

Tese de Doutorado

**Efeitos de Spin, Velocidade e Dimensionalidade  
em Potenciais Inter-partículas Associados  
a Modelos de Gauge**

**Leonardo Ospedal Prestes Rosas**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

**Rio de Janeiro, Abril de 2017**

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer

- inicialmente a DEUS,
- a todos meus familiares pelo carinho e apoio. Em especial, meus pais, Lucinei e Jaqueline, e aos irmãos Daniel, Netto e Henrique.
- ao orientador, prof. José Abdalla Helayël-Neto, pela confiança, postura humana e também pela disposição de ministrar tantos cursos.
- aos demais colaboradores: Denis, Felipe, Gustavo, Kim, Mario e Pedro.
- aos membros (doutores) da banca: Cresus Godinho, Everton Abreu, Márcio Capri, Sebastião Dias e Tobias Micklitz, pelas sugestões e críticas construtivas, as quais foram consideradas nessa versão final.
- ao pessoal que me acolheu aqui no RJ e com quem tive o prazer de dividir apartamentos: Cleonice, Enrike, Eduardo, Henrique, Marília, Max, Phillip, Rodrigo, Sra. Serafina e Vicente.
- ao pessoal da fisioterapia: Denise e Jonas de Itararé-SP, pelos cuidados com meu joelho nos primeiros meses após a cirurgia, e Aleandra, Agnes, Isabella e Luciano do RJ, pela ajuda nos meses seguintes.
- aos colegas do CBPF e ao pessoal da APG-CBPF.
- aos professores Álvaro Nogueira, Daniel Barci, Dória, Humberto Belich e Marcelo Guimarães e Sebastião pelos cursos/discussões de física.
- ao CBPF pela infraestrutura fornecida e aos seus funcionários. Em especial, Ricardo e Bete da CFC e Gil da APL.
- ao CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

## Resumo

Neste trabalho, apresentamos novas contribuições ao estudo de potenciais inter-partículas dependentes do spin, da velocidade e com efeitos de dimensionalidade. Inicialmente, calculamos estes potenciais para algumas Eletrodinâmicas estendidas no espaço-tempo quadri-dimensional. Em seguida, os potenciais são reconsiderados em um cenário cinco-dimensional. Uma nova prescrição é proposta para restringir a interação ao subespaço de dimensão quatro imerso nas cinco dimensões e, então, aplicada aos casos das Eletrodinâmicas de Maxwell e Proca. Os resultados são comparados com o que se obtém trabalhando-se diretamente no espaço-tempo quadri-dimensional. O que está em jogo é a comutatividade dos processos de redução dimensional e cálculo de efeitos semi-clássicos ou quânticos. Finalmente, obtemos a versão cinco-dimensional da Hamiltoniana de Pauli para férmions de Dirac e discutimos algumas possíveis simetrias em presença e na ausência de massa, já que esta não é uma questão trivial em cinco dimensões.

## Abstract

This work sets out to compute and discuss effects of spin, velocity and dimensionality on inter-particle potentials systematically derived from gauge field-theoretic models. The investigation is pursued in four and five dimensional space-times and what we have in mind is to evaluate the commutativity of two processes: computing the semi-classical or quantum effects and taking the dimensional reduction to four dimensions. For that, we here propose a dimensional reduction scheme based on what we refer to as dimensional restriction and its imprints in four dimensions. Once (massive) Dirac fermions appear in our five-dimensional scenario, we also devote some attention to the discussion of the symmetries related to a fermion mass term in this space-time. Finally, in this context, we work out the five-dimensional version of the Pauli equation focusing on the discussion of the spin in five and four dimensions.

## Apresentação e Contextualização

A ideia de interação entre partículas, ou entre partículas e algum sistema externo, é de central importância em todas as áreas, modelos e teorias da Física. E este conceito vem evoluindo e sendo refinado à medida que a Física avança em sintonia com os métodos matemáticos e os sistemas a serem estudados se tornam sempre mais complexos, seja na escala sub-microscópica ou nas escalas astrofísica e cosmológica.

O contato inicial que temos com a ideia de uma interação é através do conceito de força, quando somos introduzidos aos princípios fundamentais da Mecânica Newtoniana. Em seguida, passando a uma descrição mais analítica dos sistemas mecânicos, passamos a representar as chamadas forças conservativas através das funções-potencial, quando se estabelece que a força está ligada ao gradiente do potencial. A situação mais comum é quando temos potenciais dependentes das respectivas posições das partículas que interagem. Potenciais clássicos com dependência nas velocidades das partículas interagentes apareceram mais tardiamente; em 1920, Charles G. Darwin [1] mostrou que o potencial que descreve a interação entre duas partículas com cargas elétricas, além do conhecido termo de Coulomb, apresenta termos dependentes das velocidades, obtidos a partir da Eletrodinâmica Clássica como correções de ordem  $v^2/c^2$ .

Com a introdução da Equação de Schrödinger, a partir de 1926, muito se estudou e se tem discutido sobre potenciais dependentes da posição, velocidade e spin na Mecânica Quântica. No tratamento das interações entre partículas através do formalismo da Teoria Quântica de Campos, o potencial deixa de ser primordial e quem ocupa o lugar primário é a densidade Lagrangeana de interação. O potencial deixa de ser um dado inicial e passa a ser calculado como um efeito de baixas energias a partir de um sistema de campos quânticos associados a partículas cujas interações se deseja investigar. Porém, o processo de obtenção de potenciais a partir da Teoria Quântica de Campos é uma questão que passa por sutilezas. Por exemplo, na obtenção de correções envolvendo *loop* podem aparecer contribuições não físicas na amplitude e, conforme [2]-[5], será preciso adotar certas prescrições para eliminá-las antes do cálculo do potencial.

É neste contexto que se desenvolveram os trabalhos ao longo do Projeto de Doutorado, que foi finalizado com a presente tese. O problema central, relatado nos diferentes capítulos — que contemplam diferentes situações — é a derivação de potenciais entre partículas carregadas e com dependência nas posições, velocidades e graus-de-liberdade de spin. Os potenciais que investigamos são semi-clássicos, considerando-se que algum tipo de partícula mediadora (virtual) seja trocada entre as partículas que interagem. Diferentes modelos serão considerados e a questão será discutida em conexão com dimensões extras, o que culminará com uma proposta particular de redução dimensional à qual nos referiremos como *restrição dimensional*.

A introdução geral desta Tese encontra-se no Capítulo 1. A proposta é que cada capítulo posterior tenha a sua própria introdução mais específica e também as suas próprias conclusões. A ideia é conferir a cada capítulo um status de maior independência. O desenvolvimento desta Tese está organizado de acordo com o esboço abaixo.

No Capítulo 1, apresentaremos uma introdução da área de potenciais dependentes do spin e da velocidade, com algumas motivações, tanto teóricas quanto experimentais, e discutiremos uma das metodologias para calcular esses potenciais. Aqui aproveitaremos para fazer uma breve discussão de outras colaborações nesta área, que resultaram em trabalhos publicados [6] [7] [8]. O primeiro e terceiro foram apresentados nas teses [9] e [10], respectivamente, e o segundo será discutido na tese [11]. Neste capítulo, como ilustração e preparação para os demais que seguem, será feito um caso particular em detalhes: o potencial da interação eletromagnética entre férmions (spin-1/2).

No Capítulo 2, desenvolveremos uma prescrição para o cálculo de alguns potenciais, envolvendo uma certa classe de propagadores e correntes bosônicas, de spin-0 e spin-1, e fermiônicas de spin-1/2. Em seguida, aplicaremos isso aos casos das Eletrodinâmicas de Maxwell, Podolski-Lee-Wick e a com parafóton. A principal questão que nos limitaremos a investigar é a seguinte:

*o quanto diferem os potenciais, dependentes do spin e da velocidade, quando trocamos a natureza dos portadores de carga/matéria, ou seja, quando trocamos as correntes de spin-1/2 por spin-0 ou spin-1.*

Nossa contribuição a esta investigação foi publicada em [12].

No Capítulo 3, iniciaremos uma pesquisa conectando potenciais e dimensões extras. Os trabalhos na literatura ficam restritos às correções estáticas no setor de monopolo-monopolo, desprezando as contribuições de spin e velocidade. Não adotaremos esta postura aqui. Em vista disso, propomos o seguinte trabalho:

*considerar as contribuições do spin e da velocidade em um cenário com uma dimensão espacial extra (espaço-tempo 5D) e estudar suas possíveis repercussões para 4D.*

Esta investigação nos coloca questões não consideradas até então como, por exemplo, a interpretação do spin em 5D e o aparecimento de um novo elemento – o pseudo-spin – trazido pelos acoplamentos provenientes da dimensão extra. Além disso, nos deparamos com o problema de compatibilizar a simetria de paridade com férmions massivos em 5D, na descrição da interação eletromagnética. Esses resultados devem ser submetidos [13]. Em seguida, apresentaremos algumas incursões exploratórias em 5D. Analisaremos a Hamiltoniana de Pauli e discutiremos a possibilidade de incluir outras simetrias, globais ou locais, na Lagrangeana de Dirac. Estas encontram-se em seu estágio inicial, requerendo alguns prosseguimentos e aplicações.

No final dos Capítulos 2 e 3, apresentaremos nossas Conclusões Parciais, onde faremos uma autocrítica aos assuntos desenvolvidos. Por último, nas Considerações Finais, analisaremos a nossa contribuição de modo geral e discutiremos as nossas perspectivas.

