. As primeiras  $n$  colunas contem só coeficientes do polinômio  $A(x)$  enquanto que as restantes  $m$  colunas só tem coeficientes do polinômio  $B(x)$ . Os primeiros  $n$  coeficientes da diagonal principal são todos iguais a  $a_m$  enquanto que os  $m$  restantes coeficientes são iguais

a  $b_0$ . Seguindo esta regra, as colunas  $i$  e  $j$  satisfazendo  $1 \leq i \leq n < j \leq m + n$  são da forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \mathbf{a_m} & & \mathbf{b_n} & \\
 \dots & & a_{m-1} & \dots & b_{n-1} & \dots & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & a_0 & & \mathbf{b_0} & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array} \tag{C.4}$$

onde os coeficientes em negrita pertencem à diagonal principal. O fato importante é que  $\text{Res}(A, B)$  pode ser escrito em função das raízes dos polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$ , denotando o conjunto de  $m + n$  raízes como  $\{\alpha_i\}$  e  $\{\beta_j\}$  temos

$$\text{Res}(A, B) = (a_m)^n (b_n)^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) \tag{C.5}$$

A partir de este resultado é obvio que se os polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  tem uma raiz em comum. Então, necessariamente temos

$$\text{Res}(A, B) = 0 \tag{C.6}$$

O qual é um critério necessário e suficiente para verificar se dois polinômios tem ao menos uma raiz em comum.

# Apêndice D

## Implementação computacional dos algoritmos

Neste apêndice anexamos os códigos utilizados na referencia [15] para calcular os representativos nas classes de equivalências do conjunto de matrizes mágicas  $5 \times 5$ . O procedimento é facilmente generalizável para  $m$  arbitrário. Porém, a computação volta-se cada vez mais pesada. Acreditamos que certas partes do código (onde calculamos todos os produtos possíveis com o grupo de permutação) podem ser melhoradas para ter uma maior eficiência. Nosso fim é mostrar a validade de nossos resultados para casos maiores que  $m = 2$ .

### D.1 Implementação computacional dos algoritmos

The algorithm shown in sec. 5.5 to calculate the RC-magic squares is valid for the permutation matrices (since this are RC-magic squares). In particular the filtering process for calculate the representatives of each equivalence class is unnecessary, in this respect all the permutation matrices are inequivalent. We begin with the  $1 \times m$  matrices, as example we calculate the permutation matrices for fifth-order. Thus, we have five  $1 \times 5$  matrices  $((1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), \dots, (0,0,0,0,1))$ . For the  $2 \times 5$  matrices we define

```
a[b1_, b2_, b3_, b4_, b5_] :=  
DeleteCases [  
Flatten [Table [  
MatrixForm [({{b1, b2, b3, b4, b5},  
{a1, a2, a3, a4, a5}})*  
KroneckerDelta[a1 + a2 + a3 + a4 + a5, 1]*  
HeavisideTheta[-(a1 + b1) + 1.1]*  
HeavisideTheta[-(a2 + b2) + 1.1]*  
HeavisideTheta[-(a3 + b3) + 1.1]*  
HeavisideTheta[-(a4 + b4) + 1.1]*  
HeavisideTheta[-(a5 + b5) + 1.1]], {a1, 0, 1},
```

```

{a2, 0, 1 - a1}, {a3, 0, 1 - a1 - a2},
{a4, 0, 1 - a1 - a2 - a3},
{a5, 0, 1 - a1 - a2 - a3 - a4}]],
MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}]]

```

The  $2 \times 5$  matrices are calculated using the 5 matrices  $1 \times 5$

```

a25 = Union[a[1, 0, 0, 0, 0], a[0, 1, 0, 0, 0],
a[0, 0, 1, 0, 0], a[0, 0, 0, 1, 0], a[0, 0, 0, 0, 1]]

```

in StandardForm

```

p25 = Table[a25[[n]][[1]], {n, 1, Length[a25]}]

```

Repeating the procedure, define

```

a[b1_, b2_, b3_, b4_, b5_, c1_, c2_, c3_, c4_, c5_] :=
DeleteCases[
Flatten[Table[
MatrixForm[({{b1, b2, b3, b4, b5}, {c1, c2, c3, c4, c5},
{a1, a2, a3, a4, a5}})*
KroneckerDelta[a1 + a2 + a3 + a4 + a5, 1]*
HeavisideTheta[-(a1 + b1 + c1) + 1.1]*
HeavisideTheta[-(a2 + b2 + c2) + 1.1]*
HeavisideTheta[-(a3 + b3 + c3) + 1.1]*
HeavisideTheta[-(a4 + b4 + c4) + 1.1]*
HeavisideTheta[-(a5 + b5 + c5) + 1.1]], {a1, 0, 1},
{a2, 0, 1 - a1}, {a3, 0, 1 - a1 - a2},
{a4, 0, 1 - a1 - a2 - a3},
{a5, 0, 1 - a1 - a2 - a3 - a4}]],
MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}]]]

```

and the  $3 \times 5$  matrices are given by

```

a35 = Union[Flatten[
Table[a[Flatten[p25[[n]][[1]], Flatten[p25[[n]][[2]],
Flatten[p25[[n]][[3]], Flatten[p25[[n]][[4]],
Flatten[p25[[n]][[5]], Flatten[p25[[n]][[6]],
Flatten[p25[[n]][[7]], Flatten[p25[[n]][[8]],
Flatten[p25[[n]][[9]], Flatten[p25[[n]][[10]]],
{n, 1, Length[p25]}]]]]]]]]]
p35 = Table[a35[[n]][[1]], {n, 1, Length[a35]}]

```

we repeat this process, for the  $4 \times 5$  matrices we use 15 variables in  $a[\dots]$ , and for the  $5 \times 5$  matrices 20 variables.  $a_{55}$  contain the  $5!$  permutation matrices in MatrixForm. For calculations is necessary to express  $a_{55}$  in the StandardForm, which is achieved with

```
P5=Table[a55[[m]][[1]],{m, 1, Length[a55]}
```

The generation times of the permutation matrices for 4, 5 and 6-order is fast, less than a second, using a conventional notebook.

