

Defesa de Doutorado

Arcos Gravitacionais na Escala Galáctica: Modelagem Analítica e Seções de Choque



Candidata: Vanessa Pacheco de Freitas¹

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
como requisito parcial para obtenção do Grau Doutora em Ciências Físicas*

Orientador: Dr. Martín Makler¹

Co-Orientador: Dr. Habib Salomón Dúmet Montoya²

¹Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

²Universidade Federal do Rio de Janeiro - Campus Macaé

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq e da FAPERJ

Rio de Janeiro, Fevereiro de 2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais e meu irmão, que sempre foram minha maior inspiração e me apoiaram em todas as minhas escolhas.

Aos meus orientadores Martín Makler e Habib Montoya pelos ensinamentos, pelo suporte e por terem me guiado nesses dois anos de projeto. E aos colegas de grupo por toda ajuda: Clécio De Bom, Gabriel Caminha, Philipe Mota e Iruatã Souza.

À formidável Patota: Cláudia Buss, Josephine Rua, Ana Bárbara Cavalcante, Anna Paula Bacalhau, Arthur Scardua, Jaime Ferreira, Cinthya Blois e Maria Elidaiana Pereira. Para os que ficam, sempre lembrem do mantra “Está acabando”!

Aos demais amigos do CBPF, em especial Fábio Lucio Alves, Ivana Cavalcanti, Breno Giacchini, Grecia Iriarte e Daniela Souza.

À minha mentora Mariana Penna-Lima. O programa “Mentoria para Mulheres da Física e da Astronomia” deveria expandir para todo o planeta.

À Eduardo Valadão, meu primeiro aluno de PROVOC e uma das pessoas mais importantes do meu doutorado, que garantiu que eu tivesse motivação suficiente para continuar.

Agradeço às minhas fantásticas alunas de PROVOC, Bárbara Cordolino e Vitória Nascimento que contribuíram tanto para o meu crescimento como orientadora. Espero que vocês continuem com essa empolgação por ciência e alcancem todos os seus objetivos.

Aos amigos de Campinas, que mesmo com a distância continuaram presentes.

Ao Dr. Michel Dias, que garantiu minha saúde mental ao longo de todo esse processo.

Aos Professores Santiago Bergliaffa e José Salim, pela oportunidade de ter trabalhado com vocês.

À Sônia Ferreira, que é a pessoa mais engajada com divulgação científica que já conheci e que me permitiu ter os momentos mais agradáveis dentro do instituto.

Aos funcionários e demais colegas do CBPF. Em especial Elisete dos Anjos e Luciana Silva.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), pelo suporte financeiro durante o programa de doutorado.

Resumo

Arcos Gravitacionais na Escala Galáctica: Modelagem Analítica e Seções de Choque.

Como mostrado nos últimos anos, o perfil de densidade de massa de galáxias elípticas é surpreendente perto de isotérmico, em particular em escalas relevantes para lenteamento forte. Modelos Singulares Isotérmicos permitem a obtenção de soluções analíticas para arcos gravitacionais, que podem ser empregadas em diversas aplicações, como no cálculo da seção de choque de magnificação para fontes finitas. Soluções analíticas também são úteis para interpretar e testar a precisão de outros métodos. Mostraremos as soluções para arcos originados de fontes circulares e elípticas que serão utilizadas para computar propriedades geométricas dos arcos (como o comprimento, largura, área e centro de curvatura) em formas fechadas. Dessas soluções, derivaremos as seções de choque de magnificação e formação de arcos, que podem ser utilizadas para prever a abundância de fontes distantes e arcos, respectivamente. Para fontes circulares, várias expressões adquirem uma forma analítica simples e é possível obter uma solução explícita para as seções de choque, para fontes de tamanhos arbitrários em posições arbitrárias. Além disso, obtemos soluções perturbativas para fontes pequenas. Nossos resultados para fontes circulares e elípticas reproduzem os resultados obtidos na literatura para fontes infinitesimais e mostram explicitamente o efeito de fontes finitas nas seções de choque. Nossa abordagem abre a perspectiva de estudos similares utilizando lentes mais gerais, além de suas aplicações a problemas práticos na estatística de arcos.

Palavras-chave: lenteamento forte, esfera isotérmica singular, modelagem analítica.

Abstract

Gravitational Arcs on Galactic Scales: Analytic Solutions and Cross Sections

As has been shown in recent years, the total mass density profile of elliptical galaxies is surprisingly close to isothermal, in particular on the scales relevant for Strong Lensing. Singular Isothermal models allow one to obtain analytical solutions for gravitational arcs, which can be employed in several applications, such as computing the magnification cross section for finite sources. Analytical solutions are also useful to interpret and test the accuracy of different methods. We will show the solutions for arcs originated from circular and elliptical sources, which will be used to compute geometrical properties of the arcs (such as length, width, area and curvature center) in closed form. From these solutions we derive the arc formation and magnification cross sections, which can be used to predict the abundance of distant sources and arcs, respectively. For circular sources, several expressions take a simple analytic form and it is possible to obtain an explicit solution for the cross sections, for arbitrary source sizes in arbitrary positions. In addition, we obtain perturbative solutions for small sources. Our results for circular and elliptical sources recover the results from the literature for infinitesimal sources and show explicitly the effect of finite sources on the cross section. Our approach opens the perspective of similar studies using more generic lenses, besides their application to practical problems in arc statistics.

Keywords: strong lensing, singular isothermal sphere, analytic solutions.

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
1.1 Revisitando a História do Lenteamento Gravitacional	3
1.1.1 Anos Iniciais	3
1.1.2 Deflexão da Luz na Relatividade Geral	4
1.1.3 Primeiras Observações	5
1.2 Regimes do Lenteamento Gravitacional e Aplicações	6
1.2.1 Lenteamento Forte: Macrolenteamento	7
1.2.2 Lenteamento Forte: Microlenteamento e Mililenteamento	8
1.2.3 Lenteamento Fraco	9
1.2.4 Lenteamento para Campos Fortes	10
2 Conceitos Gerais	13
2.1 Distância de Diâmetro Angular	14
2.2 Ângulo de Deflexão	17
2.3 Equação da Lente	18
2.4 Distribuição Superficial de Massa	20
2.5 Potencial Efetivo da Lente	21
2.6 Mapeamento	22
2.7 Alguns Modelos de Lentes	26
2.7.1 Lente Pontual	26
2.7.2 Lente com Simetria Axial	28
2.7.3 Modelo de Navarro-Frenk-White	30
2.7.4 Modelos Elípticos e Pseudo-Elípticos	31
2.7.5 Modelos Isotérmicos	31
2.7.6 Formalismo Perturbativo	32
3 Esfera Isotérmica Singular	33
3.1 Funções Básicas do Lenteamento pelo Modelo da SIS	33
3.2 Fonte Pontual	35
3.3 Fonte Circular	36
3.3.1 “Espinha Dorsal” das Imagens	37

3.3.2	Formação de Imagens	39
3.4	Fonte Elíptica	41
3.4.1	Parametrização da Elipse	43
3.4.2	Formação de Imagens	43
4	Propriedades dos Arcos	49
4.1	Extremidades e Centro dos Arcos	49
4.1.1	Fonte Circular	51
4.1.2	Fonte Elíptica	52
4.2	Comprimento	53
4.2.1	Fonte Circular	57
4.2.2	Fonte Elíptica	62
4.3	Área	69
4.4	Largura	70
4.4.1	Fonte Circular	71
4.4.2	Fonte Elíptica	76
5	Seção de Choque	83
5.1	Seção de Choque para Fontes Circulares	84
5.1.1	Seção de Choque Infinitesimal - σ_λ	85
5.1.2	Seção de Choque de Magnificação - σ_μ	86
5.1.3	Seção de Choque para Formação de Arcos - $\sigma_{L/W}$	92
5.2	Seção de Choque para Fontes Elípticas	95
5.2.1	Aproximação Infinitesimal - σ_λ	95
5.2.2	Seção de Choque de Magnificação - σ_μ^{ell}	98
5.2.3	Seção de Choque para Formação de Arcos - $\sigma_{L/W}$	102
6	Considerações Finais e Perspectivas	107
A	Diagrama para os Ângulos Iniciais e Finais dos Arcos	109
B	Comprimento e Largura para Elipse com Orientação $\phi_e = 0$ e $\phi_e = \pi/2$	115
C	A ArcEllipse como uma Aproximação para um Arco Gravitacional	123
	Referências	129

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da deflexão da luz de estrelas pelo Sol.	5
1.2	Esquemática do retrolentamento por um buraco negro tendo o Sol como fonte. Do lado direito do diagrama indicamos, por simplicidade, apenas dois dos anéis formados ao redor do horizonte de eventos do buraco negro na situação de alinhamento perfeito. A imagem foi feita baseando-se na ilustração presente em [1].	11
2.1	Diagrama para a distância de diâmetro angular (fora de escala, pois $\delta \ll 1$). . . .	14
2.2	Diagrama para a deflexão da luz em um ângulo $\hat{\alpha}$ por uma massa pontual M	18
2.3	Representação esquemática do lenteamento gravitacional.	19
2.4	Diagrama mostrando o efeito de convergência e cisalhamento para uma fonte de raio R_0 juntamente com os eixos principais do cisalhamento, \hat{e}_{γ_1} e \hat{e}_{γ_2} que subtendem um ângulo ϕ_γ com os eixos \hat{x}_1 e \hat{x}_2	24
3.1	Fonte pontual e imagens.	35
3.2	Fonte circular com a especificação de nossa nomenclatura.	36
3.3	Formação de imagens para lenteamento da SIS considerando uma fonte circular (verde) com raio $R_0 = 0.1$ e posição $s = 0.2, \theta = 0$. A curva cinza pontilhada é a espinha dorsal dos arcos, a curva preta tracejada é a curva crítica tangencial e as curvas magenta e azul indicam as soluções interna e externa dos arcos, respectivamente.	37
3.4	“Espinha dorsal” com $\theta = 0$ e $s = 0.5, 0.8, 1$ e 1.5 (da esquerda para a direita). . . .	38
3.5	Formação de anel de Einstein para a SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.15$ and $R_0 = 0.2$	39
3.6	Formação de anel de Einstein centralizado para a SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.0$ and $R_0 = 0.1$	40
3.7	Formação de duas imagens (primeira linha) e uma imagem (segunda linha) para SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.2$ (primeira linha), $s = 1.1$ (segunda linha) e $R_0 = 0.1$	40

3.8	Comportamento para fontes circulares (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação no raio ($R_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.28, 0.3, 0.32$) para $s = 0.3$ (primeira linha) e na posição da fonte ($s = 0, 0.09, 0.12, 0.2, 0.3, 1.0, 1.1$) para $R_0 = 0.1$ (segunda linha). A linha tracejada representa a pseudocústica no plano da fonte e a curva crítica no plano da lente.	41
3.9	Fonte Elíptica com a nomenclatura utilizada.	42
3.10	Formação de anel de Einstein para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.05, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	44
3.11	Formação de anel de Einstein centralizado para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.0, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	44
3.12	Formação de duas imagens para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.2, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	45
3.13	Formação de uma imagem para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 1.12, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	45
3.14	Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação no raio efetivo ($R_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.28, 0.3, 0.35$) para $s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$	46
3.15	Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na posição da fonte ($s = 0.0, 0.12, 0.2, 0.3, 1.0, 1.12$) para $R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$	46
3.16	Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na orientação da fonte ($\phi_e = 0, \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \varepsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$	47
3.17	Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na elipticidade da fonte ($\varepsilon_s = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \theta = 0.0$	47
3.18	Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na posição do centro da fonte ($\theta = 0, \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$	48
4.1	Ângulo relativo entre a posição da fonte e o seu semi-eixo maior.	52

4.2	Diagrama indicando as quantidades utilizadas no cálculo dos comprimentos L_1 , L_2 e L_3 . A curva pontilhada cinza indica a espinha dorsal que passa pelos pontos inicial, central e final (P_i , P_c e P_f , respectivamente) do arco.	54
4.3	Diagrama indicando as quantidades utilizadas no cálculo dos comprimentos L_4 , L_5 , L_6 e L_7 . A curva pontilhada cinza indica a espinha dorsal que passa pelos pontos inicial, central e final do arco (P_i , P_c e P_f , respectivamente) e a curva sólida preta indica a circunferência que passa por esses mesmos pontos.	56
4.4	Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$	59
4.5	Comprimentos para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 (painel inferior) para $R_0 = 0.2$	59
4.6	Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$	60
4.7	Comprimentos para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$	61
4.8	Comportamento do arco interno para regiões próximas ao limite que essa imagem desaparece para $R_0 = 0.2$ e $\varepsilon_s = 0$	63
4.9	Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	64
4.10	Comprimentos para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	64
4.11	Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	65
4.12	Comprimentos para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	65

4.13 Comprimentos para o arco externo considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	66
4.14 Comprimentos para o arco interno considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	66
4.15 Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$	67
4.16 Comprimentos para o arco interno considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$	67
4.17 Diagrama para cálculo da largura indicando a separação entre as partes interna e externa dos arcos para arco de fonte circular.	71
4.18 Largura para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$	73
4.19 Largura para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$	74
4.20 Largura para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$	74
4.21 Largura para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$	75
4.22 Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	77
4.23 Larguras para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	77

4.24	Larguras para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	78
4.25	Larguras para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	78
4.26	Larguras para o arco externo considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$. . .	79
4.27	Larguras para o arco interno considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$. . .	79
4.28	Larguras para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$. . .	80
4.29	Larguras para o arco interno considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$. . .	80
5.1	Mapeamento de uma fonte circular infinitesimal em uma elipse.	84
5.2	Seção de choque total de magnificação (linhas tracejadas), seção de choque total perturbada de magnificação (linha pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) para um valor fixo de raio.	88
5.3	Seção de choque total de magnificação (linhas tracejadas), seção de choque total perturbada de magnificação (linha pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) para um valor fixo de magnificação limite.	89
5.4	Seção de choque de magnificação (curvas tracejadas), seção de choque de magnificação perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da magnificação limite para o arco externo.	90
5.5	Seção de choque de magnificação (curvas tracejadas), seção de choque de magnificação perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da magnificação limite para o arco interno.	90
5.6	Seção de choque de magnificação (curva tracejada), seção de choque de magnificação perturbada (curva pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco externo.	91

5.7	Seção de choque de magnificação (curva tracejada), seção de choque de magnificação perturbada (curva pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco interno.	91
5.8	Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da razão L/W limite para o arco externo.	93
5.9	Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da razão L/W limite para o arco interno.	93
5.10	Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco externo.	94
5.11	Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco interno.	94
5.12	Curvas de distorção constante $R_\lambda = q_s = R_{th} = 10$ para $\phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $R_{th} = 10$ e curva crítica tangencial $R_\lambda = \infty$ no plano das lentes (esquerda) e das imagens (direita).	97
5.13	Comparação entre a seção de choque infinitesimal para fonte elíptica e fonte circular.	97
5.14	Razão entre a área da imagem externa e a fonte em função de ε_s para $s = 0.3$, $\phi_e = \pi/3$ e $R_0 = 0.01$ (curva magenta), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva azul).	98
5.15	Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite μ_{th} para $\varepsilon_s = 0.2$ e $R_0 = 0.08$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva magenta).	99
5.16	Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\varepsilon_s = 0.1$ e $\mu_{th} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta). Os círculos coloridos indicam quando a seção de choque vai a zero, na transição entre anel de Einstein e duas imagens.	100
5.17	Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\mu_{th} = 10$ e $\varepsilon_s = 0.01$, (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.1 (curva magenta). Os círculos coloridos indicam quando a seção de choque vai a zero, na transição entre anel de Einstein e duas imagens.	100
5.18	Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $\mu_{th} = 10$ e $R_0 = 0.01$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.08 (curva magenta).	101

5.19 Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_0 = 0.01$ e $\mu_{th} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta). 101

5.20 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite R_{th} para $\varepsilon_s = 0.2$ e $R_0 = 0.08$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva magenta). 103

5.21 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite R_{th} para $R_0 = 0.05$ e $\varepsilon_s = 0.05$ (curva azul), 0.1 (curva verde) e 0.2 (curva magenta). 103

5.22 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\varepsilon_s = 0.05$ e $R_{th} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta). 104

5.23 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $R_{th} = 10$ e $\varepsilon_s = 0.01$, (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.1 (curva magenta). 104

5.24 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_{th} = 10$ e $R_0 = 0.01$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.08 (curva magenta). 105

5.25 Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_0 = 0.01$ e $R_{th} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta). 105

A.1 Diagrama com as possíveis configurações para determinar os ângulos iniciais e finais dos arcos. 109

A.2 Diagramas para $0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 110

A.3 Diagramas para $0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$ 111

A.4 Diagramas para $\pi/2 < \phi_e \leq \pi$ and $0 < \theta \leq \theta_0$ 112

A.5 Diagramas para $\pi/2 < \phi_e \leq \pi$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$ 113

B.1 Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$ 116

B.2 Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio efetivo da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$ 117

B.3	Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = 0$ e $\theta = 0$	117
B.4	Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	118
B.5	Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio efetivo da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	118
B.6	Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$ e $\theta = 0$	119
B.7	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	119
B.8	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	120
B.9	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = 0$ e $\theta = 0$	120
B.10	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	121
B.11	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$	121
B.12	Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$ e $\theta = 0$	122
C.1	Figura geométrica utilizando a ArcEllipse para $a = 8$, $b = 1$, $\tilde{\theta} = 0$ e $r_c = 10$	123
C.2	Diferença relativa entre a razão A/LW na ArcEllipse e na SIS para $R_0 = 0.2$	125

C.3	Diferença relativa entre a razão \mathcal{A}/LW na ArcEllipse e na SIS para $s = 0.2$	126
C.4	Diferença relativa entre a razão \overline{W}/W_c na ArcEllipse e na SIS para $R_0 = 0.2$	126
C.5	Diferença relativa entre a razão \overline{W}/W_c na ArcEllipse e na SIS para $s = 0.2$	127
C.6	Figura geométrica usando a ArcEllipse em comparação ao arco da SIS com parâmetros $R_0 = 0.1$ e $s = 0.2$. Os painéis à esquerda e ao centro possuem as representações para quando o centro ou extremidades dos arcos coincidem e no painel direito temos quando o centro da ArcEllipse é equivalente ao centro de curvatura do arco. Os parâmetros para a ArcEllipse são: Painel Esquerdo: $a = 0.6$ (magenta), 0.8 (azul), 1.0 (verde), $b = 0.1$ e $r_c = 1.2$; Painel Central: $a = 0.614$, $b = 0.05$ (magenta), 0.10 (azul), 0.15 (verde), e $r_c = 1.105$; Painel Direito: $a = 0.6243$, $b = 0.1$ e $r_c = 1.10272$	128

CAPÍTULO 1

Introdução

Arcos gravitacionais são imagens altamente distorcidas e magnificadas de galáxias distantes (fontes) devido ao campo gravitacional de galáxias ou aglomerados de galáxias mais próximos que atuam como lentes [2–4]. Os arcos podem ser utilizados para sondar a distribuição de matéria das lentes [5–10], trazendo informações sobre sua história de formação e propriedades da matéria escura; para investigar fontes distantes [11–15], devido ao efeito de magnificação; e para colocar limites em modelos cosmológicos [16–18], em teorias alternativas da gravitação [19] e em matéria escura [20, 21]. Essa área de pesquisa tem atraído atenção crescente nos últimos anos, tanto pelos desenvolvimentos instrumentais que têm permitido obter dados de alta qualidade para explorar as aplicações supracitadas, quanto pela realização de levantamentos astronômicos em grandes áreas, levando a um aumento de uma ordem de grandeza nos sistemas conhecidos em menos de uma década.

Apesar do interesse crescente e grande número de trabalhos na área, há uma lacuna importante no que se refere à modelagem dos arcos. Por um lado, em modelagens teóricas ainda são utilizadas aproximações rudimentares e pouco realistas face aos dados observacionais, como, por exemplo, a utilização de fontes infinitesimais. Por outro lado, são utilizadas sistematicamente simulações computacionais cujo grau de realismo vem aumentando, mas que não fornecem interpretações diretas dos seus resultados, além destes não serem facilmente extensíveis a configurações e parâmetros diferentes daqueles utilizados em uma simulação específica. Nesse sentido, é importante desenvolver métodos analíticos ou semianalíticos com maior grau de realismo e que permitam interpretar de modo transparente os resultados numéricos, servindo ainda de teste para os métodos computacionais em situações específicas e permitindo buscar escalonamentos que são úteis para interpolar e extrapolar o resultado de simulações para escalas de parâmetros diferentes daquele utilizados em uma dada simulação. O objetivo desta tese foi, portanto, desenvolver abordagens baseadas em soluções analíticas para estudar as propriedades dos arcos gravitacionais formados a partir de fontes finitas. Em particular, consideramos o caso de lentes na escala de galáxias.

A tese está organizada da seguinte forma: no decorrer deste capítulo apontaremos algumas das aplicações para o lenteamento gravitacional em suas diferentes escalas, bem como os levantamentos que permitem obter dados cada vez mais precisos e com maior área de alcance e, além disso, revisitaremos alguns momentos da história do lenteamento gravitacional. No Capítulo 2 direcionamos o nosso foco para para modelos isotérmicos muito úteis para representar lentes na escala galáctica, que será o enfoque de nosso trabalho e apresentamos os conceitos básicos para desenvolver o estudo do lenteamento gravitacional. Já no Capítulo 3 apresentaremos propriedades das imagens formadas a partir de fontes circulares e elípticas para uma lente isotérmica seguindo uma distribuição de matéria com simetria esférica. No Capítulo 4 obteremos expressões para parâmetros básicos dos arcos, como comprimento, largura e área. O Capítulo 5 será dedicado a abordagens analíticas ou semianalíticas para determinar diferentes seções de choque de lenteamento forte com um comparativo entre elas. No Capítulo 6 concluímos nosso trabalho e enumeramos os principais resultados e aplicações das seções de choque obtidas. No Apêndice fazemos um comparativo entre as nossas imagens e uma prescrição geométrica para arcos, a ArcEllipse, de modo a verificar que nossos resultados podem ser aplicados para alguns modelos de fonte. Além disso, detalhamos alguns dos nossos resultados, como obtenção de ângulos iniciais e finais de cada imagem para uma lente elíptica.

O estudo do lenteamento gravitacional e, em particular, dos arcos gravitacionais fez prosperar o número de buscas para encontrar esses sistemas, tanto no espaço como em solo. Para investigações feitas do solo, podemos citar uma série de levantamentos, tais como, *Red-Sequence Cluster Survey* (RCS, [22, 23]); o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS, [24–27]); *Deep Lens Survey* (DLS, [28]), o *Canada-France-Hawaii Telescope (CFHT) Legacy Survey* (CFHTLS, [29–33]); o *CFHT Stripe 82 Survey* (CS82, [34]); o *Dark Energy Survey* (DES, [35])¹ e o *Kilo Degree Survey* (KIDS, [36])². Destacamos ainda as atualizações de trabalhos provenientes de dados desses levantamentos, para galáxias [37] e aglomerados de galáxias [38–42]. Esses levantamentos com alvos mais específicos são oriundos da escolha de alvos com maior probabilidade de terem arcos, como aglomerados de galáxias, galáxias massivas ou objetos com alta emissão de raios-x ao contrário dos levantamentos em grandes áreas, que em geral são levantamentos sem o propósito principal de detectar arcos, mas onde aproveita-se a oportunidade para investigá-los.

Já investigações feitas do espaço incluem o *Hubble Space Telescope* (HST) e seus *surveys*, como *Hubble Deep Field* (HDF, [43]); o *HST Medium Deep Survey* [44]; o *Great Observatories Origins Deep Survey* (GOODS, [45]); o *Extended Groth Strip* (EGS, [46]) e o *HST Cosmic Evolution Survey* (COSMOS, [47–49]). Além disso, destacamos observações direcionadas de galáxias [50, 51] e aglomerados de galáxias [52–55].

¹<http://www.darkenergysurvey.org>

²<http://kids.strw.leidenuniv.nl/>

Apesar de seu potencial, arcos gravitacionais são raros, uma vez que existe, em média, um aglomerado de galáxias com massa suficiente para produzir arcos por grau quadrado de céu [56]. Até hoje foram descobertas algumas centenas de arcos em torno de galáxias isoladas, grupos ou aglomerados de galáxias e a maioria dessas detecções foi feita através de sondagens específicas para busca sistemática de arcos [30, 53, 57]. O número de sistemas com arcos aumentará consideravelmente com os dados do KIDS [58], DES [59], *Hyper Suprime-Cam* (HSC, [60])³ e o *Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey* (J-PAS, [61])⁴. Espera-se que o número de sistemas estudados tenha um incremento ainda maior com o início das operações do *Large Synoptic Survey Telescope* (LSST, [62])⁵ e que esses novos levantamentos permitam um estudo estatístico mais aprofundado utilizando arcos gravitacionais.

A ordem de magnitude da área coberta pelas observações e o número de objetos analisados irá aumentar consideravelmente nos próximos anos com o lançamento da missão espacial *Euclid*⁶ [63] prevista para 2020 e com expectativa de detectar da ordem de 10^5 sistemas com arcos [64].

1.1 Revisitando a História do Lenteamento Gravitacional

Nesta seção faremos uma breve descrição de alguns trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento do lenteamento gravitacional como conhecemos hoje. Para uma visão mais aprofundada do tema, recomendamos os livros de Schneider, Ehlers e Falco [2] e Petters, Levine e Wambsganss [4], nossas principais referências para a formulação dessa revisão.

1.1.1 Anos Iniciais

Há pouco mais de duzentos anos, físicos e astrônomos consideravam a possibilidade de que, se a luz pudesse ser tratada como partícula, os raios de luz seriam afetados por campos gravitacionais. Em 1784, John Mitchell sugeriu, em correspondência endereçada a Henry Cavendish, que a luz propagando próxima a um objeto esfericamente simétrico de massa M , seria defletida e Cavendish calculou essa deflexão como sendo

$$\hat{\alpha}_N = \frac{2GM}{c^2\xi}, \quad (1.1)$$

em que G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz e ξ é o parâmetro de impacto (distância mínima entre o raio de luz e o objeto de massa M).

³<http://www.naoj.org/Projects/HSC/HSCProject.html>

⁴<http://j-pas.org/>

⁵<https://www.lsst.org/>

⁶<http://www.euclid-ec.org/>

1.1.2 Deflexão da Luz na Relatividade Geral

Em 1801, o alemão Johann von Soldner, motivado pelos trabalhos de seus antecessores, estudou a deflexão da luz por corpos celestes utilizando a formulação da gravitação Newtoniana [65]. Ele foi o primeiro a publicar sobre o assunto e é tido como o primeiro a explorar a deflexão da luz por um corpo massivo, inferindo que a trajetória da luz é desviada de um ângulo $\hat{\alpha}_N \approx 0.84''$ ao passar próxima ao Sol [66].

Mais de um século depois, em 1911, e desconhecendo os resultados de Soldner, Einstein utilizou o Princípio de Equivalência e supôs uma métrica Euclideana para estudar o fenômeno da deflexão da luz. Em seu trabalho publicado [67], ele expressou seu desejo de que astrônomos testassem suas previsões e escreveu que isso poderia ser feito durante um eclipse solar, pois é possível observar estrelas projetadas próximo à superfície solar e as ligeiras mudanças nas suas posições devido à deflexão da luz (ver esquematização na Fig. 1.1). A primeira tentativa de observar o fenômeno foi feita em 1912 em expedição à cidade de Cristina, Brasil, liderada pelo então diretor do observatório astronômico de Córdoba (Argentina), Carlos Dillon Perrine [68], mas as condições climáticas impediram as observações. A segunda expedição, em 1914, liderada pelo astrônomo alemão Erwin Freundlich na Península da Crimeia, foi impedida pela eclosão da Primeira Guerra Mundial e aprisionamento da equipe por soldados russos [4].

Essa sequência de infortúnios atrasou os testes das previsões de Einstein, mas possibilitou que as observações fossem feitas após ele finalizar a formulação da Teoria da Relatividade Geral, que forneceu um ângulo de deflexão duas vezes maior que o calculado pela mecânica Newtoniana [69], ou seja,

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 r}, \quad (1.2)$$

que leva a um desvio de aproximadamente $1.74''$ para um feixe passando próximo ao disco solar. Esse valor foi confirmado em 1919 por duas expedições feitas para medir a deflexão da luz durante um eclipse. A primeira equipe, liderada pelo astrônomo inglês Sir Arthur Eddington, visitou a Ilha de Príncipe [70] e a segunda equipe, dirigida pelo inglês Andrew Crommelin, visitou a cidade de Sobral, no Brasil [71]. Eddington verificou que as estrelas pareciam mais distantes umas das outras durante o eclipse e sua deflexão diferia em apenas 30% das previsões de Einstein e novos resultados reduziram mais ainda essa diferença [72]. Esse resultado contribuiu significativamente para a aceitação da Teoria da Relatividade Geral.

Ainda no ano de 1919, Oliver Lodge utilizou a nomenclatura “lentes” para o contexto de deflexão da luz, mas notou que elas não tinham distância focal [73]. No decorrer dos anos 20 e 30, mais trabalhos foram feitos no fenômeno. Inicialmente Eddington [74] e um pouco mais tarde, Orest Chwolson [75] consideraram um sistema mais geral de lentes de uma estrela lente-

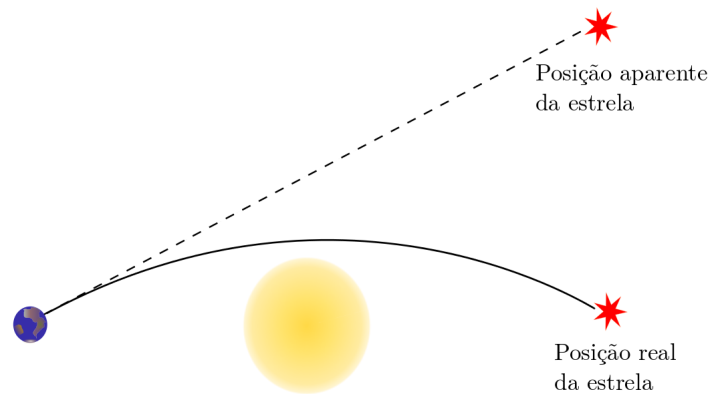


Figura 1.1: Ilustração da deflexão da luz de estrelas pelo Sol.

ando uma estrela mais distante. Eddington sugeriu que imagens múltiplas seriam formadas e Chwolson considerou que se fonte e lente estivessem alinhadas, formaria uma imagem anelar. Essas estruturas são chamadas atualmente de “anéis de Einstein”, devido ao artigo publicado em 1936 por Einstein, a pedidos do cientista amador Rudi Mandl [76]. Se o alinhamento não for perfeito, duas imagens da fonte seriam vistas, uma de cada lado da estrela que atua como lente e a separação angular para estrelas seria muito pequena para se observar diretamente.

Nos anos subsequentes, Fritz Zwicky [11, 12], também inspirado por Mandl, considerou o lenteamento gravitacional de nebulosas extragaláticas (que atualmente chamamos de galáxias) ao invés de estrelas. Com o uso do Teorema do Virial ele estimou a massa dos aglomerados de Coma e Virgem. Ele afirmou que por serem mais massivos e envolverem distâncias maiores, esses objetos seriam bons candidatos para observar o fenômeno do lenteamento. Também argumentou que, devido ao efeito de magnificação, seria possível utilizar as lentes gravitacionais como telescópios naturais e, assim, determinar a massa de objetos distantes.

1.1.3 Primeiras Observações

Depois de mais de duas décadas, no início dos anos 60, a primeira observação de um quasar [77] fez com que Jean Barnothy [78] conectasse esse objetos ao efeito de lenteamento e o norueguês Sjur Refsdal observou que haveria um atraso temporal entre as imagens múltiplas formadas e para algumas fontes, como supernovas [79, 80], esse efeito poderia ser medido. Como esse atraso temporal seria inversamente proporcional à constante de Hubble, H_0 , ele sugeriu que medindo a separação angular e esse tempo de atraso dos raios de luz seria possível calcular H_0 e, indo além, testar diferentes teorias cosmológicas [81, 82].

Mais trabalhos foram feitos na área, mas a primeira detecção de um sistema lenteado só foi ocorrer em 1979 com a descoberta de imagem dupla do quasar $Q0957+561$ por Walsh,

Carswell e Weymann [83]. Eles notaram que as imagens observadas com separação angular de 6" estavam a um mesmo desvio para o vermelho de $z = 1.41$, o que, juntamente à similaridade do espectro das imagens, indicava que se tratava de um quasar sendo lenteado e formando duas imagens.

Menos de uma década depois, em 1986, o primeiro conjunto de arcos gravitacionais foi observado [84] como resultado do lenteamento de galáxias distantes por um aglomerado de galáxias. Em 1988 observou-se pela primeira vez o microlenteamento de um quasar [85] e um anel de Einstein a partir de fontes observadas em rádio [86]. Em 2004, descobriram o primeiro planeta fora do Sistema Solar utilizando microlenteamento [87] e em 2008 o primeiro anel de Einstein duplo [88]. Em 2014 observou-se pela primeira vez uma supernova Ia lenteada [89], em 2015 imagens múltiplas de uma supernova lenteada por aglomerado de galáxias [90] e por uma galáxia em 2017 [91]. Ainda em 2017, observou-se deflexão da luz por uma anã branca, possibilitando calcular sua massa e comprovando previsões sobre evolução estelar desses objetos [92].

1.2 Regimes do Lenteamento Gravitacional e Aplicações

Podemos classificar o efeito de lenteamento gravitacional de acordo com as escalas angulares em que ocorrem e sua intensidade. Dependendo de quais forem os objetos envolvidos, esse efeito de lenteamento gravitacional se manifesta nas escalas de macro, mili ou microlenteamento. O macrolenteamento acontecerá nas escalas de segundo de arco ou maiores, o observador pode notar o efeito nas imagens, seja pela separação entre imagens múltiplas, seja pelo efeito na forma das imagens (ou ambos) e os objetos envolvidos nesse regime angular são galáxias, aglomerados de galáxias ou estrutura em grande escala do universo. Por outro lado, se considerarmos o lenteamento de estrelas ou quasares por um objeto compacto e massivo, como estrelas e planetas, a escala angular da separação entre as imagens será da ordem de micro ou mili segundo de arco pela definição de Paczyński [93] e não são resolvidas por telescópios, embora possa ser medida a deflexão da luz [92]. Esse regime é chamado microlenteamento ou mililenteamento, dependendo da separação angular das imagens.

Temos ainda dois regimes de intensidade, chamados de lenteamento forte e fraco. No regime forte as imagens sofrem grandes distorções, grandes magnificações ou demagnificações de seu brilho e/ou formação de imagens múltiplas para uma mesma fonte e incluem imagens de interesse astrofísico, como anéis de Einstein e arcos gravitacionais. Nosso trabalho nesta tese foca nesse regime de intensidade para macro-lenteamento. Se, ao invés disso, as distorções induzidas pelo campo gravitacional dos objetos de fundo são menores, temos o efeito de lenteamento fraco, o qual poderá ser medido apenas estatisticamente, sobre um grande número de

fontes. No lenteamento fraco não se pode distinguir a pequena mudança na forma das galáxias lentesadas, que apenas tem morfologia ligeiramente distorcida mudando seu tamanho e elipticidade, de modo que não pode ser medido individualmente pois não se conhece a forma intrínseca da galáxia, ou seja, sem o efeito de lente.

Nesses regimes mencionados, podemos considerar o campo gravitacional no limite de campo fraco, como veremos na próxima seção. Mas se levarmos em consideração escalas sujeitas à efeitos de campos gravitacionais fortes e, por conseguinte, grandes ângulos de deflexão, temos o chamado retro-lenteamento. Esse regime ocorre para buracos negros, em particular, para luz passando próximo ao horizonte de eventos.

Vamos descrever brevemente essas escalas do lenteamento para que possamos passar uma visão mais ampla das aplicações de interesse do lenteamento gravitacional. Sugerimos também a leitura de um revisão recente feita sobre esses regimes por De Paolis et al. [1] e as referências citadas pelos autores e nos baseamos nesse trabalho para a escrita dessa subseção.

1.2.1 Lenteamento Forte: Macrolenteamento

No chamado Lenteamento Forte temos o efeito de grandes distorções e/ou a formação de imagens múltiplas, que se manifesta, por exemplo, na formação de arcos, nosso objeto de interesse nesta tese. A separação entre as imagens varia, em geral, de algumas dezenas de segundo de arco a vários minutos de arco. Objetos que atuam como lente desse caso, são galáxias ou aglomerados de galáxias. Algumas aplicações do lenteamento gravitacional forte são:

- telescópios naturais, uma vez que temos magnificação de fontes distantes mais fracas, tornando possível estudá-las em mais detalhe e de se observar fontes abaixo do limiar de magnificação. O fenômeno de lenteamento conserva o brilho superficial, de modo que ao ter imagens magnificadas, elas terão tamanho angular maior e, conseqüentemente, serão mais brilhantes, permitindo-nos estudar objetos distantes que não seriam vistos de outra maneira (ver, e.g., [94–99]). Um exemplo recente é dado por um sistema com imagens múltiplas de uma supernova, vista explodindo mais de uma vez ao ser lentesada por uma galáxia no aglomerado MACS J1149.6+2223 [13, 90];
- testar modelos de gravidade modificada, aplicando arcos e anéis de Einstein combinados com informações cinemáticas das lentes [19, 100];
- distribuição de massa de galáxias e aglomerados de galáxias, uma vez que o fenômeno de lenteamento independe dos processos físicos que ocorrem na lente, sendo função apenas de sua distribuição total de matéria bariônica e escura [101–105];
- estudo de subestruturas de halos de matéria escura. Por exemplo, é possível detectar

anomalias no fluxo para ondas de rádio em quasares lenteados, indicando presença de sub-halos de matéria escura [20, 106];

- impor limites em parâmetros cosmológicos: analisando a defasagem temporal entre as imagens formadas (por conta da diferença entre os caminhos percorridos pela luz e pelo atraso temporal gravitacional), que é inversamente proporcional à constante de Hubble (H_0), pode-se estimar valores mais acurados para essa constante, como proposto pela primeira vez por Refsdal [80] e atualmente por Suyu et al. utilizando quasares [17] e Goobar et al. utilizando imagens múltiplas de uma supernova [91].

1.2.2 Lenteamento Forte: Microlenteamento e Mililenteamento

Microlenteamento é o fenômeno de lenteamento no qual as imagens múltiplas não são resolvidas, de modo que apenas o brilho aparente aumenta e ocorre quando estrelas mais brilhantes são lenteadas por estrelas mais próximas a nós. As primeiras detecções do fenômeno de microlenteamento foram em 1993 [107, 108] e, em geral, o microlenteamento é aplicado ao olharmos na direção do bojo galáctico, que possui maior densidade de estrelas. A primeira aplicação proposta para o microlenteamento foi de busca de matéria escura na forma de *Massive Compact Halo Objects* (MACHOs) no halo de nossa galáxia. Ao observar um grande número de estrelas na Pequena e Grande Nuvem de Magalhães, esses objetos iriam atuar como lentes quando alinhassem com as estrelas de fundo, levando à uma mudança de brilho com o tempo [93]. Após diversos estudos ficou evidente que uma proporção significativa da matéria escura não poderia ser atribuída aos MACHOs (ver e.g. [109, 110]), o que é consistente com o conteúdo bariônico determinado por outras observações astrofísicas, como observações de radiação cósmica de fundo em micro-ondas (*Cosmic Microwave Background Radiation* - CMB)[111]. Apesar disso, o microlenteamento tem se tornado ferramenta importante na astrofísica com aplicações que incluem, por exemplo,

- medida de massa de estrelas isoladas, incluindo anãs marrons, anãs brancas e candidatos à buracos negros de massa estelar [92, 112–114];
- medir o perfil de escurecimento de bordo (*limb-darkening*) para diversas estrelas. Esse *limb-darkening* é uma medida de como a luz de uma estrela se distribui ao longo da mesma, de maneira não uniforme e com dependência na metalicidade da estrela, no seu raio, temperatura e massa. Pode-se utilizar o microlenteamento para impor limites em modelos para atmosfera estelar [115–117];
- impor limites para geometria e cinemática de nossa galáxia, como anisotropia no movimento próprio de estrelas no bojo galáctico [118–122] e distribuição de densidade, que

indica a existência de um estrutura em forma de barra no bojo galáctico [123–125];

- detecção de exoplanetas, que foi um dos grandes sucessos do microlenteamento. Moa e Paczynski [126], seguidos por Gould e Loeb em 1992 [127], foram os primeiros a sugerir que o microlenteamento poderia ser utilizado com essa finalidade e realmente foi um método complementar aos que existiam (e.g. velocidade radial e trânsito) pois não dependia da medida de luz do planeta ou estrela, possibilitando fazer medidas de planetas orbitando estrelas distantes e objetos pouco luminosos, como anãs marrons ou planetas errantes, sem orbitar estrelas e mais recentemente planetas fora da nossa galáxia [128] e também possibilitando medidas de paralaxe comparando observações em solo com as em sondas espaciais [129]. O número atual (até o dia 03/05/2018) são de 59 exoplanetas detectados por microlenteamento ⁷

Para mais detalhes do fenômeno de microlenteamento, recomendamos as leituras das revisões feitas por Gaudi [130], Mao [131] e as referências recomendadas por eles.

Em escalas intermediárias temos o mililenteamento, que consiste em quasares lenteados gerando imagens múltiplas e é usualmente atribuído ao lenteamento de estrelas e anãs brancas localizadas nas galáxias-lente. Esse efeito, ou mais especificamente, a variação do lenteamento com o comprimento de onda permitiu o estudo em detalhes do mecanismo central de quasares-fonte e as variações em magnitude permitiram impor limites na densidade estelar nas galáxias-lente [132]. O mililenteamento é uma ótima ferramenta para investigar propriedades de discos de acreção em quasares [133], impor limites no perfil de temperatura das regiões do disco com emissão no espectro visível [134], estudar a geometria de regiões com emissão em raios-X nos discos de acreção [135] e a distribuição de matéria escura e bariônica nas galáxias-lente [136].

1.2.3 Lenteamento Fraco

Como mencionamos anteriormente, no regime de lenteamento fraco as distorções e magnificações são menores, fazendo com que o efeito possa apenas ser medido estatisticamente, sobre um grande número de fontes lenteadas, na qual o efeito de lenteamento não é evidente, mas foi medido. Recomendamos o trabalho de M. Bartelmann e P. Schneider [137] para uma revisão mais detalhada do lenteamento fraco. Nos levantamentos de grandes áreas é possível detectar algumas imagens fracamente distorcidas de galáxias. No próximo capítulo veremos dois efeitos do lenteamento, que são: convergência e cisalhamento. Na maioria das vezes, utiliza-se o cisalhamento no lenteamento fraco, que é a deformação da imagem, pois a convergência depende da luminosidade intrínseca e tamanho dos objetos lenteados, o que é desconhecido (embora possam-se usar relações empíricas para estimar a luminosidade).

⁷<https://exoplanets.nasa.gov/newworldsatlas/>

A primeira detecção do efeito foi em 1990 na forma de um alinhamento tangencial de galáxias atrás de grandes aglomerados [138]. Uma década depois mediu-se distorções de galáxias indicando a existência de cisalhamento cósmico [139, 140]. Esses são alguns dos resultados cosmológicos recentes mais importantes na atualidade e com os levantamentos de grandes áreas e boa qualidade de imagem foi possível obter o cisalhamento em grandes escala e obter medidas no regime linear e com boa estatística. Levantamentos como os já citados CFHTLS e CS82 possibilitam boas medidas em escala média e para escalas maiores destacam-se os levantamentos KIDS, DES e HSC [141]. No lenteamento fraco, busca-se reconstruir a distribuição de massa da lente a partir do campo de cisalhamento e as principais abordagens para solucionar o problema são: (i) expressando a distribuição de massa projetada como convolução do cisalhamento com um kernel [142, 143]; (ii) fazendo a abordagem inversa, trabalhando com o potencial da lente para determinar a distribuição de massa projetada mais provável de gerar um cisalhamento específico [144–146].

O lenteamento fraco, combinado com dados da CMB pode ser utilizado para impor limites em parâmetros cosmológicos, como constante de Hubble (H_0) e densidade de matéria (Ω_m) [147, 148].

1.2.4 Lenteamento para Campos Fortes

Nas escalas que consideramos anteriormente, podíamos tratar o lenteamento gravitacional dentro da aproximação de campo gravitacional fraco na relatividade geral, com a luz defletindo em um ângulo pequeno, da ordem de $\mathcal{O}(M/r_0)$. Essa aproximação deixa de ser válida quando consideramos buracos negros como lentes. Buracos negros são objetos simples, porém difíceis de serem descritos matematicamente [149], e podem ser caracterizados por três parâmetros: massa, momento angular e carga elétrica e podemos classificá-los como buracos negros de: Schwarzschild (sem rotação e sem carga), Kerr (em rotação e sem carga), Reissner-Nordström (sem rotação e com carga) e Kerr-Newman (em rotação e com carga). Buracos negros estão localizados no centro da maioria das galáxias e possuem papel crucial no entendimento de evolução estelar, formação e evolução de galáxias e na natureza do espaço-tempo. Observar esse tipo de objeto seria importante para estudar campos gravitacionais fortes. Uma sugestão em como medir os parâmetros de um buraco negro foi dada por Daniel Holz e John Wheeler [150] que consideraram o lenteamento por um desses objetos e usou como fonte de raios de luz o Sol. Isso gera imagens interessantes pois um fóton que se aproxima muito do buraco negro pode girar várias vezes antes de atingir o observador e isso leva a uma sequência de anéis concêntricos sendo formados caso o observador (Terra), o Sol e o buraco negro estejam perfeitamente alinhados [151]. Na Fig. 1.2 indicamos como essa situação ocorreria.

Poderíamos simplesmente procurar por anéis concêntricos no céu, na tentativa de encon-

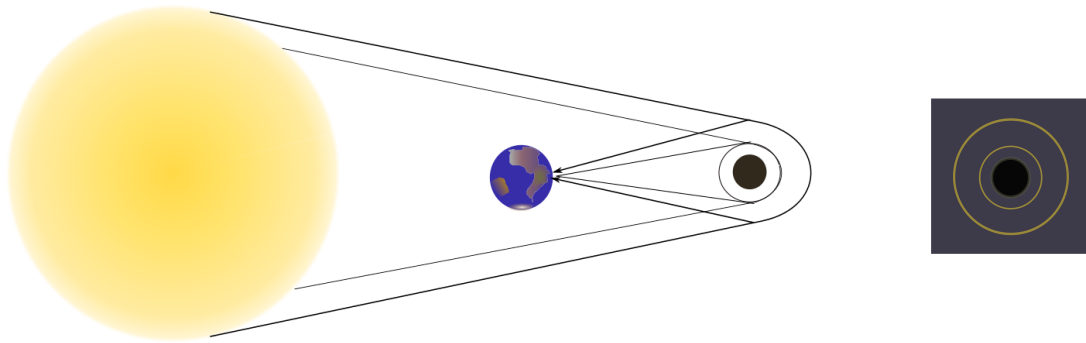


Figura 1.2: Esquemática do retro-lenteamento por um buraco negro tendo o Sol como fonte. Do lado direito do diagrama indicamos, por simplicidade, apenas dois dos anéis formados ao redor do horizonte de eventos do buraco negro na situação de alinhamento perfeito. A imagem foi feita baseando-se na ilustração presente em [1].

trar buracos negros, como sugerido pelos autores? Infelizmente não, pois seria difícil ter um alinhamento fonte/lente/observador e esse alinhamento seria muito rápido, devido ao movimento da Terra ao redor do Sol. Além disso, retro-imagens do Sol seriam tão fracas, que somente buracos negros maiores que $10M_{\odot}$ e a $0.01pc$ da Terra conseguiriam ser observados [1].

Fora isso, existem vários outros fenômenos de lenteamento por buracos negros. Olhando-se o horizonte de eventos veria-se um anel de luz e espera-se observar isso em breve para Sgr A*. Uma ideia melhor, mas seguindo nessa mesma direção, seria considerar o retro-lenteamento pelo buraco negro do centro da galáxia [152–154]. Medidas feitas na região de Sgr A* poderiam ser utilizadas, por exemplo, para determinar concentração de matéria escura [155] e testar teorias modificadas da relatividade geral [156–159]. Para um estudo detalhado sobre os parâmetros estimados pelo retro-lenteamento recomendamos a leitura do trabalho de De Paolis et al. [160], bem como uma discussão de como o formato das imagens dependeriam do spin do buraco negro e também o trabalho de V. Bozza [161] que fornece um método para diferenciar o lenteamento pelos tipos de buracos negros. De maneira efetiva, poderíamos ter alguma observação de retro-lenteamento com o lançamento do *James Webb Space Telescope* (JWST), programado para o fim de 2018 e sucessor do HST, porém ele não possuirá resolução angular necessária para prover informação sobre o formato das imagens e para isso será necessário aguardar a próxima geração de interferômetros à rádio, mas é possível ficar otimista de obter mais detalhes no futuro próximo, com projetos como *Event Horizon Telescope* (EHT) [1] e a combinação de diferentes interferômetros, como os do *Very Large Array* (VLA) e do *Atacama Large Millimeter Array* (ALMA).

CAPÍTULO 2

Conceitos Gerais

Algumas características do lenteamento gravitacional que podemos destacar são:

- o número de fótons é preservado e apenas sua trajetória é desviada;
- o lenteamento gravitacional é um fenômeno acromático, ou seja, independe da frequência da luz;
- o ângulo de deflexão para lentes pontuais cai com o inverso da distância entre o raio de luz e a lente, de modo que é suficiente considerar as lentes próximas ao raio de luz e o efeito da lente está localizado em uma pequena região do céu.

Neste capítulo revisaremos alguns dos aspectos básicos do lenteamento gravitacional e em especial iremos obter grandezas relevantes para o desenvolvimento desta tese. Para uma abordagem mais detalhada e completa sugerimos os livros de Mollerach e Roulet [3], Petters, Levine e Wambsganss [4] e Schneider, Ehlers e Falco [2].

Em nossa abordagem podemos fazer duas suposições, a aproximação de lente fina e a aproximação de campo fraco. Na primeira considera-se que as dimensões do objeto que faz o lenteamento são muito menores que as distâncias entre observador e lente ou lente e fonte. Assim, o desvio da luz ocorrerá apenas no plano que contém a fonte. E na segunda, podemos supor para a maioria das vezes que a geometria do universo é descrita pela métrica $k = 0$ de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com perturbações locais isotrópicas dadas pelo potencial Newtoniano Φ , responsável pelo lenteamento.

Aqui estamos considerando um universo de acordo com as previsões da Relatividade Geral, mas poderia-se considerar também modelos de gravidade modificada, que devem se comparar a RG em escalas comparáveis ao sistema solar, onde a teoria já é bem estabelecida, além de manifestar seus efeitos na evolução de perturbações de densidades. Um modelo alternativo também deveria incluir mudanças nas relações entre potenciais escalares que aparecem em perturbações na métrica FLRW e flutuações no campo de densidade de matéria. Ao

parametrizar adequadamente essas relações possibilita-se caracterizar desvios da RG como função do desvio para o vermelho e escala. Os desvios da RG podem ser limitados através da comparação do perfil de massa de aglomerados derivados do lenteamento gravitacional e da análise cinemática de galáxias membro. Galáxias movendo em aglomerados sob ação da gravidade apenas sente a parte temporal da métrica FRLW perturbada, expressa pelo potencial Φ . Por outro lado, geodésicas ao longo das quais fótons irão se propagar nos aglomerados refletem a contribuição da parte temporal e espacial das componentes das perturbações lineares na métrica, então elas sentem a soma dos dois potenciais escalares $\Phi + \Psi$. Na gravidade padrão $\Phi = \Psi$. Medidas de lenteamento são sensíveis à soma $\Phi + \Psi$. Já medidas da dinâmica (tipo dispersão de velocidades ou equilíbrio hidrostático) são sensíveis a Φ somente. Então combinando lenteamento+dinâmica é possível testar a diferença entre os potenciais e portanto modelos de gravidade modificada. Podemos referenciar alguns trabalhos que detalham esses aspectos de gravidade modificada ao considerar aglomerado de galáxias [19], galáxias e anéis de Einstein [100, 162]

2.1 Distância de Diâmetro Angular

Ao considerar as posições de fontes e lentes, as distâncias de diâmetro angular são necessárias para estabelecer a relação entre os objetos. Um corpo com separação angular δ e tamanho d (esboçado na Fig. 2.1) está, por definição, a uma distância diâmetro angular D_A dada por

$$D_A = \frac{d}{\delta}, \text{ para } \delta \ll 1. \quad (2.1)$$

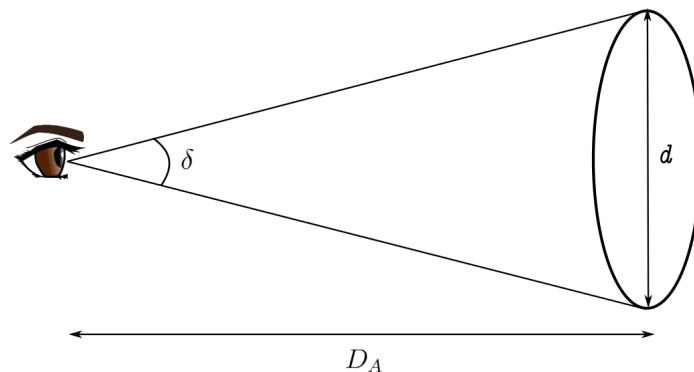


Figura 2.1: Diagrama para a distância de diâmetro angular (fora de escala, pois $\delta \ll 1$).

Essas distâncias são dependentes dos parâmetros cosmológicos e podemos reescrevê-las em função do desvio para o vermelho. Considere inicialmente a métrica de Friedmann-Lemaître-

Robertson-Walker (FLRW), uma vez que a mesma satisfaz a suposição de um Universo aproximadamente homogêneo e isotrópico,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \quad (2.2)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala e $d\sigma^2$ é o elemento de linha para as componentes espaciais da métrica

$$d^2\sigma = \frac{d|\vec{x}|^2}{1 - \kappa|\vec{x}|^2} + |\vec{x}|^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.3)$$

em que \vec{x} são coordenadas comóveis, $\kappa = k/R^2$, R é o raio de curvatura e $k = -1, 0$ ou 1 é a curvatura normalizada para um Universo hiperbólico, plano ou esférico, respectivamente. A partir de resultados da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (CMB), temos fortes indícios de que a geometria do espaço é aproximadamente plana (ver e. g. [163]) e por isso consideraremos $k = 0$. As Equações de Campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

que relacionam a geometria do espaço-tempo (através do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$) com o conteúdo de massa-energia (dado pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$). Com a componente 00 dessa equação podemos derivar a primeira das equações de Friedmann, que é

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}, \quad (2.5)$$

em que H é a taxa de expansão do Universo e ρ é a densidade de energia (lembrando que estamos supondo $k = 0$ aqui). Das componentes espaciais das Equações de Einstein temos a segunda equação de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (2.6)$$

Dessas duas equações podemos derivar a equação de conservação de energia-momento

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right), \quad (2.7)$$

que pode ser resolvida considerando que cada componente da densidade de energia se conserva. Escrevendo então a densidade de energia como uma soma de suas componentes, temos

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (2.8)$$

em que ρ_m , ρ_r e ρ_Λ são as densidades de energia para matéria, radiação e constante cosmológica,

respectivamente. Para uma equação de estado do tipo $p = \omega\rho$, a equação (2.7) tem solução

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.9)$$

Os casos em que $\omega = 0, 1/3, -1$, que correspondem a matéria não-relativística, radiação e constante cosmológica, respectivamente.

É conveniente definir um parâmetro de densidade para cada componente da densidade de energia

$$\Omega_i = \frac{\rho_i^0}{\rho_{\text{crit}}^0}, \quad (2.10)$$

em que o índice zero indica valor no presente e ρ_{crit} é dado pela Eq. (2.5) para um Universo plano.

A partir da métrica (2.3) e estudando a propagação da luz (para a qual $ds = 0$), podemos obter uma relação entre o fator de escala $a(t)$ e o desvio para o vermelho z (que é a variação fracionária do comprimento de onda da luz entre emissão pelo objeto astronômico e sua detecção pelo observador), que é dada por [164]

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z, \quad (2.11)$$

em que o valor no presente é conveniente escolhido como $a(t_0) = 1$. Sabendo que $H^2 \equiv (\dot{a}/a)^2$, podemos obter uma expressão para o parâmetro de Hubble em função de z

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right). \quad (2.12)$$

A partir da Eq.(2.3) vemos que um deslocamento angular $d\theta$ equivale a uma distância física na direção transversal $|\vec{x}|d\theta$, de modo que, pela definição (2.1), a distância de diâmetro angular é dada simplesmente por $|\vec{x}|$ e z [4]. Em particular, para o caso do efeito de lente gravitacional é necessário considerarmos a distância de diâmetro angular entre dois desvios para o vermelho z_1 e z_2 , cuja forma fica [3, 4]

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{c}{H_0(1+z_2)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} dz. \quad (2.13)$$

Em nosso trabalho consideraremos um sistema de coordenadas adimensionais que nos possibilita realizar os cálculos sem uma preocupação inicial com os valores dos parâmetros cosmológicos.

2.2 Ângulo de Deflexão

Para estudar a deflexão da luz pelo campo gravitacional da lente, podemos considerar que o espaço-tempo é localmente plano, dado pela métrica de Minkowski e é fracamente perturbado pelo potencial gravitacional Newtoniano da lente, de modo que $\Phi/c^2 \ll 1$ (aproximação de campo fraco) e o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)|d\vec{x}|^2. \quad (2.14)$$

Considerando a propagação de um raio de luz ($ds = 0$), obtemos

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)|d\vec{x}|^2, \quad (2.15)$$

e, assim, podemos definir uma velocidade da luz efetiva na proximidade do campo gravitacional dada por

$$c' = \frac{|d\vec{x}|}{dt} = c \sqrt{\frac{1 + 2\Phi/c^2}{1 - 2\Phi/c^2}} \approx c \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right), \quad (2.16)$$

em que usamos a aproximação $\Phi/c^2 \ll 1$ para o resultado final. Podemos expressar o efeito do campo gravitacional nas trajetórias da luz em termos do índice de refração efetivo, que é

$$n = \frac{c}{c'} = \frac{1}{1 + 2\Phi/c^2} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (2.17)$$

Note que $n \geq 1$, já que o potencial gravitacional é negativo (e definido de modo a ir a zero no infinito).

O ângulo de deflexão da luz ao passar por um campo gravitacional é a integral do gradiente de n perpendicular à direção da trajetória da luz

$$\vec{\alpha} = - \int \vec{\nabla}_\perp n dl = \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_\perp \Phi dl. \quad (2.18)$$

A equação acima possui o contratempo de nos fazer integrar na trajetória da luz, mas como $\Phi/c^2 \ll 1$, esperamos que o ângulo de deflexão seja muito pequeno. Dessa forma, vamos utilizar a aproximação de Born, oriunda das teorias de espalhamento da mecânica quântica, para considerar a integração ao longo da trajetória não perturbada, que é uma linha reta. Para ver uma demonstração detalhada de como obter o ângulo de deflexão, recomendamos a leitura de P. Schneider et al. [2] e R. Narayan et al.[165].