No Apêndice A, exibiremos as integrais de Fourier necessárias aos cálculos dos potenciais. Em seguida, no Apêndice B, apresentaremos alguns acoplamentos fermiônicos em 4D e seus limites não-relativísticos.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Metodologia . . . . .	5
1.2	Interação Eletromagnética entre férmions . . . . .	8
1.3	Comparando diferentes representações . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Extensões da Eletrodinâmica de Maxwell</b>	<b>17</b>
2.1	Prescrições para os cálculos dos potenciais . . . . .	19
2.1.1	Potencial de interação entre partículas de spin-0 . . . . .	19
2.1.2	Potencial de interação entre partículas de spin-1/2 . . . . .	21
2.1.3	Potencial de interação entre partículas de spin-1 . . . . .	22
2.2	Eletrodinâmica de Maxwell . . . . .	25
2.3	Eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick . . . . .	27
2.4	Eletrodinâmica com parafóton . . . . .	30
2.5	Conclusões Parciais . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Aspectos de Dimensionalidade</b>	<b>37</b>
3.1	Revisão Histórica . . . . .	38
3.2	Potencial em 5D e sua restrição para 4D . . . . .	48
3.2.1	Férmions massivos e a Paridade em 5D . . . . .	49
3.2.2	Eletrodinâmica de Maxwell em 5D . . . . .	51
3.2.3	Restrição para 4D . . . . .	56
3.2.4	Eletrodinâmica de Proca em 5D e sua restrição . . . . .	58



3.3	Incursoes Exploratorias em 5D . . . . .	62
3.3.1	Equacao de Pauli em 5D . . . . .	62
3.3.2	Outras simetrias em 5D . . . . .	66
3.4	Conclusoes Parciais . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Consideracoes Finais</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>Integrais de Fourier</b>	<b>78</b>
<b>B</b>	<b>Acoplamentos fermiônicos</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A busca por novos potenciais de interação ou desvios naqueles já bem conhecidos — como, por exemplo, gravitacional e eletromagnético — tem sido cada vez mais investigada, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental, como uma informação relevante para obter os regimes de energia/escala das teorias/modelos propostos ou também como uma possibilidade de fixar ou limitar os seus parâmetros.

A interação gravitacional foi a primeira a ser investigada. Nomes como Philiponus, Galileu/Newton foram os primeiros a efetuarem experimentos, envolvendo a queda de materiais e o pêndulo, respectivamente, com o objetivo de investigar a universalidade desta interação, i.e., o princípio da equivalência. Para uma apresentação de outros nomes, percorrendo desde os anos 500 até a década de 1990, bem como outros experimentos e suas precisões, destacamos o trabalho de revisão [14]. Uma outra questão, que ainda soma esforços de investigação, refere-se a procura por desvios/correções na lei de potência do potencial gravitacional — ou na lei da força — em curtas distâncias. Existem diversas motivações como, por exemplo, a inclusão da contribuição do dilaton [15], da quinta-força [16] [17] e outras correções provenientes de espaço curvo e/ou dimensões extras [18]. Para uma revisão mais detalhada, apresentando outras motivações, os experimentos e seus limites, destacamos os trabalhos [19]-[22]. Além dessas situações, temos a possibilidade de incorporar as correções de spin [23]-[27]. Nesta direção, citamos alguns experimentos mais recentes [28] [29], que investigaram os acoplamentos massa-spin e torção-spin.

No caso da interação eletromagnética, temos que a procura por desvios na lei de Coulomb, via  $F \sim 1/r^{2+\epsilon}$ , começa a ser efetuada por Robison, Cavendish e Coulomb entre 1769-1785. Para uma revisão desta pesquisa, com outros nomes e resultados mais recentes, indicamos os trabalhos de Williams-Faller-Hill [30] e Fulcher [31]. A medida que vamos diminuindo a distância, esperamos obter correções ao potencial de Coulomb ou, equivalentemente, na interação de monopolo-monopolo. Por exemplo, pode entrar em cena o spin, trazendo correções do tipo monopolo-dipolo, dipolo-dipolo e expansões de multipolos superiores. Destacamos aqui um trabalho mais recente, em 2014, publicado na *Nature* [32], em que foi investigada a interação envolvendo os spins, de dois elétrons de valência de íons separados na região do micrômetro. Neste trabalho, os autores verificaram um decaimento  $\sim 1/r^3$ , típico da interação entre dipolos. Além disso, podemos introduzir correções ao potencial de Coulomb através de extensões da Eletrodinâmica de Maxwell. No Capítulo 2, retornaremos a esta questão, apresentando algumas motivações e propostas de extensão.

Precisamos ser um pouco mais específicos ao citarmos o termo *potencial*, pois existem duas situações distintas. Podemos estar nos referindo a interação entre uma partícula (ou um sistema/conjunto) e um campo de fundo: gravitacional, eletromagnético entre outros. A outra possibilidade seria o potencial de interação inter-partículas, normalmente associado à interação de duas partículas através de um campo mediador (ou partícula virtual). Nesta tese, o foco principal será a última linha de pesquisa, especificamente, *no estudo das contribuições do spin e da velocidade aos potenciais de interação inter-partículas*. No entanto, no Capítulo 3, dedicaremos uma seção ao estudo de uma partícula na presença de campos externos no contexto de espaço-tempo  $5D$ .

Retornando com a questão das interações. Após discutirmos brevemente a procura por desvios na gravitação e no eletromagnetismo, passemos agora às outras interações. Alguns anos após a formulação do Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares, desenvolvido entre as décadas de 1960-1970, já se tinha a percepção de que este não resolvia todas as questões e, portanto, precisaria ser complementado com novos setores/simetrias.

Destacamos aqui dois problemas: a *hierarquia de gauge/naturalidade* [33] [34], i.e., a mudança abrupta na escala de energia quando introduzimos correções quânticas à massa do Higgs, e a *matéria escura* [35]-[38], que, assim como a gravitação, não está contemplada no Modelo Padrão. Temos diversas propostas para resolver esses problemas como, por exemplo, supersimetria, Higgs composto e dimensões extras. É nesse contexto que, a partir da década de 1980, começa uma intensa busca por novos bósons, provenientes de setores extras ao Modelo Padrão, i.e., no Além do Modelo Padrão, bem como a procura pela quinta-força. Para trabalhos de revisão nessas áreas, destacamos [39]-[43]. Essa linha de pesquisa permanece até os dias atuais, com a perspectiva de sinais desses bósons em experimentos do LHC. Além disso, ressaltamos um experimento recente, envolvendo o decaimento de um estado excitado do Berílio para o fundamental. Este processo pode estar indicando a presença de um novo bóson, conforme [44].

Em 1984, o seminal trabalho de Moody e Wilczek [45] coloca em evidência a importância de se investigar as correções de spin ao potencial inter-partículas. Neste trabalho, os autores calculam os potenciais de interação entre férmions através da troca do *áxion* [46] [47] — possível candidato à matéria escura — e verificam que as principais contribuições aos potenciais são aquelas dependentes do spin. Mais adiante, outros trabalhos foram feitos, dentre os quais destacamos o de Dobrescu e Mocioiu em 2006 [48], que chama novamente a atenção para as correções de spin ao potencial e também as componentes dependentes da velocidade. Explorando a paridade e a invariância de rotação, os autores classificaram 16 perfis de interações em baixas energias — envolvendo o spin e a velocidade — devido a troca de um bóson. A partir destes trabalhos, o estudo das interações envolvendo o spin e a velocidade começa a se tornar um objeto de investigação mais frequente na literatura. Uma das questões é a classificação de quais acoplamentos carregam estas dependências. Isso pode ser relevante em diversas situações como, por exemplo, em interações com a matéria escura [49] e nas descrições de teorias efetivas para os núcleons [50] [51]. Uma outra possibilidade, é a análise da repercussão no potencial quando alteramos a estrutura do propagador. Nesta direção, destacamos alguns casos,

como a troca de *unparticles* [52], que são campos com espectro de massa contínuo (veja, por exemplo, a tese [53]), e em cenários com violação da simetria de Lorentz [54]-[56].

Antes de finalizarmos esta Introdução, vamos citar outros experimentos envolvendo os potenciais dependentes do spin e da velocidade.

Começemos com a comparação de relógios com  $^3\text{He}/^{129}\text{Xe}$  [57]. Neste experimento, investiga-se interações não-magnéticas do tipo  $V \sim \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$ , com  $\mathbf{a}$  podendo ser, por exemplo, a posição, um campo de fundo associado a violação de Lorentz, o campo gravitacional, o campo elétrico. Neste caso, ressalta-se aqui também a investigação no momento de dipolo elétrico do  $^{129}\text{Xe}$ . Existem outros experimentos com  $^3\text{He}$  [58], que procuram efeitos envolvendo as interações monopolo-dipolo:  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$  e  $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$ . Para estas interações, temos também experimentos com nêutrons [59].

Destacamos outras possibilidades em experimentos com átomos [60], investigando interações dipolo-dipolo, com as dependências  $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$  e  $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})$ , e da interação e espectroscopia de moléculas quirais [61], estas com a procura por efeitos monopolo-dipolo, citados anteriormente. Em um regime mais macroscópico, temos experimentos com terras raras [62], em que é possível investigar várias interações com spin e velocidade, dependendo da orientação relativa do detector e material, e experimentos com pêndulo de torção [63], envolvendo interações com altas densidades de elétrons, cujo objetivo foi a análise das dependências dipolo-dipolo, incluindo a configuração com  $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{r}$ . Na direção de altas densidades de elétrons, temos também a procura por efeitos da distribuição média de elétrons da terra (geo-elétrons) em elétrons/núcleons de laboratórios [64]. Por fim, citamos alguns trabalhos de revisão [65], discutindo esses e outros experimentos.

Uma vez colocado que existem algumas motivações e propostas para a extensão do Modelo Padrão, ou alguns de seus setores, passemos a análise de como o potencial inter-partículas reage frente algumas destas extensões. Isso será o foco principal no desenvolvimento desta tese.

Este Capítulo encontra-se organizado conforme o seguinte esboço. Na primeira seção, apresentaremos uma metodologia para o cálculo do potencial inter-partículas. Em seguida,

na segunda seção, aplicaremos esta metodologia para a obtenção do potencial da interação eletromagnética entre férmions (spin-1/2). Por último, faremos uma breve discussão de outras colaborações, em que investigamos diferentes representações para um mesmo spin e as suas possíveis repercussões nos perfis dos potenciais.

## 1.1 Metodologia

Vamos considerar espalhamento elástico, a nível de árvore, de duas partículas (1 e 2) com energia/momento inicial ( $i$ ) e final ( $f$ ) dados por  $(E_{1,i}, \mathbf{p}_{1,i}; E_{2,i}, \mathbf{p}_{2,i})$  e  $(E_{1,f}, \mathbf{p}_{1,f}; E_{2,f}, \mathbf{p}_{2,f})$ . É conveniente trabalharmos no referencial do centro-de-massa (CM), com a parametrização em termos dos seguintes momentos independentes: o momento transferido,  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{1,f} - \mathbf{p}_{1,i} = -(\mathbf{p}_{2,f} - \mathbf{p}_{2,i})$ , e o momento médio,  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{1,f})/2 = (\mathbf{p}_{2,i} + \mathbf{p}_{2,f})/2$ , conforme a Fig. 1.1. Através da conservação da energia e do momento, temos que  $q^0 = 0$  e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$  para simplificar a amplitude.