## The RC-magic squares representatives

Until now we saw that finding one representative matrix  $A_i$  in each equivalence class, and finding the size  $\mathfrak{N}_{A_i}$  of each equivalence class determine the  $m$ -order vacuum Feynman graphs (see this in (5.50)). Here, we implement the straightforward algorithm mentioned at sec.5.5 for the determination of  $A_i$  and  $\mathfrak{N}_{A_i}$  using the program MATHEMATICA, which works, in principle, for all orders. The code builds up the RC-magic squares row by row, beginning with five  $1 \times m$  matrices for  $m \geq 4$  (for  $m < 4$  we have a lower number of  $1 \times m$  matrices). For 5-order this matrices are  $(4,0,0,0,0), (3,1,0,0,0), (2,2,0,0,0), (2,1,1,0,0), (1,1,1,1,0)$ . To obtain the matrices  $2 \times 5$  we define

```
A[b1_, b2_, b3_, b4_, b5_] :=
DeleteCases[
Flatten[Table[
MatrixForm[({{b1, b2, b3, b4, b5},
{a1, a2, a3, a4, a5}})*
KroneckerDelta[a1 + a2 + a3 + a4 + a5, 4]*
HeavisideTheta[-(a1 + b1) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a2 + b2) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a3 + b3) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a4 + b4) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a5 + b5) + 4.1]], {a1, 0, 4},
{a2, 0, 4 - a1}, {a3, 0, 4 - a1 - a2},
{a4, 0, 4 - a1 - a2 - a3},
{a5, 0, 4 - a1 - a2 - a3 - a4}]],
MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}]]
```

Note that the function A have five variables, which correspond with the components of the five  $1 \times 5$  matrices. Thus, we define the set

```
A2=Union[A[4,0,0,0,0],A[3,1,0,0,0],A[2,2,0,0,0],
A[2,1,1,0,0],A[1,1,1,1,0]]
```

and the set

```
B2=Table[A2[[m]][[1]],{m,1,Length[A2]}
```

A2 is the form appropriate in which MATHEMATICA interpret correctly the matrix elements of the set. While B2 is the appropriate form for multiply matrices. Defining the permutation matrices sets  $\mathcal{P}_{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{P}_{3 \times 3}$ ,  $\mathcal{P}_{4 \times 4}$  and  $\mathcal{P}_{5 \times 5}$  in StandardForm as P2, P3, P4 and P5 respectively (see the beginning of this Appendix) which have 2,6,24,120 permutation matrices. Finally we get the desired set of  $2 \times 5$  matrices by

```
n = 1; While[n < h, H2[n] = A2[[1]];
G2 = Complement[A2,
Intersection[A2,
Flatten[Table[
MatrixForm[P2[[i]].B2[[1]].P5[[j]]], {i, 1, Length[P2]},
{j, 1, Length[P5]}]]];
A2 = G2;
B2 = Table[A2[[m]][[1]], {m, 1, Length[A2]}]; n++]
```

This code is a looping, which determine the set of  $2 \times 5$  representatives matrices denoted by the function H2[...]. We see that the lists A2 and B2 are redefined in the process and the number h is such that, at the end of the process, we obtain  $A2=B2=\emptyset$ . Be  $h_{min}$  the minimum of such numbers, So  $h_{min}-1$  corresponds with the number of  $2 \times 5$  representatives matrices. In this case we have  $h_{min} = 45$ , if  $h < h_{min}$  (what is equivalent to saying  $A2 \neq \emptyset \neq B2$ ) we must repeat the process from the initial A2 and B2. In StandardForm we denote the set of  $2 \times 5$  representatives as

```
rc25=Table[H2[n][[1]],{n,1,hm}]
```

with  $hm = h_{min} - 1$ . Therefore, we have a total of 44 matrices  $2 \times 5$ . To get the matrices  $3 \times 5$  we repeat the procedure, the function A will have now 10 variables

```
A[b1_, b2_, b3_, b4_, b5_, c1_, c2_, c3_, c4_, c5_] :=
DeleteCases[
Flatten[Table[
MatrixForm[({{b1, b2, b3, b4, b5}, {c1, c2, c3, c4, c5}},
{a1, a2, a3, a4, a5})*
KroneckerDelta[a1 + a2 + a3 + a4 + a5, 4]*
HeavisideTheta[-(a1 + b1 + c1) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a2 + b2 + c2) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a3 + b3 + c3) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a4 + b4 + c4) + 4.1]*
HeavisideTheta[-(a5 + b5 + c5) + 4.1]], {a1, 0, 4},
{a2, 0, 4 - a1}, {a3, 0, 4 - a1 - a2},
{a4, 0, 4 - a1 - a2 - a3},
```

```
{a5, 0, 4 - a1 - a2 - a3, a4}]],
MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}}]]
```

in the A3 set we use the rc25 set

```
A3 = Union[
Flatten [Table [
A[Flatten [rc25 [[n]]][[1]], Flatten [rc25 [[n]]][[2]],
Flatten [rc25 [[n]]][[3]], Flatten [rc25 [[n]]][[4]],
Flatten [rc25 [[n]]][[5]], Flatten [rc25 [[n]]][[6]],
Flatten [rc25 [[n]]][[7]], Flatten [rc25 [[n]]][[8]],
Flatten [rc25 [[n]]][[9]], Flatten [rc25 [[n]]][[10]]],
{n, 1, Length [rc25]}]]]
```

in StandardForm

```
B3=Table [A3 [[m]] [[1]], {m, 1, Length [A3]}]
```

Applying the last command

```
n = 1; While [n < h, H3[n] = A3 [[1]];
G3 = Complement [A3,
Intersection [A3,
Flatten [Table [
MatrixForm [P3 [[i]].B3 [[1]].P5 [[j]]], {i, 1, Length [P3]},
{j, 1, Length [P5]}]]]];
A3 = G3;
B3 = Table [A3 [[m]] [[1]], {m, 1, Length [A3]}]; n++]
```

where  $h_{min} = 315$ . The rc35 set is

```
rc35=Table [H3[n] [[1]], {n, 1, hm}]
```

with  $hm = h_{min} - 1 = 314$

We obtain 314 matrices  $3 \times 5$ . Repeating the procedure again for the  $4 \times 5$  matrices we obtain 1021 representatives. The 264 RC-magic squares of dimension  $5 \times 5$  representatives are obtained repeating the procedure one more time. In standardForm

```
RC5=Table [H5[n] [[1]], {n, 1, 264}]
```

The process is generalisable for generic  $m$ -order.

To determine the size of each equivalence class size we define

```
N5=Table [Length [DeleteDuplicates [
```

```
Flatten [Table [
MatrixForm [P5 [[ i ]].RC5 [m].P5 [[ j ]]], {i, 1, 5!},
{ j, 1, 5!}]]], {m, 1, Length [RC5]}]
```

The sequence (5.44) also can be obtained summing all the elements of the set  $N_m$  for each  $m$  order. For example, in 5-order

```
Sum [N5 [[ i ]], {i, 1, 264}]
```

is equal to 2224955.

The generation times of the representatives RC magic squares and the size of each equivalence class for 4, 5, and 6-order are approximately 1 second, 2 minutes and 18 hours respectively, using a conventional notebook.

