

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

TESE DE DOUTORADO

**Mecânica Superconforme Clássica e Quântica:
Construção, Quantização e Espaço de Hilbert**

AUTOR: Ivan Eugênio da Cunha

ORIENTADOR: Francesco Toppan

15 de julho de 2019



“MECÂNICA SUPERCONFORME CLÁSSICA E QUÂNTICA:
CONSTRUÇÃO, QUANTIZAÇÃO E ESPAÇOS DE HILBERT”

IVAN EUGÊNIO DA CUNHA

Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os
seguintes professores:

Francesco Toppan - Presidente/Orientador/CBPF

Dmitry Vasilevich

Ion Vasile Vancea

José Abdalla Helayel Neto

Tobias Micklitz

Rio de Janeiro, 16 de abril de 2019.

Sumário

Introdução	8
1 Prelúdio Matemático e Mecânica Superconforme Clássica	11
1.1 Álgebras divisionais reais	11
1.2 Álgebras de Clifford	14
1.3 Álgebras de Lie e superálgebras de Lie	16
1.3.1 Do grupo de Lie à álgebra de Lie	16
1.3.2 Representações definidoras das álgebras de Lie clássicas	17
1.3.3 Base de Cartan-Weyl	18
1.3.4 Superálgebras de Lie básicas	19
1.3.5 Propriedades básicas de $D(2, 1; \alpha)$	20
1.3.6 Álgebras superconformes em uma dimensão	21
1.4 SUSY em uma dimensão e representações D-modulares	21
1.5 Simetria superconforme em uma dimensão	24
2 Da Mecânica Superconforme Clássica Para a Quântica	28
2.1 Base de termo cinético constante	28
2.2 Do Lagrangiano ao Hamiltoniano clássico	29
2.2.1 Modelo parabólico $\mathcal{N} = 1 (1, 1, 0)$	29
2.2.2 Modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 1 (1, 1, 0)$	31
2.3 Quantização canônica	32
2.3.1 Caso parabólico	32
2.3.2 Caso trigonométrico	33
2.4 Mecânica quântica superconforme em duas dimensões com simetria $sl(2 1)$	34
2.4.1 Modelo parabólico $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$	34
2.4.2 Modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$	36
2.5 Supersimetria suave dos osciladores	39
3 Osciladores Quânticos Superconformes Unidimensionais	41
3.1 O oscilador quântico unidimensional não deformado	41
3.2 Adicionando o potencial “ $\frac{1}{x^2}$ ”	43
3.3 $n = 1$ com deformação do tipo Klein e superálgebra geradora de espectro $osp(2 2)$	45
3.4 $n = 2$ com deformação do tipo Klein e superálgebra geradora de espectro $D(2, 1; \alpha)$	49
3.5 $n = 2$ com deformação distinta e superálgebra geradora de espectro $osp(2 2)$	52
3.6 Comentários finais	55
4 Mecânica Quântica Superconforme em Três Dimensões	57
4.1 Hamiltoniano parabólico	57
4.2 Hamiltoniano trigonométrico	58
4.3 A álgebra superconforme como superálgebra geradora de espectro	59
4.3.1 Estados de peso mínimo	59
4.3.2 Estados excitados	62

<i>SUMÁRIO</i>	3
4.3.3 Ortogonalidade e normalização	65
4.4 Recuperando o Hamiltoniano bidimensional	68
4.5 Breve discussão	69
Conclusão	71
A Diagramas de $\mathcal{N} = 2$ $(2, 2, 0)$ Trigonométrico Com $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$	73
B Selecionando o Espaço de Hilbert	77
Referências Bibliográficas	79

Agradecimentos

As pessoas listadas abaixo foram cruciais para que esse trabalho fosse concluído e lhes devo agradecimentos.

Meu orientador, Francesco Toppan, que me aceitou como seu aluno de doutorado e me ensinou quase tudo sobre os assuntos desse trabalho. Nossas discussões e a maneira como ele conduziu nossas colaborações causaram grande impacto em mim.

Meus colegas Linneu, Danilo e Sadi, os quais me deram boas vindas quando me tornei membro do grupo de pesquisa e foram importantes para mim não só academicamente, através de discussões e colaborações, mas também como bons amigos.

Minha família e minha namorada Catharina, que sempre me deram suporte ao longo desses anos.

Esse trabalho recebeu financiamento do CNPq.

*Nature is what we know -
Yet have no Art to say -
So impotent our Wisdom is
To her Simplicity.*

(Emily Dickinson)

Abstract

A general approach to quantize one dimensional superconformal σ -models is presented starting with the D-module representations of one dimensional superconformal algebras and clarifying the steps to quantizations as well showing the difficulties for cases where there is three or more propagating bosons. Afterward we show a way to find superconformal algebras already with quantum operators and systematically construct one dimensional quantum systems in both parabolic and trigonometric representations. In the later case, which consist of deformed quantum oscillators, it is shown how the superconformal algebras works as the spectrum generating superalgebra and used to span all the Hilbert space. Finally we construct a 3D quantum system with superconformal symmetry $sl(2|1)$ and investigate their relation with the 2D case with same symmetry. In this case we also try to find clues about how the general approach for higher dimensional superconformal quantum systems looks like.

KEYWORDS: supersymmetry, conformal symmetry, quantization, superconformal mechanics

Resumo

Uma abordagem geral para a quantização de modelos σ unidimensionais superconformes é apresentada começando com representações D-modulares de álgebras superconformes unidimensionais e esclarecendo os passos para a quantização assim como mostrando as dificuldades para casos com três ou mais campos bosônicos propagantes. Depois disso, nós mostramos uma maneira de obter álgebras superconformes já com operadores quânticos e sistematicamente construir sistemas quânticos unidimensionais tanto na representação parabólica como trigonométrica. Neste último caso, o qual consiste de osciladores quânticos deformados, é mostrado como a álgebra superconforme age como superálgebra geradora de espectro e usada para gerar todo o espaço de Hilbert. Enfim nós construímos um sistema quântico tridimensional com simetria $sl(2|1)$ e investigamos sua relação com o modelo bidimensional de mesma simetria. Neste caso nós também tentamos achar pistas de como uma abordagem geral para construir sistemas quânticos superconformes em maiores dimensões se parece.

PALAVRAS-CHAVE: supersimetria, simetria conforme, quantização, mecânica superconforme

Introdução

O interesse pela simetria conforme, tanto na mecânica clássica como quântica, começou com os trabalhos de Calogero [1, 2, 3] no fim dos anos sessenta. Esses trabalhos tratavam de sistemas de muitas partículas interagentes onde a energia potencial entre elas dependia do inverso do quadrado da distância. Tais trabalhos abriram caminho para uma série de avanços subsequentes e um deles, o trabalho de de Alfaro, Fubini e Furlan [4], em 1974, deve ser destacado. O campo então se expandiu fantasticamente e alguns dos tópicos atuais de grande relevância estão relacionados com simetrias conformes. Um exemplo claro disso é a conjectura de Maldacena, a correspondência AdS/CFT [5], que, além de ser um problema matemático instigante por si só, possui aplicações em teoria de supercordas [6, 7, 8], física de buracos negros [9] e até mesmo em sistemas de matéria condensada [10, 11].

O tópico que iremos investigar no presente texto é a teoria de campos superconforme em uma dimensão e tal tem recebido crescente atenção na literatura principalmente devido à proposta recente do modelo SYK [12], o qual pode ser um modelo onde a correspondência AdS/CFT seria completamente entendida, e aos trabalhos subsequentes relacionados a esse modelo [13, 14, 15, 16].

Três métodos de investigação têm sido empregados em muitos dos trabalhos dentro do presente tópico. O primeiro consiste em quantizar modelos σ superconformes em uma dimensão. O segundo se dá pela investigação das simetrias de equações diferenciais parciais, no caso, de equações de Schrödinger dependentes do tempo com graus de liberdade espinoriais. Já o terceiro método se trata da construção de operadores fermiônicos partindo de uma álgebra de Clifford e impondo as condições da álgebra superconforme. Aqui iremos investigar o primeiro e terceiro métodos.

As principais motivações para investigar modelos σ superconformes em uma dimensão (e suas quantizações) vem de sua aplicabilidade na dinâmica de partículas de teste próximas ao horizonte de eventos de certos tipos de buracos negros (veja [17]) e seu papel na correspondência AdS_2/CFT_1 [18, 19]. Como será visto no Capítulo 1, os modelos σ superconformes em uma dimensão são obtidos ao se impor a simetria conforme a modelos σ supersimétricos em uma dimensão associados a determinado supermultiplete [20, 21]. Tais modelos podem ser obtidos via superespaço [22] ou, como faremos, via representações D-modulares das álgebras superconformes [23, 24]. Em [25], extendendo os resultados de [26], é mostrado que a simetria dinâmica superconforme dos modelos σ em uma dimensão podem ser do tipo parabólica ou trigonométrica. O primeiro caso corresponde ao bem conhecido potencial com inverso do quadrado enquanto o último corresponde à adição de um termo oscilatório. A quantização dos modelos parabólicos tem sido feita em diversos trabalhos (veja [27, 28] para a simetria $D(2, 1; \alpha)$). Já a quantização de casos trigonométricos, no entanto, foi pouco explorada (em [29, 30] temos a quantização de osciladores não deformados e o primeiro exemplo de oscilador deformado é encontrado em [31], de onde reproduziremos alguns dos resultados nesse texto). Como será visto no Capítulo 2, a quantização desses sistemas é feita ao se quantizar as cargas de Noether utilizando a quantização canônica.

O método apresentado no Capítulo 3 (e em [32], de onde iremos reproduzir os resultados) por outro lado começa ao introduzirmos matrizes de osciladores não deformados com tamanho $2^n \times 2^n$ e superálgebra geradora de espectro $osp(2n|2)$. Para $n = 1$ será visto que a adição de um potencial do tipo inverso do quadrado não altera a simetria $osp(2|2)$. Já para $n = 2$, dois casos distintos surgem. O primeiro será o de um oscilador deformado do tipo Klein [34] (veja também [35]), cuja superálgebra geradora de espectro será $D(2, 1; \alpha)$ com o parâmetro α aparecendo na constante de acoplamento do potencial proporcional ao inverso do quadrado. O segundo caso

$n = 2$ corresponde a um oscilador quântico com deformação que não é mais do tipo Klein. Nesse último caso, a superálgebra geradora de espectro será $osp(2|2)$ e o oscilador não está conectado ao caso não deformado, o qual com simetria $osp(4|2)$, por uma variação contínua do parâmetro de deformação.

Um dos desafios encontrados nos métodos que serão apresentados é o de construir modelos quânticos com dois ou mais campos bosônicos (ou duas ou mais dimensões espaciais, ao interpretarmos os campos como coordenadas espaciais). No Capítulo 4, então, apresentaremos uma representação da álgebra superconforme $sl(2|1)$ com a qual podemos construir os modelos superconformes parabólico e trigonométrico tridimensionais. Investigaremos com detalhes o modelo trigonométrico e buscaremos pistas de como generalizar o procedimento que introduziremos no Capítulo 3.

O conteúdo desse texto é apresentado como se segue.

No Capítulo 1 vamos dar uma breve revisão de tópicos matemáticos pertinentes aos trabalhos apresentados e também apresentaremos alguns rudimentos da construção de modelos σ superconformes em uma dimensão via representações D-modulares. Os tópicos matemáticos cobertos no capítulo serão álgebras divisionais reais, álgebras de Clifford, álgebras Lie e superálgebras de Lie. Com tais ferramentas vamos realizar a construção do modelo σ supersimétrico com $\mathcal{N} = 1$ e apresentar as possíveis representações para $\mathcal{N} = 2$. Por fim vamos introduzir as representações parabólica, hiperbólica e trigonométrica da álgebra conforme e mostrar como obter as ações superconformes parabólicas e trigonométricas de $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0) e $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0).

No Capítulo 2 será realizada a quantização dos modelos $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0) e $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) tanto nas representações parabólica como trigonométrica. O procedimento será feito com detalhes para $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0), cuja simetria é $osp(1|2)$. Primeiramente se colocara os modelos na chamada base de termo cinético constante e se derivará as cargas conservadas. Em seguida se fará a passagem para o formalismo hamiltoniano. Devido aos vínculos no espaço de fase, será necessário utilizar o formalismo de Dirac para sistemas vinculados. Após obter os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas, realizaremos a quantização canônica e obteremos o conjunto de operadores quânticos correspondentes às cargas clássicas. Em relação aos modelos com $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0), os quais têm simetria $sl(2|1)$, a investigação dos sistemas quânticos será feita em maior profundidade. Para o modelo parabólico, apresentaremos os operadores quânticos e, em especial, o Hamiltoniano e os operadores de supersimetria. Uma das consequências da quantização que destacaremos nesse caso é o aparecimento de uma correção quântica no Hamiltoniano, a qual fará do sistema quântico bem comportado independente do fator de escala λ . Outra consequência será a restrição de λ a valores inteiros ou semi-inteiros. Já a quantização do modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) nos dará um oscilador deformado. A mesma superálgebra $sl(2|1)$ será obtida com os operadores quânticos correspondentes às cargas clássicas, mas aqui a superálgebra será a superálgebra geradora de espectro e os operadores fermiônicos agirão como operadores de criação e aniquilação. Observaremos que, com apenas os operadores de $sl(2|1)$, o espaço de Hilbert irá se decompor numa soma direta de infinitas representações de peso mínimo de $sl(2|1)$, mas a existência de uma simetria discreta nos levará a definir novos operadores, os quais também definindo uma representação de $sl(2|1)$, e nos permitirá construir toda a base do espaço de Hilbert a partir dos estados fundamentais. Os resultados apresentados nesse capítulo também podem ser encontrados em [31].

Já no Capítulo 3 vamos primeiramente derivar as superálgebras geradoras de espectro com matrizes $2^n \times 2^n$ de osciladores não deformados unidimensionais. Em seguida adicionaremos um potencial de inverso do quadrado numa matriz diagonal e obteremos as condições de consistência para continuar tendo uma superálgebra geradora de espectro. O caso $n = 1$ (matrizes 2×2) será analisado e teremos a superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$, mas será observado que uma subálgebra $osp(1|2)$ é suficiente para gerar o espectro. A construção dos diferentes espaços de Hilbert admissíveis para cada intervalo do parâmetro de deformação será apresentada. Indo para a análise do caso seguinte, $n = 2$ (matrizes 4×4), teremos um oscilador deformado do tipo Klein com superálgebra geradora de espectro $osp(4|2)$, no caso não deformado, e $D(2, 1; \alpha)$ no caso deformado. Em ambos os casos a subálgebra $osp(2|2)$ será suficiente para gerar o espectro, mas o parâmetro α terá significado físico, estando ligado à energia do estado fundamental da teoria. Além disso, se investigará os espaços de Hilbert admissíveis. Também com $n = 2$ obteremos um

oscilador deformado que não é do tipo Klein e, nesse caso, com deformação ν ($\nu \neq 0$), o espaço de Hilbert será dado por uma representação de peso mínimo irredutível de $osp(2|2)$. Apresentaremos em seguida o espectro e os estados ortonormais da teoria. Finalizaremos o capítulo com alguns comentários sobre os casos com $n \geq 3$. Os resultados desse capítulo também são apresentados em [32].

Por fim, no Capítulo 4 iremos apresentar uma representação da álgebra superconforme $sl(2|1)$ com a qual se pode definir os modelos parabólico e trigonométrico em três dimensões com essa simetria. Definiremos os operadores fermiônicos, os quais construídos a partir de representações comutantes entre si das álgebras de Clifford $Cl(2,0)$ e $Cl(0,3)$, e obteremos o Hamiltoniano parabólico assim como os demais geradores da superálgebra. Em sequência iremos definir novos operadores fermiônicos a partir dos anteriores e usar o “truque” DFF para definir o Hamiltoniano trigonométrico. Nesse último caso, a álgebra superconforme agirá como superálgebra geradora de espectro e, assim, vamos obter as representações de peso mínimo e gerar toda a base do espaço de Hilbert. Por fim realizaremos a normalização dos estados. Também serão obtidos modelos parabólico e trigonométrico bidimensionais restringindo a ação dos operadores a duas dimensões. Como será visto, porém, os modelos obtidos não serão exatamente os mesmos do Capítulo 2. Finalizaremos com uma breve discussão dos resultados. Os resultados desse capítulo, assim como outros, também podem ser encontrados em [33].

Há também dois apêndices. No Apêndice A vamos apresentar alguns diagramas representando o espaço de Hilbert do modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 2(2, 2, 0)$. Nele está incluso algumas discussões sobre os operadores de criação e aniquilação assim como é apresentada a possibilidade de aplicar uma regra de superseleção de forma a remover as degenerescências da teoria e ter um único vácuo. Já no Apêndice B é discutida a escolha do espaço de Hilbert para os modelos unidimensionais investigados no Capítulo 3.

Capítulo 1

Prelúdio Matemático e Mecânica Superconforme Clássica

Esse capítulo será uma breve revisão de alguns tópicos que serão explorados em maior profundade nos capítulos subsequentes. O objetivo principal é o de introduzir as ferramentas básicas de forma ligeira, mas também auto-contida. Tais tópicos aqui apresentados incluem conceitos básicos de álgebras divisionais reais, álgebras de Clifford, álgebras e superálgebras de Lie e mecânica clássica superconforme (que consiste de modelos σ superconformes em uma dimensão). Para o leitor já familiarizado com esses conceitos, ainda recomendamos uma breve leitura do presente capítulo, pois aqui será definida muito da notação que será adotada ao longo dos demais capítulos. Uma exposição mais extensa sobre mecânica (super)conforme pode ser encontrada em [26, 36, 37, 38].

1.1 Álgebras divisionais reais

Números reais e complexos são fundamentais em física e matemática. Definimos e utilizamos uma miríade de ferramentas matemáticas que dependem crucialmente das propriedades algébricas desses números. Uma de tais propriedades é o fato de que a estrutura algébrica de tais conjuntos numéricos é uma *álgebra divisional real*. Para definirmos o que seja uma álgebra divisional real (ou, equivalentemente, uma álgebra divisional normada), vamos primeiro ver a estrutura dos números reais e complexos, assim como de outras possíveis estruturas que satisfaçam a definição, como espaços vetoriais sobre o corpo dos reais dotados de uma norma.

Dado um espaço vetorial V , vamos definir a operação $\cdot : V^2 \rightarrow V$ chamada *multiplicação* e uma *conjugação* $*$: $V \rightarrow V$ com as seguintes propriedades

$$(a^*)^* = a, (a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*. \quad (1.1.1)$$

A conjugação também deve ser de tal forma que $a^* \cdot a$ defina uma norma no espaço vetorial e a multiplicação deve ser distributiva, tanto pela direita como pela esquerda, sobre a soma. Com a multiplicação e conjugação definidas dessa forma, podemos definir uma álgebra divisional real como um espaço vetorial V com tais multiplicação e conjugação onde $a \cdot b = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$. Uma consequência imediata é que $(\frac{1}{a^* \cdot a} a^*) \cdot a = 1 = a \cdot (\frac{1}{a \cdot a^*} a^*)$ para $a \neq 0$, o que mostra que cada elemento não nulo possui inverso multiplicativo. De agora em diante vamos omitir o símbolo “.” para não deixar a notação carregada.

Os números reais (\mathbb{R}) e complexos (\mathbb{C}) claramente satisfazem o que é requerido, mas existem outras estruturas que também são álgebras divisionais reais. No entanto, como foi demonstrado por Hurwitz [39], há apenas outras duas: os quatérnions (\mathbb{H}) e octônions (\mathbb{O}). De forma mais geral, qualquer álgebra divisional real unidimensional é isomorfa aos reais e, semelhantemente, álgebras divisionais reais bidimensionais, quadrimensionais e octadimensionais são isomorfas aos

complexos, quatérnions e octônions respectivamente. Existem álgebras divisionais que não são álgebras divisionais reais, mas, ainda sim, todas elas tem uma, duas, quatro ou oito dimensões [40, 41].

Quatérnions e octônions não parecem ser tão presentes na física, porém, na verdade, quatérnions estão presentes em vários contextos de forma, às vezes, dissimulada, mas também por vezes explícita, como, por exemplo no uso de matrizes de Pauli. Além disso, todas as álgebras divisionais reais estão por trás de algumas propriedades marcantes das álgebras de Clifford e (super)álgebras de Lie, as quais amplamente aplicadas na física.

Como álgebras divisionais reais são espaços vetoriais, podemos definir suas propriedades através de como a multiplicação e conjugação se aplicam sobre a base desse espaço e definindo uma norma apropriada. Para os números reais isso é simples e basta tomar como base o número 1 e a norma como a^2 para $a \in \mathbb{R}$ ($a^* = a$). Já para os complexos a base pode ser definida por $\{1, i\}$ com $i^2 = -1$ e $1i = i1$. Nesse caso, a conjugação de $a = a_1 + ia_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) é definida por $a^* = a_1 - ia_2$ e, assim, a norma é dada por $a^*a = (a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2) = a_1^2 + a_2^2$. No caso dos quatérnions, a base pode ser dada por $\{1, e_i\}$ com $e_i^2 = -1$ ($i = 1, 2, 3$) e

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k, \quad (1.1.2)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita com $\epsilon_{123} = 1$. Da mesma forma que nos complexos, a conjugação de $a = a_0 + e_i a_i$ (notação de Einstein) é dada por $a^* = a_0 - e_i a_i$ e a norma será $a^*a = a_0^2 + a_i a_i$. Enfim, para os octônions a base é $\{1, e_i\}$ com $e_i^2 = -1$ ($i = 1, \dots, 7$) e

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + c_{ijk} e_k, \quad (1.1.3)$$

onde c_{ijk} é totalmente anti-simétrico e definido por $c_{123} = c_{145} = c_{176} = c_{246} = c_{257} = c_{347} = c_{365} = 1$. A conjugação é dada por $a^* = a_0 - e_i a_i$ e a norma fica definida através de $a^*a = a_0^2 + a_i a_i$. Há uma maneira elegante de visualizar as constantes de estrutura c_{ijk} . Na Figura 1.1.1, c_{ijk} será não nulo quando todos os três pontos estiverem na mesma linha e o sinal será positivo se a ordem dos pontos seguir a seta enquanto será negativo caso contrário. Por exemplo, $e_1 e_4 = e_5$ e $e_5 e_4 = -e_1$. A Figura 1.1.1 é também conhecida como plano de Fano e se trata do plano projetivo mais simples.

Exceto pelos octônions, que não possuem multiplicação associativa, todas as álgebras divisionais reais podem ser representadas matricialmente com a multiplicação sendo a usual entre matrizes. Abaixo segue uma representação para cada uma em termos de matrizes reais:

i) \mathbb{R} : a base é dada pelo número 1, a multiplicação é a usual e $a^* := a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

ii) \mathbb{C} : a base pode ser definida por $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (note que $A^2 = -\mathbb{I}_2$). Já a conjugação é definida pela transposição $a^* := a^T$ e a norma pelo determinante $\det(a^T a)$.

iii) \mathbb{H} : a base pode ser tomada como $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$ e \mathbb{I}_4 , onde A é o mesmo que na representação dos complexos. Novamente a conjugação pode ser definida por $a^* := a^T$ com norma sendo $\det(a^T a)$.

Na próxima seção mostraremos que essas representações também são representações das álgebras de Clifford $Cl(1, 0)$, $Cl(0, 1)$ e $Cl(0, 3)$ respectivamente.

Para finalizar essa seção, vamos apresentar um algoritmo para sistematicamente construir representações das álgebras divisionais reais. Tal algoritmo é conhecido como *construção de Cayley-Dickson* e consiste em duplicar a álgebra definindo os novos produto e conjugação através dos da álgebra anterior. Sendo V um espaço vetorial com multiplicação e conjugação definidos como anteriormente, a nova álgebra, definida sobre V^2 , terá multiplicação

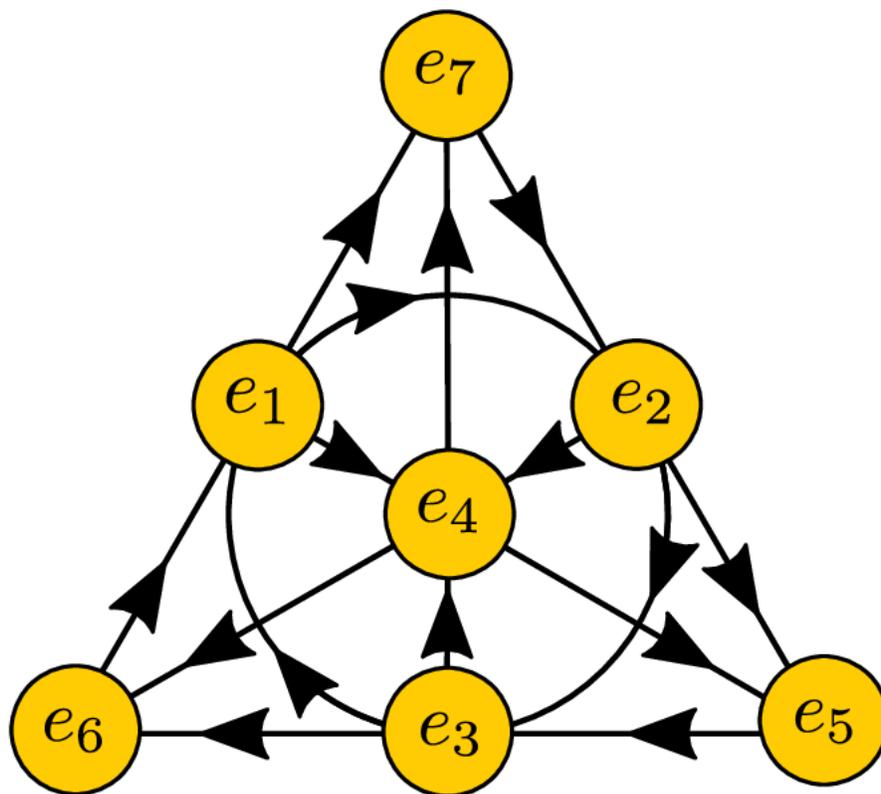


Figura 1.1.1: O plano de Fano. c_{ijk} é não nulo se os pontos pertencem à mesma linha.

$$(a, b)(c, d) = (ac \mp d^*b, da + bc^*), \quad (a, b), (c, d) \in V^2, \quad (1.1.4)$$

e conjugação

$$(a, b)^* = (a^*, -b). \quad (1.1.5)$$

Começando pelos números reais, esse processo leva aos complexos se o sinal em (1.1.4) é negativo e aos split-complexos se o sinal é positivo. A partir dos complexos, nós temos os quatérnions se escolhermos o sinal negativo e os split-quatérnions se o sinal for positivo, etc.. É importante lembrar que as versões split das álgebras divisionais não são mais álgebras divisionais e também que essa construção pode ir além dos octônions, mas, novamente, não há outras álgebras divisionais para além dessa última.

Na tabela abaixo algumas propriedades importantes das álgebras divisionais são listadas e marcadas com “○” se a álgebra possui tal propriedade e “×” caso contrário.

Álgebra	Dim.	Ordenada	Propriedades da multiplicação				
			Comutatividade	Associa-tividade	Alterna-tividade	Potência assoc.	Divisores de zero
Reais	1	○	○	○	○	○	×
Complexos	2	×	○	○	○	○	×
Quatérnions	4	×	×	○	○	○	×
Octônions	8	×	×	×	○	○	×
...	>8	×	×	×	×	○	○

1.2 Álgebras de Clifford

Álgebras de Clifford estão presentes em diversos contextos da física e matemática. No que será apresentado nesse texto, elas desempenharão papel fundamental e sempre serão o primeiro passo na construção dos diversos sistemas estudados.

Grosso modo, uma álgebra de Clifford com N geradores γ_μ ($\mu = 1, \dots, N$) é definida pela relação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (1.2.1)$$

onde \mathbb{I} é a identidade, $\{.,.\}$ é uma operação simétrica (na maioria das vezes $\{a, b\}$ significa $ab + ba$)

e $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal $\eta = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{-1, \dots, -1}^q)$ com $p + q = N$. Para representações reais das álgebras de Clifford, é conveniente usar a notação $Cl(p, q)$ para distingui-las, já que a assinatura de η não poderá ser alterada por transformações de similaridade. Devemos aqui enfatizar que a álgebra de Clifford não se restringe à identidade, aos γ_μ e suas combinações lineares, mas também aos produtos $\gamma_\mu\gamma_\nu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma$, etc. junto às suas combinações lineares.

