

CBPF – CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
COORDENAÇÃO DE COSMOLOGIA, ASTROFÍSICA E INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

TESE DE DOUTORADO

**Aspectos clássicos de teorias de gravitação
de ordem superior**

BRENO LOUREIRO GIACCHINI

Orientador: Antonio José Accioly

Rio de Janeiro – RJ, Brasil

Fevereiro de 2019



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rua Doutor Xavier Sigaud, 150, Rio de Janeiro, Brasil
Tel.: +55 21 2141-7100 Fax.: +55 21 2141-7400 - CEP:22290-180
<http://www.cbpf.br>

MINISTÉRIO DA
**CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES**



“ASPECTOS CLÁSSICOS DE TEORIAS DE GRAVITAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR”

BRENO LOUREIRO GIACCHINI

Tese de Doutorado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os
seguintes professores:

Antônio José Accioly

Antônio José Accioly – Presidente/Orientador/CBPF

Henrique Boschi Filho

Henrique Boschi Filho

Rodrigo Ferreira Sobreiro

Rodrigo Ferreira Sobreiro

Gilvan Augusto Alves

Gilvan Augusto Alves

Sérgio José Barbosa Duarte

Sérgio José Barbosa Duarte

Rio de Janeiro, 26 de fevereiro de 2019.

Dahin! Dahin

Geht unser Weg! O Vater, laß uns ziehn!

GOETHE — WOLF

Agradecimentos

A Deus, inteligência suprema, causa primária de todas as coisas.

Aos meus pais, Stefânie e Clóvis, pelo apoio e incentivo constante, desde o começo.

A minha esposa, Yackelin, pelo carinho e companheirismo.

Ao professor Accioly, pela orientação e amizade durante o mestrado e o doutorado. Nossas várias conversas sobre a Física e sobre a vida certamente serão lembradas durante minha vida profissional e pessoal.

Ao professor Shapiro, pela colaboração iniciada em 2015, os cursos de teoria quântica de campos no espaço plano e no espaço curvo, a hospitalidade junto ao seu grupo em Juiz de Fora durante as visitas que realizei, e a amizade.

Aos professores José Helayël Neto, Iosif Buchbinder e Petr Lavrov pelos cursos que fiz durante o doutorado; e ao professor Sebastião Alves Dias, pelos cursos do mestrado, que continuam a inspirar o caminho.

Ao Tibério pela amizade e colaboração, à qualquer hora.

Aos pesquisadores que encontrei durante esses quatro anos e com os quais conversei sobre meu trabalho (às vezes em perguntas durante seminários) e que, de alguma forma ou outra, tiveram influência sobre ele: aos professores M. Asorey, G. Lambiase, A. Maroto, L. Modesto, D. Rodrigues, C. Schubert e A. Starobinsky, e também ao L. Buoninfante. Agradeço-lhes, ainda, a acolhida durante as curtas visitas que realizei às universidades de Saragoça, de Salerno, Complutense de Madrid, Federal do Espírito Santo e Michoacana.

Aos companheiros e amigos do CBPF, em especial ao Erick, Erich, Gabriel, Grecia, Ivana, Riccardo e Vanessa.

Ao grupo de teoria quântica de campos da UFJF, pela calorosa acolhida, em especial ao Jarne, Laysa, Tiago e, novamente, Tibério e Shapiro.

Ao Cláudio Teixeira, pela amizade e também importante apoio em Juiz de Fora.

Aos amigos do (ou no) Rio: Antônio, Betty, Felipe, Júlio, Leandro, Rayane, Renata, Roberto e Thaís.

A minha família e amigos de Belo Horizonte e de Ponta Grossa, pelo apoio à distância e aconchego nas viagens e visitas. Em especial à avó Rosa, aos tios e tias, à jovem Elise e também à Joana.

A Elena e Maria Jesús, pela gentil acolhida durante a escrita desta tese.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, que me propiciou as condições necessárias para que este trabalho pudesse ser realizado.

À Bete e aos coordenadores da COEDU durante esses quatro anos, em especial ao professor Roditi, sempre muito solícito.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro. Agradeço-lhe também a taxa de bancada, eficiente mecanismo que me propiciou a oportunidade de participar de excelentes eventos nacionais e internacionais, fundamentais na minha formação como pesquisador.

Resumo

Teorias de gravitação de ordem superior possuem interessantes propriedades quânticas relacionadas à renormalizabilidade e unitariedade. Por exemplo, modelos com mais de quatro derivadas na ação podem ser super-renormalizáveis e ter uma matriz-S unitária, caso os pólos massivos do propagador sejam complexos; e modelos não-locais podem ser renormalizáveis sem introduzir novas partículas no espectro. É importante, pois, estudar essas teorias mesmo no limite de baixas energias e buscar seus efeitos observacionais característicos. Nesta tese consideramos aspectos e aplicações de teorias clássicas de gravitação de ordem superior, locais e não-locais. Na primeira parte, discutimos o limite newtoniano da gravitação polinomial geral. Mostramos que todos os modelos polinomiais que possuem pelo menos um modo massivo tensorial e outro escalar estão associados a um potencial newtoniano (modificado) não-singular. Ainda, teorias com pelo menos seis derivadas nos setores de spin-2 e de spin-0 possuem um limite newtoniano regular, sem singularidades nos invariantes de curvatura, quando acoplados com uma fonte delta de Dirac. Em seguida, mostramos como essa caracterização dos modelos regulares pode ser obtida de forma alternativa ao interpretar o efeito das derivadas mais altas como a regularização de uma fonte efetiva, e a estendemos para o caso de modelos não-locais e sem fantasmas. Mostramos que a regularidade da solução não está relacionada à não-localidade ou à renormalizabilidade da teoria. Na segunda parte desta tese focamos aspectos fenomenológicos desses modelos. Estudamos os efeitos que modos complexos e/ou degenerados podem ter no potencial e na deflexão gravitacional da luz. Analisamos, também, o efeito indireto que modos escalares massivos podem exercer nas previsões de deflexão da luz. Por fim, introduzimos um mecanismo de *seesaw* gravitacional como uma possibilidade de evitar a supressão das derivadas mais altas causada pela escala de Planck. Discutimos a viabilidade desse mecanismo, mostrando que ele ocorre apenas de forma fraca em teorias polinomiais.

Áreas de conhecimento: Gravitação; Teoria Quântica de Campos.

Abstract

Higher-derivative gravity models can have remarkable quantum properties in what concerns renormalizability and unitarity. For example, local models with more than four derivatives can be super-renormalizable and yield a unitary S-matrix, if the massive poles of the propagator are complex. Also, non-local models can be renormalizable without the need of introducing new particles in the spectrum. It is important, therefore, to study these theories also in the IR regime and look for the observable effects of the higher derivatives. In this thesis we consider classical aspects and applications of local and non-local higher-derivative gravity theories. In the first part, we analyse the Newtonian limit of a general polynomial model and show that those with at least four derivatives in each spin-2 and spin-0 sectors have a finite (modified) Newtonian potential; while those with at least six derivatives have a completely regular Newtonian limit (free from curvature singularities). In the second part of this thesis we focus on phenomenological aspects of these models. We investigate the effects that complex and/or degenerate modes can have on the potential and on light deflection. We also discuss the indirect effect the scalar modes can have on the predictions of light bending. Finally, we introduce a gravitational seesaw-like mechanism as a possibility of avoiding the Planck suppression, and discuss the viability of such a mechanism for polynomial models.

Publicações referentes a esta tese

- A. Accioly, B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, “On the gravitational seesaw in higher-derivative gravity”, *Eur. Phys. J. C* **77**, 540 (2017). [arXiv:1604.07348 [gr-qc]]
- B. L. Giacchini, “On the cancellation of Newtonian singularities in higher-derivative gravity”, *Phys. Lett. B* **766**, 306 (2017). [arXiv:1609.05432 [hep-th]]
- A. Accioly, B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, “Low-energy effects in a higher-derivative gravity model with real and complex massive poles”, *Phys. Rev. D* **96**, 104004 (2017). [arXiv:1610.05260 [gr-qc]]
- B. L. Giacchini, “Experimental limits on the free parameters of higher-derivative gravity”, *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting*, pp. 1340–1345 (2017). [arXiv:1612.01823 [gr-qc]]
- B. L. Giacchini, A. Accioly, “Light deflection in semiclassical higher-derivative gravity”, *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting*, pp. 1147–1151 (2017).
- A. Accioly, B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, “Gravitational ‘seesaw’ and light bending in higher-derivative gravity”, *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, pp 183–188 (2018).
- B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, “Light bending in $F[g(\square)R]$ extended gravity theories”, *Phys. Lett. B* **780**, 54 (2018). [arXiv:1801.08630 [gr-qc]]
- B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, “Regular solutions in higher-derivative gravity”, *Universe* **4**, 140 (2018).
- B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, “Weak-field limit and regular solutions in polynomial higher-derivative gravities”, *Eur. Phys. J. C* **79**, 217 (2019). [arXiv:1806.05664 [gr-qc]]
- B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, “Effective delta sources and regularity in higher-derivative and ghost-free gravity”, arXiv:1809.05907 [gr-qc]]

Conteúdo

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Publicações referentes a esta tese	viii
Conteúdo	ix
1 Introdução	1
1.1 Gravitação de ordem superior	3
1.2 Gravitações polinomiais e não-locais	7
2 Limite newtoniano e soluções regulares em modelos polinomiais	15
2.1 Limite newtoniano	18
2.2 Solução via o método de <i>heat kernel</i>	20
2.3 Finitude dos potenciais métricos	25
2.4 Regularidade dos invariantes de curvatura	29
2.5 Comentário com vistas ao caso completo, não linear	33
3 Derivadas mais altas e regularização da fonte	36
3.1 Fontes efetivas e funções de massa	37
3.2 Regularização em modelos polinomiais	39

3.3	Regularização em modelos não-locais	42
4	Aspectos fenomenológicos da gravitação de sexta ordem	48
4.1	Generalização do calibre de Teyssandier para a gravitação com seis derivadas	50
4.2	Potencial newtoniano modificado na gravitação com seis derivadas . . .	54
4.2.1	Pólos reais	55
4.2.2	Pólos complexos	58
4.3	Deflexão da luz	61
4.3.1	Analogia óptico-mecânica	61
4.3.2	Deflexão com pólos reais simples	65
4.3.3	Deflexão com pólos reais degenerados	67
4.3.4	Deflexão com pólos complexos	68
4.3.5	Comentário com vistas à detecção experimental das derivadas mais altas	71
5	Efeitos dos modos escalares na deflexão da luz	73
5.1	Deflexão da luz: abordagem ao nível de árvore	74
5.1.1	Deflexão da luz na relatividade geral	74
5.1.2	Deflexão da luz em teorias estendidas	78
5.1.3	Efeito da interação com partículas massivas	79
5.2	Analogia óptico-mecânica e estrutura de geodésicas nulas	80
5.3	Comentário sobre modelos com extensões no setor de spin-2	86
6	<i>Seesaw</i> gravitacional em modelos polinomiais	88
6.1	<i>Seesaw</i> gravitacional com pólos reais	89
6.2	<i>Seesaw</i> gravitacional com pólos complexos	93
6.3	Consequências físicas de um <i>seesaw</i> gravitacional	96
7	Epílogo	98

Apêndice A Demonstração da identidade (2.44)	101
Apêndice B Demonstração do teorema 4.1	104
Apêndice C Forma ε - μ das equações de Maxwell no espaço curvo	109
Apêndice D Cálculo do ângulo de deflexão via a lei de Snell-Descartes	112
Referências Bibliográficas	115

Capítulo 1

Introdução

O século XX presenciou a consolidação de duas noções fundamentais na Física: a natureza curva do espaço-tempo e a descrição quântica da matéria. De fato, a relatividade geral e a teoria quântica de campos¹ tornaram-se teorias paradigmáticas com notáveis verificações experimentais. Pode-se dizer que o programa de combinar essas duas exitosas noções teve início logo após a Segunda Guerra Mundial², com trabalhos de Bergmann, DeWitt, Dirac e Gupta acerca da identificação de observáveis em teorias não-lineares e o tratamento de sistemas vinculados [13], sendo intensificado nos anos 1960. Nessa década foram obtidos resultados fundamentais para os avanços seguintes, tais como a formulação hamiltoniana da relatividade geral [14], o método de campo de fundo [15] e a quantização de Faddeev-Popov [16, 17] para teorias de calibre não-abelianas.

Os anos seguintes viram os primeiros resultados desse esforço: em 1973 't Hooft e

¹Como referências básicas mencionamos os livros-texto [1–4], sobre relatividade geral, e [5–8], acerca da teoria quântica de campos.

²Houve trabalhos visando a quantização da métrica ainda nos anos 1930, por exemplo, [9–12]. Porém, os programas de quantização canônica e covariante foram definidos de forma consistente apenas no final da década de 1940 [13].

Veltman mostraram que a versão quântica da relatividade geral não é renormalizável quando acoplada a campos de matéria [18], resultado obtido também por Deser e van Nieuwenhuizen [19, 20]. Considerando, porém, apenas o setor gravitacional, 't Hooft e Veltman mostraram que as divergências a 1-*loop* se anulam *on-shell*, ou seja, quando as equações clássicas de movimento são satisfeitas. Uma década depois, porém, Goroff e Sagnotti calcularam as divergências a 2-*loops*, mostrando que elas não se anulam *on-shell* e provando explicitamente que a relatividade geral pura não é perturbativamente renormalizável [21]. Essa conclusão, no entanto, já era esperada muito antes, e nesse meio tempo a pesquisa em gravitação quântica vislumbrara novas direções, tais como supergravidade, renormalizabilidade não-perturbativa e teorias de ordem superior — estas são, precisamente, o objeto central de estudo nesta tese.

Nas décadas seguintes abordagens completamente diferentes para a gravitação quântica foram desenvolvidas, por exemplo, *loop quantum gravity* e a teoria de supercordas. Nesta última, as interações fundamentais que conhecemos, incluindo a gravitação, emergem como efeitos em baixas energias da teoria mais geral.

A despeito de todos os esforços de cerca de sessenta anos de pesquisa, ainda se desconhece uma forma de combinar, de forma fundamental e consistente, gravitação e teoria quântica de campos. Uma primeira aproximação para este problema é a teoria semiclássica, na qual a gravitação é considerada um campo clássico, de fundo, e apenas os campos de matéria são quantizados (ver, por exemplo, [16, 22–24]). Apesar do campo gravitacional ser mantido clássico, sua dinâmica sofre influência dos campos quânticos de matéria, via a ação efetiva de vácuo. Neste sentido, pode-se dizer que na teoria semiclássica interessa mais a influência dos campos (quânticos) de matéria na estrutura do vácuo que o cálculo de processos de espalhamento.

Um importante resultado semiclássico é que, em geral, uma teoria renormalizável no espaço plano também o será sobre um fundo curvo. Neste caso, contudo, aparecem divergências proporcionais a derivadas quárticas da métrica, que requerem a inclusão de termos do tipo R^2 , $R_{\mu\nu}^2$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ e $\square R$ no setor gravitacional para garantir a renormaliza-

bilidade da teoria [25]. Esses termos contêm derivadas quárticas da métrica, portanto são conhecidos como termos “de ordem superior”. Diferentemente da gravitação quântica, a gravitação semiclássica é bem estabelecida e é um útil passo intermediário rumo a uma teoria mais fundamental para essa interação. De fato, entender o importante e ambíguo papel das derivadas mais altas na gravitação parece ser uma questão crucial para se levar a cabo o programa iniciado sistematicamente nos anos 1960.

1.1 Gravitação de ordem superior

A adição de termos com derivadas mais altas à ação de Einstein-Hilbert foi considerada ainda nos anos 1920 por Weyl e Eddington [26, 27], apenas como possíveis extensões da relatividade geral. O interesse nessas teorias foi reavivado por motivações quânticas após o trabalho de Stelle, em 1977 [28]. Seu resultado central é que a teoria descrita pela ação

$$S_{\text{grav}} = S_{EH} + S_4, \quad (1.1)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (1.2)$$

e

$$S_4 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}^2), \quad 3\alpha + \beta \neq 0, \quad (1.3)$$

é renormalizável, ao contrário da relatividade geral pura³. Pode-se dizer que a origem dessa conquista é o melhor comportamento do propagador da teoria no regime ultravioleta (UV). Isso pode ser visto usando o método de contagem de potências, que descreve

³Cabe lembrar que um termo do tipo $\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$ também poderia ser incluído na teoria de Stelle (1.3). Porém, devido ao teorema de Gauss-Bonnet segue que o termo $\int d^4x \sqrt{-g} (R^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}^2)$ está relacionado à característica de Euler da variedade, sendo pois um invariante topológico e não afetando as equações de movimento clássicas. Isso implica que um eventual tal termo pode ser absorvido por meio da redefinição dos coeficientes dos termos R^2 e $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$.

o grau superficial δ de divergência de um dado diagrama Γ por meio da relação

$$\delta(\Gamma) + d = \sum_{l_{\text{int}}} (4 - r_l) - 4n + 4 + \sum_v K_v \quad (1.4)$$

e da identidade topológica

$$N_{l_{\text{int}}} = p + n - 1. \quad (1.5)$$

Nas equações acima $N_{l_{\text{int}}}$ é o número de linhas internas l_{int} com inverso de potência de momento r_l no propagador, n é o número de vértices v , cada um com potência de momento K_v , e p é o número de *loops* em Γ . Ainda, d é o número total de derivadas atuando nas linhas externas do diagrama. Para divergências logarítmicas, com $\delta = 0$, d está relacionado com o número de derivadas necessárias nos contratermos. Ressaltamos que a contagem de potências só pode ser usada como critério de renormalizabilidade se as divergências forem covariantes, o que de fato é verificado para as teorias em questão.

Principiemos com o caso da relatividade geral. Por simplicidade vamos considerar diretamente os diagramas mais divergentes, envolvendo vértices com potência máxima de momento, isso é $K_v = r_l = 2$. Segue, pois, que a contagem de potências fornece

$$\delta + d = 2 + 2p, \quad (1.6)$$

significando que para as divergências logarítmicas (que correspondem a $\delta = 0$), o número d de derivadas da métrica presente nos contratermos cresce à medida que aumentamos o número p de *loops* do diagrama. Em outras palavras, a teoria não é renormalizável, já que requer a inclusão de um número infinito de contratermos.

Por sua vez, a gravitação de quarta ordem de Stelle, definida por (1.1), propaga não apenas o gráviton (partícula sem massa de helicidade 2), mas também duas outras excitações massivas, uma de spin-2 e outra escalar. De fato, o propagador associado a esta teoria, no espaço dos momentos, é dado por⁴

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = -\frac{m_2^2}{k^2(k^2 - m_2^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}, \quad (1.7)$$

⁴Ver, por exemplo, [29] para uma demonstração explícita desse resultado.

onde omitimos os termos dependentes de calibre. Os projetores de Barnes-Rivers⁵ [30] $P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}$, de spin-2, e $P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}$, de spin-0, são dados por

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \quad (1.8)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

com

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (1.10)$$

As quantidades m_0 e m_2 definem os pólos massivos do propagador e estão associadas com as massas dos novos modos de spin-0 e spin-2, respectivamente. Em termos dos coeficientes α e β da ação (1.3), temos

$$m_0^2 \equiv \frac{2}{(3\alpha + \beta)\kappa^2} \quad \text{e} \quad m_2^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}, \quad (1.11)$$

donde segue que $\beta < 0$ e $3\alpha + \beta > 0$, para evitar táquions na teoria.

Para a contagem de potência no caso da gravitação de Stelle temos que considerar, então, vértices com 4, 2 e 0 derivadas. Por outro lado, vê-se que o propagador (1.7) se comporta como k^{-4} no UV. Escolhendo uma condição de fixação de calibre com derivadas mais altas é possível fazer que também os propagadores associados aos fantasmas de Faddeev-Popov caiam com k^{-4} para momentos grandes [28]. Com isso, a contagem de potências fornece,

$$\delta + d = 4 - 2n_2 - 4n_0, \quad (1.12)$$

onde n_i é o número de vértices com potência de momento igual a i . Este resultado mostra que a teoria é renormalizável, e que os contratermos que devem ser inseridos na ação efetiva têm 0, 2 ou 4 derivadas da métrica. Ou seja, são do tipo constante cosmológica, R ou \mathcal{R}^2 (denotamos \mathcal{R} por curvatura de modo geral), e portanto já estão na ação⁶.

⁵Ver, por exemplo, [23] para os demais operadores da base de Barnes-Rivers para campos tensoriais de ordem 2.

⁶É também possível um contratermo do tipo $\square R$, que também envolve quatro derivadas da métrica; omitimo-lo por não contribuir para as equações de movimento.

A renormalizabilidade da teoria, contudo, não é suficiente para sua consistência. Como é conhecido desde o século XIX, sistemas descritos por equações diferenciais com derivadas temporais mais altas que dois são instáveis. A gravitação poderia evadir o teorema de Ostrogradsky [31] por ser uma teoria de calibre. Contudo, do ponto de vista quântico, pode-se mostrar que o resíduo do propagador saturado no pólo $k^2 = m_2^2$ é negativo [28]. Este resultado implica que o modo massivo de spin-2 é um *fantasma*, no jargão da teoria de campos. Ele pode ser considerado uma partícula com energia positiva, mas neste caso estará associado a um estado de norma negativa no espaço de Hilbert; pode, alternativamente, ser definido com norma positiva, mas energia negativa [28]. Nenhum dos cenários é alentador: por um lado a unitariedade é uma das bases da teoria quântica; por outro, uma partícula com energia negativa, ainda que inofensiva quando livre, ao interagir tenderá a diminuir sua energia cada vez mais via a emissão de partículas normais (com energia positiva). Este processo não tem limite e não pode ser verdadeiro, pois causaria a instabilidade de qualquer solução gravitacional clássica [32]. A presença do fantasma de spin-2, e a correspondente violação da unitariedade, é o principal inconveniente da gravitação de ordem superior.

A resolução do conflito entre renormalizabilidade e unitariedade é uma questão importante no caminho rumo a uma descrição quântica da gravitação, e diversas interpretações das derivadas mais altas foram propostas. Por exemplo, em [33–37] foi sugerido que o propagador vestido, isto é, com todas as correções quânticas, torne o fantasma instável, garantindo a unitariedade da matriz-S. Métodos perturbativos em teoria quântica de campos, contudo, parecem ser insuficientes para verificar se esse mecanismo funciona ou não [38]. Outra alternativa é tratar os termos de derivadas mais altas como pequenas correções, no mesmo nível que correções quânticas [39, 40]. Isso implicaria ver o modelo de Stelle como uma teoria efetiva cujo domínio de validade é aquele no qual os fantasmas não causam instabilidades nas soluções. Essa prescrição, porém, soa algo *ad hoc*, afinal uma teoria de gravitação quântica que só funciona em baixas energias parece não fazer muito sentido. Ainda neste espírito, pode-se considerar

que os fantasmas relacionados às derivadas mais altas existam apenas como partículas virtuais e que talvez haja algum mecanismo à escala de Planck que proíba a formação de uma tal partícula a partir do vácuo [41, 42]. Alguns estudos de estabilidade de soluções cosmológicas clássicas foram realizados no contexto de gravitação de ordem superior e dão suporte a essa hipótese [43–47].

Mesmo no contexto da teoria de cordas existe o problema dos fantasmas (ver, por exemplo, [48]), que é contornado por meio da reparametrização de Zwiebach [49–51], removendo os graus de liberdade do tipo fantasma. O procedimento, porém, introduz ambiguidades, sendo capaz de modificar as soluções clássicas [52] e levantando dúvidas sobre a predizibilidade da teoria. Além disso, a remoção de todos os termos que geram fantasmas, do tipo $R_{\mu\nu}\square^N R^{\mu\nu}$ (para $N \geq 0$) e $R\square^N R$ (para $N \geq 1$), deve ser feita de forma infinitamente precisa. Em energias mais baixas, contudo, onde a teoria quântica de campos deve valer, correções de *loops* tendem a quebrar esse ajuste fino dos parâmetros, o que faria os fantasmas reaparecerem [53].

Em resumo, a aparente dicotomia entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias de ordem superior não implica que modelos com fantasmas devam ser rejeitados. Pelo contrário, estando presentes em várias das abordagens mais tradicionais para a gravitação quântica, o papel das derivadas mais altas e seus fantasmas associados é importante, complicado e ambíguo, e deve ser estudado como esquema rumo a uma teoria fundamental para a gravitação. No que segue comentaremos sobre duas propostas de interpretação das derivadas mais altas que têm atraído bastante atenção da comunidade na última década.

1.2 Gravitações polinomiais e não-locais

Uma generalização natural da teoria (1.1) de Stelle é a inclusão de termos com mais de quatro derivadas, mas quadráticos nas curvaturas, tais como $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu}$ e $\int d^4x \sqrt{-g} R \square^N R$. Claramente, pode-se ainda incluir termos de ordens mais altas

também nas curvaturas; eles, porém, alteram apenas os vértices da teoria, e não o propagador. Um modelo desse tipo foi considerado por Asorey, López e Shapiro em [54]:

$$\begin{aligned}
S_{\text{grav}} = S_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \{ & c_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + c_2 R_{\mu\nu}^2 + c_3 R^2 + d_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta} \\
& + d_2 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + d_3 R \square R + d_4 R^3 + d_5 R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots + f_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^N R^{\mu\nu\alpha\beta} \\
& + f_2 R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu} + f_3 R \square^N R + \dots + f_{\dots} R^{\dots} \}. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Os termos de segunda ordem nas curvaturas podem ser escritos na forma $R\tilde{F}_1(\square)R$, $R_{\mu\nu}\tilde{F}_2(\square)R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{F}_3(\square)R^{\mu\nu\alpha\beta}$, onde $\tilde{F}_{1,2,3}(\square)$ são polinômios de grau $N \geq 1$ no operador de d'Alembert. (O caso $N = 0$ corresponde ao modelo de Stelle (1.1).) Como esses são os termos que contribuem para o propagador, modelos deste tipo são ocasionalmente chamados de *polinômiais*.

Usando as identidades de Bianchi é possível mostrar (veja, por exemplo, [54]) que para cada $p \in \mathbb{N}$, vale

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^p R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} \square^p R^{\mu\nu} + R F_3 \square^p R \right\} = O(R^3). \tag{1.14}$$

Essa relação cumpre um papel semelhante ao teorema de Gauss-Bonnet no caso da gravitação de quarta ordem, ao permitir que os termos da ação (1.13) que são quadráticos no tensor de Riemann sejam reescritos como uma combinação de termos quadráticos em R e $R_{\mu\nu}$ e de outros termos de ordens mais altas que não influenciam o propagador. Podemos, portanto, escrever a parte da ação (1.13) que contribui para o propagador na forma⁷

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + R F_1(\square) R + R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} \right), \tag{1.15}$$

onde definimos os polinômios $F_1 \equiv \tilde{F}_1 - \tilde{F}_3$ e $F_2 \equiv \tilde{F}_2 + 4\tilde{F}_3$. Segue, então, que o propagador para o modelo polinomial é dado por⁸

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}}{k^2 f_2(-k^2)} - \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}}{2k^2 f_0(-k^2)}, \tag{1.16}$$

⁷Omitimos aqui a constante cosmológica para discutir a renormalizabilidade sobre o fundo plano; não há perda de generalidade nessa escolha, como explicado em [28].

⁸Note que $f_0 = f_2 \equiv 1$ fornece o propagador do gráviton.

onde as funções f_0 e f_2 se relacionam a F_1 e F_2 via

$$f_0(\square) = 1 + \kappa^2 [F_2(\square) + 3F_1(\square)] \square, \quad (1.17)$$

$$f_2(\square) = 1 - \frac{\kappa^2}{2} F_2(\square) \square. \quad (1.18)$$

Então, se f_0 e f_2 forem polinômios de mesmo grau N , todo o propagador cairá com $k^{-(2N+4)}$ no UV. Como no caso com quatro derivadas, é possível escolher uma condição de calibre com derivadas mais altas para que os termos de Faddeev-Popov também tenham esse comportamento para momentos elevados. Portanto, no regime ultravioleta a teoria tem comportamento ainda melhor que a de Stelle, e a contagem de potências fornece, para os diagramas mais divergentes,

$$\delta + d = 4 + 2N(1 - p), \quad (1.19)$$

donde segue que o grau superficial de divergência diminui à medida que aumentamos o número p de *loops*. Isso indica que a teoria é super-renormalizável [54]. Ainda, os contratermos necessários têm, no máximo, quatro derivadas [54]. Com efeito, para $N = 1$ as divergências logarítmicas só ocorrem para 1, 2 e 3 *loops*; para $N = 2$, apenas em 1 e 2 *loops*; e para $N \geq 3$, apenas em 1-*loop*. As divergências em 1-*loop* normalmente permanecem pois o aumento da ordem das derivadas na ação gera, simultaneamente, vértices com maior potência de momento, especificamente, com até $2N + 4$ derivadas.

Aumentar o número de derivadas na ação implica, contudo, no acréscimo do número de fantasmas. Com efeito, considerando que as equações $f_i(-k^2) = 0$ têm $N + 1$ raízes reais distintas, então o conteúdo de partículas da teoria é, além do gráviton, $N + 1$ partículas massivas de spin-2 e de spin-0. Em [54] foi mostrado que os resíduos dos pólos do propagador saturado se alternam de acordo com os valores das massas. Isto é, se as massas são ordenadas como $m_{(i)0} < m_{(i)1} < m_{(i)2} < \dots$ (aqui o índice i indica o spin da partícula), então a primeira delas será uma partícula normal, a seguinte um fantasma, e assim sucessivamente. No setor de spin-2 temos $0 < m_{(i)1} < \dots < m_{(i)N+1}$; assim o gráviton ($m_{(i)0} = 0$) é uma partícula boa e a seguinte é um fantasma. No caso

escalar não temos partícula sem massa propagando, logo a primeira excitação massiva é uma partícula inofensiva, mas a seguinte será um fantasma.

Essa hierarquia entre partículas normais e fantasmas invalida o cenário concebido em [54], que pressupunha que para certas funções F_i a teoria contivesse apenas um fantasma, e que este fosse a partícula de maior massa. Com essa hipótese, encarando a ação (1.13) como a truncagem à ordem N de uma ação mais geral, livre de problemas de unitariedade (por exemplo, oriunda da teoria de cordas), poderia ocorrer que a massa do fantasma aumentasse com N . Assim, o regime de validade da teoria efetiva (truncada) se expandiria com N sinalizando que em baixas energias poder-se-ia usar uma truncagem (e o ferramental da teoria quântica de campos usual) com certa consistência. A alternância entre fantasmas e partículas boas mostra que esse mecanismo infelizmente não funciona [54].

Em anos recentes, contudo, o modelo polinomial voltou a ser estudado com ênfase em um ponto pouco explorado em [54], qual seja, a possibilidade de que o propagador tenha pólos complexos. Conforme argumentado em [55, 56], caso os pólos do propagador relacionados aos fantasmas forem complexos, é possível restaurar a unitariedade da matriz-S por meio do método de quantização⁹ de Lee-Wick [61–66]. Esses modos complexos, então, seriam instáveis, não existindo nos estados assintóticos. Teorias de gravitação de ordem superior com pólos complexos são ocasionalmente chamadas na literatura de *gravitação de Lee-Wick*. Nessa esteira, em [67] foi mostrado que a versão complexificada de sistemas clássicos com derivadas mais altas pode evadir o teorema de Ostrogradsky e ser quantizada de forma canônica, preservando o princípio de correspondência e apresentando um espectro real positivo-definido, limitado inferiormente. Outros trabalhos recentes têm investigado aspectos interessantes de teorias do tipo

⁹Vale mencionar aqui outras propostas para tornar fantasmas inofensivos por meio da mudança da prescrição de quantização, tais como as teorias *agavity* [57] e de *fakeons* [58–60]. Nestas abordagens, contudo, a correspondência clássico-quântico é não-trivial, e o limite clássico deve ser investigado com atenção.

Lee-Wick [68, 69], com possíveis aplicações em gravitação.