Ao longo deste trabalho, usaremos  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$  e as unidades naturais com  $\hbar = c = 1$ .

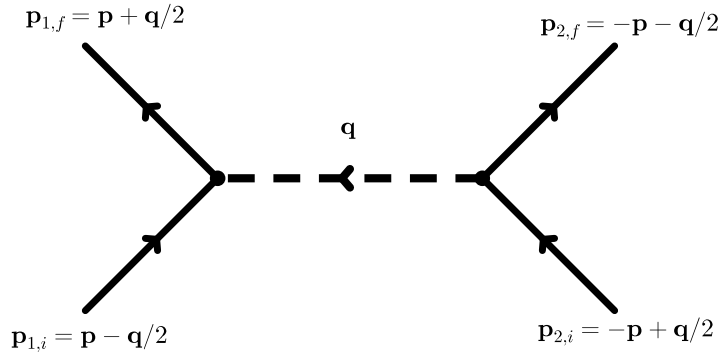


Figura 1.1: Atribuições de momento no referencial do centro-de-massa

A fim de incluirmos as correções de spin e da velocidade ao potencial, utilizaremos o método descrito em [45] [48]. A prescrição é que o potencial,  $V$ , pode ser obtido a partir

da primeira aproximação de Born, i.e., efetuando-se a integral de Fourier da amplitude não-relativística,  $\mathcal{M}_{NR}$ , com respeito ao momento transferido  $\mathbf{q}$ ,

$$V(r) = - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{M}_{NR} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

onde  $\mathcal{M}_{NR}$  está relacionada com a amplitude relativística de Feynman,  $\mathcal{M}$ , conforme as convenções de [66], através de

$$\mathcal{M}_{NR} = \frac{1}{\sqrt{2E_{1,i}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{1,f}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{2,i}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{2,f}}} \mathcal{M}. \quad (1.2)$$

A amplitude  $\mathcal{M}$  é obtida após aplicarmos as regras de Feynman, colocando os campos, os vértices de interação e o propagador. Nos casos a serem considerados aqui, esta poderá ser reescrita na seguinte forma

$$\mathcal{M} \sim J_1 \langle prop \rangle J_2, \quad (1.3)$$

onde  $J_1$  e  $J_2$  são as fontes/correntes e  $\langle prop \rangle$  denota o propagador, com os possíveis índices de Lorentz das representações sendo omitidos.

No caso em que a interação possua alguma simetria, já podemos antecipar a estrutura geral da amplitude. Por exemplo, considere a interação entre dois férmions, intermediada pela troca de um bóson. Assumindo a invariância de rotação, é possível obtermos a forma geral da amplitude não-relativística. De acordo com [48], temos que esta é dada pela combinação

$$\mathcal{M}_{NR}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = P(\mathbf{q}^2) \sum_{i=1}^{16} \mathcal{O}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) f_i(\mathbf{q}^2/m^2, \mathbf{p}^2/m^2), \quad (1.4)$$

onde  $f_i(\mathbf{q}^2/m^2, \mathbf{p}^2/m^2)$  são funções escalares, fixadas pelos acoplamentos, e dependentes da razão entre os momentos e as massas dos férmions (aqui sendo denotado por  $m$ ). O fator  $P(\mathbf{q}^2)$  está associado a contribuição vinda do propagador. No caso mais simples,  $P(\mathbf{q}^2) \sim 1/(\mathbf{q}^2 + m_0^2)$ , com  $m_0$  sendo a massa do bóson. As funções adimensionais  $\mathcal{O}_i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ) trazem os acoplamentos entre o spin ( $\mathbf{S}$ ) e os momentos ( $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ ). Estas foram

classificadas conforme as propriedades sobre transformação de paridade. As 8 primeiras, exibidas abaixo, sendo pares, ou seja, sem trocar de sinal,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= 1, \\
\mathcal{O}_2 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \\
\mathcal{O}_3 &= \frac{1}{m^2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_1) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_2), \\
\mathcal{O}_{4,5} &= \frac{i}{2m^2} (\mathbf{S}_1 \pm \mathbf{S}_2) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \\
\mathcal{O}_{6,7} &= \frac{i}{2m^2} [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}_1)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_2) \pm (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}_2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_1)], \\
\mathcal{O}_8 &= \frac{1}{m^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}_2),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

e as seguintes sendo ímpares,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{9,10} &= \frac{i}{2m} (\mathbf{S}_1 \pm \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{q}, \\
\mathcal{O}_{11} &= \frac{i}{m} (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{q}, \\
\mathcal{O}_{12,13} &= \frac{1}{2m} (\mathbf{S}_1 \pm \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{p}, \\
\mathcal{O}_{14} &= \frac{1}{m} (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{p}, \\
\mathcal{O}_{15} &= \frac{1}{2m^3} \left\{ [\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})] (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{q}) + [\mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})] (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{q}) \right\}, \\
\mathcal{O}_{16} &= \frac{i}{2m^3} \left\{ [\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})] (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{p}) + [\mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})] (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{p}) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Uma das questões que investigamos nos trabalhos [7] e [8] foi o estudo de quais acoplamentos carregam as dependências acima. Por exemplo, podemos ter fontes (pseudo-)escalar e correntes (pseudo-)vetorial, (pseudo-)tensorial e topológicas. Algumas delas apresentam similaridades nas interações de spin e outras são diferentes. Além disso, ressalta-se que restringiremo-nos as contribuições até a ordem  $\mathcal{O}(|\mathbf{p}^2|/m^2)$  e, portanto,  $\mathcal{O}_{15,16}$  não serão consideradas nesta tese.

Por fim, gostaríamos de citar outras prescrições para o cálculo do potencial. Podemos utilizar a prescrição que explora a analiticidade da amplitude [2] ou via *loop* de Wilson [67].



A fim de tornar a presente Metodologia mais instrutiva e útil para os próximos capítulos, vamos considerar um exemplo na próxima seção.

## 1.2 Interação Eletromagnética entre férmions

Para nossos propósitos, é conveniente estudarmos a interação eletromagnética de férmions (spin-1/2) em  $4D$ , descrita pela (densidade) Lagrangeana de Dirac-Maxwell:

$$\mathcal{L}_{s=1/2}^{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi, \quad (1.7)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

Após acrescentarmos o termo fixador de gauge,  $-\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ , podemos calcular o propagador, que resulta em

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{q^2} \left[ \eta_{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (1.8)$$

O vértice de interação,  $V_\mu$ , encontra-se exibido na Fig. 1.2.

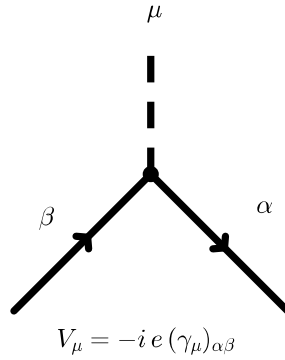


Figura 1.2: Vértice de interação da Eletrodinâmica espinorial.

Nesta etapa, precisamos obter a solução de energia positiva da equação de Dirac,

$$[\gamma^\mu p_\mu - m] \psi(p) = 0. \quad (1.9)$$

Usando a decomposição em termos de bi-espinores,  $\psi = (\xi, \chi)^T$ , e as matrizes de Clifford na representação de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

com  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sendo as matrizes de Pauli, é possível eliminar  $\chi$  e mostrar que

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)\xi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \xi \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

onde o espinor foi normalizado tal que  $\bar{\psi}(p)\psi(p) = 2m\xi^\dagger\xi$ .

O bi-espinor básico,  $\xi$ , pode assumir os seguintes valores

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

que referem-se aos spins *up* e *down*, respectivamente.

Vamos fixar algumas notações. Considerando a possibilidade de *spin flip*, usaremos  $\xi_i$  e  $\xi_f$  para indicar os estados inicial e final do férmion. Por essa razão, é conveniente definirmos as contrações

$$\delta = \xi_f^\dagger \xi_i, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \xi_f^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi_i. \quad (1.13)$$

Esta é justamente o valor esperado do spin.

Agora aplicamos as regras de Feynman do espalhamento no referencial do centro-de-massa, conforme as atribuições de momento da Fig. 1.1,

$$i\mathcal{M} = \bar{\psi}_1(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \{-ie_1\gamma^\mu\} \psi_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \langle A_\mu A_\nu \rangle \times \quad (1.14)$$

$$\times \bar{\psi}_2(-\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \{-ie_2\gamma^\nu\} \psi_2(-\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) =$$

$$= -e_1 e_2 J_{(1)}^\mu \langle A_\mu A_\nu \rangle J_{(2)}^\nu, \quad (1.15)$$

com  $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  denotando a corrente vetorial.

Utilizando a conservação de corrente,  $q^\mu J_\mu = 0$ , e  $q^0 = 0$  na eq. (1.15), podemos reescrever a amplitude não-relativística, eq. (1.2), como segue

$$\mathcal{M}_{NR} = -\frac{e_1 e_2}{\mathbf{q}^2} \frac{J_{(1)}^\mu J_{(2)\mu}}{(2E_1)(2E_2)}. \quad (1.16)$$

onde foi utilizado que  $E_{1,f} = E_{1,i} = E_1$  e analogamente para a partícula 2.

Um passo importante deste cálculo é fixarmos a ordem de nossa aproximação. Vamos considerar correções até  $\mathcal{O}(|\mathbf{p}^2|/m^2)$  na amplitude, sem contar o fator vindo do propagador, que neste caso é dado por  $1/\mathbf{q}^2$ .