## Computation of the Feynman vacuum graphs multiplicities

We will now to write the multiplicities of all the connected Feynman vacuum graphs for orders four and five. We use the program MATHEMATICA to perform explicitly the multiplicative process (5.39). As we see, for each RC-magic square representative, we get one sum of  $E$  functions, whose multiplicative coefficient are the multiplicities and the argument the adjacency matrix of a graph; at the end we use (5.50) and we get a single set of adjacency matrices with the respective total multiplicities. Listing the multiplicities and the adjacency matrices in two list in such a way that each adjacency matrix and the corresponding multiplicity be indexed by the same positive integer. We add up the multiplicities of all the topologically equivalent graphs. In particular, if two graphs  $\mathcal{G}_1$  and  $\mathcal{G}_2$  of order  $m$  are equivalent, then the corresponding  $m \times m$  adjacency matrices  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}_1}$  and  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}_2}$  are connected by a row-column permutation of the kind

$$\mathbf{A}_{\mathcal{G}_2} = \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{G}_1} \cdot \mathbf{P}_b \quad (\text{D.1})$$

with  $\mathbf{P}_a$  and  $\mathbf{P}_b$  two permutation matrices in  $\mathcal{P}_{m \times m}$  such that  $\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{P}_b = \mathbf{I}$  with  $\mathbf{I}$  the  $m \times m$  identity. Given  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$ , how do calculate the equivalent diagrams? We list all the different products  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{P}_i^{-1}$ , and intersects with the previous adjacency matrix list. This gives all the adjacency matrices of the equivalent graphs, included  $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$ . The MATHEMATICA function Position[ $\dots$ ] determine the position of all this matrices in the adjacency matrix list. Using this information in the multiplicity list, (since each adjacency matrix and the associated multiplicity are indexed by the same number in the two lists) we add all the multiplicities corresponding to  $\mathcal{G}$  giving the total multiplicity.

### Implementation of the algorithm for obtain the different Feynman graphs and the respectives multiplicities

Once given the representatives RC-magic squares, the size of each equivalence class and the permutation matrices at  $m$ -order; we write the MATHEMATICA code used for the calculus of the multiplicities. For fifth-order, we denote the respectives MATHEMATICA lists as RC5, N5 and P5. RC5 and N5 are indexed by the same natural number, this means that RC5[[ $m$ ]] and N5[[ $m$ ]] correspond with the equivalence class indexed by  $m$ .

Define the set I5 of inverse matrices to P5

```
I5=Table[Inverse[P5[[m]]], {m, 1, Length[P5]}]
```

where I5 and P5 are indexed by the same index. Now let's implement the multiplicative process of (5.39), for this we write each one of the possible  $\aleph$ 's function in the  $E$  format defined in (5.50). We use only five functions, denoted by AL[4,0,0,0,0], AL[3,1,0,0,0], AL[2,2,0,0,0], AL[2,1,1,0,0] and AL[1,1,1,1,0]. The other variations of AL[4,0,0,0,0] are calculated from

```
a1 = DeleteDuplicates[Table[P5[[m]].{4, 0, 0, 0, 0},
{m, 1, Length[P5]}]]
```

```
a2 = DeleteDuplicates[Table[24 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{2, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]], {m, 1, Length[P5]}]]
```

```
n = 1; While[n < Length[a1]+1,
AL[Flatten[a1[[n]]][[1]], Flatten[a1[[n]]][[2]],
Flatten[a1[[n]]][[3]],
Flatten[a1[[n]]][[4]], Flatten[a1[[n]]][[5]]] = a2[[n]]; n++]
```

The variations of AL[3,1,0,0,0]:

```
a1 = DeleteDuplicates[Table[P5[[m]].{3, 1, 0, 0, 0},
{m, 1, Length[P5]}]]
```

```
a2 = DeleteDuplicates[Table[24 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{1, 1, 0, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},

```

```
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5 [[m]]], {m, 1, Length[P5]]}]
```

```
n = 1; While[n < Length[a1]+1,
AL[Flatten[a1[[n]]][[1]], Flatten[a1[[n]]][[2]],
Flatten[a1[[n]]][[3]],
Flatten[a1[[n]]][[4]], Flatten[a1[[n]]][[5]]] = a2[[n]]; n++]
```

The variations of AL[2,2,0,0,0]:

```
a1 = DeleteDuplicates[Table[P5[[m]].{2, 2, 0, 0, 0},
{m, 1, Length[P5]}]]
```

```
a2 = DeleteDuplicates[Table[8 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5 [[m]]]] + 16 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{0, 2, 0, 0, 0},
{2, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5 [[m]]]], {m, 1, Length[P5]}]]
```

```
n = 1; While[n < Length[a1]+1,
AL[Flatten[a1[[n]]][[1]], Flatten[a1[[n]]][[2]],
Flatten[a1[[n]]][[3]],
Flatten[a1[[n]]][[4]], Flatten[a1[[n]]][[5]]] = a2[[n]]; n++]
```

The variations of AL[2,1,1,0,0]:

```
a1 = DeleteDuplicates[Table[P5[[m]].{2, 1, 1, 0, 0},
{m, 1, Length[P5]}]]
```

```
a2 = DeleteDuplicates[Table[8 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 1, 0, 0},
{0, 1, 0, 0, 0},

```

```

{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]] + 16 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{0, 1, 1, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]], {m, 1, Length[P5]}]]

```

```

n = 1; While[n < Length[a1]+1,
AL[Flatten[a1[[n]]][[1]], Flatten[a1[[n]]][[2]],
Flatten[a1[[n]]][[3]],
Flatten[a1[[n]]][[4]], Flatten[a1[[n]]][[5]]] = a2[[n]]; n++]

```

The variations of AL[1,1,1,1,0]:

```

a1 = DeleteDuplicates[Table[P5[[m]].{1, 1, 1, 1, 0}, {m,
1, Length[P5]}]]

```

```

a2 =DeleteDuplicates[Table[8 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{0, 1, 0, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 1, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]] + 8 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{0, 0, 1, 0, 0},
{0, 0, 0, 1, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]] + 8 Exp[MatrixForm[P5[[m]].( {
{0, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 1, 0, 0},
{0, 1, 0, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0}
} ).I5[[m]]], {m, 1, Length[P5]}]]

```

```

n = 1; While[n < Length[a1]+1,

```

```
AL[Flatten[a1[[n]]][[1]], Flatten[a1[[n]]][[2]],
Flatten[a1[[n]]][[3]],
Flatten[a1[[n]]][[4]], Flatten[a1[[n]]][[5]]] = a2[[n]]; n++]
```

This provides all the  $\aleph$ 's function in the  $E$  format. Note that this process is easily generalizable for larger orders adding the necessary zero rows, and zero columns (at fourth-order we subtract the last zero row and the last zero column). Note that the  $E$  function used in our code is the exponential function  $\text{Exp}[\dots]$ , since the argument contains the  $\text{MatrixForm}[\dots]$  function which is for MATHEMATICA an undefined object. This guarantees the property (5.50) for all the possibilities.