Outra alternativa para contornar o problema dos fantasmas é escolher funções F_i na ação tal que o propagador não possua outros pólos além daquele correspondente ao gráviton. Isso pode ser feito escolhendo funções $f_{0,2}$ que sejam exponenciais de funções inteiras. Requerendo, ainda, um bom comportamento no regime UV, é possível garantir a (super-)renormalizabilidade da teoria. Essa abordagem para a teoria quântica de campos foi estudada ainda nas décadas de 1960 e 1970 por Efimov [70–73], e aplicada para a gravitação quântica no final dos anos 1980, por Krasnikov [74] e Kuz'min [75]. Outros tipos de não-localidade foram introduzidas em anos posteriores por Tseytlin [76], Tomboulis [77], Biswas, Mazumdar, Siegel [78] e Modesto [79]. Algumas escolhas populares de não-localidade são implementadas consoante a ação

$$S_{\text{NL}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R + \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) F(\square) R^{\mu\nu} \right], \quad F(\square) = \frac{e^{H(\square)} - 1}{\square}, \quad (1.20)$$

onde a função $H(z)$ é uma função inteira. As escolhas mais simples assumem a forma

$$H(z) = \alpha P(z), \quad (1.21)$$

com uma constante α e um polinômio P real tal que $P(0) = 0$. Acompanharemos a terminologia adotada por Calcagni [80] e chamaremos os casos acima com $\alpha = 1$ e $P(z) = z^2/\mu^4$ (para algum parâmetro massivo μ) de *fator de forma de Krasnikov* [74], e o caso de $P(z) = -z/\mu^2$ de *fator de forma relacionado à teoria de cordas* [76, 78, 81].

De forma mais geral¹⁰, a função $H(z)$ pode ser expressa como [77]

$$H(z) = \alpha \int_0^{P(z)} \frac{1 - \zeta(\omega)}{\omega} d\omega, \quad (1.22)$$

onde $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\zeta(0) = 1$. Escolhendo, por exemplo, $\zeta(z) = \exp(-z^N)$ segue

$$H(z) = \frac{\alpha}{N} [\gamma - \text{Ei}(-P^N(z))] + \alpha \ln P(z), \quad (1.23)$$

¹⁰Note que (1.21) pode ser obtida de (1.22) ao colocar $\zeta(\omega) = 1 - \omega$.

onde $\gamma \approx 0,5772$ é a constante de Euler-Mascheroni e $\text{Ei}(z)$ é a função exponencial integral. O *fator de forma geral de Kuz'min* [75],

$$H(z) = \alpha [\gamma + \Gamma(0, -z/\mu^2) + \ln(-z/\mu^2)], \quad (1.24)$$

decorre da escolha $N = 1$, $P(z) = -z/\mu^2$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. Por outro lado, com $N = 2$, $\alpha \geq 1$ e $P(z)$ geral temos o *fator de forma de Tomboulis-Modesto* [79]:

$$H(z) = \frac{\alpha}{2} [\gamma + \Gamma(0, P^2(z))] + \alpha \ln P(z), \quad \text{Re}[P(z)] > 0. \quad (1.25)$$

Como antecipado, nessas teorias não-locais o propagador se torna (apresentamos apenas os termos que independem do calibre)

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{e^{-H(-k^2)}}{k^2} \left[P^{(2)} - \frac{1}{2} P^{(0-s)} \right]_{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (1.26)$$

Fica claro que este propagador tem apenas o pólo $k^2 = 0$, exatamente o mesmo do caso da gravitação einsteiniana. Dependendo da função $H(z)$ a teoria pode ser renormalizável ou mesmo super-renormalizável.

Por exemplo, no regime UV o fator de forma de Kuz'min (1.24) se comporta como

$$\exp[H(-k^2)] \approx (k^2)^\alpha e^{\alpha\gamma}, \quad (1.27)$$

donde $\alpha > 1$ implica que o propagador cai com $k^{2\alpha+2}$ para momentos grandes, mesmo comportamento que o caso da gravitação polinomial super-renormalizável. No caso de $\alpha = 1$, no entanto, temos $G(k) \sim k^{-4}$, como no caso de gravitação de Stelle, que é apenas renormalizável.

Para o fator mais geral de Tomboulis-Modesto (1.25) se tem

$$\exp[H(-k^2)] \approx [P(-k^2)]^\alpha e^{\alpha\gamma/2} \quad (1.28)$$

no UV, donde o comportamento do propagador para momentos elevados também depende, naturalmente, da escolha de polinômio P . Neste caso, mesmo escolhendo $\alpha = 1$

é possível ter uma teoria super-renormalizável, desde que $P(z)$ seja de grau pelo menos igual a dois.

A maior virtude desses fatores de forma de Kuz'min e de Tomboulis-Modesto é que, no UV, eles se comportam como funções polinomiais, e portanto a renormalizabilidade pode ser estudada como no caso das teorias locais [75, 77, 79]. Por esse comportamento assintótico polinomial, tais teorias são conhecidas como *quase-locais* ou *fracamente não-locais*.

Os fatores de forma do tipo (1.21), que englobam o de Krasnikov e o relacionado à teoria de cordas, por sua vez, têm um comportamento diferente no regime UV. Com efeito, nesses casos o propagador cai com a exponencial de um polinômio, o que motiva que chamar essas teorias de gravitação *não-local exponencial* (em oposição às fracamente não-locais). Embora haja a expectativa de que essas teorias sejam renormalizáveis, a situação não é clara como nos modelos quase-locais [74, 82].

Esses modelos de gravitação não-local podem ser vistos como o limite do caso polinomial no qual o grau do polinômio vai para infinito e seus coeficientes são ajustados de modo a resultar em uma série convergente. Sob essa óptica, para evitar fantasmas é preciso um ajuste infinitamente preciso de um número infinito de parâmetros, situação semelhante àquela discutida na seção anterior, no âmbito da teoria de cordas. Correções quânticas podem, então, romper tão acurado ajuste, trazendo à tona os infinitos fantasmas que estavam escondidos no infinito (do plano complexo estendido) [53]. Assim, o estudo de modelos locais com pólos complexos pode ser útil inclusive para a melhor compreensão de modelos não-locais.

Feitas essas considerações sobre modelos de gravitação de ordem superior, nosso ponto de vista no que segue é assumir que derivadas mais altas existem e buscar por suas consequências mesmo no limite de baixas energias, em especial nos casos de pólos complexos e teorias não-locais, com potencial aplicação à fenomenologia. Iniciamos nosso estudo dessas extensões da relatividade geral considerando o limite newtoniano e a ocorrência de singularidades. Nesse sentido, no Capítulo 2 obtemos uma caracteriza-

ção completa das teorias polinomiais que admitem uma solução regular para o campo gerado por uma massa puntiforme. Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos uma formulação alternativa para esse problema, que se aplica também para teorias não-locais. Discutimos, então, a existência de singularidades em teorias não-locais exponenciais e quase-locais.

No Capítulo 4 estudamos casos particulares da gravitação de sexta-ordem, o modelo polinomial mais simples a admitir pólos complexos. Analisamos dois efeitos em baixas energias, a saber, oscilações no potencial gravitacional e a deflexão da luz, como possibilidades para detecção experimental do efeito das derivadas mais altas. O Capítulo 5 está dedicado ao estudo mais detalhado da influência de modos escalares à deflexão gravitacional da luz, e contém resultados gerais, válidos inclusive para teorias não-locais.

Por fim, no Capítulo 6 discutimos a viabilidade um efeito de *seesaw* gravitacional como possibilidade de contornar a supressão causada pela escala de Planck e trazer a fenomenologia dos modelos polinomiais para o regime de baixas energias. Recapitulamos os principais resultados desta tese no Capítulo 7 e apresentamos algumas perspectivas futuras.

Ao longo desta tese usamos o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$) e a convenção de soma de Einstein para dois índices iguais em posições diferentes; índices gregos assumem valores entre 0 e 3, e índices latinos variam entre 1 e 3. Nossa definição para o tensor de curvatura de Riemann é

$$R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho, \quad (1.29)$$

Nos Capítulos 2 e 3 usamos a métrica de Minkovski $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ e definimos o tensor de Ricci como $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$. Nos Capítulos 4, 5 e 6, contudo, usamos a assinatura $(+1, -1, -1, -1)$ para a métrica e o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\nu\rho}$. Essa mudança de convenção de sinais foi feita para que a notação do capítulo acompanhe aquela dos respectivos artigos relacionados.

Capítulo 2

Limite newtoniano e soluções regulares em modelos polinomiais

O estudo das soluções completas (não-lineares) no âmbito de teorias de ordem superior é consideravelmente mais complicado que no caso da relatividade geral, mesmo para soluções com elevados graus de simetria, como o simples caso estático e esfericamente simétrico. Por este motivo, resultados acerca da existência de singularidades no regime linear podem ser instrutivos, inclusive, para a busca de soluções completas via métodos computacionais. Ainda, são uma possibilidade de verificar o comportamento do modelo no que tange a singularidade mais simples de toda a física, a singularidade newtoniana, proporcional a r^{-1} , associada ao potencial gravitacional.

A questão da existência de soluções clássicas regulares em teorias de gravitação de ordem superior, locais e não-locais, tem sido objeto de intensa atividade de pesquisa nos últimos anos (ver, por exemplo, [83–88] para teorias locais e [76, 78, 79, 81, 89–101] para modelos não-locais). A expectativa é que o melhor comportamento do propagador no regime UV funcione como regulador natural das singularidades que ocorrem na relatividade geral e sinalizam a transição do regime clássico para o quântico.

Os primeiros resultados nessa direção datam ainda dos anos 1970, quando Stelle mostrou que o potencial newtoniano modificado associado à teoria renormalizável de quatro derivadas (ver ação (1.1)) é finito na origem. Explicitamente, lembrando que esta teoria possui duas partículas massivas, m_2 de spin-2 e m_0 , de spin-0, o potencial interpartículas é dado por [28]

$$\varphi(r) = -GM \left(\frac{1}{r} - \frac{4}{3} \frac{e^{-rm_2}}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-rm_0}}{r} \right), \quad (2.1)$$

donde segue que $\varphi(0) = -GM(4m_2 - m_0)/3$. Num trabalho subsequente, contudo, Stelle notou que apesar do potencial ser finito, ainda persistiam as singularidades nas curvaturas [102] (este tema será discutido em detalhes na Seção 2.4).

Em anos mais recentes, esses dois resultados associados ao modelo de quatro derivadas, a saber, a finitude do potencial e a existência de singularidades na curvatura, motivaram duas interessantes idéias. A primeira pode ser enunciada como uma conjectura que relaciona as divergências quânticas e clássicas de teorias de gravitação, ao sugerir que a renormalizabilidade de um modelo estaria de alguma forma conectada ao bom comportamento do potencial clássico, e vice versa [53, 83, 87]. A outra idéia é que teorias locais de ordem superior são incapazes de resolver completamente o problema das singularidades clássicas, visto que na teoria de quarta ordem ainda existem singularidades nos invariantes de curvatura. Neste capítulo abordaremos precisamente essas duas idéias, verificando sob quais condições a conjectura é válida e esclarecendo a presença de singularidades nos invariantes de curvatura, pelo menos no regime linear.

Antes de seguir para os resultados originais, cabe comentar dois importantes exemplos nos quais a conjectura mencionada se mostra válida. O primeiro deles é o caso da teoria polinomial incompleta (não-renormalizável), que só possui derivadas mais altas no setor de R^2 , isto é,

$$S_{grav} = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [2R + R F(\square) R]. \quad (2.2)$$

Neste caso, como mostrado em [103], o potencial diverge na origem.

O segundo exemplo surgiu mais recentemente, quando Modesto, Netto e Shapiro generalizaram o cálculo do potencial para modelos polinomiais super-renormalizáveis (1.15) com a imposição adicional de que o propagador contivesse apenas pólos reais e simples no propagador [87]. O principal resultado desse trabalho foi uma nova verificação da mencionada conjectura, mostrando que esses modelos têm um potencial finito na origem: os vários modos massivos tensoriais e escalares contribuem de maneira a precisamente cancelar a singularidade newtoniana. Ainda, foi sugerido que isso ocorre não apenas devido a um particular balanço entre as forças atrativas causadas pelos modos saudáveis e aquelas repulsivas associadas aos fantasmas, mas também por conta do balanço do número de modos tensoriais e escalares. Especificamente, em [87] se conjecturou que caso o número das excitações massivas de cada spin não seja o mesmo (o que está relacionado à perda de renormalizabilidade) o potencial não seria regular na origem.

Neste capítulo ampliaremos a discussão para modelos polinomiais arbitrários, definidos pela ação¹

$$S_{grav} = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ 2R + R_{\mu\nu} F_1(\square) R^{\mu\nu} + R F_2(\square) R \right\}, \quad (2.3)$$

onde F_1 e F_2 são funções polinomiais do operador de d'Alembert, não necessariamente do mesmo grau. Note que o caso de polinômios triviais, isto é, $F_i = \text{const.} \neq 0$, reduz-se à gravitação de Stelle; já a escolha $F_1 = F_2 = 0$ recupera a relatividade geral. Como argumentado na Introdução, no limite newtoniano esta é a ação mais geral com derivadas mais altas.

¹Lembramos que neste capítulo usamos as convenções $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ para a métrica de Minkovski e $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ para o tensor de Ricci.

2.1 Limite newtoniano

No limite newtoniano, consideramos a métrica como uma perturbação da métrica plana de Minkovski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

e trabalhamos com as equações de movimento linearizadas. Como nessa aproximação apenas os termos de segunda ordem em (2.3) irão contribuir para as equações de movimento, expandimos a ação de acordo com (2.4) e obtemos sua forma bilinear,

$$\begin{aligned} S_{grav}^{(2)} = & \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \left[\frac{1}{2} h_{\mu\nu} f_2(\square) \square h^{\mu\nu} - h_\nu^\rho f_2(\square) \partial_\rho \partial_\mu h^{\mu\nu} \right. \\ & + \frac{1}{3} h [2f_0(\square) + f_2(\square)] \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{6} h [2f_0(\square) + f_2(\square)] \square h \\ & \left. - \frac{1}{3} h^{\mu\nu} [f_0(\square) - f_2(\square)] \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde definimos

$$f_0(\square) = 1 - F_1(\square)\square - 3F_2(\square)\square, \quad (2.6)$$

e

$$f_2(\square) = 1 + \frac{1}{2} F_1(\square) \square. \quad (2.7)$$

Aplicando o princípio variacional e introduzindo uma fonte material, segue a equação de movimento para o campo $h_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} f_2(\square) (\square h_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho - \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho) + \frac{2}{3} [f_2(\square) - f_0(\square)] \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} \\ + \frac{1}{3} [2f_0(\square) + f_2(\square)] (\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} - \eta_{\mu\nu} \square h + \partial_\mu \partial_\nu h) = -16\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento associado à fonte. Uma vez que estamos interessados no campo gerado por uma massa pontual estática, definimos

$$T_{\mu\nu} = \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0, \quad (2.9)$$

com a densidade $\rho = M \delta^{(3)}(\mathbf{r})$. Decorre da simetria da fonte que é possível escrever a métrica na forma isotrópica

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi)dt^2 + (1 - 2\psi)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.10)$$

Aqui $\varphi = \varphi(r)$ e $\psi = \psi(r)$ são os potenciais newtonianos e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Como temos apenas dois potenciais métricos por determinar, podemos obtê-los resolvendo o sistema formado pelo traço das equações de movimento e pela sua componente (00), respectivamente,

$$f_0(\Delta)\Delta(\varphi - 2\psi) = -4\pi G\rho, \quad (2.11)$$

$$f_2(\Delta)\Delta(\varphi + \psi) - f_0(\Delta)\Delta(\varphi - 2\psi) = 12\pi G\rho. \quad (2.12)$$

Fizemos, ainda, a substituição $\square \mapsto \Delta$, dado que a métrica é estática.

Ao invés de resolver o sistema de equações diferenciais acima diretamente para os potenciais φ e ψ , é mais conveniente trabalhar com uma combinação linear na forma

$$\chi_0 \equiv \varphi - 2\psi \quad \text{e} \quad \chi_2 \equiv \varphi + \psi. \quad (2.13)$$

Uma vez que as equações são resolvidas para χ_0 e χ_2 , é fácil encontrar a solução para os potenciais originais, bastando fazer

$$\varphi = \frac{1}{3}(2\chi_2 + \chi_0), \quad \psi = \frac{1}{3}(\chi_2 - \chi_0). \quad (2.14)$$

Há ao menos duas razões para trabalhar com os potenciais auxiliares χ_0 e χ_2 . Primeiramente, as equações de campo assumem uma forma simples em termos das funções f_0 e f_2 . Com efeito, o sistema formado por (2.12) e (2.11) é equivalente a

$$f_2(\Delta)\Delta\chi_2 = 8\pi G\rho, \quad (2.15)$$

$$f_0(\Delta)\Delta\chi_0 = -4\pi G\rho. \quad (2.16)$$

Em segundo lugar, as funções f_2 e f_0 acima correspondem exatamente aos termos que aparecem, respectivamente, nos setores de spin-2 e spin-0 do propagador associado à

teoria (2.3) [104],

$$G(k) = \frac{1}{k^2 f_2(-k^2)} P^{(2)} - \frac{1}{2k^2 f_0(-k^2)} P^{(0-s)}, \quad (2.17)$$

onde $P^{(2)}$ e $P^{(0-s)}$ são, respectivamente, os projetores de spin-2 e spin-0 (1.8); índices tensoriais e os termos que dependem da escolha de calibre foram omitidos por simplicidade.

Então, as raízes das equações $f_2(-k^2) = 0$ e $f_0(-k^2) = 0$ determinam os pólos massivos do propagador e, portanto, o espectro massivo do modelo. Neste espírito, a Eq. (2.13) separa os potenciais métricos nas contribuições devidas aos modos de spin-2 (via χ_2) e de spin-0 (via χ_0). Com base nessa relação entre as raízes das equações $f_2(-k^2) = f_0(-k^2) = 0$ e os pólos do propagador, iremos nos referir a essas quantidades igualmente como *raízes* ou *pólos*.

As equações (2.15) e (2.16) possuem a mesma estrutura essencial: a única diferença significativa entre elas é o polinômio que aparece na função operatorial. Como nosso objetivo é estudar teorias polinomiais gerais, não iremos basear nossa análise em nenhum valor particular para os coeficientes de f_0 e f_2 . Convém, então, definir as quantidades $\kappa_0 = -4\pi G$, $\kappa_2 = 8\pi G$ e escrever (2.15) e (2.16) como simplesmente

$$f_s(\Delta)\Delta\chi_s = \kappa_s \rho, \quad (2.18)$$

com $s = 0, 2$. No que segue resolveremos esta equação aplicando o método de *heat kernel*, baseado na transformada de Laplace, como introduzido em [95].

2.2 Solução via o método de *heat kernel*

Por economia de notação omitiremos os índices de spin em f_s , χ_s e κ_s , restituindo-os apenas no resultado final. Princípios introduzindo a função de Green para a Eq. (2.18),

$$\hat{H} \cdot \hat{G} = \hat{1}, \quad (2.19)$$

onde

$$\hat{H} = f(\Delta)\Delta, \quad (2.20)$$

que leva à solução integral

$$\chi(x) = \kappa \int d^3x' G(x, x') \rho(x'). \quad (2.21)$$

Suponhamos, agora, que o operador (2.20) tem um inverso $\hat{H}^{-1}(\Delta)$ que pode ser escrito como transformada de Laplace de uma certa função Ξ , ou seja,

$$H^{-1}(-\xi) = \int_0^\infty \Xi(s) e^{-s\xi} ds. \quad (2.22)$$

Assim, a função de Green \hat{G} pode ser representada no espaço de posições como

$$G(x, x') = \int_0^\infty \Xi(s) \langle x | e^{s\Delta} | x' \rangle ds, \quad (2.23)$$

onde

$$\langle x | e^{s\Delta} | x' \rangle = K(|x - x'|; s) = \frac{e^{-|x-x'|^2/4s}}{(4\pi s)^{3/2}} \quad (2.24)$$

é o *heat kernel* do laplaciano. A escolha $x = r$ e $x' = 0$, simplifica a fórmula (2.21) para

$$\chi(r) = \kappa M \int_0^\infty \Xi(s) K(r; s) ds. \quad (2.25)$$

Particularizando para o modelo polinomial (2.3), consoante o teorema fundamental da álgebra podemos fatorar o polinômio $f(-\xi)$ na forma²

$$f(-\xi) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{m_i^2 + \xi}{m_i^2} \right)^{\alpha_i} \quad (2.26)$$

onde $\xi = -m_i^2$ (com $i \in \{1, 2, \dots, N\}$) é uma raiz da equação $f(-\xi) = 0$ e α_i sua multiplicidade. Note que se o grau de $f(-\xi)$ é \mathcal{N} — isto é, se há $2(\mathcal{N} + 1)$ derivadas na

²Os fatores m_i^{-2} precisam ser introduzidos pois a Eq. (2.6) requer $f(0) = 1$.

ação no setor associado a f —, então $\sum_{i=1}^N \alpha_i = \mathcal{N}$. Recordamos que por simplicidade de notação omitimos os índices de spin; explicitando-os, teríamos que escrever $f_s, m_{(s)i}, \alpha_{(s)i}, \mathcal{N}_s, N_s, \Xi_s$ e κ_s . Como nosso interesse é em modelos polinomiais gerais, não iremos fazer nenhuma restrição inicial na natureza complexa ou real ou na multiplicidade das quantidades m_i^2 .

A função $\Xi(s)$ para modelos gerais de gravitação de ordem superior pode ser calculada mediante a substituição de (2.26) em (2.22), e a inversão da transformada de Laplace usando a decomposição em frações parciais [105]. O resultado é

$$\Xi(s) = -1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j} s^{j-1} e^{-sm_i^2} \quad (2.27)$$

onde os coeficientes $A_{i,j}$ são definidos pela decomposição de $H^{-1}(-\xi)$ em frações parciais. Explicitamente,

$$A_{i,j} = \frac{1}{(\alpha_i - j)!(j - 1)!} \frac{d^{\alpha_i - j}}{d\xi^{\alpha_i - j}} \left[-\frac{(\xi + m_i^2)^{\alpha_i}}{\xi f(-\xi)} \right] \Bigg|_{\xi = -m_i^2}. \quad (2.28)$$

Ainda, por economia de notação convém definir o símbolo $A_{i,j}$ para $j > \alpha_i$ pondo $A_{i,j > \alpha_i} \equiv 0$.

O potencial χ pode, dessarte, ser calculado inserindo (2.27) em (2.25), donde

$$\chi(r) = -\frac{\kappa M}{4\pi r} + \frac{\kappa M}{8\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j} \int_0^\infty ds s^{j-\frac{5}{2}} e^{-(sm_i^2 + r^2/4s)}. \quad (2.29)$$

Para que as integrais convirjam, assumimos que $\text{Re } m_i^2 > 0$. Fazendo a mudança de variáveis $sm_i^2 \mapsto s$ cada uma das integrais acima se torna

$$I_i = \int_0^\infty ds s^{j-\frac{5}{2}} e^{-(sm_i^2 + r^2/4s)} = (m_i^2)^{\frac{3}{2}-j} \int_\Gamma ds s^{j-\frac{5}{2}} e^{-(s+m_i^2 r^2/4s)}, \quad (2.30)$$

sendo que a última integral é efetuada ao longo da semi-reta $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : w = m_i^2 t, t \in \mathbb{R}^+\}$. Claramente, no caso de uma raiz m_i^2 real a integração permanece sendo sobre o semi-eixo real positivo. Para raízes complexas, contudo, o domínio de integração sofre

uma rotação no plano complexo. Apesar disso, nesse domínio ainda se verifica a relação $\text{Re } w > 0$. Como o integrando de (2.30),

$$h(s) \equiv s^{j-\frac{5}{2}} e^{-(s+m_i^2 r^2/4s)}, \quad (2.31)$$

é uma função analítica com apenas uma singularidade removível na origem, e é exponencialmente suprimida quando $|s| \rightarrow \infty$, podemos aplicar o teorema de resíduos de Cauchy. Dessa forma, é nula a integral de $h(s)$ ao longo do contorno $\Gamma_\varrho = [0, \varrho] \cup C_\varrho \cup \{w \in \mathbb{C} : w = m_i^2(\varrho - t), t \in (0, \varrho]\}$, onde C_ϱ é o arco de circunferência de raio ϱ que conecta os pontos $w_1 = \varrho$ e $w_2 = m_i^2 \varrho$. Passando ao limite $\varrho \rightarrow \infty$, segue que $\int_0^\infty h(s) ds = \int_\Gamma h(s) ds$. Concluimos daí que mesmo na presença de raízes complexas m_i^2 é possível realizar a integral sobre o semi-eixo real positivo. Logo,

$$I_i = (m_i^2)^{\frac{3}{2}-j} \int_0^\infty ds s^{j-\frac{5}{2}} e^{-(s+m_i^2 r^2/4s)} = 2 \left(\frac{r}{2m_i} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{\frac{3}{2}-j}(m_i r), \quad (2.32)$$

onde escolhemos m_i com parte real positiva e reconhecemos na integral uma representação da função de Bessel modificada de segunda espécie K_ν [105]. Portanto, o potencial χ é dado por

$$\chi(r) = -\frac{\kappa M}{4\pi r} + \frac{\kappa M}{4\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j} \left(\frac{r}{2m_i} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_i r). \quad (2.33)$$

Para chegar a este resultado assumimos que $\text{Re } m_i^2 > 0$ e, posteriormente, $\text{Re } m_i > 0$. Esta condição é fisicamente justificada pelo requerimento de que o potencial cai para zero a grandes distâncias, bem como para evitar táquions no modelo. A primeira condição, contudo, relaciona-se ao método do *heat-kernel* usado para resolver (2.15) e à premissa que o operador \hat{H}^{-1} tem a forma (2.22). Na verdade, a solução (2.33) também é válida para os casos nos quais o polinômio $f(-\xi)$ tem raízes tais que $|\text{Im } m_i| > \text{Re } m_i > 0$, pois as funções de Bessel fornecem a continuação analítica de cada termo em (2.29), visto como função de um m_i^2 arbitrário com $\text{Re } m_i > 0$. Notamos que é possível obter o potencial (2.33) diretamente para o caso mais geral de $|\arg m_i| < \pi/2$

aplicando o método da transformada de Fourier e usando a representação de Basset das funções de Bessel modificadas [106]. Os cálculos, no entanto, são mais longos e tediosos.

O caso da relatividade geral ($f_0 = f_2 \equiv 1$) é um exemplo trivial do resultado anterior, pois $\Xi^{RG}(s) = -1$ e $\chi_s^{RG}(r) = -\kappa_s M(4\pi r)^{-1}$, donde $\chi_2^{RG} = -2GMr^{-1}$ e $\chi_0^{RG} = GMr^{-1}$; assim $\varphi = \psi = -GMr^{-1}$. Outro exemplo direto é quando $f(-\xi) = 0$ tem apenas raízes não-degeneradas (ND). Então $\alpha_i = 1 \forall i$, e $\Xi(s)$ se reduz a [95]

$$\Xi^{\text{ND}}(s) = -1 + \sum_{i=1}^N e^{-sm_i^2} \prod_{j \neq i} \frac{m_j^2}{m_j^2 - m_i^2}, \quad (2.34)$$

enquanto que o potencial é dado por

$$\chi_s^{\text{ND}}(r) = -\frac{\kappa_s M}{4\pi r} \left[1 - \sum_{i=1}^{N_s} e^{-m_{(s)i} r} \prod_{j \neq i} \frac{m_{(s)j}^2}{m_{(s)j}^2 - m_{(s)i}^2} \right], \quad (2.35)$$

onde restituímos os índices $s = 0, 2$ referentes ao setor de spin. Este resultado concorda com χ_2 obtido por Frolov em [95]. Ainda, retornando aos potenciais métricos originais temos o potencial newtoniano modificado

$$\begin{aligned} \varphi^{\text{ND}}(r) = & -\frac{GM}{r} \left[1 - \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{N_2} e^{-rm_{(2)i}} \prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_0} e^{-rm_{(0)i}} \prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

verificando os cálculos de Modesto, Netto e Shapiro [87]. Suprimindo os termos relacionados aos modos escalares na equação anterior (fazendo, por exemplo, $m_{(0)i} \rightarrow \infty, \forall i$) segue o resultado de Quandt e Schmidt [103]. Vale notar que essas três referências, [87, 95, 103], consideraram que os pólos do propagador eram reais; vemos aqui que a mesma fórmula vale no caso mais geral, com pólos complexos simples. Este resultado foi obtido por nós originalmente em [107], por meio de outros métodos. O raciocínio (mais geral) que aqui apresentamos segue nosso trabalho mais recente [108].

No caso de polinômios f_s arbitrários temos os potenciais métricos

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & -\frac{GM}{r} + \frac{4}{3} \frac{GM}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{\alpha_{(2)i}} A_{(2)i,j} \left(\frac{r}{2m_{(2)i}} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_{(2)i}r) \\ & - \frac{1}{3} \frac{GM}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{\alpha_{(0)i}} A_{(0)i,j} \left(\frac{r}{2m_{(0)i}} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_{(0)i}r), \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$\begin{aligned} \psi(r) = & -\frac{GM}{r} + \frac{2}{3} \frac{GM}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{\alpha_{(2)i}} A_{(2)i,j} \left(\frac{r}{2m_{(2)i}} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_{(2)i}r) \\ & + \frac{1}{3} \frac{GM}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{\alpha_{(0)i}} A_{(0)i,j} \left(\frac{r}{2m_{(0)i}} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_{(0)i}r). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como notado anteriormente, as quantidades $m_{(s)i}$ são as massas dos novos graus de liberdade de spin- s . Ainda, os potenciais são sempre reais, apesar da possibilidade de pólos complexos no propagador. O cancelamento da parte imaginária ocorre porque $K_n(\bar{z}) = \overline{K_n(z)}$ para $n \in \mathbb{R}$, e $A_{\bar{i},j} = \overline{A_{i,j}}$; o sub-índice barrado \bar{i} se refere ao pólo conjugado a m_i^2 . Novamente, a primeira referência a considerar soluções para a gravitação polinomial geral (incluindo o caso de pólos complexos e degenerados) foi nosso trabalho [107]. Lá o foco era no cancelamento da singularidade newtoniana do potencial, e a abordagem para o problema não requeria o cálculo da expressão completa para o potencial, em todas as ordens em r . Portanto, pólos degenerados puderam ser considerados como situações limites de casos com pólos simples, como em [103]. O procedimento, no entanto, pode ser ambíguo para a obtenção da expressão completa para o potencial para pólos de ordem maior que dois. A fórmula (2.37) resolve a dificuldade ao considerar, explicitamente e desde o princípio, pólos de multiplicidade arbitrária.

2.3 Finitude dos potenciais métricos

Com as expressões para os potenciais métricos é possível analisar a questão da finitude e regularidade das soluções. Princípios reparando que se ambos χ_2 e χ_0

são finitos na origem, os potenciais φ e ψ também o serão. No que segue usaremos a fórmula geral (2.33) para mostrar que χ_s é finito para um polinômio arbitrário não-trivial da forma (2.6) (ou (2.7)). Como conclusão, se f_0 e f_2 têm grau pelo menos igual a um, então os potenciais φ e ψ são finitos em $r = 0$.

Omitindo novamente o índice referente ao spin, reescrevemos (2.33) separando os termos para os quais $j > 3/2$:

$$\chi(r) = -\frac{\kappa M}{4\pi r} + \frac{\kappa M}{4\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^N \left[A_{i,1} \sqrt{\frac{2m_i}{r}} K_{-\frac{1}{2}}(m_i r) + \sum_{j=2}^{\alpha_i} A_{i,j} \left(\frac{r}{2m_i}\right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_i r) \right], \quad (2.39)$$

onde o somatório sobre $j \geq 2$ é considerado apenas caso $\alpha_i > 1$. Para $j \geq 2$ e r pequeno as funções $K_{j-\frac{3}{2}}(m_i r)$ se comportam como $r^{-j+3/2}$ [105]. Logo, todos os termos com $j \geq 2$ são finitos em $r = 0$. Resta checar que os termos com $j = 1$ são capazes de cancelar a singularidade newtoniana. Dado que

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (2.40)$$

os termos com $j = 1$ são do tipo

$$\frac{\kappa M}{4\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^N A_{i,1} \sqrt{\frac{2m_i}{r}} K_{-\frac{1}{2}}(m_i r) = \frac{\kappa M}{4\pi r} \sum_{i=1}^N A_{i,1} e^{-m_i r}. \quad (2.41)$$

Portanto, o potencial (2.33) pode ser escrito como

$$\chi(r) = \frac{\kappa M}{4\pi r} \left[-1 + \sum_{i=1}^N A_{i,1} \right] + \chi^{\{0\}} + \chi^{\{1\}} r + \chi^{\{2\}} r^2 + O(r^3), \quad (2.42)$$

onde $\chi^{\{0\}}$, $\chi^{\{1\}}$ e $\chi^{\{2\}}$ são constantes. Para mostrar que o potencial χ é finito na origem, basta provar que

$$\sum_i A_{i,1} = 1. \quad (2.43)$$

Em princípio, os coeficientes $A_{i,j}$ podem ser escritos em termos das raízes do polinômio f , embora para casos gerais essa é uma tarefa consideravelmente mais difícil.