Antes de reescrevermos a amplitude, estudemos as componentes da corrente. Para a partícula 1, tomamos a solução livre, eq. (1.11), e consideramos  $E_1 \approx m_1 + \frac{1}{2m_1} (\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{4})$  de modo que

$$J_{(1)}^0 = 2m_1 \delta_1 + \frac{1}{m_1} \left[ \mathbf{p}^2 \delta_1 + i (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle \right], \quad (1.17)$$

$$J_{(1)}^i = 2\mathbf{p}_i \delta_1 - 2i \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{S}_{1,k} \rangle. \quad (1.18)$$

A corrente associada à partícula 2,  $J_{(2)}^\mu$ , pode ser obtida ao tomarmos a seguinte prescrição em  $J_{(1)}^\mu$ :  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  e trocar o índice  $1 \rightarrow 2$ . Com essas considerações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{J_{(1)}^\mu J_{(2)\mu}}{(2E_1)(2E_2)} &= \delta_1 \delta_2 \left[ \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \mathbf{q}^2 \right] + \\ &+ i \mathbf{q} \cdot \left\{ \mathbf{p} \times \left[ \delta_1 \langle \mathbf{S}_2 \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\} + \\ &- \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \mathbf{q}^2 \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle - (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Uma vez fornecida a amplitude não-relativística, eq. (1.16) com eq. (1.19), usamos a prescrição na eq. (1.1), i.e., calculamos sua integral de Fourier e, conforme eqs. (A.2)-(A.4) do Apêndice, teremos

$$\begin{aligned} V_{s=1/2}^{\text{Maxwell}} &= e_1 e_2 \left\{ \frac{\delta_1 \delta_2}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right] - \frac{\delta_1 \delta_2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^3(\mathbf{r}) + \right. \\ &- \frac{2 \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle}{3 m_1 m_2} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{4\pi r^3} \frac{\langle \mathbf{S}_{1,i} \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j} \rangle}{m_1 m_2} + \\ &\left. - \frac{\mathbf{L}}{4\pi r^3} \cdot \left[ \delta_1 \langle \mathbf{S}_2 \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde definimos o momento angular,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , e o tensor de quadrupolo (ou dipolo-dipolo)

$$\mathbf{Q}_{ij} = \delta_{ij} - 3 \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{r^2}.$$

O primeiro termo, dominante em longas distâncias, é o conhecido potencial de Coulomb ( $\sim 1/4\pi r$ ). Em seguida, temos uma correção com a velocidade (ou momenta), supressa pelas massas dos férmions. Nota-se também a presença de termos de contato, i.e., aqueles com delta de Dirac,  $\delta^3(\mathbf{r})$ , com e sem a dependência no spin. As demais interações de spin aparecem no acoplamento spin-órbita,  $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ , e na interação de quadrupolo,  $\mathbf{Q}_{ij}\langle\mathbf{S}_{1,i}\rangle\langle\mathbf{S}_{2,j}\rangle$ .

### 1.3 Comparando diferentes representações

Nesta seção faremos uma breve discussão de outras colaborações [6]-[8], envolvendo cálculos de potenciais inter-partículas, com a ideia de se investigar o papel da representação de campo para um mesmo spin e os acoplamentos (bilineares) de mistura entre campos.

Começemos com a discussão de [7]. Neste trabalho, nosso objetivo foi a comparação dos potenciais inter-partículas, associados à interação entre férmions devido a troca de um bóson massivo, descrito por dois modelos. O primeiro dado pela Lagrangeana de Proca,

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m_0^2 A_\mu^2 \quad (1.21)$$

e o segundo, a ser citado aqui como modelo  $\{A, B\}$ , descrito por uma Lagrangeana,  $\mathcal{L}_{AB}$ , que possui um acoplamento entre  $A_\mu$  e uma 2-forma,  $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ , conforme

$$\mathcal{L}_{AB} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}^2 + \frac{m_0}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu\partial_\nu B_{\alpha\beta}, \quad (1.22)$$

onde  $G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}$  e  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  denota o símbolo de Levi-Civita em 4D (com  $\epsilon^{0123} = +1$ ).

Os dois modelos descrevem *on-shell* uma partícula massiva de spin-1, mas o termo de massa de Proca quebra a simetria de gauge, enquanto o termo de massa topológica preserva a simetria. O termo *topológico* refere-se ao fato que este acoplamento é independente da métrica.

Supomos a possibilidade dos f ermions se acoplarem com os campos de gauge de acordo com as correntes exibidas na Tabela 1.1.

$i$	$J_i/g_i$
V	$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$
PV	$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$
T	$\bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi$
PT	$\bar{\psi} i \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi$

Tabela 1.1: Corrente fermi onica vetorial (V), pseudo-vetorial (PV), tensorial (T) e pseudo-tensorial (PT). Todas as constantes de acoplamento ( $g_i$ ) são adimensionais e  $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Com essas correntes temos mais possibilidades para compor as amplitudes. Por exemplo, no modelo  $\{A, B\}$ , temos propagadores com a seguinte estrutura tensorial  $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ ,  $\langle A_\mu B_{\nu\kappa} \rangle$  e  $\langle B_{\mu\nu} B_{\kappa\lambda} \rangle$ . A obtenção destes, bem como suas formas explícitas, podem ser encontradas em [7] e estará, em maiores detalhes, na tese [11]. Vamos focar aqui apenas na ideia a fim de delimitar aquilo que foi pesquisado e expor alguns dos principais resultados. Com estes propagadores e as correntes acima, obtemos dez potenciais:  $V_{V-V}^{(AA)}$ ,  $V_{V-PV}^{(AA)}$ ,  $V_{PV-PV}^{(AA)}$ ,  $V_{V-T}^{(AB)}$ ,  $V_{V-PT}^{(AB)}$ ,  $V_{PV-T}^{(AB)}$ ,  $V_{PV-PT}^{(AB)}$ ,  $V_{T-T}^{(BB)}$ ,  $V_{T-PT}^{(BB)}$  e  $V_{PT-PT}^{(BB)}$ . Por outro lado, no caso de Proca, temos o propagador  $\langle A_\mu A_\nu \rangle_{\text{Proca}}$ , que pode acoplar-se apenas com as correntes (pseudo-)vetorial.

Há que se ressaltar que, ao contrário do que será feito ao longo desta tese, aqui desprezamos termos de  $\mathcal{O}(|\mathbf{p}^2/m^2|)$  na amplitude. O procedimento para o cálculo dos potenciais   análogo ao desenvolvido e utilizado nas se oes anteriores. Para isso foi necessário a obtenção do limite não-relativístico de todas as componentes das correntes da Tabela 1.1, os resultados estão exibidos no Apêndice B.

Abaixo destacamos dois resultados:

$$V_{T-T}^{(BB)} = -\frac{g_1^T g_2^T}{2\pi} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle \frac{e^{-m_0 r}}{r}, \quad (1.23)$$

$$V_{PV-T}^{(AB)} = \frac{g_1^{PV} g_2^T}{\sqrt{2\pi} m_0 \mu r^3} [1 - (1 + m_0 r) e^{-m_0 r}] (\langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \mathbf{p}) (\langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot \mathbf{r}) \quad (1.24)$$

onde  $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$  é a massa reduzida.

No primeiro potencial, eq. (1.23), observa-se uma interação spin-spin,  $\langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle$ , sendo o termo dominante. Note que não temos nenhuma massa fermiônica no denominador, nem apareceu um termo monopolo-monopolo. O aparecimento dessa interação é uma consequência da estrutura da corrente tensorial, devido ao seguinte limite não-relativístico

$$J_{(1),T}^{ij} = \bar{\psi} \Sigma^{ij} \psi \sim \epsilon_{ijk} \langle \mathbf{S}_{1,k} \rangle. \quad (1.25)$$

O segundo potencial, eq. (1.24), é da  $\mathcal{O}(|\mathbf{p}/m|)$ . Neste também temos uma interação spin-spin, mas agora dependente da velocidade, conforme o termo  $(\langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \mathbf{p})(\langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot \mathbf{r})$ .

Após calcularmos todos os potenciais, chegamos aos seguintes resultados: com o modelo de Proca, obtivemos termos com as dependências  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$ ,  $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{r}$  e  $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ . Estas também apareceram no modelo  $\{A, B\}$ , junto com outras dependências, a saber  $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$ ,  $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})$  e  $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{S}$ .

A conclusão é que temos uma repercussão diferente nos potenciais, dependendo do modelo escolhido para descrever a partícula massiva intermediadora de spin-1. Tanto a origem do termo de massa, seja quebrando ou não a simetria de gauge, quanto a escolha do(s) campo(s) (ou das representações) para descrevê-la são relevantes.

Uma questão interessante, indicada no trabalho, seria uma possível situação experimental, em um regime macroscópico, para distinguir os dois modelos através dos potenciais. De acordo com [62], em experimentos com terras raras existe uma configuração, denominada por *C5*, levando-se em conta a posição relativa do detector e do material, sensível apenas ao acoplamento spin-órbita  $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{S}$ . No regime de energias considerado, este termo apareceu apenas no modelo  $\{A, B\}$ . Em outras configurações do experimento não conseguiremos distinguir os dois modelos. Por exemplo, na configuração *C2*, teremos uma sensibilidade para ambos acoplamentos  $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})$  e  $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ .

Para finalizarmos esta discussão, ressaltamos que no trabalho [6], mostrou-se que o modelo  $\{A, B\}$  pode ser compreendido como um setor de um modelo estendido, especificamente, da redução dimensional de um modelo em  $5D$ , envolvendo um campo de gauge,

$A^{\hat{\mu}}$  ( $\hat{\mu} = 0, \dots, 4$ ), acoplado com uma 3-forma,  $C^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}}$ . Esta possui aplicação em cenários de universo com inflação. Para maiores detalhes, destacamos a tese [9].

Até aqui apresentamos apenas casos envolvendo correntes fermiônicas. Em [8] foi estudada a matéria de spin-1 em diferentes representações. A primeira sendo a representação vetorial usual,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , com dinâmica descrita pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{vec.} = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} + m^2 W_{\mu}^* W^{\mu}, \quad (1.26)$$

onde definimos  $W_{\mu\nu} = \partial_{\mu} W_{\nu} - \partial_{\nu} W_{\mu}$ .