Vamos considerar, por exemplo, a deflexão para uma massa pontual M , atuando como

lente. O potencial é

$$\Phi(b, z) = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{GM}{\sqrt{b^2 + z^2}}, \quad (2.19)$$

em que b é o parâmetro de impacto (que indica a menor distância entre o raio de luz e a lente) e z é a distância ao longo do caminho não perturbado (indicados na Fig. 2.2). Dessa forma, o gradiente do potencial é

$$\vec{\nabla}_{\perp} \Phi(b, z) = \frac{GM}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \vec{b}, \quad (2.20)$$

com \vec{b} ortogonal a z e apontando na direção da lente pontual. Com o gradiente podemos calcular a integral ao longo do caminho

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM \vec{b}}{(b^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{4}{c^2} GM \vec{b} \left[\frac{z}{b^2(b^2 + z^2)} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{4GM}{c^2 b} \hat{b}. \quad (2.21)$$

E assim, o ângulo de deflexão para uma lente pontual é

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (2.22)$$

2.3 Equação da Lente

Na seção acima consideramos uma perturbação em Minkowski para obter o ângulo de deflexão da luz. O mesmo procedimento poderia ter sido feito perturbando a métrica homogênea e isotrópica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. O resultado em relação à dependência em Φ é o mesmo, mas a relação entre ângulos e distâncias será dada agora pela distância de diâmetro angular discutida na Seção 2.1.

Na Fig. 2.3 esquematizamos a luz de uma fonte sendo desviada pelo campo gravitacional de um objeto atuando como lente. As distâncias de diâmetro angular entre o observador e a fonte, entre o observador e a lente e entre a lente e a fonte são D_{OS} , D_{OL} e D_{LS} , respectivamente. Em geral, $D_{OS} \neq D_{OL} + D_{LS}$, como fica claro da Eq. (2.13). O ângulo β é a posição angular real da fonte e θ é a posição angular de onde a observamos, após sofrer uma deflexão $\hat{\alpha}$.

Em estudos de formação de arcos, consideramos usualmente que o lenteamento é feito apenas por um objeto, ou seja, a já mencionada aproximação de lente fina, o que é uma boa

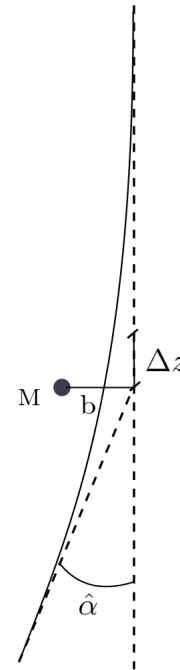


Figura 2.2: Diagrama para a deflexão da luz em um ângulo $\hat{\alpha}$ por uma massa pontual M .

aproximação na maioria dos casos. Das e Ostriker [166] mostraram através de simulações que a maior parte dos arcos é produzida por um único defletor, com a matéria ao longo da linha de visada contribuindo com até 12% do número de arcos formados.

Considerando que a distância entre o eixo óptico (convenientemente escolhido como eixo alinhado conosco e com a lente) e a imagem é a soma entre as distâncias deste eixo até a fonte e da fonte à imagem, levando em conta a geometria do sistema e supondo que $|\vec{\theta}| \ll 1$, $|\vec{\beta}| \ll 1$ e $|\hat{\alpha}| \ll 1$, temos [3]

$$\vec{\theta}D_{OS} = \vec{\beta}D_{OS} + \hat{\alpha}D_{LS}, \quad (2.23)$$

que é conhecida como a equação da lente. A relação (2.23) é fundamental para o lenteamento gravitacional, uma vez que resolvendo essa equação é possível obter as posições da(s) imagem(ns) a partir da posição $\vec{\beta}$ das fontes e da expressão para o ângulo de deflexão $\hat{\alpha}$ ($\vec{\theta}$). Ainda pelas propriedades geométricas, vemos que as posições angulares da fonte e da imagem podem ser relacionadas com as distâncias de diâmetro angular e com o parâmetro de impacto $\vec{\xi}$ no plano das lentes e a posição $\vec{\eta}$ no plano das fontes através das equações

$$\vec{\xi} = D_{OL}\vec{\theta}, \quad \vec{\eta} = D_{OS}\vec{\beta}. \quad (2.24)$$

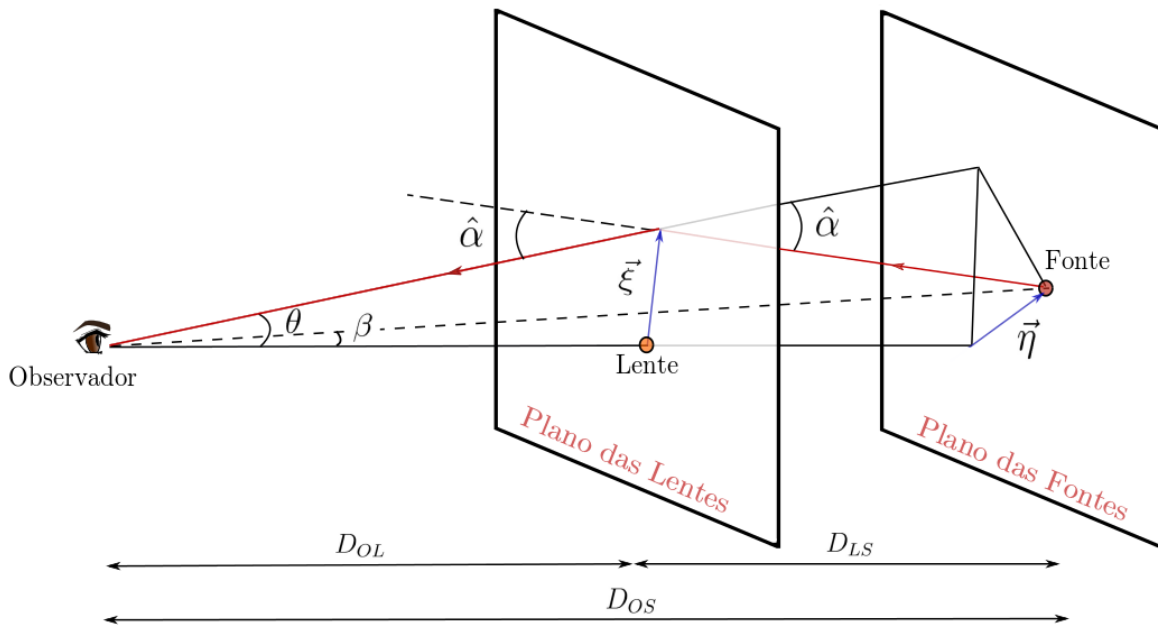


Figura 2.3: Representação esquemática do lenteamento gravitacional.

É conveniente trabalhar em coordenadas adimensionais e para isso podemos introduzir uma escala ξ_0 no plano das lentes (correspondente a η_0 no plano das fontes), tal que

$$\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad (2.25)$$

$$\vec{y} \equiv \frac{\vec{\eta}}{\eta_0}, \quad \eta_0 = \frac{D_{OS}}{D_{OL}} \xi_0, \quad (2.26)$$

em que a escolha de ξ_0 é arbitrária, de forma a eliminar um parâmetro na solução da equação da lente, como será exemplificado nas Subseções 2.7.1 e 2.7.2.

Com essas definições, podemos reescrever a equação da lente em forma adimensional como

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}), \quad (2.27)$$

em que se define o ângulo de deflexão adimensional como

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \left(\frac{D_{OL} D_{LS}}{\xi_0 D_{OS}} \right) \vec{\alpha}(\xi_0 \vec{x}). \quad (2.28)$$

2.4 Distribuição Superficial de Massa

Como dito anteriormente, utilizaremos a aproximação de lente fina. Desta forma, ao invés de considerar a distribuição tridimensional da densidade de matéria, utilizaremos a projeção desta no plano da lente, denotada por $\Sigma(\vec{\xi})$. Para obter essa distribuição superficial devemos integrar $\rho(\vec{R})$ ao longo da linha de visada, ou seja,

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_0^\infty \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (2.29)$$

em que fizemos a decomposição $\vec{R} = \vec{\xi} + z\hat{z}$, sendo z o eixo ótico.

Cada elemento de matéria contribuirá linearmente para o ângulo de deflexão, uma vez que o limite de campos fracos da relatividade geral é uma ótima aproximação e a gravitação é linear nesse regime. Assim, podemos pensar na lente extensa como uma soma de elementos de volume, cada um atuando como uma lente pontual. Para uma lente pontual, a deflexão é dada pela Eq. (2.22). Sendo assim, a contribuição de cada elemento de massa ocupando uma área $d^2\xi'$, para uma lente genérica, é

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (2.30)$$

em que $\vec{\xi}'$ é o vetor correspondente à distância do elemento de massa $dM = \Sigma(\xi') d^2\xi'$ à origem.

Vamos somar cada uma das contribuições dos elementos de massa para obter o ângulo de deflexão correspondente à contribuição total de uma lente extensa, ou seja,

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2 \vec{\xi}'. \quad (2.31)$$

A partir das Eqs. (2.25) e (2.28), o ângulo de deflexão reduzido é

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x}')}{\Sigma_{\text{crit}}} d^2 \vec{x}', \quad (2.32)$$

em que a densidade crítica superficial, Σ_{crit} é definida como

$$\Sigma_{\text{crit}} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}}. \quad (2.33)$$

Considerando a razão entre a densidade superficial de massa e a densidade crítica, $\Sigma/\Sigma_{\text{crit}}$, podemos determinar se o regime do lenteamento é forte ($\Sigma \gtrsim \Sigma_{\text{crit}}$) ou fraco ($\Sigma \ll \Sigma_{\text{crit}}$).

2.5 Potencial Efetivo da Lente

Podemos caracterizar o potencial reduzido da lente como sendo o potencial Newtoniano $\Phi(\vec{R})$ projetado no plano das lentes, ortogonal à linha do observador [2, 165],

$$\phi(\vec{\xi}) = \int \Phi(\vec{\xi}, z) dz. \quad (2.34)$$

Fazendo a transformação para coordenadas adimensionais, de modo análogo ao procedimento feito na última subseção, temos

$$\phi(\vec{x}) = \frac{2}{c^2 \xi_0^2} \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \int_0^\infty \Phi(\xi_0 \vec{x}, z) dz. \quad (2.35)$$

A equação de Poisson é satisfeita no limite de campos fracos e, dessa forma, a densidade superficial de massa (Eq. (2.29)) pode ser reescrita como

$$\Sigma(\xi_0 \vec{x}) = \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^\infty \vec{\nabla}^2 \Phi(\xi_0 \vec{x}, z) dz. \quad (2.36)$$

Para a decomposição do Laplaciano na forma

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\xi_0^2} \vec{\nabla}_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.37)$$

e utilizando a Eq. (2.35), temos

$$\vec{\nabla}_x^2 \phi(\vec{x}) = 2 \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{\text{crit}}}, \quad (2.38)$$

para o qual consideramos que a contribuição $\partial\Phi/\partial z$ se anula no infinito.

Pela função de Green para o Laplaciano em duas dimensões, $G(\vec{x}, \vec{x}') = \ln|\vec{x} - \vec{x}'|$, o potencial da lente pode ser reescrito como a forma

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \frac{\Sigma(\vec{x} - \vec{x}')}{\Sigma_{\text{crit}}} d^2 x'. \quad (2.39)$$

Note que

$$\vec{\nabla}_x \ln|\vec{x} - \vec{x}'| = \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}, \quad (2.40)$$

de modo que ao comparar a identidade acima com a Eq. (2.39) observa-se que o ângulo de deflexão reduzido é dado em função do gradiente do potencial da lente, ou seja,

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}). \quad (2.41)$$

Substituindo esse resultado na equação da lente (Eq. (2.27)) obtemos

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}). \quad (2.42)$$

Assim, dependendo do conhecimento prévio de $\Sigma(\xi_0 \vec{x})$ ou de $\phi(\vec{x})$ é possível fazer a escolha de obter o ângulo de deflexão integrando a densidade superficial de massa (Eq. (2.36)) ou através do gradiente do potencial da lente (Eq. (2.35)).

2.6 Mapeamento

Esta seção foi baseada nas teses de doutorado de Gabriel B. Caminha [167] e Habib S. Dúmet-Montoya [168].

O lenteamento gravitacional é acromático, ou seja não interfere na frequência dos fótons da fonte. Além disso, o número de fótons é mantido. Isso significa que uma imagem magnificada e distorcida irá conservar o brilho superficial da fonte. Em outras palavras, o aumento do ângulo sólido subentendido por essas imagens acarreta no aumento de brilho das imagens, que nos permite observar objetos mais distantes.

Conseqüentemente, podemos definir a magnificação de uma imagem como a razão entre os ângulos sólidos da imagem e da fonte

$$\mu = \frac{\Delta\Omega_{\text{imagem}}}{\Delta\Omega_{\text{fonte}}}. \quad (2.43)$$

Para uma fonte infinitesimal essa razão entre os ângulos sólidos é determinada considerando a distorção da área no plano da lente, ou seja, o Jacobiano da transformação de coordenadas do plano das fontes ao plano das lentes

$$\mu = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}\right) = \det\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1}. \quad (2.44)$$

As propriedades locais do mapeamento são descritas pela matriz Jacobiana dessa transformação de coordenadas,

$$\mathbb{A}_{ij} \equiv \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.45)$$

onde utilizamos que $\alpha_i = \partial\phi/\partial x_i$, dado pela Eq. (2.41), e que x_i indica a i -ésima componente de \vec{x} no plano da lente. Note pela expressão acima, que a matriz Jacobiana da transformação entre o plano da fonte e da lente pode ser escrita como combinação das derivadas segundas do potencial da lente.

Para simplificar a notação, utilizaremos

$$\phi_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.46)$$

de modo a escrever a matriz \mathbb{A}_{ij} como

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_{,11} & -\phi_{,12} \\ -\phi_{,21} & 1 - \phi_{,22} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

A densidade superficial de massa, $\Sigma(\xi_0 \vec{x})$, normalizada pela densidade crítica é denominada convergência, $\kappa(\vec{x})$, ou seja,

$$\frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{\text{crit}}} \equiv \kappa(\vec{x}), \quad (2.48)$$

de modo que, pela Eq. (2.38) temos

$$\kappa(\vec{x}) \equiv \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{\text{crit}}} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\phi_{,11} + \phi_{,22}). \quad (2.49)$$

Em vista disso, os dois termos da matriz Jacobiana são reescritos como

$$\mathbb{A} = (1 - \kappa) \mathbb{1} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$= (1 - \kappa) \mathbb{1} - \gamma \begin{pmatrix} \cos(2\phi_\gamma) & \sin(2\phi_\gamma) \\ \sin(2\phi_\gamma) & -\cos(2\phi_\gamma) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Escrevendo dessa maneira é mais intuitivo entender a contribuição da convergência e do cisalhamento para a distorção das imagens. A convergência atua causando um foco isotrópico dos raios de luz, o que gera um aumento isotrópico da fonte, preservando a forma das imagens, mas mudando o tamanho. Enquanto isso, o cisalhamento introduz anisotropia ao mapeamento, de forma que a imagem é distorcida [165].

A matriz Jacobiana tem dois autovalores, um associado com a distorção na direção tangencial (λ_t) e outro com a deformação radial (λ_r),

$$\lambda_t = 1 - \kappa - \gamma \quad (2.56)$$

$$\lambda_r = 1 - \kappa + \gamma. \quad (2.57)$$

Podemos rotacionar a matriz Jacobiana de modo que ela seja diagonalizada, ou seja

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Seguindo o procedimento proposto por Meneghetti¹, considere uma fonte circular cujos pontos de mesma intensidade luminosa satisfazem a equação $y_1^2 + y_2^2 = R_0^2$. Pela equação da lente (2.27), os pontos do plano da fonte que obedecem essa expressão serão mapeados nos pontos (x_1, x_2) através da matriz Jacobiana,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

e podemos substituir na equação da circunferência de modo a ter

$$y_1^2 + y_2^2 = (1 - \kappa - \gamma)^2 x_1^2 + (1 - \kappa + \gamma)^2 x_2^2 = R_0^2. \quad (2.60)$$

Note que a equação anterior corresponde à uma elipse no plano das fontes, e, com semi-

¹http://www.ita.uni-heidelberg.de/massimo/sub/Lectures/gl_all.pdf

eixos maior e menor sendo

$$a = \frac{R_0}{1 - \kappa - \gamma}, \quad b = \frac{R_0}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (2.61)$$

Essa elipse está representada na Fig. 2.4 e para o caso com apenas convergência ($\gamma = 0$) a Eq. (2.60) se reduz a uma circunferência de raio

$$R_I = \frac{R_0}{(1 - \kappa)}. \quad (2.62)$$

A magnificação total é obtida a partir das Eqs. (2.44) e (2.45), e retorna o resultado

$$\mu = \frac{1}{\det \mathbb{A}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}, \quad (2.63)$$

e o inverso dos autovalores da matriz Jacobiana nos fornece as magnificações nas direções tangencial e radial

$$\mu_t = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}, \quad (2.64)$$

$$\mu_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}, \quad (2.65)$$

de modo que a magnificação total em termo das magnificações em cada direção é

$$\mu = \mu_t \mu_r = \frac{1}{\lambda_t \lambda_r}. \quad (2.66)$$

Para os pontos nos quais $\det \mathbb{A} = 0$, ou seja, ao menos um dos autovalores é zero, define-se as chamadas curvas críticas no plano das lentes.

2.7 Alguns Modelos de Lentes

Um ponto importante para o lenteamento gravitacional é determinar quais combinações de lentes e fontes irão reproduzir uma certa imagem. Iremos apontar as características principais de alguns dos modelos mais simples ou mais utilizados de lentes.

2.7.1 Lente Pontual

O modelo mais simples de lente é dado por uma massa pontual. O ângulo de deflexão para essa situação é dado pela Eq. (2.22) e substituindo na equação da lente (2.27), temos

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL} D_{LS}}{x^2 \xi_0^2 D_{OS}} \vec{x}. \quad (2.67)$$

Para a escolha

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}}}, \quad (2.68)$$

a equação acima será

$$\vec{y} = \vec{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad (2.69)$$

em que $x = |\vec{x}|$.

Essa equação é de segundo grau em x e, dessa forma, teremos duas posições radiais observadas x para cada posição real y ,

$$x^\pm = \frac{y \pm \sqrt{4 + y^2}}{2}, \quad (2.70)$$

indicando a posição das imagens múltiplas.

Para alinhamento entre fonte e lente ($y = 0$) a formação de imagens se dará em $x = 1$ e será deformada em um anel de raio ξ_0 , o anel de Einstein, com raio angular

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}}. \quad (2.71)$$

Calculando o Jacobiano para o lenteamento, temos a magnificação total

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{-1}. \quad (2.72)$$

Um ponto importante é que a magnificação será infinita quando a fonte for mapeada no anel de Einstein. Os autovalores da matriz de magnificação são

$$\mu_t = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}, \quad \mu_r = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1}. \quad (2.73)$$

Quando $x \rightarrow 1$ (formação de anel), a magnificação na direção radial (μ_r) é um número finito, enquanto a magnificação tangencial (μ_t) tende a infinito, como se a imagem estivesse sendo distorcida infinitamente na direção tangencial, resultando no anel.

Por fim, a convergência e o cisalhamento são dados por

$$\kappa = \pi \delta(\vec{x}), \quad (2.74)$$

$$\gamma = \frac{1}{x^2}, \quad (2.75)$$

em que $\delta(\vec{x})$ é a função delta de Dirac.

2.7.2 Lente com Simetria Axial

Quando o objeto que atua como lente é extenso, como uma galáxia ou aglomerado de galáxias, precisamos levar em conta a distribuição de massa, como vimos anteriormente neste capítulo. Para isso, vamos considerar inicialmente uma lente com simetria axial.

Das Eqs. (2.38) e (2.41) podemos escrever

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 2 \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{\text{crit}}}. \quad (2.76)$$

O teorema de Gauss em duas dimensões é

$$\int_{S_x} \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} dS = \oint_{C_x} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l}, \quad (2.77)$$

em que C_x é a fronteira da área S_x e $d\vec{l}$ aponta para fora de C_x . Como estamos considerando lente com simetria axial, o ângulo de deflexão terá apenas componente radial. Escolhendo uma circunferência C_ξ com o mesmo centro que a distribuição de massa projetada e integrando os dois lados da Eq. (2.76) na área englobada por C_ξ produz [167]

$$\int_0^{2\pi} \alpha(\xi_0 x) d\phi = \frac{2}{\Sigma_{\text{crit}}} \int_{S_x} \Sigma(\xi_0 x) dS, \quad (2.78)$$

de modo que o ângulo de deflexão fica

$$\vec{\alpha} = \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{\text{crit}}} \frac{\vec{x}}{x^2}. \quad (2.79)$$

Vamos definir a massa adimensional como

$$m(x) \equiv \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{\text{crit}}}, \quad (2.80)$$

e a equação adimensional da lente para um objeto com simetria axial será

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{m(x) \hat{x}}{x}. \quad (2.81)$$

Para obter a Jacobiana da transformação entre o plano das fontes e o plano das lentes precisamos escrever o ângulo de deflexão adimensional como um vetor:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = (\alpha_1(\vec{x}), \alpha_2(\vec{x})) = \frac{m(\vec{x})}{x^2} \vec{x}, \quad (2.82)$$

em que $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e iremos utilizar a seguinte relação para as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x_i}{x} \frac{d}{dx}, \quad (2.83)$$

de modo a ter as diferenciações

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = \frac{x_1^2}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} + m(x) \frac{x_2^2 - x_1^2}{x^4}, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = \frac{x_2^2}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} + m(x) \frac{x_1^2 - x_2^2}{x^4}, \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = \frac{x_1 x_2}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} - 2m(x) \frac{x_1 x_2}{x^4}. \quad (2.86)$$

Com esse resultado a matriz Jacobiana da transformação fica

$$\mathbb{A} = \mathbb{1} - \frac{m(x)}{x^4} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

e o Jacobiano é dado por

$$\det \mathbb{A} = \left[1 - \frac{m(x)}{x^2} \right] \left[1 - \frac{d(m(x)/x)}{dx} \right]. \quad (2.88)$$

Observe aqui que o determinante da matriz Jacobiana se anula para

$$\frac{m(x)}{x^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{d(m(x)/x)}{dx} = 1. \quad (2.89)$$

Isso indica que usualmente existem duas curvas críticas em forma de circunferência (por conta da dependência radial).

Considerando ainda a matriz Jacobiana e comparando com a Eq. (2.54), podemos escrever cada componente da matriz de cisalhamento e a convergência

$$\kappa(x) = \frac{1}{2x} \frac{dm(x)}{dx}, \quad (2.90)$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) \left(\frac{2m(x)}{x^4} - \frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} \right), \quad (2.91)$$

$$\gamma_2(x) = x_1 x_2 \left(\frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} - \frac{2m(x)}{x^4} \right). \quad (2.92)$$

E as magnificações tangencial e radial, dadas pelas Eqs. (2.64) e (2.65), são

$$\mu_t = \left[1 - \frac{m(x)}{x^2} \right]^{-1} \quad (2.93)$$

$$\mu_r = \left[1 - \frac{d(m(x)/x)}{dx} \right]^{-1}. \quad (2.94)$$

Note que cada um dos autovalores da matriz Jacobiana, $\lambda_{t,r} = \mu_{t,r}^{-1}$, corresponde aos termos entre colchetes da Eq. (2.88). Um dos exemplos mais utilizados para representar uma lente com simetria axial é o da Esfera Isotérmica Singular, que é o foco desta tese e iremos detalhar melhor no próximo capítulo.

2.7.3 Modelo de Navarro-Frenk-White

Esta subseção foi parcialmente baseada no texto da tese de Cristina Furlanetto [169].

Ao considerar o lenteamento gravitacional por aglomerados de galáxias é comum utilizar o modelo de Navarro-Frenk-White (NFW), mais realista que os citados anteriormente nesse capítulo. Para esse modelo, utiliza-se simulação de N-corpos, oriunda de um ajuste radial à distribuição de matéria em halos obtidos a partir de simulações, e é possível variar a cosmologia do problema [170, 171]. Através dessas simulações os autores encontraram o perfil de densidade dos aglomerados com a seguinte função radial

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (2.95)$$

em que r_s e ρ_s são a escala e a densidade características dos halos de matéria escura. Pela equação acima, vemos que para regiões próximas ao centro do aglomerado ($r/r_s \ll 1$) o perfil de densidade é proporcional à r^{-1} , enquanto decresce mais rapidamente com r^{-3} em regiões mais afastadas.

A massa dentro de uma região de raio r é

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = \frac{4\pi\rho_s r^3}{C^3} \left[\ln(1+C) - \frac{C}{1+C} \right], \quad (2.96)$$

em que C é chamado de parâmetro de concentração e é dado por

$$C \equiv \frac{r}{r_s}. \quad (2.97)$$

Note que a massa diverge no limite $r \rightarrow \infty$ e para contornar esse problema podemos definir um limite para o raio do aglomerado que englobe Δ vezes uma determinada densidade de referência (ρ_{ref}). Essa densidade pode ser a densidade de massa do Universo (ρ_m), a densidade crítica (ρ_{crit}) ou a densidade média ($\bar{\rho}$). É comum usar $\Delta = 200$ para o valor do contraste [170]. Com essa definição de raio de corte para o aglomerado ($r = r_\Delta$), a densidade para o modelo NFW é

$$\rho_s = \frac{\Delta\rho_{\text{ref}}}{3} \frac{C^3}{\ln(1+C) - \frac{C}{1+C}}, \quad (2.98)$$

e do parâmetro de concentração, tem-se

$$r_s = \frac{r_\Delta}{C} = \frac{1}{C} \left(\frac{3M_\Delta}{4\pi\Delta\rho_{\text{ref}}} \right)^{1/3}. \quad (2.99)$$

Para o modelo NFW encontra-se duas curvas críticas, uma tangencial e uma radial, de modo que as imagens lenteadas podem ser distorcidas em ambas as direções. Assim o modelo NFW pode produzir arcos tangenciais e radiais [172].

2.7.4 Modelos Elípticos e Pseudo-Elípticos

Modelos de lentes mais simples são construídos, em geral, a partir de sistemas com simetria axial. Mas ao tornar o problema mais geral, é necessário incluir mais parâmetros, como elipticidade ou orientação da lente, para desenvolver modelos mais realistas.

O procedimento para considerar os efeitos da elipticidade é construir uma densidade de matéria projetada ou potencial com essa nova simetria. Dessa forma, impõe-se que a convergência ou o potencial da lente sejam constantes sobre elipses. Para tal, um caminho é substituir a variável radial, que é constante sobre círculos, por uma que possua simetria elíptica

$$x^2 \rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}. \quad (2.100)$$

Para modelos elípticos, essa elipticidade é introduzida na distribuição de massa, ou seja, a densidade superficial é constante sobre elipses [173–175]. Uma motivação adicional para trabalhar com modelos elípticos vem do fato de que resultados de simulações de N-corpos indicam que halos de matéria escura são triaxiais [176]. Nos chamados modelos elípticos não é possível obter expressões analíticas para o potencial na maioria dos casos, de modo que faz-se necessária a utilização de algoritmos numéricos e só é possível obter as derivadas do potencial da lente em termos de integrais [177, 178]. Esses cálculos numéricos fazem com que a determinação das quantidades do lenteamento seja mais dispendiosa.

Uma grande vantagem de incluir a simetria elíptica no potencial ao invés de fazê-lo na distribuição de massa é a possibilidade de se obter uma expressão analítica para o ângulo de deflexão. Utilizar o potencial elíptico é uma boa aproximação para um grande intervalo de elipticidades e massas [179, 180], entretanto, a aproximação perde sentido físico para valores grandes de elipticidade, tendo o surgimento de distribuição de massa em forma de halteres. Nesse limite é necessário retomar a simetria elíptica para a distribuição superficial de massa.

2.7.5 Modelos Isotérmicos

Os modelos ditos isotérmicos singulares são importantes pois são excelentes aproximações para a distribuição total de matéria na escala de massa galáctica e permitem obter soluções

analíticas para diversas quantidades de problemas de lentes. Esta é uma característica única desses modelos, pela simplicidade do potencial e pelo perfil de densidade radial.

Como mencionado, longe de ser um *toy model*, os modelos isotérmicos são realistas para lentes na escala de uma galáxia individual, sendo portanto importantes para aplicações práticas, além da conveniência supracitada de ter solução analítica. E são nesses modelos, mais especificamente na Esfera Isotérmica Singular que nosso trabalho irá focar. Para mais detalhes do uso de modelos isotérmicos na escala galáctica e em lenteamento forte, ver [9, 181–186].

O perfil radial de densidade do modelo é dado por [2, 187, 188]

$$\rho(R) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi GR^2}, \quad (2.101)$$

em que σ_v^2 é a dispersão de velocidades unidimensional das partículas.

2.7.6 Formalismo Perturbativo

Quando uma fonte pontual está perfeitamente alinhada com uma lente com simetria axial, sua imagem será em forma de um anel (o chamado *anel de Einstein*). Todavia, se a fonte não está mais alinhada com a lente ou esta última não possui simetria axial, o anel pode ser quebrado em arcos. Um *método perturbativo* baseado na ideia de que arcos são perturbações do anel de Einstein foi proposto por C. Alard [189–193] e nessa abordagem, é obtida uma solução aproximada da equação da lente quando o desvio em relação à simetria axial é pequeno. A partir dessa solução é possível obter expressões analíticas para arcos gravitacionais formadas por fontes finitas.

O formalismo perturbativo é importante pois pode ser aplicado a modelos mais gerais, desde que representando uma concentração central de matéria que diminui com o raio, ou seja, bom para galáxias e aglomerados, e desde que estejamos no regime forte de lentes. Testes de validade dessa aproximação foram estudados em [168, 194]. É interessante notar que os resultados perturbativos são exatos no caso de perfis isotérmicos [194].

CAPÍTULO 3

Esfera Isotérmica Singular

Se o objeto que atua como lente é uma galáxia, precisamos considerar sua distribuição de massa. Um modelo simples que descreve essa situação é a Esfera Isotérmica Singular - SIS (do nome em inglês *Singular Isothermal Sphere*) e assume que as componentes da massa comportam-se como partículas em um gás ideal, confinadas pelo seu potencial gravitacional esfericamente simétrico. Neste capítulo apresentamos o perfil de densidade para SIS e propriedades oriundas dessa distribuição de massa, como a equação da lente e magnificação das imagens. Além disso incluímos a formação de imagens para objetos lenteados pela SIS, considerando que a fonte é pontual, circular ou elíptica.

3.1 Funções Básicas do Lenteamento pelo Modelo da SIS

Projetando o perfil de densidade Eq. (2.101) segundo a Eq. (2.29), temos

$$\Sigma(\xi_0 x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{dz}{((\xi_0 x)^2 + z^2)} = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{\pi}{(\xi_0 x)} \quad (3.1)$$

e escolhendo o raio de Einstein como $\xi_0 = \sigma_v^2 / G\Sigma_{\text{crit}}$,

$$\Sigma(\xi_0 x) = \frac{\Sigma_{\text{crit}}}{2x}. \quad (3.2)$$

A densidade superficial restrita a um círculo de raio x , é

$$\Sigma(\xi_0 x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x x' \frac{\Sigma_{\text{crit}}}{2x'} dx' = \frac{\Sigma_{\text{crit}}}{x}, \quad (3.3)$$

e, conseqüentemente, temos da Eq. (2.48) a convergência, que é proporcional ao inverso da coordenada radial

$$\kappa(x) = \frac{\Sigma(\xi_0 x)}{\Sigma_{\text{crit}}} = \frac{1}{x}. \quad (3.4)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (3.2) e (3.3) nas Eqs. (2.79), (2.90)-(2.92), temos as expressões para as funções do lenteamento: ângulo de deflexão, convergência e cisalhamento

$$\vec{\alpha}(x) = \hat{x}, \quad (3.5)$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{2x}, \quad (3.6)$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2x}. \quad (3.7)$$

O ângulo de deflexão para o modelo da SIS é axialmente simétrico, o que irá nos possibilitar obter soluções analíticas para parte considerável dos resultados desta tese. Aqui o cisalhamento e a convergência serão iguais (Eqs. (3.6) e (3.7)) e dependerão unicamente da coordenada radial. O potencial da lente, de acordo com a Eq. (2.35), é

$$\varphi(x) = x, \quad (3.8)$$

e a equação da lente, Eq. (2.81), pode ser escrita como

$$\vec{y} = (x - 1)\hat{x}. \quad (3.9)$$

Após substituir as expressões para $\kappa(x)$ e $\gamma(x)$, a matriz Jacobiana, dada na Eq. (2.87), é

$$\mathbb{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - (1/x)\sin^2 \phi & (1/2x)\sin 2\phi \\ (1/2x)\sin 2\phi & 1 - (1/x)\cos^2 \phi \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

na qual os autovalores tangencial e radial, λ_t e λ_r , são

$$\lambda_t = 1 - \frac{1}{x}, \quad \lambda_r = 1, \quad (3.11)$$

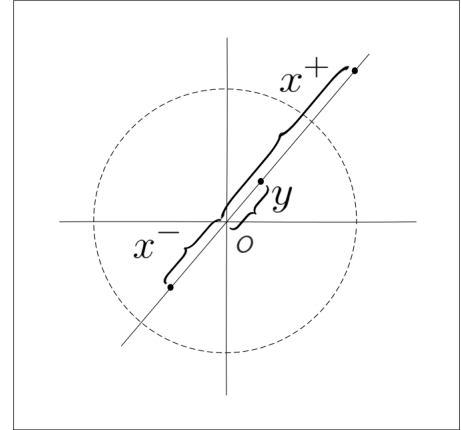
e, dessa forma, a magnificação total é

$$\mu^{-1} = \det \mathbb{A} = \lambda_r \lambda_t = 1 - \frac{1}{x}. \quad (3.12)$$

Note que como $\lambda_r = 1$, as imagens não sofrerão esticamento na direção radial e a magnificação é completamente devida à deformação tangencial. Observe que o determinante da matriz Jacobiana somente se anula em $x = 1$, de modo que a SIS possuirá apenas a curva crítica tangencial. Entretanto, existe um limite no plano das fontes para o qual a multiplicidade das imagens irá mudar (no raio de $y = 1$). Esse contorno é usualmente referido como pseudocústica radial [195] e manteremos essa terminologia ao longo do texto.

3.2 Fonte Pontual

As imagens para uma fonte pontual podem ser obtidas invertendo e solucionando a equação da lente, o que podemos alcançar considerando a magnitude do vetor \vec{y} na Eq. (3.9) e reescrevendo a expressão para a coordenada radial x . Temos duas imagens formadas na direção \overline{Oy} , uma dentro e outra fora da curva crítica tangencial (representada pela linha tracejada na Fig. 3.1) nas posições radiais:



$$x^{\pm} = 1 \pm y. \quad (3.13)$$

Figura 3.1: Fonte pontual e imagens.

A magnificação corresponde à imagem de uma fonte infinitesimal em cada uma dessas posições, e a Eq. (3.12) para cada uma das imagens é

$$\mu^{\pm} = 1 \pm \frac{1}{y}. \quad (3.14)$$

Além da formação de duas imagens, podemos ter apenas uma imagem ou um anel sendo formados, e isso irá depender da posição da fonte. Abaixo descrevemos em mais detalhe essas condições:

- $y = 0$: A imagem é formada em $x = 1$, com magnificação infinita, de modo que um anel de espessura infinitesimal é formado.
- $y < 1$: A Eq. (3.13) tem duas soluções, gerando uma imagem em $x = 1 + y$, fora da curva crítica tangencial com paridade positiva, μ^+ , e outra em $x = 1 - y$, dentro da curva crítica e com paridade negativa, μ^- . A separação angular entre as duas imagens é $\delta x = 2$.
- $y \geq 1$: A partir da Eq. (3.13) vemos que a equação da lente tem apenas uma solução, $x = 1 + y$, com magnificação $\mu^+ = 1 + 1/y$ no intervalo

$$1 < \mu^+ \leq 2, \quad (3.15)$$

e a imagem tem paridade positiva. Na igualdade, a única imagem se forma em $x = 2$ com magnificação $\mu^+ = 2$ enquanto a outra imagem desaparece totalmente em $x = 0$ com magnificação nula $\mu^- = 0$.

3.3 Fonte Circular

Podemos considerar uma fonte finita como sendo composta por um contínuo de fontes infinitesimais e dessa forma estender o resultado da seção anterior. Para um primeiro exemplo, considere qualquer ponto na borda de uma fonte circular de raio R_0 , como esquematizado na Fig. 3.2. Podemos representar vetorialmente essa posição como

$$\vec{R}_0 = \vec{y} - \vec{s}, \quad (3.16)$$

em que $\vec{s} = s_1 \hat{y}_1 + s_2 \hat{y}_2$ e assim escrever as componentes polares de \vec{s} no plano das imagens

$$\vec{s} = (s_1 \cos \phi + s_2 \sin \phi) \hat{x} + (-s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) \hat{\phi}, \quad (3.17)$$

em que usamos

$$\hat{y}_1 = \cos \phi \hat{x} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad \hat{y}_2 = \sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{\phi}. \quad (3.18)$$

Dessa forma, lembrando que a equação da lente aqui é $\vec{y} = (x-1)\hat{x}$,

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 &= \vec{y} - \vec{s} \\ &= (x-1)\hat{x} - (s_1 \cos \phi + s_2 \sin \phi) \hat{x} - (-s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$= (x-1 - s_1 \cos \phi - s_2 \sin \phi) \hat{x} + (s_1 \sin \phi - s_2 \cos \phi) \hat{\phi}. \quad (3.20)$$

Usando $|\vec{R}_0|^2 = R_0^2$ e resolvendo para a coordenada radial x , temos as expressões para as bordas externa, x^+ , e interna, x^- , das imagens:

$$x^\pm = 1 + s_1 \cos \phi + s_2 \sin \phi \pm \sqrt{R_0^2 - (s_1 \sin \phi - s_2 \cos \phi)^2}, \quad (3.21)$$

com as equações paramétricas

$$x_1 = x^\pm \cos \phi, \quad x_2 = x^\pm \sin \phi, \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi). \quad (3.22)$$

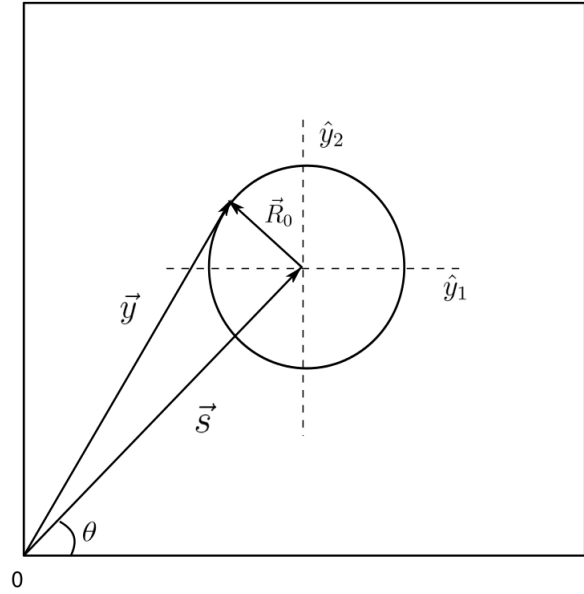


Figura 3.2: Fonte circular com a especificação de nossa nomenclatura.

É conveniente reescrever s_1 e s_2 em função da posição radial e angular do centro da fonte. Para isso, substituímos

$$s_1 = s \cos \theta, \quad s_2 = s \sin \theta, \quad (3.23)$$

de modo que a Eq. (3.21) se torna

$$x^\pm = 1 + s \cos(\phi - \theta) \pm \sqrt{R_0^2 - s^2 \sin^2(\phi - \theta)}. \quad (3.24)$$

A raiz quadrada delimita o intervalo no qual ϕ varia, ou seja, os extremos das imagens, que ocorrerão para $x^+ = x^-$, indicando que onde as duas soluções são as mesmas a raiz quadrada é zero. Além disso, temos dois intervalos angulares que mantêm o argumento da raiz positivo, o que significa que teremos duas imagens sendo formadas nessa situação.

3.3.1 “Espinha Dorsal” das Imagens

Um elemento importante de nosso estudo é a “espinha dorsal” dos arcos, que é a curva definida como a média entre as margens interna e externa dos arcos e está representada na Fig. 3.3 pela linha cinza pontilhada, juntamente às curvas x^\pm . Note que essa linha passa pelos extremos dos arcos, uma vez que são os pontos de encontro das duas partes dos arcos. A expressão para essa espinha dorsal é

$$\bar{x}(\phi) = \frac{x^+ + x^-}{2} = 1 + s \cos(\phi - \theta). \quad (3.25)$$

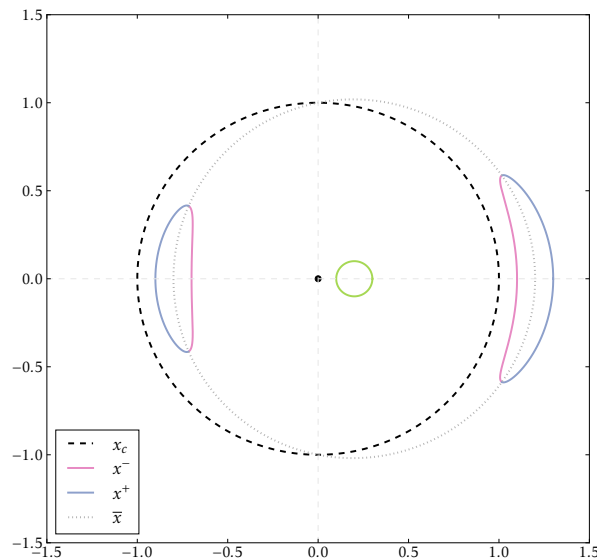


Figura 3.3: Formação de imagens para lenteamento da SIS considerando uma fonte circular (verde) com raio $R_0 = 0.1$ e posição $s = 0.2, \theta = 0$. A curva cinza pontilhada é a espinha dorsal dos arcos, a curva preta tracejada é a curva crítica tangencial e as curvas magenta e azul indicam as soluções interna e externa dos arcos, respectivamente.

É interessante notar que a espinha dorsal é independente do raio da fonte. Sendo conhecida a posição da fonte, a espinha dorsal é definida sobre 2π . Todas as fontes com raios diferentes (ou isofotas de uma fonte com perfil de brilho circular) terão a mesma curva média. A curva dada pela expressão (3.25) e conhecida como limaçon [196] e possui as seguintes características:

- Se $s = 0$ o limaçon será uma circunferência e isso ocorrerá quando a fonte estiver alinhada com a lente.
- Se $s \leq 1/2$, o limaçon é convexo. Os parâmetros em acordo com a Fig. 3.4(a) irão gerar imagens associadas com um formato de arco mais alongado, porque estarão relacionados a menores valores da posição da fonte.
- Se $1/2 < s < 1$, o limaçon possui uma extremidade para o interior, como indicado na Fig. 3.4(b) e sua relevância ficará evidente quando avaliarmos a formação do arco interno à curva crítica tangencial, uma vez que apresenta uma forma similar a uma gota quando a distância da fonte aumentar, o que é esperado, uma vez que a curva média seguirá o mesmo comportamento dos arcos.
- Se $s = 1$, o limaçon degenera em um cardioide, o que significa que possuirá uma ponta, localizada em $(0, 0)$ para esse caso. Essa estrutura indica a situação limite entre a formação de uma ou duas imagens e está indicada na Fig. 3.4(c).
- Se $s > 1$, o limaçon possui um laço interno e essa situação ocorrerá a medida que a distância da fonte aumenta, caso representado na Fig. 3.4(d). O laço indica que a condição $x^\pm > 0$ não seria mais satisfeita e nós perderíamos uma das imagens.

O limaçon não é uma circunferência (exceto em $s = 0$), mas a porção da curva que passa pelo arco externo é bem similar a um segmento de círculo, mas com centro de curvatura desviado do centro da lente.

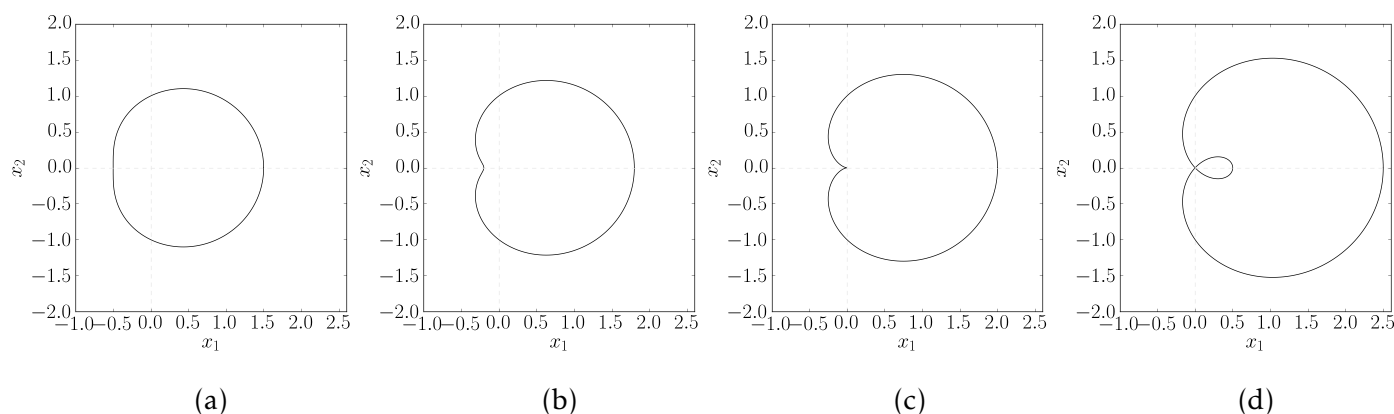


Figura 3.4: “Espinha dorsal” com $\theta = 0$ e $s = 0.5, 0.8, 1$ e 1.5 (da esquerda para a direita).

3.3.2 Formação de Imagens

Como a lente possui simetria axial, podemos considerar que o centro das fontes será alinhado com o eixo das abscissas ($\theta = 0$) sem perda de generalidade, pois sempre podemos rotacionar o sistema. Assim, podemos analisar as situações específicas para a formação de imagens, sendo elas, anel de Einstein, duas ou uma imagem, respectivamente:

- $s \leq R_0$: A fonte engloba a cáustica tangencial (neste caso $y = 0$) e temos a formação de anéis de Einstein, como na Fig. 3.5. Se $s = 0$, o anel é centrado na origem como indicado na Fig. 3.6. A igualdade representa o limite entre a formação de duas imagens e um anel de Einstein, o que está ilustrado pela curva magenta na primeira linha da Figura 3.8. Aqui, a extremidade da fonte intercepta a cáustica tangencial.

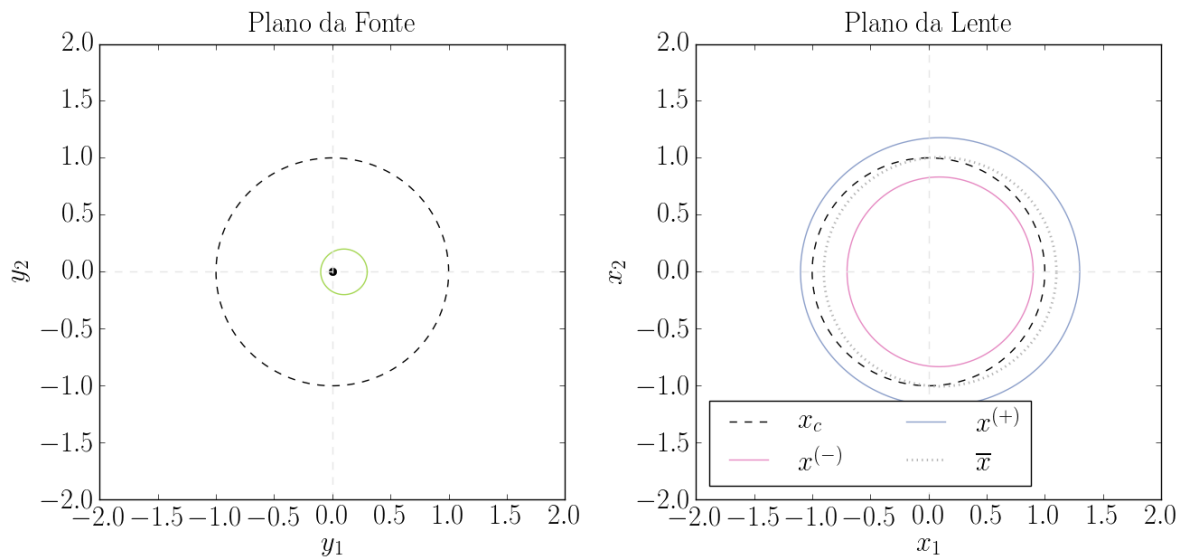


Figura 3.5: Formação de anel de Einstein para a SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.15$ and $R_0 = 0.2$.

- $|s_0 - R_0| < 1$: A fonte está dentro da pseudo-cáustica, que corresponde à curva tracejada no plano das fontes. Nesse caso temos duas imagens formadas, como indicado na Fig. 3.7.
- $|s_0 - R_0| \geq 1$: A fonte está completamente fora da pseudo-cáustica e nesse caso apenas uma imagem é formada. Essa situação está ilustrada na segunda linha da Fig. 3.7. A igualdade indica a situação limite, na qual a fonte intercepta a pseudocáustica em um único ponto.

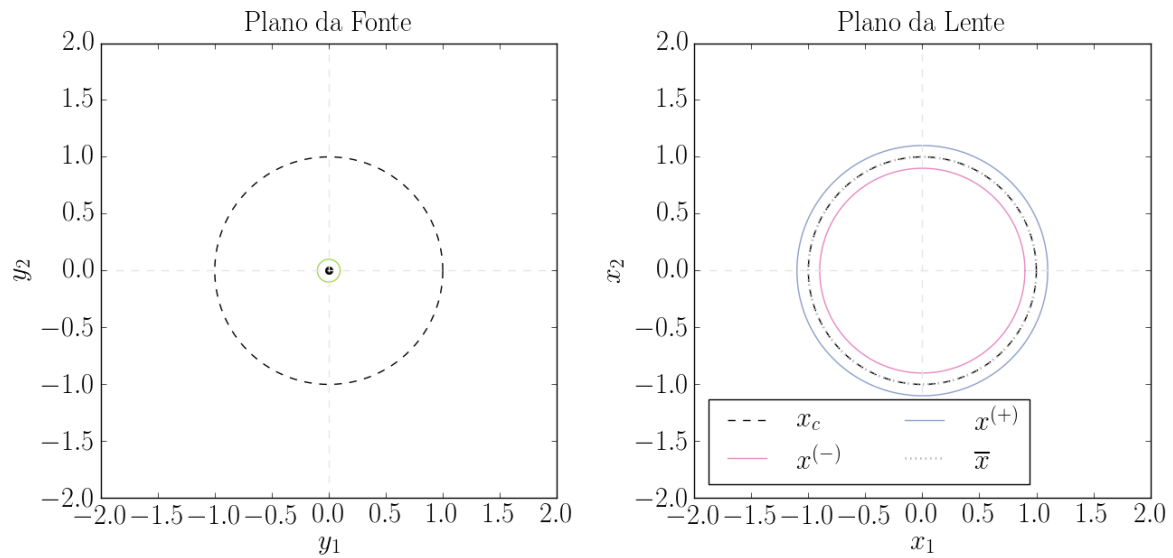


Figura 3.6: Formação de anel de Einstein centralizado para a SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.0$ and $R_0 = 0.1$.

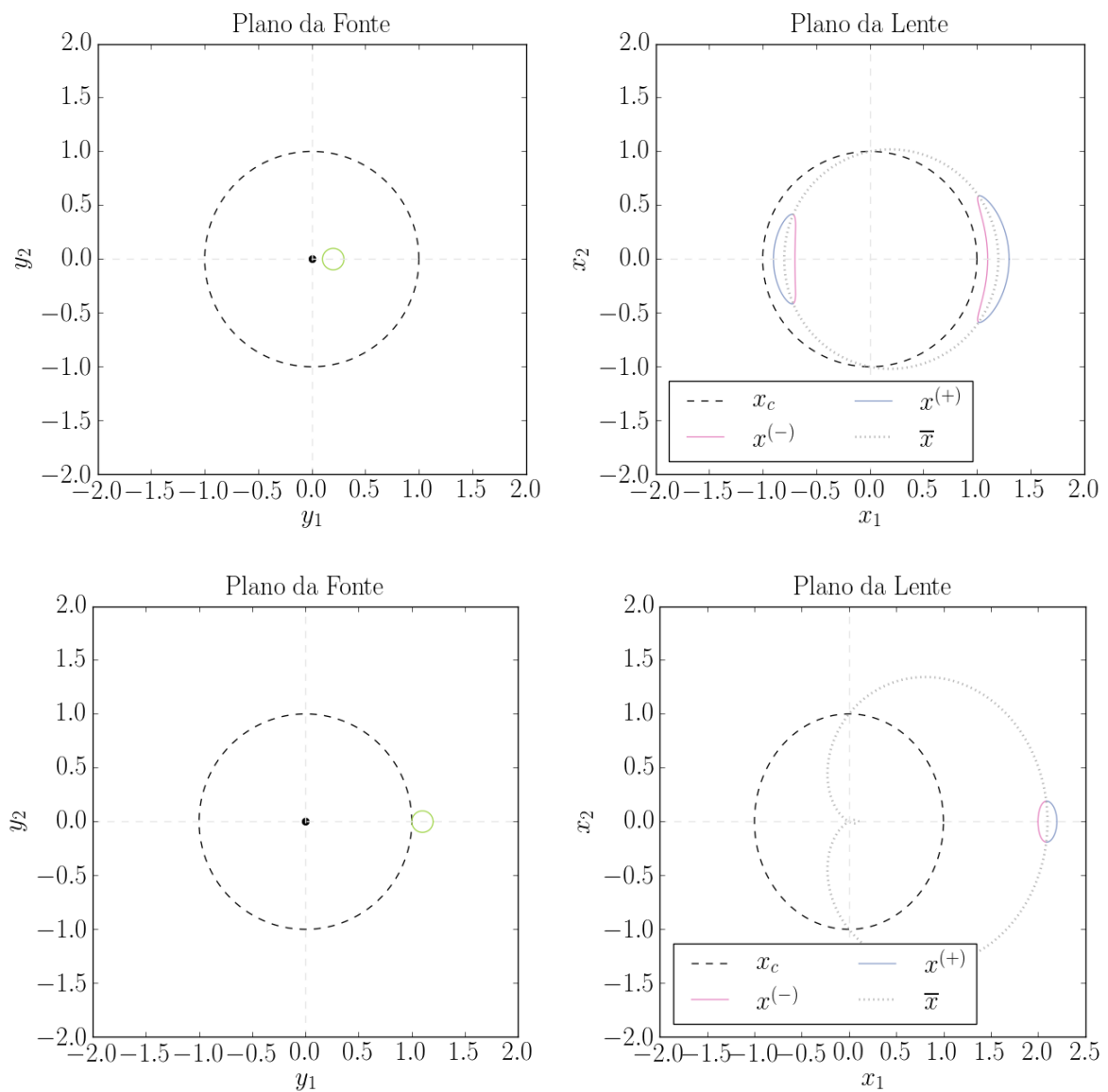


Figura 3.7: Formação de duas imagens (primeira linha) e uma imagem (segunda linha) para SIS com fonte circular no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.2$ (primeira linha), $s = 1.1$ (segunda linha) e $R_0 = 0.1$.

Podemos observar mais eficientemente como cada parâmetro da fonte (raio e posição) altera a formação das imagens de acordo com o esboçado na Fig. 3.8.

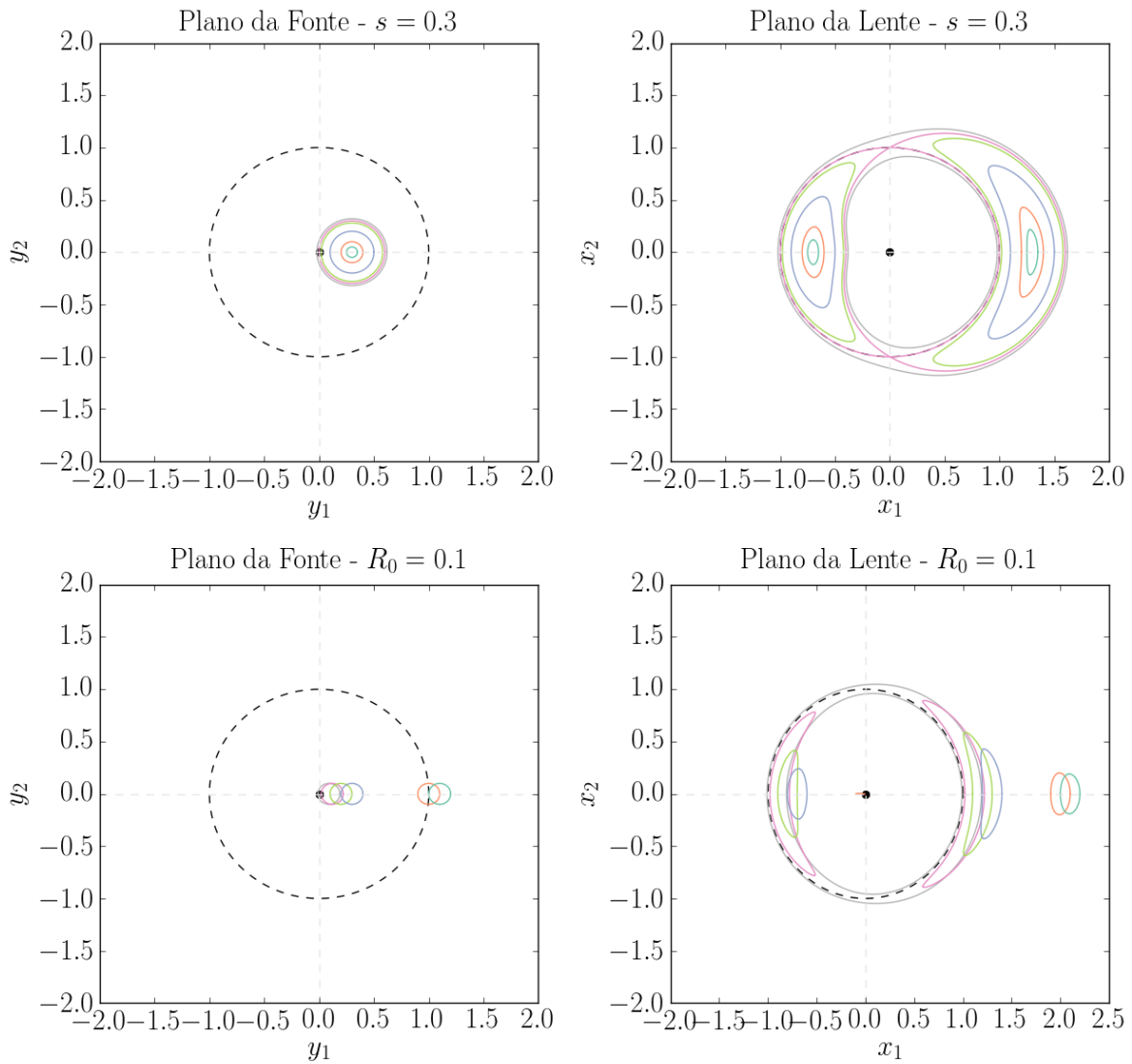


Figura 3.8: Comportamento para fontes circulares (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação no raio ($R_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.28, 0.3, 0.32$) para $s = 0.3$ (primeira linha) e na posição da fonte ($s = 0, 0.09, 0.12, 0.2, 0.3, 1.0, 1.1$) para $R_0 = 0.1$ (segunda linha). A linha tracejada representa a pseudocástica no plano da fonte e a curva crítica no plano da lente.