Um exemplo básico é o caso de modelos que têm apenas pólos simples, para os quais a relação (2.43) assume a forma

$$\sum_i \prod_{j \neq i} \frac{m_j^2}{m_j^2 - m_i^2} = 1, \quad (2.44)$$

como se verifica facilmente ao expandir a solução (2.35) em potências de r . Esta Eq. (2.44) é, na realidade, uma identidade válida para qualquer conjunto de N números distintos $\{m_1^2, m_2^2, \dots, m_N^2\}$, e foi usada para demonstrar a finitude do potencial para modelos polinomiais super-renormalizáveis com pólos reais em [87]. Apresentamos uma demonstração dessa identidade em [107] (ver, alternativamente, o Apêndice A desta tese), onde também a aplicamos para generalizar o resultado de [87] para modelos polinomiais gerais. Seguiremos aqui, contudo, o caminho alternativo mais fácil e abrangente desenvolvido em [108], e provaremos (2.43) diretamente, sem a necessidade de resolver $A_{i,1}$ em termos das massas.

Começamos recordando que f é uma função polinomial de grau $\mathcal{N} \geq 1$ tal que $f(0) = 1$, e que as quantidades $A_{i,j}$ definidas por (2.28) estão associadas aos coeficientes $a_{i,j}$ desta decomposição em frações parciais:

$$-\frac{1}{\xi f(-\xi)} = -\frac{1}{\xi} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{a_{i,j}}{(\xi + m_i^2)^j}. \quad (2.45)$$

De fato, $a_{i,j} = A_{i,j}(j-1)!$ e, em particular, $A_{i,1} = a_{i,1}$ e $A_{i,2} = a_{i,2}$. Reagrupando o membro direito numa única fração obtém-se

$$-\prod_{i=1}^N m_i^{2\alpha_i} = -\prod_{i=1}^N (\xi + m_i^2)^{\alpha_i} + \xi \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\alpha_i} a_{i,j} (\xi + m_i^2)^{\alpha_i - j} \prod_{k \neq i} (\xi + m_k^2)^{\alpha_k}. \quad (2.46)$$

Comparando, pois, os dois membros ordem a ordem em ξ segue, para o termo de ordem mais alta (ordem $\mathcal{N} = \sum_i \alpha_i$),

$$0 = \left(-1 + \sum_{i=1}^N a_{i,1} \right) \xi^{\mathcal{N}}, \quad (2.47)$$

donde

$$\sum_{i=1}^N A_{i,1} = 1. \quad (2.48)$$

A substituição deste resultado em (2.42) mostra que a singularidade newtoniana do potencial χ_s é cancelada se $\mathcal{N}_s \geq 1$, ou seja, se a ação contém pelo menos quatro derivadas no setor de spin- s .

Portanto, um modelo de gravitação polinomial terá um potencial finito na origem se e somente se tiver pelo menos quatro derivadas no setor de spin-2 e de spin-0. Assim, o modo mais simples de evitar a singularidade newtoniana é introduzir o termo $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2$ na ação de Einstein-Hilbert. A inclusão apenas deste termo é suficiente para tornar o potencial finito, porém o modo escalar resultante é um táquion (vide (1.11)). Para evitá-lo é preciso incluir, pelo menos, um termo do tipo $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$: temos então a teoria renormalizável de Stelle. Podemos muito bem incluir termos com mais derivadas em um dos setores, por exemplo $\int d^4x \sqrt{-g} R \square R$, sem afetar a finitude do potencial, visto que o cancelamento da singularidade de χ_0 ocorre de forma independente de χ_2 . Essa escolha, porém, torna o modelo não-renormalizável, já que o propagador e os vértices se tornam não-homogêneos na potência de momento [87].

Neste ponto convém retornar à conjectura mencionada no começo deste capítulo, de que haveria uma relação entre a renormalizabilidade do modelo e o comportamento do potencial newtoniano próximo à origem [53, 83, 87]. Nosso resultado mostra que realmente existe uma relação entre essas propriedades, mas apenas apenas em um sentido: modelos renormalizáveis têm pelo menos quatro derivadas em cada setor, logo têm potenciais finitos. A recíproca não é verdadeira: existem modelos não-renormalizáveis com potencial finito. Essa análise também esclarece a questão do balanço entre o número de fantasmas e partículas benignas e a finitude do potencial sugerida em [87], ao mostrar que mesmo em modelos “desbalanceados” pode ocorrer o cancelamento da singularidade.

2.4 Regularidade dos invariantes de curvatura

Munidos das expressões gerais para os potenciais métricos, (2.37) e (2.38), podemos analisar a questão da existência de soluções regulares nas curvaturas. Como é bem conhecido, a ausência de singularidades na métrica não é suficiente para garantir que os invariantes de curvatura são regulares. Por exemplo, para uma métrica na forma (2.10), o invariante de Kretschmann $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ é dado por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = 4(\varphi''^2 + 2\psi''^2) + \frac{16}{r}\psi'\psi'' + \frac{8}{r^2}(\varphi'^2 + 3\psi'^2), \quad (2.49)$$

que claramente diverge se $\varphi'(0)$ e $\psi'(0)$ são diferentes de zero.

Para analisar de forma mais rigorosa as condições para termos invariantes de curvatura regulares, vamos supor que ambos potenciais métricos são finitos:

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \varphi_1 r + \varphi_2 r^2 + \varphi_3 r^3 + O(r^4), \quad (2.50)$$

$$\psi(r) = \psi_0 + \psi_1 r + \psi_2 r^2 + \psi_3 r^3 + O(r^4). \quad (2.51)$$

Em termos de φ_n e ψ_n o escalar de Kretschmann se escreve

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{8(\varphi_1^2 + 3\psi_1^2)}{r^2} + \frac{32(\varphi_1\varphi_2 + 4\psi_1\psi_2)}{r} + 48(\varphi_2^2 + 4\psi_2^2 + \varphi_1\varphi_3 + 5\psi_1\psi_3) + O(r). \quad (2.52)$$

Portanto, o invariante $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ é regular se e somente se $\varphi_1 = \psi_1 = 0$. Esta é, na verdade, a condição de regularidade para todo o conjunto dos invariantes de curvatura³:

$$R_{\mu\nu}^2 = \frac{2(3\varphi_1^2 - 6\varphi_1\psi_1 + 11\psi_1^2)}{r^2} + \frac{32(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\psi_1 - \varphi_1\psi_2 + 4\psi_1\psi_2)}{r} + 12[4\varphi_2^2 + 16\psi_2^2 - 8\varphi_2\psi_2 + 5\varphi_1(\varphi_3 - \psi_3) + \psi_1(21\psi_3 - 5\varphi_3)] + O(r), \quad (2.53)$$

$$R = \frac{4}{r}(2\psi_1 - \varphi_1) + 12(2\psi_2 - \varphi_2) + O(r), \quad (2.54)$$

$$C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{4}{3}\frac{(\varphi_1 + \psi_1)^2}{r^2} - 8(\varphi_1 + \psi_1)(\varphi_3 + \psi_3) + O(r), \quad (2.55)$$

³Pode-se mostrar, ainda, que essas condições para a regularidade dos invariantes de curvatura também são necessárias e suficientes para regularizar as componentes dos tensores de curvatura [109].

onde $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor conforme de Weyl, que satisfaz

$$C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3}R^2. \quad (2.56)$$

Vale notar que os invariantes R e $C_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ podem ser regulares independentemente dos demais, visto que eles dependem, respectivamente, apenas das combinações $2\psi - \phi = \chi_0$ (setor escalar) e $\varphi + \psi = \chi_2$ (setor de spin-2). Devido à relação entre a regularidade da solução e o coeficiente do termo linear em r na expansão de um dado potencial, diremos que um certo potencial $\pi(r)$ é *regular* se cumpre $\pi'(0) = 0$ [95]. Em termos dessa definição, para que uma métrica seja regular, ela deve ser ao mesmo tempo φ -regular e ψ -regular. Ainda, a regularidade de χ_0 implica naquela de R , enquanto que a regularidade de χ_2 , na de $C_{\mu\nu\alpha\beta}^2$. É interessante reparar, ainda, que (2.55) sugere que soluções χ_2 -regulares são conformalmente planas na origem⁴.

É natural, então, perguntar-se quão comum é a ocorrência da condição $\varphi_1 = \psi_1 = 0$ em teorias de gravitação de ordem superior. Já mencionamos aqui que a teoria de quarta ordem não satisfaz essa condição quando acoplada com uma fonte delta de Dirac [102] (ver também [84–86] para uma discussão mais recente). Porém, para a gravitação de sexta ordem com um par de pólos complexos essa condição é verificada [88], e considerações gerais dando suporte à conjectura de que para teorias com mais de quatro derivadas a condição $\varphi_1 = \psi_1 = 0$ deve valer foram apresentadas em [86]. Aqui daremos uma resposta direta à questão, mostrando explicitamente as condições

⁴Isso pode ser verificado calculando explicitamente as componentes para o tensor de Weyl e notando que elas tendem a zero quando $r \rightarrow 0$. Com efeito, usando coordenadas esféricas tem-se as componentes não-triviais

$$C_{trtr} = \frac{1}{3} \left(\chi_2'' - \frac{\chi_2'}{r} \right), \quad (2.57)$$

$$C_{t\theta t\theta} = C_{r\theta r\theta} = \frac{C_{t\phi t\phi}}{\sin^2\theta} = \frac{C_{r\phi r\phi}}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{2} r^2 C_{trtr}, \quad (2.58)$$

$$C_{\theta\phi\theta\phi} = -r^4 \sin^2\theta C_{trtr}, \quad (2.59)$$

que se anulam em $r = 0$.

necessárias e suficientes para termos uma métrica regular em teorias polinomiais de gravitação acopladas a uma fonte δ .

Para tanto, iremos estender até ordem r os cálculos da seção anterior, que mostraram que os potenciais auxiliares χ_s são finitos em teorias polinomiais completas. Usando novamente a expressão para o potencial geral (2.39) e a expansão em série de potências das funções de Bessel modificadas [105],

$$K_{j-\frac{3}{2}}(m_i r) = \sqrt{\pi} e^{-m_i r} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(j+k-2)!}{k!(j-k-2)!(2m_i r)^{k+\frac{1}{2}}}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \geq 2, \quad (2.60)$$

não é difícil verificar que os termos que contribuem na ordem linear em r fornecem (ver Eq. (2.42))

$$\chi^{\{1\}} = \frac{\kappa M}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_{i,1} m_i^2}{2} - \frac{A_{i,2}}{2} + \sum_{j=3}^{\mathcal{N}} \frac{A_{i,j}}{(4m_i^2)^{j-2}} \left[\frac{(2j-5)!}{(j-3)!} - \frac{(2j-4)!}{2(j-2)!} \right] \right\}. \quad (2.61)$$

Porém, o termo entre colchetes dentro do somatório sobre $j \geq 3$ é nulo, pois é igual a

$$\frac{(2j-5)! [2(j-2) - (2j-4)]}{2(j-2)!} = 0. \quad (2.62)$$

Logo,

$$\chi^{\{1\}} = \frac{\kappa M}{8\pi} (S_1 - S_2), \quad (2.63)$$

onde definimos as quantidades

$$S_1 = \sum_{i=1}^N A_{i,1} m_i^2, \quad S_2 = \sum_{i=1}^N A_{i,2}. \quad (2.64)$$

Retornamos então à definição dos coeficientes $A_{i,j}$ em função das raízes m_i^2 , dada pela Eq. (2.46). Vamos supor que $\mathcal{N} \geq 2$. Comparando, agora, os termos proporcionais a $\xi^{\mathcal{N}-1}$ segue

$$\sum_{i=1}^N \left[-m_i^2 \alpha_i + A_{i,1} \left(m_i^2 (\alpha_i - 1) + \sum_{j \neq i} m_j^2 \alpha_j \right) + A_{i,2} \right] = 0. \quad (2.65)$$

Como, dado i vale

$$\sum_{j \neq i} m_j^2 \alpha_j = -m_i^2 \alpha_i + \sum_j m_j^2 \alpha_j, \quad (2.66)$$

e usando (2.48), temos que

$$\sum_{i=1}^N A_{i,2} = \sum_{i=1}^N A_{i,1} m_i^2. \quad (2.67)$$

Em termos das definições da Eq. (2.64), a identidade acima se torna $S_2 = S_1$. Salientamos que esta relação é válida somente para $\mathcal{N} \geq 2$. O caso $\mathcal{N} = 1$ trivialmente implica em $S_1 = m_1^2$ e $S_2 = 0$. Restituindo os índices do setor de spin, concluimos que $S_{(s)1} = S_{(s)2}$ se e somente se o grau do polinômio f_s é $\mathcal{N}_s > 1$. Recordando que $2(\mathcal{N}_s + 1)$ é o número de derivadas no setor de spin- s da ação, segue-se que teorias de ordem maior que quatro no setor de spin- s são χ_s -regulares.

Assim, a condição necessária e suficiente para a regularidade dos invariantes de curvatura é a presença de pelo menos seis derivadas tanto no setor de spin-2 quanto no de spin-0. Em outras palavras, todas as teorias de ordem superior definidas por polinômios $F_1 \neq -3F_2$ não-triviais (isto é, não-constantes) são regulares no limite newtoniano. Em particular, isso vale para toda a classe de modelos locais super-renormalizáveis, incluindo os do tipo Lee-Wick.

Neste cenário, as únicas possibilidades para termos uma solução singular associada a uma massa puntiforme, no limite newtoniano, ocorrem caso $F_1(\square) = \text{const.}$ ou $F_1(\square) = -3F_2(\square)$. No primeiro caso o setor de spin-2 contém o pólo sem massa correspondente ao gráviton e, possivelmente, uma partícula massiva (fantasma). Em termos da definição de π -regularidade [95], podemos dizer que tal solução não é χ_2 -regular, apesar de eventualmente ser χ_0 -regular (se $F_2(\square) \sim \square^p$ com $p \geq 1$). Para o segundo caso, isto é, se $F_1(\square) = -3F_2(\square)$, a solução não é χ_0 -regular. Evidentemente, uma solução regular deve ser ao mesmo tempo χ_0 - and χ_2 -regular. Em particular, a gravitação de Stelle não é regular no limite newtoniano quando acoplada com uma fonte

delta de Dirac [84–86, 102], apesar de que ela pode ser φ -regular caso os parâmetros da ação sejam escolhidos de sorte que $m_0 = 2m_2$ (vide (1.11)).

Pensando no paralelo entre as divergências clássicas e quânticas que mencionamos anteriormente [53, 83, 87], podemos dizer que teorias de gravitação renormalizáveis têm potenciais finitos na origem, enquanto que as super-renormalizáveis têm limite newtoniano regular. Como vimos, as recíprocas não são verdadeiras, havendo teorias com curvaturas regulares que não são super-renormalizáveis (ou sequer renormalizáveis).

2.5 Comentário com vistas ao caso completo, não linear

Os resultados apresentados neste capítulo foram todos obtidos na aproximação linear. Sem dúvidas, a questão mais interessante é a existência de singularidades na teoria polinomial completa, não-linear. O primeiro passo nessa direção foi dado ainda nos anos 1970 por Stelle [102], que mostrou que apesar do potencial newtoniano ser finito na teoria de quarta ordem, a solução associada a uma massa pontual apresenta singularidade na curvatura, tanto no nível linear quanto no não-linear. Mais geralmente, assumindo que a solução pode ser escrita como uma série de Frobenius ao redor de $r = 0$, ele encontrou três famílias de soluções estáticas esfericamente simétricas, duas singulares e uma regular. Dentre as famílias de soluções singulares, uma delas contém a solução de Schwarzschild. A presença da solução de Schwarzschild é esperada, porque devido à relação de Gauss-Bonnet,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2) = \text{termo de superfície}, \quad (2.68)$$

é possível remover por completo um eventual termo do tipo $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ na ação, e as equações de movimento resultantes dependerão apenas de R e $R_{\mu\nu}$. Assim, qualquer solução de vácuo das equações de Einstein (isto é, com $R_{\mu\nu} = 0$) também será solução da teoria com quatro derivadas [102, 110]. Stelle, porém, mostrou que a solução de

Schwarzschild, diferentemente do caso da relatividade geral, não é aquela que se acopla com uma fonte do tipo delta de Dirac. Em específico, ela não se acopla a uma densidade de matéria positivo-definida [102]. Situação semelhante ocorre com a família de soluções regulares, que na verdade são apenas soluções de vácuo, análogas à solução plana para a relatividade geral pura. Por fim, a outra família de soluções singulares é aquela que se acopla com uma fonte delta e, no regime $r \rightarrow \infty$, coincide a métrica linearizada do tipo (2.1) — ou seja, uma combinação de potenciais de Newton e Yukawa.

Mais recentemente, com o advento de métodos computacionais eficientes, outros aspectos das soluções não-lineares estáticas e esfericamente simétricas foram consideradas no contexto da gravitação de quarta ordem [84–86]. Em particular, foi estudado o que ocorre quando soluções assintóticas no regime de campo forte são conectadas com soluções para r grande, na forma de potenciais de Newton e Yukawa combinados (caso particular das nossas Eqs. (2.37) e (2.38)). Em resumo, o resultado é que para uma fonte do tipo δ , a solução não tem horizonte e termina numa singularidade tipo-tempo em $r = 0$. A singularidade é esperada, pois ela está presente mesmo no regime linear. Ainda, a ausência de horizontes no modelo completo com quatro derivadas é assegurada por um teorema geral [84, 85, 111], e apenas modelos particulares nos quais a ação não contém o setor de R^2 podem ter horizontes.

O caso de teorias com mais de quatro derivadas foi estudado apenas mais recentemente. No artigo [86] métodos numéricos usando a técnica de Frobenius foram empregados para buscar soluções assintóticas próximas à origem em modelos com seis, oito e dez derivadas. Nenhuma solução do tipo Schwarzschild foi encontrada, soluções singulares tampouco. A não-existência da solução de Schwarzschild é esperada, já que a ação de teorias gerais com mais de quatro derivadas também contém termos quadráticos no tensor de Riemann, tais como $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta}$, que não podem ser eliminados além do regime linear via a relação (1.14), pois ainda permanecem estruturas de ordem maior que dois nas curvaturas.

O resultado que apresentamos aqui mostra, analiticamente, que as soluções asso-

ciadas a uma massa pontual na teoria polinomial geral linearizada são regulares. Isso verifica o resultado numérico de Holdom para teorias particulares [86], reforçando a conjectura de que a regularidade da solução linearizada é condição necessária (mas não suficiente) para a regularidade da solução completa (não-linear). Obtivemos ainda o comportamento assintótico das soluções que se acoplam a uma fonte delta, para teorias polinomiais arbitrárias, o que pode ser útil na busca computacional por soluções em regime de campo forte próximas à origem e o estudo da existência e números de horizontes.

Capítulo 3

Derivadas mais altas e regularização da fonte

No capítulo anterior mostramos que teorias com pelo menos quatro derivadas nos setores de spin-2 e spin-0 têm potencial newtoniano finito na origem, enquanto aquelas com pelo menos seis derivadas têm um limite newtoniano regular, sem singularidades nas curvaturas. Essa característica das teorias polinomiais motiva a indagação de se essas propriedades também se verificam nas teorias não-locais, como aquelas definidas por (1.20), citadas na Introdução.

Do ponto de vista cronológico, a regularidade de modelos não-locais foi verificada antes mesmo daquela dos polinomiais. Por exemplo, em [94, 95] foi mostrado que a teoria definida pelo fator de forma inspirado na teoria de cordas tem limite newtoniano regular. Em [96, 97] esse resultado foi estendido para teorias definidas pela exponencial de um monômio. Em certas referências, tais como [92, 93, 98, 100, 112], chegou-se a sugerir que a não-localidade e/ou a condição de ausência de fantasmas era determinante para evitar a singularidade. Os resultados obtidos no capítulo anterior, e apresentados em [108, 109], deram a negativa a esta idéia.

Por outro lado, a interpretação de que teorias não-locais são o limite de teorias polinomiais quando o número de derivadas tende a infinito [53] motiva a análise precisa de como, e em que condições, a regularidade das soluções daqueles modelos pode ser vista como herança dos modelos locais. Este é o foco deste capítulo, que se baseia nos resultados apresentados em [113]. Princípios com a verificação da regularidade do limite newtoniano em teorias polinomiais usando um método alternativo ao do capítulo precedente, e logo o estenderemos para as teorias não-polinomiais e sem fantasmas.

Assim como no capítulo anterior, trabalharemos com a ação

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ 2R + R_{\mu\nu} F_1(\square) R^{\mu\nu} + R F_2(\square) R \right\}, \quad (3.1)$$

porém aqui permitiremos que F_1 e F_2 sejam funções não-polinomiais [74, 75, 77–79, 81]. O propagador associado a este modelo tem a mesma estrutura de (2.17), porém aqui

$$f_0(z) = 1 - zF_1(z) - 3zF_2(z) \quad \text{e} \quad f_2(z) = 1 + \frac{z}{2}F_1(z) \quad (3.2)$$

não são, necessariamente, funções polinomiais. Novamente, as raízes de $f_s(-k^2) = 0$ definem os pólos massivos do propagador. Se as funções F_i forem escolhidas de tal forma que

$$f_s(z) = e^{H_s(z)}, \quad (3.3)$$

onde H_s é uma função inteira, então o setor de spin- s do propagador não tem pólos massivos. Uma teoria com f_2 desta forma evita o fantasma massivo de spin-2, que viola a unitariedade da teoria de Stelle. Por este motivo esses modelos são frequentemente chamados de *gravitação livre de fantasmas* (*ghost-free gravity*).

3.1 Fontes efetivas e funções de massa

Toda a discussão desenvolvida na Seção 2.1 do capítulo anterior se aplica para os modelos mais gerais considerados neste capítulo. Princípios a discussão, portanto,

com a equação para os potenciais auxiliares χ_2 e χ_0 (2.13) associados a uma métrica estática e esfericamente simétrica em coordenadas isotrópicas,

$$f_s(\Delta)\Delta\chi_s = \kappa_s \rho, \quad (3.4)$$

Como vimos no capítulo anterior, uma vez que os potenciais χ_0 e χ_2 são conhecidos, é possível calcular os invariantes de curvatura associados à métrica (2.10). Ainda, para que estes sejam regulares é preciso que os potenciais auxiliares satisfaçam $\chi_2'(0) = \chi_0'(0) = 0$.

Cada uma das equações (3.4) pode ser vista como uma equação de Poisson com uma fonte modificada (ou *fonte efetiva*)

$$\Delta\chi_s = \kappa_s \varrho_s, \quad (3.5)$$

onde as “novas” fontes ϱ_s satisfazem

$$\rho(r) = f_s(\Delta) \varrho_s(r). \quad (3.6)$$

Particularizando para uma fonte delta de Dirac, $\rho(\mathbf{r}) = M\delta^{(3)}(\mathbf{r})$, segue

$$\varrho_s(r) = \frac{M}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{f_s(-k^2)} dk. \quad (3.7)$$

Note que a presença do termo não-trivial $f_s(-k^2)$ no integrando induz uma delocalização da fonte δ original.

Seguindo a descrição do efeito das derivadas mais altas por meio da equação de Poisson com fontes efetivas, podemos definir a função de massa

$$m_s(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \varrho_s(x) dx \quad (3.8)$$

como a massa efetiva dentro de uma esfera de raio r centrada na origem, associada ao potencial χ_s . Em teorias estendidas essa quantidade não será constante, uma vez que a densidade efetiva de matéria é não-pontual e a massa total M agora preenche todo o espaço.

Da mesma forma que a massa efetiva m_s acima se relaciona à força newtoniana (modificada) exercida sobre partículas teste, podemos definir uma outra quantidade massiva, \tilde{m}_s , que é aquela que aparece na expressão para o potencial,

$$\chi_s(r) = \frac{\kappa_s \tilde{m}_s(r)}{r}. \quad (3.9)$$

De fato, usando este *Ansatz* a Eq. (3.5) nos fornece

$$\tilde{m}_s''(r) = r \varrho_s(r), \quad (3.10)$$

donde segue a relação entre m_s e \tilde{m}_s :

$$\tilde{m}_s(r) = c_0 + c_1 r + \frac{r}{4\pi} \int_0^r \frac{m_s(x)}{x^2} dx. \quad (3.11)$$

A constante de integração c_0 será definida pelo comportamento esperado de $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{m}_s$. Por exemplo, nesses casos de teorias estendidas interpretamos a massa total M como delocalizada, e uma escolha natural é $c_0 = 0$. No que segue tomaremos $c_0 = 0$. Por outro lado, tendo em vista (3.9), a escolha de c_1 é motivada pelo requerimento $\chi_s \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$.

3.2 Regularização em modelos polinomiais

Particularizando os conceitos para o caso de um modelo de gravitação polinomial geral, nas linhas do discutido no capítulo anterior podemos escrever

$$f_s(-k^2) = \prod_{i=1}^{N_s} \left(\frac{k^2 + m_{(s)i}^2}{m_{(s)i}^2} \right)^{\alpha_{(s)i}}, \quad (3.12)$$

que é a mesma equação (2.26). Recordamos que $k^2 = -m_{(s)i}^2$ (com $i = 1, \dots, N_s$) é uma das N_s raízes da equação $f_s(-k^2) = 0$, e $\alpha_{(s)i}$ é a sua multiplicidade. O grau do polinômio $f_s(z)$ é $\sum_i \alpha_{(s)i} = \mathcal{N}_s$.

Podemos, então aplicar a decomposição em frações parciais ao termo $1/f_s(-k^2)$ em (3.7),

$$\frac{1}{f_s(-k^2)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{\alpha_{(s)i}} \frac{a_{(s)i,j}}{(k^2 + m_{(s)i}^2)^j}, \quad (3.13)$$

onde os coeficientes $a_{(s)i,j}$ podem ser calculados usando, por exemplo, o método dos resíduos de Heaviside¹. No entanto, em situação análoga ao capítulo anterior, é possível obter resultados úteis sem a necessidade de calculá-los explicitamente.

Substituindo, pois, (3.13) em (3.7) encontram-se as fontes efetivas associadas à gravitação de ordem superior polinomial,

$$\varrho_s(r) = \frac{M\sqrt{\pi}}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{\alpha_{(s)i}} \frac{a_{(s)i,j}}{(j-1)!} \left(\frac{r}{2m_{(s)i}} \right)^{j-\frac{3}{2}} K_{j-\frac{3}{2}}(m_{(s)i}r), \quad (3.14)$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de segunda espécie. Como não fizemos nenhuma particularização sobre o polinômio f_s , essa expressão é válida no caso de pólos complexos e/ou de ordens mais altas. No caso de pólos complexos, escolhemo-los com parte real positiva, à maneira do discutido na Seção 2.2, para que $\varrho_s(r)$ tenda a zero para grandes distâncias.

É instrutivo apresentar alguns exemplos. Para a gravitação de quarta ordem temos

$$\varrho_s(r) = \frac{Mm_{(s)1}^2}{4\pi r} e^{-rm_{(s)1}}. \quad (3.15)$$

Já no caso da gravitação de sexta ordem e um par de pólos conjugados com $m_{(s)1} = \bar{m}_{(s)2} = a + ib$ temos,

$$\varrho_s(r) = \frac{M(a^2 + b^2)^2 \text{sen}(br)}{8\pi abr} e^{-ar}. \quad (3.16)$$

Para o mesmo modelo, mas com apenas um pólo real de ordem dois, temos

$$\varrho_s(r) = \frac{Mm_{(s)1}^3}{8\pi} e^{-rm_{(s)1}}. \quad (3.17)$$

Essas fontes efetivas são delocalizadas porém não necessariamente regulares. É imediato verificar que no caso da gravitação de Stelle, (3.15) diverge quando $r \rightarrow 0$, ao passo que para (3.16) e (3.17) esse limite está bem definido. No que segue estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que ϱ_s seja regular.

¹Os coeficientes $a_{(s)i,j}$ deste capítulo não devem ser confundidos com os que aparecem no capítulo anterior, em (3.13).

Começamos expandindo a expressão geral para a fonte efetiva (3.14) ao redor de $r = 0$. Usando as fórmulas correspondentes para as funções de Bessel [105] obtém-se

$$\varrho_s(r) = \frac{M}{4\pi r} \sigma_{(s)1} + w_s + O(r), \quad (3.18)$$

onde $\sigma_{(s)1} \equiv \sum_i a_{(s)i,1}$ e w_s é uma constante. Para mostrar que a fonte é regular basta verificar que o coeficiente $\sigma_{(s)1}$ (que multiplica o termo divergente r^{-1}) é nulo. Provaremos que

$$\sigma_{(s)1} = \begin{cases} m_{(s)1}^2, & \text{se } \mathcal{N}_s = 1, \\ 0, & \text{se } \mathcal{N}_s > 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Essa proposição pode ser demonstrada para o caso geral considerando apenas relações entre as quantidades $a_{(s)i,j}$. Com efeito, ao reagrupar o lado direito de (3.13) em uma única fração segue

$$\frac{\sum_i \sum_j a_{(s)i,j} \left(k^2 + m_{(s)i}^2\right)^{\alpha_{(s)i}-j} \prod_{\ell \neq i} \left(k^2 + m_{(s)\ell}^2\right)^{\alpha_{(s)\ell}}}{f_s(-k^2) \prod_i \left(m_{(s)i}^2\right)^{\alpha_{(s)i}}}. \quad (3.20)$$

Então, comparando os dois membros de (3.13), com o lado direito escrito como acima, obtemos \mathcal{N}_s relações entre as quantidades $a_{(s)i,j}$ e as “massas” $m_{(s)i}$. Em particular, para o termo de ordem mais alta, proporcional a $k^{2(\mathcal{N}_s-1)}$, temos $\sum_i a_{(s)i,1} = \sigma_{(s)1} = 0$. O caso $\mathcal{N}_s = 1$ é claramente trivial, pois não há termo dependendo de k no numerador de (3.20), donde $a_{(s)i,1} = m_{(s)1}^2$. Isso prova a Eq. (3.19).

Diremos que a fonte delta de Dirac é completamente regularizada se ambos ϱ_0 e ϱ_2 são finitos. Consoante o que acabamos de provar, isso ocorre se, e somente se, F_1 e F_2 são polinômios de grau pelo menos igual a um (isto é, são polinômios não-triviais) e² $F_1 \neq -3F_2$. Lembrando o resultado central do capítulo anterior, vemos que essa é exatamente a mesma condição para termos um limite newtoniano regular, sem singularidades nos invariantes de curvatura. Isso pode ser mostrado explicitamente, usando as funções de massa definidas há pouco.

²A condição $F_1 \neq -3F_2$ garante que f_0 não é uma constante, ver (3.2).

De fato, substituindo (3.18) e (3.19) na equação para a função de massa (3.8) segue que, próximo da origem,

$$m_s(r) \sim \begin{cases} r^2, & \text{se } \mathcal{N}_s = 1, \\ r^3, & \text{se } \mathcal{N}_s > 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Ainda, substituindo (3.18) em (3.11) temos que a expansão de \tilde{m}_s no entorno de $r = 0$ se inicia no termo linear, e que o seguinte termo será da mesma ordem de (3.21). Portanto, o comportamento do potencial χ_s próximo à origem será

$$\chi_s(r) = \begin{cases} \text{const.} + \mathcal{O}(r), & \text{if } \mathcal{N}_s = 1, \\ \text{const.} + \mathcal{O}(r^2), & \text{if } \mathcal{N}_s > 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Em ambos casos o potencial será finito em $r = 0$, mas no primeiro ocorrerão singularidades na curvatura, já que $\chi'_s(0) \neq 0$, como discutido na Seção 2.4 do capítulo anterior. Assim, a regularização completa da fonte δ coincide com a regularização dos invariantes de curvatura. Essa conclusão verifica as considerações do capítulo anterior, no qual mostramos que modelos locais de ordem superior com pelo menos seis derivadas em cada um dos setores de spin-2 e spin-0 têm um limite newtoniano regular, livre de singularidades. Ainda, esta apresentação fornece uma demonstração alternativa do cancelamento da singularidade do potencial em modelos com pelo menos quatro derivadas.