In order to represent the multiplicity factor (5.27) we define

```
M[m_] := 4!/(
RC5[m][[1, 1]]!*RC5[m][[1, 2]]!*RC5[m][[1, 3]]!*
RC5[m][[1, 4]]!*RC5[m][[1, 5]]!) * 4!/(
RC5[m][[2, 1]]!*RC5[m][[2, 2]]!*RC5[m][[2, 3]]!*
RC5[m][[2, 4]]!*RC5[m][[2, 5]]!) * 4!/(
RC5[m][[3, 1]]!*RC5[m][[3, 2]]!*RC5[m][[3, 3]]!*
RC5[m][[3, 4]]!*RC5[m][[3, 5]]!) * 4!/(
RC5[m][[4, 1]]!*RC5[m][[4, 2]]!*RC5[m][[4, 3]]!*
RC5[m][[4, 4]]!*RC5[m][[4, 5]]!) * 4!/(
RC5[m][[5, 1]]!*RC5[m][[5, 2]]!*RC5[m][[5, 3]]!*
RC5[m][[5, 4]]!*RC5[m][[5, 5]]!)
```

The distributive multiplication process (5.39) is realized by

```
A[m_] := Expand[
M[m]*N5[m]*
AL[RC5[m][[1, 1]], RC5[m][[1, 2]], RC5[m][[1, 3]],
RC5[m][[1, 4]], RC5[m][[1, 5]]]*
AL[RC5[m][[2, 1]], RC5[m][[2, 2]], RC5[m][[2, 3]],
RC5[m][[2, 4]], RC5[m][[2, 5]]]*
AL[RC5[m][[3, 1]], RC5[m][[3, 2]], RC5[m][[3, 3]],
RC5[m][[3, 4]], RC5[m][[3, 5]]]*
AL[RC5[m][[4, 1]], RC5[m][[4, 2]], RC5[m][[4, 3]],
RC5[m][[4, 4]], RC5[m][[4, 5]]]*
AL[RC5[m][[5, 1]], RC5[m][[5, 2]], RC5[m][[5, 3]],
RC5[m][[5, 4]], RC5[m][[5, 5]]]
```

and the equivalent of (5.50) is

```
Z = Sum[A[m], {m, 1, Length[RC5]}]
```

which generate all the Feynman graphs with the respective multiplicities. The next pass is to determine which diagrams are equivalent, and add the multiplicities for all the equivalent diagrams. First, listing all the multiplicities associated with Z

```
Mult = Table[Z[[m]][[1]], {m, 1, Length[Z]}
```

Second, listing all the graphs (adjacency matrices) associated with Z

```
G = Table[Z[[m]][[2, 2]], {m, 1, Length[Z]}
```

Nevertheless, the elements of G are sums of matrices in the MatrixForm format, which must be added. For this, we define

```
L[m_, l_] :=
  If[Head[G[[m]][[1]]] === Times,
  G[[m]][[1]][[1]]* G[[m]][[1]][[2, 1]], G[[m]][[1]][[1]]]
```

```
Elem[m_] := If[Head[G[[m]]] === Plus,
  Sum[L[m, 1], {1, 1, Length[G[[m]]]}],
  G[[m]][[1]]*G[[m]][[2, 1]]]
```

Therefore, the adjacency matrices associated with Z are

```
Graphs = Table[Elem[m], {m, 1, Length[G]}
```

The two lists Graphs and Multi are indexed by the same natural numbers, the adjacency matrix Graphs[[l]] have multiplicity Multi[[l]]. In order to determine the total multiplicities of the different diagrams, we define first

```
GCopy = Graphs
```

After, we obtain the different adjacency matrices and the corresponding multiplicities using

```
n = 1; While[n < g, Adj[n] = MatrixForm[GCopy[[1]]];
  G2 = Intersection[Table[P5[[m]].GCopy[[1]].I5[[m]],
  {m, 1, Length[P5]}], GCopy];
  G3 = Complement[GCopy, G2];
  Deg[n] =
  Flatten[Table[Flatten[Position[Graphs, G2[[m]]],
  {m, 1, Length[G2]}]];
  GCopy = G3; n++]
```

This code is a looping, which determine the set of different adjacency matrices Adj[...]. We see that the list GCopy is redefined in the process and the number g is such that, at the end of the process, we obtain GCopy =  $\emptyset$ . Be  $g_{min}$  the minimum of such numbers, So

$g_{min} - 1$  corresponds with the number of different adjacency matrices. At fifth-order we have  $g_{min} = 57$ , if  $g < g_{min}$  (what is equivalent to saying  $GCOPY \neq \emptyset$ ) we must repeat the process from

`GCOPY = Graphs`

For a given adjacency matrix  $Adj[m]$ ,  $Deg[m]$  gives the equivalent diagrams in the list `Graphs` ( $1 \leq m < g_{min}$ ). Therefore, the multiplicity of  $Adj[m]$  is simply

`Sum[Mult[[n]], {n, Deg[m]}]`

The different Feynman graphs of fifth order are given by

`Table[AdjacencyGraph[Adj[n][[1]]], {n, 1, gm}]`

with  $gm = g_{min} - 1$ .

The generation times of the different Feynman graphs and the associated multiplicities for 4, 5 and 6-order are approximately 0.2 seconds, 15 seconds and 1 hour respectively using a conventional notebook.

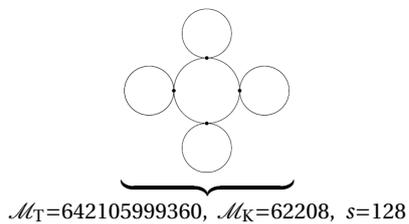
### All the fourth and fifth-order Feynman vacuum graphs multiplicities

For disconnected graphs we verify for fourth and fifth-order the rule shown in [23]. Particularly for a disconnected graph with  $l$  connected components of which  $r$  are different, we verify that the symmetry factor is

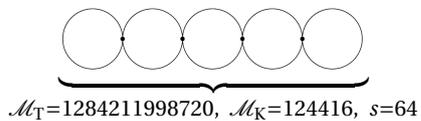
$$s_d = n_1! \cdots n_r! \times s_1^{n_1} \cdots s_r^{n_r} \quad (D.2)$$

with  $s_i$  the symmetry factor of the component  $i$ ,  $n_i$  the times it repeats and  $n_1 + \cdots + n_r = l \geq r$ . Thus, we will only write the multiplicities for the connected Feynman graphs.