3.4 Fonte Elíptica

Considere agora uma fonte elíptica centrada na posição $\vec{s} = s_1\hat{y}_1 + s_2\hat{y}_2$ e com semi-eixo maior rotacionado de um ângulo ϕ_e do eixo y_1 , como esboçado na Fig. 3.9, nós temos as seguintes equações paramétricas para a elipse

$$y_1 = s_1 + a \cos \alpha \cos \phi_e - b \sin \alpha \sin \phi_e \quad (3.26)$$

$$y_2 = s_2 + a \cos \alpha \sin \phi_e + b \sin \alpha \cos \phi_e, \quad (3.27)$$

com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Vamos considerar a parametrização

$$a = R_0 a_s, \quad b = R_0 b_s, \quad (3.28)$$

de modo a ter um raio efetivo R_0 . As quantidades a_s e b_s estarão relacionadas com a elipticidade ε_s de acordo com a parametrização que desejarmos utilizar.

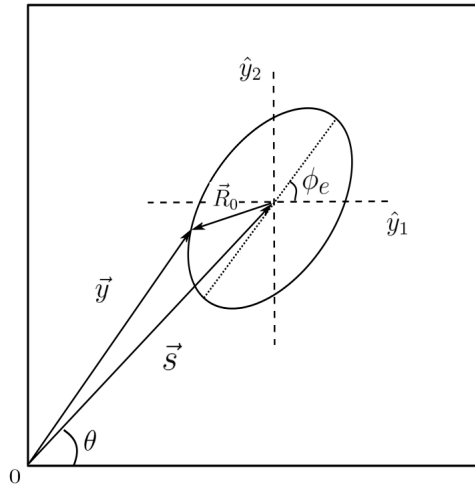


Figura 3.9: Fonte Elíptica com a nomenclatura utilizada.

De modo análogo ao procedimento utilizado para fonte circular, partimos da soma dos vetores relacionados à posição da borda da fonte elíptica, utilizando $|\vec{R}_0|^2 = R_0^2$ e resolvendo para x , temos as curvas interna (x^-) e externa (x^+) das imagens:

$$x^\pm = \frac{\bar{P}_1 \pm \bar{P}_2}{\bar{S}} \quad (3.29)$$

em que

$$\bar{P}_1 = b_s^2 \cos \bar{\phi} [s \cos(\theta - \phi_e) + \cos \bar{\phi}] + a_s^2 \sin \bar{\phi} [s \sin(\theta - \phi_e) + \sin \bar{\phi}], \quad (3.30)$$

$$\bar{P}_2 = \frac{a_s b_s}{\sqrt{2}} \sqrt{2R_0^2 \bar{S} - s^2 (1 - \cos 2(\theta - \phi))}, \quad (3.31)$$

$$\bar{S} = b_s^2 \cos^2 \bar{\phi} + a_s^2 \sin^2 \bar{\phi}, \quad (3.32)$$

com $\bar{\phi} = \phi - \phi_e$. A imagem do arco corresponde exatamente a quando o argumento da raiz é positivo e as soluções interna e externa do arco se tocam precisamente quando a raiz se anula, definindo os extremos do arco. Novamente utilizamos $s_1 = s \cos \theta$ e $s_2 = s \sin \theta$. A espinha dorsal dos arcos para essa configuração é

$$\bar{x} = \frac{x^+ + x^-}{2} = \frac{b_s^2 \cos \bar{\phi} [s \cos(\theta - \phi_e) + \cos \bar{\phi}] + a_s^2 \sin \bar{\phi} [s \sin(\theta - \phi_e) + \sin \bar{\phi}]}{b_s^2 \cos^2 \bar{\phi} + a_s^2 \sin^2 \bar{\phi}}. \quad (3.33)$$

Note que a espinha dorsal independe do raio efetivo da fonte, de modo similar ao caso de fonte circular.

3.4.1 Parametrização da Elipse

Para uma escolha de parametrização que simplifica nossas expressões,

$$a_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_s}}, \quad b_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_s}}, \quad (3.34)$$

podemos reescrever a posição radial das imagens como

$$x^\pm = 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon_s \cos(2\bar{\phi})} [s \cos(\theta - \phi) - s \varepsilon_s \cos(\theta + \phi - 2\phi_e)] \pm \sqrt{\frac{2R_0^2(1 - \varepsilon_s \cos(2\bar{\phi})) - s^2(1 - \varepsilon_s^2)(1 - \cos 2(\theta - \phi))}{2}}, \quad (3.35)$$

para a qual a espinha dorsal dos arcos, em função da elipticidade relacionada à parametrização escolhida, é dada por

$$\bar{x} = 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon_s \cos(2\bar{\phi})} [s \cos(\theta - \phi) - s \varepsilon_s \cos(\theta + \phi - 2\phi_e)]. \quad (3.36)$$

3.4.2 Formação de Imagens

Considerando nossa escolha de parametrização, podemos repetir o procedimento de análise da formação das imagens para o lenteamento de uma fonte elíptica pela SIS:

- $s \leq R_0 \sqrt{\frac{2a_s^2 b_s^2}{(a_s^2 + b_s^2) - (a_s^2 - b_s^2) \cos 2(\theta - \phi_e)}}$: haverá a formação de anéis de Einstein como indicado na Fig. 3.10, sendo que $s = 0$ está esboçado na Fig. 3.11 para indicar a situação que o anel é centralizado. A igualdade é o limite entre a formação de duas imagens e um anel de Einstein. Aqui, a extremidade da fonte intercepta a cáustica tangencial.
- Duas imagens: a fonte está dentro da pseudo-cáustica, que corresponde à curva tracejada no plano das fontes. Nesse caso temos duas imagens formadas. Essa situação está ilustrada na Fig. 3.12.
- Uma imagem: a fonte está completamente fora da pseudo-cáustica e nesse caso apenas uma imagem é formada. Essa situação está ilustrada na Fig. 3.13.

Além das situações específicas de formação de imagens, ilustramos também seu comportamento de acordo com cada parâmetro do lenteamento, raio efetivo, posição radial da fonte, orientação da elipse, elipticidade e posição do centro da fonte, respectivamente. Essas esquematizações estão representadas nas Figs. 3.14-3.18.

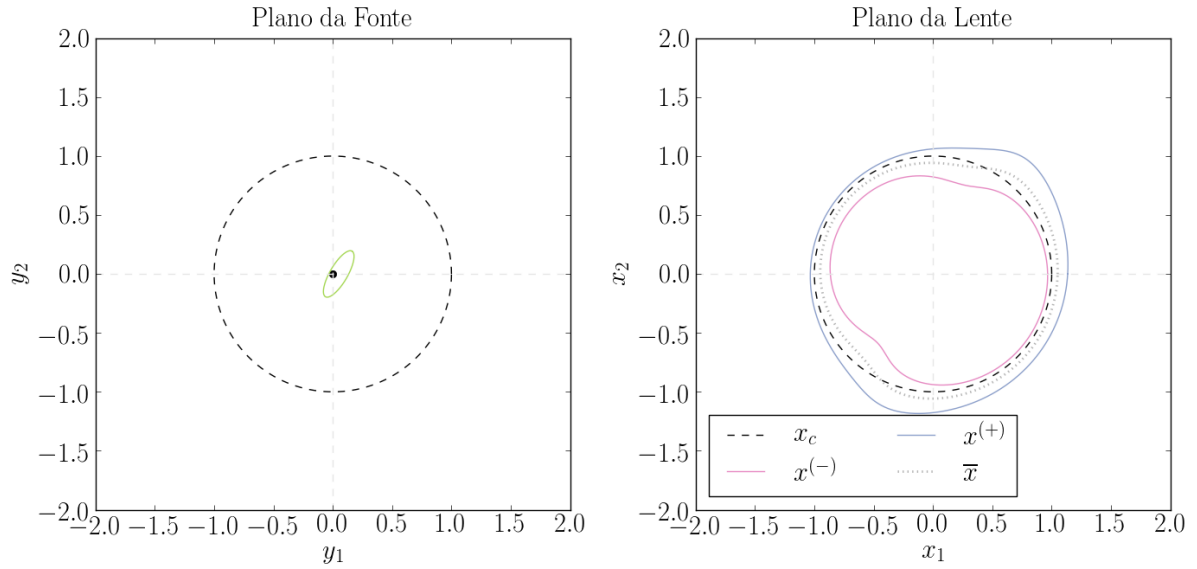


Figura 3.10: Formação de anel de Einstein para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.05, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

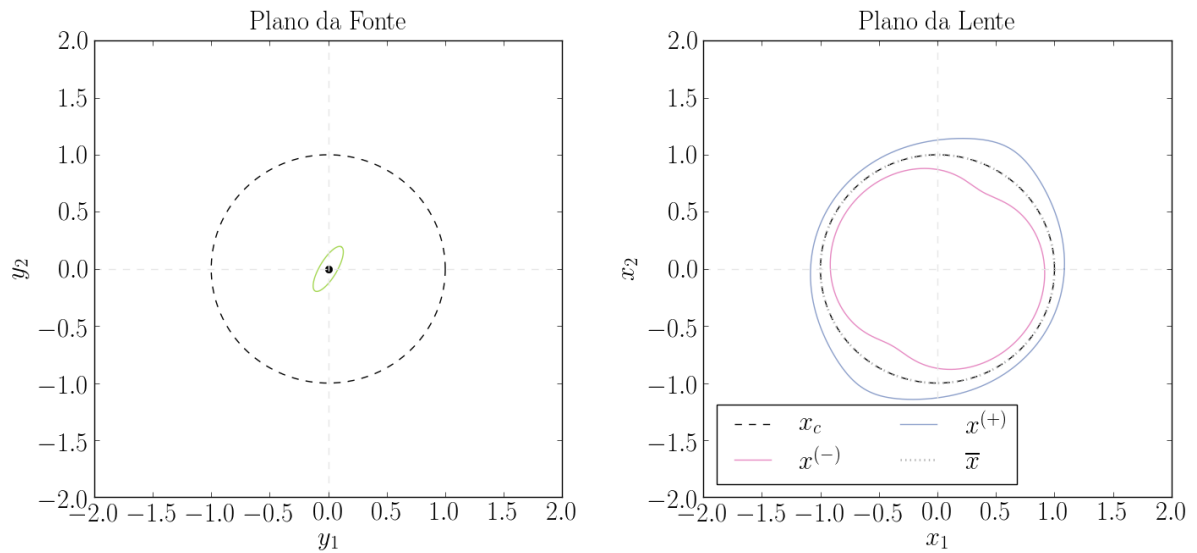


Figura 3.11: Formação de anel de Einstein centralizado para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.0, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

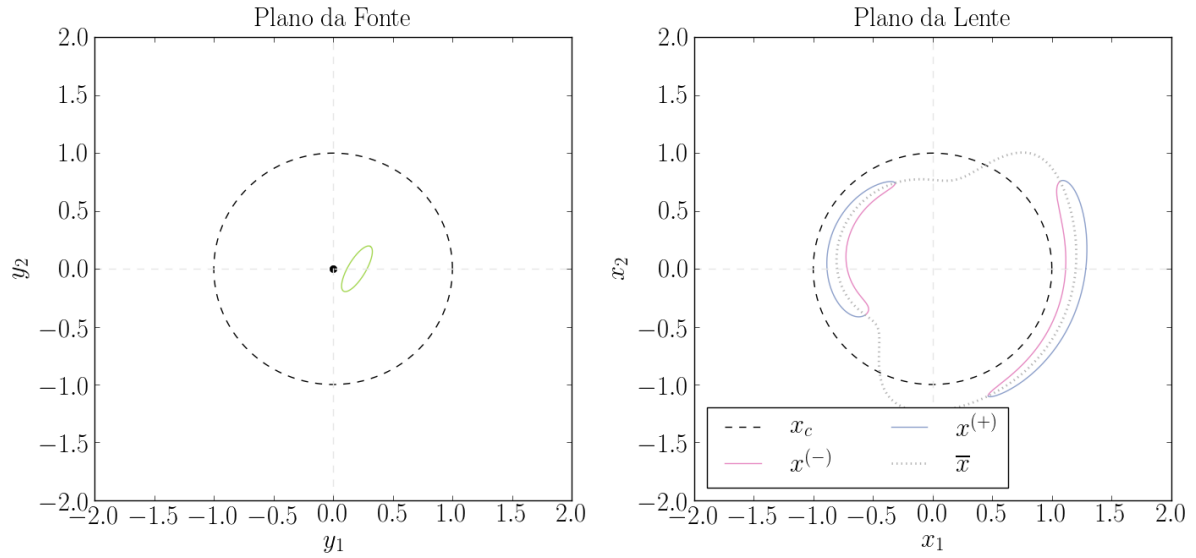


Figura 3.12: Formação de duas imagens para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 0.2, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

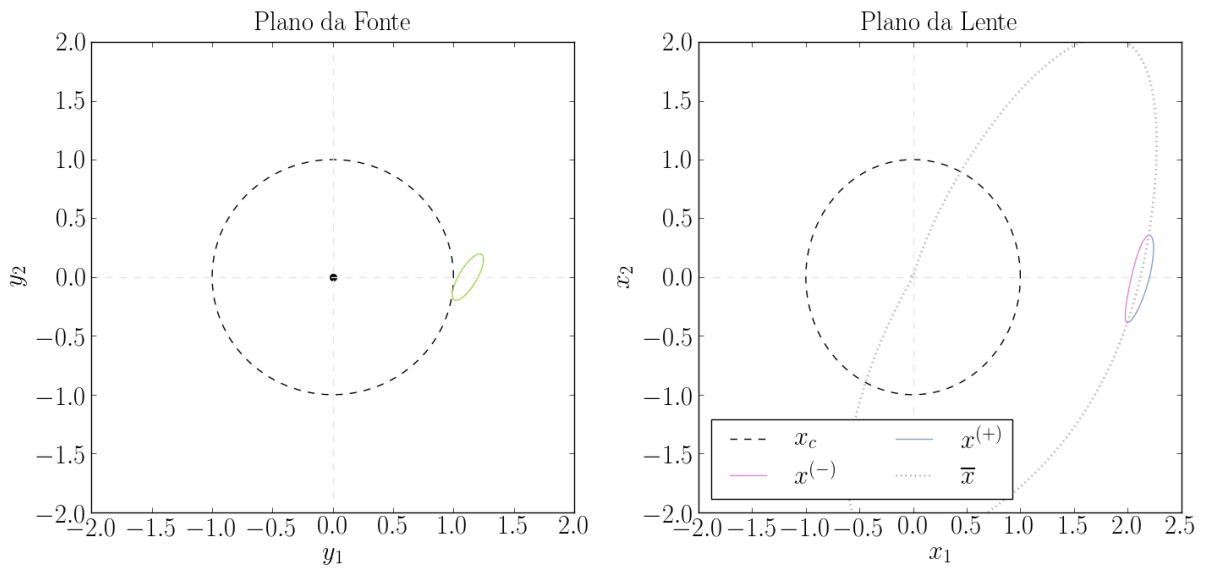


Figura 3.13: Formação de uma imagem para a SIS com fonte elíptica no plano das fontes (esquerda) e plano das lentes (direita) para $s = 1.12, R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

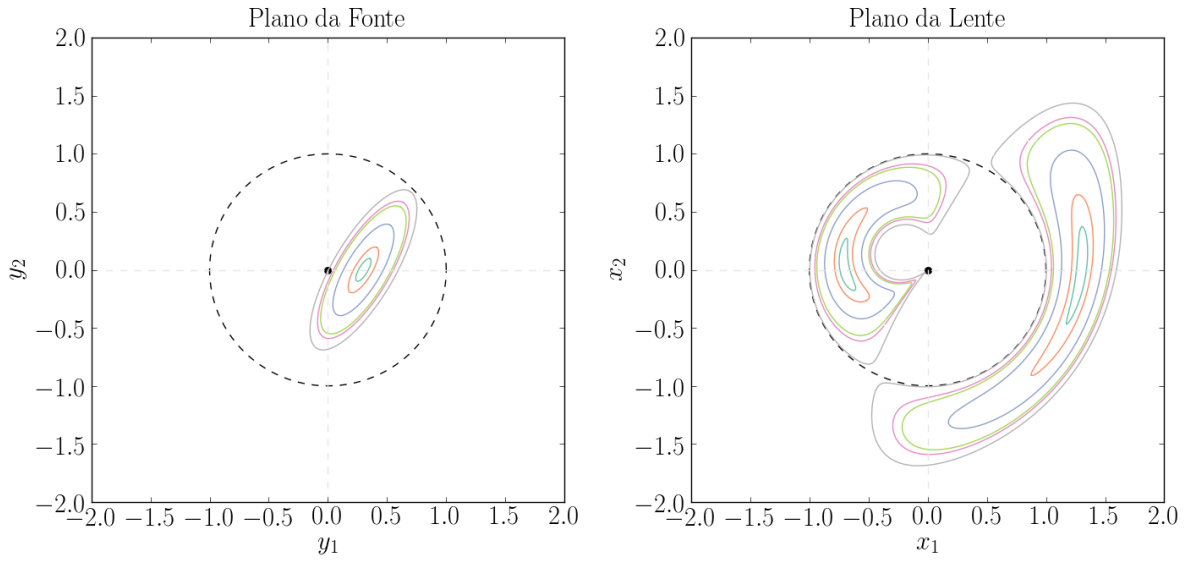


Figura 3.14: Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação no raio efetivo ($R_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.28, 0.3, 0.35$) para $s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$.

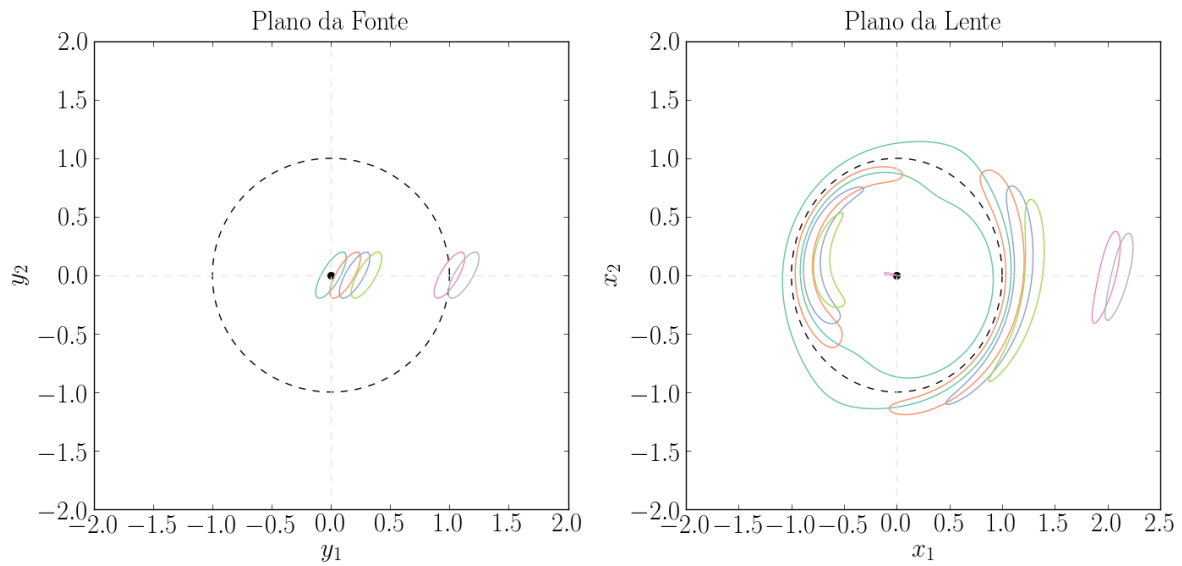


Figura 3.15: Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na posição da fonte ($s = 0.0, 0.12, 0.2, 0.3, 1.0, 1.12$) para $R_0 = 0.1, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$.

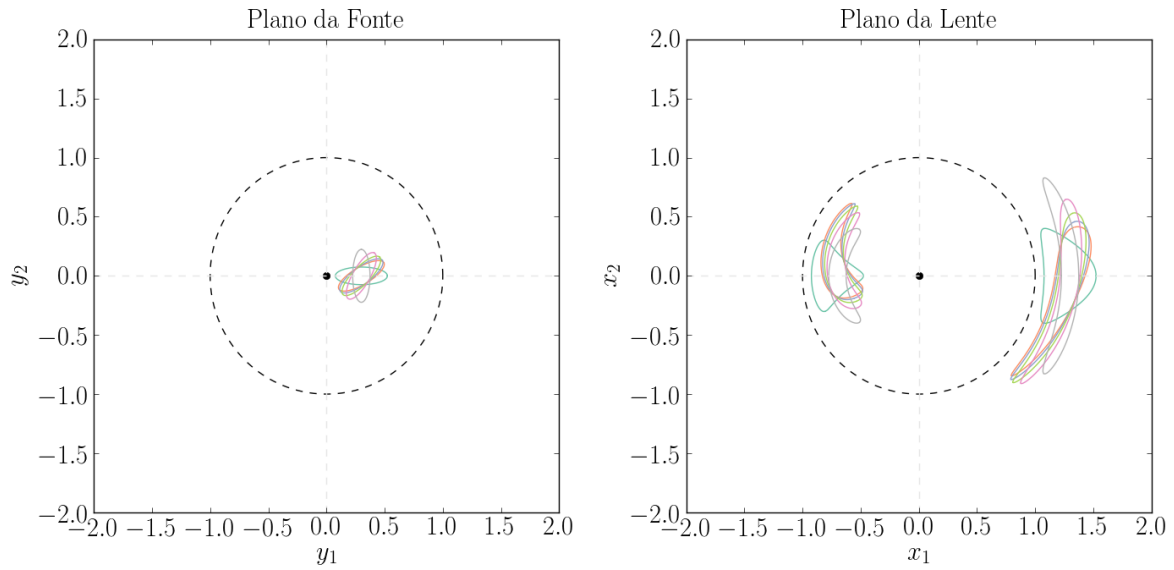


Figura 3.16: Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na orientação da fonte ($\phi_e = 0, \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \epsilon_s = 0.8, \theta = 0.0$.

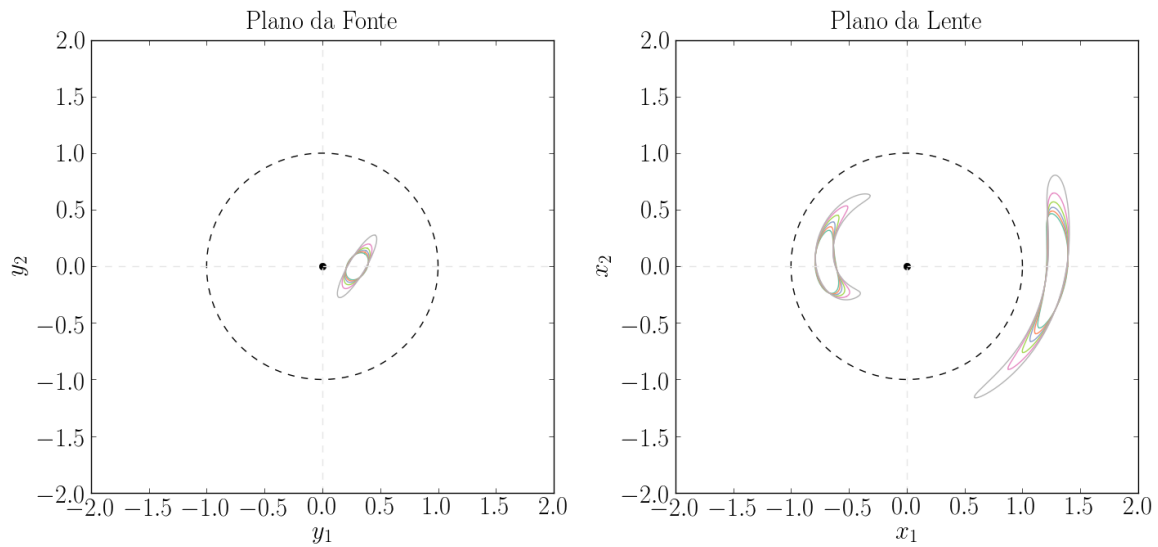


Figura 3.17: Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na elipticidade da fonte ($\epsilon_s = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \theta = 0.0$.

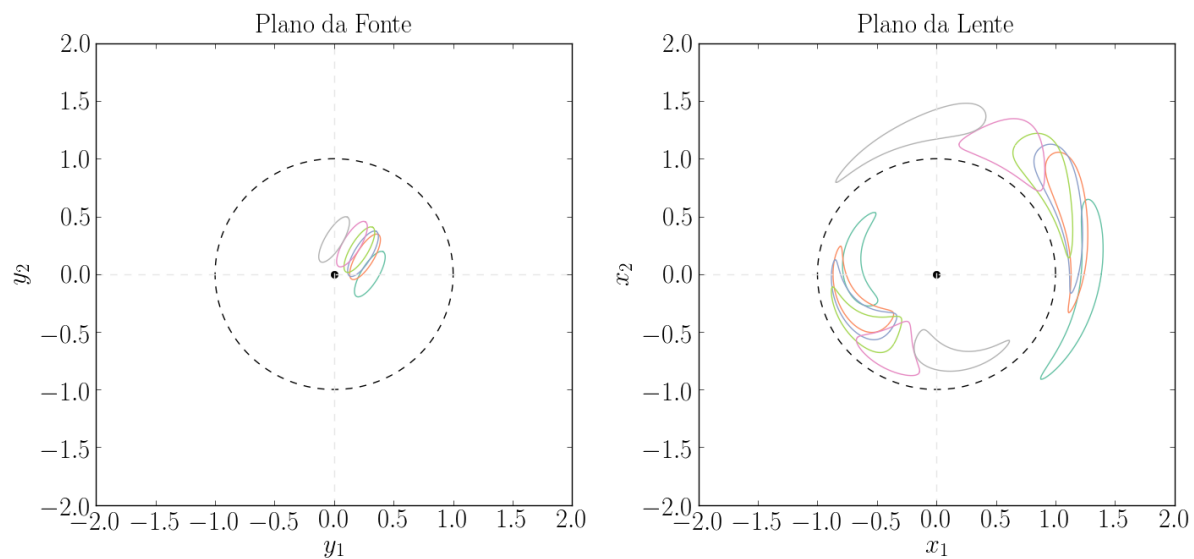


Figura 3.18: Comportamento para fontes elípticas (lado esquerdo) e suas imagens (lado direito), considerando variação na posição do centro da fonte ($\theta = 0, \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2$) para $R_0 = 0.1, s = 0.3, \phi_e = \pi/3, \varepsilon_s = 0.8$.

CAPÍTULO 4

Propriedades dos Arcos

Após determinar as expressões para a formação de imagens de fontes circulares e elípticas lenteadas pela SIS podemos extrair algumas propriedades dos arcos formados, como delimitações das extremidades das imagens, posição de seu centro e cálculo de comprimento, largura e área. Além do interesse isolado dessas propriedades, elas são importantes para calcular a seção de choque que será discutida no próximo capítulo. O ponto principal deste capítulo é selecionar as medidas de comprimento e largura mais adequadas para o cálculo da seção de choque e isso será feito comparando diversos métodos de obter essas quantidades com os valores exatos de comprimento e largura.

4.1 Extremidades e Centro dos Arcos

Para determinar as extremidades de cada arco, fazemos $x^+ = x^-$ na Eq. (3.29), o que leva às possíveis soluções:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arccos \left[\sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{2P_2}}{2P_3}} \right], & \phi_2 &= \arccos \left[-\sqrt{\frac{P_1 - \sqrt{2P_2}}{2P_3}} \right] \\ \phi_3 &= \arccos \left[-\sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{2P_2}}{2P_3}} \right], & \phi_4 &= \arccos \left[\sqrt{\frac{P_1 - \sqrt{2P_2}}{2P_3}} \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

em que

$$P_1 = (a_s^2 - b_s^2)R_0^2 \left[(a_s^2 + b_s^2)R_0^2 \cos(2\phi_e) - s^2 (2 \cos(2(\theta - \phi_e)) + \cos(2\phi_e)) \right] \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}&+ (a_s^2 - b_s^2)^2 R_0^4 + s^4 + s^2 \left[s^2 - (a_s^2 + b_s^2)R_0^2 \right] \cos(2\theta) \\ P_2 &= \left[(a_s^2 + b_s^2)s^2 - (a_s^2 - b_s^2)s^2 \cos(2(\theta - \phi_e)) - 2(a_s b_s R_0)^2 \right] \times \\ &\times \left[R_0 s^2 \sin(2\theta) - (a_s^2 - b_s^2)R_0^3 \sin(2\phi_e) \right]^2\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$P_3 = (a_s^2 - b_s^2)^2 R_0^4 + s^4 - 2(a_s^2 - b_s^2)R_0^2 s^2 \cos(2(\theta - \phi_e)). \quad (4.4)$$

A escolha de quais das quatro soluções representará cada extremidade ficará mais clara no

desenvolvimento que segue. Das equações paramétricas (3.27) podemos reescrever a equação para uma fonte elíptica em coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned}
 R_0^2 &= (y_1 - s_1)^2 \left[\frac{\cos^2 \phi_e}{a_s^2} + \frac{\sin^2 \phi_e}{b_s^2} \right] + 2(y_1 - s_1)(y_2 - s_2) \sin \phi_e \cos \phi_e \left[\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{b_s^2} \right] + \\
 &+ (y_2 - s_2)^2 \left[\frac{\sin^2 \phi_e}{a_s^2} + \frac{\cos^2 \phi_e}{b_s^2} \right] \\
 &= (y_1 - s_1)^2 (1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)) - 2\varepsilon_s (y_1 - s_1)(y_2 - s_2) \sin(2\phi_e) + (y_2 - s_2)^2 (1 + \varepsilon_s \cos(2\phi_e)).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

A última linha representa o resultado para a escolha de parametrização da elipticidade que fizemos no capítulo precedente, mas poderiam ser aplicados para qualquer outra. Escrever esse resultado é importante para determinar algumas regiões no plano das fontes que irão alterar as expressões para os ângulos iniciais e finais. Assim, devido ao fato de que ao mover a fonte as posições dos extremos irão se deslocar, as equações para cada extremidade dos arcos irão depender de qual quadrante eles se encontram. Algumas condições nos ajudarão a determinar essas mudanças de quadrante: se a fonte intercepta o eixo y_1 e/ou o eixo y_2 e se esses pontos de interseção irão ocorrer na região positiva ou negativa de cada eixo. A última condição é baseada na localização do centro dos arcos. Dessa forma, precisamos começar encontrando os pontos nos quais a fonte tangencia cada um desses eixos e para isso partimos da Eq. (4.5), escolhemos y_1 ou y_2 como zero e resolvemos a equação quadrática para a coordenada resultante. Como queremos que a fonte possua apenas um ponto de interseção, ambas soluções para y_1 (ou y_2) devem ser iguais.

Podemos detalhar agora as expressões para essas condições e todas as configurações possíveis de ângulos estarão esboçadas no Apêndice A:

- Se a elipse intercepta o eixo- y_2 em um único ponto, a posição da fonte será

$$s_y = R_0 \sqrt{\frac{a_s^2 + b_s^2 + (a_s^2 - b_s^2) \cos(2\phi_e)}{1 + \cos(2\theta)}}, \tag{4.6}$$

e se $s < s_y$ a fonte e os pontos extremos das imagens irão cruzar o quadrante adjacente.

- Se a elipse intercepta o eixo- y_1 em um único ponto, a posição da fonte será

$$s_x = R_0 \sqrt{\frac{a_s^2 + b_s^2 - (a_s^2 - b_s^2) \cos(2\phi_e)}{1 - \cos(2\theta)}}, \tag{4.7}$$

e se $s < s_x$, a imagem irá cruzar esse eixo.

- Para a imagem ser centrada em 0 , $\pi/2$ ou π , precisamos ter os mesmos ângulos iniciais e finais. Isso irá ocorrer para uma fonte com posição radial

$$s_c = R_0 \sqrt{(a_s^2 - b_s^2) \csc(2\theta) \sin(2\phi_e)}. \quad (4.8)$$

Dependendo se a posição da fonte é menor ou maior que esse valor, o quadrante que contém o centro do arco será diferente.

- A fonte pode encostar nos eixos tanto na ramificação positiva como na negativa dos mesmos e isso será determinado considerando o momento no qual a elipse atravessa o centro do sistema de coordenadas, que é em

$$\theta_0 = \arccos \left[\frac{a_s^2 + b_s^2 + (a_s^2 - b_s^2) \cos(2\phi_e)}{2(a_s^4 + b_s^4 + (a_s^4 - b_s^4) \cos(2\phi_e))} \right]. \quad (4.9)$$

Esse procedimento é válido tanto para fontes circulares como fontes elípticas, bastando fazer a elipticidade nula para obter o primeiro caso.

4.1.1 Fonte Circular

Para fontes circulares vamos novamente considerar $\theta = 0$, que é a posição angular do centro da fonte, sem perder a generalidade de nossas soluções, dada a simetria da lente. Dessa forma, podemos simplificar as expressões para obter a posição angular dos extremos dos arcos em função de uma quantidade ϕ_0 (cuidado para não confundir com ϕ_e , corresponde à orientação da fonte elíptica), definida como

$$\phi_0 \equiv \sin^{-1} \left(\frac{R_0}{s} \right). \quad (4.10)$$

Assim, as posições angular e radial para os extremos de cada arco são:

$$\text{Arco Externo: } \begin{cases} \phi_i^{\text{ex}} = -\phi_0, & x_i^{\text{ex}} = 1 + R_0 \cot \phi_0 \\ \phi_f^{\text{ex}} = \phi_0, & x_f^{\text{ex}} = 1 + R_0 \cot \phi_0 \end{cases}, \quad (4.11)$$

$$\text{Arco Interno: } \begin{cases} \phi_i^{\text{in}} = \pi - \phi_0, & x_i^{\text{in}} = 1 - R_0 \cot \phi_0 \\ \phi_f^{\text{in}} = \pi + \phi_0, & x_f^{\text{in}} = 1 - R_0 \cot \phi_0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

em que os subíndices ex/in indicarão em todo o texto arco externo/interno à curva crítica ($x > 1$ ou $x < 1$) e i/f corresponderão aos valores inicial/final de uma determinada quantidade.

Além disso, será útil ter a distância radial do centro do arco x_c , que será o valor da curva média para o ângulo $\phi_c = (\phi_i + \phi_f)/2$:

$$\text{Arco Externo: } \phi_c^{\text{ex}} = 0, \quad \bar{x}_c^{\text{ex}} = 1 + s, \quad (4.13)$$

$$\text{Arco Interno: } \phi_c^{\text{in}} = \pi, \quad \bar{x}_c^{\text{in}} = 1 - s. \quad (4.14)$$

4.1.2 Fonte Elíptica

Para fonte elíptica utilizaremos no cálculo de comprimento, largura e área os resultados gerais para os ângulos inicial e final de cada arco, mas para simplificar nossos resultados no cálculo da seção de choque, podemos considerar um ângulo relativo entre a posição radial da fonte e seu eixo maior, η , como ilustrado na Fig. 4.1. Podemos verificar que

$$\theta = \eta + \phi_e. \quad (4.15)$$

Reescrevendo as expressões para os comprimentos dos arcos de modo a incluir esse ângulo relativo η , foi possível observar que as medidas não dependem de ϕ_e e, à vista disso, nosso sistema possui simetria em relação ao ângulo relativo. Essa conclusão é análoga para a largura, área e razão axial L/W . Considerando isso, podemos eliminar um dos ângulos de nosso problema, por exemplo, fazendo $\theta = 0$ como no caso de fonte circular (note que ainda temos dependência com a orientação da fonte e com sua elipticidade).

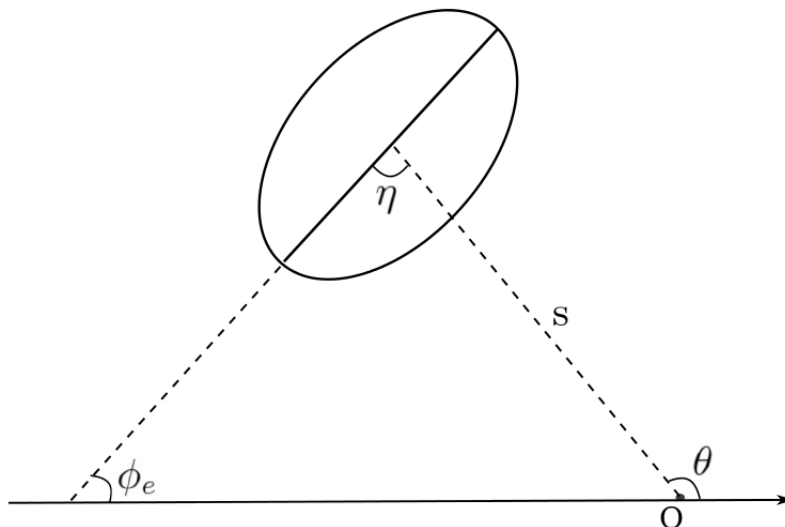


Figura 4.1: Ângulo relativo entre a posição da fonte e o seu semi-eixo maior.

4.2 Comprimento

Aqui estamos interessados no estudo de arcos, então consideraremos as situações para a existência de duas imagens, uma dentro da curva crítica tangencial, denominada arco interno e outra fora da curva crítica, chamada portanto de arco externo. Para obter a seção de choque de arcos é importante calcular o comprimento (L), largura (W) e a área (A). Dessa forma, precisamos determinar qual é a melhor expressão analítica possível (já que estamos buscando representações simples para os arcos) de comprimento ao utilizar o modelo de lente da SIS. Utilizaremos sete possibilidades para o cálculo do comprimento e um deles é o valor exato, que utilizaremos como referência para escolher quais serão as soluções mais apropriadas em cada caso. A seguir descreveremos as maneiras utilizadas para determinar o comprimento dos arcos:

- L_1 : A primeira forma que podemos utilizar para o cálculo do comprimento de arcos consiste em fazer a adição dos dois segmentos de reta - $\overline{P_i P_c} + \overline{P_f P_c}$ - entre o centro do arco e cada extremidade, como representado na Fig. 4.2. Esse método foi extensamente utilizado na literatura para medir arcos reais em imagens, devido a sua simplicidade [52]. Como veremos ao longo do texto, de fato o resultado é muito similar ao valor exato com diferença relativa menor que 12%. O comprimento de cada segmento de linha é obtido facilmente utilizando a lei dos cossenos com as posições esquematizadas na Fig. 4.2

$$\overline{P_i P_c}^2 = \bar{x}(\phi_i)^2 + \bar{x}(\phi_c)^2 - 2\bar{x}(\phi_i)\bar{x}(\phi_c)\cos\phi_0, \quad (4.16)$$

$$\overline{P_f P_c}^2 = \bar{x}(\phi_f)^2 + \bar{x}(\phi_c)^2 - 2\bar{x}(\phi_f)\bar{x}(\phi_c)\cos\phi_0. \quad (4.17)$$

- L_2 : Outra forma aproximada de calcular o comprimento é integrando a espinha dorsal, $\bar{x}(\phi)$, entre os ângulos inicial e final do arco

$$L_2 = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \bar{x}(\phi) d\phi. \quad (4.18)$$

- L_3 : Nós podemos também calcular a integral exata de comprimento da espinha dorsal ao longo do arco. Os valores obtidos por esse método serão nossos valores de referência e os demais serão comparados a ele,

$$L_3 = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + \bar{x}^2 d\phi^2} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \sqrt{\bar{x}^2 + \left(\frac{d\bar{x}}{d\phi}\right)^2} d\phi. \quad (4.19)$$

- L_4 : Podemos considerar também o segmento de circunferência que passa pelas extremidades do arco e por seu centro (P_i, P_f, P_c na Fig. 4.3). O procedimento para obter o centro

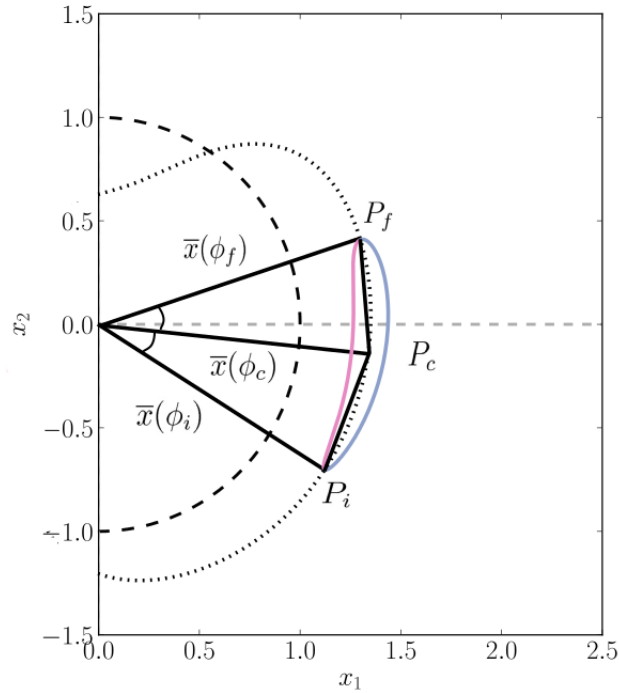


Figura 4.2: Diagrama indicando as quantidades utilizadas no cálculo dos comprimentos L_1 , L_2 e L_3 . A curva pontilhada cinza indica a espinha dorsal que passa pelos pontos inicial, central e final (P_i , P_c e P_f , respectivamente) do arco.

e o raio dessa circunferência é: dado três pontos não-colineares, a equação de um único círculo que passa por esses pontos pode ser obtida resolvendo o determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.20)$$

que pode ser escrito como uma equação dos cofatores

$$\underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} M_{11} - x M_{12} + y M_{13} - M_{14} = 0 \rightarrow r^2 - x \frac{M_{12}}{M_{11}} + y \frac{M_{13}}{M_{11}} - \frac{M_{14}}{M_{11}} = 0, \quad (4.21)$$

em que cada termo é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.22)$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{14} = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (4.23)$$

e comparada à equação geral de um círculo com raio r_0 e centro em (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = 0 \rightarrow r^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - r_0^2 = 0, \quad (4.24)$$

obtemos

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad (4.25)$$

$$y_0 = -\frac{1}{2} \frac{M_{13}}{M_{11}}, \quad (4.26)$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{M_{14}}{M_{11}}. \quad (4.27)$$

Estamos considerando aqui $x_1 = \bar{x}(\phi_f)$, $x_2 = \bar{x}(\phi_c)$ e $x_3 = \bar{x}(\phi_i)$, mas qualquer configuração escolhida será válida, uma vez que são os mesmos três pontos. Para calcular o segmento de arco para uma dada circunferência, basta multiplicar:

$$L_4 = r_0 (\theta_f - \theta_i) = 2\theta_0 r_0, \quad (4.28)$$

considerando o raio e a separação angular correspondente. O ângulo θ_0 é metade da abertura angular do segmento de circunferência considerando o centro de curvatura do arco ao invés de usar o centro da lente, como indicado na Fig. 4.3. Ele pode ser calculado utilizando relação de triângulos.

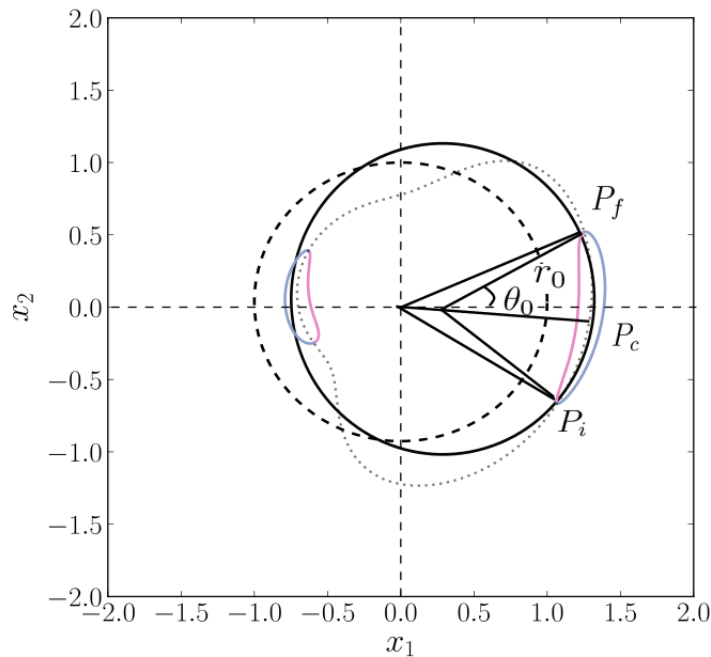


Figura 4.3: Diagrama indicando as quantidades utilizadas no cálculo dos comprimentos L_4 , L_5 , L_6 e L_7 . A curva pontilhada cinza indica a espinha dorsal que passa pelos pontos inicial, central e final do arco (P_i , P_c e P_f , respectivamente) e a curva sólida preta indica a circunferência que passa por esses mesmos pontos.

- L_5 : Usando a posição do centro do arco, podemos considerar que o comprimento é a diferença angular entre as extremidades do arco em relação ao centro da lente multiplicada pelo valor da curva média no centro do arco (\bar{x}_c)

$$L_5 = \bar{x}(\phi_c)(\phi_f - \phi_i). \quad (4.29)$$

- L_6/L_7 : De modo similar ao caso anterior, podemos determinar o comprimento usando a separação angular multiplicada agora pela curva média avaliada em P_i/P_f

$$L_6 = \bar{x}(\phi_i)(\phi_f - \phi_i), \quad (4.30)$$

$$L_7 = \bar{x}(\phi_f)(\phi_f - \phi_i). \quad (4.31)$$

Outras definições para o comprimento foram testadas, mas as apresentadas aqui foram as que mais se assemelharam ao valor de referência, que é a integral exata do comprimento da espinha dorsal, L_3 . Abaixo iremos ressaltar os resultados mais importantes obtidos para fonte circular e fonte elíptica, incluindo expansões em série feitas para os resultados de fonte circular, que poderiam possivelmente ser estendidos para outros tipos de modelos de fonte e/ou lente.

4.2.1 Fonte Circular

Para a fonte circular, podemos escrever analiticamente ou em termos de integrais simples todos os diferentes comprimentos calculados.

- **Dois segmentos de reta:** Das Eqs. (4.16) e (4.17), temos

$$\text{Arco Externo: } L_1^{\text{ex}} = 2\sqrt{2 + R_0^2 - 2\cos\phi_0 + 2R_0\sin\phi_0}, \quad (4.32)$$

$$\text{Arco Interno: } L_1^{\text{in}} = 2\sqrt{2 + R_0^2 - 2\cos\phi_0 - 2R_0\sin\phi_0}. \quad (4.33)$$

- **Integração da curva média entre os extremos do arco:** Da Eq. (4.18), temos

$$\text{Arco Externo: } L_2^{\text{ex}} = 2(\phi_0 + R_0), \quad (4.34)$$

$$\text{Arco Interno: } L_2^{\text{in}} = 2(\phi_0 - R_0). \quad (4.35)$$

- **Integral exata de comprimento:** Da Eq. (4.19), temos

$$\text{Arco Externo: } L_3^{\text{ex}} = 4(1+s)\mathcal{E}\left(\frac{\phi_0}{2}, \frac{4s}{(1+s)^2}\right), \quad (4.36)$$

$$\text{Arco Interno: } L_3^{\text{in}} = 2(1+s)\left[-\mathcal{E}\left(\frac{\pi-\phi_0}{2}, \frac{4s}{(1+s)^2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{\pi+\phi_0}{2}, \frac{4s}{(1+s)^2}\right)\right], \quad (4.37)$$

em que $\mathcal{E}(\alpha, m)$ é a integral elíptica de segundo tipo e é dada para o intervalo $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ por

$$\mathcal{E}(\alpha, m) = \int_0^\alpha \sqrt{1 - m\sin^2\theta} d\theta = \int_0^{\sin\alpha} \sqrt{\frac{1 - mt^2}{(1-t^2)}} dt. \quad (4.38)$$

- **Segmento de circunferência que passa pelo centro e extremos do arco.**

A posição do centro da circunferência e seu raio são:

$$\text{Arco Externo: } \begin{cases} (x_0^{\text{ex}}, y_0^{\text{ex}}) = \left(\frac{s}{2}\left[1 + \frac{1}{1+s(1+\cos\phi_0)}\right], 0\right), \\ r_0^{\text{ex}} = \left|1 + \frac{s}{2}\left[\frac{R_0^2}{R_0^2 + s(1-\cos\phi_0)}\right]\right|, \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\text{Arco Interno: } \begin{cases} (x_0^{\text{in}}, y_0^{\text{in}}) = \left(\frac{s}{2}\left[1 + \frac{1}{1\pm s(1+\cos\phi_0)}\right], 0\right), \\ r_0^{\text{in}} = \left|\pm 1 + \frac{s}{2}\left[\frac{R_0^2}{R_0^2 \pm s(1-\cos\phi_0)}\right]\right|. \end{cases} \quad (4.40)$$

Para calcular o comprimento do arco de circunferência basta multiplicar o raio pela separação angular, $2\theta_0$:

$$L_4 = r_0(\theta_f - \theta_i) = 2\theta_0 r_0, \quad (4.41)$$

em que a relação entre θ_0 e ϕ_0 pode ser obtida usando relação de triângulos na Fig. 4.3

$$\text{Arco Externo: } \bar{x}(\phi_0) \sin \phi_0 = r_0 \sin \theta_0 \rightarrow r_0 \sin \theta = (1 + s \cos \phi_0) \sin \phi_0, \quad (4.42)$$

$$\text{Arco Interno: } \bar{x}(\pi - \phi_0) \sin \phi_0 = r_0 \sin \theta_0 \rightarrow r_0 \sin \theta = (1 - s \cos \phi_0) \sin \phi_0 \quad (4.43)$$

de modo a obter

$$\text{Arco Externo: } \theta_0^{\text{ex}} = \arcsin\left(\frac{(1 + s \cos \phi_0)}{r_0} \sin \phi_0\right), \quad (4.44)$$

$$\text{Arco Interno: } \theta_0^{\text{in}} = \arcsin\left(\frac{(1 - s \cos \phi_0)}{r_0} \sin \phi_0\right). \quad (4.45)$$

- **Curva média para o centro do arco multiplicada pela abertura angular:**

$$\text{Arco Externo: } L_5^{\text{ex}} = \bar{x}_c^{\text{ex}}(\phi_f^{\text{ex}} - \phi_i^{\text{ex}}) = 2\phi_0(1 + s), \quad (4.46)$$

$$\text{Arco Interno: } L_5^{\text{in}} = \bar{x}_c^{\text{in}}(\phi_f^{\text{ex}} - \phi_i^{\text{in}}) = 2\phi_0(1 - s). \quad (4.47)$$

- **Curva média para os extremos do arco multiplicada pela abertura angular:**

$$\text{Arco Externo: } L_6^{\text{ex}} = L_7^{\text{ex}} = \bar{x}_i^{\text{ex}}(\phi_f^{\text{ex}} - \phi_i^{\text{ex}}) = 2\phi_0(1 + s \cos \phi_0), \quad (4.48)$$

$$\text{Arco Interno: } L_6^{\text{in}} = L_7^{\text{in}} = \bar{x}_i^{\text{in}}(\phi_f^{\text{in}} - \phi_i^{\text{in}}) = 2\phi_0(1 - s \cos \phi_0). \quad (4.49)$$

Nas Figs. 4.4-4.7 mostramos os resultados para a comparação entre as diferentes medidas de comprimento variando a posição da fonte ou seu raio. Também apresentamos a diferença relativa entre esses valores e a referência, que é a integral exata da espinha dorsal do arco ($L_3^{\text{ex/in}}$). Essa diferença é dada por

$$\frac{\Delta L}{L_3} = \frac{L_i - L_3}{L_3}, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6. \quad (4.50)$$

O comportamento para o arco externo em função de s é mostrado na Fig. 4.4 e em função de R_0 na Fig. 4.6. Mostramos que as aproximações são boas até 10% em todo o intervalo de valores permitidos para R_0 e s . Como esperado, as aproximações são melhores para arcos menos curvados e produzidos por fontes menores (baixo R_0). Em particular, as expressões L_2 e L_4 são excelentes até muito próximo da formação de anel de Einstein, com diferença menor que 1%. A

partir das definições, L_1 e L_6 sempre subestimam o comprimento, enquanto L_5 o superestima para o arco externo.

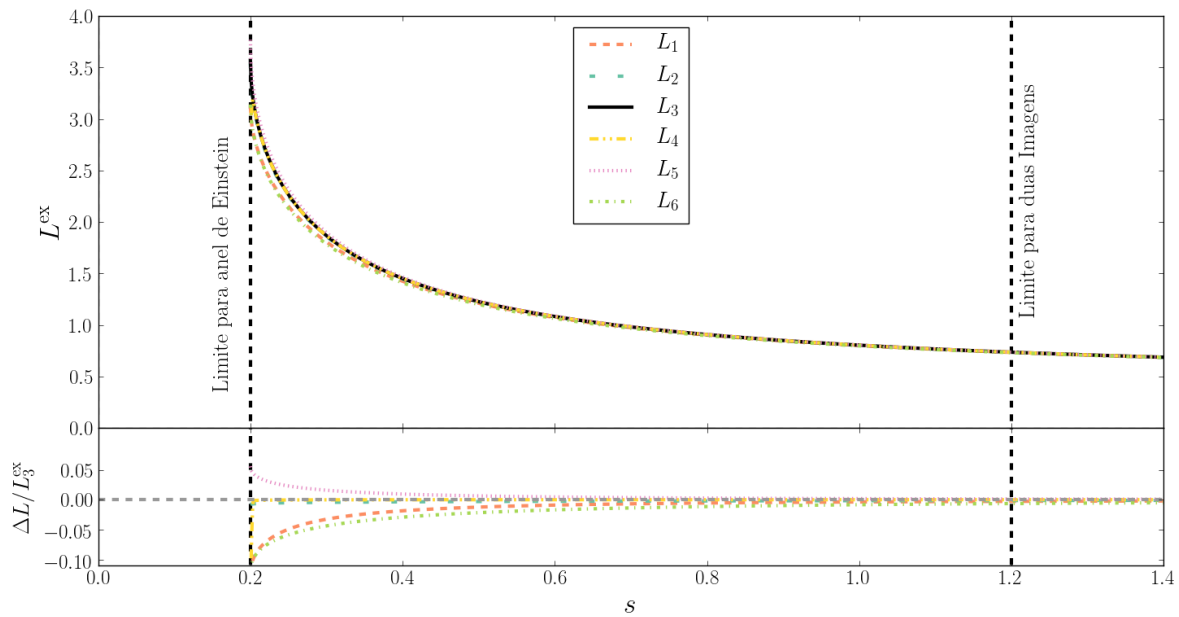


Figura 4.4: Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$.

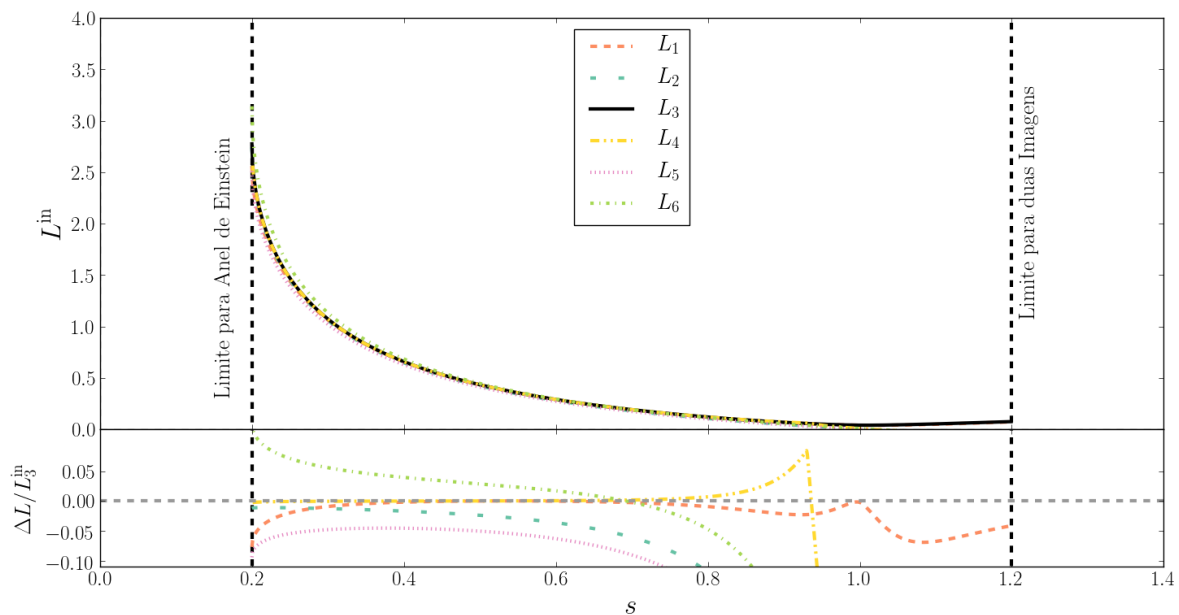


Figura 4.5: Comprimentos para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 (painel inferior) para $R_0 = 0.2$.

O comportamento para o arco interno em função de s é mostrado na Fig. 4.5 e em função de R_0 na Fig. 4.7. Como descrito no Capítulo 3 sobre as imagens e, mais especificamente, as

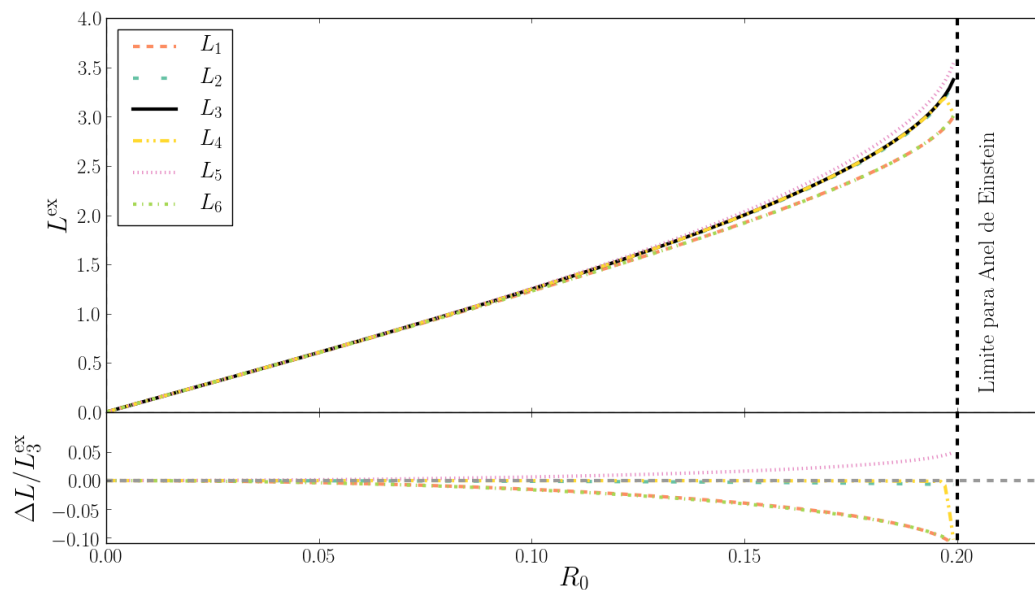


Figura 4.6: Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$.

imagens internas, fica explícito nas comparações dos comprimentos dos arcos como função de s na Fig. 4.5. Relembre que todas as definições de comprimento, com exceção de L_1 e L_3 são aproximações da integral ao longo da limaçon entre as extremidades de cada arco.