3.3 Regularização em modelos não-locais

A descrição de extensões não-locais da relatividade geral em termos de fontes efetivas delocalizadas é freqüente na literatura [76, 79, 89–93] (em oposição ao caso de extensões locais [88, 93]). Por este motivo, não iremos aqui calcular as fontes efetivas em teorias particulares, mas sim focar aspectos mais gerais que decorrem da comparação com a gravitação polinomial.

Começamos com uma família particular de modelos às vezes chamados de gravitação livre de fantasmas do tipo N (teoria GF_N , por simplicidade), definidos pela escolha de funções $f_0 = f_2$ da forma [81, 96]

$$f_s(-k^2) = \exp\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)^N, \quad N \geq 1, \quad (3.23)$$

onde $N \in \mathbb{N}$ e μ é um parâmetro massivo. Note que $N = 1$ corresponde ao fator de forma inspirado pela teoria de cordas [78], e $N = 2$ ao de Krasnikov [74] (vide Eq. (1.21)). Em [96, 97] foi mostrado que todas essas teorias têm um potencial newtoniano modificado regular. Haja visto a discussão da seção anterior, é razoável supor que a fonte efetiva associada também goza dessa propriedade. Provaremos essa afirmativa mostrando que a fonte efetiva para teorias GF_N pode ser obtida como o limite uniforme de uma sequência de fontes de teorias locais de ordem superior.

Com esse objetivo, tomemos o modelo de gravitação polinomial definido pela escolha particular

$$f_s(-k^2) = f_{s,N_s,n}(-k^2) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} \left(\frac{k^2}{\mu_s^2}\right)^{N_s \ell}, \quad (3.24)$$

onde $N_s \geq 1$ e $n \geq 2$ são números naturais e μ_s é um parâmetro massivo. De acordo com (3.7), a fonte efetiva associada é dada por

$$\varrho_{s,N_s,n}(r) = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty g_{s,N_s,r,n}(k) dk, \quad (3.25)$$

com

$$g_{s,N_s,r,n}(k) = \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{r f_{s,N_s,n}(-k^2)} \quad (3.26)$$

para um r fixo. Notamos que a sequência de funções (integráveis) $\{g_{s,N_s,r,n}\}_{n=2}^\infty$ converge uniformemente para

$$G_{s,N_s,r}(k) = \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{r \exp(k^2/\mu_s^2)^{N_s}} \quad (3.27)$$

em cada compacto $K \subset [0, +\infty)$. Além disso, existe uma função $\bar{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrável tal que $|g_{s,N_s,r,n}| \leq \bar{g}$ (de fato, basta tomar $\bar{g} = g_{s,N_s,r,2}$). Assim, usando

o teorema da convergência dominada de Lebesgue [114] (na prática, uma versão bem mais fraca dele) segue que podemos passar o limite sob a sinal da integral,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{s, N_s, n}(r) = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty G_{s, N_s, r}(k) dk \equiv \varrho_{s, N_s}(r) \quad (3.28)$$

para cada $r \in (0, +\infty)$. Até aqui mostramos que $\varrho_{s, N_s, n} \rightarrow \varrho_{s, N_s}$ ponto-a-ponto. Essa convergência, na verdade, é uniforme. Isso pode ser mostrado notando que a sequência $\{\varrho_{s, N_s, n}\}_{n=2}^\infty$ é equicontínua³ e (uniformemente) limitada em $[0, +\infty)$. Aplicando então o teorema de Ascoli-Arzelà [115] e a unicidade do limite, segue que $\varrho_{s, N_s, n} \rightarrow \varrho_{s, N_s}$ uniformemente em $[0, +\infty)$. Portanto, a fonte limite ϱ_{s, N_s} também é contínua e limitada. Salientamos que na prova da regularidade de ϱ_{s, N_s} não usamos a sua forma específica, dada por (3.27) e (3.28).

Tendo em vista a Eq. (3.7), é imediato verificar que a fonte (3.28) com $G_{s, N_s, r}$ dada por (3.27) é aquela associada à função (3.23) com $N = N_s$ e $\mu = \mu_s$. Logo, a fonte efetiva $\varrho_N(r)$ do modelo GF_N é o limite uniforme de uma sequência de fontes não-singulares associadas a modelos polinomiais (locais); donde $\varrho_N(r)$ é regular também. Como a regularidade da fonte implica naquela do potencial, verificamos o resultado dos trabalhos [96, 97] acerca da regularidade dos modelos GF_N .

Essas considerações se aplicam, de forma direta, ao modelo um pouco mais geral definido pela função

$$f_s(-k^2) = e^{P_s(-k^2)}, \quad (3.29)$$

onde aqui, e no que segue, $P_s(z)$ é um polinômio real tal que $P_s(0) = 0$ e $P_s > 0$ para $|z|$ suficientemente grande, como em (1.21) [97].

No entanto, esse raciocínio deve ser aplicado com certa cautela a modelos mais gerais sem fantasmas, definidos por uma função inteira H_s (vide (3.3)) não-polinomial, como no caso dos fatores de forma de Tomboulis-Modesto (1.25). Se por um lado a

³Isso pode ser facilmente provado [115] notando que a sequência $\{\varrho'_{s, N_s, n}\}_n$ das derivadas das fontes é uniformemente limitada em $[0, \infty)$.

exponencial de uma função inteira sempre pode ser escrita como uma série de potências, que converge uniformemente em conjuntos compactos, por outro a sequência de funções análoga à (3.26) pode não ser uniformemente limitada por uma função integrável \bar{g} — inclusive, pode não ser integrável. Com isso, algumas das fontes da sequência $\{\varrho_{s,n}\}_n$ podem ser mal definidas. Para se obter uma sequência de fontes bem definidas talvez seja necessário passar a uma subsequência $\{f_{s,n'}\}_{n'}$. Ainda, é possível que essa (sub-)sequência convirja apenas pontualmente em $(0, +\infty)$, por não gozar da equicontinuidade. Portanto, apesar de termos uma sequência de funções limitadas definidas em $[0, +\infty)$, a convergência em $r = 0$ — e a regularidade da fonte limite — não é assegurada.

Como exemplo, tomemos o caso da gravitação quase-local definida pelo fator de forma de Tomboulis-Modesto [77, 79]

$$H_s(-k^2) = \frac{\alpha}{2} [\gamma + \Gamma(0, P_s^2(-k^2))] + \alpha \ln P_s(-k^2), \quad (3.30)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni, $\alpha \geq 1$ e $\Gamma(0, z)$ é função gama incompleta. O problema com essas funções inteiras não-polinomiais é a ocorrência de um número infinito de mudanças de sinal nos coeficientes da série de potências. Fixando $\alpha = 1$, por exemplo, (3.30) fornece

$$f_s = 1 + \frac{P_s^2}{2} - \frac{P_s^6}{72} + \frac{P_s^8}{288} - \frac{P_s^{10}}{4800} - \frac{P_s^{12}}{8100} + O(P_s^{14}). \quad (3.31)$$

Assim, se a série é truncada num termo com coeficiente negativo, a função definida por essa soma parcial terá um zero na reta real, possivelmente fazendo a fonte efetiva correspondente mal definida. Passando à subsequência $\{f_{s,n}\}_n$ das somas parciais truncadas no n -ésimo termo com coeficiente positivo, temos uma sequência de fontes bem definidas, todas elas regulares devido à natureza polinomial de $f_{s,n}$. Essa sequência $\{\varrho_{s,n}\}_n$ converge pontualmente em $(0, +\infty)$, mas caso a sequência das derivadas $\{\varrho'_{s,n}\}_n$ não seja uniformemente limitada, a convergência não será uniforme.

Isso é precisamente o que ocorre se $\alpha = 1$ e $P_s(z)$ for um monômio de primeiro

grau. Neste caso, no regime de k grande se tem $f_s(-k^2) \approx e^{\frac{\gamma}{2}} k^2$, logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{r f_s(-k^2)} \approx e^{-\frac{\gamma}{2}}, \quad (3.32)$$

que não é integrável num intervalo ilimitado e, portanto, $\varrho_s(r)$ diverge na origem. Logo, $N_s = 1$ implica que $\varrho_{s,n} \rightarrow \varrho_s$ simplesmente em $(0, +\infty)$, mas não uniformemente, pois $\lim_{r \rightarrow 0} \varrho_s(r) = \infty$. O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que o limite $\varrho_{s,n} \rightarrow \varrho_s$ é uniforme se o grau de $P(z)$ é $N_s \geq 2$, e que neste caso a fonte (e o potencial) é regular.

No caso do fator de forma generalizado de Kuz'min [75],

$$H_s(-k^2) = \alpha [\gamma + \Gamma(0, k^2/\mu^2) + \ln(k^2/\mu^2)], \quad (3.33)$$

temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_s(-k^2) \propto k^{2\alpha}, \quad (3.34)$$

que implica na regularidade do potencial para $\alpha \geq 2$ (mas não para $\alpha = 1$). Esses dois exemplos que apresentamos com os fatores de forma de Tomboulis-Modesto e Kuz'min mostram que, como nas teorias polinomiais, o limite newtoniano é completamente regular em teorias super-renormalizáveis; mas que existem singularidades nas curvaturas caso a teoria seja apenas renormalizável. Essa conclusão é natural, visto o caráter quase-local desses modelos.

Mais geralmente, a regularidade da fonte efetiva em modelos de gravitação de ordem superior é consequência do comportamento das funções f_s no regime ultravioleta. Isso pode ser entendido a partir das seguintes observações:

- i. f_s não muda de sinal pois, como consideramos apenas modelos sem táquions, a equação $f_s(-k^2) = 0$ não tem raiz real para $k \in \mathbb{R}$.
- ii. Se, para grandes argumentos, a função $f_s(z)$ cresce mais rápido que $z^{3/2}$, então $G_{s,r}(k) = k \operatorname{sen}(kr)/[r f_s(-k^2)]$ é integrável para qualquer $r \in [0, \infty)$. Logo, $\lim_{r \rightarrow 0} \varrho_s(r) < +\infty$; em palavras, a fonte efetiva é regular.

iii. Como $r > 0$ implica

$$|G_{s,r}| = \frac{k |\text{sen}(kr)|}{r f_s(-k^2)} < \frac{k^2}{f_s(-k^2)} = G_{s,0}, \quad (3.35)$$

então $\int_0^\infty G_{s,r}(k)dk \leq \int_0^\infty |G_{s,r}(k)|dk < \int_0^\infty G_{s,0}(k)dk$, que significa que $\varrho_s(r)$ atinge seu máximo em $r = 0$. Em particular, $\varrho_s(0) \neq 0$.

Relembremos que o termo constante na expansão de ϱ_s em série de potências no entorno de $r = 0$ fornece $m_s(r) \sim r^3$ (veja a Seção 3.2). Portanto, da terceira observação acima segue que para qualquer teoria com um potencial regular, a contribuição dominante (não-constante) para χ_s em pequenas distâncias é da ordem r^2 . Particularizando para a gravitação polinomial, concluímos que em (3.18) w_s deve ser diferente de zero.

Essa análise mostra que a regularidade do limite newtoniano está associada não à ausência de fantasmas ou à não-localidade da teoria, como sugerido em [92,93,98,100,112], mas sim ao melhor comportamento do propagador no regime UV. Neste sentido, a regularidade em certos modelos não-locais pode ser considerada uma herança dos modelos locais, segundo o ponto de vista de que aqueles são o limite de teorias locais com infinitas derivadas e, portanto, com um número infinito de pólos complexos escondidos no infinito [53]. Claramente a situação é muito diferente daquela que concerne a remoção de fantasmas do propagador [74,75,77–79,81], ou graus de liberdade extras [116,117], que realmente requerem não-localidade. Ainda, no espírito do discutido no capítulo anterior, fica o questionamento se essa relação entre modelos locais e não-locais no regime linear pode ser estendida para o caso não-linear.

Aspectos fenomenológicos da gravitação de sexta ordem

O modelo definido pela ação

$$S_{grav} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{A}{2} R \square R + \frac{B}{2} R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} \right\}, \quad (4.1)$$

é o caso particular com seis derivadas da teoria polinomial (1.13) formulado em [54]. Neste capítulo analisamos em detalhe os dois mais simples observáveis em baixas energias que podem ser usados para detectar (ou falsificar) a presença de termos com derivadas quárticas e sêxtuplas em gravitação.

É importante notar que neste capítulo (e no seguinte) mudamos algumas definições e escolhas de sinais em relação os dois capítulos anteriores. Usamos aqui a métrica com assinatura $(+, -, -, -)$, definimos o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\nu\alpha}$ e tomamos $M_P^{-2} = 16\pi G = \kappa^2/2$, onde M_P é a massa de Planck. Os parâmetros α , β , A e B são livres, em princípio, sendo que os dois primeiros são adimensionais, enquanto que A e B têm dimensão de $(\text{massa})^{-2}$. No que segue iremos nos referir às quantidades $|B|^{-1/2}$ e $|A|^{-1/2}$ como os *parâmetros massivos da ação*.

Iniciamos a análise com o potencial newtoniano modificado. Se comparado com trabalhos anteriores sobre assunto (por exemplo, [87, 103]), aqui incluímos os casos de pólos múltiplos e complexos, que fornecem uma melhor perspectiva e entendimento do potencial modificado em teorias polinomiais mais gerais.

A segunda parte do estudo contempla a deflexão gravitacional da luz. Esse tema tem atraído grande atenção da comunidade nos últimos anos, especialmente no que tange a sua relação com efeitos de gravitação quântica [118, 119]. De fato, efeitos quânticos podem ser parcialmente levados em conta no regime de baixas energias a partir de uso de métodos semi-clássicos. No caso da gravitação, diga-se de passagem, um tal efeito é a influência da polarização de vácuo a *1-loop* na propagação de fótons sobre fundos curvos. Essa questão foi explorada nos artigos [120] e [121] usando duas abordagens diferentes. Na primeira, a deflexão da luz é governada pela seção de choque diferencial, que fornece corretamente o termo dominante mais uma correção semiclássica, que depende da energia dos fótons. Por sua vez, em [121] a correção semiclássica é introduzida no potencial de interação entre o fóton e o campo gravitacional externo. Como resultado, o ângulo de deflexão depende apenas da polarização do fóton, mas independe de sua energia. Segundo [121], esta versão da abordagem semi-quântica é a correta, uma vez que ela pressupõe que para sistemas macroscópicos o fóton é melhor descrito por um pacote de ondas compacto com uma trajetória bem definida pelo campo gravitacional. No trabalho [48] discutimos em detalhe essa questão no contexto de teorias de gravitação com derivadas mais altas; nesta tese apresentaremos apenas a análise do método clássico.

Acerca da cronologia dos resultados cabe mencionar que os assuntos tratados neste capítulo (publicados em [48]) foram obtidos anteriormente àqueles dos Capítulos 2 e 3, apresentados em [107–109, 113]. Dessa forma, a análise do modelo polinomial mais simples, com apenas seis derivadas, serviu-nos para pavimentar o caminho para considerações de teorias polinomiais gerais, além de ser (segundo nosso conhecimento) o primeiro estudo de efeitos fenomenológicos de modelos de gravitação com pólos com-

plexos.

4.1 Generalização do calibre de Teyssandier para a gravitação com seis derivadas

É bem conhecido que uma escolha judiciosa de parametrização de campo e uma condição de calibre adequada podem simplificar bastante as equações de campo. Isso é especialmente importante no caso da gravitação com derivadas mais altas, que têm equações de movimento relativamente complicadas. Em 1989 Teyssandier [122] apresentou uma formulação útil do calibre com três derivadas para a teoria linearizada de quarta ordem. Neste calibre, a solução geral das equações de campo é escrita como uma combinação linear de três campos desacoplados. O campo gerado por uma massa pontual pode facilmente ser calculado em termos desses campos auxiliares, bem como o potencial interpartículas, proporcional à componente $(0, 0)$ da perturbação da métrica.

Nosso objetivo nesta seção é obter uma representação semelhante, no contexto da teoria de gravitação de sexta-ordem (4.1). Para tanto, começamos por aplicar o princípio variacional à ação $S[g_{\mu\nu}]$, donde segue a equação de movimento para a gravitação de sexta ordem:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) + \frac{\alpha}{2} \left[2RR_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R - \frac{R^2}{2} g_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{\beta}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\sigma\rho\nu} R^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{A}{2} \left[R_{\mu\nu} \square R + R \square R_{\mu\nu} + 2\square \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square^2 R - (\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha R)^2 \right] \\
& + \frac{B}{2} \left[\square \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2\square (R_{\mu\sigma\rho\nu} R^{\sigma\rho}) - \square^2 (R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - 4(\nabla_\sigma R_{\nu\rho})(\nabla^\sigma R_\mu{}^\rho) \right. \\
& + 2(\nabla_\sigma R_{\rho(\nu})(\nabla_\mu) R^{\sigma\rho}) + R_{\nu\sigma} \nabla_\rho \nabla_\mu R^{\rho\sigma} + R_{\mu\sigma} \nabla_\rho \nabla_\nu R^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma})^2 \\
& \left. - (\nabla^\sigma R + 2R^{\rho\sigma} \nabla_\rho) \nabla_{(\mu} R_{\nu)\sigma} - (\nabla_\mu R_{\rho\sigma})(\nabla_\nu R^{\rho\sigma}) - 2R_{\sigma(\mu} \square R_{\nu)}{}^\sigma \right] = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

onde os parêntesis nos índices denotam simetrização, por exemplo,

$$\nabla_{(\mu}R_{\nu)\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}R_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}R_{\mu\sigma}) .$$

Na aproximação de campo fraco a métrica pode ser considerada uma flutuação sobre o espaço de Minkovski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} , \quad (4.3)$$

com $|\kappa h_{\mu\nu}| \ll 1$. O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e a curvatura escalar R em primeira ordem em κ são

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\kappa}{2} [\square h_{\mu\nu} - \eta^{\lambda\rho}(\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} + \gamma_{\lambda\nu,\mu\rho})] , \quad (4.4)$$

$$R^{(1)} = \kappa \left(\frac{1}{2}\square h - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} \right) . \quad (4.5)$$

Nas expressões anteriores usamos as definições

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h , \quad h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} . \quad (4.6)$$

Usando as expressões (4.4)-(4.6), as equações de campo linearizadas são dadas por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square - \frac{B}{2}\square^2 \right) \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\square + \frac{B}{2}\square \right) \\ & \times (\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)}) = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aqui, e no que segue, o operador de d'Alembert é calculado usando a métrica plana, $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$.

Tomando o traço da Eq. (4.7) obtém-se

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\square + \frac{B}{2}\square \right) \square R^{(1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square - \frac{B}{2}\square^2 \right) R^{(1)} + \frac{1}{6}T . \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em novamente (4.7) segue

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square - \frac{B}{2}\square^2 \right) \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \right) + \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\square + \frac{B}{2}\square \right) \partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)} \\ & = \frac{1}{6}T\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Inserindo na equação anterior a expressão (4.4) para o tensor de Ricci em primeira ordem obtemos (aqui a vírgula denota derivação)

$$\left[\frac{\kappa^2}{4} (\beta + B\Box)\Box - 1 \right] \left(\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{3\kappa} R^{(1)}_{\eta\mu\nu} \right) + \Gamma_{(\mu,\nu)} = 2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad (4.10)$$

onde definimos a quantidade

$$\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\kappa^2\beta}{4}\Box - \frac{\kappa^2 B}{4}\Box^2 \right) \gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\Box + \frac{B}{2}\Box \right) R_{,\mu}^{(1)}. \quad (4.11)$$

Portanto, uma vez implementada a condição de calibre $\Gamma_\mu = 0$ o problema de resolver as equações de movimento linearizadas (4.7) para $h_{\mu\nu}$ torna-se equivalente a resolver o sistema composto pela condição de calibre e por (4.10). A conveniência deste calibre é permitir que a solução seja escrita em termos de campos auxiliares e na forma isotrópica. Essas afirmativas podem ser formuladas como um teorema, que é a extensão para o caso de seis derivadas do teorema de Teyssandier [122] e cuja demonstração apresentamos no Apêndice B.

Teorema 4.1. *A solução geral do sistema constituído por (4.10) e pela condição de calibre $\Gamma_\mu = 0$ (ver (4.11)) pode ser apresentada sob a forma*

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\Phi + \bar{\Phi}), \quad (4.12)$$

onde os campos auxiliares $h_{\mu\nu}^{(E)}$, $\Psi_{\mu\nu}$, $\bar{\Psi}_{\mu\nu}$, Φ e $\bar{\Phi}$ satisfazem as equações de segunda ordem

$$\Box h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} T \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad (4.13)$$

$$\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(E)}, \quad (4.14)$$

$$(m_{2+}^2 + \Box) \Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad (4.15)$$

$$(m_{2-}^2 + \Box) \bar{\Psi}_{\mu\nu} = m_{2+}^2 \Psi_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

$$(\Psi_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_{\mu\nu}){}^{,\mu\nu} = \Box (\Psi + \bar{\Psi}), \quad (4.17)$$

$$(m_{0+}^2 + \Box) \Phi = \frac{\kappa}{12} T, \quad (4.18)$$

$$(m_{0-}^2 + \Box) \bar{\Phi} = m_{0+}^2 \Phi. \quad (4.19)$$

Aqui, e no que segue, usamos as notações

$$\Psi = \eta^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}, \quad \bar{\Psi} = \eta^{\mu\nu} \bar{\Psi}_{\mu\nu}, \quad \sigma_1 = 3\alpha + \beta, \quad \sigma_2 = 3A + B \quad (4.20)$$

e

$$m_{2\pm}^2 = \frac{-\frac{\beta|B|}{B} \pm \sqrt{\beta^2 + \frac{16}{\kappa^2} B}}{-2|B|}, \quad m_{0\pm}^2 = \frac{\frac{\sigma_1|\sigma_2|}{\sigma_2} \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{8}{\kappa^2} \sigma_2}}{2|\sigma_2|}. \quad (4.21)$$

Consoante o Teorema 4.1 acima, é possível decompor o campo $h_{\mu\nu}$ numa combinação linear de cinco campos: um campo tensorial sem massa representando a solução da equação de Einstein linearizada no calibre de de Donder, dois campos massivos $\Psi_{\mu\nu}$ e $\bar{\Psi}_{\mu\nu}$ de spin-2, e dois escalares massivos Φ e $\bar{\Phi}$. Notamos que os campos massivos de mesmo spin não são dinamicamente independentes. Como mostraremos mais adiante, esse fato será relevante para o cancelamento da singularidade newtoniana do potencial. Ainda, a métrica é dada na forma isotrópica.

Usando o teorema anterior é imediato calcular o campo gerado por uma massa puntiforme em repouso em $\mathbf{r} = 0$. O tensor de energia-momento correspondente associado é $T_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = M\delta_\mu^0\delta_\nu^0\delta^{(3)}(\mathbf{r})$. A solução para $h_{\mu\nu}^{(E)}$ é a mesma da correspondente na gravitação de Einstein no calibre de de Donder:

$$h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi r} (\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}). \quad (4.22)$$

As soluções para os campos tensoriais massivos são

$$\Psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{8\pi} \left(\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \right) \frac{e^{-m_2+r}}{r} \quad (4.23)$$

e

$$\bar{\Psi}_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{8\pi} \left(\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \right) \frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{e^{-m_2-r}}{r} - \frac{e^{-m_2+r}}{r} \right). \quad (4.24)$$

É imediato verificar que essas soluções satisfazem as condições de calibre subsidiárias (4.17).

Para os modos escalares temos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{48\pi} \frac{e^{-m_0+r}}{r}, \quad (4.25)$$

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{48\pi} \frac{m_{0+}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{e^{-m_0-r}}{r} - \frac{e^{-m_0+r}}{r} \right). \quad (4.26)$$

Inserindo essas cinco expressões na Eq. (4.12) encontra-se que as componentes não-nulas da perturbação da métrica, h_{00} e $h_{11} = h_{22} = h_{33}$, são dadas por

$$h_{00}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{4}{3}F_2(r) - \frac{1}{3}F_0(r) \right), \quad (4.27)$$

$$h_{11}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{2}{3}F_2(r) + \frac{1}{3}F_0(r) \right), \quad (4.28)$$

onde

$$F_k(r) = \frac{m_{k+}^2}{m_{k+}^2 - m_{k-}^2} \frac{e^{-m_{k-}r}}{r} + \frac{m_{k-}^2}{m_{k-}^2 - m_{k+}^2} \frac{e^{-m_{k+}r}}{r}. \quad (4.29)$$

e $k = 0, 2$ denota o spin da partícula.

As equações (4.27) e (4.28) representam o campo fraco gerado por uma massa puntiforme na gravitação de sexta ordem. Vale notar que em [87] a componente $(0, 0)$ foi calculada no caso mais geral contendo termos de ordem arbitrária \square^n na ação, mas com a restrição de que o propagador contém apenas pólos simples e reais. Por sua vez, pelo método que usamos vemos que as expressões (4.27) e (4.28) aplicam-se a todas as possibilidades de pólos, assim como discutido no Capítulo 2. Nesse sentido, o calibre de Teyssandier é a realização das condições de coordenadas nas quais a métrica é dada na forma isotrópica, usada nos dois capítulos anteriores, sendo a generalização do calibre de de Donder para teorias com derivadas mais altas [123, 124].

4.2 Potencial newtoniano modificado na gravitação com seis derivadas

O potencial newtoniano modificado (apenas “potencial” daqui em diante) na gravitação com seis derivadas pode ser diretamente lido da solução (4.27) para o campo

gerado por uma massa pontual em repouso,

$$V(r) = \frac{\kappa}{2} h_{00}(r) = MG \left(-\frac{1}{r} + \frac{4}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_0 \right), \quad (4.30)$$

com as funções $F_{0,2}$ definidas em (4.29).

Nesta seção analisamos todas as possibilidades de “massas” permitidas no modelo com seis derivadas e suas influências no potencial. Como o potencial depende apenas de h_{00} , segue que as quantidades a serem analisadas são as funções F_k . Recordamos que pólos massivos complexos não são permitidos no modelo com quatro derivadas, visto que eles implicariam um potencial complexo e portanto não-físico. Em modelos com seis derivadas, porém, os pólos massivos ocorrem em pares dinamicamente dependentes, capazes de resultar num potencial real.

4.2.1 Pólos reais

Existem duas possibilidades para pólos reais nesse modelo: um par de pólos simples ou um pólo de ordem dois. Incluiremos ainda o caso especial de pólos simples com grande hierarquia entre eles, isto é, quando uma das massas é muito maior que a outra. Esse caso particular é útil para verificação do limite no qual o efeito das derivadas sextas é suprimido e a teoria tende para aquela de quatro derivadas apenas.

Pólos reais simples

A condição para ocorrência de pólos reais e simples no setor de spin-2 do propagador é

$$\beta < 0, \quad B < 0, \quad \beta^2 + \frac{16B}{\kappa^2} > 0, \quad (4.31)$$

o que motiva a redefinição de $m_{2\pm}^2$ como simplesmente

$$m_{2\pm}^2 = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \frac{16}{\kappa^2}B}}{2B}. \quad (4.32)$$

Essas massas satisfazem $m_{2-} > m_{2+}$, onde a quantidade menor corresponde ao famigerado modo fantasma já presente na gravitação de Stelle e o outro é uma partícula inofensiva (não-fantasma) [54].

Para o campo escalar, as condições $m_{0\pm}^2 > 0$ e $m_{0+} \neq m_{0-}$ implicam

$$\sigma_1 = 3\alpha + \beta > 0, \quad \sigma_2 = 3A + B > 0, \quad (3\alpha + \beta)^2 - \frac{8(3A + B)}{\kappa^2} > 0. \quad (4.33)$$

Nessas circunstâncias pode-se redefinir as massas dos campos escalares como

$$m_{0\pm}^2 = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{8\sigma_2}{\kappa^2}}}{2\sigma_2}. \quad (4.34)$$

Note que se (4.31) é válido, então α e A devem ser positivos. Para os campos escalares $m_{0+} > m_{0-}$, mas agora a massa maior corresponde ao fantasma [54, 87]. Como comentado na Introdução, o motivo para essa diferença qualitativa entre os casos escalares e de spin-2 é que neste existe o gráviton, que é uma partícula não-fantasma sem massa.

A expressão para o potencial é

$$V_{\text{real}}(r) = -\frac{MG}{r} + \frac{4MG}{3} \left(\frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \frac{e^{-m_{2-}r}}{r} + \frac{m_{2-}^2}{m_{2-}^2 - m_{2+}^2} \frac{e^{-m_{2+}r}}{r} \right) - \frac{MG}{3} \left(\frac{m_{0+}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \frac{e^{-m_{0-}r}}{r} + \frac{m_{0-}^2}{m_{0-}^2 - m_{0+}^2} \frac{e^{-m_{0+}r}}{r} \right), \quad (4.35)$$

que é um caso particular do resultado obtido originalmente em [87] (e nos capítulos anteriores) por meio de outra técnica. Este potencial é não-singular na origem, como demonstrado no caso geral nos capítulos anteriores.

Pólos reais degenerados

As condições de pólos degenerados nos propagadores dos campos tensorial e escalar são, respectivamente,

$$B = -\frac{\beta^2 \kappa^2}{16} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1^2 \kappa^2}{8}. \quad (4.36)$$

Essas fórmulas correspondem a transformar as últimas desigualdades de (4.31) e (4.33) em igualdades. Logo, as massas m_k são definidas por $m_2 = \kappa^{-1}\sqrt{8/|\beta|}$ e $m_0 = 2\kappa^{-1}\sigma_1^{-1/2}$.

Mostra-se útil considerar essa situação partindo do caso de pólos simples com uma pequena diferença entre as duas massas reais,

$$\begin{aligned} m_{2-} &= m_{2+} + \epsilon_2 = m_2 + \epsilon_2 \\ m_{0+} &= m_{0-} + \epsilon_0 = m_0 + \epsilon_0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

com $0 < \epsilon_k/m_k \ll 1$. Então, F_k se torna

$$F_k = \left(-\frac{m_k}{2\epsilon_k} + \frac{1}{4} - \frac{\epsilon_k}{8m_k} \right) \frac{e^{-(m_k+\epsilon_k)r}}{r} + \left(\frac{m_k}{2\epsilon_k} + \frac{3}{4} + \frac{\epsilon_k}{8m_k} \right) \frac{e^{-m_k r}}{r} + O\left(\frac{\epsilon_k^2}{m_k^2}\right). \quad (4.38)$$

O limite $\epsilon_k \rightarrow 0$ é suave e leva à expressão para F_k para pólos reais degenerados,

$$F_k \rightarrow \left(\frac{1}{r} + \frac{m_k}{2} \right) e^{-m_k r}. \quad (4.39)$$

O potencial para dois pares de pólos degenerados assume, portanto, a forma

$$V_{\text{degen}}(r) = MG \left[-\frac{1}{r} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{r} + \frac{m_2}{2} \right) e^{-m_2 r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r} + \frac{m_0}{2} \right) e^{-m_0 r} \right], \quad (4.40)$$

que, como esperado, é finito na origem. De fato,

$$V_{\text{degen}}(0) = -\frac{MG}{3} \left(2m_2 - \frac{m_0}{2} \right). \quad (4.41)$$

O resultado (4.40) concorda com [103], onde foi considerado o caso $\beta = B = 0$, e com (2.37). Notamos que essa técnica de tomar o limite para levar em conta pólos degenerados pode ser ambígua caso a ordem seja maior que 2; nesse caso deve-se usar a abordagem desenvolvida no Capítulo 2.

