



Bruno Fontes Souto

Configurações para um Arranjo de Telescópios Cherenkov por Otimização Evolutiva Multiobjetivo

Rio de Janeiro

2018



CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Coordenação de Física de Altas Energias

Bruno Fontes Souto

Configurações para um Arranjo de Telescópios Cherenkov por Otimização Evolutiva Multiobjetivo

Tese apresentada ao programa de pós-graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ulisses Barres de Almeida

Co-orientador Prof. Dr. Ronald Cintra Shellard

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Bruno Fontes Souto e orientada pelo Prof. Dr. Ulisses Barres de Almeida

Rio de Janeiro

2018

FICHA CATALOGRÁFICA.

FOLHA DE ASSINATURAS.

Resumo

Esta tese de doutorado diz respeito à otimização da performance de uma rede híbrida de telescópios Cherenkov atmosféricos em função das posições dos telescópios no arranjo. Há muitas configurações as quais as simulações de Monte Carlo completas não investiga. As ideias aqui apresentadas foram desenvolvidas a partir de um ponto de vista alternativo que considera um modelo e um algoritmo heurísticos. Nosso primeiro objetivo será apresentar um método e um conjunto de soluções para o problema de otimização de uma rede de poucos telescópios, que podem ser de diferentes tipos em um terreno que pode ter restrições. Inicialmente, as geometrias para os arranjos pequenos serão consideradas fixas e o modelo guiará a escolha da escala de separação entre os telescópios de acordo com os objetivos da otimização. Em seguida, o modelo será aplicado ao algoritmo, que investigará tanto a geometria quanto a escala de separação. Os métodos desenvolvidos também possuem aplicações em potencial para outros problemas de otimização no contexto da Astronomia Gama.

Palavras-chaves: Astronomia de Raios-Gama; Telescópios Cherenkov; Otimização Multiobjetivo Evolutiva; NSGA-III.

Abstract

This doctoral thesis is concerned with the performance optimization of a hybrid array of imaging atmospheric Cherenkov telescopes as a function of the positions of the telescopes on the ground. There are many configurations which standard full Monte Carlo simulations do not investigate. The ideas presented here were developed around an alternative way that employs a heuristic model and algorithm. Our first objective is to introduce a method and a set of solutions to the problem of optimizing an array of a few telescopes, which may be different, in a terrain that may have restrictions. Initially, the geometries for small arrays will be fixed and the model will point out the spacing among the telescopes according to the optimization objectives. Then, the model will be applied to the algorithm, which will search both the geometry and the spacing. The methods developed here may have potential applications in other optimization issues on Gamma Astronomy.

Keywords: Gamma-ray Astronomy; Imaging Atmospheric Cherenkov Telescopes; Many-objective Optimization; NSGA-III.

Lista de ilustrações	xii
Lista de tabelas	xxxi
1 Motivação e Organização deste Trabalho	1
2 O Universo em Raios Gama	4
2.1 Breve Motivação Científica	4
2.2 Detecção de Raios Gama	6
2.3 Contexto Histórico	8
2.4 CTA - <i>Cherenkov Telescope Array</i>	9
2.5 Estudos de Performance e Otimização de Arranjos	11
3 Detecção de Raios Gama com Telescópios Cherenkov Atmosféricos	16
3.1 Chuveiros Leptônicos	16
3.2 Radiação Cherenkov	23
3.3 Fundo Hadrônico	31
3.4 Técnica de Imageamento	33
3.5 Extração do Sinal: Estereoscopia	35
3.5.1 Critérios de <i>trigger</i>	37
3.5.2 Ângulo Zenital e Pâmetro de Impacto	37
3.5.3 Energia	40
3.5.4 Separação Gama/Hádrón	43

3.6	Baixas Energias	45
3.7	Sensibilidade	46
4	Modelo Heurístico Para um Arranjo de Telescópios Cherenkov	49
4.1	Curvas de Luz Cherenkov	50
4.2	Curvas de <i>Trigger</i>	57
4.3	Métrica para a Área Efetiva	70
4.4	Métrica para a Multiplicidade Média	74
4.5	Métrica para a Energia Mínima de Detecção	76
4.6	Métrica para a Resolução Angular	78
4.7	Métrica para a Resolução em Energia	86
4.8	Métrica para a Separação Gama/Hadron	93
4.9	Busca Sobre os Parâmetros dos Telescópios	94
4.9.1	Altitude de Observação	94
4.9.2	Tamanho do Pixel	95
4.10	Conclusão: Arranjos com Geometrias Fixas	96
5	Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo	100
5.1	Introdução	100
5.2	Operadores Genéticos	103
5.3	Representação Real	109
5.4	Solução de Pareto	113
5.5	Escalarização	115
5.6	Estimativa do Ponto Nadir	116
5.7	Otimização Multiobjetivo	118
5.8	Elitismo	119
5.9	NGSA-II	121
5.10	Problemas com Restrição	124
5.11	Problemas com Muitos Objetivos	125
5.12	NSGA-III	127

5.13	Redução de Objetivos	132
5.14	Sumário das Justificativas para a Escolha do Método	136
6	Configurações para os Arranjos	138
6.1	Implementação do Algoritmo	139
6.2	Área Efetiva e Multiplicidade Média	141
6.2.1	Otimização de um arranjo homogêneo para uma energia	141
6.2.1.1	Caso: 3 telescópios	142
6.2.1.2	Caso: 4 telescópios	142
6.2.1.3	Caso: 5 telescópios	144
6.2.1.4	Caso: 6 telescópios	146
6.2.2	Otimização com a Área Interna do Arranjo	148
6.2.2.1	Caso: 3 telescópios	148
6.2.2.2	Caso: 4 telescópios	149
6.2.2.3	Caso: 5 telescópios	151
6.2.2.4	Caso: 6 telescópios	153
6.2.3	Um Arranjo com 9 Telescópios	155
6.3	Otimização com as Métricas Completas	160
6.3.1	3 Telescópios	160
6.3.1.1	Caso I: Arranjos homogêneos - 1 TeV	160
6.3.1.2	Caso II: Arranjos homogêneos - 10 TeV	168
6.3.1.3	Caso III: Arranjos homogêneos - 1 TeV e 10 TeV	172
6.3.2	4 Telescópios	175
6.3.2.1	Resultados para 100 GeV	177
6.3.2.2	Conclusão	180
	Conclusões	183
	Referências	196

Apêndices	216
A Cálculo das Probabilidades	217

*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – O céu com as posições de fontes de raios gama detectadas. A versão regularmente atualizada desta Figura pode ser encontrada em (TEV CAT, 2017). Os AGNs são mostrados com um símbolo vermelho, os remanescentes de supernova são mostrados em verde, pulsares são mostradas em violeta, os sistemas binários em amarelo e em cinza são as fontes sem associação confiável com objetos conhecidos. 6
- Figura 2 – Ilustração do sítio sul do *Cherenkov Telescope Array*, mostrando os diferentes tamanhos dos telescópios utilizados. Serão construídos neste sítio 4 telescópios grandes, 25 telescópios médios e 70 pequenos (CTA, 2017). 10
- Figura 3 – Sensibilidade $E^2\phi$ de alguns experimentos em Astronomia Gama. Exigem-se pelo menos dez raios gama detectados por intervalo de energia e uma relação sinal/ruído de pelo menos 1/20. As curvas para o Fermi-LAT e o HAWC são dimensionadas por um fator 1,2 em relação às referências (ABEYSEKARA *et al.*, 2017; FermiLAT, 2017) para levar em consideração as diferentes binagens em energia. As curvas mostradas permitem apenas uma comparação aproximada da sensibilidade dos diferentes instrumentos, pois o método de cálculo e os critérios aplicados não são idênticos. As curvas são dadas em função da energia reconstruída. Adaptada de (CTA, 2017). 13
- Figura 4 – Geometrias de alguns experimentos com telescópios atmosféricos Cherenkov. A Figura também mostra o formato das câmeras utilizadas. Adaptada de (HINTON, 2009). 14
- Figura 5 – Modelo simplificado para um chuveiro eletromagnético, mostrando seus principais componentes e interações. Adaptada de (WAGNER, 2007). 17

Figura 6 – Relação entre a profundidade atmosférica medida a partir do topo da atmosfera e a altitude de observação.	19
Figura 7 – Número de elétrons e pósitrons do chuveiro leptônico em função da profundidade atmosférica em unidades de $x_0 = 36,6 \text{ g cm}^{-2}$ medida ao longo do eixo do chuveiro e da energia do primário, calculado a partir da equação 3.5. A localização do máximo do chuveiro é indicada em cada curva. Pela Figura 6, as posições dos máximos variam entre 6 e 11 km de altitude.	19
Figura 8 – Simetria do número de elétrons do chuveiro gama em função do parâmetro idade, calculado a partir da equação 3.5.	21
Figura 9 – Extensão lateral dos chuveiros leptônicos, calculado a partir da equação 3.8, em diferentes idades s . O número de partículas em uma dada profundidade atmosférica é dado por $\int_0^\infty 2\pi r f(r, t, E_0) dr$, em que r é a coordenada radial e R é o raio de Molière, definido na equação 3.9.	22
Figura 10 – Uma partícula com velocidade superior à da luz polariza o meio, gerando luz Cherenkov. À direita: uma representação de Huygens que mostra uma partícula carregada emitindo radiação Cherenkov em um cone com ângulo de abertura θ , se tiver velocidade maior que a da luz no meio. A Figura ilustra com apenas três pontos de emissão de radiação que a frente de onda da radiação Cherenkov é a intersecção das frentes de onda das ondas esféricas (não mostradas) emitidas em cada ponto da trajetória da partícula carregada. Adaptadas de (WAGNER, 2007; GRIEDER, 2010).	24
Figura 11 – Colimação da radiação Cherenkov emitida pelas partículas do chuveiro na atmosfera em um cone com abertura da ordem de 1° - calculada pela equação 3.15 - que aumenta pouco à medida que a altitude de emissão diminui.	25
Figura 12 – Posição de impacto do fóton Cherenkov no nível do mar e a 5000 m de altitude em função da altura de emissão, mostrando que há um excesso entre 100 m e 120 m ao nível do mar.	26
Figura 13 – Efeito geométrico que mostra uma coincidência das posições de impacto no nível do mar dos fótons Cherenkov emitidos pelo chuveiro a cerca de 120 m do eixo do chuveiro, formando o Anel Cherenkov. As linhas pontilhadas representam os raios de luz.	26
Figura 14 – Distribuição lateral de radiação Cherenkov para diferentes altitudes e energias em função do parâmetro de impacto do chuveiro. Adaptada de (HASSAN <i>et al.</i> , 2017).	27

Figura 15 – Espectro da radiação Cherenkov emitida na atmosfera em função do comprimento de onda para diferentes energias do primário gama. As linhas correspondem à altitude de 10 km (sem absorção) e os pontilhados à altitude de 2200 m (com absorção), mostrando um pico de emissão na frequência azul. Foram simulados chuveiros verticais. Adaptada de (WAGNER, 2007).	30
Figura 16 – Simulação da porcentagem da radiação Cherenkov transmitida por diferentes causas para chuveiros verticais na atmosfera tropical. Adaptada de (FRUCK, 2015; BERNLÖHR, 2000).	30
Figura 17 – Modelo simplificado para um chuveiro hadrônico, mostrando seus principais componentes e interações (WAGNER, 2007). Tendo a atmosfera cerca de 1000 g cm^{-2} e sendo o comprimento de interação das interações hadrônicas cerca de 120 g cm^{-2} , o número de interações n dos píons carregados até que seja mais provável seu decaimento deve ser menor que oito; de fato, para prótons com 10 TeV, $n = 2$ (MATTHEWS, 2005).	31
Figura 18 – Captação da luz Cherenkov e sua reflexão no espelho do telescópio, formando uma imagem na câmera. A Figura define parâmetro de impacto como a distância entre o centro do chuveiro projetado no solo e o telescópio. Adaptada de (MOYA, 2007).	34
Figura 19 – Alguns parâmetros propostos para descrever a imagem na câmera. A Figura enfatiza que os parâmetros são calculados a partir dos momentos da distribuição de fotoelétrons na câmera (ALBERT <i>et al.</i> , 2008c).	35
Figura 20 – Três telescópios - em um arranjo com quatro - observando um chuveiro a partir de diferentes projeções. Adaptada de (VÖLK; BERNLÖHR, 2009).	36
Figura 21 – A inteseccção - ponto em vermelho - de várias imagens em uma câmera possibilita a determinação da direção de chegada do raio gama primário (VÖLK; BERNLÖHR, 2009).	38
Figura 22 – O parâmetro Θ é a variação angular em relação à direção verdadeira da fonte, considerada como o centro da câmera (FRUCK, 2015). A Figura também define o parâmetro <i>Disp</i> como a distância angular do centroide de cada imagem em relação à direção reconstruída no plano da imagem, útil em análises estereoscópicas de chuveiros com inclinação $\geq 45^\circ$ (LESSARD <i>et al.</i> , 2001; KONOPELKO <i>et al.</i> , 1999a; KOSACK <i>et al.</i> , 2004; LU <i>et al.</i> , 2013; DOMINGO-SANTAMARIAA <i>et al.</i> , 2005).	39

Figura 23 – Exemplos de resolução angular para alguns arranjos de telescópios, mostrando sua ordem de grandeza e sua variação em função da energia reconstruída. Nesta Figura, a resolução angular é definida como o círculo em torno de uma fonte simulada que contém 68 % das direções de chegada reconstruídas. Adaptada de (CTA, 2017).	39
Figura 24 – Relação entre a energia do primário e a quantidade total de fótons Cherenkov gerados por primários gama (losangos) ou prótons (estrelas). As flutuações para chuveisos hadrônicos são maiores, mostrando, para uma dada quantidade de fótons, a faixa de energia dos chuveisos hadrônicos que se assemelham aos chuveisos eletromagnéticos. Adaptada de (CHITNIS; BHAT, 1998).	41
Figura 25 – Exemplos da resolução em energia para três arranjos de telescópios: a) CTA-Sul, b) MAGIC e c) H.E.S.S., mostrando sua ordem de grandeza e sua variação em função da energia. A resolução em energia é definida como a largura da distribuição $\Delta E = (E_{recon} - E_{real})/E_{real}$, formada pelo erro relativo entre as energias reconstruídas E_{recon} e as energias simuladas E_{real} de uma fonte, em função de a) E_{recon} e b) E_{real} . A largura é definida como a) a metade do intervalo em torno de zero que contém 68 % da distribuição, b) o desvio padrão de uma gaussiana ajustada à distribuição $\Delta E/E$ e c) a raiz do valor quadrático médio. Figuras adaptadas de (CTA, 2017; ALEKSIĆ <i>et al.</i> , 2016; NAUROIS; ROLLAND, 2009).	42
Figura 26 – Distribuições dos parâmetros <i>Lenght</i> , <i>Width</i> e <i>Alpha</i> para os chuveisos eletromagnéticos e hadrônicos simulados na faixa de energia 10 GeV - 30 TeV. A Figura também mostra as correlações de <i>Lenght</i> e <i>Width</i> com <i>Size</i> e <i>Distance</i> para chuveisos eletromagnéticos. Os dados que utilizamos para compor essa Figura são os mesmos de (BOCK <i>et al.</i> , 2004).	44
Figura 27 – Exemplos da forma da imagem na câmera obtida por a) um chuveiro eletromagnético, em forma de elipse apontando para o centro da câmera e b) um chuveiro hadrônico, com algum formato irregular. c) Imagem em forma de arco gerada por um múon local.	45
Figura 28 – Densidade de fótons Cherenkov por m ² calculada para chuveisos leptônicos de diferentes energias para observação na altitude de 2200 m em função da distância radial em relação ao eixo do chuveiro. A absorção atmosférica não foi considerada. Cada ponto da Figura corresponde à média sobre M chuveisos simulados com difentes pontos de primeira interação. As linhas no gráfico correspondem aos ajustes dos pontos.	52

Figura 29 – Os parâmetros de ajuste das curvas da Figura 28 variam fracamente em função da energia. O ajuste utilizado foi $y = Ae^{B(x-x_0)}\mathcal{H}(x_0-x) + A(x/x_0)^k\mathcal{H}(x-x_0)$, em que y é a densidade de fótons, x é o parâmetro de impacto do chuvaeiro, \mathcal{H} é a função de Heaviside e x_0 é o raio do Anel Cherenkov. As linhas na Figura guiam a leitura dos pontos.	54
Figura 30 – Flutuação na densidade de fótons Cherenkov da Figura 28 calculada pela razão entre o desvio padrão e a média. Os pontos no gráfico correspondem aos resultados da simulação, e as linhas correspondem aos ajustes realizados com polinômios.	55
Figura 31 – Distribuição lateral dos fótons Cherenkov calculada para um chuvaeiro leptônico vertical de 1 TeV observado a uma altitude de 2200 m.	55
Figura 32 – Comparação da distribuição lateral média de radiação Cherenkov para chuvaeiros de 1 TeV no nível de observação de 5000 m e ao nível do mar.	56
Figura 33 – Comparação das flutuações da distribuição lateral média de radiação Cherenkov para chuvaeiros de 1 TeV no nível de observação de 5000 m e ao nível do mar.	57
Figura 34 – Probabilidade de detecção de um chuvaeiro eletromagnético de 1 TeV por telescópios de diferentes tamanhos em função do parâmetro de impacto do chuvaeiro. Os telescópios utilizados possuem espelhos com diâmetros iguais a 5, 10 e 20 m e o único critério de <i>trigger</i> utilizado foi a exigência de um número mínimo de fotoelétrons na câmera. As linhas mostram os ajustes.	59
Figura 35 – A Figura mostra os parâmetros do ajuste pela função logística $y = [1 + Ae^{(x-B)/C}]/[1 + De^{(x-B)/C}]$ das curvas de <i>trigger</i> do telescópio grande (com diâmetro ~ 20 m) em função da energia.	59
Figura 36 – Geometria que mostra o mapeamento na câmera do detector dos fótons Cherenkov emitidos em diferentes alturas durante o desenvolvimento do chuvaeiro. À direita: o mesmo chuvaeiro visto em uma projeção perpendicular. A Figura foi adaptada de (BERGE, 2006).	61

Figura 37 – <i>Esquerda</i> : Ilustração da imagem na câmara mostrando a correspondência com os pontos do chuvaeiro da Figura 36. À extremidade da elipse ajustada na câmara mais próxima da direção da fonte (ponto B) correspondem as emissões de fótons Cherenkov em menores profundidades atmosféricas. Isso ocorre porque como as partículas carregadas do chuvaeiro possuem velocidade maior que a da luz na atmosfera, os fótons emitidos em menores profundidades atmosféricas chegam mais tarde ao detector. Figura adaptada de (BERGE, 2006). <i>Direita</i> : exemplo típico de imagem formada na câmara, mostrando os pixels acionados e o ajuste por elipse que aponta para o centro da câmara.	62
Figura 38 – Posição angular do parâmetro <i>Distance</i> na câmara do telescópio médio em função do parâmetro de impacto de chuvaeiros com diferentes energias. Nessa Figura, não é mostrado o efeito do campo de visão limitado da câmara. Cada ponto representa a mediana da distribuição exponencial dos valores de <i>Distance</i> gerada por chuvaeiros com diferentes pontos de primeira interação. As barras de erro foram calculadas pelo desvio em relação à mediana. As linhas são ajustes por retas.	63
Figura 39 – Parâmetro <i>Lenght</i> em função do parâmetro de impacto e energia do chuvaeiro para o telescópio médio. Nessa Figura, não é mostrado o efeito do campo de visão limitado da câmara.	64
Figura 40 – Histograma normalizado sobre diferentes chuvaeiros dos centroides na câmara do telescópio médio com parâmetro de impacto igual a 150 m. A Figura mostra a forma da distribuição dos dados da Figura 38 para o caso particular do parâmetro de impacto igual a 150 m.	64
Figura 41 – Parâmetro <i>Lenght</i> visto pelos telescópios devido ao campo de visão finito da câmara. Os valores de <i>Lenght</i> utilizados em cada ponto na Figura são as medianas das distribuições de <i>Lenght</i> obtidas variando a posição da primeira interação do chuvaeiro.	66
Figura 42 – Probabilidade de detecção por telescópios pequenos (com diâmetro ~ 5 m) em função do parâmetro de impacto do chuvaeiro, exigindo-se as duas condições de <i>trigger</i>	67
Figura 43 – Probabilidade de detecção por telescópios médios (com diâmetro ~ 10 m) em função do parâmetro de impacto do chuvaeiro, exigindo-se apenas a primeira condição de <i>trigger</i>	68

Figura 44 – Probabilidade de detecção por telescópios médios (com diâmetro ~ 10 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se as duas condições de <i>trigger</i> . Para aumentar a distância máxima onde detecção é possível, é necessário aumentar o campo de visão do telescópio ou exigir um número menor de fotoelétrons no primeiro critério de <i>trigger</i> - seção 4.2.	68
Figura 45 – Probabilidade de detecção por telescópios grandes (com diâmetro ~ 20 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se as duas condições de <i>trigger</i>	69
Figura 46 – Área efetiva pós- <i>trigger</i> na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de <i>trigger</i> , m , igual a 3. O caso $l = 5^*$ corresponde a um quadrado com um quinto telescópio situado no centro do quadrado.	72
Figura 47 – Área efetiva pós- <i>trigger</i> na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com diferentes multiplicidade de <i>trigger</i> m	72
Figura 48 – Probabilidade em cada ponto do plano de observação para telescópios médios observarem eventos com energia de 1 TeV. As colunas correspondem aos casos ($l = 5^*, m = 3$) e ($l = 5^*, m = 4$). As linhas representam três casos para os valores do lado do quadrado onde os telescópios estão inseridos: 200 m, 600 m e 800 m. Em vermelho destacam-se as posições dos telescópios.	73
Figura 49 – Multiplicidade média em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV.	75
Figura 50 – Área efetiva em função da energia para arranjos quadriculares com lado do quadrado igual a 100 m para diferentes tipos de telescópios calculada pela equação 4.7. As linhas correspondem ao ajuste.	77
Figura 51 – Taxa de detecção de arranjos quadriculares com lado do quadrado igual a 100 m e diferentes tipos de telescópios, obtida pela equação 4.9. O pico das curvas define a energia mínima de detecção.	77
Figura 52 – Energia mínima de detecção em função da geometria para telescópios grandes posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de <i>trigger</i> igual a 3.	78

Figura 53 – <i>Topo</i> : Valores de $P_i\Theta_i$ na região de observação de três telescópios, com Θ_i dado pela equação 4.10 e P_i sendo a probabilidade de detecção em um elemento de área i . Foram utilizados telescópios médios com espaçamentos de 100 m e 300 m, observando eventos de 1 TeV. Em vermelho, as posições dos telescópios. <i>Meio</i> : Idem, porém Θ_i é apenas seno do ângulo estéreo, sem os pesos devido aos parâmetros <i>Length</i> e <i>Size</i> . <i>Embaixo</i> : Valores de Θ_i na região de observação, sem considerar a probabilidade de detecção P_i nem os pesos devido aos parâmetros <i>Length</i> e <i>Size</i>	80
Figura 54 – <i>Topo</i> : Valores de $P_i\Theta_i$ na região de observação de três telescópios, com Θ_i dado pela equação 4.10 e P_i sendo a probabilidade de detecção em um elemento de área i . Foram utilizados telescópios médios com espaçamentos de 450 m e 600 m, observando eventos de 1 TeV. Em vermelho, as posições dos telescópios. <i>Meio</i> : Idem, porém Θ_i é apenas seno do ângulo estéreo, sem os pesos devido aos parâmetros <i>Length</i> e <i>Size</i> . <i>Embaixo</i> : Valores de Θ_i na região de observação, sem considerar a probabilidade de detecção P_i nem os pesos devido aos parâmetros <i>Length</i> e <i>Size</i>	81
Figura 55 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para telescópios médios posicionados nos vértices de diferentes polígonos regulares, observando eventos de 1 TeV.	82
Figura 56 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 - sem considerar os pesos devido aos parâmetros <i>Size</i> e <i>Length</i> - para telescópios médios posicionados nos vértices de diferentes polígonos regulares, observando eventos de 1 TeV.	82
Figura 57 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para as regiões interna ou externa de arranjos triangulares ou quadrulares para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV.	85
Figura 58 – Área efetiva calculada pela equação 4.7 para as regiões interna e externa de arranjos triangulares ou quadrulares para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV.	85
Figura 59 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para os três tipos de telescópios no arranjo ($l = 4, m = 3$) com espaçamentos entre os telescópios que maximizam Θ . Em cada ponto, é mostrado o valor do espaçamento que otimiza $\langle \Theta \rangle$ e também o intervalo em que o espaçamento pode variar mantendo $\langle \Theta \rangle$ maior que 85 % do seu valor ótimo. As linhas na Figura guiam a leitura dos pontos.	86

Figura 60 – Valores da flutuação média em energia calculada a partir da equação 4.12 em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV.	88
Figura 61 – Valores da flutuação média em energia para as regiões interna e externa de arranjos triangulares para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV. A partir de 600 m, não há detecção na area externa.	88
Figura 62 – <i>Primeira coluna:</i> valores da probabilidade de detecção P_i/A_{ef} na região de observação de arranjos triangulares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV. <i>Segunda coluna:</i> valor médio da flutuação de luz Cherenkov, L_i , nas posições onde o arranjo detecta eventos. <i>Terceira coluna:</i> Valor de P_iL_i/A_{ef} na região de observação.	90
Figura 63 – <i>Primeira coluna:</i> valores da probabilidade de detecção P_i/A_{ef} na região de observação de arranjos triangulares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV. <i>Segunda coluna:</i> valor médio da flutuação de luz Cherenkov, L_i , nas posições onde o arranjo detecta eventos. <i>Terceira coluna:</i> Valor de P_iL_i/A_{ef} na região de observação, obtida pelo produto em cada elemento de área dos valores dados nas duas primeiras colunas.	91
Figura 64 – Flutuação média calculada pela equação 4.12 nas altitudes de 5000 m e 2200 m, com e sem um corte dos eventos com parâmetro de impacto menor que 60 m. Foram utilizados arranjos triangulares regulares, com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	92
Figura 65 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	97
Figura 66 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.	97
Figura 67 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.	98

Figura 68 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos em formato de losango com diferentes valores para o lado do losango e dois ângulos de abertura: 90° (linhas) e 60° (pontilhados). Foram utilizados telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.	99
Figura 69 – a) Dados dois candidatos à solução do problema, pelo operador de recombinação, dois outros candidatos são gerados a partir de um ponto de corte. b) A mutação atua em apenas um indivíduo e, trocando seus alelos, forma uma nova solução. Adaptada de (SUDHOFF, 2017).	106
Figura 70 – A Figura ilustra a forma de alguns esquemas para uma população representada por quatro dígitos binários no intervalo $[0, 15]$. O eixo vertical representa a probabilidade de ocorrência de cada número em um dado esquema. Os esquemas $[01 **]$ ou $[1 * 10]$ não se propagarão durante as gerações do nosso exemplo, porque eles representam conjuntos de números com uma periodicidade. O esquema $[** *0]$ certamente se difundirá com o passar das gerações porque ele indica que a solução pertence ao intervalo $[0, 7]$	108
Figura 71 – Distribuição de probabilidade para as variáveis x_1 e x_2 geradas a partir do Recombinação Binária Simulada em um exemplo unidimensional, em que as variáveis 2 e 5 participam da recombinação. As distribuições possuem picos nas duas variáveis que participaram da recombinação e na Figura o intervalo permitido para as novas soluções geradas é $[1, 6]$. Aumentar o parâmetro n_c torna as distribuições mais estreitas. Isso permite uma busca mais localizada no espaço de variáveis do problema, o que é mais relevante nas gerações finais do algoritmo e também nos problemas com muitos objetivos (seção 5.11).	111
Figura 72 – Variável x' gerada a partir da Mutação Polinomial atuando em uma solução $x = 0$ no intervalo $[-1, 1]$ para diferentes valores do índice n_m . Para $n_m = 1$, a distribuição de probabilidade pela mutação é uniforme. A distribuição se torna mais estreita à medida que o valor de n_m aumenta, até o limite $n_m \rightarrow \infty$, quando a distribuição se torna um Delta de Dirac de modo que $x' = x$, situação equivalente a não haver mutação.	112

Figura 73 – Exemplo de teste de dominância para um problema com dois objetivos em que se deseja minimizar f_1 e f_2 simultaneamente. Entre apenas as soluções 4 e 5 não há relação de dominância, porque cada uma é melhor em um objetivo diferente. Porém, ambas são dominadas pela solução 1. A solução 2 domina a solução 5 e não domina a solução 4. As soluções 3, 4 e 5 não dominam nenhuma outra. As soluções 1, 2 e 3 são não dominadas.	114
Figura 74 – Correspondência entre o espaço das variáveis e o espaço de objetivos, mostrando a representação gráfica da fronteira de Pareto. Figura adaptada de (DEB, 2001).	114
Figura 75 – Os pontos ideal e nadir (DUTTA <i>et al.</i> , 2017).	118
Figura 76 – Partição do espaço de objetivos pela relação de não dominância em um problema bi-dimensional de minimização dos dois objetivos (SUDHOFF, 2017).	121
Figura 77 – Exemplo da métrica distância de multidão aqui definida no espaço de objetivos para o caso de minimização bidimensional. A metade do perímetro do quadrilátero normalizado formado pelas soluções da mesma frente vizinhas à solução i mede a densidade de soluções associada à solução i . Figura adaptada de (SUDHOFF, 2017).	123
Figura 78 – Representação das etapas do algoritmo NSGA-II. A população descendente Q_t é gerada a partir de P_t pelos operadores de seleção, recombinação e mutação. Usando a classificação em níveis de não dominação, as soluções são ordenadas em $R = P \cup Q$, formando frentes de não dominação F_1, F_2, \dots . Quando a última frente for admitida, seja F_3 na Figura, uma estratégia de nicho é utilizada para selecionar quais soluções dessa última frente serão acomodadas. Adaptada de (DEB, 2007).	123
Figura 79 – A Figura mostra com três frentes de não dominação a diferença entre a diversidade sobre uma frente e a diversidade lateral no espaço de soluções. Adaptada de (SUDHOFF, 2017).	124
Figura 80 – O espaço de objetivos do problema de otimização 5.18 está contido no ortante não negativo de R^M , em que M é o número de objetivos do problema. Para uma dada solução z , outra solução ou domina z , ou é dominada por z , ou ambas são não dominadas entre si. A Figura mostra pelos casos $M = 2$ e $M = 3$ que a fração de regiões não comparáveis em relação a uma dada solução z diminui em função do número de objetivos de acordo com $(2^M - 2)/2^M$. Adaptada de (JAIMES, 2011).	125

Figura 81 – Fração de soluções não dominadas em função do número de objetivos para populações com 100 ou 1000 indivíduos. As linhas guiam a leitura dos pontos.	126
Figura 82 – a) Exemplo dos pontos de referência gerados pelo algoritmo NSGA-III em um problema com a) dois ou b) três objetivos já normalizados e com a) quatro ou b) dez espaçamentos entre os pontos.	129
Figura 83 – a) Exemplo de como podemos montar a matriz que representa os pontos de referência para o caso de $M = 3$ objetivos e $p = 3$ espaçamentos usando as matrizes do caso $M = 2$. b) Solução do caso ($M = 4, p = 3$) usando recursivamente as matrizes para três objetivos. Cada matriz contém H linhas e M colunas representando as coordenadas nas direções dos eixos f_1, f_2, \dots , que representam os objetivos. Os pontos de referência correspondem às linhas das matrizes divididas por p	130
Figura 84 – A Figura compara os mecanismos de seleção da última frente não dominada no caso dos algoritmos NSGA-II (<i>Esquerda</i>) e NSGA-III (<i>Direita</i>) em um exemplo bidimensional em que se supõe escolher quatro indivíduos entre seis da última frente não dominada F_l . Os pontos marcados pelo disco preto são os indivíduos selecionados em cada caso. No NSGA-II, o perímetro do quadrilátero formado pelas soluções adjacentes é mostrado para uma das soluções. No NSGA-III uma direção de referência é associada a cada ponto de referência como a reta que passa pela origem do espaço de soluções - que representa a solução ideal - e o ponto de referência. A distância entre uma solução qualquer $f(x)$ e uma direção de referência λ é dada por $\ f(x) - \lambda\ / \ \lambda\ $. A Figura também mostra as duas distâncias relevantes no algoritmo NSGA-III: a distância d_1 com relação às direções de referência e a distância d_2 com relação ao ponto ideal.	131
Figura 85 – Fluxograma do método EliteNSGA-III.	132
Figura 86 – Exemplo de situação em que a retirada um objetivo não altera as relações de dominância em um conjunto de soluções $\{x_1, x_2, x_3\}$. Na Figura, a retirada de f_2 é possível.	133
Figura 87 – Exemplo onde a retirada dos objetivo $\{f_1, f_2\}$ não alteram as relações de dominância a menos de um erro $\delta = 0,25$ nas relações de dominância. Figura adaptada de (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009).	135

Figura 88 – a) Uma reta em dez dimensões, usando o "Gráfico com Coordenadas Paralelas". Cada dimensão representa uma função objetivo. Os cruzamento entre as retas na Figura indicam conflito de objetivos. b) A mesma reta em três dimensões, preservando as relações de não dominância entre as seis soluções x encontradas nesse exemplo.	136
Figura 89 – <i>Esquerda</i> : Probabilidade de detecção P_i em cada ponto i de um arranjo formado por três telescópios médios localizados na mesma posição observando eventos de 1 TeV. <i>Direita</i> : Probabilidade de detecção para os mesmos três telescópios na configuração de um triângulo equilátero com lado igual a 300 m.	143
Figura 90 – Área efetiva em função do número de gerações do algoritmo para 3 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram como o valor máximo, a média e o valor mínimo da população evoluíram ao longo de 50 gerações. As linhas guiam a leitura dos pontos.	143
Figura 91 – Métricas em função do número de gerações para 4 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para toda a população. A geometria correspondente são os quatro telescópios em posições próximas, tendendo ao mesmo ponto.	144
Figura 92 – Área efetiva e multiplicidade média em função do número de gerações para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para toda a população.	145
Figura 93 – Fronteira de Pareto obtida para a área efetiva e multiplicidade média para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias correspondentes a cada ponto são mostradas na Figura 94.	145
Figura 94 – As geometrias típicas classificadas de A até D para as soluções da fronteira de Pareto da Figura 93. A numeração dos arranjos corresponde à escolha de um representante de cada classificação e a numeração é correspondente àquela dada na Figura 93.	146
Figura 95 – Área efetiva e multiplicidade média para seis telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para a fronteira de Pareto. As geometrias correspondentes são dadas na Figura 96.	147
Figura 96 – As geometrias para as soluções numeradas da Figura 95 formam subgrupos com três telescópios cada. As geometrias dos outros pontos da fronteira de Pareto diferem pelo espaçamento entre os dois subgrupos	147

Figura 97 – Probabilidade de detecção em cada ponto do arranjo ótimo encontrado pelo algoritmo. <i>Esquerda:</i> Probabilidade de detecção na área total, interna e externa ao arranjo. <i>Direita:</i> Probabilidade de detecção apenas na área interna.	148
Figura 98 – Área efetiva e multiplicidade média para arranjos com quatro telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os quadrados da Figura mostram a fronteira de Pareto com os valores ótimos para a área interna de observação. A Figura também mostra a área efetiva total - ou seja, considerando também a área externa de observação - e a multiplicidade média total calculadas correspondentes aos arranjos obtidos na fronteira de Pareto.	150
Figura 99 – <i>Esquerda:</i> Superposição de todas as geometrias encontradas para a fronteira de Pareto do problema com quatro telescópios médios observando eventos de 1 TeV em que foram otimizadas a área efetiva interna de observação e a multiplicidade. <i>Direita:</i> Espaçamentos entre pares de telescópios vizinhos, desconsiderando as diagonais dos losangos.	150
Figura 100 – Probabilidade de detecção em cada ponto do arranjo “1” marcado na Figura 98. <i>Esquerda:</i> Probabilidade de detecção na área total, interna e externa ao arranjo. <i>Direita:</i> Probabilidade de detecção apenas na área interna.	151
Figura 101 – Fronteira de Pareto para a área efetiva interna e multiplicidade média para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias semelhantes foram agrupadas por letras e mostradas na Figura 102. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto.	152
Figura 102 – As quatro geometrias típicas para cinco telescópios, mostrando em particular as nove soluções numeradas da Figura 101.	152
Figura 103 – Conclusão do caso de cinco telescópios, mostrando uma geometria intermediária entre o pentágono e o arranjo formado por duas linhas paralelas.	153
Figura 104 – Fronteira de Pareto para a área efetiva interna e multiplicidade média para 6 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias semelhantes foram agrupadas por letras e mostradas na Figura 105. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto.	154
Figura 105 – Geometrias para as soluções marcadas com as letras na Figura 104.	154
Figura 106 – Conclusão do caso de seis telescópios, mostrando uma geometria composta por dois triângulos.	155

Figura 107–Fronteira de Pareto para a energia de 1 TeV no caso de um arranjo com nove telescópios médios. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto. A Figura 108 mostra em detalhe as áreas totais.	156
Figura 108–Área efetiva total e multiplicidade para as geometrias da Figura 107.	156
Figura 109–Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.	157
Figura 110–Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.	158
Figura 111–Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.	159
Figura 112–As duas tendências encontradas para os arranjos com nove telescópios.	159
Figura 113–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	161
Figura 114–Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	161
Figura 115–Os seis arranjos com maior área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 114.	162
Figura 116–Os seis arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 114.	162
Figura 117–Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 114.	163
Figura 118–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV.	165
Figura 119–Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV.	165
Figura 120–Os seis arranjos com maior área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 119.	166
Figura 121–Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 119.	166
Figura 122–Os três arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 119.	167

Figura 123–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV; apenas as métricas A_{ef} e $\langle \Theta \rangle$ foram utilizadas.	167
Figura 124–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV; apenas as métricas A_{ef} e $\langle L \rangle$ foram utilizadas.	168
Figura 125–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.	169
Figura 126–Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.	170
Figura 127–Os seis arranjos com maior valor para a área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 126.	170
Figura 128–Os seis arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 126.	171
Figura 129–Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 126.	171
Figura 130–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV e 10 TeV simultaneamente.	173
Figura 131–Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV e 10 TeV simultaneamente.	173
Figura 132–Alguns arranjos da fronteira de Pareto da Figura 131.	174
Figura 133–Alguns arranjos da fronteira de Pareto da Figura 131.	174
Figura 134–Arranjo para o CTA-Norte. Os círculos indicam os telescópios grandes e os quadrados indicam os telescópios médios. Adaptada de (MAIER <i>et al.</i> , 2017).	175
Figura 135–Área efetiva em função da energia para o CTA-Norte antes de qualquer corte na direção do evento e após os cortes de separação gama/hádrón. Adaptada de (CTA, 2017).	176
Figura 136–Probabilidade P_i de detecção em cada ponto dos subarranjos a nível de <i>trigger</i> . Os pontos vermelhos indicam as posições dos telescópios. <i>Esquerda</i> : Área efetiva para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. O resultado é $1,64 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ <i>Direita</i> : Área efetiva para quinze telescópios médios observando eventos de 1 TeV. O resultado é $1,22 \cdot 10^6 \text{ m}^2$	176

Figura 137–Número reduzido de soluções para a fronteira de Pareto em função de um erro percentual ε nas relações de ε -Dominância.	178
Figura 138–Fronteira de Pareto para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. A métrica $\langle L \rangle$ é minimizada e as outras são maximizadas. O arranjo “5” é a solução mais próxima do ponto ideal no espaço tridimensional normalizado. O ponto Q_{100} correspondente aos quatro telescópios dispostos em um quadrado de lado 100 m.	179
Figura 139–Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. As funções objetivo foram normalizadas de acordo com a equação 5.13. A métrica $\langle L \rangle$ foi minimizada, representando menor flutuação na quantidade de fótons Cherenkov, enquanto as outras foram maximizadas.	180
Figura 140–Arranjos da fronteira de Pareto de acordo com a numeração das Figuras 138 e 139.	181
Figura 141–Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos com diferentes espaçamentos. As geometrias comparadas são triângulos com um telescópio no centro - resultado do algoritmo evolutivo -, e losangos com diferentes valores para o ângulo de abertura: 90° (linhas) e 60° (pontilhados). Foram utilizados telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.	182
Figura 142– <i>Esquerda</i> : Dados três telescópios $\{a, b, c\}$, a Figura mostra que o espaço amostral constitui oito possibilidades, considerando a não detecção. Pela condição de <i>trigger</i> duplo, o chuveiro é detectado apenas nas quatro possibilidades representadas em azul, cuja área representa a probabilidade dada pela equação A.1. Descontamos a intersecção tripla duas vezes, porque ela está incluída nas três intersecções duplas. <i>Direita</i> : Caso de quatro telescópios $\{a, b, c, d\}$ e multiplicidade igual a dois. Os pontos pretos (discos) representam a área correspondente à probabilidade $P_a P_b$. Os outros pontos correspondem às outras probabilidades do tipo $P_i P_j$ para todas as combinações possíveis de dois telescópios i e j . O diagrama mostra que as regiões que correspondem às intersecções entre três telescópios foram incluídas três vezes cada. Logo, devemos ter $\kappa_1 = -2$. Pela Figura, a região de intersecção entre os quatro telescópios foi incluída seis vezes. Mas foi removida oito vezes pelas intersecções triplas (não mostradas na Figura). Portanto, com $\kappa_2 = 3$ ela é incluída apenas uma vez.	218
Figura 143–As primeiras colunas do triângulo de Pascal.	219

Figura 144–Três telescópios, marcados nas posições $\{P_1, P_2, P_3\}$. A equação A.12 fornece um teste para verificar se um ponto P_0 está dentro ou fora do triângulo.	221
Figura 145–Distribuição dos valores de $P_i\Theta_i$ da equação 4.11 para arranjos a) triangulares e b) quadriculares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	224
Figura 146–Distribuição dos valores de P_iL_i da equação 4.12 para arranjos triangulares e quadriculares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.	225
Figura 147–Distribuição dos valores de $P_i\Theta_i$ da equação 4.11 para arranjos a) triangulares e b) quadriculares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.	226
Figura 148–Distribuição dos valores de P_iL_i da equação 4.12 para arranjos triangulares e quadriculares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.	227
Figura 149–Área efetiva pós- <i>trigger</i> na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de <i>trigger</i> , m , igual a 3. O caso $l = 5*$ corresponde a um quadrado com um quinto telescópio situado no centro do quadrado. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.	228
Figura 150–Valores da flutuação média em energia calculada a partir da equação 4.12 em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.	229

*

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Resumo das características dos telescópios utilizados no CTA, atualizadas até 12/2018 (CTA, 2017). 12
- Tabela 2 – Parâmetros dos telescópios. Os números após as barras representam as características do último telescópio construído. Para os telescópios HESS, o último telescópio construído é localizado no centro do arranjo. Um dos telescópios MAGIC possui 397 *pixels* pequenos (de $0,1^\circ$) na região hexagonal central e 180 *pixels* maiores nas bordas (de $0,2^\circ$). O outro telescópio MAGIC possui 1039 *pixels* idênticos (de $0,1^\circ$) (HINTON, 2009; COLIN *et al.*, 2009). 14
- Tabela 3 – Quatro torneios entre as soluções da população inicial $\{5, 8, 10, 14\}$ geram os quatro indivíduos que participarão da próxima etapa do algoritmo. Cada torneio é realizado entre dois indivíduos escolhidos aleatoriamente da população e uma comparação da função *fitness* - $f(x) = x^2$ - é realizada entre eles. Os indivíduos selecionados formaram nesse exemplo o conjunto $\{5, 8, 5, 10\}$ 105
- Tabela 4 – O operador de seleção atuou anteriormente na população inicial e escolheu em quais indivíduos do conjunto $\{5, 8, 5, 10\}$ atuará a recombinação. Nesse exemplo, foi utilizada a recombinação com um ponto de corte. Cada atuação do operador de recombinação gera dois indivíduos para a geração seguinte do algoritmo. Portanto, foram necessárias apenas duas atuações da recombinação, porque a população tem tamanho igual a quatro. A posição dos pontos de corte é aleatória e na Tabela é representada por uma barra “|” entre os dígitos binários. . 107

Tabela 5 – Parâmetros do algoritmo em cada um dos I-V casos. É indicado o número de telescópios utilizado, seu tipo e a energia para qual o arranjo foi otimizado. Também é mostrado o número p de espaçamentos entre os pontos de referência no espaço de objetivos e o tamanho da população, junto com o número de indivíduos que terminaram o algoritmo como distintos e não dominados. A dimensão do espaço de soluções também é indicada. 160

*

CAPÍTULO 1

MOTIVAÇÃO E ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO

O estudo dos raios gama que chegam à Terra nos permite obter informações sobre as suas fontes no Universo. Ao atingirem a atmosfera terrestre, os raios gama podem criar um par elétron-pósitron e dar origem a uma cascata de partículas que se propagam em direção ao solo em um fenômeno conhecido como chuva atmosférica. Com a detecção de uma amostra das partículas do chuva, a energia e a direção de chegada do raio gama primário podem ser reconstruídas. Dessa maneira na década de 1980 a primeira fonte de raios gama foi descoberta pelo telescópio Whipple ao coletar a radiação Cherenkov emitida pelos chuvas. Desde então, mais de uma centena de outras fontes têm sido descobertas através da utilização de redes de telescópios Cherenkov atmosféricos e do emprego da técnica de análise chamada de Imageamento. Em fase de construção hoje, o Cherenkov Telescope Array (CTA) será uma rede com cerca de cem telescópios, distribuídos em dois sítios em ambos os hemisférios.

Determinar as posições dos telescópios no plano de observação é um problema de otimização que consiste em maximizar a performance do observatório principalmente segundo os vínculos científicos, além do custo, tecnologia e sítio disponíveis. As variáveis são os parâmetros geométricos do arranjo, isto é, as posições relativas entre os telescópios distribuídos no plano de observação, bem como os tipos dos telescópios e as quantidades de cada um. A otimização pode incluir também as propriedades eletrônicas e ópticas dos telescópios, como o tamanho do espelho, o campo de visão, a eficiência das fotomultiplicadoras e o tamanho do pixel.

Otimizar a performance de um observatório significa aumentar a taxa de detecção de eventos e melhorar a habilidade em discernir os chuvas eletromagnéticos dos hadrônicos, bem como a reconstrução das propriedades do raio gama primário: sua energia e direção de chegada. Na realidade, esses objetivos dependem dos vínculos científicos: para as maiores energias, o fluxo de raios

gama é menor, de modo que é prioridade aumentar a taxa de detecção em detrimento da qualidade da reconstrução. Por outro lado, para a observação de fontes extensas, é prioridade aumentar a resolução angular de modo que as características espaciais da fonte possam ser obtidas. Além disso, no caso de fontes cujo espectro tenha um corte, a resolução em energia é o objetivo principal. Fato é que esses objetivos em geral são conflitantes entre si. Ou seja, é possível não haver solução única que otimize todos simultaneamente. A melhoria de um objetivo pode levar à piora de outro.

Para o problema de otimização, não há solução analítica, logo utilizam-se simulações de Monte Carlo para reproduzir o desenvolvimento do chuveiro na atmosfera e a detecção da radiação pelo sistema de telescópios. Dependendo da quantidade de telescópios utilizados e da energia dos raios gama, essas simulações podem demorar meses, o que restringe as configurações testadas àquelas, em geral, com maior simetria ou mais intuitivas.

A estratégia adotada aqui consiste em traduzir em um modelo heurístico como os objetivos da otimização (área efetiva, resolução angular, resolução em energia etc) dependem da geometria do arranjo de telescópios e programar um algoritmo que busque soluções que se aproximem da configuração ótima procurada. A existência de objetivos conflitantes nos motiva a empregar técnicas de otimização evolutivas. A ideia é ter um algoritmo eficiente e de fácil implementação que gere soluções boas na maior parte do tempo. A proposta do algoritmo não é substituir as simulações de Monte Carlo, mas auxiliá-las. De modo mais geral, pode-se utilizá-lo para fazer um refinamento heurístico, ou seja, uma correção, em um espaço amostral menor, de resultados simétricos já disponíveis por Monte Carlo. A vantagem do modelo heurístico é gerar menor custo computacional durante cada iteração do algoritmo.

Os métodos tradicionais de otimização multiobjetivo reduzem o conjunto de funções objetivo a uma função simples a qual pondera cada objetivo de acordo com pesos inseridos *a priori*. No entanto, a maior dificuldade desses métodos é que não geram uma diversidade de soluções tão abrangente quanto as técnicas evolutivas. Entre as vantagens das técnicas multiobjetivo evolutivas, citamos: a manipulação de um conjunto de soluções a cada iteração do algoritmo; a não dependência de hipóteses sobre o espaço de busca, como convexidade ou existência de derivadas; a flexibilidade para tratar possíveis alterações na formulação do problema e a aptidão para tratar espaços de busca e de objetivos multidimensionais.

O Brasil é um dos trinta e um países que participam do Consórcio do CTA, que é associado a mais de duzentos institutos e nele colaboram mais de mil membros. Esta tese contribui com um novo ponto de vista para o problema das posições dos telescópios e compõe uma linha de investigação local, ainda não oficial da Colaboração CTA.

Este trabalho foi dividido em duas partes. A primeira se refere ao tratamento de arranjos com geometrias escolhidas *a priori*. A segunda parte trata de utilizar um algoritmo para que a

própria geometria do arranjo seja encontrada.

Nosso primeiro objetivo será apresentar um método e um conjunto de soluções para o problema de otimização de uma rede de telescópios, que podem ser de tipos diferentes. As geometrias encontradas posteriormente poderão ser comparadas com as simulações detalhadas, e portanto mais lentas, do arranjo para refinar os resultados.

Estrutura dos Capítulos

No capítulo 2, comentamos o potencial científico da Astronomia Gama, inserindo o Observatório *Cherenkov Telescope Array* no contexto histórico da área.

No capítulo 3, abordamos as características principais dos chuveiros eletromagnéticos detectados no contexto da Astronomia Gama e as propriedades da radiação Cherenkov por eles gerada na atmosfera.

No capítulo 4, serão concebidas funções - ou métricas - que traduzem os principais objetivos de uma rede de telescópios Cherenkov atmosféricos e que serão posteriormente implementadas no algoritmo de otimização, visando buscar soluções para o problema do arranjo de telescópios.

No capítulo 5, apresentamos e justificamos o método que será utilizado para otimizar as métricas apresentadas no capítulo 4.

No capítulo 6, implementamos as métricas no algoritmo de otimização e analisamos os resultados obtidos para arranjos com diferentes tipos de telescópios observando eventos de diferentes energias.

No último capítulo, comentamos o trabalho, realizamos um sumário dos resultados obtidos e sugerimos trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

O UNIVERSO EM RAIOS GAMA

Neste capítulo, discutiremos algumas motivações astrofísicas para a observação de raios gama com energia muito alta ($> \text{GeV}$), que forma a base para o tema desenvolvido nesta tese. Em seguida, exploramos os meios pelos quais esses raios gama podem ser detectados. É dada uma breve cronologia dos principais fatos que permitiram o progresso nessa área. Introduzimos o observatório *Cherenkov Telescope Array* (CTA), que está em fase de construção e será o maior observatório de raios gama do mundo. Por fim, comentamos a maneira como têm sido realizados os estudos de otimização de um arranjo de telescópios Cherenkov atmosféricos.

2.1 Breve Motivação Científica

Raios gama de energia muito alta são tão energéticos que não são produzidos termicamente, mas são gerados pela interação de partículas com matéria e campos eletromagnéticos. Através de sua observação, podemos apontar suas fontes, porque sendo partículas neutras, não são defletidas pelos campos magnéticos. Os raios gama são muito importantes para estudar suas fontes, que funcionam como laboratórios que não podem ser recriados na Terra devido aos altos processos energéticos (ALOISIO *et al.*, 2018; AHARONIAN, 2004).

Descrevemos a seguir alguns processos que geram raios gama e, em seguida, algumas de suas fontes.

O Efeito Compton Inverso é a interação entre elétrons ou prótons relativísticos com fótons de baixa energia. Assim, há transferência da energia da partícula carregada para o fóton (LONGAIR, 2011).

A Radiação Síncrotron ocorre quando uma partícula carregada se move em um campo mag-

nético, de modo que a partícula gira em torno das linhas do campo. O espectro geralmente é composto de radiação desde o rádio até raios X. Entretanto, os raios cósmicos de energia muito alta também podem produzir raios gama. Esse tipo de emissão é importante para fontes como pulsares com fortes campos magnéticos (DEGRANGE; FONTAINE, 2015).

Bremsstrahlung ocorre pela interação de uma partícula carregada em movimento com um campo elétrico. Consiste na desaceleração das partículas e no desvio de sua trajetória. Este processo é normalmente responsável pela emissão de raios-X no disco de acreção de um núcleo ativo de galáxia e pode produzir raios gama com energia até cerca de 100 MeV. A importância desta interação depende principalmente da densidade do meio (LONGAIR, 2011).

Píons neutros podem ser gerados pelas colisões entre prótons e núcleos energéticos. Eles decaem em fótons e assim constituem uma origem hadrônica para raios gama (AARTSEN *et al.*, 2013).

A maior parte da absorção de raios gama ocorre pela criação de pares devido à luz extragaláctica de fundo (EBL), que é capaz de absorver os fótons durante sua propagação (MAZIN *et al.*, 2013).

Existem diferentes objetos no Universo capazes de produzir raios gama. Dependendo do seu tipo, pode haver um processo de emissão dominante. A Figura 1 mostra a distribuição no céu de todas as fontes detectadas até agora no regime de energia muito alta.

No caso de fontes galácticas, a absorção devido à interação com a EBL é insignificante, ao contrário do caso de fontes extragalácticas. Isto significa que fontes galácticas podem ser detectadas em energias mais altas que as extragalácticas. No entanto, as menores frequências da emissão das fontes galácticas são mais contaminadas pela emissão do centro galáctico, onde a maioria das fontes galácticas estão concentradas (HINTON; HOFMANN, 2009).

Remanescentes de supernova são o estágio final de uma estrela com muita massa. Quando terminam os processos nucleares, a parte central da estrela colapsa criando um objeto compacto. Dependendo da massa, ela evolui para um pulsar ou um buraco negro, enquanto as camadas externas são expelidas para o espaço em volta. Ondas de choque são capazes de acelerar partículas até o regime relativístico. O principal processo de emissão de raios gama neste caso é o espalhamento Compton inverso devido à interação entre partículas carregadas e os fótons gerados por emissão síncrotron (UCHIYAMA *et al.*, 2007).

Um núcleo ativo de galáxia (AGN) é uma região no centro de uma galáxia que tem uma luminosidade muito maior do que o resto da galáxia. A radiação dos AGNs é resultado da acreção de massa por um buraco negro supermassivo. AGNs são as fontes mais luminosas de radiação eletromagnética no universo, emitindo radiação gama de energia muito alta (AHARONIAN, 2004).

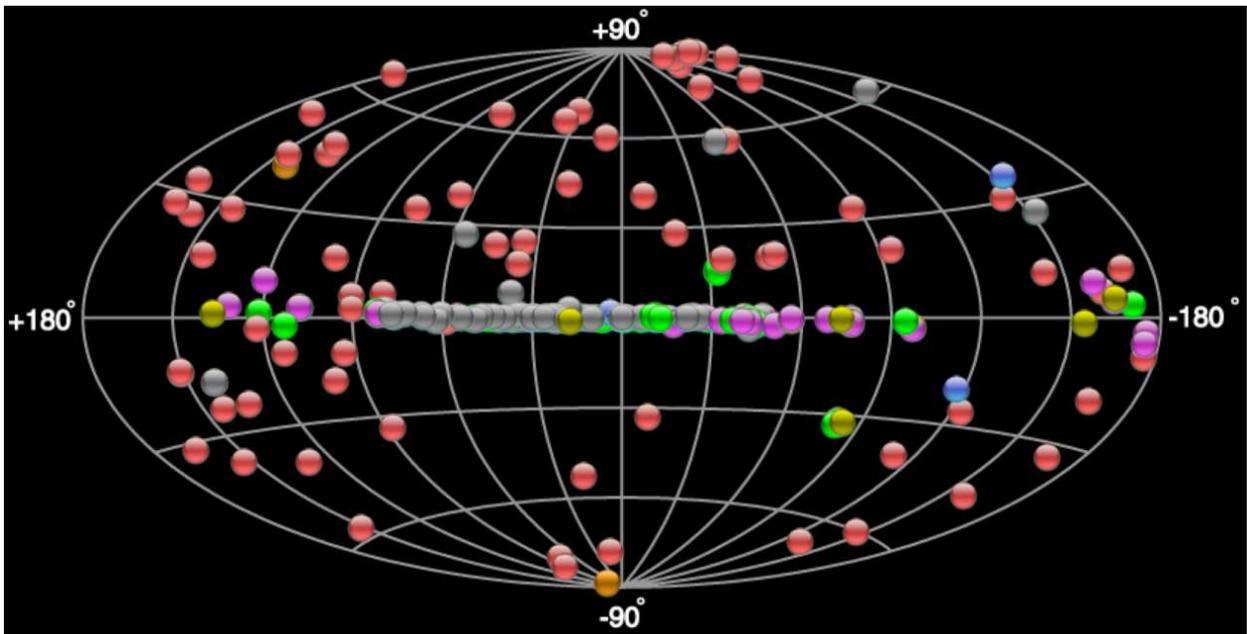


Figura 1 – O céu com as posições de fontes de raios gama detectadas. A versão regularmente atualizada desta Figura pode ser encontrada em (TEVCAT, 2017). Os AGNs são mostrados com um símbolo vermelho, os remanescentes de supernova são mostrados em verde, pulsares são mostradas em violeta, os sistemas binários em amarelo e em cinza são as fontes sem associação confiável com objetos conhecidos.

2.2 Detecção de Raios Gama

O método de detecção do raio gama que atinge a atmosfera da Terra depende da sua energia. Raios gama com energias acima de 1 MeV criam pares elétron-pósitron ao interagir com os núcleos dos átomos, podendo ser detectados por instrumentos colocados em balões ou satélites no topo da atmosfera (ATWOOD *et al.*, 2009). Como o fluxo dessas partículas diminui com a energia, a limitação no tamanho dos satélites dificulta a observação para energias acima de algumas dezenas de GeV. Por exemplo, acima de 100 GeV o fluxo da Nebulosa de Carangueijo é cerca de uma partícula por m^2 por dia e acima de 1 TeV são cerca de 6 fótons por m^2 por ano (HOLDER, 2015).

Para energias acima de $\gtrsim 5$ GeV, a detecção pode ser realizada pelas partículas secundárias geradas por chuvarões na atmosfera da Terra (BYKOV *et al.*, 2017). Como as partículas do chuvarão se propagam com velocidades próximas à da luz e ele é visto no solo como uma frente esférica com espessura da ordem de um metro, são necessários detectores com eletrônica sensível a pulsos com duração de nanossegundo (FEGAN, 1997).

De modo geral, as propriedades definidoras de qualquer partícula que gera um chuvarão atmosférico, chamada de partícula primária, são sua energia, tipo (massa), direção de chegada no topo da atmosfera e tempo de chegada. Sua detecção é realizada de maneira indireta usando a at-

atmosfera, que funciona como um calorímetro para as partículas secundárias geradas. Os chuueiros atmosféricos se desenvolvem tridimensionalmente e de uma maneira complexa, pela natureza estatística dos processos envolvidos, grande extensão espacial do fenômeno, número de partículas interagindo e extensa faixa de energia envolvida (GRIEDER, 2010). Portanto, para a inferência das propriedades do primário, é necessária detecção de uma amostra das partículas criadas durante o desenvolvimento do chuueiro aliada a simulações que devem levar em consideração características da atmosfera, dos processos físicos envolvidos e do próprio método de detecção. As simulações do fenômeno em geral são demoradas e, portanto, existem simulações com diferentes níveis de aproximação do desenvolvimento do chuueiro (HECK *et al.*, 1998; BERNLÖHR, 2008). Existem várias equações aproximadas que descrevem o desenvolvimento do chuueiro; tal abordagem será vista na seção 3.1.

Os detectores de partículas carregadas realizam uma coleta de tais partículas do chuueiro em uma dada altitude. Como elas são absorvidas pela atmosfera, experimentos que utilizam essa técnica situam-se em altitudes elevadas. Por exemplo, o Observatório ARGO-YBJ está localizado a uma altitude de 4300 m e mede as perdas por ionização das partículas enquanto elas atravessam os detectores (AIELLI *et al.*, 2012; BARTOLI *et al.*, 2017). Outro exemplo é o Observatório HAWC, que coleta a radiação Cherenkov¹ emitida pelas partículas secundárias do chuueiro após penetrarem tanques com água (DEYOUNG *et al.*, 2012). Entre as vantagens, tem-se o maior tempo de funcionamento - pois operam de dia -, exigência de menor área onde os instrumentos coletores serão dispostos e fração maior de partículas detectadas do chuueiro. Estando em altitude elevada, os detectores ficam posicionados mais próximo ao máximo do chuueiro, região com menor flutuação entre chuueiros distintos. Por fim, observamos que esses detectores de partículas possuem campo de visão maior.

Em razão do desenvolvimento do chuueiro, ondas de rádio, radiação fluorescente e Cherenkov são geradas na atmosfera e ampliam a área na superfície onde o fenômeno pode ser visto - porque são menos absorvidas que as partículas carregadas - e podem constituir vias de detecção indireta do primário por antenas ou telescópios. Ao contrário da colimada radiação Cherenkov na atmosfera, luz fluorescente é emitida isotropicamente pelas moléculas de nitrogênio excitadas durante o desenvolvimento do chuueiro. Isso possibilita detecção a distâncias grandes, por exemplo, até 15 km. Outra vantagem consiste em registrar informações do chuueiro durante seu desenvolvimento longitudinal. Porém, a intensidade dessa radiação é menor, de modo que essa técnica de detecção somente é utilizada para chuueiros na parte mais alta do espectro (com energia $E > 10^{17}$ eV) (GRIEDER, 2010, p. 881), faixa onde não foram observados raios gama, ainda (SCHERINI *et al.*, 2011).

¹ Partículas carregadas em um meio provocam a emissão de radiação Cherenkov, se a sua velocidade for maior que a velocidade da luz naquele meio (LANDAU *et al.*, 2013)

Ao contrário dos telescópios atmosféricos, antenas podem detectar chuueiros durante o dia, através das ondas de rádio emitidas predominantemente pela interação das partículas secundárias com o campo geomagético (JELLEY *et al.*, 1965; ASKAR'YAN, 1962; KAHN; LERCHE, 1966; FALCKE *et al.*, 2005). Assim como a radiação Cherenkov, as ondas de rádio são colimadas com a direção de propagação da partícula primária e portanto devem ser detectadas próximas ao eixo do chuueiro. O fluxo em ondas de rádio cresce quadraticamente com o número de partículas do chuueiro, portanto pode ser uma alternativa mais sensível de detecção. Ao contrário da radiação Cherenkov, o sinal registrado no nível de detecção é um círculo menos simétrico - com uma forma que depende da frequência da radiação. No entanto, a detecção por ondas de rádio hoje é viável apenas em faixas de energia mais altas que a de interesse para a astronomia gama, compreendida entre 10 GeV e 100 TeV (SCHRÖDER, 2017b; SCHRÖDER, 2017a; HUEGE, 2016).

2.3 Contexto Histórico

Nesta seção, é apresentada uma breve cronologia dos principais fatos relacionados à radiação Cherenkov e à astronomia gama (HILLAS, 2013; BOLOTOVSKII, 2009; MIRZOYAN, 2014; FAZIO *et al.*, 1970; WEEKES *et al.*, 1989; WEEKES, 1992; MITCHELL *et al.*, 2011; ROBERTSON *et al.*, 2009):

- No final do século XIX, Oliver Heaviside calcula algumas propriedades, como o ângulo de emissão, da radiação emitida quando um elétron se move em um meio com velocidade maior que a da luz;
- Em 1904, Arnold Sommerfeld também se interessa pela mesma questão, chegando a conclusões similares às de Heaviside;
- Em 1910, Marie Curie observa o fenômeno experimentalmente em concentrações de rádio, embora acreditasse tratar-se de fluorescência;
- No final da década de 1920, Lucien Mallet verifica que o espectro observado por Marie Curie era contínuo, ao contrário da fluorescência;
- Na década de 1930, Pavel Cherenkov, sob a supervisão de Sergei Vavilov, realiza alguns experimentos para observar o característico cone de emissão desta radiação enquanto Ilia Frank e Igor Tamm propõem uma explicação teórica clássica para aquela luz azul;
- Em 1948, Patrick Blackett menciona que a radiação Cherenkov pode ser gerada em chuueiros atmosféricos;
- Em 1953, William Galbraith e John Jelly realizam a observação com um espelho parabólico de 25 cm de diâmetro acoplado a uma fotomultiplicadora;

- Em 1958 Philip Morisson e em 1960 Giuseppe Cocconi discutem a possibilidade de se fazer astronomia gama pela detecção de radiação Cherenkov emitida pelos chuveiros;
- Em meados da década de 1950, Aleksandr Chudakov mede a distribuição lateral de luz Cherenkov e no início da década de 1960, se dedica à construção de doze espelhos parabólicos. Conseqüentemente, surge o interesse por simulações de Monte Carlo das propriedades da emissão Cherenkov pelos chuveiros;
- Georgiy Zatsepin calcula a distribuição lateral de fótons Cherenkov emitidos pelo chuveiro e já em 1964 considera a possibilidade da observação estereoscópica;
- Nas décadas seguintes as simulações dos chuveiros foram cada vez mais aprimoradas. No início da década de 1970, a componente difusa acima de 30 MeV da radiação gama é medida pelo satélite OSO-3 na órbita da Terra paralelamente a diversos artigos que surgem sobre uma curiosa luz azul vista por vários astronautas em missão à Lua;
- Em 1989, após cerca de vinte anos de tentativas, Trevor Weekes na Colaboração Whipple obteve o primeiro sucesso na detecção de uma fonte gama na faixa de TeV na Nebulosa de Carangueijo através da técnica de Imageamento - que é uma parametrização das imagens obtidas nas câmeras dos telescópios, popularizadas por Hillas três anos antes;
- HEGRA foi o primeiro conjunto de telescópios a operar em modo estereoscópico, com cinco e depois seis telescópios em operação na década de 1990 e no início da década de 2000.

Em seguida, os observatórios VERITAS, HESS e MAGIC foram construídos e mais de uma centena de fontes de raios gama têm sido identificadas². Simultaneamente, em órbita na Terra, o satélite FERMI/LAT detecta raios gama com menores energias (< 300 GeV). Atualmente, há várias aplicações para a radiação Cherenkov, não necessariamente restritas à Astronomia Gama. Ela é utilizada em vários observatórios, como o Super-Kamiokande, Pierre Auger, IceCube, e possui também aplicações em Medicina.

2.4 CTA - Cherenkov Telescope Array

O *Cherenkov Telescope Array* (CTA) será o maior detector de raios gama construído. Será composto por telescópios que captam a radiação Cherenkov produzida pela passagem na atmosfera dos chuveiros criados pelos raios gama primários. O CTA operará em dois sítios em ambos os hemisférios: Paranal, no Chile, a 2800 m de altitude e La Palma, Espanha, a 2200 m. A Figura 2 ilustra o sítio sul. Os arranjos de telescópios Cherenkov atmosféricos para observação gama foram construídos com quatro telescópios no caso dos observatórios MAGIC e VERITAS e cinco no caso do HESS. O CTA será composto por cerca de cem deles de três tamanhos diferentes para aumentar

² Uma lista atualizada com as fontes pode ser encontrada em (TEVCAT, 2017).

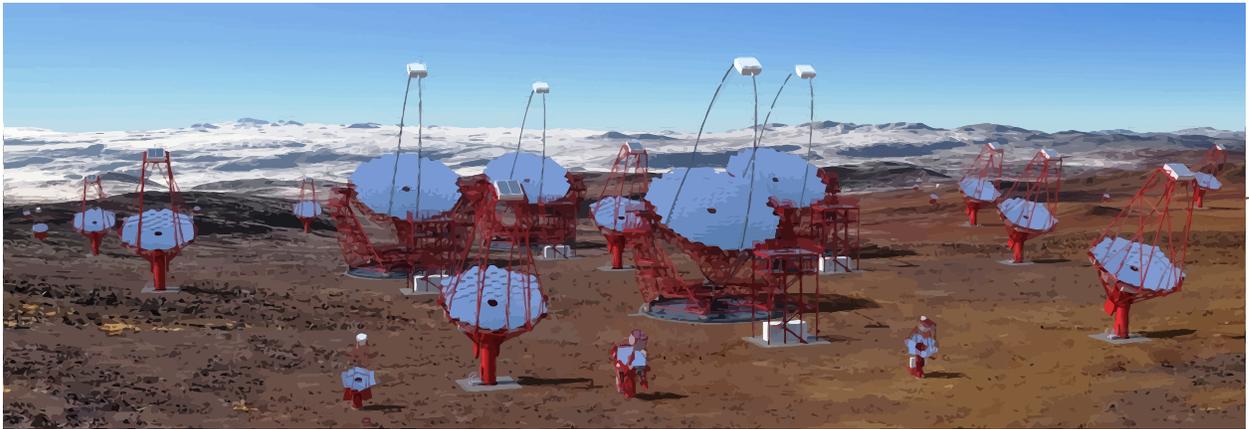


Figura 2 – Ilustração do sítio sul do *Cherenkov Telescope Array*, mostrando os diferentes tamanhos dos telescópios utilizados. Serão construídos neste sítio 4 telescópios grandes, 25 telescópios médios e 70 pequenos (CTA, 2017).

a área de detecção e a sensibilidade do detector na faixa de energia desde 20 GeV até 300 TeV em mais de uma ordem de grandeza em relação aos detectores atuais. O desenvolvimento do CTA começou em 2006 a partir de uma colaboração internacional que hoje envolve mais de mil membros de trinta e dois países (THE CTA CONSORTIUM, 2017; MAIER *et al.*, 2017).

Pela alta sensibilidade, extrapolando as intensidades das fontes gama já observadas, espera-se descobrir cerca de mil novas fontes de raios gama (CTA, 2017). Em comparação com os outros observatórios, a melhor resolução angular do CTA permitirá obter com melhor precisão as características morfológicas das fontes extensas. Em particular, a região do Centro Galáctico poderá ser vista com maior precisão. A maior área efetiva será importante para a observação de transientes, como GBRs, e de raios gama com energias mais altas, da ordem de 100 TeV (INOUE *et al.*, 2013; BULGARELLI *et al.*, 2013). Abrangendo um intervalo de detecção com cinco décadas em energia, também será capaz de observar os raios gama que chegam até nós com as menores energias desse intervalo, que constituem o caso das fontes mais distantes. Nesse contexto, pode-se descobrir outras classes de aceleradores de partículas - como possivelmente aglomerados de galáxias - ou talvez descobrir emissão gama nos sistemas binários emissores de ondas gravitacionais (BARTOS *et al.*, 2014). A melhor resolução em energia será importante para medir espectros de fontes com corte. O maior campo de visão permitirá melhores observações das fontes extensas e contribuirá para fazer varreduras mais rápidas (DUBUS *et al.*, 2013; ACHARYA *et al.*, 2017).

O CTA será híbrido, isto é, composto por três tipos de telescópios: pequeno, médio e grande. Eles possuem características diferentes, entre elas a óptica utilizada: Schwarzschild-Couder, Davies-Cotton e Davies-Cotton modificado; a Tabela 1 lista as suas características. Os telescópios pequenos (SST) possuem diâmetro de cerca de 4 m e são adequados para observar os chuveis com as mai-

ores energias, aproximadamente desde 1 TeV até 300 TeV. Para isso, possuem um campo de visão largo (entre 8° e 10°), que também os permite observar fontes extensas de raios gama - como o centro galáctico ou aglomerados de galáxias. Na faixa de energia mais alta, de 100 TeV, a maior limitação da observação é o menor número de eventos, porque o espectro das fontes segue uma lei de potência. Para compensar isso, setenta telescópios pequenos serão instalados no hemisfério sul cobrindo uma área geométrica de aproximadamente 2000 m^2 . O sítio norte não possuirá telescópios desse tipo porque ele será projetado para observar prioritariamente a região extragaláctica (ACHARYA *et al.*, 2013).

Os telescópios médios (MSTs) possuem diâmetro de cerca de 12 m e cobrem a faixa de energia aproximadamente entre 100 GeV e 10 TeV. Essa é a faixa de detecção dos observatórios atuais. A maior limitação da observação para essas energias é a separação do sinal gama do fundo hadrônico. Serão instalados 25 deles no sítio do hemisfério sul e 15 no sítio norte (ACTIS *et al.*, 2011).

Os telescópios grandes (LST) possuem diâmetro de 23 m e são adequados para observar os chuviros com as menores energias, entre 20 GeV e 150 GeV, que geram menor quantidade de radiação Cherenkov na atmosfera. Assim, o CTA poderá medir o espectro de fontes nessa faixa de energia, que é a faixa em que a detecção por satélites começa a degradar. Os telescópios grandes serão capazes de redirecionar seu alinhamento rapidamente, em 30 s, para conseguir detectar GRBs, que emitem nessa faixa de energia (INOUE *et al.*, 2013; BULGARELLI *et al.*, 2013). Como o fluxo é maior para baixas energias, a área coberta pelos telescópios grandes pode ser relativamente menor em comparação aos outros tipos de telescópios. No CTA, cada sítio terá quatro telescópios grandes. Nessa faixa de energia, a maior limitação da observação são os erros sistemáticos e a supressão da luz de fundo (THE CTA CONSORTIUM, 2017).

2.5 Estudos de Performance e Otimização de Arranjos

Atualmente, os experimentos em Astronomia Gama contém no máximo cinco telescópios. A otimização de arranjos pequenos se traduz a descobrir o espaçamento entre os telescópios em geometrias regulares (e.g. (HOFMANN *et al.*, 2000a)) - além, é claro, da otimização dos parâmetros individuais dos telescópios. O espaçamento entre os telescópios representa um compromisso entre uma boa visualização estereoscópica dos chuviros - que melhora com maior espaçamento - e a exigência de haver coincidência de *trigger* pelos telescópios - que se torna mais provável de ocorrer à medida que o espaçamento diminui (HESS, 2017).

Em geral, a performance de um arranjo de telescópios Cherenkov é traduzida em uma métrica chamada sensibilidade, que mede o fluxo mínimo necessário de uma fonte pontual para o que o observatório consiga detectá-la com significância de 5σ . A sensibilidade de um observatório

Tabela 1 – Resumo das características dos telescópios utilizados no CTA, atualizadas até 12/2018 (CTA, 2017).

	LST	MST		SST			
Faixa de energia (TeV)	0,02 - 3	0,08 - 50		1 - 300			
Energia ótima (TeV) ^a	0,02 - 0,15	0,15 - 5		5 - 300			
Número de telescópios	4 + 4	25 (Sítio Sul) + 15 (Sítio Norte)		70 (Sítio Sul)			
Ótica ^b	Parabólica	MDC	SC	SC		DC	
Diâmetro do refletor (m)	23,0	11,5	9,7	4,0	4,3	4,0	
Diâmetro do refletor secundário (m)	-	-	5,4	2,0	1,8	-	
Área efetiva (com sombreamento) (m^2)	370	88	41	8,9	8	7,5	
Distância focal (m)	28	16	5,6	2,28	2,15	5,6	
Massa (t)	103	82	80	11	19	8,6	
Campo de visão (°)	4,3	7,5	7,7	7,6	8,3	10,5	8,8
Número de <i>pixels</i>	1855	1764	1855	11328	2048	2368	1296
Tamanho do <i>pixel</i>	0,1	0,17		0,067	0,17	0,19	0,24
Tipo de detector ^c	PMT	PMT	SiPM	SiPM		SiPM	
Redirecionamento (s) ^d	30	90	90	60		60	

^a Faixa de energia que o subarranjo formado apenas pelo mesmo tipo de telescópio fornece a maior sensibilidade para o arranjo todo.

^b DC = Davies-Cotton; MDC = Davies-Cotton modificado; SC = Schwarzschild-Couder (dois espelhos e maior número de *pixels*) (CTA, 2017).

^c PMT = fotomultiplicadora; SiPM = fotomultiplicadora de silício.

^d Tempo de redirecionamento para qualquer ponto no céu com elevação maior que 30°.

pode ser comparada com a de outros; a Figura 3 mostra a sensibilidade dos Observatórios HESS, MAGIC e VERITAS, comparando também com a sensibilidade dos experimentos Fermi-LAT e HAWC que não usam telescópios atmosféricos e mostra como a sensibilidade do CTA os supera em uma ampla faixa de energia (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; CTA, 2017).

A Figura 4 mostra as geometrias utilizadas por alguns dos principais experimentos e a tabela 2 mostra os parâmetros dos seus telescópios. A geometria do Observatório VERITAS é um quadrilátero irregular com dois lados medindo aproximadamente 85 m e os outros dois medindo 109 m e 34 m (BOHEC *et al.*, 2008). Temos que para o caso do Observatório HESS, os cinco telescópios foram dispostos em uma geometria quadrada de lado igual a 120 m com um telescópio na posição central (PÜHLHOFER *et al.*, 2003). Para o caso do Observatório CANGAROO-III, com quatro telescópios, a geometria não é um quadrado, mas um losango com lados iguais a 100 m. Os dois telescópios grandes do MAGIC estão separados a 85 m um do outro. Para arranjos grandes, com dezenas de telescópios, como serão os do CTA, não é óbvio que uma geometria simétrica seja a solução ótima. Além disso, com telescópios que poderão captar luz Cherenkov a mais de 100

m do eixo do chuveiro, o espaçamento de cerca de 100 m entre os telescópios nas geometrias da Figura 4 também não tem sido utilizada como solução ótima para telescópios pequenos e médios dos arranjos do CTA (THE CTA CONSORTIUM, 2017; ACTIS *et al.*, 2011).

Os estudos de performance do CTA demandam esforço computacional pelas simulações de Monte Carlo dos chuveiros eletromagnéticos e principalmente dos chuveiros hadrônicos que compõem o fundo. Além disso, o processo de detecção dos chuveiros pelos telescópios também deve ser simulado. Realizadas com o CORSIKA (HECK; DIETER, 1998) e com o *sim_telarray* (BERNLÖHR, 2008), as simulações levam em consideração detalhes dos chuveiros, da atmosfera e dos telescópios. O procedimento foi descrito em (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; BERNLÖHR *et al.*, 2013b). Por um lado, realizam-se simulações dos telescópios individuais visando a otimização dos seus parâmetros. Por outro lado, simulações do arranjo como um todo também devem ser realizadas para otimizar a performance total do observatório. Isso é feito através da escolha do posicionamento dos telescópios no solo, ou seja, da geometria de disposição dos telescópios.

Nesse contexto, a principal dificuldade consiste no fato que o CTA será composto por de-

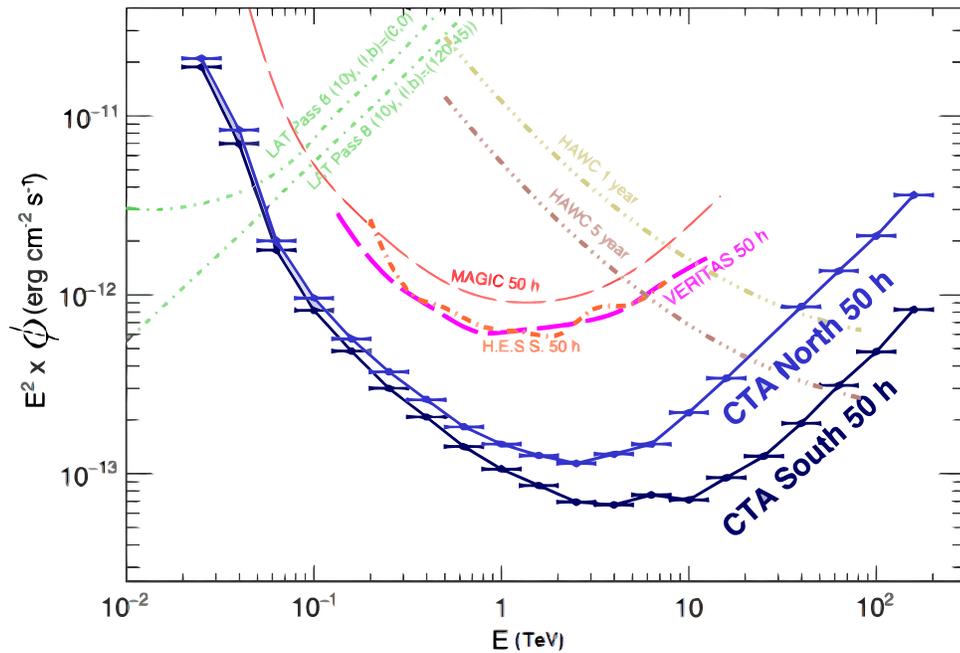


Figura 3 – Sensibilidade $E^2\phi$ de alguns experimentos em Astronomia Gama. Exigem-se pelo menos dez raios gama detectados por intervalo de energia e uma relação sinal/ruído de pelo menos 1/20. As curvas para o Fermi-LAT e o HAWC são dimensionadas por um fator 1,2 em relação às referências (ABEYSEKARA *et al.*, 2017; FermiLAT, 2017) para levar em consideração as diferentes binagens em energia. As curvas mostradas permitem apenas uma comparação aproximada da sensibilidade dos diferentes instrumentos, pois o método de cálculo e os critérios aplicados não são idênticos. As curvas são dadas em função da energia reconstruída. Adaptada de (CTA, 2017).

Tabela 2 – Parâmetros dos telescópios. Os números após as barras representam as características do último telescópio construído. Para os telescópios HESS, o último telescópio construído é localizado no centro do arranjo. Um dos telescópios MAGIC possui 397 *pixels* pequenos (de 0, 1°) na região hexagonal central e 180 *pixels* maiores nas bordas (de 0, 2°). O outro telescópio MAGIC possui 1039 *pixels* idênticos (de 0, 1°) (HINTON, 2009; COLIN *et al.*, 2009).

	HESS	MAGIC	VERITAS	CANGAROO-III
Número de telescópios	5	2	4	4
Latitude (°)	-23	28	32	-31
Longitude (°)	116	18	-111	137
Altitude (m)	1800	2200	1268	160
Diâmetro do espelho (m)	12/28	17	12	10
Área Efetiva de um telescópio (m ²)	108/614	236	106	58
Número de pixels	960/2048	397+180/1039	499	512
FoV (°)	5/3,2	3,5	3,5	4,0
Ano do início de operação	2003/2012	2004/2009	2007	2004

zenas de telescópios. A estratégia adotada consistiu em dispor 275 telescópios - um número maior que o total de telescópios que serão construídos - e encontrar a performance de subarranjos com algumas geometrias pre-definidas (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; HASSAN *et al.*, 2015a; HASSAN *et al.*, 2015b; MAIER *et al.*, 2015).

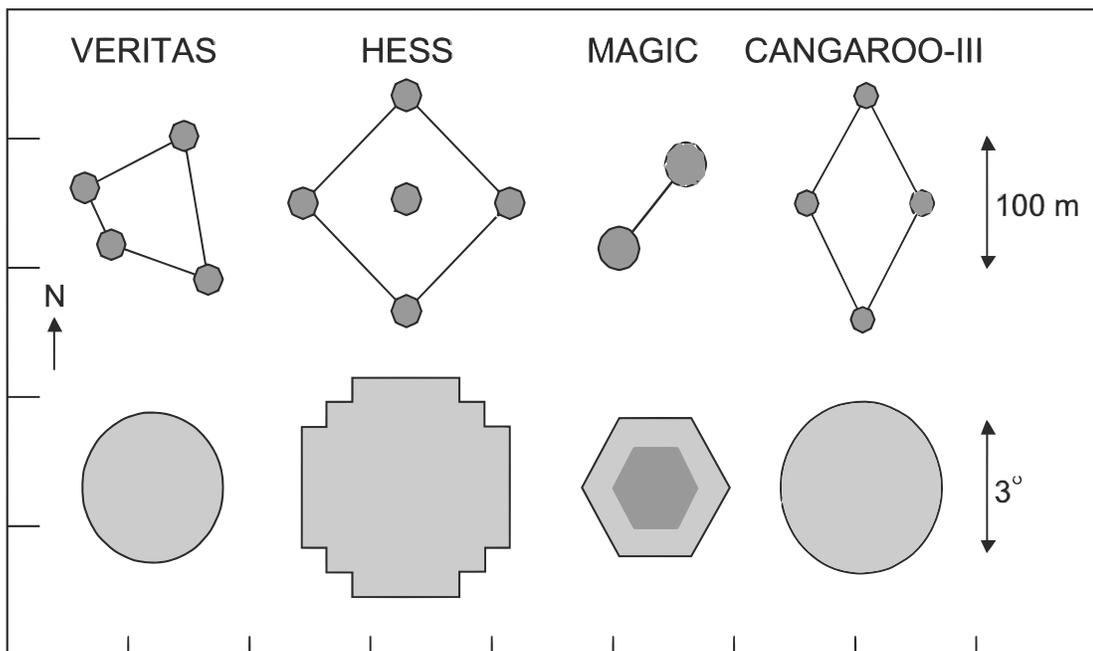


Figura 4 – Geometrias de alguns experimentos com telescópios atmosféricos Cherenkov. A Figura também mostra o formato das câmeras utilizadas. Adaptada de (HINTON, 2009).

Em (AHARONIAN *et al.*, 1997a), surge uma estratégia alternativa que utiliza o conceito de células, porém não empregada no contexto do CTA. Uma célula é um arranjo quadricular com os telescópios ocupando os vértices do quadrado. Analisando a performance de uma célula, procura-se descobrir a performance de um arranjo regular formado pela justaposição de N células. A área efetiva de uma célula é calculada apenas na região interna ao arranjo, isto é, na região interna ao quadrado, e supõe-se não haver detecção na região externa. Isso simplifica o cálculo da área efetiva do arranjo todo, que torna-se apenas a multiplicação por N da área efetiva de uma célula. Para um arranjo com muitos telescópios, a área externa tende a tornar-se relativamente menor em comparação à área interna.

CAPÍTULO 3

DETECÇÃO DE RAIOS GAMA COM TELESCÓPIOS CHERENKOV ATMOSFÉRICOS

Neste capítulo abordamos as características principais dos chuueiros eletromagnéticos detectados no contexto da Astronomia Gama e as propriedades da radiação Cherenkov por eles gerada na atmosfera. Discutimos a técnica de imageamento, as vantagens da observação estéreo dos eventos e como as características dos chuueiros nos permitem obter informações sobre as variáveis da partícula primária: energia, direção de chegada e composição. Na última seção, elucidamos as dificuldades para a detecção de raios gama com energias na faixa 1 - 100 GeV via telescópios Cherenkov atmosféricos. As ideias desse capítulo formam a base teórica do modelo que será visto no capítulo 4.

3.1 Chuueiros Leptônicos

Partículas energéticas procedentes do espaço - denominadas primárias - interagem com os átomos da alta atmosfera ($\sim 25 \text{ km}^1$), gerando partículas secundárias menos energéticas que consecutivamente produzem gerações de novas interações, enquanto tal fragmentação se propaga em direção à superfície com velocidade próxima à da luz. Esse fenômeno é chamado de chuueiro atmosférico. Interessa-nos o caso dos raios gama como primários, cujo chuueiro gerado é ilustrado na Figura 5. Um primário gama gera um chuueiro, chamado de leptônico ou eletromagnético, cujo número de partículas multiplica-se sucessivamente pelos processos dominantes de produção de pares e^-/e^+ e *bremsstrahlung*. Este processo se sustenta enquanto as partículas têm energia acima de um valor crítico, abaixo do qual interagem preferencialmente por espalhamento. Existem vá-

¹ Esse valor depende da energia do primário.

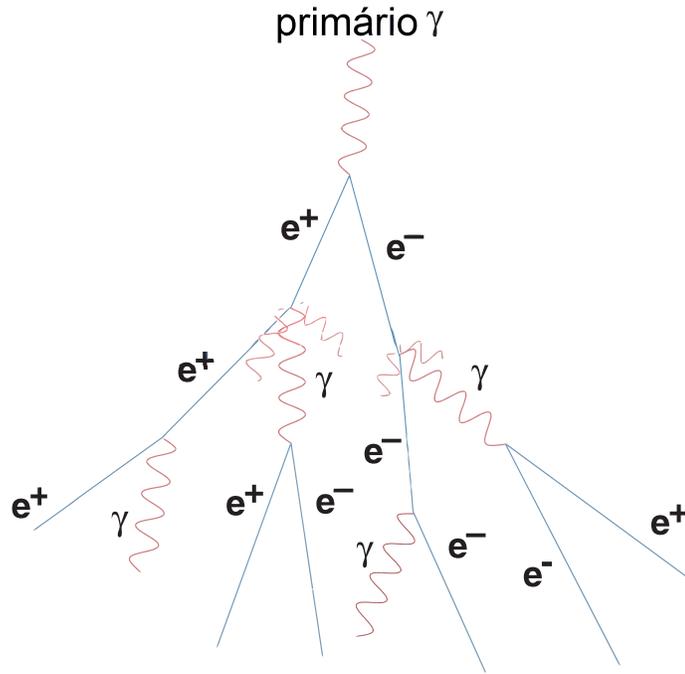


Figura 5 – Modelo simplificado para um chuva eletromagnético, mostrando seus principais componentes e interações. Adaptada de (WAGNER, 2007).

rios outros processos que ocorrem com menor probabilidade, por exemplo, há produção de múons por reações fotonucleares cuja probabilidade de ocorrência é da ordem de mil vezes menor que a produção de pares (GRIEDER, 2010). De fato, o desenvolvimento do chuva pode ser visto como uma competição - que depende do tipo da partícula, sua energia e da densidade da atmosfera - entre interação, decaimento e espalhamento. A teoria dos chuvas eletromagnéticos começou a ser desenvolvida na década de 1930 (BETHE; HEITLER, 1934; BHABHA; HEITLER, 1937; CARLSON; OPPENHEIMER, 1937).

O número de interações a que uma partícula em movimento está sujeita aumenta com a distância por ela percorrida r e a densidade do meio ρ (MERZBACHER, 1997, p. 280). Define-se profundidade, x , para comparar a passagem de partículas em meios diferentes, removendo o efeito da densidade, da seguinte maneira (GRIEDER, 2010):

$$x = \int_0^{r'} \rho dr \quad [g \cdot cm^{-2}]. \quad (3.1)$$

Interessa-nos a passagem de partículas na atmosfera, cuja densidade varia em função da altitude z . Na região da atmosfera onde se desenvolvem os chuvas, até aproximadamente 20 km acima do nível do mar, consideraremos constante a temperatura no modelo da atmosfera padrão, de modo que a densidade seja proporcional à pressão e possa ser escrita como (GRIEDER, 2010; ATMOSPHERE, 1976)

$$\rho_{atm} = \rho_0 e^{-z/h}, \quad (3.2)$$

em que h é chamado de *scale height*, $h \approx 8500$ m e $\rho_0 \approx 1,205 \cdot 10^{-3}$ g cm⁻³ é a densidade típica ao nível do mar (HAYNES, 2016; LEE; RYAN, 2015). A densidade e a pressão diminuem em um fator de dez nos primeiros $h \ln(10) \approx 20$ km que movemos verticalmente a partir da superfície.

Na física de raios cósmicos, frequentemente precisamos saber a localização na atmosfera de alguma etapa do desenvolvimento do chuveiro ou alguma interação entre suas partículas constituintes, bem como quantas interações ocorreram em uma determinada distância. O comprimento de interação, x_0 , fornece a escala de comprimento para a perda de energia devido a uma interação, sendo inversamente proporcional à seção de choque, e é dado por (ANGELIS; PIMENTA, 2015)

$$x_0 = \frac{A}{\sigma \rho N_a} \quad [g \cdot cm^{-2}], \quad (3.3)$$

em que A (g/mol) é o número de massa do núcleo do meio onde a interação ocorre, σ é a seção de choque, ρ (g/cm³) é a densidade do meio e N_a (moléculas/mol) é o número de Avogadro. Para *bremstrahlung* de elétrons no ar, temos que $x_0 = 36,6$ g cm⁻². Por exemplo, ao nível do mar, $x_0 \approx 303$ m, sendo dez vezes maior a 20 km de altitude; essa é a distância que um elétron relativístico perderia $1/e$ de sua energia por *bremstrahlung*. Tem-se que o comprimento de interação da produção de pares elétron/pósitron pelos fótons do chuveiro é $x_{0,par} = 9/7 x_0$ (GRIEDER, 2010).

Usando a equação 3.2, calculamos na Figura 6 a relação entre a profundidade atmosférica - medida a partir do topo da atmosfera - e a altitude de observação ². Em particular, a Figura 6 mostra que a profundidade atmosférica no nível do mar é $x_{atm} \approx \int_0^\infty \rho_{atm} dr = 1025$ g cm⁻², que corresponde a 28 comprimentos de interação. Para comparação, a altitude de 2600 m está a 20 comprimentos de interação e 5200 m correspondem a 14,7 comprimentos de interação. Um chuveiro com ângulo de incidência igual a 60° detectado a uma altitude de 5200 m percorre - desprezando a curvatura da Terra - uma profundidade atmosférica igual a $x_{atm}/\cos(60^\circ) = 2x_{atm}$, ou seja, 29,4 comprimentos de interação: esse valor é comparável à quantidade de atmosfera percorrida por um chuveiro vertical detectado no nível do mar.

O chuveiro atmosférico se desenvolve longitudinalmente na direção da velocidade da partícula primária incidente, definindo o chamado eixo do chuveiro, com as partículas ocupando uma região em forma de disco com espessura da ordem de um metro. A Figura 7 mostra o número de elétrons e pósitrons do chuveiro eletromagnético para uma faixa de energias. O número de partículas atinge um máximo a uma dada profundidade atmosférica, x_{max} , em um plano perpendicular ao eixo do chuveiro, a partir da qual as partículas em média não possuem energia suficiente para produzir outras, então o processo dominante torna-se o espalhamento, e dizemos que o chuveiro começa a ficar "velho"(GRIEDER, 2010).

² Dividindo a atmosfera em três camadas com temperatura constante, as equações da transformação entre altitude e profundidade podem ser encontradas, por exemplo, em (SHIBATA, 1981; STANEV, 2010).

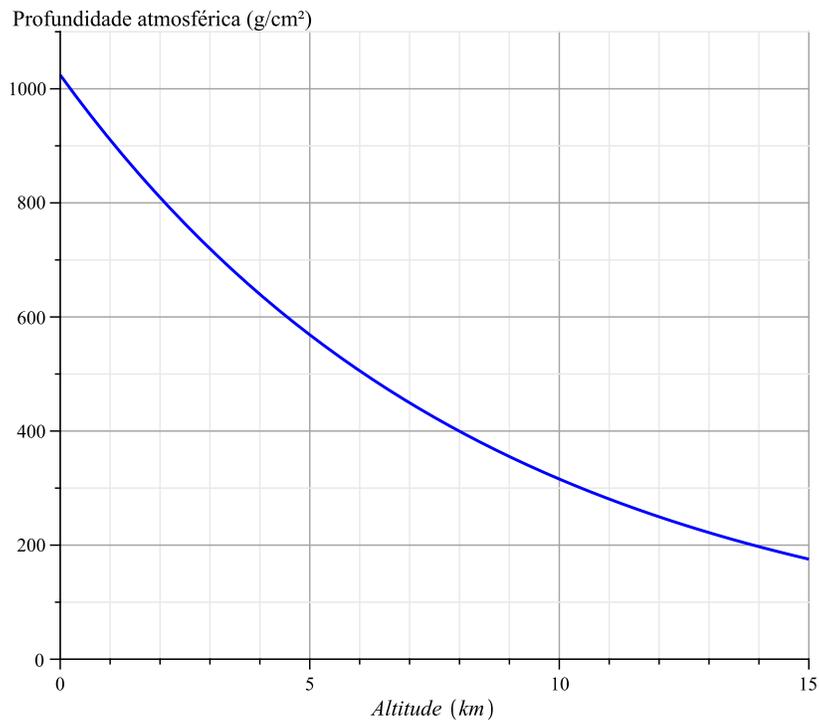


Figura 6 – Relação entre a profundidade atmosférica medida a partir do topo da atmosfera e a altitude de observação.

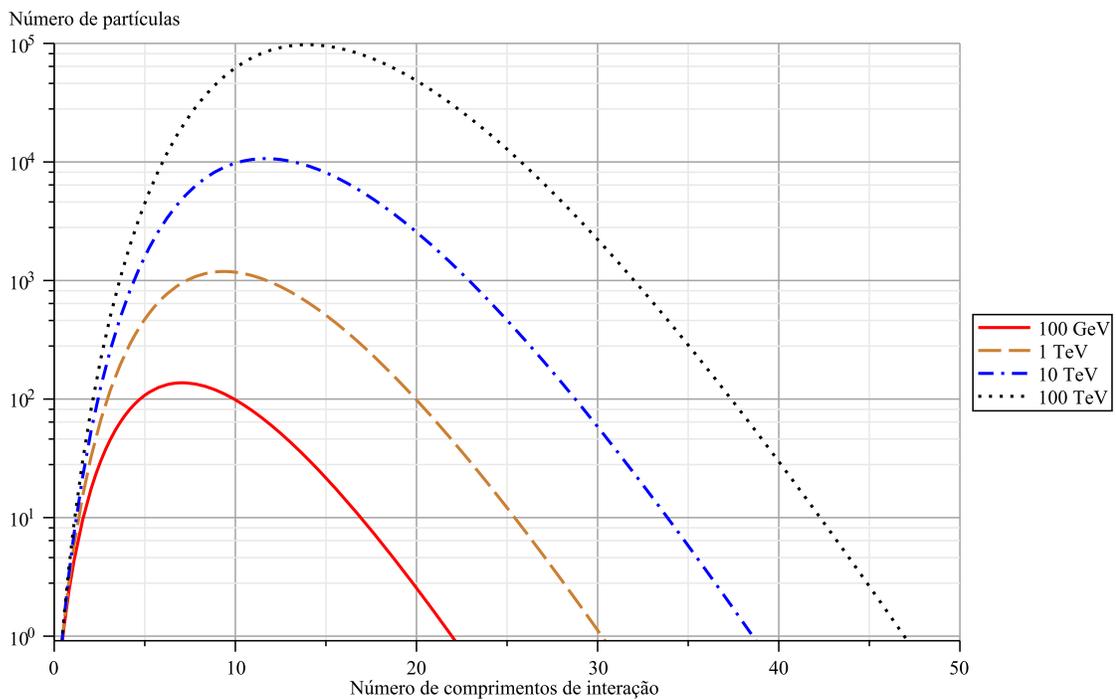


Figura 7 – Número de elétrons e pósitrons do chuva leptônica em função da profundidade atmosférica em unidades de $x_0 = 36,6 \text{ g cm}^{-2}$ medida ao longo do eixo do chuva e da energia do primário, calculado a partir da equação 3.5. A localização do máximo do chuva é indicada em cada curva. Pela Figura 6, as posições dos máximos variam entre 6 e 11 km de altitude.

Até o máximo do desenvolvimento do chuvaire, os elétrons e fótons perdem energia principalmente através da produção de novas partículas. Aqui, definiremos como energia crítica E_c do elétron aquela para a qual a taxa de perda de energia por *bremsstrahlung* é igual à perda por ionização (PATRIGNANI *et al.*, 2016). Trata-se do valor mínimo em que os processos radiativos são mais prováveis que o espalhamento, isto é,

$$\left. \frac{dE_{br}}{dx} \right|_{E=E_c} = \left. \frac{dE_{io}}{dx} \right|_{E=E_c} \quad (3.4)$$

A energia crítica depende do meio onde se encontram as partículas. Para elétrons no ar, a energia crítica é aproximadamente igual a 86 MeV³. Para fótons, a energia crítica segue uma definição análoga, porém com os processos de produção de pares e efeito Compton, com valor de aproximadamente 24 MeV (PATRIGNANI *et al.*, 2016).

As partículas podem ser absorvidas pela atmosfera, então após a profundidade onde ocorre o máximo do chuvaire, seu número diminui ao longo do eixo do chuvaire. Para primários com energias na faixa de TeV, o máximo ocorre a cerca de 10 km de altitude, como vemos a partir da Figura 7. Pelo modelo de Heitler para as cascatas leptônicas, a cada comprimento de interação, a energia de uma partícula é dividida igualmente após cada interação (HEITLER, 1954; MATTHEWS, 2005). Assim, no máximo do chuvaire a energia do raio gama primário é igual ao número de partículas vezes a energia crítica. Portanto, o número de partículas no máximo é proporcional à energia do primário. Ainda de acordo com Heitler, quanto maior a energia do primário, a posição do máximo fica mais baixa na atmosfera e, portanto, as distribuições longitudinal e lateral das partículas no chuvaire têm extensão maior. A variação da posição do máximo com a energia é chamada de taxa de alongação (LINSLEY, 1977), com valor cerca de 85 gcm⁻² por década de aumento na energia do raio gama primário, como podemos inferir pela Figura 7.

As curvas da Figura 7 foram calculadas a partir da Aproximação B, sendo dadas por (ROSSI; GREISEN, 1941; LIPARI, 2009)

$$N(t, E_0) = \frac{0,31}{\sqrt{\ln(E_0/E_c)}} \cdot e^{t-1.5t \ln(s)} = N_{max} \cdot e^{t[1-1.5 \ln(s)]-t_{max}}, \quad (3.5)$$

em que E_0 é a energia do fóton primário, N_{max} é o número de partículas no máximo do chuvaire, $t = x/x_0$ é a profundidade atmosférica medida em comprimentos de interação, sendo uma grandeza adimensional medida a partir do ponto da primeira interação do chuvaire. A posição da primeira interação é um ponto desconhecido, caso apenas um chuvaire esteja sendo analisado, e constitui um dos motivos principais para as flutuações encontradas em chuvaire leptônicos diferentes (AHARONIAN *et al.*, 2008; GAISSER *et al.*, 2016). Pela equação 3.3, a profundidade da primeira

³ Adiante nesse texto, a notação “elétron” inclui “elétrons e pósitrons”.

interação é distribuída de acordo com

$$e^{-7x/9x_0}, \quad (3.6)$$

cuja mediana ocorre a ~ 25 km de altitude. Tem-se que o desvio com relação à mediana da distribuição 3.6 é cerca de 40% da taxa de alongação do chuveiro leptônico, portanto a posição do máximo do chuveiro é mais influenciada pela energia do primário que pela posição do ponto de primeira interação. Além disso, definimos a idade da cascata através de

$$s \approx \frac{3t}{t + 2 \ln(E_0/E_c)}, \quad (3.7)$$

em que nesse texto ignoraremos sua dependência com a distância radial (GRIEDER, 2010, p. 199) (LAGUTIN *et al.*, 2002).