Para $s < 0.5$ todas as definições de comprimento são bem comportadas e similares, com desvio menor que 5%, exceto próximo à formação de anel de Einstein. Nas regiões entre $s = 1/2$ e $s = 1$, os desvios se tornam maiores. Para $s > 1$ algumas definições deixam de ser válidas. Apenas L_1 e L_3 continuam positivos até que a imagem interna deixa de existir, o que ocorre em $s = 1 + R_0$. Em cada caso, relembramos que a medida que s aumenta, a imagem é menos esticada e desmagnificada. Desse modo, as configurações relevantes para formação de arcos e seção de choque de magnificação têm $s < 0.5$. Em particular, quanto mais próximo do Anel de Einstein, maior será a alongação e magnificação. Nesse regimes as melhores aproximações são L_2 e L_4 , do mesmo modo que obtivemos para o arco externo.

Em particular L_4 é bom quando comparado com L_3 , mesmo nas regiões intermediárias. Por outro lado, L_2 desvia mais rapidamente do valor de referência, à medida que o arco se torna mais reto. Pela mesma razão, L_1 é bom perto de $s = 0.5$. Na Fig. 4.7 mostramos os comprimentos em função de R_0 para $s = 0.2$ e vemos que todas as definições são bem comportadas nesse caso e que L_2 e L_4 são realmente as aproximações mais precisas ao valor exato. No desenvolvimento da tese utilizaremos L_2 para fonte circular, dada sua precisão e simples expressão.

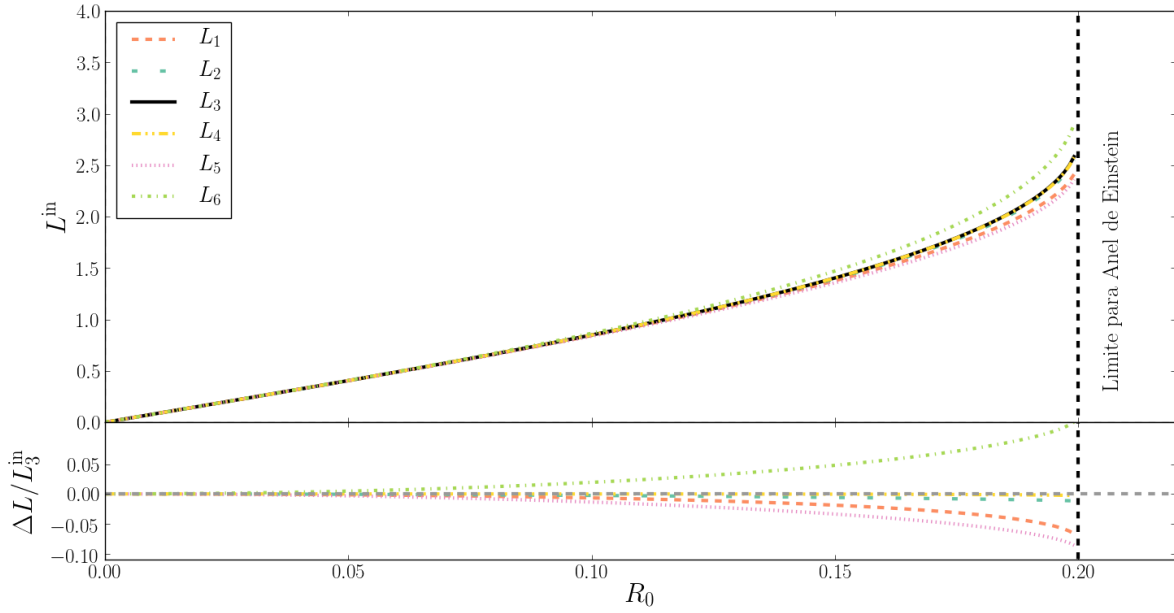


Figura 4.7: Comprimentos para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$.

Expansões dos Comprimentos para Fonte Circular

As expressões de L_1 a L_6 , obtidas nas Eqs. (4.32) a (4.49) são válidas para qualquer tamanho de fonte R_0 e posição s . Porém, para arcos com altas magnificações e razões axiais, ou seja, pequeno s e pequenos tamanhos de fonte, que são mais interessantes para o efeito forte de lentes podemos obter aproximações perturbativas simples, tornando os cálculos numéricos ainda mais rápidos e possuindo interpretações diretas.

Expandindo ao redor de $R_0 = 0$ até terceira ordem, temos para as medidas de comprimento de cada arco¹:

$$L_1 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{R_0^3}{4s^3(1 \pm s)} + \mathcal{O}[R_0^5], \quad (4.51)$$

$$L_2 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{R_0^3}{3s^3} + \mathcal{O}[R_0^5], \quad (4.52)$$

$$L_3 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{(1 \pm s + s^2)R_0^3}{3s^3(1 \pm s)} + \mathcal{O}[R_0^5], \quad (4.53)$$

$$L_4 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{(1 \pm s + s^2)R_0^3}{3s^3(1 \pm s)} + \mathcal{O}[R_0^5], \quad (4.54)$$

$$L_5 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{(1 \pm s)R_0^3}{3s^3} + \mathcal{O}[R_0^5], \quad (4.55)$$

$$L_6 \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0 + \frac{(1 \mp 2s)R_0^3}{3s^3} + \mathcal{O}[R_0^5]. \quad (4.56)$$

¹considerando $s < 1$ para o arco interno, pelos motivos já discutidos anteriormente sobre o comportamento da imagem interna ao redor dessa região.

A primeira ordem em R_0 resulta exatamente na aproximação para fonte infinitesimal $L = 2R_0|\mu_t|_{x=1\pm s}$, como era esperado. Detalharemos melhor no próximo capítulo a aproximação de fonte infinitesimal. Para pequenos valores de s , ou seja, altas magnificações, todas as medidas propostas de L concordam até terceira ordem em R_0 e com $s \rightarrow 0$ a limaçon vira um círculo e nesse caso as definições de L_2 a L_6 são idênticas. Interessante notar que até terceira ordem as expansões para L_3 e L_4 são iguais para quaisquer valores de s , que é o que notamos nas Figs. 4.4-4.7. Vemos que L_5 e L_6 subestimam/superestimam o comprimento, que foi o comportamento mostrado nas figuras.

Essas expansões são úteis para que possamos recuperar as aproximações de fonte infinitesimal, observar os desvios pelo fato das fontes serem finitas, e para comparar diferentes definições e aproximações para comprimento e largura das imagens². Além disso, as expansões permanecerão válidas para arcos muito distorcidos enquanto mantendo o efeito de fonte finita. Temos a expectativa de que, para lentes mais gerais em que não é possível obter soluções analíticas para o comprimento (ou a largura), será possível conseguir pelo menos uma expressão analítica para as expansões, como as Eqs. (4.51) a (4.56).

4.2.2 Fonte Elíptica

Para fontes elípticas utilizamos as definições (4.16) a (4.30). As equações não serão explicitadas aqui pois as únicas expressões analíticas (L_1, L_4, L_5 e L_6) são muito extensas e cada ramificação apresentada no Apêndice A terá uma equação diferente. No entanto, o arquivo com as equações está disponível mediante solicitação. Novamente o arco interno terá comportamento anômalo próximo de regiões que a imagem deixa de ser arco e passa a ter o formato similar a uma gota, como esquematizado na Fig. 4.8.

Nas Figs. 4.9-4.16 apresentamos o comportamento de cada medida de comprimento, considerando variações da posição da fonte (s), raio (R_0), orientação do semi-eixo maior (ϕ_e) e elipticidade (ε_s). Apresentamos também a diferença relativa ao valor de referência, que é a integral exata do comprimento da espinha dorsal, L_3 .

O comportamento para o comprimento de imagens formadas a partir de fontes elípticas, ao variar a posição da fonte (Figs 4.9 e 4.10) e o raio da fonte (Figs. 4.11 e 4.12) se assemelha aos resultados para imagens de fonte circular, decrescendo ao afastar a fonte e aumentando com o raio.

Os resultados de comprimento ao considerar os novos parâmetros que a fonte elíptica acrescenta ao problema, orientação da fonte e elipticidade, estão apresentados nas Figs. 4.13, 4.14 em função de ϕ_e e Figs. 4.15 e 4.16 em função de ε_s .

Precisamos selecionar ainda qual valor de comprimento utilizaremos para o cálculo da

²Essas expansões foram obtidas a partir das Eqs. (4.32) a (4.49) utilizando o software Mathematica

seção de choque. Observe que os comprimentos considerando uma circunferência que passa pelos extremos e centro das imagens, L_4 , são os que mais se aproximam do valor de referência, L_3 , e, portanto, utilizaremos esse comprimento para o resto dos cálculos com fonte elíptica.

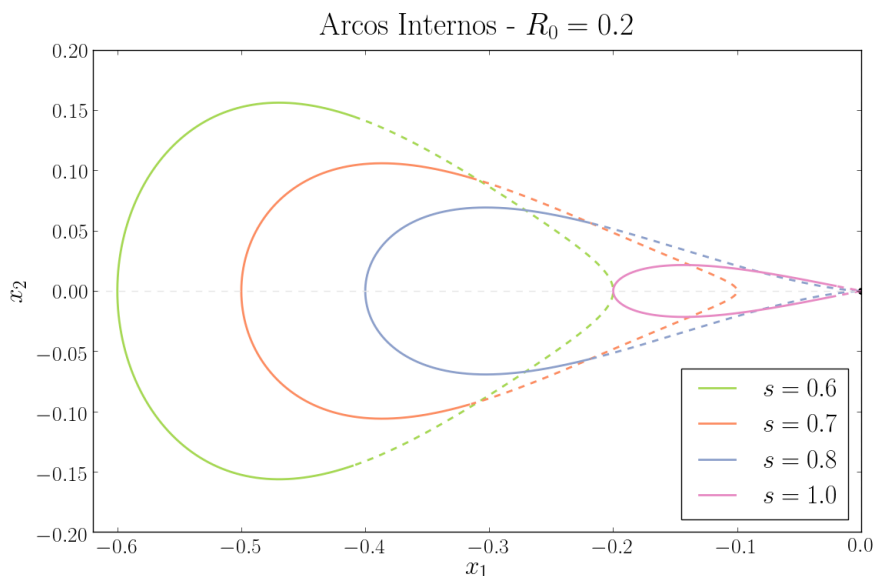


Figura 4.8: Comportamento do arco interno para regiões próximas ao limite que essa imagem desaparece para $R_0 = 0.2$ e $\varepsilon_s = 0$.

Nas Figs. 4.9-4.16 estamos considerando a orientação para a fonte como $\phi_e = \pi/3$, mas podemos avaliar também o comportamento nos casos extremos de $\phi_e = 0$ e $\phi_e = \pi/2$. Nessas duas situações foi possível escrever de forma simplificada algumas das expressões de comprimento (L_1 , L_2 , L_5 , L_6 e L_7) e esses resultados, juntamente com as expansões e gráficos estão apresentados no Apêndice B.

Os comprimentos para esses valores de ϕ_e irão apresentar o mesmo comportamento que os apresentados nessa seção. O comprimento decresce entre os limites para formação de anel de Einstein e para ter apenas uma imagem quando avaliamos o comportamento em relação a posição da fonte s . E o arco interno deixa de existir para valores de s próximos a 1. Quando verificamos a dependência em relação ao raio da fonte R_0 o comprimento cresce de zero até a formação do anel de Einstein e também irá crescer com o aumento da elipticidade da fonte.

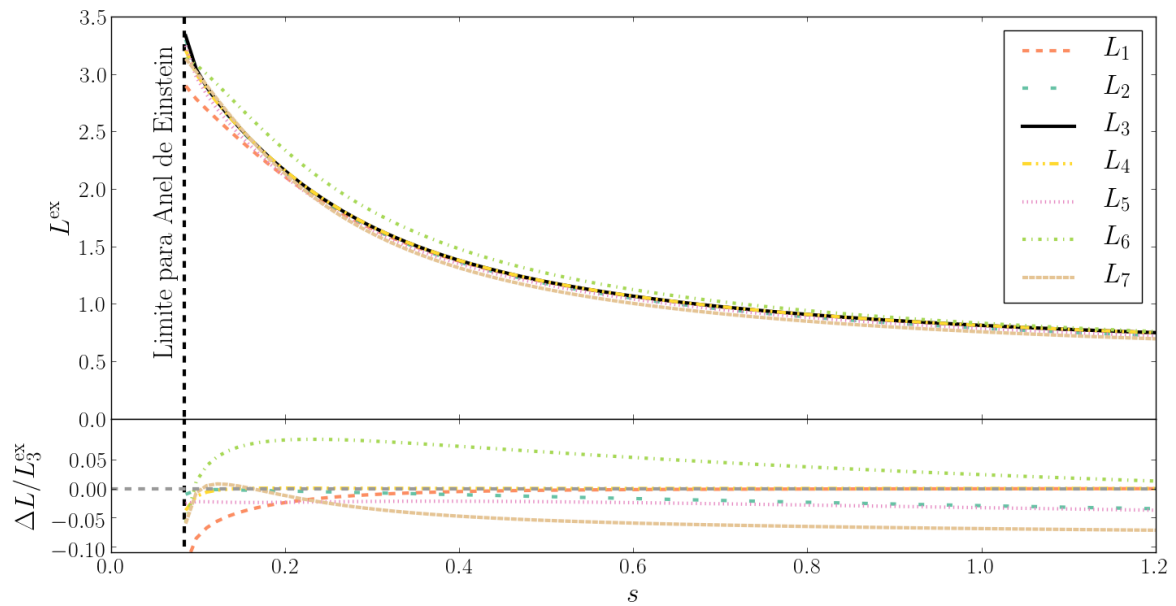


Figura 4.9: Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

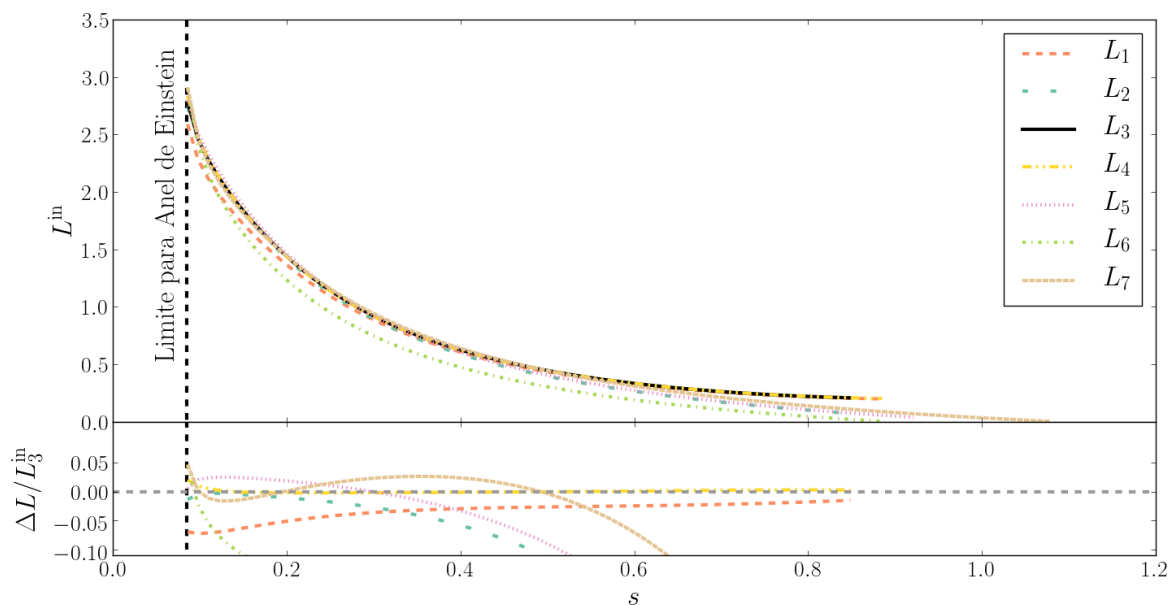


Figura 4.10: Comprimentos para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

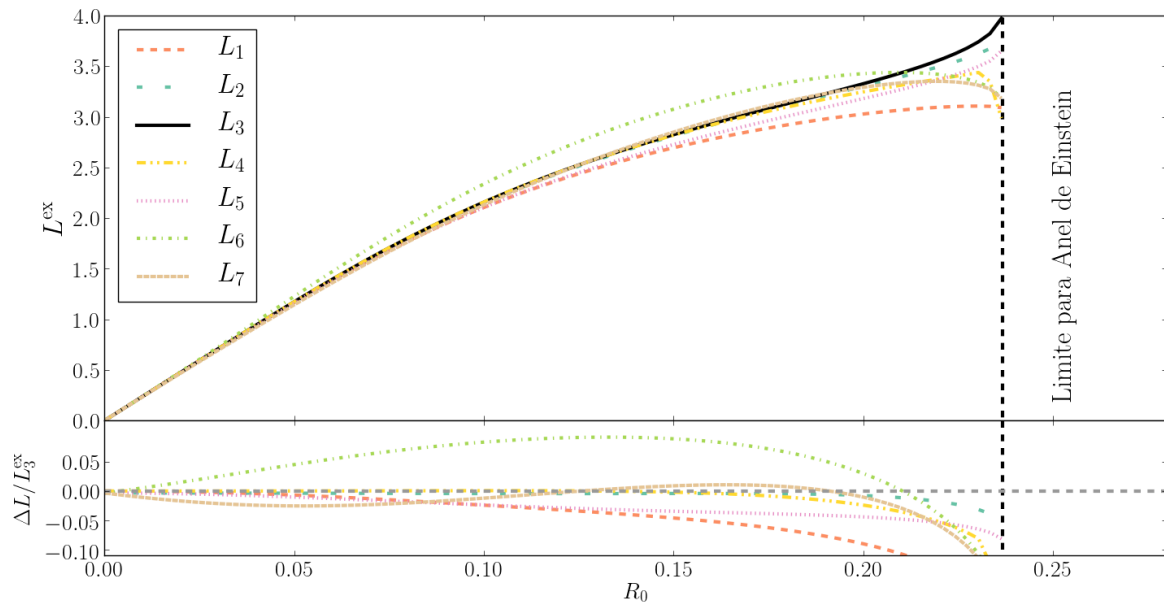


Figura 4.11: Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

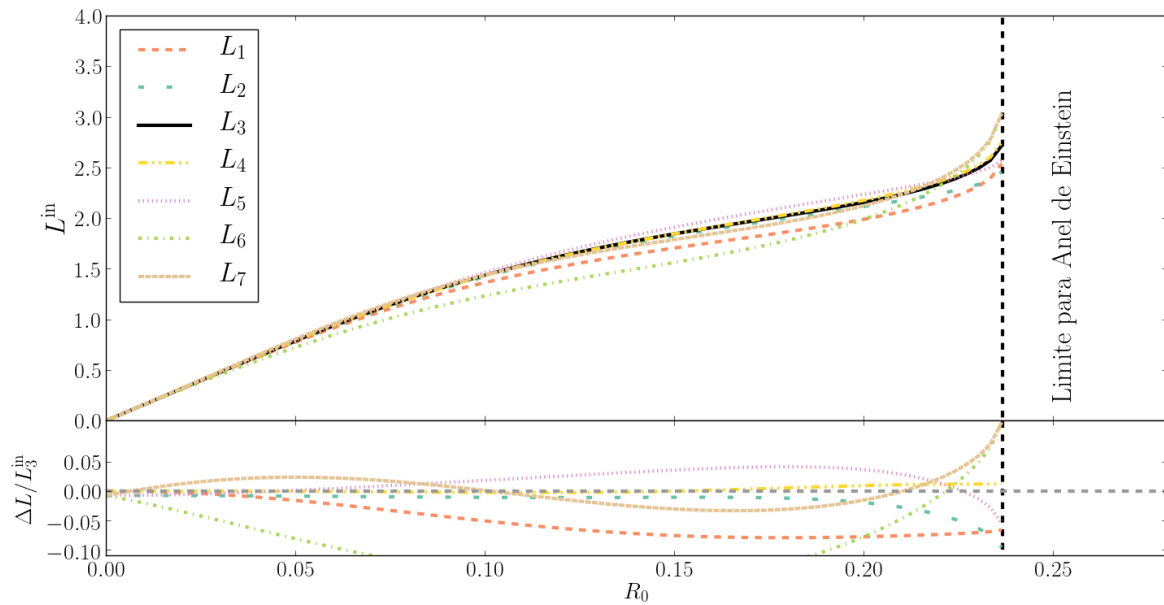


Figura 4.12: Comprimentos para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

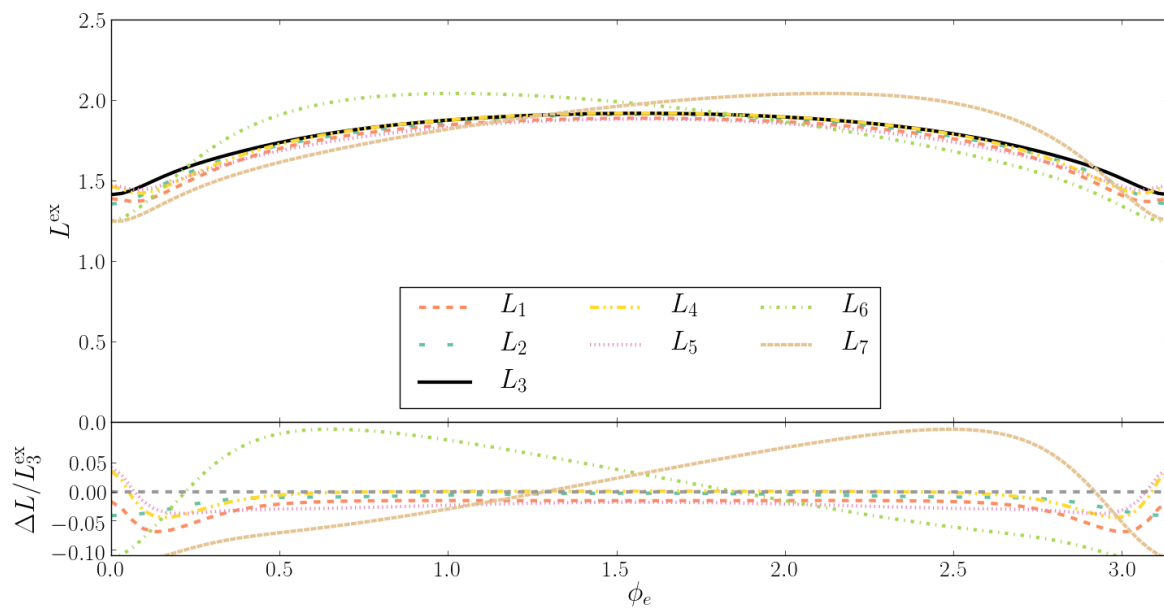


Figura 4.13: Comprimentos para o arco externo considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

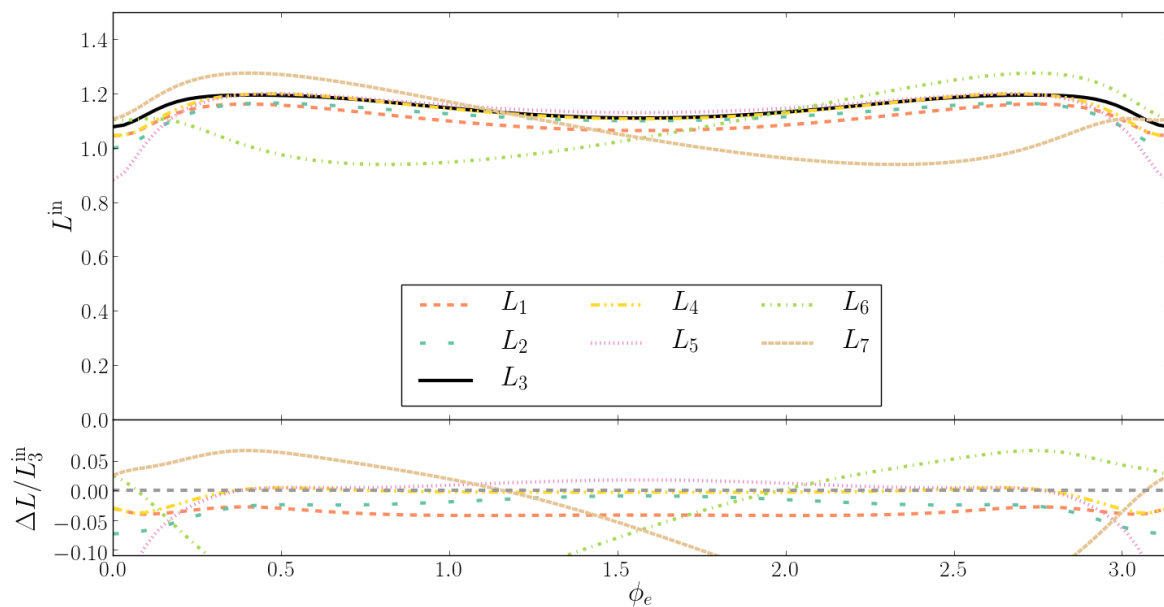


Figura 4.14: Comprimentos para o arco interno considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

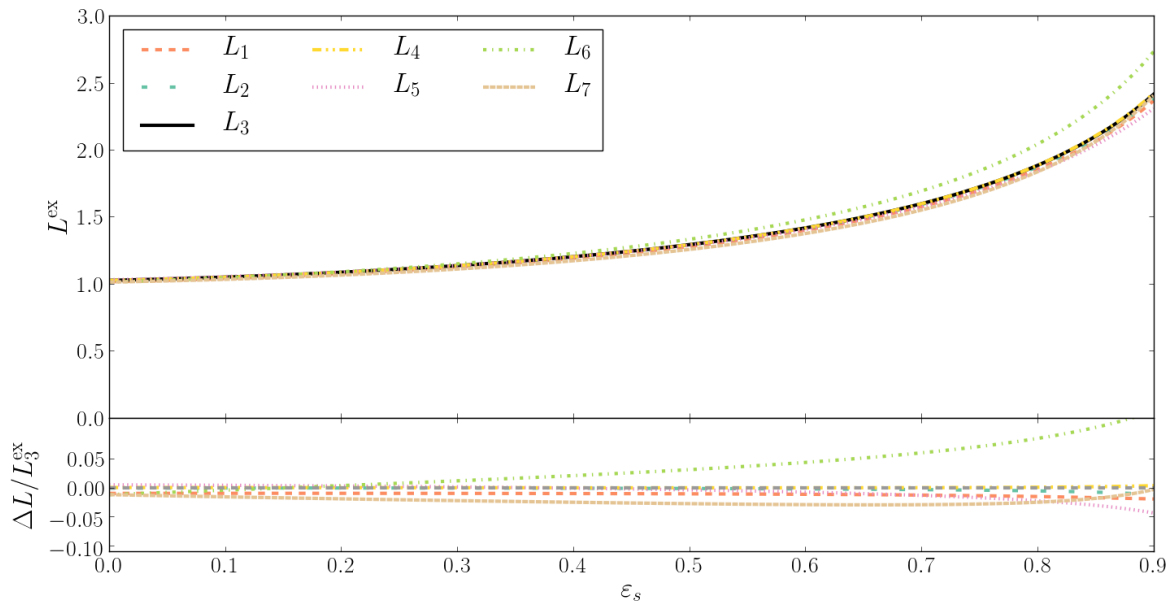


Figura 4.15: Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$.

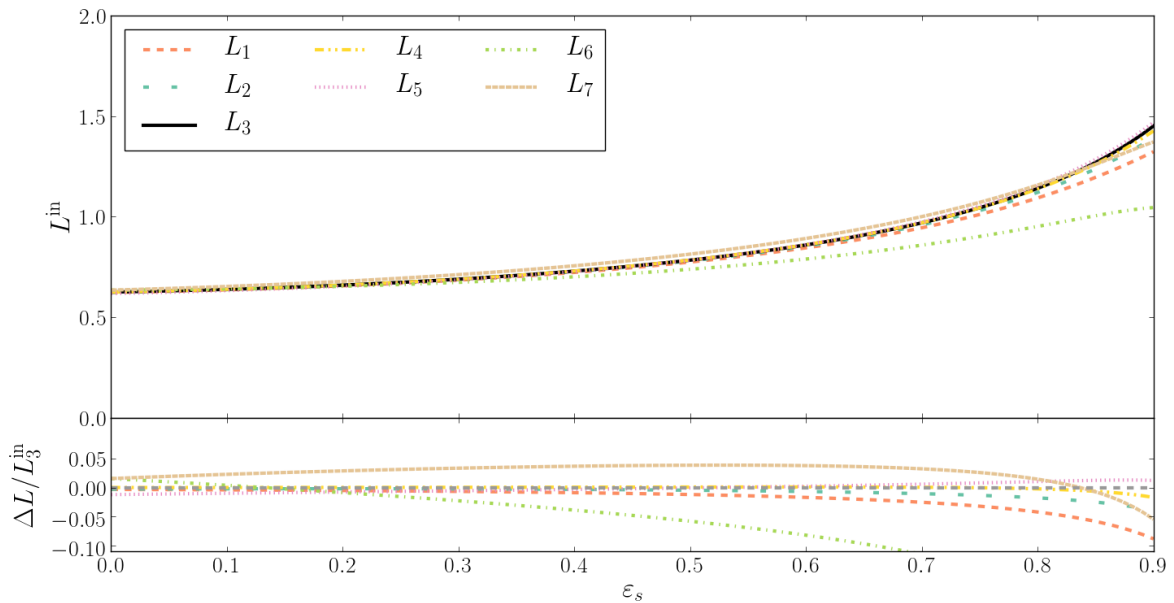


Figura 4.16: Comprimentos para o arco interno considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$.

Expansões dos Comprimentos para Fonte Elíptica

Repetimos o mesmo procedimento feito para fonte circular, expandindo as expressões de L_1 a L_7 (com exceção de L_2 e L_3 que são numéricas) ao redor de $R_0 = 0$ até terceira ordem. Para esse exemplo, consideramos $\theta = 0$, $0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ e $s < 1$ (para o arco interno apenas). Partindo das Eqs. (4.16) a (4.31), temos

$$\begin{aligned}
 L_1 \approx & 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0A^{1/2} + R_0^3\left[64s^3(1 \pm s)A^{1/2}\left(1 - \varepsilon_s^2\right)^2\left(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)\right)^2\right]^{-1} \times \\
 & \times \left[32(1 \pm s)^2 - 16(1 \pm s)^2(21 \pm 32s + 36s^2)\varepsilon_s^2 + 12\varepsilon_s^4(-57 \mp 178s - 137s^2 \pm 24s^3 + 32s^4) + \right. \\
 & + 2\varepsilon_s^6(-31 \mp 94s - 11s^2 \pm 123s^3 + 96s^4) + \\
 & + 8\varepsilon_s \cos(2\phi_e)\left[8(1 \pm 3s + 2s^2)^2 + 4(1 \pm s)^2(41 \pm 52s + 16s^2)\varepsilon_s^2 + \right. \\
 & + (77 \pm 238s + 137s^2 \mp 124s^3 - 96s^4)\varepsilon_s^4] - \\
 & - \varepsilon_s^2 \cos(4\phi_e)\left[16(1 \pm s)^2(29 \pm 48s + 12s^2) + 16(65 \pm 210s + 233s^2 \pm 88s^3 - 8s^4)\varepsilon_s^2 + \right. \\
 & + (101 \pm 314s + 209s^2 \mp 128s^3 - 64s^4)\varepsilon_s^4] + \\
 & + 4\varepsilon_s^3 \cos(6\phi_e)\left[8(1 \pm s)^2(19 \pm 28s) + (93 \pm 302s + 361s^2 \pm 164s^3)\varepsilon_s^2\right] - \\
 & - 2\varepsilon_s^4 \cos(8\phi_e)\left[2(89 \pm 306s + 329s^2 \pm 104s^3) + (25 \pm 82s + 109s^2 \pm 64s^3)\varepsilon_s^2\right] + \\
 & + 4\varepsilon_s^5 \cos(10\phi_e)(25 \pm 86s + 85s^2 \pm 20s^3) - \varepsilon_s^6 \cos(12\phi_e)(11 \pm 38s + 31s^2)] + \mathcal{O}\left[R_0^5\right],
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
 L_4 \approx & 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0A^{1/2} + \\
 & + \frac{R_0^3}{s^3(1 \pm s)}\left[\frac{\left[2\left(1 \pm 3s + 2s^2\right) + \varepsilon_s^2\left(1 \mp 5s - 4s^2\right) - 4(1 \pm s)\varepsilon_s \cos(2\phi_e) + (1 \pm 3s)\varepsilon_s^2 \cos(4\phi_e)\right]^2}{12A^{3/2}(1 \pm s)^2(1 - \varepsilon_s)^2(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))^3} - \right. \\
 & - \left[8s(1 \pm s) + (20 \pm 8s)\varepsilon_s^2 + (5 \mp s - 8s^2)\varepsilon_s^4 - 8\varepsilon_s \cos(2\phi_e)\left[2(1 \pm s)^2 + \varepsilon_s^2(4 \pm s - 2s^2)\right] + \right. \\
 & + 4\varepsilon_s^2 \cos(4\phi_e)\left[7 \pm 10s + (2 \pm s)\varepsilon_s^2\right] - 8\varepsilon_s^3 \cos(6\phi_e)(2 \pm 3s) + \varepsilon_s^4 \cos(8\phi_e)(3 \pm 5s)] \times \\
 & \times \left[8A^{1/2}\left(1 - \varepsilon_s^2\right)^2\left(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)\right)^2\right]^{-1} + \mathcal{O}\left[R_0^5\right],
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
 L_5 \approx & 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0\sqrt{\frac{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)}{1 - \varepsilon_s^2}} + \\
 & + \frac{R_0^3}{3s^3}\frac{1 \pm s + 4\varepsilon_s(1 \pm s)\cos(2\phi_e) - \varepsilon_s^2[1 \pm 4s + (4 \pm s)\cos(4\phi_e)]}{\sqrt{(1 - \varepsilon_s^2)^3(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))}} + \mathcal{O}\left[R_0^5\right],
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 L_6 \approx & 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0\sqrt{\frac{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)}{1 - \varepsilon_s^2}} \mp R_0^2\frac{2\varepsilon_s \sin(2\phi_e)}{s(1 - \varepsilon_s^2)} + \\
 & + \frac{R_0^3}{6s^3}\frac{2(1 \mp 2s) + 4\varepsilon_s(2 \mp s)\cos(2\phi_e) - \varepsilon_s^2[2 \pm 13s + (8 \pm 5s)\cos(4\phi_e)]}{\sqrt{(1 - \varepsilon_s^2)^3(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))}} + \mathcal{O}\left[R_0^5\right],
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
 L_7 \approx & 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)R_0\sqrt{\frac{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)}{1 - \varepsilon_s^2}} \pm R_0^2\frac{2\varepsilon_s \sin(2\phi_e)}{s(1 - \varepsilon_s^2)} + \\
 & + \frac{R_0^3}{6s^3}\frac{2(1 \mp 2s) + 4\varepsilon_s(2 \mp s)\cos(2\phi_e) - \varepsilon_s^2[2 \pm 13s + (8 \pm 5s)\cos(4\phi_e)]}{\sqrt{(1 - \varepsilon_s^2)^3(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))}} + \mathcal{O}\left[R_0^5\right],
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

em que

$$A = \left[1 - 2\varepsilon_s \cos(2\phi_e) + \varepsilon_s^2 \frac{2s^2 + (1 \pm 2s)(1 + \cos(4\phi_e))}{2(1 \pm s)^2} \right] \times \left[(1 - \varepsilon_s^2)(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)) \right]^{-1}. \quad (4.62)$$

4.3 Área

O próximo passo é determinar a área de cada imagem. Isso será útil para calcular a seção de choque de magnificação e para obter a largura W em algumas definições. A área pode ser escrita como:

$$A = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{x^-}^{x^+} x \, dx \, d\phi = \int_{\phi_i}^{\phi_f} W(\phi) \bar{x}(\phi) d\phi, \quad (4.63)$$

em que $\bar{x}(\phi)$ é a espinha dorsal e $W(\phi)$ é a largura para cada cada posição angular, o que no caso de fonte circular é

$$W(\phi) = x^+ - x^- = 2R_0 \sqrt{1 - \csc^2 \phi_0 \sin^2 \phi}. \quad (4.64)$$

No caso de fontes circulares, as áreas para os arcos externo e interno são

$$A^{\text{ex}} = \pi R_0^2 + 4\mathcal{E}(\phi_0, (s/R_0)^2), \quad (4.65)$$

$$A^{\text{in}} = -\pi R_0^2 + 4\mathcal{E}(\phi_0, (s/R_0)^2). \quad (4.66)$$

Como fizemos para L , iremos obter uma expansão para $R_0 \ll 1$ e para isso precisamos calcular inicialmente uma aproximação para a integral elíptica:

$$\mathcal{E}(\phi_0, \csc^2 \phi_0) = \mathcal{E}\left(\arcsin\left(\frac{R_0}{s}\right), \frac{s^2}{R_0^2}\right) = \int_0^{\arcsin(R_0/s)} \sqrt{1 - \frac{s^2}{R_0^2} \sin^2 \theta} d\theta. \quad (4.67)$$

Com a mudança de coordenada

$$z = \frac{s}{R_0} \sin \theta \rightarrow dz = \frac{s}{R_0} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{u} \sqrt{1 - u^2 z^2} d\theta, \quad (4.68)$$

em que $u = R_0/s$. Dessa forma, a integral se resume a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi_0, \csc^2 \phi_0) &= u \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - u^2 z^2}} \approx u \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} \left(1 + \frac{\epsilon^2 z^2}{2} + \dots \right) \\ &\approx \frac{R_0}{s} \frac{\pi}{4} + \frac{R_0^3}{s^3} \frac{\pi}{32} + \dots \end{aligned} \quad (4.69)$$

e assim, a razão entre as áreas das imagens \mathcal{A}_i e da fonte $\mathcal{A}_s = \pi R_0^2$, ou seja, a magnificação $\mu_{\mathcal{A}}$ é

$$\mu_{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_s} \approx \left(\pm 1 + \frac{1}{s} \right) + \frac{R_0^2}{8s^3} + \mathcal{O}[R_0^4]. \quad (4.70)$$

Novamente, temos que o termo de ordem zero em R_0 é a magnificação infinitesimal μ . O primeiro termo não trivial em R_0 é a correção para fonte finita. Note que nesse caso a correção é quadrática em R_0 , ao contrário de L , que possuía apenas correções cúbicas. Além disso, a expansão das áreas para menor raio é sempre positiva nos regimes permitidos.

No caso de fonte elíptica, a área foi calculada numericamente, portanto explicitaremos aqui o cálculo para fonte circular, mas tenha em mente que o procedimento para a fonte elíptica é análogo.

4.4 Largura

Queremos agora testar diferentes medidas para a largura dos arcos, procurando por expressões analíticas simples e ao mesmo tempo acuradas. Algumas maneiras de definir essas larguras são:

- W_c : A forma mais simples de se calcular a largura é considerando a espessura do arco em seu centro

$$W_c = x^+(\phi_c) - x^-(\phi_c) \quad (4.71)$$

e dada sua simplicidade, utilizaremos a mesma ao longo do texto para o cálculo da seção de choque. Na Fig. 4.17 indicamos a largura angular definida como sendo $W(\phi) = x^+(\phi) - x^-(\phi)$.

- \overline{W} : Podemos utilizar também a média da largura sobre todos os ângulos,

$$\overline{W} = \frac{1}{\phi_f - \phi_i} \int_{\phi_i}^{\phi_f} (x^+ - x^-) d\phi. \quad (4.72)$$

Note que o resultado para essa forma de cálculo provavelmente será o menos preciso, dado que o arco vai se afinando nas pontas e a largura nessas regiões será considerada. Por outro lado, leva em consideração toda a forma do arco, não em um ponto apenas.

- W_i : Assumindo um formato de ArcEllipse, que é uma prescrição geométrica para descrever uma imagem em formato de arco [197] e é muito similar aos arcos gerados pelo modelo da SIS, como será discutido em detalhe no Apêndice C. Segundo a expressão da ArcEllipse, podemos definir a largura do arco como

$$W_i = \frac{4A}{\pi L_i}, \quad (4.73)$$

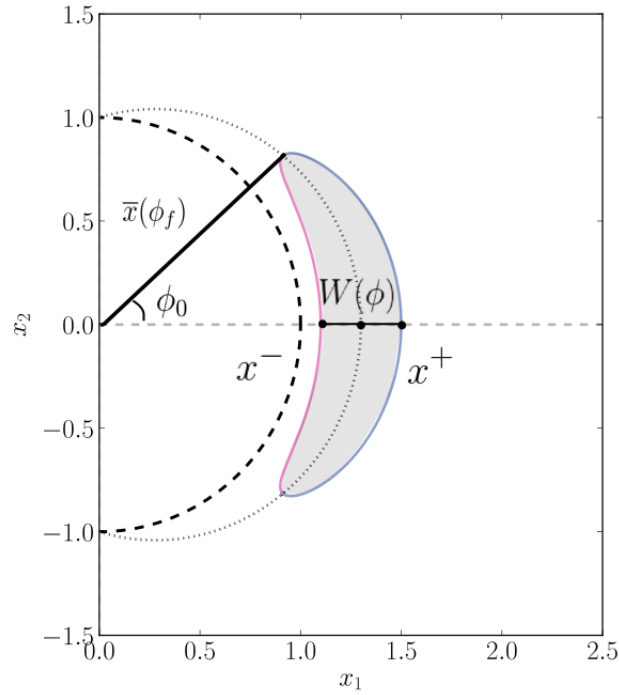


Figura 4.17: Diagrama para cálculo da largura indicando a separação entre as partes interna e externa dos arcos para arco de fonte circular.

em que L_i representa cada definição de comprimento utilizada nas seções anteriores, com i variando de 1 a 7. Poderíamos utilizar também \mathcal{A}/L , entretanto os resultados seriam bem piores que esse. Para discussão nas medidas de W baseadas em \mathcal{A} e L , sugerimos os trabalhos de Meneghetti et al. [198] and Xu et al. [55].

Como nossa referência na Seção 4.2 foi L_3 , consideraremos aqui a largura correspondente, ou seja, W_3 , como referência para as comparações.

4.4.1 Fonte Circular

Para a fonte circular, podemos escrever explicitamente os resultados para os métodos de determinação da largura a largura:

- **Largura no centro do arco:**

$$W_c^{ex} = W_c^{in} = 2R_0. \quad (4.74)$$

- **Média angular sobre todos os ângulos:**

$$\overline{W}^{ex} = \overline{W}^{in} = \frac{2R_0}{\phi_0} \mathcal{E}(\phi_0, (s/R_0)^2). \quad (4.75)$$

Para W_i basta considerar as expressões para os comprimentos e áreas apresentadas ao longo do capítulo.

Apresentamos nas Figs. 4.18-4.21 a comparação entre cada largura ao valor de referência, variando a posição da fonte e seu raio. Qualquer comportamento anômalo poderá ser considerado, uma vez que eles ocorrem em regiões nas quais as imagens perdem o formato desejado de arco. Por exemplo, se queremos $L_2^{\text{ex}}/W_c^{\text{ex}} \geq 5$, teremos $s^{\text{ex}} \leq 0.28$ e $s^{\text{in}} \leq 0.21$, o que significa que para imagens mais alongadas o limite para s será sempre menor que o intervalo completo para ter duas imagens. Valores próximos à formação de anéis de Einstein serão mais desejáveis. No mais, observe que a largura é aproximadamente constante ao variar a posição da fonte, mas cresce linearmente com seu raio. Isso é interessante, pois mesmo com a dependência na área e comprimento das imagens, ao fazermos a razão A/L , essa dependência se cancela. Utilizaremos a expressão de W_c nos cálculos para a seção de choque pois ao comparar ao valor de referência, W_3 , essa é a expressão mais simples e, ao mesmo tempo, mantém uma diferença pequena de W_3 .

O comportamento de W_i segue o de L_i , discutido na Seção 4.2.1, uma vez que $W \propto A/L_i$ e desses resultados temos que, apesar de W_2 e W_4 serem os mais próximos de W_3 , iremos continuar usando W_c por conta de sua simplicidade e por ser próxima o suficiente da referência nas regiões consideradas (desvio relativo menor que 15%). A média sobre todos os ângulos, \overline{W} , tem razão constante, o que será discutido em detalhes no Apêndice C. Em geral, os erros envolvidos nas demais quantidades que aparecem em cálculos práticos (como densidade de objetos em função da magnitude e desvio para o vermelho) são maiores, portanto um erro nessa ordem não é importante. Especialmente neste caso, em que estamos estudando pela primeira vez um efeito (fontes finitas), não queremos ter um resultado ultra-preciso, mas algo que reproduza de alguma forma o que esperamos ser o caso real. Ou seja, esperamos entender um comportamento visto nas simulações, mas não tratado de forma detalhada em cálculos semi-analíticos, como uma primeira abordagem do problema.

Na Fig. 4.20 mostramos para o arco interno que os valores relacionados aos comprimentos que vão a zero antes de atingir o limite entre uma ou duas imagens divergirão nos mesmos valores, mas novamente, essa não é nossa região de interesse pois as imagens não são arcos.

Expansões das Larguras

Utilizando a Eq. (4.70) e as expressões (4.51)-(4.56), podemos obter as expansões das larguras até terceira ordem em R_0 :

$$W_1 \approx 2R_0 \pm \frac{R_0^3}{4s(\pm 1 + s)^2}, \quad (4.76)$$

$$W_2 \approx 2R_0 \mp \frac{R_0^3}{12s^2(\pm 1 + s)}, \quad (4.77)$$

$$W_3 = W_4 \approx 2R_0 + \frac{(-1 \mp s - 4s^2)R_0^3}{12s^2(\pm 1 + s)^2}, \quad (4.78)$$

$$W_5 \approx 2R_0 + \frac{(\mp 1 - 4s)R_0^3}{12s^2(\pm 1 + s)}, \quad (4.79)$$

$$W_6 \approx 2R_0 + \frac{(\mp 1 + 8s)R_0^3}{12s^2(\pm 1 + s)}, \quad (4.80)$$

$$W_c = 2R_0, \quad (4.81)$$

$$\bar{W} \approx \frac{\pi R_0}{2} \left(1 + \frac{(-4 + 3s)R_0^3}{24s^2} \right). \quad (4.82)$$

Note que para nossa escolha de comprimento e largura (L_2 e W_c), a razão L_2/W_c é

$$\frac{L_2}{W_c} \approx \left(\pm 1 + \frac{1}{s} \right) + \frac{R_0^2}{6s^3}, \quad (4.83)$$

na qual o primeiro termo coincide com a ordem zero da razão axial μ_t/μ_r . Isso será utilizado quando fizermos a seção de choque de magnificação no próximo capítulo, considerando a razão axial como sendo a razão entre as áreas das imagens e fonte.

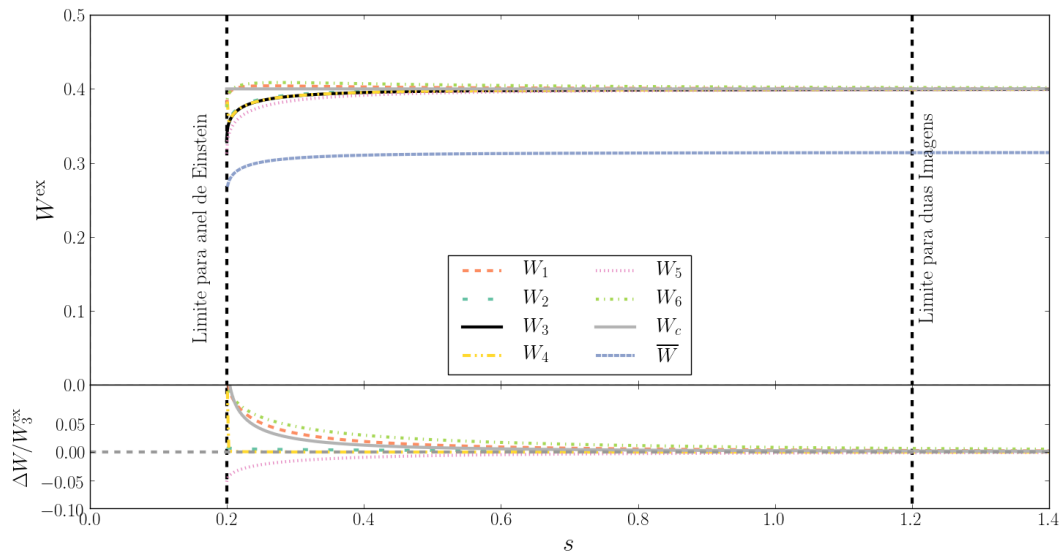


Figura 4.18: Largura para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$.

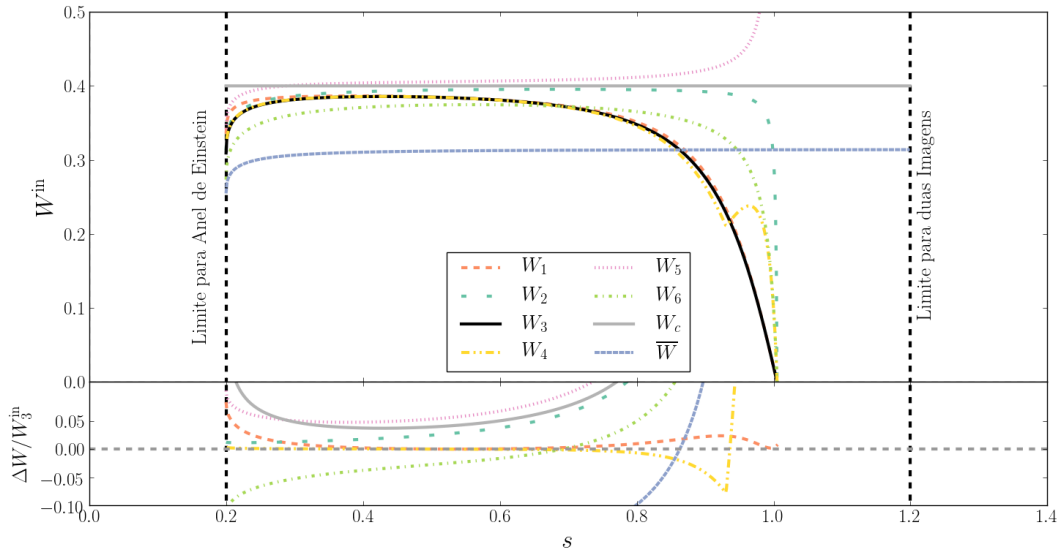


Figura 4.19: Largura para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$.

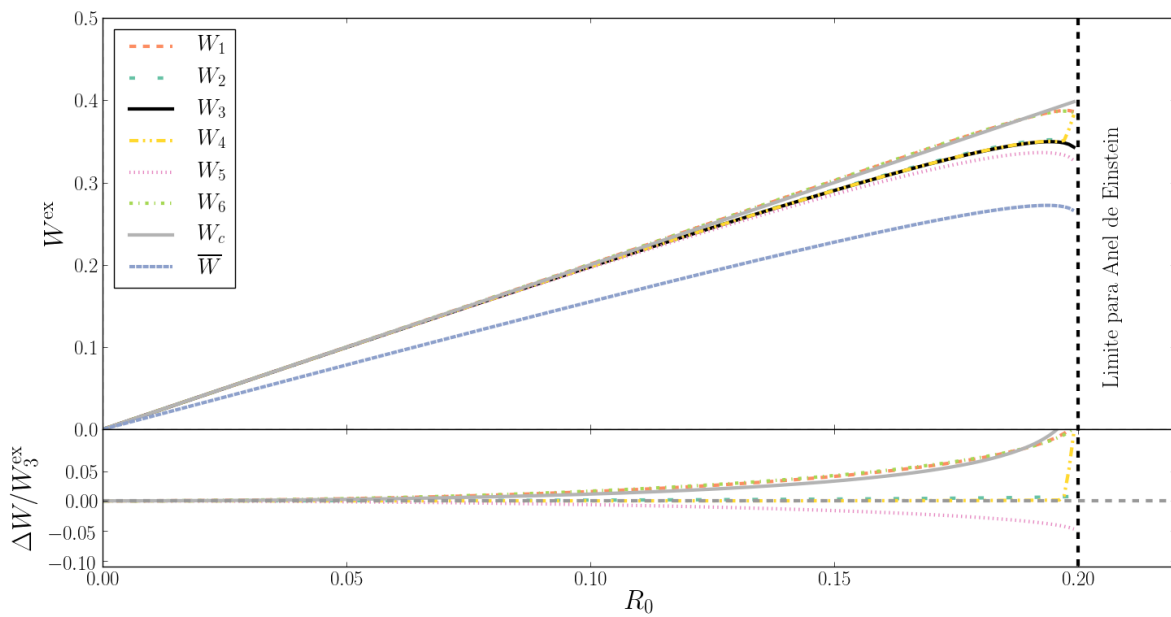


Figura 4.20: Largura para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$.

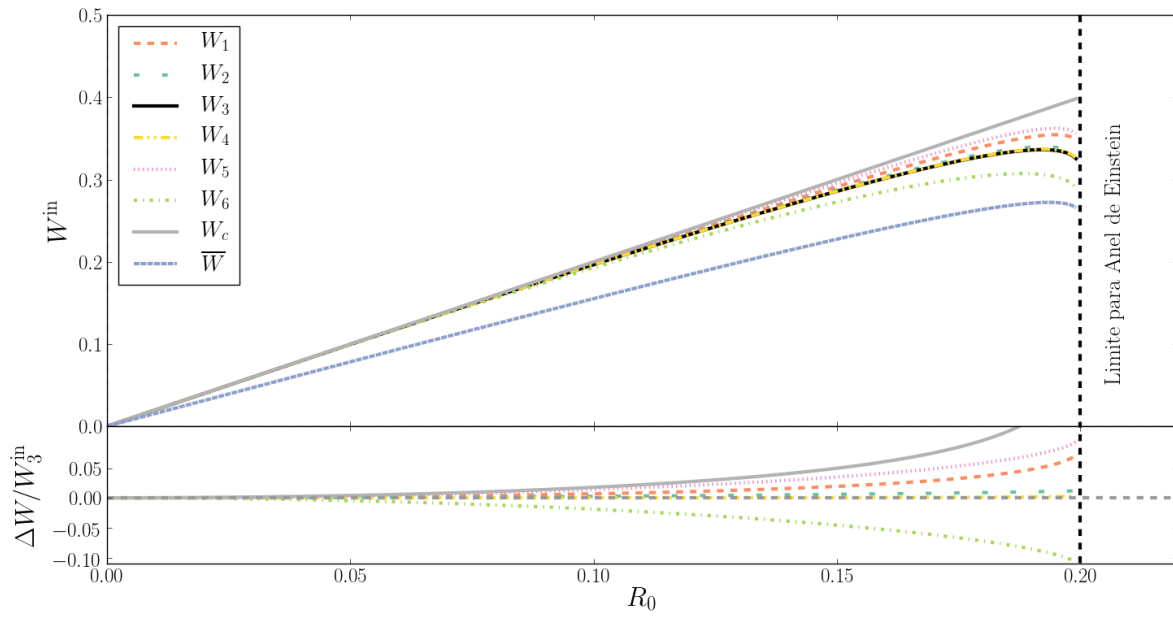


Figura 4.21: Largura para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.2$.

4.4.2 Fonte Elíptica

Para o cálculo da largura considerando fonte elíptica recorreremos novamente às Eqs. (4.71)-(4.73). No entanto, a única expressão analítica será W_c pois não depende da área. Utilizaremos a medida de W_4 para nossos cálculos de seção de choque, uma vez que, como indicado nas Figs. 4.22-4.29, são os que melhores se avaliam em relação a W_3 . Já para a seção de choque perturbada no próximo capítulo, utilizaremos a largura apresentada aqui para a expansão de W_c , pois para pequenos valores de R_0 ela está em acordo com W_3 , como é mostrado nas Figs. 4.23 e 4.25. A largura W_c calculada no centro do arco é

$$W_c^{\text{ex}} = W_c^{\text{in}} = \frac{2R_0}{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e - \phi_A + \phi_B)} \sqrt{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e - \phi_A + \phi_B) - \frac{s^2(1 - \varepsilon_s^2)(1 - \cos(\phi_A - \phi_B))}{2R_0^2}}, \quad (4.84)$$

em que

$$\phi_A = \arccos \left[\sqrt{\frac{B_1 + (1 - \varepsilon_s^2)^2 (s^4 + B_2)}{C}} \right], \quad \phi_B = \arccos \left[\sqrt{\frac{B_1 + (1 - \varepsilon_s^2)^2 (s^4 - B_2)}{C}} \right], \quad (4.85)$$

com

$$B_1 = R_0^2 \left[-s^2 + \varepsilon_s^2 (s^2 + 2R_0^2) + \varepsilon_s (2R_0^2 - 3s^2 (1 - \varepsilon_s^2)) \cos(2\phi_e) \right], \quad (4.86)$$

$$B_2 = \frac{2}{(1 - \varepsilon_s^2)} \varepsilon_s R_0^2 \sin(2\phi_e) \sqrt{\frac{R_0^2 - s^2 (1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))}{\varepsilon_s^2 - 1}}, \quad (4.87)$$

$$C = 4R_0^4 \varepsilon_s^4 + s^4 (-1 + \varepsilon_s^2)^2 + 4R_0^2 s^2 \varepsilon_s (-1 + \varepsilon_s^2) \cos(2\phi_e). \quad (4.88)$$

Expansão da Largura

A partir desse valor de W_c podemos obter a expansão da largura até terceira ordem em R_0

$$W_c \approx \frac{2R_0}{\sqrt{1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e)}} - \frac{3R_0^3 \varepsilon_s^2 \sin^2(2\phi_e)}{s^2 (1 - \varepsilon_s^2) (1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))^{3/2}}. \quad (4.89)$$

Note que para nossa escolha de comprimento e largura (L_4 e W_c), a razão L_4/W_c é

$$\begin{aligned} \frac{L_4}{W_c} &= \left(\pm 1 + \frac{1}{s} \right) \sqrt{A(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_0))} - \\ &- R_0^2 \left[2 \left(\frac{(2 + \varepsilon_s^2 \pm s(6 - 5\varepsilon_s^2) + 4s^2(1 - \varepsilon_s^2) - 4(1 \pm s)\varepsilon_s \cos(2\phi_e) + (1 \pm 3s)\varepsilon_s^2 \cos(4\phi_e))^2}{A(1 \pm s)^2(1 - \varepsilon_s^2)} \right) \right] - \\ &- 3 \left[8s(1 \pm s) + (20 \pm 8s)\varepsilon_s^2 + (5 \mp s - 8s^2)\varepsilon_s^4 - 8\varepsilon_s \cos(2\phi_e) \left[2(1 \pm s)^2 + \varepsilon_s^2(4 \pm s - 2s^2) \right] + \right. \\ &+ 4\varepsilon_s^2 \cos(4\phi_e) \left[7 \pm 10s + (2 \pm s)\varepsilon_s^2 \right] - 8\varepsilon_s^3 \cos(6\phi_e) (2 \pm 3s) + \varepsilon_s^4 \cos(8\phi_e) (3 \pm 5s) \left. \right] - \\ &- 72A(1 \pm s)^2 \varepsilon_s^2 (1 - \varepsilon_s^2) \sin^2(2\phi_e) \left. \right] \times \left[48s^3(1 \pm s)(1 - \varepsilon_s^2)^2 \sqrt{A(1 - \varepsilon_s \cos(2\phi_e))} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

em que A é dado pela Eq.(4.62).