Para nossos interesses, as álgebras de Clifford serão conjuntos de operadores sobre algum espaço e, portanto, serão as representações delas que nos serão valiosas. Nesse intuito de conhecer as representações, um passo fundamental é conseguir construir as representações irredutíveis (doravante “*irrep*”) das álgebras de Clifford. Felizmente, para representações reais, há dois algoritmos que nos permitem construir representações irredutíveis de álgebras de Clifford maiores a partir de álgebras de Clifford menores de forma sistemática (veja [42]). Abaixo explicitamos tais algoritmos.

i) $Cl(p, q) \rightarrow Cl(p+1, q+1)$: Dados os geradores γ_μ de $Cl(p, q)$, os geradores de $Cl(p+1, q+1)$ serão

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{N+2} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

ii) $Cl(p, q) \rightarrow Cl(q+2, p)$: Dados os geradores γ_μ de $Cl(p, q)$, os geradores de $Cl(q+2, p)$ serão

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ -\gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_{N+2} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Por exemplo, a partir da álgebra de Clifford mais simples, $Cl(1, 0)$, temos a cadeia de irreps $Cl(1, 0) \rightarrow Cl(2, 1) \rightarrow Cl(3, 2) \rightarrow Cl(4, 3) \dots$. Mais precisamente, dada a irrep $Cl(1, 0)$ definida por $\gamma = 1$ e $\eta = 1$, através de qualquer dos dois algoritmos apresentados, temos a irrep de $Cl(2, 1)$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

O resto da série de representações é obtida simplesmente aplicando os algoritmos repetidamente, mas $Cl(2, 1)$ é especialmente interessante, pois podemos reescrever o primeiro algoritmo como $\Gamma_\mu = Y \otimes \gamma_\mu$, $\Gamma_{N+1} = A \otimes \mathbb{I}$, $\Gamma_{N+2} = X \otimes \mathbb{I}$ e o segundo algoritmo como $\Gamma_\mu = A \otimes \gamma_\mu$, $\Gamma_{N+1} = Y \otimes \mathbb{I}$, $\Gamma_{N+2} = X \otimes \mathbb{I}$. Ou seja, os elementos das irrep construídas através dos algoritmos expostos podem ser decompostos em produtos tensoriais das matrizes A , X , Y e \mathbb{I}_2 . Outro aspecto importante a ser notado é que A , X , Y e \mathbb{I}_2 geram o espaço das matrizes 2×2 e não podemos acrescentar mais geradores independentes nessa representação da álgebra de Clifford. Diz-se, portanto, que essa representação de $Cl(2, 1)$ é *maximal*. As representações não maximais são obtidas eliminando geradores das representações maximais e assim, por exemplo, temos uma irrep de $Cl(0, 1)$ ao tomarmos o gerador A na irrep maximal de $Cl(2, 1)$. Apesar desse último exemplo, irreps maximais não precisam gerar todo o espaço de matrizes onde estão imersas; basta que não seja possível adicionar mais geradores sem violar a relação (1.2.1).

$Cl(1, 0)$ não é suficiente para gerar todas as irrep maximais das álgebras de Clifford. É possível definir $Cl(0, 3)$ com matrizes 4×4 e tal representação não aparece na cadeia gerada a partir de $Cl(1, 0)$. Mas podemos definir uma nova cadeia de irreps maximais começando com a citada irrep de $Cl(0, 3)$. Abaixo expomos as cadeias de irrep maximais construídas através dos algoritmos (1.2.2) e (1.2.3)

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \diamond & 2 & \diamond & 4 & \diamond & 8 & \diamond & 16 & \diamond & 32 \\ Cl(1, 0) & \rightarrow & Cl(2, 1) & \rightarrow & Cl(3, 2) & \rightarrow & Cl(4, 3) & \rightarrow & Cl(5, 4) & \rightarrow & Cl(6, 5) & \dots \\ & & & & Cl(0, 3) & \rightarrow & Cl(1, 4) & \rightarrow & Cl(2, 5) & \rightarrow & Cl(3, 6) & \dots \\ & & & & & \searrow & & & & & & \\ & & & & & & Cl(5, 0) & \rightarrow & Cl(6, 1) & \rightarrow & Cl(7, 2) & \dots \\ & & & & & & Cl(0, 7) & \rightarrow & Cl(1, 8) & \rightarrow & Cl(2, 9) & \dots \\ & & & & & & & \searrow & & & & \\ & & & & & & & & Cl(9, 0) & \rightarrow & Cl(10, 1) & \dots \\ & & & & & & & & \vdots & & & \end{array}$$

Vamos agora apresentar explicitamente a representação de $Cl(0, 3)$. Essa é dada pelas matrizes

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

É simples verificar que

$$\gamma_i \gamma_j = -\delta_{ij} \mathbb{I}_4 + \epsilon_{ijk} \gamma_k, \quad (1.2.6)$$

a qual se trata da relação (1.1.2) dos quatérnions. Alias, esse foi nosso exemplo de representação matricial dos quatérnions. Fora isso, essa álgebra de Clifford não só representa os quatérnions como também possui estrutura quaterniônica, já que existem três outras matrizes independentes

e diferentes da identidade que comutam com a álgebra inteira. A saber, essas matrizes são $h_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ -Y & 0 \end{pmatrix}$ e $h_3 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix}$ e elas também formam uma representação dos quatérnions.

A representação de $Cl(0, 7)$ é ligada aos octônions, mas não da mesma forma como no caso anterior, afinal, os octônions não são associativos. Para estabelecer a relação, devemos notar que, apesar dos octônions não serem associativos, a ação pela esquerda de uma unidade imaginária pode ser representada por uma operação linear. Com efeito, dado o octônion $a = a_0 + e_j a_j$, a ação pela esquerda de e_i nos dá

$$e_i a = a_0 e_i - \delta_{ij} a_j + c_{ijk} a_j e_k, \quad (1.2.7)$$

onde foi usado (1.1.3). Reorganizando a expressão, temos

$$e_i a = -\delta_{ij} a_j + (a_0 \delta_{ik} + c_{ijk} a_j) e_k. \quad (1.2.8)$$

Representando esse octônion como um vetor coluna $(a_0 a_1 \dots a_7)^T$, a ação das unidades imaginárias e_i podem ser representadas por uma matrizes 8×8 , γ_i , definidas por

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \delta_{ik} & \dots \\ \vdots & & & \\ -\delta_{ij} & & c_{ijk} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, \quad (1.2.9)$$

Vale lembrar, no entanto, que tais matrizes não reproduzem a relação (1.1.3). Em verdade, as relações de comutação $[\gamma_i, \gamma_j]$ definem geradores de uma representação da álgebra de Lie $SO(7)$ (veja abaixo).

1.3 Álgebras de Lie e superálgebras de Lie

Simetrias, como normalmete nos referimos a elas, são intimamente conectadas com estruturas matemáticas conhecidas como *grupos*. Um grupo é um conjunto de elementos com uma operação associativa que possui identidade e inverso para cada elemento. Grupos comutativos são conhecidos como abelianos, mas o mais comum é que a operação do grupo não seja comutativa. Uma variedade de estruturas são grupos, já que a definição é consideravelmente simples, mas vamos nos focar nos chamados grupos de Lie, os quais possuem infinitos elementos e podem ser parametrizados por parâmetros contínuos. Tal parametrização leva-nos a definir estruturas algébricas conhecidas como *álgebras de Lie*, que são as estruturas que nos interessam aqui. Já as superálgebras de Lie nascem como uma extensão das noções de álgebra de Lie e, no contexto da física, muitas vezes estão ligadas com a noção de *supersimetria*, onde se tem operadores raízes quadradas do Hamiltoniano.

1.3.1 Do grupo de Lie à álgebra de Lie

Considere uma representação do grupo de Lie G . Os elementos dessa representação, g , podem ser escritos como $g(\alpha)$, onde $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ são N parâmetros independentes e $g(0) = 1$. Então, por expansão de Taylor, nós temos (até primeira ordem)

$$g(d\alpha) = 1 + i d\alpha_\mu X_\mu, \quad (1.3.1)$$

com $d\alpha_\mu$ sendo infinitesimal e $X_\mu = -i \left. \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_\mu} \right|_{\alpha=0}$. Dessa forma, os elementos do grupo conexos à identidade podem ser escritos como

$$g(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\alpha_\mu X_\mu}{k} \right)^k \equiv e^{i\alpha_\mu X_\mu}. \quad (1.3.2)$$

Essa é a conhecida parametrização exponencial e agora vamos nos dedicar a descobrir qual é a estrutura algébrica gerada pelos elementos X_μ . Para tanto, tomemos o produto $e^{i\alpha_\mu X_\mu} e^{i\beta_\nu X_\nu} = e^{i\delta_\rho X_\rho}$ e reescrevamos ele como

$$i\delta_\rho X_\rho = \ln \left(1 + e^{i\alpha_\mu X_\mu} e^{i\beta_\nu X_\nu} - 1 \right). \quad (1.3.3)$$

Definindo $e^{i\alpha_\mu X_\mu} e^{i\beta_\nu X_\nu} - 1 = k$ e usando a expansão de Taylor para $\ln(1+k)$, nós temos

$$\begin{aligned} i\delta_\rho X_\rho &= k - \frac{1}{2}k^2 + \dots \\ &= i\alpha_\mu X_\mu + i\beta_\nu X_\nu - \alpha_\mu X_\mu \beta_\nu X_\nu - \frac{1}{2}(\alpha_\mu X_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\beta_\nu X_\nu)^2 - \frac{1}{2}(i\alpha_\mu X_\mu + i\beta_\nu X_\nu)^2 + \dots \\ &= i\alpha_\mu X_\mu + i\beta_\nu X_\nu - \frac{1}{2}(\alpha_\mu X_\mu \beta_\nu X_\nu - \beta_\nu X_\nu \alpha_\mu X_\mu) + \dots \\ &= i\alpha_\mu X_\mu + i\beta_\nu X_\nu - \frac{1}{2}[\alpha_\mu X_\mu, \beta_\nu X_\nu] + \dots \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Como todo o lado direito deve ser proporcional a X_ρ , devemos ter $[\alpha_\mu X_\mu, \beta_\nu X_\nu] = \gamma_\rho X_\rho$. Sendo a expressão válida para qualquer α_μ e β_ν , segue que $\gamma_\rho = \alpha_\mu \beta_\nu f_{\mu\nu\rho}$ e, assim, finalmente temos

$$[X_\mu, X_\nu] = i f_{\mu\nu\rho} X_\rho. \quad (1.3.5)$$

Essa relação, com dados $f_{\mu\nu\rho}$, junto à identidade de Jacobi, $[X_\mu, [X_\nu, X_\rho]] + [X_\rho, [X_\mu, X_\nu]] + [X_\nu, [X_\rho, X_\mu]] = 0$, definem uma *Lie algebra*. A vantagem de se trabalhar com álgebras de Lie consiste no fato dessas serem espaços vetoriais enquanto o grupo, em geral, não o é. No entanto a álgebra de Lie pode não conter todas as informações relevantes sobre o grupo e é possível que grupos distintos possuam a mesma álgebra de Lie.

1.3.2 Representações definidoras das álgebras de Lie clássicas

Álgebras de Lie já foram estudadas por mais de um século e a classificação delas assim como o estudo das diversas representações já foi feito até a quase exaustão. Recomendamos [43] para uma introdução ao assunto. Aqui vamos nos conter a apresentar algumas representações para as álgebras de Lie conhecidas como clássicas.

Considere um espaço vetorial real V com norma $N(a) = a^T a$ ($a \in V$) e dimensão n . A transformação R que deixa a norma N invariante deve satisfazer $R^T R = \mathbb{I}$, ou seja, $\det R = \pm 1$. Essa condição define uma representação do grupo $O(n)$ (grupo ortogonal de ordem n). Ao nos restringirmos à condição $\det R = 1$, temos o grupo $SO(n)$ (grupo ortogonal especial de ordem n). Agora podemos escrever $R = e^{i\alpha_{ij} X_{ij}}$ e haverá $n(n-1)/2$ parâmetros independentes, isto é, teremos $n(n-1)/2$ geradores X_{ij} na álgebra de Lie. Tais geradores são

$$(X_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.3.6)$$

e a álgebra Lie $so(n)$ tem, portanto, as relações de comutação

$$[X_{ij}, X_{kl}] = -i(\delta_{jk}X_{il} + \delta_{il}X_{jk} - \delta_{jl}X_{ik} - \delta_{ik}X_{jl}). \quad (1.3.7)$$

A álgebra $so(2n+1)$ também pode ser denotada como B_n e $so(2n)$ como D_n .

como *raízes* da álgebra. $N_{\alpha\beta}$ depende da álgebra e é nulo caso $\alpha + \beta$ não seja uma raiz. A subálgebra gerada por $\{H_i\}$ é chamada *subálgebra de Cartan* e os geradores E_α por vezes podem ser chamados de raízes, embora, mais precisamente, as raízes sejam os α 's. Essa base para álgebras de Lie simples é conhecida como *base de Cartan-Weyl*.

1.3.4 Superálgebras de Lie básicas

No contexto de teoria quântica de campos em 3+1 dimensões, a simetria de uma teoria comumente consiste do produtor entre a simetria do espaço-tempo com a simetria interna, sendo a simetria do espaço-tempo relacionada com representações do grupo de Poincaré. Em termos de álgebras de Lie, a álgebra de Lie resultante é uma soma direta entre a álgebra de Poicaré e a álgebra da simetria interna. Uma questão interessante de ser investigada seria a da possibilidade de ampliar a álgebra de Poincaré de forma a englobar a simetria interna numa única estrutura algébrica e, de certa forma, unificar a simetria interna com a do espaço-tempo. Em 1967 Sidney Coleman e Jeffrey Mandula investigaram tal questão e demonstraram que não é possível adicionar geradores à álgebra de Poicaré a não ser trivialmente, ou seja, comutando com toda a álgebra [45]. No entanto em 1975 Rudolf Haag, Martin Sohnius e Jan T. Lopuszański mostraram que as implicações do teorema de Coleman–Mandula podem ser evitadas ao introduzirmos o conceito de superálgebra de Lie [46].

Como ficará claro ao longo desse texto, o conceito de supersimetria não precisa se restringir à física de partículas elementares. Com efeito, apresentaremos nos capítulos seguintes sistemas quânticos com tal tipo de simetria e, além disso, há também aplicações em matéria condensada [47].

Enfim definamos superálgebra de Lie. Uma superálgebra de Lie é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -gradada \mathcal{G} sobre um corpo \mathbb{K} (geralmente \mathbb{R} ou \mathbb{C}) que também é um espaço vetorial que pode ser escrito como a soma direta dos subespaços \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_1 onde o produto $[\cdot, \cdot]$ possui as seguintes propriedades (veja [44]):

i) gradação \mathbb{Z}_2 :

$$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \quad (1.3.12)$$

ii) antisimetria gradada:

$$[A, B] = -(-1)^{\deg A \deg B} [B, A], \quad A, B \in \mathcal{G}, \quad (1.3.13)$$

onde $\deg A = 0$ se $A \in \mathcal{G}_0$ e $\deg A = 1$ se $A \in \mathcal{G}_1$. \mathcal{G}_0 é chamado de *espaço par* ou de *espaço bosônico* da superálgebra e \mathcal{G}_1 é chamado de *espaço ímpar* ou de *espaço fermiônico* da superálgebra;

iii) identidade de Jacobi generalizada:

$$(-1)^{\deg A \deg C} [A, [B, C]] + (-1)^{\deg B \deg A} [B, [C, A]] + (-1)^{\deg C \deg B} [C, [A, B]] = 0. \quad (1.3.14)$$

Veja que \mathcal{G}_0 é uma álgebra de Lie por si só. Outra observação importante é que a ação de \mathcal{G}_0 sobre \mathcal{G}_1 pelo produto definido é uma representação de \mathcal{G}_0 .

Comumente as representações de uma superálgebra são obtida através do comutador gradado

$$[A, B] = AB - (-1)^{\deg A \deg B} BA, \quad A, B \in \mathcal{G}. \quad (1.3.15)$$

Ao longo do presente texto, todas as superálgebras de Lie utilizadas são ditas *básicas*. Elas são classificadas como $A(m, n)$, $B(m, n)$, $C(n)$, $D(m, n)$, $F(4)$, $G(3)$ e $D(2, 1; \alpha)$. As últimas três são chamadas de *superálgebras excepcionais* e estão relacionadas com os quatérnions ($D(2, 1; \alpha)$) ou octônions ($F(4)$ e $G(3)$). A subálgebra bosônica de cada uma delas é apresentada na tabela abaixo

Superálgebra	Subálgebra bosônica
$A(m, n)$	$A_m \oplus A_n \oplus so(2)$
$A(n, n)$	$A_n \oplus A_n$
$B(m, n)$	$B_m \oplus C_n$
$C(n+1)$	$C_n \oplus so(2)$
$D(m, n)$	$D_m \oplus C_n$
$F(4)$	$A_1 \oplus B_3$
$G(3)$	$A_1 \oplus g_2$
$D(2, 1; \alpha)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$

É importante ressaltar que $D(2, 1; \alpha)$ é uma coleção de superálgebras com diferentes superálgebras para cada α ($\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1\}$) a menos de isomorfismos, como se verá logo abaixo. Apresentaremos no Capítulo 3 um sistema quântico com tal simetria onde o parâmetro α se mostra relacionado com a energia de vácuo da teoria.

$A(m, n)$ ($m \neq n$) também pode ser referido como $sl(m+1|n+1)$ e $A(n, n) = sl(n+1|n+1)/Z$, onde Z é o centro da álgebra. Para as demais superálgebras temos $B(m, n) = osp(2m+1|2n)$, $C(n) = osp(2|2n)$ e $D(m, n) = osp(2m|2n)$.

1.3.5 Propriedades básicas de $D(2, 1; \alpha)$

No Capítulo 3 serão apresentados sistemas quânticos com simetria $D(2, 1; \alpha)$ e é pertinente dar uma pincelada sobre algumas de suas propriedades.

Como já dito, a superálgebra excepcional $D(2, 1; \alpha)$ é uma coleção de superálgebras em que se tem superálgebras diferentes para cada $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1\}$ a menos de isomorfismos. Seu setor bosônico \mathcal{G}_0 é constituído pela soma direta de três subálgebras $sl(2)$, ou seja,

$$\mathcal{G}_0 = sl(2) \oplus sl(2) \oplus sl(2). \quad (1.3.16)$$

As três subálgebras $sl(2)$ podem ser permutadas e, como consequência disso, há uma simetria S_3 (grupo de permutação de três elementos) no parâmetro α ; dois dos geradores de S_3 são expressos pelas transformações $\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \mapsto -(1+\alpha)$. Uma órbita de S_3 é dada pelos elementos

$$\left\{ \alpha, \frac{1}{\alpha}, -(1+\alpha), -\frac{1}{(1+\alpha)}, -\frac{(1+\alpha)}{\alpha}, -\frac{\alpha}{(1+\alpha)} \right\}. \quad (1.3.17)$$

$D(2, 1; \alpha)$ e $D(2, 1; \alpha')$ serão isomorfas se α e α' pertencerem à mesma órbita de S_3 .

Para os valores especiais

$$\alpha = -2, -\frac{1}{2}, 1 \quad (1.3.18)$$

temos a superálgebra $D(2, 1) \sim osp(4|2)$.

Podemos também ter superálgebras bem definidas para $\alpha = 0, -1$, mas nesse caso teremos $A(1, 1) \oplus sl(2)$, que não é mais uma superálgebra simples.

Devido à hermiticidade dos Hamiltonianos, nosso interesse estará restrito a $\alpha \in \mathbb{R}$ e, assim, teremos seis domínios fundamentais dados pela simetria S_3 [23]:

$$\begin{aligned}
 FD_1: & \quad -\infty < \alpha \leq -2, \\
 FD_2: & \quad -2 \leq \alpha < -1, \\
 FD_3: & \quad -1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}, \\
 FD_4: & \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha < 0, \\
 FD_5: & \quad 0 < \alpha \leq 1, \\
 FD_6: & \quad 1 \leq \alpha < \infty.
 \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

1.3.6 Álgebras superconformes em uma dimensão

Logo vamos estudar alguns sistemas superconformes em uma dimensão, os quais relacionados a certas superálgebras de Lie básicas, e algumas propriedades são universais a todas as álgebras superconformes finitas.

O conjunto de álgebras superconformes finitas em uma dimensão é uma subclasse das superálgebras finitas na classificação de Kac [44, 48] satisfazendo as condições a seguir [49]. Qualquer superálgebra de Lie sobre \mathbb{C} pode ser decomposta de tal forma que

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{G}_1 \tag{1.3.20}$$

e os (anti)comutadores satisfaçam

$$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}. \tag{1.3.21}$$

O setor bosônico $\mathcal{G}_{\bar{0}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ é isomorfo a $sl(2) \oplus R$, onde R é uma álgebra de Lie e, na linguagem de simetrias conformes, é conhecida como R-simetria. Já $sl(2)$ será a álgebra conforme em uma dimensão

O setor fermiônico $\mathcal{G}_{\bar{1}} = \mathcal{G}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ é gerado por $2\mathcal{N}$ geradores e as álgebras superconformes podem ser etiquetadas por \mathcal{N} .

O setor positivo, $\mathcal{G}_{>0}$, é isomorfo à Mecânica Quântica Supersimétrica \mathcal{N} -extendida (veja [50]) definida pelos (anti)comutadores

$$\{Q_I, Q_J\} = 2\delta_{IJ}H, \quad [H, Q_I] = 0, \quad I, J = 1, \dots, \mathcal{N}. \tag{1.3.22}$$

O gerador H é uma raiz positiva de $sl(2)$. O elemento de Cartan de $sl(2)$ e a raiz negativa são denotados D, K , respectivamente. O setor negativo, $\mathcal{G}_{<0}$, satisfaz as relações

$$\{\tilde{Q}_I, \tilde{Q}_J\} = 2\delta_{IJ}K, \quad [K, \tilde{Q}_I] = 0, \quad I, J = 1, \dots, \mathcal{N}. \tag{1.3.23}$$

O setor \mathcal{G}_1 (\mathcal{G}_{-1}) é gerado por H (K), o setor $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ ($\mathcal{G}_{-\frac{1}{2}}$) é gerado por Q_I (\tilde{Q}_I) e, finalmente, o setor \mathcal{G}_0 é gerado por $\mathcal{G}_0 = DC \oplus R$.

A lista completa de álgebras superconformes em uma dimensão com $\mathcal{N} \leq 8$ é apresentada em [49].

1.4 SUSY em uma dimensão e representações D-modulares

Supersimetria (SUSY), como normalmente concebida, acontece quando os geradores de simetria da teoria fecham uma superálgebra e existe ao menos um operador raiz quadrada do operador de translação temporal. Ou seja, existe ao menos um operador Q tal que $Q^2 = i\partial_t$. Em sistemas

quânticos com Hamiltoniano H , isso significa $H = Q^2$ para algum Q . Fica claro que nesse caso imediatamente temos $[H, Q] = 0$ e, assim, se $H\psi = E\psi$, com E sendo a energia e ψ um outoestado, teremos $HQ\psi = EQ\psi$. $Q\psi$ pode eventualmente ser referido como o parceiro supersimétrico de ψ .

Mais precisamente, para termos SUSY \mathcal{N} -extendida em uma dimensão devemos ter um conjunto de operadores Q_i ($i = 1, \dots, \mathcal{N}$) de forma que

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij}H. \quad (1.4.1)$$

A similaridade entre essa relação e a das álgebras de Clifford (1.2.1) pode ser imediatamente notada e, de fato, álgebras de Clifford desempenham um papel crucial na construção das representações de SUSY \mathcal{N} -extendida. Nosso objetivo aqui é mostrar como as representações D-modulares são construídas e como a ação invariante é obtida.

Para encontrar as mencionadas representações, comecemos com a irrep de $Cl(2, 1)$ obtida em (1.2.4). Ficaremos apenas com a matriz anti-diagonal Y , a qual define uma representação de $Cl(1, 0)$, e com ela vamos definir o operador

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.2)$$

De imediato se tem $Q^2 = i\partial_t = H$ e, dessa forma, já temos uma irrep de $\mathcal{N} = 1$ SUSY. Mas ainda não definimos sobre o que tais operadores agem. As operações Q e $H = Q^2$ agem sobre os campos da teoria. tais campos podem ser classificados como *bosônicos*, se são funções reais ou complexas, ou *fermiônicos* caso sejam variáveis de Grassmann. A representação dada por (1.4.2) age sobre um par de campos clássicos dispostos numa matriz coluna, $\begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$, onde $x(t)$ é uma função real e $\psi(t)$ é uma variável de Grassmann. Esse conjunto de campos é chamado de *supermultiplet* e uma teoria supersimétrica sempre terá um igual número de campos bosônicos e fermiônicos. Porém devemos alertar que alguns desses campos podem ser auxiliares e não possuem termo cinético no Lagrangiano. Por exemplo, outra irrep possível de $\mathcal{N} = 1$ SUSY é definida por

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & i\partial_t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Novamente os campos são dispostos na matriz coluna $\begin{pmatrix} g(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ com $g(t)$ sendo o campo bosônico e $\psi(t)$ o fermiônico, mas aqui, ao se construir a ação invariante, se notará a ausência de termo cinético para $g(t)$. A representação definida por Q é com frequência denotada por $(1, 1, 0)$, que se lê “um campo bosônico propagante, um campo fermiônico e zero campos bosônicos auxiliares”, e a definida por Q' é referida como $(0, 1, 1)$, que se lê “zero campos bosônicos propagantes, Um campo fermiônico e um campo bosônico auxiliar”. Todos os supermultipletos apresentados no presente texto possuem a forma $(\mathcal{N} - k, \mathcal{N}, k)$, onde \mathcal{N} é o número de supersimetrias extendidas e $k \leq \mathcal{N}$ é o número de campos bosônicos auxiliares.

Podemos representar as ações de Q e Q' sobre os campos através de diagramas conhecidos como *adinkras* e isso é feito na Figura 1.4.1. Até o presente momento, os casos expostos possuem diagramas bastante simples, mas um exemplo menos trivial pode ilustrar o quanto esses diagramas podem ajudar na visualização de supersimetrias.

Retornemos à irrep de $Cl(2, 1)$ apresentada em (1.2.4) e apliquemos o algoritmo (1.2.3), obtendo uma irrep de $Cl(3, 2)$. Agora peguemos apenas as matrizes bloco anti-diagonais cujo quadrado seja a identidade, ou seja,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.4)$$

Essas matrizes são uma representação de $Cl(2, 0)$ e com elas podemos construir uma representação de SUSY $\mathcal{N} = 2$ em uma dimensão da mesma forma como antes. I.e.

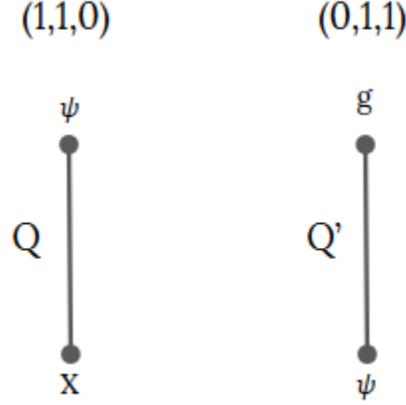


Figura 1.4.1: Adinkras das representações com supermultipletos $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. A ação de Q (Q') leva do campo abaixo para o de cima através da linha sólida.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -Ai\partial_t & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ Ii\partial_t & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.5)$$

Semelhantemente ao caso anterior, há outras possibilidades de representação e elas são

$$Q'_1 = \begin{pmatrix} 0 & Ai\partial_t \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q'_2 = \begin{pmatrix} 0 & Ii\partial_t \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

e

$$Q''_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i\partial_t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ i\partial_t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q''_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\partial_t \\ i\partial_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.7)$$

Em sequência, essas irrep agem sobre os supermultipletos $(2, 2, 0)$, $(0, 2, 2)$ e $(1, 2, 1)$. Na Figura 1.4.2, os adinkras dessas representações são apresentados e se torna claro como esses operadores agem sobre os campos.

Trataremos agora das ações invariantes. Para teorias em uma dimensão, o método de função pré-potencial é bastante eficaz e o adotaremos aqui. Primeiramente devemos observar que os operadores supersimétricos Q 's agem como derivadas sobre as funções e valem a regra da cadeia assim como a regra de Leibniz gradada. Por exemplo, no modelo $\mathcal{N} = 1$ $(1, 1, 0)$ temos $Qf(x) = (\partial_x f(x))Qx$, onde $f(x)$ é uma função arbitrária do campo x . O ponto principal é notar que uma ação da forma $\mathcal{S} = \int dt Qf(x, \psi)$ com Q sendo o operador supersimétrico e $f(x, \psi)$ uma função dos campos (podendo ser um conjunto deles e não apenas dois), é manifestamente invariante pela ação de Q . Com efeito, $\delta_Q \mathcal{S} = \int dt Q^2 f(x, \psi) = \int dt i\partial_t f(x, \psi) = 0$. Tomemos novamente $\mathcal{N} = 1$ $(1, 1, 0)$ como exemplo e iniciemos com o ansatz $L = Q(F(x)\psi)$. Realizando o cálculo, nós temos

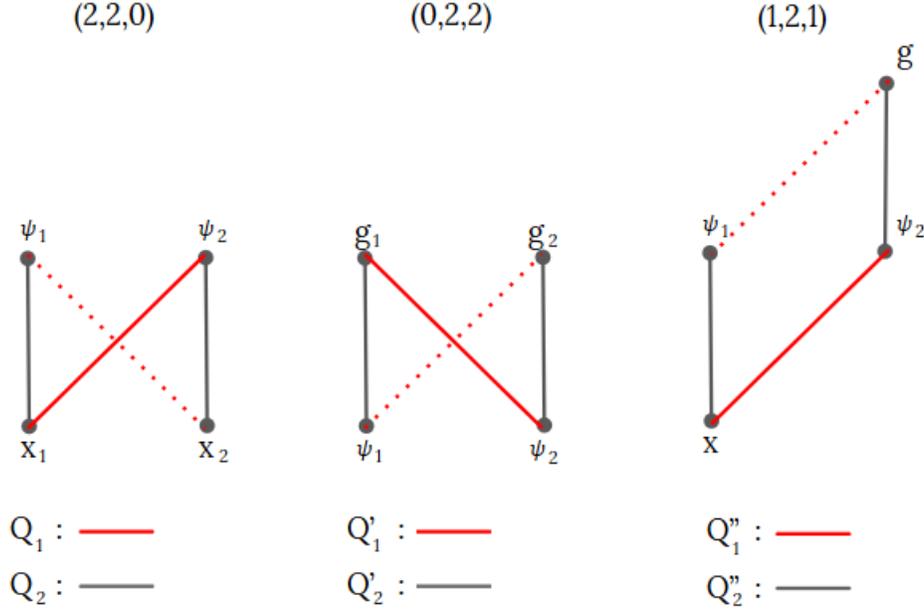


Figura 1.4.2: Adinkras para as representações com supermultipletos $(2, 2, 0)$, $(0, 2, 2)$ e $(1, 2, 1)$. Linhas sólidas indicam que a operação mantém o sinal enquanto as linhas pontilhadas indicam uma troca de sinal.

$$\begin{aligned}
 L &= (QF)\dot{\psi} + F\partial_t(Q\psi) \\
 &= F_x(Qx)\dot{\psi} - F\ddot{x} \\
 &= F_x i\psi\dot{\psi} - \partial_t(F\dot{x}) + F_x\dot{x}^2 \\
 &= F_x (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}) - \partial_t(F\dot{x}),
 \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

onde $F_x = \partial_x F$. Descartando a derivada total e definindo $F_x = A$, a ação se torna

$$\mathcal{S} = \int dt A (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}), \tag{1.4.9}$$

com $A(x)$ sendo uma função arbitrária. A ação de casos mais complexos e com mais supersimetrias podem ser construídas seguindo a mesma filosofia. Para uma exposição explícita de alguns desses casos, recomendamos [51].