A Figura 8 mostra que o desenvolvimento longitudinal do chuveiro é aproximadamente simétrico na variável idade, que varia desde zero até dois. Pela condição $d \ln(N)/dt|_s = 0$, obtemos que o máximo do chuveiro ocorre quando $s = 1$. O parâmetro idade, portanto, caracteriza o estágio de desenvolvimento do chuveiro. A Figura 8 também mostra que o número de partículas no máximo é numericamente igual à energia E do primário em GeV.

O chuveiro também se desenvolve lateralmente, sendo o desvio angular pelo espalhamento múltiplo coulombiano a causa principal. Por exemplo, um elétron com a energia crítica possui

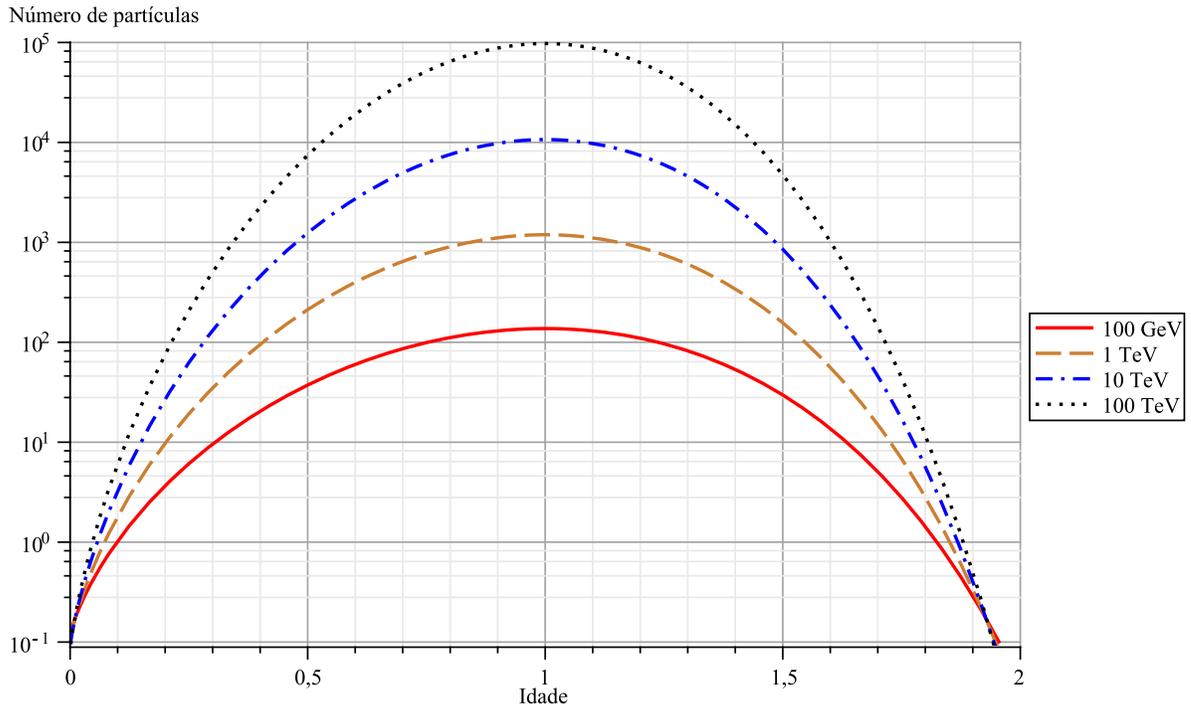


Figura 8 – Simetria do número de elétrons do chuveiro gama em função do parâmetro idade, calculado a partir da equação 3.5.

um desvio angular quadrático médio de $\sim 14^\circ$ ao atravessar um comprimento de radiação, sendo que esse valor é inversamente proporcional à sua energia (GAISSER *et al.*, 2016). Com isso, as partículas mais energéticas se concentram na região central do eixo do chuveiro. A densidade de partículas é maior na região em torno do eixo do chuveiro e diminui rapidamente com o aumento da distância radial em relação a ele, como mostra a Figura 9. Em relação ao ângulo azimutal, a densidade de partículas forma uma distribuição simétrica perturbada pelas flutuações inerentes ao desenvolvimento da cascata ou pela interação do campo magnético da Terra com as partículas menos energéticas do chuveiro. Além disso, chuveiros inclinados são assimétricos por geometria (GRIEDER, 2010, p. 380).

Várias funções na literatura aproximam a distribuição lateral de elétrons em um dado nível de observação (GRIEDER, 2010). A Figura 9 mostra a função de Nishimura-Kamata-Greisen (KAMATA; NISHIMURA, 1958; PUPPI *et al.*,). Sua utilização supõe simetria polar para a distribuição das partículas, é uma função limitada a um intervalo para a idade do chuveiro e vários estudos têm apontado divergências para as distâncias mais afastadas do eixo do chuveiro (LAGUTIN *et al.*,

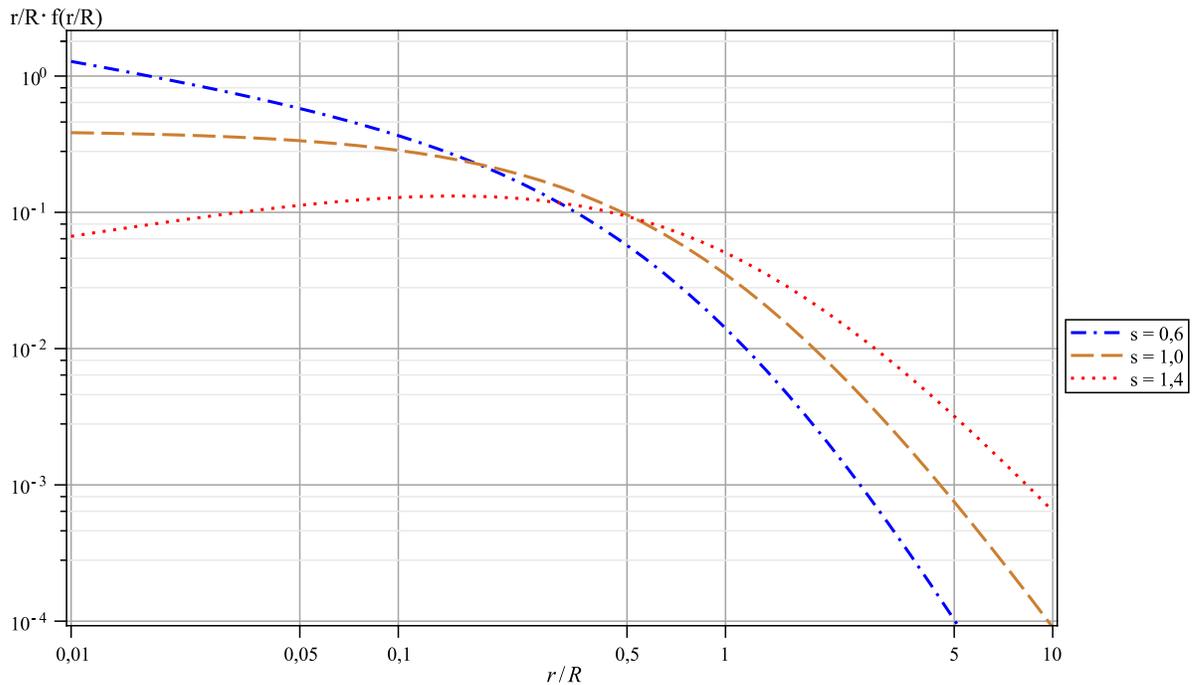


Figura 9 – Extensão lateral dos chuveiros leptônicos, calculado a partir da equação 3.8, em diferentes idades s . O número de partículas em uma dada profundidade atmosférica é dado por $\int_0^\infty 2\pi r f(r, t, E_0) dr$, em que r é a coordenada radial e R é o raio de Molière, definido na equação 3.9.

2002). Sua expressão é

$$f(r, t, E_0) = \frac{\Gamma(4, 5 - s)}{2\pi\Gamma(s)\Gamma(4, 5 - 2s)} \frac{N}{r_M^2} \left(\frac{r}{r_M}\right)^{s-2} \left(1 + \frac{r}{r_M}\right)^{s-4,5} [m^{-2}], \quad 0,5 \leq s \leq 1,5, \quad (3.8)$$

em que r é a distância radial em relação ao eixo do chuveiro e r_M é o raio de Molière, definido por

$$r_M = x_0 \frac{E_{scatt}}{E_c} = 21,2 \text{ MeV} \cdot \frac{x_0}{E_c} [g \text{ cm}^{-2}], \quad (3.9)$$

aproximadamente $9,5 g \text{ cm}^{-2}$. Pela equação 3.1, o raio de Molière em metros é dado por r_M/ρ_{atm} , sendo portanto inversamente proporcional à densidade do meio (PATRIGNANI *et al.*, 2016; BETHE, 1953),

$$r_M = r_M(0) \frac{\rho_{atm}(0)}{\rho_{atm}(h)} = \frac{0,96 g \text{ cm}^{-2}}{\rho_{atm}(h)} \quad (3.10)$$

Ao nível do mar, $r_M(0) = 75 \text{ m}$. Para chuveiro vertical com energia de 1 TeV , $r_M = 200 \text{ m}$ na posição do máximo do chuveiro.

3.2 Radiação Cherenkov

Partículas carregadas provocam a emissão de radiação Cherenkov, se sua velocidade satisfizer a condição $v > c/n$, em que c é a velocidade da luz no vácuo e n é o índice de refração do meio (LANDAU *et al.*, 2013). A Figura 10 mostra a condição de coerência, que implica em uma radiação emitida em um cone com abertura θ dada por

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\beta n}. \quad (3.11)$$

Seja n o índice de refração do ar. A radiação é emitida na atmosfera, cujo índice de refração é variável, de modo que θ é função da posição de onde a radiação foi gerada. Definindo $\eta \equiv n - 1$, temos que η é quase proporcional à densidade do meio e é dado por (BERNLÖHR, 2000)

$$\eta \approx \eta_0 \cdot e^{-z/h_0}, \quad (3.12)$$

em que $\eta_0 = 2,9 \cdot 10^{-4}$ e $h_0 = 7250 \text{ m}$. Observamos pela equação 3.11 que o ângulo máximo de emissão ocorre quando $\beta = 1$. Como $|\cos(\theta) \leq 1|$, a condição para emissão pode ser escrita como $\beta > \beta_{min} = n^{-1}$. Convertida para energia, escrevemos

$$E > E_{th} = mc^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{min}^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - n^{-2}}} \approx \frac{mc^2}{\sqrt{2\eta}} = \frac{mc^2 e^{z/2h_0}}{\sqrt{2\eta_0}}, \quad (3.13)$$

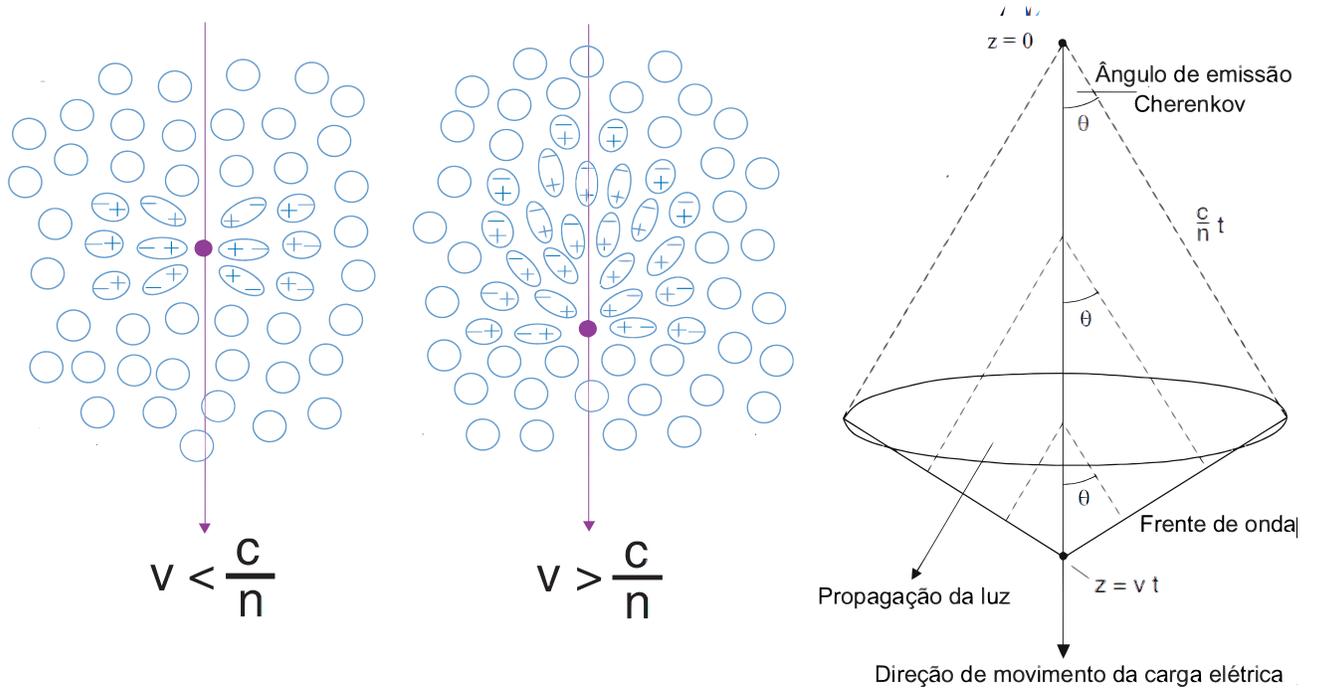


Figura 10 – Uma partícula com velocidade superior à da luz polariza o meio, gerando luz Cherenkov. À direita: uma representação de Huygens que mostra uma partícula carregada emitindo radiação Cherenkov em um cone com ângulo de abertura θ , se tiver velocidade maior que a da luz no meio. A Figura ilustra com apenas três pontos de emissão de radiação que a frente de onda da radiação Cherenkov é a intersecção das frentes de onda das ondas esféricas (não mostradas) emitidas em cada ponto da trajetória da partícula carregada. Adaptadas de (WAGNER, 2007; GRIEDER, 2010).

em que m é a massa da partícula emissora. Calculando para o elétron, múon e próton, temos os seguintes valores ao nível do mar: 22 MeV, 4,6 GeV e 40 GeV. Para uma altitude de 5000 m, esses valores aumentam em cerca de 40 %.

O número N_{ch} de fótons emitidos é dado pela relação de Frank-Tamm (FRANK; TAMM, 1937),

$$\frac{N_{ch}}{dl} = 2\pi\alpha \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)} \right) = 2\pi\alpha \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot \sin^2(\theta), \quad (3.14)$$

em que l é a distância percorrida e α é a constante de estrutura fina. Como a equação 3.14 varia com o inverso do comprimento de onda, a radiação é mais intensa para as maiores frequências, sendo ultravioleta e azul. A equação 3.14 não diverge para frequências maiores, porque a radiação só é emitida para frequências que satisfizerem a condição $\beta n(\lambda) \geq 1$. Na faixa de comprimento de onda da radiação Cherenkov detectada por fotomultiplicadoras, o índice de refração será considerado independente do comprimento de onda λ , uma vez que $n(\lambda) - 1$ difere cerca de 5% nessa faixa (BERNLÖHR, 2000). O último sinal de igualdade da equação 3.14 é devido à equação 3.11. Se o meio tivesse densidade uniforme, o número de fótons gerados não dependeria da posição da

partícula emissora e dependeria linearmente com a distância percorrida. Mas, para a emissão na atmosfera, a dependência de N_{ch} com a altitude z ocorre, uma vez que $\theta = \theta(z)$.

De fato, para as partículas do chuveiro que emitem radiação Cherenkov, temos que $\beta \approx 1$, logo pela equação 3.11, temos que o ângulo de emissão θ é dado por (AL-RUBAIEE *et al.*, 2005)

$$\begin{aligned} \theta &\approx \sin(\theta) = \sqrt{1 - (\beta n)^{-2}} \approx \sqrt{1 - n^{-2}} = \sqrt{1 - (1 + \eta)^{-2}} \approx \sqrt{1 - (1 - 2\eta)} \\ &\approx \sqrt{2\eta_0} \cdot e^{-z/2h_0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para comprimento de onda na faixa 400-700 nm e no nível do mar, onde $\sin^2(\theta) = 2\eta_0$, temos que $N_{ch} \approx 28 \text{ m}^{-1}$. Para comparação, em experimentos que medem radiação Cherenkov na água, são produzidos $2,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ fótons e a emissão ocorre em um ângulo de 45° (GRIEDER, 2010, p. 1015).

A Figura 11 mostra como o ângulo de emissão Cherenkov varia em função da altitude - de acordo com a equação 3.15 - sendo portanto colimada a emissão na direção do eixo do chuveiro.

As Figuras 12 e 13 mostram um efeito geométrico que explica o excesso de fótons observados a cerca de 120 m do eixo do chuveiro - chamado de Anel Cherenkov - valor que diminui alguns metros, se a altitude de observação aumentar (RAO; SINHA, 1988; AHARONIAN *et al.*, 1997a; HILLAS, 1996).

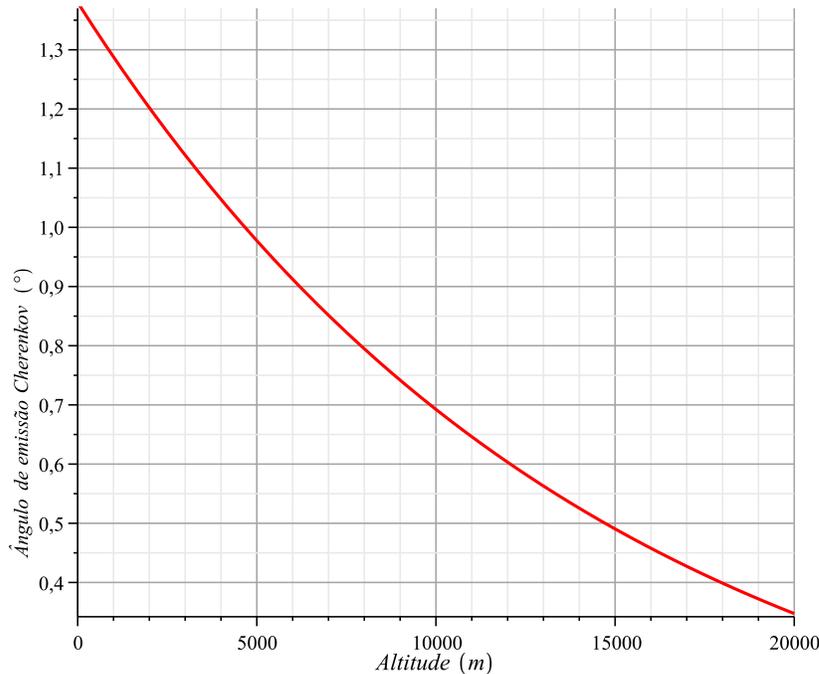


Figura 11 – Colimação da radiação Cherenkov emitida pelas partículas do chuveiro na atmosfera em um cone com abertura da ordem de 1° - calculada pela equação 3.15 - que aumenta pouco à medida que a altitude de emissão diminui.

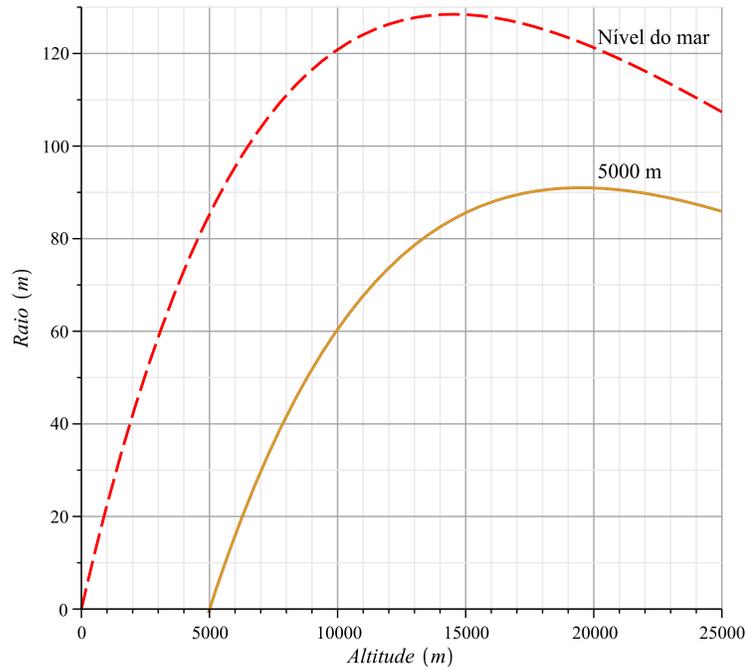


Figura 12 – Posição de impacto do fóton Cherenkov no nível do mar e a 5000 m de altitude em função da altura de emissão, mostrando que há um excesso entre 100 m e 120 m ao nível do mar.

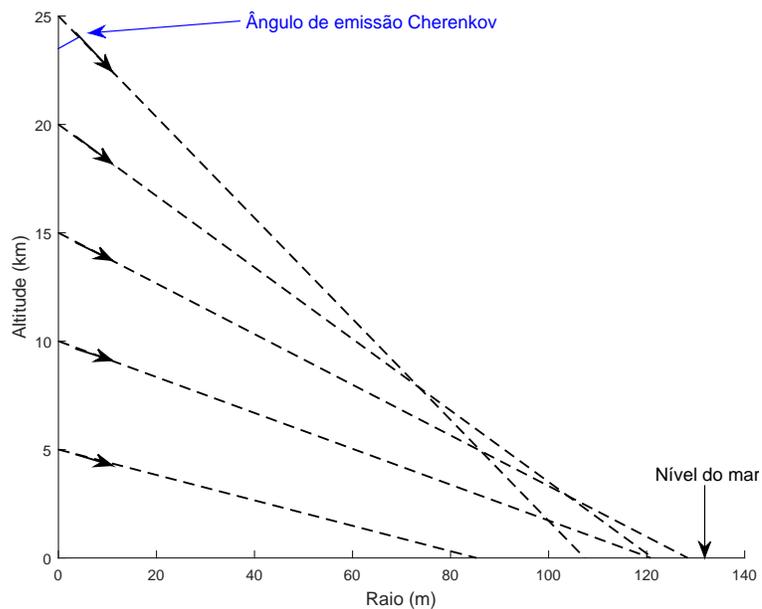


Figura 13 – Efeito geométrico que mostra uma coincidência das posições de impacto no nível do mar dos fótons Cherenkov emitidos pelo chuva a cerca de 120 m do eixo do chuva, formando o Anel Cherenkov. As linhas pontilhadas representam os raios de luz.

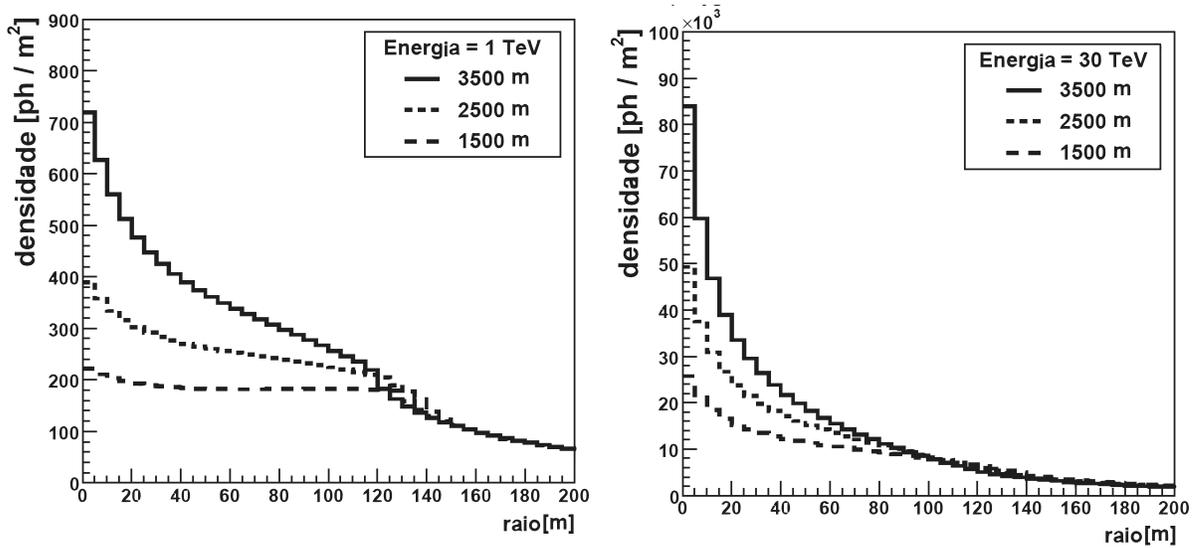


Figura 14 – Distribuição lateral de radiação Cherenkov para diferentes altitudes e energias em função do parâmetro de impacto do chuveiro. Adaptada de (HASSAN *et al.*, 2017).

A Figura 14 mostra a forma da distribuição lateral de luz Cherenkov na altitude de observação. O pico de luz no Anel Cherenkov torna-se menos proeminente à medida que a energia do primário ou a altitude de observação aumentam. De fato, como o máximo do chuveiro nesses casos fica mais próximo do plano de detecção, aumenta-se a intensidade de luz Cherenkov na região interna ao Anel, gerada nas menores altitudes, região em que $z \cdot \tan(\theta)$ é menor.

O número N_γ de fótons Cherenkov produzidos em um chuveiro vertical por intervalo de profundidade x e ângulo polar θ com relação ao eixo do chuveiro é dado por:

$$\frac{dN_\gamma}{dx d\phi} = A(x, \theta) \cdot y(x) \cdot \int_{E_{th}(x)}^{\infty} \frac{dN}{dE}(x) dE, \quad (3.16)$$

em que dN/dE fornece o número de elétrons na profundidade x com energia em torno de E , E_{th} é a energia mínima para o elétron gerar radiação Cherenkov - dada pela equação 3.13 -, $y(x)$ é o número de fótons produzidos por um elétron por profundidade x na atmosfera, e $A(x, \theta)$ é a probabilidade do fóton ser espalhado em um intervalo em torno do ângulo θ . Fótons ultravioleta não interagem via efeito Compton, portanto a radiação Cherenkov é apenas espalhada. Consideramos

$$A(x, \theta) = A(\theta) \propto e^{-\theta/\theta_0}, \quad (3.17)$$

em que $\theta_0 = 0,83E_{th}^{-0,67}$ (NERLING *et al.*, 2006; AHARONIAN *et al.*, 2008) (GRIEDER, 2010, p. 897). Entre as altitudes 0 m e 10000 m, calculamos o valor médio $\theta_0 \approx 4,9^\circ$. Como o ângulo de emissão cherenkov - Figura 11 - é pequeno comparado ao espalhamento angular lateral, então a luz cherenkov detectada a distâncias maiores que 150 m do centro do chuveiro são produzidas pelo espalhamento de partículas secundárias, que viajam aproximadamente naquela direção.

A relação entre a altitude z e a profundidade x é dada pelas equações 3.1 e 3.2. Com isso, pelas equações 3.14, 3.1, 3.15 e 3.2, temos que

$$\begin{aligned} y(x) &\equiv \frac{dN_{ch}}{dx} = \frac{dN_{ch}}{dl} \frac{dl}{dx} = \frac{2\pi\alpha}{\rho(z)} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot \sin^2(\theta) = \frac{2\pi\alpha}{\rho_0 e^{-z/h}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot 2\eta_0 e^{-z/h_0} \\ &\approx \frac{2\pi\alpha}{\rho_0} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot 2\eta_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Obtemos o valor $y(x) \approx 236 \text{ cm}^{-2}/\text{g}$. Na unidade do comprimento de interação x_0 , temos que $y = 8,6 \cdot 10^3$ fótons.

Podemos escrever $dN/dE(x) = N(x) \cdot f(E, x)$, em que $N(x)$ é o número de elétrons a uma profundidade x , que pode ser obtido a partir da equação 3.5 e $f(E, x)$ é a probabilidade de o elétron ter energia em torno de E , que é gerada por uma distribuição chamada de espectro de energia dos elétrons no chuvaire (ROSSI; GREISEN, 1941, p. 269). Tem-se que $\int_{E_{th}}^{\infty} \frac{dN}{dE}(x) dE = N(x) \cdot \int_{E_{th}}^{\infty} f(E, x) dE = N(x)\psi(x)$, em que $\psi(x)$ é a fração de elétrons com energia maior que o limite para produzir radiação Cherenkov a uma profundidade x . De acordo com as referências (HILLAS, 1982a; BOLEY, 1964; AL-RUBAIEE *et al.*, 2005), tem-se que o espectro integral $\psi(x) \approx 0,4$ quando $s = 1$, isto é, na posição do máximo desenvolvimento do chuvaire.

Finalmente, ignorando a absorção, o número total de fótons observados no nível de detecção do chuvaire depende da energia do primário e da altitude - ou profundidade atmosférica x_d - do telescópio e pode ser escrito como

$$\begin{aligned} N_\gamma &= \int_0^{x_d} \int_0^\pi dx d\phi \frac{dN_\gamma}{dx d\phi} \\ &= \int_0^{x_d} dx \frac{dN_{ch}}{dx} \cdot \int_{E_{th}(x)}^\infty \frac{dN}{dE}(x) dE \\ &= \psi \cdot y(x) \int_0^{x_d} N(x) dx \\ &= \psi \cdot y \cdot x_0 \int_0^{t_d} N(t) dt \\ &\approx 3,4 \cdot 10^3 \int_0^{t_d} N(t) dt \\ &\approx 4,0 \cdot 10^7 \frac{E_0}{\text{TeV}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que usamos a relação entre a energia total, a energia crítica e o *total track length* das partículas no chuvaire (JR.; NORDHEIM, 1948; ROSSI; GREISEN, 1941; AL-RUBAIEE *et al.*, 2005).

A quantidade de fótons Cherenkov gerados é proporcional à energia do raio gama primário. Comparando com a Figura 8, tem-se uma quantidade de fótons ordens de grandeza a mais que partículas carregadas. Experimentalmente, mede-se a densidade de fótons no nível de detecção.

Espalhamento e Absorção

O número de fótons detectado no nível de observação dado pela equação 3.19 deve ser corrigido pelos termos que representam os processos de absorção e espalhamento (ESPADANAL; GONÇALVES, 2017). A absorção da radiação Cherenkov depende da quantidade de atmosfera atravessada pelos fótons, portanto depende do ângulo zenital do raio gama primário e da altura do máximo do chuveiro, ou seja, da energia do primário, além do nível de observação e das características da atmosfera. A Figura 15 compara o espectro de emissão Cherenkov na atmosfera para primários gama com energias diferentes. A Figura 15 mostra que o espectro é contínuo - ao contrário da fluorescência - e a emissão diminui à medida que o comprimento de onda aumenta, sendo igual a zero para comprimentos de onda abaixo da faixa do ultravioleta, de acordo com a equação 3.14. Além disso, Figura 15 mostra como a absorção é maior para os menores comprimentos de onda.

Os fótons Cherenkov produzidos no chuveiro sofrem espalhamento Mie por aerosols na atmosfera com dimensões de seu comprimento de onda, por exemplo, partículas de poluição ou de água. Espalhamento Rayleigh ocorre entre os fótons Cherenkov e moléculas da atmosfera com comprimento de onda menor que o dos fótons. Para atmosfera limpa, espalhamento Rayleigh da radiação pelas moléculas de ar é o efeito mais relevante. Luz com comprimento de onda inferior a cerca de 300 nm é fortemente atenuada pela absorção ultravioleta pelas moléculas de ozônio, presente para altitudes maiores que 10 km, mas de todo modo essa faixa de comprimentos de onda não é captada pelas fotomultiplicadoras nos experimentos de radiação gama (BERNLÖHR, 2000). A Figura 16 compara a fração da radiação transmitida devido a cada um desses efeitos.

Os processos de espalhamento e absorção dependem da composição da atmosfera e são portanto variáveis no tempo. Isso significa que a atmosfera deve ser constantemente monitorada para a correta análise dos resultados (BERNLÖHR *et al.*, 2013a).

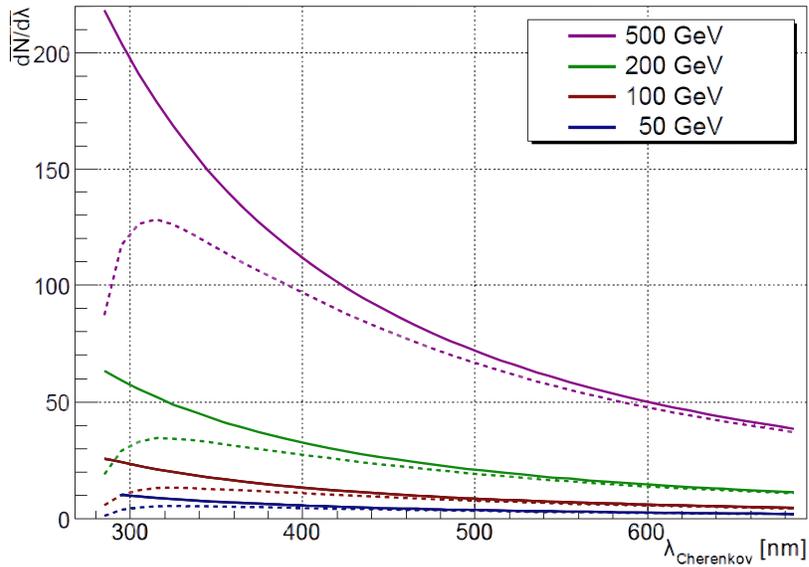


Figura 15 – Espectro da radiação Cherenkov emitida na atmosfera em função do comprimento de onda para diferentes energias do primário gama. As linhas correspondem à altitude de 10 km (sem absorção) e os pontilhados à altitude de 2200 m (com absorção), mostrando um pico de emissão na frequência azul. Foram simulados chuueiros verticais. Adaptada de (WAGNER, 2007).

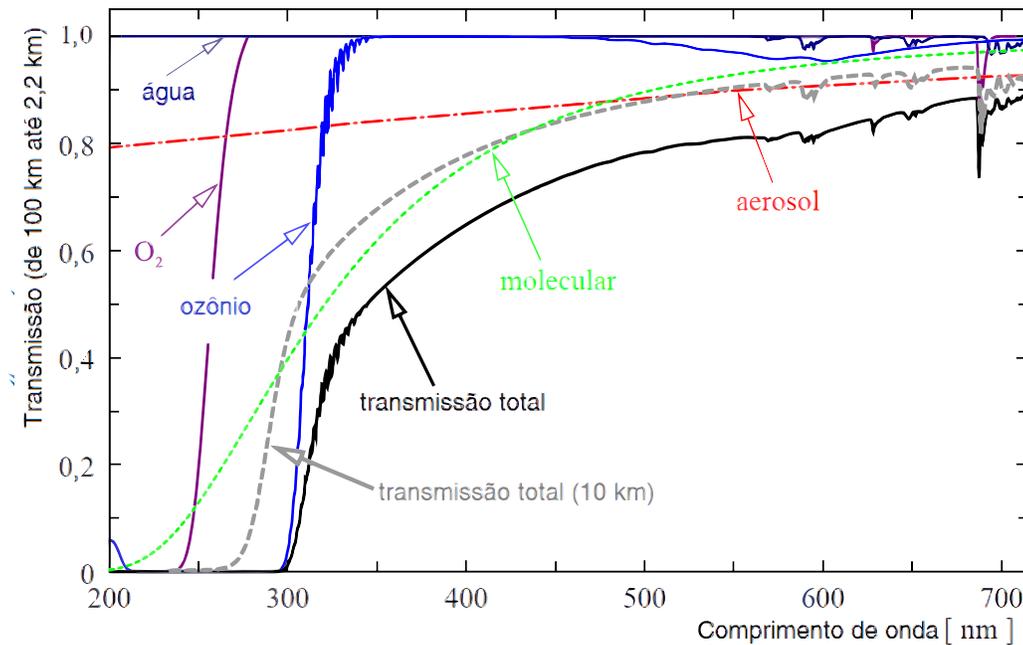


Figura 16 – Simulação da porcentagem da radiação Cherenkov transmitida por diferentes causas para chuueiros verticais na atmosfera tropical. Adaptada de (FRUCK, 2015; BERNLÖHR, 2000).

3.3 Fundo Hadrônico

Primários hadrônicos interagem isotropicamente com os átomos da atmosfera produzindo píons, como mostra a Figura 17⁴. Aproximadamente um terço dos píons gerados são neutros. Cada um deles decai em dois fótons, gerando sub-chuveiros eletromagnéticos. A produção de pares e^-/e^+ como produto do decaimento dos píons ocorre em cerca de 1 % dos decaimentos (PATRIGNANI *et al.*, 2016). Os píons carregados interagem com a atmosfera de modo a produzir novas gerações de píons, até a profundidade em que a probabilidade para o decaimento em múons seja maior (MATTHEWS, 2005).

Considerando a vida média própria dos muons ($\tau \sim 2,2 \mu\text{s}$), contração de Lorentz e a perda de energia comparativamente pequena - em média 2 MeV/g cm^2 na atmosfera predominantemente devido à ionização, para muons com energia de 10 GeV, - sua taxa de decaimento é baixa e uma grande fração dos muons produzidos no chuveiro penetra na atmosfera até serem absorvidos no

⁴ A primeira interação do primário gama pode ocorrer por fotoprodução de pión, com seção de choque aproximadamente três mil vezes menor que a produção de pares. Nesse caso, o chuveiro se desenvolve como um chuveiro hadrônico (GRIEDER, 2010, p. 162).

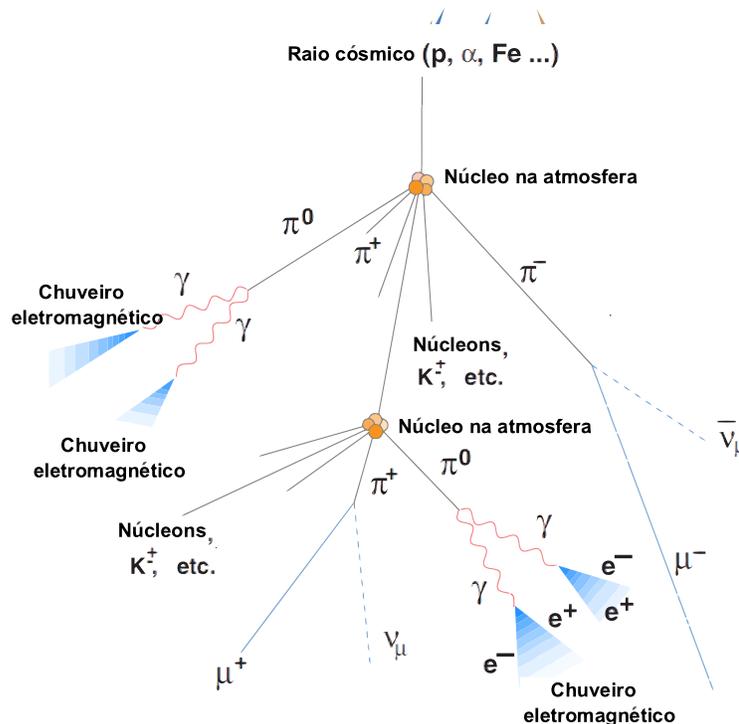


Figura 17 – Modelo simplificado para um chuveiro hadrônico, mostrando seus principais componentes e interações (WAGNER, 2007). Tendo a atmosfera cerca de 1000 g cm^{-2} e sendo o comprimento de interação das interações hadrônicas cerca de 120 g cm^{-2} , o número de interações n dos píons carregados até que seja mais provável seu decaimento deve ser menor que oito; de fato, para prótons com 10 TeV, $n = 2$ (MATTHEWS, 2005).

solo, com energia de alguns GeV⁵. A trajetória dos múons pode ser considerada retilínea, devido à menor importância de *bremstrahlung* e múltiplos espalhamentos. Logo, os múons formam a componente dominante do chuveiro para as maiores distâncias em torno do seu eixo. Cerca de 10 % das partículas carregadas dos chuveiros hadrônicos é composto por múons (GRIEDER, 2010). Uma estimativa para o número total de múons, N , no chuveiro é dada por $N(> \text{GeV}) \sim 10(E_0/115\text{GeV})^{0,8}$, em que E_0 é a energia do primário (GAISSER *et al.*, 2016). Sua distribuição lateral é mais branda em relação aos elétrons do chuveiro por esses dois motivos: menor número de múons e menor espalhamento. Sua distribuição lateral pode ser dada por uma função com a mesma forma da equação 3.8 (GREISEN, 1960), mas em geral cada experimento utiliza sua própria função de distribuição lateral.

A quantidade de radiação Cherenkov dada pela equação 3.14 não depende do tipo de partícula no chuveiro que induz a emissão. Logo, como prótons e outros hádrons preferencialmente decaem e não compõem mais que 2% das partículas do chuveiro mesmo para os primários mais pesados (NERLING *et al.*, 2006), a radiação Cherenkov é produzida a partir dos sub-chuveiros eletromagnéticos e, como efeito de segunda ordem, a partir dos múons.

Em relação à distribuição lateral de luz Cherenkov, destacamos seis diferenças entre os chuveiros eletromagnético e hadrônico. Quando o primário é hadrônico, há mais luz detectada a grandes distâncias em comparação com a quantidade de luz a grandes distâncias de um chuveiro leptônico: o raio típico do chuveiro leptônico é 100 m em comparação com até 300 m dos chuveiros hadrônicos na mesma faixa de energia (HILLAS, 1996; TURVER; WEEKES, 1978). Há duas razões para isso. Em um chuveiro leptônico, os elétrons e fótons não adquirem o momento transversal médio tão alto típico das interações fortes nos chuveiros hadrônicos. Além disso, como os múons preferencialmente não sofrem espalhamento, o decaimento dos múons em pares e^-/e^+ ocorre em regiões mais afastadas do centro do chuveiro em relação à produção de pares no chuveiro eletromagnético.

Pelos mesmos dois motivos, o anel Cherenkov é menos pronunciado para chuveiros hadrônicos, uma vez que as partículas encontradas na região externa ao anel Cherenkov são aquelas oriundas dos espalhamentos (HILLAS, 1982b).

Além disso, a maior fração de múons nos chuveiros hadrônicos gera picos locais na distribuição lateral, gerando maior variação azimutal. A quarta diferença é que há mais luz Cherenkov perto do eixo do chuveiro hadrônico em comparação ao caso eletromagnético. Isso se deve ao maior comprimento de interação das interações hadrônicas, cerca de 120 g cm^{-2} , que aumenta a profundidade onde ocorre o máximo do chuveiro. Também por isso, ao aumentar a altitude, a quantidade relativa de fótons aumenta muito mais no evento hadrônico que no evento eletromagnético, pois a

⁵ Sendo a profundidade da atmosfera cerca de 1000 g cm^{-2} , uma perda de energia de 2 MeV/g cm^{-2} faz com que os múons percam até 2 GeV por ionização ao atingirem a superfície.

absorção da atmosfera fica menos importante neste último caso.

Por fim, a Figura 24 mostra que a intensidade de radiação Cherenkov no chuveiro leptônico é entre duas e três vezes maior que no chuveiro gerado por próton para mesma energia. Para energias menores que ~ 50 GeV, essa fração é ainda maior. A explicação desse fato é a seguinte. À medida que a energia dos píons carregados do chuveiro diminui, eles preferencialmente decaem em múons ou sobrevivem. Se o primário tiver energia ~ 50 GeV, a produção de sub-chuveiros eletromagnéticos será portanto desfavorecida em relação à produção de múons que, nesse caso, podem ter energia abaixo da necessária para gerar radiação Cherenkov, dada pela equação 3.13 (FEGAN, 1997; TURVER; WEEKES, 1978). Embora aumente a contaminação por múons, isso diminui o fundo hadrônico visto por um telescópio Cherenkov observando eventos nessa faixa de energia, e o fluxo de elétrons se torna o fundo dominante.

Existem outras diferenças entre os chuveiros eletromagnéticos e hadrônicos. Por exemplo, no caso hadrônico, as distribuições lateral e longitudinal dos elétrons possuem mais flutuações e uma cauda maior, há comparativamente um atraso no perfil dos tempos de chegada da radiação Cherenkov, o máximo do chuveiro ocorre a menores altitudes, o espectro da radiação Cherenkov difere, assim como a razão entre número de elétrons e múons (AHARONIAN *et al.*, 1997a; CHITNIS; BHAT, 2001).

3.4 Técnica de Imageamento

Os espelhos dos telescópios atmosféricos coletam uma amostra da radiação Cherenkov emitida pelas partículas carregadas do chuveiro enquanto elas percorrem a atmosfera. A câmera consiste em um arranjo de pixels com detectores que convertem os fótons em fotoelétrons e amplificam o sinal para obter voltagens que depois serão reconstruídas para estimar a quantidade de fótons Cherenkov que atingiu cada pixel da câmera. Com um arranjo de fotomultiplicadoras, a câmera registra a intensidade do sinal e seu instante de chegada em cada posição ou pixel, formando uma imagem das intensidades na câmera, como mostra a Figura 18 (DANIEL *et al.*, 2015). Câmeras com campos de visão maiores ($> 5^\circ$) são importantes para a investigação de fontes estendidas de raios gama - como o centro galáctico ou aglomerados de galáxias - ou para a detecção de chuveiros cujo ponto de impacto na superfície esteja mais afastado do telescópio, ou para a detecção de raios gama com as maiores energias ($> \text{TeV}$) (ACHARYA *et al.*, 2017). A Figura 18 mostra que a reflexão no espelho da colimada radiação Cherenkov emitida pelo chuveiro eletromagnético gera na câmera uma imagem com a forma de uma elipse, com o eixo-maior sendo mapeado no desenvolvimento longitudinal do chuveiro. Em primeira aproximação, considera-se que toda a radiação na câmera é proveniente da região em torno do máximo do chuveiro (VÖLK; BERNLÖHR, 2009; HILLAS, 1996). Nessa região, o chuveiro possui maior distribuição lateral das partículas carrega-

das nas maiores altitudes, pela equação 3.10. Por isso, as imagens na câmera tomam a forma de um cometa com a ponta mais larga apontando para a posição da fonte. Quanto maior o tamanho do espelho, mais radiação é coletada e a parametrização da imagem melhora.

A Figura 19 mostra um conjunto de parâmetros popularizados por Hillas que podem ser utilizados para caracterizar a forma e a orientação das imagens na câmera (HILLAS, 1985). Com a contagem de fotoelétrons em cada posição da câmera, os parâmetros podem ser calculados a partir de uma Análise de Componentes Principais. O parâmetro *Size* é a medida do número total de fotoelétrons registrados pela câmera. O parâmetro *Length* é a raiz quadrática média da distribuição de fotoelétrons na câmera ao longo do eixo maior da elipse que foi ajustada à imagem e tem informação sobre o desenvolvimento vertical do chuveiro. *Width* é o análogo em relação ao eixo menor e é uma medida do desenvolvimento lateral do chuveiro. *Alpha* é o ângulo entre o eixo maior da elipse ajustada e a reta que passa pelo centro da câmera e o centro da elipse. *Distance* é uma medida do centroide da imagem em relação ao centro da câmera. Os cálculos envolvidos

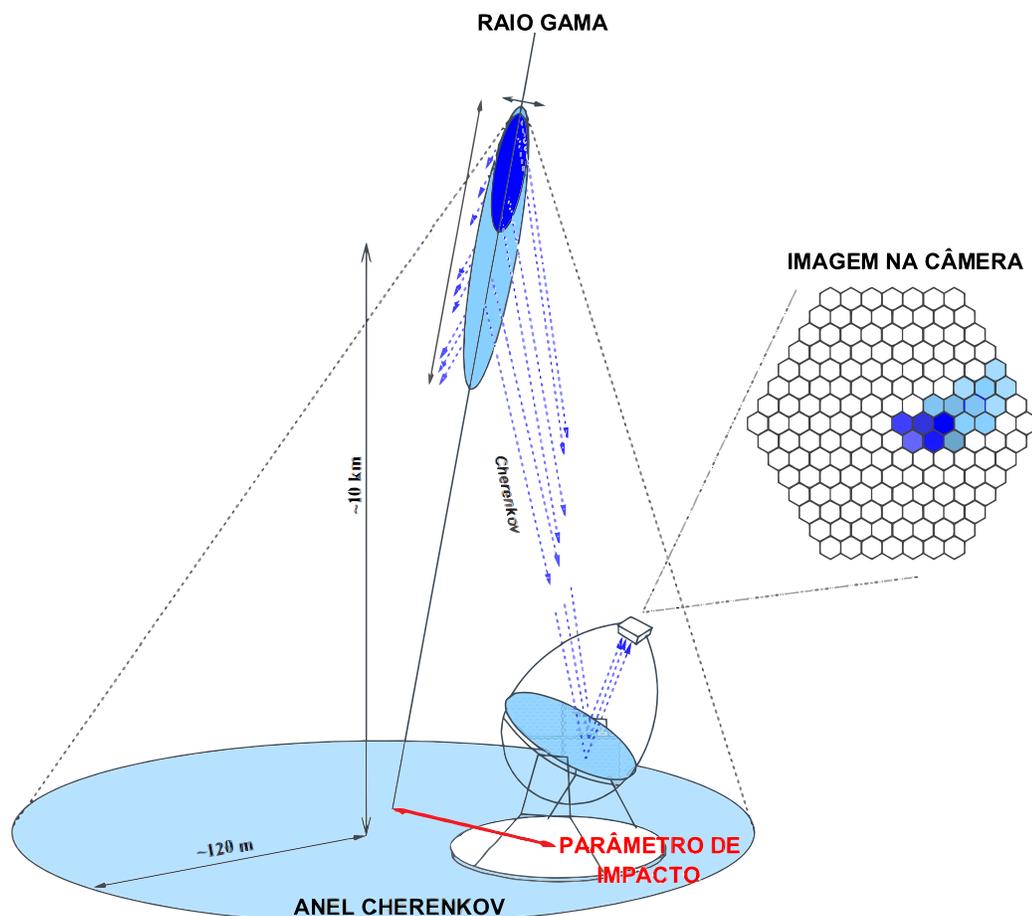


Figura 18 – Captação da luz Cherenkov e sua reflexão no espelho do telescópio, formando uma imagem na câmera. A Figura define parâmetro de impacto como a distância entre o centro do chuveiro projetado no solo e o telescópio. Adaptada de (MOYA, 2007).

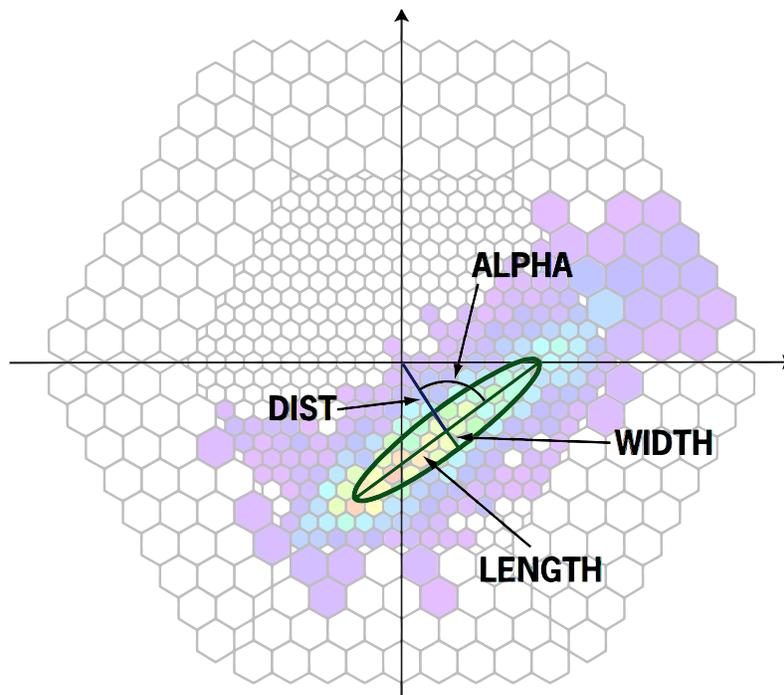


Figura 19 – Alguns parâmetros propostos para descrever a imagem na câmera. A Figura enfatiza que os parâmetros são calculados a partir dos momentos da distribuição de fotoelétrons na câmera (ALBERT *et al.*, 2008c).

nessas definições e em outros parâmetros de Hillas podem ser encontrados em (FEGAN, 1997). Os parâmetros da imagem podem ser utilizados para descobrir a energia e direção de chegada no topo da atmosfera da partícula primária e formam a base de métodos para distinguir se o chuveiro foi causado por um raio gama ou por um hádron (PARSONS; HINTON, 2014; OHM *et al.*, 2009; ALBERT *et al.*, 2008a; KRAWCZYNSKI *et al.*, 2006; FEGAN, 1997).

3.5 Extração do Sinal: Estereoscopia

O conceito de observação estéreo se baseia na detecção simultânea do chuveiro, que passa a ser analisado em projeções diferentes por dois ou mais telescópios. A Figura 20 ilustra a observação estéreo de um chuveiro por três telescópios Cherenkov. Chamaremos de multiplicidade o número de telescópios que registram um mesmo evento. Veremos nas seções a seguir como essa abordagem aprimora a resolução angular, a determinação do parâmetro de impacto, a resolução em energia, a qualidade na identificação de primários gama em um fundo hadrônico, a supressão da luz de fundo e a energia mínima de detecção (MAIER *et al.*, 2017; KONOPELKO *et al.*, 1999b; DAUM *et al.*, 1997).

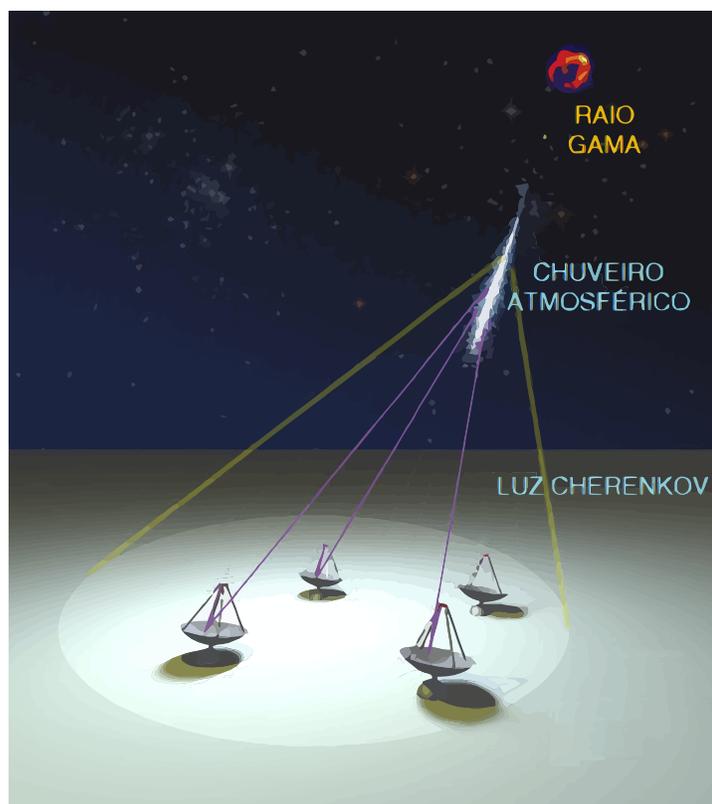


Figura 20 – Três telescópios - em um arranjo com quatro - observando um chuvaire a partir de diferentes projeções. Adaptada de(VÖLK; BERNLÖHR, 2009).

As variáveis da partícula primária - que podem ser raios gama ou hádrons - são a posição de impacto do eixo do chuvaire no nível de observação, a direção de chegada, a sua energia e tipo (massa). As etapas típicas da análise de dados de um experimento com telescópios cherenkov atmosféricos são sintetizadas a seguir. Ênfase foi dada às técnicas que formam a base para o modelo construído no capítulo 4. Descrições completas de todo o processo, incluindo os métodos de calibração, limpeza da imagem, avaliação dos erros sistemáticos, monitoramento das condições atmosféricas e, por fim, o cálculo do espectro de uma fonte podem ser encontrados, por exemplo, em (ALEKSIĆ *et al.*, 2016; BERNLÖHR *et al.*, 2013a; PÜHLHOFER *et al.*, 2003; NAUROIS; ROLLAND, 2009; AHARONIAN *et al.*, 2004b; MACCARONE *et al.*, 2017; MAIER; HOLDER, 2017). Como produto final, a análise procura responder as seguintes questões: a forma e posição da fonte, seja pontual ou extensa; qual são o espectro em energia e as curvas de luz; o tipo de emissão, seja constante, explosiva ou periódica; a probabilidade de detecção da fonte e, no caso de não detecção, o limite superior do fluxo e, por fim, os erros estatísticos e sistemáticos.

3.5.1 Critérios de *trigger*

Os critérios de *trigger* são as condições de qualidade do sinal recebido necessárias para um evento ser aceito para análise posterior. As condições usuais de *trigger* envolvem a exigência de uma intensidade mínima de sinal em um certo número de fotomultiplicadoras e a exigência de alguma distribuição espacial de intensidades na câmara em uma dada janela de tempo, por exemplo envolvendo valores de intensidade em pixels vizinhos em um intervalo de até ~ 10 ns. Além disso, exige-se a detecção do evento por dois ou mais telescópios também em uma dada janela de tempo, da ordem de ~ 100 ns (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; ACTIS *et al.*, 2011).

As estratégias de *trigger* para o arranjo de telescópios devem ser otimizadas levando-se em consideração o compromisso entre rejeitar a contaminação da luz de fundo⁶ e não rejeitar os raios gama que se deseja detectar. Quanto mais fortes forem os critérios de *trigger* adotados, menor será a probabilidade de detecção de eventos pelos telescópios. Em particular, essa otimização é mais relevante para chuveiros com as menores energias (< 100 GeV), que produzem menos radiação Cherenkov e as condições de *trigger* podem suprimir a detecção de raios gama. Em última instância, para todas as faixas de energia, a otimização dos critérios de *trigger* deve levar a uma melhora na resolução angular, resolução em energia, separação gama/hádron e na área efetiva do arranjo.

Para facilitar a análise da imagem obtida, dois critérios adicionais de *trigger* incluem a exigência um número mínimo de fotoelétrons na câmara, entre 50 e 100 (BERNLÖHR *et al.*, 2013a), e um corte no valor do parâmetro *Distance* para limitar o parâmetro de impacto dos chuveiros aceitos (BERNLÖHR *et al.*, 2013a), cuja vantagem veremos na seção 3.5.2.

3.5.2 Ângulo Zenital e Pâmetro de Impacto

Existem várias abordagens para o cálculo da direção de chegada, ou ângulo zenital, do primário (HOFMANN *et al.*, 1999). A ideia principal de todas elas é que a direção do eixo maior da imagem (da elipse) na câmara, se bem parametrizada, define o plano do chuveiro e a direção de chegada corresponde a uma reta contida nesse plano (FOMIN *et al.*, 1994). Pode-se, adicionalmente, também utilizar informações sobre o tempo de chegada das partículas na câmara (ACTIS *et al.*, 2011; STAMATESCU *et al.*, 2011; ALIU *et al.*, 2009). A Figura 21 mostra que a utilização de vários telescópios observando o mesmo chuveiro permite a determinação da direção de chegada pela projeção, em uma câmara, de todas as imagens. Nesse caso, a intersecção dos eixos maiores de todas as elipses projetadas em um mesmo sistema de coordenadas fornece a posição angular que indica a direção de chegada do raio gama.

Para um telescópio apontando na direção da fonte, a direção do eixo maior da elipse aponta

⁶ A luz de fundo é composta pela luminescência atmosférica, luz zodiacal, luz das estrelas, da Lua e da atividade antrópica (KONOPELKO, 2004).

para o centro da câmara. Portanto, quanto maior for o valor do parâmetro *Alpha* (seção 3.5), menos precisa é a medida do ângulo zenital. Para um arranjo de telescópios, para definir a acurácia na determinação da direção de chegada, utiliza-se o parâmetro Θ^2 - definido na Figura 22 - que fornece o quadrado da distância angular entre o ponto de inteseccção de todas as retas e a posição real da fonte. A distribuição de Θ^2 é ajustada a uma gaussiana bidimensional (*Point Spread Function*) cujo desvio fornece a resolução angular (AHARONIAN *et al.*, 1997a; ACTIS *et al.*, 2011). Pode-se também definir resolução angular como o círculo em torno de uma fonte simulada que contém 68 % das direções de chegada reconstruídas. Valores típicos para a resolução angular são da ordem de $\sim 0,1^\circ$, como mostra a Figura 23.

Pela estratégia da intersecção de retas mostrada na Figura 21, se o parâmetro de impacto estiver na linha entre dois ou três telescópios, as imagens nas câmeras serão quase paralelas, dificultando a reconstrução do ângulo zenital. Por outro lado, melhor será a medida do ângulo zenital, quanto mais intersecções houver, maior for o sinal coletado na câmara (para favorecer a parametrização da elipse) e quanto mais excêntricas forem as elipses⁷ (HOFMANN *et al.*, 1999). A imagem na câmara será mais excêntrica quanto maior for o valor do parâmetro *Lenght* em comparação ao parâmetro *Width*, e pela geometria mostrada na Figura 18, isso ocorre quanto maior for o parâmetro

⁷ Desde que a imagem não seja cortada pelas bordas da câmara.

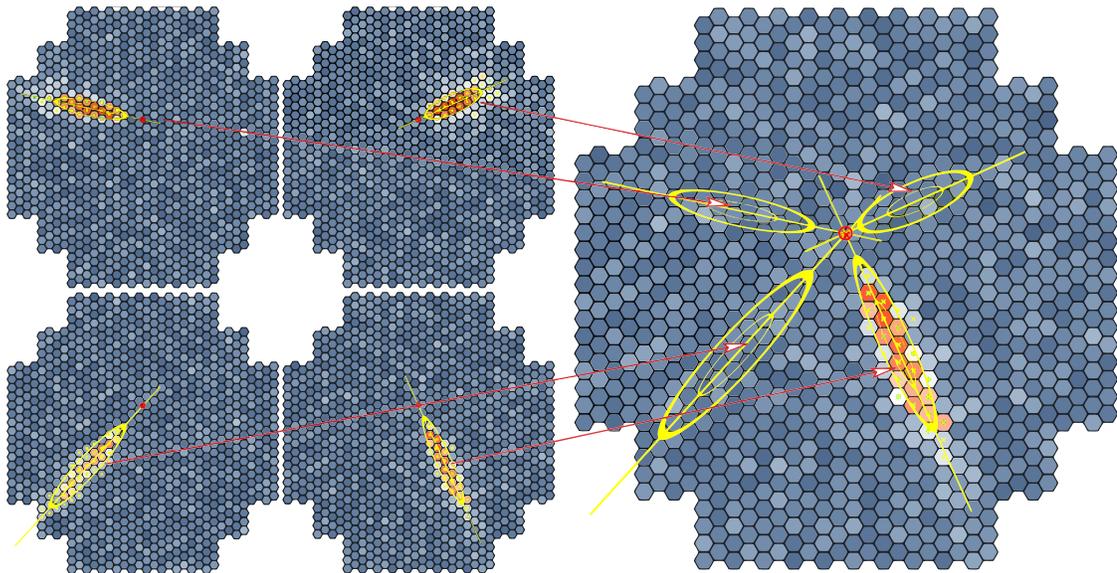


Figura 21 – A inteseccção - ponto em vermelho - de várias imagens em uma câmara possibilita a determinação da direção de chegada do raio gama primário (VÖLK; BERNLÖHR, 2009).

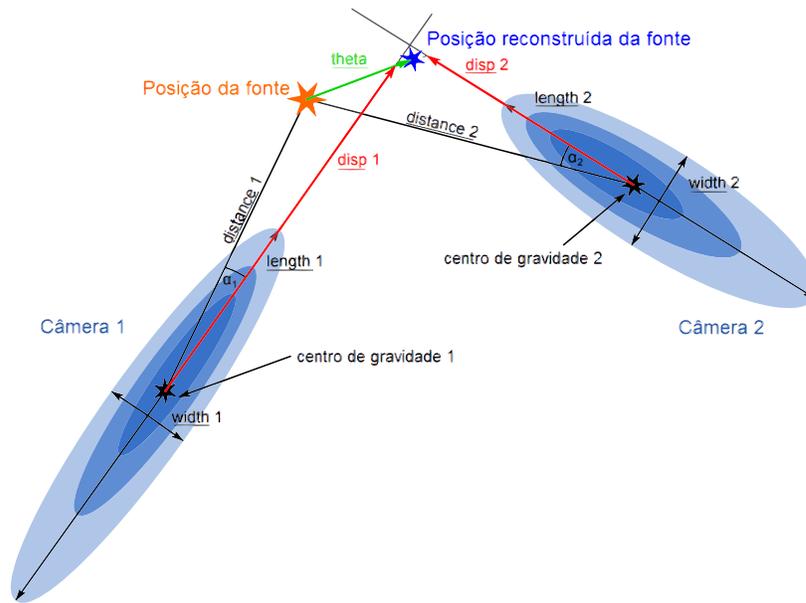


Figura 22 – O parâmetro Θ é a variação angular em relação à direção verdadeira da fonte, considerada como o centro da câmera (FRUCK, 2015). A Figura também define o parâmetro *Disp* como a distância angular do centroide de cada imagem em relação à direção reconstruída no plano da imagem, útil em análises estereoscópicas de chuviros com inclinação $\geq 45^\circ$ (LESSARD *et al.*, 2001; KONOPELKO *et al.*, 1999a; KOSACK *et al.*, 2004; LU *et al.*, 2013; DOMINGO-SANTAMARIAA *et al.*, 2005).

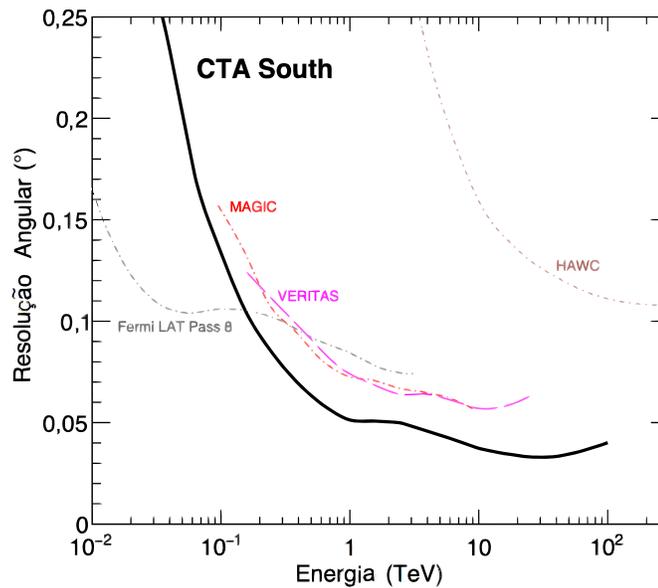


Figura 23 – Exemplos de resolução angular para alguns arranjos de telescópios, mostrando sua ordem de grandeza e sua variação em função da energia reconstruída. Nesta Figura, a resolução angular é definida como o círculo em torno de uma fonte simulada que contém 68 % das direções de chegada reconstruídas. Adaptada de (CTA, 2017).

de impacto, o ângulo zenital de chegada ou a energia do primário.

O parâmetro de impacto também é determinado a partir de uma construção geométrica estereoscópica e depende da medida do ângulo zenital. Quando o centro do chuveiro coincide com a posição do telescópio, ou melhor, quando o parâmetro de impacto for nulo ou pequeno (< 100 m), as imagens geradas tendem ao formato circular. Isso dificulta a determinação da direção do eixo maior da elipse. À medida que o parâmetro de impacto aumenta, o parâmetro *Distance* aumenta para eventos gama (FEGAN, 1997; AHARONIAN *et al.*, 1997a). Nessa situação, a imagem do chuveiro se torna mais alongada e mais deslocada do centro da câmera, até ficar próxima à borda da câmera e, portanto, sofrer viés de amostra incompleta. Esses dois limites enfraquecem a resolução angular, em energia e a qualidade da separação gama/hádron (AHARONIAN *et al.*, 1997a; FEGAN, 1997; KONOPELKO, 2004). O erro na reconstrução do parâmetro de impacto é menor que 20 m, que pode aumentar alguns metros com o aumento do valor do parâmetro de impacto (AHARONIAN *et al.*, 1997b; ALEKSIĆ *et al.*, 2016).

3.5.3 Energia

A Figura 24 mostra a relação linear entre a energia do primário e a quantidade total de fótons Cherenkov produzidos no chuveiro, dada pela equação 3.19. Ela pode ser empregada para reconstruir a energia do primário pela medida da quantidade de radiação detectada a uma certa distância do eixo do chuveiro, sendo conhecida a forma da distribuição lateral de radiação Cherenkov na altitude de observação (Figura 14). O cálculo da energia depende portanto do parâmetro de impacto do chuveiro. O cálculo da energia também depende do ângulo zenital do evento, uma vez que quanto mais inclinado for o chuveiro, maior a quantidade de atmosfera atravessada e portanto maior a absorção de partículas (e.g. (ALEKSIĆ *et al.*, 2016)).

A energia do primário pode ser calculada através de tabelas ou parametrizações geradas por simulações de Monte Carlo (MOHANTY *et al.*, 1998) ou com algoritmo de *Random Forest* (ALBERT *et al.*, 2008a). Na observação estéreo, a energia é calculada através da média obtida para todos os telescópios que detectam o chuveiro (MAIER *et al.*, 2017; ACTIS *et al.*, 2011; COLIN *et al.*, 2009; MOHANTY *et al.*, 1998). Em (ALEKSIĆ *et al.*, 2016), os inversos das flutuações em energia compõem pesos para o cálculo da energia média observada pelos telescópios que detectam um evento e uma correção nas tabelas é realizado para levar em consideração a dependência azimutal do parâmetro *Size* com relação ao campo magnético da Terra.

A resolução em energia pode ser definida como a largura da distribuição $\Delta E = (E_{recon} - E_{real})/E_{real}$, formada pelo erro relativo entre as energias reconstruídas E_{recon} e as energias simuladas E_{real} de uma dada fonte. Valores típicos situam-se entre 10-30 %, como mostra a Figura 25. Quanto maior a multiplicidade da observação, esperamos que menor se torne o erro obtido pelo

cálculo da média da energia sobre todos os telescópios. Além disso, na observação estéreo, o parâmetro de impacto é mais bem determinado, e isso implica melhor resolução em energia (ALEKSIĆ *et al.*, 2016; HOFMANN *et al.*, 2000b). Portanto, a estereoscopia melhora a resolução em energia de uma observação.

Para as menores energias (< 100 GeV), a resolução em energia apresenta resultados piores que para altas energias, porque os chuveis apresentam flutuações maiores e a determinação do parâmetro de impacto degrada. Para as energias na faixa intermediária (TeV), a resolução em energia do arranjo melhora em relação às baixas energias, porque as flutuações nos chuveis tornam-se menores e a multiplicidade do evento aumenta. Para energias ainda maiores (> 10 TeV), a resolução em energia piora devido ao maior número de imagens cortadas pelas bordas da câmera e ao menor número de eventos para gerar uma estatística (HOFMANN *et al.*, 2000b), como mostra a Figura 25 para três arranjos de telescópios.

Variações na densidade da atmosfera podem alterar a posição do máximo do desenvolvimento longitudinal do chuveiro. A consequência é modificar o parâmetro *Size*, de modo que a energia reconstruída a partir de tabelas também mudará. Além disso, nuvens e poeira absorvem radiação Cherenkov, o que diminui a intensidade da radiação coletada e portanto dificulta a taxa de detecção (e. g. (BERNLÖHR, 2000; SOBCZYŃSKA; BEDNAREK, 2014; KRENNRICH *et al.*, 1999)). Finalmente, os erros sistemáticos da eletrônica podem chegar a 10 %, degradando ainda mais a resolução em energia dos telescópios (ALBERT *et al.*, 2008c).

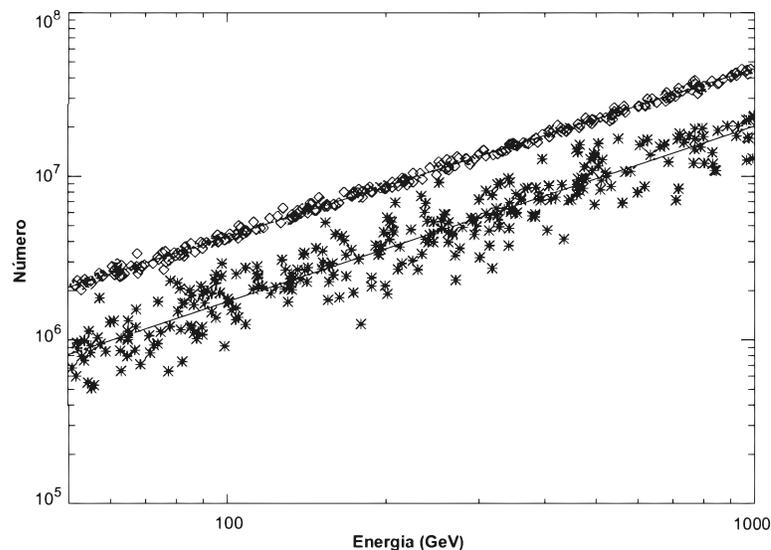


Figura 24 – Relação entre a energia do primário e a quantidade total de fótons Cherenkov gerados por primários gama (losangos) ou prótons (estrelas). As flutuações para chuveis hadrônicos são maiores, mostrando, para uma dada quantidade de fótons, a faixa de energia dos chuveis hadrônicos que se assemelham aos chuveis eletromagnéticos. Adaptada de (CHITNIS; BHAT, 1998).

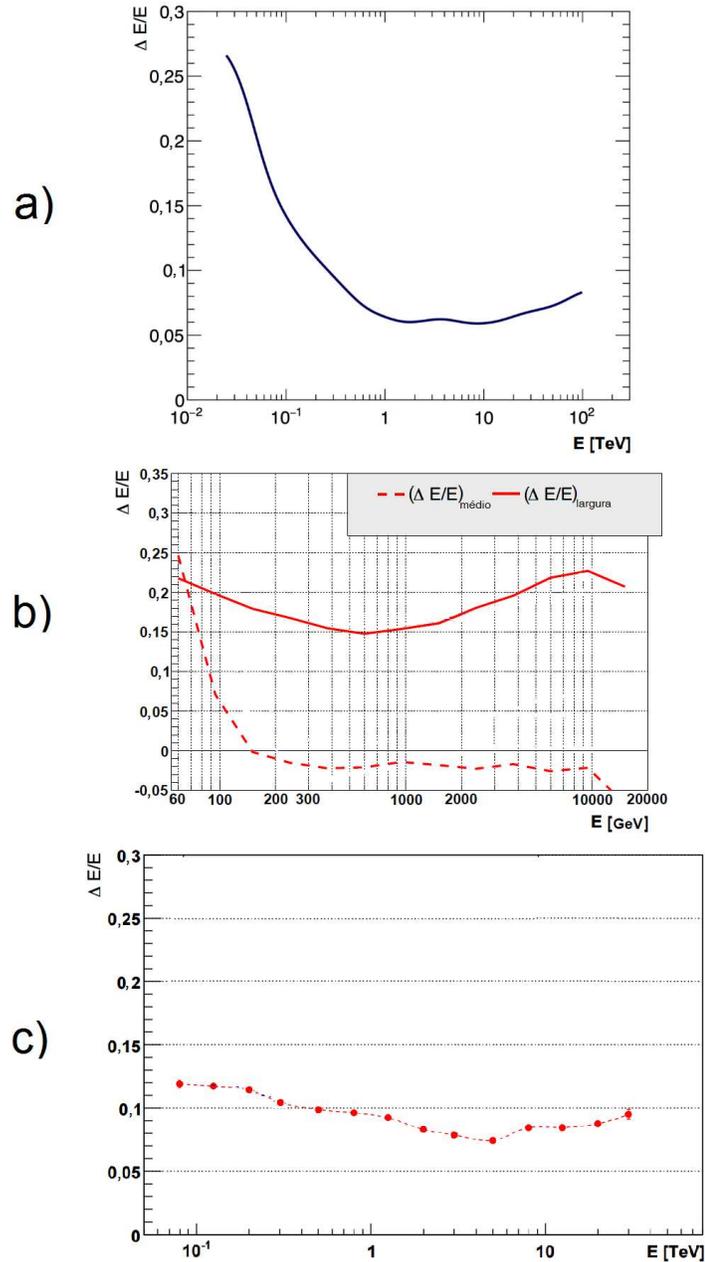


Figura 25 – Exemplos da resolução em energia para três arranjos de telescópios: a) CTA-Sul, b) MAGIC e c) H.E.S.S., mostrando sua ordem de grandeza e sua variação em função da energia. A resolução em energia é definida como a largura da distribuição $\Delta E = (E_{recon} - E_{real})/E_{real}$, formada pelo erro relativo entre as energias reconstruídas E_{recon} e as energias simuladas E_{real} de uma fonte, em função de a) E_{recon} e b) E_{real} . A largura é definida como a) a metade do intervalo em torno de zero que contém 68 % da distribuição, b) o desvio padrão de uma gaussiana ajustada à distribuição $\Delta E/E$ e c) a raiz do valor quadrático médio. Figuras adaptadas de (CTA, 2017; ALEKSIC *et al.*, 2016; NAUROS; ROLLAND, 2009).

3.5.4 Separação Gama/Hádrón

Os chuveiros leptônicos correspondem a cerca de 1 % dos chuveiros hadrônicos. Isso implica um grande ruído de fundo que deve ser separado do sinal de raios gama (ALBERT *et al.*, 2008c; VÖLK; BERNLÖHR, 2009). Nesta seção, serão discutidas as diferenças entre os chuveiros hadrônicos e eletromagnéticos que podem ser empregadas para fazer essa separação.

A forma das imagens do chuveiro na câmera, que é uma medida de como a energia está distribuída nele, indica se o primário é um raio gama ou um hádrón. A análise da forma dessas imagens permite realizar a discriminação entre primários gama e hadrônicos com rejeição de hádróns próxima a 100 %. Simulações de Monte Carlo de chuveiros leptônicos ou hadrônicos e da sua detecção - que começaram com os trabalhos de Hillas (HILLAS, 1985) na década de 1980 - mostram diferenças entre os dois casos para as distribuições de *Width*, *Length* e *Alpha* obtidas por um telescópio. A Figura 26 mostra um exemplo das distribuições desses parâmetros. Um esquema de classificação de várias distribuições pode ser usado para realizar a separação gama/hádrón: comparando distribuições simuladas por raios gama e hádrón, cortes podem ser selecionados de modo a manter o maior número possível de raios gama e rejeitar o maior número possível de hádróns.

Para o caso de fontes pontuais, os telescópios são alinhados com a fonte, e a imagem da elipse tende a apontar para o centro da câmera. Com isso, no caso de chuveiros leptônicos o parâmetro *Alpha* adquire valores próximos a zero. O fundo hadrônico gera eventos isotrópicos em relação à direção da fonte, de modo que para eles a distribuição de *Alpha* é isotrópica entre 0° e 90° . Logo, uma reconstrução boa da direção de chegada do primário gera uma distribuição de eventos mais estreita em torno da fonte e com isso um menor número de eventos hadrônicos de fundo. As distribuições de *Length* e *Width* para hádróns são mais largas, porque as imagens geradas por eles são mais difusas que as elipses relacionadas aos eventos gama (AHARONIAN *et al.*, 1997a).

Como mostra a Figura 27, as imagens geradas por primários gama são mais compactas que aquelas geradas por primários hadrônicos, visto que os chuveiros hadrônicos se desenvolvem em uma porção maior da atmosfera, produzem chuveiros secundários e partículas com maior componente de momento transversal, além de serem mais sujeitos a flutuações no seu desenvolvimento. A imagem formada na câmera fica mais caótica, e não apenas maior. As imagens geradas por chuveiros leptônicos são frequentemente elípticas na direção da fonte na câmera, e as hadrônicas possuem picos mais afastados ou arcos isolados formados por múons produzidos próximos ao telescópio por causa de sua emissão próxima à superfície (FEGAN, 1997; BOCK *et al.*, 2004).

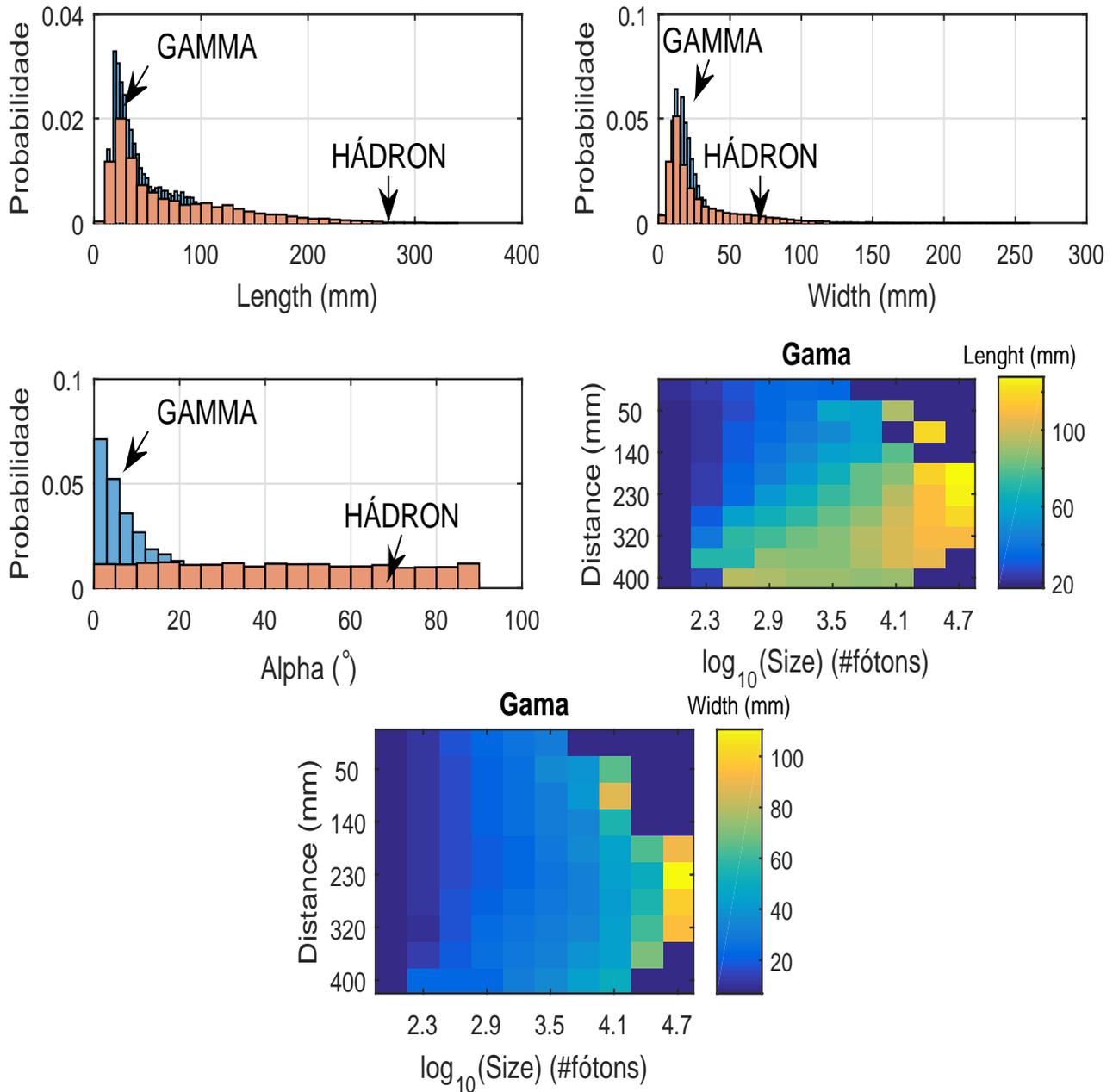


Figura 26 – Distribuições dos parâmetros *Length*, *Width* e *Alpha* para os chuviscos eletromagnéticos e hadrônicos simulados na faixa de energia 10 GeV - 30 TeV. A Figura também mostra as correlações de *Length* e *Width* com *Size* e *Distance* para chuviscos eletromagnéticos. Os dados que utilizamos para compor essa Figura são os mesmos de (BOCK *et al.*, 2004).

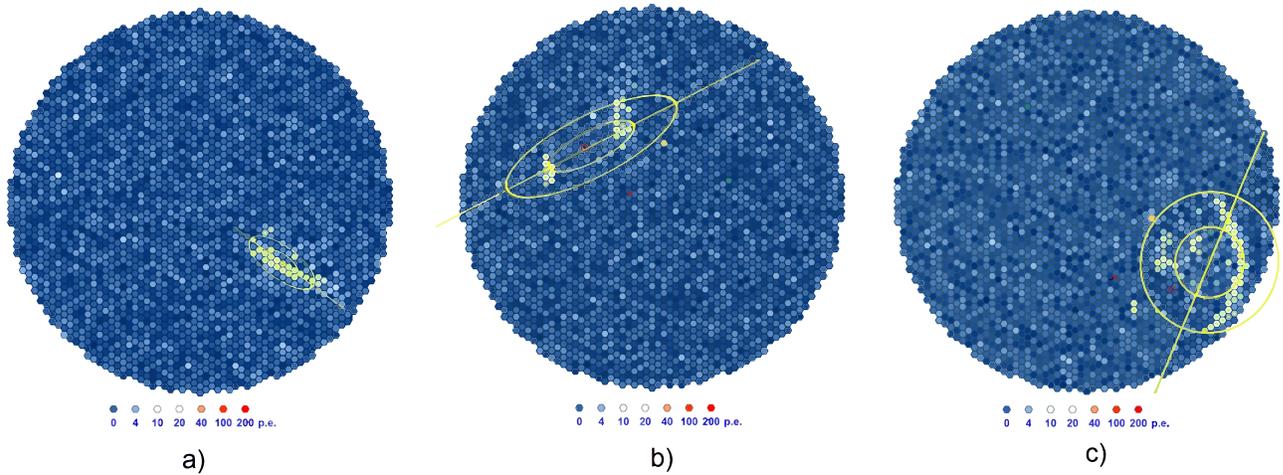


Figura 27 – Exemplos da forma da imagem na câmara obtida por a) um chuvaire eletromagnético, em forma de elipse apontando para o centro da câmara e b) um chuvaire hadrônico, com algum formato irregular. c) Imagem em forma de arco gerada por um múon local.

3.6 Baixas Energias

Para baixas energias, entre 1 e 100 GeV, a menor quantidade de fótons Cherenkov gerados nos chuvaire - dada pela equação 3.19 - dificulta a separação dos eventos gama com a luz de fundo - com fluxo cerca de 10^{12} fótons $m^{-2} s^{-1} sr^{-1}$ (CAWLEY; WEEKES, 1995). Além disso, a menor quantidade de fótons também degrada a análise das imagens obtidas, porque com menos fotoelétrons nas imagens, sua parametrização piora. Por isso, a detecção de primários nessa faixa de energia necessita de condições mais fortes de *trigger*, telescópios com espelhos maiores ($\sim 400^\circ$ de área geométrica) e, se possível, eletrônica mais eficiente na conversão da radiação Cherenkov em fotoelétrons, para que se tenha uma imagem com um número mínimo de fotoelétrons que garanta uma boa reconstrução do evento (≥ 50) (AHARONIAN *et al.*, 2001)⁸. Mesmo assim, para baixas energias, como a imagem é menor e menos bem definida, a classificação entre chuvaire eletromagnético ou hadrônico com base nos parâmetros da imagem se torna mais difícil. Além disso, as flutuações entre chuvaire aumenta para as menores energias, aumentando as flutuações nos parâmetros da imagem (CHITNIS; BHAT, 1998; SOBCZYŃSKA, 2009), e o campo magnético da Terra distorce a forma da imagem em comparação com os chuvaire de energias mais altas (HASSAN *et al.*, 2017; SZANECKI *et al.*, 2013). Além disso, a contaminação pelos múons locais - que deixam sinal em apenas um dos telescópios do conjunto - é mais relevante que para altas energias. Esse é outro fator que aumenta a energia mínima de detecção para um telescópio em observação mono.

⁸ Os fótons Cherenkov gerados por chuvaire de baixa energia chegam ao telescópio com um maior atraso temporal que os de mais alta energia. Como a janela de tempo é um critério de *trigger* utilizado para separar o sinal da luz de fundo, os espelhos dos telescópios que observam as menores energias devem preferencialmente ser parabólicos, porque estes não alargam a distribuição dos tempos de chegada das partículas

Uma vantagem da observação estéreo é diminuir o limite inferior de energia detectável - pela habilidade desse modo de observação em registrar eventos com menor quantidade de luz em cada telescópio. Isso porque exigir coincidência de *trigger* simultânea entre diversos telescópios reduz o número de coincidências aleatórias geradas pela luz de fundo e a detecção de múons locais, de modo que um arranjo de telescópios pode trabalhar com condições mais fracas de *trigger* e, portanto, com um limite inferior de energia (FUNK *et al.*, 2004; AHARONIAN *et al.*, 2001).

Para energias menores que 100 GeV, elétrons geram um fluxo isotrópico de chuviros com características semelhantes aos originados por raio gama, sendo parecidas as formas das imagens na câmera, e a única maneira de estimar seu fluxo é através de simulações (GRIEDER, 2010). Além disso, sub-chuviros eletromagnéticos gerados pelo decaimento de píons podem acionar os telescópios (SOBCZYŃSKA, 2015). No entanto, a observação estéreo pode fazer a identificação do primário elétron ou dos sub-chuviros pela diferença na orientação das imagens nas câmeras dos telescópios que detectaram o evento .

Para aumentar a contagem de fótons, pode-se elevar o nível de observação, por exemplo, até 4000 m ou 5000 m, uma vez que quanto maior a altitude de detecção, maior é a intensidade de radiação Cherenkov na região interna ao Anel Cherenkov (Figura 14), bem como é menor a absorção de partículas pela atmosfera (Figura 16). Além disso, estando em altitude elevada, os detectores ficam posicionados mais próximo ao máximo do chuviro, região com menor flutuação entre chuviros distintos ⁹. Porém, ao elevar a altitude, o raio Cherenkov diminui (Figura 13). Isso significa que os telescópios devem ser posicionados mais próximos ao centro do chuviro, tornando as elipses nas câmeras menos excêntricas e alargando a distribuição do parâmetro *Alpha*. Isso degrada a resolução angular, a determinação do parâmetro de impacto, a resolução em energia e a qualidade na separação gama/hádron (AHARONIAN *et al.*, 2001; KONOPELKO, 2004)

3.7 Sensibilidade

O nível de significância S de uma medida é a contagem do número de raios gama N_γ na unidade do desvio padrão da contagem dos eventos de fundo, σ_B . Supondo fundo poissoniano, de modo que $\sigma_B = \sqrt{N_B}$, e considerando prótons como o principal componente do fundo, tem-se que (AHARONIAN *et al.*, 1997b)

$$S = \frac{N_\gamma}{\sqrt{N_p}}. \quad (3.20)$$

⁹ As flutuações no chuviro são proporcionais à quantidade de partículas carregadas (GAISSER *et al.*, 2016, p. 311).

Os números de raios gama e prótons são dados por

$$N_{\gamma} = \phi_{\gamma} A_{eff} t \kappa_{\gamma} dE, \quad (3.21)$$

$$N_p = \phi_p A_{eff} t \kappa_p \Omega dE, \quad (3.22)$$

em que ϕ é o fluxo ($\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{TeV}^{-1}$) na unidade de fótons Cherenkov ou fotoelétrons, A_{eff} é a área efetiva de detecção² considerada igual tanto para raios gama quanto para prótons (ACTIS *et al.*, 2011), t é o tempo de observação, κ é a aceitação, dE é a largura do intervalo de energia em que estamos calculando o número de raios gama ou prótons e Ω é o ângulo sólido de observação em torno de uma fonte, aqui considerada pontual. Para eventos hadrônicos, por serem isotrópicos, integramos também na variável angular (AHARONIAN *et al.*, 1997a).

A sensibilidade é definida como o fluxo mínimo necessário para detectar um sinal de raio gama para um dado nível de significância (AHARONIAN *et al.*, 1997b) e pode ser calculada rearranjando a equação 3.20, usando as equações 3.21 e 3.22, de modo que

$$\phi_{\gamma} = \frac{S}{Q} \sqrt{\frac{\Omega \phi_p}{A_{eff} t dE}}, \quad (3.23)$$

em que $Q = \kappa_{\gamma} / \sqrt{\kappa_p}$ é o fator de qualidade (AHARONIAN *et al.*, 1992; FEGAN, 1997). Consideramos um nível de significância igual a 5, tempo de observação de 50 h e fluxo de raios cósmicos como $\phi_p = 0,096 \cdot 10^{-7} E^{-2.7} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr TeV}^{-1}$ (BIGONGIARI *et al.*, 2013). Seja $dE = E/5$, ou seja, dividimos cada década de energia em cinco intervalos, que corresponde a 20 % de precisão na determinação da energia. Para um cone de abertura 2θ , considerando simetria azimutal, temos que $\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi(1 - \cos(\theta))$. Assim, os únicos parâmetros livres são A_{eff} , Q e Ω .

Pela equação 3.23, pode-se diminuir a sensibilidade aumentando a área efetiva de detecção, aumentando a resolução angular de modo a diminuir o ângulo sólido de observação Ω ou aumentando o fator de qualidade Q . Aumentar o tempo de observação t também melhora a sensibilidade, porém um tempo de observação de 50 h é usado a fim de ser possível comparar a sensibilidade de experimentos diferentes (ACTIS *et al.*, 2011).

O nível de significância de uma medida aumenta quando diminui a probabilidade de um sinal gama observado ser originada por alguma flutuação do fundo hadrônico. Nesse sentido, uma estimativa melhor que a equação 3.20 para o nível de significância é dado pela estatística de Li e Ma (LI; MA, 1983; GILLESSEN; HARNEY, 2005; BEHNKE *et al.*, 2013). No entanto, a equação 3.23 pode ser empregada para fontes fracas (ALEKSIĆ *et al.*, 2016).

² Área efetiva é o produto da probabilidade de detecção de eventos em uma dada área pelo valor dessa área.

Para utilizar a estatística de Li e Ma, escolhem-se duas regiões de observação dos telescópios, *on* e *off*, fisicamente motivadas *a priori* por possivelmente conter uma fonte e por não conter fonte alguma, respectivamente. A contagem na região *on* será chamada de N_{on} e a contagem na região *off* será chamada de N_{off} . Temos que $N_{on} = N_{\gamma} + N_p$. Temos que N_p é a contagem de fótons do fundo na região *on* e N_{off} é a contagem na região *off*. A razão α entre as contagens nas regiões *on* e *off* é dada. Uma vez que αN_{off} é a contagem esperada na região *on* caso não haja fontes, então para uma identificação positiva devemos ter $N_{on} > \alpha N_{off}$. Queremos saber a probabilidade de que um excesso seja consequência de uma fonte, ao invés de ser originado por uma flutuação do fundo. Li e Ma discutem algumas maneiras de resolver a questão e propõem uma solução. Como N_{on} e N_{off} são variáveis aleatórias, então o nível de significância também será. Li e Ma usam métodos de Monte Carlo para mostrar que a seguinte equação para a significância é uma distribuição gaussiana para contagens acima de dez para N_{on} e N_{off} :

$$S' = \sqrt{2} \left(N_{on} \ln \left(\frac{(1 + \alpha)N_{on}}{\alpha(N_{on} + N_{off})} \right) + N_{off} \ln \left(\frac{(1 + \alpha)N_{off}}{N_{on} + N_{off}} \right) \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

em que as contagens N_{on} e N_{off} são dadas pelas equações 3.21 e 3.22 e consideramos $\alpha = 0,2$ (BERNLÖHR *et al.*, 2013a).

Quanto maior a faixa de energia observada pelos telescópios, mais fótons Cherenkov são coletados e, além disso, as flutuações entre os chuviros tornam-se menores. Isso significa que a reconstrução do evento enriquece. No entanto, para altas energias, na faixa de 100 TeV, a limitação na sensibilidade do arranjo de telescópios é a menor estatística. Para baixas energias, menores que 100 GeV, pela seção 3.3, o fundo hadrônico visto por um telescópio cherenkov diminui. Porém, o fundo composto por elétrons, a contaminação da luz de fundo e a pior reconstrução dos eventos em comparação às energias mais altas limita a sensibilidade do arranjo.

CAPÍTULO 4

MODELO HEURÍSTICO PARA UM ARRANJO DE TELESCÓPIOS CHERENKOV

Neste capítulo, construiremos um modelo heurístico para descrever as principais características da performance de uma rede de telescópios Cherenkov atmosféricos. A partir dele, serão concebidas funções - ou métricas - que serão posteriormente implementadas no algoritmo de otimização, visando buscar soluções para o problema do arranjo de telescópios. Este capítulo traduz tais características por meio de funções cujo domínio é a geometria do arranjo. A escolha das métricas é pautada por argumentos gerais aplicáveis a quaisquer telescópios Cherenkov atmosféricos, porque elas dependem fundamentalmente das flutuações no desenvolvimento dos chuveiros, fator que em última instância limita a performance dos telescópios (HOFMANN, 2006). Embora tenhamos empregado resultados de algumas simulações simplificadas, o método em si é indistinto e abrangente, porque não depende de especificidades de experimento algum. O objetivo da seção 4.1 é obter tanto a forma da distribuição lateral de radiação Cherenkov, quanto suas flutuações em função da coordenada radial em relação a um telescópio. Com elas, na seção 4.2 serão obtidas as curvas de probabilidade de detecção para os telescópios. Nas seções 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, construiremos as métricas que desejaremos otimizar. Nas seções 4.8 e 4.9 comentaremos sobre a separação do sinal gama no fundo hadrônico e sobre como ampliar o espaço de busca de forma a incluir nele os parâmetros dos telescópios. Por fim, na seção 4.10, aplicaremos o modelo para os casos mais simples - de arranjos com três e quatro telescópios - com geometrias fixas, a fim de investigarmos como a escala de separação entre os telescópios se relaciona com os objetivos da otimização.

4.1 Curvas de Luz Cherenkov

Diferentes cálculos da distribuição lateral de radiação Cherenkov podem ser encontrados em (BOLEY, 1964; ZATSEPIN; CHUDAKOV, 1962b; ZATSEPIN; CHUDAKOV, 1962a; ZATSEPIN, 1965; BROWNING; TURVER, 1977; HILLAS, 1982b; HILLAS, 1982a; ACHARYA *et al.*, 1982; RAO; SINHA, 1988; PORTOCARRERO; ARQUEROS, 1998; NERLING *et al.*, 2006; RAHMAN *et al.*, 2001; DEDENKO *et al.*, 2008; ESPADANAL; GONÇALVES, 2017). Pela equação 3.16, para o cálculo da distribuição de fótons Cherenkov na área de impacto do chuveiro, é necessário conhecer o espectro das partículas carregadas e a distribuição angular de espalhamento delas (HILLAS, 1982a; NERLING *et al.*, 2006). Nesta seção, consideraremos um cálculo mais simples que supõe independentes da altitude o espectro em energia dos elétrons - como por exemplo é feito em (AL-RUBAIEE *et al.*, 2005; KONOPELKO, 1997) - bem como a energia mínima para a emissão Cherenkov, dada pela equação 3.13.

A posição de impacto no solo de um fóton Cherenkov depende da posição na atmosfera onde ele foi gerado e do ângulo entre o eixo do chuveiro e o momento linear do fóton ao atingir o solo, como mostra a Figura 20. Esse ângulo depende tanto da abertura do cone Cherenkov, dado pela equação 3.11, quanto do ângulo de espalhamento, aqui modelada pela equação 3.17. A absorção dos fótons pela atmosfera será ignorada, porém o espalhamento será considerado, uma vez que ele determina a forma da distribuição após o pico do anel Cherenkov - seção 3.2 (HILLAS, 1982b).

Em relação aos chuveiros verticais, os chuveiros inclinados se desenvolvem mais rápido na atmosfera por percorrerem uma maior quantidade de matéria entre quaisquer duas alturas dadas, com isso, atingem o máximo em uma altitude maior, de modo que a distribuição de partículas no solo se estende a distâncias maiores (AHARONIAN *et al.*, 2008). Serão considerados nessa seção apenas o caso de chuveiros eletromagnéticos verticais. Além disso, vamos ignorar a presença do campo magnético, porque ele tem pouca influência na distribuição lateral de radiação Cherenkov gerada por raios gama de alta energia (AHARONIAN *et al.*, 2001). Portanto, a distribuição lateral dos fótons na superfície de observação será simétrica e as suas únicas propriedades definidoras serão a energia do primário e a altitude de detecção.

A Figura 9 mostra que a maioria das partículas carregadas estão concentradas até algumas dezenas de metros do eixo do chuveiro, logo desprezaremos a distribuição lateral de elétrons e com isso sua dependência em função da altitude, assim como é feito em (HILLAS, 1982b; NERLING *et al.*, 2006; RAHMAN *et al.*, 2001). Como os fótons Cherenkov são emitidos a partir de partículas carregadas, nas profundidades atmosféricas onde houver mais elétrons, haverá mais fótons produzidos. Com isso, na hipótese de a fração de elétrons com energia maior que o limite para produzir radiação Cherenkov seja constante em todas as profundidades (seção 3.2), a distribuição da altitude de emissão dos fótons - alguns exemplos podem ser encontrados em (HILLAS, 1996; BERNLÖHR,

2000; AHARONIAN *et al.*, 2001) - segue aproximadamente a distribuição de elétrons - Figura 7.

Para mesma energia do raio gama primário, os chuveiros gerados diferem entre si devido às diferenças entre os pontos de primeira interação do primário e também devido às flutuações inerentes ao desenvolvimento do chuveiro (GAISSER *et al.*, 2016, p. 310). Como a flutuação do ponto da primeira interação é o fator dominante (AHARONIAN *et al.*, 2008; HOFMANN *et al.*, 2000b), a distribuição de fótons Cherenkov no solo poderá ser dada pela média (KONOPELKO, 1997) ou mediana (PORTOCARRERO; ARQUEROS, 1998) das distribuições obtidas sobre vários chuveiros. Como a distribuição dos ângulos azimutais de espalhamento dos fótons no solo é polarmente simétrica (COMMICHAU *et al.*, 2008; HOMOLA *et al.*, 2015), calcularemos a média e a flutuação apenas em um setor circular de ângulo ϕ .

Segue o procedimento descrito nos passos abaixo para as energias dos primários 100 GeV, 1 TeV e 10 TeV, nas altitudes do observatório de 2200 m ou 5000 m e com ângulos azimutais de visada $\phi \in \{4^\circ, 8^\circ, 10^\circ\}$.