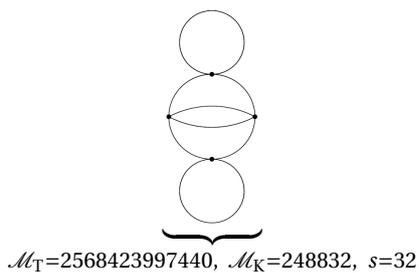
**Fourth-order connected diagrams**



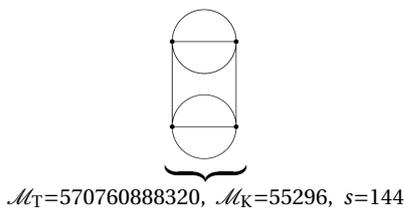
(D.3)



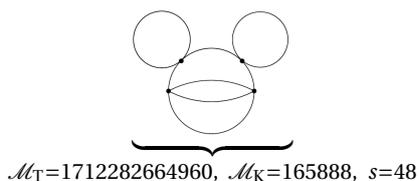
(D.9)



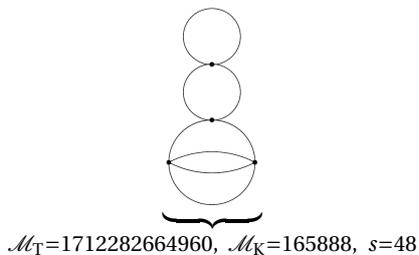
(D.4)



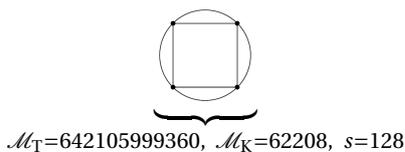
(D.10)



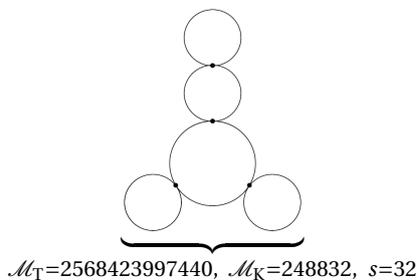
(D.5)



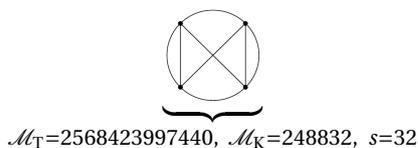
(D.6)



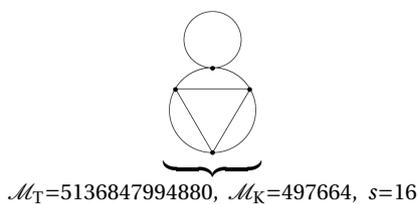
(D.11)



(D.7)

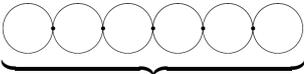


(D.12)



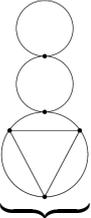
(D.8)

**Fifth-order connected diagrams**

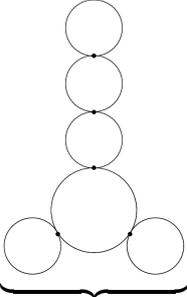
- 

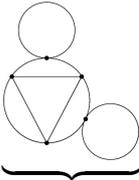
(D.13)  $\mathcal{M}_T=27738979172352000, \mathcal{M}_K=7464960, s=128$



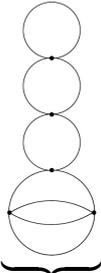
(D.20)  $\mathcal{M}_T=29588244450508800, \mathcal{M}_K=7962624, s=120$
- 

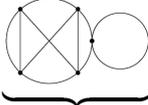
(D.14)  $\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$



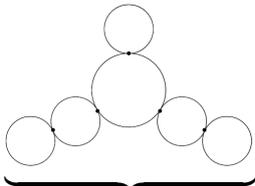
(D.21)  $\mathcal{M}_T=55477958344704000, \mathcal{M}_K=14929920, s=64$
- 

(D.15)  $\mathcal{M}_T=221911833378816000, \mathcal{M}_K=59719680, s=16$



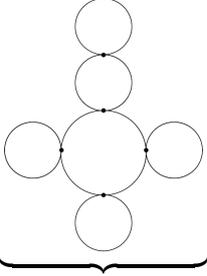
(D.22)  $\mathcal{M}_T=36985305563136000, \mathcal{M}_K=9953280, s=96$
- 

(D.16)  $\mathcal{M}_T=221911833378816000, \mathcal{M}_K=59719680, s=16$



(D.23)  $\mathcal{M}_T=55477958344704000, \mathcal{M}_K=14929920, s=64$
- 

(D.17)  $\mathcal{M}_T=11095591668940800, \mathcal{M}_K=2985984, s=320$



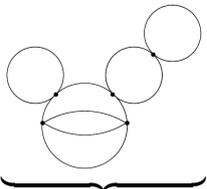
(D.24)  $\mathcal{M}_T=55477958344704000, \mathcal{M}_K=14929920, s=64$
- 

(D.18)  $\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$

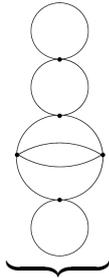


(D.19)  $\mathcal{M}_T=221911833378816000, \mathcal{M}_K=59719680, s=16$
- 

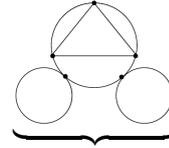
(D.19)  $\mathcal{M}_T=221911833378816000, \mathcal{M}_K=59719680, s=16$



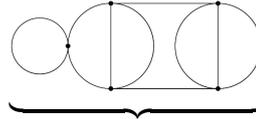
(D.25)  $\mathcal{M}_T=73970611126272000, \mathcal{M}_K=19906560, s=48$



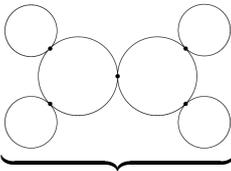
$\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$   
(D.26)



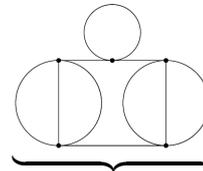
$\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$   
(D.32)



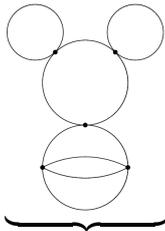
$\mathcal{M}_T=73970611126272000, \mathcal{M}_K=19906560, s=48$   
(D.33)



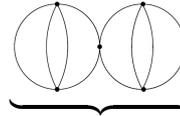
$\mathcal{M}_T=27738979172352000, \mathcal{M}_K=7464960, s=128$   
(D.27)



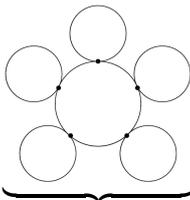
$\mathcal{M}_T=24656870375424000, \mathcal{M}_K=6635520, s=144$   
(D.34)



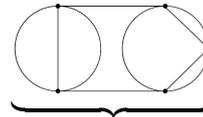
$\mathcal{M}_T=36985305563136000, \mathcal{M}_K=9953280, s=96$   
(D.28)



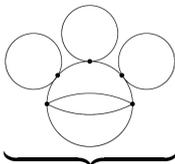
$\mathcal{M}_T=12328435187712000, \mathcal{M}_K=3317760, s=288$   
(D.35)



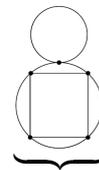
$\mathcal{M}_T=11095591668940800, \mathcal{M}_K=2985984, s=320$   
(D.29)



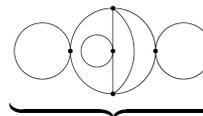
$\mathcal{M}_T=73970611126272000, \mathcal{M}_K=19906560, s=48$   
(D.36)



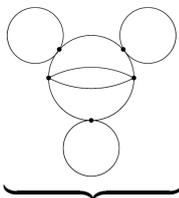
$\mathcal{M}_T=36985305563136000, \mathcal{M}_K=9953280, s=96$   
(D.30)