1.5 Simetria superconforme em uma dimensão

Nosso interesse não é apenas que a ação seja supersimétrica, mas também invariante por transformações conformes. Transformações conformes entre subconjuntos de \mathbb{R}^n ou variedades diferenciáveis em geral são aquelas que preservam ângulos e sentidos localmente. Uma teoria física é invariante por transformações conformes se sua ação o for. Mas estamos tratando de sistemas unidimensionais (em termos de teoria de campos) e, dessa forma, esse conceito parece não se aplicar. Entretanto podemos estender o conceito de simetria conforme para uma dimensão tomando o subconjunto de geradores numa representação de dimensão maior que se aplica apenas a uma das dimensões. Para mais detalhes e uma extensa compilação de resultados para teorias conformes de campos, é recomendado [52].

A subálgebra de uma representação de dimensão maior que se aplica a apenas uma das suas dimensões é dada pelos geradores H , D e K , os quais geram a álgebra $sl(2)$ e possuem relações de comutação

$$[D, K] = iK, [D, H] = -iH, [H, K] = 2iD. \quad (1.5.1)$$

Para casos sem supersimetria e com apenas um campo, esses geradores podem ser escritos como

$$H = i\partial_t, D = ti\partial_t + i\lambda, K = t^2i\partial_t + 2i\lambda t \quad (1.5.2)$$

na representação parabólica e

$$H = ie^{-t}(\partial_t - \lambda), D = i\partial_t, K = ie^t(\partial_t + \lambda), \quad (1.5.3)$$

na representação hiperbólica. A representação trigonométrica é obtida substituindo t por it no último caso. I.e.

$$H = e^{-it}(\partial_t - i\lambda), D = \partial_t, K = e^{it}(\partial_t + i\lambda). \quad (1.5.4)$$

Essa última classe de representações será o nosso grande interesse nos capítulos por vir, pois os sistemas quânticos relacionadas a elas possuem funções de onda normalizáveis e níveis de energia discretos. Deve-se notar a presença do parâmetro λ . Esse é o parâmetro de escala do campo e será importante considerá-lo nos casos supersimétricos. Para mais detalhes sobre a classificação apresentada para as representações (parabólica, hiperbólica e trigonométrica), recomendamos [51].

Retornando para o caso supersimétrico, já sabemos que ele é invariante por $i\partial_t$ obviamente, mas agora devemos saber as condições para que o sistema também seja invariante pelo restante da simetria conforme. Tomemos $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0) como exemplo. Para o caso parabólico, precisamos adicionar os geradores D e K na álgebra. No entanto, como o campo fermiônico ψ é tal que $\psi = Qx$, se a dimensão de x é $[x] = \lambda$ e $[\partial_t] = 1$, nós temos $[Q] = 1/2$ e $[\psi] = \lambda + \frac{1}{2}$. Conclui-se que devemos ter $D = \text{diag}(t\partial_t + \lambda, t\partial_t + \lambda + 1/2)$ e $K = \text{diag}(t^2\partial_t + 2\lambda t, t^2\partial_t + 2(\lambda + 1/2)t)$ para que esses sejam consistentes com as dimensões dos campos. Mas K e D não são suficientes para fechar a álgebra pois pode-se verificar que $[Q, K] = \bar{Q}$, sendo \bar{Q} um novo operador fermiônico. Explicitemos esses operadores:

$$H = i \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad D = i \begin{pmatrix} t\partial_t - \lambda & 0 \\ 0 & t\partial_t - (\lambda + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad K = i \begin{pmatrix} t^2\partial_t + 2\lambda t & 0 \\ 0 & t^2\partial_t + (\lambda + \frac{1}{2})t \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ ti\partial_t + 2i\lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.5)$$

Esses geradores fecham a representação de uma superálgebra e tal é dada pelas relações de (anti)comutação

$$[D, K] = iK, [D, H] = -iH, [H, K] = 2iD$$

$$[H, \bar{Q}] = iQ, [D, Q] = -i\frac{1}{2}Q, [D, \bar{Q}] = i\frac{1}{2}\bar{Q}, [K, Q] = -i\bar{Q}$$

$$\{Q, Q\} = 2H, \{Q, \bar{Q}\} = 2D, \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 2K. \quad (1.5.6)$$

Essa é a superálgebra $osp(1|2)$ e se trata da álgebra superconforme mais simples.

Expandimos a simetria e agora devemos descobrir quais restrições os novos geradores impõem sobre a ação. Temos três novos geradores, mas, desses três, precisamos apenas garantir a invariância da ação por K para que a ação seja superconforme, pois a invariância pelos outros geradores se torna um resultado algébrico. Tendo isso em mente, peguemos a ação (1.4.9) e apliquemos K .

$$\begin{aligned}\delta_K \mathcal{S} &= \int dt K A (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}) \\ &= \int dt \left[A_x (Kx) (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}) + Ai \left(2\partial_t (Kx) + i\psi\partial_t (K\psi) + i(K\psi)\dot{\psi} \right) \right] \\ &= \int dt i \left[A_x (t^2\dot{x} + 2\lambda tx) (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}) + \right. \\ &\quad \left. A \left(2\dot{x}\partial_t (t^2\dot{x} + 2\lambda tx) + i\psi\partial_t \left(t^2\dot{\psi} + 2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) t\psi \right) + i \left(t^2\dot{\psi} + 2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) t\psi \right) \dot{\psi} \right) \right].\end{aligned}$$

Após alguns passos algébricos temos

$$\delta_K \mathcal{S} = \int dt i \left[2t\dot{x}^2 (\lambda A_x x + (1 + 2\lambda) A) + \dots \right] \quad (1.5.7)$$

A expressão destacada precisa se anular e isso ocorre se $A = x^{-\frac{1+2\lambda}{\lambda}}$ a menos de uma constante multiplicativa. Omitimos a parte fermiônica e eventuais derivadas totais, mas a equação que aparece com os campos fermiônicos é exatamente a mesma. O resultado na verdade não é uma surpresa e poderia ser sugerido por análise dimensional. A ação deve ter dimensão nula para ser invariante conforme e temos $[dt] = -1$. Assim, o Lagrangiano deve ter dimensão 1. Como $[x] = \lambda + 1$, temos $[A] = 1 - 2(\lambda + 1) = -(2\lambda + 1)$ e, portanto, $x^{-\frac{1+2\lambda}{\lambda}}$ satisfaz nossos requerimentos dimensionais. Enfim podemos escrever o Lagrangiano do modelo $\mathcal{N} = 1 (1, 1, 0)$ superconforme, o qual é

$$L = x^{-\frac{1+2\lambda}{\lambda}} (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}). \quad (1.5.8)$$

Concluimos o caso parabólico, mas ainda mais interessante para nós é o caso hiperbólico/trigonométrico. Podemos obter o caso hiperbólico a partir do parabólico ao fazermos a mudança $\tau = \ln t$ e uma translação de $-\lambda$ nas entradas não nulas dos operadores bosônicos. Ou seja, temos $\partial_t = \frac{1}{t}\partial_\tau = e^{-\tau}\partial_\tau$ e recuperamos (1.5.3) a partir de (1.5.2). O caso trigonométrico, que será nosso foco ao longo desse texto, é obtido, como anteriormente, com a mudança $\tau \rightarrow -i\tau$. Podemos então escrever a representação trigonométrica de $\mathcal{N} = 1 (1, 1, 0)$ (retornando para a notação “ t ” para o tempo) com os operadores

$$\begin{aligned}H &= e^{it} \begin{pmatrix} \partial_t - i\lambda & 0 \\ 0 & \partial_t - i(\lambda + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad K = e^{-it} \begin{pmatrix} \partial_t + i\lambda & 0 \\ 0 & \partial_t + i(\lambda + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \\ Q &= e^{\frac{it}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t - i\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = e^{-\frac{it}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t + i\lambda & 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \quad (1.5.9)$$

os quais fecham a mesma superálgebra do caso parabólico. É importante observar que não temos mais um operador raiz quadrada de $\mathbb{I}i\partial_t$ e isso significa que o modelo trigonométrico não é mais supersimétrico no sentido usual. Porém vamos introduzir no próximo capítulo a noção de supersimetria suave (soft supersymmetry) para classificar esses modelos. Pode-se verificar que a ação invariante desse modelo é

$$\mathcal{S} = \int dt \left(x^{-\frac{1+2\lambda}{\lambda}} (\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}) + \lambda^2 (x_i x_i)^{-\frac{1}{2\lambda}} \right). \quad (1.5.10)$$

Para referência futura vamos introduzir também os casos parabólico e trigonométrico de $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0). Nesse caso é melhor apresentarmos os operadores diretamente agindo sobre os campos, pois é mais compacto e até mais compreensível.

A representação D-modular parabólica de $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) é dada pelas transformações

$$\begin{aligned}
 L_n x_i &= t^n (\dot{x}_i + (n+1) \lambda x_i), & L_n \psi_i &= t^n (t \dot{\psi}_i + (n+1) \left(\frac{2\lambda+1}{2}\right) \psi_i), \quad n = 0, \pm 1; \\
 J x_i &= -\lambda \epsilon_{ij} x_j, & J \psi_i &= -\frac{2\lambda-1}{2} \epsilon_{ij} \psi_j, \\
 Q_{\pm}^1 x_i &= t^{\frac{1\pm 1}{2}} \epsilon_{ij} \psi_j, & Q_{\pm}^1 \psi_i &= -it^{\frac{1\pm 1}{2}} \epsilon_{ij} (\dot{x}_j + (1 \pm 1) \lambda x_j), \\
 Q_{\pm}^2 x_i &= t^{\frac{1\pm 1}{2}} \psi_i, & Q_{\pm}^2 \psi_i &= it^{\frac{1\pm 1}{2}} (\dot{x}_i + (1 \pm 1) \lambda x_i), \quad (1.5.11)
 \end{aligned}$$

onde x_i 's ($i = 1, 2$) são os campos bosônicos propagantes e ψ_i 's os campos fermiônicos. Essas transformações fecham a superálgebra $sl(2|1)$, cujas relações de (anti)comutação são

$$\begin{aligned}
 [L_n, L_m] &= i(m-n) L_{m+n}, \quad [L_0, Q_{\pm}^I] = \pm \frac{i}{2} Q_{\pm}^I, \quad [L_{\pm 1}, Q_{\mp}^I] = \mp i Q_{\pm}^I, \quad n = 0, \pm 1; \\
 [J, Q_{\pm}^I] &= \frac{i}{2} \epsilon_{IJ} Q_{\pm}^J, \quad \{Q_{\pm}^I, Q_{\pm}^J\} = 2\delta_{IJ} L_{\pm 1}, \quad \{Q_{\pm}^I, Q_{\mp}^J\} = 2\delta_{IJ} L_0 \pm 2\epsilon_{IJ} J. \quad (1.5.12)
 \end{aligned}$$

A ação invariante é obtida pelo mesmo metodo de pré-potencial e a obtemos definindo o lagrangiano $L = Q_{+}^2 Q_{+}^1 (\frac{1}{2} F \epsilon_{ij} \psi_i \psi_j)$ com os operadores Q_{+}^2, Q_{+}^1 agindo no pré-potencial F . Após passar pelo mesmo procedimento do caso $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0), pode-se concluir que $F = (x_i x_i)^{-\frac{2\lambda+1}{2\lambda}}$ e que a ação invariante é

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int dt (F(\dot{x}_i \dot{x}_i - i \dot{\psi}_i \psi_i) - i F_i \dot{x}_j \psi_i \psi_j), \quad (1.5.13)$$

onde $F_i = \partial_i F$. Já a representação D-modular trigonométrica de $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) é definida por

$$\begin{aligned}
 L_n x_i &= \frac{e^{-int}}{-i} (\dot{x}_i - in \lambda x_i), & L_n \psi_i &= \frac{e^{-int}}{-i} (\dot{\psi}_i - in \left(\frac{2\lambda+1}{2}\right) \psi_i), \quad n = 0, \pm 1; \\
 J x_i &= -\lambda \epsilon_{ij} x_j, & J \psi_i &= -\frac{2\lambda-1}{2} \epsilon_{ij} \psi_j, \\
 Q_{\pm}^1 x_i &= e^{\mp i \frac{1}{2} t} \epsilon_{ij} \psi_j, & Q_{\pm}^1 \psi_i &= \frac{e^{\mp i \frac{1}{2} t}}{i} \epsilon_{ij} (\dot{x}_j \mp i \lambda x_j), \\
 Q_{\pm}^2 x_i &= e^{\mp i \frac{1}{2} t} \psi_i, & Q_{\pm}^2 \psi_i &= \frac{e^{\mp i \frac{1}{2} t}}{-i} (\dot{x}_i \mp i \lambda x_i) \quad (1.5.14)
 \end{aligned}$$

e a ação invariante por essas transformações é

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int dt (F(\dot{x}_i \dot{x}_i - i \dot{\psi}_i \psi_i) - i F_i \dot{x}_j \psi_i \psi_j + \lambda^2 (x_i x_i)^{-\frac{1}{2\lambda}}). \quad (1.5.15)$$

Capítulo 2

Da Mecânica Superconforme Clássica Para a Quântica

Nesse capítulo iremos quantizar os modelos apresentados no capítulo anterior. A saber, os modelos parabólico e trigonométrico com simetrias $osp(1|2)$ e $sl(2|1)$. O procedimento será feito em detalhes para os casos com simetria $osp(1|2)$ e exploraremos com maiores detalhes os modelos quânticos com simetria $sl(2|1)$. No caso $sl(2|1)$, mostraremos que a suprálgebra é uma superálgebra geradora de espectro e construiremos o espaço de Hilbert através de representações de peso mínimo de $sl(2|1)$.

Os resultados aqui apresentados também podem ser encontrados em [31].

2.1 Base de termo cinético constante

Em termos de quantização, um problema que podemos notar imediatamente ao nos depararmos com os Lagrangianos do capítulo passado (veja (1.5.8), (1.5.13) e (1.5.15)) é o fato de o termo cinético deles ter a forma $\Phi(\vec{x})\frac{1}{2}\delta_{ij}(\dot{x}_i\dot{x}_j + \dots)$ com $\Phi(\vec{x})$ sendo uma função dos bósons propagantes. Precisamos absorver esse fator de maneira a deixar o termo cinético na forma usual e um caminho para se fazer isso é redefinindo os campos. A essa nova escolha dos campos chamaremos de *base de termo cinético constante* (veja [25]). No entanto a superálgebra nessa nova base em geral não mais será linearmente realizada. Ou seja, os operadores não poderão mais serem representados como matrizes da forma como fizemos até agora. A exceção para isso é $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0), como logo se verá.

Em [25] o procedimento foi feito para modelos com um campo bosônico propagante. Nosso objetivo é expandir o método para ao menos englobar modelos com dois campos bosônicos propagantes.

Consideremos a irrep D-modular de uma álgebra superconforme \mathcal{N} - extendida ($\mathcal{N} = 1, 2, 4, 8$, para nossos propósitos) agindo no supermultipleteo $(\mathcal{N} - k, \mathcal{N}, k)$ [20, 53, 54]. Na base em que os operadores são lineares, temos os campos bosônicos propagantes $x_1, \dots, x_{\mathcal{N}-k}$, os fermiônicos $\psi_1, \dots, \psi_{\mathcal{N}}$ e os bosônicos auxiliares b_1, \dots, b_k . O termo cinético do Lagrangiano será

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1+2\lambda}{\lambda}}(\dot{x}_m\dot{x}_m + i\psi_\beta\dot{\psi}_\beta - \omega^2 b_n b_n), \quad (2.1.1)$$

onde $r = (x_m x_m)^{\frac{1}{2}}$

Ao realizarmos a transformação para a base de termo cinético constante, teremos os campos bosônicos propagantes y_1, \dots, y_k , os fermiônicos $\chi_1, \dots, \chi_{\mathcal{N}-k}$ e os bosônicos auxiliares a_1, \dots, a_k . Caso a caso, as transformações para a mudança de base são:

- i) $(1, \mathcal{N}, \mathcal{N} - 1)$: as transformações são

$$y = -2\lambda x^{-\frac{1}{2\lambda}}, \quad \chi_\beta = x^{-\frac{1+2\lambda}{2\lambda}} \psi_\beta, \quad a_n = x^{-\frac{1+2\lambda}{2\lambda}} b_n \quad (2.1.2)$$

e o termo cinético (2.1.1) toma a forma

$$\frac{1}{2}(\dot{y}\dot{y} + i\omega\chi_\beta\dot{\chi}_\beta - \omega^2 a_n a_n); \quad (2.1.3)$$

ii) $(2, \mathcal{N}, \mathcal{N} - 2)$: as transformações são

$$y = -2\lambda(x_1 + ix_2)^{-\frac{1}{2\lambda}}, \quad y^* = -2\lambda(x_1 - ix_2)^{-\frac{1}{2\lambda}},$$

$$\chi_\beta = r^{-\frac{1+2\lambda}{2\lambda}} \psi_\beta, \quad a_n = r^{-\frac{1+2\lambda}{2\lambda}} b_n, \quad (2.1.4)$$

e o termo cinético fica expresso como

$$\frac{1}{2}(\dot{y}\dot{y}^* + i\omega\chi_\beta\dot{\chi}_\beta - \omega^2 a_n a_n); \quad (2.1.5)$$

iii) $(\mathcal{N} - k, \mathcal{N}, k)$, $\mathcal{N} - k > 2$: a tentativa de solução para números maiores de campos bosônicos propagantes leva a sistemas de equações diferenciais acopladas não lineares bastante complexos e apenas um caso não trivial é claro de se obter solução, a saber, para $\lambda = 1/2$. Para esse caso temos

$$y_m = \frac{x_m}{r^2}, \quad \chi_\beta = \frac{\psi_\beta}{r^2}, \quad a_n = \frac{b_n}{r^2}, \quad (2.1.6)$$

nos levando a ter o termo cinético

$$\frac{1}{2}(\dot{y}_m\dot{y}_m + i\omega\chi_\beta\dot{\chi}_\beta - \omega^2 a_n a_n). \quad (2.1.7)$$

2.2 Do Lagrangiano ao Hamiltoniano clássico

Tendo o Lagrangiano clássico do modelo σ superconforme unidimensional, o procedimento para a quantização canônica se dá pela passagem para o formalismo hamiltoniano e então a realização da quantização. Aqui vamos nos dedicar a fazer o primeiro passo, ou seja, passar os Lagrangianos para o formalismo Hamiltoniano. Embora normalmente isso seja simples, pode-se notar em (2.1.3), (2.1.5) e (2.1.7) que há dependência linear em relação a $\dot{\chi}_\beta$ nos Lagrangianos e isso nos levará a vínculos no formalismo hamiltoniano que nos forçarão a utilizar o método de Dirac para sistemas vinculados [55]. Na linguagem de Dirac, os vínculos que irão aparecer são ditos *primários* (aparecem mesmo sem as equações de movimento) e de *segunda classe* (possuem parênteses de Poisson não nulo com pelo menos um dos vínculos).

Para ilustrar o procedimento, vamos fazê-lo para o caso mais simples, o qual já apresentado no capítulo passado, que é o $\mathcal{N} = 1$ $(1, 1, 0)$, tanto para o modelo parabólico como trigonométrico (o modelo hiperbólico não possui potencial limitado inferiormente e vamos deixá-lo de lado).

2.2.1 Modelo parabólico $\mathcal{N} = 1$ $(1, 1, 0)$

Tomando o Lagrangiano (1.5.8), queremos deixá-lo na base de termo cinético constante, mas logo se percebe que isso é, na verdade, equivalente a escolher $\lambda = -\frac{1}{2}$. Ou seja, continuamos a ter uma representação linear da álgebra superconforme, e ela é dada por

$$\begin{aligned}
 H &= i \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad D = i \begin{pmatrix} t\partial_t - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t\partial_t \end{pmatrix}, \quad K = i \begin{pmatrix} t^2\partial_t - t & 0 \\ 0 & t^2\partial_t \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ it\partial_t - i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Já a ação terá a forma

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int dt \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + i\chi\dot{\chi}). \tag{2.2.2}$$

Agora nos preocuparemos em obter as cargas conservadas dessa ação. Para tanto devemos introduzir o teorema de Noether, o qual nos diz que, dado um operador de simetria O a carga conservada associada a ele deve ser dada por

$$C_O = (\delta_O \phi_I) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_I} - J_O, \tag{2.2.3}$$

onde J_O vem da variação $\delta_O L = \frac{dJ_O}{dt}$ e ϕ_I engloba todos os campos da teoria, sejam bosônicos ou fermiônicos. A ordem dos fatores no lado direito de (2.2.3) é essencial e deve ser mantida, pois estamos lidando também com variáveis e derivadas de Grassmann.

Utilizando (2.2.3) para cada operador da superálgebra (2.2.1) temos as cargas conservadas

$$C_H = \frac{\dot{y}^2}{2}, \quad C_D = \frac{t\dot{y}^2}{2} - \frac{y\dot{y}}{2}, \quad C_K = \frac{t^2\dot{y}^2}{2} - t\dot{y}y + \frac{y^2}{2}, \quad C_Q = \dot{y}\chi, \quad C_{\bar{Q}} = t\dot{y}\chi + y\chi. \tag{2.2.4}$$

Já a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \tag{2.2.5}$$

nos dão as equações de movimento

$$\ddot{y} = 0, \quad \dot{\chi} = 0. \tag{2.2.6}$$

Vê-se que χ não tem papel físico aqui a não ser de garantir a invariância por $osp(1|2)$.

Agora podemos introduzir os momentos conjugados do formalismo Hamiltoniano,

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} = -\frac{i\chi}{2}, \tag{2.2.7}$$

e reescrever as cargas (2.2.4) em termos dessas novas variáveis. Ou seja,

$$C_H = \frac{p^2}{2}, \quad C_D = \frac{tp^2}{2} - \frac{yp}{2}, \quad C_K = \frac{t^2p^2}{2} - t\dot{y}p + \frac{y^2}{2}, \quad C_Q = p\chi, \quad C_{\bar{Q}} = tp\chi + y\chi. \tag{2.2.8}$$

O último passo requer a definição dos parênteses de Dirac. Em (2.2.7) nota-se que o momento conjugado π de χ não é uma função inversível da velocidade $\dot{\chi}$. Dessa forma, a segunda equação em (2.2.7) nos dará um vínculo de segunda classe no espaço de fase, o qual é

$$u = \pi + \frac{i\chi}{2}. \tag{2.2.9}$$

Mas antes de introduzir os parênteses de Dirac devemos introduzir os super-parênteses de Poisson, pois estamos lidando com variáveis de Grassmann. Para funções f, g reais, complexas ou variáveis de Grassmann, os super-parênteses de Poisson são

$$\{f, g\}_P = \sum_I (-1)^{\deg(f) \cdot \deg(g)} \frac{\partial f}{\partial \phi_I} \frac{\partial g}{\partial \pi_I} - \frac{\partial f}{\partial \pi_I} \frac{\partial g}{\partial \phi_I}, \quad (2.2.10)$$

onde \deg é 0 se a função é real ou complexa e 1 caso seja uma variável de Grassmann.

Enfim podemos definir os parênteses de Dirac. Dado o conjunto u_i de vínculos de segunda classe, os parênteses de Dirac são definidos como

$$\{f, g\}_D = \{f, g\}_P - \sum_{k,l} \{f, u_k\}_P U_{kl}^{-1} \{u_l, g\}_P, \quad (2.2.11)$$

onde $U_{kl} = \{u_k, u_l\}_P$ é a matriz obtida pelos super-parênteses de Poisson entre todos os vínculos de segunda classe.

u é um vínculo de segunda classe, pois

$$\{u, u\}_P = -i. \quad (2.2.12)$$

Enfim os parênteses de Dirac não nulos entre as variáveis canônicas são

$$\{y, p\}_D = 1, \quad \{\chi, \chi\}_D = -i. \quad (2.2.13)$$

Com os parênteses de Dirac é possível recuperar as equações de movimento e, além disso, ao tomarmos os parênteses de Dirac entre todas as cargas conservadas em (2.2.8), também podemos obter uma nova representação da superálgebra $osp(1|2)$.

2.2.2 Modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 1 (1, 1, 0)$

O caso trigonométrico é inteiramente análogo ao caso parabólico e, portanto, vamos evitar nos repetir.

Tomando o Lagrangiano em (1.5.10) e pondo na base de termo cinético constante, novamente isso será equivalente a escolher $\lambda = -\frac{1}{2}$ e, assim ainda temos uma representação linear de $osp(1|2)$, a qual dada pelos geradores

$$\begin{aligned} H &= e^{it} \begin{pmatrix} \partial_t + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \quad K = e^{-it} \begin{pmatrix} \partial_t - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix}, \\ Q &= e^{\frac{it}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t + \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = e^{-\frac{it}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t - \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Nesse caso, a ação invariante é

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int dt \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + i\chi\dot{\chi} - \frac{1}{8}y^2), \quad (2.2.15)$$

as cargas conservadas são dadas por

$$\begin{aligned} C_H &= e^{it} \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{i}{2} y \dot{y} - \frac{1}{8} y^2 \right), \quad C_D = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{8} y^2, \quad C_K = e^{-it} \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{i}{2} y \dot{y} - \frac{1}{8} y^2 \right), \\ C_Q &= e^{\frac{it}{2}} \left(\dot{y} \chi - \frac{i}{2} y \chi \right), \quad C_{\bar{Q}} = e^{-\frac{it}{2}} \left(\dot{y} \chi + \frac{i}{2} y \chi \right) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

e as equações de movimento são

$$\ddot{y} = -\frac{y}{4}, \quad \dot{\chi} = 0. \quad (2.2.17)$$

Agora temos os momentos conjugados

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} = -\frac{i\chi}{2} \quad (2.2.18)$$

e, assim, as cargas conservadas (2.2.16) podem ser expressas como

$$\begin{aligned} C_H &= e^{it} \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{i}{2} yp - \frac{1}{8} y^2 \right), \quad C_D = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} y^2, \quad C_K = e^{-it} \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{i}{2} yp - \frac{1}{8} y^2 \right), \\ C_Q &= e^{\frac{i}{2}t} (p\chi - \frac{i}{2}y\chi), \quad C_{\bar{Q}} = e^{-\frac{i}{2}t} (p\chi + \frac{i}{2}y\chi). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

A segunda equação em (2.2.18) nos dá o vínculo de segunda classe

$$u = \pi + \frac{i\chi}{2}, \quad (2.2.20)$$

e os parênteses de Dirac não nulos são

$$\{y, p\}_D = 1, \quad \{\chi, \chi\}_D = -i. \quad (2.2.21)$$

2.3 Quantização canônica

A quantização canônica é realizada pela troca dos parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas A e B por (anti)comutadores entre os operadores A e B correspondentes a essas variáveis. Ou seja,

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B], \quad (2.3.1)$$

onde $[A, B]$ é o anticomutador gradado e herda a mesma simetria do parênteses de Dirac correspondente. Ao aplicarmos (2.3.1) a (2.2.13) e (2.2.21) vamos ter, respectivamente, a quantização dos modelos parabólico e trigonométrico com simetria $osp(1|2)$.

2.3.1 Caso parabólico

De (2.3.1) obtemos os (anti)comutadores

$$[\hat{y}, \hat{p}] = i\hbar, \quad \{\hat{\chi}, \hat{\chi}\} = \hbar. \quad (2.3.2)$$

Na representação de posição, esses operadores tomam a forma

$$\hat{y} = y, \quad \hat{p} = -i\hbar \partial_y, \quad \hat{\chi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}. \quad (2.3.3)$$

Algo que deve ser observado em (2.3.2) é o fato do campo fermiônico χ não ser mais uma variável de Grassmann, mas sim um gerador de álgebra de Clifford. Isso é uma característica geral da

quantização das variáveis de Grassmann e, embora não no presente caso, também leva a correções quânticas do Hamiltoniano.