O primeiro termo desse resultado está em acordo com a aproximação infinitesimal para fontes elípticas proposta por Keeton [199], que será detalhada no próximo capítulo. E esse resultado será importante para os nossos cálculos de seção de choque de formação de arcos.

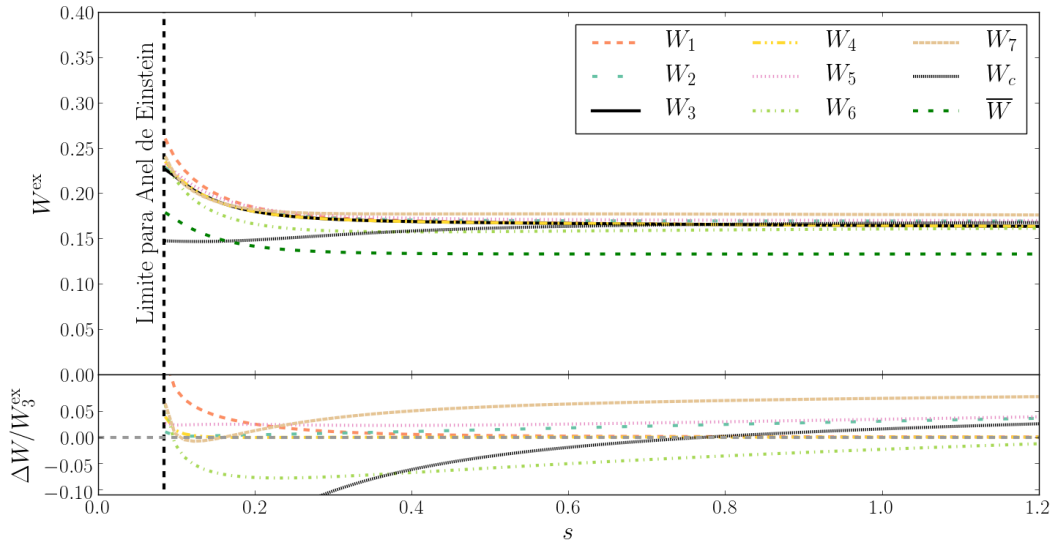


Figura 4.22: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

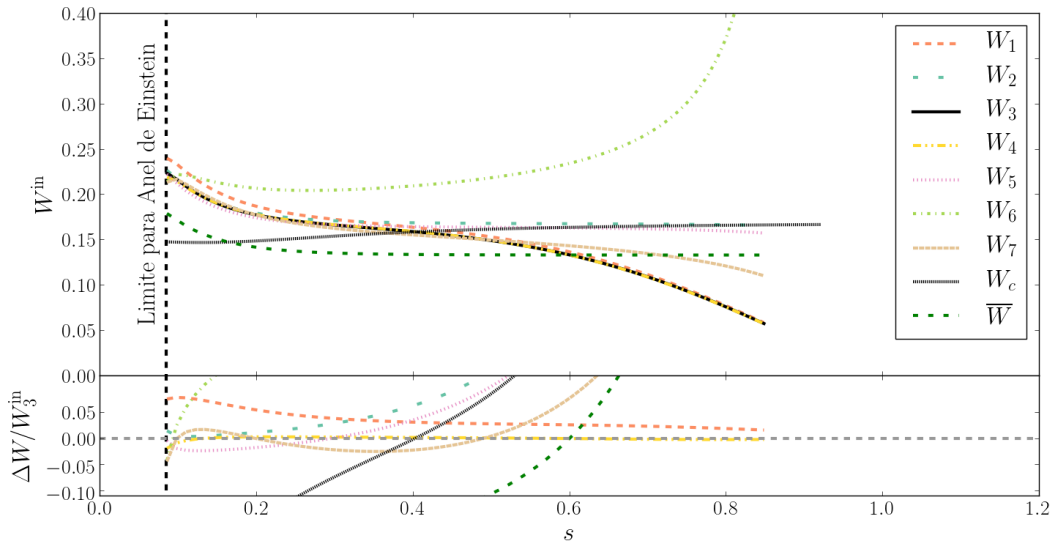


Figura 4.23: Larguras para o arco interno considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

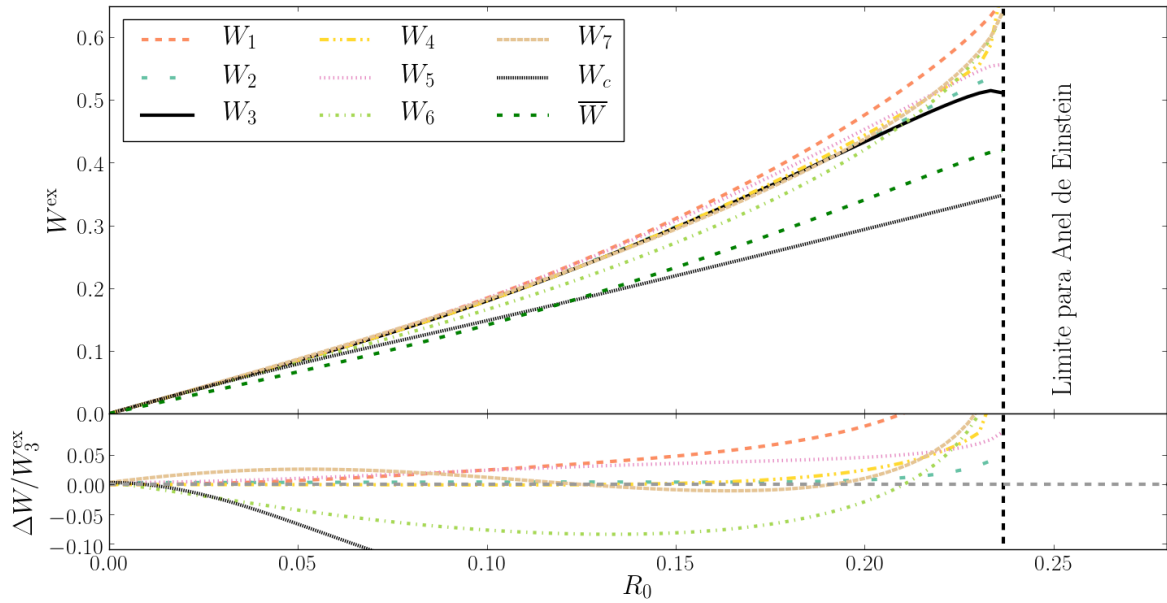


Figura 4.24: Larguras para o arco externo considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

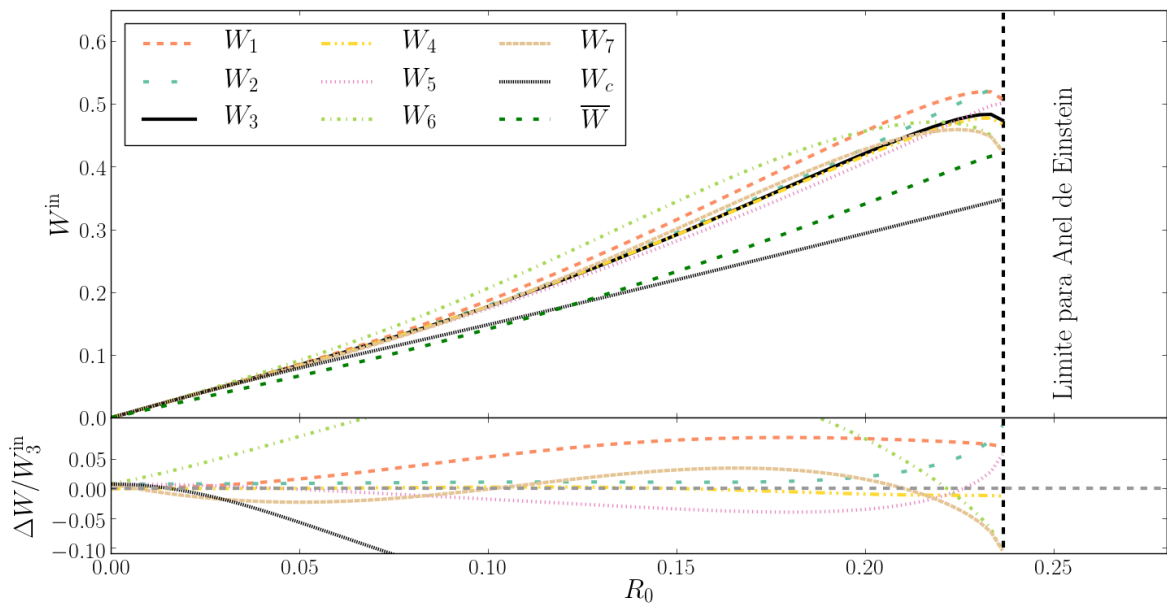


Figura 4.25: Larguras para o arco interno considerando variações no raio da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

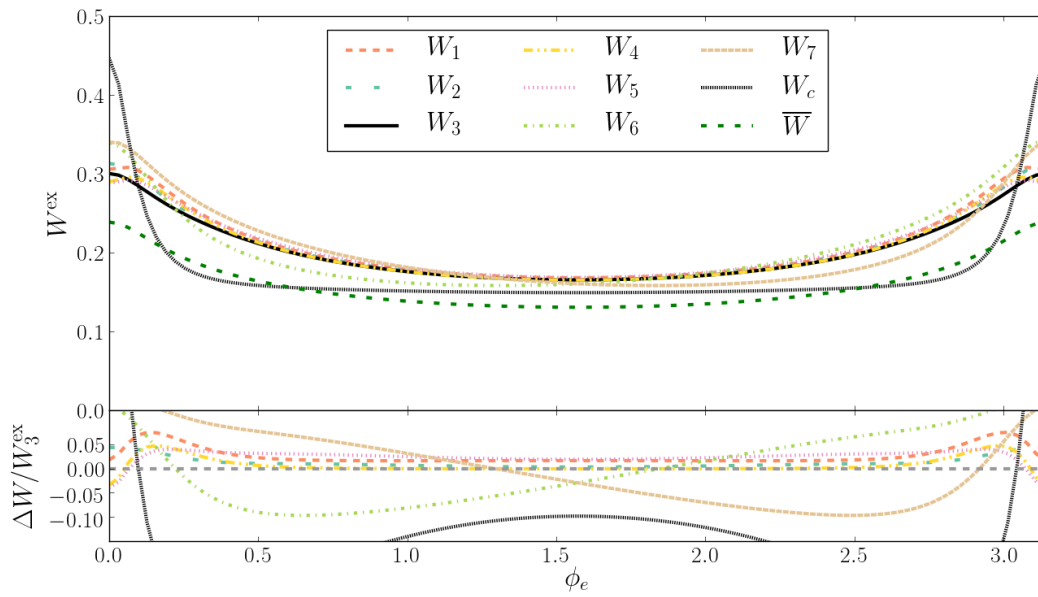


Figura 4.26: Larguras para o arco externo considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

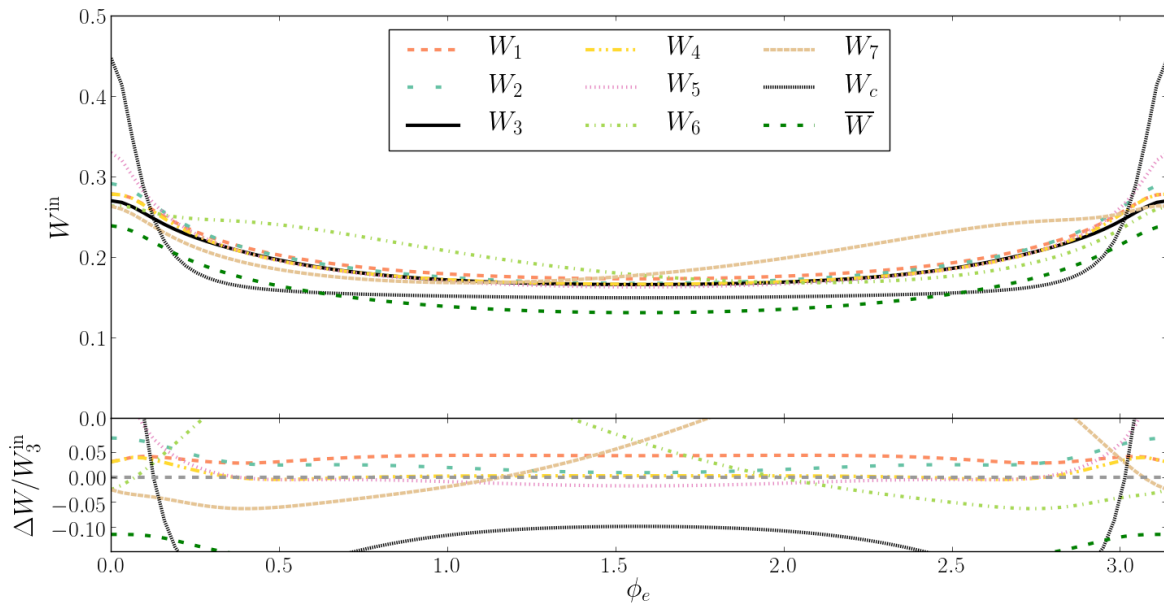


Figura 4.27: Larguras para o arco interno considerando variações na orientação da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

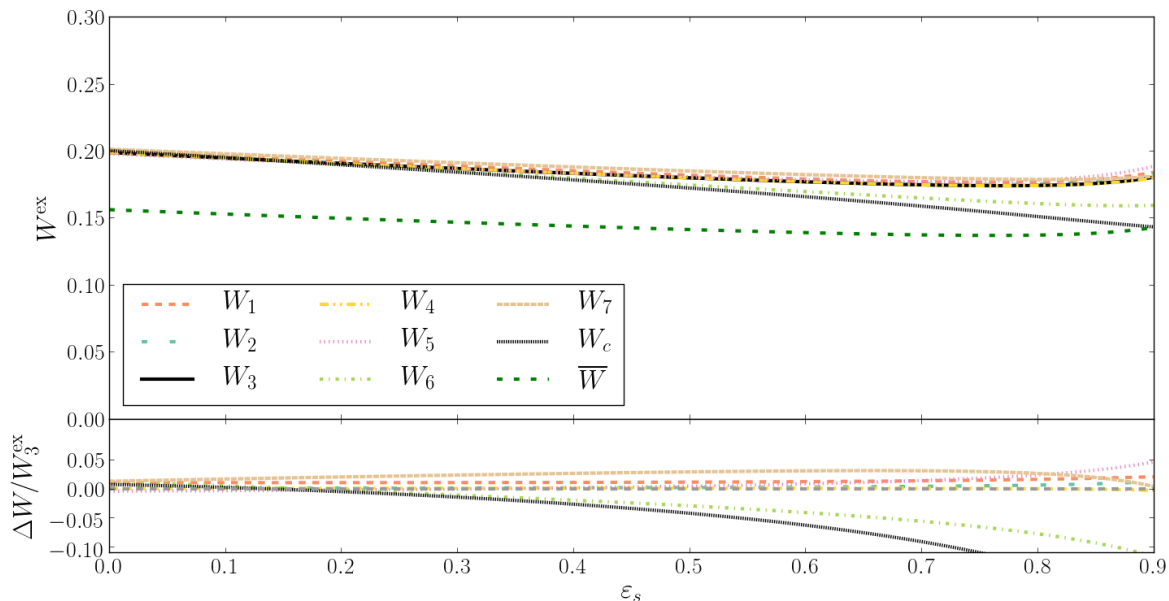


Figura 4.28: Larguras para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$.

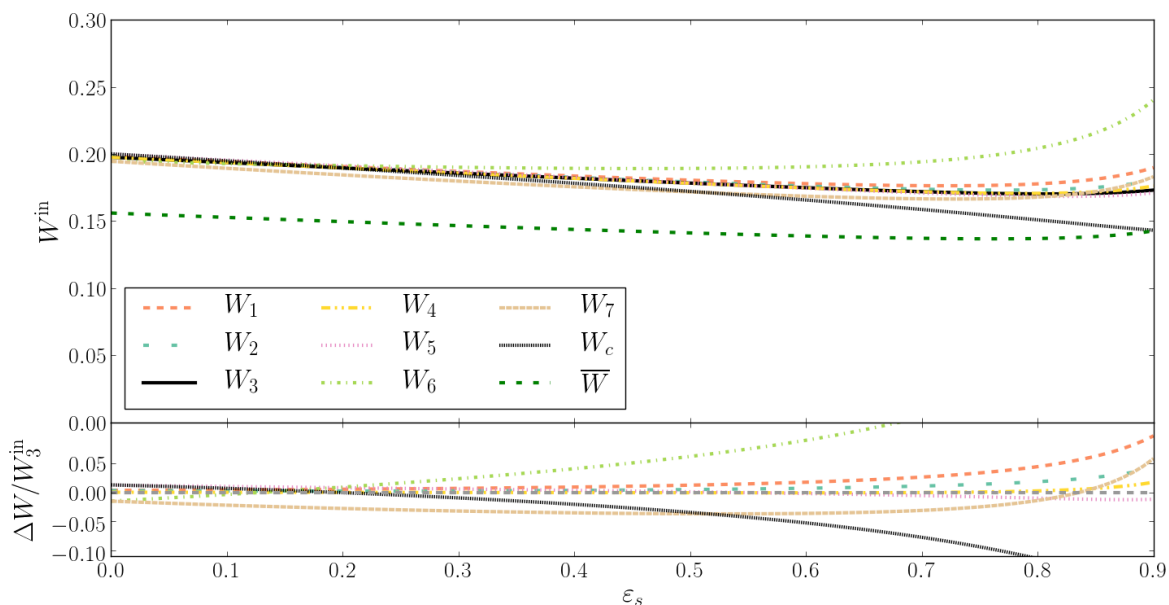


Figura 4.29: Larguras para o arco interno considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/3$ e $\theta = 0$.

O comportamento dos arcos nas Figs. 4.22-4.25, que representam variação na posição e raio da fonte, se assemelham aos resultados para fonte circular, mantendo razoavelmente constante ao aumentar s , exceto na região de formação de anel de Einstein, e linear ao aumentar o raio. Temos a adição de mais parâmetros, orientação e elipticidade da fonte (Figs. 4.26-4.29) e a largura se mantém praticamente constante para regiões angulares e de elipticidade intermediárias.

Utilizamos aqui a mesma orientação da fonte que para o comprimento e novamente os valores para os extremos $\phi_e = 0$ e $\pi/2$ estarão apresentados no Apêndice B. Os comportamentos dos gráficos são os mesmos apresentados nessa seção, exceto pela largura como função de s e ε_s para $\phi_e = 0$, o que é consistente com o fato de que as imagens, quando a elipse está na horizontal com o semi-eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, começam com maior distorção na largura.

CAPÍTULO 5

Seção de Choque

A seção de choque é definida como a área no plano das fontes que produz imagens com alguma propriedade específica, por exemplo, razão axial ou magnificação acima de um determinado limite. Ela pode ser utilizada no cálculo no número de arcos [167, 178] e para prever número de fontes [200]. Geralmente o cálculo da seção de choque é feito numericamente ou considerando fonte infinitesimal e são poucos os estudos que direcionam para observar o efeito de fontes finitas de forma analítica ou semi-analítica [201, 202]. Neste capítulo comparamos a seção de choque de formação de arcos, isto é, para $L/W \geq R_{th}$, para nossas escolhas de comprimento e largura e a seção de choque de magnificação, isto é, $\mu_A \geq \mu_{th}$, obtida a partir da razão entre as áreas das imagens e fonte e também com a seção de choque infinitesimal para fontes circulares e elípticas. Os cálculos para fontes circulares foram finalizados nessa tese e para fonte elíptica ainda estão em andamento.

A seção de choque adimensional, obtida integrando no plano das fontes ou das lentes, é

$$\sigma = \int d^2y = \int |\det \mathbb{A}(x)| d^2x, \quad (5.1)$$

em que o domínio de integração definirá os limites desejados para essa área.

O cálculo da seção de choque pode ser utilizado diretamente para prever a abundância de arcos e de fontes distantes, que por sua vez podem ser comparadas com dados observacionais. Uma maneira eficaz de escrever a razão comprimento/largura, ou mais especificamente, a razão entre as áreas imagem/fonte, foi feita por Fedeli et al.[201]. No trabalho de Dobler et al. [195] eles consideraram uma lente mais geral para examinar fontes finitas e aplicaram suas soluções para o cálculo da seção de choque [203]. Os nossos resultados permitem ter uma compreensão física de propriedades derivadas de lentes gravitacionais e podem servir de teste para métodos numéricos válidos em situações mais gerais e para o cálculo de observáveis ligados a lentes.

Focaremos nas seguintes seções de choque:

- *Seção de Choque Infinitesimal*: Podemos considerar uma aproximação local para a razão L/W . Essa aproximação é baseada no fato de que fontes circulares infinitesimais com raio R_0 próximos à cáustica tangencial são mapeados em elipses (Fig. 5.1) com semi-eixos maior, $a = R_0|\mu_t|$, and menor, $b = R_0|\mu_r|$, em que $\mu_{t,r}$ são as distorções tangencial e radial, respectivamente. Já fontes elípticas podem ser mapeadas em elipses cuja representação matemática dependerá dos eixos e da orientação da fonte, juntamente com os autovalores da matriz de transformação ($\lambda_{t,r}$).

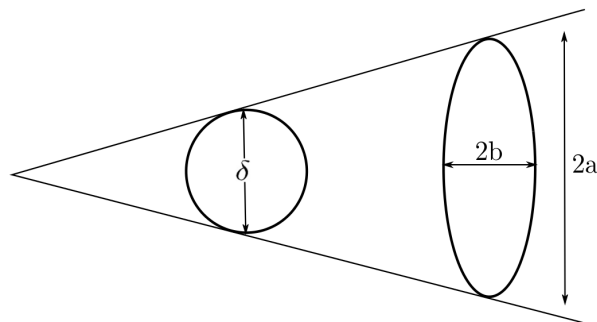


Figura 5.1: Mapeamento de uma fonte circular infinitesimal em uma elipse.

- *Seção de Choque de Magnificação*: quantifica a eficiência de uma lente para produzir imagens com uma magnificação específica. É definida como a área no plano das fontes na qual estas são mapeadas em imagens com magnificação μ_A acima de um valor limite (μ_{th}).
- *Seção de Choque de Formação de Arcos*: quantifica a eficiência de uma lente para produzir imagens com uma razão axial mínima. É definida com o a área efetiva, no plano das fontes, na qual estas são mapeadas em arcos com uma razão L/W (comprimento/largura) acima de um dado valor mínimo (R_{th}).

5.1 Seção de Choque para Fontes Circulares

Queremos comparar nesta subseção dois cálculos de seção de choque, o primeiro considerando uma aproximação infinitesimal para a fonte e o segundo levando em conta a influência de fontes finitas para a seção de choque.

5.1.1 Seção de Choque Infinitesimal - σ_λ

Para a aproximação infinitesimal, $L/W = 2a/2b = |\mu_t/\mu_r|$ [204, 205]. Nós podemos definir uma região cuja deformação em seu interior é maior que um determinado limite R_{th} , de modo a ter $L/W \simeq |R_\lambda| \geq R_{th}$. Essa região é delimitada por $R_\lambda = \pm R_{th}$. Neste caso é mais simples trabalhar no plano das imagens e a deformação infinitesimal é dada por:

$$\left| \frac{\mu_t}{\mu_r} \right| = \left| \frac{\lambda_r}{\lambda_t} \right| = \left| \frac{1}{1 - 1/x} \right| \simeq |R_\lambda|, \quad (5.2)$$

de modo que

$$\det \mathbb{A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Como discutido na Seção 4.1.1, a imagem com $x > 1$ corresponde ao arco externo e a imagem com $x < 1$ corresponde ao arco interno. Para a aproximação infinitesimal, queremos que R_λ seja maior que um determinado limite para o qual nossas condições serão satisfeitas. Esses limites serão denotados por R_{th} ou μ_{th} dependendo de qual caso estaremos considerando (formação de arcos ou magnificação). Resolvendo a Eq. (5.2) para x , temos que a coordenada radial das curvas $R_\lambda = \pm R_{th}$, chamada de x_λ é

$$x_\lambda = \begin{cases} \frac{R_{th}}{R_{th} - 1}, & \text{se } R_\lambda = R_{th} \\ \frac{R_{th}}{R_{th} + 1}, & \text{se } R_\lambda = -R_{th}. \end{cases} \quad (5.4)$$

e a seção de choque infinitesimal adimensional total [206] calculada no plano das lentes pode ser separada para cada arco, algo que até então não foi apresentado na literatura, uma vez que a posição do arco interno é $x < 1$ e a do externo é acima desse valor. Da Eq. (5.1) obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(R_{th}) &= \int_{|R_\lambda| > R_{th}} |\det \mathbb{A}(x)| d^2x \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{x_{\min}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) x dx d\phi + \int_0^{2\pi} \int_1^{x_{\max}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) x dx d\phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$= \sigma_\lambda^{\text{in}} + \sigma_\lambda^{\text{ex}} = \frac{\pi}{(R_{th} + 1)^2} + \frac{\pi}{(R_{th} - 1)^2} \quad (5.6)$$

$$= 2\pi \frac{R_{th}^2 + 1}{(R_{th}^2 - 1)^2}, \quad (5.7)$$

com $x_{\min} = x_\lambda(R_\lambda = -R_{th})$ e $x_{\max} = x_\lambda(R_\lambda = R_{th})$. O primeiro termo do lado direito da Eq. (5.6)

corresponde à $\sigma_\lambda^{\text{in}}$ e o segundo corresponde à $\sigma_\lambda^{\text{ex}}$. Iremos utilizar as expressões analíticas individuais para cada arco ao diferenciar os arcos nas Figs. 5.8-5.11. Além disso, para a aproximação infinitesimal, a magnificação é igual a razão L/W , o que significa que se queremos escrever a seção de choque infinitesimal como função de μ_{th} ao invés de R_{th} , bastaria apenas substituir a variável na expressão acima

$$\sigma_\lambda(\mu_{\text{th}}) = 2\pi \frac{\mu_{\text{th}}^2 + 1}{(\mu_{\text{th}}^2 - 1)^2}. \quad (5.8)$$

5.1.2 Seção de Choque de Magnificação - σ_μ

Para obter a seção de choque de magnificação para nossas soluções específicas, precisamos resolver a integral (5.1) no plano das fontes para uma magnificação $|\mu_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_s| \geq \mu_{\text{th}}$. Para $s > R_0$ temos dois intervalos angulares (de $2\phi_0$) correspondendo às duas imagens e área dos arcos externo e interno é dada nas Eqs. (4.65) e (4.66) e a magnificação para cada imagem é simplesmente a razão entre a área de cada imagem pela área da fonte πR_0^2 :

$$\mu_{\mathcal{A}}^{\text{ex,in}} = \frac{\mathcal{A}}{\pi R_0^2} = \pm 1 + \frac{4}{\pi R_0} \mathcal{E}\left(\phi_0, \frac{s^2}{R_0^2}\right). \quad (5.9)$$

Podemos também expandir essa solução para pequenos valores de R_0/s , ou seja, longe da formação de anel de Einstein, o que foi apresentado na Eq. (4.70), e é válida mesmo para grandes magnificações $s \ll 1$. Nessa solução, a primeira correção de fonte finita é quadrática em R_0 . Notamos que para fontes pequenas e antes da formação de anel de Einstein, o efeito de fonte finita sempre aumenta a magnificação quando comparada à solução infinitesimal.

A magnificação total da fonte é a razão entre a área de todas as imagens e a área da fonte, o que é simplesmente a soma das magnificações para cada arco

$$\mu_{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}_i^{\text{in}} + \mathcal{A}_i^{\text{ex}}}{\mathcal{A}_s} = \frac{8}{\pi R_0} \mathcal{E}\left(\phi_0, \frac{s^2}{R_0^2}\right). \quad (5.10)$$

No caso de formação de anel de Einstein ($s \leq R_0$) a integral (5.1) vai de 0 a 2π , de modo que a área é

$$\mathcal{A}^{\text{E}} = 8R_0 \mathcal{E}\left(\frac{s^2}{R_0^2}\right), \quad (5.11)$$

em que $\mathcal{E}(m) = \mathcal{E}(\pi/2, m)$ é a integral elíptica completa de segundo tipo. Dessa forma, a magnificação para anel de Einstein é

$$\mu_{\mathcal{A}}^{\text{E}} = \frac{8}{\pi R_0} \mathcal{E}\left(\frac{s^2}{R_0^2}\right). \quad (5.12)$$

Perto do anel de Einstein perfeito ($s/R_0 \ll 1$), a magnificação pode ser expandida como

$$\mu_{\mathcal{A}}^E \approx \frac{4}{R_0} - \frac{s^2}{R_0^3} + \mathcal{O}\left[\frac{s^4}{R_0^4}\right]. \quad (5.13)$$

O primeiro termo corresponde à magnificação para um sistema observador–lente–fonte perfeitamente alinhados e fornece a magnificação máxima de uma fonte circular finita $\mu_{\max} = 4/R_0$ (e a imagem é um anel de circunferência 2π e largura $2R_0$).

Combinando as Eqs. (5.10) e (5.12), para $s/R_0 > 1$ e ≤ 1 , respectivamente, nos fornece a magnificação total para todo o intervalo de posições da fonte s . O valor máximo dessa função ocorre para $s = 0$ e é dado por μ_{\max} . Na fronteira entre dois arcos e anel de Einstein a magnificação é $\mu_{\text{trans}} = 8/(\pi R_0)$.

A seção de choque de magnificação exata para fonte circular é obtida a partir da equação $\sigma = \pi s_{\text{th}}^2$ resolvendo $\mu_{\mathcal{A}}(s_{\text{th}}) = \mu_{\text{th}}$ para s_{th} em que $\mu_{\mathcal{A}}$ é dada pela Eq. (5.10) para $s > R_0$ e por (5.12) para $s \leq R_0$. O resultado a partir da inversão numérica da integral elíptica está apresentado nas Figs. 5.2 e 5.3, juntamente ao resultado para fontes infinitesimais (5.7) e uma solução aproximada discutida abaixo.

Para $R_0 \ll s$ podemos obter uma solução analítica usando a aproximação (4.90), de modo que a magnificação para cada imagem e a magnificação total são

$$\mu_{\mathcal{A}} = \pm 1 + \frac{1}{s} + \frac{R_0^2}{8s^3}, \quad \mu_{\text{tot}}^P = \frac{2}{s} + \frac{R_0^2}{4s^3}. \quad (5.14)$$

Para determinar s_{th} resolvemos a equação em terceira ordem $\mu_{\text{tot}}^P = \mu_{\text{th}}$ e expandimos a solução até o primeiro termo não trivial em R_0 , obtendo a seção de choque perturbada total

$$\sigma_{\mu}^P = \frac{4\pi}{\mu_{\text{th}}^2} + \frac{\pi}{4} R_0^2. \quad (5.15)$$

Como esperado, nesse regime a seção de choque para fontes finitas é maior que no caso infinitesimal.

Podemos obter também uma solução perturbativa perto do anel de Einstein perfeito da Eq. (5.13), que pode ser facilmente resolvida para s_{th} , obtendo

$$\sigma_{\mu}^E = \pi \left(4R_0^2 - \mu_{\text{th}} R_0^3 \right) = \pi (\mu_{\max} - \mu_{\text{th}}) R_0^3. \quad (5.16)$$

A seção de choque desaparece $\mu_{\text{th}} \geq \mu_{\max} = 4/R_0$, uma vez que nenhuma imagem pode ter a magnificação acima desse valor. Isso está em contraste com o caso para fonte infinitesimal, para o qual a magnificação não tem restrição e a seção de choque (5.7) nunca desaparece. No mais,

para altas magnificações, dentro do regime de anel de Einstein, a seção de choque para fonte finita é menor que a infinitesimal.

Enquanto a aproximação (5.15) ainda é boa nas proximidades de formação de anel de Einstein (ou seja, $\mu = \mu_{\text{trans}}$, a aproximação (5.16) rompe nesse ponto. Entretanto, é possível melhorar a seção de choque de anel de Einstein, considerando que a expressão acima é linear em $(\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{th}})$. Adicionamos um termo de correção que é quadrático nessa quantidade e ajustamos a seção de choque em μ_{trans} para seu valor exato (πR_0^2) . Em outras palavras, construímos uma aproximação quadrática perfeita para a seção de choque entre o limiar de formação de anel de Einstein e a solução perfeita para anel de Einstein, de modo que a seção de choque é

$$\sigma_{\mu}^E = \pi(4R_0^2 - \mu_{\text{th}}R_0^3) - \left(\frac{3\pi - 8}{4 - 8/\pi}\right)(4R_0 - \mu_{\text{th}}R_0^2)^2. \quad (5.17)$$

De fato, essa expressão fornece uma excelente aproximação para a seção de choque de magnificação em todo o intervalo que vai de μ_{trans} a μ_{max} , como mostrado na Fig. 5.2. Juntando essa solução com a Eq. (5.15), podemos construir uma única aproximação contínua para σ_{μ} . Essas duas curvas se encontram em $\mu_J = 2.15/R_0 < \mu_{\text{trans}}$. Desse modo, construímos uma única seção de choque de magnificação aproximada para fontes finitas no intervalo limite para a magnificação utilizando σ_{μ}^P (Eq. (5.15)) para $\mu_{\text{th}} < \mu_J$ e σ_{μ}^E (Eq. (5.17)) para $\mu_{\text{th}} \geq \mu_J$. Isso está apresentado como as linhas pontilhadas nas curvas das Figs. 5.2 e 5.3.

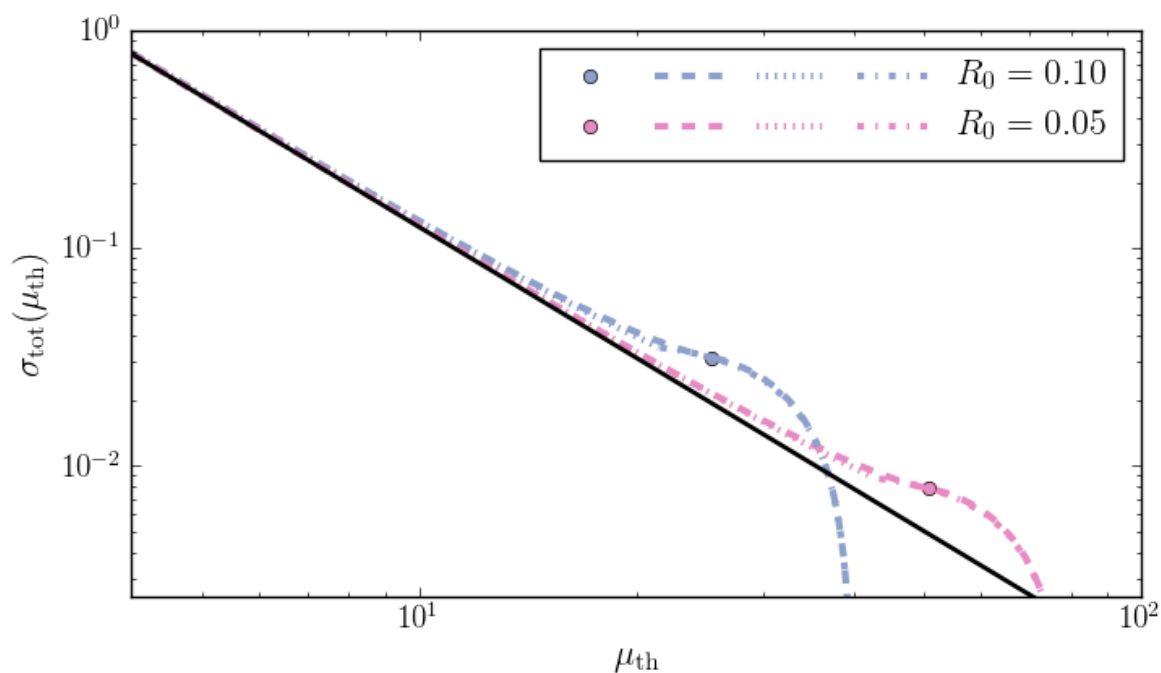


Figura 5.2: Seção de choque total de magnificação (linhas tracejadas), seção de choque total perturbada de magnificação (linha pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) para um valor fixo de raio.

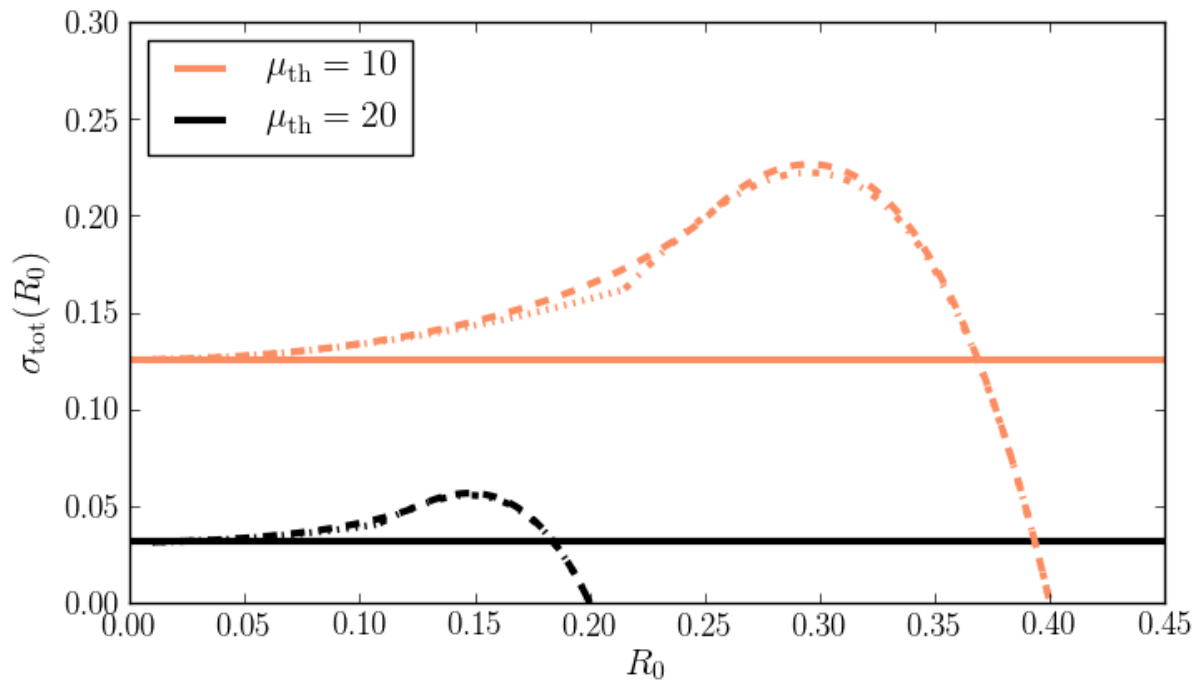


Figura 5.3: Seção de choque total de magnificação (linhas tracejadas), seção de choque total perturbada de magnificação (linha pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) para um valor fixo de magnificação limite.

Mostramos nas Figs. 5.4 - 5.7 o comportamento para a seção de choque de magnificação nos casos exato, perturbado e infinitesimal para cada arco individualmente. Notamos que, como esperado, as soluções se assemelham da aproximação infinitesimal se o raio da fonte é pequeno. Além disso, as soluções perturbadas decrescem ligeiramente mais rápido que as exatas. Os arcos interno e externo terão comportamento similar para os parâmetros considerados.

A magnificação máxima é obtida para $s = 0$, quando o anel de Einstein perfeito é formado, e assim é $\mu_{\max} \simeq 2\pi R_0 / (\pi R_0^2) = 2/R_0$. Para $\mu_{\text{th}} > \mu_{\max}$ a seção de choque é zero, como mostrado nas Figs. 5.4-5.7.

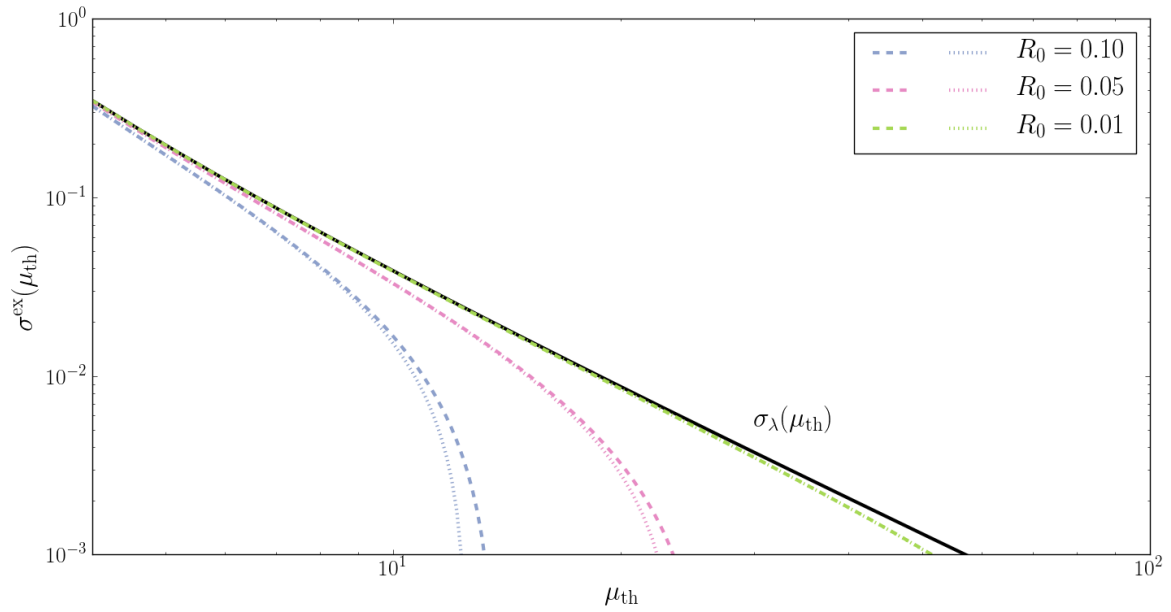


Figura 5.4: Seção de choque de magnificação (curvas tracejadas), seção de choque de magnificação perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da magnificação limite para o arco externo.

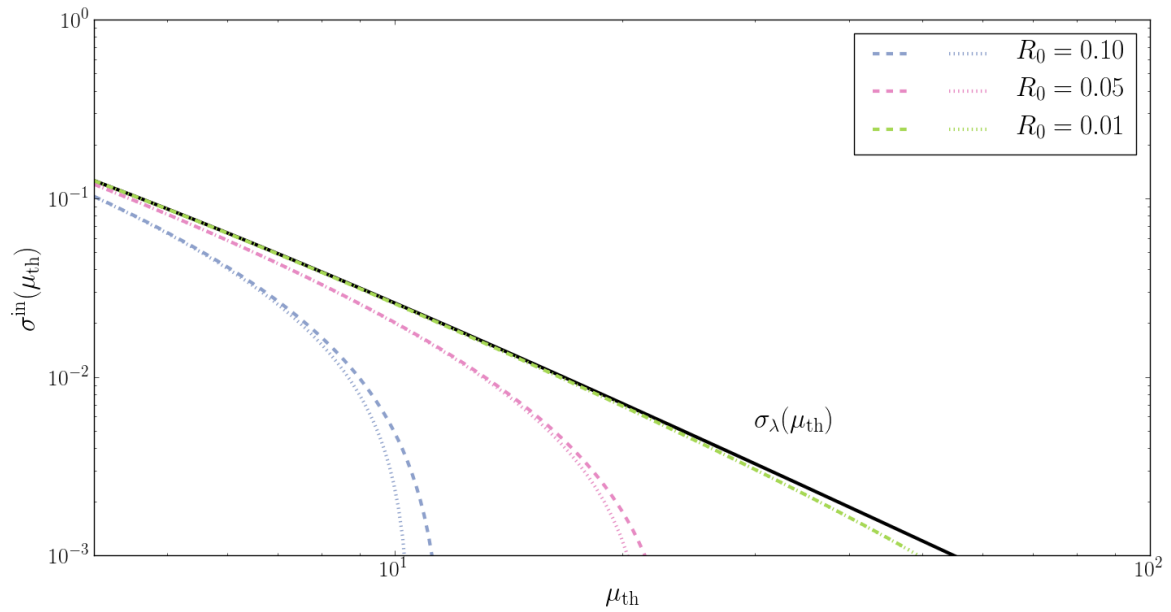


Figura 5.5: Seção de choque de magnificação (curvas tracejadas), seção de choque de magnificação perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da magnificação limite para o arco interno.

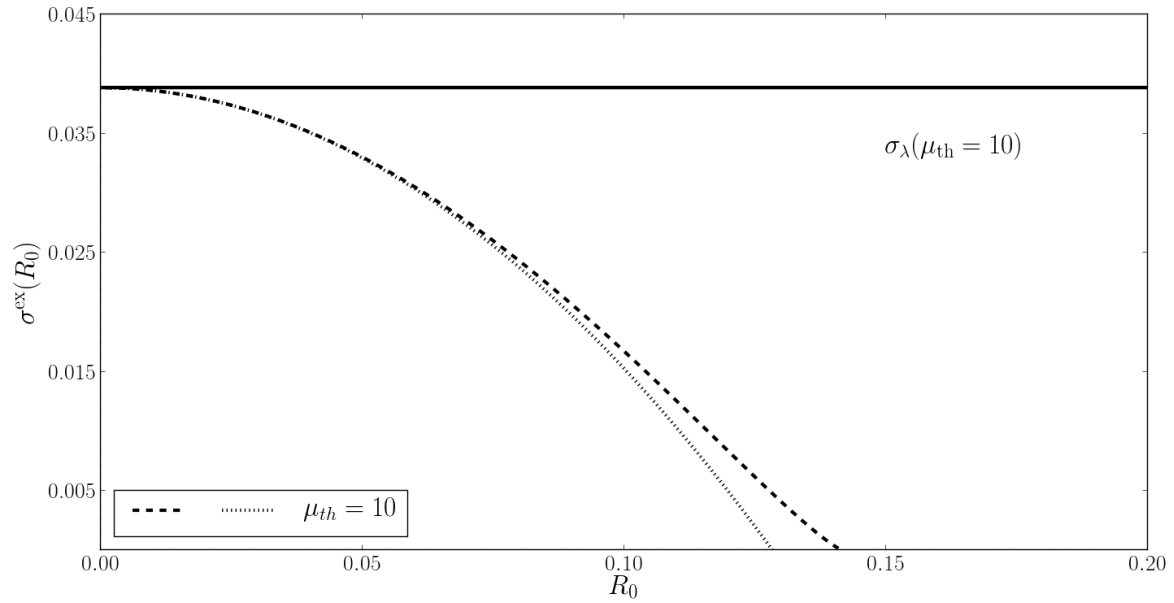


Figura 5.6: Seção de choque de magnificação (curva tracejada), seção de choque de magnificação perturbada (curva pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco externo.

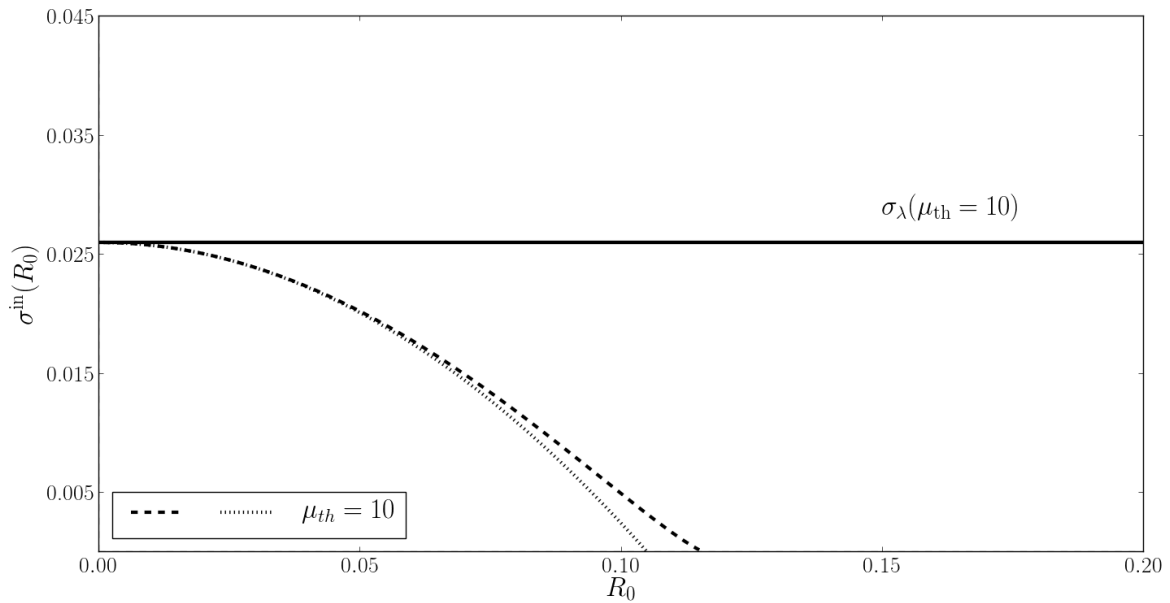


Figura 5.7: Seção de choque de magnificação (curva tracejada), seção de choque de magnificação perturbada (curva pontilhada) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco interno.

5.1.3 Seção de Choque para Formação de Arcos - $\sigma_{L/W}$

No Cap. 4 mostramos que L_2 e W_c são excelentes aproximações para o comprimento e a largura dos arcos obtidos a partir de fontes circulares. Desse modo, considerando agora que a razão L/W é dada por L_2 e W_c , precisamos ter $L_2/W_c = |R_{\lambda}| \geq R_{th}$. Como estamos considerando o regime para formação de arcos, uma das condições que devemos satisfazer é $s \geq R_0$, de modo que os limites de integração da Eq. (5.1) serão

$$R_0 \leq s^{ex} \leq -R_0 \csc(R_0 - R_0 R_{th}), \quad \text{com } 1 < R_{th} < \frac{\pi}{2R_0} + 1, \quad (5.18)$$

$$R_0 \leq s^{in} \leq R_0 \csc(R_0 + R_0 R_{th}), \quad \text{com } 0 < R_{th} < \frac{\pi}{2R_0} - 1. \quad (5.19)$$

A condição para R_{th} vem do argumento da cossecante. Integrando a Eq. (5.1) no intervalo determinado por esses limites, obtemos

$$\sigma_{L/W}^{ex} = \pi R_0^2 \left(\csc^2(R_0 - R_0 R_{th}) - 1 \right) \quad (5.20)$$

$$\sigma_{L/W}^{in} = \pi R_0^2 \left(\csc^2(R_0 + R_0 R_{th}) - 1 \right). \quad (5.21)$$

Esse resultado é exato, no sentido de que é válido para qualquer raio (R_0) da fonte e é um dos resultados originais desta tese. O anel de Einstein se forma quando $s < R_0$, de modo que a seção de choque para formação de anel é simplesmente πR_0^2 .

Podemos obter uma solução para fontes pequenas considerando a aproximação para a razão comprimento/largura da Eq. (4.83) acima de um determinado limite:

$$\frac{L_2}{W_c} \approx \pm 1 + \frac{1}{s} + \frac{R_0^2}{6s^3} \geq R_{th}, \quad (5.22)$$

e resolvendo a inequação de terceiro grau em s , obtendo a seção de choque e expandindo em R_0 , temos

$$\sigma_{L/W}^P = \frac{\pi}{(R_{th} \mp 1)^2} - \frac{2}{3} \pi R_0^2 \quad (5.23)$$

em que o primeiro termo da Eq. (5.23) corresponde à seção de choque para fonte circular e o segundo termo é a correção para fonte finita.

Nas Figs. 5.8-5.11 apresentamos o comportamento da seção de choque de formação de arcos, tanto o resultado exato das Eqs. (5.20) e (5.21) quanto o aproximado da Eq. (5.23). A seção de choque para fontes finitas vai a zero acima de um certo limite em acordo com os trabalhos de E. Rozo [202]. Esse limite se dará para a região limiar entre ter um arco ou um anel de Einstein ($s = R_0$) e o comprimento máximo é obtido quando duas imagens estão em con-

tato. Considerando o comprimento L_2 , esse valor máximo se dará em $(L_2)_{\max} = \pi$, de modo que $(L_2/W_c)_{\max} = \pi/(2R_0)$. Acima desse valor a seção de choque se anula pois não é possível produzir mais arcos. A seção de choque para formar um anel de Einstein é simplesmente πR_0^2 , uma vez que para qualquer fonte com $s \leq R_0$ se formará um anel de Einstein.

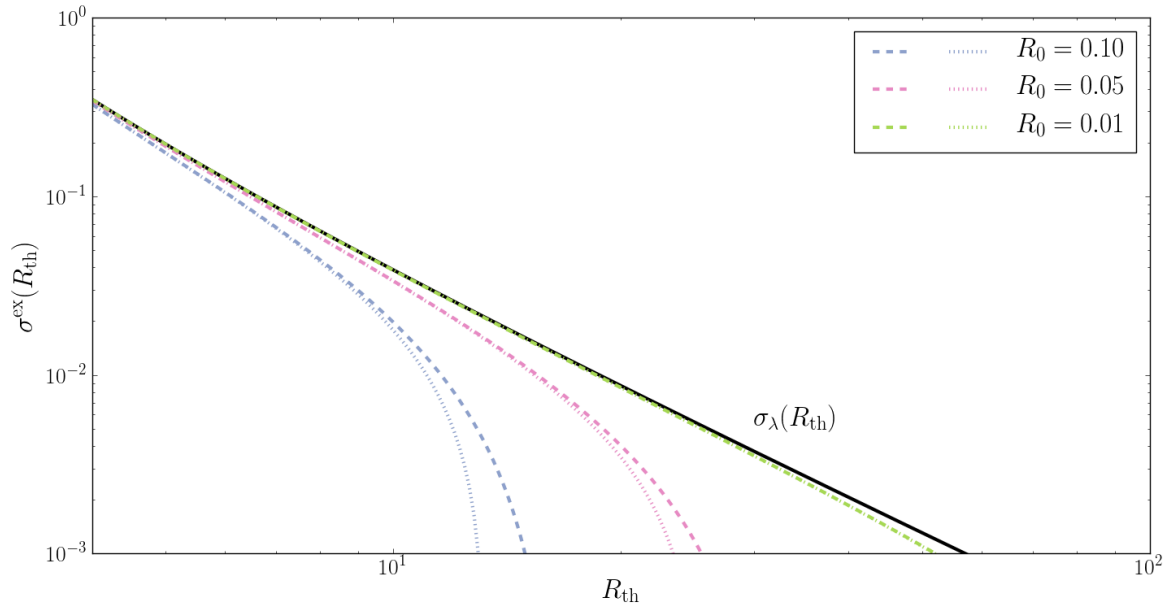


Figura 5.8: Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da razão L/W limite para o arco externo.

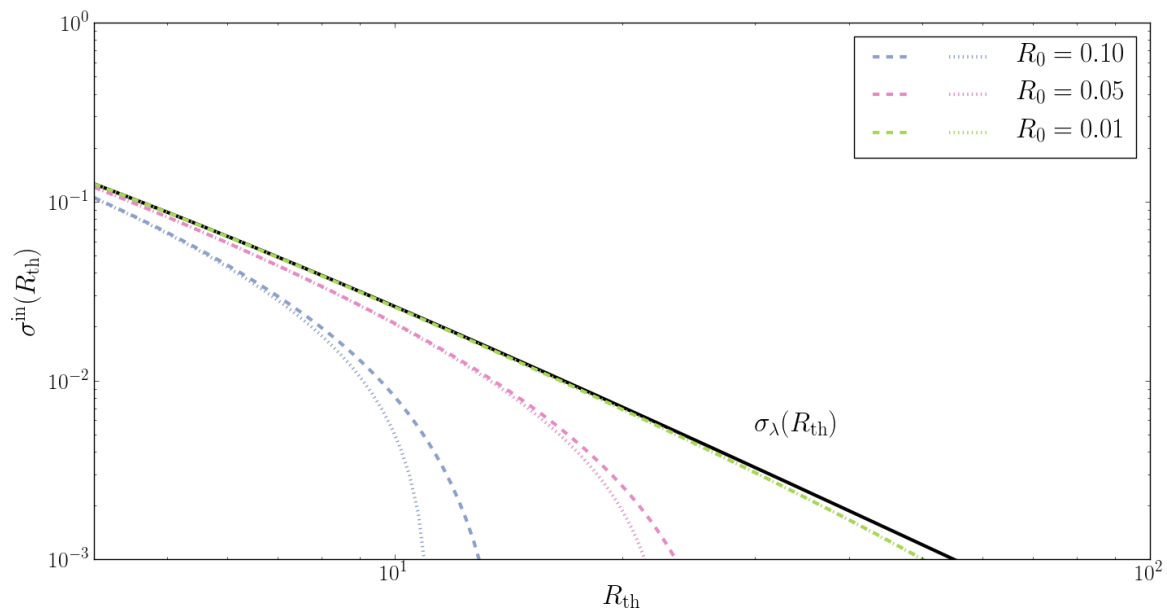


Figura 5.9: Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da razão L/W limite para o arco interno.

A partir das Eqs. (5.20), (5.21) e (5.23) podemos determinar a posição que a seção de choque se anula e não ocorre mais formação de arcos:

$$R_{\text{th}} = \pm 1 + \frac{\pi}{2R_0}, \quad R_{\text{th}}^P = \pm 1 + \frac{\sqrt{6}}{2R_0}, \quad (5.24)$$

em que \pm se refere aos arcos externo e interno, respectivamente.