A partir desta Lagrangeana, podemos repetir o procedimento feito no caso fermiônico, ou seja, estudando a equação de movimento para obtermos o campo em um referencial arbitrário, a fim de compreendermos como os graus de liberdade – leia-se aqui a polarização ( $\epsilon$ ) e o spin ( $\mathbf{S}$ ) – estão organizados no campo de spin-1. Isso será discutido no Capítulo 2. Em seguida, precisamos propor as fontes/correntes. Na Tabela 1.2, exibimos alguns acoplamentos definidos por fontes escalar ( $S$ ) e pseudo-escalar ( $PS$ ), e as correntes vetorial ( $V$ ) e pseudo-vetorial ( $PV$ ), onde  $\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W^{\alpha\beta}$  denota o dual de  $W_{\mu\nu}$  e utilizamos a matriz de spin na representação vetorial

$$(\Sigma_V^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = -i (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu}). \quad (1.27)$$

$i$	$J_i/g_i$
$S$	$W_{\mu}^* W^{\mu}$
$PS$	$(W_{\mu\nu}^* \tilde{W}^{\mu\nu})$
$V$	$(W^{*\mu\nu} W_{\nu} + W^{\mu\nu} W_{\nu}^*) + i q_{\nu} W^{*\kappa} W^{\lambda} (\Sigma_V^{\mu\nu})_{\kappa\lambda}$
$PV$	$(\tilde{W}^{*\mu\nu} W_{\nu} + \tilde{W}^{\mu\nu} W_{\nu}^*)$

Tabela 1.2: Fontes/Correntes de spin-1 na representação vetorial. As constantes de acoplamento possuem a seguinte dimensão canônica de massa:  $[g_S] = -[g_{PS}] = 1$  e  $[g_V] = [g_{PV}] = 0$ .

Uma outra descrição para o spin-1 é dada pela representação  $(1, 0) \oplus (0, 1)$  dos tensores anti-simétricos,  $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ , cuja dinâmica é fornecida pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{tens.} = -\frac{1}{6} G^{*\mu\nu\kappa} G_{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{2} m^2 B^{*\nu\kappa} B_{\nu\kappa}, \quad (1.28)$$

com  $G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}$ .

Anteriormente, no modelo  $\{A, B\}$ , utilizamos  $B_{\mu\nu}$  (neutro) como campo de gauge, i.e., no propagador, e investigamos seu efeito nos potenciais. Agora consideramo-lo nas fontes/correntes, conforme exibido na Tabela 1.3, onde usamos a matriz de spin na representação tensorial

$$(\Sigma_T^{\kappa\sigma})_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ \eta_{\mu\alpha} (\Sigma_V^{\kappa\sigma})_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha} (\Sigma_V^{\kappa\sigma})_{\mu\beta} + \eta_{\nu\beta} (\Sigma_V^{\kappa\sigma})_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\beta} (\Sigma_V^{\kappa\sigma})_{\nu\alpha} \right]. \quad (1.29)$$

$i$	$\mathcal{J}_i/g_i$
$S$	$B_{\mu\nu}^* B^{\mu\nu}$
$PS$	$(B_{\mu\nu}^* \tilde{B}^{\mu\nu})$
$V$	$(G^{*\mu\nu\kappa} B_{\nu\kappa} + G^{\mu\nu\kappa} B_{\nu\kappa}^*) + iq_\sigma B^{*\lambda\kappa} (\Sigma_T^{\mu\sigma})_{\lambda\kappa,\alpha\beta} B^{\alpha\beta}$
$PV$	$(G^{*\mu\nu\kappa} \tilde{B}_{\nu\kappa} + G^{\mu\nu\kappa} \tilde{B}_{\nu\kappa}^*)$

Tabela 1.3: Fontes/Correntes de spin-1 na representação tensorial. As constantes de acoplamento possuem a seguinte dimensão canônica de massa:  $[g_S] = [g_{PS}] = 1$  e  $[g_V] = [g_{PV}] = 0$ .

O limite não-relativístico dessas correntes, bem como os cálculos dos potenciais, deverão ser discutidos em detalhes na tese [11]. Destacamos aqui um caso interessante, envolvendo o potencial devido a interação entre correntes escalares, trocando um campo escalar massivo,  $\phi$ , via propagador de Klein-Gordon,  $\langle\phi\phi\rangle = i/(q^2 - m_\phi^2)$ . Estes resultados, nas representações vetorial e tensorial, encontram-se exibidos abaixo:

$$\begin{aligned} V_{S-S}^{\text{vet}} = & -\frac{g_S^1 g_S^2}{16\pi m_1 m_2} \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left( \mathbf{p}^2 - \frac{m_\phi^2}{4} \right) \right] + \right. \\ & - \frac{(1 + m_\phi r)}{2r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{\delta_1 \langle \mathbf{S}_2 \rangle}{m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \mathbf{S}_1 \rangle}{m_1^2} \right) + \\ & + \left[ \frac{\delta_1}{2m_2^2 r^2} \left[ \delta_2 (1 + m_\phi r) - \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)}{r^2} (3 + 3m_\phi r + m_\phi^2 r^2) \right] + \right. \\ & \left. \left. + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\} - \frac{\delta_1 \delta_2}{96} \frac{g_S^1 g_S^2}{m_1 m_2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^3(\mathbf{r}), \quad (1.30) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
V_{S-S}^{\text{tens}} = & -\frac{g_S^1 g_S^2}{16\pi m_1 m_2} \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \left\{ \delta_1 \delta_2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left( \mathbf{p}^2 + \frac{3}{4} m_\phi^2 \right) \right] + \right. \\
& - \frac{(1 + m_\phi r)}{2r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{\delta_1 \langle \mathbf{S}_2 \rangle}{m_2^2} + \frac{\delta_2 \langle \mathbf{S}_1 \rangle}{m_1^2} \right) + \\
& - \left[ \frac{\delta_1}{2m_2^2 r^2} \left[ \delta_2 (1 + m_\phi r) - \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)}{r^2} (3 + 3m_\phi r + m_\phi^2 r^2) \right] + \right. \\
& \left. \left. + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\} - \frac{5 \delta_1 \delta_2}{96} \frac{g_S^1 g_S^2}{m_1 m_2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^3(\mathbf{r}). \tag{1.31}
\end{aligned}$$

onde  $\delta = \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}$  e  $\langle \mathbf{S}_i \rangle = \boldsymbol{\epsilon}_j^* (\mathbf{S}_i)_{jk} \boldsymbol{\epsilon}_k$ , com  $(\mathbf{S}_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk}$ .

Ao compararmos estes potenciais, observa-se uma universalidade nas interações de spin e algumas diferenças, de fatores numéricos, no setor monopolo-monopolo, nas deltas de Dirac e na interação polarização-polarização. Portanto, mesmo em uma descrição *on-shell* para o spin-1, temos diferenças nos perfis de alguns potenciais. Isso se deve ao fato de como a polarização acopla-se com os momentos. É possível mostrar que, na representação vetorial, temos um acoplamento de modo longitudinal ( $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ ) no campo e, na representação tensorial, de modo transverso ( $\mathbf{p} \times \boldsymbol{\epsilon}$ ).

## Capítulo 2

# Extensões da Eletrodinâmica de Maxwell

Embora a Eletrodinâmica de Maxwell tenha conseguido descrever muitos fenômenos — principalmente aqueles nas escalas microscópica, molecular e até macroscópica — existem algumas situações em que se faz necessário a busca por sua extensão, compreendendo desde as escalas dos presentes aceleradores até da astrofísica.

A primeira proposta de extensão foi a de Dirac em 1931 [68]. Neste trabalho, o autor buscava investigar se o elétron é elementar ou composto e acabou propondo o monopolo magnético, cuja existência implica na quantização da carga elétrica. Em seguida, temos as formulações não-lineares de Born-Infeld (1932-1935) [69] e Euler-Heisenberg (1935) [70]. Nesta época já se notava alguns problemas da Eletrodinâmica de Maxwell como, por exemplo, a divergência do campo elétrico (de uma carga puntiforme) próximo da origem. A proposta de Born-Infeld resolveu esta questão, apresentando uma finitude do campo na origem. Para uma discussão mais aprofundada destas Eletrodinâmicas, com algumas aplicações, destacamos a tese [71] e a dissertação [72], respectivamente.

A partir da década de 1930, a procura por extensões tem se tornado cada vez mais frequente. Existem diversas propostas na literatura com diferentes motivações como, por exemplo, correções vindas da Gravitação Quântica de Laços, de limites de baixas energias da Teoria de Cordas, da quebra da simetria de Lorentz, efeitos dentro de um meio material

ou de campos eletromagnéticos intensos, entre outros. Apresentaremos algumas propostas ao longo do desenvolvimento deste capítulo.

Uma vez fixada a proposta de extensão, precisamos analisar quais efeitos esta produz. Em alguns casos podemos gerar modificações não-triviais na relação de dispersão do fóton, bem como ser responsável pelo efeito da birrefringência do vácuo [73] [74], i.e., quando a velocidade da onda eletromagnética começa a depender da polarização/direção. Na escala astrofísica, podemos ter algumas estruturas com campos magnéticos intensos, produzindo o chamado *photon splitting* [75], situação na qual, devido a efeitos de polarização do vácuo, um fóton sujeito a um campo intenso produz outros fótons.

Uma das maneiras de se investigar as Eletrodinâmicas Estendidas é a análise de como o potencial de interação inter-partículas reage frente essas extensões, seja, por exemplo, alterando o decaimento  $1/r$  do potencial de Coulomb para algo do tipo-Yukawa,  $e^{-mr}/r$ , ou até mesmo mudando para uma fase confinante. Neste capítulo, propomo-nos justamente ao estudo das modificações/correções ao potencial, mas agora incluindo também uma análise nos setores de spin e da velocidade.

O capítulo encontra-se organizado da seguinte maneira. Inicialmente, apresentaremos prescrições para os cálculos dos potenciais, associados as interações de partículas de spin-0, spin-1/2 e spin-1. Nesta etapa, deixaremos em aberto a Eletrodinâmica, mas restringiremo-nos a uma certa classe de possibilidades. Uma motivação para efetuar isto, além de facilitar os cálculos, é que fica mais simples identificar algumas universalidades e diferenças quando trocamos os spins das partículas interagentes. Em seguida, aplicaremos as prescrições aos casos das Eletrodinâmicas de Maxwell, Podolski-Lee-Wick e a com para-fóton. Por fim, esboçaremos nossas Conclusões Parciais.