A escolha feita em (2.3.3) de representar $\hat{\chi}$ como número real não é única e uma outra escolha possível, a qual respeitando a gradação \mathbb{Z}_2 no espaço vetorial onde a superálgebra age, consistiria em escolher \hat{y}, \hat{p} e $\hat{\chi}$ como

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \hat{p} = \begin{pmatrix} -i\hbar\partial_y & 0 \\ 0 & -i\hbar\partial_y \end{pmatrix}, \hat{\chi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.4)$$

onde N_f é o operador de paridade fermiônica. Isso ilustra como nem sempre o espaço vetorial onde a superálgebra age precisa ter a gradação \mathbb{Z}_2 . Ambas as escolhas (2.3.3) e (2.3.4) são consistentes e a escolha entre as possíveis representações da álgebra de Clifford definida em (2.3.2) dependerá do sistema físico que se pretende descrever.

A quantização das cargas clássicas (2.3.1) nos leva à representação parabólica quântica da superálgebra $osp(1|2)$ com (anti)comutadores não nulos

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{D}] &= i\hbar\hat{H}, [\hat{H}, \hat{K}] = 2i\hbar\hat{D}, [\hat{K}, \hat{D}] = -i\hbar\hat{K} \\ [\hat{H}, \hat{Q}] &= i\hbar\hat{Q}, [\hat{K}, \hat{Q}] = -i\hbar\hat{Q}, [\hat{Q}, \hat{D}] = \frac{i\hbar}{2}\hat{Q}, [\hat{Q}, \hat{D}] = -\frac{i\hbar}{2}\hat{Q}, \\ \{\hat{Q}, \hat{Q}\} &= 2\hbar\hat{H}, \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 2\hbar\hat{D}, \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 2\hbar\hat{K} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

e operadores representados como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\hat{p}^2, \hat{D} = \frac{t}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{4}(\hat{y}\hat{p} + \hat{p}\hat{y}), \hat{K} = \frac{t^2}{2}\hat{p}^2 - \frac{t}{2}(\hat{y}\hat{p} + \hat{p}\hat{y}) + \frac{1}{2}\hat{y}^2, \\ \hat{Q} &= \hat{\chi}\hat{p}, \hat{Q} = t\hat{\chi}\hat{p} - \hat{y}\hat{\chi}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Os operadores têm a mesma forma dos clássicos a menos de simetrização, mas, como já mencionado, isso não é geral e mais adiante veremos o caso $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) e esse possui correções quânticas nos operadores. Isso se deve ao fato de $\mathcal{N} = 1$ (1, 1, 0) ter sua base de termo cinético constante obtida por uma escolha particular de λ ao invés de uma transformação que leve a um Lagrangiano novo com dependência em λ , mas onde a álgebra superconforme age não linearmente.

O Hamiltoniano \hat{H} em (2.3.6) corresponde ao de uma partícula livre em uma dimensão e é o elemento de Cartan da álgebra. Os operadores $\hat{H}, \hat{D}, \hat{K}$ fecham a simetria bosônica $sl(2)$ e \hat{H} junto a \hat{Q} nos dão a supersimetria $\mathcal{N} = 1$ do sistema. Em termos de (2.3.3), a representação do modelo não possui graus de liberdade fermiônicos, mas não é mais o caso se escolhêssemos a representação definida por (2.3.4).

2.3.2 Caso trigonométrico

A quantização do caso trigonométrico segue exatamente os mesmos passos da do parabólico e os operadores $\hat{y}, \hat{p}, \hat{\chi}$ serão os mesmos. Com isso em mente, expressemos os operadores quânticos obtidos pela quantização da contraparte clássica apresentada em (2.2.19). Eles são

$$\begin{aligned} \hat{H} &= e^{it}\left(\frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{i}{4}(\hat{y}\hat{p} + \hat{p}\hat{y}) - \frac{1}{8}\hat{y}^2\right), \hat{K} = e^{-it}\left(\frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{i}{4}(\hat{y}\hat{p} + \hat{p}\hat{y}) - \frac{1}{8}\hat{y}^2\right), \\ \hat{D} &= \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{8}\hat{y}^2, \hat{Q} = e^{\frac{it}{2}}(\hat{\chi}\hat{p} - \frac{i}{2}\hat{\chi}\hat{y}), \hat{Q} = e^{-\frac{it}{2}}(\hat{\chi}\hat{p} + \frac{i}{2}\hat{\chi}\hat{y}). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Devemos alertar que o Hamiltoniano agora não é dado por \hat{H} , mas por \hat{D} e que, como logo se nota, esse é o Hamiltoniano do oscilador quântico unidimensional. (2.3.7) novamente define uma representação de $osp(1|2)$, a qual dada por

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{D}] &= \hbar\hat{H}, [\hat{H}, \hat{K}] = 2\hbar\hat{D}, [\hat{K}, \hat{D}] = -\hbar\hat{K}, \\ [\hat{H}, \hat{Q}] &= \hbar\hat{Q}, [\hat{K}, \hat{Q}] = -\hbar\hat{Q}, [\hat{Q}, \hat{D}] = \frac{\hbar}{2}\hat{Q}, [\hat{Q}, \hat{D}] = -\frac{\hbar}{2}\hat{Q}, \\ \{\hat{Q}, \hat{Q}\} &= 2\hbar\hat{H}, \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 2\hbar\hat{D}, \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 2\hbar\hat{K}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Algo que deve ser notado aqui é que agora o Hamiltoniano não é mais um elemento de Cartan da álgebra, mas sim uma raiz positiva. Além disso, é fácil averiguar que, sendo $\hat{\chi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}$, os operadores \hat{Q} e \hat{Q} definidos em (2.3.7) se reduzem aos operadores de criação e aniquilação usuais do oscilador harmônico unidimensional e, portanto, podemos dizer que o oscilador quântico unidimensional tem superálgebra geradora de espectro $osp(1|2)$. Ainda iremos dizer que o sistema é superconforme, mas a supersimetria nesse caso não é no sentido usual, já que não temos $\hat{Q}^2 = \hat{D}$. Mais adiante introduziremos a noção de supersimetria suave (soft supersymmetry), onde esse modelo se encaixará. Com isso podemos encerrar a análise desse exemplo.

2.4 Mecânica quântica superconforme em duas dimensões com simetria $sl(2|1)$

Agora apresentaremos os modelos quânticos providos pela quantização das ações (1.5.13) e (1.5.15), as quais possuem simetria $sl(2|1)$. O processo de quantização é exatamente o mesmo que o apresentado na seção passada excetuando o fato de termos aqui cálculos mais extensos e de que a base de termo cinético constante não será mais equivalente a escolha de um λ particular. Dessa forma, partiremos diretamente dos operadores quânticos obtidos e investigaremos alguns dos resultados. Como será mostrado, o caso parabólico terá o Hamiltoniano de uma partícula no plano sobre influência de um potencial proporcional ao inverso do quadrado e ao acoplamento spin-órbita. Já o caso trigonométrico terá a mesma interação do caso parabólico, mas acrescida de um potencial oscilatório, o qual fará do sistema um sistema confinado e dos níveis de energia, discretos. Nesse último caso, mostraremos que a álgebra superconforme será a superálgebra geradora de espectro e investigaremos também as limitações da existência da simetria superconforme no espaço de Hilbert.

2.4.1 Modelo parabólico $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$

Ao se pôr o modelo com ação (1.5.13) na base de termo cinético constante, é conveniente utilizar os campos complexos y e y^* , como já discutido anteriormente. Dessa forma, teremos os (anti)comutadores não nulos

$$[y^*, p_{y^*}] = [y, p_y] = i\hbar, \quad \{\chi, \chi^\dagger\} = 2\hbar, \quad (2.4.1)$$

onde $p_y = -i\hbar\partial_y$, $p_{y^*} = -i\hbar\partial_{y^*}$ e as variáveis fermiônicas podem ser expressas como $\chi = \sqrt{2\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\chi^\dagger = \sqrt{2\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por simplicidade, tomemos $\hbar = 1$. Temos, então, os operadores quânticos

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= (2p_y p_{y^*} + \frac{(2\lambda+1)^2}{8yy^*})\mathbb{I}_2 + i\frac{2\lambda+1}{4}(\chi\chi^\dagger - \chi^\dagger\chi)\left(\frac{p_{y^*}}{y} - \frac{p_y}{y^*}\right), \\
 \hat{D} &= t\hat{H} - \frac{1}{2}(y^*p_{y^*} + yp_y - i)\mathbb{I}_2, \\
 \hat{K} &= t^2\hat{H} - t(y^*p_{y^*} + yp_y - i)\mathbb{I}_2 + \frac{1}{2}yy^*\mathbb{I}_2, \\
 \hat{Q}_-^{(1)} &= -\frac{i}{2}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}} p_y + p_y \left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi - \frac{i}{2}\left(\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}} p_{y^*} + p_{y^*} \left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi^\dagger, \\
 \hat{Q}_-^{(2)} &= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}} p_y + p_y \left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}} p_{y^*} + p_{y^*} \left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi^\dagger, \\
 \hat{Q}_+^{(1)} &= t\hat{Q}_-^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{yy^*}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^\lambda \chi + \left(\frac{y^*}{y}\right)^\lambda \chi^\dagger\right), \\
 \hat{Q}_+^{(2)} &= t\hat{Q}_-^{(2)} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{yy^*}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^\lambda \chi - \left(\frac{y^*}{y}\right)^\lambda \chi^\dagger\right), \\
 \hat{J} &= \frac{i}{2}\left(\frac{p_{y^*}}{y} - \frac{p_y}{y^*}\right) - \frac{1-2\lambda}{8}(\chi\chi^\dagger - \chi^\dagger\chi). \tag{2.4.2}
 \end{aligned}$$

Aqui \hat{H} é o Hamiltoniano quântico.

Usando $p_y = -i\partial_y$, $p_{y^*} = -i\partial_{y^*}$, os operadores $\hat{Q}_-^{(1)}$, $\hat{Q}_-^{(2)}$ podem ser escritos na forma

$$\hat{Q}_-^{(1)} = i\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_-^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4.3}$$

sendo

$$A^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i2\lambda\theta}\left(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta + \frac{2\lambda+1}{2r}\right), \quad A = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i2\lambda\theta}\left(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta + \frac{2\lambda+1}{2r}\right), \tag{2.4.4}$$

onde utilizamos coordenadas polares ($y = re^{i\theta}$, $y^* = re^{-i\theta}$).

Semelhantemente, o Hamiltoniano \hat{H} toma a forma

$$\hat{H} = \left[-\frac{1}{2}\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right) + i\frac{(2\lambda+1)}{2r^2}\sigma_3\partial_\theta + \frac{(2\lambda+1)^2}{8r^2}\right]\mathbb{I}_2, \tag{2.4.5}$$

com σ_3 sendo a matriz de Pauli diagonal. Como já antecipado, aqui temos uma correção quântica e essa é o termo $\frac{(2\lambda+1)^2}{8r^2}$, que na verdade é muito bem vindo, pois garante a existência de extensões autoadjuntas para o Hamiltoniano qualquer que seja λ .

A correção quântica é necessária para que a superálgebra $sl(2|1)$ seja realizada. Os (anti)comutadores não nulos dela são ($m, n = 0, \pm 1$):

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_n, \hat{L}_m] &= i(m-n)\hat{L}_{m+n}, \quad [\hat{L}_0, \hat{Q}_\pm^I] = \pm\frac{i}{2}\hat{Q}_\pm^I, \quad [\hat{L}_{\pm 1}, \hat{Q}_\mp^I] = \mp i\hat{Q}_\pm^I, \\
 [\hat{J}, \hat{Q}_\pm^I] &= \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}\hat{Q}_\pm^J, \quad \{\hat{Q}_\pm^I, \hat{Q}_\pm^J\} = 2\delta_{IJ}\hat{L}_{\pm 1}, \quad \{\hat{Q}_\pm^I, \hat{Q}_\mp^J\} = 2\delta_{IJ}\hat{L}_0 \pm 2\epsilon_{IJ}\hat{J}, \tag{2.4.6}
 \end{aligned}$$

onde $\hat{L}_{-1} = \hat{H}$, $\hat{L}_0 = \hat{D}$, $\hat{L}_1 = \hat{K}$, $I, J = 1, 2$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$.

As autofunções tais que $\hat{H}\psi_{Em\pm} = E\psi_{Em\pm}$ para $E > 0$ produzem um espectro contínuo e são dadas por

$$\begin{aligned}\psi_{Em+}(r, \theta) &= J_{|\frac{2\lambda+1}{2}-m|}(\alpha r)e^{im\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_{Em-}(r, \theta) &= J_{|\frac{2\lambda+1}{2}+m|}(\alpha r)e^{im\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

sendo $J_{|\frac{2\lambda+1}{2}-m|}(\alpha r)$ e $J_{|\frac{2\lambda+1}{2}+m|}(\alpha r)$ funções de Bessel e $\alpha = \sqrt{2E}$.

Para concluirmos nossa análise, reescrevamos os operadores Q 's na forma usual da Mecânica Quântica Supersimétrica. Definindo

$$\hat{Q} = \frac{\hat{Q}_-^2 + i\hat{Q}_-^1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger = \frac{\hat{Q}_-^2 - i\hat{Q}_-^1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.8)$$

teremos $\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = 2\hat{H}$ e $\hat{Q}^2 = (\hat{Q}^\dagger)^2 = 0$, como seria comumente encontrado no contexto de Mecânica Quântica Supersimétrica.

Por fim devemos notar que, dada as expressões (2.4.4), temos $\hat{Q}\psi_{Em-} = \psi_{E, m+2\lambda, +}$ e $\hat{Q}^\dagger\psi_{Em+} = \psi_{E, m-2\lambda, -}$. Como $m+2\lambda$ e $m-2\lambda$ precisam ser números inteiros, $\hat{Q}\psi_{Em-}$ e $\hat{Q}^\dagger\psi_{Em+}$ pertencem à base do espaço de Hilbert apenas se 2λ for inteiro. Ou seja, os parceiros supersimétricos dos estados apenas existem se tivermos $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras, a simetria superconforme apenas se realiza no espaço de Hilbert em questão quando $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}$.

2.4.2 Modelo trigonométrico $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$

Assim como no caso parabólico, a quantização da ação (1.5.15) nos dá

$$[y^*, p_{y^*}] = [y, p_y] = i\hbar, \quad \{\chi, \chi^\dagger\} = \hbar, \quad (2.4.9)$$

onde $\chi = \sqrt{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\chi^\dagger = \sqrt{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Novamente poremos $\hbar = 1$. Dessa forma teremos os operadores quânticos

$$\begin{aligned}\hat{H} &= i\frac{e^{-2it}}{2}(\hat{\mathcal{H}} - yy^*\mathbb{I}_2 + i(y^*p_{y^*} + yp_y - i)\mathbb{I}_2), \\ \hat{D} &= \frac{i}{2}(2p_y p_{y^*} + \frac{yy^*}{2} + \frac{(2\lambda+1)^2}{8yy^*})\mathbb{I}_2 + i\frac{2\lambda+1}{4}(\chi\chi^\dagger - \chi^\dagger\chi)(\frac{p_{y^*}}{y} - \frac{p_y}{y^*}) = \frac{i}{2}\hat{\mathcal{H}}, \\ \hat{K} &= i\frac{e^{2it}}{2}(\hat{\mathcal{H}} - yy^*\mathbb{I}_2 - i(y^*p_{y^*} + yp_y - i)\mathbb{I}_2), \\ \hat{Q}_\pm^{(1)} &= -ie^{\mp it}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}p_y + p_y\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}p_{y^*} + p_{y^*}\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi^\dagger\right. \\ &\quad \mp \frac{i}{2}(yy^*)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{y}{y^*}\right)^\lambda\chi - \left(\frac{y^*}{y}\right)^\lambda\chi^\dagger\right], \\ \hat{Q}_\pm^{(2)} &= e^{\mp it}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}p_y + p_y\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}p_{y^*} + p_{y^*}\left(\frac{y^*}{y}\right)^{\frac{1+2\lambda}{2}}\right)\chi^\dagger\right. \\ &\quad \mp \frac{i}{2}(yy^*)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{y}{y^*}\right)^\lambda\chi + \left(\frac{y^*}{y}\right)^\lambda\chi^\dagger\right], \\ \hat{J} &= \frac{i}{2}\left(\frac{p_{y^*}}{y} - \frac{p_y}{y^*}\right) - \frac{1-2\lambda}{8}(\chi\chi^\dagger - \chi^\dagger\chi).\end{aligned}\quad (2.4.10)$$

Os operadores fermiônicos $\hat{Q}_\pm^{(I)}$, $I = 1, 2$, podem ser expressos como

$$\hat{Q}_{\pm}^{(1)} = ie^{\mp it} \begin{pmatrix} 0 & -A_{\pm} \\ B_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{\pm}^{(2)} = e^{\mp it} \begin{pmatrix} 0 & A_{\pm} \\ B_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.11)$$

onde, usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= -\frac{i}{2}e^{i2\lambda\theta}(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_{\theta} + \frac{2\lambda+1}{2r} \pm r), \\ B_{\pm} &= -\frac{i}{2}e^{-i2\lambda\theta}(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_{\theta} + \frac{2\lambda+1}{2r} \pm r). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Aqui o Hamiltoniano é $\hat{\mathcal{H}}$ e esse está relacionado com \hat{D} através de $\hat{\mathcal{H}} = -2i\hat{D}$. Portanto,

$$\hat{\mathcal{H}} = [-\frac{1}{2}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta}^2) + i\frac{(2\lambda+1)}{2r^2}\sigma_3\partial_{\theta} + \frac{(2\lambda+1)^2}{8r^2} + \frac{r^2}{2}]\mathbb{I}_2, \quad (2.4.13)$$

com σ_3 sendo a matriz de Pauli diagonal.

Para uso futuro, vamos explicitar \hat{J} , o qual dado por

$$\hat{J} = -\frac{i}{2}\mathbb{I}_2\partial_{\theta} - \frac{2\lambda-1}{4}\sigma_3. \quad (2.4.14)$$

Pode-se averiguar que a superálgebra $sl(2|1)$ é recuperada por (anti)comutações entre os operadores (2.4.10) usando (2.4.9).

Sendo $\psi = e^{im\theta}R_{\pm}(r)e_{\pm}$ um ansatz de autofunção de $\hat{\mathcal{H}}$, onde $e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a equação radial que obtemos é

$$[-\frac{1}{2}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r) + \frac{1}{2r^2}(m \mp \frac{2\lambda+1}{2})^2 + \frac{r^2}{2} - E]R_{\pm}(r) = 0, \quad (2.4.15)$$

onde E é a energia. Em [1] a mesma equação aparece ao se resolver o problema de três corpos numa linha. Além disso, a questão da existência de extensões autoadjuntas para o operador atuando sobre R_{\pm} foi investigada em [56]; como $\sqrt{(m \pm \frac{2\lambda+1}{2})^2} \geq 0$, a existência de extensões autoadjuntas para o Hamiltoniano (2.4.13) é garantida. Deve-se destacar que esse resultado depende crucialmente da correção quântica $\frac{(2\lambda+1)^2}{8r^2}$.

O requerimento de $\hat{Q}_{\pm}^{(I)}$ ser unicamente definido no plano \mathbb{R}^2 implica, dados os fatores exponenciais em (2.4.12), o vínculo $4\lambda\pi = 2k\pi$, com k inteiro. Portanto a realização da álgebra superconforme no espaço de Hilbert depende de λ estar restrito a $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ou $\lambda = \mathbb{Z}$. Discutiremos o caso $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, já que ainda há certa nebulosidade no entendimento do caso $\lambda = \mathbb{Z}$. Vale observar que $\lambda = -\frac{1}{2}$ corresponde ao oscilador harmônico bidimensional, mas aqui temos ele com um grau de liberdade a mais (o espinorial).

Para λ semi-inteiro, os operadores $\hat{Q}_{\pm}^{(I)}$ agem como operadores de criação e aniquilação. Com efeito, pode-se verificar que $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_{\pm}^{(I)}] = \mp \hat{Q}_{\pm}^{(I)}$. Portanto, ao começarmos de um estado de peso mínimo satisfazendo $\hat{Q}_{+}^{(I)}\psi = 0$, uma torre infinita de estados com energias mais altas pode ser obtida ao aplicarmos $\hat{Q}_{-}^{(I)}$ múltiplas vezes. Uma rápida inspeção dos $\hat{Q}_{-}^{(I)}$ definidos em (2.4.11) e (2.4.12) deixa claro que os dois operadores darão os mesmos resultados a menos de uma fase ao serem aplicados nos autoestados. Assim, nos restringiremos a analisar os resultados para $\hat{Q}_{+}^{(2)}$. No próximo capítulo mostraremos que, ao menos para casos unidimensionais, essa redundância nos operadores de criação e aniquilação é um aspecto bastante comum da simetria superconforme. Agora, as soluções para $\hat{Q}_{+}^{(2)}\psi = 0$ são

$$\begin{aligned}\psi_{m+}(r, \theta) &= A_m r^{(m - \frac{2\lambda+1}{2})} e^{-r^2} e^{im\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_{m-}(r, \theta) &= B_m r^{-(m + \frac{2\lambda+1}{2})} e^{-r^2} e^{im\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.4.16}$$

onde A_m, B_m são os fatores de normalização dados por

$$A_m = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma(\alpha+1)}}, \quad \alpha = m - \frac{2\lambda+1}{2},\tag{2.4.17}$$

$$B_m = 2^{\frac{\beta+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma(\beta+1)}}, \quad \beta = -(m + \frac{2\lambda+1}{2}),\tag{2.4.18}$$

sendo Γ a função gama.

Para termos funções normalizáveis, m deve ser restringido. Para os estados de peso mínimo bosônicos temos que

$$m \geq \frac{2\lambda+1}{2}\tag{2.4.19}$$

e para os fermiônicos segue-se a restrição

$$m \leq -\frac{2\lambda+1}{2}.\tag{2.4.20}$$

A energia desses estados serão

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}\psi_{m+} &= (1 + m - \frac{2\lambda+1}{2})\psi_{m+}, \\ \hat{\mathcal{H}}\psi_{m-} &= (1 - (m + \frac{2\lambda+1}{2}))\psi_{m-}.\end{aligned}\tag{2.4.21}$$

Dois estados de vácuo, um bosônico e outro fermiônico, existem com energia 1. Eles são obtidos quando temos $m = \frac{2\lambda+1}{2}$, no caso bosônico, e $m = -\frac{2\lambda+1}{2}$ no caso fermiônico. Portanto a teoria possui um vácuo duplamente degenerado com um estado bosônico e outro fermiônico. Como é discutido no Apêndice A, podemos impor uma regra de superseleção através de um projetor e selecionar metade desses estados de forma a ter um único vácuo. No caso em que $\lambda = -\frac{1}{2}$, a superseleção nos dará o oscilador harmônico quântico bidimensional usual.

Devemos enfatizar um aspecto importante da construção feita até aqui. Como fica claro na discussão feita no Apêndice A, não é possível recuperar todos os estados excitados a partir do vácuo com os operadores que temos disponíveis até agora. De fato, cada um dos estados de peso mínimo encontrados em (2.4.16) deve ser levado em conta e, dessa forma, temos uma representação completamente redutível de $sl(2|1)$ no espaço de Hilbert e esse pode ser separado como uma soma direta de infinitas representações de peso mínimo de $sl(2|1)$. Porém o oscilador harmônico quântico bidimensional pode ter seu espaço de Hilbert inteiramente construído a partir do vácuo e isso é uma pista de que estamos deixando escapar algo. Esse algo é uma simetria discreta dada por

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(2\lambda+1)\theta} \\ e^{-i(2\lambda+1)\theta} & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.4.22}$$

Pode-se verificar que $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{C}] = 0$, com $\hat{\mathcal{H}}$ dado em (2.4.13), e que $\hat{C}^2 = \mathbb{I}_2$. O operador \hat{C} também

comuta com \hat{K} e \hat{H} apresentados em (2.4.10), mas não comuta com \hat{J} e os operadores fermiônicos da nossa representação de $sl(2|1)$. Na verdade \hat{C} definirá novos operadores de simetria, os quais são

$$\hat{C}\hat{Q}_{\pm}^{(1)}\hat{C} = \bar{Q}_{\pm}^{(1)} = ie^{\mp it} \begin{pmatrix} 0 & C_{\pm} \\ -D_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}\hat{Q}_{\pm}^{(2)}\hat{C} = \bar{Q}_{\pm}^{(2)} = e^{\mp it} \begin{pmatrix} 0 & C_{\pm} \\ D_{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} C_{\pm} &= -\frac{i}{2}e^{i2(\lambda+1)\theta}(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_{\theta} - \frac{2\lambda+1}{2r} \pm r) \\ D_{\pm} &= -\frac{i}{2}e^{-i2(\lambda+1)\theta}(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_{\theta} - \frac{2\lambda+1}{2r} \pm r), \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

e

$$\hat{C}\hat{J}\hat{C} = \bar{J} = -\frac{i}{2}\partial_{\theta} - \frac{2\lambda+3}{4}\sigma_3. \quad (2.4.25)$$

Seja $\{\hat{g}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) o conjunto de operadores de $sl(2|1)$ em (2.4.10). Por construção $\bar{g}_i = \hat{C}\hat{g}_i\hat{C}^{-1}$ também será uma representação de $sl(2|1)$, pois \hat{C} define uma transformação de similaridade. As duas representações não são equivalentes, afinal, os operadores novos não são combinações lineares dos anteriores. Além disso os (anti)comutadores $[\hat{g}_i, \bar{g}_j]$ produzem ainda mais operadores fora da superálgebra que temos. Não é claro ainda qual estrutura algébrica se segue da combinação dos operadores \hat{g}_i e \bar{g}_j , mas os novos operadores de criação e aniquilação tornam possível exatamente o que estávamos buscando: construir a base do espaço de Hilbert a partir dos estados de vácuo. Mais detalhes são encontrados no Apêndice A, onde há diagramas que ajudam a visualizar a ação dos operadores de criação.

Com os novos operadores podemos introduzir os seguintes operadores:

$$\mathcal{J} = \hat{J} + \bar{J} = -i\partial_{\theta} - \frac{2\lambda+1}{2}\sigma_3, \quad N_f = \sigma_3 = \hat{J} - \bar{J}, \quad (2.4.26)$$

os quais permitem definir os novos números quânticos

$$\hat{\mathcal{H}}|n, j, \epsilon\rangle = (n+1)|n, j, \epsilon\rangle, \quad \mathcal{J}|n, j, \epsilon\rangle = j|n, j, \epsilon\rangle, \quad \sigma_z|n, j, \epsilon\rangle = \epsilon|n, j, \epsilon\rangle. \quad (2.4.27)$$

2.5 Supersimetria suave dos osciladores

Já destacamos que os osciladores apresentados (deformados ou não) não são supersimétricos no sentido usual, mas sim no que aqui chamamos de supersimetria suave. Vamos agora listar suas principais características.

Do ponto de vista clássico, ambos os modelos parabólico e trigonométrico são superconformes, mas temos a seguinte diferença:

- i) modelo parabólico: tanto os modelos clássico como quântico são superconformes e a supersimetria existe no sentido usual. Ou seja, há ao menos um operador \mathcal{Q} tal que $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{H}$, com \mathcal{H} sendo o Hamiltoniano.
- ii) modelo trigonométrico: o modelo é superconforme, mas a supersimetria não existe no sentido usual. Os operadores \mathcal{Q} tem quadrado $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Z}$ diferentes dos Hamiltoniano \mathcal{H} , isto é, devemos ter $\mathcal{Z} \neq \mathcal{H}$.

De certa forma os modelos trigonométricos estão no meio do caminho entre modelos supersimétricos e não supersimétricos. Em [57] o termo “supersimetria fraca” foi empregado para essa noção intermediária, mas ainda sim, é enganoso empregar ele aqui já que o “oscilador fracamente supersimétrico” em [57] não possui relação com os osciladores superconformes aqui descritos. Por essa razão parece-nos mais apropriado dar uma classe restrita aos osciladores superconformes apresentados aqui. As características dessa supersimetria suave dos osciladores superconforme seriam:

- i) a ação clássica é superconforme;
- ii) quebra espontânea da simetria superconforme. Com efeito, no caso mais simples, o vácuo $|0\rangle$ do oscilador harmônico usual é aniquilado por a , mas não pelo operador hermitiano $a + a^\dagger$.
- iii) no modelo quântico a álgebra superconforme age como superálgebra geradora de espectro.

Há uma série de pontos que ainda devem ser explorados em relação às representações trigonométricas. Por exemplo, o modelo com simetria $sl(2|1)$ aqui apresentado possui uma característica ainda não esclarecida, que é a presença dos operadores (2.4.23), os quais tornam possível a construção da base do espaço de Hilbert a partir do vácuo enquanto uma representação de $sl(2|1)$ sozinha não seria capaz.

Capítulo 3

Osciladores Quânticos Superconformes Unidimensionais

Nesse capítulo faremos uma investigação sistemática de osciladores quânticos superconformes unidimensionais definidos a partir de matrizes de tamanhos 2×2 e 4×4 com operadores diferenciais. Derivaremos as superálgebras geradoras de espectro e mostraremos as escolhas possíveis para o espaço de Hilbert de cada caso apresentado, sendo enfatizado que a escolha nem sempre é única, como já notado em [58, 59] para um caso puramente bosônico.

Os resultados apresentados no presente capítulo também podem ser encontrados em [32].