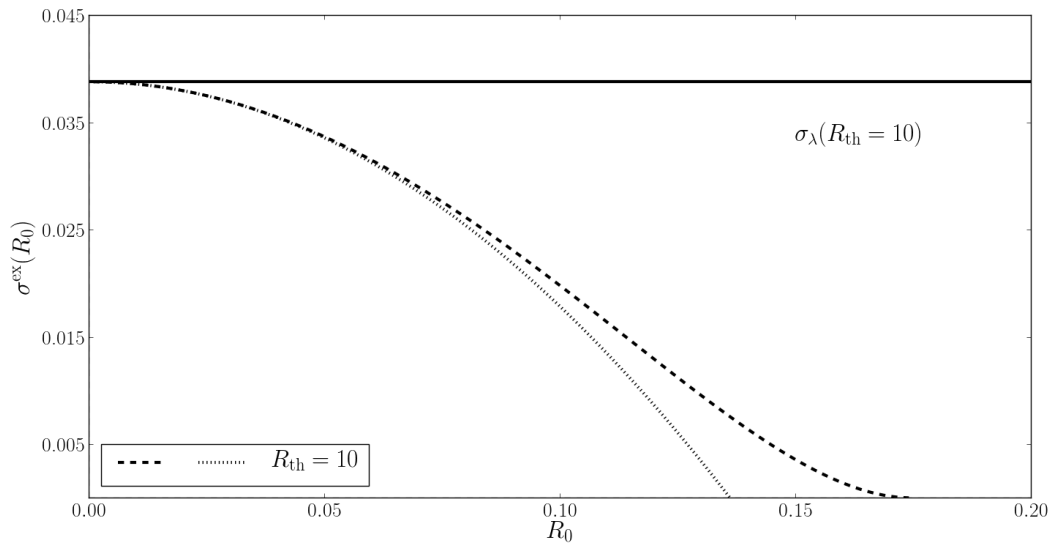


Figura 5.10: Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco externo.

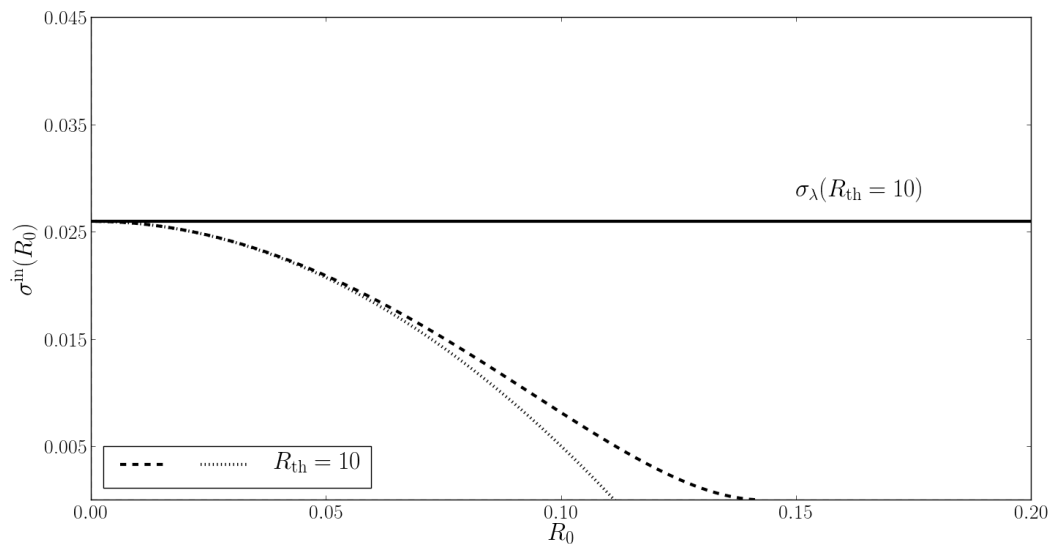


Figura 5.11: Seção de choque de formação de arcos exata (curvas tracejadas), perturbada (curvas pontilhadas) e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio da fonte para o arco interno.

Podemos também considerar a soma da seção de choque para cada arco como sendo a seção de choque total $\sigma_{L/W}^{\text{tot}}$:

$$\sigma_{L/W}^{\text{tot}} = \sigma_{L/W}^{\text{ex}} + \sigma_{L/W}^{\text{in}} = \pi R_0^2 \left(\csc^2(R_0 - R_0 R_{\text{th}}) + \csc^2(R_0 + R_0 R_{\text{th}}) - 2 \right) \quad (5.25)$$

Se considerarmos aproximação para fontes infinitesimais ($R_0 \rightarrow 0$), temos

$$\sigma_{R_0 \rightarrow 0}^{\text{ex}} = \frac{\pi}{(R_{\text{th}} - 1)^2}, \quad \sigma_{R_0 \rightarrow 0}^{\text{in}} = \frac{\pi}{(R_{\text{th}} + 1)^2}, \quad (5.26)$$

$$\sigma_{R_0 \rightarrow 0}^{\text{tot}} = \sigma_\lambda = 2\pi \frac{(R_{\text{th}}^2 + 1)}{(R_{\text{th}}^2 - 1)^2}. \quad (5.27)$$

Uma coisa que é importante de ressaltar é que demonstramos que a seção de choque de magnificação e de formação de arcos são diferentes, pois $\mu_A \neq L/W$ mesmo para o caso da esfera isotérmica singular, o que contraria o que foi assumido em alguns estudos, como por exemplo no trabalho de J. Wambsganss et al. [207].

5.2 Seção de Choque para Fontes Elípticas

Considerando agora uma fonte elíptica, utilizamos o passo-a-passo feito para uma fonte circular visando obter o mesmo tipo de desenvolvimento.

5.2.1 Aproximação Infinitesimal - σ_λ

Quando consideramos a fonte infinitesimal sendo mapeada em uma elipse, era intuitivo que a razão axial seria dada pela razão entre os esticamentos em cada direção, ou seja, a razão entre os eixos da elipse. Já para a fonte elíptica, temos que levar em conta a orientação da fonte e sua elipticidade. Por exemplo, se a fonte é orientada na direção radial, o eixo menor da imagem será esticado, enquanto o eixo maior permanece inalterado. Para considerar a elipticidade da fonte em nossos cálculos, utilizaremos o formalismo proposto por C. R. Keeton [199], no qual ele mostra que a imagem observada de uma fonte elíptica, com ângulo de orientação ϕ_0 , é uma elipse de razão axial

$$R_\lambda = q_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{T - \sqrt{T^2 - 4D}}}, \quad (5.28)$$

em que

$$T = q_l^2 + q_s^2 + (q_l^2 - 1)(q_s^2 - 1)\cos^2\theta, \quad (5.29)$$

$$D = q_l^2 q_s^2, \quad (5.30)$$

com $q_l = \lambda_r/\lambda_t = (1/(1 - 1/x))$ sendo a razão entre os autovalores da magnificação e $q_s = a/b \geq 1$ a razão entre os eixos da elipse. O ângulo θ é o ângulo entre o eixo maior e a direção do cisalhamento, ou seja,

$$\theta = \phi_\gamma - \phi_0 = \phi - \phi_0 + \frac{\pi}{2}, \quad (5.31)$$

em que utilizamos que $\phi_\gamma = \phi + \pi/2$ [168].

Queremos resolver a equação $q_{\text{obs}} = R_{\text{th}}$ para encontrar o intervalo de integração para calcular a seção de choque infinitesimal para o caso de fonte elíptica. Temos quatro possíveis soluções, mas podemos eliminar duas, dado que uma fornece resultado negativo e a outra vai a zero no limite $R_{\text{th}} \rightarrow \infty$, o que tornaria o resultado fora de limites físicos ou incompleto, sem recuperar o resultado para seção de choque para fonte circular ao fazer a substituição $q_s = 1$.

Considerando as expressões obtidas na Eq. (5.5), podemos calcular a seção de choque infinitesimal para fontes elípticas no modelo da SIS:

$$\sigma = \int_{|R_\lambda| > R_{\text{th}}} |\det \mathbf{A}(x)| d^2x = \int_0^{2\pi} \left[1 - (x_{\text{min}} + x_{\text{max}}) + \frac{(x_{\text{min}}^2 + x_{\text{max}}^2)}{2} \right] d\phi \quad (5.32)$$

em que

$$x_{\text{min}} = \frac{2[(q_s + R_{\text{th}})(1 + q_s R_{\text{th}}) - (-1 + q_s^2)R_{\text{th}} \cos 2\theta] + S_q}{4(q_s + R_{\text{th}})(1 + q_s R_{\text{th}})} \quad (5.33)$$

$$x_{\text{max}} = \frac{2[(q_s - R_{\text{th}})(-1 + q_s R_{\text{th}}) - (-1 + q_s^2)R_{\text{th}} \cos 2\theta] - S_q}{4(q_s - R_{\text{th}})(-1 + q_s R_{\text{th}})} \quad (5.34)$$

com

$$S_q = \sqrt{2[2q_s^2(1 + R_{\text{th}}^4) - (1 + q_s^2)^2 R_{\text{th}}^2 + (-1 + q_s^2)^2 R_{\text{th}}^2 \cos 4\theta]} \quad (5.35)$$

Para $q_s = 1$ temos que o problema se reduz a fonte circular, como era de se esperar.

As curvas de distorção constante, x_{min} e x_{max} , que delimitam a região de integração, estão representadas no plano das lentes (painel da esquerda) e das imagens (painel da direita) na Fig. 5.12 para ϕ_e constante. Integrando, obtemos a seção de choque infinitesimal

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{[2q_s^4(R_{\text{th}}^8 + 1) - q_s^2 R_{\text{th}}^2 (q_s^4 - 1)(R_{\text{th}}^4 + 1) + (1 - 2q_s^2 - 2q_s^4 - 2q_s^6 + q_s^8)R_{\text{th}}^4]}{2[(q_s^2 - R_{\text{th}}^2)(q_s^2 R_{\text{th}}^2)]^2} \\ &+ \frac{q_s^2(R_{\text{th}}^4 - 1)}{(q_s^2 - R_{\text{th}}^2)(q_s^2 R_{\text{th}}^2 - 1)} 2\mathcal{E}\left(\frac{(q_s^2 - 1)^2 R_{\text{th}}^2}{q_s^2(R_{\text{th}}^2 - 1)^2}\right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Esse resultado foi obtido a partir da proposta de Keeton de escrever a razão axial como q_{obs} e em seu trabalho [199] ele aplica numericamente para uma solução do tipo NFW, enquanto em nosso resultado utilizamos a mesma premissa para obter uma solução analítica para a SIS.

Dentro do que verificamos, é a primeira vez que essa expressão aparece na literatura, e esse é um dos resultados originais da tese.

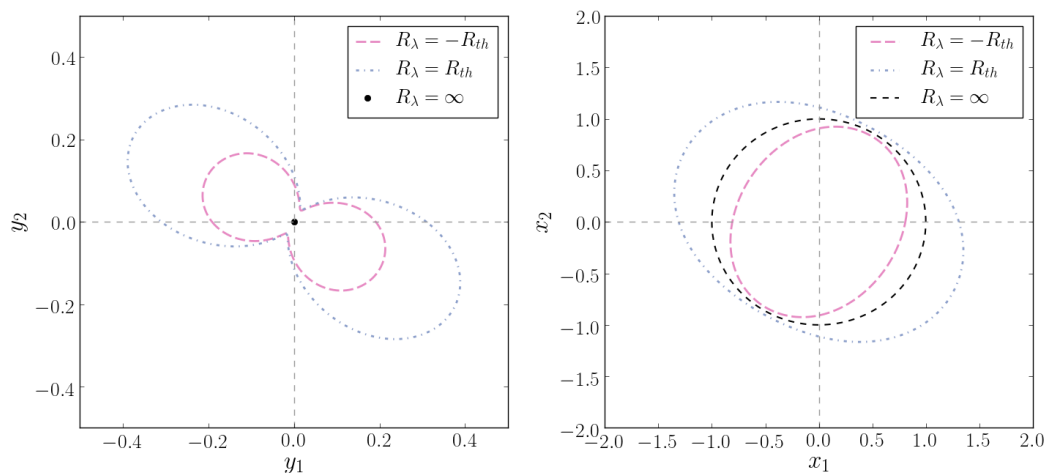


Figura 5.12: Curvas de distorção constante $R_\lambda = q_s = R_{th} = 10$ para $\phi_e = \pi/3$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $R_{th} = 10$ e curva crítica tangencial $R_\lambda = \infty$ no plano das lentes (esquerda) e das imagens (direita).

Vemos na Fig. 5.13, como esperado, que a seção de choque infinitesimal (Eq. (5.37)) é similar a seção de choque infinitesimal para fonte circular quando a elipticidade vai a zero, recuperando a Eq. (5.7). Para valores fixos de elipticidade a seção de choque diminui ao aumentar a razão axial limiar, o que qualitativamente é similar ao resultado de fonte circular. E ao fixar essa razão R_{th} a seção de choque cresce quando a elipticidade da fonte aumenta, sendo equivalente ao caso circular quando essa elipticidade é zero. Esse comportamento crescente é algo independente do valor de R_{th} e importante para diferenciar esse resultado da seção de choque infinitesimal para fontes circulares.

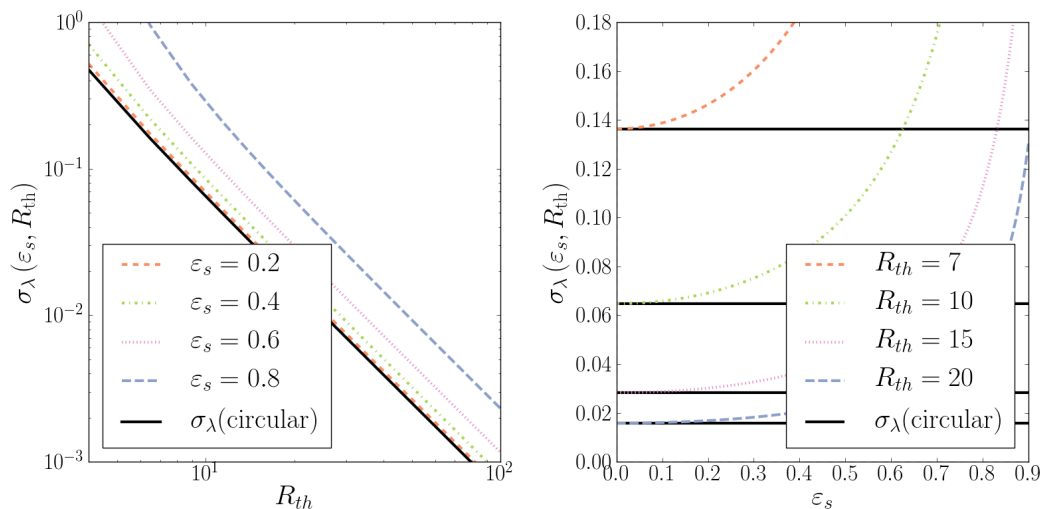


Figura 5.13: Comparação entre a seção de choque infinitesimal para fonte elíptica e fonte circular.

5.2.2 Seção de Choque de Magnificação - σ_μ^{ell}

Para obter a seção de choque de magnificação para nossas soluções a partir de uma fonte elíptica, precisamos resolver a integral (5.1) no plano das fontes para uma magnificação $|\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_s| \geq \mu_{\text{th}}$. A área das imagens é dada pela Eq. (4.63) e a área de uma fonte elíptica considerando nossa escolha de parametrização é

$$\mathcal{A}_s = \pi ab = \frac{\pi R_0^2}{\sqrt{1 - \varepsilon_s^2}}, \quad (5.37)$$

em que os semi-eixos a e b são dadas pelas Eqs. (3.28) e (3.34). Isso nos fornecerá a magnificação exata, mas a seção de choque não terá uma solução analítica e precisaremos determinar o resultado da integração numericamente. O procedimento para essa integração consiste em resolver a inequação $|\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_s| \geq \mu_{\text{th}}$ para determinar o valor de s , que é o limite espacial máximo na integração (o limite mínimo é a formação de anel de Einstein). Feito isso, basta calcular a média angular para todos os valores de ϕ_e .

Uma coisa que cabe ressaltar é a dependência da magnificação com a elipticidade. A medida que o raio diminui, o resultado se torna cada vez menos dependente da elipticidade, como explicito na Fig. 5.14. Esse comportamento é válido no intervalo de $0 < \phi_e \leq \pi/2$ e pode ser espelhado para os demais quadrantes.

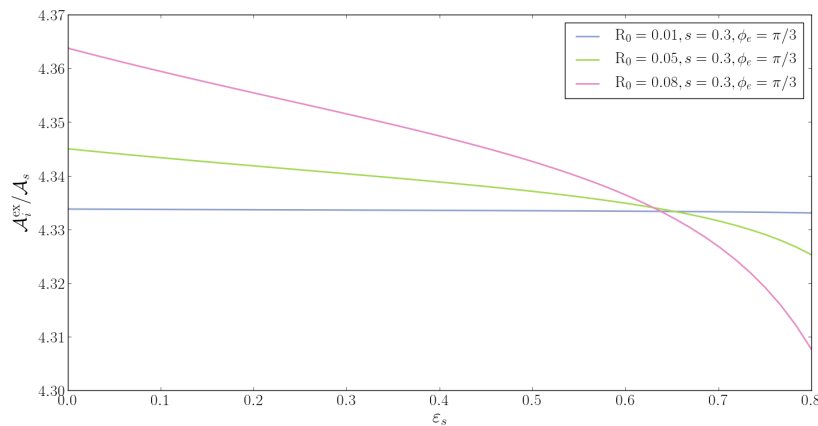


Figura 5.14: Razão entre a área da imagem externa e a fonte em função de ε_s para $s = 0.3$, $\phi_e = \pi/3$ e $R_0 = 0.01$ (curva magenta), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva azul).

Para a seção de choque de magnificação não foi possível obter solução analítica nem aproximação, uma vez que a área das imagens foi calculada numericamente. Nas Figs. 5.15-5.19 apresentamos o comportamento da seção de choque de magnificação. Variando a magnificação limite na Fig. 5.15, podemos observar a dependência da seção de choque com mudanças no raio para uma elipticidade fixa e vice-versa. Note que para raios maiores a seção de choque vai a zero mais rapidamente e, como nas seções anteriores deste capítulo, os resultados se anulam quando perdemos as imagens na formação do anel de Einstein. Para raios menores essa

queda é mais suave, possibilitando estender para magnificações maiores. Para a situação de raio fixo e elipticidade variável, ocorre o que comentamos sobre a diminuição da dependência dos resultados com a elipticidade. Como os valores de raio são os mesmos, e é um valor pequeno, a seção de choque permanece praticamente a mesma, com diferenças aparecendo apenas a partir da terceira casa decimal e a seção de choque de magnificação é essencialmente independente da elipticidade.

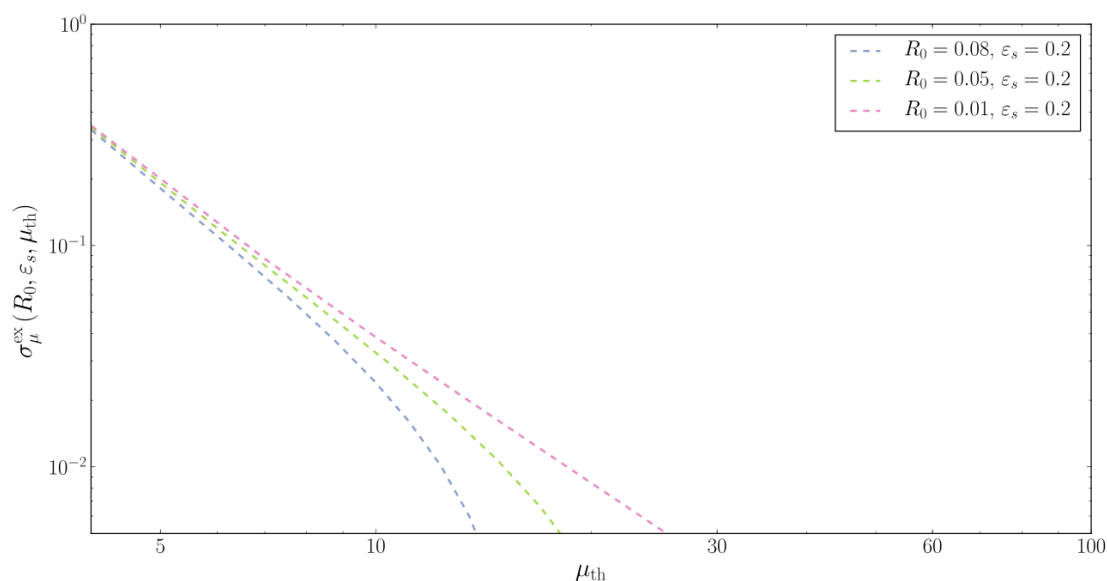


Figura 5.15: Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite μ_{th} para $\epsilon_s = 0.2$ e $R_0 = 0.08$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva magenta).

Aplicando agora a relação da seção de choque com o raio efetivo da fonte, vemos na Fig. 5.16 que para um mesmo valor de elipticidade a seção de choque cai mais rapidamente ao aumentar a magnificação limite, o que faz sentido se pensarmos que existe uma área maior com a possibilidade de ter arcos com magnificações intermediárias. Novamente vemos a baixa dependência com a elipticidade, sendo ligeiramente mais visível a diferença ao ter raios maiores e a seção de choque vai a zero primeiro para elipticidades maiores (Fig. 5.17). As regiões que ocorrem a transição de duas imagens separadas para um anel de Einstein estão marcadas pelos círculos coloridos nas Figs. 5.16 e 5.17.

Apresentamos por último a relação da seção de choque com a elipticidade (Figs. 5.18 e 5.19). Para um valor fixo de raio, vemos na Fig. 5.18 que a seção de choque é menor para maiores magnificações limite, como já foi explicitado nos gráficos anteriores. Como o valor do raio é pequeno nesse caso, não fica realçada a dependência da seção de choque com ϵ_s e o resultado é aproximadamente constante, mas na Fig. 5.19 vemos uma pequena modificação de σ_μ com ϵ_s , decrescendo ao aumentar a elipticidade.

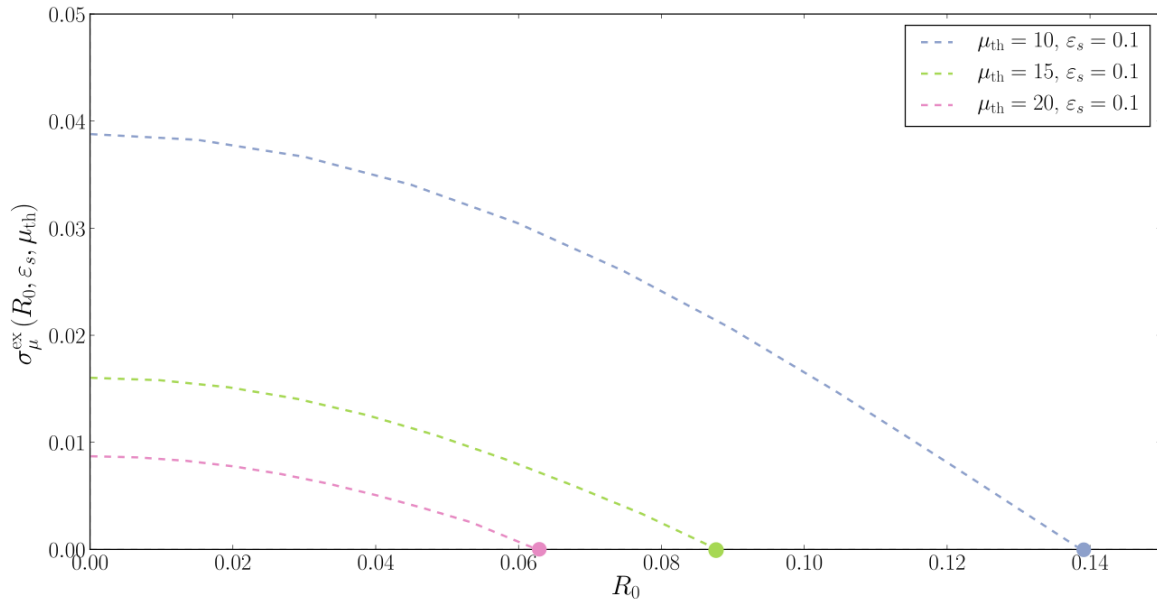


Figura 5.16: Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\epsilon_s = 0.1$ e $\mu_{\text{th}} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta). Os círculos coloridos indicam quando a seção de choque vai a zero, na transição entre anel de Einstein e duas imagens.

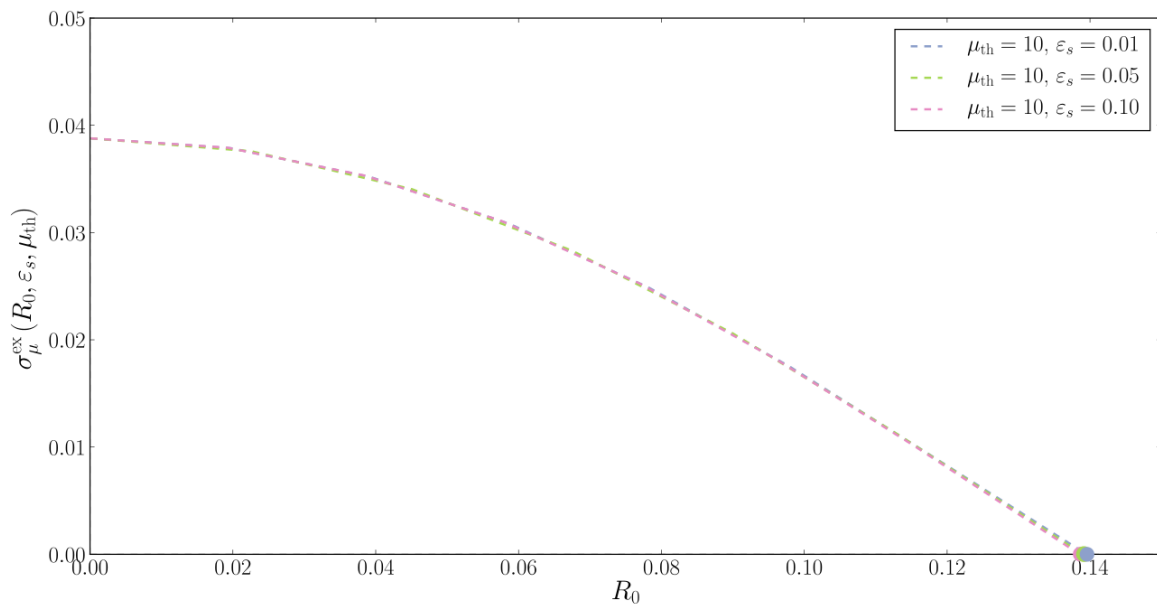


Figura 5.17: Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\mu_{\text{th}} = 10$ e $\epsilon_s = 0.01$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.1 (curva magenta). Os círculos coloridos indicam quando a seção de choque vai a zero, na transição entre anel de Einstein e duas imagens.

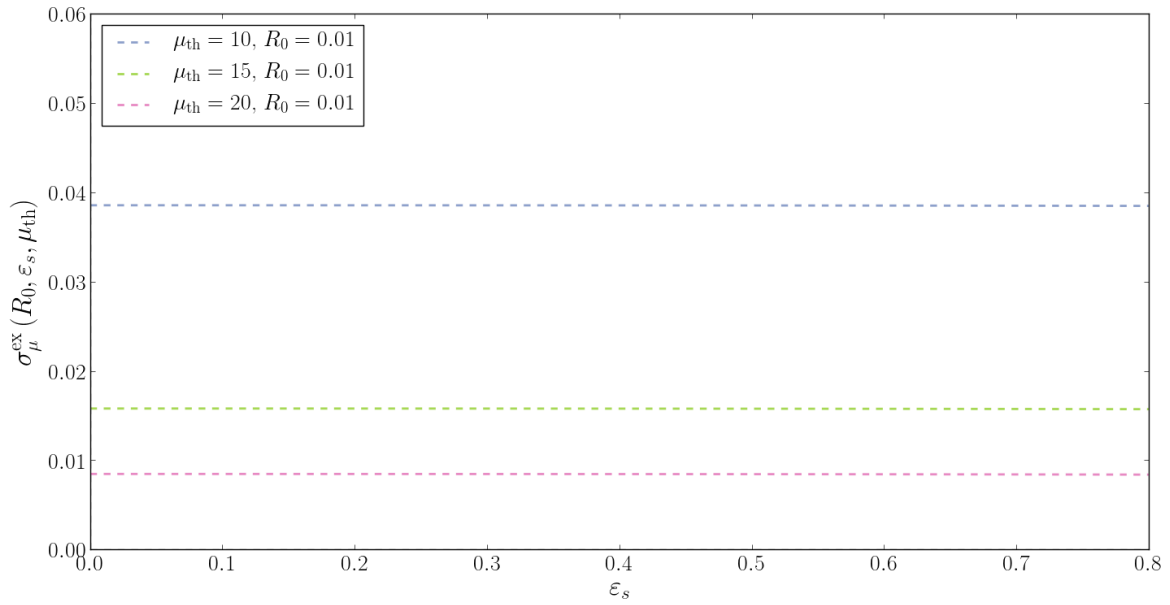


Figura 5.18: Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $\mu_{\text{th}} = 10$ e $R_0 = 0.01$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.08 (curva magenta).

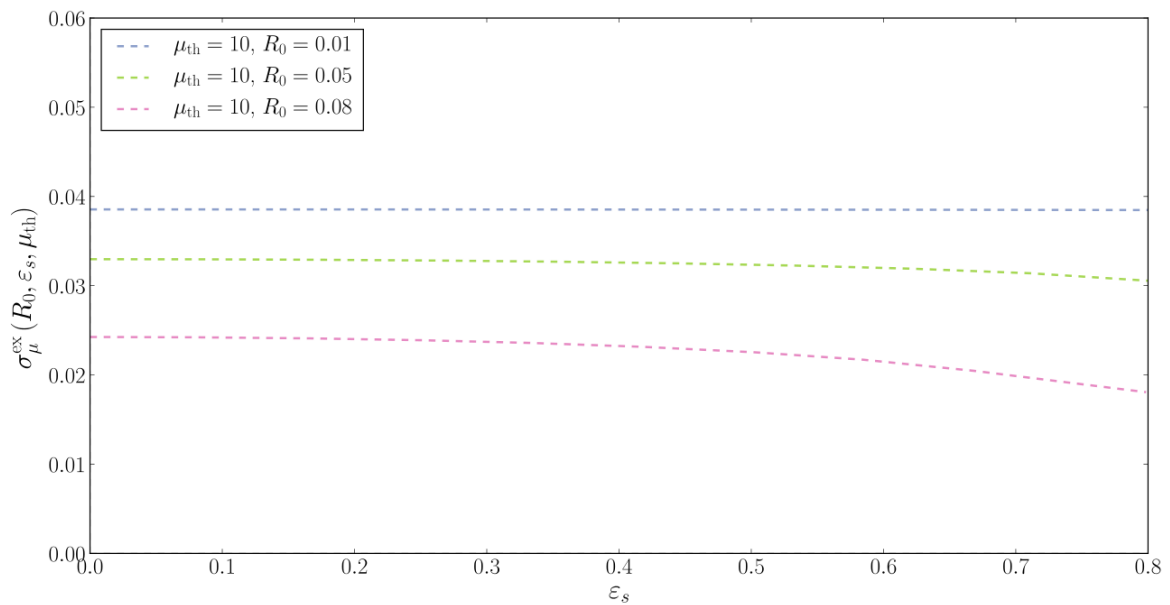


Figura 5.19: Seção de choque de magnificação e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_0 = 0.01$ e $\mu_{\text{th}} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta).

5.2.3 Seção de Choque para Formação de Arcos - $\sigma_{L/W}$

Como mostramos no Cap. 4, L_4 e W_c são excelentes aproximações para o comprimento e a largura dos arcos obtidos a partir de fontes elípticas. Desse modo, considerando agora a razão L_4/W_c podemos repetir o procedimento feito para fonte circular, utilizando nossos resultados de comprimento e largura para determinar uma razão limite de modo a obter a seção de choque. A expressão para L_4 foi obtida analiticamente, a partir da Eq. (4.28) e a Eq. (4.84) expressa a largura no centro do arco W_c . Para o regime de formação de arcos, o intervalo espacial da integração (5.1) tem como limite mínimo a formação de anel de Einstein e como limite máximo o resultado extraído ao resolver a inequação $L_4/W_c \geq R_{th}$. A partir dessa integração, calculamos a média angular sobre todos os valores de ϕ_e e determinamos a seção de choque de formação de arcos para uma fonte elíptica. Esse mesmo procedimento pode ser feito partindo das soluções perturbadas para valores pequenos de raio, de modo a utilizar a razão L_4/W_c da Eq. (4.90) para determinar os limites de integração.

Apresentamos nas Figs. 5.20-5.25 o comportamento da seção de choque de formação de arcos exata para a imagem externa, calculada numericamente junto da solução perturbada. A linha sólida sempre indicará a solução infinitesimal da Eq. (5.37) dividida por dois, para tentar representar aproximadamente uma das imagens. No caso de fonte circular tínhamos as equações exatas para a seção de choque infinitesimal correspondente a cada imagem, mas no caso de fonte elíptica não podemos separar a integral nas contribuições do arco interno e externo e apenas temos uma expressão de choque total, por isso dividimos por dois. Naturalmente não é uma correspondência exata, mas serve como um guia comparativo.

Similarmente ao caso de fonte circular, a seção de choque vai a zero em determinadas condições, que caracterizam o fim da presença de duas imagens ao formarem um único anel de Einstein. Nas Figs. 5.20 e 5.21 podemos observar que essa queda é mais suave e se aproxima mais do resultado infinitesimal para raios efetivos menores, da mesma forma que a solução perturbada, por construção, se assemelha mais com a exata para valores pequenos de R_0 . Como na seção de choque de magnificação, teremos novamente uma dependência menor das soluções com a elipticidade para fontes pequenas e a um mesmo raio (Fig. 5.21) a seção de choque que mais se aproxima da solução infinitesimal acontece para elipticidades maiores.

Estudando agora a relação da seção de choque com o raio efetivo da fonte, mostramos na Fig. 5.22 que para um mesmo valor de elipticidade a seção de choque cai mais rapidamente ao aumentar a razão L/W limite. O resultado em $R_0 = 0$ não corresponde exatamente ao resultado infinitesimal, pois como já discutimos, simplesmente dividir σ_λ por dois não é a correspondência exata com uma das imagens. Novamente vemos a baixa dependência com a elipticidade, sendo ligeiramente mais visível a diferença ao ter raios maiores e a seção de choque vai a

zero primeiro para elipticidades maiores (Fig. 5.23). As regiões em que ocorre a transição de duas imagens separadas para um anel de Einstein estão marcadas pelos círculos coloridos nas Figs. 5.16 e 5.17.

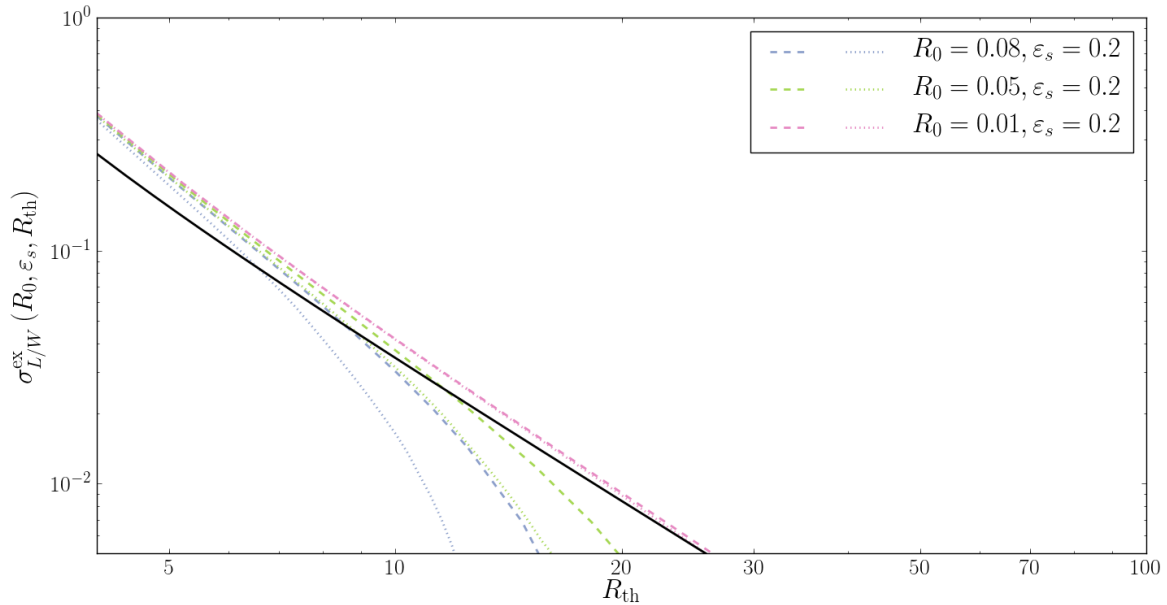


Figura 5.20: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite R_{th} para $\varepsilon_s = 0.2$ e $R_0 = 0.08$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.01 (curva magenta).

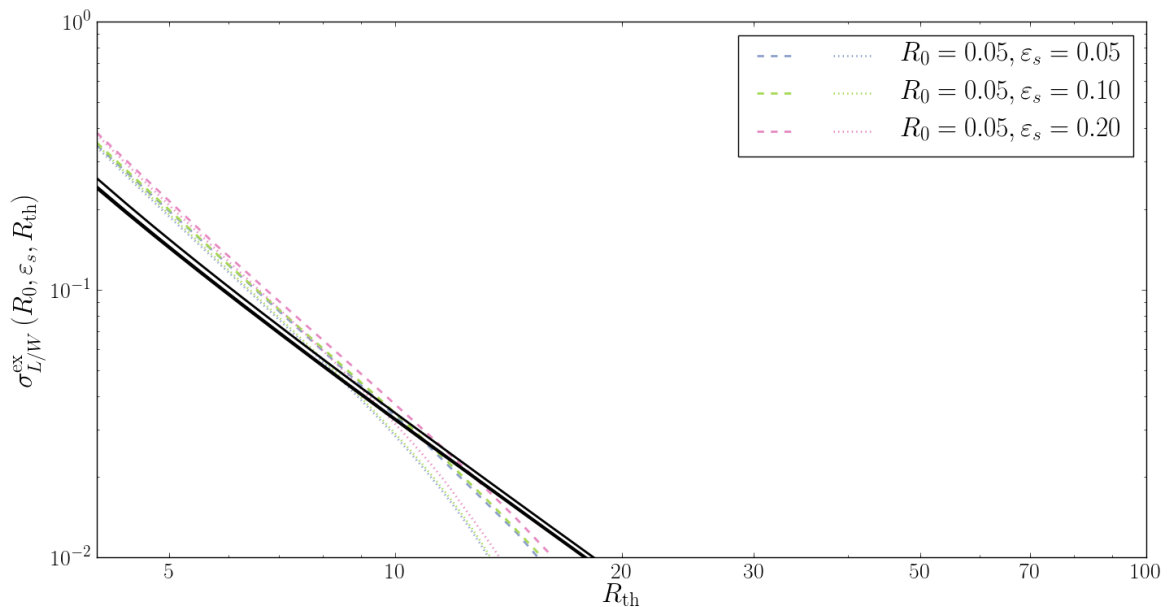


Figura 5.21: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do limite R_{th} para $R_0 = 0.05$ e $\varepsilon_s = 0.05$ (curva azul), 0.1 (curva verde) e 0.2 (curva magenta).

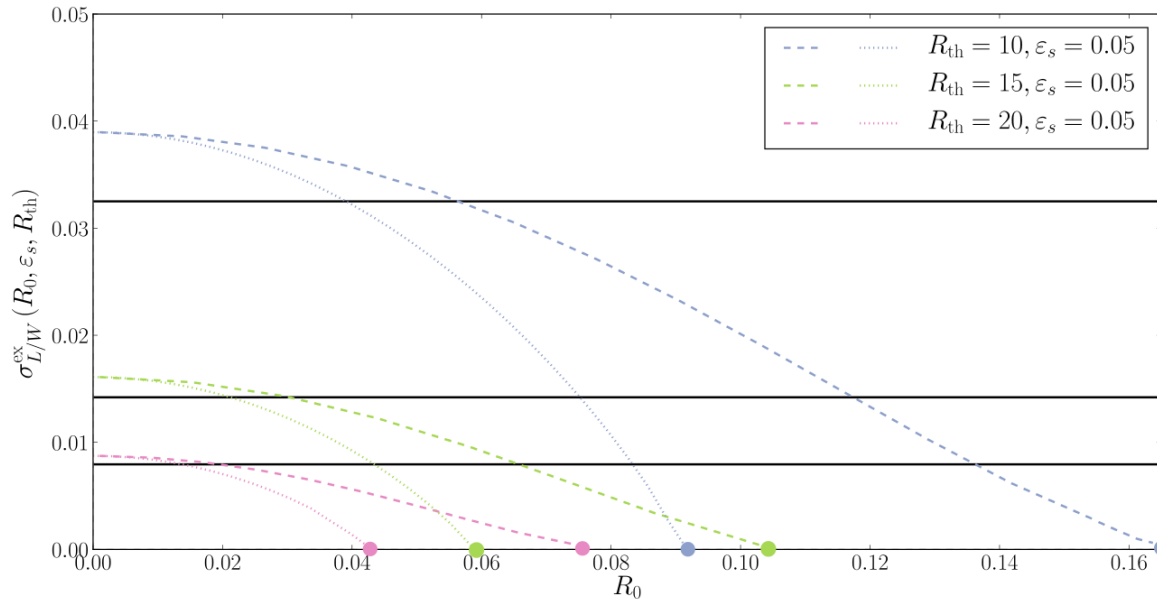


Figura 5.22: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $\varepsilon_s = 0.05$ e $R_{th} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta).

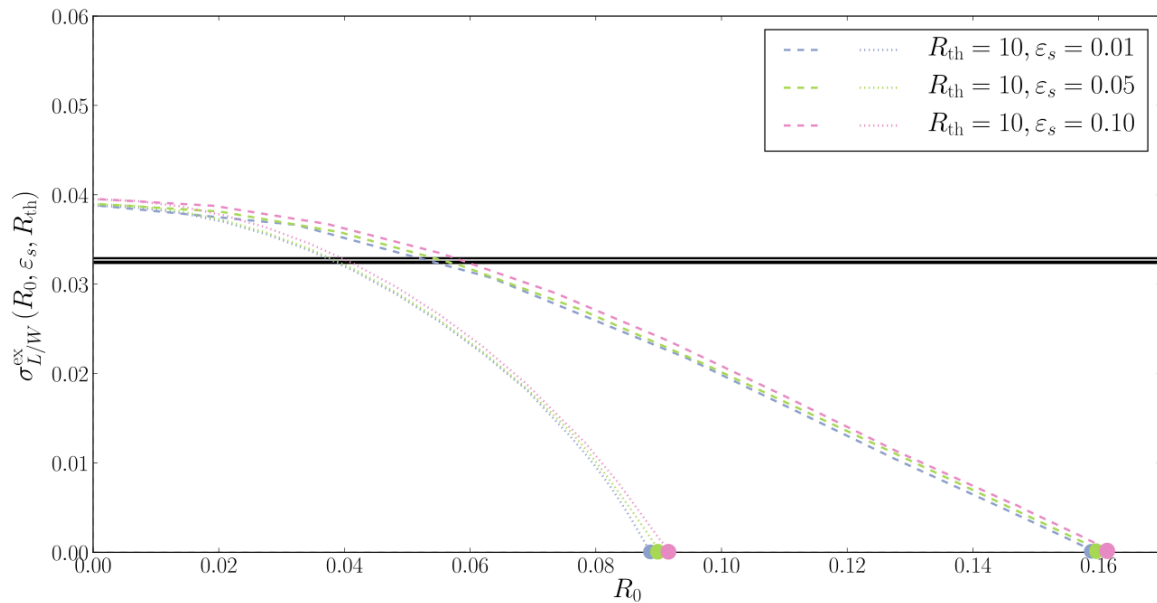


Figura 5.23: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função do raio efetivo R_0 para $R_{th} = 10$ e $\varepsilon_s = 0.01$, (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.1 (curva magenta).

Apresentamos por último a relação da seção de choque com a elipticidade (Figs. 5.24 e 5.25). Para um valor fixo de R_{th} , vemos na Fig. 5.24 que a seção de choque aumenta com a elipticidade e também com o raio efetivo. Para um valor de R_0 fixo (Fig. 5.25), a seção de choque aumenta com a elipticidade e é menor para valores maiores de R_{th} . Como era de se

esperar, resultados com maior limiar estão mais próximos do resultado infinitesimal.

A dependência da seção de choque com R_{th} e R_0 é muito semelhante ao caso de fonte circular, só que agora o efeito de R_0 é sobre a aproximação infinitesimal oriunda do formalismo proposto por Keeton. Com relação a ε_s , a seção de choque aumenta com a elipticidade (ao contrário da de magnificação) e o comportamento com ε_s é qualitativamente similar ao da fonte infinitesimal.

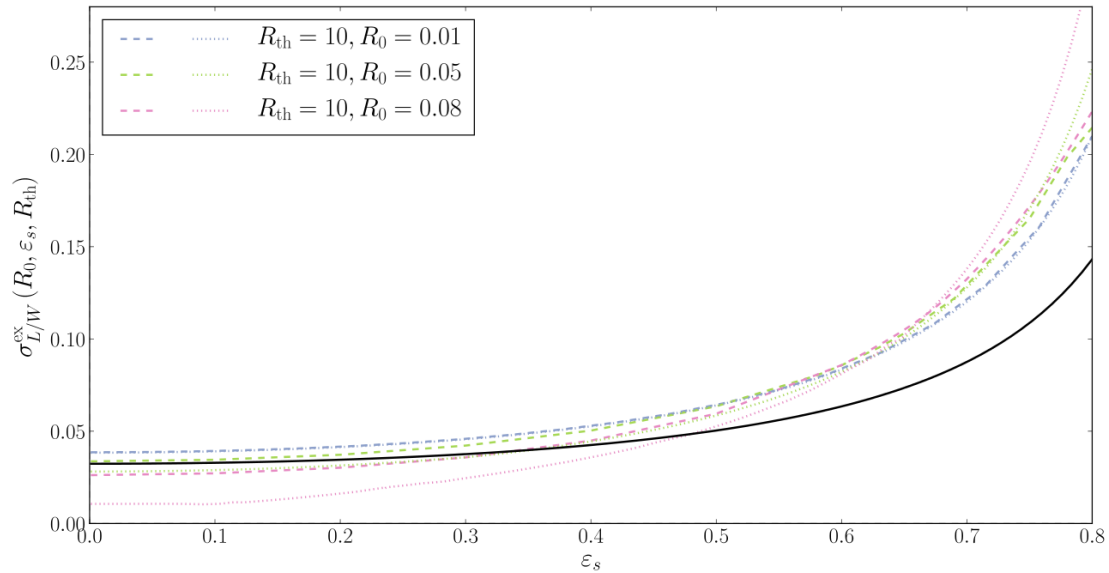


Figura 5.24: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_{\text{th}} = 10$ e $R_0 = 0.01$ (curva azul), 0.05 (curva verde) e 0.08 (curva magenta).

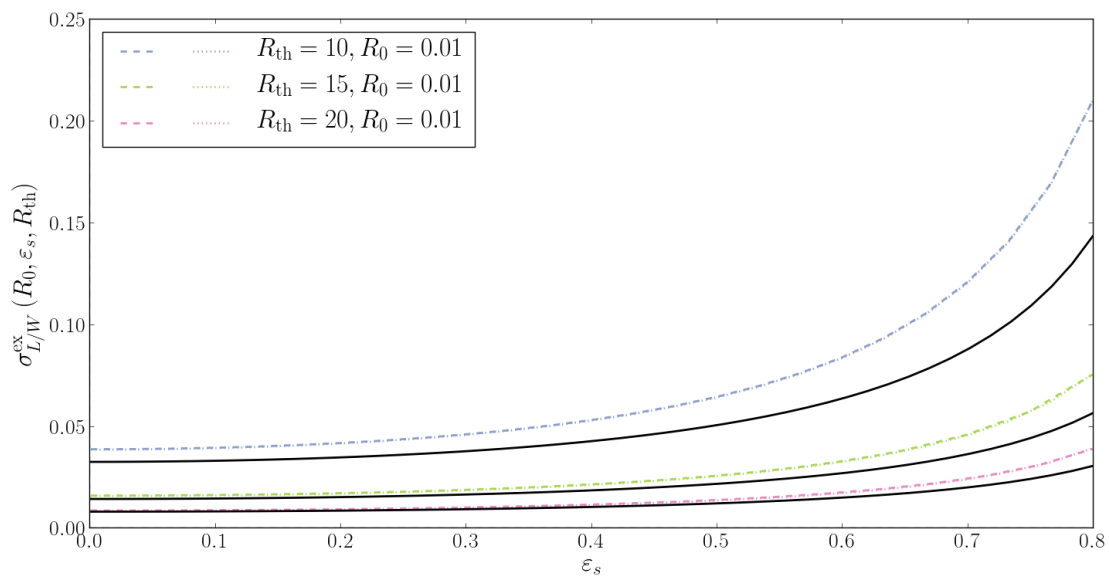


Figura 5.25: Seção de choque de formação de arcos e aproximação infinitesimal (linha sólida) em função da elipticidade ε_s para $R_0 = 0.01$ e $R_{\text{th}} = 10$ (curva azul), 15 (curva verde) e 20 (curva magenta).

Nós queremos estudar o efeito de fontes finitas usando uma abordagem semi-analítica, através da qual seja possível ao mesmo tempo obter resultados realistas e compreender fisicamente o problema. Iniciamos com uma situação muito simplificada (lente e fonte circulares), mas não estudada na literatura com esta abordagem. Depois incluímos a elipticidade da fonte e seguiremos com o programa de aumentar o realismo da modelagem. Mesmo os resultados de lente/fonte circulares são originais e relevantes. Eles reproduzem resultados empíricos obtidos na literatura através de simulações, mas que não eram extrapoláveis fora dos parâmetros estudados. Os resultados obtidos podem ser diretamente aplicados a cálculos teóricos da abundância de fontes lentes, representando já um aumento de realismo em relação a modelagens teóricas atuais. Estas têm sido utilizadas para interpretar os dados, portanto teremos uma aplicação prática direta de nossos resultados.

CAPÍTULO 6

Considerações Finais e Perspectivas

Apesar da Esfera Isotérmica Singular com fonte circular ou elíptica ser um modelo simples, olhando as possíveis configurações como função do tamanho, posição, orientação e elipticidade, pudemos vislumbrar a riqueza do problema ao considerar fontes finitas.

Ao buscar uma expressão analítica para a seção de choque de formação de arcos, fomos levados a testar diversas aproximações para o cálculo do comprimento e da largura dos arcos. O objetivo foi buscar definições dessas quantidades que fossem boas aproximações dos valores exatos e que ao mesmo tempo tivessem expressões analíticas simples. No caso do comprimento para fontes circulares obtivemos que a definição L_2 satisfaz esses dois requerimentos. Ele fornece uma excelente aproximação para o comprimento exato, ou seja, integrando o comprimento da espinha dorsal do arco. Até onde sabemos, este é o primeiro estudo sistemático para medidas de propriedades dos arcos. Em particular, todas as expressões para comprimento, com exceção de L_1 (dois segmentos de reta) e L_4 (utilizando uma circunferência), foram propostas pela primeira vez neste trabalho e é a primeira vez que L_2 e L_3 são calculados explicitamente para um modelo de fonte e de lente. Além disso, as expressões explícitas para a área foram apresentadas aqui pela primeira vez. O resultado para fonte circular infinitesimal já é conhecido na literatura, mas os resultados para fontes de tamanho arbitrário e as expansões perturbativas em R_0 , bem como as seções de choque de formação de arcos e de magnificação são inéditos até onde sabemos.

A fonte finita impõe um limite máximo na razão axial e na magnificação (R_{\max} e μ_{\max} , respectivamente) pois após um determinado limite as imagens deixam de ser arcos e um anel de Einstein é formado. Desse modo, as seções de choque devem se anular para valores acima desses máximos. Esse comportamento, embora possua uma origem intuitiva, não havia sido apontado na literatura em estudos numéricos e para um modelo de lente específico. Aqui mostramos explicitamente esse comportamento em nossas soluções. Também mostramos explicitamente que as seções de choque de magnificação e a de formação de arcos são diferentes no caso de fontes finitas, mesmo para a esfera isotérmica singular, que tem $\mu_r = 1$. Curiosamente, alguns trabalhos assumiam a igualdade, mesmo para outros modelos de lentes, ao fazer

previsões da estatística de arcos usando simulações numéricas.

Mostramos que no caso de fontes circulares as propriedades geométricas dos arcos adquirem expressões simples, que foram utilizadas para obter a seção de choque de arcos em forma analítica. Também nesse caso obtivemos expressões perturbativas em R_0 para as quantidades geométricas dos arcos e para as seções de choque. Estas ilustram claramente os efeitos de fonte finita em relação à fonte infinitesimal. Por fim, mostramos que os arcos oriundos desse tipo de fonte são muito bem representados por uma expressão geométrica simples denominada ArcEllipse [197]. As análises referentes a esse caso foram concluídas e os resultados foram sintetizados em um artigo cuja redação está praticamente concluída e que será submetido para publicação em breve.

No estudo para fonte elíptica repetimos o procedimento para calcular as propriedades das imagens — comprimento, área e largura — o que também configura em material inédito, e apesar de ser possível obter soluções analíticas em muitos dos casos (L_1, L_4, L_5, L_6, L_7 e W_c), as expressões são muito extensas e foram escritas explicitamente apenas para algumas orientações da fonte. A solução mais próxima da integral exata foi obtida utilizando uma circunferência passando pelos extremos e centro do arco (L_4). O próximo passo foi calcular a seção de choque para a formação de arcos a partir de fontes finitas, que comparamos com um método proposto por Keeton [199] para uma aproximação de L/W que leva em conta elipticidade e orientação da fonte infinitesimal. Como esperado, os dois resultados estão em acordo para fontes pequenas. Para completar esses estudos, buscamos obter soluções perturbativas em R_0 de modo análogo ao feito para fonte circular. Além disso, calculamos a seção de choque de magnificação exata, mas devido à complexidade do problema não foi possível obter expressões aproximadas. Esse estudo foi concluído e iremos redigir um segundo artigo com os resultados ainda este ano.

Uma implicação direta dos estudos realizados nesta tese seria a extensão para modelos mais gerais de lentes, como por exemplo usando o perfil radial de NFW [170, 171], que são importante na escala de aglomerados de galáxias, ou considerando lentes elípticas [168]. Também pretendemos seguir esta abordagem para, através do método perturbativo [189, 190, 194] desenvolver um cálculo genérico das seções de choque para lentes arbitrárias

Além do uso dessas soluções em aplicações práticas, como na estatística de arcos e para testar códigos numéricos, as abordagens utilizadas abrem caminho para aprofundar o estudo de fontes elípticas como aproximações mais realistas a fontes reais do que as aproximações mais usuais de fonte infinitesimal e/ou circular. Nessa direção, seria possível estender as soluções discutidas nesta tese para considerar fontes com uma distribuição de brilho superficial com perfil radial e isofotas elípticas.

APÊNDICE A

Diagrama para os Ângulos Iniciais e Finais dos Arcos

Apresentamos aqui as condições que precisamos satisfazer para determinar quais das soluções apresentadas na Eq 4.1 irão se adequar a cada caso, bem como os diagramas para representar cada uma das situações.

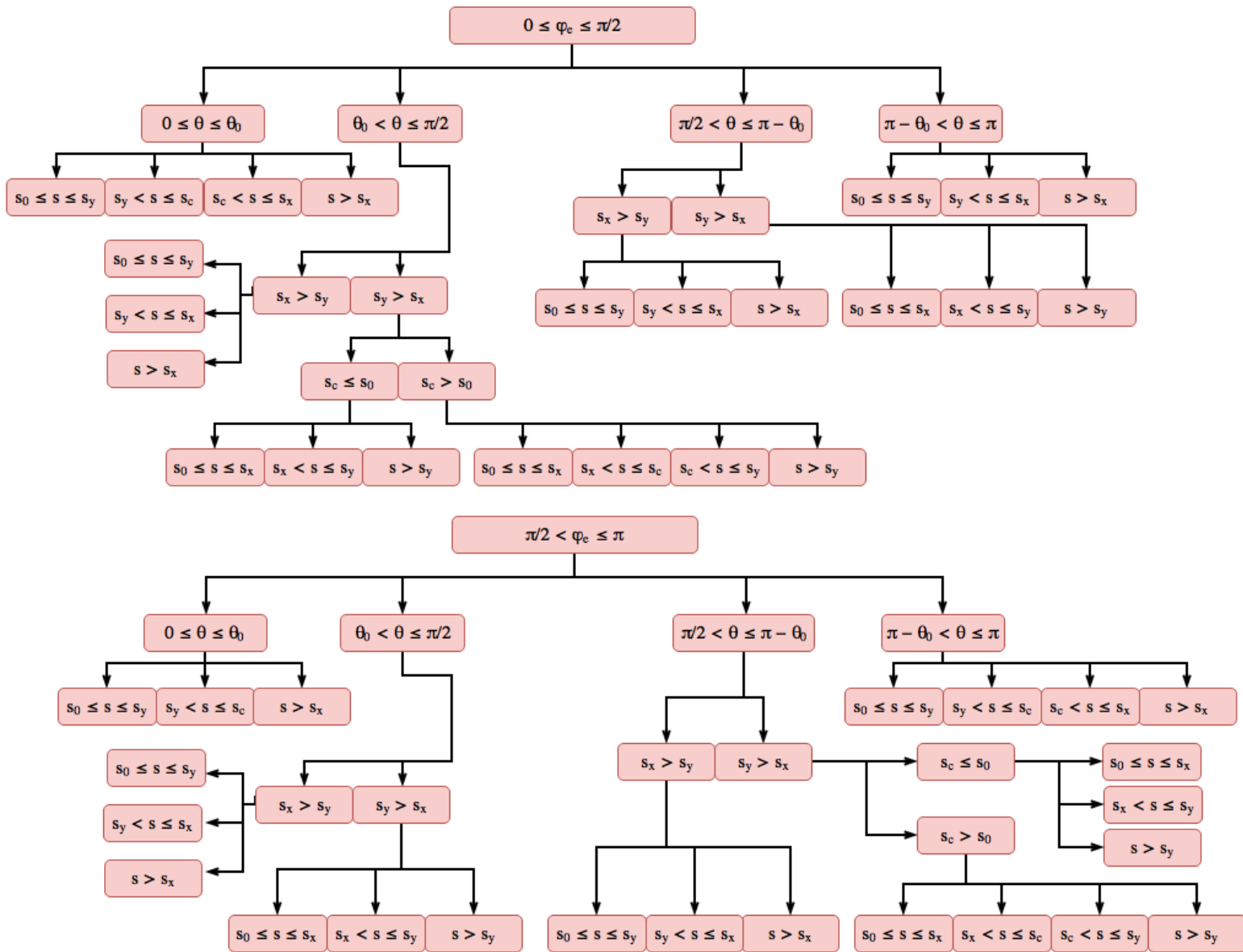


Figura A.1: Diagrama com as possíveis configurações para determinar os ângulos iniciais e finais dos arcos.