Pólos reais com grande hierarquia

Outra possibilidade admitida pela gravitação de seis derivadas é ter um dos campos auxiliares com massa muito maior (algumas ou muitas ordens de grandeza maior) que

o outro de mesmo spin:

$$m_{2-} \gg m_{2+} \quad \text{e/ou} \quad m_{0+} \gg m_{0-}. \quad (4.42)$$

Essa situação pode produzir efeitos observáveis em baixas energias, por exemplo, via modificações da lei de força. A possibilidade de tal hierarquia entre as massas será discutida em detalhes no Capítulo 6 (veja também [125]), portanto aqui faremos apenas uma breve menção. A condição (4.42) pode ser alcançada desde que $16|B| \ll \kappa^2 \beta^2$ e/ou $8\sigma_2 \ll \kappa^2 \sigma_1^2$. É fácil verificar que se valem ambas condições, então em ordem dominante em m_{2+}/m_{2-} (e m_{0-}/m_{0+}) o potencial se reduz à forma aproximada

$$V_4(r) = MG \left(-\frac{1}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_{2+}r}}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_{0-}r}}{r} \right). \quad (4.43)$$

Como esperado, essa expressão coincide com aquela obtida por Stelle no contexto da teoria com quatro derivadas [28].

4.2.2 Pólos complexos

A condição de ocorrência de pólos complexos no propagador do setor de spin-2 é dada por

$$\beta^2 + \frac{16B}{\kappa^2} < 0, \quad \left(\beta^2 + \frac{16B}{\kappa^2} \right)^{1/2} = ic_2, \quad (4.44)$$

com $c_2 > 0$ por definição. A primeira condição requer $B < 0$, enquanto que o parâmetro β , relacionado ao termo de quatro derivadas, pode ser positivo ou negativo — em contraste com o que ocorre no caso de pólos reais, Eq. (4.31).

A posição dos pólos é definida por

$$m_{2\pm}^2 = \frac{\beta \pm ic_2}{2B}. \quad (4.45)$$

A raiz dessas quantidades corresponde às “massas”

$$m_{2+} = a_2 - ib_2 \quad \text{e} \quad m_{2-} = a_2 + ib_2, \quad (4.46)$$

onde $a_2, b_2 > 0$ são definidos por

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + c_2^2}}{4|B|} = \frac{-\beta + \sqrt{\frac{16|B|}{\kappa^2}}}{4|B|}, \\ b_2^2 &= \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + c_2^2}}{4|B|} = \frac{\beta + \sqrt{\frac{16|B|}{\kappa^2}}}{4|B|}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por fim, ao substituir (4.46) na expressão para F_2 encontra-se

$$F_2 = \left[\cos(b_2 r) - \frac{\beta}{c_2} \text{sen}(b_2 r) \right] \frac{e^{-a_2 r}}{r}, \quad (4.48)$$

que é uma quantidade real. Note que para que essa expressão tenha sentido físico, escolhemos m_{2+} e m_{2-} com parte real positiva (ou seja, $a_2 > 0$). De fato, se se escolhe $m_{2\pm}$ com parte real negativa na Eq. (4.46), então as exponenciais decrescentes reais tornar-se-iam crescentes, introduzindo oscilações crescentes no potencial para longas distâncias. Para contornar tal comportamento, seria necessário tomar exponenciais crescentes como solução de (4.15)-(4.17). Neste caso a parte real negativa da “massa” combinaria com a exponencial positiva resultando em oscilações amortecidas, exatamente como na Eq. (4.48) abaixo. Destarte, de certo modo não há perda de generalidade na nossa escolha de sinais.

A condição para que haja pólos complexos na parte escalar do propagador lê-se

$$\sigma_1^2 - \frac{8\sigma_2}{\kappa^2} < 0, \quad (4.49)$$

donde segue que $\sigma_2 > 0$ e $\sigma_1 \in \mathbb{R}$. De maneira similar ao caso de spin-2, definimos

$$ic_0 = \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{8\sigma_2}{\kappa^2}}, \quad m_{0\pm} = a_0 \pm ib_0, \quad (4.50)$$

onde ($a_0, b_0 > 0$)

$$a_0^2 = \frac{\sigma_1 + \sqrt{\frac{8\sigma_2}{\kappa^2}}}{4\sigma_2}, \quad b_0^2 = \frac{-\sigma_1 + \sqrt{\frac{8\sigma_2}{\kappa^2}}}{4\sigma_2}. \quad (4.51)$$

A contribuição dos campos escalares para o potencial é via

$$F_0 = \left[\cos(b_0 r) + \frac{\sigma_1}{c_0} \text{sen}(b_0 r) \right] \frac{e^{-a_0 r}}{r}. \quad (4.52)$$

Levando em conta as duas contribuições (4.48) e (4.52), obtém-se o potencial para o caso de dois pares de pólos complexos,

$$\begin{aligned}
V_C(r) = & -\frac{MG}{r} + \frac{4MG}{3} \left[\cos(b_2 r) - \frac{\beta}{c_2} \text{sen}(b_2 r) \right] \frac{e^{-a_2 r}}{r} \\
& - \frac{MG}{3} \left[\cos(b_0 r) + \frac{\sigma_1}{c_0} \text{sen}(b_0 r) \right] \frac{e^{-a_0 r}}{r}. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

É imediato verificar que este potencial é finito em $r = 0$.

O fato mais característico da presença de pólos complexos no propagador é a ocorrência de termos oscilantes. Dependendo de qual quantidade é maior no par (a_k, b_k) , os termos oscilantes podem ser mais ou menos relevantes. Por exemplo, no caso do setor de spin-2, se $\beta < 0$ então $a_2 > b_2$. Como o alcance característico do potencial de Yukawa é $2\pi/a_2$ e o período dos termos oscilantes é $2\pi/b_2$, segue que as oscilações podem ser suaves, dando contribuições relevantes apenas a distâncias maiores que o comprimento de Yukawa $2\pi/a_2$. Lá, o potencial associado a este campo irá mudar de sinal, porém terá um valor absoluto demasiado pequeno devido à supressão causada por a_2 . Portanto, nessa região o potencial será dominado pelo termo de Newton, relacionado ao gráviton.

Por outro lado, $\beta > 0$ implica em $a_2 < b_2$. Então o período de oscilações é tipicamente menor que o alcance do potencial de Yukawa. Essa condição faz com que o potencial sofra várias oscilações antes de ser dominado pelo termo newtoniano. O mesmo argumento se aplica, *mutatis mutandis*, para o campo escalar. Vale mencionar que para $a_k = 0$ as “massas” se tornam puramente imaginárias, correspondendo a modos taquiônicos. Neste caso F_k perde seu termo de amortecimento, violando o limite newtoniano no infinito e, portanto, motivando-nos a descartar essa possibilidade.

Cabe ainda ressaltar que ao admitir pólos complexos, as restrições sobre β e σ_1 foram relaxadas. Como mencionado há pouco, modificações importantes no comportamento do potencial no UV ocorrem se, contrário ao caso real, escolhe-se $\beta \geq 0$ e/ou $\sigma_1 \leq 0$. O caso de $\beta = 0$ e/ou $\sigma_1 = 0$ torna as partes real e imaginária a_k e b_k iguais, donde

apenas a função cosseno aparece na expressão para o potencial¹.

Encerramos esta seção retornando ao Teorema 4.1. Na Seção 4.1 mencionamos que os campos auxiliares de mesmo spin são dinamicamente acoplados. Ao mesmo tempo, as equações para as componentes de spin-2 e spin-0 são fatoradas. Devido a este fato o cancelamento da singularidade newtoniana no potencial χ_k (vide Seção 2.1) ocorre sem conexão com o outro setor de spin, e independentemente da natureza (real ou complexa), da multiplicidade e do número dos pólos massivos.

4.3 Deflexão da luz

Na seção anterior restringimos a discussão à componente $(0, 0)$ da métrica (4.27). No restante deste capítulo iremos considerar explicitamente também as outras componentes, no estudo da deflexão da luz por um campo gravitacional fraco. Esta questão já foi analisada no contexto da teoria de quatro derivadas (veja [126] e suas referências), e aqui veremos como os cenários possíveis apenas com mais de quatro derivadas na ação influenciam esse fenômeno.

A deflexão da luz tem sido estudada na literatura por meio de diversas técnicas [1, 2, 118–120, 126–134], dentre as quais citamos o método clássico baseado no índice de refração efetivo, discutido neste capítulo, e o método semi-clássico baseado na seção de choque (discutido em detalhes, por exemplo, em [48]). No que segue apresentamos a técnica que aplicamos para a gravitação de seis derivadas e, depois, os resultados.

4.3.1 Analogia óptico-mecânica

A analogia entre o movimento de partículas sem massa num espaço-tempo curvo e a óptica geométrica em um meio material (também conhecida como *analogia óptico-mecânica*) é uma das técnicas mais eficientes para estudar a deflexão gravitacional da

¹Enquanto a primeira versão do artigo [48] estava sendo preparada, soubemos que o potencial para o caso particular $\beta = \alpha = 0$ e $a_2 = a_0$ fora obtido na Ref. [56].

luz. Esse método é especialmente útil no caso de modificações da relatividade geral, pois permite que se obtenha uma descrição semi-quantitativa do fenômeno sem a necessidade de levar a cabo o cálculo do ângulo de deflexão até o fim. Uma apresentação detalhada do método pode ser encontrada em [2, 3, 128, 129]. Nesta breve seção mostraremos os resultados centrais do método, seguindo o raciocínio proposto em [2].

Como é bem sabido, partículas massivas seguem geodésicas tipo-tempo, enquanto aquelas desprovidas de massa percorrem geodésicas nulas; principiemos, pois, com a equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (4.54)$$

onde λ é um parâmetro conveniente ao longo da curva. Seja \mathcal{P} um evento na linha-de-mundo de um corpo não-massivo e consideremos todas as curvas nulas que por ele passam. Tomemos o funcional

$$S[x^\mu(\lambda)] = \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda, \quad (4.55)$$

avaliado sobre cada uma dessas curvas, desde $\lambda_{\mathcal{P}}$ até $\lambda_{\mathcal{Q}}$ mais adiante. A variação deste funcional sobre duas curvas, $x^\mu(\lambda)$ e $x'^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$, fornece

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} \left(g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\rho + 2g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{d\delta x^\beta}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= 2g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \delta x^\beta \Big|_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} + \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} \left[g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2 \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\alpha\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) \right] \delta x^\rho d\lambda. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Como tanto x^μ quanto x'^μ são curvas nulas, a distância entre quaisquer eventos ao longo delas é igual a zero e, portanto, $S[x^\mu] = S[x'^\mu] = 0 = \delta S$.

Outrossim, se supomos que x^μ é uma geodésica, a equação (4.54) implica em $g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 2 \left(g_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + g_{\alpha\rho,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) = 2 \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\alpha\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)$. Concluimos, pois,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \delta x^\beta \Big|_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} = 0. \quad (4.57)$$

Introduzimos, neste ponto, a exigência de que o campo gravitacional é estático, isto é, admite um campo de vetores de Killing τ^β tipo-tempo que permite (em uma região

finita do espaço-tempo) a separação da métrica em uma componente espacial e outra temporal [2]. Tomando, então, $\delta x^\beta = \tau^\beta \delta \xi$ paralelo a um destes vetores de Killing, a equação (4.57) se torna

$$0 = \delta \xi \Big|_{\lambda_P}^{\lambda_Q} = \delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} d\xi, \quad (4.58)$$

onde usamos o fato que $\tau_\beta \frac{dx^\beta}{d\lambda}$ se conserva ao longo de uma geodésica nula. Mapeando de forma que $\tau^\beta = (1, \mathbf{0})$, decorre $\xi = x^0 \equiv t$, donde concluímos que a geodésica nula satisfaz o princípio de Fermat:

$$\delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} dt = 0. \quad (4.59)$$

Traduzindo em palavras, dentre todas as possíveis trajetórias, a luz segue aquela que extremiza o tempo de percurso. Pode-se avançar um pouco mais na análise caso a métrica seja estática e esféricamente simétrica, ou seja

$$g_{00} = g_{00}(r), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} f(r), \quad (4.60)$$

para alguma função $f(r)$, onde $r = |\mathbf{r}|$. Então, para um raio de luz tem-se $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dt)^2 - f(dl)^2 = 0$, o que implica em $dt = \sqrt{f/g_{00}} dl$. Portanto,

$$\delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} \sqrt{\frac{f}{g_{00}}} dl = 0 \quad (4.61)$$

é o princípio de Fermat num meio com índice de refração

$$n(r) = \sqrt{\frac{f(r)}{g_{00}(r)}}. \quad (4.62)$$

Vimos como a partir da geodésica nula seguida por um raio de luz chega-se no princípio de Fermat, tal qual se a propagação da luz em presença de gravidade fosse através de um meio efetivo cujo índice de refração depende da posição. De fato, um caminho alternativo para a dedução do índice de refração efetivo pode ser via as equações de Maxwell no espaço curvo,

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (4.63a)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = J^\nu, \quad (4.63b)$$

juntamente com a suposição de que vale o regime da óptica geométrica, isto é que o comprimento de onda da luz é muito menor que a escala da curvatura (mas insuficiente para afetar o campo gravitacional). Por completeza, apresentamos essa dedução no Apêndice C.

O ângulo de deflexão θ de um raio de luz passando próximo a um corpo massivo com parâmetro de impacto ρ pode, então, ser calculado usando a lei de Snell-Descartes. Apresentamos esse cálculo no Apêndice D, onde mostramos (segundo o método de [129]) que em primeira ordem em G ,

$$\theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{rn(r)} \frac{dn(r)}{dr} dx, \quad \text{onde} \quad r = \sqrt{x^2 + \rho^2}, \quad (4.64)$$

e a trajetória do raio de luz é parametrizada por x . Devemos destacar que na equação (4.64) os limites de integração devem ser, formalmente, as posições $-x_0$ da fonte de luz e $+x_1$ do observador². Como consideramos que tanto a fonte quanto o observador estão muito distantes do corpo central (responsável pela deflexão), é natural colocar $x_0 = x_1 = \infty$. Não obstante, para cálculos mais precisos em cenários mais exóticos — por exemplo, com pólos complexos — o limite superior, normalmente relacionado à posição da Terra, deve ser redefinido.

Como o calibre de Teyssandier generalizado apresentado na Seção. 4.1 já fornece a métrica na forma isotrópica, obtém-se o índice de refração efetivo associado à gravitação de sexta ordem diretamente das equações (4.27) e (4.28). De fato, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} n(r) &= \sqrt{\frac{1 - \kappa h_{11}(r)}{1 + \kappa h_{00}(r)}} \\ &= 1 - GM \left(-\frac{1}{r} + \frac{4}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_0 \right) - GM \left(-\frac{1}{r} + \frac{2}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_0 \right) \\ &= n_E(r) - 2GMF_2, \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde

$$n_E(r) \equiv 1 + \frac{2GM}{r} \quad (4.66)$$

²Ver desenvolvimento no Apêndice D para mais detalhes.

é o índice de refração efetivo que ocorre na gravitação de Einstein.

A primeira conclusão que decorre de (4.65) é que nesta teoria a deflexão da luz não depende das excitações escalares $m_{0\pm}$ e, portanto, dos setores R^2 e $R\Box R$. Isso já havia sido notado no contexto da teoria $R + R^2$ em [135], usando a formulação semiclássica para a deflexão, e em [126] para a gravitação completa com quatro derivadas. Como argumentamos no capítulo seguinte (ver também [136]) essa é uma característica de teorias com modificações no setor escalar, isso é, do tipo $R + RF(\Box)R$, onde F é uma função arbitrária. Isso não significa, contudo, que os modos escalares não têm nenhuma influência na deflexão da luz; eles podem ter um efeito indireto, por meio de uma eventual diferença entre o valor da constante de Newton medido em algum experimento e o valor do parâmetro G na ação. Com o intuito de estudarmos a deflexão gravitacional “pura”, iremos desconsiderar por ora esse efeito, transferindo a discussão para o capítulo seguinte.

4.3.2 Deflexão com pólos reais simples

No caso de pólos reais simples, o índice de refração efetivo é dado pela fórmula geral diretamente,

$$n(r) = n_E(r) + 2MG \left(\frac{m_{2+}^2}{m_{2-}^2 - m_{2+}^2} \frac{e^{-m_{2-}r}}{r} - \frac{m_{2-}^2}{m_{2-}^2 - m_{2+}^2} \frac{e^{-m_{2+}r}}{r} \right). \quad (4.67)$$

Como $m_{2-} > m_{2+}$, o termo de m_{2-} fornece uma força atrativa e produz um aumento em $n(r)$, enquanto que o termo de m_{2+} dá uma contribuição negativa para o índice de refração, responsável pela força repulsiva causada pelo fantasma [87, 126]. Essa força repulsiva é maior que a atrativa do modo massivo não-fantasma, uma vez que

$$\left| \frac{m_{2-}^2}{m_{2-}^2 - m_{2+}^2} \frac{e^{-m_{2+}r}}{r} \right| > \left| \frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \frac{e^{-m_{2-}r}}{r} \right|. \quad (4.68)$$

Como consequência, $n(r) < n_E(r)$, implicando que a luz deflete menos na gravitação de seis derivadas que na relatividade geral.

Pode-se mostrar, ainda, que para um valor fixo de β vale

$$n(r) > n_4(\beta, r) = n_E(r) - \frac{2MG}{r} \exp\left(-\frac{4r}{|\beta|\kappa^2}\right), \quad (4.69)$$

onde o termo no lado direito é o índice de refração efetivo na gravitação de quarta ordem com o mesmo β , isto é, com $A = B = 0$. Para provar a inequação (4.69), notamos que $\partial m_{2+}^2 / \partial B < 0$, logo, o menor valor para m_{2+}^2 é atingido ao tomar o limite $B \rightarrow 0$ (lembre-se que $B < 0$), portanto

$$\lim_{B \rightarrow 0} m_{2+}^2 = -\frac{4}{\beta\kappa^2} = m_{2(4)}^2, \quad (4.70)$$

que é precisamente o quadrado da massa do fantasma da gravitação de quarta ordem [28]. Como o potencial de Yukawa é mais forte para uma massa menor, se $m_{2+}^2 = m_{2(4)}^2$ o termo repulsivo atinge seu máximo, enquanto que o termo atrativo massivo tende a zero. Conclui-se que $n(r) > n_4(r)$ para um mesmo valor de β . Em particular, $n(r) > 1$, o que significa que o balanço das três forças nunca resulta em uma deflexão repulsiva.

A discussão do parágrafo anterior pode ser resumida pela seguinte sequência de inequações, onde as duas últimas são válidas para um mesmo valor de β :

$$n_E(r) > n(r) > n_4(r) > 1. \quad (4.71)$$

Essas inequações tornam-se igualdades, respectivamente, nos limites:

$$\begin{aligned} i) \quad & m_{2\pm} \rightarrow \infty; \\ ii) \quad & m_{2+}/m_{2-} \rightarrow 0; \\ iii) \quad & m_{2\pm} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

A possibilidade *ii)* corresponde à gravitação com seis derivadas com uma massa desproporcionalmente grande, como explicado na Seção 4.2.1, e com $B \rightarrow 0$ como discutido acima.

Por completeza, escrevemos explicitamente o resultado para o ângulo de deflexão para um raio de luz com parâmetro de impacto ρ , dado por (4.64) com o índice de refração efetivo (4.67),

$$\theta = \theta_E + 2MG\rho(I_- - I_+), \quad (4.73)$$

$$I_{\pm} = \frac{m_{2\mp}^2}{|m_{2\pm}^2 - m_{2\mp}^2|} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} + m_{2\pm}\right) \frac{e^{-rm_{2\pm}}}{r^2} dx, \quad \text{onde } r = \sqrt{x^2 + \rho^2}. \quad (4.74)$$

Aqui $\theta_E \equiv 4GM/\rho$ é o ângulo de deflexão previsto pela relatividade geral. Numa teoria de ordem superior o termo do fantasma, I_+ , entra com sinal “errado” tendendo a reduzir a deflexão.

A magnitude da deflexão depende, pois, das três escalas de comprimento envolvidas, definidas pelo inverso das massas dos modos tensoriais e pelo parâmetro de impacto. Na região delimitada por $r_1 = 1/m_{2-}$ e $r_2 = 1/m_{2+}$, a contribuição dominante para a deflexão é devida ao modo fantasma e ao gráviton. No caso de hierarquia forte entre as massas, $m_{2-} \gg m_{2+}$ o modo massivo saudável é irrelevante ao longo da trajetória do raio de luz, e o ângulo de deflexão é aproximadamente o mesmo da teoria com quatro derivadas [126],

$$\theta \approx \theta_E - 2MG\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} + m_2\right) \frac{e^{-rm_2}}{r^2} dx. \quad (4.75)$$

Observa-se que fora da esfera de raio $1/m_{2+}$ a contribuição dominante para a deflexão vem do setor do gráviton, e o efeito dos modos massivos é suprimido.

4.3.3 Deflexão com pólos reais degenerados

Se as massas dos modos tensoriais são aproximadamente iguais, podemos usar a função F_2 dada pela Eq. (4.38), ou Eq. (4.39) no limite $m_{2-} = m_{2+} = m_2$. Este fornece o índice de refração efetivo

$$n_{\text{degen}}(r) = n_E(r) - 2MG \left(\frac{1}{r} + \frac{m_2}{2}\right) e^{-m_2 r}. \quad (4.76)$$

Sem a hierarquia entre as massas, a relação (4.68) e as conclusões que dela decorrem não se verificam. Isso significa que para um r suficientemente pequeno é possível ter $n_{\text{degen}} < 0$; e nesta região a força repulsiva é forte suficiente para causar uma deflexão total “para fora”. Portanto, a sequência de inequações (4.71) resume-se a $n_E > n_{\text{degen}}$, formalmente sem um limite inferior.

Neste cenário a expressão para θ torna-se

$$\theta_{\text{degen}} = \theta_E - 2MG\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{m_2^2 r}{2} + m_2 + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-rm_2}}{r^2} dx, \quad (4.77)$$

com r como em (4.74), que pode ser reconhecido como o ângulo de deflexão na gravitação de quarta ordem *com a mesma massa* m_2 consoante a Eq. (4.75), menos uma correção extra. De fato, o índice de refração (4.76) pode ser posto sob a forma

$$n_{\text{degen}}(m_2, r) = n_4(m_2, r) - MGm_2 e^{-m_2 r}, \quad (4.78)$$

onde $n_4(m_2, r)$ corresponde à teoria com quatro derivadas e massa m_2 .

É importante notar que a força repulsiva intensa ocorre apenas a distâncias menores que $1/m_2$, o que significa que para parâmetros de impacto suficientemente grandes este efeito não será apreciável.

4.3.4 Deflexão com pólos complexos

A expressão para o índice de refração efetivo para o caso de pólos complexos segue de (4.48) e (4.65),

$$n_C(r) = n_E(r) - 2MG \left[\cos(b_2 r) - \frac{\beta}{c_2} \text{sen}(b_2 r) \right] \frac{e^{-a_2 r}}{r}. \quad (4.79)$$

Como consequência, a deflexão sofrida por um raio de luz com parâmetro de impacto ρ é

$$\begin{aligned} \theta_C &= \theta_E - 2MG\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \left[b_2 - \frac{\beta}{c_2} \left(a_2 + \frac{1}{r} \right) \right] \text{sen}(b_2 r) \right. \\ &\quad \left. + \left(a_2 + \frac{1}{r} + \frac{\beta}{c_2} b_2 \right) \text{cos}(b_2 r) \right\} \frac{e^{-a_2 r}}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde usamos a parametrização tradicional (4.74).

Como as expressões apresentadas acima para os ângulos de deflexão presumem que os ângulos são pequenos, para todo efeito prático o parâmetro de impacto coincide com a distância de maior aproximação [129]. Portanto, pode-se definir uma escala ρ^{-1} associada à trajetória. No caso de pólos complexos há também três escalas características: o alcance do potencial de Yukawa, o comprimento das oscilações e o parâmetro de impacto. A análise qualitativa torna-se complicada devido à presença dos termos oscilantes, logo no que segue descreveremos dois exemplos simples ilustrativos.

O caso $a_2 \gg b_2$

De acordo com as definições da Seção. 3.2, segue que $a_2 > b_2$ se e somente se $\beta < 0$. Ainda, se c_2 for suficientemente pequeno, tal que $c_2^2/\beta^2 \ll 1$, é possível que a parte real da “massa” seja muito maior que a parte imaginária. Neste cenário as quantidades massivas a_2 e b_2 podem ser aproximadas por

$$a_2^2 \approx \frac{4}{\kappa^2 |\beta|} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{c_2^2}{\beta^2} \right), \quad b_2^2 \approx \frac{2}{\kappa^2 |\beta|} \frac{c_2^2}{\beta^2}. \quad (4.81)$$

Outrossim, a condição $a_2 \gg b_2$ significa que o potencial de Yukawa tem alcance muito curto, em comparação com os termos de longas oscilações.

É ainda possível que o parâmetro de impacto seja grande ou pequeno em comparação com a escala das oscilações. Considerando que $\rho^{-1} \ll a_2$, a correção devida às derivadas mais altas será sempre pequena ante o termo de Einstein, logo $\theta \approx \theta_E$. A única situação

interessante é quando $b_2 \ll \rho^{-1}$, com ρ^{-1} comparável com a_2 . Neste caso podemos escrever $\cos(b_2 r) \approx 1$ e $\sin(b_2 r) \approx b_2 r$, que simplifica a expressão do ângulo de deflexão para

$$\begin{aligned} \theta &\approx \theta_E - 2MG\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\frac{\beta a_2 b_2}{c_2} r + a_2 + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-a_2 r}}{r^2} \\ &\approx \theta_E - 2MG\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{a_2^2}{2} r + a_2 + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-a_2 r}}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

É imediato verificar que essa é essencialmente a mesma expressão (4.77), do caso de pólos reais degenerados. Este resultado é natural, haja visto que $b_2 \ll \rho^{-1} \sim a_2$ implica que a parte imaginária de $m_{2\pm}$ é pequena com respeito a todas as demais escalas do sistema. Logo, em primeira ordem ambos cenários coincidem, verificando nossos cálculos anteriores. Diferenças começam a aparecer apenas quando correções de segunda ordem em $b_2 r$ e de primeira ordem em b_2/a_2 são levadas em conta.

O caso $b_2 \gg a_2$

Essa condição é verificada somente se $\beta > 0$ e $c_2^2/\beta^2 \ll 1$. As quantidades a_2 e b_2 podem então ser aproximadas por

$$a_2^2 \approx \frac{2}{\kappa^2 |\beta|} \frac{c_2^2}{\beta^2}, \quad b_2^2 \approx \frac{4}{\kappa^2 |\beta|} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{c_2^2}{\beta^2} \right), \quad (4.83)$$

donde $b_2^2/a_2^2 \approx 4\beta^2/c_2^2$. Como consequência,

$$b_2 \frac{|\beta|}{c_2} \gg b_2 > \frac{b_2}{2} \approx a_2 \frac{|\beta|}{c_2} \gg a_2. \quad (4.84)$$

Recordamos que a condição $a_2 \ll b_2$ significa que o alcance do potencial de Yukawa é muito maior que o período das oscilações das funções trigonométricas. Então, várias oscilações irão ocorrer antes de que o fator exponencial torne desprezível toda a correção das derivadas mais altas. Este regime, portanto, possui uma dependência muito mais forte no parâmetro de impacto se comparado com os casos discutidos anteriormente.

No regime $\rho^{-1} \gg b_2$ pode-se aproximar o argumento das funções trigonométricas pelo valor constante ρb_2 , quando $r \approx \rho$, onde a amplitude dos termos de correção é máxima. Fica então claro que uma variação pequena do parâmetro de impacto pode produzir uma grande mudança da correção devida às derivadas mais altas, até mesmo mudando o sinal desta correção.

Essa forte dependência em ρ é apenas suprimida para $\rho^{-1} < a_2$, devido ao amortecimento exponencial. Tendo em vista a Eq. (4.84), a expressão para o ângulo de deflexão se simplifica para

$$\theta \approx \theta_E - MG\rho \frac{\beta b_2}{c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(b_2 r) \frac{e^{-a_2 r}}{r^2}. \quad (4.85)$$

4.3.5 Comentário com vistas à detecção experimental das derivadas mais altas

Os dois exemplos anteriores mostram que as correções devidas às derivadas mais altas podem ter forte dependência no parâmetro de impacto, no caso de pólos complexos. A origem desse efeito está no comportamento oscilatório do índice de refração efetivo. Em situações realísticas, no entanto, os únicos cenários factíveis são aqueles nos quais a parte real das “massas” é grande suficientemente para amortecer as oscilações em escalas maiores que aquelas testadas experimentalmente.

Com efeito, as medidas mais precisas de deflexão de raios de luz próximo ao limbo do Sol (realizadas pela modelagem de ocultações de fontes de rádio) confirmaram a predição da relatividade geral com uma incerteza de apenas algumas partes em 100.000 [137,138]. No espectro visível, a astrometria de estrelas durante eclipses solares verificaram o ângulo de deflexão com uma precisão de 1% [139,140].

As medidas de deflexão de raios de luz na vizinhança do Sol, no contexto da gravitação de quarta ordem (4.75), fornecem o limite inferior para a massa do potencial de Yukawa como sendo $m_2 > 10^{-23}$ GeV [126]. Este valor é, no entanto, muito pequeno se

comparado a experimentos de laboratório usando balanças de torsão, que apontam para $m_2 > 10^{-12}$ GeV no caso de apenas um potencial de Yukawa [141, 142]. Esses limites podem ser vistos como uma primeira estimativa para uma quota inferior da componente real a_2 , se considerarmos que ela é grande bastante para suprimir as oscilações até esta escala. Entretanto, nenhum limite na parte imaginária pode ser estabelecido desta análise preliminar. A modelagem precisa dos experimentos, especialmente daqueles de balança de torsão, faz-se necessária para detectar algum eventual comportamento oscilatório do potencial gravitacional. Uma interessante discussão acerca da perspectiva de detecção de oscilações no potencial gravitacional pode ser encontrada em [143, 144].

Efeitos dos modos escalares na deflexão da luz

No capítulo anterior vimos que o índice de refração efetivo (4.65) da gravitação de sexta ordem não depende das excitações massivas escalares da teoria. Mostraremos aqui que esse resultado pode ser generalizado para extensões arbitrárias no setor escalar, isso é, teorias com um termo $\int d^4x \sqrt{-g} R F(\square) R$, onde F é uma função arbitrária. Modelos desse tipo têm amplas aplicações na cosmologia. Por exemplo, $F = \text{const.}$ gera o modelo $R + R^2$, que é a base da inflação de Starobinsky [145, 146]; enquanto que as funções $F_{-1}(\square) = \mu^2 \square^{-1}$ e $F_{-2}(\square) = \mu^4 \square^{-2}$ geram termos que se comportam aproximadamente como o termo de Einstein-Hilbert e a constante cosmológica, sendo uma forma efetiva de considerar a influência do grupo de renormalização dessas quantidades [147, 148] (ver, por exemplo, [149–151] para aplicações desses modelos). Ainda, fatores de forma logarítmicos, como $F(\square) = \ln(\square/\mu^2)$, surgem de correções quânticas envolvendo *loops* de campos de matéria [147, 148].

Por simplicidade, neste capítulo consideraremos apenas extensões da relatividade

geral no setor escalar, isto é, teorias do tipo

$$S_{\text{grav}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + RF(\square)R \right], \quad (5.1)$$

com $\kappa^2 = 32\pi G$ e uma função arbitrária F . Obviamente, devemos ainda incluir no integrando uma densidade de lagrangeana de matéria, \mathcal{L}_M . Vários trabalhos discutiram a deflexão da luz em casos particulares deste modelo, usando métodos diferentes [48, 126, 135, 152–158]. Em alguns artigos chega-se à conclusão que a deflexão da luz ocorre exatamente da mesma forma que na relatividade geral, em outros porém é dito que esse teste pode ser usado para distinguir entre dois modelos. Nosso objetivo neste capítulo é buscar esclarecer a questão de, em que medida, a deflexão da luz depende do modelo. Seguiremos, para tanto, duas linhas de raciocínio diferentes. A primeira encara o problema como um espalhamento e se baseada no cálculo de amplitudes; por sua vez, a segunda é o método puramente clássico descrito no capítulo anterior, em termos de um índice de refração efetivo.