- Calcular os valores dos comprimentos de interação onde ocorre a primeira interação de cada chuveiro, de acordo com a distribuição $\sim e^{-7x/9x_0}$ - equação 3.6;
- Dividir a área de impacto do chuveiro em uma grade com elementos de mesma área $\Delta A = 50 \text{ m}^2$ em coordenadas polares. Os elementos de área são setores de coroas circulares com mesmo ângulo de abertura ϕ ;
- Pela equação 3.19, calcular para cada energia o número N de fótons emitidos no chuveiro que terão suas posições de impacto no solo dentro da região definida pelo setor circular de ângulo ϕ ¹;
- Distribuir as N partículas de acordo com a função de distribuição longitudinal - equação 3.5;
- Distribuir ângulos de espalhamento para cada fóton Cherenkov de acordo com a equação 3.17, usando o valor médio do parâmetro θ_0 daquela equação, calculado na seção 3.2;
- Encontrar a altura z acima do nível de observação onde foi emitido cada um dos N fótons, considerando o ponto de primeira interação;
- O ângulo de emissão Cherenkov depende apenas da altura z e um valor é associado a cada fóton, pela equação 3.15;
- A partir da altura z de emissão de cada fóton e dos ângulos Cherenkov, θ_{ch} , e de espalhamento, θ_{esp} , encontrar a coordenada radial no solo que cada fóton intercepta:

$$z \cdot \tan(\theta_{ch} + \theta_{esp}); \quad (4.1)$$

¹ A equação 3.19 fornece o número de fótons total em uma região circular no solo, ou seja, com $\phi = 360^\circ$. Para obter o número de fótons no setor circular de ângulo ϕ , basta multiplicar a equação 3.19 por $\phi/360$.

- Uma vez que desejamos a densidade de fótons na área de impacto do chuveiro, montar um histograma unidimensional com o número de fótons em cada elemento de área dividido por ΔA ;
- Para obter a curva de distribuição lateral, obter o histograma médio sobre M chuveiros. Para as energias 100 GeV, 1 TeV e 10 TeV, é suficiente para a estatística que precisamos os seguintes valores para M : 10000, 5000 e 1000.

As Figuras 28, 29, 30, 31 e 32 mostram os resultados obtidos para a densidade de radiação Cherenkov em função da coordenada radial em relação ao eixo do chuveiro². A densidade da radiação depende do número de elétrons no chuveiro, que é proporcional à energia do primário, como indica a equação 3.19. Observamos que as médias da Figura 28 não dependeram do ângulo azimutal de visada ϕ .

² Curvas de luz realizadas com simulações mais completas podem ser encontradas, por exemplo, em (HASSAN *et al.*, 2017).

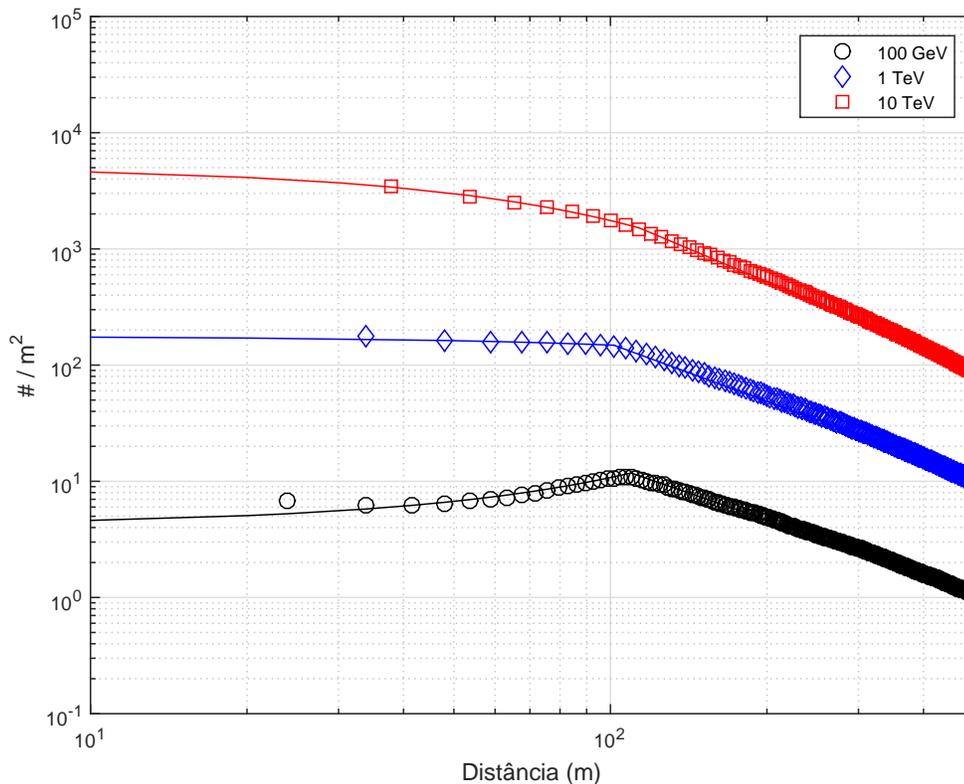


Figura 28 – Densidade de fótons Cherenkov por m^2 calculada para chuveiros leptônicos de diferentes energias para observação na altitude de 2200 m em função da distância radial em relação ao eixo do chuveiro. A absorção atmosférica não foi considerada. Cada ponto da Figura corresponde à média sobre M chuveiros simulados com diferentes pontos de primeira interação. As linhas no gráfico correspondem aos ajustes dos pontos.

A Figura 28 revela a existência de um ponto na distribuição lateral, a partir do qual a distribuição de luz diminui de maneira acentuada. Esse ponto define o chamado Anel Cherenkov, porque a distribuição no solo das partículas é mais concentrada em uma coroa circular em torno do centro do chuveiro, como ilustra a Figura 31. A razão para a existência do Anel é um efeito geométrico devido a propriedades da atmosfera da Terra, como se vê na Figura 13. Para um chuveiro com seu máximo a cerca de 7 km acima do nível de observação e um ângulo de emissão Cherenkov de $\sim 1^\circ$, temos que essas dimensões definem no solo um comprimento de 120 m. Pela Figura 28, o tamanho do raio do Anel, ou Raio Cherenkov, de 120 m aproximadamente, não depende muito da energia na faixa apresentada.

A Figura 28 mostra que a intensidade da radiação permanece aproximadamente constante até o raio Cherenkov e diminui quanto maior a distância radial em relação ao eixo do chuveiro. Uma vez que a probabilidade de detecção do evento depende do número de fótons coletados pelo telescópio (AHARONIAN *et al.*, 1997a), concluímos que chuveiros cujos centros estejam suficientemente distantes do telescópio terão probabilidades de detecção reduzidas. Na seção 4.2, será mostrada a forma da curva probabilidade de detecção, que depende não apenas da distribuição de fótons Cherenkov gerada pelo chuveiro, mas também das condições de *trigger* e da eficiência na coleta de fótons pelo telescópio (e.g. (AHARONIAN *et al.*, 2001)). Por exemplo, considerando um telescópio com uma área coletora efetiva do espelho igual a 25 m², tem-se pela Figura 28 que até a distância de ~ 250 m, esse telescópio coleta mais que mil fótons Cherenkov de um chuveiro de 1 TeV, sendo mil a ordem de grandeza do número mínimo de fótons necessários para formar uma imagem na câmera que permita uma reconstrução confiável do evento (AHARONIAN *et al.*, 1997a). Observamos que são fótons com frequência entre o ultravioleta e o azul, assim a Figura 28 mostra que cerca de um milionésimo da energia do primário em forma de radiação precisa ser coletado para que o raio gama possa ser detectado.

As curvas da Figura 28 foram ajustadas pelo modelo (FOWLER *et al.*, 2001)

$$y = Ae^{B(x-x_0)} \mathcal{H}(x_0 - x) + A(x/x_0)^k \mathcal{H}(x - x_0), \quad (4.2)$$

em que y é a densidade de fótons, x é o parâmetro de impacto do chuveiro, \mathcal{H} é a função de Heaviside e x_0 é o raio do Anel Cherenkov. A Figura 29 mostra os valores obtidos para os ajustes. O parâmetro espectral k varia pouco com a energia: nas três curvas da Figura 28, a intensidade de radiação diminui cerca de uma década entre 100 m e 500 m; logo, $k \sim 1,5$. O parâmetro B é um número próximo a zero, uma vez que na região interior ao raio Cherenkov, a intensidade da radiação é quase constante, como vemos na Figura 28. O significado da troca de sinal do parâmetro da exponencial, B , em função da energia se justifica pelo fato de que para 100 GeV há menos fótons oriundos das emissões mais próximas ao nível do detector, haja vista que os chuveiros de 100 GeV se desenvolvem em menores profundidades atmosféricas - Figura 7. O parâmetro

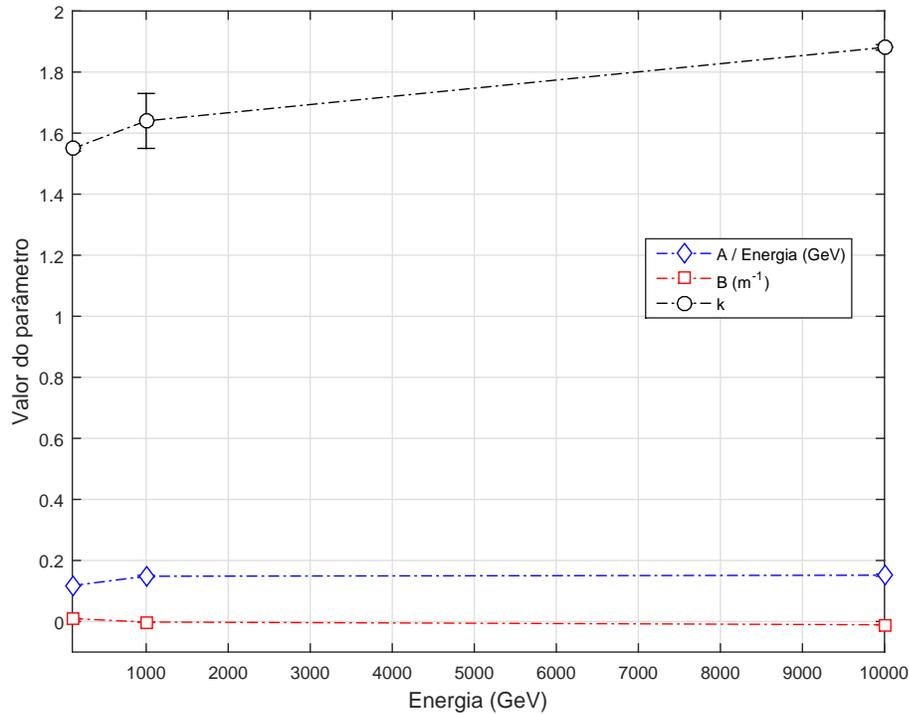


Figura 29 – Os parâmetros de ajuste das curvas da Figura 28 variam fracamente em função da energia. O ajuste utilizado foi $y = Ae^{B(x-x_0)}\mathcal{H}(x_0-x) + A(x/x_0)^k\mathcal{H}(x-x_0)$, em que y é a densidade de fótons, x é o parâmetro de impacto do chuveiro, \mathcal{H} é a função de Heaviside e x_0 é o raio do Anel Cherenkov. As linhas na Figura guiam a leitura dos pontos.

A fornece a densidade de radiação na região do anel Cherenkov, que de acordo com a Figura 28 depende da energia do primário. Pode-se estimá-lo da seguinte maneira. Pela equação 3.16, segue que $A \approx N_{max}\psi y\Delta x/\Delta s$, em que N_{max} é o número de elétrons na região do máximo do chuveiro. Pela Figura 7, N_{max} é numericamente igual à energia E do primário em GeV. Usando os valores $\psi = 0,4$, $y = 8600$ e admitindo ΔX como a região longitudinal em torno do máximo do chuveiro, compreendida entre os valores de idade $s = 0,8$ e $s = 1,2$, temos que a região circular de raio ~ 150 m define uma área de observação ΔS cuja densidade de fótons é dada por $A \sim 0,1/E(\text{GeV})$.

As flutuações em torno da média são as curvas na Figura 30. Não encontramos dependência das flutuações com o ângulo ϕ na faixa de energia analisada. As maiores flutuações ocorrem na região até ~ 100 m do eixo do chuveiro, e os chuveiros de maior energia possuem as menores flutuações, assim como o resultado encontrado em (SOBCZYŃSKA, 2009) para energias menores ou em (KONOPELKO, 1997; AHARONIAN *et al.*, 1997a) para o caso de fotoelétrons. A Figura 30 mostra que a flutuação em energia descrece mais rapidamente até cerca de 100 m do centro do chuveiro, a partir de onde cresce de maneira mais lenta (PLYASHESHNIKOV *et al.*, 2000).

A Figura 31 mostra a simetria no plano das curvas da Figura 28, obtidas para chuveiros

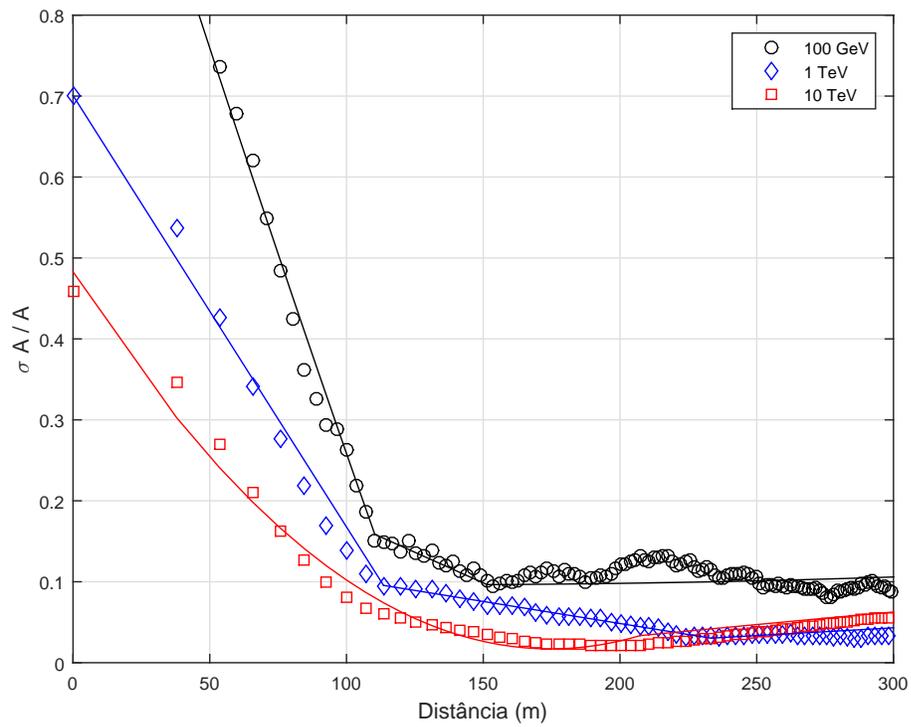


Figura 30 – Flutuação na densidade de fótons Cherenkov da Figura 28 calculada pela razão entre o desvio padrão e a média. Os pontos no gráfico correspondem aos resultados da simulação, e as linhas correspondem aos ajustes realizados com polinômios.

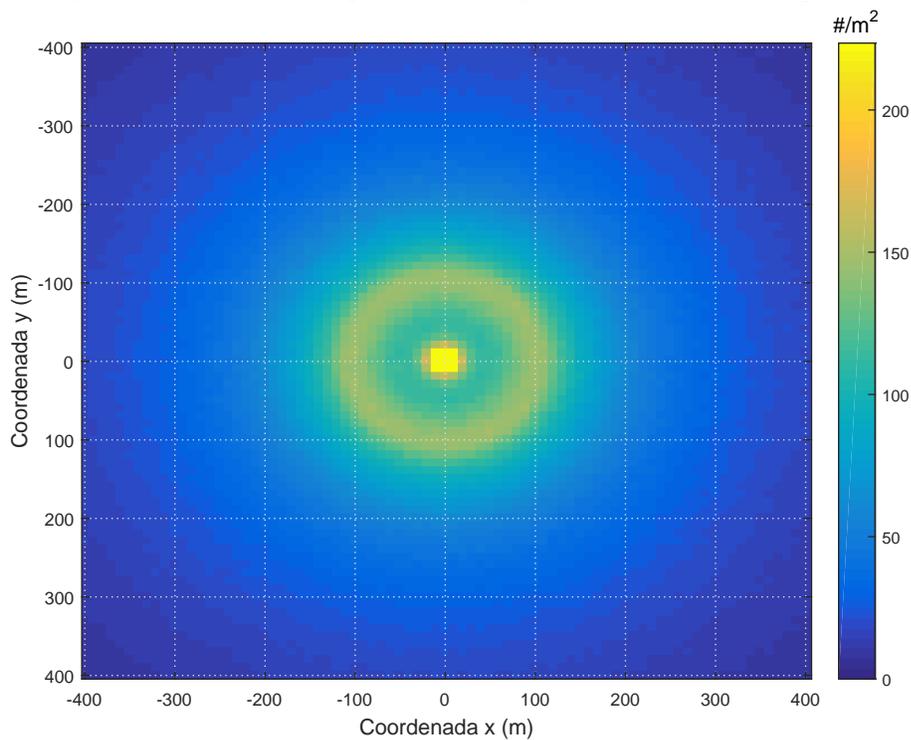


Figura 31 – Distribuição lateral dos fótons Cherenkov calculada para um chuva leptônica vertical de 1 TeV observado a uma altitude de 2200 m.

verticais na ausência de campo magnético. A Figura 31 mostra o anel de raio $\gtrsim 100$ m onde há um máximo na intensidade de fótons. A região central possui um excesso de fótons oriundos da região central do chuvaeiro.

A Figura 32 compara o resultado do modelo para a distribuição lateral média de radiação Cherenkov para chuvaeiros de 1 TeV no nível de observação de 5000 m e ao nível do mar. O ponto de inflexão na densidade de fótons que ocorre na região do raio Cherenkov é mais suave para maiores altitudes, como podemos ver na Figura 13, porque a coincidência dos ângulos na ocorre para emissões em porções mais altas da atmosfera. Portanto, a observação do ponto de inflexão em altitudes maiores ocorre para chuvaeiros de menor energia, que se desenvolvem em profundidades menores. Além disso, o raio do Anel diminui com o aumento da altitude (AHARONIAN *et al.*, 1997a; AHARONIAN *et al.*, 2001).

A Figura 32 mostra que na região interna do Anel Cherenkov, a quantidade de radiação aumenta com a altitude, porém para distâncias maiores, o decrescimento é mais acentuado para maiores altitudes (HASSAN *et al.*, 2017; RAO; SINHA, 1988; KONOPELKO, 2004; AHARONIAN *et al.*, 1997a; AHARONIAN *et al.*, 2001). Assim como o resultado encontrado em (SOBCZYŃSKA, 2009) - porém em um estudo realizado com energias menores - encontramos na Figura 33 que as flutuações na quantidade de fótons são maiores ao nível do mar na região próxima ao chuvaeiro, mas para maiores distâncias, a relação se inverte de modo que as flutuações a 5000 m de altitude são maiores.

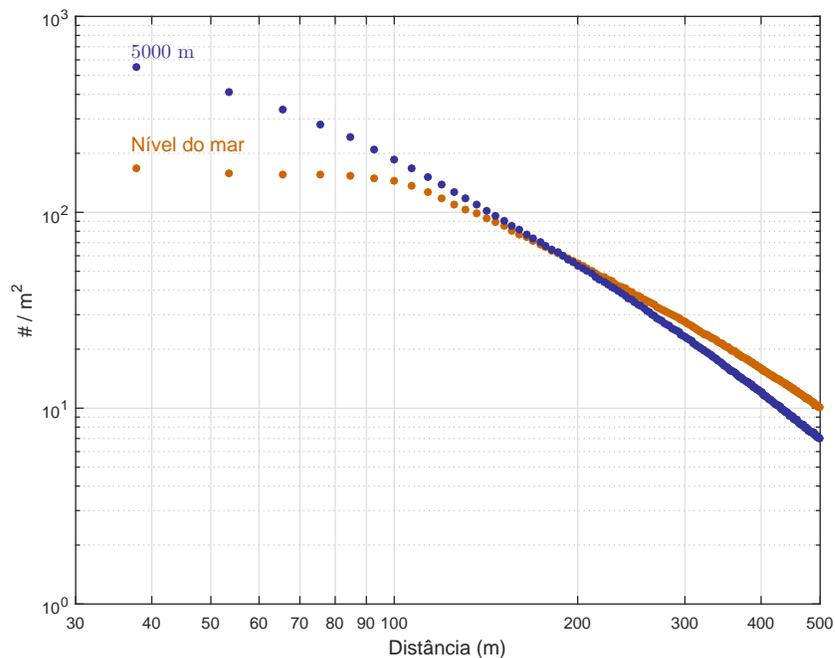


Figura 32 – Comparação da distribuição lateral média de radiação Cherenkov para chuvaeiros de 1 TeV no nível de observação de 5000 m e ao nível do mar.

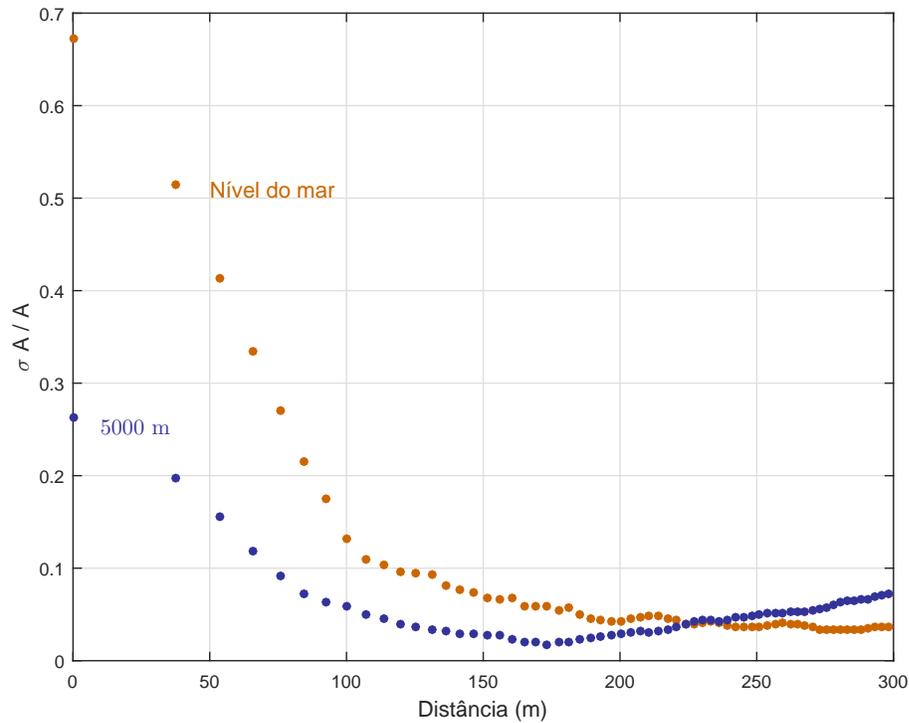


Figura 33 – Comparação das flutuações da distribuição lateral média de radiação Cherenkov para chuvis de 1 TeV no nível de observação de 5000 m e ao nível do mar.

4.2 Curvas de *Trigger*

Os telescópios podem ser caracterizados por uma função $f(r)$ que indica a probabilidade de detecção de um chuvis em função da distância r entre o telescópio e o ponto de impacto do chuvis no solo. Esta função probabilidade é chamada de curva de *trigger* e pode ser calculada por meio de simulações de Monte Carlo - como é feito, por exemplo, em (KÖHLER *et al.*, 1996; BORWANKAR *et al.*, 2016; AHARONIAN *et al.*, 1997a) - dadas as configurações dos telescópios - como sua ótica e eletrônica -, o modelo para a atmosfera e as características da partícula primária - como energia, ângulo de chegada e massa (tipo da partícula ou massa: fóton, próton etc).

Quanto maior for a energia do primário, maior será a quantidade de fótons Cherenkov no nível de observação - Figura 28 -, assim permitindo a detecção do chuvis para distâncias cada vez mais afastadas. Pode haver detecção para distâncias superiores ao raio Cherenkov, a depender dos parâmetros dos telescópios, como sua eficiência em captar a radiação (KÖHLER *et al.*, 1996; BORWANKAR *et al.*, 2016; AHARONIAN *et al.*, 1997a). Com isso, pelas curvas de luz da Figura 28, podemos usar um modelo simples para estimar a forma das funções probabilidade de detecção para os primários gama.

Os critérios de *trigger* são as condições de qualidade do sinal recebido necessárias para um evento ser aceito para análise posterior. O primeiro critério de *trigger* é a exigência de um número

mínimo de fotoelétrons na câmera. Consideramos que um evento terá boa reconstrução e portanto será considerado detectado se ele formar na câmera uma imagem com pelo menos 100 fotoelétrons (AHARONIAN *et al.*, 1997a; HOFMANN, 2001; SOBCZYŃSKA, 2009a; VÖLK; BERNLÖHR, 2009; BARNACKA *et al.*, 2013; FUNK, 2015). Esse valor pode variar em função da análise a ser realizada (e.g. (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; HOFMANN *et al.*, 2000b; KONOPELKO, 2005; PÜHLHOFER *et al.*, 2003)). O número de fotoelétrons gerados é o parâmetro *Size*, que depende da quantidade de fótons coletados e da eficiência na câmera para converter os fótons em fotoelétrons (AHARONIAN *et al.*, 1997a; AHARONIAN *et al.*, 2001). Isto é, sabendo-se a área coletora de fótons Cherenkov do espelho do telescópio e o fator de conversão para gerar fotoelétrons, podemos estimar se um dado evento foi ou não detectado. Uma vez que cada ponto das curvas da Figura 28 representa uma média calculada a partir da distribuição de luz naquele ponto formada por M chuviscos de mesma energia, podemos calcular, em função do parâmetro de impacto, a fração de chuviscos que cumprem o requisito dos 100 fotoelétrons. Esta será a probabilidade de detecção, que depende principalmente da área coletora do espelho e da energia do raio gama primário. Consideramos três tipos de telescópios, cujos diâmetros dos espelhos foram dados como 5, 10 e 20 m, daqui em diante chamados de telescópios pequeno, médio e grande³. A motivação para essa escolha foi dada na seção 2.4. Consideramos o fator de conversão supracitado igual a 0,1, sendo um número que não varia muito, a menos que se usem fotomultiplicadoras de silício, cuja eficiência pode chegar a 0,4 (VÖLK; BERNLÖHR, 2009; KONOPELKO, 2005; AHARONIAN *et al.*, 1997a; PÜHLHOFER *et al.*, 2003; BARNACKA *et al.*, 2013). O resultado obtido para 1 TeV e os três tipos de telescópios é mostrado na Figura 34. As curvas de *trigger* para os casos restantes serão vistas mais adiante nesta seção. A Figura 35 mostra para o telescópio grande o ajuste em função da energia, o que é importante caso se deseje encontrar as curvas de *trigger* para outras energias⁴.

Pela Figura 34, esse modelo consegue prever a forma das funções probabilidade de detecção. Assim como a distribuição lateral de luz Cherenkov no solo, a taxa de detecção permanece aproximadamente constante e cai rapidamente a partir de certa distância do telescópio. O efeito da variação do número mínimo de fotoelétrons na câmera e do fator de conversão em fotoelétrons é mudar o valor dessa distância. Ela é importante para o cálculo da área efetiva - como veremos na seção 4.3.

³ Foram considerados espelhos ideais no sentido de que sua área geométrica é igual à área efetiva; desconsideramos a refletividade do espelho e o efeito das sombras. Uma lista dos fatores mais relevantes para a probabilidade de detecção e intensidade do sinal na câmera pode ser encontrada, por exemplo, em (BERNLÖHR, 2008, p. 15) ou (DANIEL *et al.*, 2015).

⁴ Em (ABREU *et al.*, 2011), em um experimento fora da Astronomia Gama, uma curva de *trigger* semelhante é encontrada e ajustada com uma função diferente da que empregamos aqui. No entanto, para utilizá-la, é necessário privilegiar um ponto qualquer da curva, por exemplo, eles usam o valor $y = 0,5$. Outra diferença é que em (ABREU *et al.*, 2011) o ajuste é uma função definida por partes. Aqui, a função foi truncada em $y = 0$ para os pontos onde $y < 0$ ou se y converge assintoticamente para um número positivo pequeno $\epsilon > 0$.

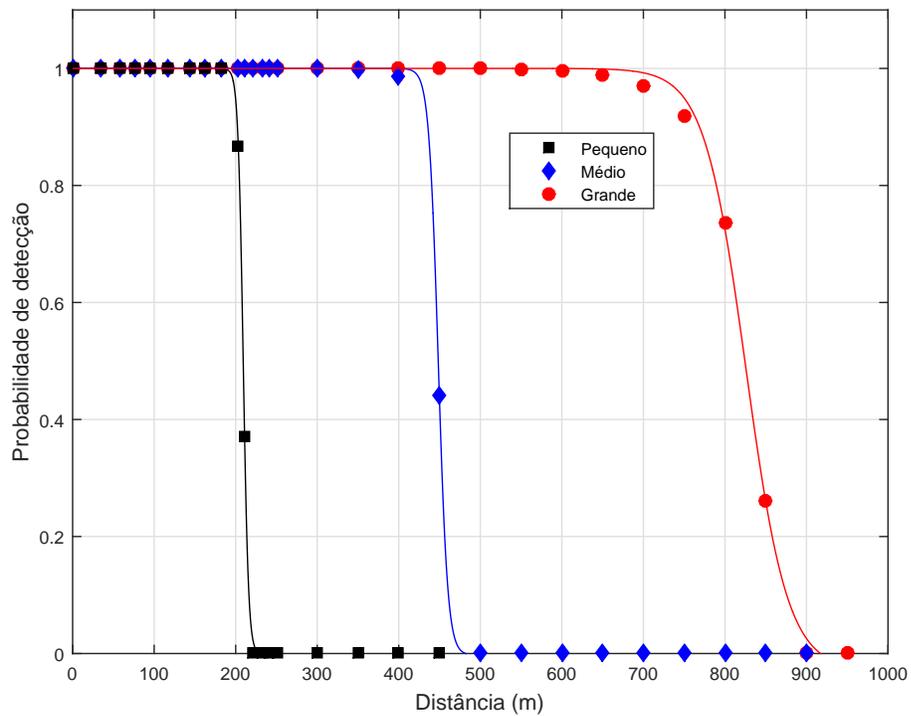


Figura 34 – Probabilidade de detecção de um chuveiro eletromagnético de 1 TeV por telescópios de diferentes tamanhos em função do parâmetro de impacto do chuveiro. Os telescópios utilizados possuem espelhos com diâmetros iguais a 5, 10 e 20 m e o único critério de *trigger* utilizado foi a exigência de um número mínimo de fotoelétrons na câmera. As linhas mostram os ajustes.

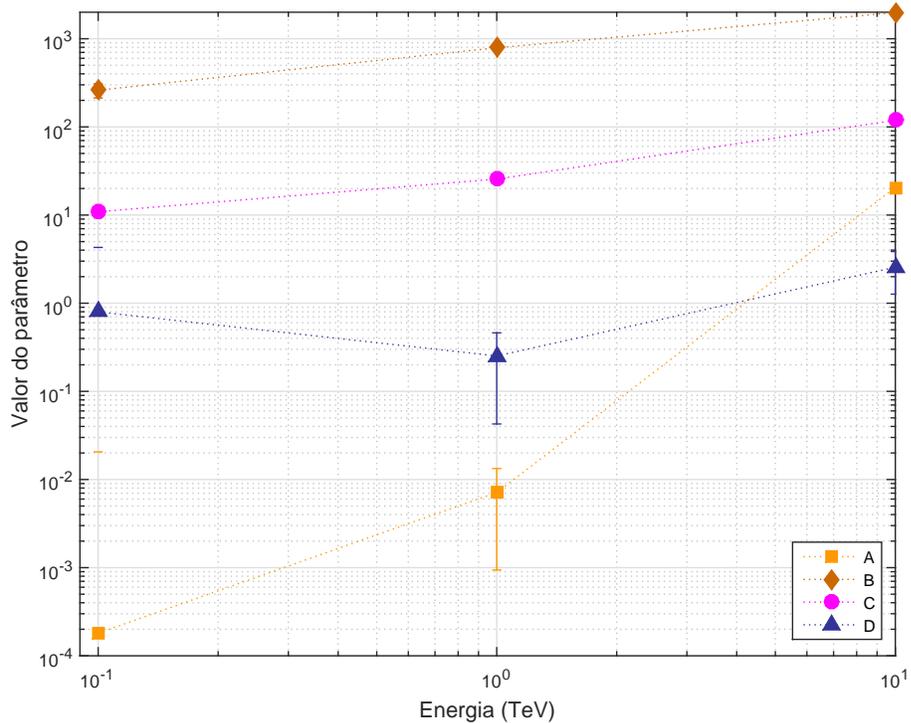


Figura 35 – A Figura mostra os parâmetros do ajuste pela função logística $y = [1 + Ae^{(x-B)/C}] / [1 + De^{(x-B)/C}]$ das curvas de *trigger* do telescópio grande (com diâmetro ~ 20 m) em função da energia.

Nessa situação, o telescópio pequeno não detecta eventos com energia de 100 GeV, e o telescópio médio só detecta os chuueiros com essa energia que tenham um excesso de luz acima da média. Os telescópios grandes medem todas as três faixas de energia testadas. Quanto maior a energia do primário, mais luz é gerada pelo chuueiro. Porém, isso não significa que a detecção para maiores energias seja possível para distâncias cada vez maiores, porque devemos considerar um segundo critério de *trigger* que não permite imagens cortadas pela câmera. Ao incorporar simultaneamente essas duas principais condições para detecção, as curvas de *trigger* para os três telescópios nas três faixas de energia serão obtidas. Consideramos como de segunda ordem o efeito nas curvas de probabilidade dos outros critérios de *trigger* da seção 3.5.1, possuindo mais importância para energias menores que 100 GeV, situação em que a contaminação pela luz de fundo é maior.

Segundo critério de *trigger*

Os telescópios Cherenkov atmosféricos utilizam espelhos para direcionar a radiação para uma câmera. Em primeira aproximação, considera-se que toda a radiação na câmera é proveniente da região em torno do máximo do chuueiro (BERNLÖHR *et al.*, 2013a, p. 172) (VÖLK; BERNLÖHR, 2009, p. 6) (HILLAS, 1996). Isso significa que se o eixo do telescópio apontar na direção da fonte que se deseja detectar, então o parâmetro *Distance* dependerá da profundidade do máximo e do parâmetro de impacto do chuueiro (HOFMANN, 2001; HOFMANN *et al.*, 2000b), como mostra a Figura 36. Emprega-se a medida do parâmetro *Distance* para reconstruir a posição do máximo do chuueiro (FEGAN, 1997); porém nesta seção encontraremos como o parâmetro *Distance* - e também *Length* - na câmera dependem do parâmetro de impacto, dada a posição do máximo do chuueiro. Em seguida, conhecido o campo de visão de um telescópio, calcularemos a probabilidade de a imagem na câmera ser inteiramente cortada pelas suas bordas. Com isso, o nosso modelo para as curvas de *trigger* encontradas na Figura 34 será aprimorado. Portanto, o segundo critério de *trigger* que vamos utilizar indica se a imagem da elipse na câmera será cortada pelo campo de visão limitado:

$$Dis + L > F/2, \quad (4.3)$$

em que *Dis* é o centroide da imagem, *L* é o valor de *Length* e *F/2* é a metade do campo de visão da câmera (e.g. (FUNK; HINTON, 2008)).

Em geral, todas as análises que envolvem as distribuições de *Length* e dos outros parâmetros da imagem dependem do tamanho do pixel na câmera, uma vez que ele introduz binagem nas distribuições (ACTIS *et al.*, 2011). Aqui, esse efeito não será considerado.

Pela Figura 36, a posição angular Ξ de um fóton na câmera pode ser calculada ao considerar a distância focal do telescópio igual a um (KONOPELKO, 2005):

$$\Xi(R) = \arctan [R/z], \tag{4.4}$$

em que R é o parâmetro de impacto e z é a altura acima da altitude de observação, sendo igual a 2200 m neste texto^{5,6}. A Figura 37 mostra um exemplo típico de imagem formada na câmera, com a forma aproximada de uma elipse apontando na direção da fonte.

- ⁵ Pela equação 4.4, um erro de $0,1^\circ$ na determinação do centroide gera um erro de ~ 1 km na determinação da altura do máximo do chuvaero.
- ⁶ Pela equação 4.4, para chuvaeros com mesmo parâmetro de impacto, o centroide aumenta, se a altitude de observação aumentar. Isso significa que para maiores altitudes, as imagens serão mais facilmente truncadas pelo campo de visão limitado (HASSAN *et al.*, 2017).

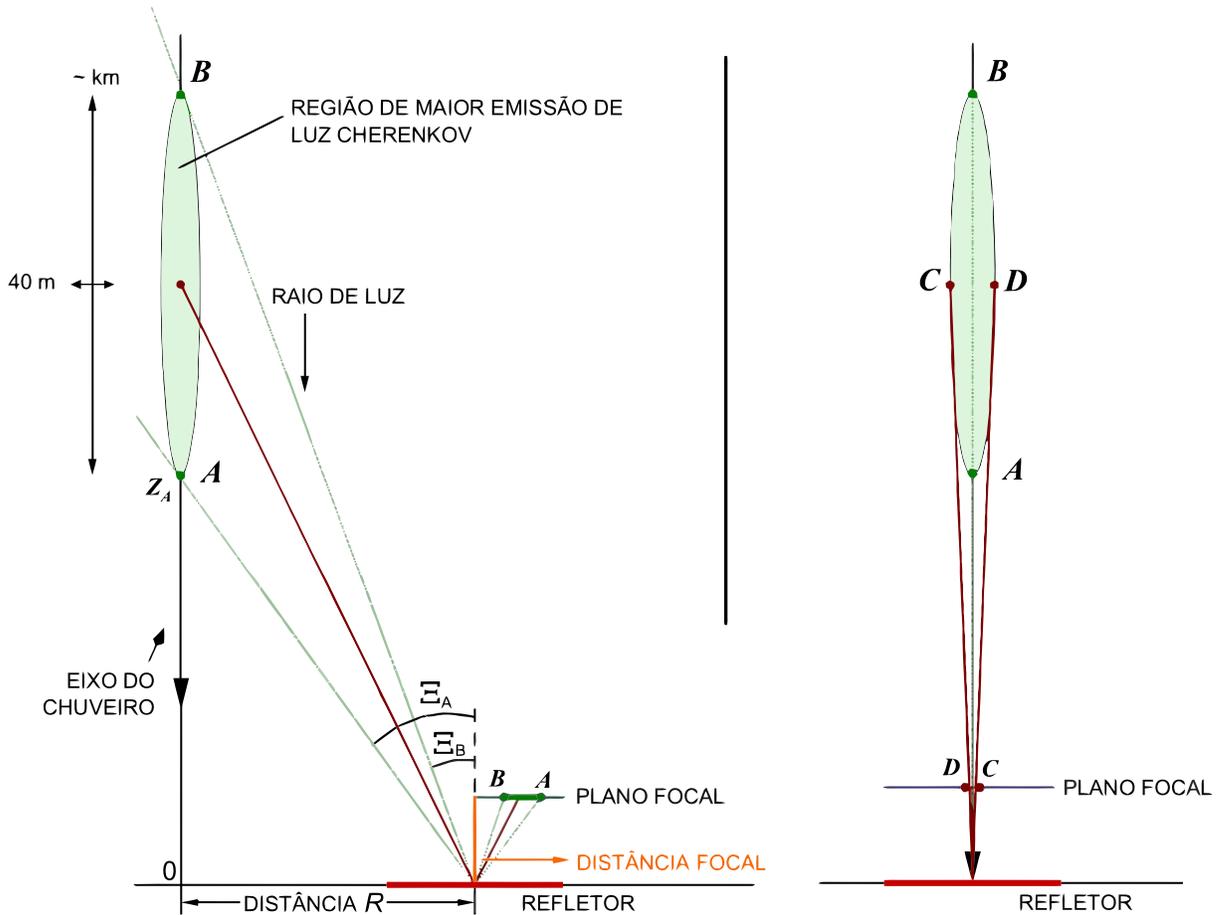


Figura 36 – Geometria que mostra o mapeamento na câmera do detector dos fótons Cherenkov emitidos em diferentes alturas durante o desenvolvimento do chuvaero. À direita: o mesmo chuvaero visto em uma projeção perpendicular. A Figura foi adaptada de (BERGE, 2006).

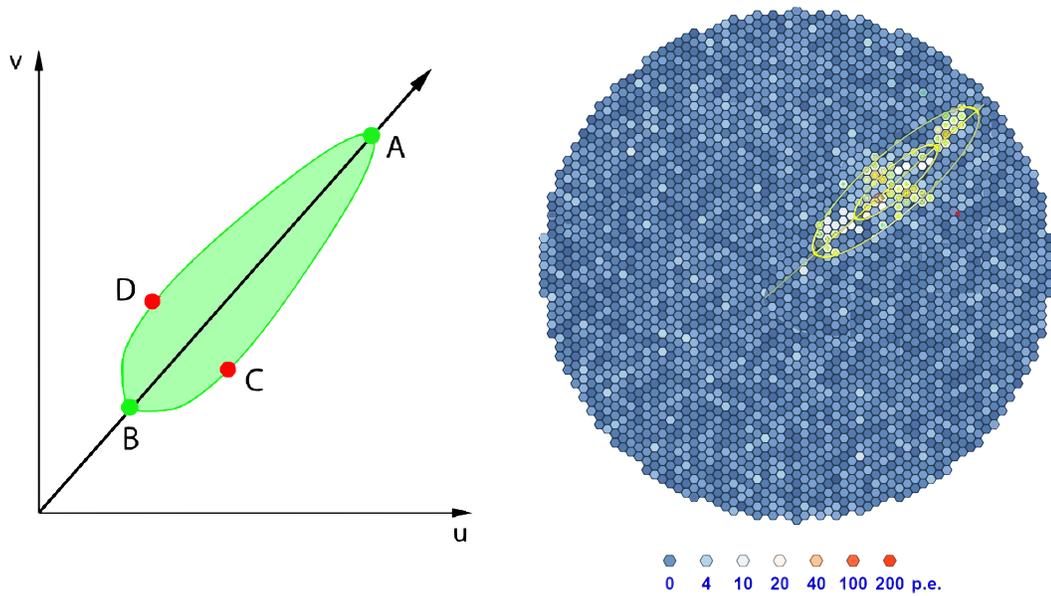


Figura 37 – *Esquerda:* Ilustração da imagem na câmera mostrando a correspondência com os pontos do chuvaire da Figura 36. À extremidade da elipse ajustada na câmera mais próxima da direção da fonte (ponto B) correspondem as emissões de fótons Cherenkov em menores profundidades atmosféricas. Isso ocorre porque como as partículas carregadas do chuvaire possuem velocidade maior que a da luz na atmosfera, os fótons emitidos em menores profundidades atmosféricas chegam mais tarde ao detector. Figura adaptada de (BERGE, 2006). *Direita:* exemplo típico de imagem formada na câmera, mostrando os pixels acionados e o ajuste por elipse que aponta para o centro da câmera.

As Figuras 38 e 39 mostram como os parâmetros *Distance* e *Lenght* variam em função do parâmetro de impacto R . Esses parâmetros são calculados sobre a distribuição do sinal na câmera. O método descrito a seguir nos fornecerá as flutuações dos parâmetros *Distance* e *Lenght*, que empregaremos para calcular as probabilidades de a imagem na câmera ser inteiramente cortada pelas suas bordas de acordo com o critério da equação 4.3. As Figuras 38 e 39 foram geradas através do seguinte procedimento:

- Utilizar as curvas da Figura 28 e as áreas coletoras do espelho de cada telescópio - seção 4.2 - para encontrar o número de fótons que atingem a região do telescópio em função do parâmetro de impacto R , energia E do evento e tipo de telescópio;
- Uma vez que a emissão na região em torno do máximo do chuvaire é aproximadamente simétrica na variável idade s - Figura 8 - para cada fóton associar aleatória e uniformemente um valor para s no intervalo entre $s = 0,8$ e $s = 1,2$. Pela equação 3.7, encontrar a correspondente altura z acima da altitude de observação onde cada fóton foi emitido;
- Usar a equação 4.4 para encontrar a posição angular na câmera de cada fotoelétron. A distri-

buição formada é assimétrica ⁷. Então calculamos sua mediana como o parâmetro *Distance* associado a um chuva. O cálculo de *Length* envolve não apenas as posições de cada pixel acionado, mas também a quantidade de fotoelétrons neles; portanto associar o desvio com relação à mediana como o parâmetro *Length*;

- A Figura 40 mostra a distribuição do parâmetro *Distance*, como exemplo a 150 m do eixo do telescópio, para *M* chuvas com diferentes posições de primeira interação. Os valores utilizados para *M* são os mesmos da seção 4.1. A mediana desta distribuição é o centroide calculado em função da energia a 150 m do eixo do telescópio. O parâmetro *Length* é obtido de maneira análoga, ou seja, como a mediana calculada sobre a distribuição de *Length* formada a partir de chuvas com diferentes pontos de primeira interação.

⁷ Pelas Figuras 36 e 37, as emissões acima do máximo do chuva possuem as menores posições angulares no eixo maior da imagem na câmera. Somado a isso, temos que um intervalo Δs em profundidades atmosféricas menores que $s = 1$ percorre um comprimento maior de atmosfera em metros que o mesmo intervalo Δs em profundidades atmosféricas maiores que $s = 1$, porque a densidade da atmosfera diminui com a altitude (equações 3.1 e 3.7). Como tomamos um intervalo simétrico na variável s em torno de $s = 1$, isso significa mais emissões nas menores profundidades atmosféricas.

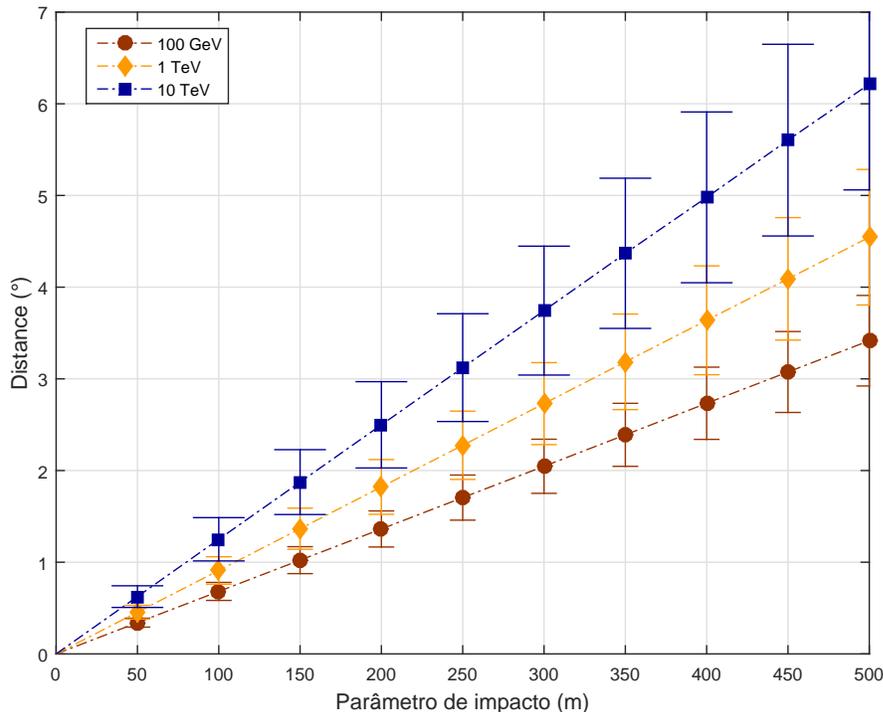


Figura 38 – Posição angular do parâmetro *Distance* na câmera do telescópio médio em função do parâmetro de impacto de chuvas com diferentes energias. Nessa Figura, não é mostrado o efeito do campo de visão limitado da câmera. Cada ponto representa a mediana da distribuição exponencial dos valores de *Distance* gerada por chuvas com diferentes pontos de primeira interação. As barras de erro foram calculadas pelo desvio em relação à mediana. As linhas são ajustes por retas.

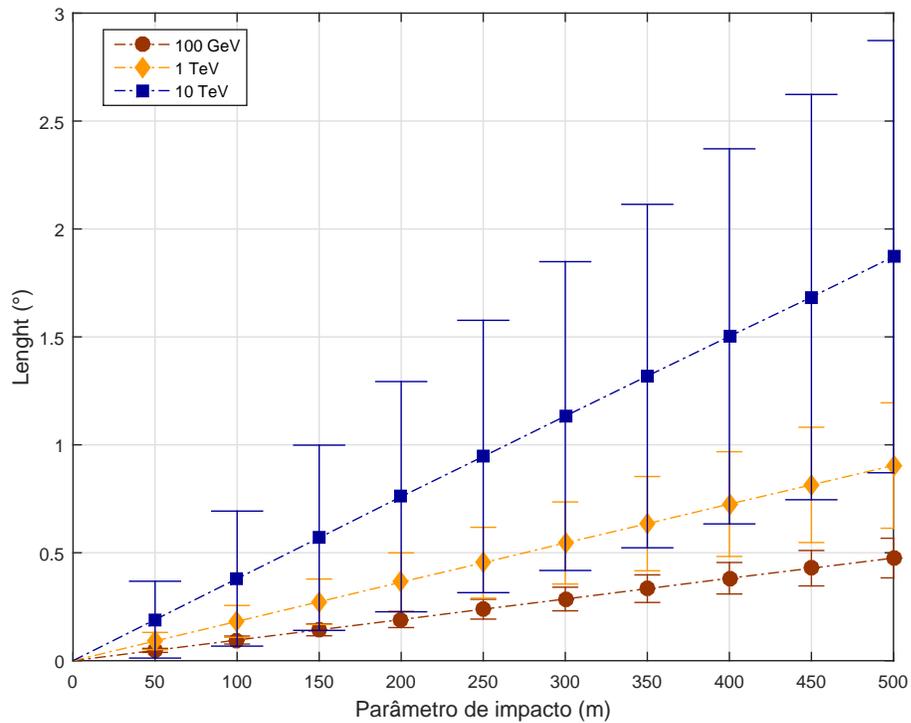


Figura 39 – Parâmetro *Lenght* em função do parâmetro de impacto e energia do chuvaeiro para o telescópio médio. Nessa Figura, não é mostrado o efeito do campo de visão limitado da câmera.

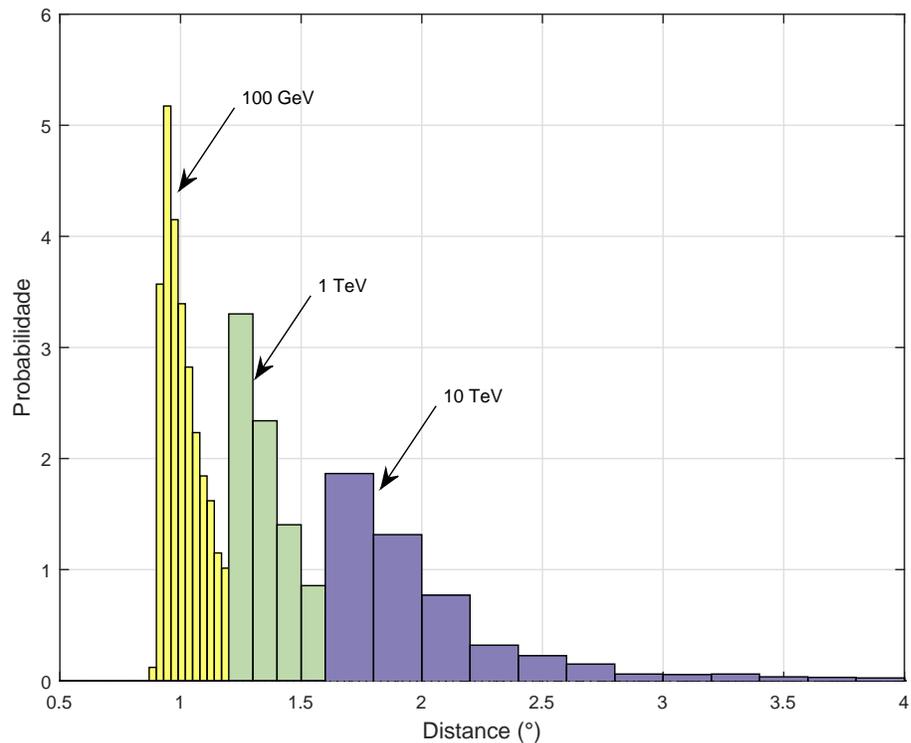


Figura 40 – Histograma normalizado sobre diferentes chuvaeiros dos centroides na câmera do telescópio médio com parâmetro de impacto igual a 150 m. A Figura mostra a forma da distribuição dos dados da Figura 38 para o caso particular do parâmetro de impacto igual a 150 m.

A Figura 38 mostra que o centroide da imagem se desloca do centro da câmera à medida que o chuveiro se afasta para distâncias maiores ⁸. A relação é linear, como esperávamos pela equação 4.4, pois $z \gg R$ nas distâncias calculadas. Por exemplo, para as energias na faixa de TeV, a cerca de 100 m, o deslocamento é de aproximadamente 1° , assim como o resultado encontrado, por exemplo, em (KONOPELKO, 2005). Quanto maior a energia do primário, maior a profundidade da posição do máximo do chuveiro (Figura 7) e, portanto, maior será o valor do centroide, de acordo com a equação 4.4. A Figura 39 mostra que a imagem na câmera torna-se mais alongada à medida que o chuveiro se afasta para distâncias maiores e quanto maior a energia do primário⁹.

A Figura 40 mostra que distribuição dos centroides na câmera é assimétrica, possuindo um pico para os menores valores e alargando para as maiores energias. Essa assimetria possui duas causas. Uma é explicada no rodapé 7. Além disso, o ponto da primeira interação flutua como uma exponencial - pela equação 3.6 - de modo que entre chuveiros diferentes também esperamos uma assimetria para as menores posições angulares. A Figura 40 também mostra que as distribuições se deslocam quanto maior a energia. Isso ocorre porque a profundidade do máximo do chuveiro aumenta com a energia, vide Figura 7.

Para os telescópios pequeno, médio e grande definidos na seção 4.2, associamos campos de visão da câmera de 10° , 8° e 4° , números motivados de acordo com os dados da Tabela 1. Com esses dados e conhecendo pelas Figuras 38 e 39 as variações dos parâmetros *Distance* e *Length* em função do parâmetro de impacto, podemos calcular como o valor de *Length* visto pelos telescópios varia para cada energia. O resultado é mostrado na Figura 41. Como o telescópio pequeno possui o maior campo de visão, ele registra imagens completas dos eventos para distâncias maiores que os outros tipos de telescópios. Por exemplo, a Figura 41 mostra que um telescópio pequeno em média detecta imagens completas dos chuveiros de 1 TeV até distâncias a cerca de 700 m, enquanto o telescópio médio nessa faixa de energia pode registrar imagens completas em média apenas até ~ 550 m. Por volta de 450 m, o ponto máximo da curva indica que a partir daquela distância, em média as imagens dos chuveiros de 1 TeV começam a ser cortadas pelo telescópio pequeno. Quanto maior a energia do chuveiro, maior será o valor do parâmetro *Distance*, de modo que os eventos de maior energia são inteiramente cortados pelas bordas da câmera de um dado telescópio a distâncias menores que os eventos de menor energia. As curvas da Figura 41 não são necessariamente simétricas, porque à medida que o centroide se afasta, a elipse também vai ficando mais alongada, de modo que há uma competição entre esses dois efeitos a partir da distância que a imagem é cortada pela câmera.

⁸ Essa relação não é válida para os isotrópicos chuveiros hadrônicos (AHARONIAN *et al.*, 1997a).

⁹ Uma vez que as imagens na câmera tornam-se circulares para os menores parâmetros de impacto (AHARONIAN *et al.*, 1997a), pela Figura 39 o parâmetro *Width* do chuveiro - seção 3.4 - possui valor $\sim 0,1$. Consequentemente, por uma geometria análoga àquela utilizada na Figura 36, temos que a largura do chuveiro na região do seu máximo possui um valor típico de ~ 20 m. Além disso, $\lesssim 0,1$ deve ser a escala do tamanho dos pixels na câmera para que o parâmetro *Width* fique bem definido, de modo a prover a imagem na câmera de uma orientação também bem definida (e.g. (FUNK; HINTON, 2008)).

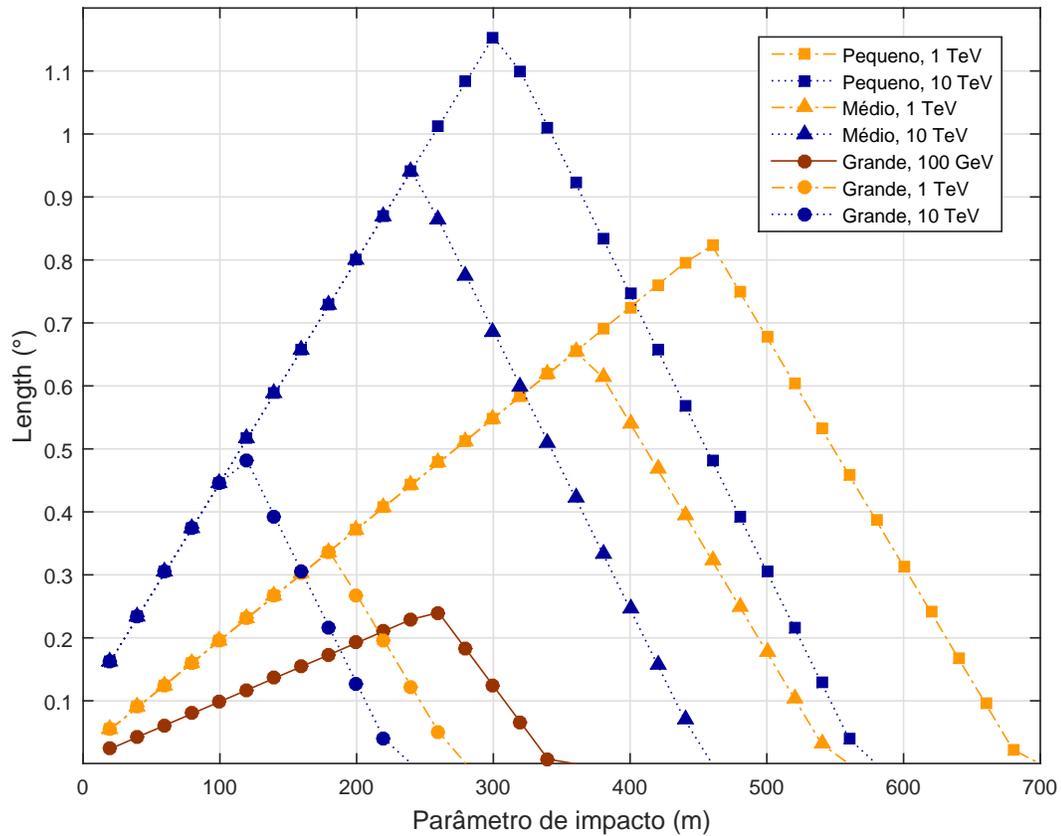


Figura 41 – Parâmetro $Length$ visto pelos telescópios devido ao campo de visão finito da câmera. Os valores de $Length$ utilizados em cada ponto na Figura são as medianas das distribuições de $Length$ obtidas variando a posição da primeira interação do chuveiro.

Embora a Figura 41 tenha sido construída com os valores medianos dos parâmetros $Distance$ e $Length$, de fato há flutuações nesses parâmetros causadas por chuweiros com diferentes pontos de primeira interação. Assim, o valor de $Length$ que é visto pelos telescópios também varia entre chuweiros diferentes. Isso implica que para cada telescópio observando cada uma das três energias consideradas, existe uma probabilidade - que é função do parâmetro de impacto - de a imagem ser inteiramente cortada pela câmera. O valor dessa probabilidade é obtido através da razão entre o número de imagens cortadas pelo número total de imagens geradas por M chuweiros simulados com diferentes pontos de primeira interação. A equação 4.3 fornece o critério para avaliar se uma imagem é ou não cortada. Caso as flutuações nos parâmetros $Distance$ e $Length$ não fossem utilizadas, a Figura 41 preveria que a probabilidade seria dada por uma função de Heaviside cujo valor seria zero para as distâncias onde $Length$ é igual a zero.

Finalmente, considerando tanto a limitação do campo de visão do telescópio - equação 4.3 - quanto a exigência de um número mínimo de fotoelétrons na câmera - seção 4.2, calculamos a probabilidade total sobre diferentes chuweiros de uma detecção satisfazer essas duas condições simultaneamente. As Figuras 42, 44 e 45 mostram as nove curvas de $trigger$ obtidas.

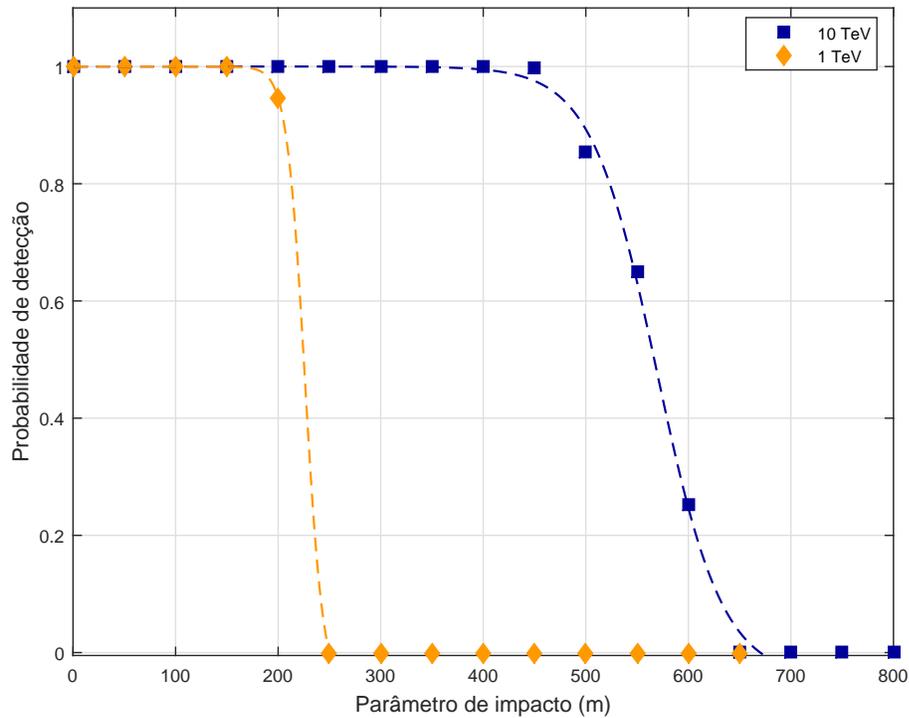


Figura 42 – Probabilidade de detecção por telescópios pequenos (com diâmetro ~ 5 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se as duas condições de *trigger*.

Para os telescópios do nosso modelo, podem-se obter as seguintes conclusões. Para os telescópios pequenos, que têm o maior campo de visão e a menor área coletora entre os três tipos de telescópios, a maior limitação é coletar um número mínimo de fótons, ou seja, o primeiro critério de *trigger* predomina sobre o segundo. Portanto, são telescópios adeptos para a detecção nas maiores faixas de energia. De acordo com a seção 4.2, os telescópios pequenos não detectam eventos com energia de 100 GeV. Comparando as figuras 34 e 42, seu campo de visão não alterou a curva de detecção para a energia de 1 TeV. Para 10 TeV, de acordo com a Figura 28, temos que o telescópio pequeno satisfaz o primeiro critério de *trigger* até distâncias da ordem de ~ 650 m. A Figura 42 mostra que seu campo de visão de 10° limitou pouco a detecção de eventos com 10 TeV, de fato, a detecção é possível para distâncias maiores que 500 m¹⁰. A Figura 42 mostra que se utilizados para detectar eventos de 1 TeV, devemos aproximar os telescópios pequenos.

As Figuras 43 e 44 comparam as curvas de detecção para o telescópio médio antes e depois do segundo critério de *trigger*. Para 1 TeV, o segundo critério reduziu pouco a distância máxima onde a detecção é possível, mas para 10 TeV o efeito foi mais evidente. Pela Figura 41, em média as imagens correspondentes a chuvas de 10 TeV são cortadas para distâncias ~ 450 m. De fato, a Figura 44 mostra que para a distância ~ 450 m, metade das imagens foram inteiramente cortadas. Para aumentar a distância máxima onde a detecção é possível, ou seja aumentar a área de detecção,

¹⁰ Em (VERCELLONE *et al.*, 2013), os telescópios utilizados podem detectar eventos até 500 m.

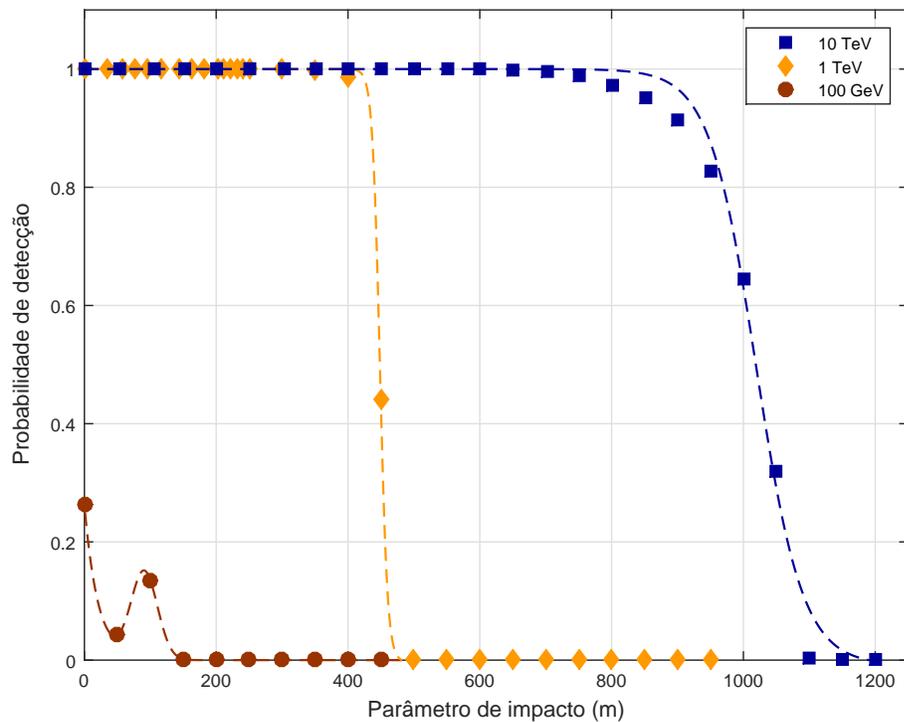


Figura 43 – Probabilidade de detecção por telescópios médios (com diâmetro ~ 10 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se apenas a primeira condição de *trigger*.

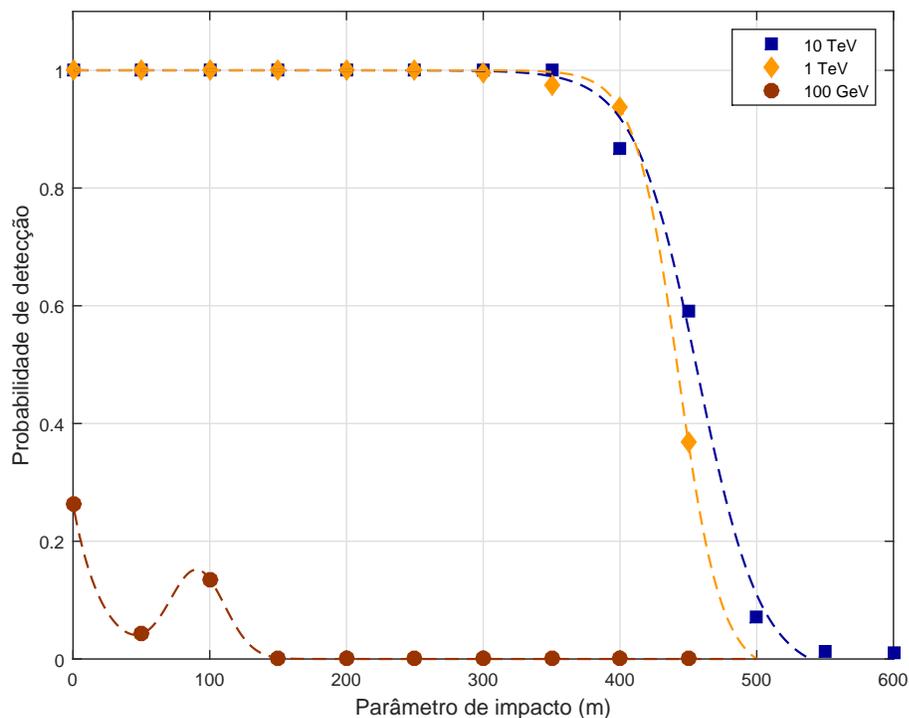


Figura 44 – Probabilidade de detecção por telescópios médios (com diâmetro ~ 10 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se as duas condições de *trigger*. Para aumentar a distância máxima onde detecção é possível, é necessário aumentar o campo de visão do telescópio ou exigir um número menor de fotoelétrons no primeiro critério de *trigger* - seção 4.2.

é necessário aumentar o campo de visão do telescópio ou exigir um número menor de fotoelétrons no primeiro critério de *trigger* - seção 4.2. Os telescópios médios enxergam eventos de 1 TeV para distâncias maiores que o telescópio pequeno, uma vez que esses captam menos fótons que aqueles.

A Figura 45 mostra que, ao contrário do telescópio pequeno, o segundo critério de *trigger* é mais importante que o primeiro critério no caso do telescópio grande. Pela Figura 41, a distância onde a imagem de um chuva com energia de 10 TeV é em média cortada é menor que a distância correspondente para a energia de 100 GeV, uma vez que a imagem torna-se mais alongada com o aumento da energia. A Figura 45 mostra que o telescópio grande observa eventos de menores energias para distâncias um pouco maiores que os eventos de altas energias, comportamento oposto ao telescópio pequeno¹¹. Além disso, concluímos que fixado o tipo de telescópio, o segundo critério de *trigger* possui mais relevância para as maiores energias. Para chuvas de baixa energia, o primeiro critério é o mais importante. É importante frisar que mesmo havendo detecção com imagens cortadas na câmera, a qualidade da reconstrução diminuirá. Esse aspecto será tratado na seção 4.6.

¹¹ Em (MAIER *et al.*, 2017), os maiores telescópios não detectam eventos com energia maior que 3 TeV, os telescópios médios não detectam eventos com energias maiores que 100 TeV, e os telescópios pequenos só não enxergam eventos com energias menores que 200 GeV.

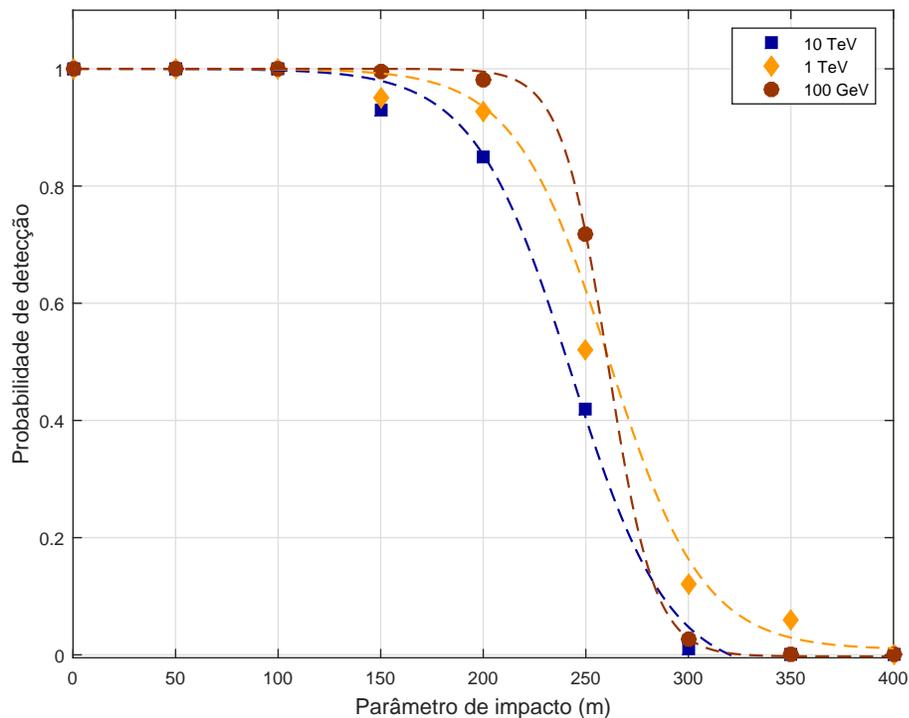


Figura 45 – Probabilidade de detecção por telescópios grandes (com diâmetro ~ 20 m) em função do parâmetro de impacto do chuva, exigindo-se as duas condições de *trigger*.

4.3 Métrica para a Área Efetiva

A área efetiva de detecção pós-*trigger* de um telescópio é definida por (AHARONIAN *et al.*, 1997a)

$$\int f \, dA \simeq \sum_{i=1} f(r_i) \Delta A, \quad (4.5)$$

em que f é a probabilidade de detecção, cuja forma foi determinada na seção 4.1, sendo dada de acordo com nosso modelo pelas Figuras 42, 44 e 45, e ΔA é o elemento de área de uma grade discreta no plano que contém a posição do telescópio e os fótons observados. O índice i representa os diferentes elementos sobre os quais a área total é calculada, e r_i é a coordenada radial entre a posição do telescópio e o elemento de área i . Sendo uma probabilidade, a função f funciona como peso na integral para obtermos a área efetiva de detecção A , a partir da área geométrica total.

A métrica a ser otimizada no arranjo é a área efetiva de detecção de N telescópios juntos,

$$A_{ef} = \int f_N \, dA. \quad (4.6)$$

Nesse caso, f_N é função das posições de todos os N telescópios e representa a probabilidade de detecção estereoscópica para um dado número de telescópios na grade discreta.

Seja P_i^m a função que representa em cada elemento de área A_i a probabilidade de um chuveiro ser simultaneamente detectado por pelo menos m telescópios dentre um conjunto de N . O parâmetro m é denotado multiplicidade de *trigger*. Tem-se que

$$P_i^m = \sum_{v=m}^N \kappa_v^m \cdot C_v^N, \quad (4.7)$$

em que C_v^N representa a soma das probabilidades de todas as combinações possíveis de N telescópios tomados v a v e κ_v^m é o n -ésimo elemento da m -ésima coluna do triângulo de Pascal, porém com sinais positivo e negativo alternados, como é mostrado no Apêndice. Por exemplo, para $m = 3$, κ^3 são os números da série (1, -3, 6, -10, 15...). Para $m = 4$, a série torna-se (1, -4, 10, -20, 35, ...).

Se $m = 3$, essa expressão calcula a probabilidade de detecção de pelo menos três telescópios. Por exemplo, se existir um quarto, a probabilidade de detecção aumenta somente se outros dois também puderem detectar na mesma região de observação desse quarto, assim formando outro conjunto com três. A fórmula calcula a probabilidade de detecção por pelo menos m telescópios considerando todas as combinações possíveis de detecção. Dessa maneira, podemos calcular numericamente a área efetiva de um arranjo de telescópios, que depende, como vimos, da energia e do ângulo zenital do evento. É em uma técnica mais rápida que utilizar simulações de chuveiros em uma área A em torno do arranjo para calcular f_N como a razão dos eventos detectados pelo número total dos simulados, de modo que $A_{ef} = f_N \cdot A$ (ALEKSIĆ *et al.*, 2016; CLARK *et al.*, 1961).

Para todos os gráficos a seguir, será utilizada a curva de probabilidade de detecção da Figura 44 para telescópio do tipo médio na energia de 1 TeV. As conclusões podem ser estendidas para os outros telescópios e energias.

A Figura 46 compara as áreas efetivas dadas pela equação 4.6 para os casos de três a cinco telescópios e multiplicidade igual a 3. Os telescópios foram dispostos nos vértices de algumas figuras geométricas regulares, como triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. São calculadas as áreas efetivas para diferentes valores do lado dos polígonos. Adotaremos a notação (l, m) para representar o caso do arranjo formado por l telescópios e com multiplicidade m . O asterisco em $(l = 5*, m)$ indica se tratar do caso do quadrado com face centrada.

Para as geometrias testadas, a área de detecção diminui se a distância entre os telescópios aumentar, porque dificulta a coincidência de detecção em diferentes telescópios. Portanto, otimizar essa métrica em arranjos com até 5 telescópios tende a torná-los compactos. No entanto, veremos na seção 4.6 que aproximar os telescópios tende a desfavorecer a reconstrução dos chuvereiros. Além disso, quanto maior o número de telescópios, maior a área de detecção. Essa relação só é linear para arranjos formados pela união disjunta no plano de observação de grupos com m telescópios cada.

Pelo gráfico 46, para o caso de cinco telescópios, o caso $(l = 5*, m = 3)$ apresenta maiores áreas efetivas em comparação ao caso $(l = 5, m = 3)$, porque a aproximação média entre os telescópios é menor. Para lado do polígono igual a 600 m, o caso $(l = 4m = 3)$ possui área menor que o caso $(l = 3m = 3)$, visto que a diagonal do quadrado, sendo sempre maior que o lado, possui um valor elevado tal que diminui a coincidência de *trigger*. O arranjo $(l = 4, m = 3)$ gera áreas efetivas bem próximas do arranjo $(l = 5*, m = 4)$. Isso pode ser entendido da seguinte forma. Para um quadrado, a região de maior detecção se concentra no centro do quadrado. Porém, ao colocar um quinto telescópio nessa região, a probabilidade de detecção quase não varia, porque a detecção já é quase 100% para estes pontos internos do arranjo. Outro exemplo de situações equivalentes pelo mesmo motivo são os casos $(l = 4, m = 4)$ e $(l = 5*, m = 5)$.

Um telescópio grande ocupa uma área de aproximadamente 400 m² e o erro na determinação do parâmetro de impacto possui valor $\lesssim 20$ m (e.g. (ALEKSIĆ *et al.*, 2016)), logo na Figura 46 e no restante deste trabalho 20 m será o valor utilizado para o lado dos elementos de área que compõem o plano que contém a posição do telescópio e os fótons coletados. Para as geometrias testadas, utilizar o lado do elemento de área igual a 20 m ou 40 m introduziu um erro absoluto máximo de $6,4 \cdot 10^3$ m² ou $1,2 \cdot 10^4$ m² em relação ao caso com elemento de área igual a 1 m.

A Figura 47 compara as áreas efetivas para multiplicidades diferentes. Maior multiplicidade implica menor área efetiva para eventos com mesma energia, porque é mais difícil quatro ou cinco telescópios detectarem um evento em comparação com três deles (e.g. (AHARONIAN *et al.*, 2001)).

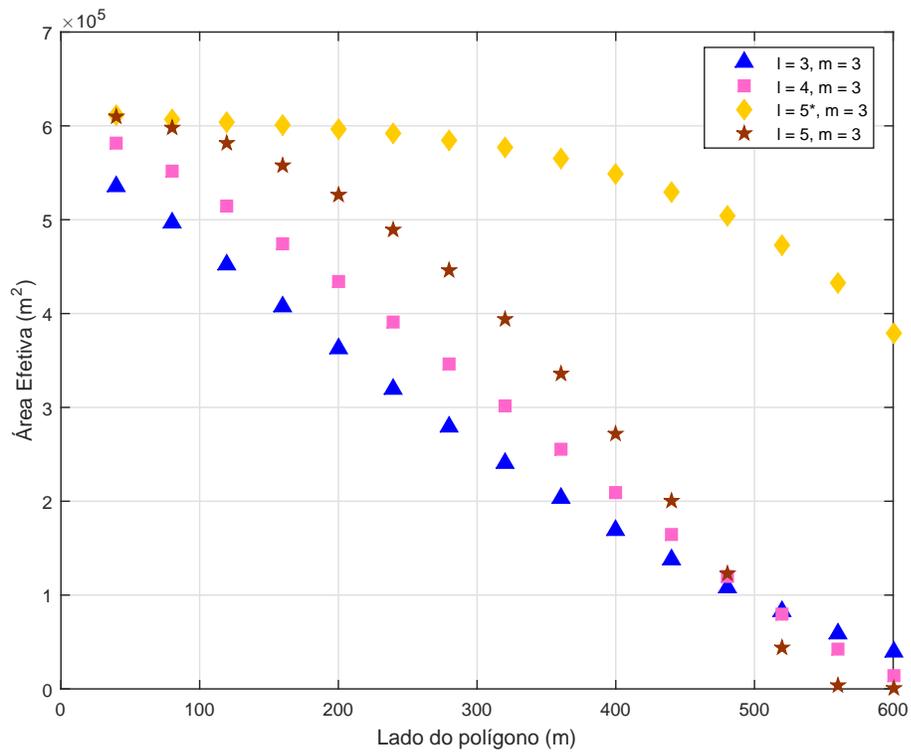


Figura 46 – Área efetiva pós-*trigger* na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de *trigger*, m , igual a 3. O caso $l = 5^*$ corresponde a um quadrado com um quinto telescópio situado no centro do quadrado.

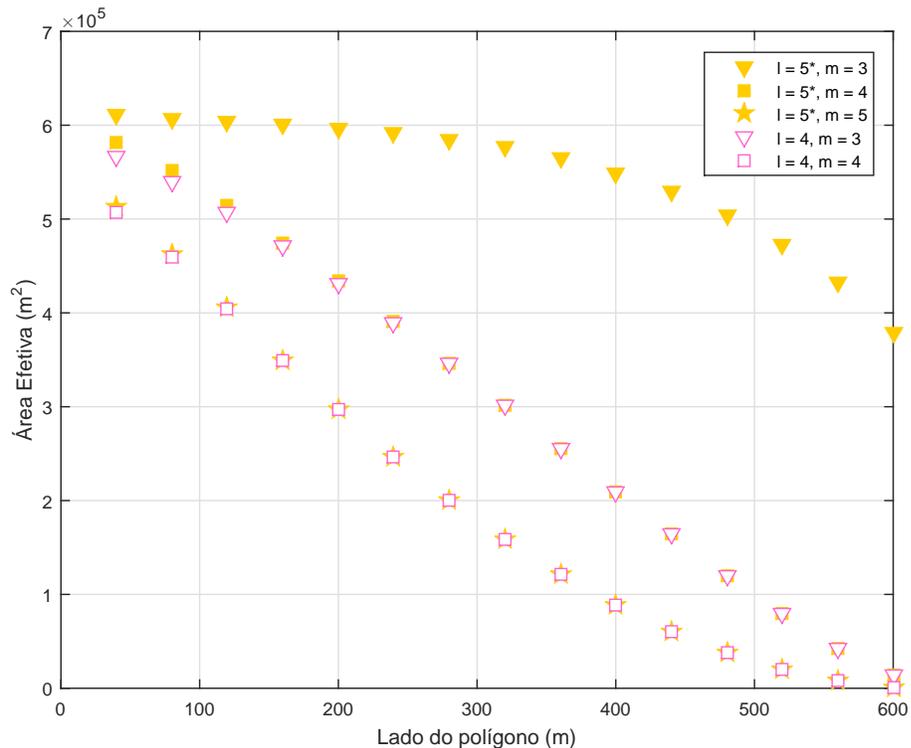


Figura 47 – Área efetiva pós-*trigger* na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com diferentes multiplicidade de *trigger* m .

A Figura 48 mostra como a probabilidade de detecção em cada ponto do espaço decai à medida que o espaçamento entre os telescópios aumenta. Em particular, mostra como a razão entre as áreas de observação externa e interna aos telescópios depende da separação entre eles.

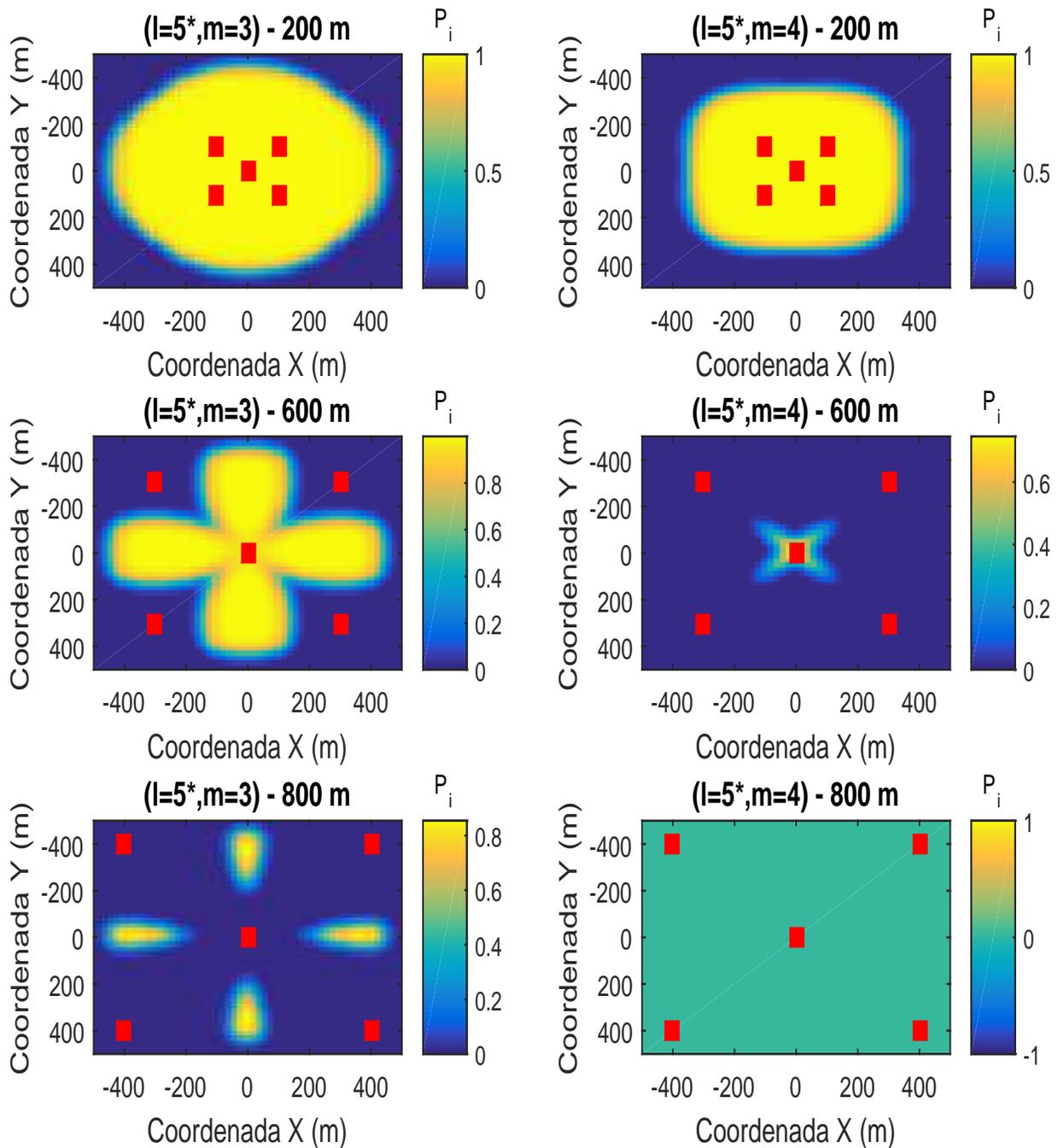


Figura 48 – Probabilidade em cada ponto do plano de observação para telescópios médios observar eventos com energia de 1 TeV. As colunas correspondem aos casos $(l = 5^*, m = 3)$ e $(l = 5^*, m = 4)$. As linhas representam três casos para os valores do lado do quadrado onde os telescópios estão inseridos: 200 m, 600 m e 800 m. Em vermelho destacam-se as posições dos telescópios.

4.4 Métrica para a Multiplicidade Média

O número de telescópios que participam da reconstrução do chuveiro afeta a resolução angular, com um comportamento assintótico, a partir do que a resolução angular é mais influenciada pelo método de reconstrução (HOFMANN *et al.*, 1999; FUNK; HINTON, 2008), (ACTIS *et al.*, 2011, p. 62). A multiplicidade média de *trigger* também influencia a resolução em energia do arranjo, uma vez que a energia do primário é calculada a partir da média das energias medidas em cada telescópio (e.g. (ALEKSIĆ *et al.*, 2016, p. 4-5), (KONOPELKO *et al.*, 1999b; KRAWCZYNSKI *et al.*, 2006)). Além disso, o parâmetro de impacto é melhor determinado e ele é um fator necessário para o cálculo do ângulo zenital (HOFMANN *et al.*, 2000b; AHARONIAN *et al.*, 1997a). A observação estéreo também aprimora a supressão da luz de fundo, a qualidade na identificação de primários gama em um fundo hadrônico e aumenta a área efetiva para as menores energias (MAIER *et al.*, 2017; KONOPELKO *et al.*, 1999b; DAUM *et al.*, 1997).

A Figura 49 compara a multiplicidade média para os casos de quatro e cinco telescópios em diferentes arranjos. Os telescópios foram dispostos nos vértices de quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada com diferentes valores do lado dos polígonos. A multiplicidade média é calculada da seguinte forma. Dado um arranjo com N telescópios, primeiramente calculamos a partir da equação 4.6 a área efetiva A_{ef} de observação com a exigência de pelo menos $m = 3$ detecções simultâneas. Em seguida, calculamos todas as probabilidades P_i^k em cada elemento de área A_i de haver detecção por unicamente $k \in \{m, m+1, \dots, N\}$ telescópios, sendo P_i^k função da posição dos k telescópios e da posição do elemento de área A_i . O cálculo de P_i^k é dado no Apêndice. Então definimos $A_k = \int P_k dA \simeq \sum_{i=1}^N P_i^k A_i$. Ou seja, para N telescópios, $A_{ef} = A_3 + A_4 + \dots + A_N$. Finalmente, a métrica da multiplicidade média é dada por

$$\langle M \rangle = \frac{\sum_{k=m}^N A_k \cdot k}{A_{ef}} \quad (4.8)$$

Por causa da normalização na equação 4.8, conseguimos comparar arranjos com mesmo número de telescópios e diferentes áreas efetivas de detecção, de modo que $\langle M \rangle$ não varie se A_{ef} aumentar. Na Figura 49, para separação de 400 m, temos que para o arranjo de cinco telescópios em um quadrado com face centrada, a área de detecção é observada em média por 3,5 telescópios. A Figura 49 conclui que a multiplicidade média no arranjo em forma de pentágono é pior que a do quadrado de face centrada para todas as separações. Quanto menor a separação entre telescópios, maior a multiplicidade média para os arranjos testados. Isso era o que esperávamos, uma vez que para favorecer a coincidência de *trigger*, os telescópios devem se aproximar. Para as maiores separações na Figura 49, a multiplicidade média sempre satura no valor $\langle M \rangle = 3$, porque os telescópios estão afastados de tal forma que apenas há coincidência de *trigger* se três deles observarem o evento, sendo este um critério que utilizamos para a detecção. A multiplicidade média é maior

para as maiores energias - já que os eventos são detectados para distâncias maiores¹².

Os arranjos degenerados correspondentes a três, quatro e cinco telescópios médios na mesma posição observando eventos de 1 TeV têm áreas efetivas calculadas pela equação 4.6 iguais a $5,51 \cdot 10^5 \text{ m}^2$, $5,92 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ e $6,13 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. O aumento corresponde à maior probabilidade de *trigger* nas bordas do arranjo. À medida que o número de telescópios N aumenta, torna-se mais vantajoso para aumentar a área efetiva separar os telescópios em agrupamentos em vez de melhorar cada vez mais a detecção nas bordas do arranjo. Para multiplicidade mínima de detecção igual a 3, isso ocorre para $N \geq 6$. A multiplicidade média, por outro lado, diminui com a maior separação entre os telescópios. Dessa maneira, a multiplicidade média é independente da área efetiva, porque comparando dois arranjos, por exemplo com $N = 6$, ao aumentar a separação entre os telescópios de um dos arranjos, a área efetiva pode aumentar enquanto a multiplicidade média diminui.

¹² Se utilizada para comparar arranjos com número diferente de telescópios, devemos observar que a área efetiva em valor absoluto para dada multiplicidade varia. Por exemplo, a Figura 49 mostra que para separações acima de 500 m, a multiplicidade média do arranjo ($l = 4, m = 3$) é um pouco melhor que a do arranjo ($l = 5^*, m = 3$). Para essa separação, o arranjo ($l = 4, m = 3$) só detecta na região central do quadrado. Ao colocar um quinto telescópio nesse centro, a área que antes era observada por três telescópios passa a ser observada por quatro, e a área que antes era observada por quatro passa a ser observada pelos cinco. Além disso, acrescentam-se quatro regiões com multiplicidade de detecção igual a ilustradas, ilustradas na Figura 48 para o caso de 800 m. Mas essa região é comparativamente grande, logo faz decair a multiplicidade média, embora em valores absolutos a área efetiva para multiplicidade 4 do arranjo ($l = 5^*, m = 3$) seja maior que a de ($l = 4, m = 3$).

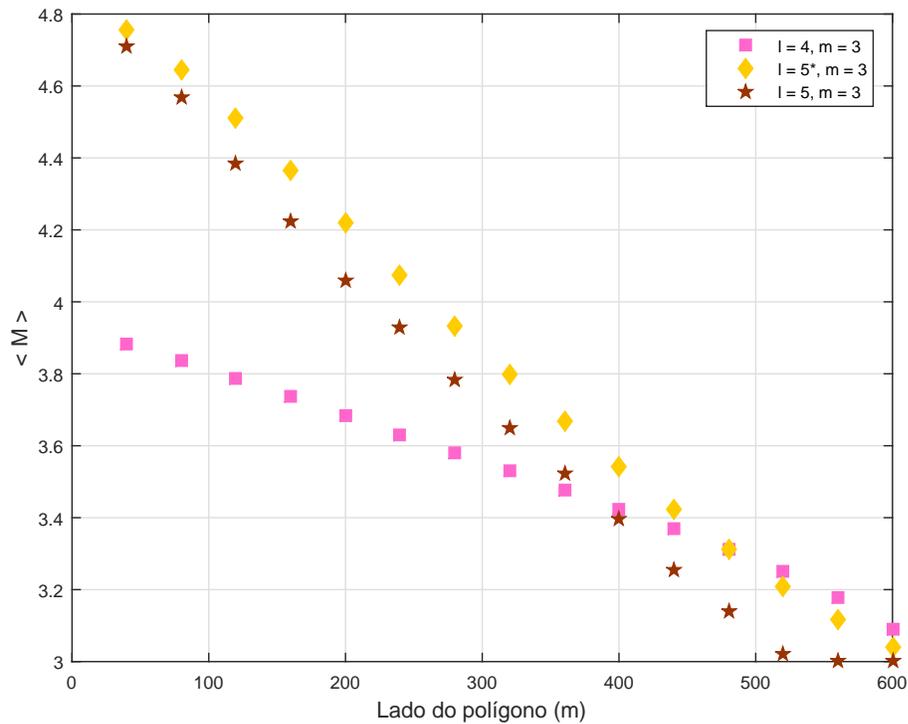


Figura 49 – Multiplicidade média em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV.

4.5 Métrica para a Energia Mínima de Detecção

A taxa de detecção de eventos a nível pós-*trigger* é obtida a partir da equação 3.21 como o produto do fluxo de raios gama previsto, ϕ_γ , pela área efetiva em função da energia, A_{eff} . A energia mínima de detecção do arranjo de telescópios é definida como a localização do máximo da distribuição da taxa de detecção de eventos, isto é,

$$E_{th} = \max_E(\phi_\gamma A_{eff}), \quad (4.9)$$

Ela pode ser calculada em etapas diferentes da análise; a nível de pós-*trigger* ela possui o seu maior valor (KONOPELKO, 2005; PLYASHESHNIKOV *et al.*, 2000; ALEKSIĆ *et al.*, 2016). A energia mínima depende principalmente das condições de *trigger* e é uma característica do arranjo a ser otimizada.

As Figuras 50 e 51 mostram a área efetiva em função da energia e a taxa de detecção de um arranjo quadricular com lado igual a 100 m e telescópios posicionados nos seus vértices. Foi utilizado o espectro da Nebulosa de Carangueijo, $\phi_\gamma = 2,83 \cdot 10^{-7} (E/\text{TeV})^{2,62} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{TeV}^{-1}$ (AHARONIAN *et al.*, 2004a). Para as maiores energias, apesar de os chuviros produzirem mais radiação Cherenkov, a área efetiva satura porque o campo de visão finito dos telescópios cortam as imagens na câmara impedindo a detecção de chuviros com parâmetros de impacto cada vez maiores - como vimos na seção 4.2. Para as menores energias, são detectados apenas os chuviros que se desenvolvem a maiores profundidades atmosféricas, isto é, com flutuação no número de fótons suficiente para que consiga acionar os telescópios. Na Figura 50 fizemos um ajuste por retas ou *splines*; parametrizações na literatura para essas curvas podem ser obtidas em (AHARONIAN *et al.*, 2001; AMBROGI *et al.*, 2016). Para quatro telescópios grandes, encontramos uma área efetiva da ordem de 10^5 m^2 para a energia de 100 GeV, que se mantém aproximadamente constante para as maiores energias e cai para 10^4 m^2 para a energia de 50 GeV: esses valores são comparáveis em ordem de grandeza à área efetiva a nível de *trigger* dos dois telescópios MAGIC (ALEKSIĆ *et al.*, 2016, p. 7).

Pela Figura 51, encontramos que a energia mínima para o arranjo com telescópios pequenos é $\sim 850 \text{ GeV}$, para telescópios médios é $\sim 160 \text{ GeV}$ e para telescópios grandes é $\sim 75 \text{ GeV}$. A Figura 51 também mostra que a taxa de detecção é maior para os telescópios grandes nas menores energias, é maior para o telescópio médio entre as energias de 500 GeV e 3,5 TeV, e é maior para o telescópio pequeno para as maiores energias.

Como os telescópios grandes observam os eventos com as menores energias, na Figura 52 é calculada a energia mínima de detecção para diferentes arranjos com telescópios grandes. A Figura 52 mostra que, para as geometrias testadas, quanto menor a separação entre os telescópios ou maior o número deles, menor será o valor da energia mínima.

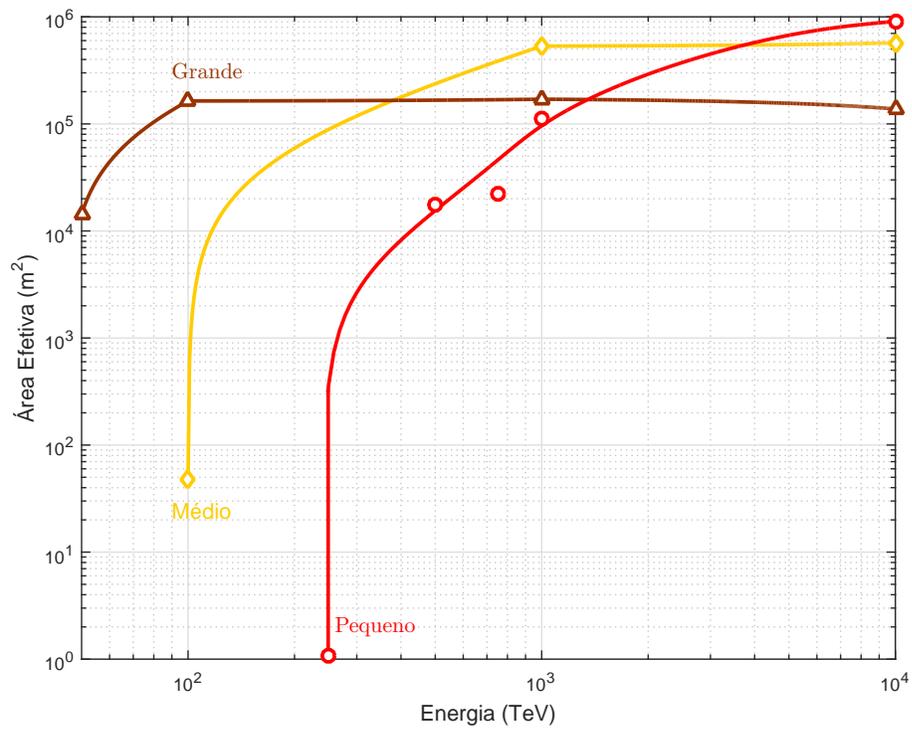


Figura 50 – Área efetiva em função da energia para arranjos quadrulares com lado do quadrado igual a 100 m para diferentes tipos de telescópios calculada pela equação 4.7. As linhas correspondem ao ajuste.

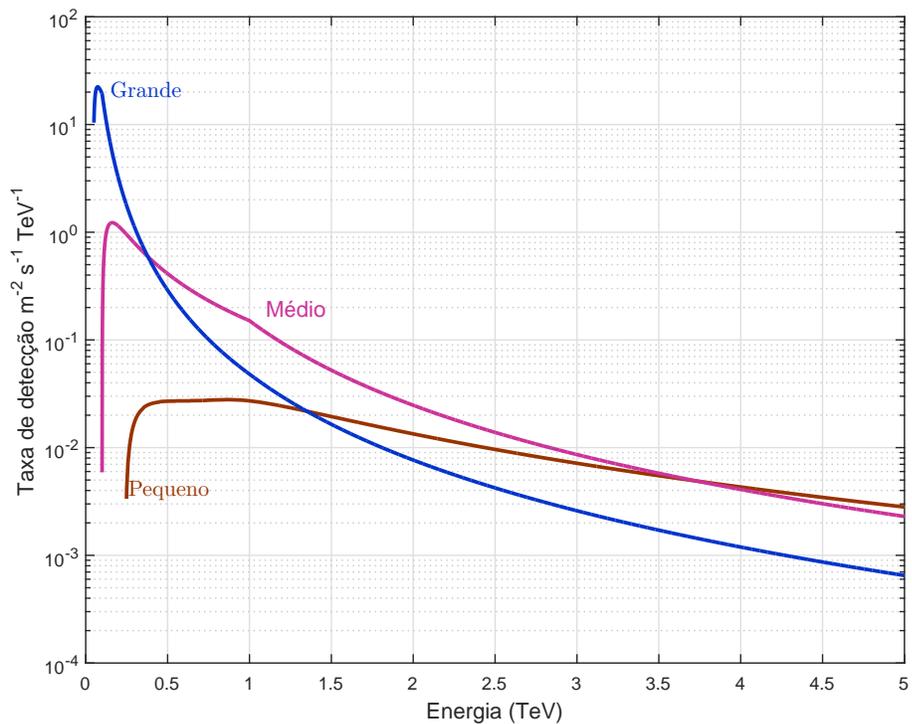


Figura 51 – Taxa de detecção de arranjos quadrulares com lado do quadrado igual a 100 m e diferentes tipos de telescópios, obtida pela equação 4.9. O pico das curvas define a energia mínima de detecção.