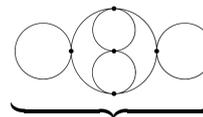
$\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$   
(D.37)



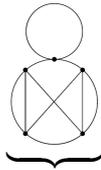
$\mathcal{M}_T=36985305563136000, \mathcal{M}_K=9953280, s=96$   
(D.38)



$\mathcal{M}_T=110955916689408000, \mathcal{M}_K=29859840, s=32$   
(D.31)



$\mathcal{M}_T=55477958344704000, \mathcal{M}_K=14929920, s=64$   
(D.39)



$$\mathcal{M}_T=221911833378816000, \mathcal{M}_K=59719680, s=16$$

(D.40)

**Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria**

$\left\{ \frac{1}{288}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{192}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{96}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{192}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{288}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{192}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{96}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{16}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{8}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{8}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{128}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{192}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{128}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{16}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{16}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{8}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{128}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{256}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{576}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{48}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{96}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{96}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{48}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{96}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{192}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{64}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$
$\left\{ \frac{1}{16}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{256}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{32}, \right\}$	$\left\{ \frac{1}{16}, \right\}$

Tabela D.1: Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria.

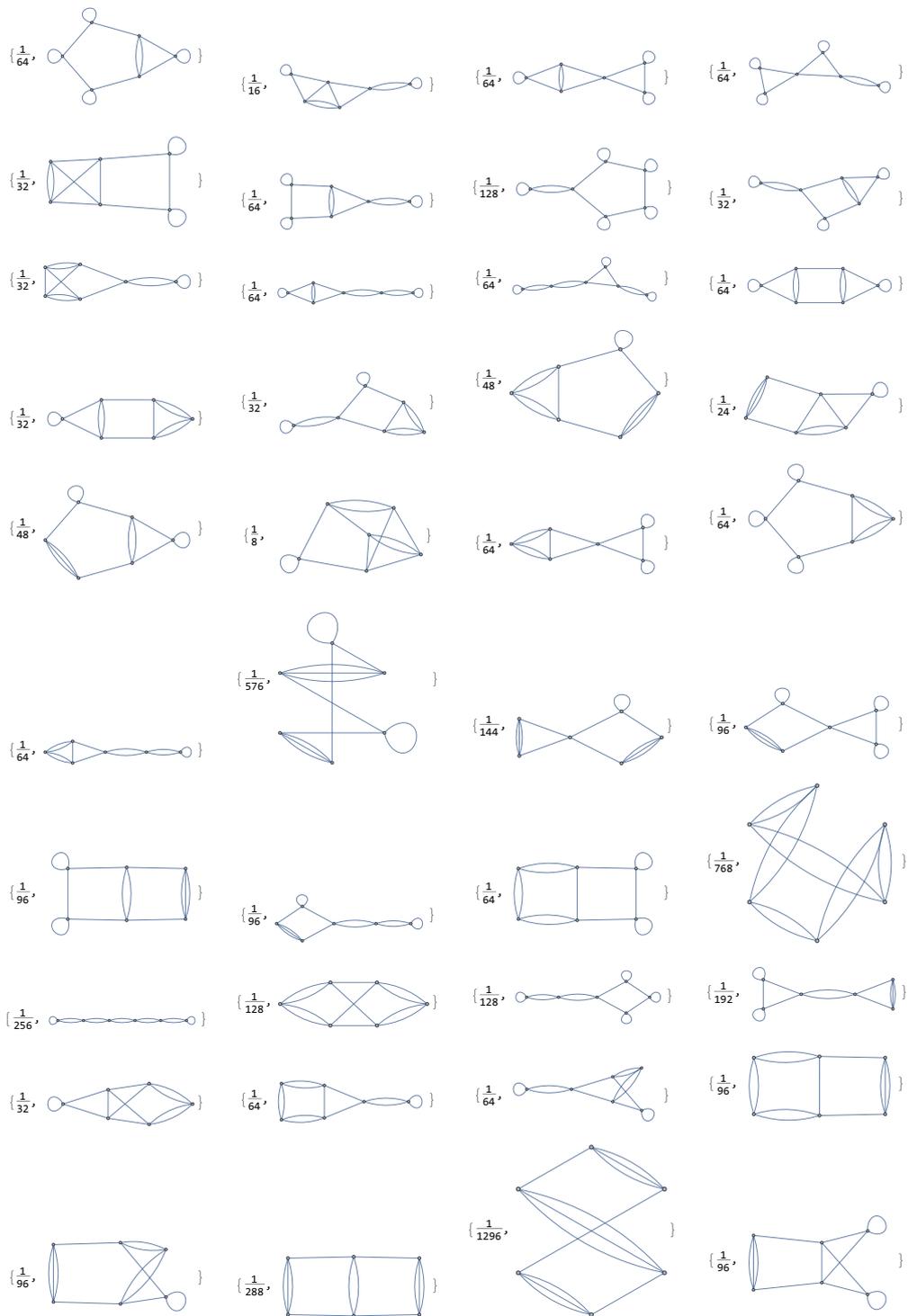


Tabela D.2: Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria.

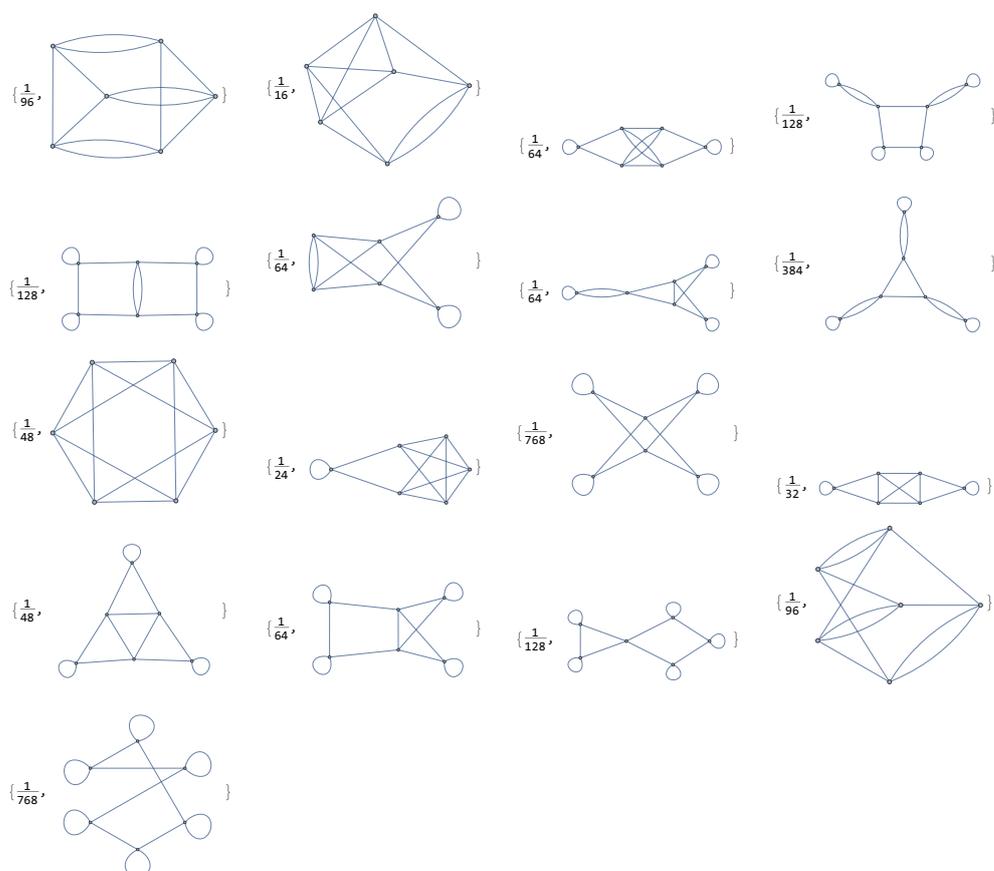


Tabela D.3: Borbulhas de vácuo de ordem 6 com seus respectivos factores de simetria