3.1 O oscilador quântico unidimensional não deformado

Como estabelecido em [60], a superálgebra (1.3.22) da Mecânica Quântica Supersimétrica pode ser construída por operadores diferenciais matriciais hermitianos Q_I e H agindo sobre campos reais. No entanto a exigência de fecharmos uma superálgebra nos leva a ter uma estrutura complexa. Isso pode ser visto através de comutadores como, por exemplo, $[Q_I, K] = i\tilde{Q}_I$, que nos forcem a introduzir a unidade imaginária nos operadores para preservarmos a hermiticidade no lado direito. Dessa forma, sem perda de generalidade, podemos investigar a ação da simetria superconforme sobre campos complexos.

O Hamiltoniano matricial de tamanho $2^n \times 2^n$ sem interação é dado por

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \cdot \mathbb{I}_{2^n} \quad (3.1.1)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, haverá $2n$ operadores diferenciais matriciais hermitianos bloco anti-diagonais Q_I (os ditos operadores fermiônicos da superálgebra) tais que $Q_I^2 = H$. Os operadores Q_I fecham a álgebra da supersimetria \mathcal{N} -extendida (1.3.22) com

$$\mathcal{N} = 2n. \quad (3.1.2)$$

A relação acima é baseada na construção feita em [61, 62] para álgebras de Clifford complexas.

Agora tomemos $2n$ matrizes anti-diagonais γ_I , $I = 1, 2, \dots, 2n$ que geram a representação da álgebra de Clifford definida por

$$\gamma_I \gamma_J + \gamma_J \gamma_I = 2\delta_{IJ} \cdot \mathbb{I}_{2^n} \quad (3.1.3)$$

e a matriz diagonal F

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.1.4)$$

a qual satisfaz

$$F\gamma_I + \gamma_I F = 0, \quad \forall I = 1, 2, \dots, 2n. \quad (3.1.5)$$

F é o operador de número fermiônico e, como antes, tem autovalor 1 para estados bosônicos e -1 para estados fermiônicos.

Podemos, assim, definir

$$Q_I = \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_I\partial_x, \quad (3.1.6)$$

o que, dado (1.3.22), nos dá

$$\{Q_I, Q_J\} = 2\delta_{IJ}H, \quad [H, Q_I] = 0, \quad I, J = 1, \dots, 2n. \quad (3.1.7)$$

O par conforme de H é o operador K , o qual assumiremos ser proporcional à identidade e, portanto, pode ser escrito como

$$K = \frac{1}{2}x^2 \cdot \mathbb{I}_{2n}. \quad (3.1.8)$$

Já os pares conformes de Q_I, \tilde{Q}_I , são introduzidos através da relação

$$[Q_I, K] = i\tilde{Q}_I \rightarrow \tilde{Q}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}x \cdot \gamma_I. \quad (3.1.9)$$

Por fim, o operador de dilatação D e a R-simetria (com operadores $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$) são obtidos com os anticomutadores

$$\{Q_I, \tilde{Q}_J\} = -2\delta_{IJ}D + \Sigma_{IJ}. \quad (3.1.10)$$

Eles são

$$\begin{aligned} D &= -\frac{i}{2}(x\partial_x + \frac{1}{2}) \cdot \mathbb{I}_{2n}, \\ \Sigma_{IJ} &= \frac{i}{2}\gamma_I\gamma_J. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Os operadores $D, H, K, Q_I, \tilde{Q}_I, \Sigma_{IJ}$ fecham a superálgebra $D(n, 1) \sim osp(2n|2)$ com os $4n$ geradores Q_I e \tilde{Q}_I sendo os operadores fermiônicos enquanto os $n(2n - 1) + 3$ operadores bosônicos H, D, K, Σ_{IJ} geram a subálgebra $sl(2) \oplus so(2n)$. Os (anti)comutadores não nulos de $osp(2n|2)$ são apresentados abaixo, onde usamos as notações $E^+ = H, E^- = K, Q_I^+ = Q_I, Q_I^- = \tilde{Q}_I$.

$$\begin{aligned} [D, E^\pm] &= \pm iE^\pm, \quad [D, Q_I^\pm] = \pm \frac{i}{2}Q_I^\pm, \\ [E^+, E^-] &= -2iD, \quad \{Q_I^+, Q_I^-\} = -2\delta_{IJ}D + \Sigma_{IJ}, \\ [E^\pm, Q_I^\mp] &= \pm iQ_I^\pm, \quad \{Q_I^\pm, Q_J^\pm\} = 2\delta_{IJ}E^\pm, \\ [\Sigma_{IJ}, \Sigma_{IL}] &= -i\Sigma_{JL}, \quad [\Sigma_{IJ}, Q_K^\pm] = -i\delta_{IK}Q_J^\pm + i\delta_{JK}Q_I^\pm. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

O Hamiltoniano H_{osc} do oscilador não deformado é dado por

$$H_{osc} = H + K = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) \cdot \mathbb{I}_{2^n}. \quad (3.1.13)$$

Podemos agora definir

$$a_I = Q_I + i\tilde{Q}_I = \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_I(\partial_x + x), \quad a_I^\dagger = Q_I - i\tilde{Q}_I = \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_I(\partial_x - x), \quad (3.1.14)$$

cuja anticomutação nos dá

$$H_{osc} = \frac{1}{2}\{a_I, a_I^\dagger\}. \quad (3.1.15)$$

Pode-se também verificar que a_I^\dagger (a_I) são operadores de criação (aniquilação), ou seja,

$$[H_{osc}, a_I^\dagger] = a_I^\dagger, \quad [H_{osc}, a_I] = -a_I. \quad (3.1.16)$$

Logo, a superálgebra $osp(2n|2)$ é a superálgebra geradora de espectro de H_{osc} . Fora isso, a álgebra de Heisenberg é obtida para cada I através dos comutadores

$$[a_I, a_I^\dagger] = \mathbb{I}_{2^n}. \quad (3.1.17)$$

Os operadores de aniquilação a_I nos permitem definir 2^n estados fundamentais degenerados ψ_0^I como estados de peso mínimo. Com efeito,

$$a_I \psi_0^I = 0, \quad H_{osc} \psi_0^I = \frac{1}{2} \psi_0^I. \quad (3.1.18)$$

Vale ressaltar que metade dos estados são bosônicos enquanto a outra metade são estados fermiônicos.

3.2 Adicionando o potencial “ $\frac{1}{x^2}$ ”

Ao adicionarmos ao Hamiltoniano (3.1.1) um potencial $\frac{1}{x^2}V$, onde $V = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_{2^n})$ é uma matriz $2^n \times 2^n$ constante, a dimensionalidade de H é preservada. A questão que estamos interessados em responder é sobre qual restrição devemos impor sobre os parâmetros v_i de forma que o Hamiltoniano

$$H_P = H + \frac{1}{x^2}V \quad (3.2.1)$$

seja um gerador de uma álgebra superconforme na representação parabólica e, por conseguinte, que $H_{osc} + \frac{1}{x^2}V$, com H_{osc} dado em (3.1.13), seja o Hamiltoniano trigonométrico com a álgebra superconforme sendo a superálgebra geradora de espectro. Vale antecipar que a simetria do oscilador deformado $H_{osc} + \frac{1}{x^2}V$ não necessariamente será $osp(2n|2)$.

Agora podemos definir os operadores fermiônicos deformados da seguinte forma:

$$Q_I^{def} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_I \partial_x - i \frac{M_I}{x}), \quad (3.2.2)$$

onde M_I são matrizes constantes bloco anti-diagonais tais que $M_I^\dagger = M_I$. Ao exigirmos o fechamento da superálgebra (1.3.22), obtemos, para $I \neq J$, as equações

$$\begin{aligned} \{\gamma_I, M_J\} + \{\gamma_J, M_I\} &= 0, \\ \{M_I, M_J\} - i\gamma_I M_J - i\gamma_J M_I &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Para $I = J$ devemos recuperar H_P e, portanto, temos

$$V = \frac{1}{2}(M_I^2 - i\gamma_I M_I). \quad (3.2.4)$$

O operador (3.1.8) permanece sem deformação, donde segue-se que D e \tilde{Q}_I também ficam inalterados.

Para recuperarmos D através dos anticomutadores $\{Q_I^{def}, \tilde{Q}_I\}$, devemos ter

$$\{M_I, \gamma_I\} = 0. \quad (3.2.5)$$

Já os anticomutadores $\{Q_I^{def}, \tilde{Q}_J\}$ para $I \neq J$ nos dão os operadores constantes

$$\Sigma_{IJ}^{def} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} [\gamma_I, \gamma_J] + \{M_I, \gamma_J\} \right). \quad (3.2.6)$$

Como a relação (3.2.3) deve ser satisfeita, temos $\Sigma_{IJ}^{def} = -\Sigma_{JI}^{def}$.

Uma classe de soluções para as equações (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) é obtida se escolhermos

$$M_I = i\beta\gamma_I F, \quad (3.2.7)$$

onde β é um número real arbitrário e F é o operador de paridade fermiônica introduzido em (3.1.4). A solução (3.2.7), no entanto, não é válida para nenhum $n \geq 3$.

Tendo (3.2.7), os operadores Σ_{IJ}^{def} definidos em (3.2.6) tomam a forma

$$\Sigma_{IJ}^{def} = \frac{i}{2} \gamma_I \gamma_J (1 - 2\beta F). \quad (3.2.8)$$

Para $n = 1$, pode-se verificar que a escolha (3.2.7) faz com que a simetria dinâmica seja $osp(2|2)$, que é a mesma do Hamiltoniano sem interação. Para $n = 2$ o fechamento da superálgebra é garantido se F é expresso como o produto $F = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. Essa relação que assegura o fechamento dos comutadores $[\Sigma_{IJ}^{def}, \tilde{Q}_K]$ como combinação linear de \tilde{Q} 's no lado direito. O resultado análogo também vale para os geradores Q 's.

Nas seções 3.3 e 3.4 discutiremos em maiores detalhes os modelos obtidos a partir de (3.2.7) com $n = 1$ e $n = 2$ respectivamente.

Agora, tendo (3.2.7), podemos escrever os operadores

$$\begin{aligned} a_{Kl,I} &= Q_I^{def} + i\tilde{Q}_I = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_I (\partial_x + x + \frac{\beta F}{x}), \\ a_{Kl,I}^\dagger &= Q_I^{def} - i\tilde{Q}_I = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_I (\partial_x - x + \frac{\beta F}{x}), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

os quais satisfazem

$$[a_{Kl,I}, a_{Kl,I}^\dagger] = \mathbb{I} - 2\beta F, \quad \{a_{Kl,I}, F\} = \{a_{Kl,I}^\dagger, F\} = 0. \quad (3.2.10)$$

Diz-se que a álgebra de Heisenberg possui deformação do tipo Klein (veja [35]) quando temos as relações

$$\begin{aligned} [a_{Kl}, a_{Kl}^\dagger] &= \mathbb{I} + \nu \bar{K}, \\ \{a_{Kl}, \bar{K}\} &= \{a_{Kl}^\dagger, \bar{K}\} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

onde ν é um número real e \bar{K} (com $\bar{K}^2 = \mathbb{I}$) é conhecido como operador de Klein. Logo se pode ver que os operadores de criação e aniquilação em (3.2.9) definem uma algebra de Heisenberg deformada do tipo Klein (3.2.11) ao identificarmos $\nu = -2\beta$ e $\bar{K} = F$. Além disso, o Hamiltoniano H_{osc}^{Kl} do oscilador deformado será

$$\frac{1}{2}\{a_{Kl,I}, a_{Kl,I}^\dagger\} = H_{osc}^{Kl} = H_{Cal} + K = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 + \frac{\beta^2 + \beta F}{x^2})\mathbb{I}. \quad (3.2.12)$$

Por fim se pode verificar que

$$[H_{osc}^{Kl}, a_{Kl,I}] = -a_{Kl,I}, \quad [H_{osc}^{Kl}, a_{Kl,I}^\dagger] = a_{Kl,I}^\dagger, \quad (3.2.13)$$

atestando que os operadores a 's e a^\dagger 's são de fato operadores de criação e aniquilação. Devemos frisar que a solução encontrada aqui para (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) não é geral e exploraremos uma outra possível solução dessas equações na Seção 3.5.

3.3 $n = 1$ com deformação do tipo Klein e superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$

Para $n = 1$ a álgebra de Clifford pode ser definida pelas matrizes de Pauli σ_i , $i = 1, 2, 3$, as quais são

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.1)$$

Os operadores

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + \frac{\beta^2 + \beta\sigma_3}{x^2}) \cdot \mathbb{I}_2, \\ D &= -\frac{i}{2}(x\partial_x + \frac{1}{2}) \cdot \mathbb{I}_2, \\ K &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \mathbb{I}_2, \\ J &= -\frac{1}{2}\sigma_3 + \beta\mathbb{I}_2, \\ Q_I &= \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_I \cdot (\partial_x + \frac{\beta\sigma_3}{x}), \\ \tilde{Q}_I &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_I \cdot x, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

onde $I = 1, 2$, realizam uma representação de $osp(2|2)$ para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ com as seguintes relações de (anti)comutação não nulas:

$$\begin{aligned}
 [D, K] &= -iK, & [D, H] &= iH, & [H, K] &= -2iD, \\
 \{Q_I, Q_J\} &= 2\delta_{IJ}H, & \{\tilde{Q}_I, \tilde{Q}_J\} &= 2\delta_{IJ}K, \\
 \{Q_I, \tilde{Q}_J\} &= -2\delta_{IJ}D + \epsilon_{IJ}J, \\
 [D, Q_I] &= \frac{i}{2}Q_I, & [D, \tilde{Q}_I] &= -\frac{i}{2}\tilde{Q}_I, \\
 [Q_I, K] &= i\tilde{Q}_I, & [\tilde{Q}_I, H] &= -iQ_I, \\
 [J, Q_I] &= -i\epsilon_{IJ}Q_J, & [J, \tilde{Q}_I] &= -i\epsilon_{IJ}\tilde{Q}_J.
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Os operadores de criação e aniquilação são definidos como

$$a_I = Q_I + i\tilde{Q}_I, \quad a_I^\dagger = Q_I - i\tilde{Q}_I, \tag{3.3.4}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 a_I &= \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_I \cdot \left(\partial_x + \frac{\beta\sigma_3}{x} + x\right), \\
 a_I^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_I \cdot \left(\partial_x + \frac{\beta\sigma_3}{x} - x\right).
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Dessa forma, pode-se verificar que

$$[a_I, a_I^\dagger] = \mathbb{I}_2 - 2\beta\sigma_3. \tag{3.3.6}$$

Já o Hamiltoniano H_{osc} do oscilador deformado é definido por

$$H_{osc} = \frac{1}{2}\{a_I, a_I^\dagger\} = H + K = \frac{1}{2}\left(-\partial_x^2 + x^2 + \frac{\beta^2 + \beta\sigma_3}{x^2}\right) \cdot \mathbb{I}_2. \tag{3.3.7}$$

A condição

$$a_I\psi_0 = 0 \tag{3.3.8}$$

define os estados de peso mínimo. Para qualquer β real haverá dois estados de peso mínimo, sendo um, ψ_{0+} , bosônico ($\sigma_3\psi_{0+} = \psi_{0+}$) e outro, ψ_{0-} , fermiônico ($\sigma_3\psi_{0-} = -\psi_{0-}$). Mais explicitamente, através de $a_1\psi_0 = 0$ obtemos

$$\psi_{0+} \propto \begin{pmatrix} x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{0-} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ x^\beta e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}. \tag{3.3.9}$$

O operador a_2 define os mesmos estados de peso mínimo que a_1 a menos de uma fase. Mais do que isso, os estados excitados $(a_2^\dagger)^n\psi_{0+}$ ($(a_2^\dagger)^n\psi_{0-}$) também são os mesmos que $(a_1^\dagger)^n\psi_{0+}$ ($(a_1^\dagger)^n\psi_{0-}$) a menos de uma fase. Disso se conclui que a superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$ é redundante. É suficiente para obtermos a base do espaço de Hilbert uma das subálgebras $osp(1|2) \subset osp(2|2)$,

seja ela a definida por $H, D, K, Q_1, \tilde{Q}_1$ ou a definida por $H, D, K, Q_2, \tilde{Q}_2$. Lembremos que o mesmo tipo de situação foi encontrada no capítulo passado ao investigarmos o sistema trigonométrico com simetria $sl(2|1)$. No entanto vale ressaltar que nenhuma das subálgebras $osp(1|2)$ é capaz de gerar a R-simetria e, portanto, a álgebra $osp(2|2)$ ainda possui informação sobre a simetria dinâmica do sistemas que não nos é recuperada através de suas subálgebras $osp(1|2)$.

Repetindo a análise feita no Apêndice B, mas adaptada ao caso que estamos tratando, temos as seguintes situações sobre a admissibilidade dos espaços de Hilbert:

- i) no intervalo $\beta \leq -\frac{1}{2}$ temos uma única representação de peso mínimo, a qual com peso mínimo bosônico ψ_{0+} , cuja energia é $E_{0+} = \frac{1}{2} - \beta$;
- ii) no intervalo $\beta \geq \frac{1}{2}$ Também só há uma única representação de peso mínimo, agora com peso mínimo fermiônico ψ_{0-} , cuja energia é $E_{0-} = \frac{1}{2} + \beta$;
- iii) No intervalo intermediário $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ há duas possibilidades:
 - iiia) pode-se escolher uma das representações de peso mínimo, seja a com peso mínimo bosônico ou a com fermiônico.
 - iiib) A outra opção consiste em tomar as duas representações de peso mínimo simultaneamente. A diferença de energia entre os estados de peso mínimo será $\Delta = E_{0+} - E_{0-} = -2\beta$. Ou seja, ψ_{0+} será o estado fundamental se $0 < \beta < \frac{1}{2}$, mas ψ_{0-} o será se $-\frac{1}{2} < \beta < 0$. Em $\beta = 0$ os dois estados são degenerados e temos um oscilador não deformado.

Para simplificar nossa análise, podemos tomar $\beta \geq 0$. Isso porque podemos realizar uma transformação de similaridade σ_1 nos operadores g da representação dada em (3.3.2) de forma que

$$g' = \sigma_1 g \sigma_1. \quad (3.3.10)$$

É fácil averiguar que, destacando a dependência em β de H , temos

$$H'(\beta) = \sigma_1 H(\beta) \sigma_1 = H(-\beta). \quad (3.3.11)$$

Ou seja, a transformação σ_1 troca o “Hamiltoniano bosônico” pelo “Hamiltoniano fermiônico” em H .

No intervalo $0 < \beta < \frac{1}{2}$ o estado fundamental é ψ_{0+} e, nos termos de iiib), o espectro será

$$E_{\epsilon, n} = \frac{1}{2} - \epsilon\beta + n, \quad (3.3.12)$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$, $\epsilon = \pm 1$ e a energia do estado fundamental corresponde a $\epsilon = 1$, $n = 0$.

Vamos agora tratar das condições de ortonormalidade entre os autoestados no intervalo $0 < \beta < \frac{1}{2}$ (para um tratamento mais geral sobre ortonormalidade dos autoestados em osciladores com deformação do tipo Klein, recomendamos [35]). Vamos denotar $\hat{\psi}_{0\epsilon}$ o autoestado de peso mínimo bosônico ($\epsilon = +$) e fermiônico ($\epsilon = -$) normalizados, isto é,

$$\hat{\psi}_{0+} = N_+ \begin{pmatrix} x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}_{0-} = N_- \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}, \quad (3.3.13)$$

onde N_{ϵ} são os fatores de normalização, os quais determinados por

$$|N_{\epsilon}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x^{-2\epsilon\beta} e^{-x^2}| = 1. \quad (3.3.14)$$

Ao separarmos a integral em duas de forma que tenhamos $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$ e ao fazer a mudança

de variável $x \mapsto -x$ na primeira, é fácil obter $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |x^{-2\epsilon\beta} e^{-x^2}| = 2 \int_0^{+\infty} dx x^{-2\epsilon\beta} e^{-x^2}$. Agora, fazendo a mudança de variáveis $t = x^2$, nós temos $2 \int_0^{+\infty} dx x^{-2\epsilon\beta} e^{-x^2} = \int_0^{+\infty} dt t^{-\epsilon\beta - \frac{1}{2}} e^{-t} = \Gamma(-\epsilon\beta + \frac{1}{2})$. Disso segue-se que N_ϵ é dado por

$$N_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(-\epsilon\beta + \frac{1}{2})}}. \quad (3.3.15)$$

Introduzamos os estados não normalizados

$$\psi_{n\epsilon} = (a^\dagger)^n \widehat{\psi}_{0\epsilon}. \quad (3.3.16)$$

onde a^\dagger pode denotar tanto a_1^\dagger como a_2^\dagger devido à redundância de $osp(2|2)$. Vamos também denotar a o operador de aniquilação correspondente tal que satisfaça (3.3.6). Usando (3.3.6) e levando em conta que $a\widehat{\psi}_{0\epsilon} = 0$, pode-se verificar que

$$a\psi_{n\epsilon} = Z_n \psi_{n-1,\epsilon}, \text{ sendo } Z_{2k} = 2k, \ Z_{2k+1} = 2k + 1 - 2\epsilon\beta, \ k \in \mathbb{N}_0 \quad (3.3.17)$$

(por consistência, usaremos $\psi_{0\epsilon} = \widehat{\psi}_{0\epsilon}$).

Agora, usando notação de Dirac ($\psi_{n\epsilon}(x) = \langle x|\bar{n}\rangle_\epsilon$), os coeficientes de normalização $M_{n,\epsilon}$ são dados por

$$M_{n,\epsilon}^2 = \epsilon \langle \bar{n}|\bar{n}\rangle_\epsilon. \quad (3.3.18)$$

Como ${}_\epsilon \langle \bar{n} + 1|\bar{n} + 1\rangle_\epsilon = {}_\epsilon \langle \bar{n}|aa^\dagger|\bar{n}\rangle_\epsilon = {}_\epsilon \langle \bar{n}|(aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a)|\bar{n}\rangle_\epsilon$, podemos então escrever

$$M_{n+1,\epsilon}^2 = (1 + 2\epsilon\beta(-1)^{n+1})M_{n,\epsilon}^2 + Z_n^2 M_{n-1,\epsilon}^2. \quad (3.3.19)$$

Os primeiros termos nos dão

$$\begin{aligned} M_{0,\epsilon}^2 &= 1, \\ M_{1,\epsilon}^2 &= (1 - 2\epsilon\beta), \\ M_{2,\epsilon}^2 &= 2(1 - 2\epsilon\beta), \\ M_{3,\epsilon}^2 &= (1 - 2\epsilon\beta)(6 - 4\epsilon\beta). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

É fácil mostrar que $\beta = 0$ corresponde a $M_{n,\epsilon}^2 = n!$, que é o coeficiente esperado para o oscilador não deformado.

Os estados ortonormais são então dados por

$$\widehat{\psi}_{n\epsilon} = \frac{1}{M_{n,\epsilon}} \psi_{n\epsilon}. \quad (3.3.21)$$

Introduzamos o símbolo de Pochhammer $(x)_n$, que é definido através de

$$\begin{aligned} (x)_n &= \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), \quad n > 0, \\ (x)_0 &= 1. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

A aplicação múltipla de (3.3.17) implica

$$\begin{aligned}
 a_I^{2k} \widehat{\psi}_{2k,\epsilon} &= 2k(2k-1-2\epsilon\beta)(2k-2)(2k-3-2\epsilon\beta) \cdots 2(1-2\epsilon\beta) \widehat{\psi}_{0\epsilon} \\
 &= (2k)!! \frac{(-2\epsilon\beta)_{2k}}{(2k-2-2\epsilon\beta)(2k-4-2\epsilon\beta)(2-2\epsilon\beta)(-2\epsilon\beta)} \widehat{\psi}_{0\epsilon} \\
 &= \frac{(2k)!!}{2^k} \frac{(-2\epsilon\beta)_{2k}}{(-\epsilon\beta)_k} \widehat{\psi}_{0\epsilon} \\
 &= \frac{k!(-2\epsilon\beta)_{2k}}{(-\epsilon\beta)_k} \widehat{\psi}_{0\epsilon}. \tag{3.3.23}
 \end{aligned}$$

Portanto podemos escrever

$$M_{2k,\epsilon}^2 = \frac{k!(-2\epsilon\beta)_{2k}}{(-\epsilon\beta)_k}. \tag{3.3.24}$$

Também através da relação (3.3.17), podemos concluir que

$$M_{2k+1,\epsilon}^2 = (2k+1-2\epsilon\beta)M_{2k,\epsilon}^2 = \frac{k!(-2\epsilon\beta)_{2k+2}}{2(-\epsilon\beta)_{k+1}}. \tag{3.3.25}$$

3.4 $n = 2$ com deformação do tipo Klein e superálgebra geradora de espectro $D(2, 1; \alpha)$

Para $n = 2$ temos operadores diferenciais em matrizes complexas 4×4 . Os operadores novamente serão construídos em termos de uma álgebra de Clifford e tal será dada pelas matrizes γ_J ($J = 1, 2, \dots, 5$) definidas por

$$\gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_4 = \sigma_1 \otimes \mathbb{I}_2, \quad \gamma_5 = \sigma_3 \otimes \mathbb{I}_2, \tag{3.4.1}$$

onde σ_i 's são novamente as matrizes de Pauli e a matriz $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, diagonal, corresponde ao operador de número fermiônico.

Os oito operadores fermiônicos Q_I, \tilde{Q}_I ($I = 1, 2, 3, 4$), a álgebra conforme H, D, K (fechando $sl(2)$) e a R-simetria $S_i, W_{ij} = -W_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$) são definidos através de

$$\begin{aligned}
 Q_I &= \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_I \cdot \left(\partial_x + \frac{\beta\gamma_5}{x} \right), \\
 \tilde{Q}_I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_I \cdot x, \\
 H &= \frac{1}{2} \left(-\partial_x^2 + \frac{\beta^2 + \beta\gamma_5}{x^2} \right) \cdot \mathbb{I}_4, \\
 D &= -\frac{i}{2} \left(x\partial_x + \frac{1}{2} \right) \cdot \mathbb{I}_4, \\
 K &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \mathbb{I}_4, \\
 S_i &= \frac{i}{2} \gamma_4 \gamma_i (1 - 2\beta\gamma_5), \\
 W_{ij} &= \frac{i}{2} \gamma_i \gamma_j (1 - 2\beta\gamma_5), \tag{3.4.2}
 \end{aligned}$$

onde β , o parâmetro de deformação, é um número real. Os (anti)comutadores não nulos entre esses operadores realizam uma representação de $D(2, 1; \alpha)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 [D, K] &= -iK, \\
 [D, H] &= iH, \\
 [H, K] &= -2iD, \\
 \{Q_I, Q_J\} &= 2\delta_{IJ}H, \\
 \{\tilde{Q}_I, \tilde{Q}_I\} &= 2\delta_{IJ}K, \\
 \{Q_I, \tilde{Q}_I\} &= -2D, \\
 \{Q_4, \tilde{Q}_i\} &= S_i, \\
 \{\tilde{Q}_4, Q_i\} &= -S_i, \\
 \{Q_i, \tilde{Q}_j\} &= W_{ij}, \\
 [D, Q_I] &= \frac{i}{2}Q_I, \\
 [D, \tilde{Q}_I] &= -\frac{i}{2}\tilde{Q}_I, \\
 [Q_I, K] &= i\tilde{Q}_I, \\
 [\tilde{Q}_I, H] &= -iQ_I, \\
 [Q_4, S_i] &= iQ_i, \\
 [\tilde{Q}_i, S_j] &= -i\delta_{ij}\tilde{Q}_4 + 2i\beta\epsilon_{ijk}\tilde{Q}_k, \\
 [Q_i, S_j] &= -i\delta_{ij}Q_4 + 2i\beta\epsilon_{ijk}Q_k, \\
 [\tilde{Q}_4, W_{ij}] &= -2i\beta\epsilon_{ijk}\tilde{Q}_k, \\
 [Q_4, W_{ij}] &= -2i\beta\epsilon_{ijk}Q_k, \\
 [\tilde{Q}_i, W_{jk}] &= i(\delta_{ij}\tilde{Q}_k - \delta_{ik}\tilde{Q}_j) + 2i\beta\epsilon_{ijk}\tilde{Q}_4, \\
 [Q_i, W_{jk}] &= i(\delta_{ij}Q_k - \delta_{ik}Q_j) + 2i\beta\epsilon_{ijk}Q_4, \\
 [S_i, S_j] &= -iW_{ij} + 2i\beta\epsilon_{ijk}S_k, \\
 [S_i, W_{jk}] &= i\delta_{ij}(S_k - \beta\epsilon_{klm}W_{lm}) - i\delta_{ik}(S_j - \beta\epsilon_{jlm}W_{lm}), \\
 [W_{ij}, W_{kl}] &= i(\delta_{ik}\tilde{W}_{lj} - \delta_{il}\tilde{W}_{kj} + \delta_{jk}\tilde{W}_{il} - \delta_{jl}\tilde{W}_{ik}), \tag{3.4.3}
 \end{aligned}$$

onde $\tilde{W}_{ij} = W_{ij} - 2\beta\epsilon_{ijk}S_k$. O parâmetro β é relacionado com o parâmetro α usual de $D(2, 1; \alpha)$ [23, 44] da seguinte forma:

$$\alpha = \beta - \frac{1}{2}. \tag{3.4.4}$$

Da mesma maneira que fizemos anteriormente, podemos definir $a_I = Q_I + i\tilde{Q}_I$ e $a_I^\dagger = Q_I - i\tilde{Q}_I$ e termos a relação

$$[a_I, a_I^\dagger] = \mathbb{I}_4 - 2\beta\gamma_5, \tag{3.4.5}$$

que é a de um oscilador do tipo Klein. De forma análoga ao caso $n = 1$, pode-se observar que uma subálgebra $osp(2|2) \subset D(2, 1; \alpha)$ é suficiente para gerar o espectro da teoria, sendo o resto da álgebra redundante para esse propósito. Há diferentes escolhas equivalentes para a subálgebra $osp(2|2)$. Podemos tomar, por exemplo, $H, D, K, Q_1, Q_3, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3, W_{13}$, onde o último operador corresponde à R-simetria $u(1)$ de $osp(2|2)$. Outra escolha possível consiste em tomarmos os operadores $H, D, K, Q_2, Q_4, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, S_2$. Mas, também como visto anteriormente, é preciso levar em conta toda a álgebra $D(2, 1; \alpha)$ para termos a R-simetria completa.