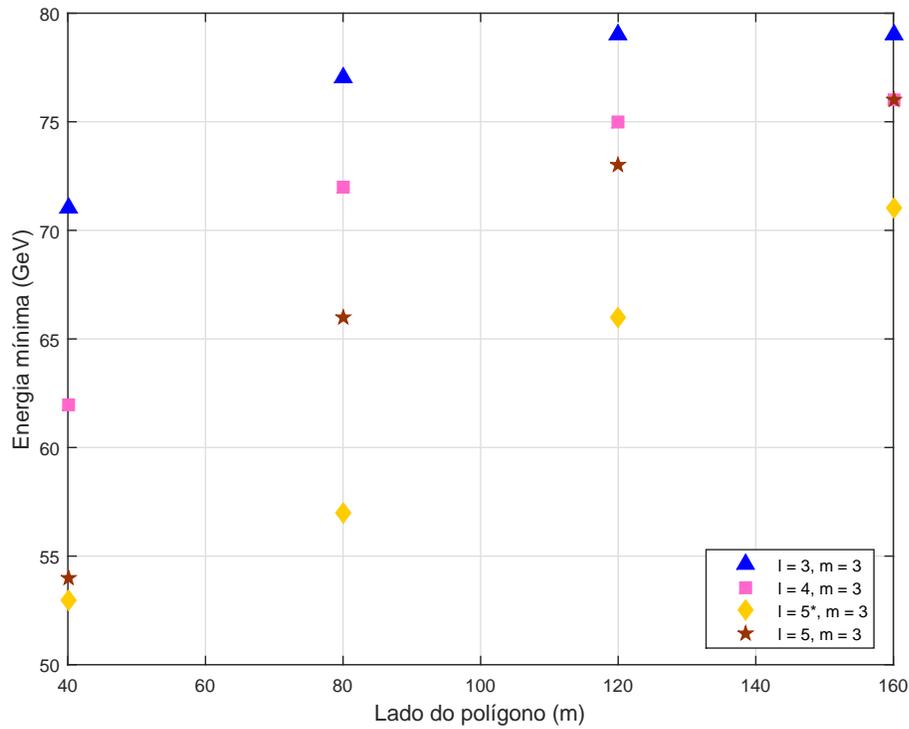


Figura 52 – Energia mínima de detecção em função da geometria para telescópios grandes posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de *trigger* igual a 3.

4.6 Métrica para a Resolução Angular

Para revelar propriedades de fontes extensas e para rejeitar eventos do fundo hadrônico, é necessário haver boa reconstrução do ângulo zenital do primário (HOFMANN, 2006). Em termos dos parâmetros dos telescópios, a resolução angular do arranjo depende da área dos espelhos, do campo de visão, da eficiência em coletar fótons e do tamanho dos *pixels* - que deixam as imagens na câmera com menor ou maior resolução. Fixados os parâmetros, depende também do número de telescópios e da distância entre eles (FUNK; HINTON, 2008).

Como vimos na seção 3.5.2, a resolução angular é favorecida quando as imagens formadas por pares de telescópios possuem um valor alto de ângulo estéreo¹³. Além disso, a imagem formada na câmera favorece a reconstrução do ângulo zenital quanto mais nítida ela for e quanto maior for o número de fotoelétrons gerados e a excentricidade da imagem da elipse a ser ajustada (seção 3.5.2). Isto é, quanto maior forem os valores dos parâmetros *Size* e *Length*. Tais considerações indicam que para favorecer a resolução angular de um conjunto de telescópios, é desejável otimizar a seguinte grandeza (BERNLÖHR *et al.*, 2013a):

$$\Theta = \sin(\theta_{\mu\nu}) \cdot (S_{\mu}^{-1} + S_{\nu}^{-1})^{-1} \cdot (l_{\mu}^{-1} + l_{\nu}^{-1})^{-1}, \quad (4.10)$$

¹³ É o ângulo entre as duas linhas que unem a posição do centro do chuveiro a cada telescópio do par.

em que $\theta_{\mu\nu} \in [0^\circ, 90^\circ]$ é o ângulo estéreo entre um par de telescópios μ e ν , com pesos S_μ e l_μ representando o número de fotoelétrons e o valor do parâmetro *Length* associados ao telescópio μ . O valor de $\theta_{\mu\nu}$ depende apenas do ângulo entre as duas linhas que unem os telescópios μ e ν à posição do centro do chuveiro na altitude de observação, enquanto S e l dependem dos parâmetros de impacto relativos a cada telescópio, ou seja, não possuem informação direcional. A função seno privilegia uma mudança de ângulo de, por exemplo, 0° para 10° quando comparada a uma mudança de 80° para 90° . Os pesos compõem médias harmônicas para enfatizar o efeito dos menores valores e amenizar o efeito dos maiores valores no cálculo dos pesos associados a $\theta_{\mu\nu}$. Tem-se que Θ é uma função das coordenadas de dois telescópios e do ponto de impacto do chuveiro, dependendo também do tipo dos telescópios e da energia do primário ¹⁴.

Para dois telescópios observando o evento a partir de uma mesma direção, ou seja, com ângulo estéreo igual a 0° , a reconstrução do ângulo zenital - e também do parâmetro de impacto - é desfavorecida. Além disso, eventos que caírem na região próxima à linha que une dois telescópios, com os menores valores para os ângulos estéreos, também tendem à pior qualidade de reconstrução.

O número de fotoelétrons é proporcional ao número de fótons Cherenkov coletados, portanto com a Figura 28, obtemos os valores de *Size*. Pela Figura 41, obtemos os valores para *Length*. Ambos diminuem para parâmetros de impacto cada vez maiores. Além disso, quanto mais perto da câmera estiver o parâmetro de impacto do evento, mais a imagem se assemelhará a de um círculo, dificultando a reconstrução do ângulo zenital do chuveiro (AHARONIAN *et al.*, 1997a).

Seja um arranjo formado por N telescópios dispostos em um plano de observação. Podemos dividir esse plano em uma grade discreta com elementos de área ΔA . Um arranjo ideal possui os maiores valores possíveis para a grandeza Θ para todos os possíveis pontos de impacto do chuveiro, ou seja, em cada elemento de área ΔA .

A fim de comparar arranjos com diferentes áreas efetivas de observação, não iremos simplesmente somar a quantidade Θ em todos os elementos de área, porque isso ocasionaria que aumentar taxa de detecção implica necessariamente aumentar a métrica que buscamos para representar a qualidade na reconstrução do ângulo zenital. No entanto, o número de eventos registrados e a fração deles com propriedades desejáveis para uma boa reconstrução são metas de otimização independentes e conflituosas. Portanto, a métrica para a resolução angular será a média de Θ sobre a área efetiva. A média de Θ , ponderada pela probabilidade P_i de um evento ser detectado no elemento de área i é dada por:

$$\langle \Theta \rangle = \frac{\int \Theta P dA}{\int P dA} \simeq \frac{\sum_i P_i \Theta_i}{\sum_i P_i}. \quad (4.11)$$

¹⁴ A forma funcional de Θ é empírica e portanto não é única, por exemplo, em (STAMATESCU *et al.*, 2011), outra forma é empregada.

As Figuras 53 e 54 mostram o valor do produto $P_i\Theta_i$ para uma região com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Pela Figuras 53 e 54, a métrica 4.11 deve diminuir para os pontos na borda da área de observação, para arranjos compactos e para pontos na linha entre telescópios. A métrica $\langle \Theta \rangle$ não é definida para geometrias cuja área efetiva seja nula.

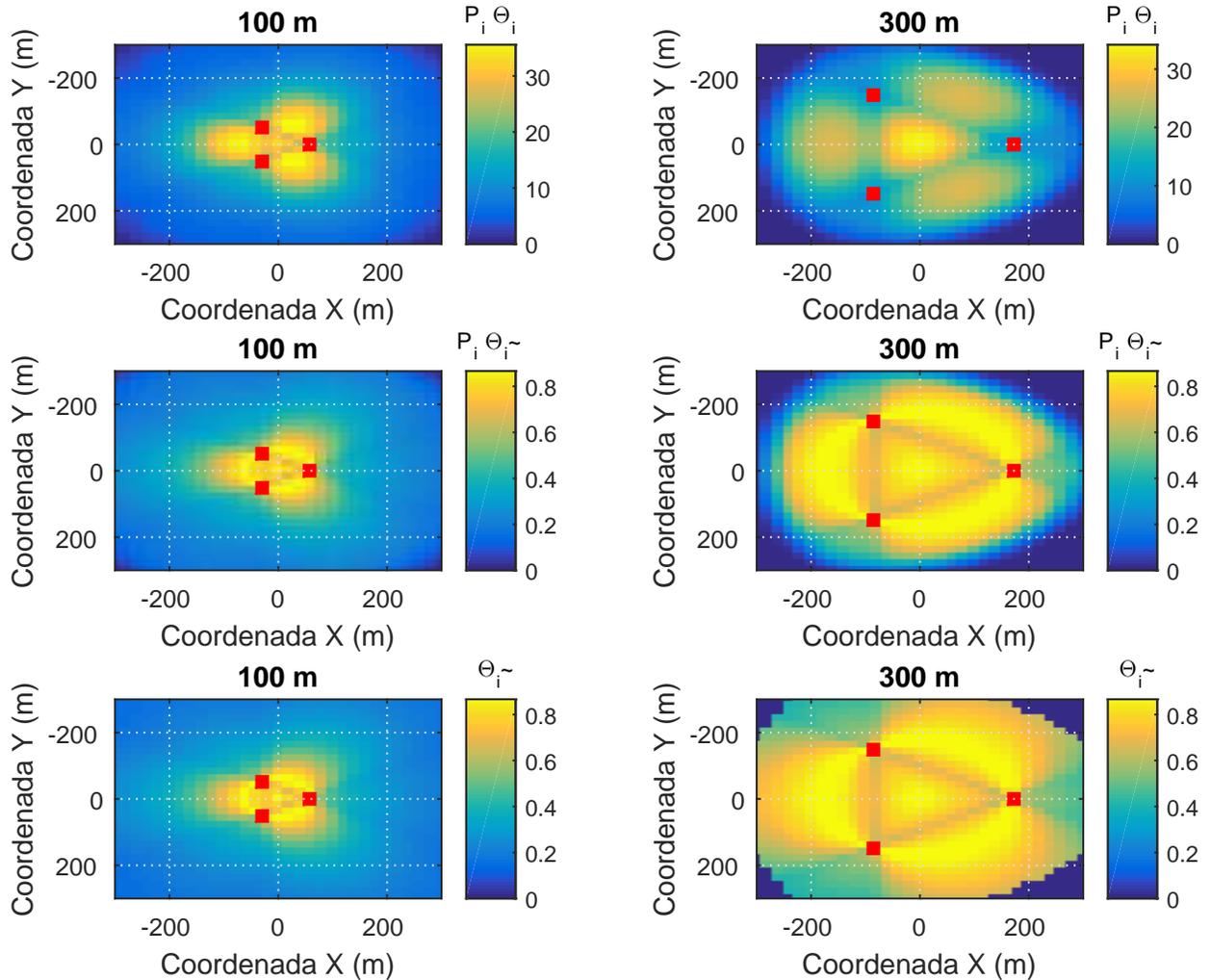


Figura 53 – *Topo*: Valores de $P_i\Theta_i$ na região de observação de três telescópios, com Θ_i dado pela equação 4.10 e P_i sendo a probabilidade de detecção em um elemento de área i . Foram utilizados telescópios médios com espaçamentos de 100 m e 300 m, observando eventos de 1 TeV. Em vermelho, as posições dos telescópios. *Meio*: Idem, porém Θ_i é apenas seno do ângulo estéreo, sem os pesos devido aos parâmetros *Lenght* e *Size*. *Embaixo*: Valores de Θ_i na região de observação, sem considerar a probabilidade de detecção P_i nem os pesos devido aos parâmetros *Lenght* e *Size*.

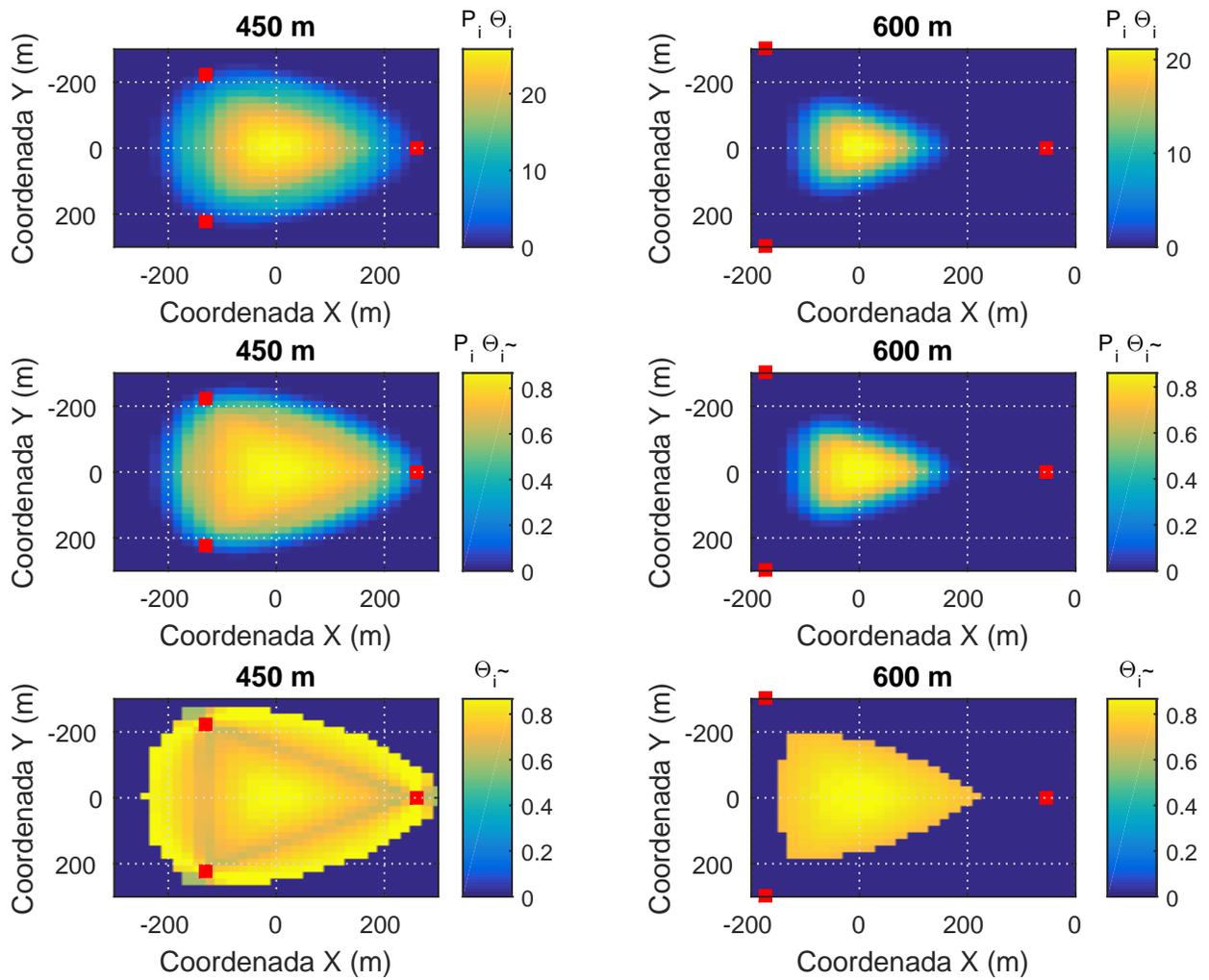


Figura 54 – *Topo*: Valores de $P_i \Theta_i$ na região de observação de três telescópios, com Θ_i dado pela equação 4.10 e P_i sendo a probabilidade de detecção em um elemento de área i . Foram utilizados telescópios médios com espaçamentos de 450 m e 600 m, observando eventos de 1 TeV. Em vermelho, as posições dos telescópios. *Meio*: Idem, porém Θ_i é apenas seno do ângulo estéreo, sem os pesos devido aos parâmetros *Lenght* e *Size*. *Embaixo*: Valores de Θ_i na região de observação, sem considerar a probabilidade de detecção P_i nem os pesos devido aos parâmetros *Lenght* e *Size*.

A Figura 55 mostra como a métrica $\langle \Theta \rangle$ depende do espaçamento para telescópios dispostos nos vértices de geometrias simples, como triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. A nossa hipótese é que a equação 4.11 seja uma função monótona em relação à resolução angular do arranjo e otimizá-la seja uma das condições necessárias para a otimização da resolução angular. Portanto, a Figura 55 deve ser interpretada de maneira qualitativa: ela não demonstra relações de proporcionalidade entre $\langle \Theta \rangle$ e a resolução angular nos diferentes casos apresentados.

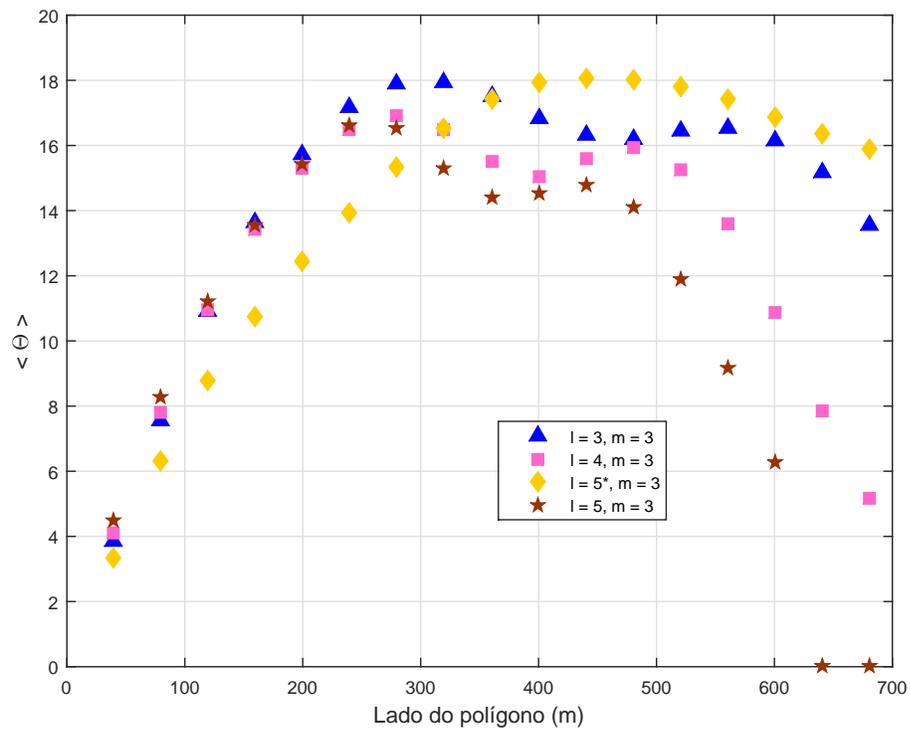


Figura 55 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para telescópios médios posicionados nos vértices de diferentes polígonos regulares, observando eventos de 1 TeV.

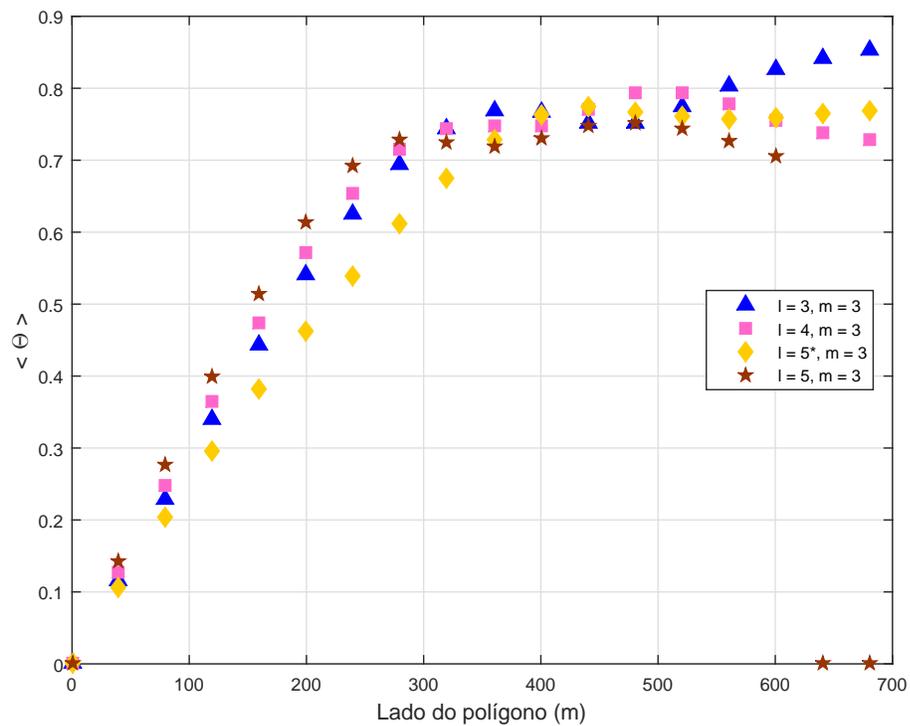


Figura 56 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 - sem considerar os pesos devido aos parâmetros *Size* e *Length* - para telescópios médios posicionados nos vértices de diferentes polígonos regulares, observando eventos de 1 TeV.

Pela Figura 55, existe uma faixa de separação típica entre os telescópios médios observando eventos de 1 TeV tal que o valor de $\langle \Theta \rangle$ possui seus maiores valores¹⁵. Para três telescópios, essa separação possui um valor entre 200 m e 600 m. Antes de 200 m, o arranjo de telescópios é tão compacto que os telescópios observam os chuveiros a partir de direções próximas, desfavorecendo o valor de $\langle \Theta \rangle$. O valor máximo de $\langle \Theta \rangle$ para três telescópios ocorreu na separação de 300 m; a partir dela, a diminuição no parâmetro *Size* implica diminuição de $\langle \Theta \rangle$. Para separações ainda maiores - a partir de 560 m, a diminuição do parâmetro *Length* provoca uma diminuição mais acentuada de $\langle \Theta \rangle$, embora o ângulo estéreo atinja os maiores valores para todas as separações além de um dado valor - como vemos na Figura 56, que não considera os parâmetros *Length* nem *Size* na métrica da equação 4.10. Pode-se concluir pela Figura 55 que a métrica $\langle \Theta \rangle$ tende a separar os telescópios, mas não distanciá-los demais. Por exemplo, para o caso do arranjo de apenas três telescópios médios da Figura 55, podemos concluir a partir da métrica $\langle \Theta \rangle$ que a separação entre eles deve ser em torno de 300 m na observação de eventos de 1 TeV.

Para os arranjos pequenos testados, em geral procuraremos a menor separação entre os telescópios que maximiza o valor de $\langle \Theta \rangle$. Pela Figura 55, o arranjo ($l = 5, m = 3$) atinge o seu máximo valor de $\langle \Theta \rangle$ para uma separação menor que o arranjo ($l = 5^*, m = 3$), favorecendo o aumento da área efetiva (Figura 46). Até separações de 300 m, o arranjo ($l = 5, m = 3$) possui valores maiores para $\langle \Theta \rangle$ que o arranjo ($l = 5^*, m = 3$), uma vez que ($l = 5^*, m = 3$) possui telescópios dispostos em linhas, o que diminui a média do ângulo estéreo. A partir de 300 m, a queda nos parâmetros *Size* e *Length* desfavorece mais o arranjo ($l = 5, m = 3$) que o arranjo ($l = 5^*, m = 3$), já que as distâncias médias entre telescópios daquele caso é maior. Nos casos de cinco telescópios analisados, o máximo valor de $\langle \Theta \rangle$ para o arranjo ($l = 5^*, m = 3$) é maior que o máximo do arranjo ($l = 5, m = 3$) e além disso ocorreu na separação de ~ 400 m, que ainda assim possui maior área efetiva que o arranjo ($l = 5, m = 3$) (Figura 46).

As Figuras 57 e 58 comparam os resultados para os cálculos apenas na região interna ou externa de triângulos e quadrados. Pela Figura 57, o valor da métrica $\langle \Theta \rangle$ é comparativamente maior na região interna de observação de arranjos triangulares e quadriculares que na região externa. Isto se deve ao maior valor do ângulo estéreo médio nas regiões internas. A região externa possui valores relativamente baixos da métrica $\langle \Theta \rangle$ porque os eventos distantes são vistos pelos telescópios na mesma direção, desfavorecendo o ângulo estéreo médio. O valor médio de $\sin(\theta_{\mu\nu})$ se mantém aproximadamente constante na região interna de observação, porém aumenta sobremaneira na região externa até uma separação de cerca de 300 m, a partir de quando sua taxa de crescimento diminui, e o efeito da diminuição nos valores dos parâmetros *Size* e *Length* se sobrepõe, ocasionando a redução de $\langle \Theta \rangle$. Na região interna de observação, para separações menores que 300 m, o valor de $\langle \Theta \rangle$ não é constante apesar do aproximadamente constante ângulo es-

¹⁵ A forma da Figura 55 se mantém caso fosse utilizada a média logaritmica ou a geométrica na equação 4.10.

téreo médio nessa região, porque o valor do parâmetro *Length* é baixo para pequenas separações, aumentando com a expansão do arranjo.¹⁶

Pela Figura 55, a separação entre três telescópios médios observando 1 TeV deve ser em torno de 300 m para favorecer a métrica $\langle \Theta \rangle$. Pela Figura 57, essa separação corresponde a otimizar a métrica $\langle \Theta \rangle$ na região externa de observação. Essa conclusão se estende para o arranjo quadricular com telescópios médios observando 1 TeV. Pela Figura 58, otimizar a área interna de observação não necessariamente fornece a separação que otimiza a métrica $\langle \Theta \rangle$ na área total. A separação ideal que otimiza a área interna de detecção é maior que aquela que otimiza a métrica $\langle \Theta \rangle$. Além disso, a Figura 58 mostra que as áreas efetivas externas aos triângulos e quadrados são maiores que a área interna. Isso significa que se essas regiões tiverem propriedades desejáveis para uma boa reconstrução do ângulo zenital, aproximar (dependendo do tipo e energia) os telescópios de forma a diminuir a área interna de observação abaixo do seu valor máximo pode aumentar a área de detecção do arranjo como um todo e, pela Figura 55, melhorar a qualidade de reconstrução média na área total de observação. Essas conclusões se verificam para todos os tipos de telescópios testados e nas três faixas de energia.

A Figura 59 mostra que o valor de $\langle \Theta \rangle$ aumenta com a energia para o mesmo tipo de telescópio. Isso é evidente pois os parâmetros *Size* e *Length* aumentam com a energia. Além disso, para mesma energia, o telescópio pequeno possui o pior valor de $\langle \Theta \rangle$; nesse caso, o fato de coletarem relativamente menos fótons torna-se o fator relevante. Evidente também que a Figura 59 deve ser interpretada de maneira qualitativa: a Figura 59 não demonstra relações de proporcionalidade entre $\langle \Theta \rangle$ e a resolução angular nos diferentes casos apresentados.

A Figura 59 mostra o intervalo em que o espaçamento entre os telescópios pode variar mantendo $\langle \Theta \rangle$ maior que 85 % do seu valor ótimo. Os intervalos variam em cerca de 200 m, e para o telescópio médio observando eventos de 1 TeV, o intervalo varia em 320 m. Isso significa uma degenerescência da métrica $\langle \Theta \rangle$ que portanto não deve ser utilizada sozinha para otimizar o arranjo.

Utilizando apenas os valores ótimos, a Figura 59 nos indica as seguintes soluções para arranjos quadriculares. Para o telescópio grande, um espaçamento de 320 m otimiza $\langle \Theta \rangle$ para a energia de 100 GeV, embora desfavoreça a área efetiva. Para o telescópio médio, um espaçamento entre 280 m e 240 m otimiza $\langle \Theta \rangle$ para as energias entre 1 TeV e 10 TeV. Para o telescópio pequeno, um espaçamento de pelo menos 280 m otimiza $\langle \Theta \rangle$ para as energias maiores que 10 TeV.

¹⁶ Lembramos que o valor de $\langle \Theta \rangle$ para uma separação entre os telescópios dado pela Figura 55 não é a soma dos valores de $\langle \Theta \rangle$ nas regiões interna e externa de observação, dados na Figura 57, porque devemos considerar a média de $\langle \Theta \rangle$ nessas duas regiões ponderada pela área efetiva em cada uma delas.

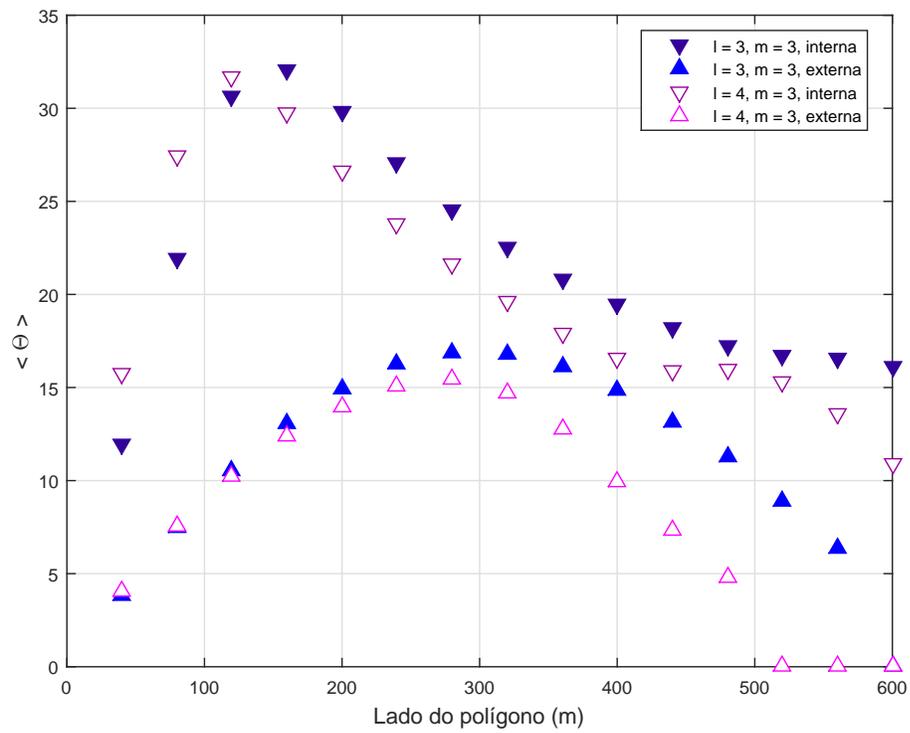


Figura 57 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para as regiões interna ou externa de arranjos triangulares ou quadrilateros para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV.

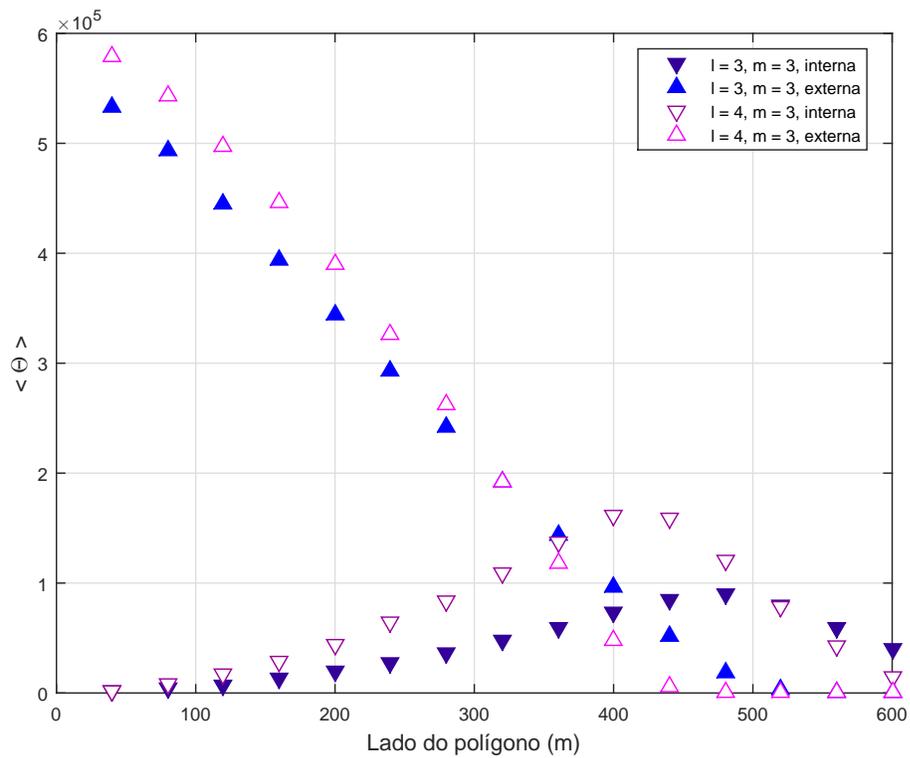


Figura 58 – Área efetiva calculada pela equação 4.7 para as regiões interna e externa de arranjos triangulares ou quadrilateros para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV.

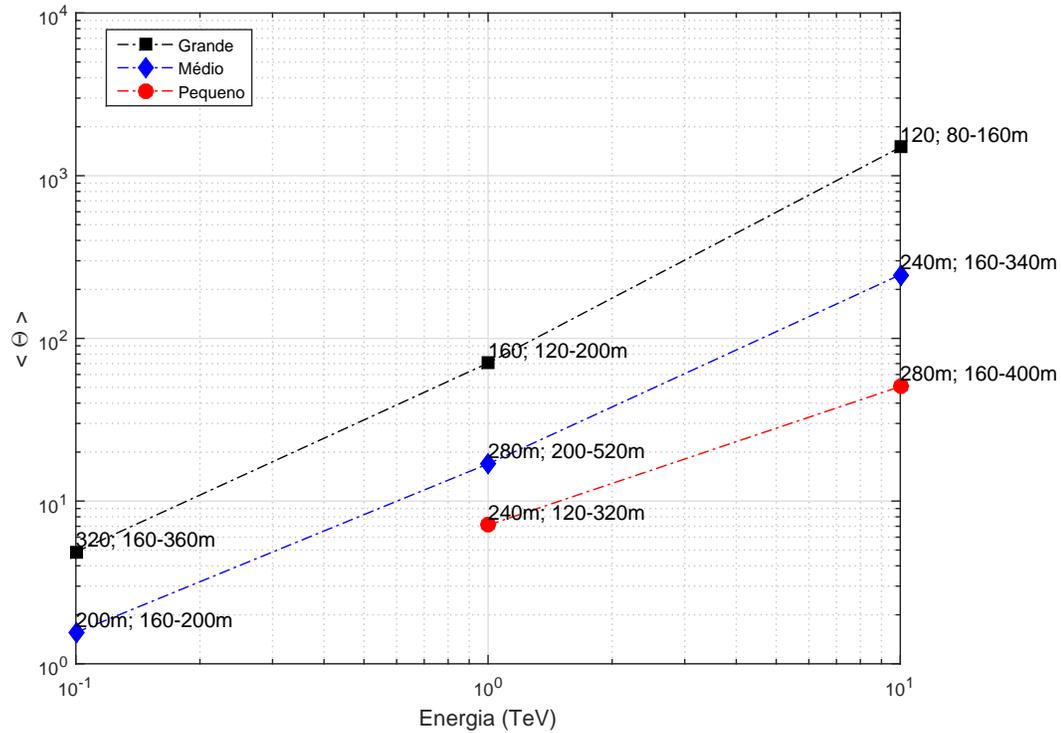


Figura 59 – Valores da métrica $\langle \Theta \rangle$ dado pela equação 4.11 para os três tipos de telescópios no arranjo ($l = 4, m = 3$) com espaçamentos entre os telescópios que maximizam $\langle \Theta \rangle$. Em cada ponto, é mostrado o valor do espaçamento que otimiza $\langle \Theta \rangle$ e também o intervalo em que o espaçamento pode variar mantendo $\langle \Theta \rangle$ maior que 85 % do seu valor ótimo. As linhas na Figura guiam a leitura dos pontos.

4.7 Métrica para a Resolução em Energia

A densidade de fótons Cherenkov na altitude de observação depende principalmente da energia do chuveiro, como mostra a Figura 28. Além dos limites do Anel Cherenkov, a dependência com o parâmetro de impacto se torna mais acentuada que na região interna ao Anel Cherenkov. Portanto, a medida da energia do primário depende dos parâmetros *Size*, que é proporcional à densidade de fótons e à área coletora do telescópio, e *Distance* ou o parâmetro de impacto reconstruído -, além do ângulo zenital do evento, que aqui consideramos igual a zero. Portanto, a resolução em energia depende das flutuações na quantidade de fótons, que de acordo com a discussão da seção 4.1, são originadas pelas flutuações no desenvolvimento do chuveiro. Pela Figura 30, as flutuações na densidade de fótons dependem tanto da energia do primário, quanto da distância entre o centro do chuveiro e o telescópio; não encontramos dependência com a área do espelho e os ângulos azimutais de abertura utilizados.

Pela Figura 30, as maiores flutuações relativas ocorrem perto do eixo do chuveiro, região onde a maior parte dos fótons é produzida por partículas carregadas locais que atingem o nível de detecção, que variam muito em número. Quanto maior a energia do primário, menores são essas

flutuações perto do eixo do chuveiro. As flutuações possuem os menores valores na região em torno ao Anel Cherenkov. Sendo que a densidade de fótons depende também do parâmetro de impacto para distâncias maiores que ~ 120 m, esperamos que para um telescópio, devamos impor limites superior e inferior para o raio onde ele detecta eventos, a fim de otimizar a resolução em energia (MOHANTY *et al.*, 1998). Para um arranjo com vários telescópios, desejamos que os telescópios estejam posicionados de modo que as regiões com as menores flutuações de luz estejam localizadas nas regiões com maior probabilidade de detecção. Nesta seção, vamos definir uma métrica que traduza essa informação para um arranjo com N telescópios. Dessa maneira, otimizar essa métrica significa dispor os telescópios em posições que favoreçam a reconstrução da energia dos eventos.

Cada telescópio é caracterizado pela função $\delta S/S(r)$, em que S é a quantidade média de fotoelétrons coletados em diferentes chuveiros, δS é o desvio padrão com relação à média e r é o parâmetro de impacto. Essa função define a flutuação no número de fotoelétrons e depende da energia e da curva da flutuação de fótons Cherenkov no nível de observação do chuveiro - um exemplo foi dado na Figura 30.

Para um arranjo com N telescópios em uma geometria específica, calcularemos a média da flutuação de fótons Cherenkov sobre a área efetiva de detecção e sobre todos os telescópios,

$$\langle L \rangle = \frac{\int LPdA}{\int PdA} \simeq \frac{\sum_i P_i L_i}{\sum_i P_i}, \quad (4.12)$$

em que P é a probabilidade de detecção do arranjo de telescópios no plano de observação dos chuveiros, sendo P_i dada pela equação 4.7, cuja soma é sobre todos os elementos de área A_i , e L_i é a média da flutuação de fótons Cherenkov ponderada pelas probabilidades de todas as combinações de telescópios que podem detectar eventos em A_i , como é mostrado no Apêndice. A métrica $\langle L \rangle$ não é definida para geometrias cuja área efetiva seja nula.

A Figura 60 mostra como a métrica $\langle L \rangle$ depende do espaçamento para telescópios dispostos nos vértices de geometrias simples, como triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. A forma das curvas na Figura 60 depende de como variam a probabilidade de detecção do arranjo e a flutuação média do sinal no plano de observação. Para as geometrias mais compactas testadas, a área externa de observação é maior que a área interna, portanto o valor da métrica $\langle L \rangle$ para o arranjo segue a forma do valor de $\langle L \rangle$ na área externa. Nas situações em que a área interna de observação é maior que a externa, o valor da métrica $\langle L \rangle$ para o arranjo segue a forma do valor de $\langle L \rangle$ na área interna. Para interpretar as curvas obtidas, analisaremos o caso particular de três telescópios. Nessa situação, a Figura 61 mostra como $\langle L \rangle$ varia nas regiões interna e externa de triângulos com diferentes espaçamentos.

Pela Figura 58, até a separação de 400 m, a área externa de observação de arranjos triangulares é maior que a interna, e essa situação se inverte após separações maiores que 400 m. Isso implica que para separações menores que 400 m, a contribuição dominante para $\langle L \rangle$ é devido ao

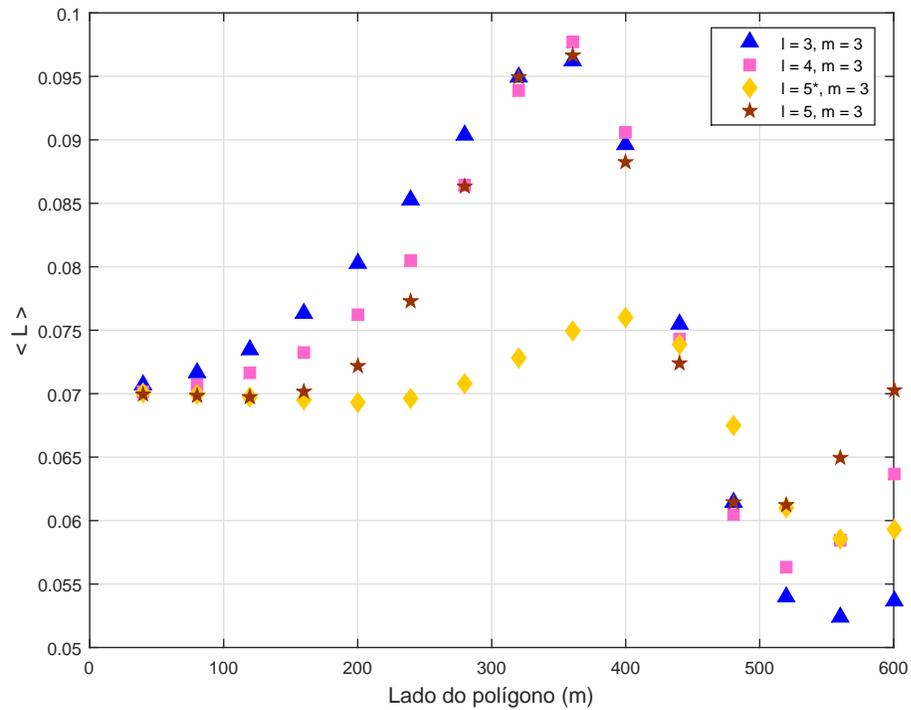


Figura 60 – Valores da flutuação média em energia calculada a partir da equação 4.12 em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV.

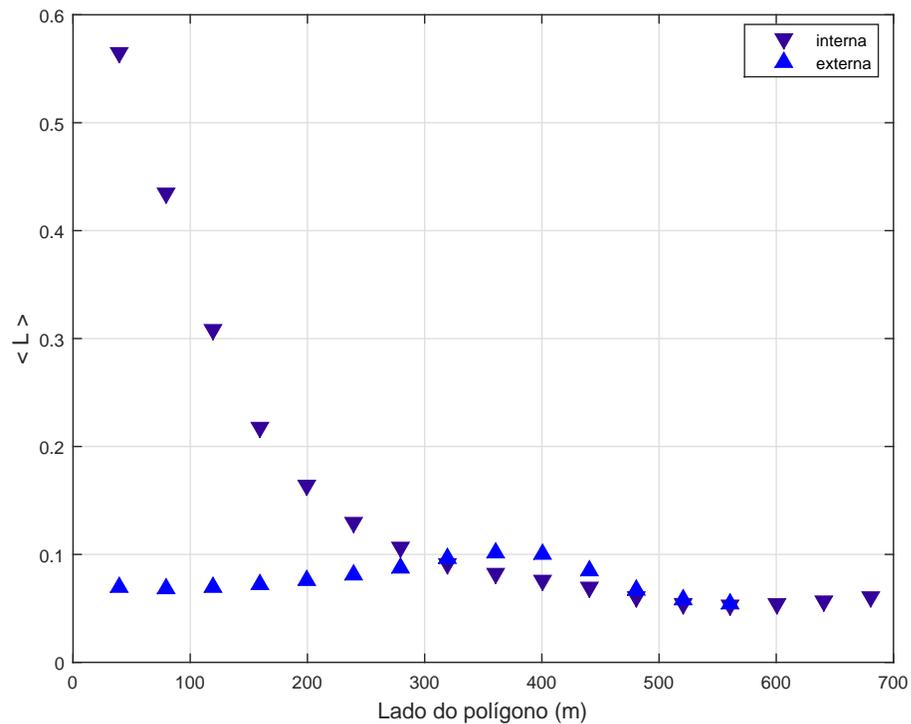


Figura 61 – Valores da flutuação média em energia para as regiões interna e externa de arranjos triangulares para telescópios médios, observando eventos de 1 TeV. A partir de 600 m, não há detecção na area externa.

valor de $\langle L \rangle$ na área externa. Pela Figura 61, o valor de $\langle L \rangle$ apenas na área externa cresce na região entre zero e 400 m e decresce na área interna após a separação de 400 m. Isso significa que o gráfico de $\langle L \rangle$ para o arranjo triangular cresce entre zero e 400 m, atingindo um pico a partir do qual a curva de $\langle L \rangle$ decai. Após a separação de cerca de 500 m, há um crescimento no valor de $\langle L \rangle$ que é explicado pelo crescimento das flutuações para as maiores distâncias da Figura 30. Se aquelas curvas da Figura 30 fossem constantes para além de uma dada distância, por exemplo, 100 m, o valor de $\langle L \rangle$ seguiria também constante após os 500 m.

Para explicar a forma das curvas na Figura 61, as Figuras 62 e 63 comparam o valor da probabilidade de detecção P_i/A_{ef} , da flutuação média L_i e do produto das duas em cada elemento de área de um arranjo triangular equilátero formado por três telescópios com diferentes espaçamentos entre eles.

Pelas Figuras 62 e 63, para uma separação de 100 m entre os telescópios, em comparação à área interna de observação, a área externa é maior e a média da flutuação na intensidade do sinal é menor para chuweiros que caiam na área externa. Existe uma coroa circular em volta dos telescópios a aproximadamente 120 m do centro do arranjo onde a flutuação é menor. A causa da existência dessa coroa circular é a queda da flutuação de sinal existente na região a 100 m de cada telescópio, como mostra a Figura 30. Ao aumentar a separação entre os telescópios até 400 m, essa região em forma de coroa circular se torna uma região onde a probabilidade de detecção é nula. Assim, a flutuação média de sinal na área externa aumenta. Além disso, a região em torno de cada telescópio passa a ocupar uma fração cada vez maior da área externa. Isso também contribui para aumentar a flutuação média na área externa. A partir de separações maiores que 400 m, a região circular em volta de cada telescópio se torna uma região onde praticamente não há detecção. Dessa maneira, a flutuação de sinal na área externa diminui para separações cada vez maiores a partir dos 400 m.

Pelas Figuras 62 e 63, a flutuação de sinal na área interna diminui para separações entre os telescópios cada vez maiores entre 100 m e 600 m, porque diminui cada vez mais a fração da região interna ocupada pelos círculos de grande flutuação de sinal em torno de cada telescópio. A partir de 600 m, a flutuação de sinal na área interna aumenta pelo crescimento das flutuações para as maiores distâncias, como mostra a Figura 30.

As Figuras 62 e 63 mostram que existe uma região - que é um círculo - em torno dos telescópios onde a flutuação de sinal é maior. Pela Figura 61, a flutuação de sinal na área de observação interna é maior que na área externa para as separações até cerca de 300 m. Pelas Figuras 60 e 62, a separação entre os telescópios deve tal que desfavoreça a detecção perto dos telescópios. Isso ocorre para separações maiores que 400 m, quando observamos a queda na curva da Figura 60, e para arranjos compactos, com separação da ordem de 100 m. Duas outras possibilidades para diminuir a flutuação média de sinal é aumentar a altitude de observação ou desconsiderar os even-

tos que caírem na região próxima aos telescópios. Pela Figura 58, como a maior parte da área de detecção é externa ao arranjo para separações de até cerca de 400 m, calculamos que um corte dos eventos até 60 m de cada telescópio diminui a área efetiva total do arranjo triangular (em média para as diferentes separações) em $\sim 10\%$. Para separações maiores que aproximadamente 400 m, esse corte não afeta a área efetiva do arranjo, porque a maior parte da área de detecção é interna, sem *trigger* na região a menos que 60 m dos telescópios.

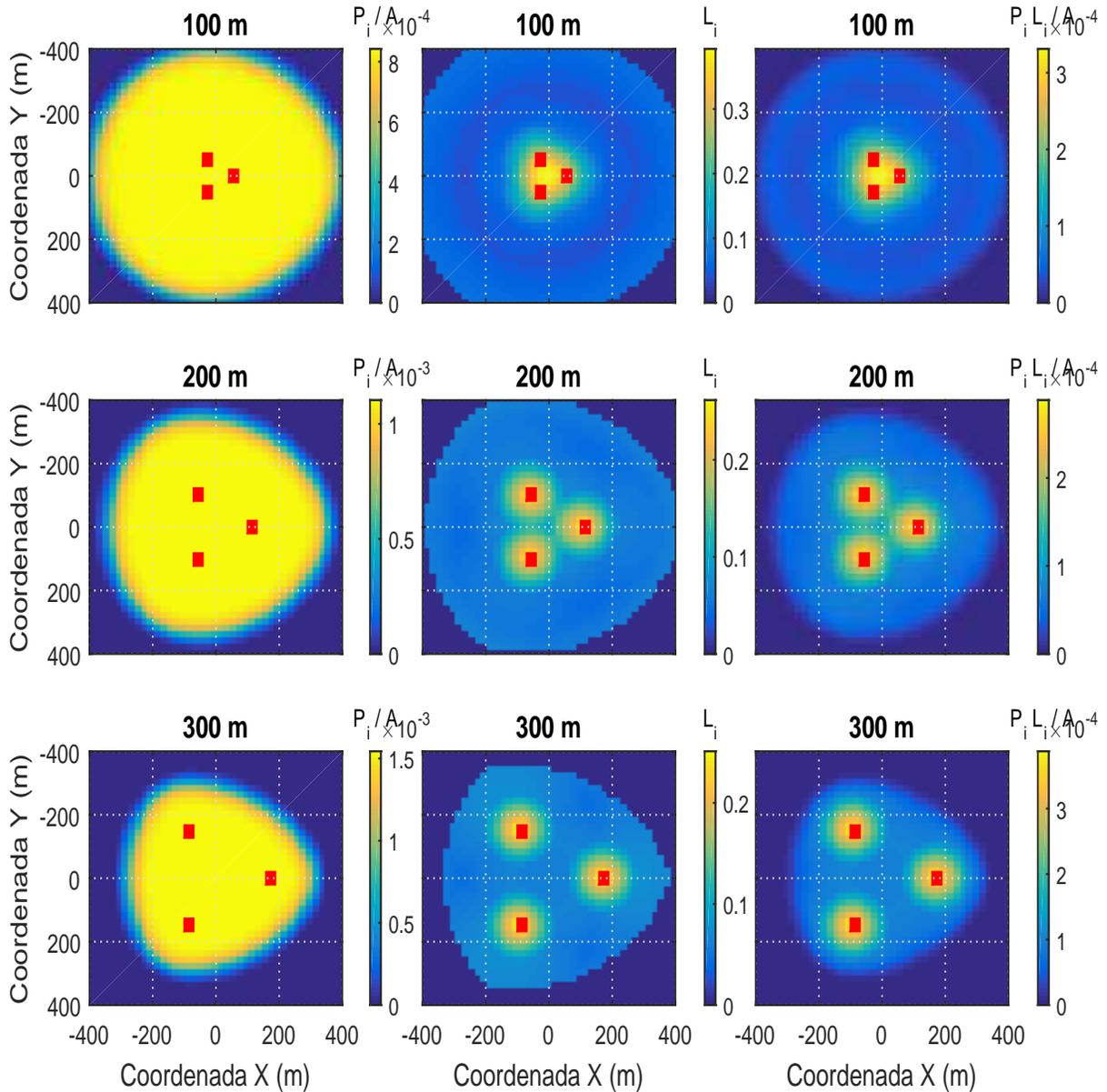


Figura 62 – *Primeira coluna:* valores da probabilidade de detecção P_i/A_{ef} na região de observação de arranjos triangulares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV. *Segunda coluna:* valor médio da flutuação de luz Cherenkov, L_i , nas posições onde o arranjo detecta eventos. *Terceira coluna:* Valor de $P_i L_i/A_{ef}$ na região de observação.

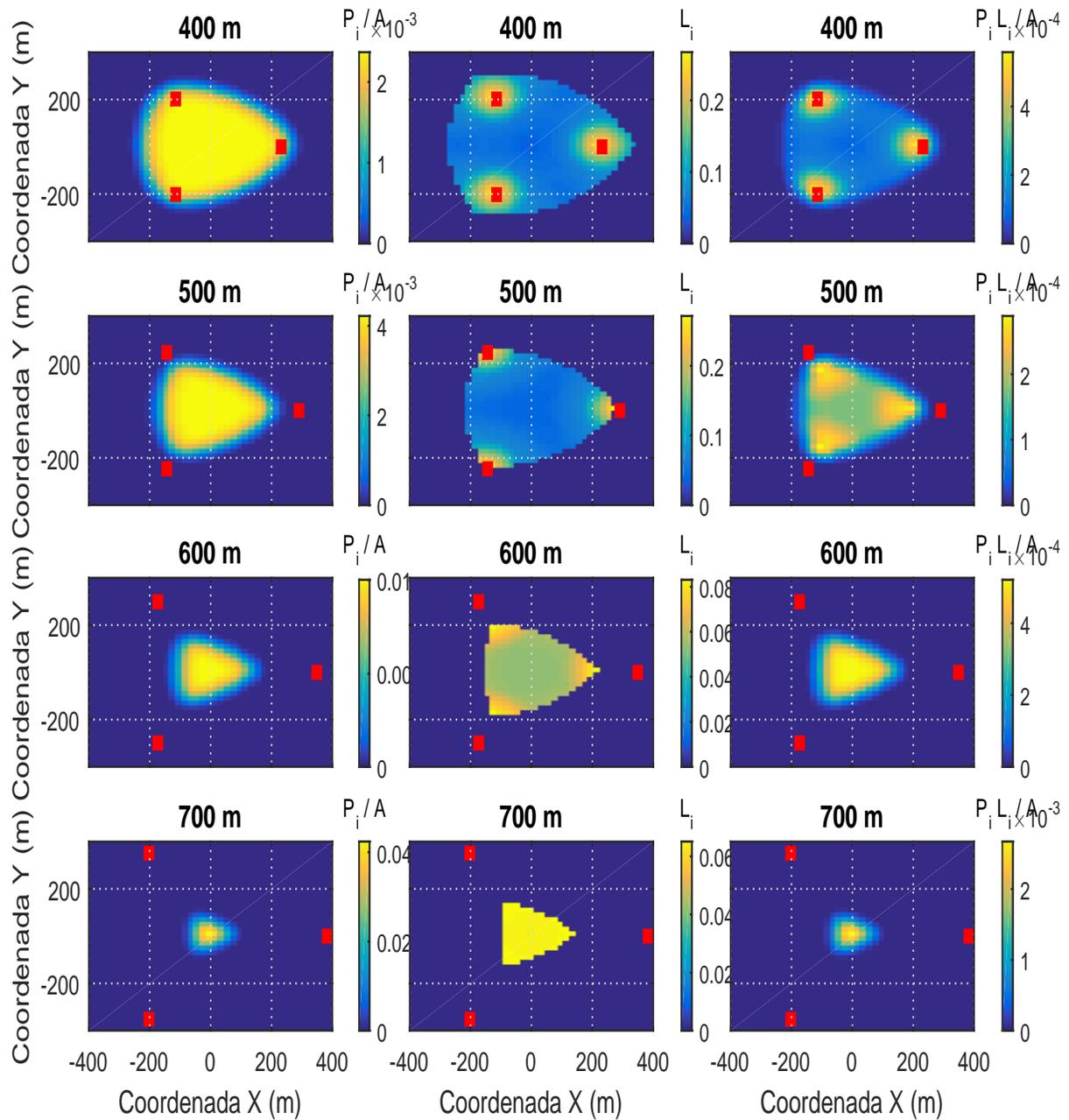


Figura 63 – *Primeira coluna:* valores da probabilidade de detecção P_i/A_{ef} na região de observação de arranjos triangulares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV. *Segunda coluna:* valor médio da flutuação de luz Cherenkov, L_i , nas posições onde o arranjo detecta eventos. *Terceira coluna:* Valor de $P_i L_i/A_{ef}$ na região de observação, obtida pelo produto em cada elemento de área dos valores dados nas duas primeiras colunas.

A Figura 64 compara o valor da métrica $\langle L \rangle$ dado pela equação 4.12 para arranjos triangulares regulares nas altitudes de 5000 m e 2200 m, com e sem um corte dos eventos com parâmetro de impacto menor que 60 m. Ao aumentar a altitude, pela Figura 32, a flutuação na intensidade de fótons Cherenkov diminui nas regiões mais próximas do centro do chuveiro e aumenta nas regiões mais afastadas. A Figura 64 mostra que o efeito disso em comparação à altitude de 2200 m é diminuir o valor da métrica $\langle L \rangle$ nos arranjos triangulares com separações até 500 m e aumentar o valor para maiores separações. O crescimento da métrica $\langle L \rangle$ para separações maiores que 500 m também ocorre na altitude de 2200 m, porém na altitude de 5000 m o efeito é mais intenso porque a flutuação a 5000 m aumenta nas regiões mais afastadas - como mostra a Figura 32. Por esse mesmo motivo, o valor da métrica $\langle L \rangle$ a 5000 m de altitude tem um decréscimo entre as separações de 100 m e 200 m: ao separar os telescópios, as regiões mais afastadas onde a flutuação de sinal é maior passam a ter probabilidade nula de detecção. Ao desconsiderar a região de detecção dentro de um raio de 60 m em relação a cada telescópio, o valor da métrica $\langle L \rangle$ diminui até a separação de 500 m, a partir de quando apenas a região mais interna do arranjo é vista pelo arranjo, como mostra a Figura 62.

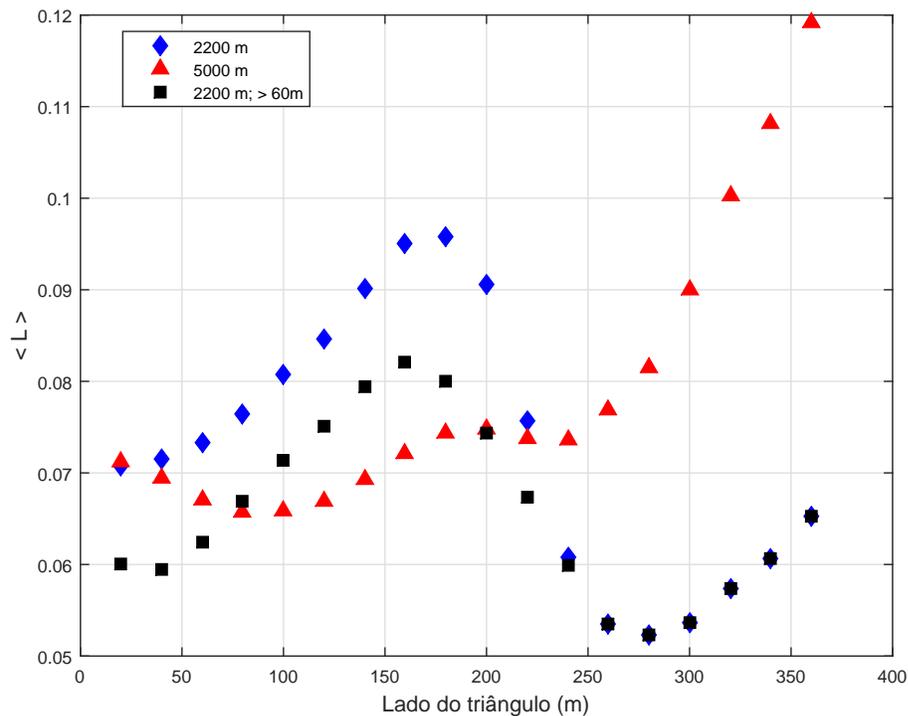


Figura 64 – Flutuação média calculada pela equação 4.12 nas altitudes de 5000 m e 2200 m, com e sem um corte dos eventos com parâmetro de impacto menor que 60 m. Foram utilizados arranjos triangulares regulares, com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

4.8 Métrica para a Separação Gama/Hadron

A exigência mínima no número de fotoelétrons necessários para realizar a reconstrução do chuveiro - seção 4.2 - a melhora na resolução angular de modo a diminuir o ângulo sólido de observação em torno de uma fonte, o corte de eventos que caíam suficientemente perto ou longe dos telescópios, o aumento na multiplicidade de observação e a diminuição da área efetiva de detecção de chuveiros hadrônicos favorecem a separação gama/hádron já em nível pós-*trigger*.

O fator de qualidade Q é a quantidade utilizada para medir o poder de uma análise de rejeição de eventos hadrônicos, sendo definido por (AHARONIAN *et al.*, 1992; FEGAN, 1997)

$$Q = \kappa_\gamma / \sqrt{\kappa_p}, \quad (4.13)$$

em que κ_γ é a razão do número de raios gama medidos após a análise em relação ao número total de raios gama simulado, e κ_p é a razão do número de raios cósmicos considerados como raios gama após a análise em relação ao número total de raios cósmicos simulado. A rejeição de eventos hadrônicos é maior que 90 %, sendo que esse valor pode aumentar às custas de reduzir a aceitância de eventos gama (BOCK *et al.*, 2004).

Para geometrias simétricas do arranjo, por exemplo, quadriculares, para otimizar o fator de qualidade, pode-se calculá-lo para diferentes espaçamentos do arranjo e procurar a geometria que implica seu valor máximo (DENMAN, 2014). Nessa circunstância, a otimização depende do tipo de análise a ser realizada. Alguns exemplos de análises geralmente utilizadas podem ser encontrados em (PARSONS; HINTON, 2014; OHM *et al.*, 2009; ALBERT *et al.*, 2008a; KRAWCZYNSKI *et al.*, 2006; FEGAN, 1997).

A fim de incluir outros tipos de geometria e para tornar a busca mais rápida, uma alternativa é construir uma métrica para a separação gama/hádron em analogia às equações 4.11 e 4.12. Para isso, deve-se calcular o fator de qualidade para apenas um telescópio observando chuveiros simulados com diferentes parâmetros de impacto r . O resultado será uma função $Q(r)$ cuja média sobre todos os telescópios e todos os elementos de área é a métrica a ser otimizada para o arranjo.

O parâmetro *Width* é utilizado nas análises de separação gama/hádron (Figuras 19 e 26). Pela Figura 36, ele depende da distribuição lateral das partículas do chuveiro, que pela equação 3.8 depende da altura acima do nível de observação. Em (AHARONIAN *et al.*, 2008), o parâmetro *Width* é calculado para chuveiros eletromagnéticos. Para calcular o fator de qualidade para apenas um telescópio observando chuveiros simulados com diferentes parâmetros de impacto, devemos calcular como o parâmetro *Width* depende do parâmetro de impacto, de maneira similar ao que foi realizado na Figura 39 para o parâmetro *Length*. Além disso, para o cálculo do fator de qualidade pela equação 4.13, também precisamos conhecer as distribuições dos parâmetros *Width* e *Length* para chuveiros hadrônicos.

4.9 Busca Sobre os Parâmetros dos Telescópios

Os principais parâmetros dos telescópios são: o tamanho do espelho, o campo de visão, a eficiência na coleta de fótons e sua conversão em fotoelétrons e o tamanho do pixel (ACTIS *et al.*, 2011). Os telescópios são posicionados em uma região a certa altitude, com um campo magnético dado. Neste trabalho, consideramos fixos os parâmetros dos telescópios e procuramos descobrir a posição de cada um deles no arranjo que otimiza as métricas. De modo mais geral, é possível também realizar uma busca sobre o espaço dos parâmetros dos telescópios, de forma que as métricas deste capítulo sejam funções tanto da geometria do arranjo quanto dos parâmetros. Na seção 4.2 discutimos a importância do tamanho do espelho, do campo de visão e da eficiência na conversão em fotoelétrons. Um campo magnético grande espalha as partículas carregadas menos energéticas do chuveiro, de modo que a luz Cherenkov se distribui em uma área maior, prejudicando a reconstrução dos eventos (MAIER *et al.*, 2015). Nesta seção, comentamos como a altitude e o tamanho do pixel influenciam a otimização do arranjo.

4.9.1 Altitude de Observação

Nessa seção, resumimos os efeitos de variar a altitude de observação que comentamos nas seções 3.6, 4.1 e 4.2 e discutimos como a altitude afeta a distância de separação entre os telescópios. Ao elevar a altitude,

- A quantidade de radiação Cherenkov aumenta na região central do chuveiro e diminui para as distâncias mais afastadas (Figura 32). Isso modifica a forma das curvas de *trigger*, de modo que eventos de menor energia têm mais probabilidade de serem detectados. Além disso, telescópios posicionados com maior separação terão imagens com menor intensidade de sinal e, portanto, menor multiplicidade.
- Pela equação 4.4, para chuveiros com mesmo parâmetro de impacto, o centroide aumenta. Além disso, as imagens tornam-se mais alongadas (KONOPELKO, 2004). Isso significa que para maiores altitudes, as imagens serão mais facilmente truncadas pelo campo de visão limitado. Fixado o tipo de telescópio, esse truncamento possui mais relevância para as maiores energias.
- O raio Cherenkov diminui, por exemplo, para cerca de 90 m a 5000 m de altitude (Figura 13). Quanto menor o parâmetro de impacto de um chuveiro, menos excêntrica será a imagem formada na câmera.

Ao elevar a altitude, pelos primeiros dois itens da lista, os telescópios pequenos - que detectam as maiores energias do arranjo e possuem a maior separação entre si - têm multiplicidade

menor e mais imagens cortadas pelas bordas, degradando a reconstrução, em comparação com a mesma separação em altitudes menores.

Ao elevar a altitude, pelos itens primeiro e terceiro da lista, os telescópios grandes possuem uma reduzida energia mínima de detecção. Para isso, eles devem ser posicionados com menor separação, uma vez que o raio Cherenkov diminui. Porém, a qualidade na reconstrução degrada porque as imagens se tornarão mais circulares.

4.9.2 Tamanho do Pixel

A determinação do ângulo zenital e a separação gama/hádron são análises que envolvem as distribuições de *Length*, *Width* e dos outros parâmetros da imagem. Portanto, essas análises dependem do tamanho do pixel na câmera, uma vez que ele introduz binagem nas distribuições (ACTIS *et al.*, 2011).

Pela seção 4.2, a escala do tamanho dos pixels na câmera deve ser menor que $0,1^\circ$, porque o parâmetro *Width* precisa ser bem definido para que o eixo maior da imagem da elipse também seja (e.g. (FUNK; HINTON, 2008)). Para as mais altas energias e chuveiros com parâmetros de impacto mais afastados, a imagem da elipse na câmera possui maior excentricidade, logo pode ser usado um valor mais alto para o tamanho do pixel (PLYASHESHNIKOV *et al.*, 2000). Assim, os telescópios pequenos possuem o maior valor para o tamanho do pixel em comparação aos outros tipos de telescópios.

As condições usuais de *trigger* envolvem a exigência de uma intensidade mínima de sinal em um certo número de fotomultiplicadoras em uma dada janela de tempo e a exigência de alguma distribuição de intensidades na câmera (ACTIS *et al.*, 2011). Para otimizar as condições de *trigger*, deve-se levar em consideração também o tamanho dos *pixels* na câmera. Para a detecção de chuveiros com as menores energias, um valor pequeno para o tamanho do pixel pode deixar a imagem na câmera menos contínua, ao passo que um valor grande para o tamanho do pixel dificulta a obtenção de um certo número de pixels com uma intensidade mínima de sinal. Logo, para chuveiros com as menores energias (< 100 GeV), que produzem menos radiação Cherenkov, um valor menor deve ser usado. No entanto, isso aumenta o custo da produção da câmera. Ao considerar o tamanho do pixel e fixar esses outros critérios de *trigger* para evitar que um evento gama seja confundido pela luz de fundo, as curvas de probabilidade de detecção se alteram, podendo diminuir a área efetiva do arranjo. Além disso, quanto maior for a contaminação da luz de fundo, maior será o tempo morto associado aos telescópios do arranjo, degradando também a taxa de detecção de raios gama. Neste capítulo, consideramos esses efeitos como de segunda ordem na faixa de energia maior que 100 GeV.

4.10 Conclusão: Arranjos com Geometrias Fixas

A Figura 59 mostrou que para arranjos quadriculares, existe um grande intervalo - com até 300 m - que mantém a métrica $\langle \Theta \rangle$ acima de 85 % do seu valor ótimo, implicando com isso uma degenerescência em $\langle \Theta \rangle$ na maioria dos casos testados na Figura 59. Nesta seção, incluiremos a área efetiva, a métrica para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$, para prever o espaçamento de arranjos para três e quatro telescópios com geometrias dadas. As Figuras 66, 65 e 67 mostram os resultados obtidos nas suas respectivas energias ótimas de detecção.

Para o telescópio médio, a Figura 65 acrescenta a informação da resolução em energia nas curvas obtidas na Figura 55. As conclusões para triângulos e quadrados são similares: um espaçamento de cerca de ou 200 m, ou 480 m mantém a métrica $\langle \Theta \rangle$ pelo menos 85 % do seu valor ótimo e impede $\langle L \rangle$ de pertencer à faixa amarela da Figura 65 - aquela que mais degrada $\langle L \rangle$. A diferença entre os espaçamentos de 200 m ou 480 m é o conflito entre área efetiva e resolução em energia, e a escolha entre as duas depende dos objetivos do experimentador. Espaçamentos maiores que 480 m fazem a área efetiva diminuir em mais de uma ordem de grandeza.

Para o telescópio grande, a Figura 66 mostra que separações maiores que 160 m-200 m diminuem a área efetiva em mais de uma ordem de grandeza, apesar de as métricas $\langle \Theta \rangle$ e $\langle L \rangle$ possuírem seus valores ótimos para separações entre 320 m-360 m. Para as menores energias, os telescópios devem estar próximos para favorecer a coincidência de *trigger*. A Figura 66 mostra que separações entre 80 m-120 m mantém a área efetiva com a ordem de grandeza de 10^5 m^2 e mantém a métrica $\langle \Theta \rangle$ pelo menos 50 % do seu valor ótimo.

Para o telescópio pequeno, a Figura 67 mostra que uma separação de 280 m favorece ambas as métricas $\langle \Theta \rangle$ e $\langle L \rangle$. Como a Figura 67 testa arranjos com três e quatro telescópios, separações menores que 280 m aumentam a área efetiva, mas às custas de degradar $\langle \Theta \rangle$ e $\langle L \rangle$.

Vimos neste capítulo como as métricas podem trazer informação sobre o espaçamento entre os telescópios em um arranjo com uma geometria dada. Por fim, desejamos analisar as geometrias formadas por quatro telescópios de maneira mais geral. Simulamos losangos com diferentes ângulos de abertura. Desejamos verificar se geometrias em forma de losango mais espaçado e com maior ângulo de abertura podem aprimorar a resolução angular do arranjo sem diminuir a área efetiva. A Figura 68 compara o resultado obtido para quadrados e losangos com abertura de 60° . Entre todos os losangos de mesmo lado, aquele com ângulo de abertura de 90° - isto é, o quadrado - possui a menor área efetiva e em geral maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$, sendo pequena a variação relativa entre elas na região da Figura 68 em que os telescópios estão próximos.

No capítulo 6, buscaremos soluções para o problema das posições dos telescópios no caso de geometrias não dadas *a priori*.

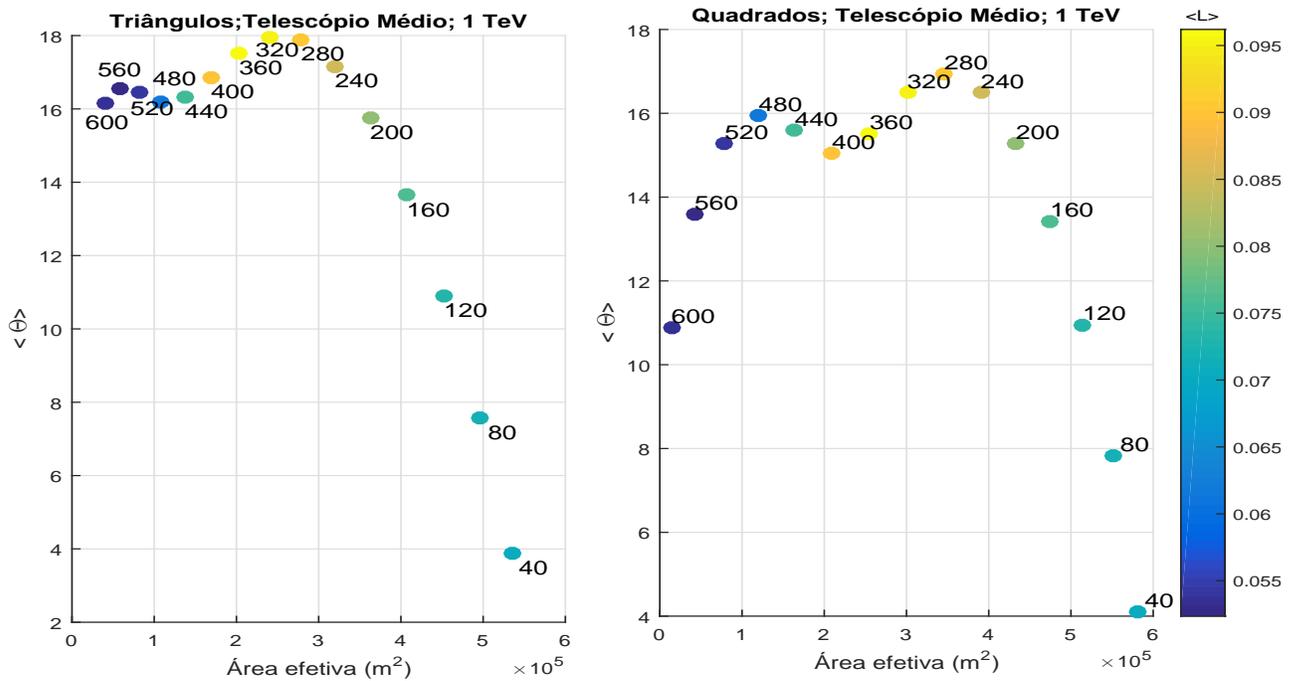


Figura 65 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

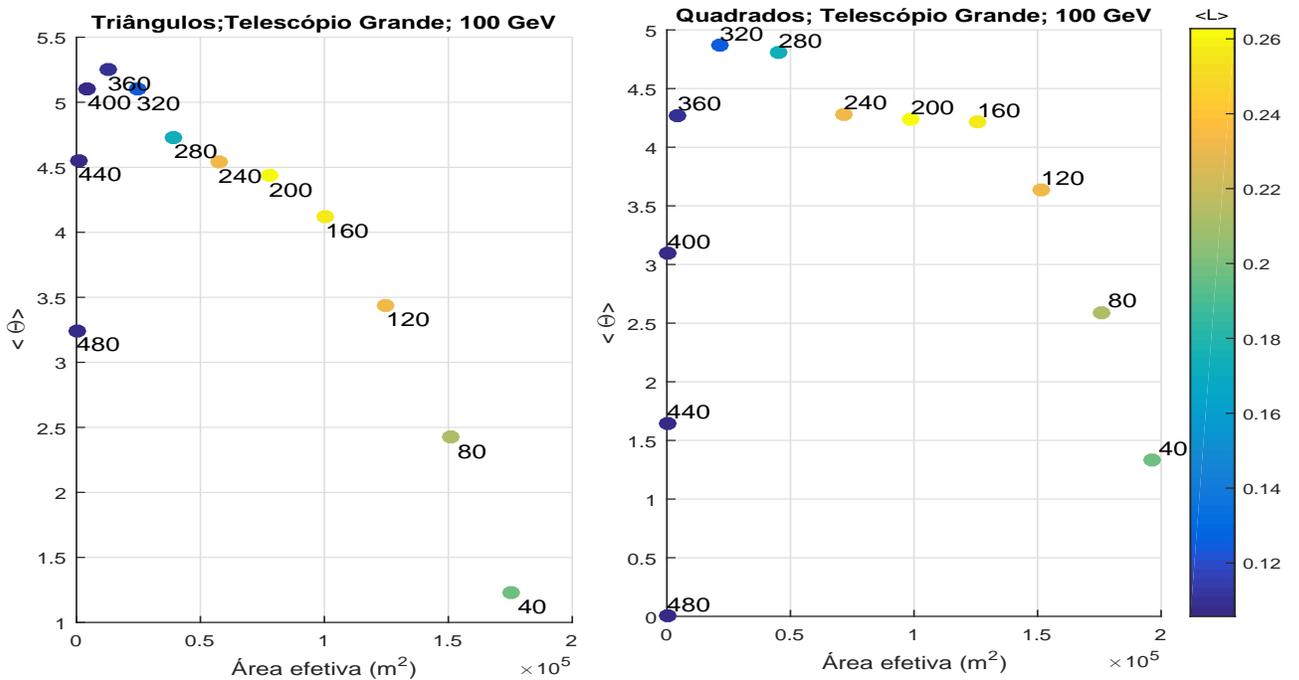


Figura 66 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.

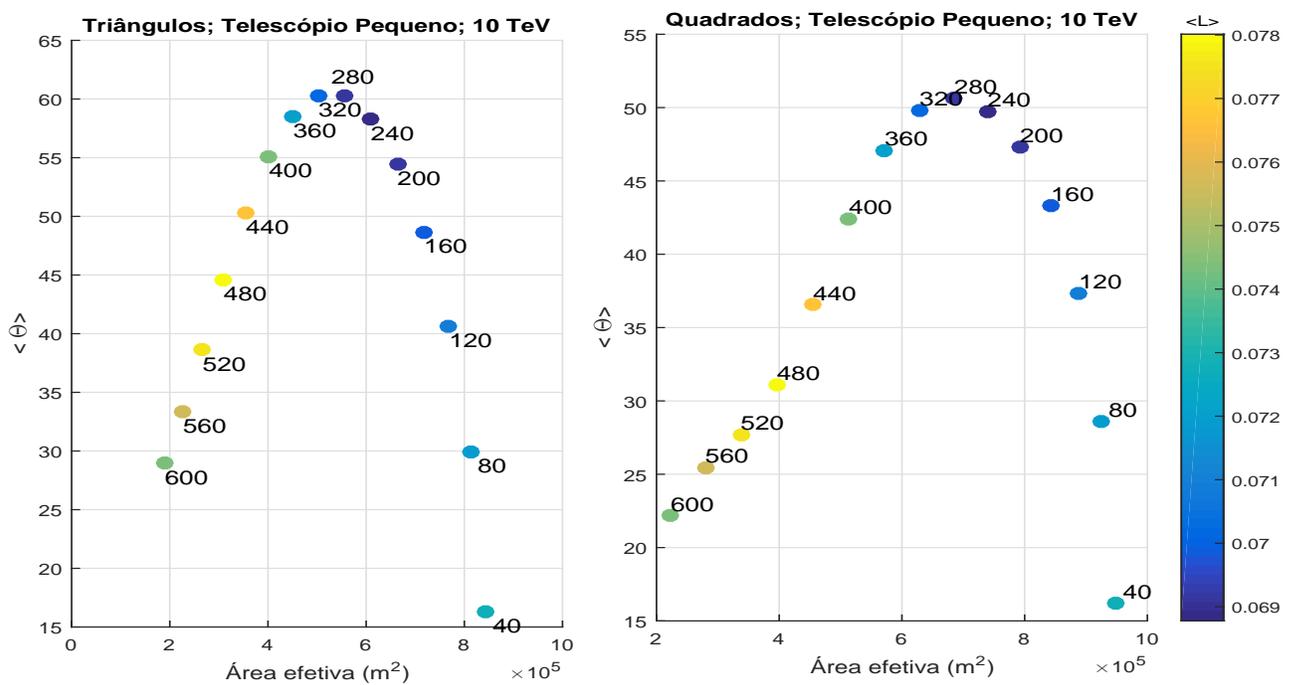


Figura 67 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos triangulares e quadriculares formados por telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.

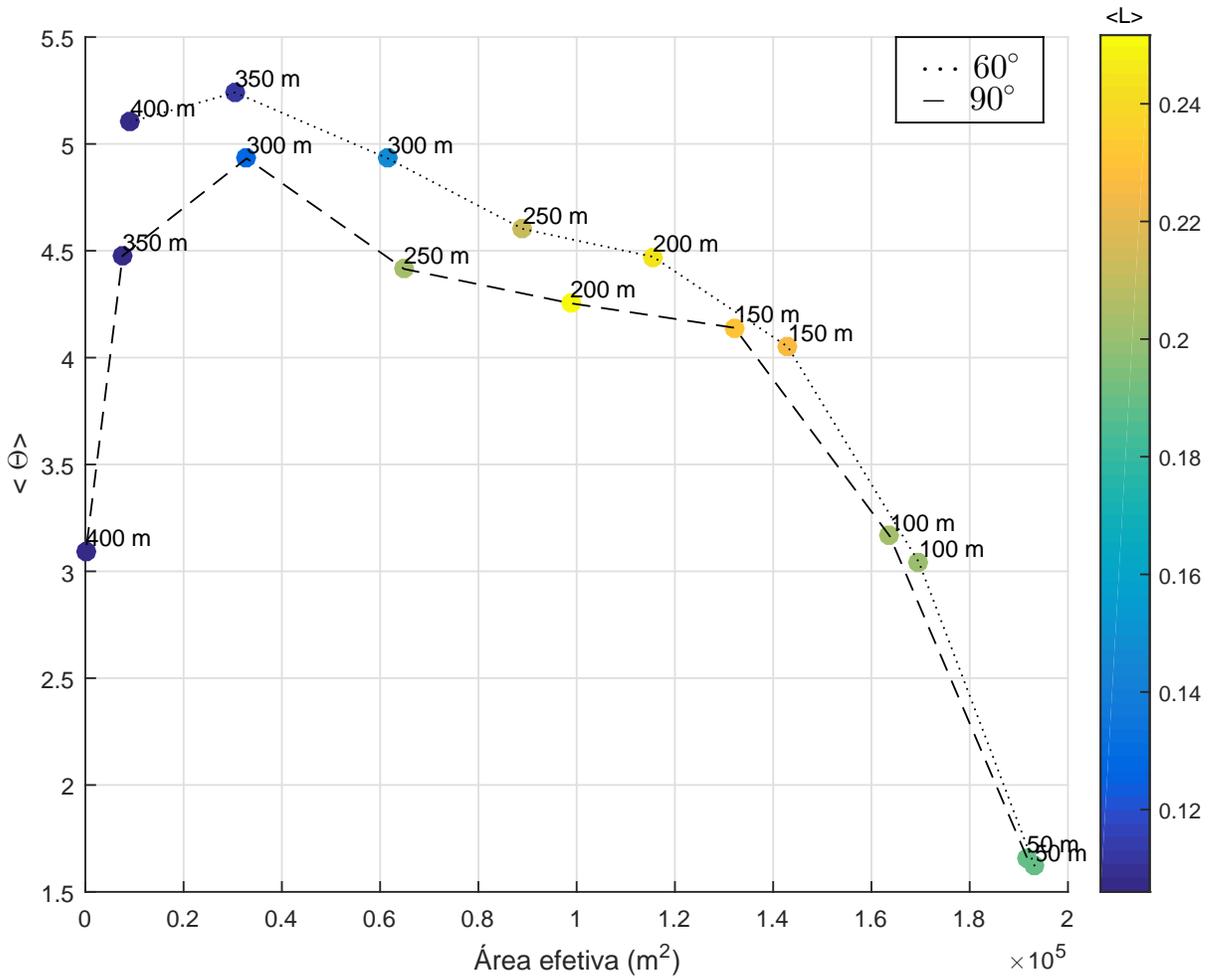


Figura 68 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos em formato de losango com diferentes valores para o lado do losango e dois ângulos de abertura: 90° (linhas) e 60° (pontilhados). Foram utilizados telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.

CAPÍTULO 5

ALGORITMOS EVOLUTIVOS MULTIOBJETIVO

A finalidade deste capítulo é apresentar o método multiobjetivo que será utilizado para encontrar as geometrias de um arranjo que otimizem as métricas derivadas no capítulo 4. A seção 5.1 apresenta a otimização heurística. Os operadores genéticos são definidos nas seções 5.2 e 5.3, formando a base sobre a qual se apoiam os algoritmos evolutivos de otimização multiobjetivo que veremos nas seções 5.9 e 5.12. A noção de ótimo é apresentada em 5.4. A seção 5.5 faz uma comparação com as propriedades dos métodos clássicos de otimização escalar para resolver o problema vetorial. A seção 5.6 trata a questão da normalização das funções objetivo, que é necessária para o funcionamento dos algoritmos. Nas seções 5.4 e 5.7 são apresentados os dois alicerces dos algoritmos multiobjetivo - diversidade e convergência de soluções. Por fim, nas seções 5.12 e 5.13 são elaboradas estratégias para a resolução do caso particular com mais de três funções a serem otimizadas simultaneamente.

5.1 Introdução

Os métodos clássicos de otimização global de uma função escalar real - por exemplo, *Hill Climbing* e Programação Linear - são baseados na hipótese de convexidade da função (DUTTA *et al.*, 2017), que neste texto será nomeada função objetivo ou, simplesmente, objetivo. Em problemas aplicados, no entanto, é difícil satisfazer a condição de convexidade e, portanto, são problemas em que há possibilidade de convergência para mínimos locais.

Os algoritmos clássicos de otimização utilizam regras de transição de uma iteração a outra que são determinísticas, isto é, o caminho seguido no espaço de busca é pré-determinado pela solução inicial escolhida. Por outro lado, existem algoritmos estocásticos, como o *Hill Climbing*

Estocástico, que utilizam números aleatórios e o caminho seguido para a busca difere a cada aplicação do algoritmo, embora o resultado final seja aproximadamente o mesmo. Apesar de as regras de transição serem probabilísticas, não se trata de uma busca aleatória, porque o algoritmo direciona a busca ao usar informações obtidas sobre o espaço de variáveis em iterações anteriores. Quando as regras de transição são probabilísticas, a convergência não depende da solução inicial escolhida, e o algoritmo pode se recuperar de possíveis erros cometidos cedo na busca. Os métodos heurísticos podem ser definidos como métodos estocásticos inspirados na natureza; os primeiros algoritmos criados nessa categoria foram o Recozimento Simulado (KIRKPATRICK *et al.*, 1983) e o Algoritmo Genético (HOLLAND, 1975), ambos anteriores a 1980.

O Algoritmo Genético é um método de otimização que abstrai a teoria de Darwin sobre a seleção natural, a evolução das espécies e a diversidade de seres vivos encontrados na natureza (DARWIN, 1859). A evolução é interpretada como otimização e resolve problemas em contextos já distantes da Biologia (DEB, 2001). É um algoritmo de busca em que existe um conjunto de candidatos à solução que é modificado a cada interação por dois princípios básicos: seleção e variação. A seleção abstrai a competição por reprodução e recursos entre seres vivos, e a variação imita a capacidade natural de criar novos seres por meio de recombinação e mutação do material genético (GOLDBERG, 1989a; JANSEN, 2013).

O Algoritmo Genético faz parte de um conjunto mais amplo de métodos, conhecido como Algoritmos Evolutivos, criado nas décadas de 1960 e 1970 (RECHENBERG, 1965; RECHENBERG, ; FOGEL, 1999). Na década de 1950, alguns programas já haviam sido escritos para simular a evolução biológica de seres vivos, mas não tinham a finalidade de otimizar funções (SIMON, 2013). Os Algoritmos Evolutivos baseiam-se na manipulação de um conjunto de candidatos à solução de um problema de forma a obter uma melhoria progressiva das soluções, à medida que as iterações do algoritmo são percorridas, em analogia com o passar das gerações de seres vivos. Os Algoritmos Evolutivos se referem a quatro tipos: Algoritmos Genéticos, Programação Genética, Estratégias Evolutivas e Programação Evolutiva (e.g. (SIMON, 2013)).

Os algoritmos evolutivos compõem uma abordagem heurística para a resolução de problemas complexos, embora não seja a única. Com efeito, tornou-se comum basear métodos de otimização em sistemas biológicos, como o movimento das formigas, abelhas, peixes e aves ou em sistemas físicos, como massas sob a gravidade, sistemas de rios, ondas etc (PATNAIK *et al.*, 2017; JR. *et al.*, 2013). A motivação para isso é que os processos naturais são conhecidos por gerar resultados desejáveis ao otimizar algo. Hoje em dia, há centenas de métodos inspirados na natureza (SIMON, 2013; YANG, 2014; DUTTA *et al.*, 2017; SÖRENSEN, 2015). Os métodos heurísticos podem ser aplicados em problemas não lineares, não convexos (com mínimos locais), não contínuos (sem exigência de diferenciabilidade), com larga dimensionalidade, com variáveis discretas e/ou contínuas e com todos os tipos de restrições. Além disso, dependem de menos hipóteses sobre

a função a ser otimizada e são mais favoráveis a sofrerem atualizações. A dificuldade para tratar os mínimos locais certamente aumenta se o problema tiver várias funções objetivo.

Se um problema tiver várias funções a serem otimizadas, essas podem ser conflitantes entre si, ou seja, é possível não haver solução única que otimize todos os objetivos simultaneamente. A melhoria de um objetivo pode levar à piora de outro. Por exemplo, na indústria de bens e serviços, procura-se maximizar o conforto dos clientes e minimizar os preços. Outro exemplo é relacionado ao transporte, por exemplo, de materiais perigosos: além da distância mínima, deve-se minimizar os riscos ambientais e os riscos para populações humanas.

A necessidade de otimizar simultaneamente funções conflituosas tornou-se cada vez mais presente no contexto das ciências econômicas na primeira metade do século XX. No entanto, os algoritmos de otimização eram destinados a resolver problemas com uma função objetivo (COELLO *et al.*, 2007). Na década de 1950, surgem as primeiras tentativas de usá-los para resolver também o caso multiobjetivo (e.g. (GASS; SAATY, 1955)). Em 1984, surgiu o algoritmo VEGA (*Vector Evaluation Genetic Algorithm*), atribuído como a primeira implantação do que hoje é conhecido como algoritmo evolutivo multiobjetivo (SCHAFFER, 1984). Os Algoritmos Evolutivos são adequados para resolver problemas multiobjetivos porque estes em geral possuem várias soluções, enquanto aqueles lidam simultaneamente com uma população de soluções a cada iteração. Alguns exemplos são os algoritmos MOGA, SPEA e NSGA, entre outros, que se diferenciam principalmente pela prioridade que dão aos objetivos, pela maneira como classificam as soluções, garantem a sobrevivência das melhores e preservam a diversidade de soluções ao longo da busca (DEB, 2001). No entanto, não são os únicos métodos; há extensões de algoritmos unidimensionais - heurísticos, como, por exemplo, Recozimento Simulado, Colônia de Formigas, Enxame de Partículas (COELLO *et al.*, 2007) - ou não (PARDALOS *et al.*, 2016; HILLERMEIER, 2001), para tratar também o caso multiobjetivo. De fato, a combinação de diferentes métodos para otimização é também uma alternativa possível que pode melhorar a performance da busca (DUTTA *et al.*, 2017).

Os métodos heurísticos ainda não possuem uma fundamentação matemática tão sólida quanto os métodos clássicos, como a Programação Linear (PATNAIK *et al.*, 2017). Algumas análises teóricas existem para alguns métodos. Os fundamentos matemáticos do Algoritmo Genético são baseados na sua representação pela teoria dos esquemas ou por cadeias de Markov (SIMON, 2013; JANSEN, 2013). As análises dos Algoritmos Evolutivos são realizadas por análises teóricas ou simulações empíricas com funções teste. Os aspectos teóricos relevantes são o comportamento limite do algoritmo para tempo infinito de processamento, o tempo e a qualidade para a convergência de funções teste (DEB *et al.*, 2002).

Assim como a teoria da evolução de Darwin não leva ao perfeccionismo, ou seja, as espécies não precisam estar perfeitamente adaptadas ao seu ambiente; elas só precisam ser capazes

de sobreviver nele, não há garantias de que soluções ótimas serão encontradas pelos métodos evolutivos ou, em geral, pelos métodos heurísticos. A ideia é ter um algoritmo eficiente e de fácil implementação que gere soluções boas na maior parte do tempo. Se um problema for complexo - por exemplo, como o do Caixeiro Viajante (e.g. (SIMON, 2013)) - ou não for inteiramente compreendido ou não houver tempo para desenvolver algum algoritmo específico que o resolva, então métodos heurísticos podem ser utilizados (JANSEN, 2013). Como não dependem da formulação do problema, uma vantagem é que podem ser usados mesmo se a formulação do problema alterar; por exemplo, objetivos podem facilmente ser adicionados, removidos ou modificados. Na realidade, para encontrar boas soluções, é importante inserir no algoritmo informações específicas do problema, pelo teorema *No Free Lunch* que equivale à afirmação de que sem informações específicas, qualquer algoritmo de otimização na média não é melhor que a busca aleatória (WOLPERT *et al.*, 1995; WOLPERT; MACREADY, 1997; SIMON, 2013). O teorema também é válido no caso multiobjetivo (JOYCE; HERRMANN, 2018; CORNE; KNOWLES, 2003).

Alguns exemplos de aplicações dos algoritmos de otimização heurísticos em Física podem ser encontrados em (HOFLER *et al.*, 2013; HOFLER, 2013; GUTIÉRREZ *et al.*, 2012; TEODORESCU, 2008; AKRAMI *et al.*, 2010; ALANDER, 2008; FERNANDEZ-RAMIREZ *et al.*, 2008; BOGDANOS; NESSERIS, 2009).

5.2 Operadores Genéticos

Os algoritmos genéticos formam um conjunto de métodos de otimização para funções escalares em um domínio de uma ou várias variáveis. A notação utiliza termos originados da Biologia. Por exemplo, as iterações do algoritmo são chamadas de gerações, e os candidatos à solução do problema, isto é, os pontos no espaço de busca, são chamados de indivíduos. Um conjunto de indivíduos forma uma população, que pode conter indivíduos repetidos. A utilização de um algoritmo genético requer cinco etapas que serão descritas nos parágrafos seguintes: a criação da população inicial, a representação das soluções, a avaliação dos indivíduos, a definição dos operadores genéticos e do critério de parada.

O algoritmo trabalha com uma população a cada geração. A população inicial pode ser gerada aleatoriamente de uma distribuição uniforme ou escolhida de modo a traduzir previamente algumas propriedades desejáveis para a solução do problema, por exemplo, privilegiando algumas regiões no espaço de busca. O número de indivíduos μ da população é um parâmetro externo do algoritmo. Uma população grande permite uma busca mais eficiente no espaço de soluções, embora torne o algoritmo mais lento. Pode haver indivíduos iguais na população inicial.

Como exemplo, suponha um caso unidimensional em que desejamos encontrar o mínimo da função real $f(x) = x^2$, $x \in [0, 15]$, para $\mu = 4$. Nesse caso, uma população inicial aleatória pode ser

dada pelos quatro números $\{5, 8, 10, 14\}$. Cada iteração do algoritmo trabalhará com quatro candidatos à solução, que serão atualizados à medida que as iterações passem. Embora o problema nesse caso possua solução analítica e portanto o uso de algoritmo genético não seja indicado, aqui ele será empregado apenas para ilustrar o método. O tamanho da população foi tomado com um valor pequeno também apenas para ilustrar a seguir o funcionamento do algoritmo com esse exemplo.

No algoritmo genético clássico (GOLDBERG, 1989a), cada ponto no espaço de busca é representado em números binários. Isso permite que o espaço de busca seja discreto. Uma sequência de números binários é chamada de cromossomo. Nessa notação, cada dígito binário é um alelo. Um conjunto de alelos forma um gene. Pode haver diversas outras representações das variáveis, a depender do tipo de problema a ser resolvido (SIMON, 2013).

No exemplo acima, empregaremos cromossomos com comprimento $l = 4$, de modo que, usando a representação binária, as variáveis são os números naturais que pertencem ao intervalo $[1, 15]$. Em notação binária, $5 = [1010]_{bin}$, $8 = [0001]_{bin}$, $10 = [0101]_{bin}$, $14 = [0111]_{bin}$.

Seja f a função a qual se deseja maximizar, também chamada de função *fitness*. A primeira etapa do algoritmo consiste em calcular o *fitness* de cada indivíduo da população. A qualidade ou adaptação de um indivíduo depende do seu valor de *fitness*. Veremos na seção 5.8 que no caso multiobjetivo a qualidade de um indivíduo depende não apenas dele, mas de toda a população.

Em seguida, em cada geração um operador de seleção atua na população. Ele escolhe quais indivíduos serão usados para criar novos indivíduos no espaço de busca. O operador de seleção traduz o mecanismo de seleção natural. Há vários operadores de seleção que podem ser usados, mas todos eles têm a finalidade de privilegiar a reprodução dos indivíduos mais bem adaptados, ou seja, que possuem maior valor de *fitness* (GOLDBERG, 1989a; BÄCK *et al.*, 2000; JANSEN, 2013). Nessa etapa, portanto, os pais da geração seguinte são escolhidos. Um método comum para selecionar indivíduos consiste em ordenar as soluções baseando nos valores de *fitness*, de modo que a probabilidade de um indivíduo ser selecionado é proporcional ao seu valor de *fitness*, ou à sua posição na lista ordenada, também chamada de nível. Utilizar o nível evita que a probabilidade de reprodução de um indivíduo com valor de *fitness* bem maior que o restante dos indivíduos seja próxima a um. Além disso, em uma população em que todos os indivíduos possuem o mesmo valor de *fitness*, utilizar o nível evita que todas as soluções tenham a mesma probabilidade de seleção, o que seria equivalente a não utilizar o operador de reprodução. No entanto, adiante será utilizado apenas o operador *Tournament Selection*, porque ele pode ser generalizado para o caso multiobjetivo (HORN *et al.*, 1994). Além disso, ele é mais rápido porque evita a etapa de ordenamento das soluções. Dois indivíduos da população são selecionados aleatoriamente para um torneio. Aquele que possuir o maior valor de *fitness* é escolhido para a próxima etapa do algoritmo. Repete-se o procedimento até que se tenha μ indivíduos escolhidos como pais. Não é necessário

que essa competição aconteça com dois indivíduos. De fato, o número de indivíduos que participam de cada torneio é um parâmetro externo ao algoritmo. Se algum indivíduo não for selecionado para o torneio, ele não será selecionado. Em média, no entanto, todos os indivíduos competem pelo menos uma vez. Um indivíduo pode ser selecionado mais de uma vez para a reprodução.

Continuando o exemplo acima, a Tabela 3 mostra como o operador de seleção atuou na população inicial para criar os quatro indivíduos que participarão da próxima etapa do algoritmo. O candidato à solução com pior valor de *fitness* perde todos os torneios.

Tabela 3 – Quatro torneios entre as soluções da população inicial $\{5, 8, 10, 14\}$ geram os quatro indivíduos que participarão da próxima etapa do algoritmo. Cada torneio é realizado entre dois indivíduos escolhidos aleatoriamente da população e uma comparação da função *fitness* - $f(x) = x^2$ - é realizada entre eles. Os indivíduos selecionados formaram nesse exemplo o conjunto $\{5, 8, 5, 10\}$.

	5	8	10	14	Comparação	Indivíduo selecionado no torneio
Torneio 1	x			x	$f(5) < f(14)$	5
Torneio 2		x		x	$f(8) < f(14)$	8
Torneio 3	x	x			$f(5) < f(8)$	5
Torneio 4			x	x	$f(10) < f(14)$	10

A comparação nesses torneios gera uma competição pela sobrevivência dos indivíduos que privilegia a reprodução dos candidatos mais bem avaliados a cada geração. Isso é realizado pelo operador de recombinação. Novamente, existem vários operadores de recombinação que podem ser utilizados, mas todos eles geram uma população nova a partir da anterior (GOLDBERG, 1989a; BÄCK *et al.*, 2000; JANSEN, 2013). Uma das maneiras de defini-lo é apresentada a seguir. Dadas duas sequências de N números binários, um número aleatório é gerado entre $[1, N - 1]$, dividindo cada sequência em duas partes. A primeira metade da carga genética do primeiro indivíduo se une à segunda metade da carga genética do segundo indivíduo para formar um elemento da geração seguinte, chamado de filho, como mostra a Figura 69-a. Um segundo filho é criado unindo-se as outras metades não utilizadas para formar o primeiro filho. Em geral, mais de um ponto de corte pode ser utilizado. Ela é capaz de gerar soluções melhores, porque os indivíduos que são recombinados não são aleatórios, mas são os que já passaram anteriormente pelo crivo da seleção natural. Se uma solução ruim for gerada, provavelmente será eliminada nas gerações seguintes. A consequência é que com o passar das gerações, os indivíduos terão seus cromossomos cada vez mais parecidos, assim como - fazendo uma comparação - em biologia as formas de vida complexas possuem cromossomos semelhantes aos encontrados nas formas de vida mais simples. Outra maneira de definir a atuação do operador de recombinação consiste em criar aleatoriamente um terceiro vetor binário para cada indivíduo a ser gerado na geração seguinte. Dados dois indiví-

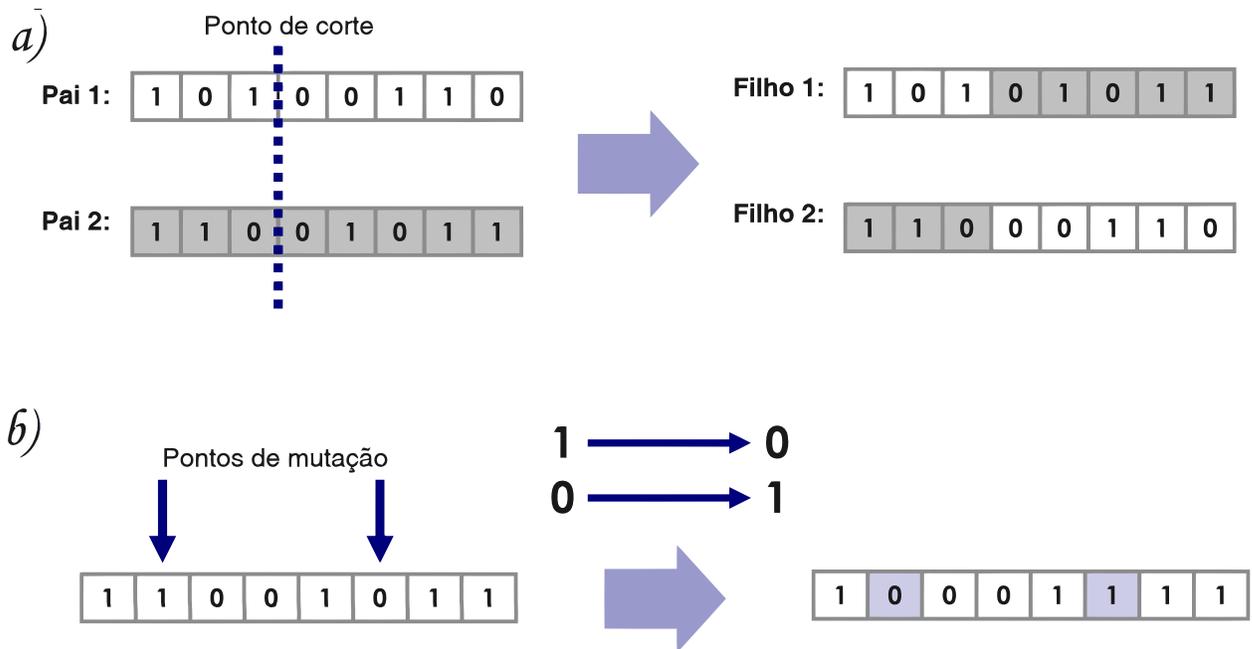


Figura 69 – a) Dados dois candidatos à solução do problema, pelo operador de recombinação, dois outros candidatos são gerados a partir de um ponto de corte. b) A mutação atua em apenas um indivíduo e, trocando seus alelos, forma uma nova solução. Adaptada de (SUDHOFF, 2017).

duos que foram selecionados pelo operador de reprodução, um alelo do primeiro indivíduo passa para a geração seguinte se à sua posição no terceiro vetor corresponder o número 1; caso contrário, é o alelo do segundo indivíduo que passará para o filho.