## 2.1 Prescrições para os cálculos dos potenciais

Nesta seção, partimos da premissa de que o propagador do campo abeliano,  $A^\mu$ , descrito por uma Lagrangeana  $\mathcal{L}_{ED}$ , possua a seguinte estrutura

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = ia(q) \eta_{\mu\nu} + ib(q) q_\mu q_\nu, \quad (2.1)$$

com  $a(q)$  e  $b(q)$  sendo fixados após fornecida a forma funcional de  $\mathcal{L}_{ED}$ .

É possível mostrar com o uso de  $q^0 = 0$  e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$  ou, em alguns casos, por conservação de corrente, que o termo com  $b(q)$  não contribuirá na amplitude e, portanto, podemos ignorá-lo (pelo menos nos modelos a serem estudados aqui). Logo, consideraremos

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle \longrightarrow ia(q) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

A ideia é que a Lagrangeana seja dada por Maxwell acrescido das correções e/ou extensões com novos campos,

$$\mathcal{L}_{ED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \quad (2.3)$$

assim, alguns resultados conhecidos do caso de Maxwell serão utilizados como, por exemplo, o auto-acoplamento do campo escalar e o acoplamento não-mínimo com a matéria de spin-1. Fixadas algumas hipóteses, seguiremos para o desenvolvimento das prescrições.

### 2.1.1 Potencial de interação entre partículas de spin-0

Consideramos que as interações do fóton com a matéria, descrita por campo escalar (complexo)  $\phi$ , sejam dadas pela seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{s=0} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{ED}, \quad (2.4)$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  é a derivada covariante e  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2$  o auto-acoplamento da matéria, colocado na Eletrodinâmica escalar usual (de Maxwell) por questões de renormalizabilidade [76] [77].

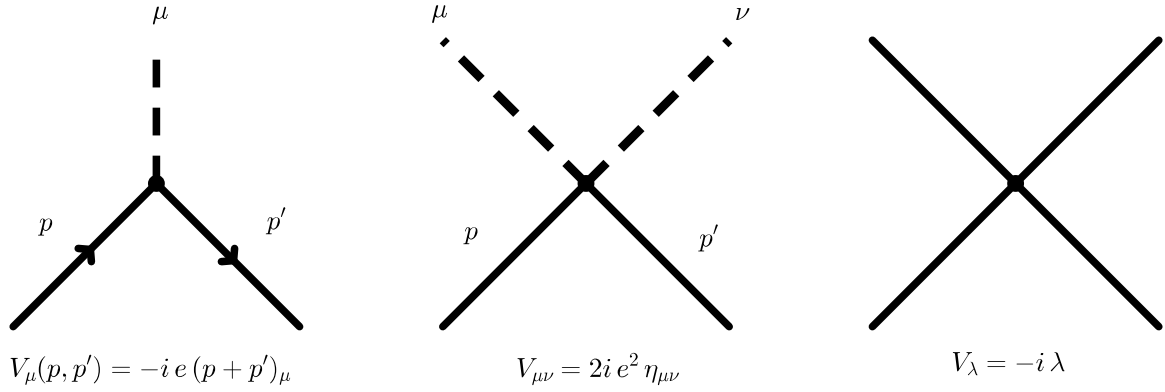


Figura 2.1: Vértices da Eletrodinâmica escalar

As regras de Feynman [78], no espaço dos momenta, estão exibidas na Fig. 2.1.

Uma vez que estamos interessados em processos com a troca de apenas um bóson vetorial a nível de árvore, apenas o vértice  $V^\mu$  será relevante. No entanto, destacamos que já foram calculadas as contribuições de *loop* – utilizando-se os vértices  $V_{\mu\nu}$  e  $V_\lambda$  – ao potencial para  $\mathcal{L}_{ED}$  de Maxwell [4] [79].

Logo, aplicando as regras de Feynman, obtemos a amplitude

$$i\mathcal{M} = V^\mu(p_{1,i}, p_{1,f}) \langle A_\mu A_\nu \rangle V^\nu(p_{2,i}, p_{2,f}). \quad (2.5)$$

e, utilizando-se o vértice  $V^\mu$  e o propagador na eq. (2.2), podemos escrevê-la como

$$\mathcal{M} = -e_1 e_2 a(q) (p_{1,i} \cdot p_{2,i} + p_{1,i} \cdot p_{2,f} + p_{1,f} \cdot p_{2,i} + p_{1,f} \cdot p_{2,f}), \quad (2.6)$$

onde usamos a notação  $a \cdot b = a^\mu b_\mu$ .

Agora expressando esta amplitude no referencial do CM, conforme as atribuições de momenta da Fig. 1.1, e impondo que o processo seja um espalhamento elástico, ou seja, considerando-se  $q^0 = 0$  e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$ , obtemos

$$\mathcal{M} = -4 e_1 e_2 a(\mathbf{q}) (E_1 E_2 + \mathbf{p}^2). \quad (2.7)$$

Após dividirmos pelos fatores de energia, seguindo a prescrição na eq. (1.2), chegamos na amplitude não-relativística

$$\mathcal{M}_{NR} = -e_1 e_2 a(\mathbf{q}) \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{E_1 E_2} \right). \quad (2.8)$$

Note que podemos efetuar uma expansão no segundo termo, pois

$$\frac{\mathbf{p}^2}{E_1 E_2} = \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} - \mathbf{q}^2 \frac{\mathbf{p}^2}{8m_1 m_2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \dots \quad (2.9)$$

de modo que, desprezando termos acima da  $\mathcal{O}(|\mathbf{p}^2|/m^2)$ , teremos

$$\mathcal{M}_{NR} = -e_1 e_2 a(\mathbf{q}) \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right) \quad (2.10)$$

Por último, tomamos a integral de Fourier, eq. (1.1), para obter o potencial de interação entre partículas de spin-0:

$$V^{(s=0)} = e_1 e_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right) I_0(r) \quad (2.11)$$

onde definimos a integral  $I_n(r)$  (aqui com  $n = 0$ ) no Apêndice, conforme a eq. (A.1a).

### 2.1.2 Potencial de interação entre partículas de spin-1/2

No caso da interação do férmion com o fóton, a Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L}_{s=1/2} = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_{ED}. \quad (2.12)$$

Nesta situação, aproveitamos as contas desenvolvidas na subseção 1.2, apenas trocando o propagador de Maxwell, eq. (1.8), pelo propagador na eq. (2.2). Após considerarmos isso, obtemos a seguinte amplitude não-relativística:

$$\mathcal{M}_{NR} = -e_1 e_2 a(\mathbf{q}) \frac{J_{(1)}^\mu J_{(2)\mu}}{(2E_1)(2E_2)}. \quad (2.13)$$

A expressão envolvendo a contração entre as correntes, dividida pelos fatores de energia, foi obtida na eq. (1.19) (no referencial do CM), assim, basta aplicarmos a integral de Fourier, que resulta em

$$\begin{aligned}
V^{(s=1/2)} &= e_1 e_2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) I_0(r) + \right. \\
&\quad - \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{1}{m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle \right] I_1(r) + \\
&\quad + \frac{1}{r} I_0'(r) \mathbf{L} \cdot \left( \frac{\langle \mathbf{S}_1 \rangle}{2m_1^2} + \frac{\langle \mathbf{S}_2 \rangle}{2m_2^2} + \frac{\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle}{m_1 m_2} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbf{S}_{1,i} \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j} \rangle I_{ij}(r) \right\} \tag{2.14}
\end{aligned}$$

onde as integrais  $I_n(r)$  ( $n = 0, 1$ ) e  $I_{ij}(r)$  estão definidas no Apêndice, eqs. (A.1a)-(A.1b), respectivamente. Por simplificação, foi considerado o caso particular em que  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ .

É interessante compararmos este potencial com o caso escalar  $V^{(s=0)}$ , eq. (2.11). A primeira linha de  $V^{(s=1/2)}$  é justamente o  $V^{(s=0)}$ , com a interação fixada pela integral  $I_0(r)$ . Em seguida, temos as interações de spin, relacionadas com as integrais  $I_1(r)$  e  $I_{ij}(r)$ .

### 2.1.3 Potencial de interação entre partículas de spin-1

A busca por uma teoria microscópica que descreva a interação entre bósons vetoriais carregados e o fóton, ou seja, uma eletrodinâmica para o spin-1, tomou quase toda a década de 1960. Nomes como Salam, Komar, Delbourgo, Lee e Yang, apresentaram as primeiras contribuições [80]-[84] e apontaram os problemas da teoria quântica associada, como a renormalizabilidade e unitariedade. Em seguida, Tzou, Aronson, Velo e Zwanziger [85]-[87], somando os esforços iniciais, chegaram a conclusão final de que uma descrição consistente seria possível apenas em um cenário não-abeliano, contemplando outros setores. Posteriormente, com o estabelecimento da Teoria Eletrofraca, isso fica mais evidente devido a importância do setor de Higgs e a quebra espontânea da simetria de gauge, que gera massa para alguns bósons vetoriais, sem violar os limites de unitariedade da seção de choque dos bósons vetoriais longitudinalmente polarizados [88].

Mantendo-nos neste cenário, propomos a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{s=1} = -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^* \mathcal{W}^{\mu\nu} + m^2 W_\mu^* W^\mu + ie(g-1) W_\mu^* W_\nu F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{ED}, \quad (2.15)$$

considerando-se que retiramos um setor abeliano de uma teoria mais fundamental (não-abeliana). Foi usada a notação  $\mathcal{W}_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu$ .

Note que, no primeiro termo da Lagrangeana acima, efetuamos a prescrição de acoplamento mínimo,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ , no termo cinético usual de campos vetoriais carregados. Já o terceiro termo, foi colocado para garantir o valor correto da razão giromagnética ( $g = 2$ ) [89]-[91]. Inicialmente, deixaremos  $g$  em aberto. Na perspectiva de uma teoria abeliana, o terceiro termo é visto como um acoplamento não-mínimo. No entanto, no contexto da teoria  $SU(2) \times U(1)$ , verifica-se que este termo surge do acoplamento mínimo (não-abeliano).