Também como antes, o Hamiltoniano β -deformado H_{osc} é definido por

$$H_{osc} = \frac{1}{2}\{a_I, a_I^\dagger\} = H + K = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 + \frac{\beta^2 + \beta\gamma_5}{x^2}) \cdot \mathbb{I}_4 \quad (3.4.6)$$

e os comutadores

$$[H_{osc}(\beta), a_I] = -a_I, \quad [H_{osc}(\beta), a_I^\dagger] = a_I^\dagger \quad (3.4.7)$$

atestam que os operadores a_I^\dagger 's e a_I 's são operadores de criação e aniquilação.

Quatro estados de peso mínimo distintos são definidos por $a_I\psi = 0$ com $I = 1, 2, 3, 4$. Eles são (sem normalização)

$$\psi_{0++} = \begin{pmatrix} x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{0+-} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.8)$$

$$\psi_{0-+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{0--} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}. \quad (3.4.9)$$

Deve-se notar também que os operadores de criação a_I^\dagger fecham a supersimetria suave

$$\{a_I^\dagger, a_J^\dagger\} = \delta_{IJ}Z, \quad I, J = 1, 2, 3, 4, \quad [Z, a_I^\dagger] = 0, \quad (3.4.10)$$

onde

$$Z = 2H - 2K + 4iD. \quad (3.4.11)$$

Também é pertinente lembrar que nos pontos $\alpha = 0, -1$ ($\beta = \pm\frac{1}{2}$) na verdade temos a superálgebra

$$A(1, 1) \oplus su(2). \quad (3.4.12)$$

A seleção dos espaços de Hilbert admissíveis segue o mesmo esquema do caso $n = 1$ e temos os seguintes casos:

- i) no intervalo $\beta \leq -\frac{1}{2}$ o espaço de Hilbert corresponde a uma soma direta entre duas representações de peso mínimo com pesos mínimos bosônicos. Se $\beta < -\frac{1}{2}$ temos $D(2, 1; \alpha)$ com α pertencendo ao domínio fundamental FD_1 ou FD_2 dados em (1.3.19);
- ii) no intervalo $\beta \geq \frac{1}{2}$ o espaço de Hilbert é composto pela soma direta de duas representações de peso mínimo com pesos mínimos fermiônicos. No caso em que $\beta > \frac{1}{2}$, α pertence ao domínio fundamental FD_5 ou FD_6 dados em (1.3.19);
- iii) no caso intermediário em que $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ pode-se escolher a soma direta entre quatro representações de peso mínimo (duas com peso mínimo bosônico e duas com peso mínimo fermiônico). Nesse caso, α pertence ao domínio fundamental FD_3 ou FD_4 encontrados em (1.3.19).

Focaremos no caso iii) listado acima. Tomando agora os estados normalizados

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{0++} &= N_+ \begin{pmatrix} x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \widehat{\psi}_{0+-} &= N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ x^{-\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\psi}_{0-+} &= N_- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \widehat{\psi}_{0--} &= N_- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.4.13)$$

com N_{\pm} já introduzidos em (3.3.15), a degenerescência dos estados bosônicos (fermiônicos) é removida pelo operador S_2 ($[S_2, \gamma_5] = [S_2, H_{osc}(\beta)] = 0$).

Levando em conta a redundância de $D(2, 1; \alpha)$ enquanto superálgebra geradora de espectro, o espaço de Hilbert é gerado pelas autofunções dadas por

$$(a_1^\dagger)^n (a_3^\dagger)^m \widehat{\psi}_{0\epsilon\rho} = \psi_{nm;\epsilon\rho}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (3.4.14)$$

com respectivas energias

$$E_{n,m;\epsilon,\rho} = \frac{1}{2} - \epsilon\beta + n + m. \quad (3.4.15)$$

A ortonormalização dos estados $\psi_{nm;\epsilon\rho}$ segue os mesmos passos do caso $n = 1$ já apresentado.

Uma transformação de similaridade, análoga à (3.3.10), é dada pela matriz γ_4 . Sendo g um operador de (3.4.2), a transformação de similaridade se define por

$$g \mapsto g' = \gamma_4 g \gamma_4 \quad (3.4.16)$$

e, em particular, temos

$$H'_{osc}(\beta) = H_{osc}(-\beta). \quad (3.4.17)$$

Sem perda de generalidade podemos, então, escolher $\beta \geq 0$. Para o caso iii) listado acima, temos, dessa forma, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ e tal corresponde ao domínio fundamental FD_4 ($-\frac{1}{2} < \alpha < 0$) listado em (1.3.19). Nesse intervalo, os estados fundamentais são dois estados bosônicos degenerados, $\widehat{\psi}_{0,+,\rho}$, cuja energia é

$$E_{vac} = -\alpha. \quad (3.4.18)$$

Como comentário final, devemos observar que, como α varre todo um domínio fundamental, todas as superálgebras não equivalentes $D(2, 1; \alpha)$ (para α real) possuem sistema físico associado. Ou seja, não há nenhum “salto” entre as superálgebras geradoras de espectro dadas aqui.

3.5 $n = 2$ com deformação distinta e superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$

Agora apresentaremos um caso que não é um oscilador do tipo Klein. Na construção das matrizes bloco anti-diagonais em (3.2.2) para $n = 2$, há uma segunda possibilidade de solução para M_I diferente da apresentada em (3.2.7) e tal é dada por $M_I = \nu \tilde{\gamma}_I + ib \gamma_I \gamma_5$, onde $\tilde{\gamma}_I$ é, a menos de um sinal, uma das matrizes γ (diferente de γ_I e γ_5) dadas em (3.4.1). Para obdecer as restrições (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) devemos ter no máximo dois M_I distintos, isto é $I = 1, 2$. Já o requerimento de

que $V_I = \frac{1}{2}(M_I^2 - i\gamma_I M_I)$ seja diagonal implica $V_1 = V_2$ e, portanto, $b = \frac{1}{2}$ enquanto ν pode ser um número real arbitrário.

A menos de transformações de similaridade, Q_1 e Q_2 podem ser expressos como

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_1 \partial_x - i \frac{M_1}{x}), & M_1 &= \nu \gamma_2 + \frac{i}{2} \gamma_1 \gamma_5, \\ Q_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_3 \partial_x - i \frac{M_2}{x}), & M_2 &= -\nu \gamma_4 + \frac{i}{2} \gamma_3 \gamma_5. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Sendo γ_I as mesmas matrizes dadas em (3.4.1).

Além dos operadores Q_1 e Q_2 , os demais operadores de $osp(2|2)$ são $H, K, D, J, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$. Em particular,

$$H = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \cdot \mathbb{I}_4 + \frac{1}{x^2} V, \quad (3.5.2)$$

onde

$$V = \frac{1}{8} \text{diag}(4\nu^2 + 8\nu + 3, 4\nu^2 - 8\nu + 3, 4\nu^2 - 1, 4\nu^2 - 1) \quad (3.5.3)$$

e

$$J = -iE_{34} + iE_{43} \quad (3.5.4)$$

(E_{ij} denota a matriz com 1 na entrada ij e zero demais). Já os operadores $D, K, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ não são afetados pela deformação M_I e podem ser expressos como

$$D = -\frac{i}{2}(x\partial_x + \frac{1}{2}) \cdot \mathbb{I}_4, \quad K = \frac{1}{2}x^2 \cdot \mathbb{I}_4, \quad \tilde{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x\gamma_1, \quad \tilde{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x\gamma_3. \quad (3.5.5)$$

As relações de (anti)comutação permanecem exatamente as mesmas que as encontradas em (3.3.3).

Novamente podemos definir os operadores de criação e aniquilação através das combinações

$$a_I = Q_I + i\tilde{Q}_I, \quad a_I^\dagger = Q_I - i\tilde{Q}_I. \quad (3.5.6)$$

Eles fecham, aos pares, a álgebra de Heisenberg deformada

$$[a_I, a_I^\dagger] = \mathbb{I}_4 + G_I, \quad (3.5.7)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{diag}(-1 - 2\nu, -1 + 2\nu, 1 - 2\nu, 1 + 2\nu), \\ G_2 &= \text{diag}(-1 - 2\nu, -1 + 2\nu, 1 + 2\nu, 1 - 2\nu). \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Como G_I^2 não é proporcional a \mathbb{I}_4 , não temos mais um oscilador do tipo Klein aqui.

Também podemos definir o Hamiltoniano H_{osc} do oscilador deformado, o qual dado por

$$H_{osc} = H + K = \frac{1}{2}\{a_1, a_1^\dagger\} = \frac{1}{2}\{a_2, a_2^\dagger\} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) \cdot \mathbb{I}_4 + \frac{1}{x^2} V. \quad (3.5.9)$$

Levando em conta que

$$\{G_I, a_I\} = \{G_I, a_I^\dagger\} = 0, \quad (3.5.10)$$

podemos ver que a_I (a_I^\dagger) são de fato operadores de aniquilação (criação), pois satisfazem

$$[H_{osc}, a_I] = -a_I, [H_{osc}, a_I^\dagger] = a_I^\dagger. \quad (3.5.11)$$

Camo antes, γ_5 é o operador de número fermiônico com autovalor 1 para estados bosônicos e -1 para os fermiônicos.

Estamos agora em condições de introduzir as representações de peso mínimo definidas por

$$a_I \psi = 0, \quad I = 1, 2. \quad (3.5.12)$$

Dois estados de peso mínimo (ambos bosônicos) são obtidos, a saber,

$$\psi_{0,0}^1 = \begin{pmatrix} x^{-(\frac{1}{2}+\nu)} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{0,0}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{(\nu-\frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.13)$$

Os estados fermiônicos $\psi_{1,0}^1 = a_1^\dagger \psi_{0,0}^1$, $\psi_{1,0}^2 = a_1^\dagger \psi_{0,0}^2$, $\psi_{0,1}^1 = a_2^\dagger \psi_{0,0}^1$, $\psi_{0,1}^2 = a_2^\dagger \psi_{0,0}^2$ satisfazem $a_2 \psi_{1,0}^1 = a_2 \psi_{1,0}^2 = a_1 \psi_{0,1}^1 = a_1 \psi_{0,1}^2 = 0$, mas ainda pertencem às representações de peso mínimo induzidas por $\psi_{0,0}^1$ e $\psi_{0,0}^2$.

Como mostrado no Apêndice B, uma autofunção da forma $x^\beta e^{-\frac{1}{2}x^2}$ é normalizável se $\beta > -\frac{1}{2}$. Disso segue-se que

$$\nu \neq 0. \quad (3.5.14)$$

Além disso, teremos apenas um estado de peso mínimo, sendo esse $\psi_{0,0}^1$ para $\nu < 0$ e $\psi_{0,0}^2$ para $\nu > 0$. A energia de vácuo fica então definida por

$$E_{vac} = -\frac{1}{2} + |\nu| \quad (3.5.15)$$

e o espectro da teoria toma a forma

$$E_n = -\frac{1}{2} + |\nu| + n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.5.16)$$

Com exceção do estado fundamental, todos os estados são duplamente degenerados. Ou seja, temos uma torre de estados da forma $(1, 2, 2, 2, \dots)$. Além disso, os operadores de criação fecham uma álgebra de supersimetria suave $\mathcal{N} = 2$ através das relações

$$\{a_I^\dagger, a_J^\dagger\} = \delta_{IJ} Z, \quad [Z, a_I^\dagger] = 0, \quad (3.5.17)$$

com

$$Z = 2H - 2K + 4iD. \quad (3.5.18)$$

Agora, consideremos $\nu > 0$. O estado fundamental (já normalizado) será

$$\widehat{\psi}_{0,0}^2 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\nu)}} \psi_{0,0}^2. \quad (3.5.19)$$

Dado o nível de energia n , os estados possíveis serão $(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \widehat{\psi}_{0,0}^2$, onde $n = n_1 + n_2$. Devido a (3.5.17), apenas dois autoestados distintos (a menos de uma fase) existem em cada nível de energia com $n > 0$ como já antecipado. Podemos escolher eles como sendo

$$\psi_{n,0}^2 = (a_1^\dagger)^n \widehat{\psi}_{0,0}^2, \quad \psi_{n-1,1}^2 = (a_1^\dagger)^{n-1} a_2^\dagger \widehat{\psi}_{0,0}^2. \quad (3.5.20)$$

Seguindo o mesmo método empregado na Seção 3.2, podemos obter os estados ortonormais, os quais são

$$\widehat{\psi}_{n,0}^2 = N_{n,0} \psi_{n,0}^2, \quad \widehat{\psi}_{n-1,1}^2 = N_{n-1,1} \psi_{n-1,1}^2, \quad (3.5.21)$$

onde

$$N_{n,0} = \left(2^n \left[\frac{n}{2} \right]! (\nu)_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right)^{-1/2},$$

$$N_{2m-1,1} = \frac{1}{\sqrt{2^{2m} (m-1)! (\nu)_{m+1}}}, \quad N_{2m,1} = \frac{1}{\sqrt{2^{2m+1} m! (\nu)_{m+1}}}. \quad (3.5.22)$$

Nas equações acima, $(\nu)_m$ denota o símbolo de Pochhammer enquanto $[x]$ e $\lceil x \rceil$ são, respectivamente, as funções piso e teto.

3.6 Comentários finais

Na Seção 3.2 apresentamos as condições a serem satisfeitas para que tenhamos um oscilador deformado com superálgebra geradora de espectro. Ao satisfazermos as condições (3.2.3) e (3.2.4) temos um sistema quântico supersimétrico com invariância de escala. A existência de uma álgebra geradora de espectro superconforme vem das condições adicionais (3.2.5) e (3.2.6).

Nós apresentamos nas seções seguintes as soluções mais gerais para $n = 1$ e $n = 2$, sendo o último caso dividido entre a solução com oscilador do tipo Klein e a que não é um oscilador do tipo Klein. Não tratamos dos casos em que $n \geq 3$, mas vamos tecer alguns comentários. O único sistema não trivial encontrado até o momento com $n \geq 3$, o qual satisfazendo as condições que apresentamos nesse capítulo, foi apresentado em [60]. Trata-se de um oscilador deformado que não é do tipo Klein, com $n = 4$ e superálgebra geradora de espectro $F(4)$ (supersimetria $\mathcal{N} = 8$). Outro aspecto importante é que não há nenhum parâmetro de deformação, fazendo desse sistema um sistema unicamente definido. No entanto tal achado se deve à imensa simetria do sistema e da covariância octonionônica dos operadores. Os resultados de [60] também descartam a possibilidade de sistemas com $n = 4$ não triviais baseados na covariância octonionônica com superálgebras geradoras de espectro $osp(8|2)$ e $G(3)$.

Dessa forma, podemos fazer o seguinte sumário:

- i) para $n = 1$ temos um oscilador deformado do tipo Klein com parâmetro de deformação real β . No limite $\beta \rightarrow 0$, o oscilador não deformado é recuperado e tanto o oscilador deformado como não deformado possuem superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$;
- ii) Para $n = 2$ temos dois casos com cada um trazendo uma nova característica. Para a deformação do tipo Klein, a qual depende do parâmetro α , temos como superálgebra geradora de espectro $D(2, 1; \alpha)$, mas $osp(4|2)$ é recuperada quando fazemos $\alpha \rightarrow 0$. No caso em que a deformação não é do tipo Klein, no entanto, temos que a superálgebra geradora de espectro é $osp(2|2)$, a deformação depende do parâmetro $\nu \neq 0$ e não é possível recuperar o caso não deformado por variação contínua de ν .

- iii) Para $n = 4$ apenas se conhece o caso em que a superálgebra geradora de espectro é $F(4)$. o sistema é unicamente definido e não é possível recuperar o caso não deformado a partir dele.

Capítulo 4

Mecânica Quântica Superconforme em Três Dimensões

Nesse capítulo apresentaremos uma representação da simetria superconforme $sl(2|1)$ em três dimensões. Como anteriormente, a representação trigonométrica nos será de maior interesse e nosso foco de análise. Também como nos casos anteriores, o Hamiltoniano trigonométrico será um oscilador deformado onde a álgebra superconforme age como superálgebra geradora de espectro. Os resultados aqui apresentados também estão disponíveis em [33].

4.1 Hamiltoniano parabólico

Não há ainda um método como o encontrado em [32] e exposto no capítulo anterior para construir a representação apresentada aqui. No entanto podemos dizer que os Hamiltonianos que serão expostos foram obtidos de forma inspirada pelos procedimentos do capítulo anterior. Como não temos um método propriamente dito, vamos começar diretamente com as álgebras de Clifford e construir a representação de $sl(2|1)$ a partir delas.

Definamos as representações de $Cl(2, 0)$ e $Cl(0, 3)$ que usaremos aqui. Elas são

$$\begin{aligned}\gamma_a &= \sigma_a \otimes \mathbb{I}_2, \quad a = 1, 2 && Cl(2, 0) \\ h_i &= \mathbb{I}_2 \otimes i\sigma_i, \quad i = 1, 2, 3 && Cl(0, 3)\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

onde σ_a e σ_i são matrizes de Pauli. Note que γ_a são bloco anti-diagonais enquanto h_i são bloco diagonais. Além disso, temos $\gamma_3 = -i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$, o qual se trata do operador de número fermiônico. As matrizes em (4.1.1) são matrizes complexas 4×4 e satisfazem as relações

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{I}_4, \quad \{h_i, h_j\} = -2\delta_{ij}\mathbb{I}_4, \quad [\gamma_a, h_i] = 0.\tag{4.1.2}$$

É interessante que sejam introduzidos os operadores $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = x_i h_i$ e $\mathbf{L} \cdot \mathbf{h} = L_i h_i$, onde $L_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k$ e x_i são os operadores de posição em coordenadas cartesianas ($i = 1, 2, 3$). Esses operadores satisfazem as relações

$$\{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{h}\} = -2i\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}, \quad (\mathbf{L} \cdot \mathbf{h})^2 = -\mathbf{L}^2 - i\mathbf{L} \cdot \mathbf{h},\tag{4.1.3}$$

que são resultados inesperadamente cruciais para obter os demais resultados apresentados aqui.

Agora podemos definir os operadores supersimétricos e eles são

$$Q_a = \gamma_a \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2r}} \left(\partial_r - \frac{\beta}{r} \gamma_3 + i \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{h}}{r} \right), \quad (4.1.4)$$

onde β é um parâmetro real e $r = \sqrt{x_i x_i}$. Assim, o Hamiltoniano parabólico será

$$\begin{aligned} H_{3D} = Q_a^2 &= -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \gamma_3 \left(i \mathbf{L} \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta^2}{2r^2} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{\beta}{r^2} \sigma \cdot \mathbf{L} + \frac{\beta(\beta+1)}{2r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \sigma \cdot \mathbf{L} + \frac{\beta(\beta-1)}{2r^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Os parceiros conformes de Q_a são

$$\bar{Q}_a = -i \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2}} \gamma_a, \quad (4.1.6)$$

o que nos leva a ter o operador

$$K = (\bar{Q}_a)^2 = \frac{r^2}{2}. \quad (4.1.7)$$

Finalmente, o anticomutador entre Q_a e \bar{Q}_b nos dá

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -i \epsilon_{ab} \left(\frac{3}{2} \gamma_3 + \beta \right) + i \delta_{ab} \left(r \partial_r + \frac{3}{2} \right). \quad (4.1.8)$$

Definindo

$$I = i \left(\frac{3}{2} \gamma_3 + \beta \right), \quad D = i \left(r \partial_r + \frac{3}{2} \right), \quad (4.1.9)$$

nós podemos ver que a superálgebra é $sl(2|1)$ com I sendo o gerador da R-simetria $U(1)$.

4.2 Hamiltoniano trigonométrico

Para obter o Hamiltoniano trigonométrico, faremos exatamente como já feito nos casos anteriores e definir

$$Q_a^\pm = Q_a \mp i \bar{Q}_a, \quad (4.2.1)$$

sendo que Q_a e \bar{Q}_a são definidos em (4.1.4) e (4.1.6). Ou seja,

$$Q_a^\pm = \gamma_a \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2r}} \left(\partial_r \mp r - \frac{\beta}{r} \gamma_3 + i \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{h}}{r} \right). \quad (4.2.2)$$

O Hamiltoniano trigonométrico, ao seguirmos o “truque” dff [26], será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3D} = H_{3D} + K &= -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \gamma_3 \left(i \mathbf{L} \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{\beta}{r^2} \sigma \cdot \mathbf{L} + \frac{\beta(\beta+1)}{2r^2} + \frac{r^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \sigma \cdot \mathbf{L} + \frac{\beta(\beta-1)}{2r^2} + \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

A forma do Hamiltoniano ainda é bem similar a dos casos já discutidos, mas é especialmente similar ao Hamiltoniano (2.4.13) (também pode ser encontrado em [31]) e, de fato, como veremos adiante na Seção 4.4, quando reduzirmos esse Hamiltoniano a duas dimensões, obteremos (2.4.13) como parte dele.

4.3 A álgebra superconforme como superálgebra geradora de espectro

4.3.1 Estados de peso mínimo

Os operadores Q 's definidos em (4.2.2) são em verdade operadores de criação e aniquilação. Com efeito, é verificável que

$$[\mathcal{H}_{3D}, Q_a^\pm] = \pm Q_a^\pm. \quad (4.3.1)$$

Tendo isso em mente, podemos calcular os estados de peso mínimo obtidos a partir de $Q_a^- |\Lambda_0\rangle = 0$, sendo Λ_0 um conjunto apropriado de números quânticos, e esperar que sejam autoestados do Hamiltoniano. Para tornar nosso trabalho mais simples, vamos escrever

$$Q_a^\pm = A_a B, \quad A_a = \gamma_a \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2}r}, \quad B = \mathbb{I}_4 \left(\partial_r \mp r - \frac{\beta}{r} \gamma_3 + i \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{h}}{r} \right), \quad (4.3.2)$$

e observar que $A_a |\Lambda_0\rangle = 0 \iff |\Lambda_0\rangle = 0$. Assim, nos basta solucionar $B |\Lambda_0\rangle = 0$ para termos os estados de peso mínimo. Por claridade, vamos reescrever B como

$$B = \begin{pmatrix} \partial_r + r - \frac{\beta}{r} - \frac{2}{r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \partial_r + r + \frac{\beta}{r} - \frac{2}{r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \sigma. \quad (4.3.3)$$

Agora, seja $\langle \mathbf{x} | \Lambda_0 \rangle = \psi_{0jm}^+ + \psi_{0jm}^- + \tilde{\psi}_{0jm}^+ + \tilde{\psi}_{0jm}^- = \psi_{\Lambda_0}$ o ansatz com

$$\begin{aligned} \psi_{0jm}^\pm &= e_\pm \otimes f^\pm(r) \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j - \frac{1}{2}; \theta, \phi \right), \\ \tilde{\psi}_{0jm}^\pm &= e_\pm \otimes \tilde{f}^\pm(r) \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j + \frac{1}{2}; \theta, \phi \right), \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

onde $\mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi)$ é a função angular de spin definida por

$$\mathcal{Y}_{jm} \left(l = j \mp \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) = \sum_{m', \epsilon} (l, m', \epsilon | j, m) Y_l^{m'}(\theta, \phi) e_\epsilon, \quad (\epsilon = +, -) \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

com $Y_l^{m'}(\theta, \phi)$ sendo os harmônicos esféricos em coordenadas esféricas, $e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $(l, m', \epsilon | j, m)$ os coeficientes de Clebsch-Gordan. A utilidade das funções angulares $\mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi)$ se dá pelo fato de serem autofunções simultâneas de $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2$, $J_3 = L_3 + S_3$, \mathbf{S}^2 , \mathbf{L}^2 e $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$. Com efeito, pode-se verificar que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^2 \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi) &= j(j+1) \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi), \\
 J_3 \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi) &= m \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi), \\
 \mathbf{S}^2 \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi) &= \frac{3}{4} \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi), \\
 \mathbf{L}^2 \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi) &= l(l+1) \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi), \\
 \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi) &= \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi).
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Através desse último resultado, $B\psi_{\Lambda_0} = 0$ dá-nos

$$\left(\partial_r + r - \frac{1}{r} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \pm \beta \right] \right) \begin{cases} f^\pm(r) \\ \tilde{f}^\pm(r) \end{cases} = 0 \tag{4.3.8}$$

e é fácil verificar que

$$\begin{cases} f^\pm(r) \\ \tilde{f}^\pm(r) \end{cases} = r^{[\pm\beta + j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}]} e^{-\frac{r^2}{2}} \tag{4.3.9}$$

é uma solução de (4.3.8).

As autofunções ψ_{0jm}^\pm e $\tilde{\psi}_{0jm}^\pm$ devem ser normalizáveis. Começemos obtendo a condição de normalização para ψ_{0jm}^\pm . Precisamos ter

$$\int d^3x \psi_{0jm}^{\pm\dagger} \psi_{0jm}^\pm < \infty. \tag{4.3.10}$$

Ou seja,

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{jm}^\dagger \mathcal{Y}_{jm} \int_0^\infty (f^\pm(r))^2 r^2 dr < \infty, \tag{4.3.11}$$

onde $d\Omega$ é um ângulo sólido infinitesimal. Como $\mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi)$ são ortonormais devido à ortonormalidade dos harmônicos esféricos, nós acabamos ficando com a condição

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty (f^\pm(r))^2 r^2 dr < \infty \\
 &\int_0^\infty r^{2[\pm\beta + j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] + 1} e^{-r^2} r dr < \infty.
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Fazendo a mudança de variáveis $r^2 = y$ e usando $\pm\beta + j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \alpha_\pm$ por simplicidade, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\alpha_\pm + \frac{3}{2} - 1} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma\left(\alpha_\pm + \frac{3}{2}\right), \tag{4.3.13}$$

onde Γ é a função gama. O resultado é, então, finito e positivo apenas se $\alpha_\pm + \frac{3}{2} > 0$. Para $\tilde{\psi}_{0jm}^\pm$ o procedimento é igual. Juntando os resultados, temos

$$\begin{aligned}
 f^+ &: \beta + j - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \beta > -(j+1), \\
 \tilde{f}^+ &: \beta - j - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \beta > j, \\
 f^- &: -\beta + j - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \beta < j+1, \\
 \tilde{f}^- &: -\beta - j - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \beta < -j.
 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Como $j \geq \frac{1}{2}$, devemos observar que nenhum $\tilde{\psi}_{0jm}^\pm$ é normalizáveis no intervalo $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. Para evitar confusão, escrevamos f^\pm e \tilde{f}^\pm em termos de j :

$$f^\pm(r) = r^{\pm\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}, \quad \tilde{f}^\pm(r) = r^{\pm\beta-j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}. \tag{4.3.15}$$

Devemos enfatizar que a notação “ \sim ” sempre se referirá aos casos com $l = j + \frac{1}{2}$.

Dado $l = j \pm \frac{1}{2}$, ao aplicarmos \mathcal{H}_{3D} sobre ψ_{0jm}^\pm e $\tilde{\psi}_{0jm}^\pm$, temos

$$\begin{aligned}
 l = j - \frac{1}{2} &: \mathcal{H}_{3D}\psi_{0jm}^\pm = (1 + j \pm \beta) \psi_{0jm}^\pm, \\
 l = j + \frac{1}{2} &: \mathcal{H}_{3D}\tilde{\psi}_{0jm}^\pm = (-j \pm \beta) \tilde{\psi}_{0jm}^\pm,
 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

que nos dá quatro conjuntos de estados de peso mínimo com energias

$$\begin{aligned}
 l = j - \frac{1}{2} &: E_{0,j}^\pm = 1 + j \pm \beta, \\
 l = j + \frac{1}{2} &: \tilde{E}_{0,j}^\pm = -j \pm \beta.
 \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

É pertinente observar que (4.3.14) garante que os estados normalizáveis sempre terão energia positiva.

Retornando à equação (4.3.13), essa também nos dá o fator de normalização. Com efeito, sendo $\alpha_\pm = \pm\beta + j - \frac{1}{2}$ para f^\pm e $\alpha_\pm = \pm\beta - j - \frac{3}{2}$ para \tilde{f}^\pm , os estados normalizados são

$$\hat{\psi}_{0jm}^\pm = M_{0j}^{\pm\beta} \psi_{0jm}^\pm, \quad \hat{\tilde{\psi}}_{0jm}^\pm = \tilde{M}_{0j}^{\pm\beta} \tilde{\psi}_{0jm}^\pm, \tag{4.3.18}$$

onde

$$M_{0j}^{\pm\beta} = \sqrt{\frac{2}{\Gamma(\pm\beta + j + 1)}}, \quad \tilde{M}_{0j}^{\pm\beta} = \sqrt{\frac{2}{\Gamma(\pm\beta - j)}}. \tag{4.3.19}$$

Agora, levando em conta que

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{jm}^\dagger(l; \theta, \phi) \mathcal{Y}_{j'm'}(l'; \theta, \phi) = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{ll'}, \tag{4.3.20}$$

fica clara a ortonormalidade do conjunto $\{\hat{\psi}_{0jm}^\pm, \hat{\tilde{\psi}}_{0j'm'}^\pm\}$, pois $\hat{\psi}_{0jm}^+$ e $\hat{\psi}_{0jm}^-$ são ortonormais por construção (o mesmo para $\hat{\tilde{\psi}}_{0j'm'}^+$ e $\hat{\tilde{\psi}}_{0j'm'}^-$) e $\hat{\psi}_{0jm}^\pm$ possui l diferente de $\hat{\tilde{\psi}}_{0jm}^\pm$ por definição.