# Apêndice E

## Um critério para distinguir equivalência entre matrizes mágicas

Como vimos no capítulo 5, nossos algoritmos, apesar de funcionar e ser aplicável para todos os casos, tem a deficiência de ter a forma menos eficiente possível na hora de verificar isomorfismos de grafos e testar a equivalência de duas diferentes matrizes mágicas. No caso das matrizes mágicas vamos expor um critério simples para distinguir se duas matrizes mágicas são equivalentes. Tal vez este critério possa ser implementado num algoritmo para distinguir de forma mais eficiente se duas matrizes mágicas são equivalentes.

### E.1 O teorema de Birkhoff–von Neumann

O teorema de Birkhoff-von Neumann, diz simplesmente que qualquer matriz  $\mathbf{S}$  de dimensão  $m \times m$  duplamente estocástica pode-se decompor em uma soma convexa de matrizes de permutação. Isto é, qualquer matriz quadrada com coeficientes reais satisfazendo  $0 \leq S_{ij} < 1$  com  $\sum_i S_{ij} = 1$  para todo  $j$  e  $\sum_j S_{ij} = 1$  para todo  $i$  pode ser escrita como

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \quad \sum_{l=1}^k \lambda_l = 1 \quad (\text{E.1})$$

Uma matriz mágica arbitraria  $\mathbf{A}$  de soma  $d$  pode ser multiplicada pelo número  $1/d$ . Portanto, cada coeficiente em questão é multiplicado por  $1/d$ , fazendo com que  $(1/d)\mathbf{A}$  seja uma matriz duplamente estocástica a coeficientes racionais. Isto permite aplicar o teorema de Birkhoff von-Neumann para decompor a matriz  $\mathbf{A}$  em uma soma de  $d$  matrizes de permutação não necessariamente distintas. Isto é

$$\mathbf{A} = d_1 \mathbf{P}_1 + d_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + d_k \mathbf{P}_k, \quad \sum_{i=1}^k d_i = d \quad (\text{E.2})$$

Onde  $d_i$  é o número de vezes que a matriz  $P_i$  se repete na decomposição. Em particular:

- Todas as matrizes mágicas têm ao menos uma decomposição. Em realidade a maioria tem mais de uma decomposição possível.
- Para uma decomposição particular, o grupo de diferentes  $k$  matrizes de permutação que conformam a decomposição, podem ser vistas como um subconjunto de  $\mathcal{P}_{m \times m}$  com  $k$  elementos, e uma propriedade nas componentes das matrizes que chamaremos a propriedade das componentes comuns.

Esta propriedade pode ser formulada da seguinte forma: quantas componentes diferentes de zero são comuns entre as matrizes que conformam a decomposição? Para formular isto de forma mais explícita suponhamos a seguinte decomposição da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

A propriedade pode ser expressa da seguinte forma

$$\{\{1, 2, 0\}; \{1, 0, 2\}; \{2, 0, 1\}, \{0, 2, 1\}\} \quad (\text{E.4})$$

Que expressa o seguinte: a primeira matriz tem uma componente em comum com a segunda, duas com a terceira e nenhuma com a quarta; a segunda matriz tem uma componente em comum com a primeira, nenhuma com a terceira e duas com a quarta. A terceira chave contém as componentes da terceira matriz de permutação respeito da primeira, segunda e quarta respectivamente. Mesma coisa com a quarta chave.

A chave do assunto é a seguinte: duas matrizes mágicas equivalentes têm o mesmo número de decomposições em matrizes de permutação, de tal forma que para uma dada decomposição da primeira matriz, a qual tem uma certa propriedade das suas componentes comuns, existe uma decomposição da segunda matriz com o mesmo número de matrizes de permutação e exatamente com a mesma propriedade das suas componentes comuns [15].

Isto permite estabelecer um critério simples para determinar se duas matrizes mágicas arbitrárias não são equivalentes:

- Se duas matrizes mágicas têm um número diferente de decomposições então estas são não equivalentes.

- Se duas matrizes mágicas têm o mesmo número de decomposições, mas não existe forma de mapear as decomposições da primeira matriz mágica nas decomposições da segunda matriz mágica de forma de preservar o número de matrizes de permutação da decomposição (Por exemplo, suponhamos que a primeira matriz tem 5 diferentes decomposições cada uma respectivamente com 4,3,3,3 e 4 matrizes de permutação. E a segunda tem 5 diferentes decomposições cada uma com 4,4,4,3 e 3 matrizes de permutação) então as duas matrizes são não equivalentes.
- Se as duas matrizes mágicas têm o mesmo número de decomposições, e também podemos mapear as decomposições de uma matriz a outra de tal forma de preservar o número de matrizes de permutação da decomposição, mas não existe forma de que tais mapas preservem a propriedade comum das componentes que formam cada decomposição, então as duas matrizes mágicas são não equivalentes.

Podemos imaginar um algoritmo que verifique estes três critérios de forma sucessiva para duas matrizes mágicas arbitrárias. Lamentavelmente estes três critérios são não conclusivos: dadas duas matrizes mágicas arbitrárias, mesmo que encontremos uma bijeção que mapeie as decomposições de uma matriz mágica na outra, que preserve o número de matrizes de permutação das decomposições relatadas e que preserve a propriedade comum das suas componentes, as duas matrizes não necessariamente são equivalentes. O único certo é que duas matrizes mágicas equivalentes, tem ao menos uma bijeção deste tipo.