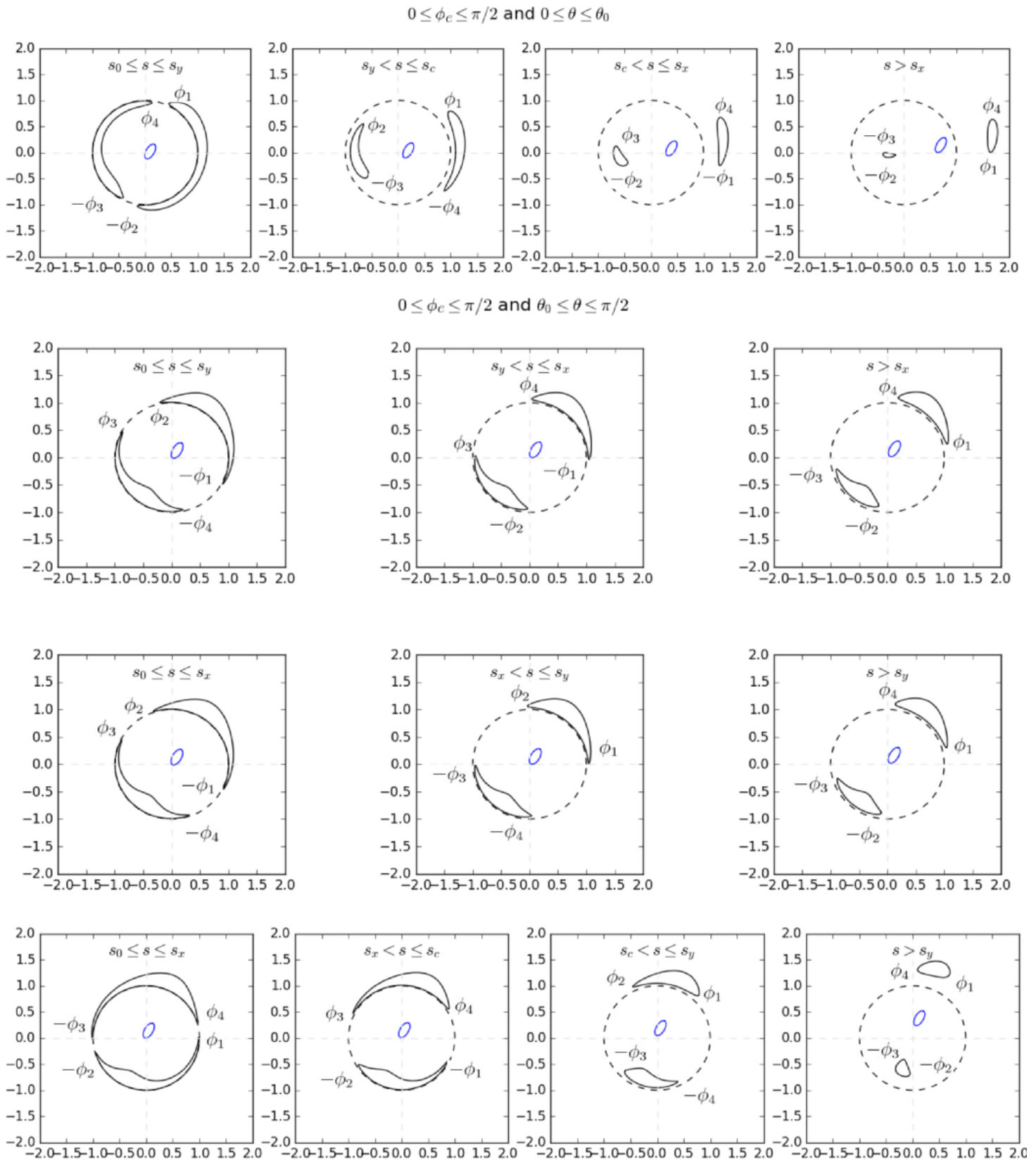
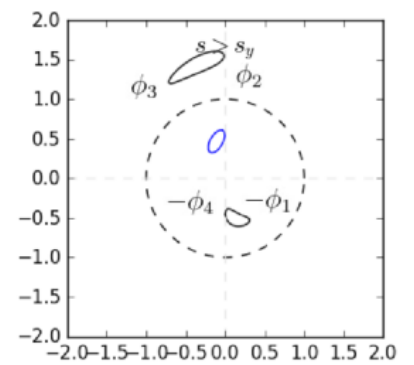
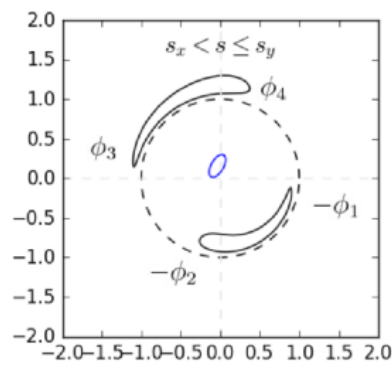
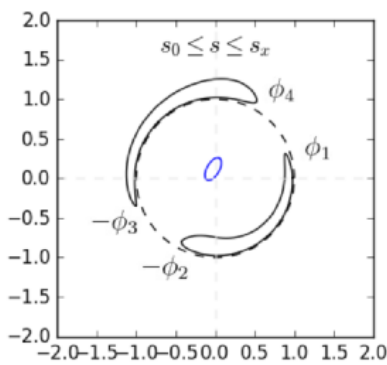
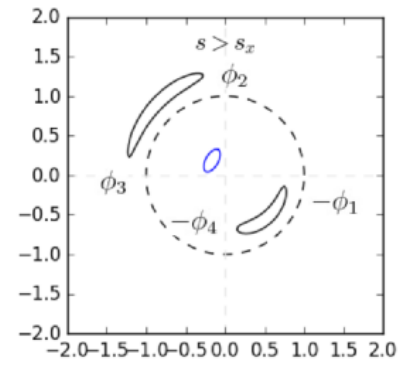
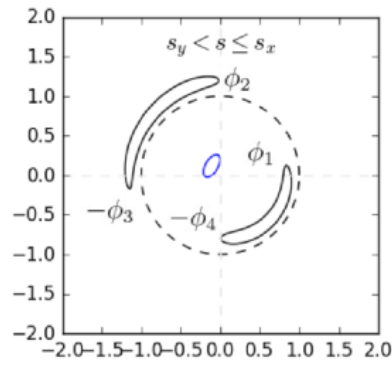
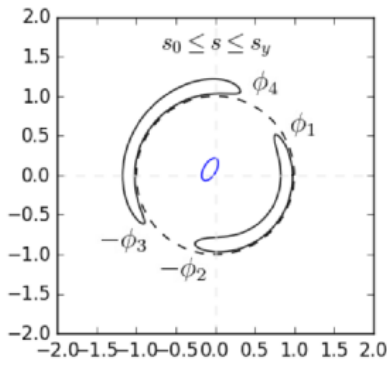


Figura A.2: Diagramas para $0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

$0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$



$0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi$

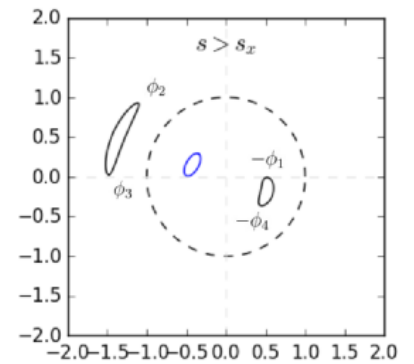
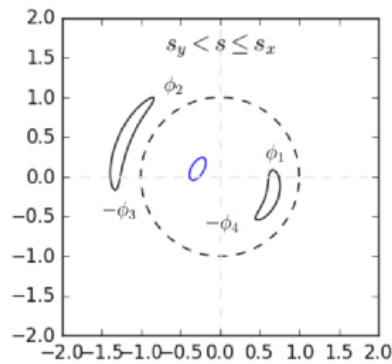
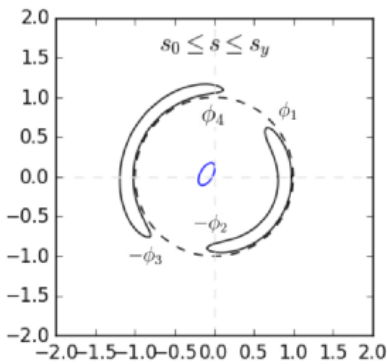
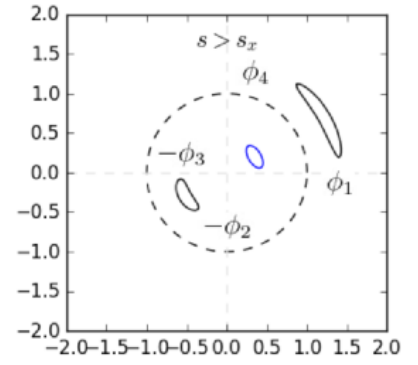
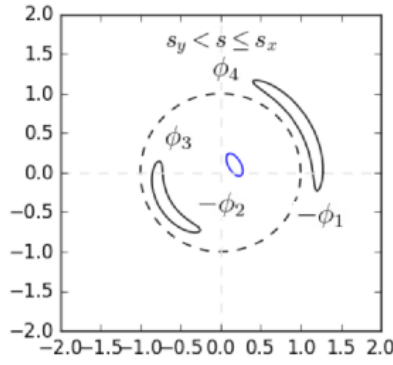
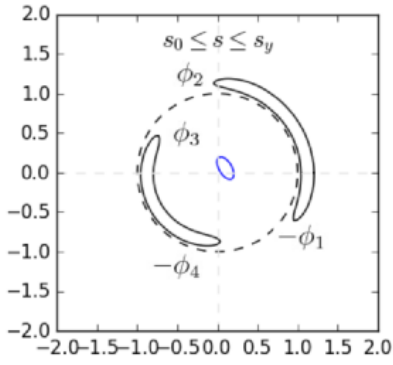


Figura A.3: Diagramas para $0 \leq \phi_e \leq \pi/2$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$.

$\pi/2 < \phi_e \leq \pi$ and $0 \leq \theta \leq \theta_0$



$\pi/2 < \phi_e \leq \pi$ and $\theta_0 < \theta \leq \pi/2$

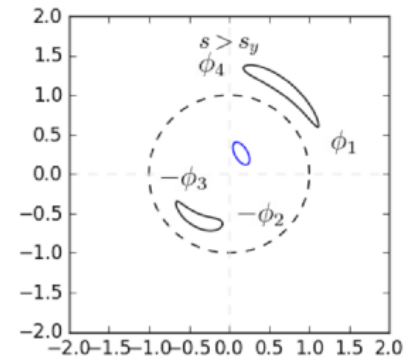
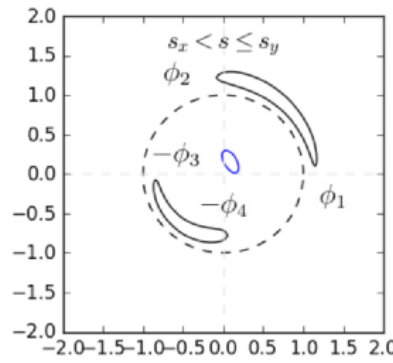
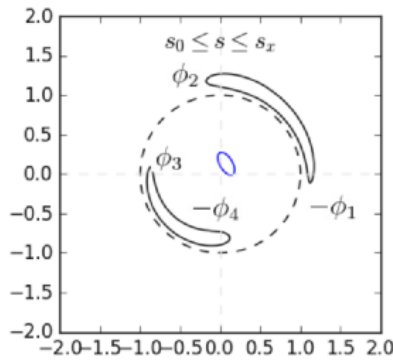
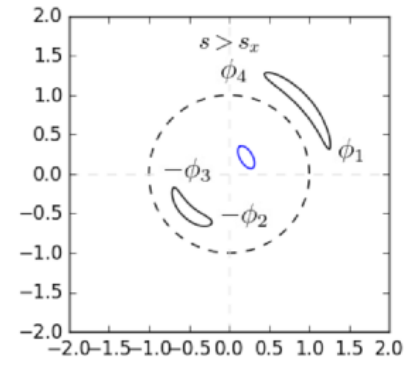
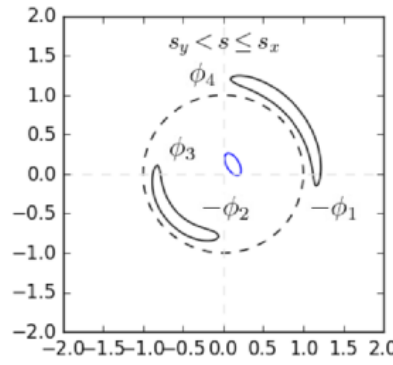
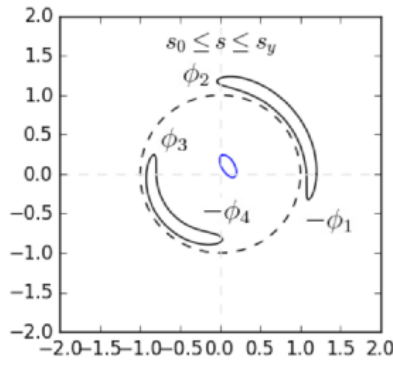
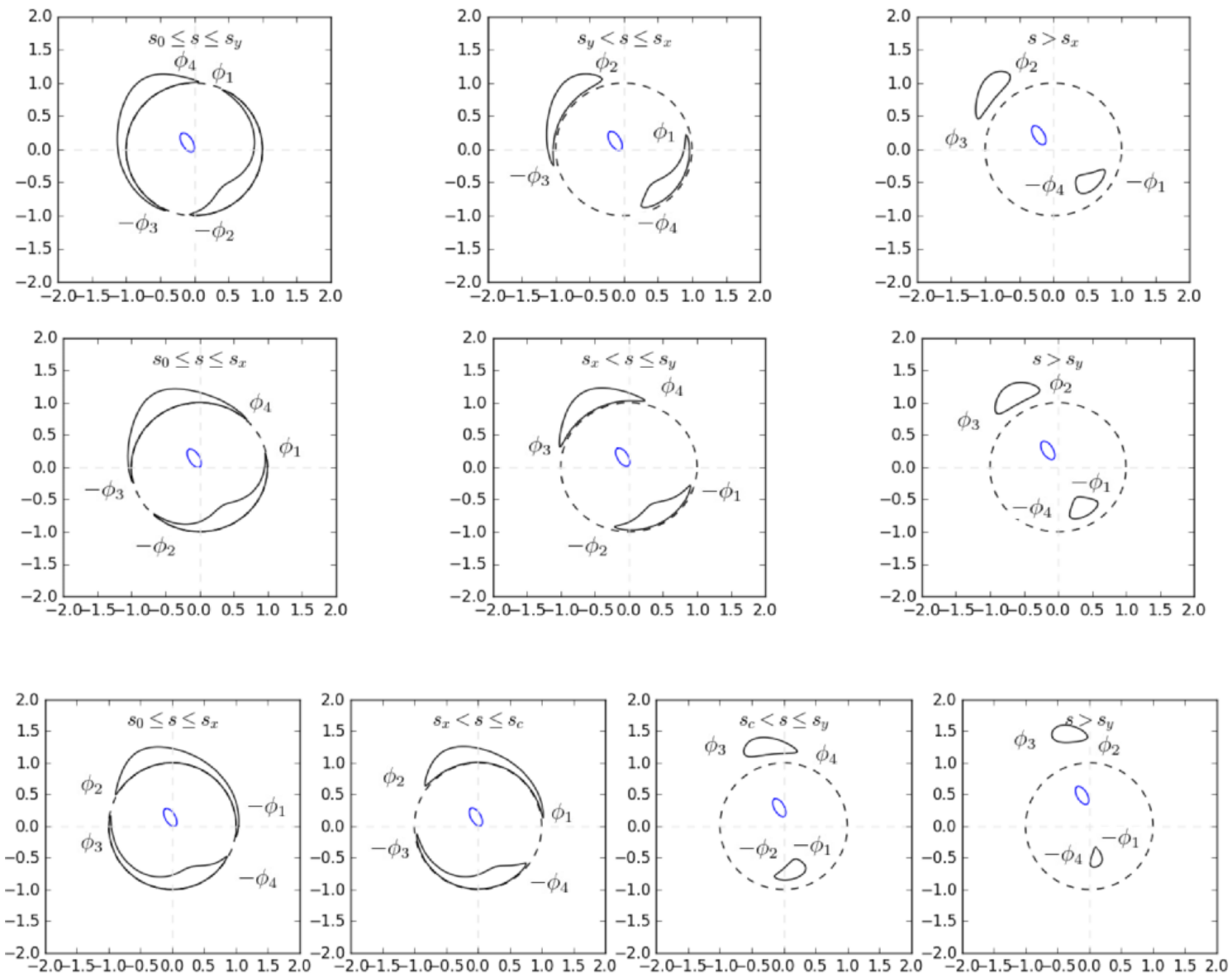


Figura A.4: Diagramas para $\pi/2 < \phi_e \leq \pi$ and $0 < \theta \leq \theta_0$.

$\pi/2 < \phi_c \leq \pi$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$



$\pi/2 < \phi_c \leq \pi$ and $\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi$

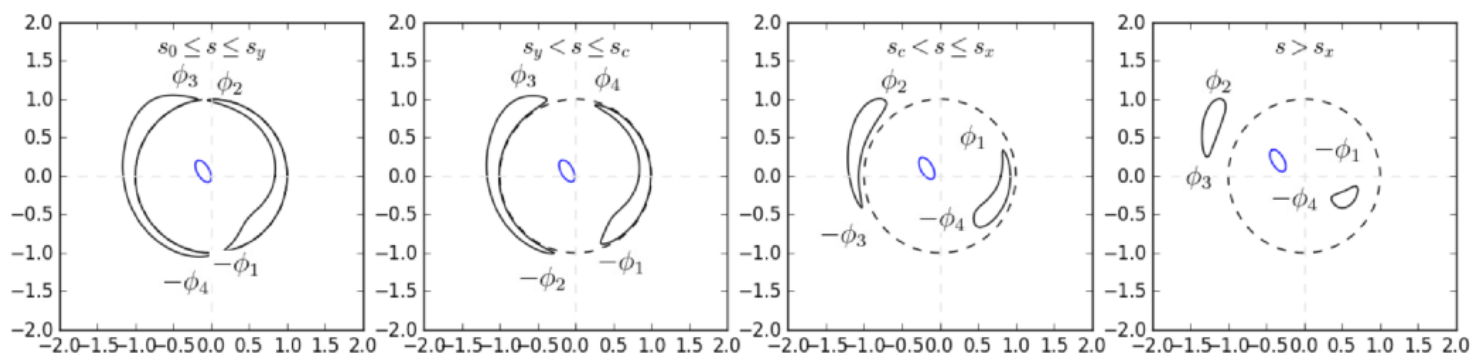


Figura A.5: Diagramas para $\pi/2 < \phi_c \leq \pi$ and $\pi/2 < \theta \leq \pi - \theta_0$.

APÊNDICE B

Comprimento e Largura para Elipse com Orientação $\phi_e = 0$ e $\phi_e = \pi/2$

Como comentamos no Capítulo 4, queremos detalhar o comportamento para o comprimento e largura nos valores limites de $\phi_e = 0$ e $\phi_e = \pi/2$. Abaixo apresentamos algumas expressões que foram obtidas para esses ângulos específicos e nas Figuras abaixo indicamos os seus comportamentos.

$$L_1(\phi_e = 0) = 2\sqrt{\frac{2R_0^4\varepsilon_s + 2s(1-\varepsilon_s)^2(1+\varepsilon_s)(A_2-1) + R_0^2(\varepsilon_s-1)(\mp 2 + s(\varepsilon_s-1) \mp 2\varepsilon_s \pm 4\varepsilon_s A_2)}{s^2(1-\varepsilon_s^2)(1+\varepsilon_s)}} \quad (\text{B.1})$$

$$L_2(\phi_e = 0) = 2\arccos A_2 \mp s\sqrt{\frac{1-\varepsilon_s}{2\varepsilon_s}} \arctan\left(\frac{2R_0\varepsilon_s}{4R_0^2\varepsilon_s - s^2(1-\varepsilon_s^2)}\sqrt{\frac{2(-2R_0^2\varepsilon + s^2(1-\varepsilon_s^2))}{\varepsilon_s}}\right) \quad (\text{B.2})$$

$$L_5(\phi_e = 0) = 2(1 \pm s)\arccos A_2 \quad (\text{B.3})$$

$$L_6 = L_7(\phi_e = 0) = \frac{2}{s(1-\varepsilon_s^2)}\left[s(1-\varepsilon_s^2) \mp (2R_0^2\varepsilon_s - s^2(1-\varepsilon_s^2))A_2\arccos(A_2)\right] \quad (\text{B.4})$$

$$L_1(\phi_e = \pi/2) = 2\sqrt{\frac{2R_0^4 - 2s^2(\varepsilon_s-1)(1+\varepsilon_s)^2(A_1-1) - R_0^2s(1+\varepsilon_s)(\pm 2 + s(\varepsilon_s+1) \mp 2\varepsilon_s \pm 4\varepsilon_s A_1)}{s^2(\varepsilon_s-1)(1+\varepsilon_s)^2}} \quad (\text{B.5})$$

$$L_2(\phi_e = \pi/2) = 2\arccos A_1 + \sqrt{\frac{2(1+\varepsilon_s)}{\varepsilon_s}}s \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{1+\varepsilon_s}}\sin A_1\right) \quad (\text{B.6})$$

$$L_5(\phi_e = \pi/2) = 2(1 \pm s)\arccos A_1 \quad (\text{B.7})$$

$$L_6 = L_7(\phi_e = \pi/2) = \pi/2 = \frac{2}{s(1-\varepsilon_s^2)}\left[s(1-\varepsilon_s^2) \pm (2R_0^2\varepsilon_s + s^2(1-\varepsilon_s^2))A_1\arccos(A_1)\right], \quad (\text{B.8})$$

em que

$$A_1 = \sqrt{\frac{(\varepsilon_s-1)R_0^2 + s^2(1-\varepsilon_s^2)}{2R_0^2\varepsilon_s + s^2(1-\varepsilon_s^2)}}, \quad A_2 = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon_s)R_0^2 - s^2(1-\varepsilon_s^2)}{2R_0^2\varepsilon_s - s^2(1-\varepsilon_s^2)}}. \quad (\text{B.9})$$

E as expansões ao redor de $R_0 = 0$ são:

$$L_1(\phi_e = 0) \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)\frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon_s}} + \frac{1 + (1 \pm 8s + 8s^2)\varepsilon_s + (-7 \mp 8s + 8s^2)\varepsilon_s^2}{4s^3(1 \pm s)(1-\varepsilon_s)^2(1+\varepsilon)^{3/2}}R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.10})$$

$$L_2(\phi_e = 0) \approx \frac{4}{s\sqrt{1 \pm \varepsilon_s}}R_0 + \frac{(1+7)\varepsilon_s\sqrt{1-\varepsilon_s^2}}{3s^3(1-\varepsilon)^{3/2}(1+\varepsilon)^2}R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.11})$$

$$L_5(\phi_e = 0) \approx 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)\frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon_s}} + \frac{(1 \pm s)(1+\varepsilon_s)^{-3/2}(1+5\varepsilon_s)}{3s^3(1-\varepsilon_s)}R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.12})$$

$$L_6 = L_7(\phi_e = 0) = 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right)\frac{R_0}{\sqrt{1-\varepsilon_s}} + \frac{(1 \mp 2s - 5\varepsilon_s \pm 4s\varepsilon_s)}{3s^3(1-\varepsilon_s^2)\sqrt{1-\varepsilon_s}}R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.13})$$

$$L_1(\phi_e = \pi/2) = 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right) \frac{R_0}{\sqrt{1-\varepsilon_s}} - \frac{(-1 + (\pm 6 + 8s \pm 8s^2)\varepsilon_s + (\pm 7 + 8s \mp 8s^2)\varepsilon_s^2)}{4s^3(1+s)(1-\varepsilon)^{3/2}(1+\varepsilon_s)^2} R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4] \quad (\text{B.14})$$

$$L_2(\phi_e = \pi/2) = 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right) \frac{R_0}{\sqrt{1-\varepsilon_s}} + \frac{(1 - (5 + 2s)\varepsilon_s)}{3s^3\sqrt{1-\varepsilon_s}(1-\varepsilon_s^2)} R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.15})$$

$$L_5(\phi_e = \pi/2) = 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right) \frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon_s}} + \frac{(1 \pm s)(1-\varepsilon_s)^{1/2}(1-5\varepsilon_s)}{3s^3(1-\varepsilon_s^2)} R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4], \quad (\text{B.16})$$

$$L_6 = L_7(\phi_e = \pi/2) = 2\left(\pm 1 + \frac{1}{s}\right) \frac{R_0}{\sqrt{1-\varepsilon_s}} + \frac{(1 \mp 2s - 5\varepsilon_s \pm 4s\varepsilon_s)}{3s^3\sqrt{1-\varepsilon_s}(1-\varepsilon_s^2)} R_0^3 + \mathcal{O}[R_0^4]. \quad (\text{B.17})$$

E as larguras para $\phi_e = 0$ e para $\phi_e = \pi/2$ são

$$W_c = \frac{2R_0}{\sqrt{1-\varepsilon_s}}, \quad W_c = \frac{2R_0}{\sqrt{1+\varepsilon_s}}. \quad (\text{B.18})$$

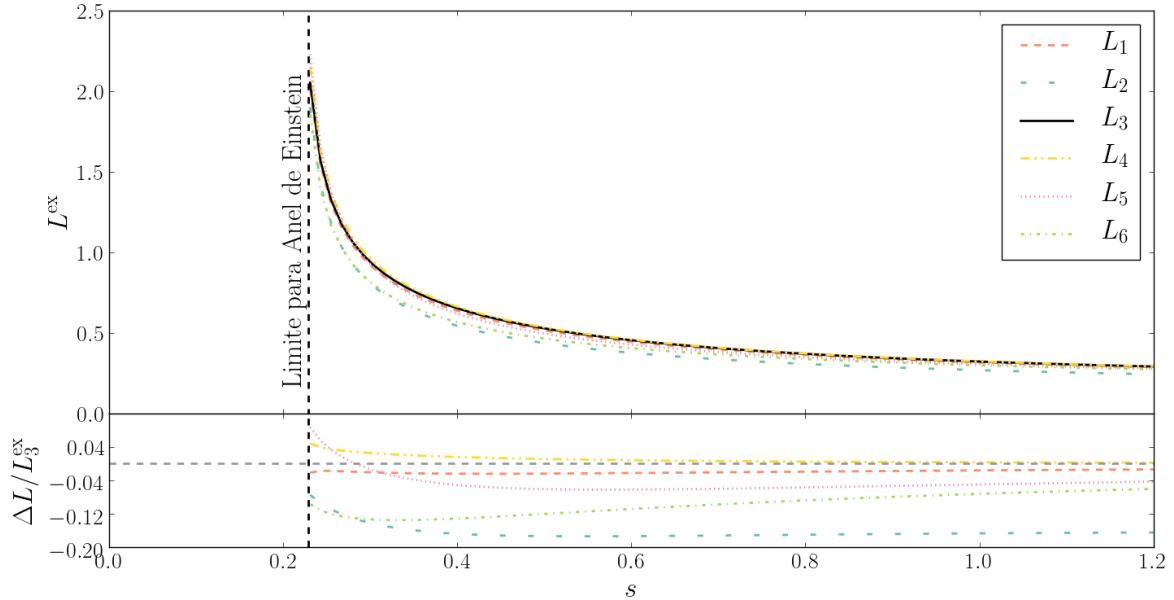


Figura B.1: Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

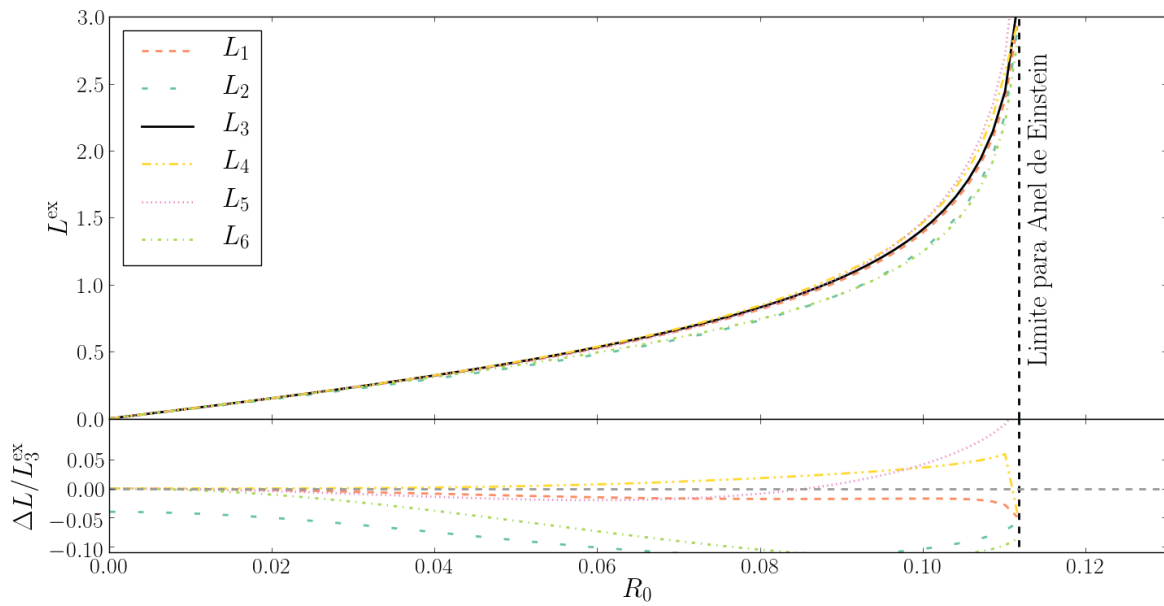


Figura B.2: Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio efetivo da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

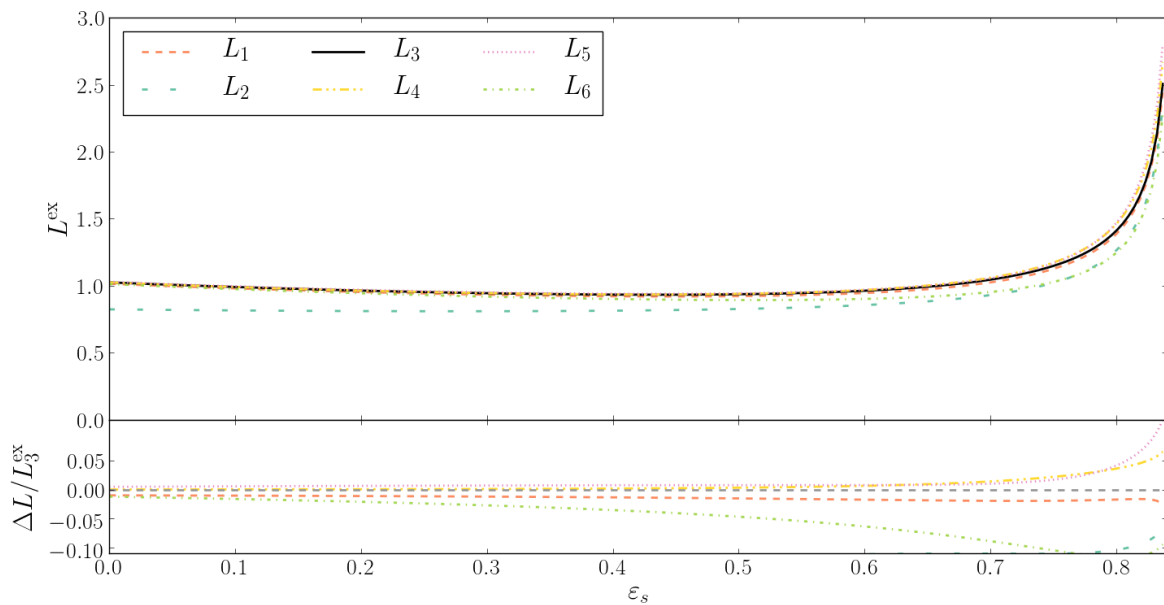


Figura B.3: Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = 0$ e $\theta = 0$.

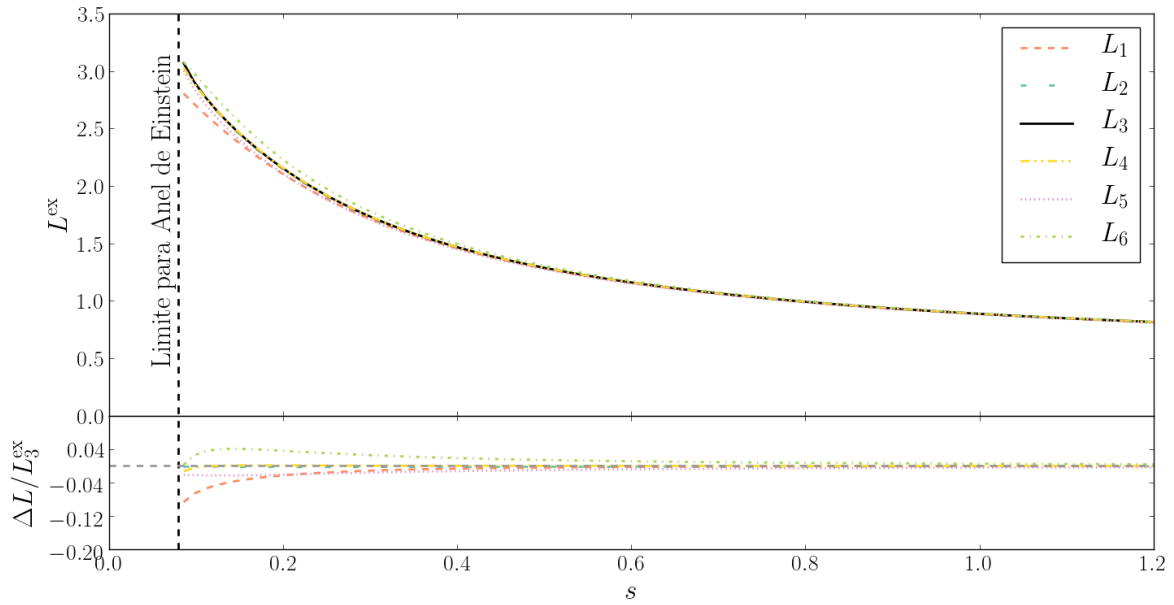


Figura B.4: Comprimentos para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

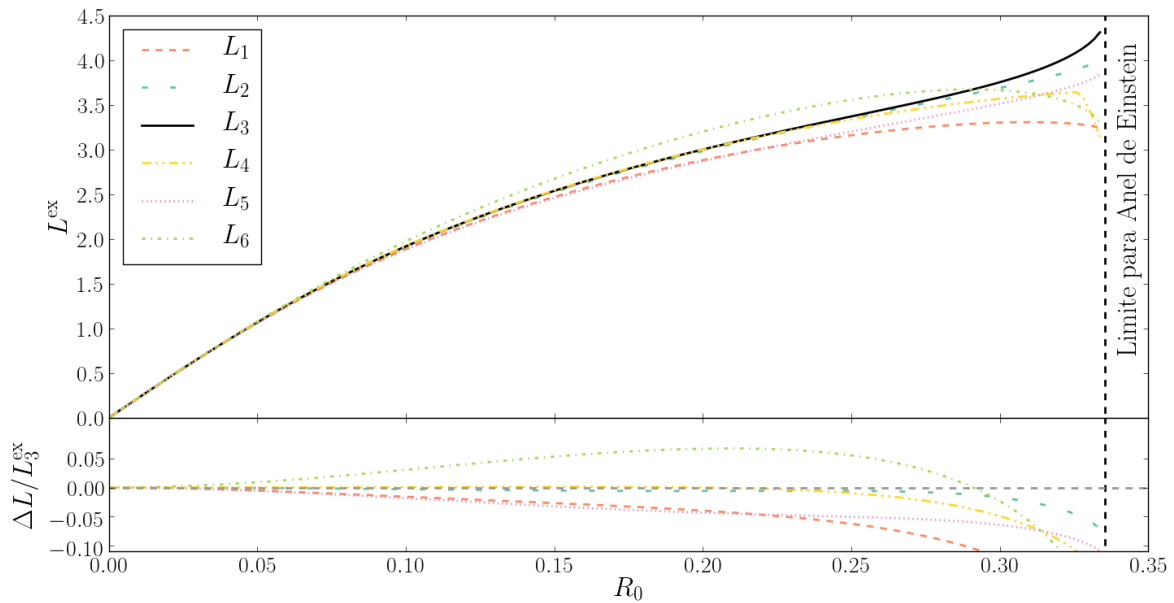


Figura B.5: Comprimentos para o arco externo considerando variações no raio efetivo da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

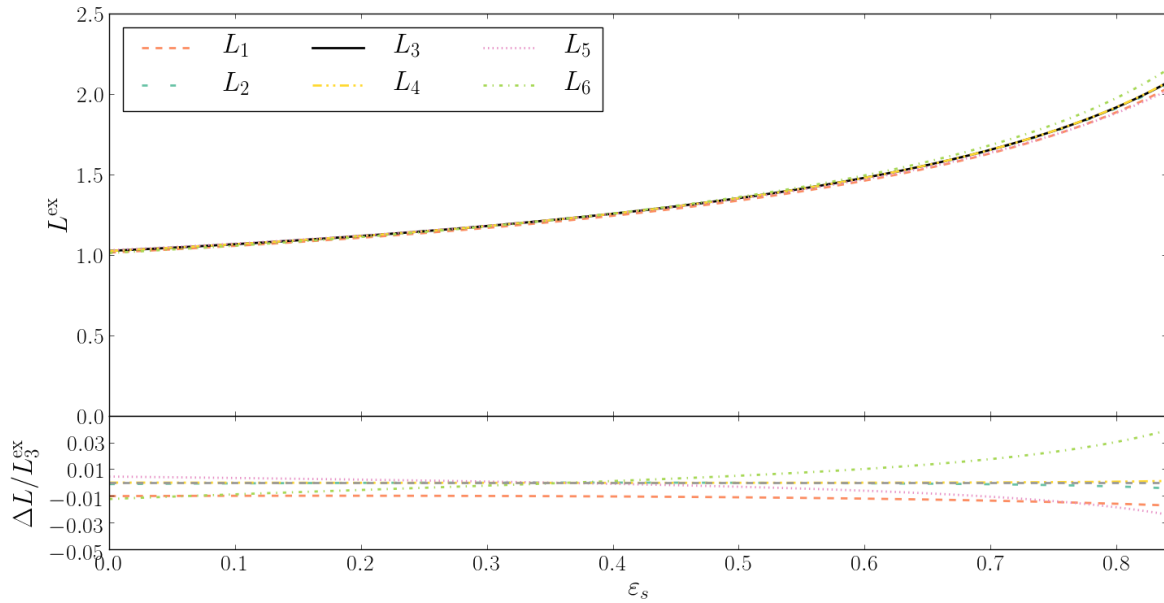


Figura B.6: Comprimentos para o arco externo considerando variações na elipticidade da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta L/L_3$) entre os diferentes comprimentos e o resultado exato, L_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$ e $\theta = 0$.

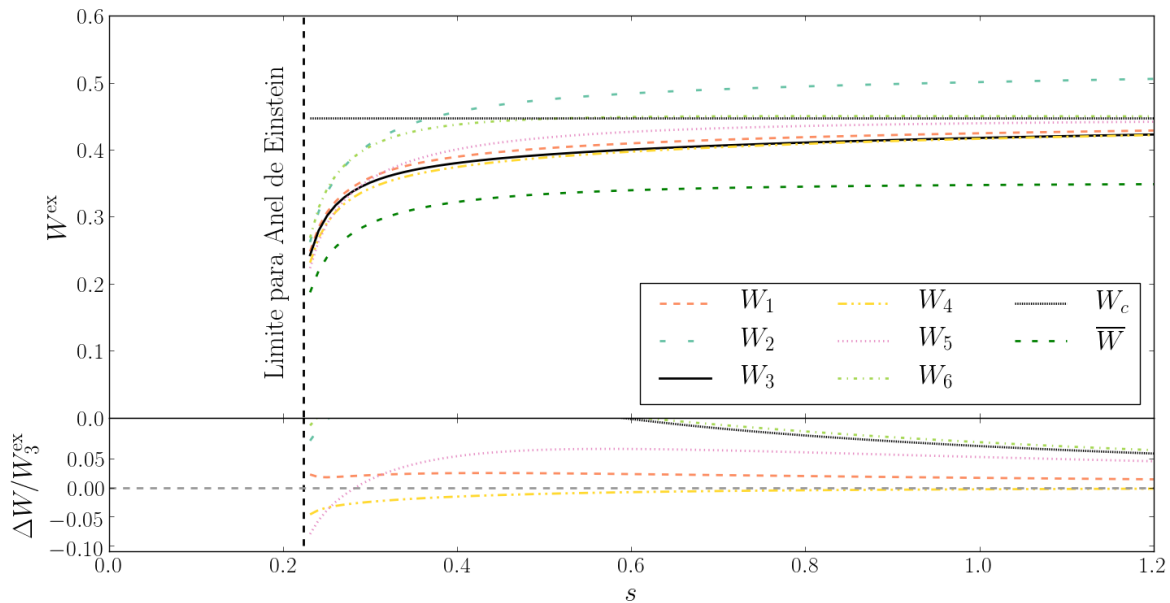


Figura B.7: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

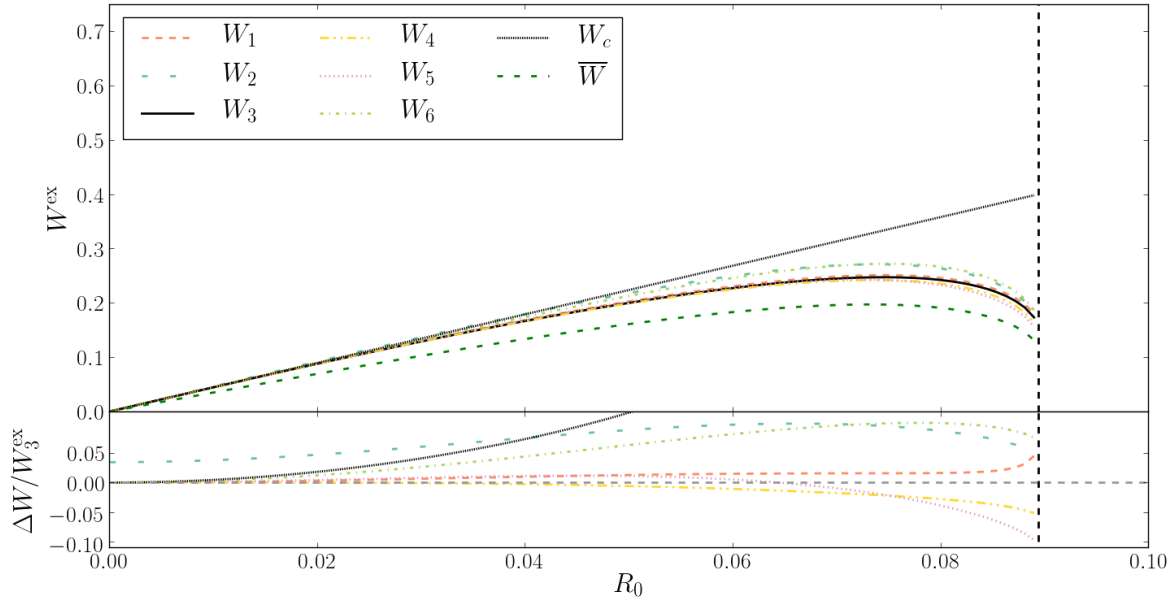


Figura B.8: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.2$, $\phi_e = 0$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

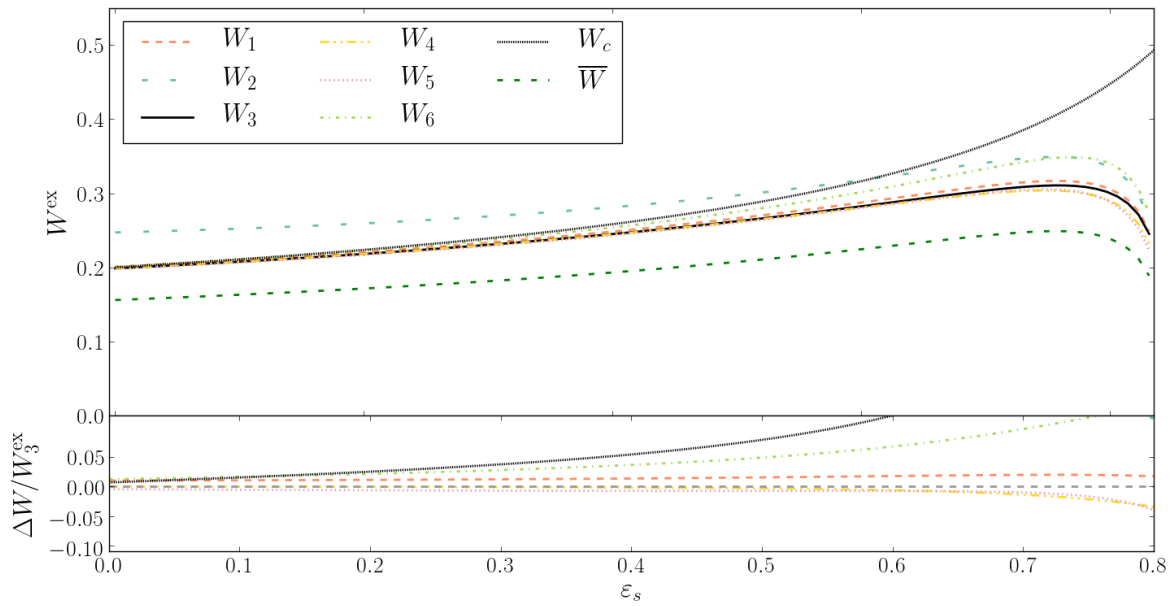


Figura B.9: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = 0$ e $\theta = 0$.

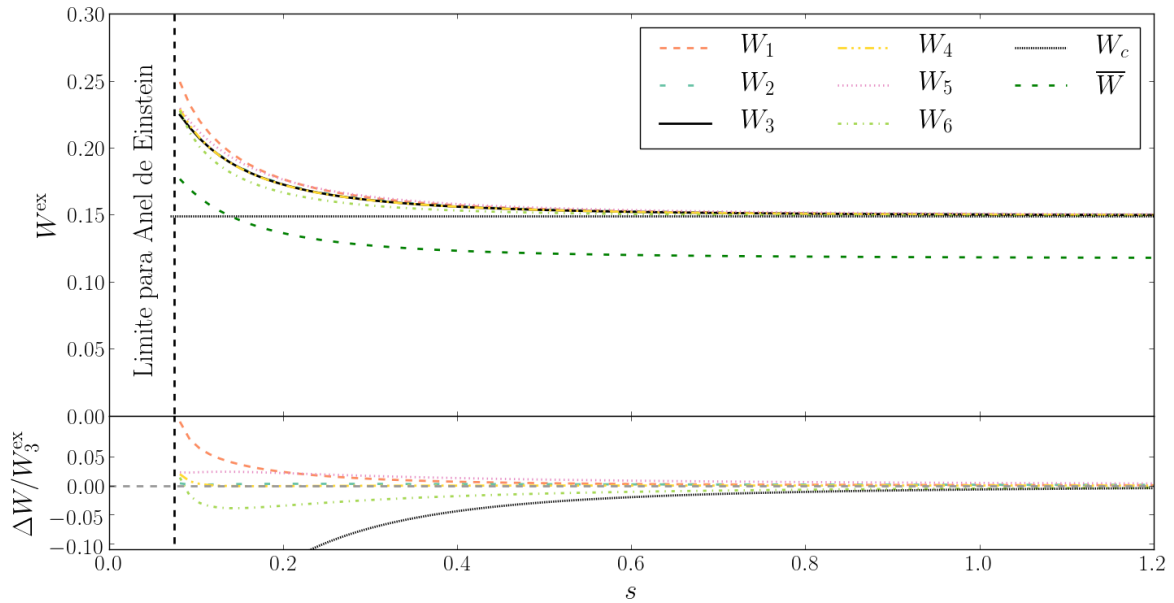


Figura B.10: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

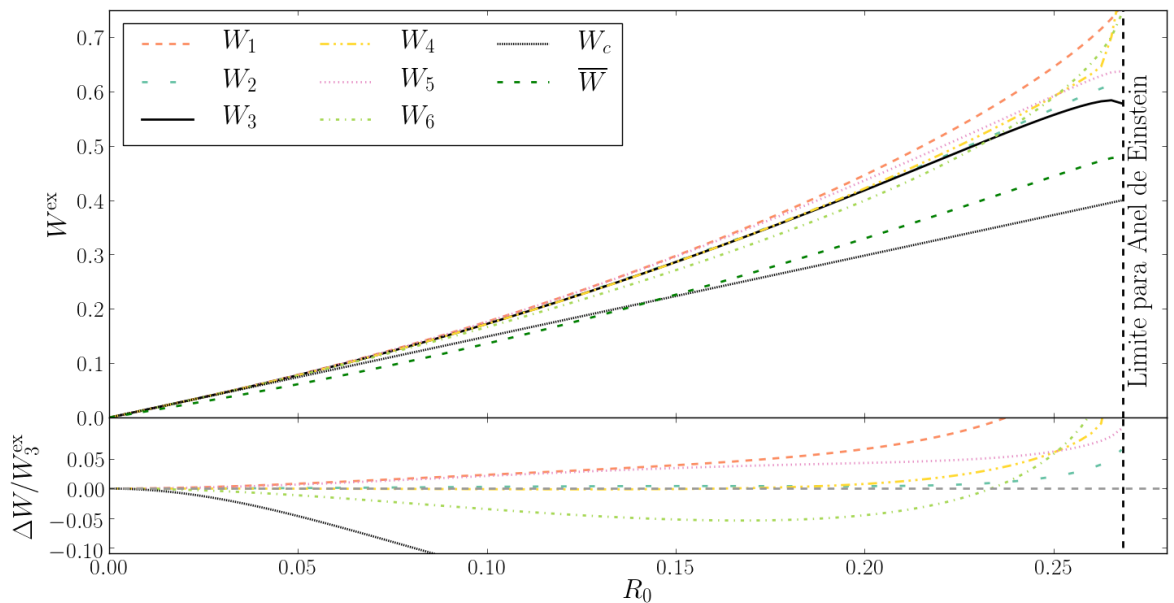


Figura B.11: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $s = 0.1$, $\phi_e = \pi/2$, $\varepsilon_s = 0.8$ e $\theta = 0$.

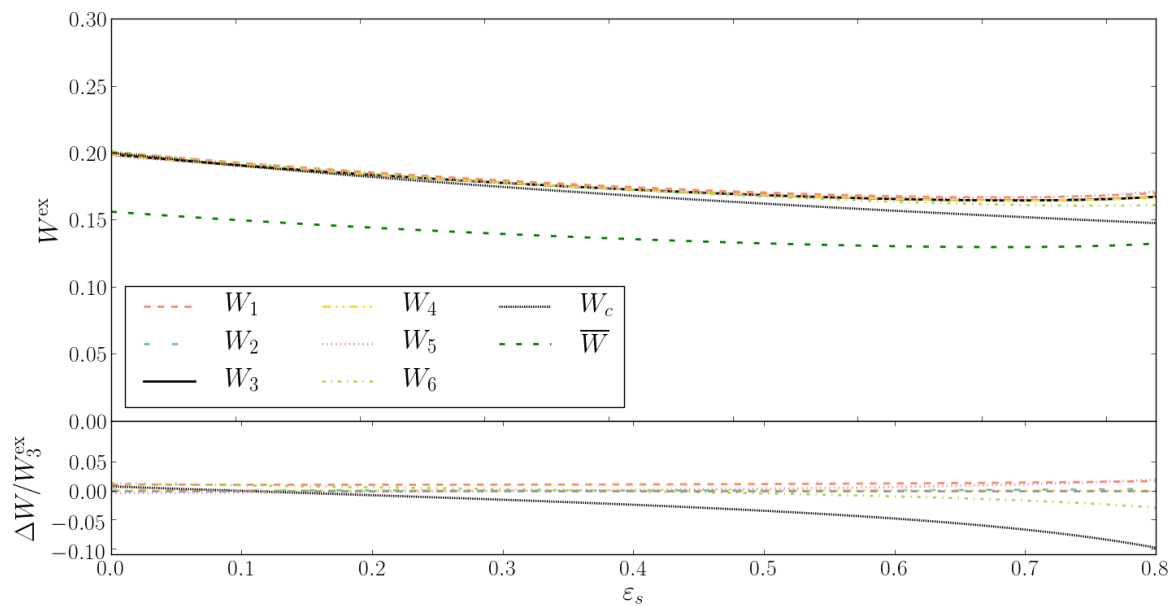


Figura B.12: Larguras para o arco externo considerando variações na posição da fonte (painel superior) e diferença relativa ($\Delta W/W_3$) entre as diferentes larguras e o resultado exato, W_3 , (painel inferior) para $R_0 = 0.1$, $s = 0.25$, $\phi_e = \pi/2$ e $\theta = 0$.

APÊNDICE C

A ArcEllipse como uma Aproximação para um Arco Gravitacional

A ArcEllipse [197] é uma maneira simples de representar o formato de arcos, considerando que eles são a distorção de uma elipse de modo que um dos seus eixos principais é deformado em um arco de circunferência. Considere a expressão usual para uma elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (\text{C.1})$$

em que a e b são os semi-eixos alinhados aos eixos x e y , respectivamente.

Distorcendo uma elipse ao longo de seu eixo maior, a ArcEllipse é o conjunto de pontos cuja distância de um ponto na circunferência ao longo da direção tangencial ($r_c \Delta\theta$) e ao longo da direção radial (Δr) satisfazem

$$\left(\frac{r_c \Delta\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{b}\right)^2 = 1, \quad (\text{C.2})$$

em que r_c é o raio de curvatura do círculo (e do arco construído). Escolhendo o centro de curvatura para coincidir com o centro do sistema de coordenadas polares, a ArcEllipse reduz às componentes $\Delta r = r - r_c$ e $\Delta\theta = \theta - \tilde{\theta}$, em que $\tilde{\theta}$ é a orientação do centro da ArcEllipse (o qual iremos considerar como zero por simplicidade e para comparar com os nossos resultados anteriores). Resolvendo a expressão quadrática acima, temos

$$r^\pm = r_c \pm b \sqrt{1 - \left[\frac{r_c(\tilde{\theta} - \theta)}{a}\right]^2}, \quad (\text{C.3})$$

em que r^+ e r^- delimitam o contorno interno e externo da ArcEllipse, respectivamente. A representação geométrica de uma imagem formada usando a ArcEllipse é mostrada na Fig. C.1.

Da Eq. (C.3) nós vemos que as extremidades dos arcos ocorrem quando $r^+ = r^-$, de modo similar aos arcos da SIS, o que significa que o argumento da raiz quadrada é zero e nós temos dois ângulos, $\theta_i = \tilde{\theta} - a/r_c$ and $\theta_f = \tilde{\theta} + a/r_c$.

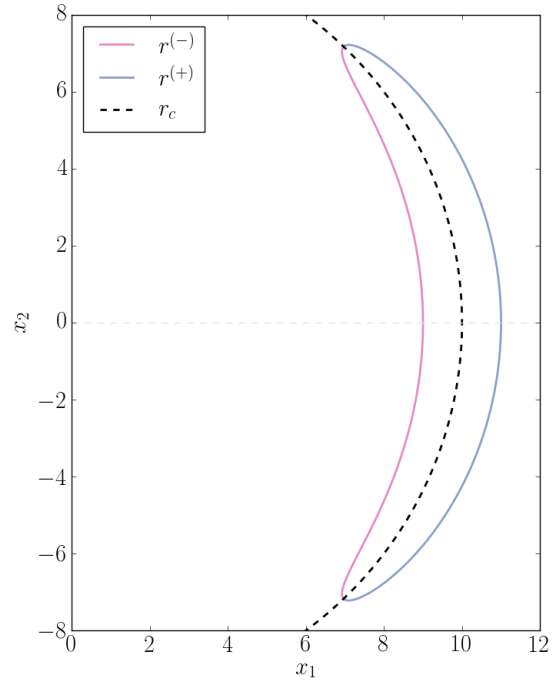


Figura C.1: Figura geométrica utilizando a ArcEllipse para $a = 8, b = 1, \tilde{\theta} = 0$ e $r_c = 10$.

Definimos o comprimento da ArcEllipse como o comprimento do segmento de arco entre as duas extremidades, no qual $\Delta r = 0$

$$L_{AE} = r_c(\theta_f - \theta_i) = 2a, \quad (\text{C.4})$$

sem ambiguidades ou aproximações aqui, pois é um segmento de círculo. A largura em $\Delta\theta = 0$ define a largura do arco

$$W_{AE} = (r^+ - r^-) \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} = 2b. \quad (\text{C.5})$$

Dessa forma, a razão L/W para a ArcEllipse é dada por $L_{AE}/W_{AE} = a/b$.

A área para uma ArcEllipse, como feita por Furlanetto et al. [197], é

$$\begin{aligned} A_{AE} &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \int_{r^-}^{r^+} r dr d\theta = \int_{\tilde{\theta}-a/r_c}^{\tilde{\theta}+a/r_c} \frac{r^{+2} - r^{-2}}{2} d\theta \\ &= 2br_c \int_{\tilde{\theta}-a/r_c}^{\tilde{\theta}+a/r_c} \sqrt{1 - \left[\frac{r_c(\tilde{\theta} - \theta)}{a} \right]^2} d\theta \\ &= 2br_c \frac{a\pi}{2r_c} = \pi ab = \pi \frac{L_{AE} W_{AE}}{4}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

o que é idêntico à área de uma elipse cujo semi-eixos são a e b .

Outro fator geométrico para a ArcEllipse é $A/LW = \pi/4$, que pode também ser comparado ao arco da SIS. Na Figs. C.2 e C.3 mostramos a diferença entre a ArcEllipse e os arcos da SIS, considerando o comprimento L_2 , para não usar a mesma definição da ArcEllipse, e L_3 , que é nosso valor de referência. A largura escolhida foi $W_c = 2R_0$ para os arcos da SIS. O limite entre a formação de duas imagens ou um anel de Einstein é delimitado por $s = R_0 = 0.2$ nas Figs. C.2 a C.5. O limite entre formação de uma ou duas imagens ocorre em $s = 1.2$ para essas escolhas de parâmetros. Note que a diferença é menor para fontes distantes e maior para fontes maiores. Além disso, o comprimento no interior do arco vai a zero quando a fonte é movida para longe do centro do sistema da lente, o que explica o rápido crescimento ao comparar com a razão da ArcEllipse. Como esperado, o comportamento anômalo para o arco interno faz diferença se consideramos L_2 ou L_3 .