4.3.2 Estados excitados

Até agora, temos apenas os estados de peso mínimo, mas podemos obter os demais autoestados de \mathcal{H}_{3D} e gerar o restante do espaço de Hilbert ao aplicarmos repetidas vezes os operadores de criação Q_a^+ sobre os estados de peso mínimo. Um cálculo direto pode ser muito confuso, mas a identidade

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j \pm \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) = -\mathcal{Y}_{jm} \left(l = j \mp \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) \quad (4.3.21)$$

faz de nosso trabalho um muito mais fácil. Começemos por escrever os operadores Q_a^+ como

$$Q_a^+ = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_a \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \left(\partial_r - r - \frac{\beta}{r} - \frac{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \left(\partial_r - r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.3.22)$$

Ao aplicarmos sobre ψ_{0jm}^+ , temos

$$\begin{aligned} Q_a^+ \psi_{0jm}^+ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_a \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \left(\partial_r - r - \frac{\beta}{r} - \frac{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \left(\partial_r - r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^+(r) \mathcal{Y}_{jm} \left(j - \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_a \mathcal{Y}_{jm} \left(j + \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) \begin{pmatrix} \left[\partial_r - r - \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + \beta}{r} \right] f^+(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Agora, dado (4.3.15), segue-se que

$$\left[\partial_r - r - \frac{\beta + j - \frac{1}{2}}{r} \right] f^+(r) = -2r^{\beta + j + \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}. \quad (4.3.24)$$

Portanto o novo autoestado será dado por

$$\tilde{\psi}_{1jm}^- = \sqrt{2} i \gamma_a \begin{pmatrix} r^{\beta + j + \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j + \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.25)$$

O mesmo cálculo pode ser feito para $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ e, nesse caso, o novo autoestado será

$$\psi_{1jm}^- = \sqrt{2} i \gamma_a \begin{pmatrix} r^{\beta - j - \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j - \frac{1}{2}; \theta, \phi \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.26)$$

Devemos observar agora que $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$. Isso implica que Q_1^+ e Q_2^+ nos dão os mesmos autoestados a menos de uma fase e que Q_1^+ é suficiente para obter os demais autoestados. Ou seja, apenas uma subálgebra $osp(1|2) \subset sl(2|1)$ é requerida para gerar o espectro. No entanto é preciso lembrar que Q_2^+ ainda é necessário dentro da álgebra para termos a R-simetria I . Esse é o mesmo aspecto já observado no capítulo anterior para as superálgebras geradoras de espectro lá definidas. Por fim, nossos novos autoestados são

$$\begin{aligned} \psi_{1jm}^- &= e_- \otimes \sqrt{2} i r^{\beta - j - \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j - \frac{1}{2}; \theta, \phi \right), \\ \tilde{\psi}_{1jm}^- &= e_- \otimes \sqrt{2} i r^{\beta + j + \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm} \left(l = j + \frac{1}{2}; \theta, \phi \right). \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

É pertinente que façamos aqui uma comparação rápida entre os estados ψ_{1jm}^- e $\psi_{0jm}^- = e_- \otimes r^{-\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi)$. Primeiro devemos notar que ψ_{1jm}^- estará no espaço de Hilbert se $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ for normalizável e devemos ter $\beta > j$ para que isso aconteça. Por outro lado, para a normalização de ψ_{0jm}^- é-nos requerido $\beta < j+1$, como foi mostrado em (4.3.14). Disso temos as seguintes situações:

- i) $\beta \geq j+1$: apenas $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ é normalizável e ψ_{0jm}^- não está no espaço de Hilbert, mas pode-se verificar que $Q_+ \psi_{0jm}^- = \tilde{\psi}_{1jm}^+$ é proporcional a $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ quando $\beta = j+1$
- ii) $j+1 > \beta > j$: ambos $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ e ψ_{0jm}^- são normalizáveis e pertencem ao espaço de Hilbert.
- iii) $\beta \leq j$: somente ψ_{0jm}^- é normalizável e $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ não pertence ao espaço de Hilbert, no entanto temos $\psi_{1jm}^- \propto \psi_{0jm}^-$ se $\beta = j$.

O que podemos concluir disso tudo é o seguinte: indo de $\beta > j$ para $\beta = j$, temos que os estados ψ_{0jm}^- e ψ_{1jm}^- se tornam um e, indo de $\beta < j+1$ para $\beta = j+1$, os estados $\tilde{\psi}_{0jm}^+$ e $\tilde{\psi}_{1jm}^+$ se tornam o mesmo. Conclusões similares são válidas para $\tilde{\psi}_{0jm}^-$ e $\tilde{\psi}_{1jm}^-$ assim como entre os estados ψ_{0jm}^+ e ψ_{1jm}^+ .

Indo além na cadeia de estados iniciada por ψ_{0jm}^+ , obtemos os autoestados

$$\begin{aligned} \psi_{0jm}^+ &= e_+ \otimes r^{\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ Q_1^+ \psi_{0jm}^+ &= \sqrt{2} i e_- \otimes r r^{\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ (Q_1^+)^2 \psi_{0jm}^+ &= -2e_+ \otimes (\beta+j+1-r^2) r^{\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ (Q_1^+)^3 \psi_{0jm}^+ &= 2\sqrt{2} i e_- \otimes ((\beta+j+2)r-r^3) r^{\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right). \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Como os resultados são semelhantes começando com outros estados de peso mínimo, o padrão que observamos aqui é que a forma geral dos autoestados deve ser $p_{kj}(r)\psi_{0jm}^\pm$ e $\tilde{p}_{kj}(r)\tilde{\psi}_{0jm}^\pm$, com $p_{kj}(r)$ e $\tilde{p}_{kj}(r)$ sendo polinômios de r . Além disso, verifica-se que a operação Q_1^+ vai de $l = j - \frac{1}{2}$ para $l = j + \frac{1}{2}$ e vice-versa. Dada essa última conclusão, podemos definir os polinômios por recursão ao prestarmos atenção no autovalor apropriado de $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ em (4.3.22) para cada aplicação de Q_1^+ . Segue-se, portanto, que os autoestados são

$$\begin{aligned} \psi_{2k,j}^\pm &= Q_1^{2k} \psi_{0jm}^\pm = e_\pm \otimes (-1)^k 2^k p_{2k,j}^{\pm\beta}(r) r^{\pm\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \tilde{\psi}_{2k+1,j}^\pm &= Q_1^{2k+1} \psi_{0jm}^\mp = e_\pm \otimes i(-1)^k 2^{k+\frac{1}{2}} p_{2k+1,j}^{\mp\beta}(r) r^{\mp\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \tilde{\psi}_{2k,j}^\pm &= Q_1^{2k} \tilde{\psi}_{0jm}^\pm = e_\pm \otimes (-1)^k 2^k q_{2k,j}^{\pm\beta}(r) r^{\pm\beta-j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \psi_{2k+1,j}^\pm &= Q_1^{2k+1} \tilde{\psi}_{0jm}^\mp = e_\pm \otimes i(-1)^k 2^{k+\frac{1}{2}} q_{2k+1,j}^{\mp\beta}(r) r^{\mp\beta-j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

onde

$$\begin{aligned}
 p_{2k,j}^{\pm\beta}(r) &= \frac{1}{2^{2k}} \begin{pmatrix} r^{-\alpha_{\pm}} e^{\frac{r^2}{2}} & 0 \\ \partial_r - r - \frac{\alpha_{\pm}}{r} & \partial_r - r + \frac{\alpha_{\pm}+2}{r} \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} r^{\alpha_{\pm}} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 p_{2k+1,j}^{\pm\beta}(r) &= \frac{1}{2^{2k+1}} \begin{pmatrix} 0 & r^{-\alpha_{\pm}} e^{\frac{r^2}{2}} \\ \partial_r - r - \frac{\alpha_{\pm}}{r} & \partial_r - r + \frac{\alpha_{\pm}+2}{r} \end{pmatrix}^{2k+1} \begin{pmatrix} r^{\alpha_{\pm}} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 q_{2k,j}^{\pm\beta}(r) &= \frac{1}{2^{2k}} \begin{pmatrix} r^{-\alpha'_{\pm}} e^{\frac{r^2}{2}} & 0 \\ \partial_r - r - \frac{\alpha'_{\pm}}{r} & \partial_r - r + \frac{\alpha'_{\pm}+2}{r} \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} r^{\alpha'_{\pm}} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 q_{2k+1,j}^{\pm\beta}(r) &= \frac{1}{2^{2k+1}} \begin{pmatrix} 0 & r^{-\alpha'_{\pm}} e^{\frac{r^2}{2}} \\ \partial_r - r - \frac{\alpha'_{\pm}}{r} & \partial_r - r + \frac{\alpha'_{\pm}+2}{r} \end{pmatrix}^{2k+1} \begin{pmatrix} r^{\alpha'_{\pm}} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

com

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\pm} &= \pm\beta + j - \frac{1}{2}, \\
 \alpha'_{\pm} &= \pm\beta - j - \frac{3}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.3.31}$$

Pode-se dizer que as expressões (4.3.30) são as *fórmulas de Rodrigues* [63] para esses polinômios. Analisaremos eles em maior profundidade em breve. Abaixo seguem explicitamente os primeiros desses polinômios.

k	$p_{k,j}^{\pm\beta}$
0	1
1	$-r$
2	$r^2 \mp \beta - j - 1$
3	$-r^3 + (\pm\beta + j + 2)r$
4	$r^4 + 2(\pm\beta + j + 2)r^2 + (\pm\beta + j + 2)(\pm\beta + j + 1)$

k	$q_{k,j}^{\pm\beta}$
0	1
1	$-r$
2	$r^2 \mp \beta + j$
3	$-r^3 + (\pm\beta - j + 1)r$
4	$r^4 + 2(\pm\beta - j + 1)r^2 + (\pm\beta - j + 1)(\pm\beta - j)$

Por completez vamos mostrar que tipo de oscilador temos aqui. Usando (4.2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
 [Q_a^+, Q_b^-] &= [Q_a - i\bar{Q}_a, Q_b + i\bar{Q}_b] \\
 &= i [Q_a, \bar{Q}_b] - i [\bar{Q}_a, Q_b] + [Q_a, Q_b] + [\bar{Q}_a, \bar{Q}_b]
 \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

e, dado (4.1.4) e (4.1.6), segue-se que

$$[Q_a^+, Q_b^-] = \delta_{ab} (3 - 2\beta\gamma_3 + 2i\mathbf{L} \cdot \mathbf{h}) + 2\epsilon_{ab}\gamma_3\mathcal{H} \tag{4.3.33}$$

A deformação não é do tipo Klein (veja [64]).

4.3.3 Ortogonalidade e normalização

O conjunto dos estados de peso mínimo, $\{\hat{\psi}_{0jm}^{\pm}, \hat{\psi}_{0j'm'}^{\pm}\}$, é ortonormal, como já mostrado, devido à ortonormalidade das funções angulares de spin $\mathcal{Y}_{jm}(l; \theta, \phi)$. Pela mesma razão, para mostrar a ortogonalidade do conjunto de estados $\{\psi_{kj'm'}^{\pm}, \tilde{\psi}_{k'j'm'}^{\pm}\}$, basta nos preocuparmos com os casos em que $j = j'$ e $m = m'$, mas k podendo diferir. Nesse caso a ortogonalidade é imediata utilizando os operadores de criação e aniquilação. Com efeito, se temos $|2k, jm\rangle^{\pm} = (Q_1^+)^{2k} |0, jm\rangle^{\pm}$, $|2k+1, jm\rangle^{\pm} = (Q_1^+)^{2k+1} |0, jm\rangle^{\mp}$ e $Q_1^- = (Q_1^+)^{\dagger}$, então, sem perda de generalidade podemos escolher $k' > k$ e ${}^{\pm}\langle 2k', jm | 2k, jm\rangle^{\pm}$ será

$$\begin{aligned} {}^{\pm}\langle 2k', jm | 2k, jm\rangle^{\pm} &= {}^{\pm}\langle 0, jm | (Q_1^-)^{2k'} | 2k, jm\rangle^{\pm} \\ &\propto {}^{\pm}\langle 0, jm | (Q_1^-)^{2(k'-k)} | 0, jm\rangle^{\pm} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Para $2k+1$ o argumento é o mesmo. Esse resultado por si só garante a ortogonalidade dos polinômios introduzidos em (4.3.29), mas iremos além e mostrar que eles são essencialmente os polinômios de Laguerre associados [63]

$$L_k^{(\gamma)}(x) = \frac{x^{-\gamma} e^x}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k x^{\gamma+k} e^{-x}. \tag{4.3.35}$$

Para tanto, comecemos pelas equações (4.3.30) e, por simplicidade, reescrever os polinômios na forma

$$\begin{aligned} p_{2k}^{\alpha}(r) &= \begin{pmatrix} r^{-\alpha} e^{\frac{r^2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial_r - r + \frac{\alpha+2}{r} \\ \partial_r - r - \frac{\alpha}{r} & 0 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} r^{\alpha} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_{2k+1}^{\alpha}(r) &= \begin{pmatrix} 0 & r^{-\alpha} e^{\frac{r^2}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial_r - r + \frac{\alpha+2}{r} \\ \partial_r - r - \frac{\alpha}{r} & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \begin{pmatrix} r^{\alpha} e^{-\frac{r^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Veja que temos $p_{k,j}^{\pm\beta}$ se $\alpha = \pm\beta + j - \frac{1}{2}$ assim como $q_{k,j}^{\pm\beta}$ se $\alpha = \pm\beta - j - \frac{3}{2}$. Agora separaremos os polinômios de índice par dos de ímpar. Para os polinômios de índice par é válido que

$$p_{2(k+1)}^{\alpha}(r) = \frac{1}{4} r^{-\alpha} e^{\frac{r^2}{2}} \left(\partial_r - r + \frac{\alpha+2}{r} \right) \left(\partial_r - r - \frac{\alpha}{r} \right) p_{2k}^{\alpha} r^{\alpha} e^{-\frac{r^2}{2}} \tag{4.3.37}$$

e, assim, temos

$$p_2^{\alpha}(r) = r^2 - \alpha - \frac{3}{2}. \tag{4.3.38}$$

Portanto, como

$$L_1^{(\gamma)}(x) = -x + \gamma + 1, \tag{4.3.39}$$

devemos ter $x = r^2$ e $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}$ para tentarmos identificar essas duas séries de polinômios. Com isso em mãos, provaremos que a recursão para $2k$ em (4.3.36) é equivalente à formula de Rodrigues para os polinômios de Laguerre associados dada por (4.3.35) a menos de um fator multiplicativo. Faremos a prova por indução. Para $k = 1$ isso é verdade pelas identificações já feitas. De fato, usando (4.3.35), temos o resultado

$$L_1^{(\alpha+\frac{1}{2})}(r^2) = (r^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}} e^{r^2} \partial_{r^2} (r^2)^{\alpha+\frac{1}{2}+1} e^{-r^2} = \alpha + \frac{3}{2} - r^2 = -p_2^\alpha(r). \quad (4.3.40)$$

Supondo para $k = n$, i.e.

$$p_{2n}^\alpha(r) = C_n L_n^{(\alpha+\frac{1}{2})}(r^2), \quad C_n = \text{cons.}, \quad (4.3.41)$$

para $k = n + 1$ (usando (4.3.37)) temos

$$\begin{aligned} p_{2(n+1)}^\alpha(r) &= \frac{C_n}{4} r^{-\alpha} e^{\frac{r^2}{2}} \left(\partial_r - r + \frac{\alpha+2}{r} \right) \left(\partial_r - r - \frac{\alpha}{r} \right) L_n^{(\alpha+\frac{1}{2})}(r^2) r^\alpha e^{-\frac{r^2}{2}} \\ &= \frac{C_n}{4(n!)} r^{-\alpha} e^{\frac{r^2}{2}} \left(\partial_r - r + \frac{\alpha+2}{r} \right) \left(\partial_r - r - \frac{\alpha}{r} \right) r^{-2\alpha-1} e^{r^2} \left[(\partial_{r^2})^n r^{2\alpha+1+2n} e^{-r^2} \right] r^\alpha e^{-\frac{r^2}{2}} \\ &= \frac{C_n}{4(n!)} r^{-2\alpha-1} e^{r^2} \left(\partial_r^2 - \frac{2\alpha}{r} \partial_r \right) (\partial_{r^2})^n r^{2\alpha+1+2n} e^{-r^2} \\ &= \frac{C_n}{4(n!)} r^{-2\alpha-1} e^{r^2} \left(2(1-2\alpha) \partial_{r^2} + 4r^2 (\partial_{r^2})^2 \right) (\partial_{r^2})^n r^{2\alpha+1+2n} e^{-r^2} \\ &= \frac{C_n}{4(n!)} \left[2(1-2\alpha) r^{-2\alpha-1} e^{r^2} (\partial_{r^2})^{n+1} r^{2\alpha+1+2n} e^{-r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 4r^{-2\alpha+1} e^{r^2} (\partial_{r^2})^{n+2} r^{2\alpha-1+2(n+1)} e^{-r^2} \right] \\ &= \frac{C_n}{2(n!)} \left[(1-2\alpha) \frac{r^{-2\alpha+1}}{r^2} e^{r^2} (\partial_{r^2})^{n+1} r^{2\alpha-1+2(n+1)} e^{-r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{r^{-2\alpha+3}}{r^2} (\partial_{r^2})^{n+2} r^{2\alpha-3+2(n+2)} e^{-r^2} \right] \\ &= \frac{C_n}{2r^2} \left[\frac{(n+1)(1-2\alpha)}{(n+1)!} r^{-2\alpha+1} e^{r^2} (\partial_{r^2})^{n+1} r^{2\alpha-1+2(n+1)} e^{-r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} r^{-2\alpha+3} (\partial_{r^2})^{n+2} r^{2\alpha-3+2(n+2)} e^{-r^2} \right] \\ &= (n+1) \frac{C_n}{2r^2} \left((1-2\alpha) L_{n+1}^{(\alpha-\frac{1}{2})} + 2(n+2) L_{n+2}^{(\alpha-\frac{3}{2})} \right). \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Para simplificar, vamos reescrever o resultado com $\alpha + \frac{1}{2} = \gamma$ e $r^2 = x$:

$$p_{2(n+1)}^\alpha(r) = (n+1) \frac{C_n}{x} \left(-\gamma L_{n+1}^{(\gamma-1)} + (n+2) L_{n+2}^{(\gamma-2)} \right). \quad (4.3.43)$$

Dada a identidade $L_k^{(\gamma)} = L_k^{(\gamma+1)} - L_{k-1}^{(\gamma+1)}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_{2(n+1)}^\alpha(r) &= (n+1) \frac{C_n}{x} \left(-\gamma L_{n+1}^{(\gamma-1)} + (n+2) \left(L_{n+2}^{(\gamma-1)} - L_{n+1}^{(\gamma-1)} \right) \right) \\ &= (n+1) \frac{C_n}{x} \left(-(\gamma+n+2) L_{n+1}^{(\gamma-1)} + (n+2) L_{n+2}^{(\gamma-1)} \right) \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

e, usando a identidade $xL_{k-1}^{(\gamma+1)} = (\gamma+k)L_{k-1}^{(\gamma)} - kL_k^{(\gamma)}$, finalmente temos o resultado

$$p_{2(n+1)}^\alpha(r) = -(n+1) C_n L_{n+1}^{(\alpha+\frac{1}{2})}(r^2), \quad (4.3.45)$$

que é o que se queria demonstrar. A demonstração para $p_{2k+1}^\alpha(r)$ é análoga, mas nesse caso

devemos ter $p_{2k+1}^\alpha(r) = D_k r L_k^{(\alpha+\frac{3}{2})}(r^2)$. A equação (4.3.45) também nos dá uma maneira de encontrar C_k . Notando que $p_{2(k+1)}^\alpha = C_{k+1} L_{k+1}^{(\alpha+\frac{1}{2})} = -(k+1) C_k L_{k+1}^{(\alpha+\frac{1}{2})}$ e $C_0 = 1$, pode-se escrever $C_{k+1} = -(k+1) C_k$ e concluir que

$$C_k = (-1)^k k!. \quad (4.3.46)$$

Por fim, juntando também os resultados para $p_{2k+1}^\alpha(r)$, nós temos

$$\begin{aligned} p_{2k}^\alpha(r) &= (-1)^k k! L_k^{(\alpha+\frac{1}{2})}(r^2), \\ p_{2k+1}^\alpha(r) &= (-1)^{k+1} k! r L_k^{(\alpha+\frac{3}{2})}(r^2). \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

Agora podemos escrever os autoestados em (4.3.29) em termos dos polinômios de Laguerre associados:

$$\begin{aligned} \psi_{2k,jm}^\pm &= e_\pm \otimes 2^k k! L_k^{(\pm\beta+j)}(r^2) r^{\pm\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \tilde{\psi}_{2k+1,jm}^\pm &= -e_\pm \otimes i 2^{k+\frac{1}{2}} k! L_k^{(\mp\beta+j+1)}(r^2) r^{\mp\beta+j+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \tilde{\psi}_{2k,jm}^\pm &= e_\pm \otimes 2^k k! L_k^{(\pm\beta-j-1)}(r^2) r^{\pm\beta-j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \psi_{2k+1,jm}^\pm &= -e_\pm \otimes i 2^{k+\frac{1}{2}} k! L_k^{(\mp\beta-j)}(r^2) r^{\mp\beta-j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right). \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

A normalização agora é imediata de se implementar, pois temos a relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre associados

$$\int_0^\infty dx x^\gamma e^{-x} L_n^{(\gamma)}(x) L_m^{(\gamma)}(x) = \frac{\Gamma(n+\gamma+1)}{n!} \delta_{nm} \quad (4.3.49)$$

e, portanto, podemos extrair o fator de normalização de $\psi_{2k,jm}^\pm$ através de

$$C^2 \int d\Omega \mathcal{Y}_{jm}^\dagger \mathcal{Y}_{j'm'} \frac{1}{2} \int_0^\infty L_k^{(\pm\beta+j)} L_{k'}^{(\pm\beta+j)} r^{2(\pm\beta+j)} e^{-r^2} d(r^2) = \frac{C^2}{2} \frac{\Gamma(k \pm \beta + j + 1)}{k!} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta_{kk'}, \quad (4.3.50)$$

onde $C = 2^k k!$. O cálculo para os demais casos é análogo. Enfim, os autoestados normalizados são

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{2k,jm}^\pm &= e_\pm \otimes M_{2k,j}^{\pm\beta} L_k^{(\pm\beta+j)}(r^2) r^{\pm\beta+j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \hat{\psi}_{2k+1,jm}^\pm &= e_\pm \otimes \tilde{M}_{2k+1,j}^{\pm\beta} L_k^{(\mp\beta+j+1)}(r^2) r^{\mp\beta+j+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \hat{\psi}_{2k,jm}^\pm &= e_\pm \otimes \tilde{M}_{2k,j}^{\pm\beta} L_k^{(\pm\beta-j-1)}(r^2) r^{\pm\beta-j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j+\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \\ \hat{\psi}_{2k+1,jm}^\pm &= e_\pm \otimes M_{2k+1,j}^{\pm\beta} L_k^{(\mp\beta-j)}(r^2) r^{\mp\beta-j-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathcal{Y}_{jm}\left(j-\frac{1}{2}; \theta, \phi\right), \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{2k,j}^{\pm\beta} &= \sqrt{\frac{2(k!)}{\Gamma(k \pm \beta + j + 1)}}, \quad \widetilde{M}_{2k+1,j}^{\pm\beta} = \sqrt{\frac{2(k!)}{\Gamma(k \mp \beta + j + 2)}}, \\ \widetilde{M}_{2k,j}^{\pm\beta} &= \sqrt{\frac{2(k!)}{\Gamma(k \pm \beta - j)}}, \quad M_{2k+1,j}^{\pm\beta} = \sqrt{\frac{2(k!)}{\Gamma(k \mp \beta - j + 1)}} \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

são os fatores de normalização. Veja que esses fatores são consistentes com (4.3.19). As energias desses estados são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E_{2k,j}^{\pm} &= 1 + j \pm \beta + 2k, \\ \widetilde{E}_{2k+1,j}^{\pm} &= 1 + j \pm \beta + 2k + 1, \\ \widetilde{E}_{2k,j}^{\pm} &= -j \pm \beta + 2k, \\ E_{2k+1,j}^{\pm} &= -j \pm \beta + 2k + 1. \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

4.4 Recuperando o Hamiltoniano bidimensional

Para obter o Hamiltoniano bidimensional, apenas precisamos restringir $\mathbf{L} \cdot \mathbf{h}$ e $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}$ de maneira a atuarem apenas nas coordenadas do plano. Tais restrições nos dão

$$L = L_3 h_3, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = x_i h_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.4.1)$$

Com esses operadores, temos as relações

$$\{L, \mathbf{r} \cdot \mathbf{h}\} = -i\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}, \quad L^2 = -L_3^2. \quad (4.4.2)$$

Da mesma forma que definimos os operadores Q 's em três dimensões, aqui podemos definir

$$Q_a = \gamma_a \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2r}} \left(\partial_r - \frac{\beta}{r} \gamma_3 + i \frac{L}{r} \right), \quad (4.4.3)$$

para a representação parabólica. Portanto o Hamiltoniano parabólico é

$$Q_a^2 = H_{2D} = -\frac{1}{2} \nabla^2 - i \frac{\beta}{r^2} \gamma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} \quad (4.4.4)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{\beta}{r^2} \sigma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \sigma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} \end{pmatrix}. \quad (4.4.5)$$

Tal Hamiltoniano é muito similar ao encontrado em (2.4.5) se tomarmos $\beta = \frac{2\lambda+1}{2}$. De fato o Hamiltoniano na parte inferior é exatamente (2.4.5). Mas aqui as matrizes têm o dobro do tamanho e os operadores Q 's levam de estados da parte superior para a inferior e vice-versa. Ou seja, não temos os mesmos Q 's dados em (2.4.2).

Os outros operadores da álgebra são obtidos analogamente ao caso anterior e são dados por

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_a &= -i \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2}} \gamma_a, \\
 K &= \frac{r^2}{2}, \\
 D &= i(r\partial_r + 1), \\
 I &= i(\gamma_3 + \beta).
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Novamente estamos interessados no Hamiltoniano trigonométrico e, como antes, pode-se definir

$$\begin{aligned}
 Q_a^\pm &= Q_a \mp i\bar{Q}_a \\
 &= \gamma_a \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2}r} \left(\partial_r \mp r - \frac{\beta}{r} \gamma_3 + i \frac{L}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

e obter \mathcal{H}_{2D} como sendo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{2D} &= H_{2D} + K = -\frac{1}{2} \nabla^2 - i \frac{\beta}{r^2} \gamma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{\beta}{r^2} \sigma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{\beta}{r^2} \sigma_3 L_3 + \frac{\beta^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Mais uma vez esse Hamiltoniano é similar a um conhecido, a saber, o (2.4.13), mas os operadores de criação e aniquilação em (4.4.7) possuem uma diferença fundamental dos encontrados no caso anterior. Com efeito, em (2.4.12) a condição de periodicidade sobre θ impõe limitações em relação a existência de simetria superconforme atuando no espaço de Hilbert em questão, mas aqui o operador $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}$ não possui dependência em β e, poranto, não há tal limitação. Isto é, temos a simetria mantida para qualquer β .

Em relação ao tipo de oscilador que temos, resultado semelhante ao do caso tridimensional continua válido aqui. Isto é,

$$[Q_a^+, Q_b^-] = 2\delta_{ab} (1 - \beta\gamma_3 + iL_3 h_3) + 2\epsilon_{ab} \gamma_3 \mathcal{H}, \tag{4.4.9}$$

\mathcal{H}_{2D} é dado por (4.4.8).

4.5 Breve discussão

Há várias questões em aberto sobre os sistemas apresentados. A simetria $sl(1|2)$ é suficiente para gerar todo o espaço de Hilbert? Como a simetria de rotação se relaciona com a superálgebra aqui apresentada? Precisamos de uma estrutura mais geral para englobar toda a simetria do sistema? Existe alguma simetria discreta como a encontrar em (2.4.22) que nos leve a novos operadores, como (2.4.23), e nos permita construir todos os estados excitados a partir dos estados de vácuo? Como recuperar o oscilador tridimensional usual e relacionar nossos operadores de criação e aniquilação com os usualmente concebidos no oscilador tridimensional? Como precisamente o Hamiltoniano em (4.4.8) se relaciona com o encontrado em (2.4.13) e porque um possui limitações em seu parâmetro e outro não? Infelizmente não temos ainda respostas para essas questões, mas isso mostra o quão rico é o problema. Investigações já estão em andamento com propósito de clarificar cada um desses pontos e ter um entendimento completo não só desses sistemas, mas também de outros possíveis sistemas superconformes em três ou mais dimensões assim como também dos formados por múltiplas partículas.