Poderíamos seguir o mesmo caminho feito nos casos anteriores, ou seja, a partir das regras de Feynman, construirmos a amplitude. Entretanto, uma vez que estamos analisando processos a nível de árvore, isso é equivalente a começarmos com

$$\mathcal{M} = i e_1 e_2 J_{(1)}^\mu \langle A_\mu A_\nu \rangle J_{(2)}^\nu. \quad (2.16)$$

A corrente que colocaremos na amplitude acima será a proveniente do acoplamento  $e J^\mu A_\mu$  na eq. (2.15), em que nenhum campo de gauge  $A^\mu$  aparece dentro da corrente  $J^\mu$ . Em outras palavras,  $J^\mu$  é dada pela corrente global acrescida da contribuição do acoplamento não-mínimo,

$$J^\mu = i[W^{*\mu\nu} W_\nu - W^{\mu\nu} W_\nu^*] + i(g-1)\partial_\nu[W^\nu W^{*\mu} - W^{*\nu} W^\mu], \quad (2.17)$$

com  $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ .

No espaço dos momenta, a mesma pode ser escrita como

$$J^\mu(p_i, p_f) = (p_i + p_f)^\mu W_\nu^*(p_f) W^\nu(p_i) - ig(p_f - p_i)_\nu W^{*\alpha}(p_f) (\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} W^\beta(p_i), \quad (2.18)$$

onde utilizamos a matriz de spin da representação vetorial,  $(\Sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ , definida na eq. (1.27).



O campo vetorial  $W^\mu$ , em um referencial arbitrário, pode ser escrito em termos da polarização  $\epsilon$ , através de

$$W^\mu(p) = \left( \frac{1}{m}(\mathbf{p} \cdot \epsilon), \epsilon + \frac{1}{m(E+m)}(\mathbf{p} \cdot \epsilon)\mathbf{p} \right). \quad (2.19)$$

Esta solução pode ser obtida da seguinte maneira. Consideramos a equação de movimento (livre) de  $W^\mu$  e tomando sua derivada, obtemos a chamada condição subsidiária  $\partial_\mu W^\mu = 0$ . Esta condição, no espaço dos momenta e no referencial de repouso, possui solução  $W_{\text{rep}}^\mu = (0, \epsilon)$ . A eq. (2.19) é o resultado da aplicação de um *boost* arbitrário em  $W_{\text{rep}}^\mu$ .

Ao contrário do caso espinorial, em que aparece explicitamente o spin  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$  na solução  $\psi(p)$ , temos que em  $W^\mu(p)$  aparece apenas a polarização  $\epsilon$ . O spin do campo vetorial, fornecido pelo setor puramente espacial da matriz de spin,  $\Sigma_{ij} = \epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k$ , é dado por  $(\mathbf{S}_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk}$ , satisfazendo a álgebra do grupo  $SU(2)$ ,  $[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = i \epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k$ . Além disso, em analogia ao caso espinorial, em que definimos  $\langle \mathbf{S} \rangle = \xi_f^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi_i$ , é conveniente introduzirmos a notação  $\langle \mathbf{S}_i \rangle = \epsilon_j^* (\mathbf{S}_i)_{jk} \epsilon_k$ .

Com todas essas definições, podemos partir para a obtenção da amplitude. Inserindo o propagador, eq. (2.2), na eq. (2.16) e utilizando a prescrição dada na eq. (1.2), temos que a amplitude não-relativística do spin-1 fica da mesma forma que do caso spin-1/2, conforme a eq. (2.13). Agora substituindo a corrente, eq. (2.18), nesta amplitude, com as atribuições de momento da Fig. 1.1, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{NR} = & -e_1 e_2 a(\mathbf{q}) \left\{ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} - \frac{g^2}{4m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle \mathbf{q}^2 + \right. \\ & + i(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \left( \frac{g-1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{g-1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{g}{2m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right) + \\ & \left. + \frac{g^2}{4m_1 m_2} (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) - \frac{g-1}{2m_1^2} (\mathbf{q} \cdot \epsilon_1^*) (\mathbf{q} \cdot \epsilon_1) - \frac{g-1}{2m_2^2} (\mathbf{q} \cdot \epsilon_2^*) (\mathbf{q} \cdot \epsilon_2) \right\}, \quad (2.20) \end{aligned}$$

onde, por simplificação, foi assumido que  $\delta = \epsilon^* \cdot \epsilon = 1$ .

Até aqui mantivemos a razão giromagnética  $g$  em aberto. Poderíamos ter colocado  $g = 2$  de partida, ao definirmos a Lagrangeana, eq. (2.15). No entanto, não fizemos isso,

pois gostaríamos de averiguar quais termos na amplitude seriam sensíveis a uma mudança em  $g$ . Fica claro agora que, sem o acoplamento não-mínimo, i.e., com  $g = 1$ , teríamos o cancelamento de algumas contribuições de spin e polarização na amplitude acima.

Por fim, fixando  $g = 2$  e tomando a integral de Fourier desta amplitude, obtemos o potencial de interação entre partículas de spin-1:

$$\begin{aligned}
V^{(s=1)} = e_1 e_2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) I_0(r) - \frac{1}{m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle I_1(r) + \right. \\
+ \frac{1}{r} I_0'(r) \mathbf{L} \cdot \left( \frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} \left( \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle \right) \right) + \\
\left. + \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{1}{m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_{1,i} \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j} \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} \boldsymbol{\epsilon}_{1,i}^* \boldsymbol{\epsilon}_{1,j} + \frac{1}{m_2^2} \boldsymbol{\epsilon}_{2,i}^* \boldsymbol{\epsilon}_{2,j} \right) \right) I_{ij}(r) \right\}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Antes de especificarmos as Eletrodinâmicas, já é possível estabelecermos uma comparação entre os potenciais  $V^{(s=0)}$ ,  $V^{(s=1/2)}$  e  $V^{(s=1)}$ . Notamos que a primeira contribuição, comum a todos os potenciais, é aquela devido a interação monopolo-monopolo, calculada inicialmente em  $V^{(s=0)}$ , que aparece com a integral  $I_0(r)$ . Mais adiante será mostrado que esta contribuição é a dominante em longas distâncias. Por outro lado, as interações de spin, associadas as integrais  $I_1(r)$  e  $I_{ij}(r)$ , são supressas pelas massas e idênticas nos potenciais  $V^{(s=1/2)}$  e  $V^{(s=1)}$ , exibindo a interação spin-órbita,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ , e spin-spin. A diferença marcante entre os casos de spin-1/2 e spin-1 é a interação de polarização-polarização, que aparece somente para o spin-1.

Uma vez finalizadas as prescrições, partiremos para estudos de casos particulares.

## 2.2 Eletrodinâmica de Maxwell

Antes de discutirmos as eletrodinâmicas estendidas, vamos, por consistência, aplicar a prescrição ao caso de Maxwell e comparar com os resultados do capítulo anterior e da literatura.

Considerando o propagador de Maxwell, eq. (1.8), temos que

$$a(q) = -\frac{1}{q^2} \quad \Rightarrow \quad a(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2}. \quad (2.22)$$

Uma vez fixado  $a(\mathbf{q})$ , é possível calcular as integrais  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_{ij}$ , eqs. (A.1a) e (A.1b), que fornecem

$$I_0(r) = \frac{1}{4\pi r}, \quad (2.23a)$$

$$I_1(r) = \delta^3(\mathbf{r}), \quad (2.23b)$$

$$I_{ij}(r) = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi r^3}\left(\delta_{ij} - 3\frac{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}{r^2}\right), \quad (2.23c)$$

onde foram utilizadas as integrais de Fourier do Apêndice, eqs. (A.2)-(A.4) com  $m = 0$ .

Logo, o potencial de Maxwell para o spin-0, eq. (2.11), fica dado por

$$V_{\text{Maxwell}}^{(s=0)} = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2}\right). \quad (2.24)$$

É interessante compararmos isso com o resultado em [4], que obteve o potencial acima acrescido de outra correção, cujo denominador possui uma quarta potência na massa do férmion. Podemos recuperar tal contribuição se adotarmos outra aproximação na amplitude, considerando-se também o segundo termo da expansão realizada na eq. (2.9).

O potencial de Maxwell para o spin-1/2 reproduz a eq. (1.20) (com  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ). Por fim, no caso de spin-1, obtemos

$$\begin{aligned} V_{\text{Maxwell}}^{(s=1)} = & \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2\right) - \left(\frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{2m_2^2}\right) \frac{1}{r^2} + \right. \\ & - \frac{1}{r^2} \mathbf{L} \cdot \left(\frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle)\right) + \\ & + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \frac{1}{r^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle - \frac{3}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right] + \\ & + \frac{3}{2r^4} \left[ \frac{1}{m_1^2} (\boldsymbol{\epsilon}_1^* \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{m_2^2} (\boldsymbol{\epsilon}_2^* \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{r}) \right] \left. \right\} + \\ & - e_1 e_2 \left[ \frac{2}{3m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{6m_1^2} + \frac{1}{6m_2^2} \right] \delta^3(\mathbf{r}). \quad (2.25) \end{aligned}$$

Como antecipado na discussão anterior sobre as prescrições para os potenciais, aqui confirmamos explicitamente a universalidade nas interações de spin no regime não-relativístico, com a presença das mesmas interações nos casos  $V_{\text{Maxwell}}^{(s=1/2)}$  e  $V_{\text{Maxwell}}^{(s=1)}$ . Além disso, observa-se que o potencial de Coulomb, consequência da interação monopolo-monopolo, é o termo dominante em longas distâncias (decai com  $1/r$  e os demais com potências superiores). Por outro lado, comparando os potenciais do spin-1/2 com spin-1, notamos algumas diferenças nos setores sem spin: no segundo caso, além da contribuição de polarização, aparece uma nova correção com  $1/r^3$  – veja primeira linha da eq. (2.25) – e também fatores numéricos diferentes nos termos de contato (com  $\delta^3(\mathbf{r})$ ). Essas diferenças aparecem devido a interação entre polarizações  $\epsilon_i^* \epsilon_j I_{ij}(r)$  (foi usado que  $\epsilon^* \cdot \epsilon = 1$ ).