Considerando a separação angular média da ArcEllipse, ao longo da direção radial, de modo análogo ao que fizemos para a largura da SIS (\bar{W}), temos

$$\bar{W}_{AE} = \frac{1}{\theta_f - \theta_i} \int_{\theta_i}^{\theta_f} (r^+ - r^-) d\theta \quad (\text{C.7})$$

$$= \frac{2b}{\theta_f - \theta_i} \int_{\tilde{\theta}-a/r_c}^{\tilde{\theta}+a/r_c} \sqrt{1 - \left[\frac{r_c(\tilde{\theta} - \theta)}{a} \right]^2} d\theta \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{2b}{\theta_f - \theta_i} \frac{a\pi}{2r_c} = \frac{\pi b}{2} = \frac{\pi W_{AE}}{4} \quad (\text{C.9})$$

Assim, a razão entre a largura média, \overline{W}_{AE} , e a largura no centro da ArcEllipse, W_{AE} é $\overline{W}_{AE}/W_{AE} = \pi/4$. Enquanto isso, a mesma razão para o arco externo da SIS é $\overline{W}^{\text{ex}}/W_c^{\text{ex}} = \mathcal{E}(\phi_0, \text{csc}^2(\phi_0))/\phi_0$. E a diferença relativa entre os dois valores é

$$\Delta\left(\frac{\overline{W}}{W}\right)^{\text{ex}} = \frac{\overline{W}^{\text{ex}}/W_c^{\text{ex}} - \overline{W}_{AE}/W_{AE}}{\overline{W}_{AE}/W_{AE}} = \frac{4\mathcal{E}(\phi_0, \text{csc}^2(\phi_0))}{\pi\phi_0} - 1, \quad (\text{C.10})$$

e para o arco interno, cuja razão entre a largura média e a largura no centro do arco é $\overline{W}^{\text{in}}/W_c^{\text{in}} = [\mathcal{E}(\pi + \phi_0, \text{csc}^2(\phi_0)) - \mathcal{E}(\pi - \phi_0, \text{csc}^2(\phi_0))]/2\phi_0$

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\overline{W}}{W}\right)^{\text{in}} &= \frac{\overline{W}^{\text{in}}/W_c^{\text{in}} - \overline{W}_{AE}/W_{AE}}{\overline{W}_{AE}/W_{AE}} \\ &= \frac{2[\mathcal{E}(\pi + \phi_0, \text{csc}^2(\phi_0)) - \mathcal{E}(\pi - \phi_0, \text{csc}^2(\phi_0))]}{\pi\phi_0} - 1. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Podemos observar essa diferença relativa nas Figs. C.4 e C.5. Observe que a diferença relativa é sempre menor que 15% no intervalo inteiro, menor que 1% para arcos menos esticados e 5% para arcos próximos ao limite de formar anel de Einstein. Note também, que a razão $R_0/s = 1$ é o limite entre formação de duas imagens ou anel de Einstein. Para menor razão R_0/s a solução da SIS coincide com a ArcEllipse.

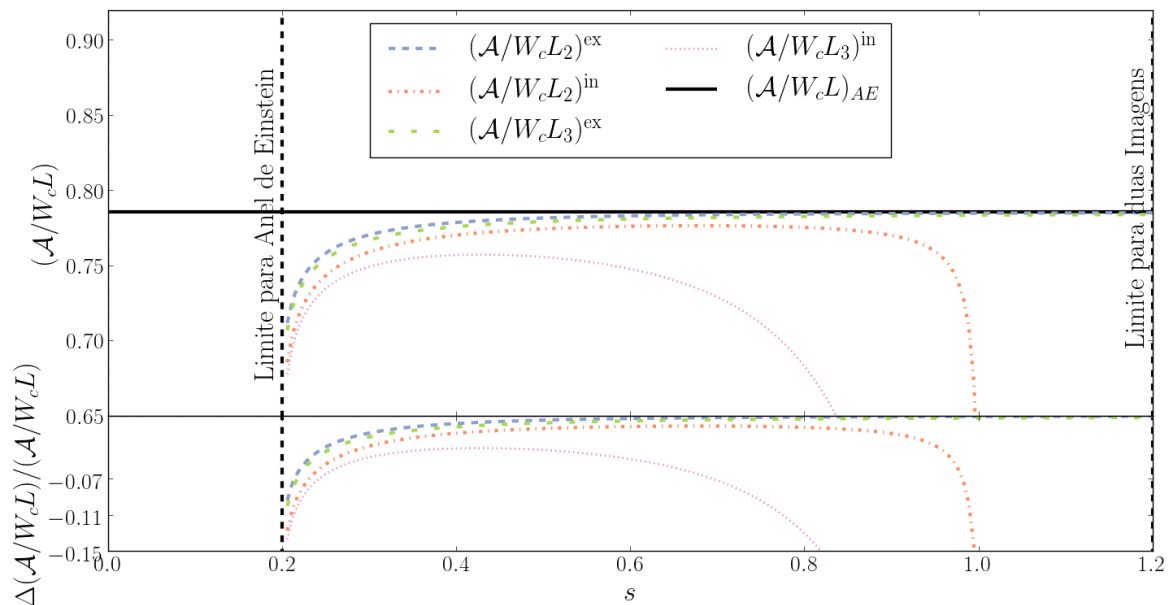


Figura C.2: Diferença relativa entre a razão \mathcal{A}/LW na ArcEllipse e na SIS para $R_0 = 0.2$.

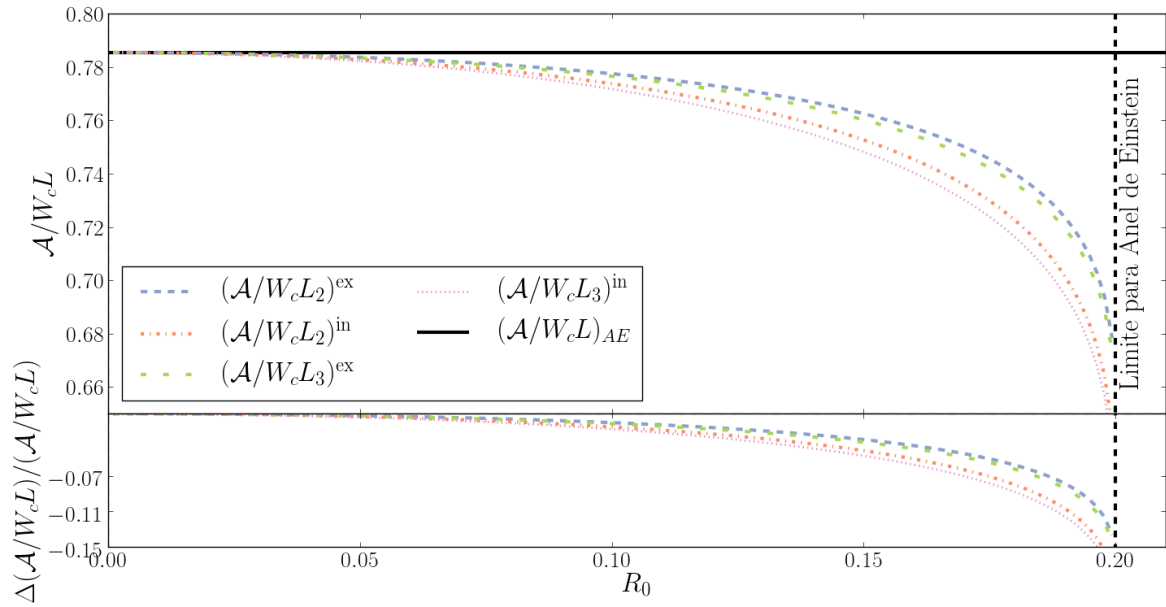


Figura C.3: Diferença relativa entre a razão \mathcal{A}/W na ArcEllipse e na SIS para $s = 0.2$.

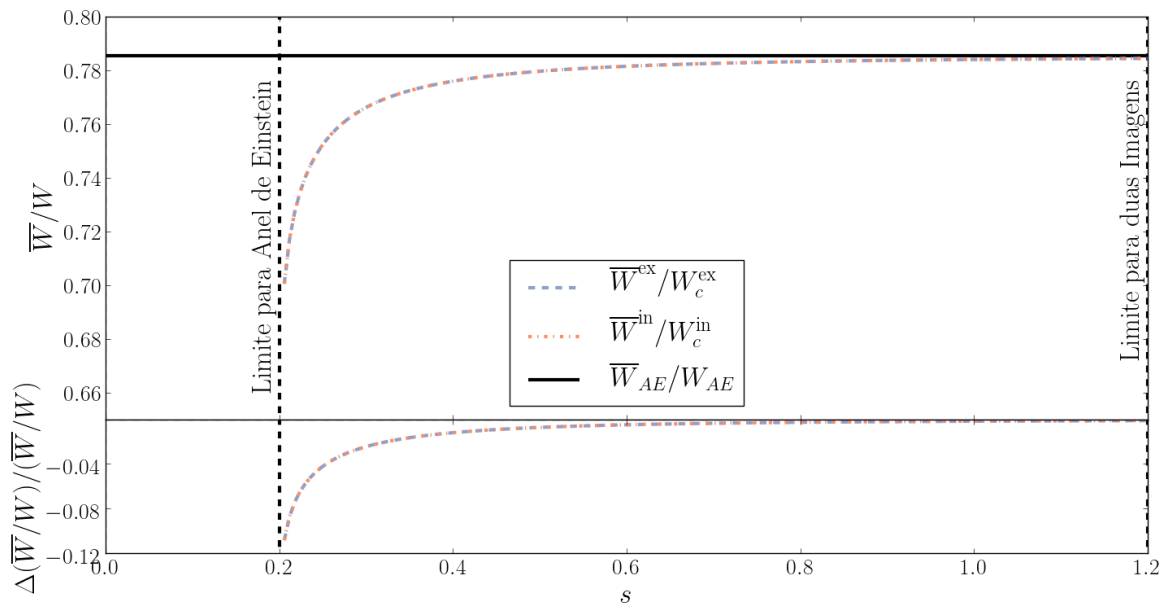


Figura C.4: Diferença relativa entre a razão \overline{W}/W_c na ArcEllipse e na SIS para $R_0 = 0.2$.

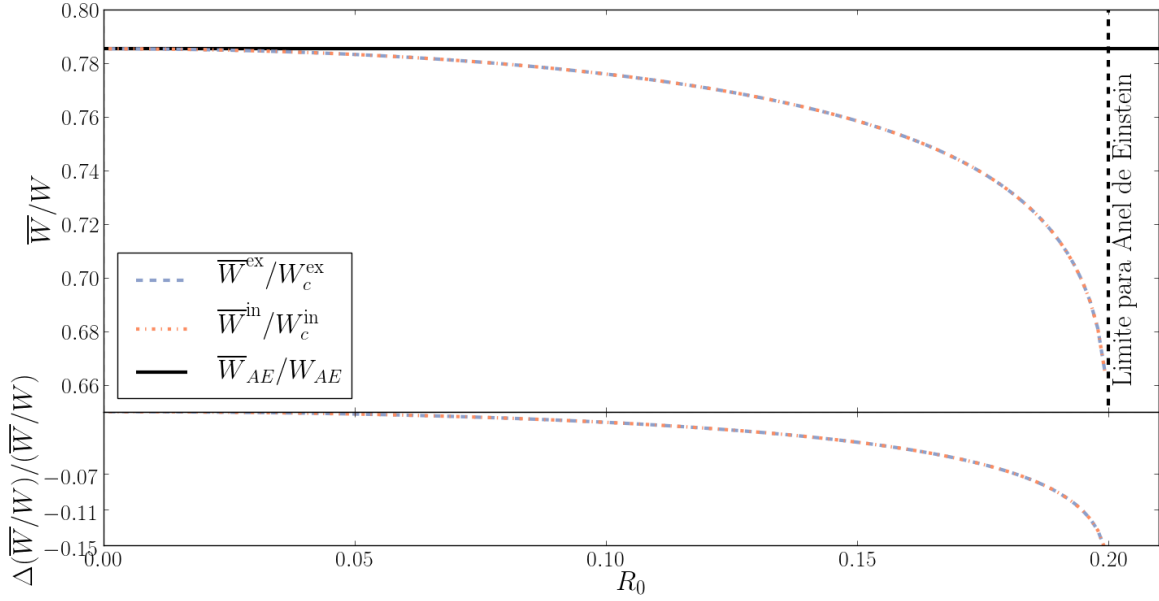


Figura C.5: Diferença relativa entre a razão \overline{W}/W_c na ArcEllipse e na SIS para $s = 0.2$.

Podemos comparar as imagens lenteadas pela SIS com a ArcEllipse e temos três situações distintas (como ilustrado na Fig. C.6), uma é para centro da ArcEllipse coincidindo com o centro do arco da SIS, a outra é para as extremidades de ambos os arcos coincidindo e a terceira é coincido os centros de curvatura das imagens. O primeiro caso ocorrerá para $r_c = \overline{x}_c = 1 + s$ e o segundo para $r_c = \overline{x}(\phi_f) = 1 + s \cos \phi_0$ e

$$\theta_f = \frac{a}{r_c} = \phi_0 \rightarrow a = r_c \phi_0. \quad (\text{C.12})$$

Para a terceira situação, o centro da ArcEllipse coincide com o centro de curvatura obtido para L_4 e podemos ver que os arcos são praticamente iguais. Para essa situação, o centro da ArcEllipse estará localizado em $r_c = \overline{x}_c - x_0 = 1 + s - x_0$. Para igualar os comprimento de ambos os arcos, $2a = 2r_c \theta_0$, com θ_0 dado pelas Eqs.(4.44) e (4.45) e ($r_c = r_0$). Assim, temos

$$a = r_c \arcsin\left(\frac{1 + s_1 \cos \phi_0}{r_c} \sin \phi_0\right), \quad (\text{C.13})$$

e mantemos $b = R_0$ para ter a mesma largura no arco e na ArcEllipse. Esse caso é representado no terceiro painel da Fig. C.6 e podemos considerar que a ArcEllipse é uma excelente representação dos arcos da SIS e realistas nesse sentido.

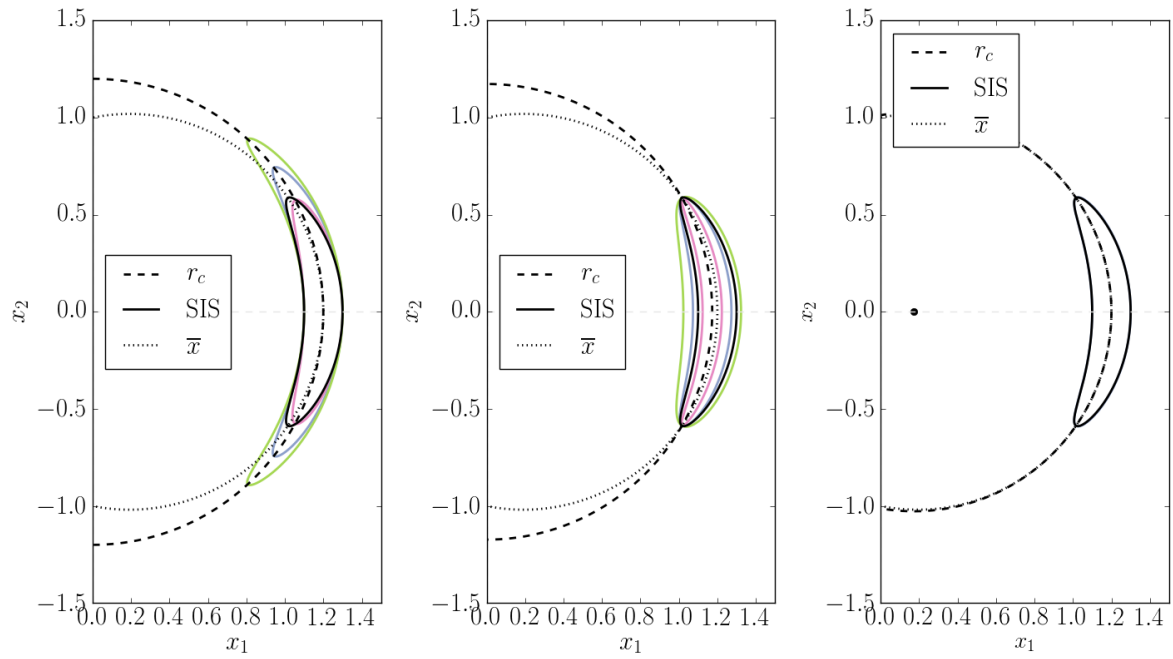


Figura C.6: Figura geométrica usando a ArcEllipse em comparação ao arco da SIS com parâmetros $R_0 = 0.1$ e $s = 0.2$. Os painéis à esquerda e ao centro possuem as representações para quando o centro ou extremidades dos arcos coincidem e no painel direito temos quando o centro da ArcEllipse é equivalente ao centro de curvatura do arco. Os parâmetros para a ArcEllipse são: Painel Esquerdo: $a = 0.6$ (magenta), 0.8 (azul), 1.0 (verde), $b = 0.1$ e $r_c = 1.2$; Painel Central: $a = 0.614$, $b = 0.05$ (magenta), 0.10 (azul), 0.15 (verde), e $r_c = 1.105$; Painel Direito: $a = 0.6243$, $b = 0.1$ e $r_c = 1.10272$.

Referências

- [1] F. De Paolis, M. Giordano, G. Ingrosso, *et al.*, “The Scales of Gravitational Lensing”, *Universe* 2 (2016) 6, [1604.06601](#).
- [2] P. Schneider, J. Ehlers e E. E. Falco, “Gravitational Lenses”, 1992.
- [3] S. Mollerach e E. Roulet, “Gravitational Lensing and Microlensing”, 2002.
- [4] A. O. Petters, H. Levine e J. Wambsganss, “Singularity theory and gravitational lensing”, 2001.
- [5] J. P. Kneib, Y. Mellier, B. Fort, *et al.*, “The Distribution of Dark Matter in Distant Cluster Lenses - Modelling A:370”, *A&A* 273 (1993) 367.
- [6] D. Coe, N. Benítez, T. Broadhurst, *et al.*, “A High-resolution Mass Map of Galaxy Cluster Substructure: LensPerfect Analysis of A1689”, *ApJ* 723 (2010) 1678–1702, [arXiv:1005.0398](#).
- [7] R. D. Blandford e R. Narayan, “Cosmological applications of gravitational lensing”, *ARA&A* 30 (1992) 311–358.
- [8] M. Hattori, J. Kneib e N. Makino, “Gravitational Lensing in Clusters of Galaxies”, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 133 (1999) 1–51, [astro-ph/9905009](#).
- [9] T. Treu, “Strong Lensing by Galaxies”, *ARA&A* 48 (2010) 87–125, [1003.5567](#).
- [10] J.-P. Kneib e P. Natarajan, “Cluster lenses”, *A&A Rev.* 19 (2011) 47, [arXiv:1202.0185](#).
- [11] F. Zwicky, “Nebulae as Gravitational Lenses”, *Physical Review* 51 (1937) 290–290.
- [12] F. Zwicky, “On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses”, *Physical Review* 51 (1937) 679–679.
- [13] T. Treu, G. Brammer, J. M. Diego, *et al.*, ““Refsdal” Meets Popper: Comparing Predictions of the Re-appearance of the Multiply Imaged Supernova Behind MACSJ1149.5+2223”, *ApJ* 817 (2016) 60, [1510.05750](#).
- [14] G. B. Caminha, W. Karman, P. Rosati, *et al.*, “Discovery of a faint, star-forming, multiply lensed, Lyman- α blob”, *A&A* 595 (2016) A100, [1512.05655](#).
- [15] Y. Shu, A. S. Bolton, L. A. Moustakas, *et al.*, “Kiloparsec Mass/Light Offsets in the Galaxy Pair-Ly α Emitter Lens System SDSS J1011+0143”, *ApJ* 820 (2016) 43, [1602.02927](#).
- [16] O. Wucknitz, A. D. Biggs e I. W. A. Browne, “Models for the lens and source of B0218+357: a LENCLEAN approach to determine H $_0$ ”, *MNRAS* 349 (2004) 14–30, [astro-ph/0312263](#).
- [17] S. H. Suyu, P. J. Marshall, M. W. Auger, *et al.*, “Dissecting the Gravitational lens B1608+656. II. Precision Measurements of the Hubble Constant, Spatial Curvature, and the Dark Energy Equation of State”, *ApJ* 711 (2010) 201–221, [arXiv:0910.2773](#).

- [18] G. B. Caminha, C. Grillo, P. Rosati, *et al.*, “CLASH-VLT: A highly precise strong lensing model of the galaxy cluster RXC J2248.7-4431 (Abell S1063) and prospects for cosmography”, *A&A* **587** (2016) A80, [1512.04555](#).
- [19] L. Pizzuti, B. Sartoris, S. Borgani, *et al.*, “CLASH-VLT: testing the nature of gravity with galaxy cluster mass profiles”, *J. Cosmology Astropart. Phys.* **4** (2016) 023, [1602.03385](#).
- [20] R. Li, C. S. Frenk, S. Cole, *et al.*, “Constraints on the identity of the dark matter from strong gravitational lenses”, *MNRAS* **460** (2016) 363–372, [1512.06507](#).
- [21] N. Menci, A. Merle, M. Totzauer, *et al.*, “Fundamental Physics with the Hubble Frontier Fields: Constraining Dark Matter Models with the Abundance of Extremely Faint and Distant Galaxies”, *ApJ* **836** (2017) 61, [1701.01339](#).
- [22] M. D. Gladders, H. Hoekstra, H. K. C. Yee, *et al.*, “The Incidence of Strong-Lensing Clusters in the Red-Sequence Cluster Survey”, *ApJ* **593** (2003) 48–55, [astro-ph/0303341](#).
- [23] M. B. Bayliss, “Broadband Photometry of 105 Giant Arcs: Redshift Constraints and Implications for Giant Arc Statistics”, *ApJ* **744** (2012) 156.
- [24] J. Estrada, J. Annis, H. T. Diehl, *et al.*, “A Systematic Search for High Surface Brightness Giant Arcs in a Sloan Digital Sky Survey Cluster Sample”, *ApJ* **660** (2007) 1176–1185, [astro-ph/0701383](#).
- [25] V. Belokurov, N. W. Evans, P. C. Hewett, *et al.*, “Two new large-separation gravitational lenses from SDSS”, *MNRAS* **392** (2009) 104–112, [0806.4188](#).
- [26] J. M. Kubo, S. S. Allam, E. Drabek, *et al.*, “The Sloan Bright Arcs Survey: Discovery of Seven New Strongly Lensed Galaxies from $z = 0.66$ - 2.94 ”, *ApJ* **724** (2010) L137–L142, [arXiv:1010.3037](#).
- [27] S. Alam, F. D. Albareti, C. Allende Prieto, *et al.*, “The Eleventh and Twelfth Data Releases of the Sloan Digital Sky Survey: Final Data from SDSS-III”, *ApJS* **219** (2015) 12, [arXiv:1501.00963](#).
- [28] J. M. Kubo e I. P. Dell’Antonio, “A method to search for strong galaxy-galaxy lenses in optical imaging surveys”, *MNRAS* **385** (2008) 918–928, [0712.3063](#).
- [29] R. A. Cabanac, C. Alard, M. Dantel-Fort, *et al.*, “The CFHTLS strong lensing legacy survey. I. Survey overview and T0002 release sample”, *A&A* **461** (2007) 813–821, [astro-ph/0610362](#).
- [30] A. More, R. Cabanac, S. More, *et al.*, “The CFHTLS-Strong Lensing Legacy Survey (SL2S): Investigating the Group-scale Lenses with the SARCS Sample”, *ApJ* **749** (2012) 38, [1109.1821](#).
- [31] M. Maturi, S. Mizera e G. Seidel, “Multi-colour detection of gravitational arcs”, *A&A* **567** (2014) A111, [1305.3608](#).
- [32] A. More, A. Verma, P. J. Marshall, *et al.*, “SPACE WARPS- II. New gravitational lens candidates from the CFHTLS discovered through citizen science”, *MNRAS* **455** (2016) 1191–1210, [1504.05587](#).
- [33] D. Paraficz, F. Courbin, A. Tramacere, *et al.*, “The PCA Lens-Finder: application to CFHTLS”, *A&A* **592** (2016) A75, [1605.04309](#).

- [34] B. Moraes, J.-P. Kneib, A. Leauthaud, *et al.*, “The CFHT/MegaCam Stripe-82 Survey”, in “Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series”, vol. 44 of *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, pp. 202–203. 2014.
- [35] B. Nord, E. Buckley-Geer, H. Lin, *et al.*, “Observation and Confirmation of Six Strong-lensing Systems in the Dark Energy Survey Science Verification Data”, *ApJ* **827** (2016) 51, [1512.03062](#).
- [36] C. E. Petrillo, C. Tortora, S. Chatterjee, *et al.*, “Finding Strong Gravitational Lenses in the Kilo Degree Survey with Convolutional Neural Networks”, *ArXiv e-prints*, 2017 [1702.07675](#).
- [37] J. P. Willis, P. C. Hewett, S. J. Warren, *et al.*, “The OLS-lens survey: the discovery of five new galaxy-galaxy strong lenses from the SDSS”, *MNRAS* **369** (2006) 1521–1528, [astro-ph/0603421](#).
- [38] C. Furlanetto, B. X. Santiago, M. Makler, *et al.*, “The SOAR Gravitational Arc Survey - I. Survey overview and photometric catalogues”, *MNRAS* **432** (2013) 73–88, [arXiv:1210.4136](#).
- [39] J. F. Hennawi, M. D. Gladders, M. Oguri, *et al.*, “A New Survey for Giant Arcs”, *AJ* **135** (2008) 664–681, [astro-ph/0610061](#).
- [40] W. Kausch, S. Schindler, T. Erben, *et al.*, “ARCRAIDER II: Arc search in a sample of non-Abell clusters”, *A&A* **513** (2010) A8, [1001.3521](#).
- [41] G. A. Luppino, I. M. Gioia, F. Hammer, *et al.*, “A search for gravitational lensing in 38 X-ray selected clusters of galaxies”, *A&AS* **136** (1999) 117–137, [astro-ph/9812355](#).
- [42] D. Zaritsky e A. H. Gonzalez, “On the Incidence of Strong Gravitational Lensing by Clusters in the Las Campanas Distant Cluster Survey”, *ApJ* **584** (2003) 691–701, [astro-ph/0210352](#).
- [43] D. W. Hogg, R. Blandford, T. Kundic, *et al.*, “A Candidate Gravitational Lens in the Hubble Deep Field”, *ApJ* **467** (1996) L73, [astro-ph/9604111](#).
- [44] K. U. Ratnatunga, R. E. Griffiths e E. J. Ostrander, “The Top 10 List of Gravitational Lens Candidates from the HUBBLE SPACE TELESCOPE Medium Deep Survey”, *AJ* **117** (1999) 2010–2023, [astro-ph/9902100](#).
- [45] C. D. Fassnacht, L. A. Moustakas, S. Casertano, *et al.*, “Strong Gravitational Lens Candidates in the GOODS ACS Fields”, *ApJ* **600** (2004) L155–L158, [astro-ph/0309060](#).
- [46] P. J. Marshall, D. W. Hogg, L. A. Moustakas, *et al.*, “Automated Detection of Galaxy-Scale Gravitational Lenses in High-Resolution Imaging Data”, *ApJ* **694** (2009) 924–942, [0805.1469](#).
- [47] C. Faure, J.-P. Kneib, G. Covone, *et al.*, “First Catalog of Strong Lens Candidates in the COSMOS Field”, *ApJS* **176** (2008) 19–38, [0802.2174](#).
- [48] C. Faure, J.-P. Kneib, G. Covone, *et al.*, “Erratum: “First Catalog of Strong Lens Candidates in the COSMOS Field” (*ApJS*, 176, 19 [2008])”, *ApJS* **178** (2008) 382–383.
- [49] N. Jackson, “Gravitational lenses and lens candidates identified from the COSMOS field”, *MNRAS* **389** (2008) 1311–1318, [0806.3693](#).

- [50] A. S. Bolton, S. Burles, L. V. E. Koopmans, *et al.*, “The Sloan Lens ACS Survey. I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Massive Early-Type Lens Galaxies”, *ApJ* **638** (2006) 703–724, [astro-ph/0511453](#).
- [51] J. R. Brownstein, A. S. Bolton, D. J. Schlegel, *et al.*, “The BOSS Emission-Line Lens Survey (BELLS). I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Lens Galaxies at Redshift ~ 0.5 ”, *ApJ* **744** (2012) 41, [arXiv:1112.3683](#).
- [52] A. Horesh, D. Maoz, H. Ebeling, *et al.*, “The lensing efficiencies of MACS X-ray-selected versus RCS optically selected galaxy clusters”, *MNRAS* **406** (2010) 1318–1336, [1004.2048](#).
- [53] D. J. Sand, T. Treu, R. S. Ellis, *et al.*, “A Systematic Search for Gravitationally Lensed Arcs in the Hubble Space Telescope WFPC2 Archive”, *ApJ* **627** (2005) 32–52, [astro-ph/0502528](#).
- [54] G. P. Smith, J.-P. Kneib, I. Smail, *et al.*, “A Hubble Space Telescope lensing survey of X-ray luminous galaxy clusters - IV. Mass, structure and thermodynamics of cluster cores at $z = 0.2$ ”, *MNRAS* **359** (2005) 417–446, [astro-ph/0403588](#).
- [55] B. Xu, M. Postman, M. Meneghetti, *et al.*, “The Detection and Statistics of Giant Arcs behind CLASH Clusters”, *ApJ* **817** (2016) 85, [1511.04002](#).
- [56] M. D. Gladders e H. K. C. Yee, “The Red-Sequence Cluster Survey. I. The Survey and Cluster Catalogs for Patches RCS 0926+37 and RCS 1327+29”, *ApJS* **157** (2005) 1–29, [astro-ph/0411075](#).
- [57] A. S. Bolton, S. Burles, L. V. E. Koopmans, *et al.*, “The Sloan Lens ACS Survey. V. The Full ACS Strong-Lens Sample”, *ApJ* **682** (2008) 964–984, [0805.1931](#).
- [58] J. T. A. de Jong, G. A. Verdoes Kleijn, D. R. Boxhoorn, *et al.*, “The first and second data releases of the Kilo-Degree Survey”, *A&A* **582** (2015) A62, [1507.00742](#).
- [59] Dark Energy Survey Collaboration, T. Abbott, F. B. Abdalla, *et al.*, “The Dark Energy Survey: more than dark energy - an overview”, *MNRAS* **460** (2016) 1270–1299, [1601.00329](#).
- [60] H. Aihara, R. Armstrong, S. Bickerton, *et al.*, “First Data Release of the Hyper Suprime-Cam Subaru Strategic Program”, *ArXiv e-prints*, 2017 [arXiv:1702.08449](#).
- [61] N. Benitez, R. Dupke, M. Moles, *et al.*, “J-PAS: The Javalambre-Physics of the Accelerated Universe Astrophysical Survey”, *ArXiv e-prints*, 2014 [arXiv:1403.5237](#).
- [62] LSST Science Collaboration, P. A. Abell, J. Allison, *et al.*, “LSST Science Book, Version 2.0”, *ArXiv e-prints*, 2009 [arXiv:0912.0201](#).
- [63] A. Refregier, A. Amara, T. D. Kitching, *et al.*, “Euclid Imaging Consortium Science Book”, *ArXiv e-prints*, 2010 [arXiv:1001.0061](#).
- [64] T. E. Collett, “The Population of Galaxy-Galaxy Strong Lenses in Forthcoming Optical Imaging Surveys”, *ApJ* **811** (2015) 20, [1507.02657](#).
- [65] J. Soldner, “Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht”, *Annalen der Physik* **370** (1921) 593–604.
- [66] S. L. Jaki, “Johann Georg von Soldner and the gravitational bending of light, with an English translation of his essay on it published in 1801”, *Foundations of Physics* **8** (1978) 927–950.

- [67] A. Einstein, “Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes”, *Annalen der Physik* **340** (1911) 898–908.
- [68] S. Paolantonio e E. R. Minitti, “Argentinean attempts to prove the Theory of Relativity”, *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina* **50** (2007) 359–362.
- [69] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik* **354** (1916) 769–822.
- [70] D. Kennefick, “Testing relativity from the 1919 eclipse, a question of bias”, *Physics Today* **62** (2009), no. 3, 37.
- [71] I. C. Moreira e A. A. P. Videira, “Einstein e o Brasil”, Editora UFRJ, 1995.
- [72] F. W. Dyson, A. S. Eddington e C. Davidson, “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **220** (1920) 291–333.
- [73] O. J. Lodge, “Gravitation and Light”, *Nature* **104** (1919) 354.
- [74] A. S. Eddington, “Space, time and gravitation. an outline of the general relativity theory”, 1920.
- [75] O. Chwolson, “Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne”, *Astronomische Nachrichten* **221** (1924) 329.
- [76] A. Einstein, “Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field”, *Science* **84** (1936) 506–507.
- [77] M. Schmidt, “3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift”, *Nature* **197** (1963) 1040.
- [78] J. M. Barnothy, “Quasars and the Gravitational Image Intensifier.”, *AJ* **70** (1965) 666.
- [79] S. Refsdal, “The gravitational lens effect”, *MNRAS* **128** (1964) 295.
- [80] S. Refsdal, “On the possibility of determining Hubble’s parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect”, *MNRAS* **128** (1964) 307.
- [81] S. Refsdal, “On the possibility of testing cosmological theories from the gravitational lens effect”, *MNRAS* **132** (1966) 101.
- [82] S. Refsdal, “On the possibility of determining the distances and masses of stars from the gravitational lens effect”, *MNRAS* **134** (1966) 315.
- [83] D. Walsh, R. F. Carswell e R. J. Weymann, “0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens”, *Nature* **279** (1979) 381–384.
- [84] R. Lynds e V. Petrosian, “Giant Luminous Arcs in Galaxy Clusters”, in “Bulletin of the American Astronomical Society”, vol. 18 of BAAS, p. 1014. 1986.
- [85] M. J. Irwin, R. L. Webster, P. C. Hewett, *et al.*, “Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event”, *AJ* **98** (1989) 1989–1994.
- [86] J. N. Hewitt, E. L. Turner, D. P. Schneider, *et al.*, “Unusual radio source MG1131+0456 - A possible Einstein ring”, *Nature* **333** (1988) 537–540.

- [87] I. A. Bond, A. Udalski, M. Jaroszyński, *et al.*, “OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A Planetary Microlensing Event”, *ApJ* **606** (2004) L155–L158, [astro-ph/0404309](#).
- [88] R. Gavazzi, T. Treu, L. V. E. Koopmans, *et al.*, “The Sloan Lens ACS Survey. VI. Discovery and Analysis of a Double Einstein Ring”, *ApJ* **677** (2008) 1046–1059, [0801.1555](#).
- [89] R. M. Quimby, M. Oguri, A. More, *et al.*, “Detection of the Gravitational Lens Magnifying a Type Ia Supernova”, *Science* **344** (2014) 396–399, [1404.6014](#).
- [90] P. L. Kelly, S. A. Rodney, T. Treu, *et al.*, “Multiple images of a highly magnified supernova formed by an early-type cluster galaxy lens”, *Science* **347** (2015) 1123–1126, [1411.6009](#).
- [91] A. Goobar, R. Amanullah, S. R. Kulkarni, *et al.*, “iPTF16geu: A multiply imaged, gravitationally lensed type Ia supernova”, *Science* **356** (2017) 291–295, [1611.00014](#).
- [92] K. C. Sahu, J. Anderson, S. Casertano, *et al.*, “Relativistic deflection of background starlight measures the mass of a nearby white dwarf star”, *Science* **356** (2017) 1046–1050, [arXiv:1706.02037](#).
- [93] B. Paczynski, “Gravitational microlensing by the galactic halo”, *ApJ* **304** (1986) 1–5.
- [94] G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, *et al.*, “A blue ring-like structure, in the center of the A 370 cluster of galaxies”, *A&A* **172** (1987) L14–L16.
- [95] D. P. Stark, A. M. Swinbank, R. S. Ellis, *et al.*, “The formation and assembly of a typical star-forming galaxy at redshift $z \sim 3$ ”, *Nature* **455** (2008) 775–777, [0810.1471](#).
- [96] T. A. Jones, A. M. Swinbank, R. S. Ellis, *et al.*, “Resolved spectroscopy of gravitationally lensed galaxies: recovering coherent velocity fields in subluminal $z \sim 2$ –3 galaxies”, *MNRAS* **404** (2010) 1247–1262, [0910.4488](#).
- [97] J. Richard, T. Jones, R. Ellis, *et al.*, “The emission line properties of gravitationally lensed $1.5 < z < 5$ galaxies”, *MNRAS* **413** (2011) 643–658, [1011.6413](#).
- [98] N. Leethochawalit, T. A. Jones, R. S. Ellis, D. P. Stark, J. Richard, A. Zitrin e M. Auger, “A Keck Adaptive Optics Survey of a Representative Sample of Gravitationally Lensed Star-forming Galaxies: High Spatial Resolution Studies of Kinematics and Metallicity Gradients”, *ApJ* **820** (2016) 84, [1509.01279](#).
- [99] P. L. Kelly, J. M. Diego, S. Rodney, *et al.*, “An individual star at redshift 1.5 extremely magnified by a galaxy-cluster lens”, *ArXiv e-prints*, 2017 [1706.10279](#).
- [100] J. Enander e E. Mörtzell, “Strong lensing constraints on bimetric massive gravity”, *Journal of High Energy Physics* **10** (2013) 31, [arXiv:1306.1086](#).
- [101] M. Meneghetti, K. Dolag, M. Bartelmann, *et al.*, “Arc Statistics with Numerical Models in Dark Energy Cosmologies”, in “Frontier in Astroparticle Physics and Cosmology”, K. Sato e S. Nagataki, eds., vol. 6, p. 225. 2004.
- [102] P. Natarajan, G. De Lucia e V. Springel, “Substructure in lensing clusters and simulations”, *MNRAS* **376** (2007) 180–192, [astro-ph/0604414](#).
- [103] E. R. Carrasco, P. L. Gomez, T. Verdugo, *et al.*, “Strong Gravitational Lensing by the Super-massive cD Galaxy in Abell 3827”, *ApJ* **715** (2010) L160–L164, [arXiv:1004.5410](#).

- [104] E. Zackrisson e T. Riehm, “Gravitational Lensing as a Probe of Cold Dark Matter Subhalos”, *Advances in Astronomy* **2010** (2010) 478910, [0905.4075](#).
- [105] C. Grillo, S. H. Suyu, P. Rosati, *et al.*, “CLASH-VLT: Insights on the Mass Substructures in the Frontier Fields Cluster MACS J0416.1-2403 through Accurate Strong Lens Modeling”, *ApJ* **800** (2015) 38, [1407.7866](#).
- [106] D. Xu, D. Sluse, L. Gao, *et al.*, “How well can cold dark matter substructures account for the observed radio flux-ratio anomalies”, *MNRAS* **447** (2015) 3189–3206, [1410.3282](#).
- [107] C. Alcock, C. W. Akerlof, R. A. Allsman, *et al.*, “Possible gravitational microlensing of a star in the Large Magellanic Cloud”, *Nature* **365** (1993) 621–623, [astro-ph/9309052](#).
- [108] A. Udalski, M. Szymanski, J. Kaluzny, *et al.*, “The optical gravitational lensing experiment. Discovery of the first candidate microlensing event in the direction of the Galactic Bulge”, *Acta Astron.* **43** (1993) 289–294.
- [109] C. Alcock, R. A. Allsman, D. Alves, *et al.*, “The MACHO Project Large Magellanic Cloud Microlensing Results from the First Two Years and the Nature of the Galactic Dark Halo”, *ApJ* **486** (1997) 697–726, [astro-ph/9606165](#).
- [110] P. Tisserand, L. Le Guillou, C. Afonso, *et al.*, “Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds”, *A&A* **469** (2007) 387–404, [astro-ph/0607207](#).
- [111] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, *et al.*, “Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation”, *ApJS* **192** (2011) 18, [arXiv:1001.4538](#).
- [112] K.-H. Hwang, C. Han, I. A. Bond, *et al.*, “Determining the Physical Lens Parameters of the Binary Gravitational Microlensing Event MOA-2009-BLG-016”, *ApJ* **717** (2010) 435–440, [arXiv:1006.1396](#).
- [113] V. Batista, S. Dong, A. Gould, *et al.*, “Mass measurement of a single unseen star and planetary detection efficiency for OGLE 2007-BLG-050”, *A&A* **508** (2009) 467–478, [arXiv:0907.3471](#).
- [114] N. Kains, D. M. Bramich, K. C. Sahu, *et al.*, “Searching for intermediate-mass black holes in globular clusters with gravitational microlensing”, *MNRAS* **460** (2016) 2025–2035, [1605.03580](#).
- [115] A. Cassan, J.-P. Beaulieu, P. Fouqué, *et al.*, “OGLE 2004-BLG-254: a K3 III Galactic bulge giant spatially resolved by a single microlens”, *A&A* **460** (2006) 277–288, [astro-ph/0609290](#).
- [116] C. Thurl, P. D. Sackett e P. H. Hauschildt, “Resolving stellar atmospheres. I. The H α line and comparisons to microlensing observations”, *A&A* **455** (2006) 315–324, [astro-ph/0604088](#).
- [117] M. Zub, A. Cassan, D. Heyrovský, *et al.*, “Limb-darkening measurements for a cool red giant in microlensing event OGLE 2004-BLG-482”, *A&A* **525** (2011) A15, [arXiv:0912.2312](#).
- [118] S. Kozłowski, P. R. Woźniak, S. Mao, *et al.*, “Mapping stellar kinematics across the Galactic bar: HST measurements of proper motions in 35 fields”, *MNRAS* **370** (2006) 435–443, [astro-ph/0604550](#).

- [119] K. Vieira, D. I. Casetti-Dinescu, R. A. Méndez, *et al.*, “Proper Motions in the Galactic Bulge: Plaut’s Window”, *AJ* **134** (2007) 1432, [0706.1975](#).
- [120] N. J. Rattenbury, S. Mao, V. P. Debattista, *et al.*, “Proper motion dispersions of red clump giants in the galactic bulge: observations and model comparisons”, *MNRAS* **378** (2007) 1165–1176, [0704.1619](#).
- [121] W. Clarkson, K. Sahu, J. Anderson, *et al.*, “Stellar Proper Motions in the Galactic Bulge from Deep Hubble Space Telescope ACS WFC Photometry”, *ApJ* **684** (2008) 1110–1142, [0809.1682](#).
- [122] Y. Wang, H. Zhao, S. Mao, *et al.*, “A new model for the Milky Way bar”, *MNRAS* **427** (2012) 1429–1440, [1209.0963](#).
- [123] A. Wood e S. Mao, “Optical depths and time-scale distributions in Galactic microlensing”, *MNRAS* **362** (2005) 945–951, [astro-ph/0507210](#).
- [124] Y.-H. Ryu, H.-Y. Chang, M.-G. Park, *et al.*, “Microlensing Optical Depth Revisited with Recent Star Counts”, *ApJ* **689** (2008) 1078–1083, [0808.2539](#).
- [125] E. Kerins, A. C. Robin e D. J. Marshall, “Synthetic microlensing maps of the Galactic bulge”, *MNRAS* **396** (2009) 1202–1210, [0805.4626](#).
- [126] S. Mao e B. Paczynski, “Gravitational microlensing by double stars and planetary systems”, *ApJ* **374** (1991) L37–L40.
- [127] A. Gould e A. Loeb, “Discovering planetary systems through gravitational microlenses”, *ApJ* **396** (1992) 104–114.
- [128] X. Dai e E. Guerras, “Probing Planets in Extragalactic Galaxies Using Quasar Microlensing”, *ApJ* **853** (2018) L27, [1802.00049](#).
- [129] S. Calchi Novati, D. Suzuki, A. Udalski, *et al.*, “Spitzer Microlensing Parallax for OGLE-2016-BLG-1067: a sub-Jupiter Orbiting an M-dwarf in the Disk”, *ArXiv e-prints*, 2018 [arXiv:1801.05806](#).
- [130] B. S. Gaudi, “Exoplanetary Microlensing”, *ArXiv e-prints*, 2010 [arXiv:1002.0332](#).
- [131] S. Mao, “Astrophysical applications of gravitational microlensing”, *Research in Astronomy and Astrophysics* **12** (2012) 947–972, [1207.3720](#).
- [132] A. M. Mosquera e C. S. Kochanek, “The Microlensing Properties of a Sample of 87 Lensed Quasars”, *ApJ* **738** (2011) 96, [arXiv:1104.2356](#).
- [133] J. Dexter e E. Agol, “Quasar Accretion Disks are Strongly Inhomogeneous”, *ApJ* **727** (2011) L24, [arXiv:1012.3169](#).
- [134] E. Mediavilla, J. A. Muñoz, C. S. Kochanek, *et al.*, “The Structure of the Accretion Disk in the Lensed Quasar SBS 0909+532”, *ApJ* **730** (2011) 16.
- [135] J. A. Blackburne e C. S. Kochanek, “The Effect of a Time-varying Accretion Disk Size on Quasar Microlensing Light Curves”, *ApJ* **718** (2010) 1079–1084, [arXiv:1002.3126](#).
- [136] N. F. Bate, D. J. E. Floyd, R. L. Webster, *et al.*, “A Microlensing Measurement of Dark Matter Fractions in Three Lensing Galaxies”, *ApJ* **731** (2011) 71, [1103.0353](#).
- [137] M. Bartelmann e P. Schneider, “Weak gravitational lensing”, *Phys. Rep.* **340** (2001) 291–472, [astro-ph/9912508](#).

- [138] J. A. Tyson, F. Valdes e R. A. Wenk, “Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments - Mapping dark matter in galaxy clusters”, *ApJ* **349** (1990) L1–L4.
- [139] D. J. Bacon, A. R. Refregier e R. S. Ellis, “Detection of weak gravitational lensing by large-scale structure”, *MNRAS* **318** (2000) 625–640, [astro-ph/0003008](#).
- [140] N. Kaiser, “A New Shear Estimator for Weak-Lensing Observations”, *ApJ* **537** (2000) 555–577, [astro-ph/9904003](#).
- [141] DES Collaboration, T. M. C. Abbott, F. B. Abdalla, *et al.*, “Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological Constraints from Galaxy Clustering and Weak Lensing”, *ArXiv e-prints*, 2017 [1708.01530](#).
- [142] S. Seitz e P. Schneider, “Cluster lens reconstruction using only observed local data: an improved finite-field inversion technique.”, *A&A* **305** (1996) 383, [astro-ph/9503096](#).
- [143] M. Lombardi e G. Bertin, “A fast direct method of mass reconstruction for gravitational lenses”, *A&A* **348** (1999) 38–42, [astro-ph/9906115](#).
- [144] P. Schneider, L. King e T. Erben, “Cluster mass profiles from weak lensing: constraints from shear and magnification information”, *A&A* **353** (2000) 41–56, [astro-ph/9907143](#).
- [145] P. J. Marshall, M. P. Hobson, S. F. Gull, *et al.*, “Maximum-entropy weak lens reconstruction: improved methods and application to data”, *MNRAS* **335** (2002) 1037–1048, [astro-ph/0112396](#).
- [146] J. Han, V. R. Eke, C. S. Frenk, *et al.*, “Galaxy And Mass Assembly (GAMA): the halo mass of galaxy groups from maximum-likelihood weak lensing”, *MNRAS* **446** (2015) 1356–1379, [1404.6828](#).
- [147] C. R. Contaldi, H. Hoekstra e A. Lewis, “Joint Cosmic Microwave Background and Weak Lensing Analysis: Constraints on Cosmological Parameters”, *Physical Review Letters* **90** (2003), no. 22, 221303, [astro-ph/0302435](#).
- [148] L. Hollenstein, D. Sapone, R. Crittenden, *et al.*, “Constraints on early dark energy from CMB lensing and weak lensing tomography”, *J. Cosmology Astropart. Phys.* **4** (2009) 012, [arXiv:0902.1494](#).
- [149] S. Chandrasekhar, “The mathematical theory of black holes”, 1983.
- [150] D. E. Holz e J. A. Wheeler, “Retro-MACHOs: π in the Sky?”, *ApJ* **578** (2002) 330–334, [astro-ph/0209039](#).
- [151] K. S. Virbhadra e G. F. R. Ellis, “Schwarzschild black hole lensing”, *Phys. Rev. D* **62** (2000), no. 8, 084003, [astro-ph/9904193](#).
- [152] F. De Paolis, A. Gerialico, G. Ingrosso, *et al.*, “The black hole at the galactic center as a possible retro-lens for the S2 orbiting star”, *A&A* **409** (2003) 809–812, [astro-ph/0307493](#).
- [153] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, *et al.*, “Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center”, *ApJ* **692** (2009) 1075–1109, [0810.4674](#).
- [154] V. I. Dokuchaev, “Spin and mass of the nearest supermassive black hole”, *General Relativity and Gravitation* **46** (2014) 1832, [arXiv:1306.2033](#).

- [155] A. F. Zakharov, A. A. Nucita, F. de Paolis, *et al.*, “Apoastron shift constraints on dark matter distribution at the Galactic Center”, *Phys. Rev. D* **76** (2007), no. 6, 062001, [0707.4423](#).
- [156] A. F. Zakharov, F. D. Paolis, G. Ingrosso, *et al.*, “Shadows as a tool to evaluate black hole parameters and a dimension of spacetime”, *New A Rev.* **56** (2012) 64–73.
- [157] H. Falcke e S. B. Markoff, “Toward the event horizon - the supermassive black hole in the Galactic Center”, *Classical and Quantum Gravity* **30** (2013), no. 24, 244003, [arXiv:1311.1841](#).
- [158] A. F. Zakharov, D. Borca, V. Borca Jovanović, *et al.*, “Constraints on R^n gravity from precession of orbits of S2-like stars: A case of a bulk distribution of mass”, *Advances in Space Research* **54** (2014) 1108–1112, [1407.0366](#).
- [159] A. Y. Bin-Nun, “Gravitational Lensing with a Large Deflection Angle as a Probe of General Relativity and the Galactic Center”, PhD thesis, 2010.
- [160] F. de Paolis, G. Ingrosso, A. A. Nucita, *et al.*, “Estimating the parameters of the Sgr A* black hole”, *General Relativity and Gravitation* **43** (2011) 977–988, [1011.1545](#).
- [161] V. Bozza, “Gravitational lensing in the strong field limit”, *Phys. Rev. D* **66** (2002), no. 10, 103001, [gr-qc/0208075](#).
- [162] J. Schwab, A. S. Bolton e S. A. Rappaport, “Galaxy-Scale Strong-Lensing Tests of Gravity and Geometric Cosmology: Constraints and Systematic Limitations”, *ApJ* **708** (2010) 750–757, [0907.4992](#).
- [163] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”, *A&A* **594** (2016) A13, [1502.01589](#).
- [164] S. Dodelson, “Modern cosmology”, 2003.
- [165] R. Narayan e M. Bartelmann, “Lectures on Gravitational Lensing”, *ArXiv Astrophysics e-prints*, 1996 [astro-ph/9606001](#).
- [166] S. Das e J. P. Ostriker, “Testing a New Analytic Model for Gravitational Lensing Probabilities”, *ApJ* **645** (2006) 1–16, [astro-ph/0512644](#).
- [167] G. B. Caminha, “Um Prelúdio para o Lenteamento Gravitacional Forte em Levantamentos de Grandes Áreas Gabriel Bartosch Caminha”, PhD thesis, 2013. http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/tese.2014_04_09_16_25_53.pdf.
- [168] H. S. Dúmet-Montoya, “Modelagens Semianalíticas para Arcos Gravitacionais: Seção de Choque e Método Perturbativo em Lentes Pseudoelípticas”, PhD thesis, 2011. http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/Tese_Habib-Dumet.2012_05_08_15_48_30.pdf.
- [169] C. Furlanetto, “Arcos gravitacionais em aglomerados de galáxias: detecção, caracterização e modelamento”, PhD thesis, 2012. <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/72088>.
- [170] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. M. White, “The Structure of Cold Dark Matter Halos”, *ApJ* **462** (1996) 563, [astro-ph/9508025](#).
- [171] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. M. White, “A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering”, *ApJ* **490** (1997) 493–508, [astro-ph/9611107](#).

- [172] M. Bartelmann, “Arcs from a universal dark-matter halo profile.”, *A&A* **313** (1996) 697–702, [astro-ph/9602053](#).
- [173] T. Schramm, “Realistic elliptical potential wells for gravitational lens models”, *A&A* **231** (1990) 19–24.
- [174] R. Barkana, “Fast Calculation of a Family of Elliptical Mass Gravitational Lens Models”, *ApJ* **502** (1998) 531–537, [astro-ph/9802002](#).
- [175] M. Oguri, J. Lee e Y. Suto, “Arc Statistics in Triaxial Dark Matter Halos: Testing the Collisionless Cold Dark Matter Paradigm”, *ApJ* **599** (2003) 7–23, [astro-ph/0306102](#).
- [176] A. V. Macciò, A. A. Dutton, F. C. van den Bosch, *et al.*, “Concentration, spin and shape of dark matter haloes: scatter and the dependence on mass and environment”, *MNRAS* **378** (2007) 55–71, [astro-ph/0608157](#).
- [177] C. R. Keeton, “A Catalog of Mass Models for Gravitational Lensing”, *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2001 [astro-ph/0102341](#).
- [178] G. B. Caminha, J. Estrada e M. Makler, “Magnification Bias in Gravitational Arc Statistics”, *ArXiv e-prints*, 2013 [arXiv:1308.6569](#).
- [179] G. Golse e J.-P. Kneib, “Pseudo elliptical lensing mass model: Application to the NFW mass distribution”, *A&A* **390** (2002) 821–827, [astro-ph/0112138](#).
- [180] H. S. Dúmet-Montoya, G. B. Caminha e M. Makler, “Domain of validity for pseudo-elliptical NFW lens models. Mass distribution, mapping to elliptical models, and arc cross section”, *A&A* **544** (2012) A83, [arXiv:1208.5682](#).
- [181] R. Gavazzi, T. Treu, J. D. Rhodes, *et al.*, “The Sloan Lens ACS Survey. IV. The Mass Density Profile of Early-Type Galaxies out to 100 Effective Radii”, *ApJ* **667** (2007) 176–190, [astro-ph/0701589](#).
- [182] A. S. Bolton, J. R. Brownstein, C. S. Kochanek, *et al.*, “The BOSS Emission-Line Lens Survey. II. Investigating Mass-density Profile Evolution in the SLACS+BELLS Strong Gravitational Lens Sample”, *ApJ* **757** (2012) 82, [1201.2988](#).
- [183] L. V. E. Koopmans, A. Bolton, T. Treu, *et al.*, “The Structure and Dynamics of Massive Early-Type Galaxies: On Homology, Isothermality, and Isotropy Inside One Effective Radius”, *ApJ* **703** (2009) L51–L54, [arXiv:0906.1349](#).
- [184] C. Grillo, “On the Average Density Profile of Dark-matter Halos in the Inner Regions of Massive Early-type Galaxies”, *ApJ* **747** (2012) L15, [arXiv:1202.3791](#).
- [185] K. M. Blundell, P. L. Schechter, N. D. Morgan, *et al.*, “A Doubled Double Hot Spot in J0816+5003 and the Logarithmic Slope of the Lensing Potential”, *ApJ* **723** (2010) 1319–1324, [1008.3273](#).
- [186] G. van de Ven, R. Mandelbaum e C. R. Keeton, “Galaxy density profiles and shapes - I. Simulation pipeline for lensing by realistic galaxy models”, *MNRAS* **398** (2009) 607–634, [0808.2493](#).
- [187] E. L. Turner, J. P. Ostriker e J. R. Gott, III, “The statistics of gravitational lenses - The distributions of image angular separations and lens redshifts”, *ApJ* **284** (1984) 1–22.
- [188] J. Binney e S. Tremaine, “Galactic dynamics”, 1987.
- [189] C. Alard, “Gravitational arcs as a perturbation of the perfect ring”, *MNRAS* **382** (2007) L58–L62, [0706.0215](#).

- [190] C. Alard, “Perturbative signature of substructures in strong gravitational lenses”, *MNRAS* **388** (2008) 375–383, [0803.2295](#).
- [191] C. Alard, “Perturbative reconstruction of a gravitational lens: when mass does not follow light”, *A&A* **506** (2009) 609–621, [0901.0344](#).
- [192] C. Alard, “Separating inner and outer contributions in gravitational lenses with the perturbative method”, *A&A* **513** (2010) A39, [0909.4468](#).
- [193] S. Peirani, C. Alard, C. Pichon, *et al.*, “Numerical investigation of lens models with substructures using the perturbative method”, *MNRAS* **390** (2008) 945–957, [0804.4277](#).
- [194] H. S. Dúmet-Montoya, G. B. Caminha, B. Moraes, *et al.*, “On the accuracy of the perturbative approach for strong lensing: local distortion for pseudo-elliptical models”, *MNRAS* **433** (2013) 2975–2985, [arXiv:1301.0060](#).
- [195] G. Dobler e C. R. Keeton, “Finite source effects in strong lensing: implications for the substructure mass scale”, *MNRAS* **365** (2006) 1243–1262, [astro-ph/0502436](#).
- [196] J. D. Lawrence, “A catalog of special plane curves”, Dover Publications, first edition ed., 1972.
- [197] C. Furlanetto, B. X. Santiago, M. Makler, *et al.*, “A simple prescription for simulating and characterizing gravitational arcs”, *A&A* **549** (2013) A80, [arXiv:1211.2771](#).
- [198] M. Meneghetti, P. Melchior, A. Grazian, *et al.*, “Realistic simulations of gravitational lensing by galaxy clusters: extracting arc parameters from mock DUNE images”, *A&A* **482** (2008) 403–418, [0711.3418](#).
- [199] C. R. Keeton, “Source Ellipticity and the Statistics of Lensed Arcs”, *ApJ* **562** (2001) 160–163, [astro-ph/0107342](#).
- [200] M. Lima, B. Jain, M. Devlin, *et al.*, “Submillimeter Galaxy Number Counts and Magnification by Galaxy Clusters”, *ApJ* **717** (2010) L31–L36, [1004.4889](#).
- [201] C. Fedeli, M. Meneghetti, M. Bartelmann, *et al.*, “A fast method for computing strong-lensing cross sections: application to merging clusters”, *A&A* **447** (2006) 419–430, [astro-ph/0507093](#).
- [202] E. Rozo, D. Nagai, C. Keeton, *et al.*, “The Impact of Baryonic Cooling on Giant Arc Abundances”, *ApJ* **687** (2008) 22–38, [astro-ph/0609621](#).
- [203] G. Dobler, C. R. Keeton, A. S. Bolton, *et al.*, “Lensing Probabilities for Spectroscopically Selected Galaxy-Galaxy Strong Lenses”, *ApJ* **685** (2008) 57–69, [0803.2234](#).
- [204] X.-P. Wu e F. Hammer, “Statistics of lensing by clusters of galaxies. I - Giant arcs”, *MNRAS* **262** (1993) 187–203.
- [205] M. Bartelmann e A. Weiss, “Arc statistics with realistic cluster potentials. 1: Method and first results”, *A&A* **287** (1994) 1–14, [astro-ph/9311074](#).
- [206] H. S. Dúmet-Montoya, G. B. Caminha e M. Makler, “Analytic solutions for Navarro-Frenk-White lens models in the strong lensing regime for low characteristic convergences”, *A&A* **560** (2013) A86, [1304.0425](#).
- [207] J. Wambsganss, P. Bode e J. P. Ostriker, “Giant Arc Statistics in Concord with a Concordance Lambda Cold Dark Matter Universe”, *ApJ* **606** (2004) L93–L96, [astro-ph/0306088](#).