Outro ponto é o de como generalizar o procedimento introduzido no Capítulo 3 para dimensões maiores. Não temos uma resposta definitiva, mas, ao observarmos (2.4.12), (2.4.24), (4.2.2) e (4.4.7), o que nos é sugerido é que devemos levar em conta um fator global da forma $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{\sqrt{2}r}$ na definição dos Q 's e talvez seja necessário utilizar duas representações de álgebras de Clifford comutantes entre si (uma relacionada com o índice dos operadores fermiônicos e outra relacionada com as dimensões do espaço). Mais uma observação pertinente é que o acoplamento spin-órbita parece estar sempre presente nos casos de duas ou mais dimensões.

Mesmo com as aparentes dificuldades em construir sistemas com simetria superconforme em mais de uma dimensão, o caminho aqui escolhido parece mais promissor que o começando com os modelos σ clássicos (como feito no Capítulo 2), já que a dificuldade nesse último método para três ou mais dimensões envolve sistemas de equações diferenciais não lineares acopladas.

Conclusão

Façamos uma recapitulação do que foi feito. No Capítulo 1 obtemos os modelos σ superconformes na representação parabólica e trigonométrica para então quantizá-los no Capítulo 2. Já no Capítulo 3 apresentamos um procedimento geral para obter osciladores quânticos deformados superconformes e mostramos como a álgebra superconforme age como superálgebra geradora de espectro. Por fim, no Capítulo 4, apresentamos um exemplo de representação da álgebra superconforme $sl(2|1)$ da qual podemos derivar os modelos parabólico e trigonométrico com três dimensões. Nesse caso, também investigamos o espectro do modelo trigonométrico utilizando a álgebra superconforme como superálgebra geradora de espectro.

O procedimento apresentado no Capítulo 2 é aplicável a outros modelos σ superconformes, mas se torna tecnicamente difícil para casos com mais de dois campos bosônicos propagantes devido a dificuldade de se passar para a base de termo cinético constante. Além disso, ao investigarmos os modelos parabólico e trigonométrico $\mathcal{N} = 2(2, 2, 0)$, observamos que a álgebra superconforme só se realiza no espaço de Hilbert da teoria se $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}$. Outros resultados importantes obtidos no caso $\mathcal{N} = 2(2, 2, 0)$ trigonométrico são a decomposição do espaço de Hilbert numa soma direta de infinitas representações de peso mínimo de $sl(2|1)$ e o fato de existir um segundo conjunto de geradores fechando a superálgebra $sl(1|2)$ que nos permite, junto a representação anterior de $sl(2|1)$, construir todo o espectro da teoria a partir dos estados fundamentais. No Apêndice A também ilustramos alguns dos resultados através de digramas e mostramos que uma regra de superseleção pode ser imposta para remover as degenerescências do modelo e ter um único vácuo.

A existência de um segundo conjunto de geradores fechando a superálgebra $sl(2|1)$ no modelo $\mathcal{N} = 2(2, 2, 0)$ trigonométrico nos sugere que a simetria é muito maior do que se esperava inicialmente, mas ainda não é claro qual estrutura se necessitará para englobar essa simetria, sendo que pode até mesmo ser algo mais geral que uma superálgebra. Por exemplo (veja [65]), uma álgebra de gradação $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é uma possibilidade e deve ser levada em conta nas investigações futuras. No entanto já é possível antecipar que tal estrutura terá uma representação irredutível no espaço de Hilbert em questão.

Indo para o Capítulo 3, devemos enfatizar que os osciladores deformados do tipo Klein encontrado em (3.3.7) e (3.4.6) coincidem com os modelos introduzidos em [66] e [31], respectivamente. Além disso, é um fator comum aos sistemas não só presentes no Capítulo 3, mas também nos demais, que uma subálgebra da superálgebra geradora de espectro é suficiente para gerar o espaço de Hilbert. Com efeito, isso acontece nos Hamiltonianos trigonométricos (2.4.13), (3.3.7), (3.4.6) e (4.2.3). No entanto não vale o mesmo para o Hamiltoniano (3.5.9), o qual não possui deformação do tipo Klein e, além disso, tem a base de seu espaço de Hilbert composta de um único vácuo e um par de estados degenerados para cada outro nível de energia. Uma importante observação sobre esse último caso é a de que o Hamiltoniano não deformado não pode ser obtido por uma variação contínua do parâmetro ν . As futuras investigações dentro do escopo apresentado aqui devem ser no sentido de obter resultados para $n \geq 3$ (o único exemplo até o momento é o encontrado em [60], onde $n = 4$ e a superálgebra é $F(4)$).

Sobre o Capítulo 4 é importante frisar que, assim como no caso bidimensional trigonométrico estudado no Capítulo 2, o espaço de Hilbert do caso trigonométrico se decompõe numa soma direta de infinitas representações de peso mínimo de $sl(2|1)$. Mais uma vez se pode questionar se uma estrutura mais geral é necessária para englobar a simetria completa do sistema. Além disso,

$osp(1|2) \subset sl(2|1)$ é suficiente para gerar o espectro assim como ocorreu no caso investigado no Capítulo 2 e na maioria dos que foram estudados no Capítulo 3. Como já apontado, há também uma série de pequenas questões em aberto sobre o caso apresentado nesse capítulo que merecem atenção. As principais são a de como construir sistematicamente osciladores superconformes em dimensões maiores que dois (talvez de forma semelhante ao método do Capítulo 3) e como expandir o escopo dessas construções para sistemas de várias partículas.

Como comentário final, vamos sublinhar que existe a possibilidade dos modelos aqui expostos serem aplicados em teorias de higher spin (veja [66]) como uma implementação da holografia AdS/CFT. Isto tem como base o fato de os osciladores de tipo Klein com superálgebra geradora de espectro $osp(2|2)$ proverem uma realização da superálgebra de Vasiliev de higher spin introduzida em [34]. Fora isso, recentemente a relevância, para teorias de higher spin, de osciladores que não são do tipo Klein também foi apontada [67].

Apêndice A

Diagramas de $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$ Trigonométrico Com $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$

Para o modelo $\mathcal{N} = 2 (2, 2, 0)$ trigonométrico, podemos representar a ação dos operadores de criação e aniquilação da superálgebra geradora de espectro através de diagramas. Explicitamente apresentamos três deles pra diferentes valores de λ , Figuras A.0.1, A.0.2 e A.0.3, respectivamente associados com as dimensões de escala $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{3}{2}$. E na Figura A.0.4 o caso geral $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ é apresentado usando um conjunto conveniente de números quânticos.

Nos diagramas, os estados bosônicos (fermiônicos) são representados por pontos brancos (pretos). Pontos cinzas indicam a presença de dois estados degenerados, sendo um bosônico e outro fermiônico. O eixo vertical é a energia, n , enquanto o eixo horizontal é o momento angular, m . ϵ será o número fermiônico ($\epsilon = +1$ para bósons, $\epsilon = -1$ para férmions). Linhas sólidas (pontilhadas) representam as ações dos operadores de criação e aniquilação $\widehat{Q}_{\pm}^{(I)}$ ($\overline{Q}_{\pm}^{(I)}$) com $I = 1, 2$. Veja (2.4.11) e (2.4.23).

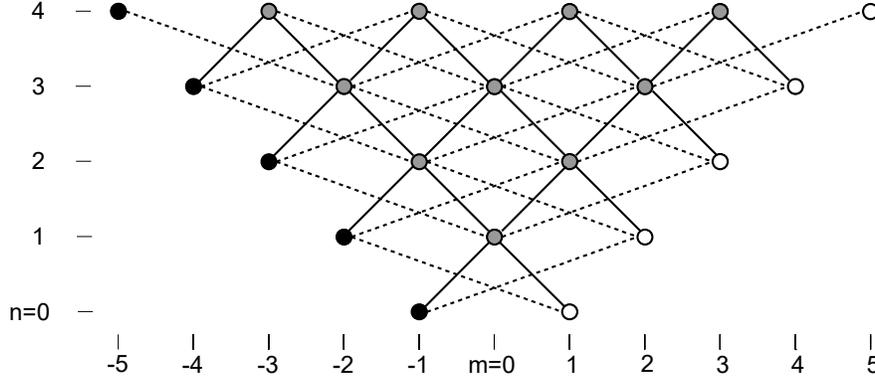
Os estados de peso mínimo de $sl(2|1)$ são os pontos em que as linhas sólidas surgem no sentido ascendente. Nas Figuras A.0.2 e A.0.4 a existência desses estados de peso mínimo não é evidente, mas podem ser notados ao se aplicar corretamente as operações de criação.

Os operadores $\widehat{Q}_{\pm}^{(1)}, \widehat{Q}_{\pm}^{(2)}$ (e, de forma similar, $\overline{Q}_{\pm}^{(1)}, \overline{Q}_{\pm}^{(2)}$), aplicados no estado $|n, m, \epsilon\rangle$ que não seja um estado de peso mínimo nos dão os mesmos resultados a menos de uma fase. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{\pm}^{(I)} |n, m, \epsilon\rangle &\propto |n \mp 1, m - \epsilon 2\lambda, -\epsilon\rangle, \\ \overline{Q}_{\pm}^{(I)} |n, m, \epsilon\rangle &\propto |n \mp 1, m - \epsilon 2(\lambda + 1), -\epsilon\rangle.\end{aligned}\tag{A.0.1}$$

Para os três diagramas, Figuras A.0.1, A.0.2 e A.0.3, pode-se observar várias características importantes. Em particular, os estados com $n > 0$ podem todos serem obtidos aplicando repetidas vezes os operadores de criação \widehat{Q} 's e \overline{Q} 's sobre os estados fundamentais ($n = 0$). Ou seja, tanto os operadores \widehat{Q} 's como \overline{Q} 's são necessários para construir o espaço de Hilbert inteiro a partir dos estados de menor energia. Em termos de apenas uma das representações de $sl(2|1)$ (seja a com \widehat{Q} 's ou \overline{Q} 's) o espaço de Hilbert é decomposto numa soma direta de infinitas representações de peso mínimo. Não sabemos ainda qual a estrutura se tem ao juntarmos essas duas representações de $sl(2|1)$, mas certamente será irredutível nesse espaço de Hilbert.

Pode-se notar que $\lambda = -\frac{1}{2}$ corresponde ao oscilador bidimensional, mas o espaço de Hilbert ilustrado em Figura A.0.2 possui dupla degenerescência em cada ponto. Dois autoestados (um bosônico e outro fermiônico) estão associados a cada par n, m . A introdução de um projetor adequado nos permite eliminar essa degenerescência e recuperar o espaço de Hilbert do oscilador harmônico bidimensional ordinário. Esse projetor \hat{P} ($\hat{P}^2 = \mathbb{I}$), o qual define uma regra de superseleção, é definido como


 Figura A.0.1: Diagrama com $\lambda = \frac{1}{2}$ para os operadores de criação e aniquilação \hat{Q} 's e \bar{Q} 's.

$$\hat{P} = N_f e^{i\pi\mathcal{H}}, \quad (\text{A.0.2})$$

onde N_f é o operador de número fermiônico e $\hat{\mathcal{H}} = -2i\hat{D}$ é o Hamiltoniano. A regra de superseleção

$$\hat{P}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (\text{A.0.3})$$

nos dá um espaço de Hilbert onde temos estados bosônicos para n par e estados fermiônicos para n ímpar.

Em particular, a regra de superseleção remove a degenerescência do vácuo (agora apenas bosônico) e nos permite recuperar o oscilador harmônico bidimensional como o modelo $\mathcal{N} = 2$ (2, 2, 0) superseleccionado e com $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Além disso, para qualquer $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ o espaço de Hilbert dos osciladores deformados podem ser formalmente recuperados a partir do caso $\lambda = -\frac{1}{2}$ ilustrado em Figura A.0.2 ao trocarmos o momento angular m por j , o autovalor do operador $\hat{\mathcal{J}}$ introduzido em (2.4.26).

Introduzamos um novo conjunto de números quânticos:

$$\hat{\mathcal{H}}|n, j, \epsilon\rangle = (n+1)|n, j, \epsilon\rangle; \hat{\mathcal{J}}|n, j, \epsilon\rangle = j|n, j, \epsilon\rangle, (j \in \mathbb{Z}); N_f|n, j, \epsilon\rangle = \epsilon|n, j, \epsilon\rangle, (\epsilon = \pm 1). \quad (\text{A.0.4})$$

Nessa base, os operadores $\hat{Q}_{\pm}^{(I)}, \bar{Q}_{\pm}^{(I)}$ agem sobre os estados que não sejam os de peso mínimo da seguinte forma:

$$\hat{Q}_{\pm}^{(I)}|n, j, \epsilon\rangle \propto |n \mp 1, j + \epsilon, -\epsilon\rangle, \bar{Q}_{\pm}^{(I)}|n, j, \epsilon\rangle \propto |n \mp 1, j - \epsilon, -\epsilon\rangle. \quad (\text{A.0.5})$$

Com isso podemos fazer o diagrama em Figura A.0.4, o qual é válido para qualquer $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Isso deixa claro que a regra de superseleção (A.0.2) pode ser imposta em qualquer caso $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ e sempre podemos remover a degenerescência do vácuo.

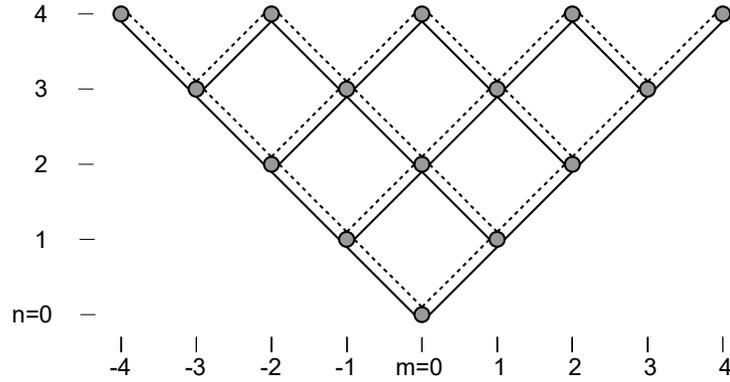


Figura A.0.2: Diagrama com $\lambda = -\frac{1}{2}$ para os operadores de criação e aniquilação \hat{Q} 's e \bar{Q} 's.

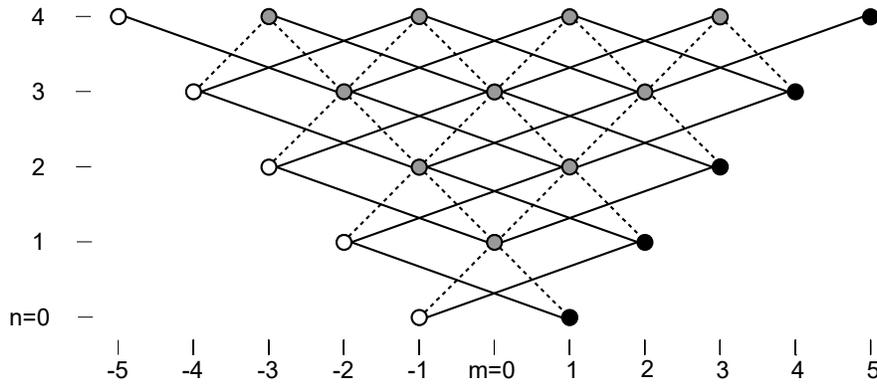


Figura A.0.3: Diagrama com $\lambda = -\frac{3}{2}$ para os operadores de criação e aniquilação \hat{Q} 's e \bar{Q} 's.

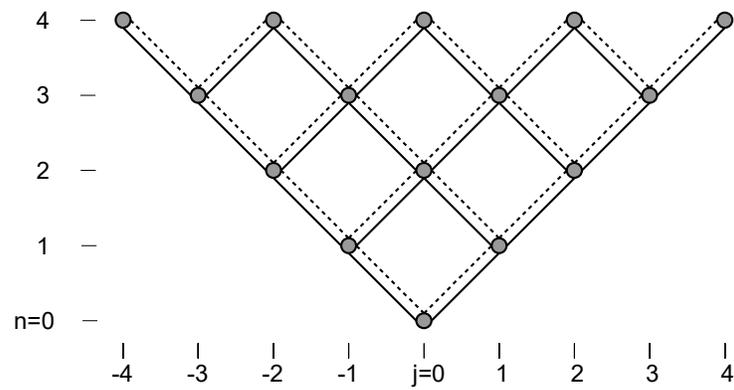


Figura A.0.4: Diagrama geral para $\lambda = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Apêndice B

Selecionando o Espaço de Hilbert

Para conhecermos os possíveis espaços de Hilbert dos modelos superconformes apresentados, precisamos antes fazer a análise dos casos não supersimétricos com ou sem termo oscilatorial. Ou seja dos Hamiltonianos [1]

$$H = \frac{1}{2} \left(-\partial_x^2 + \frac{g}{x^2} \right) \quad (\text{B.0.1})$$

e [4]

$$H_{DFF} = \frac{1}{2} \left(-\partial_x^2 + \frac{g}{x^2} + x^2 \right). \quad (\text{B.0.2})$$

Uma extensiva análise dos possíveis espaços de Hilbert para $g > 0$ já foi feita em [58, 59]. Aqui iremos essencialmente reproduzir alguns resultados de [4, 58, 59] sobre o Hamiltoniano (B.0.2).

Seguindo [68], a função de onda do estado fundamental de H_{DFF} possui a forma

$$\Psi_\beta = x^\beta e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (\text{B.0.3})$$

onde β está relacionado com g pela equação

$$g = \beta^2 - \beta \quad (\text{B.0.4})$$

A energia desse estado é, então,

$$E_\beta = \frac{1}{2} + \beta. \quad (\text{B.0.5})$$

As duas soluções e (B.0.4) são β_\pm , os quais dados por

$$\beta_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4g}}{2}. \quad (\text{B.0.6})$$

Como E_β precisa ser real, devermos ter β real e, portanto, temos que g deve ser tal que

$$g \geq -\frac{1}{4}. \quad (\text{B.0.7})$$

A função de onda $\Psi_\beta(x)$ será normalizável se tivermos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\Psi_{\beta}(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2\beta} e^{-x^2} = C_{\beta} < \infty, \quad (\text{B.0.8})$$

o que nos leva a concluir que

$$\beta > -\frac{1}{2}. \quad (\text{B.0.9})$$

No intervalo

$$\beta > 0 \quad (\text{B.0.10})$$

a função de onda $\Psi_{\beta}(x)$ pode ser definida para $x \geq 0$ (\mathbb{R}^+) e satisfará a condição de contorno de Dirichlet na origem ($\Psi_{\beta}(0) = 0$).

No intervalo

$$-\frac{1}{2} < \beta \leq 0 \quad (\text{B.0.11})$$

a função de onda $\Psi_{\beta}(x)$ necessariamente deve ser uma função quadrado integrável definida em toda a reta real.

A simetria dinâmica da equação de Schrödinger com (B.0.1) ou (B.0.2) como Hamiltoniano é [66] $sl(2) \oplus u(1)$. A subálgebra $sl(2)$ é a álgebra geradora de espectro. As autofunções $\Psi_{\beta_{\pm}}(x)$ são estados de peso mínimo de $sl(2)$ com H_{DFE} . Todos os estados excitados obtidos ao aplicarmos o operador de criação sobre $\Psi_{\beta_{\pm}}(x)$ pertencem, sendo $\beta_{\pm} > 0$, ao conjunto de funções definidas na semi-reta real satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet. Já no caso em que $-\frac{1}{2} < \beta_{\pm} \leq 0$, elas são quadrado integráveis e definidas na reta real inteira.

O espaço de Hilbert do modelo é definido por uma representação de peso mínimo de $sl(2)$ ou pela soma direta de duas representações de peso mínimo.

No intervalo $g \geq -\frac{1}{4}$, dessa forma, temos as seguintes situações:

- i) para $g = -\frac{1}{4}$, $\beta_+ = \beta_- = \frac{1}{2}$, temos apenas uma representação de peso mínimo; sua função de onda é definida na semi-reta e obedece à condição de contorno de Dirichlet;
- ii) no intervalo $-\frac{1}{4} < g < 0$, β_{\pm} são ambos positivos. O espaço de Hilbert será a soma direta de duas representações de peso mínimo. Suas funções de onda são definidas na semi-reta e obedecem à condição de contorno de Dirichlet na origem. Além disso, $\Psi_{\beta_-}(x)$ é o estado fundamental;
- iii) em $g = 0$, H_{DFE} é o Hamiltoniano do oscilador harmônico ordinário. Há duas representações de peso mínimo sendo uma de funções pares e outra de funções ímpares (de acordo com a transformação de paridade $x \mapsto -x$). A função gaussiana $\Psi_{\beta_-}(x)$ é o estado fundamental e o estado de peso mínimo da representação de peso mínimo com funções pares. O primeiro estado excitado é dado por $\Psi_{\beta_+}(x)$, e é o estado de peso mínimo da representação de peso mínimo com funções ímpares;
- iv) no intervalo $0 < g < \frac{3}{4}$, β_+ é positivo enquanto β_- é negativo. Seguindo [58, 59], há duas escolhas possíveis. Ou escolhemos um único estado de peso mínimo $\Psi_{\beta_+}(x)$ (correspondendo a uma função definida na semi-reta com condição de contorno de Dirichlet na origem), ou escolhemos os dois possíveis e definimos as funções ao longo da reta real inteira. Nesse último caso, $\Psi_{\beta_-}(x)$ é o estado fundamental;
- v) Para $g \geq \frac{3}{4}$, como $\beta_- \leq -\frac{1}{2}$, a função de onda $\Psi_{\beta_-}(x)$ não é normalizável. O espaço de Hilbert é dado por uma única representação de peso mínimo de $sl(2)$ com $\Psi_{\beta_+}(x)$ sendo o estado fundamental.

Em todos os casos listados, H_{DFE} é um operador bem definido e auto-adjunto agindo no respectivo espaço de Hilbert, nos dando um espectro de energia discreto e limitado inferiormente.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Calogero, J. Math. Phys. 10 (1969) 2191-2196.
- [2] F. Calogero, J. Math. Phys. 10 (1969) 2197-2200.
- [3] F. Calogero, J. Math. Phys. 12 (1971) 419-436.
- [4] V. de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan, Nuovo Cimento A 34 (1976) 569.
- [5] Maldacena, J. International Journal of Theoretical Physics (1999) 38:1113.
- [6] Mazzucato, Luca, Physics Reports Vol. 521, Issue 1 (2012) 1-68; arXiv:1104.2604v3
- [7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 428 (1998) 105–114; arXiv:hep-th/9802109
- [8] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys.2 (1998) 253–291.
- [9] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, Phys. Lett. B Volume 454, Issues 3-4, 20 May 1999, Pages 187-192.
- [10] Thomas Faulkner, Hong Liu, John McGreevy, and David Vegh, Phys.Rev. D 83 (2011); arXiv:0907.2694v2
- [11] Mihailo Cubrovic, Jan Zaanen, and Koenraad Schalm, Science 325 (2009) 439-444; arXiv:0904.1993v2
- [12] A. Kitaev, A simple model of quantum holography; talks at KITP, April 7, 2015 and May 27, 2015; <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/> and <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>
- [13] E. Witten, An SYK-Like Model Without Disorder; arXiv:1610.09758
- [14] A. Kitaev and S. J. Suh, J. High Energ. Phys. (2018); arXiv:1711.08467
- [15] J. Maldacena, D. Stanford, Phys. Rev. D 94, 106002 (2016); arXiv:1604.07818
- [16] J. Maldacena, D. Stanford, Z. Yang, Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space; arXiv:1606.01857
- [17] R. Britto-Pacumio, J. Michelson, A. Strominger, and A. Volovich, *Lectures on superconformal quantum mechanics and multi-black hole moduli spaces*, in Progress in String Theory and M-Theory, NATO Science Series Vol. 564, Kluwer Acad. Press (2001) 235; arXiv:hep-th/9911066.
- [18] A. Sen, JHEP 0811 (2008) 075; arXiv:0805.0095[hep-th].
- [19] C. Chamon, R. Jackiw, S-Y. Pi and L. Santos, Phys. Lett. B 701 (2011) 503; arXiv:1106.0726[hep-th].
- [20] A. Pashnev and F. Toppan, J. Math. Phys. 42 (2001) 5257; arXiv:hep-th/0010135.

- [21] Z. Kuznetsova, M. Rojas and F. Toppan, JHEP 0603 (2006) 098; arXiv:hep-th/0511274.
- [22] S. Fedoruk, E. Ivanov and O. Lechtenfeld, J. Phys. A 45 (2012) 173001; arXiv:1112.1947[hep-th].
- [23] Z. Kuznetsova and F. Toppan, J. Math. Phys. 53 (2012) 043513; arXiv:1112.0995[hep-th].
- [24] S. Khodae and F. Toppan, J. Math. Phys. 53 (2012) 103518; arXiv:1208.3612[hep-th].
- [25] N. L. Holanda and F. Toppan, J. Math. Phys. 55 (2014) 061703; arXiv:1402.7298[hep-th].
- [26] G. Papadopoulos, Class. Quant. Grav. 30 (2013) 075018; arXiv:1210.1719[hep-th].
- [27] S. Fedoruk, E. Ivanov and O. Lechtenfeld, JHEP 0908 (2009) 081; arXiv:0905.4951[hep-th].
- [28] S. Fedoruk, E. Ivanov and O. Lechtenfeld, JHEP 1004 (2010) 061703; arXiv:1402.7298[hep-th].
- [29] E. Ivanov and S. Sidorov, Class. Quantum Grav. 31 (2014) 075013; arXiv:1307.7690[hep-th].
- [30] E. Ivanov, O. Lechtenfeld and S. Sidorov, JHEP 11 (2016) 031; arXiv:1609.00490[hep-th].
- [31] I. E. Cunha, N. L. Holanda and F. Toppan, Phys. Rev. D 96 (2017) 065014; arXiv:1610.0725[hep-th].
- [32] N. Aizawa, I. E. Cunha, Z. Kuznetsova and F. Toppan, J. Math. Phys. 60(2019) 042102; arXiv:1812.00873
- [33] I. E. Cunha and F. Toppan; arXiv:1906.11705
- [34] M. A. Vasiliev, Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 1115.
- [35] M. S. Plyushchay, Ann. Phys. 245 (1996) 339; arXiv:hep-th/9601116
- [36] V. de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan, Nuovo Cimento A 34 (1976) 569.
- [37] S. Fubini and E. Rabinovici, Nucl. Phys. B 245, (1984) 17.
- [38] S. Fedoruk, E. Ivanov and O. Lechtenfeld, J. Phys. A 45 (2012) 173001; arXiv:1112.1947[hep-th].
- [39] Richard D. Schafer, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York, 1995.
- [40] Michel Kervaire, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 44 (1958) 280–283
- [41] Raoul Bott and John Milnor, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958) 87–89.
- [42] F. Toppan, Acta Politechnica Vol 48 No 2/2008.
- [43] Howard Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Westview Press, 1999
- [44] L. Frappat, A. Sciarrino and P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, Academic Press, London (2000); arXiv:hep-th/9607161.
- [45] Sidney Coleman, Jeffrey Mandula, Physical Review, 159 (5), (1967) 1251–1256.
- [46] Rudolf Haag, Martin Sohnius, Jan T. Lopuszański, Nuclear Physics B, 88 (1975) 257–274
- [47] Nicolas Surlas, Physica D 15 (1985)
- [48] V. G. Kac, Comm. Math. Phys. 53 (1977) 31.
- [49] F. Toppan, Nankai Series in Pure App. Math. and Th. Phys. 11 (2013), 417; arXiv:1302.3459[math-ph].

- [50] E. Witten, Nucl. Phys. B 188 (1981) 513.
- [51] N. L. Holanda and F. Toppan, J. Math. Phys. 55 (2014) 061703; arXiv:1402.7298[hep-th].
- [52] P. D. Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer (1997).
- [53] M. Faux and S. J. Gates Jr., Phys. Rev. D 71 (2005) 065002; arXiv:hep-th/0408004.
- [54] Z. Kuznetsova and F. Toppan, Mod. Phys. Lett. A 23 (2008) 37; arXiv:hep-th/0701225.
- [55] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer Series in Nuclear and Particle Physics (1990).
- [56] B. Basu-Mallick, K. S. Gupta, S. Meljanac and A. Samsarov, Eur. Phys. J. C 49 (2007) 875; arXiv:hep-th/0609111.
- [57] A. V. Smilga, Phys. Lett. B 585 (2004) 173; arXiv:hep-th/0311023.
- [58] H. Miyazaki and I. Tsutsui, Ann. Phys. 299 (2002) 78; arXiv:quant-ph/0202037
- [59] L. Fehér, I. Tsutsui and T. Fülöp, Nucl. Phys. 715 (2005) 713; arXiv:math-ph/0412095. 3; arXiv:1112.0995[hep-th].
- [60] N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan, J. Math. Phys. 59 (2018) 022101; arXiv:1711.02923[math-ph].
- [61] S. Okubo, J. Math. Phys. 32 (1991) 1657.
- [62] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, JHEP 0304 (2003) 040; arXiv:hep-th/0302113.
- [63] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. (1975)
- [64] M. S. Plyushchay, Ann. Phys. 245 (1996) 339; arXiv:hep-th/9601116.
- [65] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka and F. Toppan, arXiv:1609.08224[math-ph].
- [66] F. Toppan and M. Valenzuela, Adv. Math. Phys. (2018), ID 6263150; arXiv:1705.04004[hep-th].
- [67] M. A. Vasiliev, *From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models*, arXiv:1804.06520[hep-th].
- [68] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, Phys. Rep. 94 (1983) 313.