5.1 Deflexão da luz: abordagem ao nível de árvore

A interação entre a luz e um campo gravitacional fraco pode ser descrita como um processo de espalhamento e calculado usando diagramas de Feynman [159, 160], incluindo, inclusive, correções de *loops* [118, 119, 161, 162]. Antes de aplicarmos o método para o modelo estendido (5.1), faremos uma breve revisão do cálculo para a relatividade geral.

5.1.1 Deflexão da luz na relatividade geral

O cálculo da deflexão ao nível clássico pelo método de espalhamento pode ser encontrado em alguns livros, tais como [163, 164]. Apresentaremos aqui, contudo, uma demonstração ligeiramente diferente, de modo a ser mais facilmente generalizada para o modelo estendido (5.1).

O primeiro passo consiste em escrever a métrica como uma flutuação sobre o espaço-tempo plano, isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Como a gravidade se acopla com a matéria via o tensor de momento-energia, em primeira ordem em κ a interação é descrita pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de momento-energia do setor de matéria no espaço plano, que define o vértice fundamental. Para o campo eletromagnético temos

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = -\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.3)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Precisaremos também da interação com campo massivo escalar, minimamente acoplado,

$$T_{\text{scal}}^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - M^2 \phi^2). \quad (5.4)$$

No contexto da relatividade geral, a interação gravitacional está relacionada à troca de apenas um tipo de partícula, o gráviton, cujo propagador pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\text{GR}}(k) = \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}}{k^2} - \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}}{2k^2} \quad (5.5)$$

na representação do espaço dos momentos. Aqui $P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}$ e $P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}$ são os projetores de spin-2 e spin-0 dados pela Eq. (1.8). Salientamos que as outras partes do propagador são irrelevantes para nossas considerações, pois ele será contraído diretamente com as fontes na aproximação de nível de árvore.

Ao nível de árvore, podemos modelar a fonte massiva que produz o campo gravitacional como sendo um campo escalar massivo. Temos, portanto, que calcular o processo de troca de um gráviton entre esse campo e o fóton. A contribuição dominante para a amplitude \mathcal{M} associada a esse processo é da ordem κ^2 e está relacionada, via a fórmula de redução de LSZ, à função

$$G_4 = -\frac{\kappa^2}{4} \iint d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0 | T \phi(x) \phi(x') A_\mu(y) A_\nu(y') T_{\text{scal}}^{\alpha\beta}(z_1) T_{\text{em}}^{\rho\sigma}(z_2) h_{\alpha\beta}(z_1) h_{\rho\sigma}(z_2) | 0 \rangle_c. \quad (5.6)$$

Ao aplicar-lhe o teorema de Wick, o termo $h_{\alpha\beta}(z_1)h_{\rho\sigma}(z_2)$ fornece o propagador do gráviton (5.5). O tensor de momento-energia do campo eletromagnético satisfaz a lei de conservação $\partial_\alpha T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = 0$ e tem traço nulo, $T_{\alpha\text{em}}^\alpha = 0$. Logo, os termos proporcionais a $\omega_{\mu\nu}$ no propagador do gráviton não contribuem para a expressão (5.6) e, portanto, para a amplitude de espalhamento. Podemos, pois, substituir os projetores $\theta_{\mu\nu}$ pela métrica $\eta_{\mu\nu}$ no propagador do gráviton contraído com $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$. Do ponto de vista físico, isso significa que os fótons só interagem com o setor de spin-2 do propagador.

A contribuição mais baixa para a matriz de espalhamento decorre do diagrama ilustrado na Figura (5.1), ao nível de árvore, no qual um fóton com momento inicial p e um escalar com momento q trocam um gráviton, resultando num estado final com momentos p' e q' . A amplitude de espalhamento associada é dada por

$$\mathcal{M} = V_{\mu\nu}^{(\phi)}(q, q') G_{\text{GR}}^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) V_{\alpha\beta\rho\sigma}^{(A)}(p, p') \epsilon^\rho(\mathbf{p}) \epsilon^{*\sigma}(\mathbf{p}'), \quad (5.7)$$

onde incluímos os vetores de polarização para os fótons. Para o escalar temos o vértice

$$V_{\mu\nu}^{(\phi)}(p, p') = -\frac{i\kappa}{2} [p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + \eta_{\mu\nu}(M^2 - p \cdot p')] , \quad (5.8)$$

enquanto que para o fóton,

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\mu\nu}^{(A)}(p, p') = & -\frac{i\kappa}{2} [p \cdot p' (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) + \eta_{\alpha\beta}p'_\mu p_\nu + \eta_{\mu\nu}(p_\alpha p'_\beta + p_\beta p'_\alpha) \\ & - (\eta_{\beta\nu}p'_\mu p_\alpha + \eta_{\alpha\mu}p'_\beta p_\nu + \eta_{\alpha\nu}p'_\mu p_\beta + \eta_{\beta\mu}p'_\alpha p_\nu)] . \end{aligned} \quad (5.9)$$

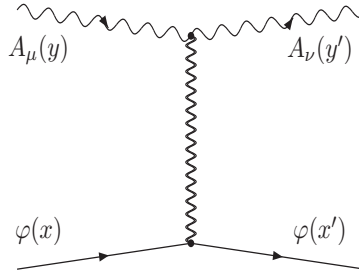


Figura 5.1: Troca de um gráviton entre um campo massivo e um fóton.

Como discutido acima, na amplitude (5.7) podemos substituir o propagador $G_{\text{GR}}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$ pela expressão

$$\frac{1}{2k^2} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}). \quad (5.10)$$

Considerando que estamos interessados na deflexão de um raio de luz passando nas vizinhanças de um objeto massivo (como uma estrela ou uma galáxia), aqui descrito pelo campo escalar, é justo aplicar-lhe a aproximação de massa grande. Isso significa tomar $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q}' = -\mathbf{k}$, $M \gg |\mathbf{k}|$ e $M \gg |\mathbf{p}|$, e considerar que o fóton sofre espalhamento elástico, com $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$. No limite em que $\mathbf{k} \rightarrow 0$, o vértice escalar-escalar-gráviton se simplifica para $V_{\mu\nu}^{(\phi)} = -i\kappa M^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0$. Para o outro vértice, convém trabalhar no calibre de Lorenz, no qual $\epsilon^0 = 0$ e $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0$. É, pois, fácil ver que a Eq. (5.7) se reduz para

$$\mathcal{M} = -\frac{\kappa^2 M^2 E^2}{|\mathbf{k}|^2} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{p}'). \quad (5.11)$$

Aqui $E = p_0 = p'_0$ é a energia do fóton. Os termos de polarização podem ser descartados se a transferência de momento é desprezível (ver [165] para discussões sobre efeitos dependentes da helicidade no caso de fontes com rotação). Devemos, ainda, introduzir fatores de normalização $\sqrt{2E_i}$ para cada partícula externa. Lembrando que $\kappa^2 = 32\pi G$, temos que a amplitude de espalhamento é dada por

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}) = -\frac{8\pi G M E}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (5.12)$$

A transformada de Fourier desta expressão fornece o potencial de interação sentido pelo fóton:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{2G M E}{|\mathbf{r}|}. \quad (5.13)$$

Como esperado, esse potencial é o dobro do potencial newtoniano estático, sentido por partículas não-relativísticas [159]. Inclusive, esse fator dois teve importância na história da relatividade geral, pois ele estava ausente na primeira predição de Einstein para a deflexão da luz, baseada apenas no princípio de equivalência, em 1911 [166]. Com o

potencial (5.13) acima e usando a teoria de espalhamento clássica é possível calcular a deflexão sofrida por um raio de luz sujeito a um campo gravitacional fraco¹.

5.1.2 Deflexão da luz em teorias estendidas

O método descrito na seção anterior pode ser facilmente adaptado para extensões da relatividade geral, nas quais o propagador da interação gravitacional tem uma estrutura mais rica, propagando partículas diferentes do gráviton. Por exemplo, como vimos em capítulos anteriores, caso F seja uma função polinomial de grau N , pode haver $N + 1$ partículas massivas de spin-0 adicionalmente ao tradicional gráviton sem massa. Em casos mais gerais, pode ser que o propagador tenha pólos massivos, pólos complexos, pólos degenerados, ou ainda apenas o pólo em $k^2 = 0$ (caso de certas teorias não-locais). O ponto central aqui é que todas essas possibilidades permitidas pela ação (5.1) envolvem mudanças apenas no setor *escalar* do propagador, enquanto que o setor de spin-2 permanece inalterado. Com efeito, tendo em vista as Eq. (1.16) e (1.17) segue que o propagador da teoria estendida (5.1) pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\text{ext.}}(k) = \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}}{k^2} - \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}}{2k^2 [1 - 3\kappa^2 k^2 F(-k^2)]}. \quad (5.14)$$

Notemos que o setor de spin-2 só se alteraria caso incluíssemos na ação um termo do tipo $R_{\alpha\beta}F_2(\square)R^{\alpha\beta}$ ou $R_{\alpha\beta\mu\nu}F_3(\square)R^{\alpha\beta\mu\nu}$ [54].

Apesar dos eventuais novos graus de liberdade na teoria (5.1), em ordem mais baixa o vértice associado à interação entre fótons e o campo gravitacional é exatamente o

¹Vale notar que uma forma alternativa de se obter a expressão para o ângulo de deflexão é via a comparação da seção de choque não-polarizada resultante de (5.11) com a seção de choque quântica [48, 126, 135, 159, 160]. Contudo, como discutido em [48], esse método tem aplicação restrita a certas extensões da relatividade geral.

mesmo da relatividade geral. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= V_{\mu\nu}^{(\phi)}(q, q') G_{\text{ext.}}^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) V_{\alpha\beta\rho\sigma}^{(A)}(p, p') \epsilon^\rho(\mathbf{p}) \epsilon^{*\sigma}(\mathbf{p}') \\
&= V_{\mu\nu}^{(\phi)}(q, q') \left(\frac{\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}}{2k^2} \right) V_{\alpha\beta\rho\sigma}^{(A)}(p, p') \epsilon^\rho(\mathbf{p}) \epsilon^{*\sigma}(\mathbf{p}') \\
&= V_{\mu\nu}^{(\phi)}(q, q') G_{\text{GR}}^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) V_{\alpha\beta\rho\sigma}^{(A)}(p, p') \epsilon^\rho(\mathbf{p}) \epsilon^{*\sigma}(\mathbf{p}'), \tag{5.15}
\end{aligned}$$

que é mesma expressão da relatividade geral (5.12). Isso ocorre porque todas as modificações no propagador são no setor de spin-0, que interage com o traço do tensor momento-energia, como discutido na seção anterior. Nesse sentido, a deflexão da luz não pode ser usada, por si só, para distinguir duas teorias quaisquer do tipo (5.1). Este resultado está em acordo com os cálculos de [126, 155–158] para modelos particulares e feitos usando outros métodos.

5.1.3 Efeito da interação com partículas massivas

Apesar da igualdade do potencial de interação em toda a classe de teorias definidas por (5.1), a afirmativa de que todas essas teorias fornecem a mesma predição para o ângulo de deflexão não é correta. O possível efeito decorre da diferença entre o termo GM que entra na fórmula para a deflexão e o termo que é obtido em medições e observações. Aqui G é a constante de Newton, usualmente medida em experimentos semelhantes ao de Cavendish, e M é massa do corpo responsável pela deflexão, que normalmente é determinada a partir do estudo de órbitas de corpos celestes. Como resultado, para fazer uma predição do ângulo de deflexão em alguma situação concreta, faz-se necessário considerar também a interação da gravitação com partículas massivas (não-relativísticas). O potencial de interação não-relativístico pode ser computado, como em (5.13), via a transformada de Fourier da amplitude de espalhamento

$$\mathcal{M} = V_{\mu\nu}^{(\phi_1)} D^{\mu\nu, \alpha\beta} V_{\alpha\beta}^{(\phi_2)}, \tag{5.16}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos escalares de massa M e m . Como o traço do tensor de momento-energia para campos escalares massivos não é nulo, o potencial estático de-

pende da forma da função F e, dessarte, dos parâmetros massivos do modelo.

Vimos, por exemplo, que o potencial interpartículas para uma função polinomial $F(x)$ contém termos de correção do tipo Yukawa para cada pólo massivo simples no propagador [87, 103, 107, 167],

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^N \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 - \mu_i^2} e^{-|\mathbf{r}|\mu_i} \right). \quad (5.17)$$

Se as quantidades μ_i forem reais e muito maiores que a escala típica r_{lab}^{-1} dos experimentos que medem G , então os termos de Yukawa serão suprimidos e o potencial se reduz ao termo newtoniano. Por outro lado, se as massas dos novos graus de liberdade são tais que $\mu_i \ll r_{\text{lab}}^{-1}$ para um dado sistema experimental/observacional, então as exponenciais podem ser aproximadas por 1 e o potencial se torna, para todos efeitos práticos, igual a 4/3 do potencial de Newton [103, 107]. Nesse caso, nossas medidas em laboratórios irão, na prática, medir uma constante efetiva $G_{\text{eff}} = \frac{4}{3}G$, de sorte que, por exemplo, a predição para o ângulo de deflexão para um raio de luz passando próximo ao limbo do Sol será 3/4 daquela da relatividade geral.

Esse exemplo simples mostra que a função F pode ter uma influência *indireta* na predição do ângulo de deflexão. Esse efeito é indireto por não estar relacionado a uma nova força atuando no raio de luz, mas sim no valor medido do produto GM , que aparece na expressão para o ângulo de deflexão. Em situações realísticas astrofísicas, isso só afetaria modelos com modos escalares “leves”.

5.2 Analogia óptico-mecânica e estrutura de geodésicas nulas

Resolver a equação de Maxwell no espaço curvo pode ser visto como uma abordagem mais limpa para calcular o ângulo de deflexão, pois considera, desde o princípio,

que a fonte do campo gravitacional é clássica (e não quântica). Ainda, como discutido em [48], esse procedimento evita possíveis sutilezas do cálculo usando diagramas de Feynman. Por essa razão, nesta seção descrevemos como as extensões (5.1) se manifestam na deflexão da luz usando métodos clássicos e geométricos. Seguimos aqui a mesma analogia óptico-mecânica descrita na seção² 4.3.1 (e nos Apêndices C e D).

Como na Seção 4.3 do capítulo anterior, usaremos a métrica estática e esfericamente simétrica na forma isotrópica,

$$ds^2 = (1 + 2\varphi)dt^2 - (1 - 2\psi)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (5.18)$$

com $\varphi = \varphi(r)$ e $\psi = \psi(r)$, à qual está associada um índice de refração efetivo

$$n(r) = \sqrt{\frac{1 - 2\psi(r)}{1 + 2\varphi(r)}}. \quad (5.19)$$

No caso da relatividade geral, em primeira ordem em G , a métrica (5.18) associada a uma massa pontual M é dada pelos potenciais

$$\varphi(r) = \psi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (5.20)$$

Como estamos no regime de campo fraco, assumimos que esse termo é pequeno, donde segue o índice de refração efetivo

$$n_E(r) = 1 + \frac{2GM}{r} + O(G^2). \quad (5.21)$$

Para obter o índice de refração efetivo associado a modelos estendidos do tipo (5.1) com uma função arbitrária $F(x)$, convém primeiro reescrever os potenciais φ e ψ em termos de novas funções φ_* e ψ_* ,

$$\varphi(r) = V(r) + \varphi_*(r), \quad \psi(r) = V(r) + \psi_*(r), \quad \text{com} \quad \Delta V = \frac{\kappa^2 \rho}{8}. \quad (5.22)$$

²Ver também as referências [2, 3, 128, 129].

Na última expressão, ρ é a densidade (estática) de matéria que serve de fonte ao campo. Evidentemente, para a relatividade geral as equações de movimento devem fornecer $\varphi_* = \psi_* \equiv 0$. A solução na forma (5.18) para o campo gerado por uma distribuição estática de matéria pode ser obtida, como vimos no Capítulo 2, pelo traço e pela componente (0, 0) das equações de movimento linearizadas, quais sejam,

$$4[1 - 3h(-\Delta)]\Delta(\varphi - 2\psi) = \kappa^2\rho, \quad (5.23)$$

$$4[h(-\Delta) - 1]\Delta\varphi - 8h(-\Delta)\Delta\psi = -\kappa^2\rho, \quad (5.24)$$

$$\text{onde } h(\square) = [1 + 2\kappa^2 F(\square) \square] . \quad (5.25)$$

(Por ser uma fonte estática, podemos substituir \square por $-\Delta$.) Usando o *Ansatz* (5.22) é imediato mostrar que as funções φ_* e ψ_* satisfazem as equações

$$\frac{1 - 3h(-\Delta)}{1 - h(-\Delta)} \Delta\varphi_* = \frac{\kappa^2\rho}{8}, \quad \frac{1 - 3h(-\Delta)}{1 - h(-\Delta)} \Delta\psi_* = -\frac{\kappa^2\rho}{8}, \quad (5.26)$$

donde segue que $\varphi_*(\mathbf{r}) = -\psi_*(\mathbf{r})$.

Para uma massa pontual $\rho(\mathbf{r}) = M\delta^{(3)}(\mathbf{r})$, o índice de refração efetivo é, então,

$$\begin{aligned} n_{\text{ext}}(r) &= \sqrt{\frac{1 - 2V - 2\psi_*}{1 + 2V + 2\varphi_*}} \\ &= 1 - (V - \varphi_*) - (V + \varphi_*) + O(G^2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$= 1 + \frac{2GM}{r} + O(G^2). \quad (5.28)$$

Essa expressão é, em primeira ordem, a mesma que ocorre na relatividade geral (5.21). Mais uma vez, vemos que a deflexão da luz, considerada sozinha, não pode ser usada para distinguir dois modelos que difram apenas no setor escalar³. É fácil ver que isso ocorre pois, na equação (5.27), a contribuição dos termos quadráticos em R aparecem com o mesmo valor (mas sinais contrários) nas componentes h_{00} e h_{11} da perturbação métrica. Não obstante, como discutido na seção anterior, para realizar uma predição

³Vale notar que essa mesma conclusão foi encontrada em [126, 135, 155–158] no contexto da teoria $R + R^2$.

da deflexão da luz faz-se necessário estabelecer um valor para GM via uma técnica diferente.

Para melhor explicar essa conclusão, podemos escrever a métrica (5.18) numa forma inspirada pelo formalismo PPN [168], com

$$\varphi = -\frac{G_{\text{eff}}M}{r}, \quad \psi = -\frac{\gamma G_{\text{eff}}M}{r}, \quad (5.29)$$

sendo G_{eff} a quantidade medida experimentalmente. Salientamos que, de modo geral, uma teoria do tipo (5.1) não admite uma representação no formalismo PPN [168], pois o limite newtoniano de um tal modelo pode ser não-newtoniano, com alguma dependência adicional em r [154, 169–171]. Nessa circunstância as quantidades G_{eff} e γ são funções de r e deve haver alguma escala na qual seja possível observar desvios da mecânica newtoniana, como uma precessão anômala de órbitas elípticas [172, 173]. A (nova) lei de força pode ser estudada nesse regime e os parâmetros livres do modelo determinados, bem como a constante G . Contudo, pode também acontecer que esses efeitos não-newtonianos não sejam apreciáveis numa certa escala \bar{r} para a qual $G_{\text{eff}}(\bar{r})$ e $\gamma(\bar{r})$ são aproximadamente constantes e as leis da mecânica são aproximadamente as de Newton. Nesse cenário pode-se trabalhar com a métrica na forma PPN acima. Então, das relações

$$\begin{aligned} \varphi &= V + \varphi_* = V\left(1 + \frac{\varphi_*}{V}\right) \\ \text{e} \quad \psi &= V - \varphi_* = \gamma V\left(1 + \frac{\varphi_*}{V}\right) \end{aligned}$$

segue que na vizinhança de \bar{r} vale

$$G_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{\varphi_*}{V}\right) G \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{V - \varphi_*}{V + \varphi_*}. \quad (5.30)$$

Assumindo que $\varphi_*(\bar{r}) \ll V(\bar{r})$ numa certa região, segue que

$$\gamma(\bar{r}) \approx 1 - \frac{2\varphi_*(\bar{r})}{V(\bar{r})}.$$

Por outro lado, se a condição $\varphi_*(\bar{r}) \ll V(\bar{r})$ não é satisfeita, o parâmetro γ pode ser bastante diferente do valor $\gamma_{\text{GR}} = 1$ da relatividade geral; e a predição para o ângulo

de deflexão pode variar de teoria para teoria. De fato, pela Eq. (5.28) a deflexão θ sofrida por um raio de luz com parâmetro de impacto b é $\theta = 4GMb^{-1}$. Em termos de G_{eff} esse resultado se escreve como

$$\theta = \frac{4G_{\text{eff}}M}{(1 + \varphi_*/V)b} = 2(1 + \gamma) \frac{G_{\text{eff}}M}{b}, \quad (5.31)$$

com γ definido como em (5.30).

Consideremos um exemplo simples. No caso de uma função constante $F(\square) \equiv (6\alpha)^{-2}$ (isto é, o modelo $R + R^2$) e uma massa pontual como fonte do campo gravitacional se tem

$$\varphi_*(r) = -\frac{GM e^{-mr}}{3r}, \quad \gamma = \frac{3 - e^{-mr}}{3 + e^{-mr}}, \quad (5.32)$$

onde $m \equiv \alpha\kappa^{-1}$. Se m for suficientemente grande, o potencial de Yukawa pode ter um alcance mais curto que a escala dos mais recentes e precisos experimentos de balança de torção. Então, para todo efeito prático a quantidade G_{eff} medida em laboratório é igual a G e $\gamma = 1$. Por outro lado, se o modo escalar é muito leve, com um alcance muito maior que escalas típicas no Sistema Solar, então a massa do Sol medida no contexto da mecânica Newtoniana (ou *massa kepleriana*) é tal que

$$(GM)_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{1}{3} e^{-mr}\right) GM \approx \frac{4GM}{3},$$

e $\gamma \approx 1/2$. Esse exemplo mostra que nem sempre podemos assumir que $\varphi_* \ll V$. Substituindo $\gamma = 1/2$ em (5.31) encontramos o ângulo de deflexão $\theta = \frac{3}{4}\theta_{\text{GR}}$, em acordo com [152] (veja também o exemplo citado na Seção 5.1.3). O parâmetro PPN γ em (5.32) foi obtido em [156], onde também foi argumentado que seu valor correto deveria ser, no entanto, $\gamma = 1$, haja visto que $\varphi + \psi = 2V$ como em (5.28). Como acabamos de mostrar, não há conflito entre as equações (5.28) e (5.32) quando se leva em conta as quantidades observáveis em (5.28). O valor $\gamma = 1$ foi obtido em [154] sob a hipótese que o parâmetro m é tal que a teoria não viole nenhum resultado experimental conhecido. Isso está em acordo com nossa discussão, isto é, considerando que m é tão

grande que afete a mecânica apenas à escala sub-micrométrica. Por fim, a deflexão da luz nesse modelo foi estudada também em [135, 155, 157, 158] com a conclusão de que é um teste insuficiente para distinguir entre a relatividade geral e o modelo $R + R^2$ em primeira ordem em G (ver [158] para cálculos até a ordem seguinte). Consoante o que aqui discutimos, essa afirmativa é parcialmente correta, pois qualquer predição tem como base a quantidade GM — e a quantidade $(GM)_{\text{eff}}$ na relatividade geral pode ser diferente daquela na teoria quadrática.

Por fim, é instrutivo mencionar a relação dos resultados anteriores com transformações conformes da métrica. Como discutido na Seção 4.3.1 e no Apêndice C, a descrição da deflexão da luz via a analogia óptico-mecânica está intimamente relacionada com o fato de que a luz segue geodésicas nulas com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$. Nesse sentido, a igualdade que verificamos para o índice de refração efetivo de todas as teorias (5.1), em $O(G)$, pode ser transportada para a estrutura das geodésicas nulas associadas às métricas dessa classe de teorias. Esse paralelo foi notado em [122, 174] para o modelo mais simples $R + R^2$, e em [103, 167, 175] para modelos mais gerais envolvendo funções polinomiais. Usando a métrica (5.18) parametrizada como (5.22) e com o resultado $\psi_* = -\varphi_*$ obtido acima é fácil verificar que

$$g_{\mu\nu}^{\text{ext}} = (1 + 2\varphi_*)g_{\mu\nu}^{\text{GR}}, \quad (5.33)$$

onde mativemos termos apenas em ordem G . Aqui

$$g_{\mu\nu}^{\text{GR}}(r) = \eta_{\mu\nu} + 2V\delta_{\mu\nu}$$

é a métrica de campo fraco associada à mesma configuração de matéria no calibre de de Donder.

Como geodésicas nulas são conformalmente invariantes, até $O(G)$ as geodésicas nulas da relatividade geral também o são nas teorias estendias (5.1). Segue, então, que raios de luz sofrem a mesma deflexão em ambas teorias. Por sua vez, geodésicas de tipo-tempo e tipo-espaço não são conformalmente mapeadas a outras geodésicas, e por

isso partículas massivas devem defletir de maneira diferente. Pensando na descrição em termos da formulação ε - μ das equações de Maxwell no espaço curvo (ver Apêndice C), temos que a transformação conforme $g_{\mu\nu}^{\text{GR}} \mapsto g_{\mu\nu}^{\text{ext}}$ não altera as equações de movimento do campo eletromagnético (veja também [176]).

5.3 Comentário sobre modelos com extensões no setor de spin-2

O mesmo raciocínio desenvolvido neste capítulo para teorias com extensões apenas no setor escalar pode ser aplicado para teorias com modificações também no setor de spin-2. Estas modificações, como vimos num exemplo já no capítulo anterior, têm um papel *ativo* na deflexão, realmente alterando o potencial sentido pelo raio de luz e, portanto, a lei de força. Além disso, têm também um papel passivo referente à recalibragem dos valores medidos para G e M . Com efeito, vimos no Capítulo 2 que teorias polinomiais completas têm um potencial estático regular na origem. Isso significa que, à escala dos modos massivos da teoria a força gravitacional tende a ser suprimida — o que, na ausência de desvios apreciáveis da física newtoniana gera um G_{eff} pequeno, forçando-nos a tomar os parâmetros massivos da teoria como sendo muito grandes. O mesmo se aplica no caso de teorias não-locais como as discutidas na Introdução e no Capítulo 3, no que toca à escala de não-localidade. Situação diferente ocorre, contudo, para modificações não-locais no regime IR, tais como aquelas advindas de termos do tipo $R_{\mu\nu} \square^{-1} R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu} \square^{-2} R^{\mu\nu}$. Estes têm efeito apenas em grandes escalas, podendo ter aplicações em física de matéria escura, por exemplo. Esperamos no futuro analisar essas questões.

Retornando, agora, à discussão da Seção 4.3, concluímos que os efeitos de eventuais termos com derivadas mais altas têm mais chances de serem detectados experimentalmente em efeitos de balança de torsão. Afinal, à escala sub-milimétrica podem

ocorrer desvios da lei de força (proporcional ao inverso do quadrado da distância) que permitam, inclusive, a determinação dos novos parâmetros da teoria [141, 143, 144]. Modificações da lei de força à grandes distâncias, em teorias polinomiais, implicariam que às nossas escalas usuais a gravitação seria muito fraca, o que inevitavelmente levaria a uma predição para o ângulo de deflexão diferente do experimentalmente verificado.

Capítulo 6

Seesaw gravitacional em modelos polinomiais

O ponto de vista convencional é que derivadas mais altas não são observáveis em baixas energias devido à supressão causada pela escala de Planck. Para que essa afirmativa seja verdadeira na gravitação de Stelle (teoria com quatro derivadas), faz-se necessário que os coeficientes dos termos de ordem superior sejam aproximadamente iguais a um, ou pelo menos não muitas ordens de magnitude maiores. Não obstante, o que é válido para a teoria de quatro derivadas não o é, necessariamente, para teorias com mais derivadas. Com efeito, em teorias com maior número de parâmetros massivos é possível conjecturar um eventual efeito do tipo *seesaw*, no qual os parâmetros massivos grandes (da ordem da massa de Planck, M_P) da ação se combinam de tal maneira a gerar uma massa física muito menor. Isso seria um mecanismo capaz de evadir a supressão de Planck e trazer a fenomenologia do modelo para escalas mais baixas. Tal questão é de grande interesse neste momento no qual ocorrem importantes avanços observacionais na física de astropartículas e na astronomia de multi-mensagem, capazes de levar à descoberta de efeitos de gravitação quântica abaixo da escala de

Planck [177–179].

Pensando na teoria de cordas, uma ação polinomial do tipo (1.13) pode ser vista como um modelo efetivo em baixas energias no qual todos os parâmetros massivos são advindos do único parâmetro α' . Daí se supõe que todos eles, resultantes da truncagem da série infinita em derivadas, são da ordem de M_P . Porém, inspirados pela física de neutrinos, poderia haver uma situação em que esses parâmetros grandes se combinassem gerando uma partícula de massa pequena e outras de massas elevadas. Neste capítulo iremos examinar essa possibilidade no modelo polinomial. Começaremos a discussão com o caso da gravitação de sexta ordem, tema do Capítulo 4, e logo mostraremos como o resultado pode ser generalizado para teorias com derivadas de ordem arbitrária. Seguiremos a mesma convenção de sinais do capítulo Capítulo 4, donde a ação para a teoria de seis derivadas é

$$S_{grav} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{A}{2} R \square R + \frac{B}{2} R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} \right]. \quad (6.1)$$

A hipótese que os parâmetros massivos da ação são da ordem da massa de Planck se expressa como $A^{-1}, B^{-1}, \kappa^{-2} \sim M_P^2$. Mostraremos que o efeito de *seesaw* que ocorre na gravitação permite que se tenha, por exemplo, um parâmetro B^{-1} muito menor que M_P^2 e ainda assim ter uma partícula com massa M_P . Esse cenário pode ser realizado mediante a redução da massa do modo tensorial mais leve, que é o fantasma.

6.1 *Seesaw* gravitacional com pólos reais

Para termos uma intuição de como funcionaria o mecanismo inspirado no *seesaw* para gravitação, começamos analisando o exemplo mais simples, da gravitação de seis derivadas (6.1). Para este temos uma fórmula fechada para as massas em função dos parâmetros da ação, a saber,

$$m_{2\pm}^2 = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \frac{16}{\kappa^2} B}}{2B}, \quad m_{0\pm}^2 = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{8\sigma_2}{\kappa^2}}}{2\sigma_2}, \quad (6.2)$$

onde $\sigma_1 \equiv 3\alpha + \beta$ e $\sigma_2 = 3A + B$. As quantidades $m_{0\pm}$ e $m_{2\pm}$ podem ser complexas, e ainda assim termos soluções reais para as equações de campo [48, 107]. Não obstante, iniciaremos a discussão sobre a viabilidade do *seesaw* gravitacional pelo caso de pólos reais, onde há um sentido natural falar em hierarquia entre as massas. Por simplicidade, discutiremos apenas o setor de spin-2; o setor escalar pode ser analisado da mesma forma e com os mesmos resultados.

Relembramos que as condições para pólos simples e reais são

$$\beta, B < 0, \quad \text{e} \quad \beta^2 + \frac{16B}{\kappa^2} > 0. \quad (6.3)$$

Nessas circunstâncias, de acordo com (6.2), vale $m_{2+}^2 < m_{2-}^2$, sendo a excitação mais leve um fantasma e a mais massiva um modo normal (não-fantasma) [54]. Usando as Eqs. (6.2) e (6.3) é fácil verificar a existência de uma relação entre β e B no caso especial em que uma das massas é muito menor que a outra, isto é,

$$m_{2+}^2 \ll m_{2-}^2. \quad (6.4)$$

Concretamente, devemos ter $16|B| \ll \kappa^2\beta^2$. Na teoria na qual esta condição se verifica, as massas $m_{2\pm}$ podem ser aproximadas por

$$m_{2+}^2 \approx \frac{4}{\kappa^2|\beta|} \ll m_{2-}^2 \approx \frac{\beta}{B}. \quad (6.5)$$

Como no mecanismo *seesaw* original da física de neutrinos, uma das massas depende, *grosso modo*, de apenas um parâmetro, enquanto que a outra depende de ambos. Ainda, essa relação ocorre de tal maneira que a redução da massa menor implica no aumento da massa maior. Uma diferença fundamental, no entanto, é que para os neutrinos o mecanismo funciona para diminuir a massa menor, quando se aumenta a maior; no caso gravitacional o efeito é aumentar a massa maior, consoante a Eq. (6.5). Isso decorre da presença do parâmetro B (ou, mais geralmente, do parâmetro do termo de seis derivadas) no denominador em (6.2), fazendo com que a massa menor em (6.5) dependa apenas de β enquanto a maior dependa dos dois.