Continuando o exemplo acima, a Tabela 4 mostra como o operador de recombinação atuou na população selecionada para criar a geração seguinte. Os pares de indivíduos que participam da recombinação são aleatórios. Nesse exemplo, a média do valor de *fitness* da população aumentou de 54 para 84, porém o valor mínimo da população diminuiu de 25 para 4. Em geral, com o passar das gerações, a média da população também diminui. Observa-se que o candidato à solução $x = 13$ obtido pela recombinação será necessariamente eliminado nas gerações seguintes, pelo operador de seleção.

Define-se esquema como uma representação que descreve diversos genes simultaneamente. Por exemplo, o esquema [10*] representa tanto o gene [100] quanto [101]. Existem $3^l = 81$ esquemas para o exemplo acima de minimização de $f(x) = x^2$ para genes com comprimento $l = 4$. A ideia do algoritmo genético clássico é fazer com que os genes - ou esquemas - dos melhores indivíduos se propaguem com o passar das gerações. A Figura 70 ilustra alguns esquemas para o exemplo. Percebe-se na Figura 70 a relação entre genótipo e fenótipo das soluções. Por exemplo, a presença do alelo 1 na primeira posição do cromossomo (característica do genótipo) indica que

Tabela 4 – O operador de seleção atuou anteriormente na população inicial e escolheu em quais indivíduos do conjunto $\{5, 8, 5, 10\}$ atuará a recombinação. Nesse exemplo, foi utilizada a recombinação com um ponto de corte. Cada atuação do operador de recombinação gera dois indivíduos para a geração seguinte do algoritmo. Portanto, foram necessárias apenas duas atuações da recombinação, porque a população tem tamanho igual a quatro. A posição dos pontos de corte é aleatória e na Tabela é representada por uma barra “|” entre os dígitos binários.

Indivíduos selecionados:	5	8	5	10	Indivíduos gerados:
Representação binária:	1 0 1 0	0 0 0 1	1 0 1 0	0 1 0 1	
Recombinação 1	x		x		
Ponto de corte	1 0 1 0			0 1 0 1	
Indivíduo gerado número 1		1 0 1 1			13
Indivíduo gerado número 2		0 1 0 0			2
Recombinação 2	x		x		
Ponto de corte		0 0 0 1		0 1 0 1	
Indivíduo gerado número 3		0 0 0 1			8
Indivíduo gerado número 4		0 1 0 1			10

o número será ímpar (fenótipo). Existe uma periodicidade com frequência variável dependendo do esquema. Os esquemas $[01 **]$ ou $[1 * 10]$ não se propagarão durante as gerações, enquanto que $[** * 0]$ certamente se difundirá. A teoria dos esquemas foi proposta por Holland para tentar explicar por que os algoritmos genéticos funcionam (GOLDBERG, 1989a). No caso multidimensional, os esquemas são hiperplanos no espaço genômico (espaço de variáveis) que compartilham características comuns. A teoria dos esquemas divide o espaço genômico em subespaços e tenta explicar como e por que os indivíduos se movem neles, embora a convergência do algoritmo genético seja mostrada a partir de cadeias de Markov (RUDOLPH, 1994).

Na recombinação, há troca de material genético entre candidatos a solução, gerando assim novas soluções para a próxima geração. Estes não apenas herdam características de seus pais, como também podem sofrer uma mutação genética responsável pela alteração dos genes. Recombinação e mutação não podem gerar elementos fora do domínio da função *fitness*. Se a mutação for utilizada muito frequentemente o Algoritmo Genético se aproxima de uma busca aleatória, perdendo eficiência. Portanto, adiante o operador de mutação desempenhará um papel secundário, ou seja, possuirá uma probabilidade menor de ocorrer, da ordem de uma mutação a cada cem indivíduos. Novamente, há várias maneiras de implementar a mutação (GOLDBERG, 1989a; BÄCK *et al.*, 2000; JANSEN, 2013). Adiante, o operador de mutação atuará nos indivíduos gerados pela recombinação¹. No caso de uma representação binária, a mutação será a mudança aleatória de um alelo 0 para 1, ou vice-versa, como mostra a Figura 69. Tanto a probabilidade de ocorrer mutação na

¹ Caso contrário, deve-se satisfazer a condição $p_m + p_r = 1$, em que p_m é a probabilidade de mutação na população e p_r é a probabilidade de recombinação.

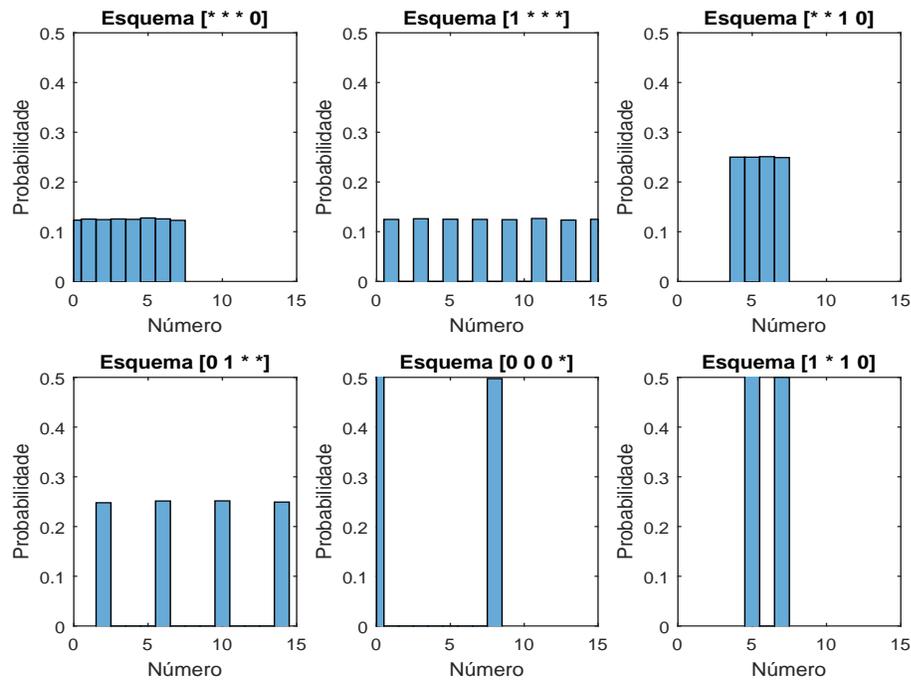


Figura 70 – A Figura ilustra a forma de alguns esquemas para uma população representada por quatro dígitos binários no intervalo $[0, 15]$. O eixo vertical representa a probabilidade de ocorrência de cada número em um dado esquema. Os esquemas $[01 **]$ ou $[1 * 10]$ não se propagarão durante as gerações do nosso exemplo, porque eles representam conjuntos de números com uma periodicidade. O esquema $[** * 0]$ certamente se difundirá com o passar das gerações porque ele indica que a solução pertence ao intervalo $[0, 7]$.

população quanto a probabilidade de ocorrer mutação de algum alelo são parâmetros externos do algoritmo. A mutação permite maior diversidade na população e, portanto, uma busca mais ampla no espaço de soluções. Além disso, ela previne soluções ótimas locais. Sem a presença da mutação, a população pode convergir a uma única solução, que pode estar muito longe da solução ótima.

Elitismo é um operador genético que evita a perda dos indivíduos mais bem adaptados, garantindo sua sobrevivência à geração seguinte. Se o grau de elitismo α for grande, diminui-se a diversidade da população, o que pode fazer o algoritmo convergir para pontos sub-ótimos. Se for pequeno, o uso adequado das elites não será explorado. Geralmente, usa-se $\alpha \sim 10\%$. A elite influencia a próxima geração a ficar perto dela. O elitismo pode ser implementado de diferentes maneiras: a geração seguinte pode ou não competir com a anterior; a elite pode ou não ser recombinada. Em todo caso, ele garante que o *fitness* da melhor solução da população nunca diminua com o passar das gerações e aumenta a probabilidade de a geração seguinte ser melhor. A inclusão de elitismo no Algoritmo Genético melhora a sua performance, uma vez que as melhores soluções são preservadas com o passar das iterações (RUDOLPH, 1994)

A última etapa de uma iteração é a verificação do critério de parada do algoritmo.

Se o critério não for satisfeito, então outra geração é criada. Há várias maneiras de implementar o critério de parada (GOLDBERG, 1989a; JANSEN, 2013). Pode haver mais de um. Por exemplo, o algoritmo para quando um dado número de gerações for atingido, ou se a qualidade do indivíduo mais bem adaptado variar entre gerações consecutivas menos que um certo valor estabelecido *a priori*, ou quando sua qualidade atingir um valor mínimo aceitável como solução do problema. O número de gerações pode ser utilizado para evitar loop infinito e também consiste em um parâmetro externo.

Os algoritmos genéticos diferem entre si pela maneira de codificar as soluções, pelos operadores de reprodução, recombinação e mutação utilizados, bem como a ordem em que são aplicados e pelo critério de parada do algoritmo. Variações podem incluir indivíduos diploides e o conceito de dominância de genes, diferenciação de gêneros, outros operadores, como migração, inversão, entre outros (BÄCK *et al.*, 2000; GOLDBERG, 1989a). Entre algumas variações do Algoritmo Genético, citamos o *Micro Genetic Algorithm* (GOLDBERG, 1989b), *Messy Genetic Algorithm* (GOLDBERG *et al.*, 1989), *Greedy Genetic Algorithm* (AHUJA *et al.*, 2000) e *Compact Genetic Algorithm* (HARIK *et al.*, 1999). Existem ainda métodos híbridos em que os indivíduos gerados pelo Algoritmo Genético são usados como entradas de outros métodos de otimização, determinísticos ou não, para realizar uma busca local no espaço de variáveis (DUTTA *et al.*, 2017). Adiante, os parâmetros externos serão considerados fixos durante as gerações.

5.3 Representação Real

O número n de dígitos binários utilizado para representar as variáveis no espaço de busca é um parâmetro a ser escolhido. Seja $x \in I = [a, b]$ um número real cuja representação binária é $[b_n \dots b_1]$. Então pode-se calcular x através de (e. g. (BÄCK *et al.*, 2000))

$$x = a + \frac{b-a}{2^n - 1} \sum_{i=1}^n b_i 2^{i-1}. \quad (5.1)$$

Por exemplo, para $n = 5$ e $I = [-5, 20]$, tem-se que $[11111]_{bin} = 20$ e $[10011]_{bin} = 10,3226..$ Quanto mais dígitos binários forem utilizados, maior será a precisão $\frac{b-a}{2^n - 1}$ das soluções, embora o algoritmo fique mais lento. Essa é uma desvantagem da necessária discretização do espaço de variáveis que ocorre na representação binária.

Um *Hamming cliff* é formado quando duas soluções adjacentes no espaço de busca possuem representações binárias muito diferentes. Por exemplo, $[0111]_{bin} = 7$ e $[1000]_{bin} = 8$. Isso dificulta a convergência do algoritmo se, por exemplo, 7 for a solução ótima e a melhor solução encontrada em alguma geração for 8, porque muitos dígitos deverão ser mudados (SIMON, 2013).

Para tentar evitar essas desvantagens, pode-se utilizar a representação *Gray* do espaço de variáveis, que é uma alternativa à representação binária nos algoritmos genéticos sugerida na década de 1970 (CARUANA, 1988; CHAKRABORTY; JANIKOW, 2003; ROWE *et al.*, 2004)².

De forma alternativa, nesta seção, os operadores de recombinação e mutação serão redefinidos pela representação real. Há várias maneiras de implementar esses operadores; veremos alguns exemplos (DEB, 2001; SIMON, 2013). Sejam **a** e **b** dois vetores que representam indivíduos selecionados pelo operador de seleção. Então um indivíduo **x** da geração seguinte pode ser criado através da equação $x = a + u_r \cdot (b - a)$, em que u_r é um vetor aleatório cujas componentes são geradas de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, r]$, em que r é um parâmetro externo. Se $r = 1$, então **x** pertence ao hipercubo definido por **a** e **b**. Se o espaço de busca for limitado, então devemos ter $r \leq 1$ para que os indivíduos gerados não tenham a possibilidade de pertencer fora do limite permitido (DEB, 2001).

O operador Recombinação Binária Simulada foi construído de modo que a probabilidade de uma solução qualquer ser gerada a partir de outras duas dadas seja igual àquela encontrada se a recombinação binária com um ponto de corte fosse utilizada (AGRAWAL *et al.*, 1995). Com isso, a recombinação na representação real compartilha as características mais importantes da recombinação na representação binária, como é explicado a seguir.

Sejam a e b duas variáveis que pertencem a dois indivíduos que foram selecionados pela recombinação, em que $b > a$. O operador Recombinação Binária Simulada gera duas variáveis x_1 e x_2 em dois indivíduos da geração seguinte através da equação:

$$x_1 = 0,5(a + b - \beta|b - a|) \quad (5.2)$$

$$x_2 = 0,5(a + b + \beta|b - a|), \quad (5.3)$$

em que

$$\beta = (u\alpha)^{\frac{1}{nc+1}}, \quad u \leq 0,5 \quad (5.4)$$

$$= \left(\frac{1}{2-u\alpha}\right)^{\frac{1}{nc+1}}, \quad u > 0,5 \quad (5.5)$$

e u é um número aleatório no intervalo $[0, 1]$, $\alpha = 2 - \Delta^{-(nc+1)}$ e

$$\Delta = 1 + \frac{2\min(a - x_{min}, x_{max} - b)}{b - a}, \quad (5.6)$$

em que x_{min} e x_{max} são os limites inferior e superior do intervalo que contém as variáveis do problema. Se o domínio for ilimitado, basta fazer $\alpha = 2$ na equação 5.4. Se $a = b$, adotaremos que os

² Nela, a representação de dois números decimais adjacentes muda apenas um único alelo de 0 para 1 ou vice-versa. Seja $b_n = [b_1 \dots b_n]$ um número binário e $g_n = [g_1 \dots g_n]$ o mesmo número na representação *Gray*. A conversão dos dígitos binários pode ser realizada com o seguinte algoritmo: i) $g_1 = b_1$ e ii) para $i = 2, \dots, n$, segue que $g_i = 1$ se $b_i = 1 \oplus b_{i-1} = 1$, sendo \oplus um "ou exclusivo". Por exemplo, os números de 0 a 3 na representação *Gray* são: $0 = [000]_b = [000]_g$, $1 = [001]_b = [001]_g$, $2 = [010]_b = [011]_g$, $3 = [011]_b = [010]_g$.

dois indivíduos gerados são iguais ao par que os originou. Tem-se que n_c é um parâmetro externo. A Figura 71 mostra o efeito da variação desse parâmetro (DEB; AGRAWAL, 1999; AGRAWAL *et al.*, 1995; KUMAR; K., 1995).

Pela equação 5.2, as novas soluções geradas possuem a mesma média que as soluções que as originaram, propriedade também presente na recombinação com um ponto de corte (DEB, 2001). Pela equação 5.2, as duas soluções geradas ou pertencem à região entre as soluções que as originaram, ou são iguais a elas, ou pertencem à região fora do intervalo definido pelas soluções que as originaram, a depender do valor de β . Em todos esses três casos, são iguais as distâncias entre as soluções e as que participaram da recombinação, propriedade também presente no caso binário que o operador Recombinação Binária Simulada preserva. Em outras palavras, a distância dos filhos à posição média dos pais é igual para os dois filhos. Pela Figura 71, há maior probabilidade de as soluções geradas pela recombinação estarem próximas das soluções iniciais.

Uma das maneiras de implementar a mutação para a representação real das soluções é a seguinte. Dada uma probabilidade p de haver mutação, um número aleatório u é gerado no intervalo $[0, 1]$ para cada variável de cada indivíduo da população. Se $u < p$, então naquela variável atuará

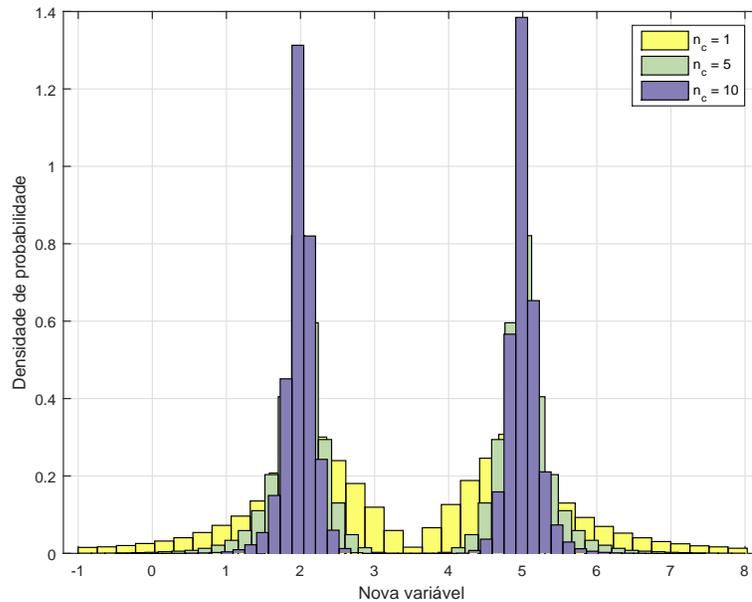


Figura 71 – Distribuição de probabilidade para as variáveis x_1 e x_2 geradas a partir do Recombinação Binária Simulada em um exemplo unidimensional, em que as variáveis 2 e 5 participam da recombinação. As distribuições possuem picos nas duas variáveis que participaram da recombinação e na Figura o intervalo permitido para as novas soluções geradas é $[1, 6]$. Aumentar o parâmetro n_c torna as distribuições mais estreitas. Isso permite uma busca mais localizada no espaço de variáveis do problema, o que é mais relevante nas gerações finais do algoritmo e também nos problemas com muitos objetivos (seção 5.11).

o operador de mutação. Em geral, adota-se $p = 1/N$, em que N é o tamanho da população. Dessa maneira, na média uma variável é mutada por indivíduo. A vantagem da mutação na representação real em comparação com a representação binária é que no primeiro caso pode-se variar a forma com que a mutação ocorre. Por exemplo, pela Mutação Polinomial, se $x \in [a, b]$ é uma variável que sofre mutação, então a nova variável será dada por $x' = x + \delta(x - a)$, em que $\delta = 2u^{(1+n_m)^{-1}}$, se $u \leq 0,5$; ou $x' = x + \delta(b - x)$, em que $\delta = 1 - [2(1 - u)]^{(1+n_m)^{-1}}$, se $u > 0,5$. Tem-se que n_m é um parâmetro externo, usualmente $n_m \in [20, 100]$. A Figura 72 mostra o efeito das diferentes escolhas para o parâmetro n_m . Nesse caso, a variável x' pertence ao intervalo $[a, b]$. Se o domínio das variáveis for infinito, então o intervalo $[a, b]$ representa os limites mínimos e máximos da mutação e devem ser fornecidos como parâmetros. Outro exemplo é a mutação gaussiana, em que se adiciona à solução original uma gaussiana com média zero e o desvio padrão é um parâmetro externo. Porém, nesse caso, deve-se verificar se a nova variável pertence ao intervalo $[a, b]$. Pela Mutação Não Uniforme, um indivíduo x' da geração seguinte é dado criado a partir de um indivíduo x por $x' = x + \tau(x_{max} - x_{min}(1 - r^{(1-t/t_{max})^b}))$, em que $x \in [x_{min}, x_{max}]$, τ é igual a 1 ou -1, com probabilidade de 0,5 em cada caso, r é um número aleatório em $[0, 1]$, t_{max} é o número máximo de gerações, t é a geração atual e b é um parâmetro externo. A vantagem desse operador é que o indivíduo criado tem maior probabilidade de estar próximo à solução original, e essa característica se torna cada vez mais evidente à medida que o número de gerações aumenta (DEB, K.; DEB, D., 2014; DEB, 2001).

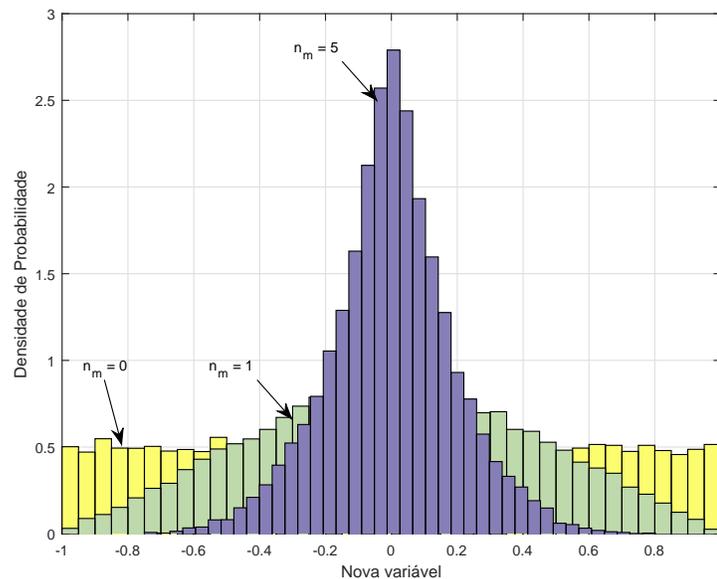


Figura 72 – Variável x' gerada a partir da Mutação Polinomial atuando em uma solução $x = 0$ no intervalo $[-1, 1]$ para diferentes valores do índice n_m . Para $n_m = 1$, a distribuição de probabilidade pela mutação é uniforme. A distribuição se torna mais estreita à medida que o valor de n_m aumenta, até o limite $n_m \rightarrow \infty$, quando a distribuição se torna um Delta de Dirac de modo que $x' = x$, situação equivalente a não haver mutação.

5.4 Solução de Pareto

A solução ótima de um problema de minimização de uma única função é aquela que possui o menor valor da função em algum domínio dado. Se um problema tiver várias funções a serem otimizadas, essas podem ser conflitantes entre si, ou seja, é possível não haver solução única que otimiza todas as funções simultaneamente. Ao otimizar alguma delas, pode-se piorar o valor de outra. Mesmo que essa piora seja pequena em algum sentido, como não se comparam grandezas físicas diferentes, deve-se utilizar outra noção para a solução ótima do problema. No final do século XIX, Francis Edgeworth propôs uma noção de ótimo, depois generalizada por Vilfredo Pareto (EDGEWORTH, 1881; PARETO, 1964). Em linhas gerais, a noção de solução ótima é aquela a qual não há nenhuma outra que melhore o valor de um objetivo sem piorar pelo menos um outro. Para a definição de solução ótima adotada, antes é necessário definir a relação de dominância.

Em problemas multiobjetivo, a comparação de uma solução em relação a outra pode ser determinada pelo critério de dominância. Dizemos que uma solução \mathbf{x} domina a \mathbf{y} , se \mathbf{x} for estritamente superior a \mathbf{y} em pelo menos um objetivo e \mathbf{x} for igual ou superior a \mathbf{y} nos demais objetivos. Por exemplo, para um problema de minimização, se \mathbf{x} for estritamente menor que \mathbf{y} em todas as funções objetivo menos uma, a qual é estritamente maior, então \mathbf{x} não domina \mathbf{y} . E \mathbf{y} não domina \mathbf{x} . Em outras palavras, o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, que corresponde à imagem da solução \mathbf{x} , domina $\mathbf{F}(\mathbf{y})$, se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{F}(\mathbf{y})$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{y})$, com a desigualdade avaliada componente a componente. Quando $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ domina $\mathbf{F}(\mathbf{y})$, escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleleft \mathbf{F}(\mathbf{y})$ ou $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{F}(\mathbf{y})$ (DEB, 2001).

Nesse contexto, trabalha-se com dois espaços: o das variáveis P e o espaço dos objetivos, dentro dos quais definimos o conjunto de soluções não dominadas por nenhuma outra como o conjunto Pareto-ótimo:

$$P' = \{x \in P \mid \nexists y : y \preceq x\} \quad (5.7)$$

A fronteira de Pareto é a imagem correspondente ao conjunto Pareto-ótimo:

$$PF = \{f(x) \mid x \in P'\} \quad (5.8)$$

A Figura 73 ilustra o teste de dominância com um exemplo, e a Figura 74 constitui uma representação de uma fronteira de Pareto.

As soluções ótimas são aquelas que pertencem à fronteira de Pareto. De fato, pode haver infinitas soluções ótimas. Se a informação adicional sobre importância relativa entre os objetivos for desconhecida, todas as soluções Pareto-ótimas são igualmente importantes e não se pode dizer que alguma solução da fronteira de Pareto é melhor que outra. Na prática, procura-se um conjunto finito de soluções que esteja o mais próximo da verdadeira fronteira de Pareto e a represente no espaço dos objetivos. Nesse caso, a finalidade é encontrar os compromissos entre as funções objetivo em

vez de uma solução ótima para cada objetivo separadamente ou uma única solução, como no caso da otimização global.

Em situações aplicadas da realidade, deseja-se obter apenas uma solução, cuja escolha necessita de informações que não estão contidas nas funções objetivo. Essa tomada de decisão é

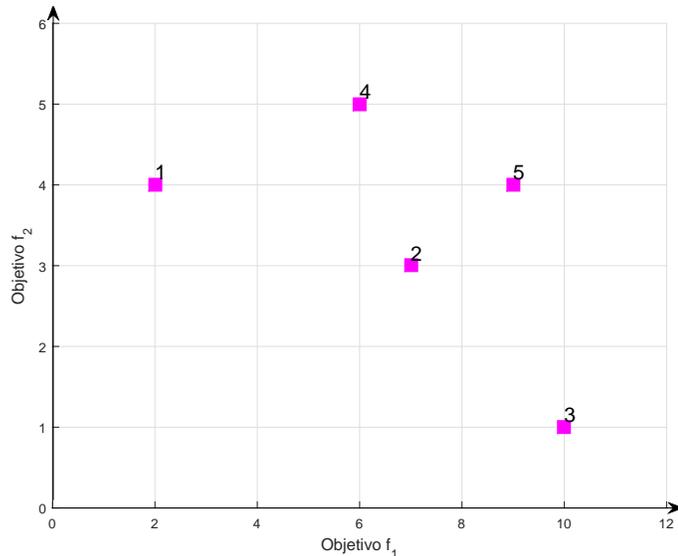


Figura 73 – Exemplo de teste de dominância para um problema com dois objetivos em que se deseja minimizar f_1 e f_2 simultaneamente. Entre apenas as soluções 4 e 5 não há relação de dominância, porque cada uma é melhor em um objetivo diferente. Porém, ambas são dominadas pela solução 1. A solução 2 domina a solução 5 e não domina a solução 4. As soluções 3, 4 e 5 não dominam nenhuma outra. As soluções 1, 2 e 3 são não dominadas.

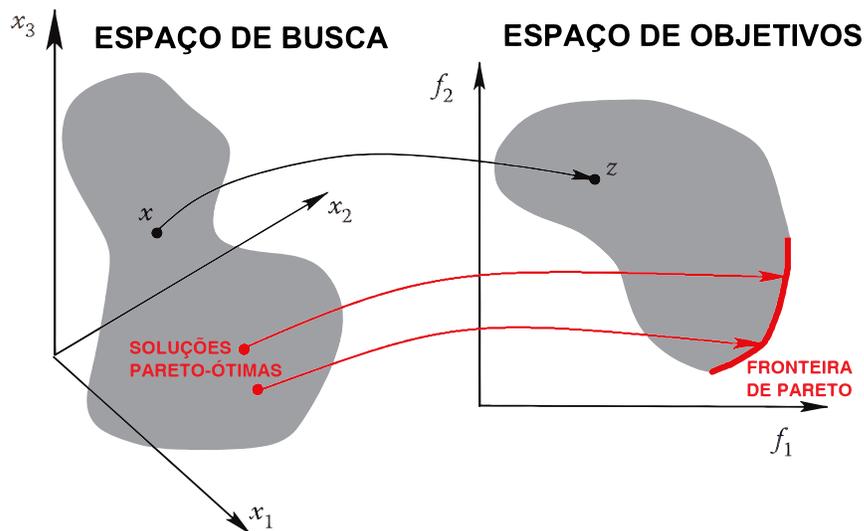


Figura 74 – Correspondência entre o espaço das variáveis e o espaço de objetivos, mostrando a representação gráfica da fronteira de Pareto. Figura adaptada de (DEB, 2001).

realizada por uma pessoa ou grupo de pessoas - adiante chamada de usuário - de acordo com suas preferências e é uma área de pesquisa em si (DUTTA *et al.*, 2017). Na prática, pode ser difícil diferenciar entre soluções boas e ótimas, dada a qualidade de convergência do algoritmo utilizado, de modo que a ênfase deve ser encontrar boas soluções (MIETTINEN, 2012).

Pela forma da fronteira de Pareto, pode-se aprender algo sobre o conflito entre os objetivos e o espaço das soluções possíveis. Por exemplo, em alguns problemas, não é claro que os objetivos não são conflitantes. Nesse caso, a fronteira de Pareto se reduz a um ponto. Pode ocorrer que uma mudança brusca em um objetivo não prejudique o outro dentro de limites aceitáveis *a priori* ou uma pequena melhora de um objetivo leve a uma grande depreciação de outro, o que ocorre nos chamados *knee points* (DAS, 1999; BRANKE *et al.*, 2004). Isso significa que é melhor decidir qual solução usar somente após ter uma perspectiva geral de todas as outras soluções (DEB, 2001).

Finalmente, observa-se que a fronteira de Pareto de um problema com, por exemplo, dois objetivos não é igual à projeção da fronteira de Pareto de um problema com três objetivos que incluem aqueles dois primeiros, porque se uma solução \mathbf{x} for superior em dois objetivos em comparação a uma solução \mathbf{y} , mas for inferior no terceiro, então \mathbf{x} não pertence à fronteira de Pareto. Tampouco a fronteira de Pareto de um problema com três objetivos pode ser obtida através das fronteiras de Pareto entre pares de objetivos.

5.5 Escalarização

Um problema de otimização com múltiplos objetivos pode ser convertido em um problema de otimização de uma única função, sendo portanto o caso multiobjetivo visto como uma aplicação do caso unimodal. Há várias maneiras de implementar métodos dessa categoria (DUTTA *et al.*, 2017). Um exemplo é o método Somatório de Pesos, que busca otimizar uma função F somando cada objetivo f_i multiplicado por um peso w_i , $i \in 1, \dots, N$, em que N é o número total de objetivos:

$$F = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_N f_N, \quad (5.9)$$

Nesse caso, a função 5.9 é otimizada com algum algoritmo para objetivo único, como, por exemplo, o Algoritmo Genético (seção 5.2). A otimização da função 5.9 pressupõe a condição de que todos os objetivos devem ser ou maximizados ou minimizados. Se necessário, transformações do tipo $f_i \mapsto -f_i$ sempre podem ser realizadas a fim de satisfazer essa condição. Os pesos definem um vetor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ e sua soma deve ser igual a um.

Uma vez que os objetivos possuem ordens de grandeza diferentes, é necessário realizar a normalização de cada função f_i pelos pontos que definem os limites superior e inferior de cada objetivo. Muitas vezes, esses limites não são conhecidos *a priori* e procedimentos para estimá-los serão vistos na seção 5.6.

O vetor \mathbf{w} simula a preferência do usuário entre os objetivos e deve ser fornecido *a priori* como um parâmetro externo à resolução do problema. Por outro lado, o algoritmo pode ser executado repetidas vezes, com conjuntos distintos de parâmetros w_i , de modo que se obtenha um conjunto de soluções que tenda à fronteira de Pareto. Essa necessidade de executar o algoritmo várias vezes é uma desvantagem do método, porque aumenta o tempo de execução, comparado aos algoritmos multiobjetivo. Além disso, uniformidade na escolha dos pesos w_i não garante uma fronteira de Pareto uniforme (DUTTA *et al.*, 2017) e pode gerar fronteiras com menor diversidade de soluções, se comparadas com as obtidas por outros métodos (MIETTINEN, 2012).

A principal vantagem da Escalarização é possuir provas de convergência para a solução Pareto-ótima. Por exemplo, pode-se garantir que se o conjunto e a fronteira de Pareto forem convexas, qualquer solução Pareto-ótima pode ser encontrada usando o método de Somatório dos Pesos (MIETTINEN, 2012). Se a fronteira de Pareto não for convexa, o método do Somatório dos Pesos não encontra certas soluções, independentemente dos pesos escolhidos (MIETTINEN, 2012). Existem entretanto certas extensões do método que tratam regiões não convexas (PARDALOS *et al.*, 2016; BHATIA; AGGARWAL, 1992).

Se o compromisso entre os objetivos (o vetor \mathbf{w}) for conhecido *a priori*, pode-se usar a equação 5.9, não sendo necessário usar algoritmos multiobjetivos. No espaço de soluções, seja \mathbf{z}^* a solução ideal e não física obtida otimizando todas as funções f_i separadamente. Se o objetivo for encontrar a solução na fronteira de Pareto que mais se aproxima da solução ideal \mathbf{z}^* , o problema escalar a ser resolvido é

$$F = \min \left(\sum_{i=1}^k |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{1/p}, \quad (5.10)$$

em que $1 \leq p \leq \infty$ (MIETTINEN, 2012). Para objetivos que possuem ordens de grandeza diferentes, é necessário realizar a normalização de cada função f_i . Para problemas de minimização, $f_i(x) > z_i^*$, mas toma-se o valor absoluto na equação 5.10 porque o ponto \mathbf{z}^* nem sempre é conhecido, sendo apenas estimado. Pode ser mostrado que a solução do problema 5.10 é fracamente Pareto-ótima³(MIETTINEN, 2012).

5.6 Estimativa do Ponto Nadir

As funções objetivos não comparáveis presentes nas equações 5.9 e 5.10 devem ser normalizadas, de modo que todas variem em um intervalo de mesmo comprimento. Isso pode ser realizado através dos pontos ideal e nadir de cada objetivo, definidos a seguir.

³ Uma solução domina fortemente outra se ela for estritamente superior em todos os objetivos. Define-se conjunto fracamente não dominado como aquele não fortemente dominado por nenhuma solução de tal conjunto.

Em problemas de minimização, se o valor mínimo de cada objetivo f_i não for igual a zero, deve-se utilizar o vetor ideal definido na seção 5.5:

$$z_i^* = \inf_{x \in P} f_i(x), \quad (5.11)$$

em que i representa cada objetivo e P é o espaço das variáveis. Trata-se de uma solução não física, pela própria natureza conflitiosa dos objetivos, e é usada como ponto de referência na normalização, como mostra a Figura 75. Se existisse o ponto ideal, a fronteira de Pareto se reduziria a ele. O ponto ideal pode ser encontrado minimizando cada objetivo individualmente, o que pode ser uma tarefa difícil em si.

Para problemas de minimização, o ponto nadir z é definido pelas componentes

$$z_i^{nad} = \sup_{x \in P'} f_i(x), \quad (5.12)$$

com P' dado pela equação 5.7. Na prática, o ponto nadir pode apenas ser aproximado, uma vez que toda a fronteira de Pareto não é conhecida. A estimativa do ponto nadir é uma tarefa difícil, principalmente quando o número de objetivos aumenta (e.g. (WANG *et al.*, 2017; DEB; MIETTINEN, 2010; DEB *et al.*, 2010; DEB; MIETTINEN, 2009; DEB *et al.*, 2005)).

Com isso, cada função f_i da equação 5.9 deve se transformar de acordo com

$$f_i \mapsto \frac{f_i - z_i^*}{z_i^{nad} - z_i^*} \quad (5.13)$$

Na equação 5.10, tem-se que

$$f_i(x) - z_i^* \mapsto \frac{f_i - z_i^*}{z_i^{nad} - z_i^*} \quad (5.14)$$

Os pontos ideal e nadir são utilizados durante a execução dos algoritmos de otimização, porém são valores desconhecidos antes da solução de todo o problema. O ponto ideal pode ser encontrado minimizando cada função objetivo separadamente antes da execução do algoritmo multi-objetivo, porém o ponto nadir é apenas estimado.

O primeiro método que surgiu para estimar as componentes do ponto nadir usa a *payoff table*. Ela é definida da seguinte maneira. A linha i da tabela mostra os valores de todas as funções objetivo quando apenas a função f_i é otimizada. Assim, o ponto ideal corresponde à diagonal da tabela. Para um problema de minimização, o valor máximo da coluna j da tabela é uma estimativa da componente j do ponto nadir. O ponto nadir pode ser uma solução física ou não e esse método pode gerar uma estimativa muito diferente do verdadeiro ponto nadir (MIETTINEN, 2012).

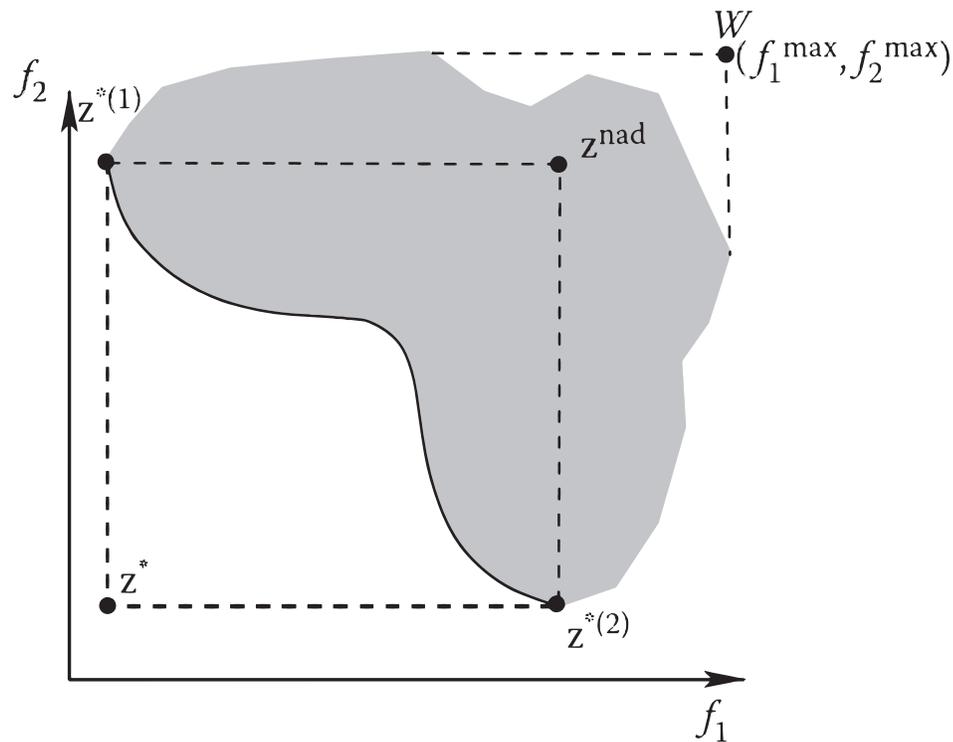


Figura 75 – Os pontos ideal e nadir (DUTTA *et al.*, 2017).

5.7 Otimização Multiobjetivo

Em um problema com vários objetivos, a finalidade não é apenas encontrar um conjunto de soluções que esteja o mais próximo da verdadeira fronteira de Pareto, mas que tenha a maior diversidade possível e realizar essas tarefas com a maior eficiência computacional (DEB, 2001).

Os algoritmos genéticos trabalham com várias soluções a cada iteração, graças ao conceito de população. Logo, eles são promissores para tratar problemas multiobjetivo, porque um conjunto diversificado de soluções pode ser encontrado apenas em uma execução do algoritmo.

Em um contexto mais amplo, os algoritmos heurísticos, incluindo os métodos multiobjetivo, realizam a exploração das soluções de duas maneiras: seja pela busca em todo o espaço das variáveis, gerando diversidade das soluções, seja pela busca local, usando a informação de que uma solução boa ali foi encontrada. Muita exploração do primeiro tipo diminui a velocidade de convergência do algoritmo e muita exploração do segundo tipo pode levar mais facilmente a convergência a um mínimo local. Por exemplo, o método de gerar aleatoriamente soluções no espaço de busca e pegar a melhor usa apenas a primeira maneira de exploração, enquanto o método *Hill Climbing* usa apenas a segunda maneira. O equilíbrio entre essas duas características é realizado pelo ajuste de parâmetros externos do algoritmo, cuja escolha para otimizar os algoritmos ainda é um problema em aberto. Além disso, encontrar a melhor maneira de variar os parâmetros durante as iterações

para melhorar a convergência também é um problema em aberto (YANG, 2014).

Pelo ponto de vista da otimização vetorial, os problemas com uma única função objetivo e os problemas multi-modais são vistos como um caso degenerado do problema multiobjetivo. As diferenças do caso multiobjetivo para o caso unidimensional incluem o fato de que se trabalha com vários objetivos, logo é importante manter a diversidade das soluções e não apenas a convergência. Não há parâmetros fixos *a priori* como os pesos \mathbf{w} , que influenciam as soluções obtidas, e trabalha-se com dois espaços: o das variáveis e o de soluções. Embora a diversidade em um espaço geralmente implique a diversidade no outro, isso não é necessariamente verdade para todo tipo de problema (DUTTA *et al.*, 2017). Tampouco estão os conjuntos de pontos no espaço de objetivos associados a conjuntos de pontos no espaço de variáveis. Para a implementação do algoritmo, a diferença está na maneira como se calcula a função *fitness*. Existem vários algoritmos de otimização multiobjetivo; alguns deles podem ser encontrados em (DEB, 2001; COELLO *et al.*, 2007).

Os métodos multi-objetivo são classificados em três categorias: i) Nos métodos *a priori*, os usuários fornecem suas preferências como entrada do algoritmo. A desvantagem é que pode haver conhecimento limitado do problema e as preferências podem ser enganadoras. ii) Nos métodos *a posteriori*, o usuário escolhe uma solução após olhar o resultado da otimização que mostra os compromissos entre as funções objetivo. A maioria dos métodos pertencem a essa categoria. iii) Nos métodos interativos, o usuário vai ajustando suas preferências enquanto o algoritmo está sendo rodado, com base nas informações adquiridas, de modo que o custo computacional torna-se menor se comparado com os métodos *a posteriori* (COELLO *et al.*, 2007).

5.8 Elitismo

A inclusão de elitismo no Algoritmo Genético melhora a sua performance, uma vez que as melhores soluções são preservadas com o passar das iterações (RUDOLPH, 1994). No caso multiobjetivo, a implementação do elitismo está presente nos algoritmos desde a década de 1990. Hoje em dia existe mais de uma maneira de implementar o elitismo, e descreveremos nessa seção a mais comum (DUTTA *et al.*, 2017).

No caso multiobjetivo, se informação adicional sobre a importância relativa dos objetivos for desconhecida, então não se pode dizer que alguma solução da fronteira de Pareto é melhor que outra. Isso significa que para implementar o elitismo no caso multiobjetivo, não se ordenam as soluções por meio das funções objetivo, como é realizado no Algoritmo Genético, apresentado na seção 5.2. Contudo, o Algoritmo Evolutivo precisa de uma métrica para realizar a seleção das soluções a cada iteração.

A relação de dominância não pode ser usada para classificar as soluções, porque não é uma

relação de ordem parcial, de modo que nem todas as soluções podem ser relacionadas entre si (e.g. (LANG, 2002, p. 878)). A dominância é uma relação transitiva, porém não é reflexiva - porque uma solução não pode dominar sobre ela mesma -, e não é antissimétrica (DUTTA *et al.*, 2017). De fato, para duas soluções diferentes, pode ocorrer que as duas não dominem uma sobre a outra. Nesse caso, dizemos que as soluções não são comparáveis. De fato, também não é uma relação simétrica, porque se uma solução X dominar sobre outra Y , isso não implicará que Y domina X . Na realidade, ela é assimétrica, porque se X dominar Y , então Y não domina X . Outra propriedade é que se X não dominar Y , então não necessariamente Y domina X . A Figura 73 pode ser usada para verificar esses casos.

Isso significa que deve-se procurar outra relação. No final da década de 90, Goldberg definiu o nível de não dominação de uma solução como o número de soluções que a dominam mais 1 (GOLDBERG, 1989a). O valor máximo para o nível é o tamanho da população e as soluções não dominadas possuem nível igual a um. Uma solução pertencer à primeira frente não significa que ela está na fronteira de Pareto; de fato o objetivo do algoritmo é aproximar a primeira frente da fronteira de Pareto verdadeira. Além disso, nem todos os níveis precisam ocorrer. A classificação nos níveis gera uma partição na população em um número contável de fronteiras disjuntas, como mostra a Figura 76. Duas soluções classificadas com o mesmo nível, isto é, na mesma frente, são consideradas equivalentes. Para problemas com várias funções objetivo, a ordenação das soluções é baseada no nível de não dominação. Portanto, para implementar o elitismo no caso multiobjetivo, ordenamos conjuntos de soluções, e não mais as soluções individualmente. Há diferentes maneiras de classificar as soluções; o método de Kung é um deles (KUNG *et al.*, 1975). Uma convenção na numeração das frentes evita fronteiras vazias. Por exemplo, se a terceira fronteira estiver vazia, toda solução dominada por outras três será incorporada dentro da terceira fronteira. Ao contrário da otimização unidimensional, em que a função a ser otimizada fornece a métrica para a avaliação da função *fitness* que mede a qualidade das soluções, no caso multiobjetivo a função *fitness* de uma solução depende de toda a população de soluções.

O número de soluções em cada frente varia com o passar das gerações, logo torna-se difícil introduzir o elitismo de uma maneira controlada nos problemas de otimização multiobjetivo. Por exemplo, o número de soluções na melhor frente não dominada aumenta muito, de modo que uma grande proporção de soluções formará a elite. Isso faz a diversidade da população diminuir mais rapidamente. Na seção 5.9, será apresentado um método elitista e que além disso possui um mecanismo para controlar o número de soluções em cada frente. Essas características garantem melhor convergência do algoritmo (DEB; GOEL, 2001).

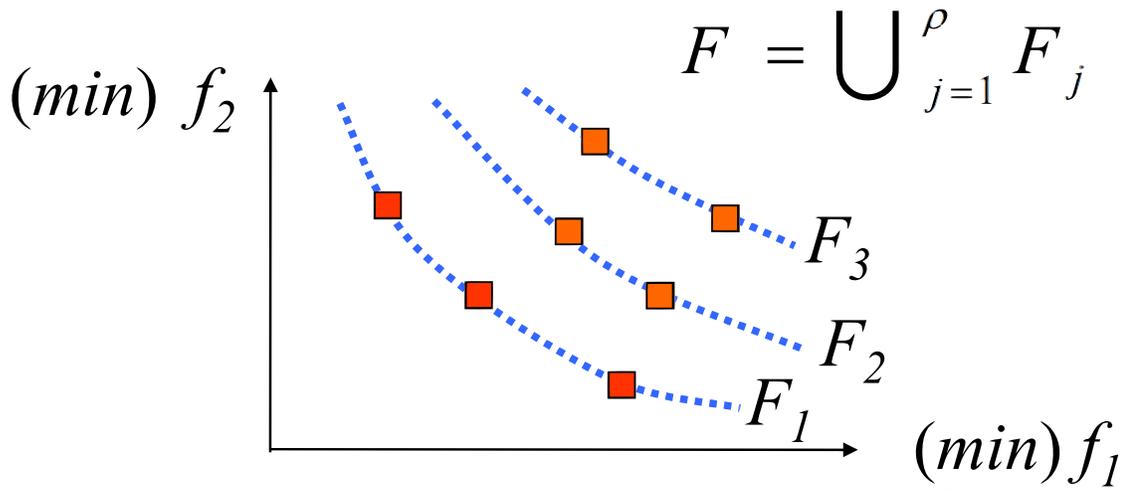


Figura 76 – Partição do espaço de objetivos pela relação de não dominância em um problema bi-dimensional de minimização dos dois objetivos (SUDHOFF, 2017).

5.9 NSGA-II

O objetivo do método NSGA-II (*Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm*) é minimizar uma função real de M variáveis e M' objetivos. Ao contrário do seu antecessor NSGA, o método é elitista. Caracteriza-se por pretender preservar a diversidade - através da definição de distância de multidão que será dada mais adiante nessa seção - e a elite - combinando a população atual com a anterior para preservar as melhores soluções de ambas (DEB *et al.*, 2000). As considerações sobre a população inicial, representação das variáveis e critério de parada são as mesmas da seção 5.2. O algoritmo não acrescenta parâmetros externos.

Seja P_t a população formada pelos candidatos à solução do problema na iteração t do algoritmo. A população descendente Q_t é gerada a partir de P_t pelos operadores de seleção, recombinação e mutação definidos na seção 5.2. A cada iteração, o NSGA-II trabalha com as duas gerações P e Q , formando duas populações que vão competir entre si. Usando o critério de não dominação da seção 5.8, em vez de ordenar as soluções apenas em Q , elas serão ordenadas em $R = P \cup Q$.

Dada uma iteração t do algoritmo, a população em P_{t+1} será formada pelas soluções não dominadas das frentes em R_t , recebendo uma frente de cada vez. Como P tem tamanho fixo igual a N e $P \cup Q$ possui $2N$ soluções, nem todas as frentes serão acomodadas. Quando a última frente for admitida, uma estratégia de nicho será utilizada para selecionar quais soluções dessa última frente serão acomodadas. É ela que mantém a diversidade e afeta o algoritmo somente mais ao final do seu desenvolvimento. As últimas frentes serão descartadas.

A estratégia de nicho é baseada na métrica distância de multidão d , que é uma característica

de cada uma das soluções s_j da população, sendo definida por (DEB, 2001):

$$s_j = \sum_{i=1}^m \frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{f_i^{max} - f_i^{min}}, \quad j \in 2, \dots, N-1, \quad (5.15)$$

em que m é o número total de objetivos do problema; as soluções $f_i^{j_i}$ são ordenadas de modo que para diferentes objetivos, o índice j_i pode representar soluções diferentes, porque o ordenamento das soluções difere para cada objetivo; f_i^{max} e f_i^{min} representam o maior e menor valor encontrados na atual geração para o objetivo i ; j representa uma das N soluções; e define-se $s_j = \infty$ para toda solução j que apresentar o valor máximo ou mínimo em pelo menos um dos objetivos. O ordenamento é realizado apenas entre as soluções que estiverem no mesmo nível n_d de não dominação.

Essa métrica é definida como a metade do perímetro do hipercubo normalizado formado pelas soluções vizinhas mais próximas que estão na mesma frente (DEB, 2001, p. 236). A Figura 77 ilustra essa métrica para o caso bidimensional. O operador de seleção faz um torneio entre duas soluções i e j . Dizemos que a solução i ganha o torneio se $n_d(i) < n_d(j)$ ou se $n_d(i) = n_d(j)$ e $d(i) > d(j)$. Com esse operador, incluímos em P_{t+1} as soluções o mais espalhadas possível da última frente acomodada. Esse operador de seleção é utilizado tanto para formar P_{t+1} a partir de R_t , quanto para formar Q_t a partir de P_t . Nesse último caso, ele é utilizado para comparar soluções que pertençam à mesma frente (DEB, 2001). A Figura 78 resume as etapas do algoritmo.

Suponha que em uma geração, todos os indivíduos pertençam à primeira frente, que pode estar distante da frente ótima de Pareto. Nessa situação, o algoritmo irá apagar todos os outros indivíduos que pertençam às outras frentes. A consequência disso é perder a chamada diversidade lateral no espaço das funções, como mostra a figura 79. Embora o operador de seleção garanta diversidade sobre a primeira frente, a diversidade lateral é importante para auxiliar a convergência da primeira frente para a frente ótima de Pareto (DEB; GOEL, 2001).

Uma maneira de implementar controle na exploração das frentes não dominadas - aprimorando a diversidade e a convergência do algoritmo - é limitar a quantidade de soluções em cada frente, n_i , a uma porcentagem r da quantidade de soluções da frente anterior (DEB; GOEL, 2001):

$$n_i = r \cdot n_{i+1} \quad (5.16)$$

Trata-se de uma sequência geométrica, logo a quantidade máxima de elementos em uma frente i no conjunto R é dada por:

$$n_i = N \frac{1-r}{1-r^K} r^{i-1} \quad (5.17)$$

em que K é o número de frentes. Se a quantidade de indivíduos em uma frente for menor que o máximo permitido, a diferença é incluída na frente seguinte de forma a aumentar a sua capacidade máxima de armazenamento. Se após o processamento das $2N$ soluções, ainda não houver $2N$ soluções acomodadas, então são incluídos os indivíduos da primeira frente que haviam sido deletados.

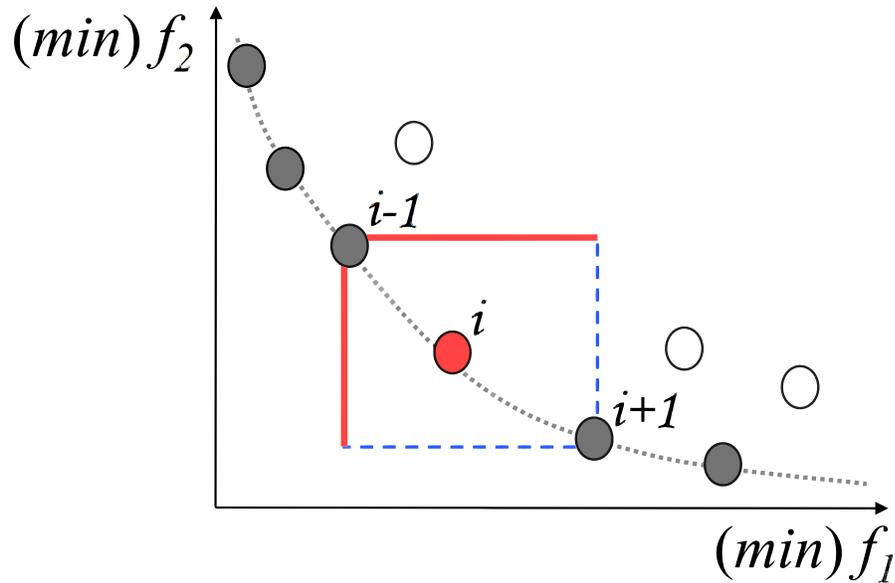


Figura 77 – Exemplo da métrica distância de multidão aqui definida no espaço de objetivos para o caso de minimização bidimensional. A metade do perímetro do quadrilátero normalizado formado pelas soluções da mesma frente vizinhas à solução i mede a densidade de soluções associada à solução i . Figura adaptada de (SUDHOFF, 2017).

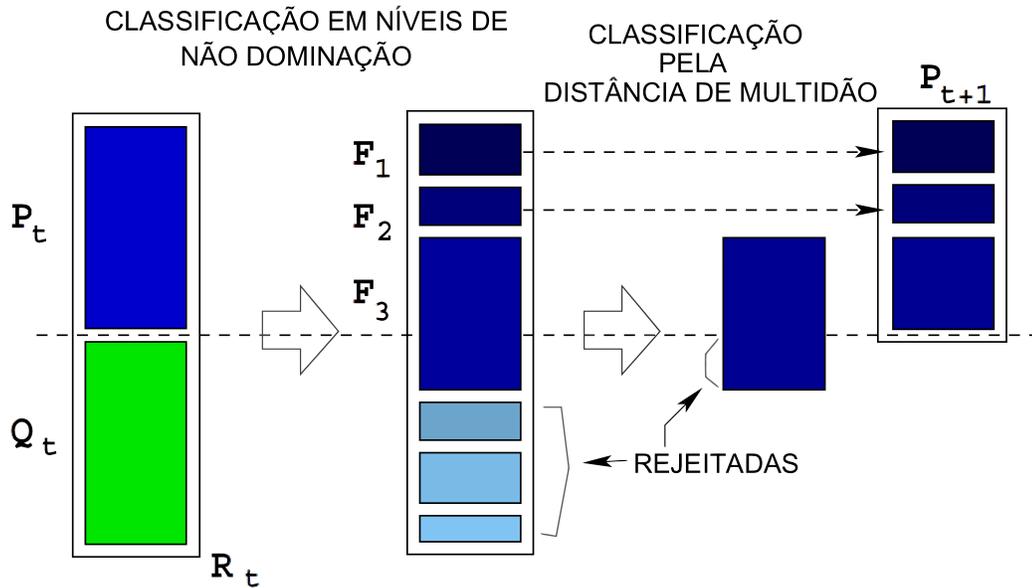


Figura 78 – Representação das etapas do algoritmo NSGA-II. A população descendente Q_t é gerada a partir de P_t pelos operadores de seleção, recombinação e mutação. Usando a classificação em níveis de não dominação, as soluções são ordenadas em $R = P \cup Q$, formando frentes de não dominação F_1, F_2, \dots . Quando a última frente for admitida, seja F_3 na Figura, uma estratégia de nicho é utilizada para selecionar quais soluções dessa última frente serão acomodadas. Adaptada de (DEB, 2007).

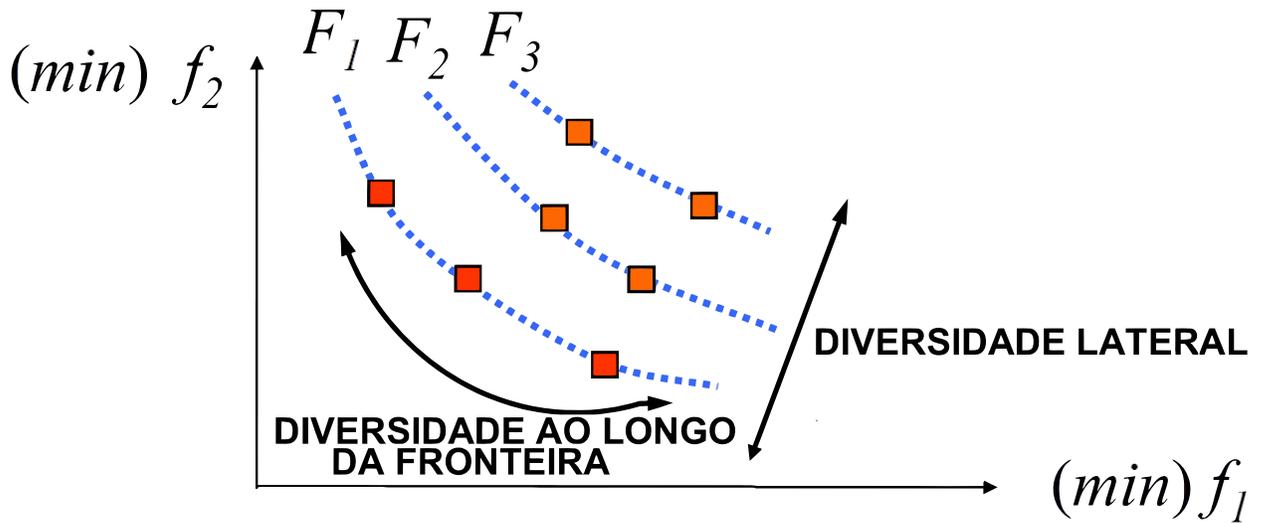


Figura 79 – A Figura mostra com três frentes de não dominação a diferença entre a diversidade sobre uma frente e a diversidade lateral no espaço de soluções. Adaptada de (SUDHOFF, 2017).

5.10 Problemas com Restrição

O problema multiobjetivo mais geral é definido por (DEB, 2001):

$$\min f_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, M \tag{5.18}$$

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \tag{5.19}$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, \dots, H \tag{5.20}$$

$$x_n^L \leq x_n \leq x_n^H \quad n = 1, \dots, N \tag{5.21}$$

em que \mathbf{x} é um vetor sujeito à N restrições no espaço de variáveis, g_j e h_k são restrições do problema. Existem várias maneiras de tratar problemas desse tipo; aqui consideraremos a Abordagem pela Função de Penalidade (e.g. (SIMON, 2013)). A presença das restrições deixa alguns candidatos à solução inviáveis e modifica o operador de seleção definido na seção 5.9 quando alguma solução inviável participar de um torneio. Em um torneio entre uma solução inviável e outra viável, a solução viável ganha o torneio. Se duas soluções inviáveis participarem do torneio, então a solução que violar menos a restrição é selecionada (BÄCK *et al.*, 2000; DEB, 2001; DUTTA *et al.*, 2017). Esse método permite soluções inviáveis na população, porque elas podem guardar informações sobre as soluções viáveis.

5.11 Problemas com Muitos Objetivos

Os problemas com muitos objetivos, em geral mais que quatro, formam um caso à parte por exibirem algumas peculiaridades. Por exemplo, a visualização da fronteira de Pareto torna-se mais difícil. Além disso, para cobrir toda a fronteira de Pareto, deve-se obter um número maior de soluções, o que dificulta a escolha de alguma pelo usuário. Para evitar a primeira dificuldade, pode-se proceder com os métodos de redução de objetivos, que também ameniza a segunda. Uma maneira de contornar a segunda dificuldade é incluir preferências do usuário a fim de concentrar a busca em apenas uma região do espaço de variáveis (DEB; JAIN, 2014).

A Figura 80 mostra que a fração de regiões não comparáveis em relação a uma dada solução z aumenta em função do número de objetivos, M . Por exemplo, para $M = 5$, a fração de regiões não dominadas é cerca de 90 % (FARINA; AMATO, 2004). Isso significa que a busca por soluções melhores que z fica cada vez mais difícil à medida que M aumenta.

Devido ao maior número de objetivos, nessa classe de problemas, o número de indivíduos não dominados aumenta sobremaneira na população (DEB; JAIN, 2014). Para ilustrar a fração de soluções não dominadas em uma população, conjuntos de N vetores foram gerados no espaço $[0, 1]^M$ de M dimensões e a porcentagem de vetores não dominados foi calculada. O número de

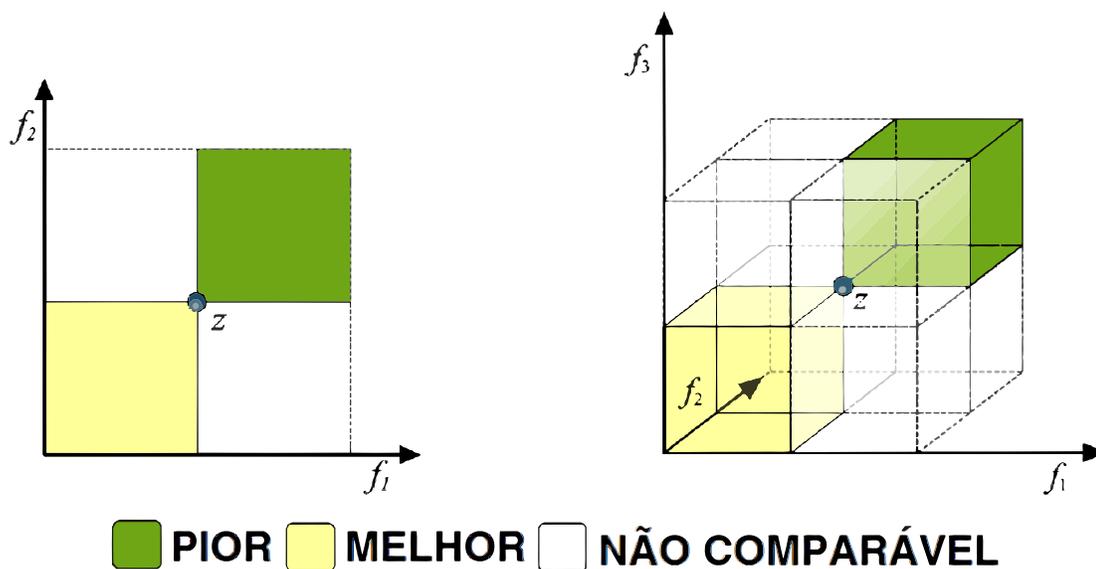


Figura 80 – O espaço de objetivos do problema de otimização 5.18 está contido no ortante não negativo de R^M , em que M é o número de objetivos do problema. Para uma dada solução z , outra solução ou domina z , ou é dominada por z , ou ambas são não dominadas entre si. A Figura mostra pelos casos $M = 2$ e $M = 3$ que a fração de regiões não comparáveis em relação a uma dada solução z diminui em função do número de objetivos de acordo com $(2^M - 2)/2^M$. Adaptada de (JAIMEs, 2011).

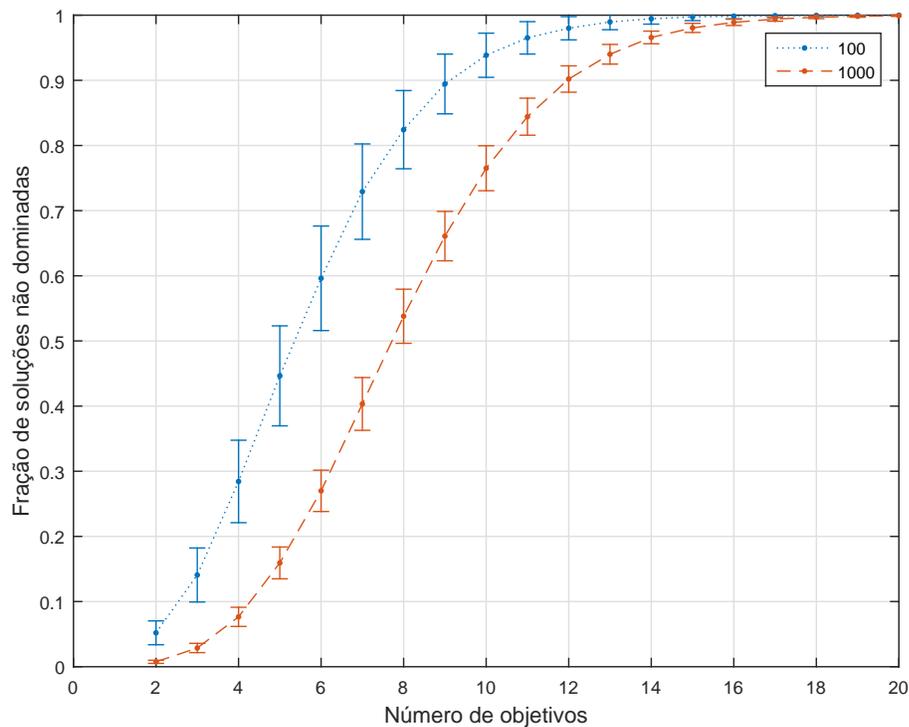


Figura 81 – Fração de soluções não dominadas em função do número de objetivos para populações com 100 ou 1000 indivíduos. As linhas guiam a leitura dos pontos.

dimensões M corresponde ao número de objetivos do problema de otimização. A Figura 81 mostra o resultado dessa simulação. Quanto maior o número de objetivos, a fração de vetores não dominados aumenta até chegar a 100 %.

Pela seção 5.9, o operador de seleção entre duas soluções não dominadas é baseado apenas na diversidade, pela equação 5.15. Isso significa que uma solução próxima à frente de Pareto verdadeira pode ser substituída por qualquer outra, desde que ela esteja mais afastada no espaço de soluções. Isso degrada a convergência do algoritmo, tornando-o mais lento (ISHIBUCHI *et al.*, 2008).

A Figura 81 ilustra que quanto maior o tamanho da população, menor é a fração de soluções não dominadas para um espaço de dada dimensão. Na realidade, o número de soluções não dominadas cresce de maneira logarítmica para dada dimensão no espaço de objetivos (BUCHTA, 1989). Portanto, uma das maneiras de contornar o excesso de soluções não dominadas é utilizar uma população exponencialmente maior que o geralmente utilizado para problemas com poucos objetivos. No entanto, essa abordagem deixa o algoritmo mais lento para a sua execução. Em algumas situações, os métodos de redução de objetivos e a inclusão de preferências também podem contornar essa dificuldade (DEB; JAIN, 2014).

O efeito de muitas dimensões no espaço de soluções é diferente do efeito que ocorre no

espaço de variáveis. No primeiro caso, pelo aumento da fração de soluções não dominadas, pode haver convergência para uma frente ainda longe da fronteira de Pareto. No segundo caso, como o operador de seleção por torneio binário atua no espaço de objetivos (seção 5.2), o efeito de muitas dimensões é explorar poucas direções no espaço de variáveis, tornando a convergência mais lenta.

Define-se Solução Resistente como aquela com valor muito ruim em pelo menos um objetivo, mas com valores próximos aos ótimos nos objetivos restantes. Como são não dominadas, se soluções desse tipo ocuparem uma região grande do espaço de objetivos, então o algoritmo se tornará mais lento para encontrar a fronteira de Pareto. A consequência da existência de muitas soluções desse tipo é haver muita diversidade no espaço de busca, porém menor convergência à fronteira de Pareto (IKEDA *et al.*, 2001).

Ao comparar duas soluções não dominadas pelo critério de dominância de Pareto, o número de objetivos estritamente melhores não é levado em consideração. Além disso, o tamanho normalizado de alguma melhoria também não é levado em consideração. Por exemplo, seja um problema com vinte objetivos. Se x_1 e x_2 forem duas soluções tais que $x_1 < x_2$ em dezenove objetivos, sendo x_1 pior por uma pequena fração em apenas um deles, então pelo critério de Pareto, as duas soluções são não dominadas e, portanto, as duas são indistinguíveis entre si e devem ser consideradas pelo algoritmo. A consequência disso é incluir muitas soluções na primeira frente não dominada, constituindo uma desvantagem no caso da otimização de problemas com muitos objetivos. Nesse exemplo, o critério de Pareto não traduz a intuição pela preferência - pelo menos na maioria dos casos - por x_1 (FARINA; AMATO, 2004).

Existem diferentes maneiras de generalizar o critério de dominância de Pareto para diferenciar ainda mais as soluções, diminuindo o número de soluções não dominadas na população. Outra abordagem consiste em modificar a maneira como se promove a diversidade, mantendo o critério de Pareto. Exemplos podem ser encontrados em (DEB; JAIN, 2014; LAUMANNNS *et al.*, 2002; HE *et al.*, 2014; PIERRO *et al.*, 2007; SATO *et al.*, 2007; YANG *et al.*, 2013; BATISTA *et al.*, 2011; YUAN *et al.*, 2016; ZHU *et al.*, 2016; KUKKONEN; LAMPINEN, 2007; DRECHSLER *et al.*, 2001; SÜLFLOW *et al.*, 2007; LI *et al.*, 2014; ISHIBUCHI *et al.*, 2008; ADRA; FLEMING, 2011; LI *et al.*, 2015; ZHANG; LI, 2007).

5.12 NSGA-III

Para tratar problemas com muitos objetivos, o algoritmo NSGA-III - ou a sua extensão mais atual, EliteNSGA-III - em relação ao NSGA-II altera a maneira como as soluções são selecionadas a cada iteração (DEB; JAIN, 2014; IBRAHIM *et al.*, 2016). A diferença é que não mais será utilizada a estratégia de nicho dada pela equação 5.15. No algoritmo NSGA-II, ela é utilizada em dois momentos de acordo com a Figura 78: na seleção dos indivíduos que serão recombinados e no

preenchimento da última frente não dominada quando os indivíduos da geração anterior compete com os indivíduos criados a fim de formar a população da geração seguinte. Isso significa que o algoritmo NSGA-III busca diversidade e convergência das soluções através de outros procedimentos.

As características principais do método são a utilização de pontos de referência inseridos *a priori* no espaço de objetivos, a manutenção do critério de Pareto para soluções não dominadas, a utilização de uma população externa de soluções composta pela elite e o não acréscimo de parâmetros externos ao algoritmo. A seguir, o método será descrito.

Primeiramente, as funções objetivo são normalizadas. Aqui, prosseguiremos com a sugestão de (YUAN *et al.*, 2014) para a normalização ser realizada através da equação 5.13, de modo a diminuir o custo computacional envolvido originalmente na normalização utilizada em (DEB; JAIN, 2014). Aqui, os pontos ideais de cada um dos M objetivos serão atualizados a cada geração através das populações da geração atual e sua descendência, para evitarmos a necessidade de resolver M problemas de otimização escalar antes da aplicação do método multiobjetivo. Os pontos nadir serão calculados a partir das populações das frentes F_1, F_2, \dots, F_l , segundo a notação da Figura 78. As soluções de todas as frentes a partir de F_{l+1} são descartadas. A frente F_l é a última a ser acomodada, com alguns dos seus elementos sendo descartados. De acordo com a Figura 81, esperamos que $l = 1$ para os problemas de muitos objetivos.

Em seguida, alguns pontos de referência são inseridos no espaço de objetivos. Eles serão usados para selecionar os N indivíduos do conjunto F_l que serão acomodados na geração seguinte do algoritmo, P_{t+1} . Eles podem ser dados a partir de conhecimento prévio do problema, podem ser aleatórios ou igualmente espaçados, desde que estejam contidos no hiperplano definido pelos pontos $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$, como mostra a Figura 82 para os casos bi e tridimensionais (DEB; JAIN, 2014; YUAN *et al.*, 2014). O número H de pontos depende do espaçamento p entre eles e do número de objetivos M . Esse número é dado por $H = \binom{M+p-1}{p}$ (DEB; JAIN, 2014). Esse binômio mostra como o número de pontos necessários para cobrir uniformemente uma fronteira de Pareto com resolução p aumenta com o número de objetivos M .

O procedimento para encontrar os pontos de referência é recursivo. As coordenadas dos pontos são dadas pelas linhas de uma matriz, que chamaremos de $U_{ij}^{M,p} = V_{ij}^{M,p}/p$, que possui H linhas e M colunas. Para um espaço bidimensional, $M = 2$, com p espaçamentos, $i \in 0, 1, \dots, p$, a Figura 82 - (a) mostra que:

$$V_{i1}^{2,p} = i \quad (5.22)$$

$$V_{i2}^{2,p} = p - V_{i1}^{2,p} \quad (5.23)$$

A Figura 82 ilustra o caso $M = 2, p = 4$. Para $p = 0$, definimos o vetor linha $V_{ij}^{M,0} = 0$ com M colunas. Com isso, é possível resolver o caso mais geral (M, p) , bastando apenas concatenar as matrizes de todos os casos $(M - 1, p'), p' \leq p$, como mostra a Figura 83. Por exemplo, para o caso $(M = 3, p = 3)$ é necessário conhecer as matrizes $V_{ij}^{2,3}, V_{ij}^{2,2}, V_{ij}^{2,1}, V_{ij}^{2,0}$ ⁴.

O próximo passo do algoritmo consiste em calcular a distância entre cada indivíduo do conjunto $\cup_{i=1}^l F_i$ e cada uma das H retas que passam pela origem e os pontos de referência, como mostra a Figura 84. Para os elementos do conjunto $\cup_{i=1}^l F_i$, encontramos qual é a direção de referência cuja distância àquele indivíduo seja menor. Com isso, associamos um ponto de referência a cada indivíduo. Associamos cada indivíduo a um ponto de referência, e não o contrário. Se assim fosse, poderia haver indivíduos não relacionados e todo ponto de referência seria relacionado. Por fim, fazemos uma contagem de quantos indivíduos do conjunto $\cup_{i=1}^l F_i$, isto é, do conjunto que já compõe a geração seguinte P_{t+1} , estão associados a cada ponto de referência. Seja ρ_j o valor da contagem do ponto de referência j .

Selecionamos aleatoriamente, se houver, um ponto de referência λ_j cuja contagem seja $\rho_j = 0$. Para todos os indivíduos da frente F_l associados a λ_j , procuramos aquele - se houver - cuja distância ao ponto λ_j seja menor. Ele será escolhido para compor a geração seguinte P_{t+1} . Nesse

⁴ Utilizamos os pontos de referência em outra ocasião. Na equação 5.9, eles são úteis para gerar os pesos distribuídos uniformemente, representando diferentes preferências do usuário.

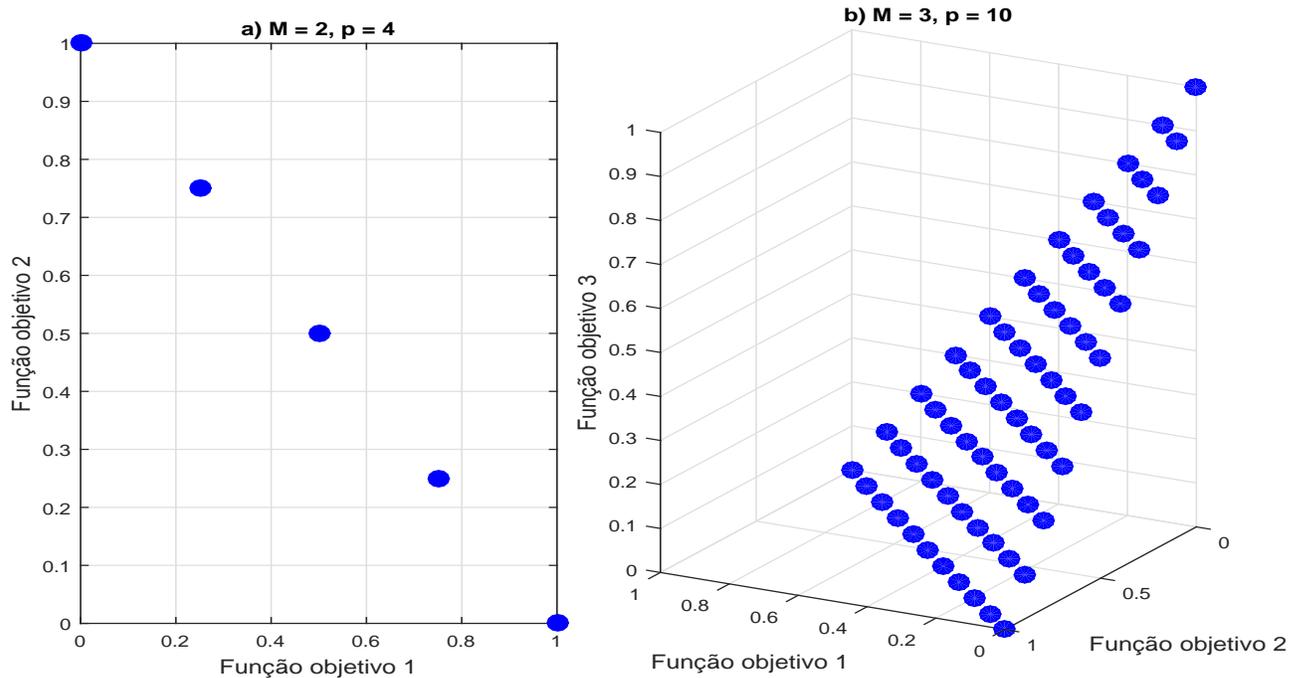


Figura 82 – a) Exemplo dos pontos de referência gerados pelo algoritmo NSGA-III em um problema com a) dois ou b) três objetivos já normalizados e com a) quatro ou b) dez espaçamentos entre os pontos.

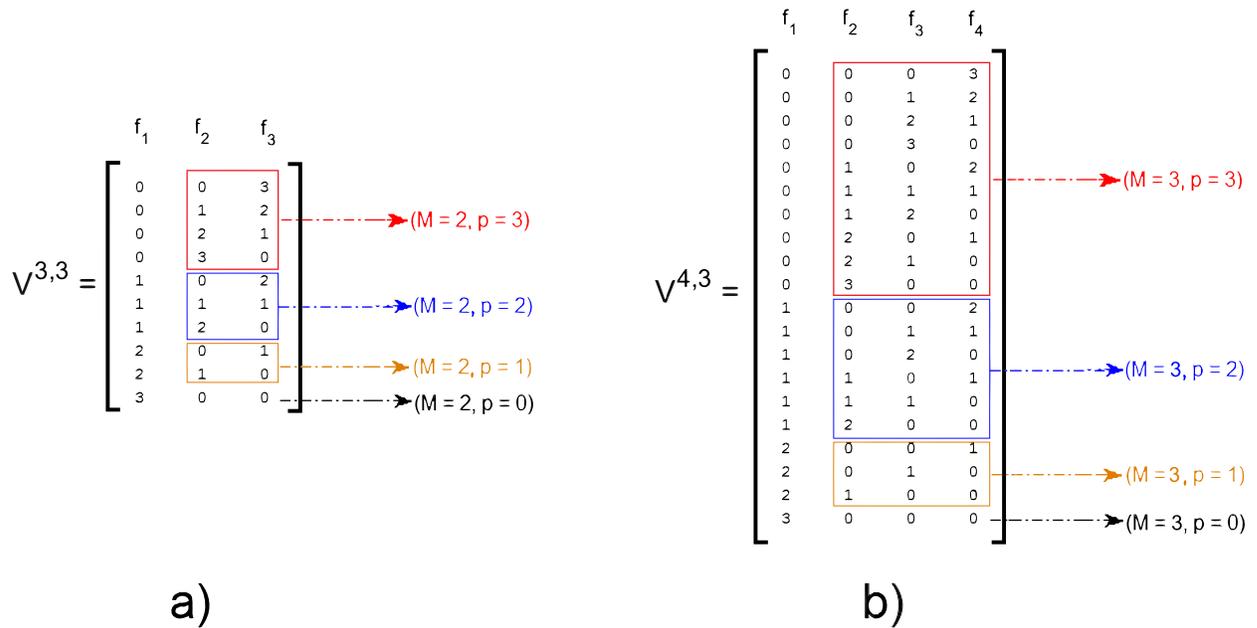


Figura 83 – a) Exemplo de como podemos montar a matriz que representa os pontos de referência para o caso de $M = 3$ objetivos e $p = 3$ espaçamentos usando as matrizes do caso $M = 2$. b) Solução do caso $(M = 4, p = 3)$ usando recursivamente as matrizes para três objetivos. Cada matriz contém H linhas e M colunas representando as coordenadas nas direções dos eixos f_1, f_2, \dots , que representam os objetivos. Os pontos de referência correspondem às linhas das matrizes divididas por p .

caso, somamos um ao valor de ρ_j . O procedimento é repetido para todos os pontos de referência tais que $\rho_j = 0$ até que se tenha selecionado N indivíduos para a próxima geração P_{t+1} .

Não havendo mais pontos tais que $\rho_j = 0$, movemo-nos sucessivamente para os casos $\rho_j = 1, 2, \dots$ até que se tenha N indivíduos selecionados a partir de F_t . Para esses casos, no entanto, uma solução aleatória de F_t que esteja associada ao ponto λ_j será escolhida, e não mais aquela com menor distância. Essa estratégia diminui repetições de soluções uma vez que somamos um ao valor de ρ_j cada vez que uma solução é escolhida. Se não somarmos, poderá não haver N indivíduos a serem selecionados.

Pela Figura 84, duas quantidades são relevantes para manter a diversidade e a convergência do algoritmo: a distância de cada solução aos pontos de referência e a distância de cada solução à origem, que representa o ponto ideal. A primeira relaciona-se à diversidade, e quanto menor a segunda, melhor será a convergência. Por isso, o algoritmo manterá uma população externa, chamada de elite, cuja função é melhorar a convergência do algoritmo. Cada ponto de referência terá no máximo um membro da elite associado a ele. Após a população P_{t+1} ser formada, para cada ponto de referência, encontramos qual das soluções associadas a ele possui menor norma. Se ela

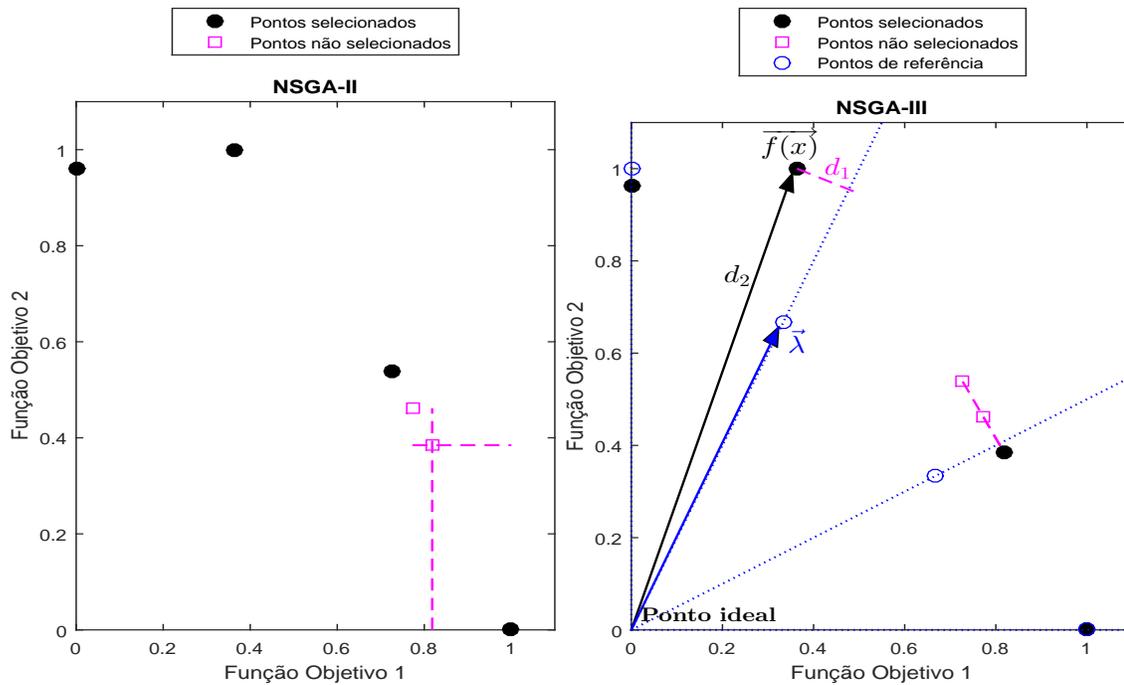


Figura 84 – A Figura compara os mecanismos de seleção da última frente não dominada no caso dos algoritmos NSGA-II (*Esquerda*) e NSGA-III (*Direita*) em um exemplo bidimensional em que se supõe escolher quatro indivíduos entre seis da última frente não dominada F_l . Os pontos marcados pelo disco preto são os indivíduos selecionados em cada caso. No NSGA-II, o perímetro do quadrilátero formado pelas soluções adjacentes é mostrado para uma das soluções. No NSGA-III uma direção de referência é associada a cada ponto de referência como a reta que passa pela origem do espaço de soluções - que representa a solução ideal - e o ponto de referência. A distância entre uma solução qualquer $f(x)$ e uma direção de referência λ é dada por $\|f(x) - \|f(x)\lambda / \|\lambda\|^2 \|\lambda\|$. A Figura também mostra as duas distâncias relevantes no algoritmo NSGA-III: a distância d_1 com relação às direções de referência e a distância d_2 com relação ao ponto ideal.

for menor que a norma do membro da elite já associado àquele ponto na geração anterior, então ela passará a fazer parte da elite, substituindo o membro anterior. Aqui, antes da primeira geração a elite é inicializada com valores infinitos para cada ponto de referência.

A equação 5.15 não será mais utilizada no operador de seleção. Ao invés disso, um membro da população e um membro da elite são escolhidos com probabilidade de 50 % cada para escolher os indivíduos que serão recombinaados. Além disso, o artigo original do algoritmo recomenda a utilização de um valor alto $n_c \sim 30$ para o parâmetro da recombinação, definido na seção 5.3, de modo a haver uma busca mais restrita no espaço de soluções - Figura 71, (DEB; JAIN, 2014).

O tamanho da população no algoritmo NSGA-III é escolhido de forma a haver pelo menos uma solução associada a cada ponto de referência. Portanto, o tamanho da população é dado pelo menor número par igual ou maior que H . O número deverá ser par, pelo operador de recombinação.

A Figura 85 é um fluxograma que resume as etapas do algoritmo.

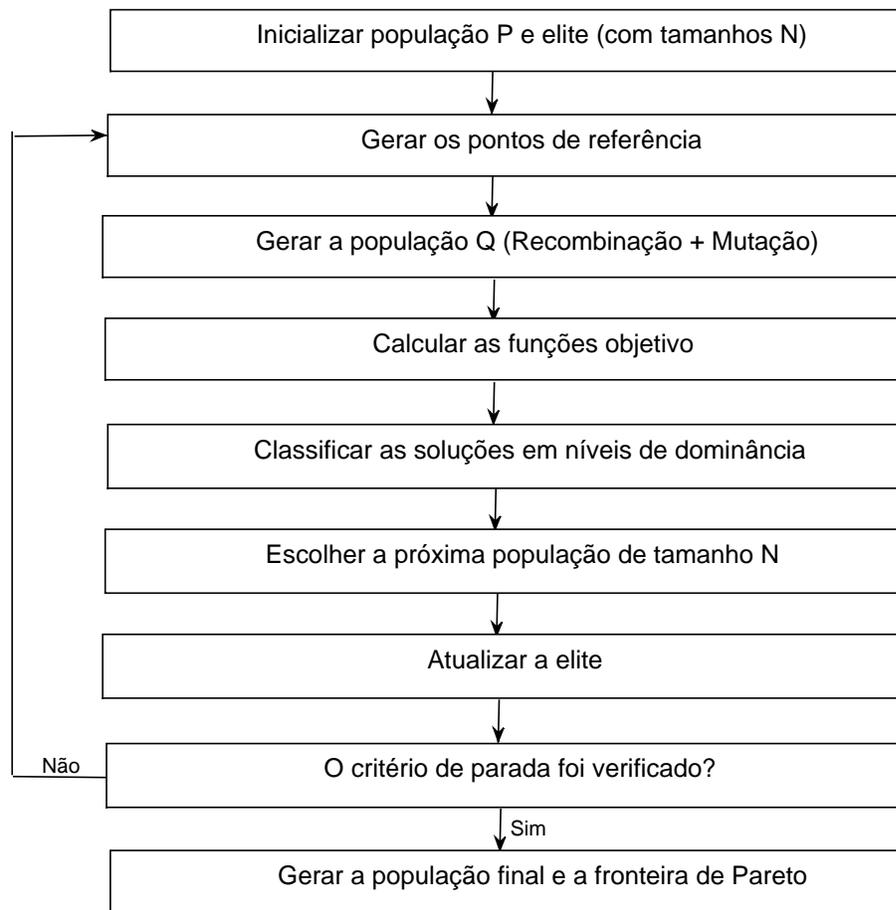


Figura 85 – Fluxograma do método EliteNSGA-III.

5.13 Redução de Objetivos

Uma função objetivo é redundante quando não altera o conjunto de soluções de um problema (GAL; LEBERLING, 1977). Por exemplo, se $\mathcal{F}(x) = (f_1, f_2) = (x^2, x^2 + 10)$ for uma função real a qual desejamos minimizar, então f_1 ou f_2 é redundante, uma vez que ambas possuem o mesmo conjunto solução $x' = \{0\}$. Uma técnica para facilitar a tomada de decisão e a visualização dos problemas com muitos objetivos consiste na redução do número de objetivos do problema sem alterar a forma da fronteira de Pareto, seja pela identificação de objetivos redundantes, seja pela transformação dos objetivos em outro conjunto menor (MAATEN *et al.*, 2009). A redução do número de objetivos pode ser realizada após ou durante a busca, e a redundância de objetivos pode estar presente apenas na fronteira de Pareto ou em todo o espaço de busca (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009; DEB; SAXENA, 2006). Nesse último caso, ela torna a busca dos algoritmos mul-

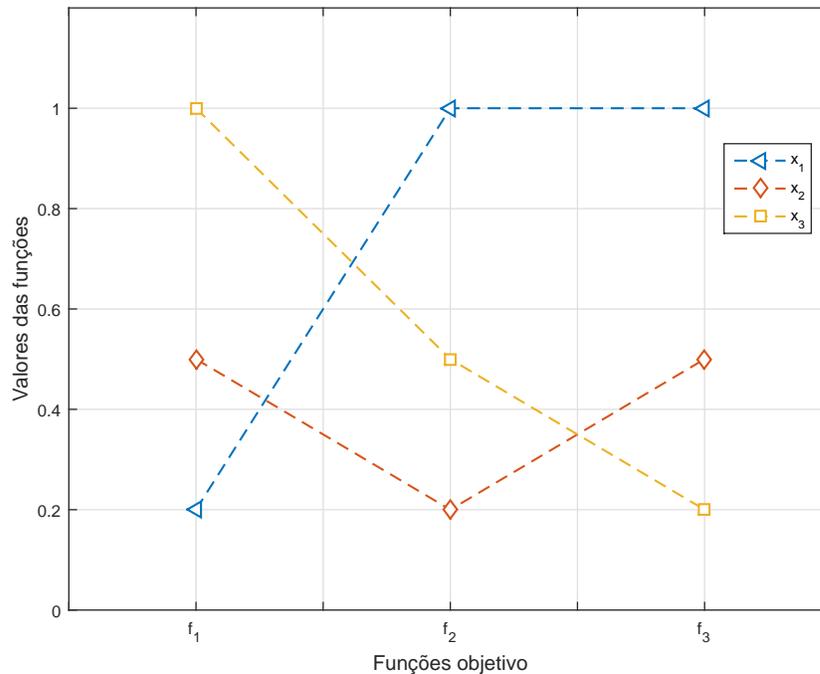


Figura 86 – Exemplo de situação em que a retirada um objetivo não altera as relações de dominância em um conjunto de soluções $\{x_1, x_2, x_3\}$. Na Figura, a retirada de f_2 é possível.

tiobjetivos mais eficientes, principalmente se o número de objetivos for reduzido a não mais que três, situação cuja importância vimos na Figura 81 (SAXENA *et al.*, 2013).

A Figura 86 mostra um "Gráfico com Coordenadas Paralelas", descrito pela primeira vez em (INSELBERG, 1985). Trata-se de uma maneira de visualizar o espaço de busca ou a fronteira de Pareto para muitos objetivos que reduz a informação de um espaço de várias dimensões a um gráfico bidimensional em que os objetivos são representados no eixo-x e os seus valores, que devem ser normalizados, estão no eixo-y. Outros métodos para visualizar as fronteiras de Pareto podem ser encontrados em (TUŠAR; FILIPIČ, 2015; WALKER *et al.*, 2013; BANDARU *et al.*, 2017). As três soluções representadas na Figura 86 não são comparáveis entre si (seção 5.8). No entanto, ao retirar o objetivo f_2 , as três soluções permanecem não comparáveis entre si. Assim, a função f_2 é redundante e a redução de objetivos pode ser realizada. Ao retirar o objetivo f_1 , teremos que \vec{x}_1 será dominada pelas outras duas soluções. E ao retirar f_3 , teremos que \vec{x}_2 será dominada por \vec{x}_3 .

Em algumas situações práticas, pode-se admitir um pequeno erro δ nas relações de dominância, contanto que se consiga reduzir o número total de objetivos de N para k . Mais adiante, será definido um sentido para δ . Os problemas usualmente tratados nesse contexto pertencem a dois tipos: i) dado δ , encontrar o menor valor de k , conhecido como o problema δ -MOSS e ii) dado k , encontrar o menor valor de δ , conhecido como o problema k -EMOSS (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009). De fato, esperamos que quanto menor for o valor de k , maior será o valor de δ e vice-versa. O caso $\delta = 0$ significa que as relações de dominância são preservadas sem aproximações. De outro

modo, é possível empregar técnicas de otimização multiobjetivo para realizar a redução de objetivos ao encontrarmos a fronteira de Pareto referente aos valores de δ e k , deixando a escolha de valores específicos para o usuário (YUAN *et al.*, 2017).

Temos que uma solução \vec{u} domina fracamente outra solução \vec{v} , se \vec{u} não for pior que \vec{v} em todos os objetivos (MIETTINEN, 2012), de modo que apenas uma das duas condições de dominância da seção 5.4 é satisfeita. Dizemos que dois objetivos f_i e f_j são não-conflitantes se para todo par de indivíduos \vec{u} e \vec{v} do conjunto Pareto-ótimo, $f_i(\vec{u}) \leq f_i(\vec{v}) \Leftrightarrow f_j(\vec{u}) \leq f_j(\vec{v})$ ⁵. Ou seja, se uma solução \vec{u} dominar fracamente outra solução \vec{v} com relação a um objetivo, então ela também dominará fracamente \vec{v} em relação ao outro objetivo. Sejam \mathcal{F}^1 e \mathcal{F}^2 dois conjuntos de objetivos, por exemplo, $\mathcal{F}^1 = \{f_1, f_3\}$ e $\mathcal{F}^2 = \{f_2, f_4, f_5\}$, então definimos $\vec{u}^{\mathcal{F}^1} = (f_1(\vec{u}), f_3(\vec{u}))$. Com isso, dizemos que os conjuntos \mathcal{F}^1 e \mathcal{F}^2 são não-conflitantes se $\vec{u}^{\mathcal{F}^1} \leq \vec{v}^{\mathcal{F}^1} \Leftrightarrow \vec{u}^{\mathcal{F}^2} \leq \vec{v}^{\mathcal{F}^2}$ para todo \vec{u} e \vec{v} . Caso contrário, os conjuntos são dados como conflitantes (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009).

Dado o conjunto total de objetivos de um problema, \mathcal{F} , se for possível encontrar algum objetivo f_i não-conflitante com \mathcal{F} , então podemos reduzir o problema e considerar apenas f_i , preservando as relações de dominância fraca. No caso mais geral, estamos interessados em descobrir o menor subconjunto não-conflitante com \mathcal{F} . A questão de procurar objetivos a serem reduzidos não pode ser decidida olhando apenas pares de objetivos (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009). Por exemplo, na Figura 86, todos os pares de objetivos são conflitantes entre si, porém o objetivo f_2 é redundante.

Uma das generalizações para a relação de dominância de Pareto é a relação ε -Dominância (LAUMANN *et al.*, 2002). Ela será empregada aqui para dar um sentido para o erro δ nas relações de dominância. Dizemos que \vec{u} ε -domina \vec{v} se $f(\vec{u}) - \varepsilon \leq f(\vec{v})$ e escrevemos $\vec{u} \preceq^\varepsilon \vec{v}$. Notamos que se $\vec{u} \preceq \vec{v}$, então $\vec{u} \preceq^\varepsilon \vec{v}$. Assim, dados dois subconjuntos de objetivos \mathcal{F}^1 e \mathcal{F}^2 , dizemos que eles são δ -não conflitantes se para todo par de soluções \vec{u} e \vec{v} de um conjunto qualquer, haver dominância em relação a um conjunto de objetivos implicar ε -dominância em relação ao outro conjunto, com $\varepsilon = \delta$ (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009).

A Figura 87 mostra um exemplo com quatro soluções e quatro objetivos. Seja um conjunto de objetivos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Temos que o conjunto de soluções comparáveis é vazio em relação aos objetivos do conjunto \mathcal{F} , mas ao retirar o objetivo 1 ele deixa de sê-lo em \mathcal{F}/f_1 , porque $\vec{b}^{\mathcal{F}/f_1} \leq \vec{c}^{\mathcal{F}/f_1}$. Logo, os conjuntos \mathcal{F} e \mathcal{F}/f_1 são conflitantes⁶. No entanto, $f_1(\vec{c}) + \delta_1 = f_1(\vec{b})$. Isso significa que \vec{c} δ -domina \vec{b} , e os conjuntos \mathcal{F} e \mathcal{F}/f_1 são δ -não conflitantes. Portanto, se aceitarmos um erro de $\delta_1 = 0,5$ nas relações de dominância, podemos então reduzir o conjunto de objetivos retirando f_1 . Ao retirar o objetivo f_2 , temos que a solução \vec{d} passará a dominar \vec{c} , de

⁵ A definição pode ser dada no conjunto Pareto-ótimo ou em algum conjunto qualquer.

⁶ Pela definição, para todo par de soluções \vec{u} e \vec{v} , temos que $\vec{u}^{\mathcal{F}} \leq \vec{v}^{\mathcal{F}} \Rightarrow f_j(\vec{u}) \leq f_j(\vec{v})$ vacuosamente (e. g. (MUNKRES, 2000, p. 7)), porém a recíproca não é verdadeira, uma vez que $\vec{b}^{\mathcal{F}/f_1} \leq \vec{c}^{\mathcal{F}/f_1}$ não implica que $\vec{b}^{\mathcal{F}} \leq \vec{c}^{\mathcal{F}}$

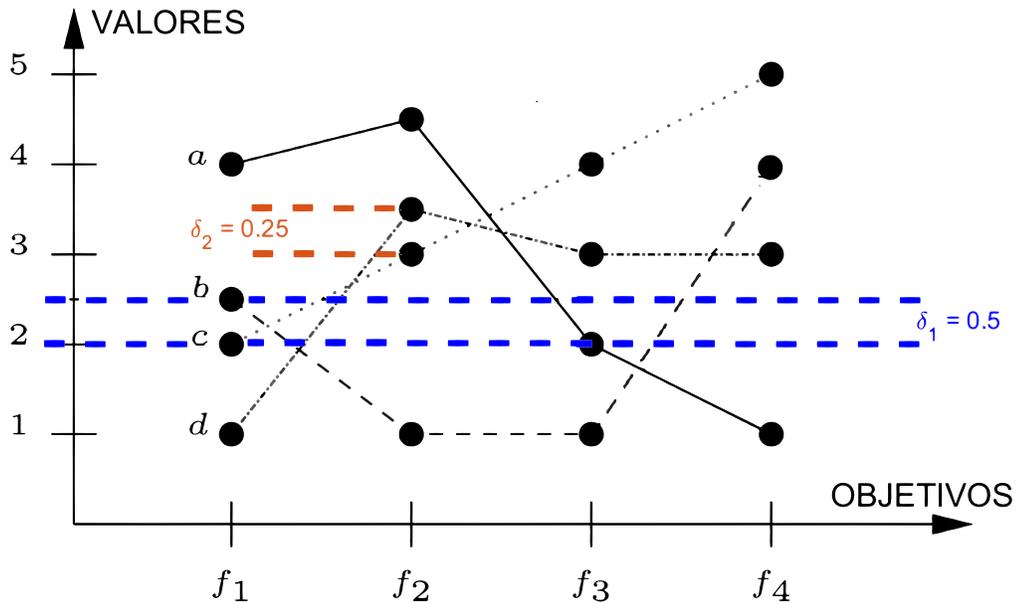


Figura 87 – Exemplo onde a retirada dos objetivo $\{f_1, f_2\}$ não alteram as relações de dominância a menos de um erro $\delta = 0,25$ nas relações de dominância. Figura adaptada de (BROCKHOFF; ZITZLER, 2009).

modo que f_2 também é conflitante com \mathcal{F} . Porém, \vec{d} δ -domina a solução \vec{c} , com $\delta_2 = 0,25 < \delta_1$, tornando a escolha de se retirar f_2 melhor que f_1 . O objetivo f_3 é redundante nesse problema, porque mesmo com sua retirada, as soluções continuam incomparáveis. E a retirada do objetivo f_4 induziria valores de δ maiores que $\delta_2 = 0,25$. Concluimos que para os dados da Figura 87, um conjunto reduzido de objetivos é $\{f_1, f_4\}$.