# Referências Bibliográficas

- [1] E.N. Argyres, A.F.W. van Hameren, R.H.P. Kleiss, and C.G. Papadopoulos. Zero-dimensional field theory. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 19:567 – 582, 2001.
- [2] M. Bachmann, H. Kleinert, and A. Pelster. Recursive graphical construction of feynman diagrams in quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 61:085017, Mar 2000.
- [3] J. Baez and J. Dolan. *From Finite Sets to Feynman Diagrams*. Mathematics Unlimited 2001 and Beyond. Springer-Verlag, 2001.
- [4] F. Battaglia and T. Georg. A pascal type triangle for the number of topologically distinct many-electron feynman graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2:241, 1987.
- [5] E.A. Bender and E.R. Canfield. The number of rooted maps on an orientable surface. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 53:293–299, 1991.
- [6] D. P. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 2000.
- [7] R. E. Borcherds and A. Barnard. Quantum field theory arxiv:math-ph/0204014v1, 2002.
- [8] M. Borinsky. Renormalized asymptotic enumeration of feynman diagrams. *Annals of Physics*, 385:95–135, 2017.
- [9] M. Borinsky. *Graphs in perturbation theory*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, 2018.
- [10] D. P. Bovet and P. Crescenzi. *Introduction to the theory of complexity*. Creative Commons, 2006.
- [11] K. Brádler. A novel approach to perturbative calculations for a large class of interacting boson theories. *Nuclear PhysicsB*, 926:381–405, 2018.
- [12] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber. Planar diagrams. *Commun. math. Phys.*, 59:35–71, 1978.
- [13] R. A. Brualdi and H. J Ryser. *Combinatorial matrix theory*. Cambridge University Press, 1991.

- [14] E. Castro. Equivalence between the arquès walsh sequence formula and the number of connected feynman diagrams for every perturbation order in the fermionic many body problem. *Journal of Mathematical Physics*, 59:023503, 2018.
- [15] E. R. Castro and I. Roditi. A combinatorial matrix approach for the generation of vacuum feynman graphs multiplicities in  $\phi^4$  theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 59:395202, 2018.
- [16] E. R. Castro and I. Roditi. A recursive enumeration of connected feynman diagrams with an arbitrary number of external legs in the fermionic non-relativistic interacting gas. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52:5401, 2019.
- [17] A. Connes and D. Kreimer. Renormalization in quantum field theory and the riemann hilbert problem i: The hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 210:249–273, 2000.
- [18] J. Courtiel, K. Yeats, and N. Zeilberger. Connected chord diagrams and bridgeless maps arxiv:1611.04611v2, 2017.
- [19] P. Cvitanovic, B. Lautrup, and Robert B. Pearson. Number and weights of feynman diagrams. *Physical review D*, 18:1939–1949, 1978.
- [20] J. F. Béraud D. Arquès. Rooted maps on orientable surfaces, riccati’s equation and continued fractions. *Discrete Mathematics, Elsevier*, 200:1–12, 2000.
- [21] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, 2000.
- [22] D.J.Broadhurst and D.Kreimer. Combinatoric explosion of renormalization tamed by hopf algebra: 30-loop padé-borel resummation. *Physics Letters B*, 475:63–70, 2000.
- [23] P. V. Dong, L. T. Hue, H. T. Hung, H. N. Long, and N. H. Thao. Symmetry factors of feynman diagrams for scalar fields. *Theoretical and Mathematical Physics*, 165:1500–1511, 2010.
- [24] D. Dorigoni. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus arxiv:hep-th/1411.3585, 2014.
- [25] N. Elezović. Asymptotic expansions of central binomial coefficients and catalan numbers. *Journal of Integer Sequences*, 17:14, 2014.
- [26] A. Fetter and J. Walecka. *Quantum Theory of Many Particle Systems*. Dover Publications, New York, 2002.
- [27] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge university press, 2009.
- [28] J. B. Geloun and S. Ramgoolam. Counting tensor model observables and branched covers of the 2-sphere. *Annales Del institut Henri Poincare D*, 1:77–138, 2014.

- [29] L. Hedin. New method for calculating the one particle green's function with application to the electron gas problem. *Phys. Rev.*, 139:A796–A823, 1965.
- [30] A.E. Jacobs. Number of feynman diagrams in arbitrary order of perturbation theory. *Physical Review D*, 23(8):241, 1981.
- [31] J. Zinn Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. The international series of monographs on Physics. Clarendon Press Oxford, 2002.
- [32] H. Kleinert. *Gauge Fields in Condensed Matter*, volume 1. World Scientific press, 1987.
- [33] H. Kleinert, A. Pelster, B. Kastening, , and M. Bachmann. Recursive graphical construction of feynman diagrams and their multiplicities in  $\phi^4$  and  $\phi^2 a$  theory. *Physical review E*, 62:1537–1559, 2002.
- [34] R. M. Koch and S. Ramgoolam. Strings from feynman graph counting : without large  $n$ . *Physical Review D*, 85:026007, 2012.
- [35] D. Kreimer. Combinatorics of (perturbative) quantum field theory. *Physics Reports*, 363:387–424, 2002.
- [36] K. G. Krishna, P. Labelle, and V. Shramchenko. Feynman diagrams and rooted maps. *Nuclear Physics B*, 936:668–689, 2018.
- [37] K. G. Krishna, P. Labelle, and V. Shramchenko. Feynman diagrams, ribbon graphs, and topological recursion of eynard-orantin. *J. High Energ. Phys.*, 162, 2018.
- [38] F. B. Kugler. Counting feynman diagrams via many body relations. *Phys. Rev. E*, 98:023303, 2018.
- [39] S. Lang. *Undergraduate Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics, 1990.
- [40] L. G. Molinari. Hedin's equations and enumeration of feynman diagrams. *Phys. Rev. B*, 71:113102, 2005.
- [41] L.G. Molinari and N. Manini. Enumeration of many-body skeleton diagrams. *Eur. Phys. J. B*, 51:331,336, 2006.
- [42] N. Nakanishi. Quantum field theory and the coloring problem of graphs. *Communications in Mathematical Physics*, 32:167—181, 1973.
- [43] P. Nogueira. Automatic feynman graph generation. *Journal of Computational Physics*, 105:279–289, 1993.
- [44] Y. Pavlyukh. Padé resummation of many-body perturbation theories. *Scientific Reports*, 7:504, 2017.

- [45] Y. Pavlyukh and W. Hubner. Analytic solution of hedin's equations in zero dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 48:052109, 2007.
- [46] A. Prunotto, W. Alberico, and P. Czerski. Feynman diagrams and rooted maps. *Open Physics*, 16(1), 2018.
- [47] R. Chang R. Beals, W. Gasarch, and Jacobo J. Torán. On finding the number of graph automorphisms. *Chicago J. Theor. Comput. Sci.*, 1999, 02 1999.
- [48] V. Rivasseau and Z. Wang. How are feynman graphs resummed by the loop vertex expansion? arxiv:1006.4617v1, 2010.
- [49] P. J. Rossky and M. Karplus. The enumeration of goldstone diagrams in many body perturbation theory. *The Journal of Chemical Physics*, 64:1596, 1976.
- [50] R.P Stanley. *Enumerative combinatorics*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, 2012.
- [51] I. M. Suslov. Divergent perturbation series. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 100:1188–1233, 2019.
- [52] W. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math*, 15:249–271, 1963.
- [53] T.R.S Walsh and A.B Lehman. Counting rooted maps by genus i. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 13:192–218, 1972.