Neste espírito, há duas possibilidades para se ter m_{2-} da ordem da massa de Planck: ter um $|B|$ pequeno ou um $|\beta|$ grande. A primeira opção é a tradicional, já que ela prescreve $\beta \sim 1$ e $B \sim M_P^{-2}$ de tal forma que todas as massas sejam da ordem de M_P . A segunda possibilidade, baseada no mecanismo tipo-*seesaw*, permite que se tenha $|B| \gg M_P^{-2}$ ao mesmo tempo que $m_{2-} \sim M_P$. Evidentemente, ter um $|B|$ grande ainda fornecendo uma massa grande só pode ser alcançado mediante a redução da massa do fantasma, via $\beta \gg 1$. O resultado final, que pode ser depreendido de (6.5) é que a existência de uma excitação com massa muito menor depende apenas dos termos da ação com duas e quatro derivadas, enquanto que o termo de seis derivadas não afeta a presença de uma massa muito menor. *Mutatis mutandis* esses argumentos se aplicam também ao setor escalar. Enfim, termos com seis derivadas não são capazes de produzir um efeito *seesaw* eficiente.

Este resultado pode ser generalizado para teorias polinomiais de ordem arbitrária, mas para tanto faz-se necessária uma demonstração que não dependa explicitamente da solução para os pólos do propagador — o que, diga-se de passagem, não existe em forma fechada para modelos com dez ou mais derivadas. Mostraremos como essa tarefa pode ser levada a cabo para o modelo de oito derivadas e a partir daí é fácil demonstrar para o caso arbitrário.

Consideremos, então, a ação (1.13) com oito derivadas. Podemos escrever as equações para os pólos do propagador na forma

$$\frac{1}{\mu_0^4} k^6 - \frac{1}{\mu_1^2} k^4 + \beta k^2 - \mu_2^2 = 0, \quad (6.6)$$

ou,

$$k^6 - \frac{\mu_0^4}{\mu_1^2} k^4 + \beta \mu_0^4 k^2 - \mu_0^4 \mu_2^2 = 0. \quad (6.7)$$

Omitimos os coeficientes numéricos que dependem do setor de spin, pois eles podem ser absorvidos na definição dos parâmetros. Aqui $\mu_{0,1,2}$ são os parâmetros massivos positivos originários da ação, relacionados aos termos de 2, 6 e 8 derivadas. Em teoria

de cordas, podemos considerar que todos eles decorrem de um mesmo parâmetro α' e portanto têm a mesma ordem de grandeza, digamos,

$$\mu_0^2 \sim \mu_1^2 \sim \mu_2^2 \sim M_P^2. \quad (6.8)$$

Consideraremos que vale esta situação.

As raízes de (6.7) podem ser reais ou complexas e são dadas pela fórmula de Cardano (contudo, não usaremos esse fato, como justificado anteriormente). Consideraremos primeiramente o caso de raízes simples e reais que satisfazem a hierarquia $m_1^2 \ll m_2^2 \sim m_3^2$. Segue, então,

$$k^6 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) k^4 + (m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) k^2 - m_1^2 m_2^2 m_3^2 = 0. \quad (6.9)$$

Usando a relação $m_1^2 \ll m_2^2 \sim m_3^2$, a equação anterior se reduz a

$$k^6 - (m_2^2 + m_3^2) k^4 + m_2^2 m_3^2 k^2 - m_1^2 m_2^2 m_3^2 = 0. \quad (6.10)$$

É imediato verificar a contradição entre (6.7) com (6.8) e (6.10). De acordo com (6.7) tem-se

$$\frac{3\mu_0^4}{\mu_1^2} \sim M_P^2, \quad 3\beta\mu_0^4 \sim M_P^4 \quad \text{e} \quad \mu_0^4 \mu_2^2 \sim M_P^6. \quad (6.11)$$

Contudo, isso é incompatível com a Eq. (6.10), porque esta requer

$$m_2^2 + m_3^2 \sim M_P^2, \quad m_2^2 m_3^2 \sim M_P^4 \quad \text{mas} \quad m_1^2 m_2^2 m_3^2 \ll M_P^6. \quad (6.12)$$

Essa consideração pode ser aplicada para modelos polinomiais de ordem arbitrária, sempre com o mesmo resultado, e vale tanto para o setor tensorial massivo quanto para o escalar. Destarte, podemos chamar o mecanismo de *seesaw* que ocorre em teorias polinomiais como de “*seesaw* fraco”: uma massa maior pode se tornar ainda maior, enquanto que uma massa menor só se torna menor ao usar valores não-naturais para os parâmetros adimensionais da ação. A conclusão central é que os pólos reais do propagador não podem gerar uma massa muito menor para a partícula mais leve do espectro apenas com os coeficientes massivos da ação da ordem da massa de Planck.

6.2 *Seesaw* gravitacional com pólos complexos

Na seção anterior abordamos apenas o caso de *seesaw* para teorias com pólos reais. Obviamente, para quantidades m_i complexas não faz sentido considerar hierarquia entre as “massas”, visto que números complexos não são ordenados. A idéia, no entanto, pode ser estendida também para este contexto, se pensarmos que a motivação original é termos parâmetros massivos grandes na ação resultando em fenomenologia apreciável em baixas energias. Desta forma, podemos definir o mecanismo tipo *seesaw* para pólos complexos como uma forma de termos parâmetros grandes na ação e uma hierarquia grande entre as partes real e imaginária de algum m_i .

Diferentemente da seção anterior, iremos aqui analisar a possibilidade de *seesaw* para o caso geral, e em seguida daremos o exemplo do caso particular de seis derivadas. Como os pólos do propagador são definidos como as raízes de uma equação polinomial como (6.6), do teorema fundamental da álgebra segue que pólos complexos sempre ocorrem em pares conjugados. Seja $m_1 = a + ib$ e $m_{1'} = a - ib$ um tal par. Então, escrevendo a equação para os pólos em termos das raízes, como em (6.9), conclui-se que o coeficiente $\sum_i m_i^2$, formado pela soma de todas as raízes, conterà o termo $2(a^2 - b^2)$. Por sua vez, o coeficiente que envolve os produtos de todas das raízes tomadas duas a duas conterà os termos

$$m_1^2 m_{1'}^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2, \quad (6.13)$$

e

$$m_1^2 m_2^2 + m_{1'}^2 m_2^2 = 2(a^2 - b^2) m_2^2, \quad (6.14)$$

onde m_2^2 é uma terceira raiz arbitrária. Evidentemente, todos os coeficientes serão reais, já que os parâmetros da ação também o são.

Até aqui não há muita diferença para o caso real, exceto que agora as quantidades relevantes são a^2 e b^2 . O último termo, porém, formado pelo produto de todas as raízes, conterà o termo $m_1^2 m_{1'}^2$, dado por (6.13). Isso convertirá o *produto* de todas as raízes em

uma *soma* de quantidades massivas, o que torna inválido o argumento usado na seção anterior para descartar o mecanismo de *seesaw* forte. De fato, pensando no modelo de oito derivadas, discutido anteriormente, é bem possível ter $\mu_0^4 \mu_2^2 \sim M_P^6$ na Eq. (6.11) ao mesmo tempo que na Eq. (6.12) se tem

$$m_1^2 m_1'^2 m_2^2 = (a^4 + b^4 + 2a^2 b^2) m_2^2 \sim M_P^6 \quad (6.15)$$

com $a^2 \ll b^2 \sim M_P^2$ ou $b^2 \ll a^2 \sim M_P^2$.

Isso significa que é possível ter uma forte hierarquia entre as componentes real e imaginária de m_i — com parâmetros massivos grandes na ação. Não obstante, não diremos que isso é um mecanismo de *seesaw* eficiente, uma vez que os efeitos físicos dessa hierarquia não implica uma evasão da supressão da escala de Planck. O motivo é que agora, como discutido no Capítulo 4, a fenomenologia será dominada pela componente *maior*, da ordem de M_P . Com efeito, se $b^2 \ll a^2 \sim M_P^2$, então para todos os efeitos práticos podemos assumir que o par (m_1, m_1') se comporta como um modo degenerado de massa $a \sim M_P$; por outro lado, se $a^2 \ll b^2 \sim M_P^2$ então eles se comportam como um par degenerado taquiônico (caso não muito interessante fisicamente).

Outrossim, esse procedimento prova que não existe uma escolha natural de parâmetros massivos na ação capaz de provocar a redução significativa e *simultânea* das componentes real e imaginária de uma dada “massa” da teoria. Conclui-se que o mecanismo de *seesaw* forte tampouco é eficiente no caso de modelos polinomiais com pólos complexos.

Encerramos esta seção com um exemplo instrutivo, novamente do caso da teoria de seis derivadas (6.1). De acordo com (6.2), a condição para pólos complexos no setor de spin-2 do propagador é $\beta^2 \kappa^2 + 16B < 0$. As “massas” $m_{2\pm}$ podem então ser escritas como $m_{2\pm} = a_2 \mp ib_2$ com

$$a_2^2 = \frac{-\beta + \sqrt{\frac{16|B|}{\kappa^2}}}{4|B|} \quad \text{e} \quad b_2^2 = \frac{\beta + \sqrt{\frac{16|B|}{\kappa^2}}}{4|B|}. \quad (6.16)$$

Podemos classificar os possíveis cenários como se segue.

- Se $16|B|$ for apenas ligeiramente maior que $\beta^2\kappa^2$ então há uma grande hierarquia entre as partes real e imaginária, e m_{2+} e m_{2-} tendem a ser aproximadamente iguais. De fato, se $\beta < 0$ segue que $a_2 \gg b_2$ e ambas excitações se comportam, aproximadamente, como partículas normais de mesma massa, enquanto que $\beta > 0$ fornece $a_2 \ll b_2$ e neste caso temos dois táquions. Se $16|B| \approx \beta^2\kappa^2 \sim M_P^{-2}$, então

$$m_{2\pm}^2 \approx -\frac{8}{\beta\kappa^2} \sim M_P^2. \quad (6.17)$$

Esse valor pode ser diminuído apenas mediante a escolha de $|\beta|$ grande (e, neste caso, $|B|$ grande simultaneamente).

- Se $16|B| \gg \beta^2\kappa^2$ temos um cenário típico do caso complexo no qual há duas “massas” com partes real e imaginária quase iguais. Podemos então, em primeira aproximação, trabalhar com apenas um parâmetro massivo e portanto a única possibilidade para um mecanismo tipo *seesaw* seria a redução deste parâmetro bastante abaixo da escala de Planck. Contudo, vale

$$a_2^2 \approx b_2^2 \approx \sqrt{\frac{1}{\kappa^2|B|}} = \frac{M_P}{\sqrt{2|B|}}. \quad (6.18)$$

Logo, para que $a_2^2, b_2^2 \ll M_P^2$ seja válido, é necessário impor $|B| \gg M_P^{-2}$. Segue que a redução do parâmetro β não diminui a massa efetiva; a única forma de fazê-lo seria aumentar $|B|$ acima de valores “naturais”, em outras palavras, apelar para a condição de *seesaw* fraco.

É interessante notar que, em oposição ao *seesaw* com pólos reais (escolher um $|\beta|$ grande, ver (6.5)), no caso de pólos complexos em geral tem-se uma condição sobre os parâmetros relacionados a derivadas mais altas (neste caso, B). Mencionamos ainda que uma discussão absolutamente análoga se aplica aos modos escalares $m_{0\pm}$.

6.3 Consequências físicas de um *seesaw* gravitacional

Nos dois capítulos anteriores delineamos alguns efeitos que poderiam ser observados caso a fenomenologia do modelo de ordem superior se transpusesse à escala de baixas energias, tais como modificações na força de Newton, medida em experimentos de balança de torção [141, 142]. No caso de pólos complexos, por exemplo, as correções relacionadas às derivadas mais altas assumem a forma de termos oscilantes, que também ocorrem no caso de certas teorias não-locais de gravitação [97]. Motivados por esse tipo de correção, algumas análises de medidas em laboratório foram refeitas com vistas à detecção de oscilações na escala de micrometros [143, 144].

A conclusão central deste capítulo é, no entanto, que a inclusão de termos na ação com derivadas mais altas que quatro não é capaz de gerar um mecanismo *seesaw* gravitacional eficiente. Do ponto de vista físico, isso torna mais difícil a detecção experimental dos efeitos das derivadas mais altas. Por outro lado, é bem sabido que esses modelos normalmente sofrem da instabilidade de Ostrogradsky [180]. A situação da gravitação pode ser diferente [43]; e como derivadas mais altas cumprem importante papel em gravitação quântica e semiclássica, pode fazer sentido considerar que fantasmas existem e, por algum mecanismo ainda desconhecido, não geram um decaimento rápido do vácuo ou outros tipos de instabilidade. Isso poderia estar relacionado com o elevado valor da massa do fantasma [43], que eventualmente não permitiria que uma tal partícula fosse criada do vácuo sem gerar uma imensa densidade de grávitons (da ordem de Planck). Sob essa óptica, é importante que a massa do fantasma mais leve esteja protegida de um mecanismo do tipo *seesaw* se ainda mais derivadas são incluídas na ação (ou se, no espírito da teoria de cordas, consideramos truncagens em ordens mais altas).

Por exemplo, efeitos de um fantasma com massa pequena sobre a estabilidade de soluções cosmológicas clássicas com respeito a perturbações tensoriais foram estudadas

em [43–47, 181, 182], no contexto da gravitação com quatro derivadas. A ausência de um mecanismo de *seesaw* eficiente mostra, portanto, que a proteção devida à escala de Planck, discutida em [43, 45], também deve funcionar em modelos com mais derivadas.

Por sua vez, a massa do escalar mais leve (e, portanto, não-fantasma) também está protegida do *seesaw*. Vale notar que a realização do modelo inflacionário de Starobinsky [145] requer um valor elevado para o coeficiente do termo R^2 [146, 183]. Esse coeficiente reduz a massa do modo escalar de forma considerável, mas isso ocorre sem o mecanismo de *seesaw* forte, ou seja, sem interferência dos termos com mais de quatro derivadas.

Por fim, mencionamos que a ausência de um mecanismo de *seesaw* forte é útil na abordagem proposta em [39, 40] para o problema dos fantasmas em gravitação quântica. Como mencionamos na Introdução, essa idéia consiste em interpretar os termos com derivadas mais altas no mesmo pé que as correções de *loop*, ou seja, como pequenas correções à ação de Einstein-Hilbert. No caso de teorias polinomiais, essa abordagem funcionaria apenas se todos os fantasmas massivos estão no UV distante. A análise levada a cabo aqui mostra que de fato as massas dos fantasmas não podem ser demasiadamente pequenas sem a escolha de coeficientes artificiais na ação.

Epílogo

A construção de uma teoria consistente de gravitação quântica é, sem dúvidas, um dos problemas mais interessantes da física teórica. Teorias de ordem superior locais e não-locais lançam luzes sobre questões provavelmente centrais nesse programa, quais sejam, a renormalizabilidade e unitariedade, e a possibilidade de termos uma teoria de gravitação quântica perturbativa.

É natural, nesse contexto, estudar o limite clássico desses modelos e buscar efeitos observáveis (clássicos ou quânticos). Este último ponto é especialmente relevante, dado que uma das maiores dificuldades da gravitação quântica é a inexistência da contrapartida experimental à teoria, que poderia fornecer indicações do caminho teórico a seguir. Ainda que na gravitação einsteiniana pura os efeitos quânticos estejam restritos a escalas próximas à de Planck, teorias modificadas podem conter uma nova escala de energia, e dados observacionais de astropartículas e astronomia de multi-mensageiros poderiam eventualmente inaugurar a fenomenologia de gravitação quântica do ponto de vista experimental/observacional.

Os resultados desta tese vão ao encontro desse programa, especialmente no que tange os aspectos clássicos de modelos de ordem superior com motivação quântica.

Uma das questões fundamentais nesse âmbito é a capacidade de resolução das singularidades existentes na relatividade geral, que sinalizam a perda de predizibilidade da teoria clássica. Nos Capítulos 2 e 3 desta tese e nos artigos [107–109, 113] abordamos essa questão no regime linear, como uma primeira aproximação para esse complicado problema. Mostramos que o potencial newtoniano modificado é finito na origem para modelos com pelo menos quatro derivadas nos setores de spin-2 e spin-0; e que a métrica associada a uma massa pontual é regular (sem singularidades nos invariantes de curvatura) nos modelos com pelo menos seis derivadas em cada setor. Com esses resultados obtivemos uma caracterização completa dos modelos polinomiais que possuem um limite newtoniano regular.

Além disso, esclarecemos a conjectura que relaciona a renormalizabilidade de um modelo de gravitação de ordem superior com o comportamento de seu potencial clássico [53, 83, 87]. Com efeito, mostramos que a renormalizabilidade de um modelo implica na finitude de seu potencial, e que a super-renormalizabilidade implica em sua regularidade; a recíproca, porém, não é verdadeira, existindo modelos não-renormalizáveis com potenciais finitos e/ou regulares. Ainda, mostramos explicitamente que a não-localidade e/ou a condição de ausência de fantasmas não é necessária (e muito menos suficiente) para que o limite newtoniano seja regular.

Os resultados acerca da regularidade do limite newtoniano podem ser estendidos para a regularidade do colapso de cascas esféricas nulas (ultrarelativísticas). Esse fato foi apontado em [95]. No trabalho [108] mostramos explicitamente que o colapso de uma casca esférica espessa é regular em teorias polinomiais gerais com pelo menos seis derivadas no setor de spin-2. Esse resultado generaliza e refina as considerações de [95], ao considerar os casos de teorias com pólos complexos e/ou degenerados e caracterizar os modelos nos quais o colapso é regular. O colapso de cascas nulas, por sua vez, tem aplicação à possibilidade de formação de mini buracos negros devido à colisão de partículas ultrarelativísticas, em aceleradores por exemplo [94–96].

Ainda, em [108] mostramos que existe uma barreira de massa para a formação de

mini-buracos negros em teorias polinomiais gerais. Esta também é uma generalização de [95, 184] e significa que, nesses modelos, um mini-buraco negro só pode ser formado se sua massa for maior que um certo valor. Trata-se de uma situação diferente da relatividade geral, na qual qualquer massa pode se tornar um buraco negro, bastando que esteja confinada a uma região suficientemente pequena.

Referente à fenomenologia, nos Capítulos 4, 5 e 6 e nos trabalhos [48, 125, 136, 142] discutimos possíveis aplicações de modelos locais e não-locais na detecção de efeitos causados pelas derivadas mais altas. Em particular, focamos suas potenciais consequências para a deflexão da luz e em experimentos de balança de torção. Mostramos que a presença de pólos complexos no propagador induz um comportamento oscilatório no potencial estático que, dependendo da escala, poderia ser medido em laboratório.

Ainda, no trabalho [48] discutimos a deflexão da luz em teorias de ordem superior usando tanto a abordagem clássica quanto a semi-quântica (nos moldes de [120, 126, 130, 131]). Nesse sentido, esclarecemos o limite de aplicabilidade de cada uma delas e apontamos a origem das divergências (notadas, por exemplo, em [126]) entre os resultados provenientes dessas duas técnicas.

O Capítulo 5 e [136] discutem o papel que modificações no setor de spin-0 do propagador de uma teoria podem ter para a deflexão da luz. Mostramos que modos escalares podem ter um efeito indireto nesse fenômeno, ao introduzir uma diferença entre a massa física e a massa kepleriana, que afeta as predições dos ângulos de deflexão.

Finalmente, a possibilidade de contornar a supressão causada pela escala de Planck aos efeitos das derivadas mais altas foi considerada no Capítulo 6 e em [125], onde introduzimos um efeito de *seesaw* gravitacional. Mostramos, contudo, que teorias polinomiais não são capazes de gerar um mecanismo de “*seesaw*” eficiente, e que a única possibilidade de trazer a fenomenologia do modelo para o regime de baixas energias é introduzindo parâmetros massivos com valores não-naturais (ou seja, grandes) na ação. Se, por um lado, isso torna mais difícil a detecção de derivadas mais altas, por outro protege o modelo de instabilidades causadas pelo fantasma massivo de spin-2.

Apêndice A

Demonstração da identidade (2.44)

Neste apêndice demonstraremos que a identidade [103]

$$\sum_i \prod_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j - a_i} = 1 \quad (\text{A.1})$$

é válida para qualquer conjunto $\{a_i\}_i$ de números complexos distintos. No processo usaremos a seguinte identidade básica.

Proposição A. *Para qualquer conjunto de números complexos distintos $\{a_i : i \in I\}$, com $I = \{1, 2, \dots, n\}$, vale*

$$\sum_i (-1)^{n+i} a_i^{n-1} \prod_{\substack{k < j \\ j, k \neq i}} (a_j - a_k) = \prod_{i < j} (a_j - a_i). \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Deve-se, primeiro, reconhecer o membro direito de (A.2) como o determinante da matriz de Vandermonde de ordem n , \mathcal{V}_n :

$$\det \mathcal{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (a_j - a_i). \quad (\text{A.3})$$

Então, fazendo a expansão em cofatores a partir da última linha,

$$\det \mathcal{V}_n = \sum_i (-1)^{n+i} a_i^{n-1} \det \mathcal{M}_i \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_i (-1)^{n+i} a_i^{n-1} \prod_{\substack{k < j \\ j, k \neq i}} (a_j - a_k), \quad (\text{A.5})$$

onde os menores \mathcal{M}_i associados aos elementos (n, i) também são matrizes de Vandermonde e têm seus determinantes calculados usando a famosa identidade (A.3). Isso completa a prova da proposição. \blacksquare

Provada essa identidade, podemos demonstrar a fórmula (A.1). Começamos escrevendo seu membro esquerdo como uma fração:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j - a_i} = \frac{\sum_i \prod_{j \neq i} a_j (a_i - a_j) \prod_{k \neq i, j} (a_j - a_k)}{\prod_{i \neq j} (a_i - a_j)} \equiv \frac{N}{D}. \quad (\text{A.6})$$

Se aplicarmos a relação $a_j(a_i - a_j) = (a_i - a_j)(a_j - a_i) - a_i(a_j - a_i)$ para cada termo $a_j(a_i - a_j)$ no numerador N segue

$$N = \sum_{i, m, C\{k\}} \left[(-a_i)^{n-m-1} \prod_{j=k_1}^{k_m} (a_i - a_j)(a_j - a_i) \prod_{r \neq i, k_1, k_2, \dots, k_m} (a_r - a_i) \prod_{\substack{s, t \neq i \\ s \neq t}} (a_s - a_t) \right], \quad (\text{A.7})$$

onde o somatório é feito sobre todos os índices $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ de elementos, todos os números $m = 0, 1, \dots, n-1$ e sobre todas as possíveis combinações de m índices $k_1, k_2, \dots, k_m \in I$; ainda, a notação empregada subentende as substituições

- para $m = 0$: $\prod_{j=k_1}^{k_m} (a_i - a_j)(a_j - a_i) \mapsto 1$,
- para $m = n-1$: $\prod_{r \neq i, k_1, k_2, \dots, k_m} (a_r - a_i) \mapsto 1$.

A expressão (A.7) pode ser reescrita numa forma mais útil se definimos os conjuntos $K_m = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ se $m > 0$ (com $K_0 = \emptyset$), $Y_{K_m} = \{y_1, \dots, y_{n-m} : y_\lambda \in I \setminus K_m, \text{ com } y_1 < \dots < y_{n-m}\}$, $W_{\lambda, K_m} = Y_{K_m} \setminus \{y_\lambda\}$, e a função de ordenamento

$$f(a_i, a_j) = \begin{cases} a_i - a_j, & \text{se } i < j, \\ a_j - a_i, & \text{se } j < i. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{m, C\{k\}} \sum_{\lambda=1}^{n-m} \left[(-1)^{n-m+\lambda} (-a_{y_\lambda})^{n-m-1} \prod_{j \in K_m} (a_{y_\lambda} - a_j)(a_j - a_{y_\lambda}) \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{r \in W_{\lambda, K_m}} f(a_{y_\lambda}, a_r) \prod_{\substack{s \neq t \\ s, t \neq y_\lambda}} (a_s - a_t) \right]. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

No espírito da Proposição A, para cada m e K_m vale

$$\sum_{\lambda=1}^{n-m} (-1)^{n-m+\lambda} (a_{y_\lambda})^{n-m-1} \prod_{t < s \in W_{\lambda, K_m}} (a_s - a_t) = \prod_{t < s \in Y_{K_m}} (a_s - a_t), \tag{A.10}$$

uma vez que o membro esquerdo pode ser visto como o determinante da matriz de Vandermonde de ordem $n - m$ cujos elementos são tomados do conjunto $\{a_i : i \in I \setminus K_m\}$. Logo, não é difícil verificar que

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{m, C\{k\}} (-1)^{n-m-1} \prod_{s \neq t} (a_s - a_t) \\
&= - \prod_{s \neq t} (a_s - a_t) \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} \\
&= \prod_{s \neq t} (a_s - a_t). \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado para N em (A.6) segue a identidade

$$\sum_i \prod_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j - a_i} = \frac{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = 1. \tag{A.12}$$

Demonstração do teorema 4.1

Neste apêndice demonstramos a generalização do teorema de Teyssandier [122] para a teoria com seis derivadas, Teorema 4.1. A partir daí é imediato estender o teorema para modelos polinomiais arbitrários.

Principiamos mostrando que a condição de calibre $\Gamma_\mu = 0$ pode ser realizada via uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \kappa \xi^\mu(x)$. A transformação da perturbação linearizada lê-se

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}), \quad (\text{B.1})$$

donde $\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) + \eta_{\mu\nu} \xi_{\lambda;\lambda}$. Dado que para o escalar de curvatura vale $R' = R$, é fácil convencer-se que

$$\Gamma_\mu \longrightarrow \Gamma'_\mu = \Gamma_\mu - \left(1 - \frac{\kappa^2 \beta}{4} \square - \frac{\kappa^2 B}{4} \square^2\right) \square \xi_\mu. \quad (\text{B.2})$$

Portanto, se em um dado sistema de coordenadas se tem $\Gamma \neq 0$, a equação diferencial $\Gamma' = 0$ acima define uma transformação que leva a um novo sistema onde vale a condição de calibre generalizada de Teyssandier.

O passo seguinte consiste em provar a proposição

Proposição B. *A solução geral do sistema*

$$\left(1 - \frac{\kappa^2 \beta}{4} \square - \frac{\kappa^2 B}{4} \square^2\right) \left(-\square h_{\mu\nu} + \frac{R}{3\kappa} \eta_{\mu\nu}\right) = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3} \eta_{\mu\nu}\right), \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\kappa^2 \beta}{4} \square - \frac{\kappa^2 B}{4} \square^2\right) \gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\square + \frac{B}{2} \square\right) R_{,\mu} = 0. \quad (\text{B.4})$$

tem a forma

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + (m_{2+}^2 + m_{2-}^2 + \square) \psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (m_{0+}^2 + m_{0-}^2 + \square) \phi, \quad (\text{B.5})$$

onde os campos $h_{\mu\nu}^{(E)}$, $\psi_{\mu\nu}$ e ϕ satisfazem as equações

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} T \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\right), \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \quad \text{onde} \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(E)}, \quad (\text{B.7})$$

$$(m_{2+}^2 + \square)(m_{2-}^2 + \square) \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu}\right), \quad (\text{B.8})$$

$$(m_{2+}^2 + m_{2-}^2 + \square)(\psi_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \square \psi) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$(m_{0+}^2 + \square)(m_{0-}^2 + \square) \phi = \frac{\kappa T}{12}. \quad (\text{B.10})$$

Usamos aqui as notações (4.20) e (4.21).

Demonstração. O primeiro parêntesis em (B.3) pode ser fatorado como

$$-\frac{\kappa^2 B}{4} (m_{2+}^2 + \square)(m_{2-}^2 + \square), \quad (\text{B.11})$$

onde

$$m_{2+}^2 + m_{2-}^2 = \frac{\beta}{B} \quad \text{e} \quad m_{2+}^2 m_{2-}^2 = -\frac{4}{\kappa^2 B}, \quad (\text{B.12})$$

correspondem às definições (4.21). Definindo

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2 B}{4} \left(-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa} R \eta_{\mu\nu}\right), \quad (\text{B.13})$$

a Eq. (B.3) resulta em

$$(m_{2+}^2 + \square)(m_{2-}^2 + \square)\psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad (\text{B.14})$$

que é precisamente (B.8). Em termos do campo $\psi_{\mu\nu}$, a Eq. (B.3) pode ser reescrita como

$$\square^2 \psi_{\mu\nu} + \frac{\beta}{B} \square \psi_{\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} + \frac{R}{3\kappa} \eta_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right). \quad (\text{B.15})$$

Essa equação pode ser posta em uma forma mais útil ao levar em conta as seguintes expressões:

i) Traço de (B.3),

$$\left[1 - \frac{\kappa^2}{4} (\beta + B\square) \square \right] \left(\square h - \frac{4}{3\kappa} R \right) = \frac{\kappa}{6} T. \quad (\text{B.16})$$

ii) Divergência de Γ_μ em (B.4)

$$0 = \left[1 - \frac{\kappa^2}{4} (\beta\square + B\square^2) \right] \gamma_{\mu\rho}{}^{,\mu\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A\square + \frac{B}{2}\square \right) \square R. \quad (\text{B.17})$$

iii) Somando as duas equações anteriores e usando (4.5) segue

$$\frac{R}{3\kappa} = \frac{\kappa}{12} T - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{3} + A\square + \frac{B}{3}\square \right) \square R. \quad (\text{B.18})$$

Inserir, então, (B.18) em (B.15) resulta em

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (\text{B.19})$$

onde definimos um novo campo

$$h_{\mu\nu}^{(E)} = -\square \psi_{\mu\nu} - \frac{\beta}{B} \psi_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{3} + A\square + \frac{B}{3}\square \right) R \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.20})$$

Alternativamente, podemos reescrever (B.20) como

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + (m_{2+}^2 + m_{2-}^2 + \square) \psi_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \left(A + \frac{B}{3} \right) \left(\frac{3\alpha + \beta}{3A + B} + \square \right) R \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.21})$$

O único campo que resta ser definido é o escalar ϕ . Para tanto, fatoramos a fórmula (B.18),

$$\frac{\kappa}{2} \left(A + \frac{B}{3} \right) (m_{0+}^2 + \square) (m_{0-}^2 + \square) R = \frac{\kappa}{12} T, \quad (\text{B.22})$$

onde as quantidades m_{0+}^2 e m_{0-}^2 satisfazem

$$m_{0+}^2 + m_{0-}^2 = \frac{3\alpha + \beta}{3A + B}, \quad (\text{B.23})$$

$$m_{0+}^2 m_{0-}^2 = \frac{2}{\kappa^2(3A + B)}. \quad (\text{B.24})$$

É imediato verificar que a solução deste sistema é a segunda relação em (4.21). Podemos então definir o campo escalar

$$\phi = \frac{\kappa}{2} \left(A + \frac{B}{3} \right) R, \quad (\text{B.25})$$

cujas equação de movimento decorre de (B.22),

$$(m_{0+}^2 + \square) (m_{0-}^2 + \square) \phi = \frac{\kappa}{12} T. \quad (\text{B.26})$$

A solução geral (B.21) do sistema (4.10) pode, pois, ser apresentada sob a forma

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + (m_{2+}^2 + m_{2-}^2 + \square) \psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (m_{0+}^2 + m_{0-}^2 + \square) \phi. \quad (\text{B.27})$$

Até aqui mostramos que a solução geral de (B.3) pode ser expressa como a combinação de três campos independentes que satisfazem as equações de movimento (B.14), (B.19) e (B.26). Para completar a prova da proposição, falta mostrar que os campos tensoriais $h_{\mu\nu}^{(E)}$ e $\psi_{\mu\nu}$ satisfazem as condições de calibre associadas.