Em em problema com dois objetivos, a fronteira de Pareto reduzir-se a um único ponto mostra que não há conflito de objetivos, uma vez que foi encontrada uma solução que domina todas as outras da população. Analogamente, em um problema com três objetivos, uma curva indica que um objetivo pode ser reduzido. Em mais dimensões, no "Gráfico com Coordenadas Paralelas", conflito de objetivos pode ser visto pelo cruzamento das linhas. Por exemplo, a Figura 88 mostra uma reta em dez dimensões que pode ser visualizada em apenas três.

Entre outras abordagens para tratar a questão da redução de objetivos, citamos os métodos específicos para problemas que empregam funções lineares (GAL; LEBERLING, 1977; MALINOWSKA, 2006) e os métodos que definem conflito entre os objetivos através de correlação (SAXENA *et al.*, 2013). Porém aqui, escolhemos um método que não depende de parâmetros externos e é livre dos vieses que surgem nas análises com o parâmetro δ que ocorrem em situações em que a normalização da funções objetivo não é conhecida ou nas situações com fronteiras de Pareto não lineares (DURO *et al.*, 2014). O método será aplicado após o término do algoritmo multiobjetivo para facilitar a visualização e a tomada de decisão de uma solução particular.

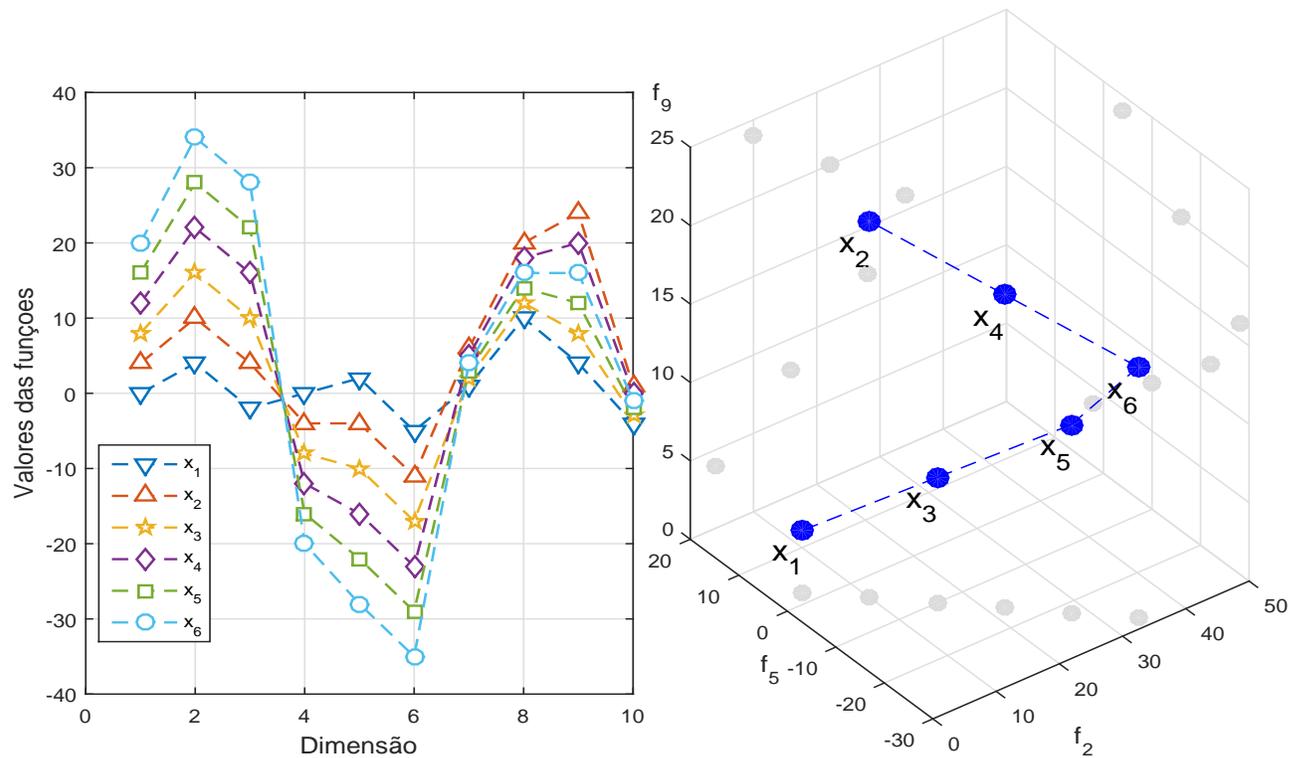


Figura 88 – a) Uma reta em dez dimensões, usando o "Gráfico com Coordenadas Paralelas". Cada dimensão representa uma função objetivo. Os cruzamento entre as retas na Figura indicam conflito de objetivos. b) A mesma reta em três dimensões, preservando as relações de não dominância entre as seis soluções x encontradas nesse exemplo.

Usamos o seguinte procedimento (YUAN *et al.*, 2017):

- Contamos o número de soluções não dominadas da população após as N gerações;
- Encontramos todas as combinações de objetivos tomados k a k . Por exemplo, para 6 funções objetivo, tomamos entre eles todas as combinações 2 a 2, 3 a 3, ..., 6 a 6;
- Calculamos a fração η de soluções dominadas da população considerando apenas as funções objetivo de cada combinação

O resultado é um gráfico da fração η pelo número de funções objetivo k . O valor de η é uma alternativa para o valor do erro δ nas relações de dominância. Desejamos que a menor fração possível de soluções passem a ser dominadas pela retirada de um número grande k de objetivos.

5.14 Sumário das Justificativas para a Escolha do Método

Em resumo, as características desejáveis dos métodos evolutivos que justificaram sua escolha para otimizar as métricas apresentadas no capítulo 4 são:

- Manipulação de um conjunto de soluções a cada iteração, porque o problema a ser resolvido é multiobjetivo;
- Presença de estratégias para favorecer a diversidade das soluções, a convergência do algoritmo e a rapidez de processamento;
- Não dependência de hipóteses sobre o espaço de busca;
- Flexibilidade para tratar possíveis alterações na formulação do problema;
- Não existência de um algoritmo exato para resolver o problema.

As características particulares do método EliteNSGA-III que nos motivaram a utilizá-lo são:

- Menor dependência possível de parâmetros externos - apenas os índices da recombinação n_c e da mutação n_m foram utilizados;
- Aptidão para tratar aproximadamente mais que quatro objetivos e
- Utilização do critério de Pareto.

CAPÍTULO 6

CONFIGURAÇÕES PARA OS ARRANJOS

Neste capítulo, implementamos as métricas derivadas no capítulo 4 nos algoritmos que escrevemos descritos no capítulo 5 e analisamos os resultados obtidos para arranjos com diferentes números e tipos de telescópios. A diferença entre este capítulo e o capítulo 4 é que anteriormente a otimização era realizada para a escala de separação de geometrias fornecidas *a priori* e a partir deste capítulo haverá uma busca também sobre a própria geometria do arranjo. A hipótese é que a otimização das métricas é uma meta necessária, porém não suficiente, para a configuração do arranjo, de modo que o conjunto das geometrias obtidas pelo algoritmo possui uma diversidade maior que inclui as verdadeiras soluções do problema. Nesse sentido, investigaremos tendências ou relações entre os objetivos da otimização e as características geométricas para o arranjo.

Os valores para os parâmetros do algoritmo e alguns detalhes da implementação são dados na seção 6.1. Na seção 6.2, algumas geometrias para um arranjo de até nove telescópios são encontradas, utilizando-se apenas como funções objetivo a área efetiva e a multiplicidade média de observação. Após analisar na seção 6.2 as frentes de Pareto para poucos objetivos, na seção 6.3, incluímos as outras métricas do capítulo 4.

6.1 Implementação do Algoritmo

As entradas principais de cada problema a ser otimizado neste capítulo são o número de variáveis, os limites inferior e superior de cada uma delas e as funções objetivo.

Os N telescópios de cada problema serão dispostos em um plano, cada qual caracterizado pela sua localização (x_i, y_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$, em uma região de dimensões $2200 \text{ m} \times 2200 \text{ m}$. Quando a otimização envolver tipos diferentes de telescópios, uma variável discreta será adicionada para cada telescópio, representando seu tipo - grande, médio ou pequeno - e a possibilidade de "ausência de telescópio". Então para cada telescópio estão associadas duas ou três variáveis, ou seja, dois ou três genes. A carga genética de cada indivíduo da população é representada por um vetor, contendo as coordenadas x e y de todos os telescópios, que são números reais¹. Quando a otimização envolver tipos diferentes de telescópios, a cada indivíduo serão adicionados N genes a mais que indicam o tipo de cada telescópio.

Para aumentar a rapidez de processamento, um telescópio foi fixado no centro do plano. Quando necessário, para impedir um viés para o cálculo das métricas que seria introduzido por telescópios na borda do plano, uma moldura de 500 m onde telescópios não podem ocupar posições foi anexada à borda da região quadricular. A motivação para a escolha dos 500 m é o limite de detecção das curvas de *trigger* da seção 4.2, exibidas nas Figuras 42, 44 e 45.

As métricas do capítulo 4 compõem os objetivos da otimização. Usaremos a seguinte notação daqui em diante:

- Métrica para a área efetiva ou A_{ef} : equações 4.6 e 4.7;
- Métrica para a multiplicidade média ou $\langle M \rangle$: equação 4.8;
- Métrica para a resolução angular ou $\langle \Theta \rangle$: equação 4.11 e
- Métrica para a resolução em energia ou $\langle L \rangle$: equação 4.12;

Como os algoritmos multiobjetivo empregados ou minimizam ou maximizam todas as funções, multiplicamos as métricas A_{ef} , $\langle M \rangle$ e $\langle \Theta \rangle$ por -1. A métrica para a resolução em energia é dada pela flutuação no número de fótons Cherenkov e portanto, ao contrário das outras métricas, deve ser minimizada. Por isso não precisa ser multiplicada por -1. Além disso, as quantidades Θ e L não são definidas para pontos onde a probabilidade de detecção seja nula. Nesse caso, elas foram tomadas com os valores zero e infinito, respectivamente.

¹ Caso se soubesse que a geometria do arranjo é simétrica ou formada por polígonos regulares, poderíamos fazer a representação dos indivíduos com os valores do lado e ângulos dos polígonos para reduzir o número de variáveis e assim melhorar a convergência do algoritmo. Por exemplo, um losango seria descrito por duas variáveis, lado e ângulo, ao invés de oito. Isto tem impacto se o arranjo for construído a partir de células, como por exemplo é realizado em (BARNACKA *et al.*, 2013; AHARONIAN *et al.*, 1997a; DENMAN, 2014).

As métricas são calculadas em dois momentos durante o algoritmo: após a população inicial ser gerada e uma vez em cada geração para cada indivíduo do conjunto $R = P \cup Q$, seguindo a notação da seção 5.9. Cada métrica depende da energia a ser analisada, isto é, 100 GeV, 1 TeV ou 10 TeV. Como os diferentes tipos de telescópios são potencializados para observar eventos de uma dada energia, empregaremos no máximo doze métricas para descrever um arranjo. Para aumentar a rapidez de processamento, paralelizamos o cálculo das métricas para os diferentes indivíduos da população, porque são cálculos independentes.

Os algoritmos evolutivos são caracterizados pelo tamanho da população, representação das variáveis, critério de parada e os operadores de seleção, recombinação e mutação.

A menos que explicitado de forma contrária, para os problemas com mais de uma função objetivo deste capítulo, foi empregado o algoritmo EliteNSGA-III em que

- a população inicial foi gerada aleatória e uniformemente dentro dos intervalos definidos pelos limites da região de dimensões $2200 \text{ m} \times 2200 \text{ m}$;
- não há operador de seleção, e cada indivíduo da população ou da elite é tomado com probabilidade de 50 % para participar da Recombinação;
- para as variáveis reais, que são as posições dos telescópios, empregou-se o operador de Recombinação Binária Simulada, com índice n_c igual a 30 entre um indivíduo da população e um indivíduo da elite (pela Figura 71, o alto valor enfatiza buscas locais, estratégia que pode ser usada em problemas com muitos objetivos (DEB; JAIN, 2014));
- para as variáveis discretas, que são os tipos dos telescópios, foi utilizada Recombinação com um ponto de corte (Figura 69-a);
- a probabilidade de um gene em cada indivíduo ser mutado foi tomada como sendo igual ao inverso do número de variáveis. Todo indivíduo sofreu mutação com essa probabilidade;
- para variável real, foi utilizada a Mutação Polinomial com índice da mutação n_m igual a 20 (pela Figura 72, o alto valor enfatiza buscas locais);
- para a variável discreta - o tipo do telescópio, que é um número entre 0 e 3 - foi utilizada mutação na representação binária, com a troca de um alelo de 0 para 1 ou vice-versa (Figura 69-b) e
- o critério de parada foi o número de gerações, igual a 50.

O algoritmo EliteNSGA-III utiliza pontos de referência, cujo número é uma decisão do usuário, portanto não é um parâmetro externo do algoritmo, embora nesse capítulo tenhamos empregado alguns valores em particular e que serão mencionados a seguir caso a caso. O tamanho da população que utilizamos foi o menor número par maior que o número de pontos de referência. Como em geral vários pontos de referência não foram utilizados após o término da execução do

algoritmo, nos problemas analisados nesse capítulo para cada arranjo testado, diferentemente de (DEB; JAIN, 2014), diminuimos o tamanho da população para gerar menor custo computacional. O tamanho da população também será indicado a seguir caso a caso.

Para a normalização da escala dos objetivos, no algoritmo que implementamos, a equação 5.13 foi empregada, de modo a diminuir o custo computacional envolvido originalmente na normalização utilizada em (DEB; JAIN, 2014). A elite inicia o algoritmo com o valor infinito atribuído para cada objetivo, e a equação 5.13 apenas é utilizada quando a um ponto de referência for associado algum membro finito da elite. Neste capítulo, os pontos ideais de cada um dos M objetivos foram atualizados a cada geração através das populações da geração atual e da sua descendência, para evitarmos a necessidade de resolver M problemas de otimização escalar antes da aplicação do método multiobjetivo. Os pontos nadir foram calculados a partir das populações das frentes F_1, \dots, F_l , segundo a notação da Figura 78.

6.2 Área Efetiva e Multiplicidade Média

Nesta seção, investigamos a relação entre as métricas para a área efetiva e para a multiplicidade média do arranjo, porque a primeira é diretamente proporcional à taxa de detecção de eventos e a segunda está relacionada à qualidade da reconstrução. Consideramos a multiplicidade mínima igual a três como critério de detecção do chuveiro e a obtenção de multiplicidades maiores é vista como meta de otimização. Como existe um comportamento assintótico entre resolução angular e a multiplicidade de uma observação (HOFMANN *et al.*, 1999; FUNK; HINTON, 2008; ACTIS *et al.*, 2011), para multiplicidades acima de um dado valor, o usuário talvez queira aumentar a área efetiva, ao invés da multiplicidade. A multiplicidade média de *trigger* também influencia a resolução em energia do arranjo, uma vez que a energia do primário é calculada a partir da média das energias medidas em cada telescópio (e.g. (ALEKSIĆ *et al.*, 2016, p. 4-5), (KONOPELKO *et al.*, 1999b; KRAWCZYNSKI *et al.*, 2006)). Além disso, o parâmetro de impacto é melhor determinado e ele é um fator necessário para o cálculo do ângulo zenital (HOFMANN *et al.*, 2000b; AHARONIAN *et al.*, 1997a). A observação estéreo também aprimora a supressão da luz de fundo, a qualidade na identificação de primários gama em um fundo hadrônico e aumenta a área efetiva para as menores energias (MAIER *et al.*, 2017; KONOPELKO *et al.*, 1999b; DAUM *et al.*, 1997).

6.2.1 Otimização de um arranjo homogêneo para uma energia

Nesta seção, utilizamos apenas as métricas A_{ef} e $\langle M \rangle$ para telescópios médios observando eventos com energia igual a 1 TeV. A menos que explicitado de forma contrária, foi empregada uma população com 22 indivíduos. Além disso, usamos $p = 20$ espaçamentos entre os pontos de referência no espaço de objetivos no algoritmo EliteNSGA-III.

6.2.1.1 Caso: 3 telescópios

Para três telescópios, todas as soluções nesse problema possuem trivialmente multiplicidade média igual a três, de modo que se trata de um problema com apenas uma função objetivo. Os índices de Recombinação e Mutação utilizados foram $n_c = 2$ e $n_m = 10$. A maior área efetiva encontrada pelo algoritmo foi igual a $5,45 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. A geometria correspondente é um triângulo com lados iguais a 21,4 m, 23,0 m e 24,0 m. Trata-se de uma solução não física, porque essa geometria com os três telescópios aproximadamente na mesma posição degrada a resolução angular e as outras métricas para o arranjo. De fato, essa é a solução caso apenas essas duas métricas sejam utilizadas. Isso porque pela Figura 20, como um chuveiro imprime no solo radiação mais concentrada em uma região elíptica ou circular, com raio aproximadamente 120 m, os três telescópios localizados dentro dessa região permite a detecção da luz emitida por esse chuveiro. Para chuveiros com diferentes pontos de impacto no solo, a Figura 89 mostra a probabilidade de detecção em cada um desses pontos e como ela diminui se a separação entre os telescópios aumentar, por exemplo, para 300 m. Assim, a configuração dos três telescópios na mesma posição favorece a detecção de chuveiros com diferentes pontos de impacto. Esse resultado indica que as métricas A_{ef} e $\langle M \rangle$ não são suficientes e que devemos incluir as outras métricas para o arranjo. A solução ideal, correspondente aos três telescópios na mesma posição, tem área efetiva de $5,51 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. A Figura 90 mostra a convergência do algoritmo durante as 50 gerações. A maior evolução das áreas efetivas ocorreu nas 20 primeiras gerações. Pela Figura 46, que foi construída com arranjos triangulares regulares simulados, o resultado acima mostra que o algoritmo convergiu para o arranjo homogêneo com três telescópios.

6.2.1.2 Caso: 4 telescópios

Para quatro telescópios, o algoritmo fez os telescópios convergirem aproximadamente para a mesma posição. Isso era esperado, porque a multiplicidade mínima de detecção foi dada como igual a três. Houve apenas uma solução não dominada, que possui área efetiva igual a $5,90 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ e multiplicidade média igual à 3,9. Pela seção 5.13, quando a frente de Pareto se reduz a um ponto, os objetivos não são conflitantes. A geometria correspondente são os telescópios em posições próximas, com separação média de 18 m e separação máxima de 27 m². A menor área efetiva encontrada foi $1 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ menor que a área ideal, com multiplicidade também 3,9, e separação máxima entre os telescópios de ~ 28 m. A Figura 91 mostra a evolução dos valores das duas métricas calculadas para toda a população ao longo das 50 gerações.

² A solução correspondente aos quatro telescópios na mesma posição tem área efetiva de $5,92 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ e multiplicidade média igual à 3,9. Portanto, a solução ideal - no sentido da Figura 75 - pôde ser encontrada nesse caso.

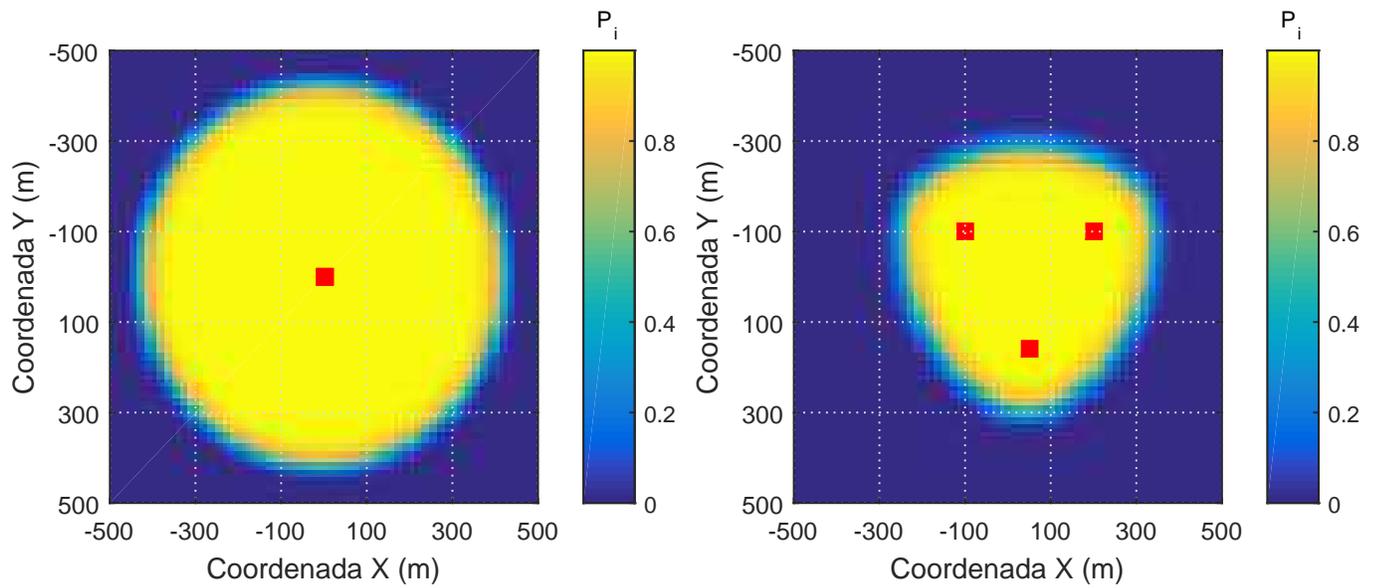


Figura 89 – *Esquerda:* Probabilidade de detecção P_i em cada ponto i de um arranjo formado por três telescópios médios localizados na mesma posição observando eventos de 1 TeV. *Direita:* Probabilidade de detecção para os mesmos três telescópios na configuração de um triângulo equilátero com lado igual a 300 m.

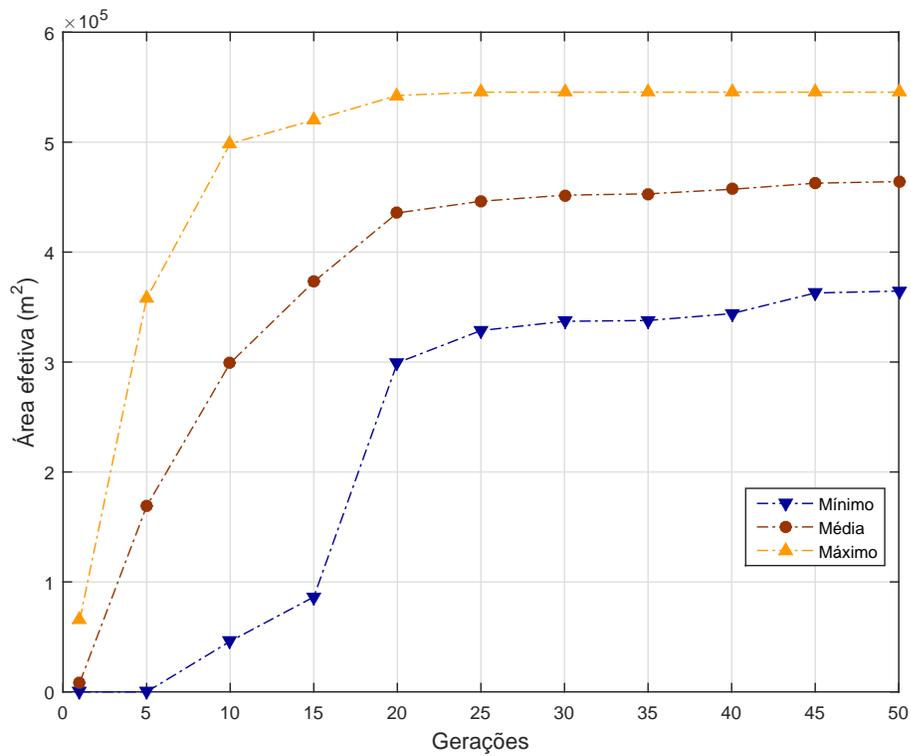


Figura 90 – Área efetiva em função do número de gerações do algoritmo para 3 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram como o valor máximo, a média e o valor mínimo da população evoluíram ao longo de 50 gerações. As linhas guiam a leitura dos pontos.

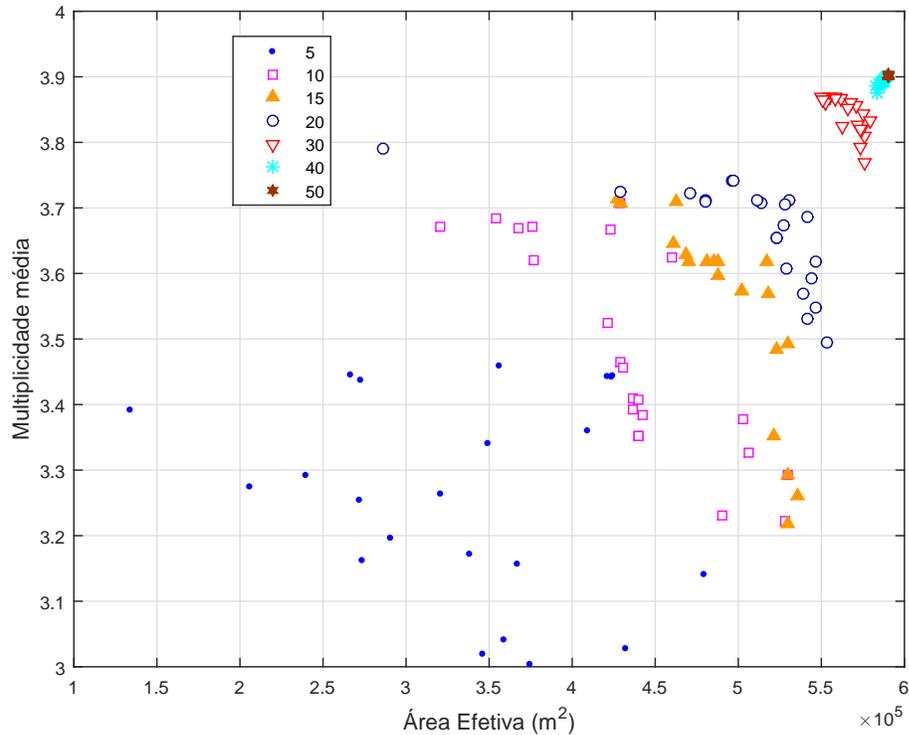


Figura 91 – Métricas em função do número de gerações para 4 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para toda a população. A geometria correspondente são os quatro telescópios em posições próximas, tendendo ao mesmo ponto.

6.2.1.3 Caso: 5 telescópios

Para cinco telescópios, a Figura 92 mostra a evolução dos valores das duas métricas calculadas para toda a população ao longo de 50 gerações. A frente de Pareto encontrada contém dez soluções, mostradas na Figura 93, e quatro geometrias típicas, mostradas na Figura 94. Cada uma das dez soluções pode ser classificada de maneira geral em alguma dessas quatro geometrias, nomeadas pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*. A geometria *A* possui três telescópios em posições próximas, e a geometria *B* possui uma linha formada com três telescópios. Essas características, que também estão presentes nas geometrias *C* e *D*, deterioram a resolução angular do arranjo. Portanto, esse resultado indica que as métricas A_{ef} e $\langle M \rangle$ não são suficientes para descrever o arranjo e que devemos acrescentar pelo menos uma métrica para a resolução angular.

Pela Figura 49, qualquer solução em forma de quadrado com face centrada com separação menor que 100 m possui maior multiplicidade média e área efetiva que as dez soluções da fronteira de Pareto encontradas. Além disso, a solução degenerada com todos os telescópios do arranjo dispostos na mesma posição possui uma área efetiva de $6,13 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ e multiplicidade média igual à 4,8. Em 50 gerações, o algoritmo não convergiu para essa solução, embora tenha chegado próximo dela, como mostra a Figura 92.

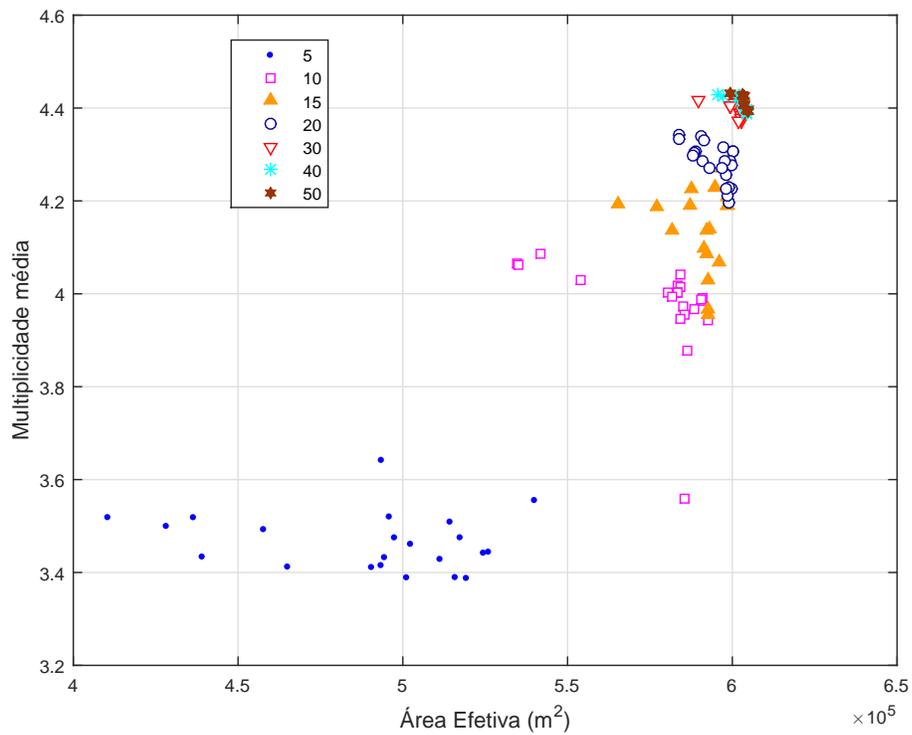


Figura 92 – Área efetiva e multiplicidade média em função do número de gerações para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para toda a população.

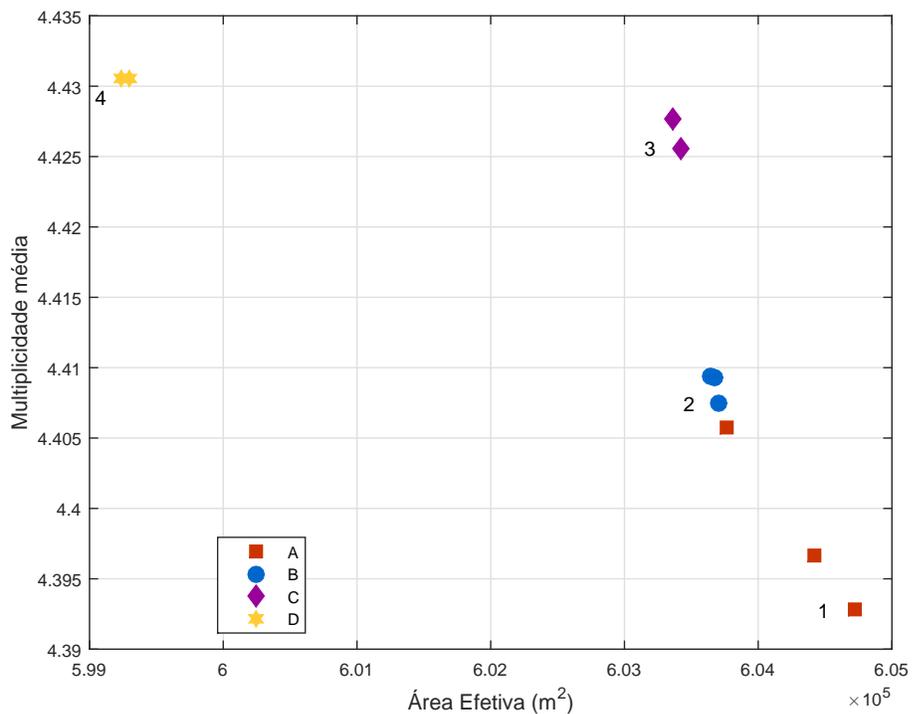


Figura 93 – Fronteira de Pareto obtida para a área efetiva e multiplicidade média para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias correspondentes a cada ponto são mostradas na Figura 94.

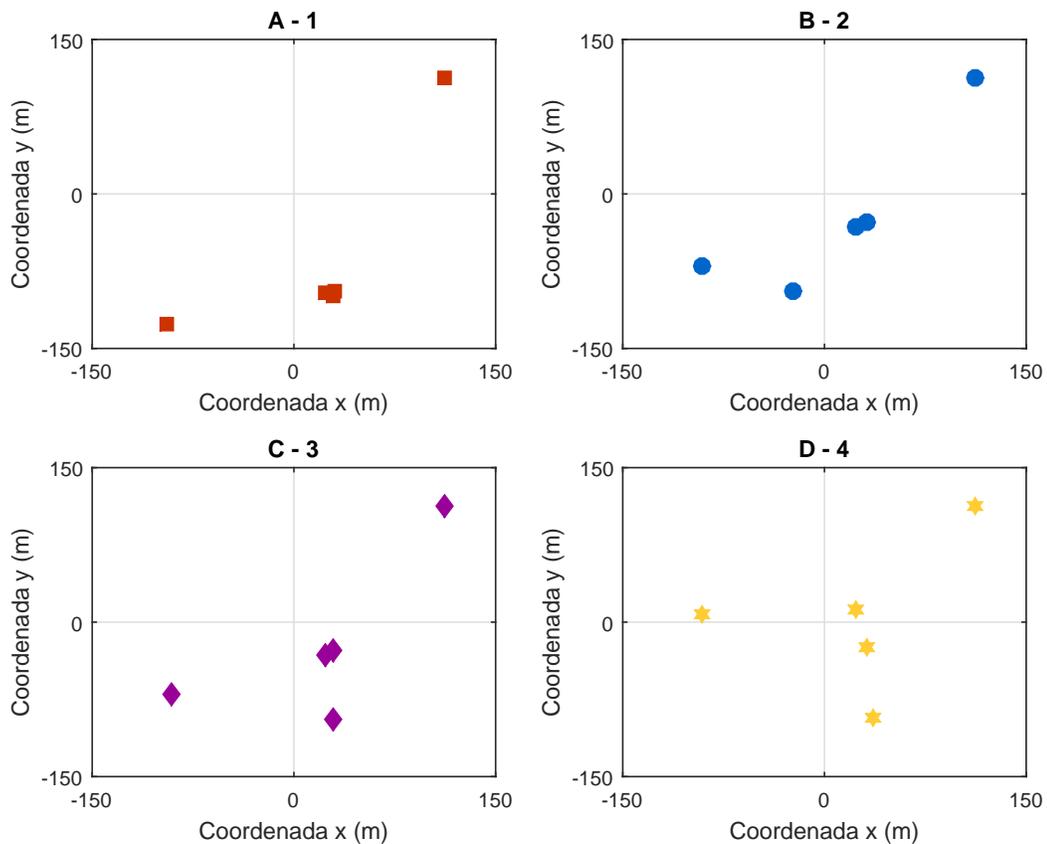


Figura 94 – As geometrias típicas classificadas de *A* até *D* para as soluções da fronteira de Pareto da Figura 93. A numeração dos arranjos corresponde à escolha de um representante de cada classificação e a numeração é correspondente àquela dada na Figura 93.

6.2.1.4 Caso: 6 telescópios

Para seis telescópios, foi utilizada uma população com 44 indivíduos, o dobro do caso anterior, com os telescópios dispostos em uma área menor, igual a $1000\text{ m} \times 1000\text{ m}$, para favorecer a convergência. O algoritmo terminou 100 gerações com 34 indivíduos distintos e não dominados. A fronteira de Pareto é mostrada na Figura 95. As variações em número absoluto das métricas A_{ef} e $\langle M \rangle$ são maiores que as encontradas na Figura 93, logo para seis telescópios as métricas passam a exibir conflito entre si. O arranjo com maior área efetiva é formado por dois grupos com três telescópios cada, como mostra a Figura 96. Uma vez que a multiplicidade mínima de detecção foi dada como igual a três, para aumentar a área efetiva, torna-se mais vantajoso separar os seis telescópios em dois grupos de três ao invés de juntar os seis telescópios em posições próximas. A multiplicidade média, por outro lado, sempre aumenta à medida que a separação entre os telescópios diminui. As outras geometrias da fronteira de Pareto são também dois grupos com três telescópios cada, que diferem entre si pela separação entre os grupos. A conclusão é que para aumentar a área efetiva para seis telescópios, o algoritmo dividiu o arranjo em dois sub-arranjos, embora isso diminua a multiplicidade de observação dos eventos.

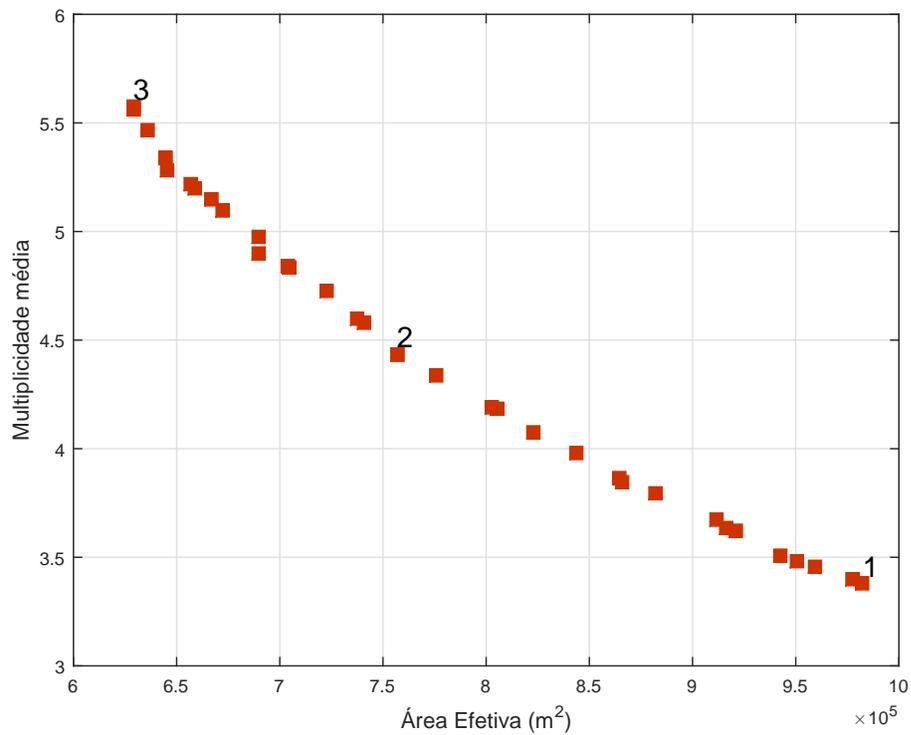


Figura 95 – Área efetiva e multiplicidade média para seis telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os pontos da Figura mostram os valores para a fronteira de Pareto. As geometrias correspondentes são dadas na Figura 96.

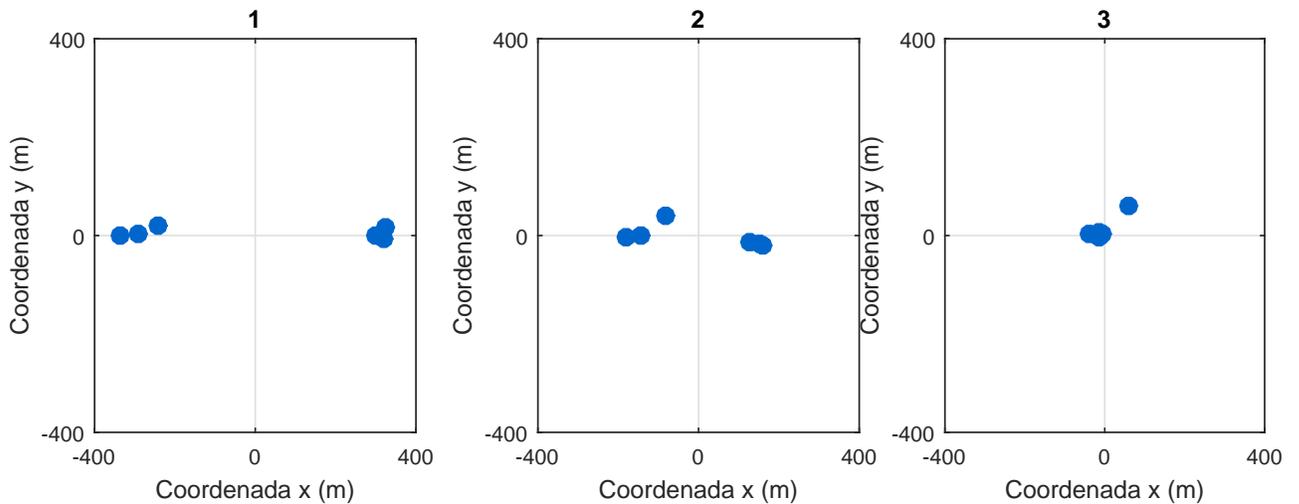


Figura 96 – As geometrias para as soluções numeradas da Figura 95 formam subgrupos com três telescópios cada. As geometrias dos outros pontos da fronteira de Pareto diferem pelo espaçamento entre os dois subgrupos .

6.2.2 Otimização com a Área Interna do Arranjo

Para evitar os casos não físicos de agrupamentos de telescópios ou de geometrias alinhadas - como as das Figuras 94 e 96 - porque essas características degradam a resolução angular do arranjo, nesta seção empregamos o algoritmo evolutivo para otimizar a área interna de observação e a multiplicidade média nela. No Apêndice, é mostrado o algoritmo que utilizamos para calcular a área interna de um arranjo. Nesta seção, utilizamos telescópios médios observando eventos com energia igual a 1 TeV. A menos que explicitado de forma contrária, foi empregada uma população com 22 indivíduos. Além disso, usamos $p = 20$ espaçamentos entre os pontos de referência no espaço de objetivos no algoritmo EliteNSGA-III.

6.2.2.1 Caso: 3 telescópios

Para três telescópios, a maior área interna de observação encontrada foi igual a $8,72 \cdot 10^4 \text{ m}^2$, que corresponde a uma geometria triangular com dois lados iguais a 480 m e um lado igual a 500 m. Em toda a população, obtiveram-se 20 indivíduos com essa área, cujo valor é consistente com os dados obtidos na Figura 58 para triângulos simulados. Portanto, o algoritmo convergiu nesse caso. A área total de observação do arranjo, ou seja, considerando a detecção tanto na área interna quanto na área externa de observação, com essa geometria é igual a $1,04 \cdot 10^5 \text{ m}^2$, ou 20 % a mais que a área interna. A Figura 97 compara a probabilidade de detecção na área interna e na área total. Pela Figura 58, a diferença entre os valores das duas áreas é tanto maior quanto mais compacto for o arranjo. Em comparação com o resultado não físico da Figura 89, a área efetiva total diminui cerca de cinco vezes à medida que o espaçamento entre os telescópios passa de zero para 500 m.

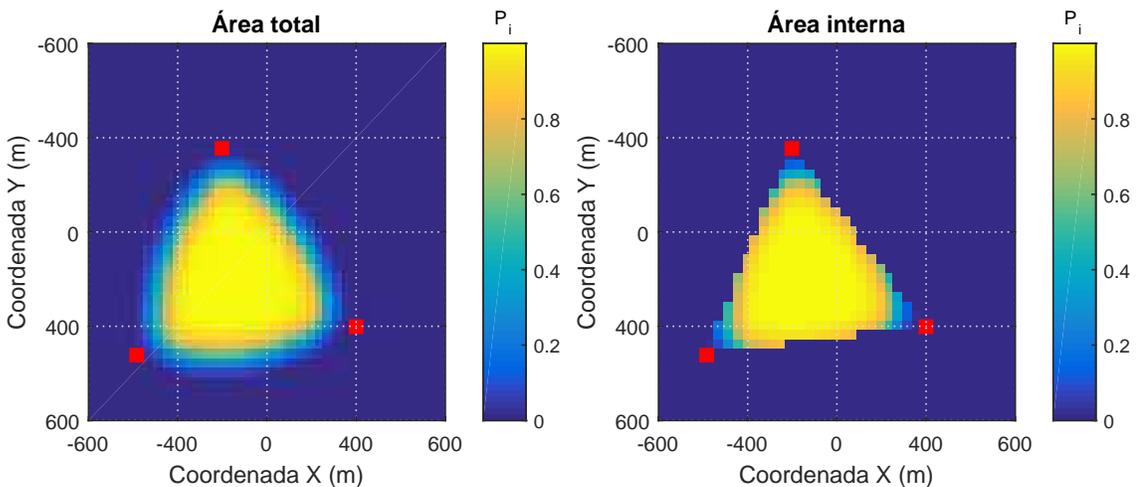


Figura 97 – Probabilidade de detecção em cada ponto do arranjo ótimo encontrado pelo algoritmo. *Esquerda:* Probabilidade de detecção na área total, interna e externa ao arranjo. *Direita:* Probabilidade de detecção apenas na área interna.

6.2.2.2 Caso: 4 telescópios

Para quatro telescópios dispostos em uma área igual a $800\text{ m} \times 800\text{ m}$, o algoritmo forneceu 27 soluções distintas e não dominadas em uma população com 44 indivíduos em 100 gerações.

A Figura 98 mostra a fronteira de Pareto obtida e a compara com a área efetiva total - ou seja, considerando também a área externa de observação - e a multiplicidade média total dos arranjos obtidos na fronteira de Pareto. Ao considerar a área externa, a área efetiva aproximadamente dobra e a multiplicidade diminui - pela inclusão dos pontos mais afastados do arranjo - que possuem menores multiplicidades.

A conclusão para as geometrias é que os arranjos encontrados se aproximam de retângulos, como mostra a Figura 99, que é uma superposição de todas as 27 soluções. Na Figura 99, o ponto P corresponde ao ponto fixo no arranjo durante o desenvolvimento do algoritmo, portanto ele pertence a todas as soluções (seção 6.1). Os três telescópios nas posições em volta do ponto P correspondem à solução “4” da Figura 98, cuja área interna é aproximadamente igual a zero. A solução “3” na Figura 98 é um retângulo com lados aproximadamente iguais a 300 m e 345 m. As quatro menores distâncias entre telescópios na solução “2” da Figura 98 são aproximadamente 340 m, 346 m, 360 m e 370 m.

A geometria “1” da Figura 98 é um quadrilátero irregular com lados aproximadamente iguais a 300 m, 340 m, 430 m e 430 m, como mostra a Figura 100. A forma geral se aproxima com a dos telescópios VERITAS, porém com proporções diferentes, como mostra a Figura 4.

A área efetiva interna do arranjo “1” é igual a $1,39 \cdot 10^5\text{ m}^2$ com multiplicidade média igual a 3,7. Pela Figura 58, construída apenas com quadrados simulados, aquele com lado entre 400 m otimiza a área interna com o valor $1,61 \cdot 10^5\text{ m}^2$. Nessa situação, a multiplicidade média é igual a 3,5. Ou seja, cada um desses arranjos é melhor em um objetivo diferente. Com relação à área total, para a geometria “1” ela é igual a $2,43 \cdot 10^5\text{ m}^2$ com multiplicidade média igual a 3,4. Por outro lado, as Figuras 46 e 49 mostram que é menor a área efetiva total de um arranjo quadricular com lado 400 m, sendo igual a $2 \cdot 10^5\text{ m}^2$, mas com multiplicidade idêntica, igual a 3,4.

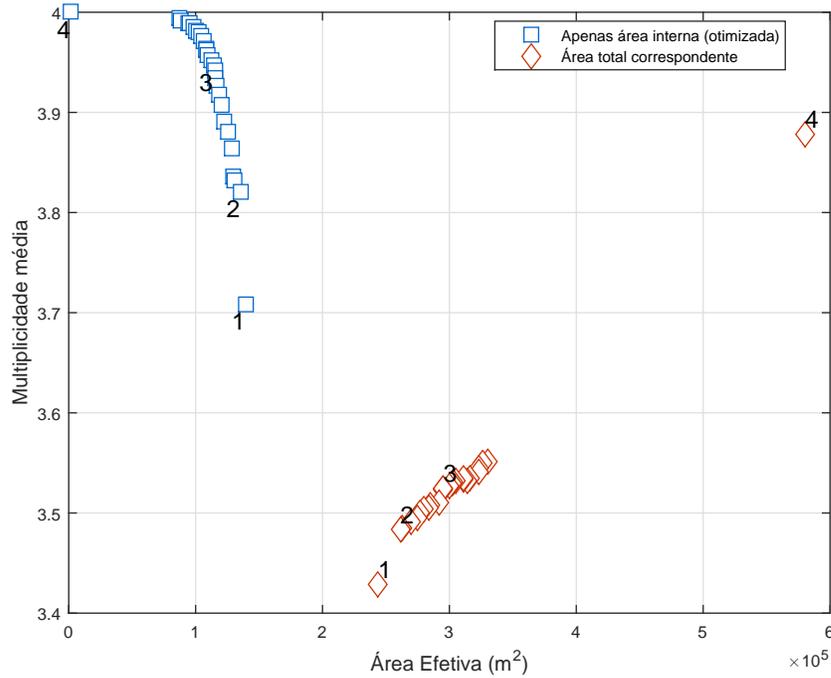


Figura 98 – Área efetiva e multiplicidade média para arranjos com quatro telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Os quadrados da Figura mostram a fronteira de Pareto com os valores ótimos para a área interna de observação. A Figura também mostra a área efetiva total - ou seja, considerando também a área externa de observação - e a multiplicidade média total calculadas correspondentes aos arranjos obtidos na fronteira de Pareto.

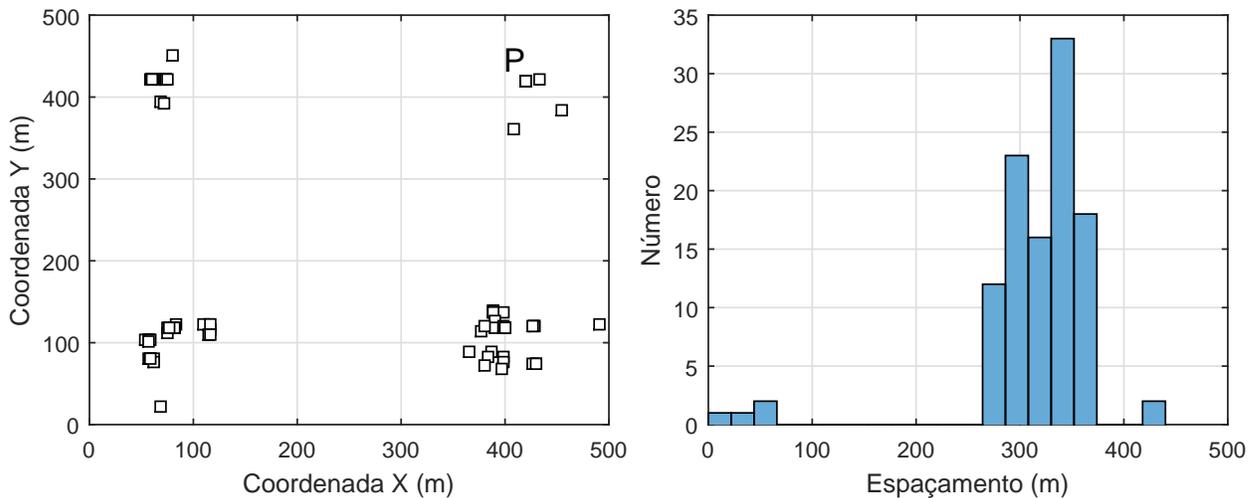


Figura 99 – *Esquerda:* Superposição de todas as geometrias encontradas para a fronteira de Pareto do problema com quatro telescópios médios observando eventos de 1 TeV em que foram otimizadas a área efetiva interna de observação e a multiplicidade. *Direita:* Espaçamentos entre pares de telescópios vizinhos, desconsiderando as diagonais dos losangos.

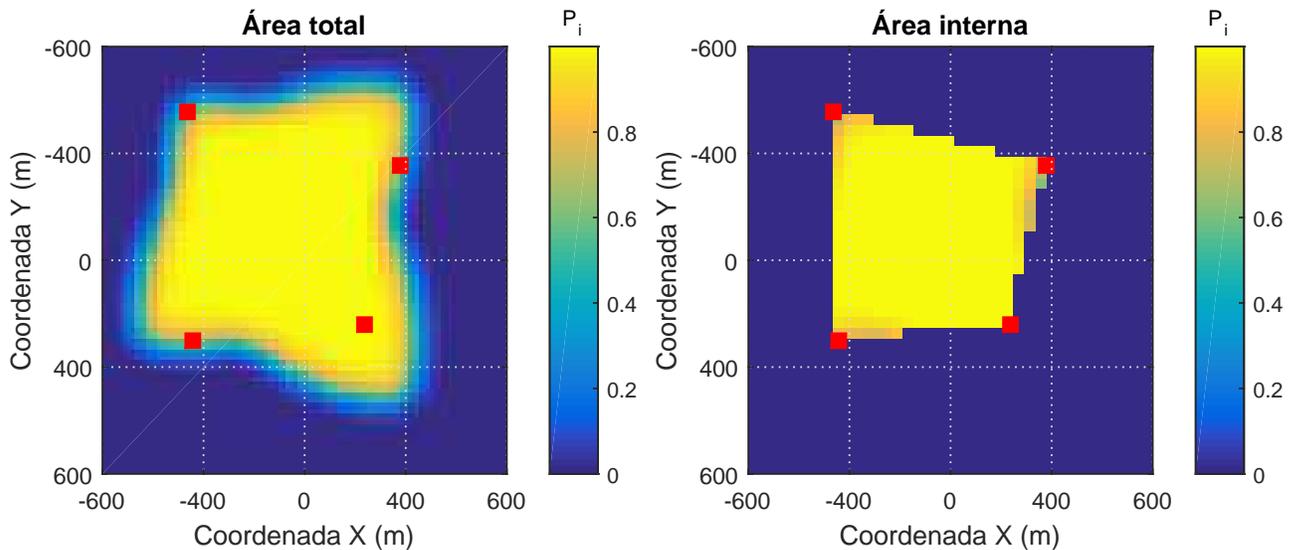


Figura 100 – Probabilidade de detecção em cada ponto do arranjo “1” marcado na Figura 98. *Esquerda*: Probabilidade de detecção na área total, interna e externa ao arranjo. *Direita*: Probabilidade de detecção apenas na área interna. .

6.2.2.3 Caso: 5 telescópios

Para cinco telescópios, a frente de Pareto que encontramos é mostrada na Figura 101 e contém quatro geometrias típicas, exibidas na Figura 102. Cada uma das vinte soluções pode ser classificada de maneira geral em alguma dessas quatro geometrias, nomeadas pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*. Os pontos na fronteira de Pareto na Figura 101 com o mesmo símbolo possuem geometrias com a mesma forma; alguns casos foram ilustrados na Figura 102. A Figura 101 mostra que não apenas a escala de separação entre os telescópios diminui à medida que a multiplicidade aumenta, mas a própria geometria do arranjo também pode se alterar.

O resultado foi que 60 % das soluções constituíram o tipo quadrado com face centrada e elas compuseram as soluções com maior área efetiva. Exemplos desse grupo são os arranjos “1”, “4”, “5” e “6” da Figura 102. Em 25 % das soluções, a configuração formava duas linhas: uma com três telescópios paralela à outra com dois telescópios. Essa geometria ocorreu para os pontos da fronteira com maior multiplicidade. Exemplos desse grupo são os arranjos “2” e “7” da Figura 102. Pentágonos irregulares formaram 10 % das soluções, ou seja, apenas duas soluções. Uma geometria com os telescópios próximos compõe a solução com maior multiplicidade da fronteira de Pareto.

Os arranjos “3” e “4” ilustrados na Figura 102 estão próximos no espaço de objetivos da Figura 101, porém a área efetiva total dos dois arranjos difere. Para o arranjo “3”, essa área é igual a $3,8 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ e para o arranjo “4” a área é igual a $5,28 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. A Figura 103 conclui o caso de cinco telescópios, exibindo uma geometria intermediária entre o pentágono - por exemplo, o arranjo “4” - e o caso com duas linhas paralelas - por exemplo, o arranjo “7”.

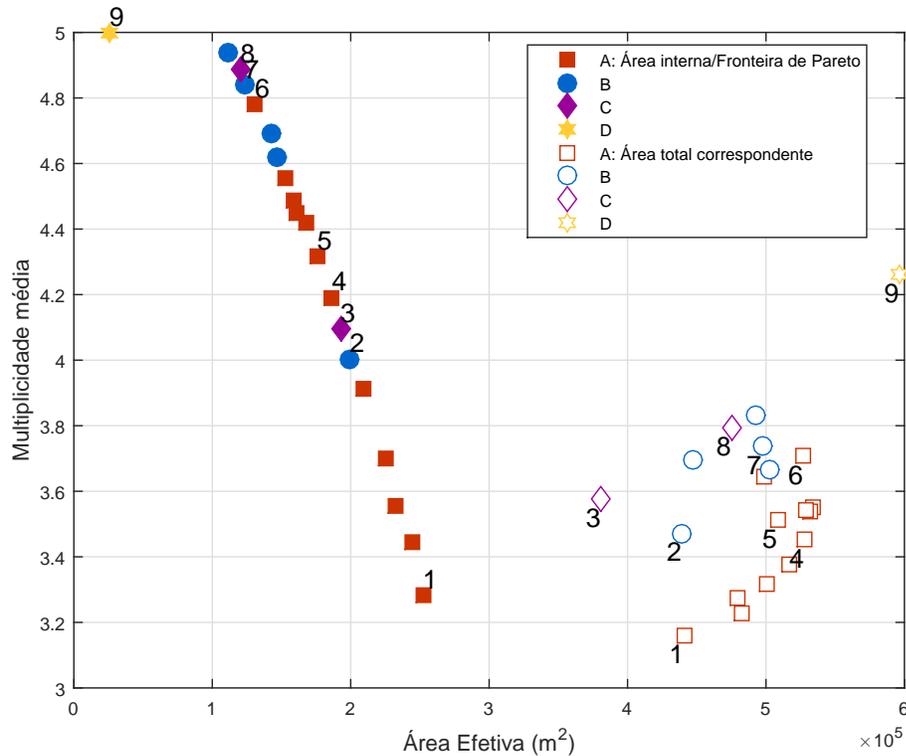


Figura 101 – Fronteira de Pareto para a área efetiva interna e multiplicidade média para 5 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias semelhantes foram agrupadas por letras e mostradas na Figura 102. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto.

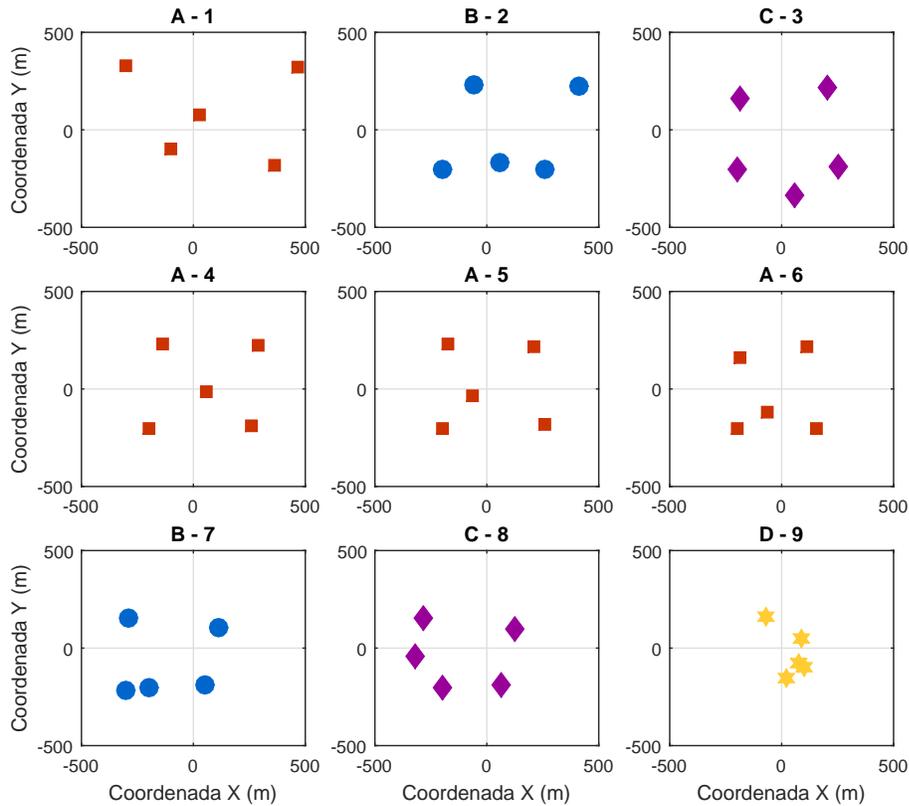


Figura 102 – As quatro geometrias típicas para cinco telescópios, mostrando em particular as nove soluções numeradas da Figura 101.

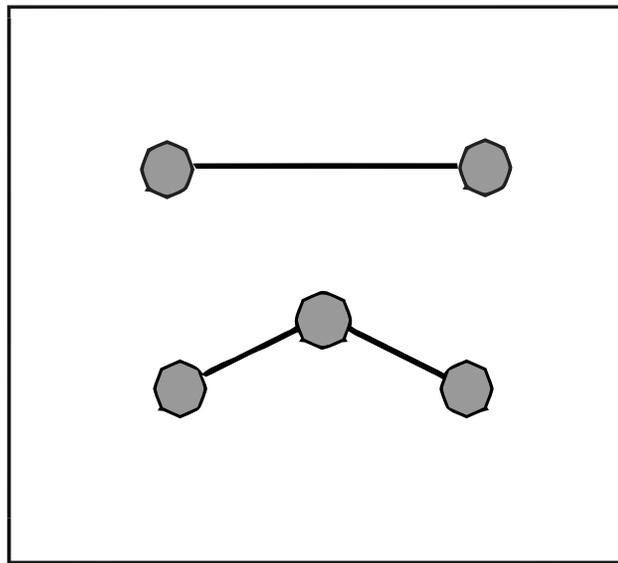


Figura 103 – Conclusão do caso de cinco telescópios, mostrando uma geometria intermediária entre o pentágono e o arranjo formado por duas linhas paralelas.

6.2.2.4 Caso: 6 telescópios

Para seis telescópios, novamente foi possível identificar geometrias típicas na fronteira de Pareto, como mostra a Figura 104. As soluções foram divididas em três grupos, a menos da solução espúria com todos os telescópios contidos em uma pequena região com dimensões $100\text{ m} \times 100\text{ m}$.

Cerca de 62 % dos arranjos possuem uma geometria próxima a um pentágono com um telescópio no centro. Os arranjos “1”, “6” e “8” são exemplos desse caso, como mostra a Figura 105. A escala de separação entre os telescópios diminui à medida que a área efetiva interna decresce.

Cerca de 24 % dos arranjos possuem uma geometria com uma linha na região central. Os arranjos “2”, “3” e “4” são exemplos desse caso. De fato, a solução “3” pode ser vista como uma transição entre as geometrias “2” e “4”. Dois arranjos obtidos, ou cerca de 9 % dos casos, possuem a forma de um pentágono com dois telescópios ocupando posições próximas. A solução “7” é um exemplo. Não encontramos geometrias em forma de hexágonos.

Quanto às métricas calculadas também na área externa, os arranjos “5” e “6” têm um bom compromisso entre ambas as métricas tanto na área interna quanto na área externa, uma vez que se localizam na metade da fronteira de Pareto - que é aproximadamente linear nesse caso.

A Figura 106 conclui o caso de seis telescópios. Pela Figura 105, a tendência geral para as geometrias é um arranjo formado por dois triângulos, como ilustra a Figura 106.

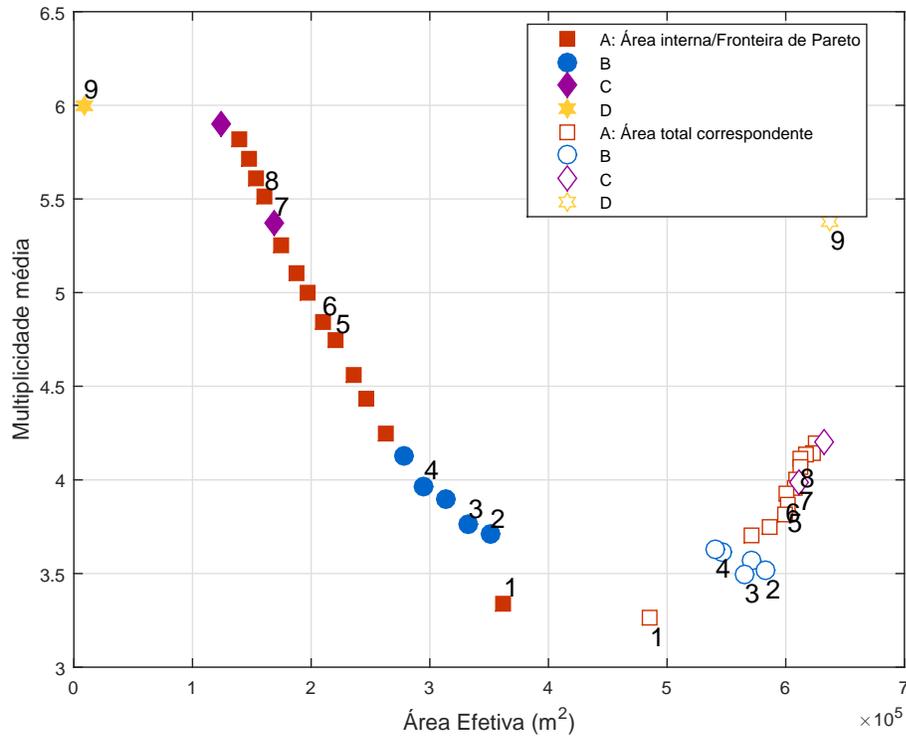


Figura 104 – Fronteira de Pareto para a área efetiva interna e multiplicidade média para 6 telescópios médios observando eventos de 1 TeV. As geometrias semelhantes foram agrupadas por letras e mostradas na Figura 105. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto.

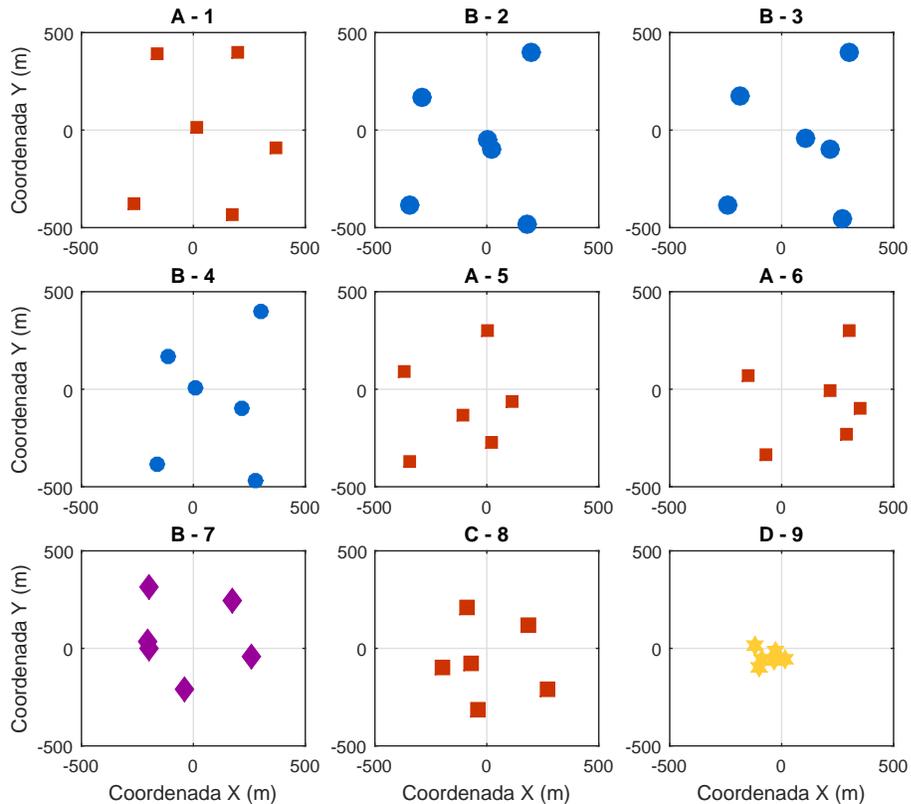


Figura 105 – Geometrias para as soluções marcadas com as letras na Figura 104.

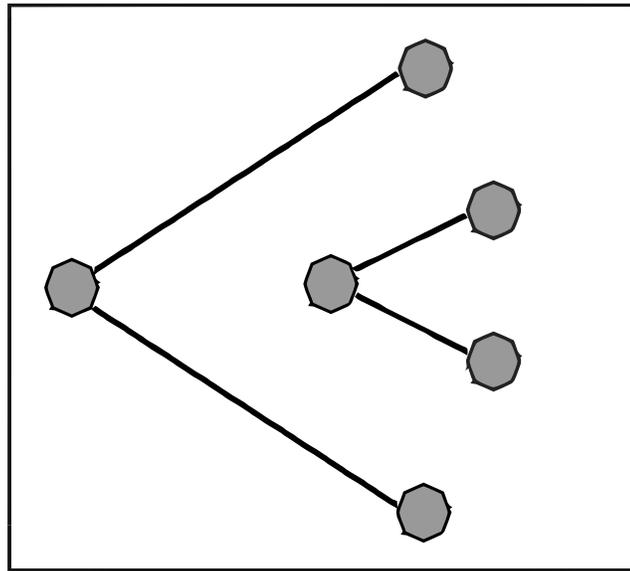


Figura 106 – Conclusão do caso de seis telescópios, mostrando uma geometria composta por dois triângulos.

6.2.3 Um Arranjo com 9 Telescópios

Para nove telescópios dispostos em uma área igual a $1000\text{ m} \times 1000\text{ m}$, o algoritmo forneceu 29 soluções distintas e não dominadas em uma população com 44 indivíduos. A Figura 107 mostra a fronteira de Pareto aproximadamente linear obtida nesse caso.

A Figura 108 mostra as correspondentes áreas totais dos arranjos. Duas soluções para o problema podem estar próximas na fronteira de Pareto da Figura 107, porém estarem relativamente afastadas na Figura 108, como, por exemplo, os arranjos “1” e “2”, “11” e “12” ou “22” e “23”.

Todos os arranjos obtidos são mostrados nas Figuras 109, 110 e 111. A conclusão sobre a tendência das geometrias a partir de um exercício visual é mostrada na Figura 112.

A maior área efetiva interna encontrada foi de $6,25 \cdot 10^5\text{ m}^2$, que é igual a 7,1 vezes a área interna do triângulo ótimo - calculada na seção 6.2.2.1. A geometria encontrada é o arranjo “1”, que em relação à área interna é portanto equivalente à justaposição de sete triângulos. Porém, o arranjo “1” possui multiplicidade média na área interna um pouco maior que 4, enquanto que a justaposição tem multiplicidade menor, igual a três.

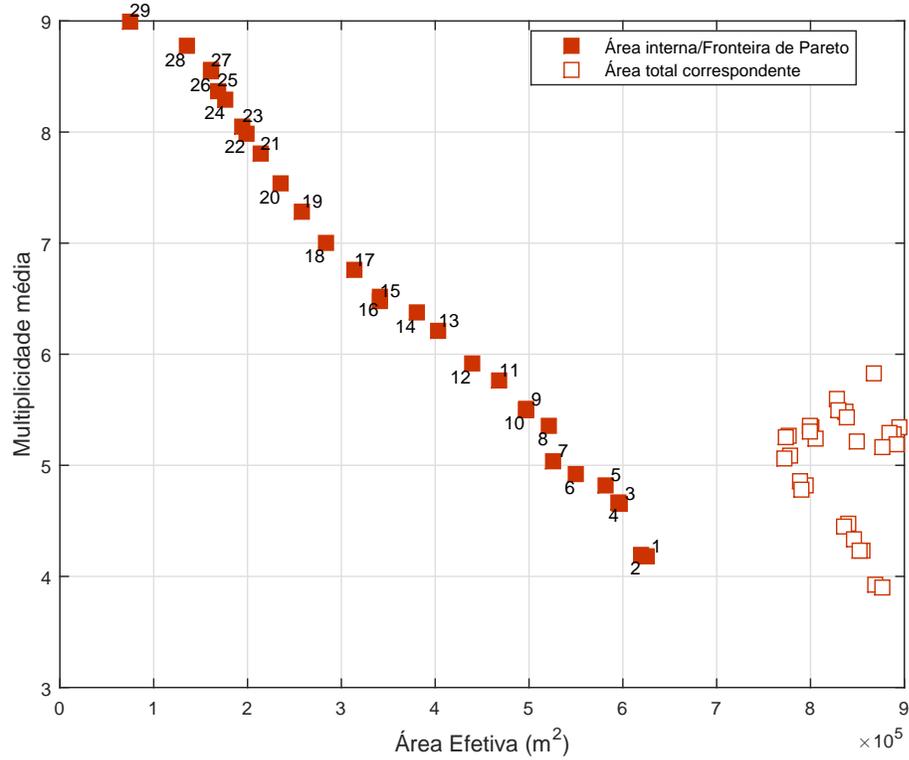


Figura 107 – Fronteira de Pareto para a energia de 1 TeV no caso de um arranjo com nove telescópios médios. A Figura também mostra a área efetiva total e a correspondente multiplicidade para as soluções encontradas na fronteira de Pareto. A Figura 108 mostra em detalhe as áreas totais.

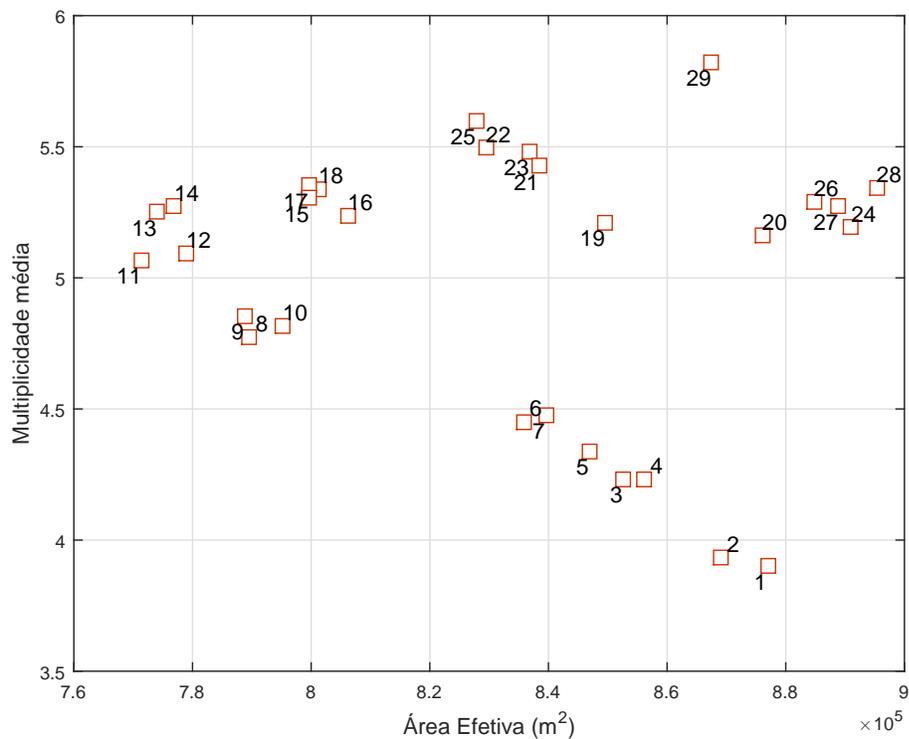


Figura 108 – Área efetiva total e multiplicidade para as geometrias da Figura 107.

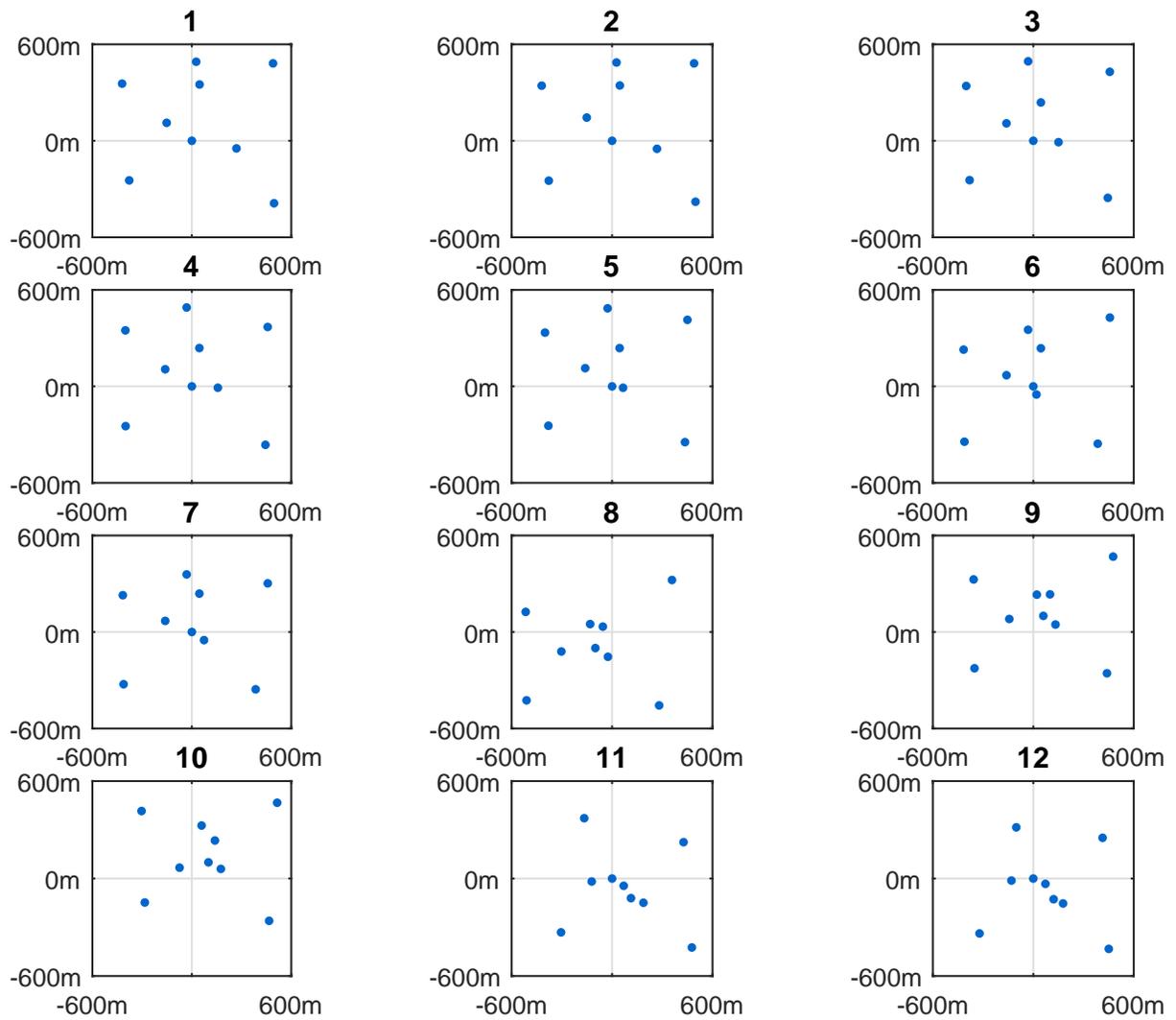


Figura 109 – Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.

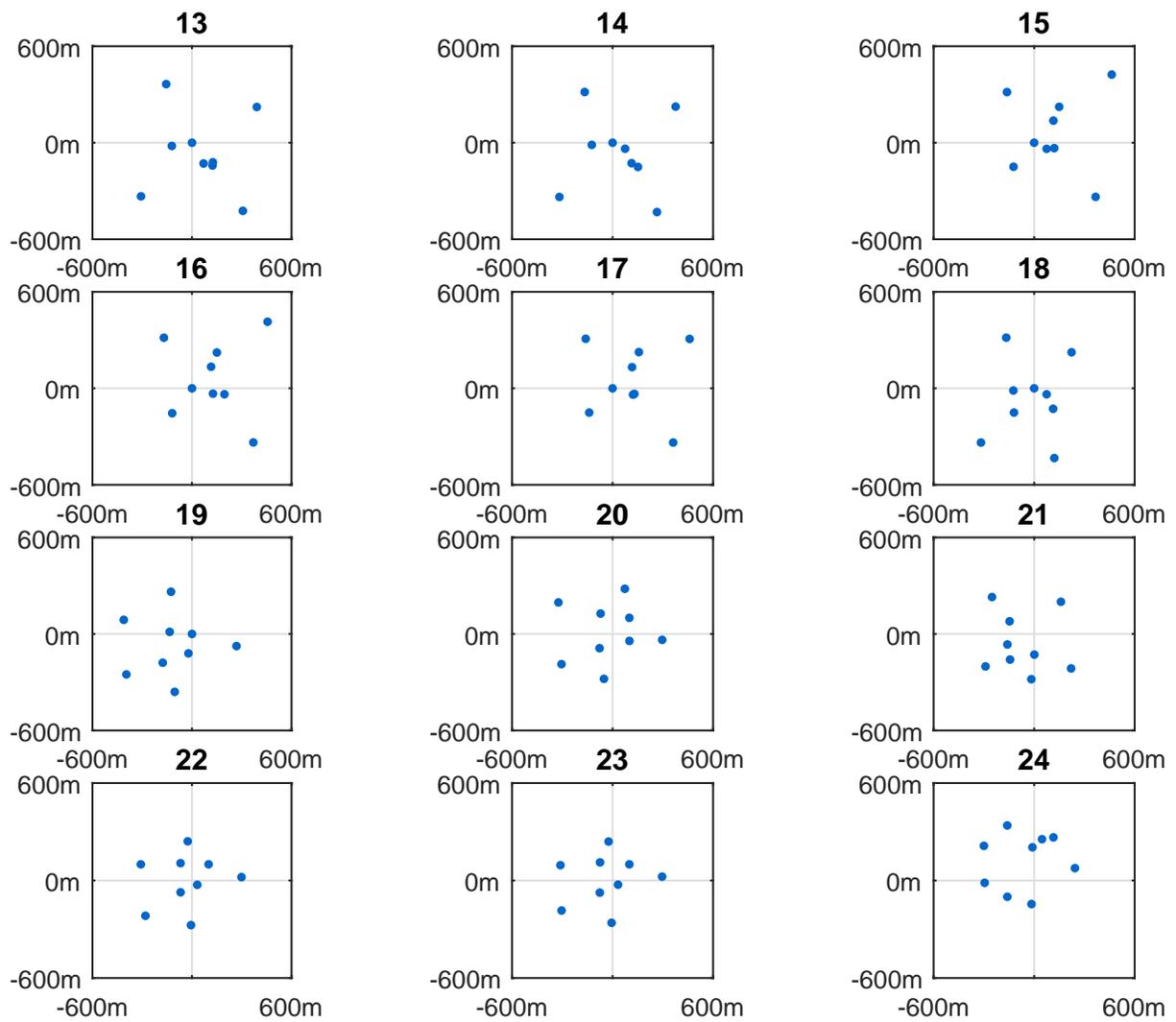


Figura 110 – Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.

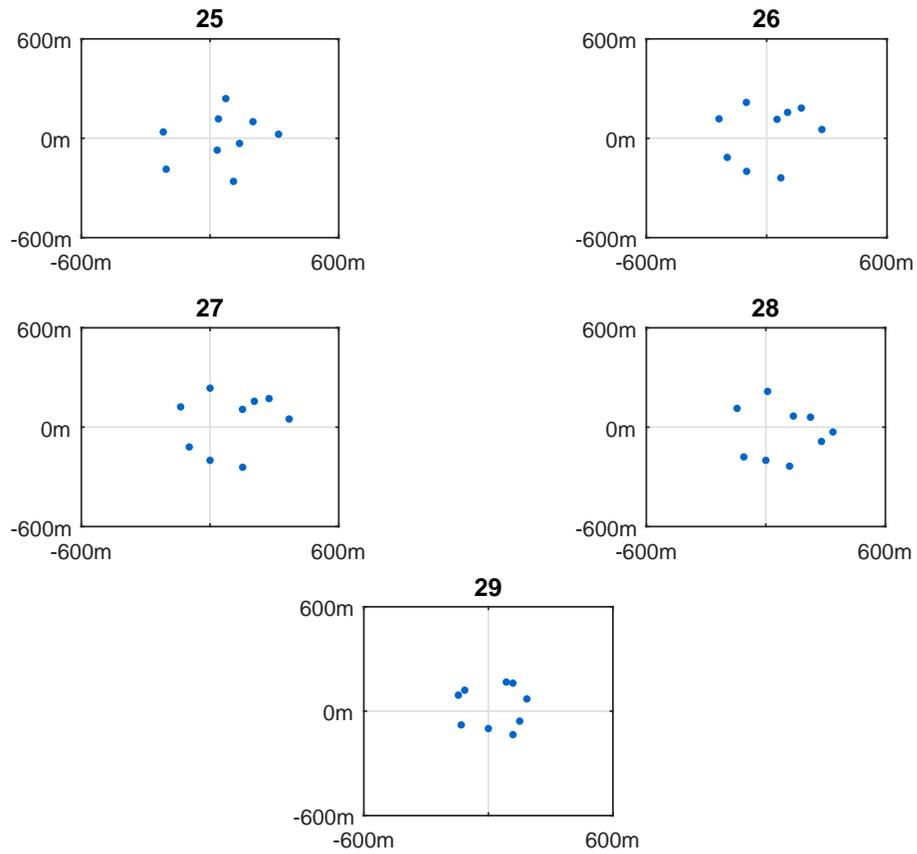


Figura 111 – Arranjos da fronteira de Pareto para nove telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A numeração corresponde aos pontos da Figura 107.

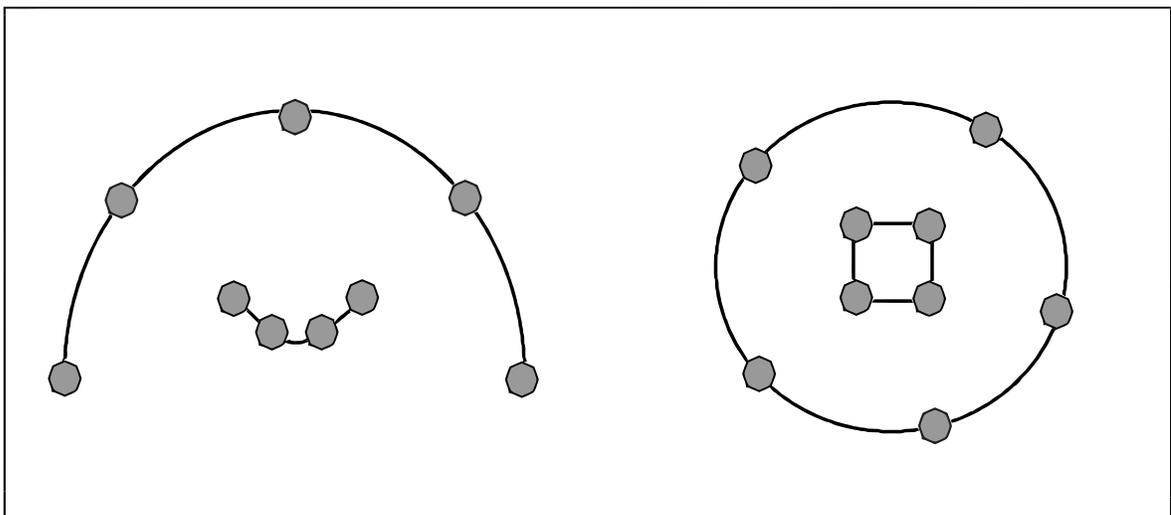


Figura 112 – As duas tendências encontradas para os arranjos com nove telescópios.

6.3 Otimização com as Métricas Completas

Todas as fronteiras de Pareto a partir da seção 6.3.1 serão obtidas com as métricas para a área efetiva A_{ef} , multiplicidade média $\langle M \rangle$, resolução angular $\langle \Theta \rangle$ e para a resolução em energia $\langle L \rangle$ simultaneamente. A Tabela 5 resume os casos a serem analisados e os parâmetros do algoritmo utilizados. Em geral, a obtenção de muitas soluções na fronteira de Pareto pode dificultar o usuário a escolher uma, mas aqui nosso objetivo é apenas procurar padrões entre as métricas e as configurações dos arranjos.

Tabela 5 – Parâmetros do algoritmo em cada um dos I-V casos. É indicado o número de telescópios utilizado, seu tipo e a energia para qual o arranjo foi otimizado. Também é mostrado o número p de espaçamentos entre os pontos de referência no espaço de objetivos e o tamanho da população, junto com o número de indivíduos que terminaram o algoritmo como distintos e não dominados. A dimensão do espaço de soluções também é indicada.

	Número	Tipo	Energia	p	População	Não dominados	Dimensão
I	3	Médio	1 TeV	6	66	39	3
II	3	Pequeno	1 TeV	15	136	102	3
III	3	Pequeno	10 TeV	15	136	60	3
IV	3	Pequeno	1 TeV e 10 TeV	4	126	73	6
V	4	Pequeno	1 TeV e 10 TeV	3	70	24	8

6.3.1 3 Telescópios

6.3.1.1 Caso I: Arranjos homogêneos - 1 TeV

Telescópios Médios

A Figura 113 mostra a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV. A Figura 114 é outra representação possível para a fronteira de Pareto. As seis geometrias correspondentes às soluções com os melhores valores para cada métrica são mostradas nas Figuras 115, 116 e 117.

Pela Figura 115, os arranjos com maior área efetiva são aqueles com os telescópios em posições próximas. Essa característica favorece a resolução em energia - porque a relativamente grande área externa de observação possui as menores flutuações de fótons Cherenkov -, porém piora a resolução angular - pelo baixo valor do ângulo estéreo médio de observação.

Pela Figura 114, os arranjos com os menores valores para a métrica $\langle L \rangle$ possuem as menores áreas efetivas. Na Figura 117, o arranjo L6 possui a maior área efetiva, porém ele possui dois telescópios na mesma posição, o que degrada o valor da métrica Θ . Os arranjos L1, L3 e L6

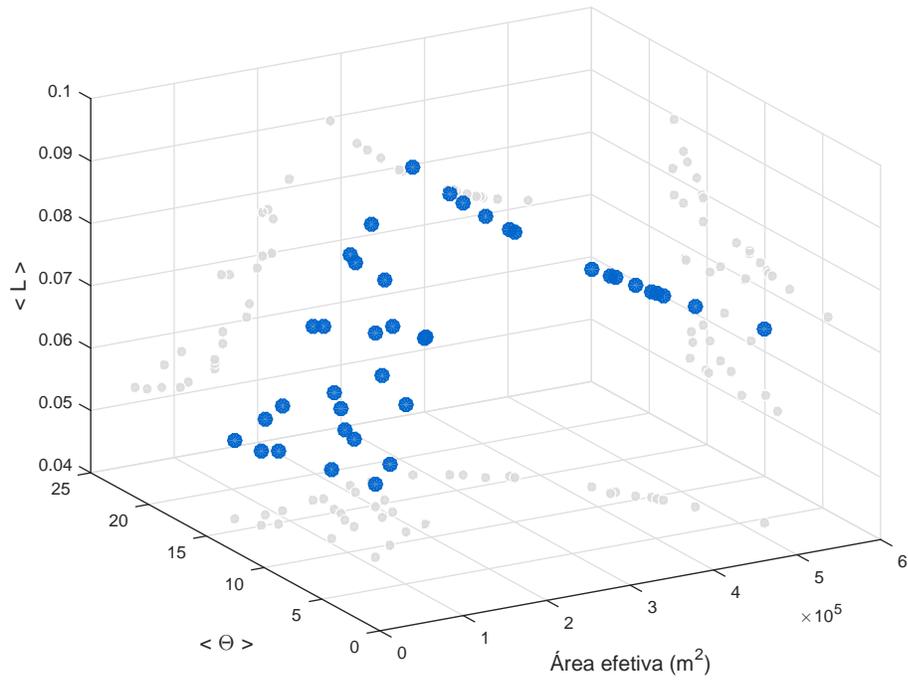


Figura 113 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

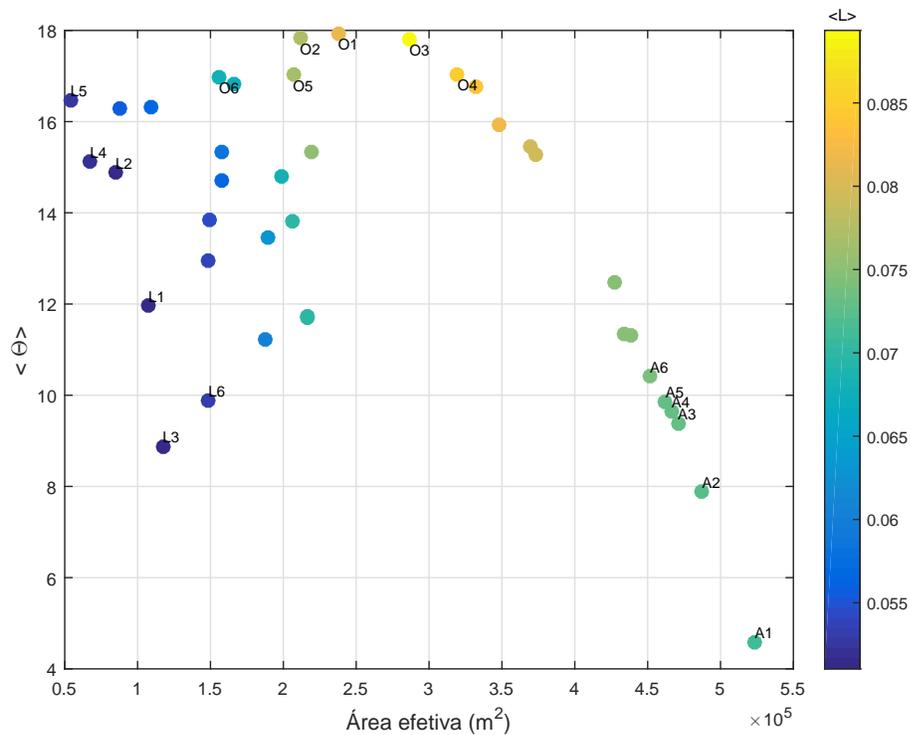


Figura 114 – Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

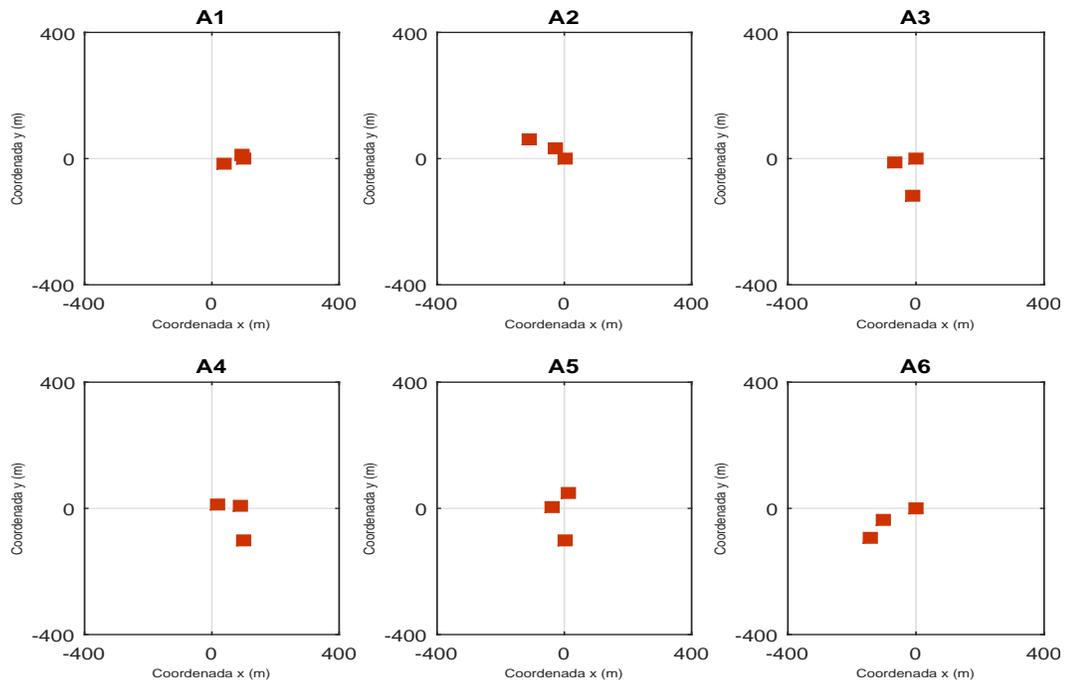


Figura 115 – Os seis arranjos com maior área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 114.

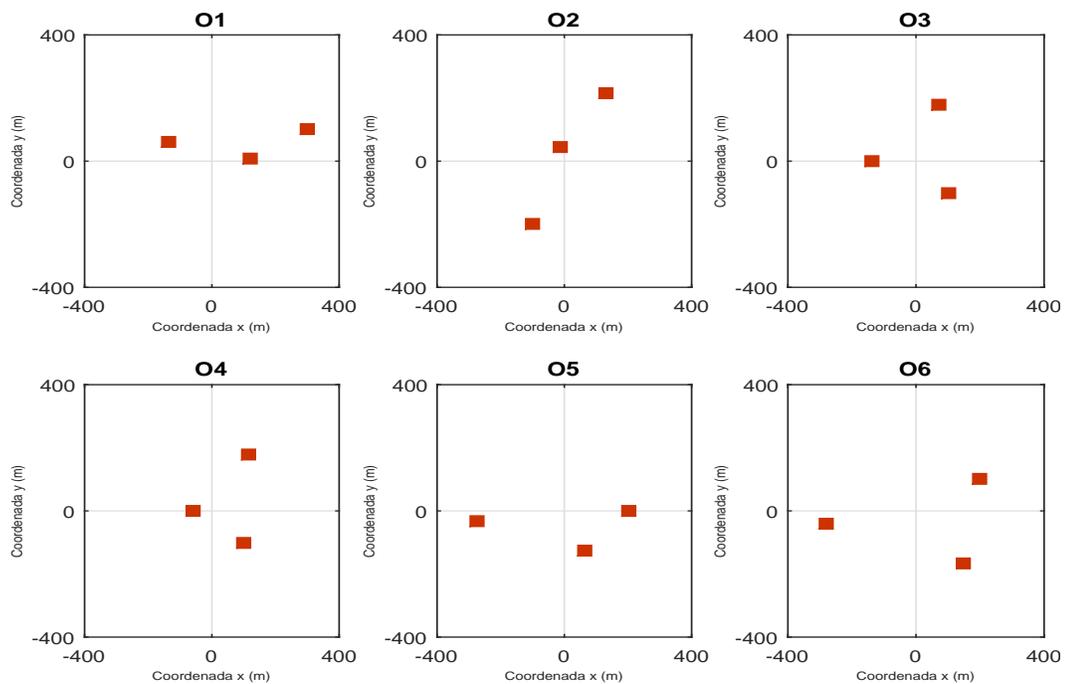


Figura 116 – Os seis arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 114.

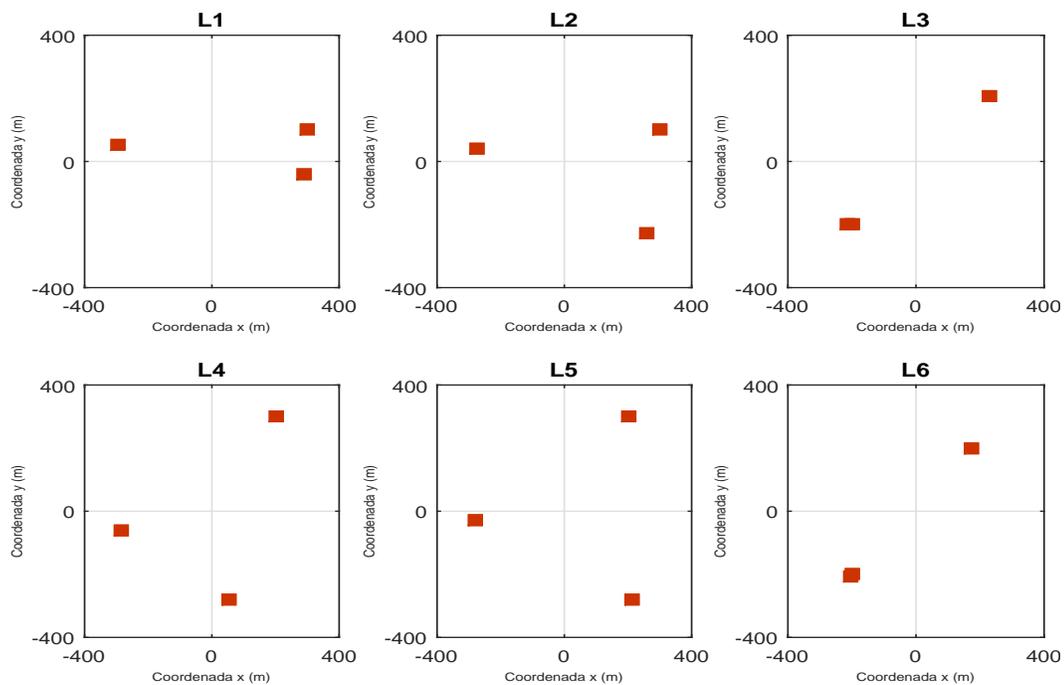


Figura 117 – Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 114.

possuem dois telescópios em posições próximas e, entre os seis desse conjunto, são os que possuem maior área efetiva.

O arranjo L5, por outro lado, possui o melhor valor para Θ entre os seis arranjos desse grupo. Porém, como ele é formado a partir de um triângulo com lados entre 550 m e 580 m, sua área efetiva é desfavorecida. De fato, a área efetiva do arranjo L5 é cerca de uma ordem de grandeza menor que a maior área efetiva encontrada em toda a frente de Pareto. Pela Figura 114, os arranjos com melhor resolução angular possuem as piores resoluções em energia de toda a frente de Pareto. Entre os arranjos da Figura 116, os arranjos O3 e O4, possuem a maior área efetiva. O arranjo O3 consiste em um arranjo em forma de triângulo equilátero com lado aproximadamente 260 m. Porém, o arranjo O3 possui o pior valor para $\langle L \rangle$ entre todas as outras soluções. O arranjo O4, por sua vez, possui dois lados iguais a 260 m e um lado igual a 190 m, sendo um triângulo isósceles. O arranjo O6 é o que possui melhor valor para a métrica $\langle L \rangle$ desse grupo. Ele possui dois lados entre 450 m e 500 m e um lado igual a 270 m. Em comparação com o arranjo O4, ele possui cerca da metade da área efetiva.

Telescópios Pequenos

A Figura 118 mostra a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV.

A Figura 119 é outra representação possível para a fronteira de Pareto. Ela possui as mesmas características gerais da fronteira de Pareto para o caso de telescópios médios, mas possui uma cobertura maior da fronteira, no sentido de que mais pontos foram utilizados.

Novamente, algumas características geométricas do arranjo podem ser localizadas na fronteira de Pareto. Por exemplo, alguns dos arranjos com maiores áreas efetivas são mostrados na Figura 120. São os arranjos com a menor separação entre os telescópios, uma vez que impusemos multiplicidade mínima de *trigger* igual a três. À medida que a separação aumenta, a resolução angular melhora e a resolução em energia degrada.

Os arranjos com melhor resolução em energia possuem as menores áreas efetivas da fronteira de Pareto. A Figura 121 mostra as configurações dos seis arranjos com o menor valor para a métrica $\langle L \rangle$. Pela Figura 121, o arranjo L1 possui o menor valor para a métrica $\langle L \rangle$. Trata-se de uma geometria com dois telescópios em posição coincidente. À medida que a separação entre esses dois telescópios aumenta, o valor da métrica $\langle L \rangle$ aumenta, e o valor da métrica $\langle \Theta \rangle$ aumenta. Por exemplo, o arranjo L6 é um triângulo com dois lados aproximadamente iguais a 410 m e o terceiro lado igual a 265 m.

A Figura 122 mostra as geometrias dos três arranjos com o maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$. O arranjo O1 é um triângulo equilátero com lados aproximadamente iguais a 310 m. O arranjo O2 possui área efetiva um pouco maior, porém maior valor para $\langle L \rangle$; trata-se de um triângulo com lados um pouco menores, cerca de 290 m. O arranjo O3 possui lados maiores, cerca de 350 m. Há pouca variação nos valores das métricas entre os arranjos O1, O2 e O3.

A Figura 123 mostra a fronteira de Pareto caso apenas as duas métricas A_{ef} e $\langle \Theta \rangle$ fossem utilizadas. Os seis arranjos com maior área efetiva possuem espaçamento médio entre os telescópios de 100 m. Os seis arranjos com maior valor para Θ possuem espaçamento entre os telescópios entre 260 m e 320 m: à medida que o espaçamento diminui, a área efetiva aumenta. Os arranjos intermediários possuem espaçamento entre 130 m e 170 m, marcados na Figura 123.

A Figura 124 mostra a fronteira de Pareto caso apenas as duas métricas A_{ef} e $\langle L \rangle$ fossem utilizadas. A principal característica é a ausência na Figura 124 das soluções A1-A6 presentes na Figura 119. O arranjo marcado com o ponto P possui os três telescópios em posições próximas, a menos de 100 m um do outro. Todos os outros arranjos possuem dois telescópios em posições próximas e o espaçamento com relação ao terceiro telescópio diminui à medida que a área efetiva aumenta, variando desde 420 m (arranjo A) até 190 m (arranjo B).

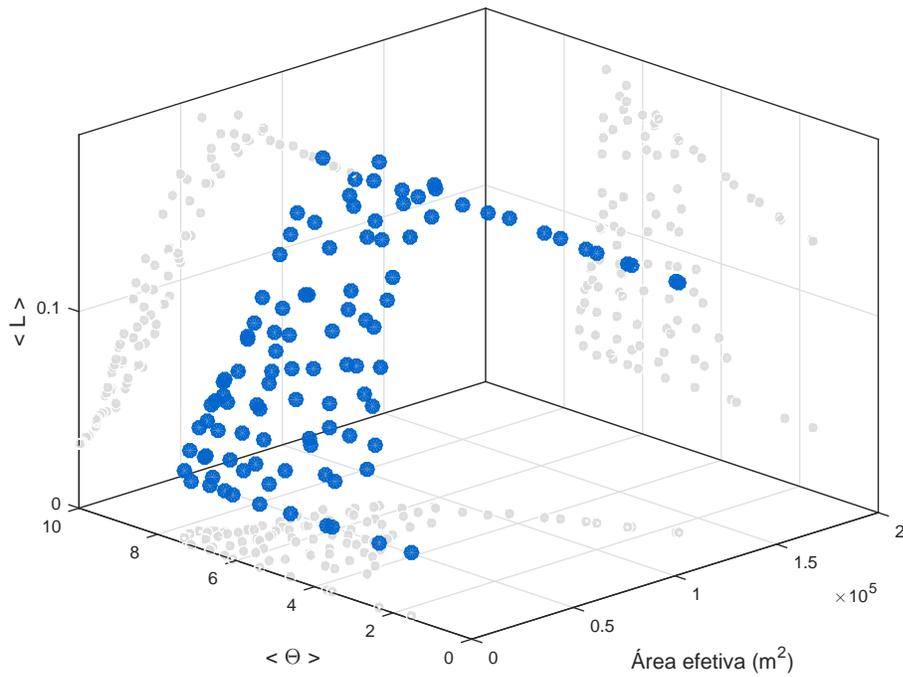


Figura 118 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV.

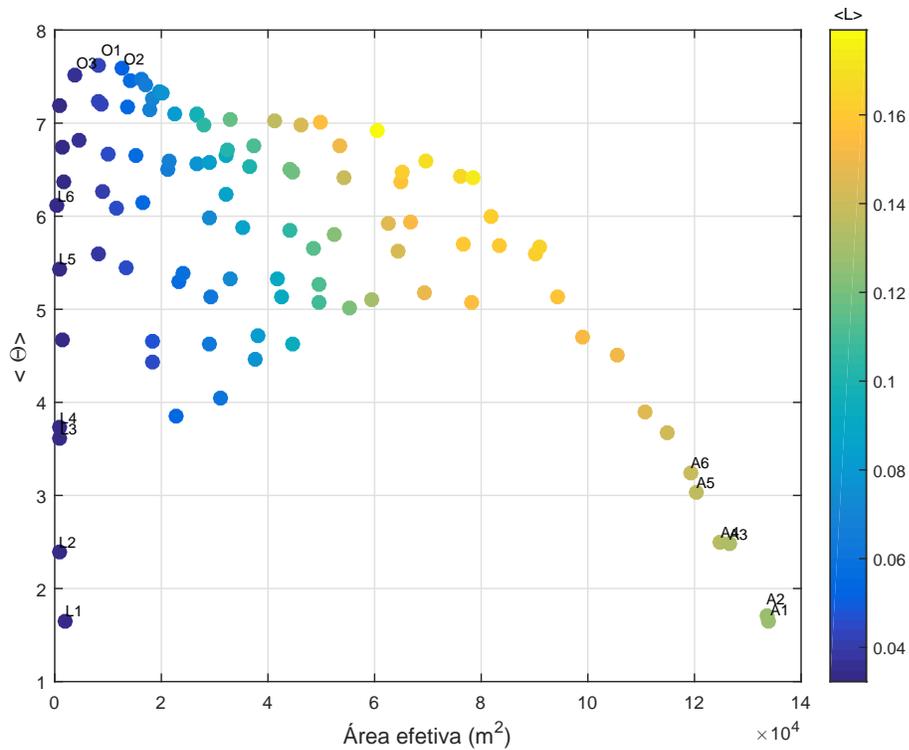


Figura 119 – Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV.

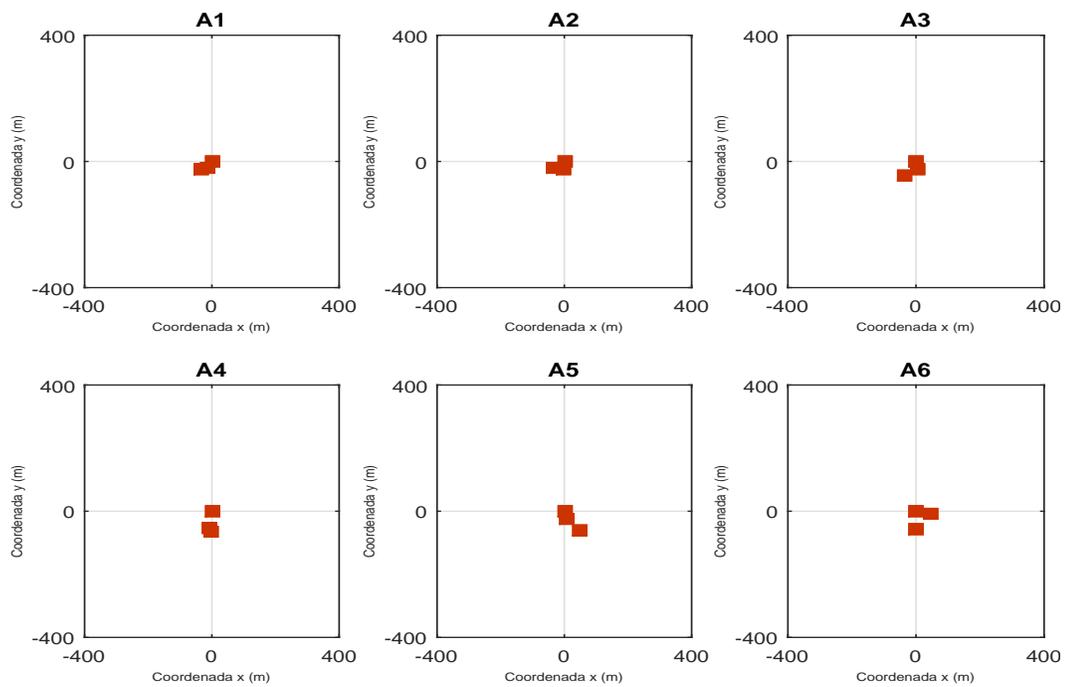


Figura 120 – Os seis arranjos com maior área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 119.

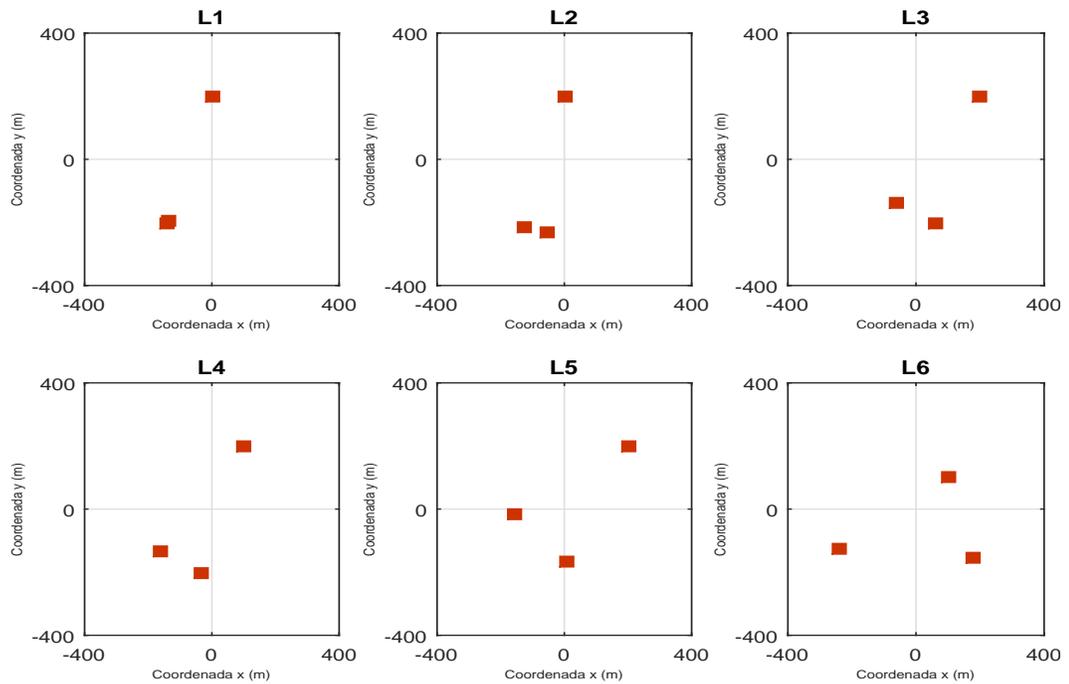


Figura 121 – Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 119.

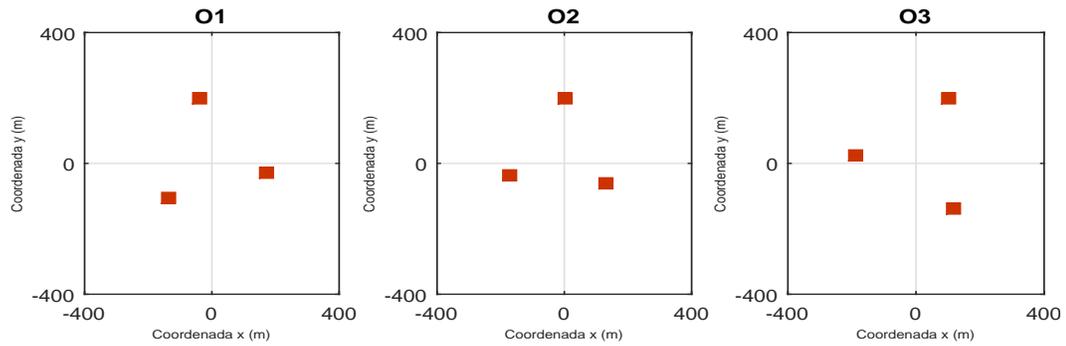


Figura 122 – Os três arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 119.

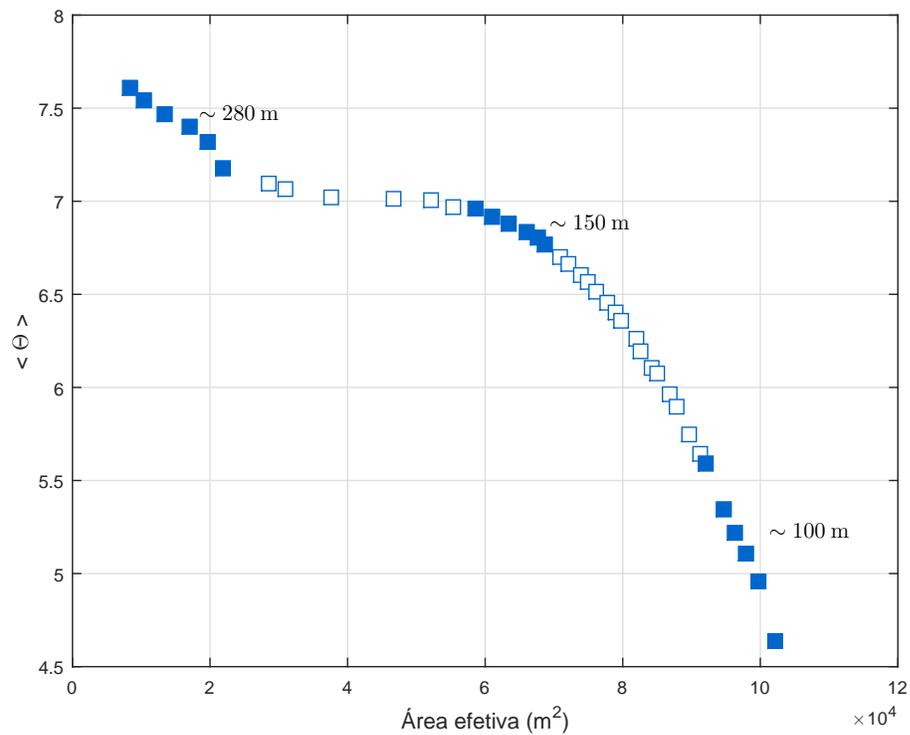


Figura 123 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV; apenas as métricas A_{ef} e $\langle \Theta \rangle$ foram utilizadas.

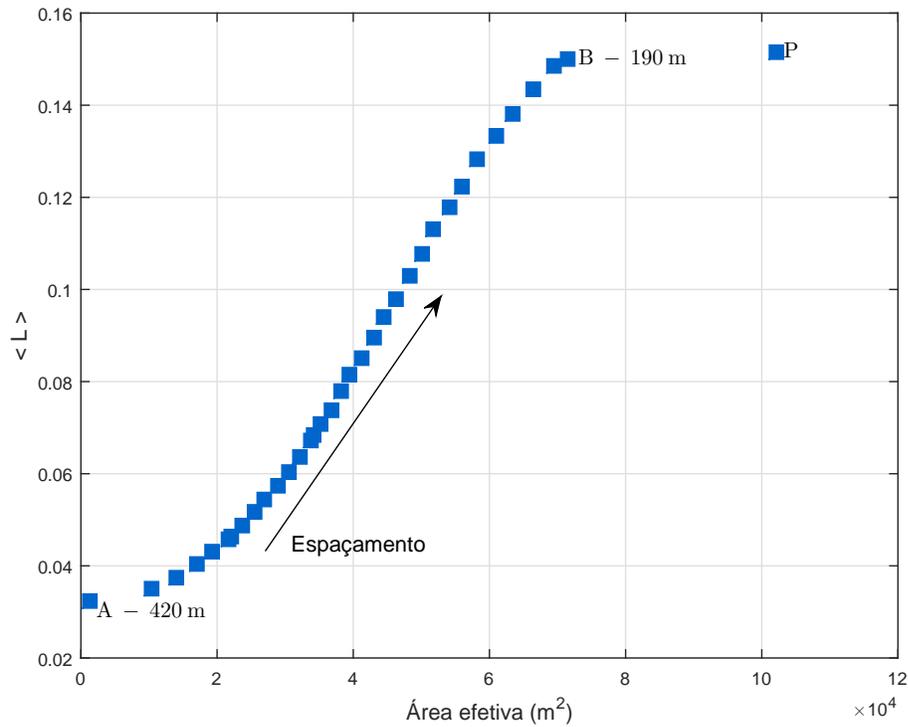


Figura 124 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV; apenas as métricas A_{ef} e $\langle L \rangle$ foram utilizadas.

6.3.1.2 Caso II: Arranjos homogêneos - 10 TeV

Telescópios Pequenos

A Figura 125 mostra a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV. A Figura 126 é outra representação possível para a fronteira de Pareto. A principal diferença da fronteira de Pareto obtida nesse caso é a sua forma de linha, e não de uma superfície, como esperávamos de acordo com a menor degenerescência entre as métricas A_{ef} e $\langle \Theta \rangle$ vista na Figura 67.

A Figura 127 mostra que as seis soluções com maior área efetiva possuem os telescópios em posições próximas, mas pela Figura 126, possuem os valores mais elevados para a métrica $\langle L \rangle$ e os menores valores para Θ . Essa característica também estava presente no caso para a energia de 1 TeV.

A Figura 128 mostra que as seis soluções com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ são em maioria triângulos aproximadamente equiláteros. Por exemplo, o arranjo O1 possui espaçamento entre os telescópios entre 300 m e 310 m, semelhante ao arranjo O1 da Figura 122³. O arranjo O5

³ O valor de aproximadamente 300 m é a separação utilizada entre alguns telescópios pequenos do arranjo proposto em (THE CTA CONSORTIUM, 2017), embora lá tenha sido utilizado um número diferente de telescópios e diferentes valores de separação no mesmo arranjo.

possui um lado igual a 250 m e os outros dois lados iguais a 300 m. O arranjo O6 possui lados entre 260 m e 290 m.

Os arranjos com o menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ são mostrados na Figura 129. Nesse conjunto, o que possui maior área efetiva é o arranjo L3. Trata-se de um triângulo equilátero com lado ~ 220 m. No entanto, o arranjo L3 tem pior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$. Uma opção com melhor valor para $\langle \Theta \rangle$, embora com menor área efetiva, é o arranjo O1. Arranjos com métricas intermediárias entre os arranjos L3 e O1 são os arranjos O5 e L6. O arranjo L6 possui os três lados iguais a 260 m. Nenhum dos seis arranjos desse grupo possuem dois telescópios na mesma posição, característica dos arranjos com telescópios observando eventos com energia de 1 TeV.

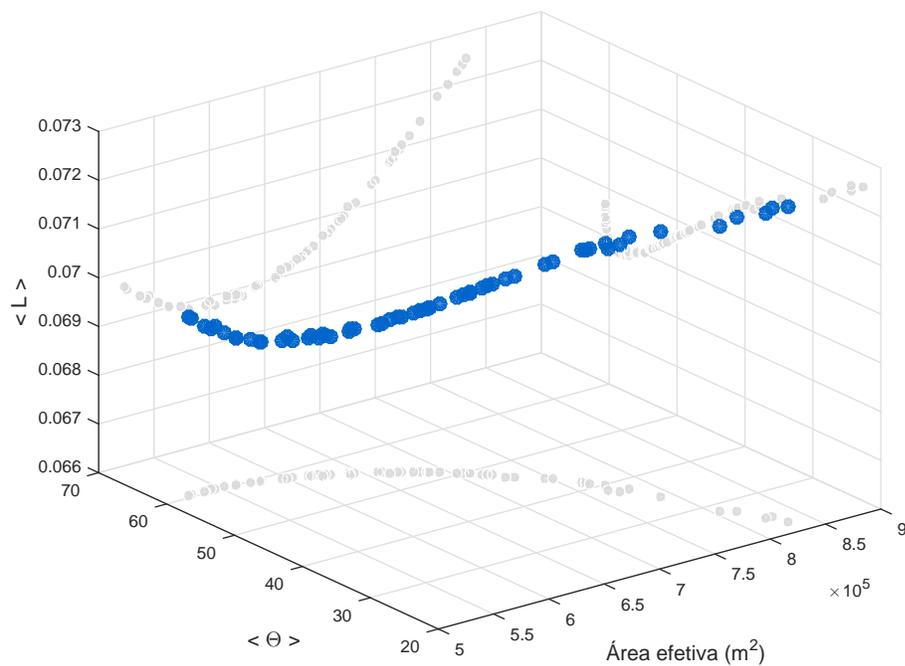


Figura 125 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.

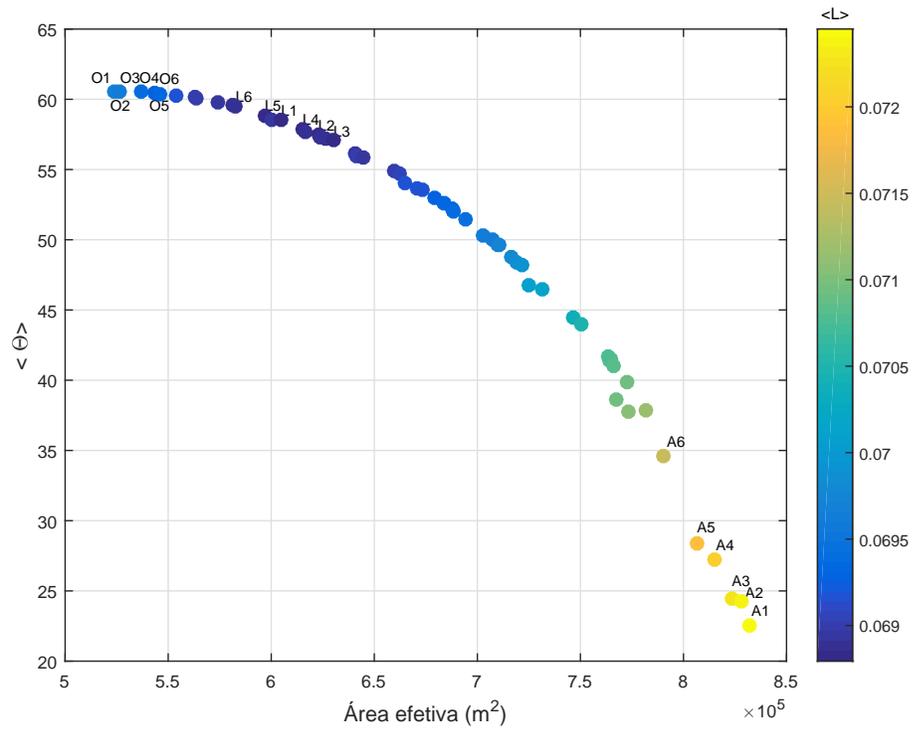


Figura 126 – Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 10 TeV.

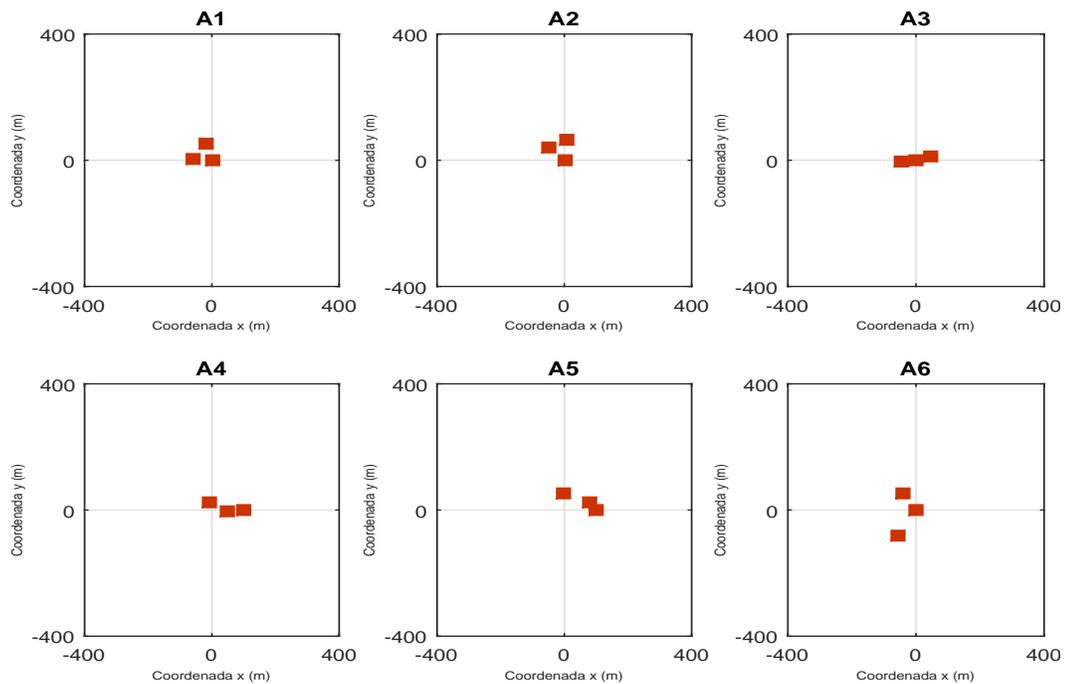


Figura 127 – Os seis arranjos com maior valor para a área efetiva da fronteira de Pareto da Figura 126.

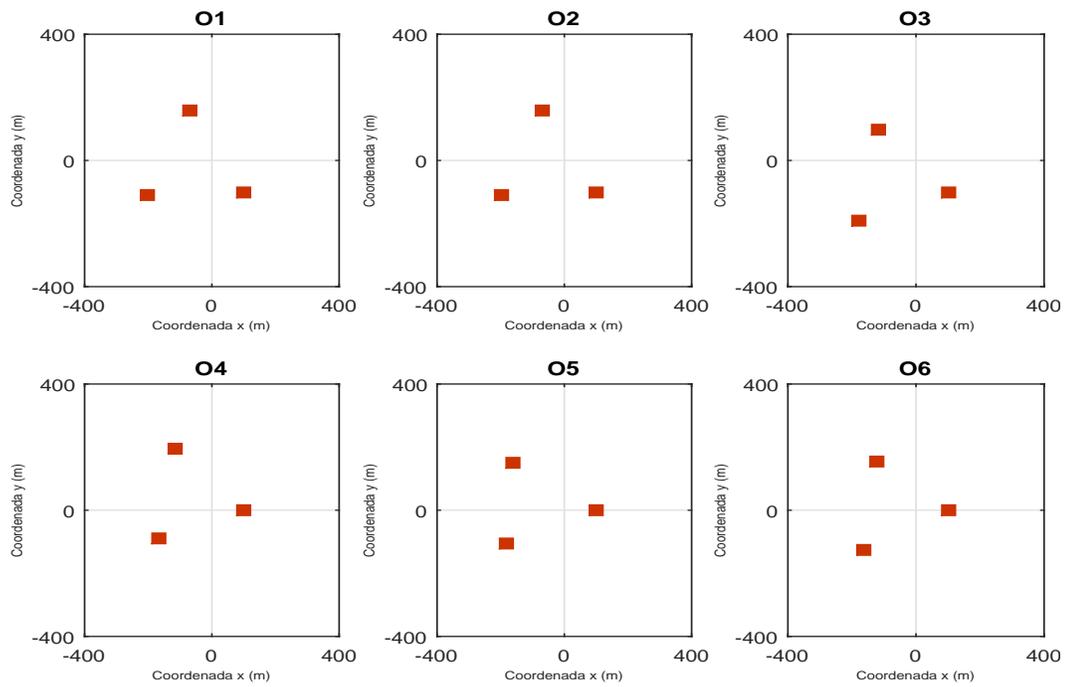


Figura 128 – Os seis arranjos com maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 126.

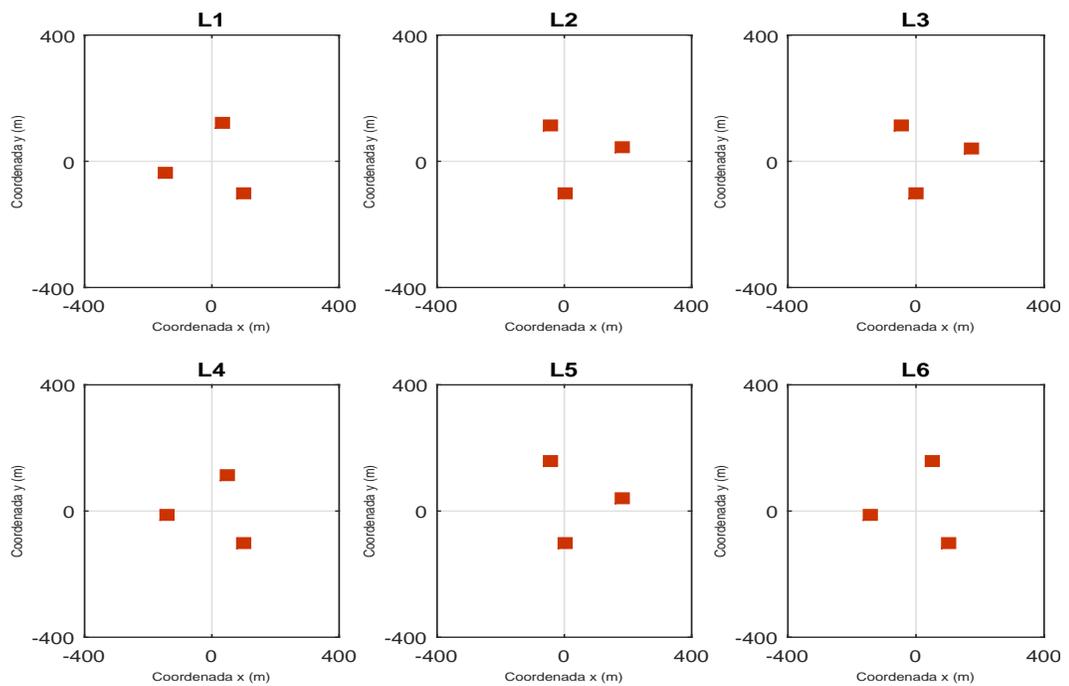


Figura 129 – Os seis arranjos com menor valor para a métrica $\langle L \rangle$ da fronteira de Pareto da Figura 126.

6.3.1.3 Caso III: Arranjos homogêneos - 1 TeV e 10 TeV

Telescópios Pequenos

A Figura 131 mostra a fronteira de Pareto 6-dimensional obtida para um arranjo com telescópios médios observando eventos de 1 TeV e 10 TeV simultaneamente. A fronteira de Pareto, portanto, não é a união das fronteiras obtidas anteriormente.

Alguns arranjos são mostrados nas Figuras 132 e 133. Eles foram ordenados com relação às métricas para a energia de 1 TeV. O arranjo O1 é um triângulo com lados entre 290 m e 300 m. O arranjo O2 possui lados aproximadamente 270 m, 300 m e 340 m. E o arranjo O3 é isósceles, com dois lados medindo 340 m e o terceiro medindo cerca de 380 m. O arranjo com o melhor valor para a métrica $\langle L \rangle$ -1 TeV é o arranjo L1, cuja geometria é um triângulo equilátero com lados entre 370 m e 380 m, portanto maiores que os lados do arranjo O1. O arranjo L2 é irregular, possuindo lados com aproximadamente 210 m, 390 m e 450 m. O arranjo L3, por sua vez, é igual ao arranjo O3.

O arranjo I1 possui o melhor valor para a métrica $\langle L \rangle$ -10 TeV. A separação entre os telescópios nesse caso foi entre 200 m e 220 m. O arranjo I2 é um triângulo irregular, com lados aproximadamente 210 m, 230 m e 280 m. O arranjo I3 é isósceles, com dois lados medindo cerca de 220 m e o terceiro medindo 290 m

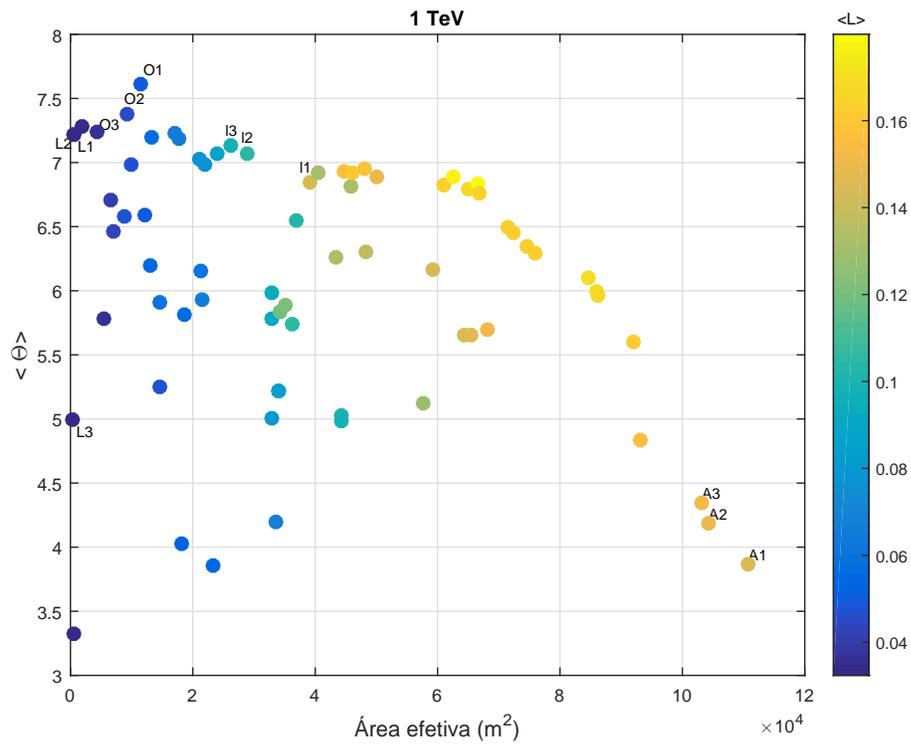


Figura 130 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV e 10 TeV simultaneamente.

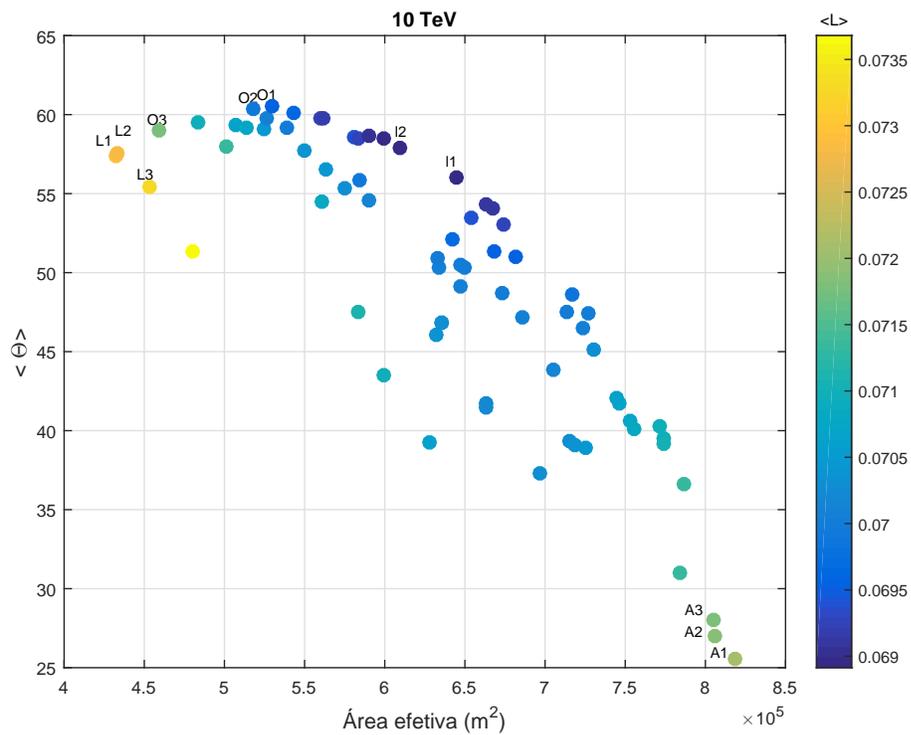


Figura 131 – Fronteira de Pareto obtida para um arranjo com três telescópios pequenos observando eventos de 1 TeV e 10 TeV simultaneamente.

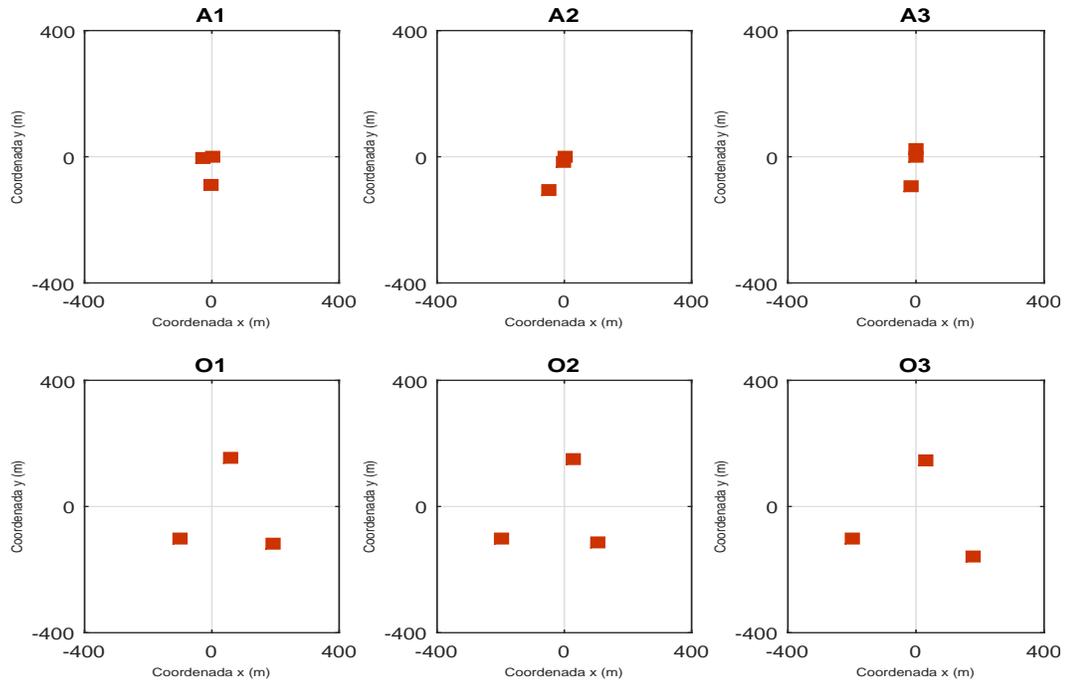


Figura 132 – Alguns arranjos da fronteira de Pareto da Figura 131.

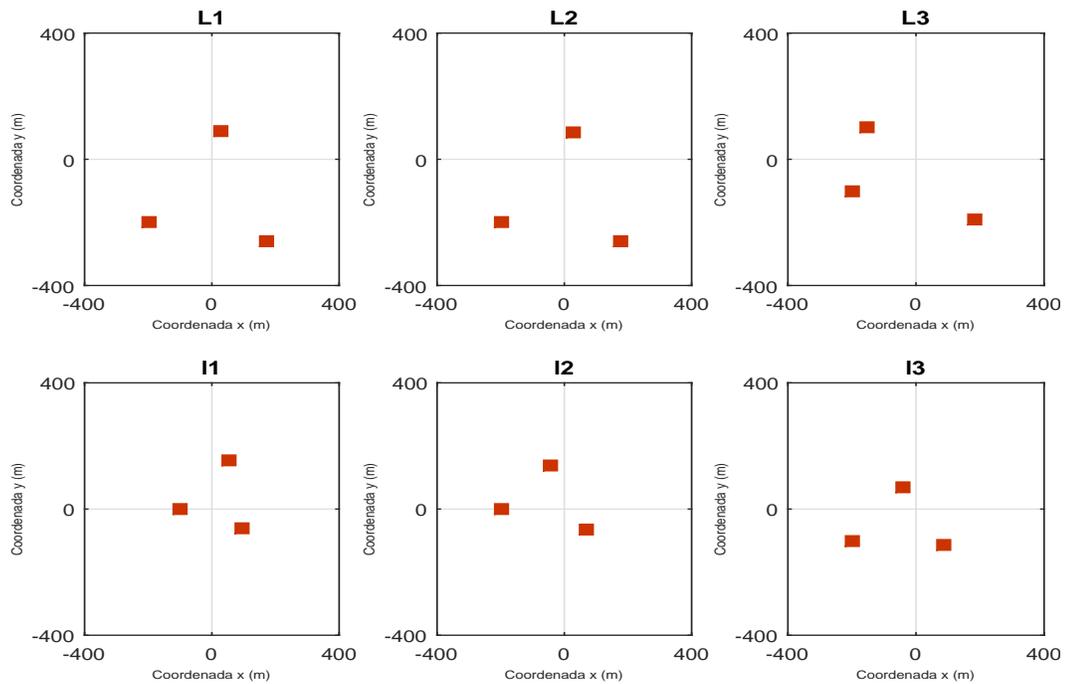


Figura 133 – Alguns arranjos da fronteira de Pareto da Figura 131.

6.3.2 4 Telescópios

O *Cherenkov Telescope Array* (CTA) será o maior observatório de raios gama construído. O CTA operará em dois sítios em ambos os hemisférios: Paranal, no Chile, a 2800 m de altitude e La Palma, Espanha, a 2200 m. O CTA será composto por mais de cem telescópios de três tamanhos diferentes para aumentar a área de detecção e a sensibilidade do detector na faixa de energia desde 20 GeV até 300 TeV em mais de uma ordem de grandeza em relação aos detectores atuais. Nesse contexto, a otimização do arranjo em função das posições relativas dos telescópios compõe uma das estratégias de otimização do observatório, como discutido na seções 2.4 e 2.5.

A Figura 134 mostra a configuração mais atual para o sítio norte do CTA. Ele é composto por quatro telescópios grandes ocupando a região central do arranjo posicionados a distância de 100 m um do outro e quinze telescópios médios quase igualmente espaçados. A correspondente área efetiva em função da energia é mostrada na Figura 135. Nessa situação, a área efetiva foi calculada através de simulações de Monte Carlo detalhadas dos detectores do CTA e de simulações do desenvolvimento do chuveiro na atmosfera. Para isso, foi calculado o produto da área geométrica de observação pela fração de chuveiros simulados nessa área que acionaram os detectores. A área efetiva foi calculada em função da energia verdadeira - e não da reconstruída - dos chuveiros e os eventos passaram por uma análise de separação gama/hádron (MAIER *et al.*, 2017).

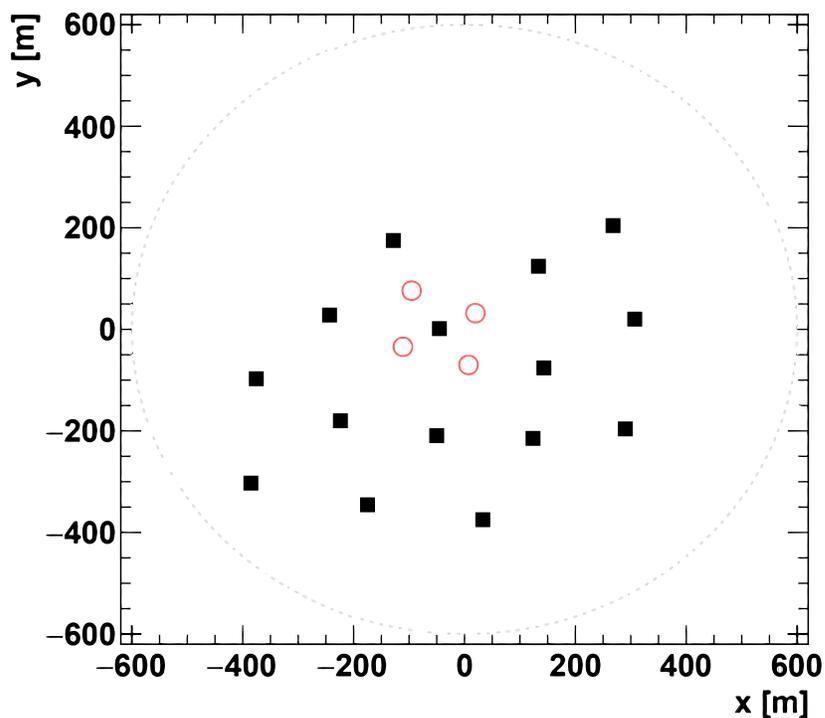


Figura 134 – Arranjo para o CTA-Norte. Os círculos indicam os telescópios grandes e os quadrados indicam os telescópios médios. Adaptada de (MAIER *et al.*, 2017).

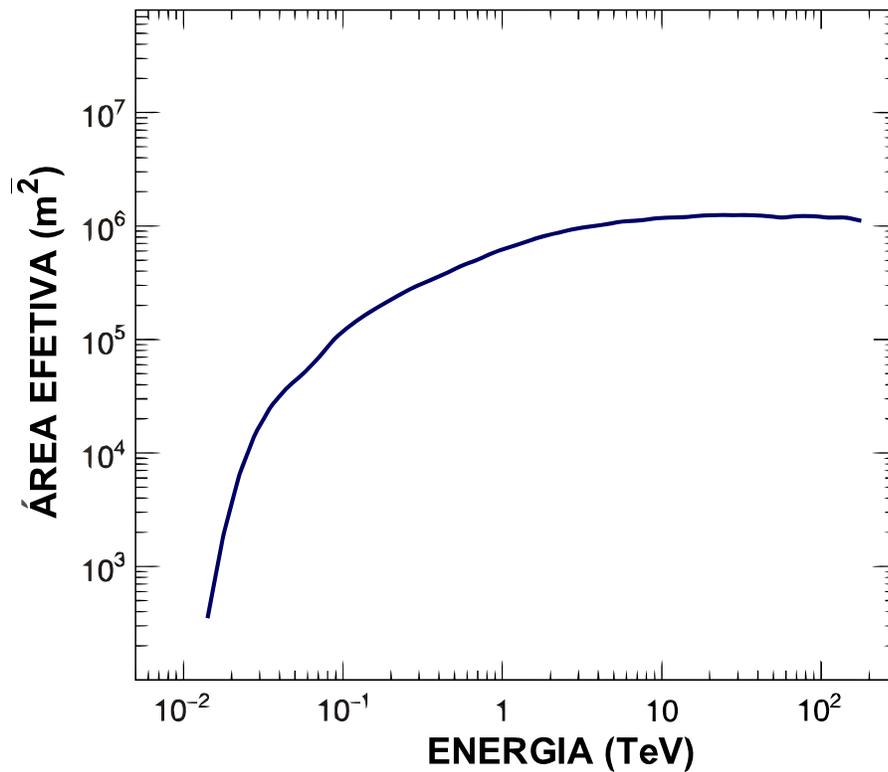


Figura 135 – Área efetiva em função da energia para o CTA-Norte antes de qualquer corte na direção do evento e após os cortes de separação gama/hádron. Adaptada de (CTA, 2017).

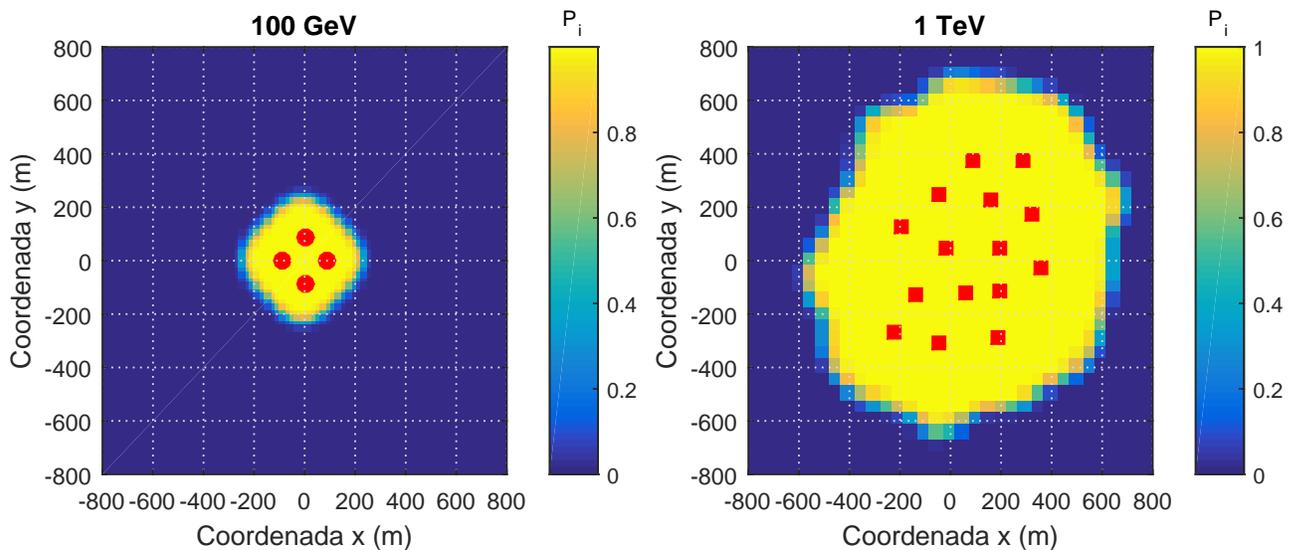


Figura 136 – Probabilidade P_i de detecção em cada ponto dos subarranjos a nível de *trigger*. Os pontos vermelhos indicam as posições dos telescópios. *Esquerda*: Área efetiva para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. O resultado é $1,64 \cdot 10^5$ m² *Direita*: Área efetiva para quinze telescópios médios observando eventos de 1 TeV. O resultado é $1,22 \cdot 10^6$ m².

Usando a equação 4.7, calculamos a área efetiva pós-*trigger* usando o nosso modelo para as curvas de *trigger* dos telescópios, dado na seção 4.2. O resultado é mostrado na Figura 136. Para 100 GeV, o resultado é mais próximo em comparação com a energia de 1 TeV que o resultado apresentado na Figura 135. A Figura 136 mostra as probabilidades de detecção em cada ponto do arranjo em função da energia e do tipo de telescópio. Observamos que pela equação 4.7, a área efetiva total para uma dada energia não é a soma das áreas efetivas dos subarranjos formados pelos diferentes tipos de telescópios. No entanto, aqui usamos essa aproximação devido à diferença na ordem de grandeza das áreas calculadas. A Figura 136 também mostra que a área de observação externa ao arranjo com essa configuração geométrica é maior que a área interna, de modo que também deve ser levada em consideração para o cálculo da performance do arranjo.

6.3.2.1 Resultados para 100 GeV

Para um arranjo com quatro telescópios grandes, otimizamos as quatro métricas A_{ef} , $\langle \Theta \rangle$, $\langle L \rangle$ e $\langle M \rangle$ listadas na seção 6.1. Foi utilizada uma população com tamanho igual a sessenta e os parâmetros do algoritmo foram os mesmos citados na seção 6.1.

Todas as soluções encontradas são não dominadas. Porém, ao comparar duas soluções pelo critério de dominância de Pareto, o tamanho normalizado de alguma melhoria não é levado em consideração, de acordo com as discussões apresentadas nas seções 5.4 e 5.11. Isso dificulta a escolha de uma solução da fronteira de Pareto pelo usuário. Esta é uma característica geral dos problemas com muitos objetivos.

Para contornar essa situação e facilitar a análise, iremos reclassificar as soluções da fronteira de Pareto em níveis de não dominação, porém usando a relação de ε -Dominância definida na seção 5.13. Dessa maneira, desde que passem a ser ε -dominadas, soluções próximas no espaço de objetivos serão eliminadas. A Figura 137 mostra como o número de soluções não dominadas diminui se utilizarmos a relação de ε -Dominância com diferentes valores para os erros ε . O valor de ε é dado em valor relativo das funções objetivo, uma vez que não se comparam grandezas diferentes. Para compor a Figura 137, a normalização das funções se baseou apenas nos valores máximos e mínimos encontrados das soluções não dominadas. Escolhemos $\varepsilon = 5\%$.

A Figura 138 mostra a fronteira de Pareto obtida, evidenciando um plano no espaço de objetivos. A Figura 139 é outra representação para a fronteira de Pareto. É mostrado também na Figura 138 o ponto Q_{100} correspondente a um arranjo com quatro telescópios grandes com um espaçamento de 100 m, portanto similar ao arranjo da Figura 134. A solução ideal, definida na equação 5.11 e portanto não física, também é indicada na Figura 138.

A otimização foi realizada de modo que nenhuma preferência entre os objetivos foi inserida

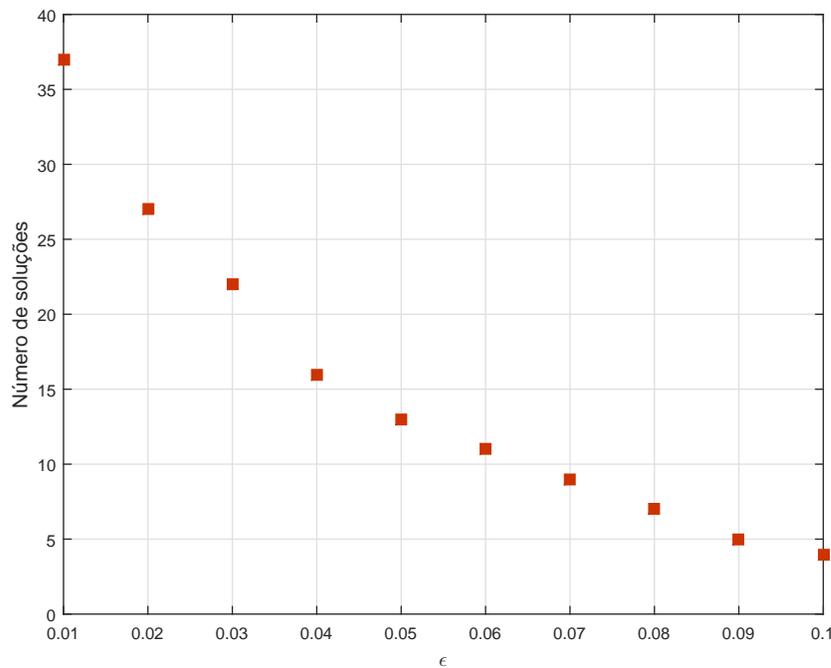


Figura 137 – Número reduzido de soluções para a fronteira de Pareto em função de um erro percentual ϵ nas relações de ϵ -Dominância.

a priori. Além disso, se o nosso objetivo fosse usar o ponto ideal como ponto de referência e encontrar a solução na fronteira de Pareto que mais se aproxima da solução ideal, não precisaríamos de métodos multiobjetivo e haveríamos resolvido um problema de otimização escalar com o uso da equação 5.10. Ainda assim, aplicamos a equação 5.10 para encontrar a menor distância tridimensional das soluções ao ponto ideal. A Figura 139 mostra que o arranjo “5” é o mais próximo, embora também identificamos os arranjos “8” e “6” também próximos ao ponto ideal. A geometria do arranjo “5” e dos demais da Figura 138 podem ser vistas na Figura 140.

Pelas Figuras 138 e 139, há um conflito entre a área efetiva e a métrica $\langle L \rangle$, embora não haja conflito entre as métricas $\langle L \rangle$ e $\langle \Theta \rangle$, pois quando $\langle \Theta \rangle$ aumenta, $\langle L \rangle$ diminui. Os arranjos “1” e “13” são soluções resistentes tal como definido na seção 5.11, possuindo valores ótimos em pelo menos um objetivo da otimização, mas valores que podem ser muito ruins nos demais. Esses arranjos representam as situações de telescópios dispostos ou muito próximos ou muito distantes entre si. Pela Figura 138, a solução “13” possui uma área efetiva reduzida, da ordem de 10^3 m^2 .

Os nossos modelos para as curvas de *trigger* foram dados na seção 4.2. Seja $L = 200 \text{ m}$ a distância para a qual os nossos telescópios grandes detectam com probabilidade 100 %. Além disso, a partir de um espaçamento igual a $3L$ não há coincidência de detecção entre dois telescópios.

Um candidato à solução competitivo com o arranjo Q_{100} é o arranjo “2”. Este possui mesma área efetiva, porém valor mais alto para a métrica $\langle \Theta \rangle$. Ele consiste de um triângulo com lados

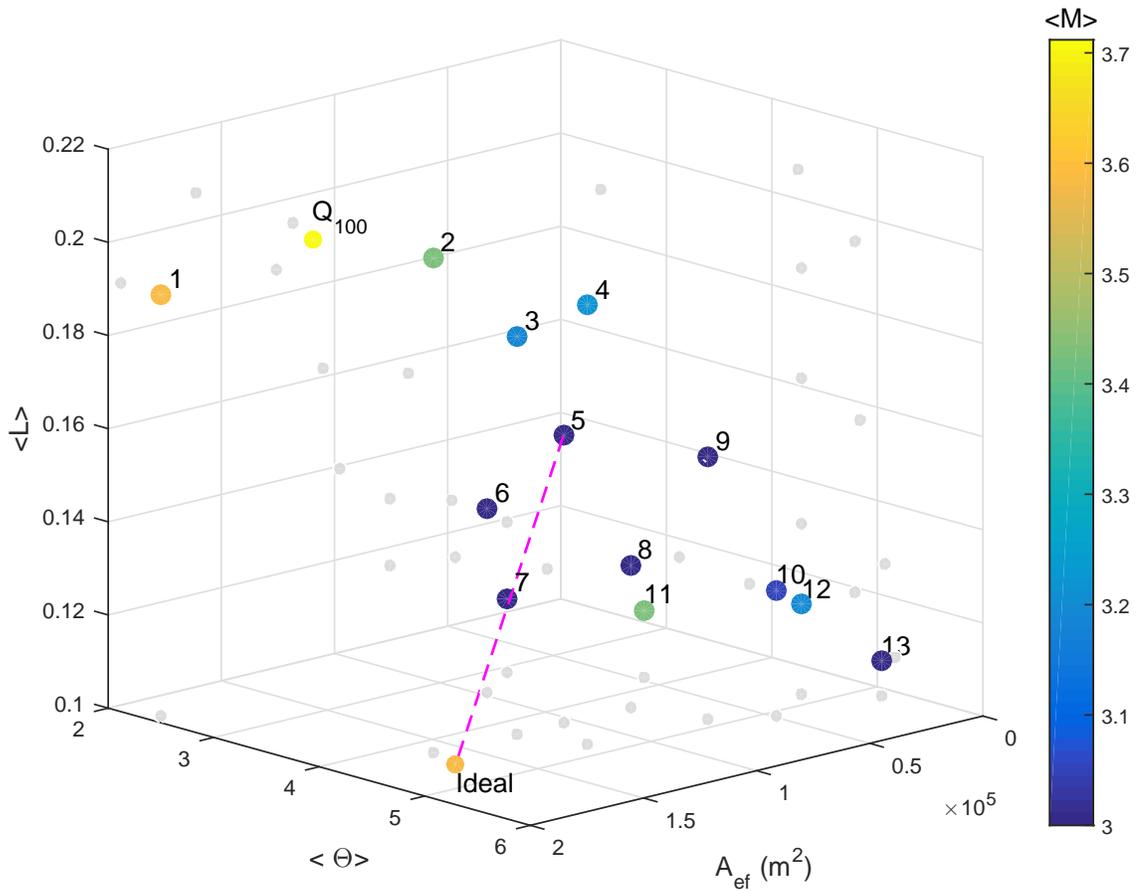


Figura 138 – Fronteira de Pareto para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. A métrica $\langle L \rangle$ é minimizada e as outras são maximizadas. O arranjo “5” é a solução mais próxima do ponto ideal no espaço tridimensional normalizado. O ponto Q_{100} correspondente aos quatro telescópios dispostos em um quadrado de lado 100 m.

medindo $\sim L$ e com um telescópio no centro.

Alternativas ao arranjo “2” são os arranjos “4” e “5”. Embora possuam valores inferiores para a área efetiva, o arranjo “4” é superior na métrica $\langle \Theta \rangle$ e o arranjo “5” é superior na métrica $\langle L \rangle$, em comparação ao arranjo “2”. O arranjo “4” possui a forma de um triângulo isósceles com um espaçamento maior entre os telescópios, mas também tem um telescópio na região central. O arranjo “5” consiste de uma linha com dois telescópios mais próximos no centro dela.

As soluções numeradas de “6” a “12” possuem área efetiva reduzida, da ordem de $10^4 m^2$. Nesse subconjunto, os arranjos “9”, “10” e “12” são superiores na métrica $\langle \Theta \rangle$. Suas geometrias consistem de losangos mais espaçados, com lados medindo $\sim 1,5L$.

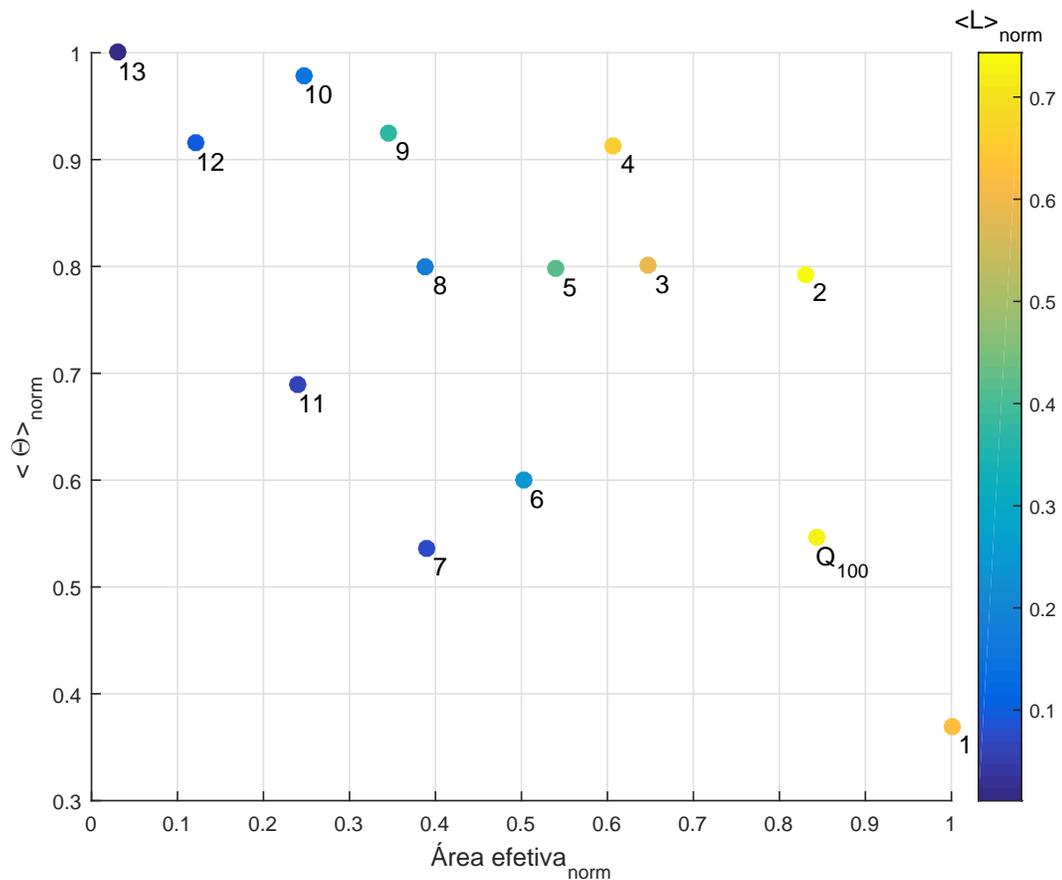


Figura 139 – Outra representação para a fronteira de Pareto obtida para quatro telescópios grandes observando eventos de 100 GeV. As funções objetivo foram normalizadas de acordo com a equação 5.13. A métrica $\langle L \rangle$ foi minimizada, representando menor flutuação na quantidade de fótons Cherenkov, enquanto as outras foram maximizadas.

6.3.2.2 Conclusão

As geometrias encontradas na Figura 140 se dividem de maneira geral em três grupos: losangos, linhas com dois telescópios no centro e triângulos de face centrada. Seguem aplicações de cada um desses casos.

Os telescópios grandes observam principalmente os eventos de menor energia (< 100 GeV), que possuem um fluxo maior. Porém, os raios gama de menor energia geram chuvinhos que produzem menor quantidade de radiação Cherenkov na atmosfera. Isso significa que relativamente aos outros tipos de telescópios, os telescópios grandes devem estar mais próximos uns dos outros, mesmo tendo espelhos maiores. Para observar os eventos de menor energia, eles precisariam ter um campo de visão relativamente maior.

Para a observação de fontes distantes, que emitem raios gama de baixas energia, torna-se inviável o estudo das estruturas morfológicas das fontes, pela maior distância envolvida. Além disso,

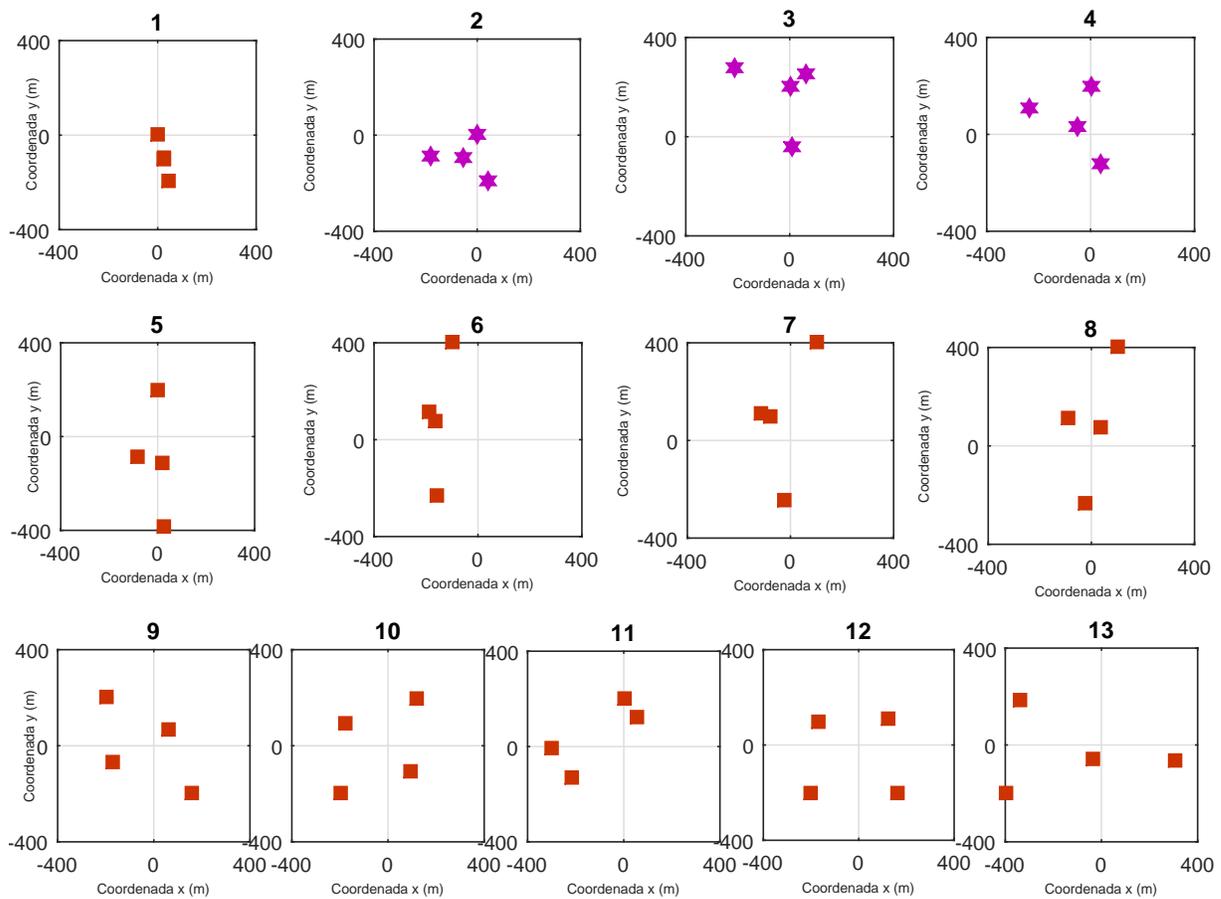


Figura 140 – Arranjos da fronteira de Pareto de acordo com a numeração das Figuras 138 e 139.

a resolução em energia é importante particularmente para o estudo de fontes que apresentam um espectro com corte (HOFMANN *et al.*, 2000b). Isso significa que para os telescópios grandes, em geral a prioridade torna-se a área efetiva. Área efetiva alta também é importante para a observação de transientes.

Para obter boa resolução em energia, mas com menor área efetiva, um losango mais espaçado torna-se um candidato à solução do problema. Dessa maneira, as flutuações de luz perto do eixo do chuveiro são evitadas. Uma alternativa aos losangos largos e que tem maior área efetiva é dispor os telescópios em forma de uma linha espaçada com dois deles na região central. Pelo maior espaçamento, privilegia-se a resolução em energia; pelos dois telescópios próximos, privilegia-se a área efetiva.

O arranjo “2” - e os outros em forma de triângulo com face centrada - tornam-se bons candidatos à solução do problema, porque mantêm a área efetiva alta e possuem valor melhor para a métrica $\langle \Theta \rangle$.

Para explorar a região no espaço de fase ocupada pelos arranjos com geometria de triângulo centrado, calculamos as métricas para alguns arranjos simulados e comparamos o resultado com

aqueles obtidos na Figura 68, que reproduzimos a seguir na Figura 141. Concluimos que para todo losango de dado espaçamento, existe um triângulo de face centrada mais espaçado, porém com melhores valores para as três métricas. Para os espaçamentos maiores que ~ 350 m, esse comportamento não se verifica, porém consistem de soluções na região em que a área efetiva diminui em uma ordem de grandeza. Mesmo que a área interna do triângulo seja menor que a área interna do losango, ao comparar a área total incluindo a externa, as duas podem ser equivalentes, como mostra a Figura 68. Para os telescópios utilizados, que detectam com probabilidade 100 % até 200 m, o arranjo ótimo da Figura 68 é um triângulo com lado entre 200 m e 240 m.

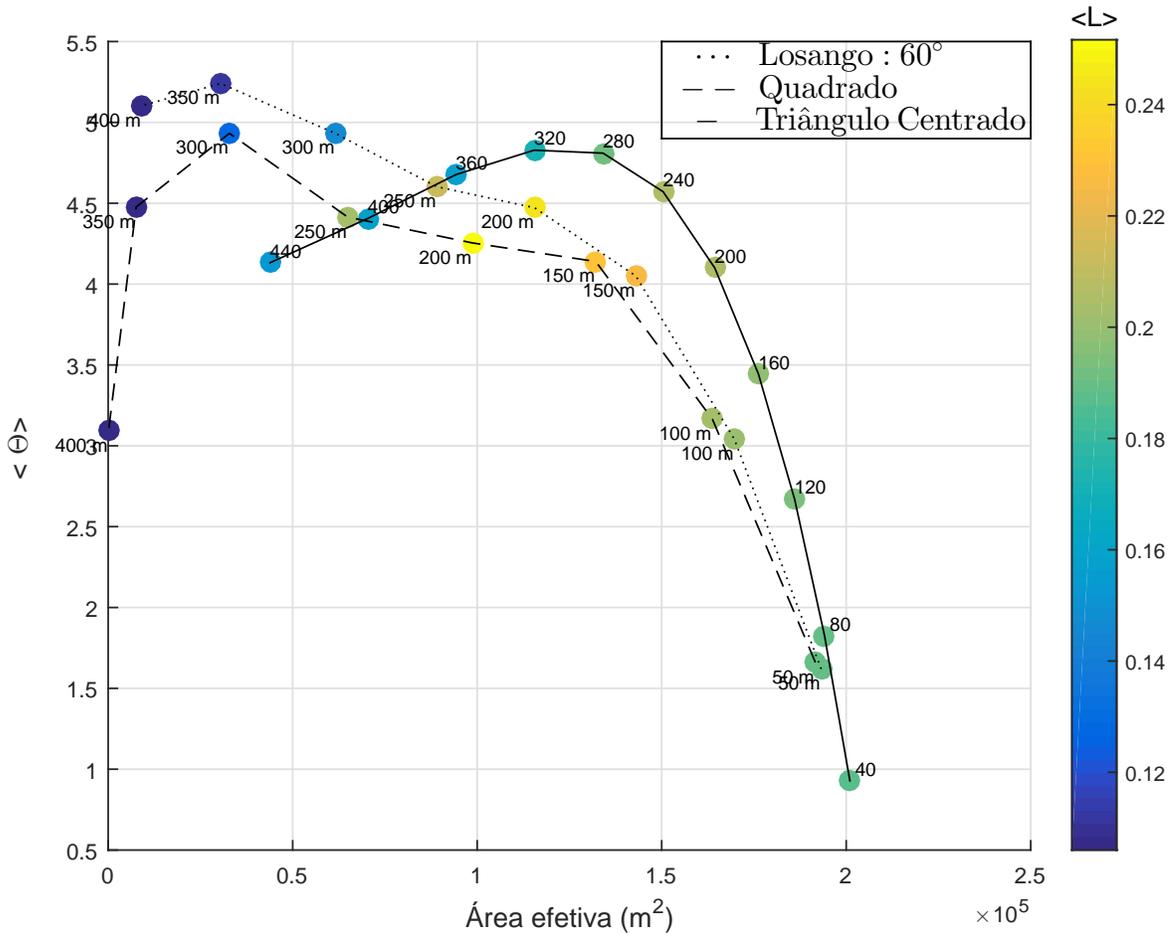


Figura 141 – Valores das métricas para a área efetiva, para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, e para a resolução em energia, $\langle L \rangle$ (a ser minimizada), calculadas para arranjos com diferentes espaçamentos. As geometrias comparadas são triângulos com um telescópio no centro - resultado do algoritmo evolutivo -, e losangos com diferentes valores para o ângulo de abertura: 90° (linhas) e 60° (pontilhados). Foram utilizados telescópios grandes observando eventos de 100 GeV.

CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresentam-se alguns comentários, um sumário dos resultados obtidos e sugestões de trabalhos futuros.

Sumário e Conclusões

A sensibilidade do arranjo de telescópios dada na seção 3.7 é a métrica utilizada para comparar a performance entre os diversos experimentos. Ela pode ser aprimorada de diferentes maneiras. Por exemplo, tanto aumentando a área efetiva do arranjo, quanto melhorando a resolução angular ou a qualidade da separação gama/hádron. No entanto, há um compromisso entre a área efetiva e a resolução angular e a qualidade da separação gama/hádron, sendo que esta melhora à medida que a multiplicidade de observação aumenta (BERNLÖHR *et al.*, 2013a). Um aumento na resolução angular pode ser obtido às custas de diminuir a área efetiva (CTA, 2017). Em (ALEKSIĆ *et al.*, 2016), o compromisso entre resolução em energia e área efetiva é destacado e optou-se pela área efetiva em detrimento da resolução em energia para eventos de altas energias, que possuem um fluxo menor. Por isso, primeiramente nesta tese o que desejamos foi entender como essas diferentes componentes que formam a sensibilidade dependem uma da outra em nível *pós-trigger*.

A importância de entender melhor esse óbvio conflito entre os objetivos advém das motivações astrofísicas para o experimento. Seja investigando o Plano Galáctico, seja identificando a origem da emissão gama nas fontes TeV, descobrindo a origem e os processos de aceleração de raios cósmicos, seja procurando novas classes de fontes de raios gama ou investigando questões cosmológicas, típicas de distâncias suficientemente grandes, é desejável que a performance da rede de telescópios seja otimizada para aquela observação específica. Por exemplo, devido ao menor fluxo para eventos de altíssimas energias (> 10 TeV), o arranjo deve priorizar a taxa de detecção de eventos. Para fontes cosmológicas, a prioridade não é estudar as características morfológicas das

distantes fontes com uma resolução angular ótima. Se alguma fonte possuir um corte no espectro, é de interesse saber com a maior precisão possível a energia em que o corte ocorre, de modo que a resolução em energia é a prioridade nesse caso. Para os eventos de menor energia, os chuveiros hadrônicos são suprimidos pelo próprio método de detecção (ver seção 3.3), de modo que a qualidade da separação gama/hádron não é a preferência. Na realidade, o fundo torna-se composto por elétrons e pela luz de fundo, como apresentado na seção 3.6.

Empregamos uma simulação de Monte Carlo simplificada para o chuveiro eletromagnético que nos permitiu derivar algumas funções heurísticas que traduziram a área efetiva do arranjo, a multiplicidade de observação, a resolução angular e a resolução em energia. Essas três últimas são médias ponderadas pela probabilidade de detecção. Dessa maneira, o aumento da área efetiva de observação, ou seja, a quantidade de eventos observados, não implica o aumento do valor das métricas que usamos para traduzir a qualidade dessa observação.

A exigência mínima no número de fotoelétrons necessários para realizar a reconstrução do chuveiro - seção 4.2 - a melhora na resolução angular de modo a diminuir o ângulo sólido de observação em torno de uma fonte, o corte de eventos que caem suficientemente perto ou longe dos telescópios e o aumento da multiplicidade favorecem a separação gama/hádron já em nível pós-trigger.

Em (ABREU *et al.*, 2011), no Observatório Pierre Auger, no contexto de raios cósmicos, uma curva de probabilidade de detecção semelhante à encontrada por nós é ajustada com uma função diferente da que empregamos aqui. No entanto, para utilizá-la, é necessário privilegiar um ponto qualquer da curva, por exemplo, eles usam o valor $y = 0,5$. Outra diferença é que em (ABREU *et al.*, 2011) o ajuste é uma função definida por partes. Através dela e pelas equações 4.5 e 4.7, calculamos por a análise combinatória a probabilidade de detecção em nível pós-trigger por pelo menos m telescópios considerando todas as combinações possíveis de detecção. O cálculo está descrito no Apêndice A e envolve os números das colunas do triângulo de Pascal, mas com sinais positivo e negativo alternados. Dessa maneira, podemos calcular numericamente a área efetiva de um arranjo de telescópios. Consiste em uma técnica mais rápida que utilizar simulações de chuveiros em uma área A em torno do arranjo para calcular f_N como a razão dos eventos detectados pelo número total dos simulados, de modo que $A_{ef} = f_N \cdot A$ (ALEKSIĆ *et al.*, 2016; CLARK *et al.*, 1961). A nossa expressão fornece resultados a menos de uma ordem de grandeza daqueles apresentados para o CTA-Norte na Figura 135, embora os telescópios envolvidos em ambos os cálculos sejam diferentes e a área efetiva calculada na Figura 135 se refira a eventos após uma análise de separação gama/hádron. A diferença entre os dois resultados mostra a maneira como uma análise de separação gama/hádron diminui a área efetiva do arranjo⁴.

⁴ Em (ALEKSIĆ *et al.*, 2016), para o caso dos dois telescópios MAGIC, à medida que a energia de observação aumenta, a diferença entre as áreas efetivas antes e após a análise diminui.

À medida que o número de telescópios N aumenta, torna-se mais vantajoso para aumentar a área efetiva separar os telescópios em vez de melhorar cada vez mais a detecção nas bordas do arranjo. Para um critério de detecção que considera multiplicidade mínima igual a três, isso ocorre para $N \geq 6$. A multiplicidade média, por outro lado, diminui com a maior separação entre os telescópios. Por exemplo, para nove telescópios e multiplicidade mínima igual a três, a configuração com maior área efetiva e menor multiplicidade consiste em três agrupamentos com três telescópios cada. As soluções com melhor compromisso entre ambas consistem em um arranjo central e telescópios nas bordas com maior separação entre si - seção 6.2.3. Portanto, nesse caso, os chuveiros cujos centros estejam próximos ao centro do arranjo terão maior multiplicidade, resolução angular e de energia (BERNLÖHR *et al.*, 2013a). Em (BERNLÖHR *et al.*, 2013a), aponta-se que essa configuração é boa para a detecção em diferentes energias. Não apenas a escala de separação entre telescópios diminui à medida que a multiplicidade aumenta, mas encontramos nas seções 6.2.2.3 e 6.2.2.4 que a própria geometria do arranjo também pode se alterar. Para nove telescópios, encontramos uma geometria não intuitiva que possui área interna de observação idêntica à justaposição de sete triângulos ótimos e que possui multiplicidade de observação igual a quatro, enquanto que a justaposição possui multiplicidade menor, igual a três. Utilizando apenas as métricas de área efetiva e multiplicidade, na seção 6.2 concluímos que as geometrias encontradas para os arranjos de poucos telescópios convergiram para soluções não físicas, logo devemos acrescentar outros objetivos no algoritmo de otimização além desses dois.

No caso particular da resolução em energia, há diversos erros sistemáticos que contribuem para uma resolução da ordem de 10 %. Uma extensa lista pode ser encontrada em (ALBERT *et al.*, 2008c). Contudo, em última instância, o que limita a resolução em energia - e de modo geral, a performance dos telescópios - são as flutuações entre os chuveiros (HOFMANN, 2006). O posicionamento dos telescópios que otimizam a resolução em energia foi tratado brevemente em (AHARONIAN *et al.*, 1997a; MOHANTY *et al.*, 1998). Em (ACHARYA *et al.*, 2013), indica-se que a distância ótima entre os centros dos chuveiros e os telescópios seja entre 70-150 m, porém não evidencia um procedimento sistemático para garantir isso em arranjos grandes - maiores que a região do Anel Cherenkov. Aqui, a partir da métrica utilizada, indicamos uma maneira de como otimizar a resolução em energia a partir das posições dos telescópios. Para um arranjo pequeno com três telescópios, a relação entre a probabilidade de detecção e as regiões com maiores flutuações de radiação Cherenkov entre chuveiros foi mostrada na Figura 62, tendo como consequência uma forma não intuitiva para o gráfico da Figura 60. Este gráfico é uma previsão nossa, que pode ser futuramente comparada com os resultados obtidos pelos programas que simulam a detecção de chuveiros pelos telescópios (BERNLÖHR, 2008).

Sendo funções da geometria do arranjo, o conflito entre as métricas pode ser visualizado em uma fronteira de Pareto, como, por exemplo, mostram as Figuras 104 e 139. As fronteiras de Pareto

são maneiras de auxiliar o experimentador a decidir o arranjo a ser construído. Devido às várias energias possíveis de observação e com isso os vários objetivos científicos da rede de telescópios, no caso mais geral a fronteira de Pareto torna-se multidimensional. Encontrar fronteiras de Pareto bidimensionais ou multidimensionais são classes distintas de problemas. Esse último caso possui algumas peculiaridades - listadas na seção 5.11 - e não há consenso hoje sobre quais seriam os algoritmos ideais para tratá-lo, se existirem. Nos últimos anos têm surgido diversas abordagens - a maioria empregando algoritmos evolutivos - nessa direção (DEB; JAIN, 2014; LAUMANNNS *et al.*, 2002; HE *et al.*, 2014; PIERRO *et al.*, 2007; SATO *et al.*, 2007; YANG *et al.*, 2013; BATISTA *et al.*, 2011; YUAN *et al.*, 2016; ZHU *et al.*, 2016; KUKKONEN; LAMPINEN, 2007; DRECHSLER *et al.*, 2001; SÜLFLOW *et al.*, 2007; LI *et al.*, 2014; ISHIBUCHI *et al.*, 2008; ADRA; FLEMING, 2011; LI *et al.*, 2015; ZHANG; LI, 2007). Para guiar nossa busca, empregamos o método EliteNSGA-III por sua simplicidade, por não adicionar parâmetros externos e por não modificar o próprio critério de Pareto. Observamos que implementamos o método com algumas adaptações em relação ao original, como explicado na seção 5.12.

Para compreender o conflito entre as métricas e sua relação com a geometria do arranjo, em geral pudemos realizar uma partição da fronteira de Pareto em geometrias ótimas para cada objetivo de otimização. Por exemplo, nas Figuras 123 e 124, em arranjos com três telescópios pequenos, o espaçamento médio entre pares de telescópios se relaciona à posição que dado arranjo ocupa no espaço de objetivos. Além disso, as soluções com maior área efetiva de observação interna ao arranjo com cinco telescópios consistem em quadriláteros - com os telescópios ocupando os vértices - e um telescópio na posição central. Essa foi a mesma geometria utilizada, por exemplo, no experimento HEGRA (PÜHLHOFER *et al.*, 2003). Evidente que a escala de separação dos telescópios depende das curvas probabilidade de detecção, tais como as da Figura 44.

Se um problema for complexo ou não for inteiramente compreendido, métodos heurísticos podem ser empregados. A ideia é ter um algoritmo eficiente e de fácil implementação que gere soluções boas na maior parte do tempo. Portanto, mesmo sendo dadas as preferências do usuário quanto aos objetivos científicos do arranjo, não é esperado que o algoritmo evolutivo forneça a separação ótima entre os telescópios.

No entanto, algumas previsões qualitativas podem ser realizadas. Por exemplo, o Observatório VERITAS contém quatro telescópios com diâmetro de 12 m, parecidos com os telescópios definidos como médios na seção 4.2. Esses quatro telescópios formam uma geometria quadricular com lado variando entre aproximadamente 80 m e 130 m (COLLABORATION *et al.*, 2015). Pela seção 6.3, esse espaçamento privilegia a área efetiva em detrimento da resolução angular e resolução em energia, que de acordo com as nossas métricas poderiam ser aprimorados com um aumento na separação entre os telescópios. De fato, uma separação de 100 m privilegia a diminuição do limite mínimo de energia detectável do Observatório, e essa foi a preferência do usuário na época

de atualização do VERITAS (COLLABORATION *et al.*, 2015).

Analisando as geometrias formadas por quatro telescópios de maneira mais geral, pudemos simular losangos com diferentes ângulos de abertura. A conclusão na seção 4.10 foi que entre todos os losangos de mesmo lado, aquele com ângulo de abertura de 90° - isto é, o quadrado - possui a menor área efetiva e em geral maior valor para a métrica $\langle \Theta \rangle$, sendo pequena a variação relativa entre elas quando os telescópios estão próximos. A relação entre a resolução angular e o ângulo de abertura não pôde ser encontrada, porque a métrica utilizada para a resolução angular não demonstra relações de proporcionalidade com relação à resolução angular do arranjo. Trata-se de uma métrica heurística que supomos ser função monótona com relação à resolução angular do arranjo.

O espaçamento entre os telescópios depende do critério científico. Por exemplo, os telescópios grandes observam os eventos de menor energia (< 100 GeV), que possuem um fluxo maior. Entretanto, os raios gama de menor energia geram chuvarões que produzem menor quantidade de radiação Chrenkov na atmosfera. Isso significa que relativamente aos outros tipos de telescópios em um arranjo híbrido, os telescópios grandes devem estar mais próximos uns dos outros, mesmo tendo espelhos maiores. Para um arranjo já construído com muitos telescópios, as fronteiras de Pareto podem auxiliar na decisão de quais telescópios utilizar para realizar determinada medida com dado objetivo científico.

Para arranjos homogêneos com três e quatro telescópios e considerando apenas a métrica para a resolução angular, $\langle \Theta \rangle$, mostramos que é mais vantajoso otimizar a performance do arranjo na área total de observação que apenas na área interna. Isto tem impacto se o arranjo for construído a partir de células, como por exemplo é realizado em (BARNACKA *et al.*, 2013; PLYASHESHNIKOV *et al.*, 2000; AHARONIAN *et al.*, 1997a; DENMAN, 2012). Em (PLYASHESHNIKOV *et al.*, 2000), menciona-se que a resolução angular na área externa ao arranjo é ruim e em (DENMAN, 2012; KRAWCZYNSKI *et al.*, 2006; BARNACKA *et al.*, 2013) são dados exemplos que mostram que a área externa de observação é maior que a interna. Pelas Figuras 55 e 58, a separação ideal que otimiza a área interna de detecção é maior que aquela que otimiza a métrica $\langle \Theta \rangle$. Além disso, a Figura 58 mostra que as áreas efetivas externas aos triângulos e quadrados são maiores que a área interna, podendo chegar a uma ordem de grandeza a mais. Isso significa que se essas regiões tiverem propriedades desejáveis para uma boa reconstrução do ângulo zenital, aproximar, dependendo do tipo e energia, os telescópios de forma a diminuir a área interna de observação abaixo do seu valor máximo pode aumentar a área de detecção do arranjo como um todo e, pela Figura 55, melhorar a qualidade de reconstrução média na área total de observação.

Este trabalho foi dividido em duas partes. A primeira se refere ao tratamento de arranjos

com geometrias dadas. Na seção 4.10, a análise das métricas fornecem indicações para a separação entre os telescópios do arranjo, que podem ser de diferentes tipos. A segunda parte trata de utilizar um algoritmo para que a própria geometria do arranjo seja encontrada. O trabalho desta tese possui duas limitações principais. A primeira é que a transposição do problema real para o algoritmo ocorre através das métricas, assim o algoritmo otimiza as métricas e fornece resultados ótimos para elas, de modo que o resultado depende da modelagem utilizada. A segunda é que lidar com problemas com muitos objetivos, em geral mais que quatro, é ainda um problema em aberto.

Para o arranjo com quinze telescópios médios em um terreno com restrições, não encontramos interpretação para as soluções obtidas. A população utilizada e o número de gerações foram pequenos para lidar com o número de variáveis desse caso. No entanto, a discussão foi relevante para apresentar o método. Para melhorar a convergência, é necessário utilizar computadores com maior poder de processamento, o que caracterizou uma terceira limitação do trabalho aqui desenvolvido.

A conclusão final desta tese está contida na Figura 141. Ela mostra que existe uma região no espaço de busca de um arranjo com quatro telescópios com melhores valores para todas as métricas. Essa região é toda composta por geometrias em forma de triângulo com face centrada e foi obtida por um algoritmo evolutivo. Conseguimos associar geometrias típicas com regiões específicas no espaço de busca e verificamos que os losangos compõem linhas que estão mais longes do ponto ideal. Mesmo que a área interna do triângulo seja menor que a área interna do losango, ao comparar a área total incluindo a externa, as duas podem ser equivalentes. Para os telescópios utilizados, que detectam com probabilidade 100 % até 200 m, o arranjo ótimo da Figura 68 é um triângulo com lado entre 200 m e 240 m.

Perspectivas

A hipótese utilizada nesta tese é que a otimização das métricas é uma meta necessária, porém não suficiente, para a configuração do arranjo, de modo que o conjunto das geometrias obtidas pelo algoritmo possui uma diversidade maior que inclui as verdadeiras soluções do problema. Por isso, encontramos às vezes neste trabalho algumas soluções espúrias. A inclusão de outras métricas e outras energias aumenta a dimensão da fronteira de Pareto, o que ocasiona dificuldades de convergência para o algoritmo, e não apenas maior tempo de processamento, como vimos na seção 5.11. Além disso, em muitas dimensões a interpretação das soluções degrada.

Por exemplo, poderia ser acrescentada a métrica para a energia mínima de detecção - seção 4.5. A energia mínima de detecção é uma métrica que chamamos de exata, segundo a classificação dada no Apêndice A. A cada iteração do algoritmo, a área efetiva para cada energia deve ser calculada, ajustada tal como realizado na seção 4.5 e a posição do máximo da taxa de detecção deve ser

encontrado. Outro exemplo é a introdução de uma métrica específica para a qualidade da separação gama/hádron utilizando o fator de qualidade Q . A implementação dessa métrica foi discutida na seção 4.8. Uma outra opção que não depende do tipo de análise de separação é a diminuição da área efetiva de detecção de chuveiros hadrônicos, como foi sugerido em (KÖHLER *et al.*, 1996). Nesse caso, as curvas de probabilidade de detecção obtidas na seção 4.2 devem ser calculadas também para os chuveiros hadrônicos.

No algoritmo da seção 6.2.2, uma métrica a mais poderia ser adicionada. Naquela seção, a área efetiva interna de observação foi otimizada. Entretanto, concluímos que arranjos com áreas internas próximas não necessariamente possuem áreas totais, interna e externa, próximas. Isso significa que uma possibilidade seria a otimização simultânea das áreas interna e total, ou a minimização da fração da área externa em relação à área total.

Ao invés de acrescentar métricas, há pelo menos duas alternativas possíveis. A primeira seria demonstrar a redundância de um subconjunto delas ou encontrar uma transformação dos objetivos em outro conjunto menor. Por exemplo, na Figura 51, concluímos que a taxa de detecção de eventos é otimizada para diferentes tipos de telescópios em diferentes energias. Logo, a equação 5.9 poderia ser utilizada para transformar o conjunto de objetivos em um conjunto menor, se os pesos w_i forem proporcionais à taxa de detecção em cada energia, fixado o tipo de telescópio⁵. A segunda seria aprimorar as métricas já existentes, utilizando, por exemplo, programas que simulam a detecção de chuveiros pelos telescópios (BERNLÖHR, 2008) ao invés do cálculo apresentado na seção 4.1. Esses programas não tornam exatas as métricas da resolução angular e da energia, mas as tornam específicas para um determinado experimento.

Como as métricas são médias sobre a região de observação, esperamos que as suas flutuações diminuam à medida que a área coberta pelos telescópios aumente. Assim, os valores absolutos das métricas varia pouco entre diferentes configurações. Isso significa que para arranjos grandes, variar posição de telescópio talvez tenha pouco efeito, ou seja, é difícil contornar a flutuação da quantidade de fótons detectados na região de observação, otimizando apenas posição de telescópio. Além disso, com os valores absolutos das métricas variando pouco entre diferentes configurações para arranjos grandes, a variação relativa entre elas pode talvez ser menor que o erro introduzido na binagem na área de observação. Isso também implicaria uma limitação na utilização das métricas como objetivo de otimização.

Importante seria chegar nas mesmas conclusões apresentadas nesta tese com outras métricas que traduzissem a resolução angular, a resolução em energia e a qualidade na separação gama/hádron. As Figuras 145 e 146 mostram exemplos das distribuições que utilizamos para calcular a média e pela forma assimétrica das curvas, talvez a média não seja a melhor opção. No

⁵ Não utilizamos a equação 5.9 anteriormente porque não inserimos nenhuma preferência entre objetivos nesta tese e nesse caso a escalarização exige maior esforço computacional.

Apêndice A, listamos as motivações da nossa escolha pela média. Por outro lado, pela Figura 62, uma alternativa para a expressão da métrica da resolução em energia seria encontrar a correlação entre a primeira e segunda colunas da Figura 62. Isso porque a primeira coluna é a probabilidade de detecção e a segunda coluna é a flutuação média da luz Cherenkov e desejamos que nas regiões com alta probabilidade, a flutuação seja a menor possível. Analogamente, seria encontrada uma expressão alternativa para a métrica da resolução angular.

O cálculo da área efetiva em função da energia reconstruída - e não da verdadeira - do chuveiro não parece ser o caminho para aprimorar essa métrica, como explicado em (HOFMANN *et al.*, 2000b). Observamos que o cálculo da área efetiva pela equação 4.6 foi realizado numericamente. No entanto, para calcular analiticamente a integral na equação 4.6, precisaríamos saber os limites de integração da região definida pela intersecção de m círculos. O cálculo se torna simples apenas para m telescópios ocupando a mesma posição, portanto pelo menos essa situação pode ser comparada com o resultado obtido pelos programas que simulam em detalhes a detecção dos chuveiros. Um cálculo analítico tornaria o tempo de processamento do algoritmo evolutivo mais rápido, uma vez que pouparia a contagem das diversas combinações que aparecem na equação 4.7, como mostrado no Apêndice A.

Para aprimorar a métrica da resolução angular, um caminho seria basear na própria definição de resolução angular do arranjo. Pela Figura 21, nesse caso devemos calcular o erro na determinação do ponto de intersecção de N elipses. No entanto, para isso, é necessário o cálculo do parâmetro *Width* ou *Alpha* - definidos na seção 3.4. Estes não foram calculados na seção 4.2, porque na simulação dos chuveiros tais parâmetros dependem da distribuição lateral de partículas carregadas (veja Figura 36), que depende da idade do chuveiro - Figura 9. A inclusão da distribuição lateral na seção 4.1 aumentaria sobremaneira o tempo de processamento.

Na seção 4.7 utilizamos a flutuação na quantidade de fótons Cherenkov como quantidade fundamental para a métrica que representa a resolução em energia. Duas alternativas seriam utilizar a quantidade de fotoelétrons na câmera ou modificar a maneira como se calcula a flutuação. Na seção 4.7, foi utilizado um desvio padrão da média, seguindo a proposta de (KONOPELKO, 2004; AHARONIAN *et al.*, 1997a).

Se outros critérios de *trigger* forem utilizados, as curvas de *trigger* encontradas na seção 4.2 modificarão. Um exemplo dessa situação seria se a multiplicidade mínima para detecção esteé implementada no algoritmo de otimização fosse igual a dois ou quatro, caso comentado na Figura 47. Outro exemplo ocorre se a rejeição de eventos com parâmetro de impacto maior ou menor que dado valor for um critério utilizado, nesse caso as curvas de *trigger* são iguais a zero nessas regiões de observação - ideia implementada na Figura 64. Isso é útil porque as imagens de chuveiros próximos aos detectores tendem ao formato circular e isso degrada a resolução angular e

a qualidade na separação gama/hádron. Além disso, na região em torno do chuveiro ocorre a maior flutuação de luz Cherenkov e portanto a resolução em energia degrada nesse caso. Nesta tese, utilizamos os principais critérios de *trigger*, a saber, a exigência de detecção do evento por mais de um telescópio (BERNLÖHR *et al.*, 2013a; ACTIS *et al.*, 2011) - aqui usamos o valor de pelo menos três telescópios -, o número mínimo de fotoelétrons na câmera e a condição para a imagem não ser inteiramente cortada pelas bordas da câmera. Consideramos que toda imagem não cortada pode ser detectada, porém um critério mais rigoroso implicaria um limite para o corte da imagem. E a consequência seria modificar as curvas de *trigger*.

Na realidade, as estratégias de *trigger* para o arranjo de telescópios devem ser otimizadas. Todo critério de *trigger* representa um compromisso entre eficiência e resolução na detecção, que podem a princípio ser visualizadas em uma fronteira de Pareto. O critério para selecionar imagens que não são afetadas pelas bordas da câmera forma um compromisso desse tipo (BERNLÖHR *et al.*, 2013a). Outro exemplo ocorre para baixas energias (< 100 GeV). Nesse caso, as estratégias de *trigger* para o arranjo de telescópios devem ser otimizadas levando-se em consideração o compromisso entre rejeitar a contaminação da luz de fundo e não rejeitar os raios gama que se deseja detectar.

O caso mais geral possível de aplicação do algoritmo evolutivo seria para a busca tanto da geometria do arranjo, quanto para a uma busca sobre o espaço dos parâmetros dos telescópios. Em última instância, todas as métricas são funções do tamanho do espelho, do campo de visão, da eficiência das fotomultiplicadoras, do tamanho do pixel, da altitude e do campo magnético da Terra na região do arranjo. Nessa situação, o código genético de cada indivíduo da população seria uma representação desses parâmetros e também da posição dos telescópios na rede. A cada iteração do algoritmo, as métricas para o arranjo seriam calculadas com base nesses parâmetros e a convergência se daria para os parâmetros ótimos. As dependências em função da energia podem ser obtidas por interpolação dos gráficos mostrados por exemplo nas Figuras 35 e 38 (obtendo uma relação entre os coeficientes dos ajustes das retas da Figura 38 em função da energia). Com isso, as curvas de *trigger* e o parâmetro *Distance* podem ser encontrados para qualquer energia. Observamos que a inclusão dos parâmetros dos telescópios aumenta o número de variáveis do problema, diferentemente da inclusão de mais métricas, que aumenta a dimensão do espaço de objetivos. As diferenças de convergência entre ambos os casos foram discutidas na seção 5.11. Portanto, otimizar com algoritmo evolutivo a performance de todo o Observatório em todas as faixas de energia incluindo todos os parâmetros de busca, restrições e todos os objetivos da otimização é ainda algo onírico.

Mesmo com o aprimoramento das métricas ou a descoberta de outras que cheguem às mesmas conclusões desta tese, ainda há espaço para o desenvolvimento do algoritmo, como a inclusão nele de características específicas do problema. Isso é especialmente importante devido ao teorema *No Free Lunch* - comentado na seção 5.1.

Outra questão se refere à representação das variáveis do problema. Em (SIMON, 2013), várias representações criativas para o problema do Caixeiro Viajante são utilizadas como exemplo didático para ressaltar a importância da representação e como os operadores genéticos são afetados. Para o problema do arranjo de telescópios, caso se soubesse que a geometria do arranjo é simétrica ou formada por polígonos regulares, poderíamos fazer a representação dos indivíduos com os valores do lado e ângulos dos polígonos para reduzir o número de variáveis e assim melhorar a convergência do algoritmo. Por exemplo, um losango seria descrito por duas variáveis, lado e ângulo, ao invés de oito. Isto tem impacto se o arranjo for construído a partir de células, como por exemplo é realizado em (AHARONIAN *et al.*, 1997a; DENMAN, 2012).

Nesta tese, as posições dos telescópios foram representadas por um vetor, contendo as coordenadas reais x e y de todos os telescópios. Evidentemente, translações e rotações do arranjo não alteram a sua performance, de modo que dessa maneira existe uma redundância na representação do espaço de busca. Por exemplo, dois arranjos em forma de triângulo equilátero com diferentes orientações são vistos como indivíduos distintos pelo algoritmo que implementamos. Contornamos essa situação ao empregar valores relativamente altos para o tamanho da população e para o número de gerações, com a consequência de aumentar o tempo de processamento. Esta foi portanto uma solução paliativa que pode ser revista. De modo mais geral, ao incluir todas as métricas, desejamos saber quais são todas as simetrias do problema, ou seja, se existiriam outras além da rotação e translação. Por exemplo, a dilatação e compressão da escala de separação dos telescópios no arranjo poderia ser uma simetria, pelo menos aproximada, para arranjos observando em diferentes energias. A partir disso, desejaremos encontrar o subconjunto de soluções que seriam equivalentes para dada métrica a menos de uma transformação de simetria. Por exemplo, para a rotação de um triângulo equilátero, todas as rotações por um ângulo θ são equivalentes em relação à área efetiva. Finalmente, a representação do algoritmo evolutivo se daria de modo que arranjos equivalentes seriam representados pelo mesmo código genético. Isso também é importante para que a classificação das geometrias se torne mais rigorosa, uma vez que nessa tese ela foi realizada de maneira empírica, por exemplo, na Figura 94 a geometria A-6 poderia ter sido classificada como B-6. Uma questão associada e mais simples seria tentar descobrir, dados uma grade discreta e N pontos representando os telescópios, quantas figuras geométricas iguais existem.