Em termos de $\gamma_{\mu\nu}^{(E)} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} h^{(E)} \eta_{\mu\nu}$, a Eq. (B.19) pode ser escrita como

$$\square \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.28})$$

Notemos que condição de calibre $\Gamma_\mu = 0$ é equivalente a $\Omega_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$, com

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \left[1 - \frac{\kappa^2}{4} (\beta \square + B \square^2) \right] \gamma_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + A \square + \frac{B}{2} \square \right) R \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.29})$$

De acordo com a Eq. (B.27) segue, então,

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \left(\frac{\beta}{B} + \square\right) \left(\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\psi\right) + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \square\right) \phi\eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.30})$$

Combinando as Eqs. (B.14), (B.25), (B.28) e (B.30), pode-se verificar que

$$\Omega_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{(E)}. \quad (\text{B.31})$$

Portanto, a condição de calibre (B.4) implica em

$$\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0. \quad (\text{B.32})$$

Isso, juntamente com a equação de movimento (B.19), significa que $h_{\mu\nu}^{(E)}$ é a solução para o mesmo sistema no contexto da relatividade geral linearizada, no calibre de de Donder.

A condição de calibre para o campo $\psi_{\mu\nu}$ pode ser obtida recordando que [ver Eq. (4.5)]

$$\gamma_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} = \frac{1}{2}\square h - \frac{1}{\kappa}R. \quad (\text{B.33})$$

Aplicando (B.27), (B.30) e (B.32) na expressão anterior pode-se mostrar que

$$(m_{2+}^2 + m_{2-}^2 + \square)(\psi_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \square\psi) = 0, \quad (\text{B.34})$$

concluindo a demonstração. ■

O teorema 4.1 segue como um corolário da proposição anterior, a partir da implementação da mudança de variáveis

$$\bar{\Psi}_{\mu\nu} = m_{2+}^2\psi_{\mu\nu}, \quad \Psi_{\mu\nu} = (m_{2-}^2 + \square)\psi_{\mu\nu}, \quad (\text{B.35})$$

$$\bar{\Phi} = m_{0+}^2\phi, \quad \Phi = (m_{0-}^2 + \square)\phi \quad (\text{B.36})$$

nas equações (B.5)-(B.10).

Apêndice C

Forma ϵ - μ das equações de Maxwell no espaço curvo

O índice de refração efetivo, usado nos Capítulos 5 e 6 para a descrição da deflexão gravitacional da luz por um campo fraco, pode ser obtido a partir das equações de Maxwell no espaço curvo. Por completeza, neste apêndice seguimos esta abordagem para dedução da Eq. (5.19). Assumimos como hipótese que a métrica é estática e esfericamente simétrica, o que nos permite escrevê-la na forma isotrópica,

$$g_{00} = g_{00}(r), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}f(r), \quad \text{com } r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (\text{C.1})$$

donde $\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}f^3}$ e $g^{\alpha\alpha} = 1/g_{\alpha\alpha}$.

Se a energia contida no campo eletromagnético é suficientemente pequena, podemos desconsiderar seu efeito na curvatura e tratar o campo gravitacional como um fundo sobre o qual se propaga a luz. As equações de Maxwell no espaço curvo se escrevem, usando acoplamento mínimo, como:

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (\text{C.2a})$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = J^\nu, \quad (\text{C.2b})$$

onde o tensor de Maxwell é

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Como a conexão de Levi-Civita é simétrica, e o tensor de intensidade de campo é anti-simétrico, não é difícil verificar que (C.2a) é idêntica à sua correspondente no espaço plano: $F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0$, e levam às equações de Maxwell homogêneas.

Por sua vez, o par não-homogêneo pode ser reescrito numa forma interessante, às vezes chamada de “forma ε - μ ” [128, 129]. Começamos lembrando que para qualquer campo tensorial $A^{\mu\nu}$ antissimétrico num espaço (pseudo-)riemanniano vale,

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}). \quad (\text{C.4})$$

Podemos, também, definir a corrente como composta por diversas partículas carregadas,

$$J^\nu = \sum_k q_k \int \frac{dx_k^\nu}{d\lambda_k} \frac{\delta^{(4)}(x - x_k)}{\sqrt{-g}} d\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k q_k v_k^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (\text{C.5})$$

onde x_k^ν é a linha-de-mundo da k -ésima partícula, q_k sua carga, e $v_k^\nu \equiv dx_k^\nu/dx^0$. Levando em conta (C.4) e (C.5), podemos reescrever (C.2b) como

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \sum_k q_k v_k^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv j^\nu, \quad (\text{C.6})$$

onde definimos uma “quadricorrente” $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ de sorte que $j^0 = \sum_k q_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv \rho$ e $\mathbf{j} \equiv \sum_k q_k \mathbf{v}_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$.

A componente $\nu = 0$ da equação (C.6) é

$$\partial_\mu (g^{\alpha\mu} g^{\beta 0} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = \sum_i \partial_i (g^{ii} g^{00} F_{i0} \sqrt{-g}) = \sum_i \partial_i (\sqrt{f/g_{00}} E_i) = \rho,$$

que, ao por $\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{f}{g_{00}}}$, torna-se: $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$.

Para a componente espacial i , escrevemos o membro esquerdo de (C.6) como (explicitamos aqui os somatórios subentendidos na convenção de soma de Einstein)

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (g^{\alpha\mu} g^{\beta i} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= \sum_\mu \partial_\mu (g^{\mu\mu} g^{ii} F_{\mu i} \sqrt{-g}) \\
&= \partial_t (g^{00} g^{ii} F_{0i} \sqrt{-g}) + \sum_j \partial_j (g^{jj} g^{ii} F_{ji} \sqrt{-g}) \\
&= \partial_t (\varepsilon E^i) + \sum_j \partial_j \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{f}} F_{ji} \right) \\
&= \partial_t (\varepsilon E^i) - \left[\nabla \times \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{f}} \mathbf{B} \right) \right]^i.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Se definirmos $\mu \equiv \sqrt{\frac{f}{g_{00}}}$, segue: $\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \mathbf{j}$.

Concluimos, portanto, que a equação (C.2b) corresponde às leis de Gauss e Ampère,

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \mathbf{j}, \tag{C.8}$$

num meio opticamente ativo de permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ que dependem da posição e são iguais a $\sqrt{f/g_{00}}$.

Soluções de onda plana para as equações de Maxwell implicam que sua velocidade de propagação é dada por $u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Como o índice de refração n de um meio é definido por $n \equiv 1/u$, segue que a gravitação age como que se munisse o espaço de um índice de refração que depende da distância até o centro da distribuição de matéria (fonte do campo):

$$n(r) = \sqrt{\frac{f(r)}{g_{00}(r)}}. \tag{C.9}$$

Claramente, essa solução só é válida no regime da óptica geométrica, isso é, para campos gravitacionais fracos, que não se alteram significativamente na escala de vários comprimento de onda.

Cálculo do ângulo de deflexão via a lei de Snell-Descartes

Mostramos, agora, como a lei de Snell-Descartes pode ser usada para calcular o ângulo de deflexão. O esquema que seguimos foi proposto em [129], com vistas ao cômputo de θ no contexto da relatividade geral, com correções de ordem arbitrária em G . Utilizamos este método apenas em primeira ordem, em concordância com as soluções que temos.

Com base nas definições da Figura D.1 temos, pela lei de Snell-Descartes,

$$\begin{aligned}
 n(r)\text{sen}\theta &= n(r + dr)\text{sen}(\theta + d\varphi) \\
 &= \left[n(r) + \frac{dn(r)}{dr} dr \right] [\text{sen}\theta + \cos\theta d\varphi] \\
 &= n(r)\text{sen}\theta + n(r) \cos\theta d\varphi + \text{sen}\theta \frac{dn(r)}{dr} dr,
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

donde

$$d\varphi = -\frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \text{tg}\theta dr. \tag{D.2}$$

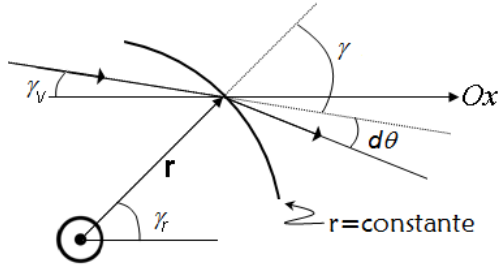


Figura D.1: Refração da luz por uma casca esférica de raio r . $\gamma_V(\theta_r)$ é o ângulo entre o vetor velocidade e o eixo dos x . Ainda, $\gamma = \gamma_V + \gamma_r$, e $d\theta$ é a variação de γ_V devido à refração.

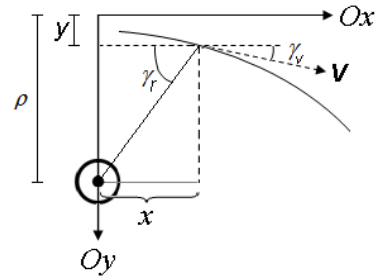


Figura D.2: Parametrização da trajetória do raio de luz. O raio é caracterizado pelo parâmetro de impacto ρ , um deslocamento $y(x)$ do caminho retilíneo, e um ângulo de deflexão local $\rho(x) = \gamma_V$.

O ângulo de deflexão é $\int_{\mathcal{C}} d\theta$, onde \mathcal{C} é o caminho seguido pelo raio de luz. Usaremos a parametrização desta trajetória segundo o proposto na Figura D.2, escrevendo $y = y(x)$. Da Figura D.2 seguem as seguintes relações:

$$r = \sqrt{x^2 + [\rho - y(x)]^2} \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{x - \rho y' + yy'}{r}, \quad (\text{D.3})$$

$$\text{tg}\gamma_r = \frac{\rho - y(x)}{x}, \quad \text{tg}\gamma_V = \frac{dy/dt}{dx/dt} = y', \quad (\text{D.4})$$

$$\text{tg}\gamma = \text{tg}(\gamma_r + \gamma_V) = \frac{\rho - y(x) + xy'}{x - \rho y' + yy'}, \quad \text{tg}\theta = \text{tg}\gamma_V = y', \quad (\text{D.5})$$

onde a linha representa a derivação com respeito a x . A equação (D.2) pode ser escrita então como:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{rn(r)} \frac{dn(r)}{dr} [xy' - y(x) + \rho]. \quad (\text{D.6})$$

Podemos ainda assumir¹ que a expansão de $\frac{1}{n} \frac{dn}{dr}$ em potências de κ principia no termo de ordem 2. Então, a integração de (D.6) fornece, em $O(G)$, o ângulo de deflexão

¹Vejamos o que ocorreria caso $y(x)$ fosse de ordem zero em κ (aqui $\kappa^2 = 32\pi G$, como no Capítulo 4). Por um lado, a equação (D.6) implicaria que o primeiro termo da expansão de θ seria proporcional a κ^2 . Contudo, a segunda equação de (D.5) pode ser escrita como $y(x) = \int_{-\infty}^x \text{tg}\theta(\bar{x})d\bar{x}$; sendo θ de ordem κ^2 , y também seria proporcional a κ^2 — em flagrante contradição à hipótese $y \propto \kappa^0$. O

sofrido por um raio de luz que vem desde o infinito até o ponto x da trajetória:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{\rho}{rn(r)} \frac{dn(r)}{dr} d\bar{x}, \quad r = \sqrt{\bar{x}^2 + \rho^2}. \quad (\text{D.7})$$

Para calcular a deflexão sofrida por um raio de luz rasante, por exemplo, ao Sol, consideramos que o seu campo gravitacional pode ser aproximado por aquele de uma partícula pontual de mesma massa M . A condição de rasante significa que o parâmetro de impacto (ou distância de maior aproximação) é o raio R do Sol. Como a medida da deflexão em geral é feita na Terra, teríamos que integrar \bar{x} até o equivalente à órbita da Terra. Contudo, para todos os efeitos práticos podemos tomar $x = \infty$ uma vez que a curvatura aqui é muito pequena.

absurdo claramente ocorre para qualquer dependência de y em κ . A comparação dos coeficientes das expansões força-nos, pois, a tomar $y(x) \equiv 0$.

Bibliografia

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Freeman (1973).
- [2] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*. Nova Iorque: Academic Press (1967).
- [3] T. Padmanabhan, *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press (2010).
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Nova Iorque: John Wiley and Sons, Inc. (1972).
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press (1995).
- [6] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 2: Modern Applications*. Cambridge: Cambridge University Press (1995).
- [7] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*. Nova Iorque: McGraw-Hill (1980).
- [8] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Reading: Addison-Wesley (1995).

- [9] L. Rosenfeld, *Ann. der Physik* **5**, 113 (1930).
- [10] L. Rosenfeld, *Zeitschrift für Physik* **65**, 589 (1930).
- [11] D. I. Blokhintsev, F. M. Gal'perin, *Pod Znamenem Marxisma* **6**, 147 (1934).
- [12] M. P. Bronstein, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **9**, 140 (1936).
- [13] C. Rovelli, *in*: V. G. Gurzadian, R. T. Jantzen, R. Ruffini (editores), *The Ninth Marcel Grossmann Meeting*, pp. 742-768. Singapura: World Scientific (2002), arXiv:gr-qc/0006061.
- [14] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *in*: L. Witten (editor), *Gravitation: An Introduction to Current Research*, p. 227. Nova Iorque: Wiley (1962).
- [15] B. DeWitt, *in*: Gauthier-Villars (editor), *Conférence internationale sur les théories relativistes de la gravitation*. Varsóvia: Editions Scientifiques de Pologne (1964).
- [16] B. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*. Nova Iorque: Wiley (1965).
- [17] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 30 (1967).
- [18] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **20**, 69 (1974).
- [19] S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, *Phys Rev D* **10**, 401 (1974).
- [20] S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, *Phys Rev D* **10**, 411 (1974).
- [21] M. H. Goroff, A. Sagnotti, *Nucl. Phys. B* **266**, 709 (1986).
- [22] N. D. Birell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge: Cambridge University Press (1982).
- [23] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*. Bristol: IOP Publishing (1992).

- [24] I. L. Shapiro, *Class. Quant. Grav.* **25**, 103001 (2008), arXiv:0801.0216.
- [25] R. Utiyama, B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.* **3**, 608 (1962).
- [26] H. Weyl, *Space-Time-Matter*. Nova Iorque: Dover (1952).
- [27] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press (1924).
- [28] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [29] B. L. Giacchini, *Limite para as constantes de acoplamento da gravitação de ordem superior*, dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: CBPF (2015).
- [30] R. J. Rivers, *Nuovo Cimento* **34**, 387 (1964).
- [31] R. P. Woodard, *Scholarpedia* **10**, 32243 (2015).
- [32] M. Veltman, *Physica* **29**, 186 (1963).
- [33] E. T. Tomboulis, *Phys. Lett. B* **70**, 361 (1977).
- [34] E. T. Tomboulis, *Phys. Lett. B* **97**, 77 (1980).
- [35] E. T. Tomboulis, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1173 (1984).
- [36] A. Salam, J. Strathdee, *Phys. Rev. D* **18**, 4480 (1978).
- [37] I. Antoniadis, E. T. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33**, 2756 (1986).
- [38] D. A. Johnston, *Nucl. Phys.* **B297**, 721 (1988).
- [39] J. Z. Simon, *Phys. Rev. D* **41**, 3720 (1990).
- [40] L. Parker, J. Z. Simon, *Phys. Rev. D* **47**, 1339 (1993), arXiv:gr-qc/9211002.
- [41] G. Dvali, S. Folkerts, C. Germani, *Phys. Rev. D* **84**, 024039 (2011), arXiv:1006.0984;

- [42] G. Dvali, C. Gomez, *Fortschr. Phys.* **61**, 742 (2013), arXiv:1112.3359.
- [43] J. C. Fabris, A. M. Pelinson, F. de O. Salles, I. L. Shapiro, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02**, 019 (2012), arXiv:1112.5202.
- [44] F. de O. Salles, I. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **89**, 084054 (2014); idem, **90**, 129903(E) (2014), arXiv:1401.4583.
- [45] I. L. Shapiro, A. M. Pelinson, F. de O. Salles, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1430034 (2014), arXiv:1410.2581.
- [46] P. Peter, F. de O. Salles, I. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **97**, 064044 (2018), arXiv:1801.00063.
- [47] F. de O. Salles, I. L. Shapiro, *Universe* **4**, 91 (2018), arXiv:1808.09015.
- [48] A. Accioly, B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **96**, 104004 (2017), arXiv:1610.05260.
- [49] B. Zwiebach, *Phys. Lett. B* **156**, 315 (1985).
- [50] S. Deser, A. N. Redlich, *Phys. Lett. B* **176**, 350 (1986).
- [51] A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **176**, 92 (1986).
- [52] A. L. Maroto, I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **414**, 34 (1997), arXiv:hep-th/9706179.
- [53] I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **744**, 67 (2015), arXiv:1502.00106.
- [54] M. Asorey, J. L. López, I.L. Shapiro, *Int. Journ. Mod. Phys. A* **12**, 5711 (1997), arXiv:hep-th/9610006.
- [55] L. Modesto, I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **755**, 279 (2016), arXiv:1512.07600.
- [56] L. Modesto, *Nucl. Phys. B* **909** 584 (2016), arXiv:1602.02421.

- [57] A. Salvio, A. Strumia, *J. High Energ. Phys.* **06**, 080 (2014), arXiv:1403.4226.
- [58] D. Anselmi, *J. High Energ. Phys.* **1802**, 141 (2018), arXiv:1801.00915.
- [59] D. Anselmi, M. Piva, *J. High Energ. Phys.* **1811**, 021 (2018), arXiv:1806.03605.
- [60] D. Anselmi, *Class. and Quantum Grav.* **36**, 065010 (2019), arXiv:1809.05037.
- [61] T. D. Lee, G. C. Wick, *Nucl. Phys. B* **9**, 209 (1969).
- [62] T. D. Lee, G. C. Wick, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).
- [63] R. E. Cutkosky, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne, *Nucl. Phys. B* **12**, 281 (1969).
- [64] H. Yamamoto, *Prog. Theor. Phys.* **42**, 707 (1969).
- [65] H. Yamamoto, *Prog. Theor. Phys.* **44**, 272 (1970).
- [66] H. Yamamoto, K. Kudo, *Prog. Theor. Phys.* **53**, 275 (1975).
- [67] M. Raidal, H. Veermäe, *Nucl. Phys. B* **916**, 607 (2017), arXiv:1611.03498.
- [68] D. Anselmi, M. Piva, *J. High Energ. Phys.* **1706**, 066 (2017).
- [69] J. F. Donoghue, G. Menezes, *Massive poles in Lee-Wick quantum field theory*, arXiv:1812.03603.
- [70] G. V. Efimov, *Theor. Math. Phys.* **2**, 217 (1970).
- [71] G. V. Efimov, *Nonlocal Interactions of Quantized Fields*, Moscow: Nauka, 1977 (em russo).
- [72] V. A. Alebastrov, G. V. Efimov, *Commun. Math. Phys.* **31**, 1 (1973).
- [73] V. A. Alebastrov, G. V. Efimov, *Commun. Math. Phys.* **38**, 11 (1974).

- [74] N. V. Krasnikov, *Theor. Math. Phys.* **73**, 1184 (1987) [*Teor. Mat. Fiz.* **73**, 235 (1987)].
- [75] Y. V. Kuz'min, *Sov. J. Nucl. Phys.* **50**, 1011 (1989) [*Yad. Fiz.* **50**, 1630 (1989)].
- [76] A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **363**, 223 (1995), hep-th/9509050.
- [77] E. T. Tomboulis, *Superrenormalizable gauge and gravitational theories*, hep-th/9702146; idem, *Phys. Rev. D* **92**, 125037 (2015), arXiv:1507.00981; idem, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1540005 (2015).
- [78] T. Biswas, A. Mazumdar, W. Siegel, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0603**, 009 (2006), arXiv:hep-th/0508194.
- [79] L. Modesto, *Phys. Rev. D* **86**, 044005 (2012), arXiv:1107.2403.
- [80] G. Calcagni, *Universe* **2018**, 95 (2018), arXiv:1809.04292
- [81] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.* **108** 031101 (2012), arXiv:1110.5249.
- [82] S. Talaganis, T. Biswas, A. Mazumdar, *Class. Quantum Grav.* **32** 215017 (2015), arXiv:1412.3467.
- [83] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, R. Turcati *Int. J. Mod. Phys. D* **22** (2013) 1342015.
- [84] H. Lü, A. Perkins, C. N. Pope, K. S. Stelle, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 171601 (2015), arXiv:1502.01028.
- [85] H. Lü, A. Perkins, C. N. Pope, K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **92**, 124019 (2015), arXiv:1508.00010.
- [86] B. Holdom, *Phys. Rev. D* **66**, 084010 (2002), arXiv:hep-th/0206219.

- [87] L. Modesto, T. de Paula Netto, I. L. Shapiro, *J. High Energ. Phys.* **1504**, 098 (2015), arXiv:1412.0740.
- [88] C. Bambi, L. Modesto, Y. Wang, *Phys. Lett. B* **764** 306 (2017), arXiv:1611.03650.
- [89] Y. Zhang, Y. Zhu, L. Modesto, C. Bambi, *Eur. Phys. J. C* **75**, 96 (2015), arXiv:1404.4770.
- [90] Y. D. Li, L. Modesto, L. Rachwał, *J. High Energ. Phys.* **1512**, 173 (2015), arXiv:1506.08619.
- [91] Y. S. Myung, Y. J. Park, *The origin of regular Newtonian potential in infinite derivative gravity*, arXiv:1709.04587.
- [92] L. Buoninfante, A. S. Koshelev, G. Lambiase, J. Marto, A. Mazumdar, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1806**, 014 (2018), arXiv:1804.08195.
- [93] J. Boos, *Int. J. Mod. Phys. D* **27**, 1847022 (2018), arXiv:1804.00225.
- [94] V. P. Frolov, A. Zelnikov, T. de Paula Netto, *J. High Energ. Phys.* **1506**, 107 (2015), arXiv:1504.00412.
- [95] V. P. Frolov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 051102 (2015), arXiv:1505.00492.
- [96] V. P. Frolov, A. Zelnikov, *Phys. Rev. D* **93**, 064048 (2016), arXiv:1509.03336.
- [97] J. Edholm, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, *Phys. Rev. D* **94**, 104033 (2016), arXiv:1604.01989.
- [98] A. Koshelev, J. Marto, A. Mazumdar, *Phys. Rev. D* **98**, 064023 (2018), arXiv:1803.00309.
- [99] J. Boos, V. P. Frolov, A. Zelnikov, *Phys. Rev. D* **97**, 084021 (2018), arXiv:1802.09573.

- [100] L. Buoninfante, A. S. Koshelev, G. Lambiase, A. Mazumdar, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1809**, 034 (2018), arXiv:1802.00399.
- [101] E. Kilicarslan, *Phys. Rev. D* **98**, 064048 (2018), arXiv:1808.00266.
- [102] K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353.
- [103] I. Quandt, H.-J. Schmidt, *Astron. Nachr.* **312**, 97 (1991), arXiv:gr-qc/0109005.
- [104] P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60**, 478 (1973).
- [105] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, 7th ed., editado por A. Jeffrey e D. Zwillinger. San Diego: Academic Press (2007).
- [106] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge: Cambridge Academic Press (1944).
- [107] B. L. Giacchini, *Phys. Lett. B* **766**, 306 (2017), arXiv:1609.05432.
- [108] B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, *Eur. Phys. J. C* **79**, 217 (2019), arXiv:1806.05664.
- [109] B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, *Universe* **2018**, 140 (2018).
- [110] V. P. Frolov, I. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **80**, 044034 (2009), arXiv:0907.1411.
- [111] W. Nelson, *Phys. Rev. D* **82**, 104026 (2010), arXiv:1010.3986.
- [112] J. Boos, V. P. Frolov, A. Zelnikov, *Phys. Lett. B* **782**, 688 (2018), arXiv:1805.01875.
- [113] B. L. Giacchini, T. de Paula Netto, *Effective delta sources and regularity in higher-derivative and ghost-free gravity*, arXiv:1809.05907.
- [114] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Nova Iorque: McGraw-Hill (1976).

- [115] E. L. Lima *Curso de Análise, vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA (2015).
- [116] G. Calcagni, L. Modesto, G. Nardelli, *J. High Energ. Phys.* **1805**, 087 (2018), arXiv:1803.00561.
- [117] G. Calcagni, L. Modesto, G. Nardelli, *Nonperturbative spectrum of nonlocal gravity*, arXiv:1803.07848.
- [118] N. E. J. Bjerrum-Bohr, B. R. Holstein, L. Planté, P. Vanhove, *Phys. Rev. D* **91**, 064008 (2015), arXiv:1410.4148.
- [119] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue, B. R. Holstein, L. Planté, P. Vanhove, *J. High Energ. Phys.* **2016**, 117 (2016), arXiv:1609.07477.
- [120] F. Berends, R. Gastmans, *Ann. Phys.* **98**, 225 (1976).
- [121] I. T. Drummond, S. J. Hathrell, *Phys. Rev. D* **22**, 343 (1980).
- [122] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **6**, 219 (1989).
- [123] C. Xu, G. F. R. Ellis *Class. Quantum Grav.* **8**, 1747 (1991).
- [124] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **9**, 2191 (1992).
- [125] A. Accioly, B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, *Eur. Phys. J. C* **77**, 540 (2017), arXiv:1604.07348.
- [126] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Giacchini, W. Herdy, *Phys. Rev. D* **91**, 125009 (2015), arXiv:1506.00270.
- [127] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (1974).
- [128] A. P. Lightman, D. L. Lee, *Phys. Rev. D* **8**, 364 (1973).
- [129] E. Fischbach, B. S. Freeman, *Phys. Rev. D* **22**, 2950 (1980).

- [130] R. Delbourgo, P. Phocas-Cosmetatos, *Phys. Lett. B* **41**, 533 (1972).
- [131] R. R. Caldwell, D. Grin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 031301 (2008), arXiv:astro-ph/0606133.
- [132] G. W. Gibbons, M. C. Werner, *Class. Quantum Grav.* **25**, 235009 (2008), arXiv:0807.0854.
- [133] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono, T. Kitamura, H. Asada *Phys. Rev. D* **94**, 084015 (2016), arXiv:1604.08308.
- [134] T. Ono, A. Ishihara, H. Asada *Phys. Rev. D* **96**, 104037 (2017), arXiv:1704.05615.
- [135] A. Accioly, A. D. Azeredo, E. C. de Rey Neto, H. Mukai, *Braz. J. Phys.* **28**, 2 (1998).
- [136] B. L. Giacchini, I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **780**, 54 (2018), arXiv:1801.08630.
- [137] D. E. Lebach, B. E. Corey, I. I. Shapiro, M. I. Ratner, J. C. Webber, A. E. E. Rogers, J. L. Davis, T. A. Herring, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1439 (1995).
- [138] E. Fomalont, S. Kopeikin, G. Lanyi, J. Benson, *Astrophys. J.* **699**, 1395 (2009), arXiv:0904.3992.
- [139] B. F. Jones, *Astron. J.* **81**, 455 (1976).
- [140] F. Schmeidler, *Astron. Nachr.* **306**, 71 (1985).
- [141] D. J. Kapner, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 021101 (2007).
- [142] B. L. Giacchini, *in*: M. Bianchi, R. T. Jantzen, R. Ruffini (Eds.), *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting*, pp. 1340-1345. Singapura: World Scientific, 2017, arXiv:1612.01823.
- [143] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **95**, 084050 (2017), arXiv:1611.07293.

- [144] I. Antoniou, L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **96**, 104002 (2017), arXiv:1708.02117.
- [145] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [146] A. A. Starobinsky, *Sov. Astron. Lett.* **9**, 302 (1983).
- [147] E. V. Gorbar, I. L. Shapiro, *J. High Energ. Phys.* **02**, 021 (2003), arXiv:hep-ph/0210388.
- [148] E. V. Gorbar, I. L. Shapiro, *J. High Energ. Phys.* **06**, 004 (2003), arXiv:hep-ph/0303124.
- [149] S. Deser, R. P. Woodard, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 111301 (2007), arXiv:0706.2151.
- [150] M. Maggiore, *Fundam. Theor. Phys.* **187**, 221 (2017), arXiv:1606.08784.
- [151] M. Maggiore, E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, M. Maggiore, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1803**, 002 (2018), arXiv:1712.07066.
- [152] E. Pechlaner R. Sexl, *Commun. Math. Phys.* **2**, 165 (1966).
- [153] S. Capozziello, V. F. Cardone, A. Troisi, *Phys. Rev. D* **73**, 104019 (2006), arXiv:astro-ph/0604435.
- [154] T. Clifton, *Phys. Rev. D* **77**, 024041 (2008), arXiv:0801.0983.
- [155] M. Lubini, C. Tortora, J. Näf, Ph. Jetzer, S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1834 (2011), arXiv:1104.2851.
- [156] Ch. P. L. Berry, J. R. Gair, *Phys. Rev. D* **83**, 104022 (2011), arXiv:1104.0819; Erratum: *Phys. Rev. D* **85**, 089906 (2012).
- [157] A. Stabile, An. Stabile, *Phys. Rev. D* **85**, 044014 (2012), arXiv:1108.4721.
- [158] H. Liu, X. Wang, H. Li, Y. Ma, *Eur. Phys. J. C* **77**, 723 (2017), arXiv:1508.02647.

- [159] B. M. Barker, S. N. Gupta, R. D. Haracz, *Phys. Rev.* **149**, 1027 (1966).
- [160] D. Boccaletti, V. de Sabbata, C. Gualdi, P. Fortini, *Nuovo Cim. A* **48**, 58 (1967).
- [161] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue, B. R. Holstein, L. Planté, P. Vanhove, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 061301 (2015), arXiv:1410.7590.
- [162] D. Bai, Y. Huang, *Phys. Rev. D* **95**, 064045 (2017), arXiv:1612.07629.
- [163] M. D. Scadron, *Advanced Quantum Theory*. Singapura: World Scientific Publishing (2007).
- [164] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton: Princeton University Press (2003).
- [165] E. Guadagnini, *Phys. Lett. B* **548**, 19 (2002), arXiv:gr-qc/0207036.
- [166] A. Einstein, *Ann. Phys. (Berl.)* **35**, 898 (1911).
- [167] H.-J. Schmidt, *Class. Quantum Grav.* **7**, 1023 (1990).
- [168] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge: Cambridge University Press (1993).
- [169] S. Capozziello, A. Stabile, A. Troisi, *Phys. Lett. B* **686**, 79 (2010), arXiv:1002.1364.
- [170] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **81**, 047501 (2010), arXiv:0911.3401.
- [171] J. Alsing, E. Berti, C. M. Will, H. Zaglauer, *Phys. Rev. D* **85**, 064041 (2012), arXiv:1112.4903.
- [172] D. Borika, P. Jovanović, V. Borika Jovanović, A. F. Zakharov *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 050 (2013), arXiv:1311.1404.

- [173] S. Capozziello, D. Borka, P. Jovanović, V. Borka Jovanović, *Phys. Rev. D* **90**, 044052 (2014), arXiv:1408.1169.
- [174] B. Whitt, *Phys. Lett.* **145B**, 176 (1984).
- [175] D. Wands, *Class. Quantum Grav.* **11**, 269 (1994), arXiv:gr-qc/9307034.
- [176] H. A. Buchdahl, *J. Austral. Math. Soc.* **1**, 99 (1959).
- [177] B. P. Abbott *et al.*, *Astrophys. J.* **848**, L12 (2017), arXiv:1710.05833.
- [178] M. G. Aartsen *et al.* [Colaborações: IceCube, Fermi-LAT, MAGIC, AGILE, ASAS-SN, HAWC, H.E.S.S., INTEGRAL, Kanata, Kiso, Kapteyn, Liverpool Telescope, Subaru, Swift NuSTAR, VERITAS e VLA/17B-403], *Science* **361**, 1378 (2018), arXiv:1807.08816.
- [179] M. G. Aartsen *et al.* [IceCube Collaboration], *Science* **361**, 147 (2018), arXiv:1807.08794.
- [180] R. P. Woodard, *Lect. Notes Phys.* **720**, 403 (2007), arXiv:astro-ph/0601672.
- [181] V. Müller, H.-J. Schmidt, A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **202**, 198 (1988).
- [182] M. M. Ivanov, A. A. Tokareva, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1612**, 018 (2016), arXiv:1610.05330.
- [183] S. V. Ketov, A. A. Starobinsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1208**, 022 (2012), arXiv:1203.0805.
- [184] V. P. Frolov, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B* **106**, 307 (1981).