Duas outras estratégias podem também ser utilizadas para o desenvolvimento do algoritmo. A primeira se refere à combinação de diferentes métodos de otimização para melhorar a performance da busca (DUTTA *et al.*, 2017). Por exemplo, pode-se realizar uma busca pelo método *Pattern Search* após completado o número de gerações do algoritmo evolutivo (HOOKE; JEEVES, 1961; TORCZON, 1997). Nesta tese, empregamos apenas um algoritmo, porém utilizamos uma estratégia de busca local durante as iterações ao definir valores altos para os índices de Recombinação e Mutação - ver seção 5.3.

A segunda estratégia se refere a contornar as limitações da definição do critério de Pareto. Embora o algoritmo precise de uma população grande para garantir a convergência, com muitos objetivos geralmente todos os indivíduos terminam a execução do algoritmo como não dominados. Por exemplo, com o critério de Pareto, o número de objetivos estritamente melhores não é levado em consideração. Além disso, o tamanho normalizado de alguma melhoria também não é levado em consideração. A consequência disso é incluir muitas soluções na primeira frente não dominada, constituindo uma desvantagem peculiar do caso da otimização de problemas com muitos objetivos - mais que quatro - como discutido na seção 5.11 e enfatizado no capítulo 6. Desejamos descobrir - para o problema específico do arranjo de telescópios - qual generalização do critério de Pareto melhora a convergência, diversidade de soluções, rapidez de processamento, visualização e interpretação dos resultados obtidos.

De fato, na Figura 137, empregamos a relação de ε -Dominância para diminuir o número de soluções obtidas. Observamos aqui uma vantagem adicional desse procedimento. Além de diminuir o tamanho da fronteira de Pareto, a inclusão de um erro ε nas relações de dominância também consegue lidar com os erros de binagem que surgem nos cálculos das métricas. Para a composição da Figura 46, estimamos um erro de 1 % usando uma binagem de 20 m, por isso escolhemos $\varepsilon = 5$ %.

Na seção 4.1, utilizamos duas distribuições - equações 3.6 e 3.17 - e três funções delas - equações 3.5, 3.7 e 4.1 - para encontrar as curvas de luz Cherenkov e suas flutuações - Figuras 28 e 30. Na realidade, esta questão poderia a princípio ser resolvida de outra forma ao interpretar a equação 4.1 como uma função de variável aleatória a ser descoberta. Isso resolveria analiticamente a questão da distribuição de luz Cherenkov no solo e, talvez mais interessante, as suas flutuações⁶. As integrais nesse caso tornam-se complicadas - porque as equações 3.5, 3.7 e 4.1 também são funções de variável aleatória - e por isso optamos por utilizar simulações de Monte Carlo. O esquema para a resolução seria o seguinte: i) encontrar a distribuição da profundidade atmosférica, que é função da variável aleatória ponto de primeira interação; ii) encontrar a distribuição da altura z de emissão, que é função da profundidade; iii) encontrar a distribuição do ângulo de emissão, que é função da altura de emissão e também do ângulo de espalhamento e iv) encontrar a distribuição da coordenada radial de impacto no solo do fóton Cherenkov, que é função do ângulo e da altura de emissão. O procedimento simplifica se o ângulo de espalhamento for ignorado em um primeiro instante, porém mesmo nessa situação, as equações são complicadas. Um subproduto desse cálculo seria encontrar a curvatura da frente do chuva, que depende dos tempos de chegada das

⁶ Diferentes simulações para encontrar a distribuição lateral de radiação Cherenkov podem ser encontradas em (BOLEY, 1964; ZATSEPIN; CHUDAKOV, 1962b; ZATSEPIN; CHUDAKOV, 1962a; ZATSEPIN, 1965; BROWNING; TURVER, 1977; HILLAS, 1982b; HILLAS, 1982a; ACHARYA *et al.*, 1982; RAO; SINHA, 1988; PORTOCARRERO; ARQUEROS, 1998; NERLING *et al.*, 2006; RAHMAN *et al.*, 2001; DEDENKO *et al.*, 2008; ESPADANAL; GONÇALVES, 2017)

partículas no solo (GRIEDER, 2010).

Nesta tese, propusemos um algoritmo evolutivo para resolver um problema acerca da otimização de uma rede de telescópios, que é um método de inteligência artificial. Esta, por sua vez, já tem sido utilizada em outra classe de problemas, envolvendo a questão da separação gama/hádron ou o cálculo da energia dos eventos, por exemplo com algoritmos de *Random Forest* e *Boosted Decision Trees* (ALBERT *et al.*, 2008a; SPECKMAYER *et al.*, 2010). Desejamos saber se os algoritmos evolutivos poderiam ser úteis também em outras aplicações para o *Cherenkov Telescope Array* (THE CTA CONSORTIUM, 2017), em particular na análise dos eventos e na questão da separação gama/hádron.

A rejeição de eventos hadrônicos é maior que 90 %, sendo que esse valor pode aumentar a custo de diminuir a aceitância de eventos gama (BOCK *et al.*, 2004). Este fato caracteriza um conflito de objetivos. Em (BOCK *et al.*, 2004), o conflito entre a aceitância de hádrons e aceitância de eventos gama é ilustrado explicitamente em um exemplo. Portanto a composição de uma fronteira de Pareto entre eles pode elucidar questões sobre como fazer melhor a análise da separação gama/hádron e otimizar a aceitância de eventos gama.

Em (ACHARYA *et al.*, 2013), a relação custo/performance do CTA é apontada para o caso específico de detecção a altas energias. Entendemos essa situação como um conflito de objetivos que pode ser analisado em uma fronteira de Pareto. O custo pode ser dado como uma restrição do problema, da mesma maneira como tratamos a questão das restrições no terreno, ou pode ser dado como um objetivo de otimização, assim utilizando os algoritmos evolutivos para transformar uma restrição em um objetivo.

Como mencionamos anteriormente nesse capítulo, para um arranjo já construído com muitos telescópios, o entendimento do conflito entre área efetiva, resolução angular, resolução em energia e a qualidade da separação gama/hádron e suas relações com a geometria do arranjo que as otimiza pode auxiliar na decisão de quais telescópios utilizar para realizar determinada medida com dado objetivo científico. Isso porque para arranjos grandes, os telescópios não estarão todos medindo a mesma fonte. Por exemplo, em todas as geometrias que encontramos, a métrica para a resolução em energia melhora para telescópios afastados, porque evita a região com maiores flutuações no centro do chuveiro. Assim, vislumbramos usar informações desse tipo para otimizar a escolha de quais telescópios usar para realizar determinada medida.

As Figuras 99 e 102 mostram que, pelo menos em relação à métrica da área interna de observação, as geometrias obtidas para cinco telescópios não podem ser obtidas a partir dos arranjos ótimos com quatro telescópios. Isso significa que a otimização de um arranjo com N telescópios é diferente da otimização de apenas um telescópio inserido em um arranjo com as posições já fixas de N-1 telescópios. Isso é importante, porque o algoritmo proposto nesta tese pode guiar na maneira

como será realizada alguma possível expansão de um arranjo já construído.

Ao aproximar os telescópios, a energia mínima de detecção diminui, aumentando a área efetiva para baixas energias às custas de diminuir a área efetiva para altas energias (HINTON, 2009). Trata-se também de um caso de objetivos conflitantes que poderia ser analisado pelos métodos evolutivos.

Outros experimentos também podem se beneficiar das técnicas aqui desenvolvidas. Por exemplo, pode-se aplicar o método para entender quais são o tamanho e material ótimos para construir algum detector qualquer, seja de raios gama ou não. A otimização da configuração de uma rede de antenas já tem sido feita dessa maneira (e.g. (JIN; RAHMAT-SAMII, 2007)), e vislumbramos ser possível aplicar o método para também encontrar a configuração de outros detectores de partículas.

REFERÊNCIAS

- AARTSEN, M. G. *et al.* Evidence for high-energy extraterrestrial neutrinos at the IceCube detector. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 342, n. 6161, p. 1242856, 2013.
- ABEYSEKARA, A. *et al.* Observation of the Crab Nebula with the HAWC gamma-ray observatory. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 843, n. 1, p. 39, 2017.
- ABREU, P.; AGLIETTA, M.; AHN, E.; ALBUQUERQUE, I.; ALLARD, D.; ALLEKOTTE, I.; ALLEN, J.; ALLISON, P.; CASTILLO, J. A.; ALVAREZ-MUÑIZ, J. *et al.* The lateral trigger probability function for the ultra-high energy cosmic ray showers detected by the Pierre Auger Observatory. *Astroparticle physics*, Elsevier, v. 35, n. 5, p. 266–276, 2011.
- ACHARYA, B.; ACTIS, M.; AGHAJANI, T.; AGNETTA, G.; AGUILAR, J.; AHARONIAN, F.; AJELLO, M.; AKHPERJANIAN, A.; ALCUBIERRE, M.; ALEKSIĆ, J. *et al.* Introducing the CTA concept. *Astroparticle physics*, Elsevier, v. 43, p. 3–18, 2013.
- ACHARYA, B.; AGUDO, I.; SAMARAI, I. A.; ALFARO, R.; ALFARO, J.; ALISPACH, C.; BATTISTA, R. A.; AMANS, J.-P.; AMATO, E. *et al.* Science with the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1709.07997*, 2017.
- ACHARYA, B.; RAO, M.; SINHA, S. Lateral distribution of Cerenkov radiation at sea level in primary gamma ray showers of energy 100 GeV. In: *Very High Energy Gamma Ray Astronomy*. Ootacamund, India: [s.n.], 1982. p. 303.
- ACTIS, M.; AGNETTA, G.; AHARONIAN, F.; AKHPERJANIAN, A.; ALEKSIĆ, J.; ALIU, E.; ALLAN, D.; ALLEKOTTE, I.; ANTICO, F.; ANTONELLI, L. *et al.* Design concepts for the Cherenkov Telescope Array CTA: an advanced facility for ground-based high-energy gamma-ray astronomy. *Experimental Astronomy*, Springer, v. 32, n. 3, p. 193–316, 2011.
- ADRA, S. F.; FLEMING, P. J. Diversity management in evolutionary many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 15, n. 2, p. 183–195, 2011.
- AGRAWAL, R. B.; DEB, K.; AGRAWAL, R. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex systems*, v. 9, n. 2, p. 115–148, 1995.

AHARONIAN, F.; AKHPERJANIAN, A.; BEILICKE, M.; BERNLÖHR, K.; BÖRST, H.-G.; BOJAHN, H.; BOLZ, O.; COARASA, T.; CONTRERAS, J.; CORTINA, J. *et al.* The Crab Nebula and pulsar between 500 GeV and 80 TeV: observations with the HEGRA stereoscopic air Cherenkov telescopes. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 614, n. 2, p. 897, 2004a.

AHARONIAN, F.; AKHPERJANIAN, A.; BEILICKE, M.; BERNLÖHR, K.; BÖRST, H.-G.; BOJAHN, H.; BOLZ, O.; COARASA, T.; CONTRERAS, J.; CORTINA, J. *et al.* Observations of 54 Active Galactic Nuclei with the HEGRA system of Cherenkov telescopes. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 421, n. 2, p. 529–537, 2004b.

AHARONIAN, F.; BUCKLEY, J.; KIFUNE, T.; SINNIS, G. High energy astrophysics with ground-based gamma ray detectors. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 71, n. 9, p. 096901, 2008.

AHARONIAN, F.; CHILINGARIAN, A.; MIRZOYAN, R.; KONOPELKO, A.; PLYASHESHNIKOV, A. The system of imaging atmospheric Cherenkov telescopes: The new prospects for VHE gamma ray astronomy. *Experimental astronomy*, Springer, v. 2, n. 6, p. 331–344, 1992.

AHARONIAN, F.; HOFMANN, W.; KONOPELKO, A.; VÖLK, H. The potential of ground based arrays of imaging atmospheric Cherenkov telescopes I. Determination of shower parameters. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 6, n. 3-4, p. 343–368, 1997a.

AHARONIAN, F.; HOFMANN, W.; KONOPELKO, A.; VÖLK, H. The potential of the ground based arrays of imaging atmospheric cherenkov telescopes II. Gamma ray flux sensitivities. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 369–377, 1997b.

AHARONIAN, F.; KONOPELKO, A.; VÖLK, H.; QUINTANA, H. 5@5 - a 5 GeV energy threshold array of imaging atmospheric Cherenkov telescopes at 5 km altitude. *Astroparticle Physics*, v. 15, p. 335–356, ago. 2001.

AHARONIAN, F. A. *Very high energy cosmic gamma radiation: a crucial window on the extreme Universe*. [S.l.]: World Scientific, 2004.

AHUJA, R. K.; ORLIN, J. B.; TIWARI, A. A greedy genetic algorithm for the quadratic assignment problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 27, n. 10, p. 917–934, 2000.

AIELLI, G.; BACCI, C.; BARTOLI, B.; BERNARDINI, P.; BI, X.; BLEVE, C.; BRANCHINI, P.; BUDANO, A.; BUSSINO, S.; MELCARNE, A. C. *et al.* Highlights from the ARGO-YBJ Experiment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 661, p. S50–S55, 2012.

AKRAMI, Y.; SCOTT, P.; EDSJÖ, J.; CONRAD, J.; BERGSTRÖM, L. A profile likelihood analysis of the constrained MSSM with genetic algorithms. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2010, n. 4, p. 57, 2010.

AL-RUBAIEE, A.; GRESS, O.; LOKHTIN, K.; PARFENOV, Y. V.; SINEGOVSKII, S. Modeling and parameterization of the spatial distribution of Cherenkov light from extensive air showers. *Russian physics journal*, Springer, v. 48, n. 10, p. 1004–1011, 2005.

ALANDER, J. T. *Indexed Bibliography of Genetic Algorithms in Physical Sciences*. [S.l.], 2008.

- ALBERT, J.; ALIU, E.; ANDERHUB, H.; ANTORANZ, P.; ARMADA, A.; ASENSIO, M.; BAIXERAS, C.; BARRIO, J.; BARTKO, H.; BASTIERI, D. *et al.* Implementation of the random forest method for the imaging atmospheric Cherenkov telescope MAGIC. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 588, n. 3, p. 424–432, 2008a.
- ALBERT, J.; ALIU, E.; ANDERHUB, H.; ANTORANZ, P.; ARMADA, A.; BAIXERAS, C.; BARRIO, J.; BARTKO, H.; BASTIERI, D.; BECKER, J. *et al.* VHE γ -ray observation of the Crab Nebula and its pulsar with the MAGIC Telescope. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 674, n. 2, p. 1037, 2008c.
- ALEKSIĆ, J.; ANSOLDI, S.; ANTONELLI, L.; ANTORANZ, P.; BABIC, A.; BANGALE, P.; BARCELÓ, M.; BARRIO, J.; GONZALEZ, J. B.; BEDNAREK, W. *et al.* The major upgrade of the MAGIC telescopes, part II: A performance study using observations of the Crab Nebula. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 72, p. 76–94, 2016.
- ALIU, E.; ANDERHUB, H.; ANTONELLI, L.; ANTORANZ, P.; BACKES, M.; BAIXERAS, C.; BARRIO, J.; BARTKO, H.; BASTIERI, D.; BECKER, J. *et al.* Improving the performance of the single-dish Cherenkov telescope MAGIC through the use of signal timing. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 30, n. 6, p. 293–305, 2009.
- ALOISIO, R.; COCCIA, E.; VISSANI, F. *Multiple Messengers and Challenges in Astroparticle Physics*. [S.l.]: Springer, 2018.
- AMBROGI, L.; AHARONIAN, F.; WILHELMI, E. D. O. On the sensitivity of atmospheric Cherenkov telescope arrays for regions with presence of multiple gamma-ray sources. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. Torino, Italy, 2016. v. 718, n. 5, p. 052002.
- ANGELIS, A. D.; PIMENTA, M. J. M. *Introduction to Particle and Astroparticle Physics: Questions to the Universe*. [S.l.]: Springer, 2015.
- ASKAR'YAN, G. Excess negative charge of an electron-photon shower and its coherent radio emission. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 14, p. 616–618, 1962.
- ATMOSPHERE, U. S. C. on Extension of the S. U.S. *Standard Atmosphere, 1976*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1976. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=x488AAAAIAAJ>>.
- ATWOOD, W.; ABDO, A. A.; ACKERMANN, M.; ALTHOUSE, W.; ANDERSON, B.; AXELSSON, M.; BALDINI, L.; BALLEST, J.; BAND, D.; BARBIELLINI, G. *et al.* The Large Area Telescope on the Fermi Gamma-ray Space Telescope mission. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 697, n. 2, p. 1071, 2009.
- BÄCK, T.; FOGEL, D. B.; MICHALEWICZ, Z. *Evolutionary computation*. [S.l.]: CRC Press, 2000. I,II.
- BANDARU, S.; NG, A. H.; KALYANMOY, D. Data mining methods for knowledge discovery in multi-objective optimization: Part A-Survey. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 70, p. 139–159, 2017.

BARNACKA, A.; BOGACZ, L.; GRUDZIŃSKA, M.; FRANKOWSKI, A.; JANIĄK, M.; LUBIŃSKI, P.; MODERSKI, R. *et al.* Performance of the Cherenkov Telescope Array at energies above 10 TeV. *ArXiv preprint arXiv:1307.3409*, 2013.

BARTOLI, B. *et al.* EAS age determination from the study of the lateral distribution of charged particles near the shower axis with the ARGO-YBJ experiment. *Astroparticle Physics*, v. 93, p. 46–55, jul. 2017.

BARTOS, I.; VERES, P.; NIETO, D.; CONNAUGHTON, V.; HUMENSKY, B.; HURLEY, K.; MARKA, S.; MÉSZÁROS, P.; MUKHERJEE, R.; O'BRIEN, P. *et al.* Cherenkov Telescope Array is well suited to follow up gravitational-wave transients. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 443, n. 1, p. 738–749, 2014.

BATISTA, L. S.; CAMPELO, F.; GUIMARÃES, F. G.; RAMÍREZ, J. A. Pareto cone ε -dominance: improving convergence and diversity in multiobjective evolutionary algorithms. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2011. p. 76–90.

BEHNKE, O.; KRÖNINGER, K.; SCHOTT, G.; SCHÖRNER-SADENIUS, T. *Data analysis in high energy physics: a practical guide to statistical methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

BERGE, D. *A detailed study of the gamma-ray supernova remnant RX J1713.7-3946 with HESS*. Tese (Doutorado) — Ruperto-Carola University of Heidelberg, Germany, 2006.

BERNLÖHR, K. Impact of atmospheric parameters on the atmospheric Cherenkov technique. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 255–268, 2000.

BERNLÖHR, K. Simulation of imaging atmospheric Cherenkov telescopes with Corsika and Sim_telarray. *Astroparticle Physics*, v. 30, p. 149–158, out. 2008.

BERNLÖHR, K.; BARNACKA, A.; BECHERINI, Y.; BIGAS, O. B.; CARMONA, E.; COLIN, P.; DECERPRIT, G.; PIERRO, F. D.; DUBOIS, F.; FARNIER, C. *et al.* Monte Carlo design studies for the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 43, p. 171–188, 2013a.

BERNLÖHR, K.; BARNACKA, A.; BECHERINI, Y.; BIGAS, O. B.; BOUVIER, A.; CARMONA, E.; COLIN, P.; DECERPRIT, G.; PIERRO, F. D.; DUBOIS, F. *et al.* Progress in Monte Carlo design and optimization of the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1307.2773*, 2013b.

BETHE, H. Moliere's theory of multiple scattering. *Physical Review*, APS, v. 89, n. 6, p. 1256, 1953.

BETHE, H.; HEITLER, W. On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1934. v. 146, n. 856, p. 83–112.

BHABHA, H. J.; HEITLER, W. The passage of fast electrons and the theory of cosmic showers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, JSTOR, p. 432–458, 1937.

BHATIA, D.; AGGARWAL, S. Optimality and duality for multiobjective nonsmooth programming. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 57, n. 3, p. 360–367, 1992.

- BIGONGIARI, C.; PIERRO, F. D.; MORELLO, C.; STAMERRA, A.; VALLANIA, P.; AGNETTA, G.; ANTONELLI, L.; BASTIERI, D.; BELLASSAI, G.; BELLUSO, M. *et al.* Expected performance of the ASTRI-SST-2M telescope prototype. *ArXiv preprint arXiv:1307.5006*, 2013.
- BOCK, R.; CHILINGARIAN, A.; GAUG, M.; HAKL, F.; HENGSTEBECK, T.; JIŘINA, M.; KLASCHKA, J.; KOTRČ, E.; SAVICKÝ, P.; TOWERS, S. *et al.* Methods for multidimensional event classification: a case study using images from a Cherenkov gamma-ray telescope. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 516, n. 2, p. 511–528, 2004.
- BOGDANOS, C.; NESSERIS, S. Genetic algorithms and supernovae type Ia analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 05, p. 006, 2009.
- BOHEC, S. L.; DANIEL, M.; WIT, W. D.; HINTON, J.; JOSE, E.; HOLDER, J.; SMITH J. AND WHITE, R. Stellar intensity interferometry with air Cherenkov telescope arrays. In: *AIP Conference Proceedings*. Edinburgh, Scotland, 2008. v. 984, n. 1, p. 205–215.
- BOLEY, F. I. Atmospheric Cerenkov radiation from cosmic-ray air showers. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 36, n. 3, p. 792, 1964.
- BOLOTOVSKII, B. M. Vavilov-Cherenkov radiation: its discovery and application. *Physics-Uspokhi*, Turpion Ltd, v. 52, n. 11, p. 1099–1110, 2009.
- BORWANKAR, C.; BHATT, N.; BHATTACHARYYA, S.; RANNOT, R.; TICKOO, A.; KOUL, R.; THOUDAM, S. Simulation studies of MACE-I: Trigger rates and energy thresholds. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 84, p. 97–106, 2016.
- BRANKE, J.; DEB, K.; DIEROLF, H.; OSSWALD, M. *et al.* Finding knees in multi-objective optimization. In: *International conference on parallel problem solving from nature*. Berlin-Heidelberg 2004: [s.n.], 2004. v. 3242, p. 722–731.
- BROCKHOFF, D.; ZITZLER, E. Objective reduction in evolutionary multiobjective optimization: Theory and applications. *Evolutionary Computation*, MIT Press, v. 17, n. 2, p. 135–166, 2009.
- BROWNING, R.; TURVER, K. Cerenkov radiation from computer simulations of the γ -ray-initiated atmospheric showers. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 38, n. 3, p. 223–238, 1977.
- BUCHTA, C. On the average number of maxima in a set of vectors. *Information Processing Letters*, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 63–65, 1989.
- BULGARELLI, A.; FIORETTI, V.; CONTRERAS, J.; LORCA, A.; ABOUDAN, A.; RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ, J.; LOMBARDI, S.; MAIER, G.; ANTONELLI, L.; BASTIERI, D. *et al.* The real-time analysis of the Cherenkov Telescope Array observatory. *ArXiv preprint arXiv:1307.6489*, 2013.
- BYKOV, A.; AHARONIAN, F.; KRASSILCHTCHIKOV, A.; KHOLUPENKO, E.; ARUEV, P.; BAIKO, D.; BOGDANOV, A.; VASILYEV, G.; ZABRODSKII, V.; TROITSKY, S. *et al.* Cherenkov gamma-ray telescopes: past, present, future. The ALEGRO Project. *Technical Physics*, Springer, v. 62, n. 6, p. 819–836, 2017.

- CARLSON, J.; OPPENHEIMER, J. On multiplicative showers. *Physical Review*, APS, v. 51, n. 4, p. 220, 1937.
- CARUANA, R. A. Representation and hidden bias: Gray vs. binary coding for genetic algorithms. In: *Proceedings of the Fifth International Conference on Machine Learning Ann Arbor*. Michigan, USA: [s.n.], 1988. p. 153–161.
- CAWLEY, M.; WEEKES, T. Instrumentation for very high energy gamma-ray astronomy. *Experimental Astronomy*, Springer, v. 6, n. 1-2, p. 7–42, 1995.
- CHAKRABORTY, U. K.; JANIKOW, C. Z. An analysis of gray versus binary encoding in genetic search. *Information Sciences*, Elsevier, v. 156, n. 3, p. 253–269, 2003.
- CHITNIS, V.; BHAT, P. Cerenkov photon density fluctuations in extensive air showers. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 45–63, 1998.
- CHITNIS, V.; BHAT, P. Possible discrimination between gamma rays and hadrons using Cerenkov photon timing measurements. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 29–47, 2001.
- CLARK, G.; EARL, J.; KRAUSHAAR, W.; LINSLEY, J.; ROSSI, B.; SCHERB, F.; SCOTT, D. Cosmic-ray air showers at sea level. *Physical Review*, APS, v. 122, n. 2, p. 637, 1961.
- COELLO, C. A. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. *et al.* *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 5.
- COLIN, P.; TRIDON, D. B.; CARMONA, E.; SABATA, F. D.; GAUG, M.; LOMBARDI, S.; MAJUMDAR, P.; MORALEJO, A.; SCALZOTTO, V.; SITAREK, J. Performance of the MAGIC telescopes in stereoscopic mode. *ArXiv preprint arXiv:0907.0960*, 2009.
- COLLABORATION, J. H. for the V. *et al.* VERITAS: HAWC's Neighbour to the North. *ArXiv preprint arXiv:1508.01401*, 2015.
- COMMICHAU, S.; BILAND, A.; CONTRERAS, J.; REYES, R. de L.; MORALEJO, A.; SITAREK, J.; SOBCZYŃSKA, D.; COLLABORATION, M. *et al.* Monte Carlo studies of geomagnetic field effects on the imaging air Cherenkov technique for the MAGIC telescope site. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 595, n. 3, p. 572–586, 2008.
- CORNE, D. W.; KNOWLES, J. D. No free lunch and free leftovers theorems for multiobjective optimisation problems. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2003. p. 327–341.
- CTA. 2017. <<https://www.cta-observatory.org/science/cta-performance/>>. Accessed: 2017-12-31.
- DANIEL, M.; GAUG, M.; MAJUMDAR, P. *et al.* The camera calibration strategy of the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1508.06625*, 2015.
- DARWIN, C. R. *The origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life*. 6. ed. [S.l.]: London: John Murray, 1859.

- DAS, I. On characterizing the “knee” of the Pareto curve based on normal-boundary intersection. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 18, n. 2, p. 107–115, 1999.
- DAUM, A.; HERMANN, G.; HESS, M.; HOFMANN, W.; LAMPEITL, H.; PÜHLHOFER, G.; AHARONIAN, F.; AKHPERJANIAN, A.; BARRIO, J.; BEGLARIAN, A. *et al.* First results on the performance of the HEGRA IACT array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 1–11, 1997.
- DEB. 2007. <http://ewh.ieee.org/cmte/cis/mtsc/ieeecis/tutorial2007/CEC2007/Kalyanmoy_Deb.pdf>. Accessed: 2017-12-24.
- DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- DEB, K.; AGRAWAL, S. A niched-penalty approach for constraint handling in genetic algorithms. In: *Proceedings of the international conference on artificial neural networks and genetic algorithms*. Portoroz, Slovenia: [s.n.], 1999. p. 235–243.
- DEB, K.; AGRAWAL, S.; PRATAP, A.; MEYARIVAN, T. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. In: SPRINGER. *International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*. [S.l.], 2000. p. 849–858.
- DEB, K.; CHAUDHURI, S.; MIETTINEN, K. *Estimating nadir objective vector quickly using evolutionary approaches*. [S.l.], 2005.
- DEB, K.; DEB, D. Analysing mutation schemes for real-parameter genetic algorithms. *International Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing*, Inderscience Publishers Ltd, v. 4, n. 1, p. 1–28, 2014.
- DEB, K.; GOEL, T. Controlled elitist non-dominated sorting genetic algorithms for better convergence. In: SPRINGER. *Evolutionary multi-criterion optimization*. [S.l.], 2001. p. 67–81.
- DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, v. 18, n. 4, p. 577–601, 2014.
- DEB, K.; MIETTINEN, K. A review of nadir point estimation procedures using evolutionary approaches: A tale of dimensionality reduction. In: *Proceedings of the multiple criterion decision making conference*. Springer. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–14.
- DEB, K.; MIETTINEN, K. Nadir point estimation using evolutionary approaches: better accuracy and computational speed through focused search. In: *Multiple criteria decision making for sustainable energy and transportation systems*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 339–354.
- DEB, K.; MIETTINEN, K.; CHAUDHURI, S. Toward an estimation of nadir objective vector using a hybrid of evolutionary and local search approaches. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 14, n. 6, p. 821–841, 2010.
- DEB, K.; SAXENA, D. Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems. In: *Proceedings of the World Congress on Computational Intelligence*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 3352–3360.

- DEB, K.; THIELE, L.; LAUMANN, M.; ZITZLER, E. Scalable multi-objective optimization test problems. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*. [S.l.], 2002. v. 1, p. 825–830.
- DEDENKO, L.; ROGANOVA, T.; FEDOROVA, G.; PODGRUDKOV, D.; SHOZIYOEV, G. Calculating lateral distribution functions of the Cherenkov light from extensive atmospheric showers in terms of a multilevel scheme. *Moscow University Physics Bulletin*, Springer, v. 63, n. 4, p. 232–237, 2008.
- DEGRANGE, B.; FONTAINE, G. Introduction to high-energy gamma-ray astronomy. *Comptes Rendus Physique*, Elsevier, v. 16, n. 6-7, p. 587–599, 2015.
- DENMAN, J. *Design studies for a multi-TeV telescope array: PeX (PeV eXplorer)*. Tese (Doutorado) — University of Adelaide, Australia, 2012.
- DENMAN, J. Design studies for a multi-TeV gamma-ray telescope array: PeX (PeV explorer). *ArXiv preprint arXiv:1408.0931*, 2014.
- DEYOUNG, T.; COLLABORATION, H. *et al.* The HAWC Observatory. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 692, p. 72–76, 2012.
- DOMINGO-SANTAMARIA, E.; FLIXA, J.; SCALZOTTO, V.; WITTEK, W.; RICOA, J. The DISP analysis method for point-like or extended γ source searches/studies with the MAGIC Telescope. *Part 3: MAGIC Detector and Analysis Details*, p. 23, 2005.
- DRECHSLER, N.; DRECHSLER, R.; BECKER, B. Multi-objective optimisation based on relation favour. In: SPRINGER. *International conference on evolutionary multi-criterion optimization*. [S.l.], 2001. p. 154–166.
- DUBUS, G.; CONTRERAS, J.; FUNK, S.; GALLANT, Y.; HASSAN, T.; HINTON, J.; INOUE, Y.; KNÖDLSER, J.; MARTIN, P.; MIRABAL, N. *et al.* Surveys with the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 43, p. 317–330, 2013.
- DURO, J. A.; SAXENA, D. K.; DEB, K.; ZHANG, Q. Machine learning based decision support for many-objective optimization problems. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 146, p. 30–47, 2014.
- DUTTA, J.; GUPTA, A.; SENGUPTA, R. N. *Decision sciences: theory and practice*. [S.l.]: CRC Press, 2017.
- EDGEWORTH, F. Y. *Mathematical Physics*. [S.l.]: P. Keagan, London, England, 1881. (Graduate Texts in Mathematics 211).
- ESPADANAL, J.; GONÇALVES, P. 3D simulation for Cherenkov emissions in extensive air showers. *ArXiv preprint arXiv:1702.03276*, 2017.
- FALCKE, H.; APEL, W.; BADEA, A.; BÄHREN, L.; BEKK, K.; BERCUCI, A.; BERTAINA, M.; BIERMANN, P.; BLÜMER, J.; BOZDOG, H. *et al.* Detection and imaging of atmospheric radio flashes from cosmic ray air showers. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 435, n. 7040, p. 313–316, 2005.

- FARINA, M.; AMATO, P. A fuzzy definition of “optimality” for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, IEEE, v. 34, n. 3, p. 315–326, 2004.
- FAZIO, G.; JELLEY, J.; CHARMAN, W. Generation of Cherenkov light flashes by cosmic radiation within the eyes of the Apollo astronauts. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 228, n. 5268, p. 260, 1970.
- FEGAN, D. J. γ -hadron separation at TeV energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 23, n. 9, p. 1013, 1997.
- FermiLAT. 2017. <http://www.slac.stanford.edu/exp/glast/groups/canda/lat_Performance.htm>. Accessed: 2017-12-31.
- FERNANDEZ-RAMIREZ, C.; GUERRA, E. M. D.; UDIAS, A.; UDIAS, J. Properties of nucleon resonances by means of a genetic algorithm. *Physical Review C*, APS, v. 77, n. 6, p. 065212, 2008.
- FOGEL, L. J. *Intelligence through simulated evolution: forty years of evolutionary programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- FOMIN, V.; FENNELL, S.; LAMB, R.; LEWIS, D.; PUNCH, M.; WEEKES, T. New methods of atmospheric Cherenkov imaging for gamma-ray astronomy II. The differential position method. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 151–159, 1994.
- FOWLER, J.; FORTSON, L.; JUI, C.; KIEDA, D.; ONG, R.; PRYKE, C.; SOMMERS, P. A measurement of the cosmic ray spectrum and composition at the knee. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 49–64, 2001.
- FRANK, I. M.; TAMM, I. Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter. *Usp. Fiz. Nauk*, v. 93, p. 388–393, 1937.
- FRUCK, C. *The Galactic Center resolved with MAGIC and a new technique for Atmospheric Calibration*. Tese (Doutorado) — Technical University of Munich, 2015.
- FUNK, S. Space-and ground-based gamma-ray astrophysics. *ArXiv preprint arXiv:1508.05190*, 2015.
- FUNK, S.; HERMANN, G.; HINTON, J.; BERGE, D.; BERNLÖHR, K.; HOFMANN, W.; NAYMAN, P.; TOUSSENEL, F.; VINCENT, P. The trigger system of the HESS telescope array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 22, n. 3-4, p. 285–296, 2004.
- FUNK, S.; HINTON, J. Monte-carlo studies of the angular resolution of a future Cherenkov gamma-ray telescope. In: AIP. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2008. v. 1085, n. 1, p. 878–881.
- GAISSER, T. K.; ENGEL, R.; RESCONI, E. *Cosmic Rays and Particle Physics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.
- GAL, T.; LEBERLING, H. Redundant objective functions in linear vector maximum problems and their determination. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 1, n. 3, p. 176–184, 1977.

- GASS, S.; SAATY, T. The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics (NRL)*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1-2, p. 39–45, 1955.
- GILLESSEN, S.; HARNEY, H. Significance in gamma-ray astronomy—the Li & Ma problem in Bayesian statistics. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 430, n. 1, p. 355–362, 2005.
- GOLDBERG, D.; DEB, K.; KORB, B. Messy genetic algorithms: Motivation, analysis, and first results. *Complex systems*, n. 3, p. 493–530, 1989.
- GOLDBERG, D. E. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, 1989*. [S.l.: s.n.], 1989.
- GOLDBERG, D. E. Sizing populations for serial and parallel genetic algorithms. In: *Proc. 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 70–79.
- GREISEN, K. Cosmic ray showers. *Annual Review of Nuclear Science*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 10, n. 1, p. 63–108, 1960.
- GRIEDER, P. K. *Extensive Air Showers: High Energy Phenomena and Astrophysical Aspects-A Tutorial, Reference Manual and Data Book*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- GUTIÉRREZ, J. A. G.; COTTA, C.; FERNÁNDEZ-LEIVA, A. J. Evolutionary computation in Astronomy and Astrophysics: A review. *ArXiv preprint arXiv:1202.2523*, 2012.
- HARIK, G. R.; LOBO, F. G.; GOLDBERG, D. E. The compact genetic algorithm. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 3, n. 4, p. 287–297, 1999.
- HASSAN, T.; ARRABITO, L.; BERNLÖR, K.; BREGEON, J.; HINTON, J.; JOGLER, T.; MAIER, G.; MORALEJO, A.; PIERRO, F. D.; WOOD, M. *et al.* Second large-scale Monte Carlo study for the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1508.06075*, 2015a.
- HASSAN, T.; HUMENSKY, B.; NIETO, D.; WOOD, M. *et al.* Layout design studies for medium-sized telescopes within the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1508.06076*, 2015b.
- HASSAN, T. *et al.* Monte Carlo performance studies for the site selection of the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 93, p. 76–85, 2017.
- HAYNES, W. M. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. [S.l.]: CRC Press, 2016.
- HE, Z.; YEN, G. G.; ZHANG, J. Fuzzy-based pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 18, n. 2, p. 269–285, 2014.
- HECK; DIETER, e. a. *CORSIKA: A Monte Carlo code to simulate extensive air showers. FZKA 6019*. [S.l.], 1998.
- HECK, D.; SCHATZ, G.; KNAPP, J.; THOUW, T.; CAPDEVIELLE, J. *CORSIKA: A Monte Carlo code to simulate extensive air showers*. [S.l.], 1998.
- HEITLER, W. *The Quantum Theory of Radiation*. [S.l.]: Courier Corporation, 1954.
- HESS. 2017. <<https://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/pages/about/telescopes/>>. Accessed: 2017-12-24.

- HILLAS, A. Angular and energy distributions of charged particles in electron-photon cascades in air. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, IOP Publishing, v. 8, n. 10, p. 1461, 1982a.
- HILLAS, A. The sensitivity of Cerenkov radiation pulses to the longitudinal development of cosmic-ray showers. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, IOP Publishing, v. 8, n. 10, p. 1475, 1982b.
- HILLAS, A. Differences between gamma-ray and hadronic showers. *Space Science Reviews*, v. 75, p. 17–30, jan. 1996.
- HILLAS, A. Evolution of ground-based gamma-ray astronomy from the early days to the Cherenkov Telescope Arrays. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 43, p. 19–43, 2013.
- HILLAS, A. M. Cerenkov light images of EAS produced by primary gamma. In: *International Cosmic Ray Conference*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 3.
- HILLERMEIER, C. *Nonlinear multiobjective optimization: a generalized homotopy approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 135.
- HINTON, J. Ground-based gamma-ray astronomy with Cherenkov telescopes. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 11, n. 5, p. 055005, 2009.
- HINTON, J.; HOFMANN, W. Teraelectronvolt astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 47, p. 523–565, 2009.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear algebra*, 2nd. *New Jersey: Prentice*, 1971.
- HOFLER, A.; TERZIĆ, B.; KRAMER, M.; ZVEZDIN, A.; MOROZOV, V.; ROBLIN, Y.; LIN, F.; JARVIS, C. Innovative applications of genetic algorithms to problems in accelerator physics. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, APS, v. 16, n. 1, p. 010101, 2013.
- HOFLER, A. S. Genetic algorithms and their applications in accelerator physics. In: *Proceedings of the NA-PAC, Pasadena, CA*. [S.l.: s.n.], 2013.
- HOFMANN, W. How to focus a Cherenkov telescope. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 27, n. 4, p. 933, 2001.
- HOFMANN, W. Performance limits for Cherenkov instruments. *ArXiv preprint astro-ph/0603076*, 2006.
- HOFMANN, W.; HERMANN, G.; KONOPELKO, A.; KRAWCZYNSKI, H.; KÖHLER, C.; PÜHLHOFER, G.; AHARONIAN, F.; AKHPERJANIAN, A.; AYE, M.; BARRIO, J. *et al.* On the optimum spacing of stereoscopic imaging atmospheric Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 253–258, 2000a.
- HOFMANN, W.; JUNG, I.; KONOPELKO, A.; KRAWCZYNSKI, H.; LAMPEITL, H.; PÜHLHOFER, G. Comparison of techniques to reconstruct VHE gamma-ray showers from multiple stereoscopic Cherenkov images. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 135–143, 1999.
- HOFMANN, W.; LAMPEITL, H.; KONOPELKO, A.; KRAWCZYNSKI, H. Improved energy resolution for VHE gamma-ray astronomy with systems of Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, v. 12, p. 207–216, jan. 2000b.

- HOLDER, J. Atmospheric Cherenkov gamma-ray telescopes. *ArXiv preprint arXiv:1510.05675*, 2015.
- HOLLAND, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with application to Biology, Control, and Artificial Intelligence. *Ann Arbor, MI: University of Michigan Press*, 1975.
- HOMOLA, P.; ENGEL, R.; WILCZYŃSKI, H. Asymmetry of the angular distribution of Cherenkov photons of extensive air showers induced by the geomagnetic field. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 60, p. 47–53, 2015.
- HOOKE, R.; JEEVES, T. A. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM, v. 8, n. 2, p. 212–229, 1961.
- HORN, J.; NAFPLIOTIS, N.; GOLDBERG, D. E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence, Proceedings of the First IEEE Conference*. [S.l.], 1994. p. 82–87.
- HUEGE, T. Radio detection of cosmic ray air showers in the digital era. *Physics reports*, Elsevier, v. 620, p. 1–52, 2016.
- IBRAHIM, A.; RAHNAMEYAN, S.; MARTIN, M. V.; DEB, K. EliteNSGA-III: An improved evolutionary many-objective optimization algorithm. In: IEEE. *Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on*. [S.l.], 2016. p. 973–982.
- IKEDA, K.; KITA, H.; KOBAYASHI, S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal? In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*. [S.l.], 2001. v. 2, p. 957–962.
- INOUE, S.; GRANOT, J.; O’BRIEN, P. T.; ASANO, K.; BOUVIER, A.; CAROSI, A.; CONNAUGHTON, V.; GARCZARCZYK, M.; GILMORE, R.; HINTON, J. *et al.* Gamma-ray burst science in the era of the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 43, p. 252–275, 2013.
- INSELBERG, A. The plane with parallel coordinates. *The visual computer*, Springer, v. 1, n. 2, p. 69–91, 1985.
- ISHIBUCHI, H.; TSUKAMOTO, N.; NOJIMA, Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2008. CEC 2008.(IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE Congress on*. [S.l.], 2008. p. 2419–2426.
- JAIMES, A. L. Techniques to deal with many-objective optimization problems using evolutionary algorithms. *Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute*, 2011.
- JANSEN, T. *Analyzing evolutionary algorithms: The computer science perspective*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- JELLEY, J.; FRUIN, J.; PORTER, N.; WEEKES, T.; SMITH, F. G.; PORTER, R. Radio pulses from extensive cosmic-ray air showers. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 205, n. 4969, p. 327–328, 1965.

- JIN, N.; RAHMAT-SAMII, Y. Advances in particle swarm optimization for antenna designs: real-number, binary, single-objective and multiobjective implementations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 55, n. 3, p. 556–567, 2007.
- JOYCE, T.; HERRMANN, J. M. A review of no free lunch theorems, and their implications for metaheuristic optimisation. In: *Nature-Inspired Algorithms and Applied Optimization*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 27–51.
- JR., I. F.; YANG, X.-S.; FISTER, I.; BREST, J.; FISTER, D. A brief review of nature-inspired algorithms for optimization. *ArXiv preprint arXiv:1307.4186*, 2013.
- JR., J. A. R.; NORDHEIM, L. The energy distribution in cosmic-ray showers. *Physical Review*, APS, v. 74, n. 9, p. 1106, 1948.
- KAHN, F.; LERCHE, I. Radiation from cosmic ray air showers. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1966. v. 289, n. 1417, p. 206–213.
- KAMATA, K.; NISHIMURA, J. The lateral and the angular structure functions of electron showers. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Oxford University Press, v. 6, p. 93–155, 1958.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. *et al.* Optimization by simulated annealing. *science*, Washington, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.
- KÖHLER, C.; HERMANN, G.; HOFMANN, W.; KONOPELKO, A.; PLYASHESHNIKOV, A. Trigger conditions and effective areas of imaging air Cherenkov telescopes. *Astroparticle physics*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 77–85, 1996.
- KONOPELKO, A. Space-angular and temporal parameters of Cherenkov light emission in air showers of energy from 1 TeV down to 10 GeV. *HESS internal note*, 1997.
- KONOPELKO, A. Altitude effect in Cerenkov light flashes of low energy gamma-ray-induced atmospheric showers. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 30, n. 12, p. 1835, 2004.
- KONOPELKO, A. STEREO ARRAY of 30 m imaging atmospheric Cerenkov telescopes: A next-generation detector for ground-based high energy gamma-ray astronomy. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 191–207, 2005.
- KONOPELKO, A.; AHARONIAN, F.; HEMBERGER, M.; HOFMANN, W.; KETTLER, J.; PÜHLHOFER, G.; VÖLK, H. Effectiveness of TeV-ray observations at large zenith angles with a stereoscopic system of imaging atmospheric Cerenkov telescopes. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 25, n. 9, p. 1989, 1999a.
- KONOPELKO, A.; HEMBERGER, M.; AHARONIAN, F.; DAUM, A.; HOFMANN, W.; KÖHLER, C.; KRAWCZYNSKI, H.; VÖLK, H.; AKHPERJANIAN, A.; BARRIO, J. *et al.* Performance of the stereoscopic system of the HEGRA imaging air Cerenkov telescopes: Monte Carlo simulations and observations. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 275–289, 1999b.

- KOSACK, K.; BADRAN, H.; BOND, I.; BOYLE, P.; BRADBURY, S.; BUCKLEY, J.; CARTER-LEWIS, D.; CELIK, O.; CONNAUGHTON, V.; CUI, W. *et al.* TeV gamma-ray observations of the Galactic Center. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 608, n. 2, p. L97, 2004.
- KRAWCZYNSKI, H. *et al.* Gamma hadron separation methods for the VERITAS array of four imaging atmospheric Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 25, n. 6, p. 380–390, 2006.
- KRENNRICH, F.; BILLER, S.; BOND, I.; BOYLE, P.; BRADBURY, S.; BRESLIN, A.; BUCKLEY, J.; BURDETT, A.; GORDO, J. B.; CARTER-LEWIS, D. *et al.* Measurement of the multi-TeV gamma-ray flare spectra of Markarian 421 and Markarian 501. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 511, n. 1, p. 149, 1999.
- KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. Ranking-dominance and many-objective optimization. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*. [S.l.], 2007. p. 3983–3990.
- KUMAR, A.; K., D. Real-coded genetic algorithms with simulated binary crossover: studies on multimodal and multiobjective problems. *Complex Systems*, v. 9, p. 431–454, 1995.
- KUNG, H.-T.; LUCCIO, F.; PREPARATA, F. P. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM, v. 22, n. 4, p. 469–476, 1975.
- LAGUTIN, A.; RAIKIN, R.; INOUE, N.; MISAKI, A. Electron lateral distribution in air showers: scaling formalism and its implications. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 28, n. 6, p. 1259, 2002.
- LANDAU, L. D.; BELL, J.; KEARSLEY, M.; PITAEVSKII, L.; LIFSHITZ, E.; SYKES, J. *Electrodynamics of continuous media*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 8.
- LANG, S. *Algebra*. 3^a. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2002. (Graduate Texts in Mathematics).
- LAUMANN, M.; THIELE, L.; DEB, K.; ZITZLER, E. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 10, n. 3, p. 263–282, 2002.
- LEE, K. M.; RYAN, D. M. Scale height - A parameter for characterizing atmosphere. *The Physics Teacher*, AAPT, v. 53, n. 2, p. 122–123, 2015.
- LESSARD, R.; BUCKLEY, J.; CONNAUGHTON, V.; BOHEC, S. L. A new analysis method for reconstructing the arrival direction of TeV gamma rays using a single imaging atmospheric Cherenkov telescope. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 1–18, 2001.
- LI, B.; LI, J.; TANG, K.; YAO, X. Many-objective evolutionary algorithms: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, ACM, v. 48, n. 1, p. 13, 2015.
- LI, M.; YANG, S.; LIU, X. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 18, n. 3, p. 348–365, 2014.

- LI, T.-P.; MA, Y.-Q. Analysis methods for results in gamma-ray astronomy. *The Astrophysical Journal*, v. 272, p. 317–324, 1983.
- LINSLEY, J. Structure of large air showers at depth 834 g/cm^{-2} III-Applications. In: *International Cosmic Ray Conference*. [S.l.: s.n.], 1977. v. 12, p. 89–96.
- LIPARI, P. Concepts of “age” and “universality” in cosmic ray showers. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 6, p. 063001, 2009.
- LONGAIR, M. S. *High Energy Astrophysics*. 3^a. ed. [S.l.]: cambridge university Press, 2011.
- LU, C.-C. *et al.* Improving the HESS angular resolution using the Disp method. *ArXiv preprint arXiv:1310.1200*, 2013.
- MAATEN, L. V. D.; POSTMA, E.; HERIK, J. Van den. Dimensionality reduction: a comparative review. *J Mach Learn Res*, v. 10, p. 66–71, 2009.
- MACCARONE, M. C.; PARSONS, D.; GAUG, M.; REYES, R. d. I. *et al.* Tools and procedures for the CTA array calibration. *ArXiv preprint arXiv:1709.03081*, 2017.
- MAIER, G.; ARRABITO, L.; BERNLÖHR, K.; BREGEON, J.; PIERRO, F. D.; HASSAN, T.; JOGLER, T.; HINTON, J.; MORALEJO, A.; WOOD, M. *et al.* Monte Carlo performance studies of candidate sites for the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1508.06042*, 2015.
- MAIER, G.; ARRABITO, L.; BERNLÖHR, K.; BREGEON, J.; CUMANI, P.; HASSAN, T.; MORALEJO, A. Performance of the Cherenkov Telescope Array. *ArXiv preprint arXiv:1709.01381*, 2017.
- MAIER, G.; HOLDER, J. Eventdisplay: An analysis and reconstruction package for ground-based gamma-ray astronomy. *ArXiv preprint arXiv:1708.04048*, 2017.
- MALINOWSKA, A. B. Nonessential objective functions in linear multiobjective optimization problems. *Control and Cybernetics*, v. 35, p. 873–880, 2006.
- MATTHEWS, J. A Heitler model of extensive air showers. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 22, n. 5, p. 387–397, 2005.
- MAZIN, D.; RAUE, M.; BEHERA, B.; INOUE, S.; INOUE, Y.; NAKAMORI, T.; TOTANI, T.; CONSORTIUM, C. *et al.* Potential of EBL and cosmology studies with the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle physics*, Elsevier, v. 43, p. 241–251, 2013.
- MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 3^a. ed. [S.l.]: Wiley, 1997. 672 p.
- MIETTINEN, K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 12.
- MIRZOYAN, R. Brief history of ground-based very high energy gamma-ray astrophysics with atmospheric air Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 53, p. 91–99, 2014.
- MITCHELL, G. S.; GILL, R. K.; BOUCHER, D. L.; LI, C.; CHERRY, S. R. In vivo Cherenkov luminescence imaging: a new tool for molecular imaging. *Phil. Trans. R. Soc. A*, The Royal Society, v. 369, n. 1955, p. 4605–4619, 2011.

MOHANTY, G.; BILLER, S.; CARTER-LEWIS, D.; FEGAN, D.; HILLAS, A.; LAMB, R.; WEEKES, T.; WEST, M.; ZWEERINK, J. Measurement of TeV gamma-ray spectra with the Cherenkov imaging technique. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 15–43, 1998.

MOYA, M. L. Observaciones de la Nebulosa y Pulsar del Cangrejo. 2007.

MUNKRES, J. R. *Topology*. 2^a. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.

NAUROIS, M. D.; ROLLAND, L. A high performance likelihood reconstruction of γ -rays for imaging atmospheric Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 32, n. 5, p. 231–252, 2009.

NERLING, F.; BLÜMER, J.; ENGEL, R.; RISSE, M. Universality of electron distributions in high-energy air showers - Description of Cherenkov light production. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 24, n. 6, p. 421–437, 2006.

OHM, S.; ELDIK, C. van; EGBERTS, K. γ /hadron separation in very-high-energy γ -ray astronomy using a multivariate analysis method. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 31, n. 5, p. 383–391, 2009.

PARDALOS, P. M.; ŽILINSKAS, A.; ŽILINSKAS, J. *Non-Convex Multi-Objective Optimization*. [S.l.]: Springer, 2016.

PARETO, V. *Cours d'économie politique*. [S.l.]: Librairie Droz, 1964. v. 1.

PARSONS, R.; HINTON, J. A Monte Carlo template based analysis for air-Cherenkov arrays. *Astroparticle physics*, Elsevier, v. 56, p. 26–34, 2014.

PATNAIK, S.; YANG, X.-S.; NAKAMATSU, K. *Nature-Inspired Computing and Optimization: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 10.

PATRIGNANI, C. *et al.* Review of Particle Physics. *Chinese Physics C*, IOP Publishing, v. 40, n. 10, p. 100001, 2016.

PIERRO, F. di; KHU, S.-T.; SAVIC, D. A. An investigation on preference order ranking scheme for multiobjective evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 11, n. 1, p. 17–45, 2007.

PLYASHESHNIKOV, A.; AHARONIAN, F.; VÖLK, H. On the potential of the imaging atmospheric Cherenkov technique for study of cosmic gamma rays in the energy range 10-100 TeV. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 26, n. 2, p. 183, 2000.

PORTOCARRERO, C.; ARQUEROS, F. On the Cherenkov light produced at several observatory altitudes by extensive air showers in the energy range 0.01-10 TeV. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 24, n. 1, p. 235, 1998.

PÜHLHOFER, G.; BOLZ, O.; GÖTTING, N.; HEUSLER, A.; HORNS, D.; KOHNLE, A.; LAMPEITL, H.; PANTER, M.; TLUCZYKONT, M.; AHARONIAN, F. *et al.* The technical performance of the HEGRA system of imaging air Cherenkov telescopes. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 267–291, 2003.

PUPPI, G.; BRIDGE, H.; GREISEN, K. *Progress in Cosmic Ray Physics*. [S.l.: s.n.]. v. 3.

- RAHMAN, M.; BHAT, P.; ACHARYA, B. S.; CHITNIS, V.; MAJUMDAR, P.; VISHWANATH, P. Gamma ray and hadron generated Cerenkov photon spectra at various observation altitudes. *Experimental Astronomy*, Springer, v. 11, n. 2, p. 113–131, 2001.
- RAO, M.; SINHA, S. The origin of the hump in the Cerenkov lateral distribution in gamma-ray showers and a possible means of separating them from proton showers. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 6, p. 811, 1988.
- RECHENBERG, I. *Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Tese (Doutorado) — Stuttgart, Fommann-Holzboog 1973.
- RECHENBERG, I. Cybernetic solution path of an experimental problem. Ministry of Aviation, Royal Aircraft Establishment, Library Translation 1122, Farnborough. Ministry of Aviation, Royal Aircraft Establishment, Library Translation 1122, Farnborough, 1965.
- ROBERTSON, R.; GERMANOS, M. S.; LI, C.; MITCHELL, G. S.; CHERRY, S. R.; SILVA, M. D. Optical imaging of Cerenkov light generation from positron-emitting radiotracers. *Physics in Medicine & Biology*, IOP Publishing, v. 54, n. 16, p. N355, 2009.
- ROSSI, B.; GREISEN, K. Cosmic-ray Theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 13, n. 4, p. 240, 1941.
- ROWE, J.; WHITLEY, D.; BARBULESCU, L.; WATSON, J.-P. Properties of gray and binary representations. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 12, n. 1, p. 47–76, 2004.
- RUDOLPH, G. Convergence analysis of canonical genetic algorithms. *IEEE transactions on neural networks*, IEEE, v. 5, n. 1, p. 96–101, 1994.
- SATO, H.; AGUIRRE, H. E.; TANAKA, K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs. In: SPRINGER. *International conference on evolutionary multi-criterion optimization*. [S.l.], 2007. p. 5–20.
- SAXENA, D. K.; DURO, J. A.; TIWARI, A.; DEB, K.; ZHANG, Q. Objective reduction in many-objective optimization: Linear and nonlinear algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 17, n. 1, p. 77–99, 2013.
- SCHAFFER, J. D. *Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*. Tese (Doutorado) — Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1984.
- SCHERINI, V.; COLLABORATION, P. A. *et al.* Search for ultra-high energy photons with the Pierre Auger Observatory. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 630, n. 1, p. 226–229, 2011.
- SCHRÖDER, F. Radio detection of Extensive Air Showers. *ArXiv e-prints*, jan. 2017a.
- SCHRÖDER, F. G. Radio detection of cosmic-ray air showers and high-energy neutrinos. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 93, p. 1–68, 2017b.
- SHIBATA, M. Breakdown of Feynman scaling in high-energy cosmic-ray interactions. *Physical Review D*, APS, v. 24, n. 7, p. 1847, 1981.

- SIMON, D. *Evolutionary optimization algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- SOBCZYŃSKA, D. Limits to the energy resolution of a single air Cherenkov telescope at low energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 36, n. 4, p. 045201, 2009.
- SOBCZYŃSKA, D. The expected Cherenkov light density and its fluctuations for a large detector. In: ICRCCOMMITTEE. *International Cosmic Ray Conference*. Lodz, Poland, 2009a. v. 4, n. 4, p. 2829–2832.
- SOBCZYŃSKA, D. The role of the hadron initiated single electromagnetic subcascades in IACT observations. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 42, n. 9, p. 095201, 2015.
- SOBCZYŃSKA, D.; BEDNAREK, W. Influence of clouds on the parameters of images measured by IACT at very high energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 41, n. 12, p. 125201, 2014.
- SÖRENSEN, K. Metaheuristics - the metaphor exposed. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 22, n. 1, p. 3–18, 2015.
- SPECKMAYER, P.; HÖCKER, A.; STELZER, J.; VOSS, H. The toolkit for multivariate data analysis, TMVA 4. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2010. v. 219, n. 3, p. 032057.
- STAMATESCU, V.; ROWELL, G.; DENMAN, J.; CLAY, R.; DAWSON, B.; SMITH, A.; SUDHOLZ, T.; THORNTON, G.; WILD, N. Timing analysis techniques at large core distances for multi-TeV gamma ray astronomy. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 34, n. 12, p. 886–896, 2011.
- STANEV, T. *High Energy Cosmic Rays*. [S.l.]: Springer, 2010.
- SUDHOFF. 2017. <<https://engineering.purdue.edu/~sudhoff/ee630/>>. Accessed: 2017-12-24.
- SÜLFLOW, A.; DRECHSLER, N.; DRECHSLER, R. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces. In: SPRINGER. *Evolutionary multi-criterion optimization*. [S.l.], 2007. p. 715–726.
- SZANECKI, M.; BERNLÖHR, K.; SOBCZYŃSKA, D.; NIEDŹWIECKI, A.; SITAREK, J.; BEDNAREK, W. Influence of the geomagnetic field on the IACT detection technique for possible sites of CTA observatories. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 45, p. 1–12, 2013.
- TEODORESCU, L. Evolutionary computation in High Energy Physics. *ArXiv preprint arXiv:0804.0369*, 2008.
- TEVCAT. 2017. <<http://tevcat.uchicago.edu/>>. Accessed: 2017-12-31.
- TEVCAT. 2017. <<http://tevcat.uchicago.edu/>>. Accessed: 2017-12-31.
- THE CTA CONSORTIUM. Cherenkov Telescope Array: The next generation gamma-ray observatory. *ArXiv preprint arXiv:1709.05434*, 2017.

- TORCZON, V. On the convergence of pattern search algorithms. *SIAM Journal on optimization*, SIAM, v. 7, n. 1, p. 1–25, 1997.
- TURVER, K.; WEEKES, T. Gamma-ray astronomy from 10 to 100 GeV. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 45, n. 1, p. 99–108, 1978.
- TUŠAR, T.; FILIPIČ, B. Visualization of Pareto front approximations in evolutionary multiobjective optimization: A critical review and the prosection method. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 19, n. 2, p. 225–245, 2015.
- UCHIYAMA, Y.; AHARONIAN, F. A.; TANAKA, T.; TAKAHASHI, T.; MAEDA, Y. Extremely fast acceleration of cosmic rays in a supernova remnant. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 449, n. 7162, p. 576, 2007.
- VENN, J. I. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 10, n. 59, p. 1–18, 1880.
- VERCELLONE, S.; AGNETTA, G.; ANTONELLI, L.; BASTIERI, D.; BELLASSAI, G.; BEL-LUSO, M.; BIGONGIARI, C.; BILLOTTA, S.; BIONDO, B.; BONANNO, G. *et al.* The ASTRI mini-array science case. *ArXiv preprint arXiv:1307.5671*, 2013.
- VÖLK, H. J.; BERNLÖHR, K. Imaging very high energy gamma-ray telescopes. *Experimental Astronomy*, Springer, v. 25, n. 1-3, p. 173–191, 2009.
- WAGNER, R. M. Measurement of very high energy gamma-ray emission from four blazars using the MAGIC Telescope and a comparative blazar study. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, JSTOR, v. 119, n. 860, p. 1201–1203, 2007.
- WALKER, D. J.; EVERSON, R. M.; FIELDSEND, J. E. Visualizing mutually nondominating solution sets in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 17, n. 2, p. 165–184, 2013.
- WANG, H.; HE, S.; YAO, X. Nadir point estimation for many-objective optimization problems based on emphasized critical regions. *Soft Computing*, Springer, v. 21, n. 9, p. 2283–2295, 2017.
- WEEKES, T. C. TeV radiation from galactic sources. *Space Science Reviews*, Springer, v. 59, n. 3-4, p. 315–364, 1992.
- WEEKES, T. C.; CAWLEY, M.; FEGAN, D.; GIBBS, K.; HILLAS, A.; KOWK, P.; LAMB, R.; LEWIS, D.; MACOMB, D.; PORTER, N. *et al.* Observation of TeV gamma rays from the Crab Nebula using the atmospheric Cerenkov imaging technique. *The Astrophysical Journal*, v. 342, p. 379–395, 1989.
- WOLPERT, D. H.; MACREADY, W. G. No free lunch theorems for optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 67–82, 1997.
- WOLPERT, D. H.; MACREADY, W. G. *et al.* *No free lunch theorems for search*. [S.l.], 1995.

YANG, S.; LI, M.; LIU, X.; ZHENG, J. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 17, n. 5, p. 721–736, 2013.

YANG, X.-S. *Nature-inspired optimization algorithms*. [S.l.]: Elsevier, 2014.

YUAN, Y.; ONG, Y. S.; GUPTA, A.; XU, H. Objective reduction in many-objective optimization: Evolutionary multiobjective approaches and comprehensive analysis. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, 2017.

YUAN, Y.; XU, H.; WANG, B. An improved NSGA-III procedure for evolutionary many-objective optimization. In: ACM. *Proceedings of the 2014 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. [S.l.], 2014. p. 661–668.

YUAN, Y.; XU, H.; WANG, B.; YAO, X. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 1, p. 16–37, 2016.

ZATSEPIN, V. The angular distribution of intensity of Cerenkov radiation from extensive cosmic-ray air showers. *Soviet Physics JETP*, v. 20, n. 2, 1965.

ZATSEPIN, V.; CHUDAKOV, A. Lateral distribution of the intensity of Cerenkov radiation from extensive air showers. *Soviet Physics JETP*, AMER INST PHYSICS CIRCULATION FULFILLMENT DIV, 500 SUNNYSIDE BLVD, WOODBURY, NY 11797-2999, v. 15, n. 6, p. 1126–1130, 1962a.

ZATSEPIN, V.; CHUDAKOV, A. Spatial distribution of Cerenkov light from extensive air showers. *JETP*, v. 42, p. 1622–1628, 1962b.

ZHANG, Q.; LI, H. MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 11, n. 6, p. 712–731, 2007.

ZHU, C.; XU, L.; GOODMAN, E. D. Generalization of pareto-optimality for many-objective evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 299–315, 2016.

Apêndices

APÊNDICE A

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

Neste apêndice, a equação 4.7 será deduzida, calcularemos as probabilidades que surgem na equação 4.8 e mostraremos o algoritmo utilizado para o cálculo da área interna de um arranjo com N telescópios. Por fim, comentamos as equações 4.11 e 4.12.

Primeiramente, suponhamos três telescópios $\{a, b, c\}$ e multiplicidade igual a dois, ou seja, um chuvaireiro é considerado observado se pelo menos dois telescópios o detectarem. Nessa situação, há quatro maneiras diferentes de o evento ser detectado. Portanto, a probabilidade de detecção em um elemento de área é dada por

$$P_2^3 = P_a P_b + P_a P_c + P_b P_c - 2 \cdot P_a P_b P_c, \quad (\text{A.1})$$

em que descontamos a probabilidade $P_a P_b P_c$ duas vezes, visto que ela já foi incluída três vezes, nas três primeiras parcelas da soma, como mostra o diagrama de Venn da Figura 142 (VENN, 1880).

Para quatro telescópios e multiplicidade igual a dois, o evento será detectado se qualquer combinação de dois ou três ou quatro telescópios o detectarem. Portanto, a probabilidade de detecção terá a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned} P_2^4 = & P_a P_b + P_a P_c + P_a P_d + P_b P_c + P_b P_d + P_c P_d + \\ & + \kappa_1 \cdot (P_a P_b P_c + P_a P_b P_d + P_a P_c P_d + P_b P_c P_d) + \kappa_2 \cdot (P_a P_b P_c P_d), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

em que devemos encontrar os valores de κ_1 e κ_2 baseando-nos em não repetir probabilidades já incluídas nos termos anteriores.

Como a equação A.2 deve reduzir à equação A.1 no caso de não haver o quarto telescópio, ou seja, quando $P_d = 0$, então claramente devemos ter $\kappa_1 = -2$.

Além disso, a probabilidade $P_a P_b P_c P_d$ só pode ser contada uma vez, como exemplifica a Figura 142. Com isso descobrimos o valor de κ_2 . Cada uma das seis combinações dois a dois e cada uma das quatro combinações três a três inclui a probabilidade $P_a P_b P_c P_d$. Somamos $P_a P_b P_c P_d$ seis vezes, mas como $\kappa_1 = -2$, descontamos $P_a P_b P_c P_d$ oito vezes. Isto é, descontamos demais e portanto devemos acrescentar o termo $P_a P_b P_c P_d$ que foi retirado em excesso. Logo, sabemos que κ_2 será um número positivo. Como devemos apenas contar $P_a P_b P_c P_d$ uma vez, segue que $1 = 6 + \kappa_1 \cdot 4 + \kappa_2$ implica $\kappa_2 = 3$.

Esses argumentos podem ser generalizados. Por exemplo, para cinco telescópios,

$$P_2^5 = C_2^5 + \kappa_1 \cdot C_3^5 + \kappa_2 \cdot C_4^5 + \kappa_3 \cdot C_5^5, \tag{A.3}$$

em que C_v^N representa a soma das probabilidades de todas as combinações possíveis de N telescópios tomados v a v . Não havendo o quinto telescópio, sua probabilidade de detecção é zero, e a equação A.3 deve reduzir à equação A.2. Logo, $\kappa_1 = -2$ e $\kappa_2 = 3$. Uma vez que existem dez ter-

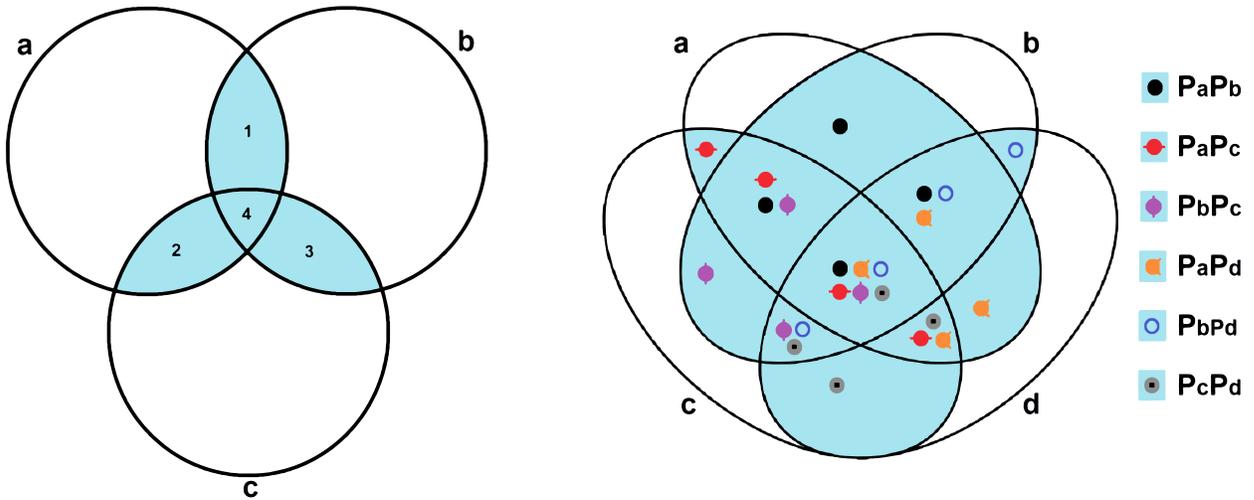


Figura 142 – *Esquerda*: Dados três telescópios $\{a, b, c\}$, a Figura mostra que o espaço amostral constitui oito possibilidades, considerando a não detecção. Pela condição de *trigger* duplo, o chuvaire é detectado apenas nas quatro possibilidades representadas em azul, cuja área representa a probabilidade dada pela equação A.1. Descontamos a intersecção tripla duas vezes, porque ela está incluída nas três intersecções duplas. *Direita*: Caso de quatro telescópios $\{a, b, c, d\}$ e multiplicidade igual a dois. Os pontos pretos (discos) representam a área correspondente à probabilidade $P_a P_b$. Os outros pontos correspondem às outras probabilidades do tipo $P_i P_j$ para todas as combinações possíveis de dois telescópios i e j . O diagrama mostra que as regiões que correspondem às intersecções entre três telescópios foram incluídas três vezes cada. Logo, devemos ter $\kappa_1 = -2$. Pela Figura, a região de intersecção entre os quatro telescópios foi incluída seis vezes. Mas foi removida oito vezes pelas intersecções triplas (não mostradas na Figura). Portanto, com $\kappa_2 = 3$ ela é incluída apenas uma vez.

mos em C_2^5 , dez termos em C_3^5 e cinco termos em C_4^5 , então a probabilidade $P_a P_b P_c P_d P_e$ foi incluída $10 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 5$ vezes. Como ela só pode ser contada uma vez, segue que $\kappa_3 = -4$.

Para diminuir o custo computacional, observamos que se $C_v^N = 0$, então $C_{v+1}^N = 0$. Os valores dos coeficientes da série $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$ dependem apenas de m . Portanto, adicionaremos um índice à notação deles, κ^m . Para generalizar a probabilidade para N telescópios e multiplicidade m qualquer, tomamos primeiramente o caso particular $N = m + 1$ para descobrir o valor de κ_1^m . Por exemplo, para $m = 3$, consideramos $N = 4$. Assim,

$$P_3^4 = P_a P_b P_c + P_a P_b P_d + P_a P_c P_d + P_b P_c P_d - 3 \cdot P_a P_b P_c P_d. \tag{A.4}$$

Com o valor de κ_1^3 , podemos sucessivamente obter todos os outros termos da série. Por exemplo,

$$P_3^5 = C_3^5 - 3 \cdot C_4^5 + \kappa_2^3 \cdot C_5^5 \tag{A.5}$$

implica que $10 - 3 \cdot 5 + \kappa_2^3 = 1$, ou seja, $\kappa_2^3 = 6$.

De maneira geral, segue claramente que $\kappa_1^m = -m$. Para dado $N \geq m$, há $N - m$ valores possíveis na série dos coeficientes κ^m . Os coeficientes da série κ^m representam quantos termos devemos acrescentar ou descontar por já havermos incluído dada probabilidade nos termos anteriores. Esses coeficientes exibem uma regularidade e, definindo $\kappa_0^m = 1$, os reconhecemos como os elementos das colunas do triângulo de Pascal, porém com sinais positivo e negativo alternados. A Figura 143 mostra as primeiras colunas do triângulo de Pascal.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

Figura 143 – As primeiras colunas do triângulo de Pascal.

Probabilidades na equação 4.8

Na equação 4.8, precisamos calcular a probabilidade P_M de exatamente M telescópios detectarem o evento em um conjunto com N telescópios, sendo dada multiplicidade igual a m . Seja o caso $N = 4$ e $m = 3$. Nessa situação,

$$P_4 = C_4^4 \quad (\text{A.6})$$

$$P_3 = C_3^4 + \eta_1 \cdot C_4^4, \quad (\text{A.7})$$

em que devemos descontar de C_3^4 todas as probabilidades que correspondem à detecção por quatro telescópios. Os elementos de $\{C_3^4\}$ são produtos de três termos e os elementos de $\{C_4^4\}$ são produtos de quatro termos. Então cada elemento de $\{C_3^4\}$ contém apenas um elemento de $\{C_4^4\}$, de modo que devemos descontar de cada elemento de $\{C_3^4\}$ exatamente um elemento de $\{C_4^4\}$. Assim, $\eta_1 = -4$

Para o caso $N = 5$ e $m = 3$, temos que

$$P_5 = C_5^5 \quad (\text{A.8})$$

$$P_4 = C_4^5 + \zeta_1 \cdot C_5^5 \quad (\text{A.9})$$

$$P_3 = C_3^5 + \zeta_2 \cdot C_4^5 + \zeta_3 \cdot C_5^5. \quad (\text{A.10})$$

Uma vez que $|C_4^5| = 5$, claramente devemos ter $\zeta_1 = -5$.

Os elementos de $\{C_3^5\}$ são produtos de três termos, e os elementos de $\{C_4^5\}$ são produtos de quatro termos, escolhidos entre 5 telescópios. Logo, cada elemento dentro de C_3^5 inclui dois elementos que são produtos de quatro probabilidades. Como $|C_3^5| = 10$, então devo retirar 20 elementos da forma produto de quatro probabilidades. Sendo que $|C_4^5| = 5$, então devemos retirar 4 vezes o tamanho desse conjunto. Ou seja, $\zeta_2 = -4$.

Para encontrar ζ_3 , notamos que cada elemento dentro de $\{C_3^5\}$ inclui um elemento de C_5^5 , que na realidade é um conjunto unitário. Além disso, cada elemento de $\{C_4^5\}$ também inclui o elemento de $\{C_3^5\}$. Portanto, $|C_3^5| + \zeta_2 |C_4^5| + \zeta_3 \cdot 1 = 0$ implica que $\zeta_3 = 10$.

Concluimos que a série dos valores ζ correspondem às colunas do triângulo de Pascal, com sinais positivo e negativo alternados; à cada coluna corresponde um valor de M . Generalizando, escrevemos

$$P_M = C(M) \cdot P(M)^\dagger, \quad (\text{A.11})$$

em que $C(M) = (C_M^N, C_{M+1}^N, C_{M+2}^N, \dots)$ é um vetor com número de entradas que depende de M e $P(M)^\dagger$ é a $(M-1)$ -ésima coluna do triângulo de Pascal, com sinais positivo e negativo alternados, dada com o mesmo número de elementos que $C(M)$. Por exemplo, $P(3) = (1, -4, 10, -20, 35, \dots)$ e $P(4) = (1, -5, 15, -35, 70, \dots)$. Finalmente, observamos que $P_3^N = P_3 + P_4 + \dots + P_N$.

Cálculo da Área Interna

Para calcular a área efetiva de detecção interna de um arranjo, a equação 4.6 deve ser integrada apenas na região interna do arranjo de N telescópios, que definimos a seguir. Dados N pontos em um plano, linhas retas são construídas entre todos os pares de pontos, de modo que a área interna ao arranjo é o maior polígono convexo que pode ser formado com essas linhas. Com outras palavras, a área interna do arranjo é igual à união de todos os triângulos formados por combinações das posições de três telescópios. Em alguns problemas de otimização, estaremos interessados apenas na região interna ao arranjo de N telescópios. Para verificar se um ponto está na região interna ou externa, calculamos todas as combinações dos N telescópios três a três e testamos se o ponto pertence a pelo menos um dos triângulos definidos pelas combinações.

A Figura 144 mostra uma região com três telescópios, marcados nas posições $\{P_1, P_2, P_3\}$. Um telescópio é escolhido como referência, por exemplo o telescópio na posição P_1 . Um ponto P_0 dentro do triângulo pode ser representado pelo vetor $\vec{r}_{0,1}$ em relação ao telescópio de referência, sendo dado pela combinação linear:

$$\vec{r}_{0,1} = u\vec{r}_{2,1} + v\vec{r}_{3,1}, \quad u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1. \quad (\text{A.12})$$

Isso significa que um ponto estará na região externa do triângulo se $u < 0 \vee v < 0 \vee u + v \geq 1$. Os coeficientes u e v podem ser calculados a partir das posições dos telescópios e do ponto P_0 , bastando usar a Regra de Cramer na equação A.12 (HOFFMAN; KUNZE, 1971).

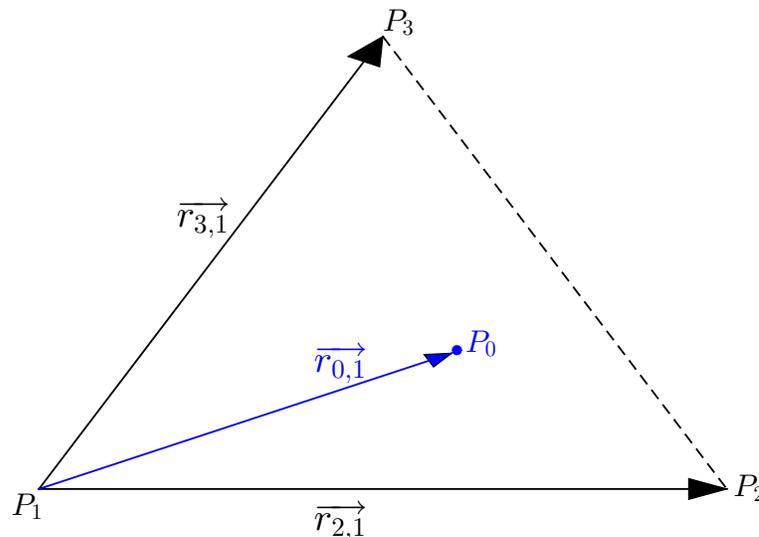


Figura 144 – Três telescópios, marcados nas posições $\{P_1, P_2, P_3\}$. A equação A.12 fornece um teste para verificar se um ponto P_0 está dentro ou fora do triângulo.

Cálculo das Métricas

As equações 4.11 e 4.12 representam médias de quantidades que desejamos otimizar para o arranjo de telescópios, como a intensidade e a excentricidade da imagem na câmera, o ângulo estéreo entre pares de telescópios e as flutuações do sinal. As médias não demonstram relações de proporcionalidade com relação à resolução angular ou resolução em energia do arranjo. São métricas heurísticas que supomos serem funções monótonas com relação à resolução angular e à resolução em energia do arranjo. São portanto diferentes das métricas exatas exibidas nas seções 4.3, 4.4 e 4.5.

As equações 4.11 e 4.12 são úteis por duas razões. A primeira é que elas foram ponderadas pela probabilidade de detecção em cada elemento de área na altitude de observação. Dessa maneira, o aumento da área efetiva de observação, ou a quantidade de eventos observados, não implica o aumento do valor das métricas que usamos para traduzir a qualidade dessa observação. A sensibilidade do arranjo dada na seção 3.7 não compartilha essa característica, ou seja, podemos aumentar a sensibilidade tanto aumentando a área efetiva, quanto melhorando a resolução angular, por exemplo. No entanto, o que desejamos é entender como as diferentes componentes que formam a sensibilidade dependem uma da outra.

A segunda é que, embora ambas possuam a forma geral

$$\langle L \rangle = \frac{\int LPdA}{\int PdA} \simeq \frac{\sum_i P_i L_i}{\sum_i P_i}, \quad (\text{A.13})$$

na realidade, a quantidade que desejamos otimizar - por exemplo, a flutuação na intensidade do sinal na câmera ou o valor dos parâmetros *Size* e *Lenght* - é dada como função apenas do parâmetro de impacto de um chuva em relação a um telescópio. Assim, a equação A.13 permite traduzir a informação relativa a um telescópio - como a flutuação da Figura 30 - para o espaçamento relativo entre os N telescópios de um arranjo.

A equação A.13 é uma média sobre os elementos de área, e o valor de L_i é uma média sobre os telescópios que detectam eventos no elemento de área i . Para o cálculo de L_i , começamos com o exemplo de três telescópios $\{a, b, c\}$ e multiplicidade igual a dois. A Figura 142 mostra que existem quatro maneiras de o evento ser observado, com probabilidades dadas por

$$\begin{aligned} p_1 &= P_a P_b - P_a P_b P_c \\ p_2 &= P_a P_c - P_a P_b P_c \\ p_3 &= P_b P_c - P_a P_b P_c \\ p_4 &= P_a P_b P_c \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Claramente, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = P_2^3$. Os telescópios $\{a, b\}$ unicamente detectam com probabilidade p_1 ; nesse caso a flutuação média de sinal no elemento de área i será dada por $(L_a + L_b)/2$. Se os

três detectarem, a flutuação média será dada por $(L_a + L_b + L_c)/3$. Como há quatro maneiras de o evento ser detectado, cada qual com uma dada probabilidade, temos que

$$L_i = \frac{1}{P_2^3} \left[p_1 \left(\frac{L_a + L_b}{2} \right) + p_2 \left(\frac{L_a + L_c}{2} \right) + p_3 \left(\frac{L_b + L_c}{2} \right) + p_4 \left(\frac{L_a + L_b + L_c}{3} \right) \right] \quad (\text{A.15})$$

Como no problema são dadas as probabilidades de detecção dos telescópios, $\{P_a, P_b, P_c\}$, e não as probabilidades $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, devemos substituir na equação A.15 as probabilidades da equação A.14. O resultado é:

$$L_i = \frac{1}{P_2^3} \left[P_a P_b \left(\frac{L_a + L_b}{2} \right) + P_a P_c \left(\frac{L_a + L_c}{2} \right) + P_b P_c \left(\frac{L_b + L_c}{2} \right) - 2 \cdot P_a P_b P_c \left(\frac{L_a + L_b + L_c}{3} \right) \right],$$

onde reconhecemos o aparecimento dos coeficientes C_v^N . Para o caso geral, a conclusão é a seguinte:

$$L_i = \frac{1}{P_m^N} \sum_{v=m}^N \kappa_v^m L_v^N C_v^{N\dagger}, \quad (\text{A.16})$$

em que L_v^N é um vetor em que cada elemento é a média aritmética de uma das combinações possíveis de v telescópios. Para cada v , temos um vetor diferente $C_v^{N\dagger}$, que é um vetor coluna contendo as probabilidades de todas as combinações possíveis de v telescópios.

Ao substituir a equação A.16 na equação A.13, temos a média ponderada:

$$\langle L \rangle \simeq \frac{\sum_{i,v=m}^N \kappa_v^m L_v^N C_v^{N\dagger}}{\sum_i P_i}, \quad (\text{A.17})$$

O caso da equação 4.11 difere apenas porque o ângulo estéreo é função de dois telescópios, ao contrário da flutuação na intensidade do sinal da Figura 30, que depende apenas de um telescópio. A diferença é que na equação A.15, ao invés de calcular o valor de L médio, calculamos o valor do seno médio entre todos os pares possíveis de telescópios que aparecem em cada um dos termos da soma daquela equação.

A Figura 145 mostra alguns exemplos para arranjos triangulares e quadriculares da distribuição dos valores de $P_i \Theta_i$ para os quais a equação 4.11 calcula a média. A Figura 146 mostra distribuições típicas de $P_i L_i$ onde se está calculando a média pela equação 4.12. Os primeiros picos das distribuições bimodais encontradas nas Figuras 145 e 146 desaparecem quando as regiões com menor probabilidade de detecção são retiradas, ou seja, as regiões mais afastadas do arranjo. As Figuras 147 e 148 mostram novamente essas distribuições retirando todas as regiões com probabilidade de detecção menor que 10 %. Os valores das métricas se alteram apenas para os maiores espaçamentos, como mostram as Figuras 149 e 150. Isso significa que os primeiros picos das distribuições das Figuras 145 e 146 não alteram a forma como as métricas variam nos casos testados.

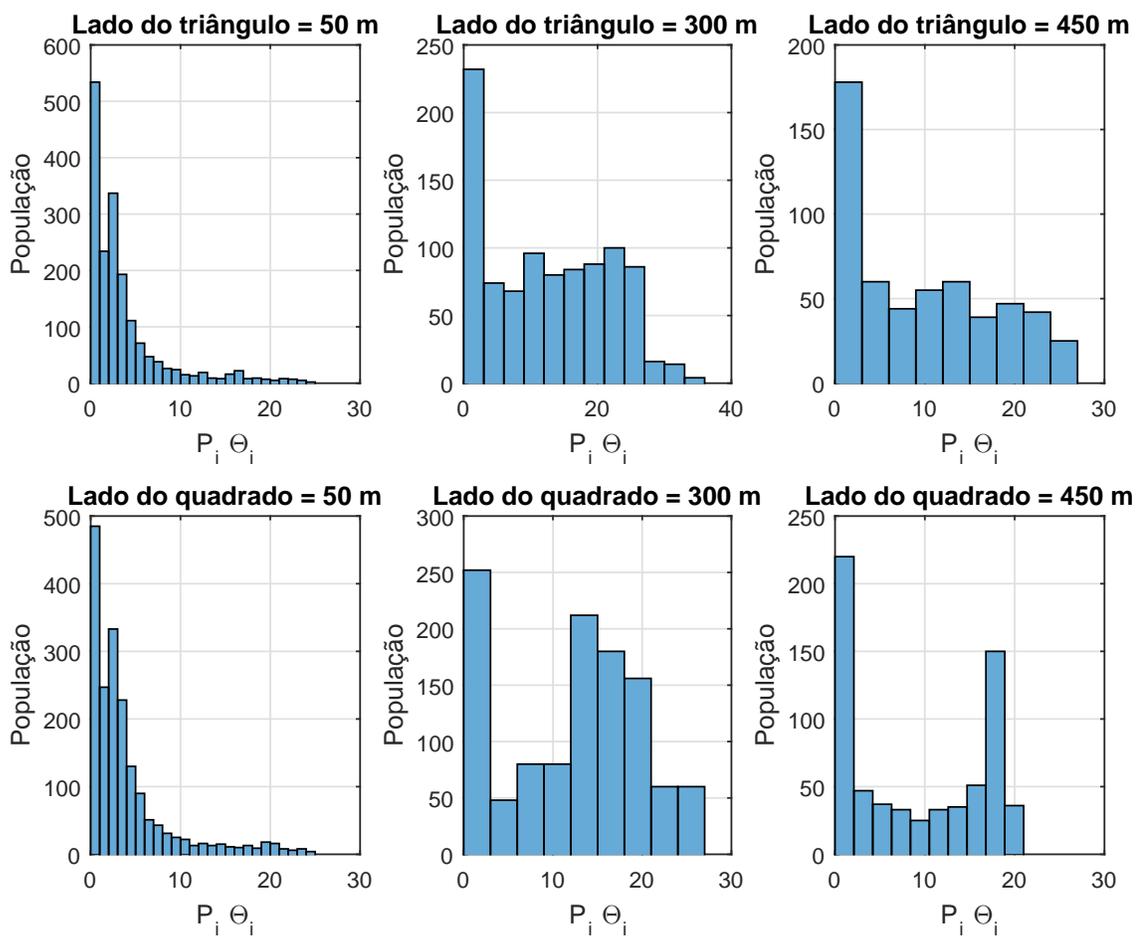


Figura 145 – Distribuição dos valores de $P_i \theta_i$ da equação 4.11 para arranjos a) triangulares e b) quadrangulares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

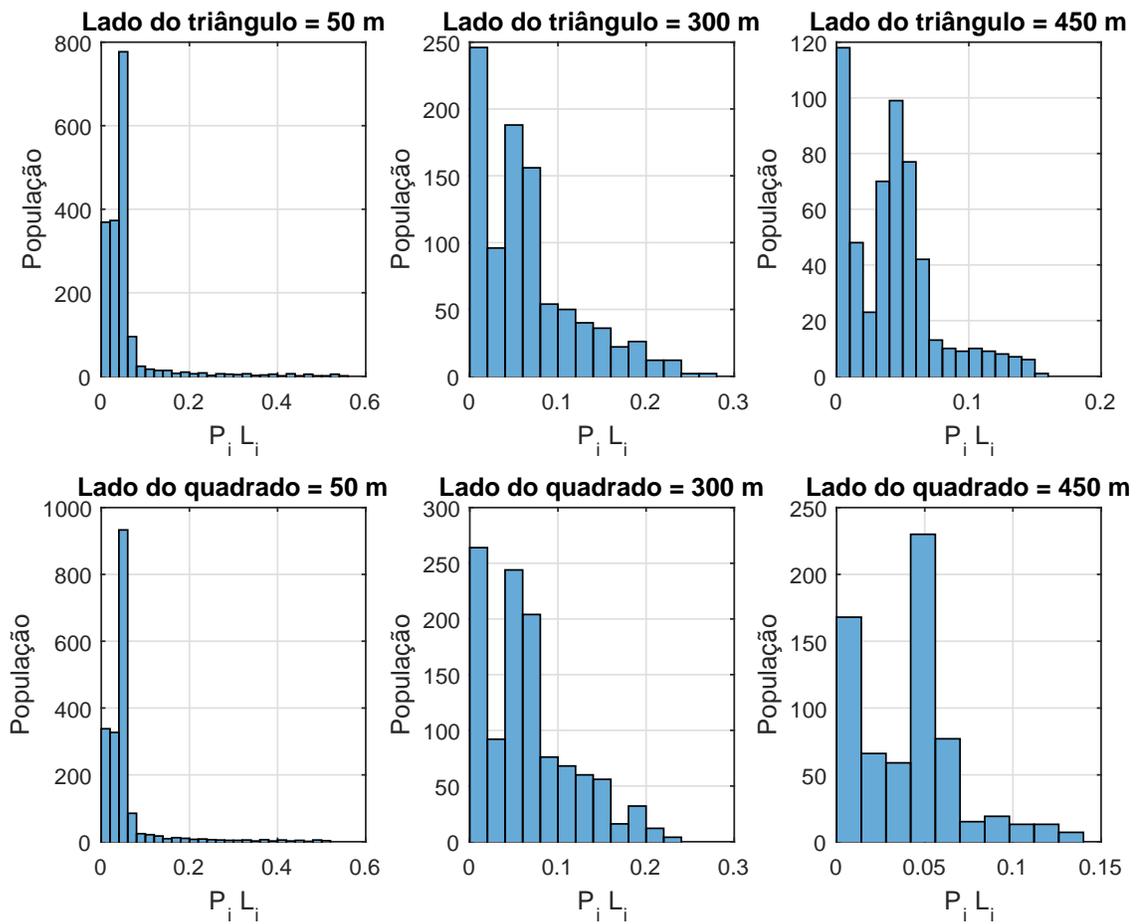


Figura 146 – Distribuição dos valores de $P_i L_i$ da equação 4.12 para arranjos triangulares e quadrangulares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV.

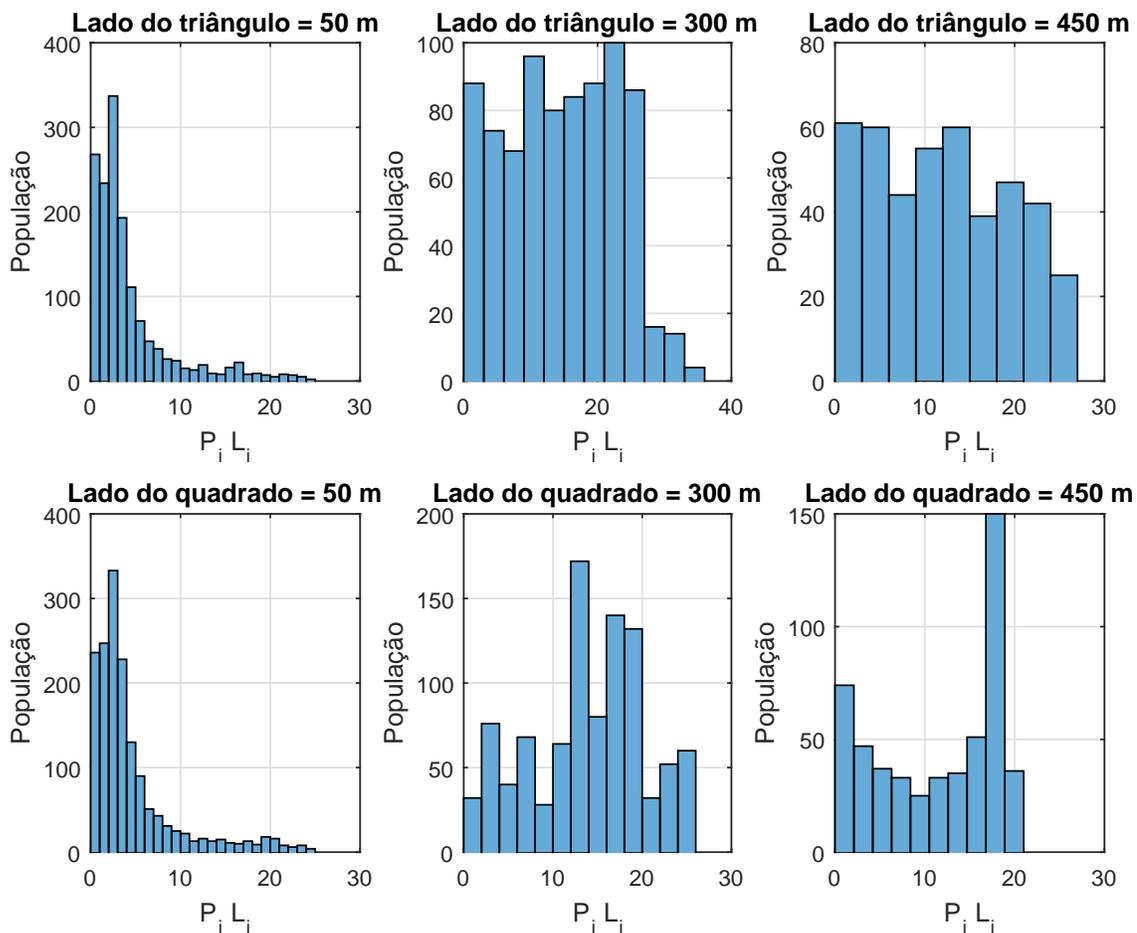


Figura 147 – Distribuição dos valores de $P_i \Theta_i$ da equação 4.11 para arranjos a) triangulares e b) quadrangulares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.

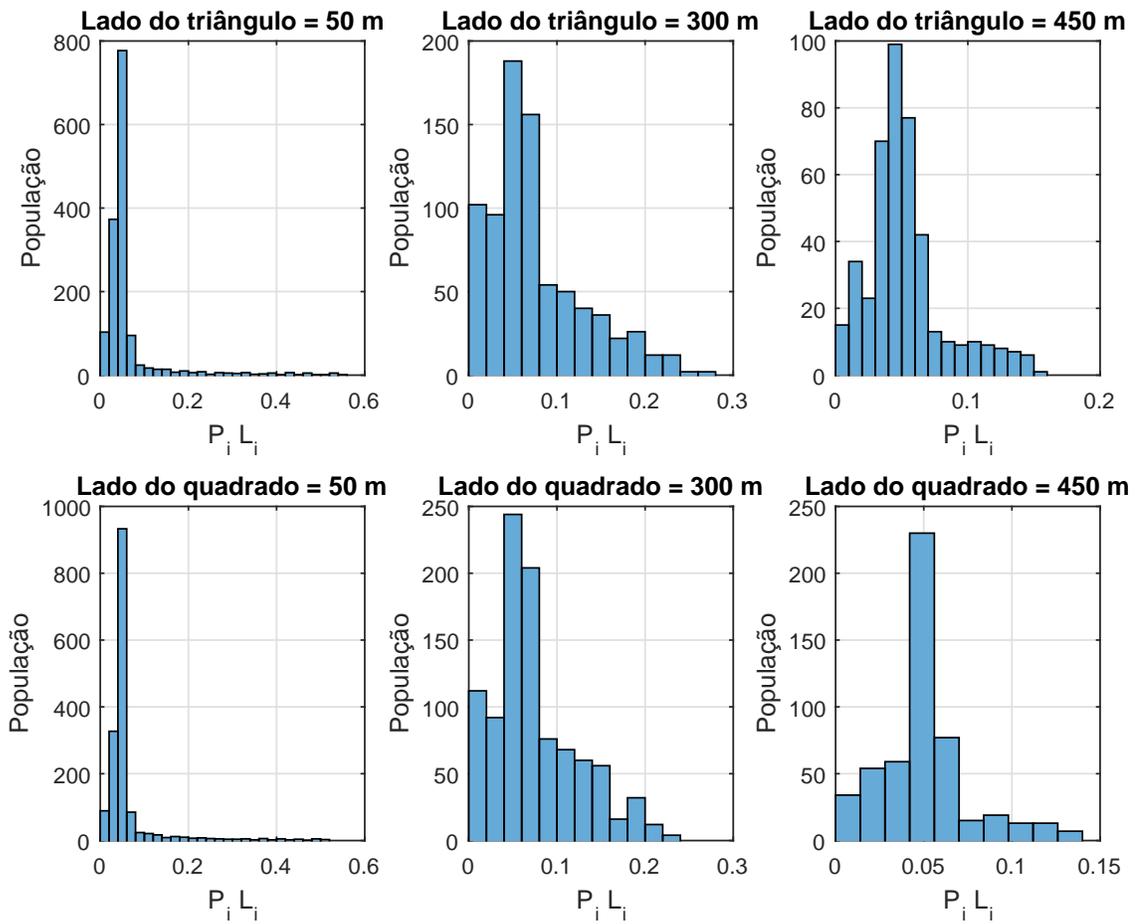


Figura 148 – Distribuição dos valores de $P_i L_i$ da equação 4.12 para arranjos triangulares e quadrangulares com telescópios médios observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.

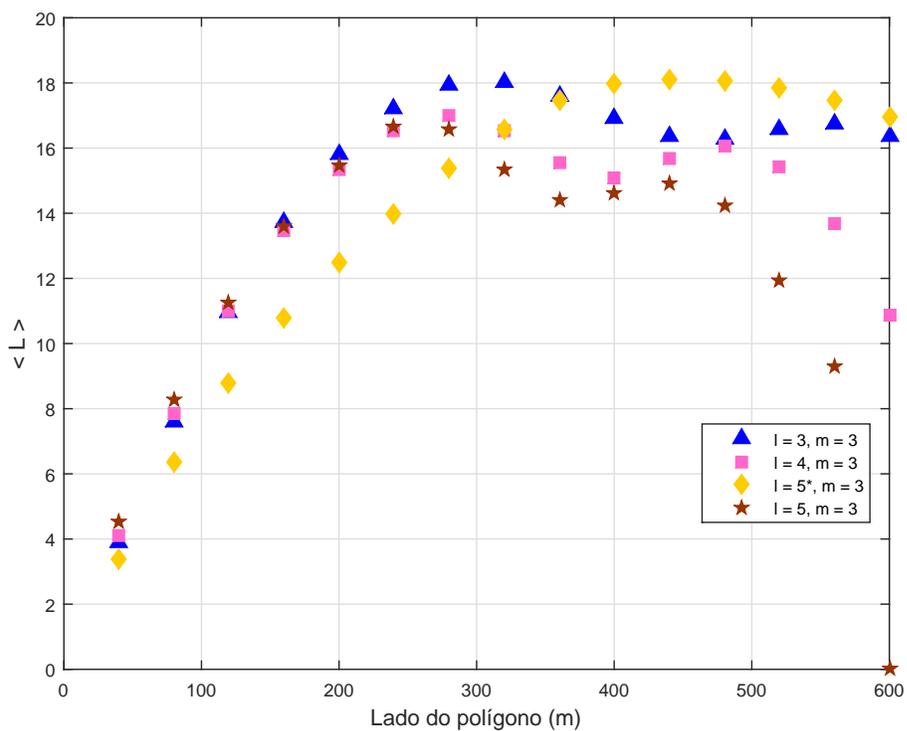


Figura 149 – Área efetiva pós-*trigger* na energia de 1 TeV para telescópios médios posicionados nos vértices de polígonos regulares de l lados com multiplicidade de *trigger*, m , igual a 3. O caso $l = 5^*$ corresponde a um quadrado com um quinto telescópio situado no centro do quadrado. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.

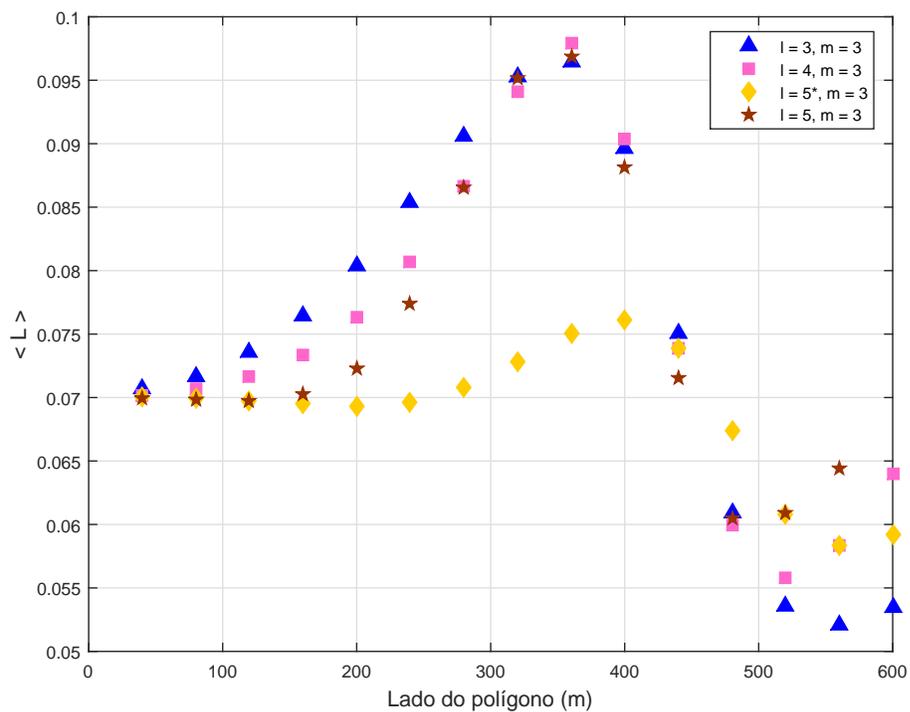


Figura 150 – Valores da flutuação média em energia calculada a partir da equação 4.12 em função de diferentes valores para o lado de arranjos com telescópios dispostos nos vértices de triângulos, quadrados, pentágonos e quadrados com face centrada. Foi utilizado o telescópio médio observando eventos de 1 TeV. Foram retiradas as regiões mais afastadas do arranjo, com probabilidade de detecção menor que 10 %.