## 2.3 Eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick

Nos trabalhos de 1942 e 1944, Podolsky [92] [93] apresentou sua extensão da Eletrodinâmica de Maxwell, introduzindo um termo com derivadas superiores, a fim de estudar a renormalizabilidade. Nesta época o programa de renormalização da Eletrodinâmica de Maxwell ainda não tinha sido finalizado. Embora a proposta de Podolsky tenha dado uma teoria renormalizável, esta apresentou alguns problemas, como, por exemplo, o aparecimento de um bóson com norma negativa (*ghost*). Mais adiante, em 1969 e 1970, Lee e Wick [94] [95], apresentaram sua proposta com o objetivo de estudar o espectro hadrônico. Este modelo também apresentou um bóson com norma negativa, mas os autores argumentaram que, considerando a teoria como efetiva, ou seja, em baixas energias, e o bóson numa escala bem acima, não teria problema de excitá-lo nos processos. Posteriormente, entra em cena a Cromodinâmica Quântica e a teoria de Lee-Wick é deixada de lado.

Conforme discutido na dissertação [96], é possível mostrar que a proposta de Podolsky é equivalente a de Lee-Wick, no sentido de que as duas apresentam o mesmo conteúdo de campo e, por essa razão, citaremos aqui como a Eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick (PLW).

Mais recente, em 2008, Grinstein, O'Connell e Wise [97], propuseram uma extensão do Modelo Padrão, baseada no modelo de Podolsky-Lee-Wick, como uma possível solução ao problema de hierarquia de gauge. Apesar de resolverem esta questão, outros problemas foram criados, com a presença de novos campos com normas negativas.

Ficaremos aqui restritos ao caso abeliano. A Lagrangeana, na forma de Podolsky, é dada por

$$\mathcal{L}_{PLW} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4M^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.26)$$

que possui o seguinte propagador [96]:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -i \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - M^2} \right) \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{q^2}{M^2} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (2.27)$$

de modo que, comparando com o caso geral, eq. (2.2), obtemos

$$a(q) = -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2 - M^2} \quad \Rightarrow \quad a(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{\mathbf{q}^2 + M^2}. \quad (2.28)$$

Com isso e utilizando as integrais de Fourier do Apêndice, é possível mostrar que

$$I_0(r) = \frac{1}{4\pi r} (1 - e^{-Mr}), \quad (2.29a)$$

$$I_1(r) = \frac{M^2}{4\pi r} e^{-Mr}, \quad (2.29b)$$

$$I_{ij}(r) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ \left( 1 - (1 + Mr)e^{-Mr} \right) \delta_{ij} - \left( 3 - (3 + 3Mr + M^2 r^2)e^{-Mr} \right) \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{r^2} \right\} \quad (2.29c)$$

Agora basta substituírmos essas integrais nos potenciais de spin-0, spin-1/2 e spin-1, eqs. (2.11), (2.14) e (2.21), respectivamente. Os resultados estão exibidos abaixo:

$$V_{\text{PLW}}^{(s=0)} = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right) (1 - e^{-Mr}), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{PLW}}^{(s=1/2)} = & \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) (1 - e^{-Mr}) - \frac{1}{8} \left( \frac{M^2}{m_1^2} + \frac{M^2}{m_2^2} \right) e^{-Mr} + \right. \\
& - \frac{1 - (1 + rM)e^{-Mr}}{r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right) + \\
& + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \frac{1 - (1 + Mr + M^2 r^2) e^{-Mr}}{r^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \right. \\
& \left. \left. - \frac{3 - (3 + 3Mr + M^2 r^2) e^{-Mr}}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right] \right\}, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{PLW}}^{(s=1)} = & \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) (1 - e^{-Mr}) - \left( \frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{2m_2^2} \right) \frac{1 - (1 + Mr)e^{-Mr}}{r^2} + \right. \\
& - \frac{1 - (1 + Mr)e^{-Mr}}{r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right) + \\
& + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \frac{1 - (1 + Mr + M^2 r^2) e^{-Mr}}{r^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \right. \\
& \left. - \frac{3 - (3 + 3Mr + M^2 r^2) e^{-Mr}}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right] + \\
& \left. + \frac{3 - (3 + 3Mr + M^2 r^2) e^{-Mr}}{2r^4} \left[ \frac{1}{m_1^2} (\boldsymbol{\epsilon}_1^* \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{m_2^2} (\boldsymbol{\epsilon}_2^* \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{r}) \right] \right\}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Em comparação com o caso de Maxwell, nota-se que, na eletrodinâmica de PLW, não temos nenhuma delta de Dirac. Isso por causa da subtração presente na eq. (2.28), a qual implica no cancelamento das deltas nas integrais. Além disso, como esperado, no limite de  $M \rightarrow \infty$  recuperamos os potenciais de Maxwell (exceto os termos de contato). Antes desse cálculo, apenas o caso estático do setor de monopolo-monopolo era conhecido e a primeira correção do nosso resultado coincide com [98], no qual o potencial é dado por  $V_{\text{PLW}} = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} (1 - e^{-Mr})$ .

Como antecipado, as correções de spin permanecem iguais nos potenciais de spin-1/2 e spin-1, mas o setor independente do spin apresenta diferenças, de acordo com o segundo termo nas eqs. (2.31) e (2.32).

## 2.4 Eletrodinâmica com parafóton

Uma das extensões da Eletrodinâmica de Maxwell é dada pela inclusão do parafóton. O modelo consiste em introduzir um novo campo acoplado com o fóton. As primeiras propostas foram de Okun (1982) [99] e Georgi-Ginsparg-Glashow (1983) [100]. Nesses trabalhos, os autores introduziram um campo massivo. Posteriormente, Holdom (1986) [101] apresentou um modelo com campo sem massa.

A Eletrodinâmica com parafóton pode ser obtida via compactificação da Teoria de Cordas, apresentando um setor escondido – além dos setores provenientes da simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  do Modelo Padrão – que acopla-se com o fóton de acordo com a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\gamma'} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{\chi}{2}B_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m_{\gamma'}^2}{2}B_\mu^2, \quad (2.33)$$

onde  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ , com  $B_\mu$  representando o campo do parafóton  $\gamma'$ ,  $m_{\gamma'}$  sendo sua massa e  $\chi$  um parâmetro adimensional, com valores possíveis entre  $10^{-12} \lesssim \chi \lesssim 10^{-3}$  [102].

A denominação *setor escondido* se deve ao fato de que o parafóton não se acopla diretamente com a matéria. Por essa razão, em alguns trabalhos é comum o uso do termo *fóton escondido* para o parafóton. No caso em que sua massa é nula,  $m_{\gamma'} = 0$ , teríamos ainda uma simetria escondida  $U_B(1)$ , i.e., uma simetria de gauge restrita ao setor do parafóton. No caso massivo, a ser considerado aqui, teremos a possibilidade de alguns efeitos interessantes como, por exemplo, a oscilação fóton-parafóton – similar a oscilação de neutrinos – com  $\chi$  fornecendo o ângulo de mistura. Esta oscilação é investigada no experimento LSW (em inglês, *Light-Shining-through-a-Wall*), na qual um fóton incidente converte-se no parafóton – ou numa outra partícula, que se mistura com o fóton – que atravessa um meio opaco e depois converte-se no fóton, que será detectado. Para maiores detalhes deste e outros experimentos, bem como a motivação para associar o parafóton à matéria escura, destacamos o trabalho de revisão [103].

Seguiremos a abordagem de [102], no qual o termo de mixing,  $\frac{\chi}{2}B_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , é interpretado como interação, gerando o vértice

$$V_{AB}^{\mu\nu} = i\chi (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) . \quad (2.34)$$

Desse modo, a Lagrangeana possuirá dois propagadores independentes

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{q^2} \left( \eta_{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) , \quad (2.35)$$

$$\langle B_\mu B_\nu \rangle = -\frac{i}{q^2 - m_{\gamma'}^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_{\gamma'}^2} \right) , \quad (2.36)$$

ou seja, um propagador de Maxwell para o campo  $A^\mu$  e um de Proca para  $B^\mu$ .

A ideia é corrigirmos o propagador do fóton através de inserções do campo do para-fóton, obtendo um propagador efetivo

$$\begin{aligned} \langle A_\mu A_\nu \rangle_{eff} &= \langle A_\mu A_\nu \rangle + \langle A_\mu A_\alpha \rangle V_{AB}^{\alpha\rho} \langle B_\rho B_\lambda \rangle V_{AB}^{\lambda\sigma} \langle A_\sigma A_\nu \rangle + \dots \\ &= -\frac{i}{q^2} \left( \eta_{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i\chi^2}{q^2 - m_{\gamma'}^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \mathcal{O}(\chi^4) . \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde o truncamento acima é justificado pelos valores pequenos de  $\chi$ .

Comparando a expressão acima com a forma geral, eq. (2.2), temos que

$$a(q) = -\frac{1}{q^2} - \frac{\chi^2}{q^2 - m_{\gamma'}^2} \quad \Rightarrow \quad a(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2} + \frac{\chi^2}{\mathbf{q}^2 + m_{\gamma'}^2} . \quad (2.38)$$

Nesse caso, as integrais relevantes para os cálculos dos potenciais serão as seguintes:

$$I_0(r) = \frac{1}{4\pi r} (1 + \chi^2 e^{-m_{\gamma'} r}) , \quad (2.39a)$$

$$I_1(r) = (1 + \chi^2) \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{4\pi r} e^{-m_{\gamma'} r} , \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(r) &= \frac{1 + \chi^2}{3} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi r^3} \left( 1 + \chi^2 (1 + m_{\gamma'} r) e^{-m_{\gamma'} r} \right) \delta_{ij} + \\ &\quad - \frac{1}{4\pi r^3} \left( 3 + \chi^2 (3 + 3m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r} \right) \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{r^2} . \end{aligned} \quad (2.39c)$$



Por fim, substituindo essas integrais nos potenciais de spin-0, spin-1/2 e spin-1, conforme as eqs. (2.11), (2.14) e (2.21), respectivamente, obtemos

$$V_{\gamma'}^{(s=0)} = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} \right) (1 + \chi^2 e^{-m_{\gamma'} r}), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} V_{\gamma'}^{(s=1/2)} = & \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) (1 + \chi^2 e^{-m_{\gamma'} r}) + \frac{\chi^2}{8} \left( \frac{m_{\gamma'}^2}{m_1^2} + \frac{m_{\gamma'}^2}{m_2^2} \right) e^{-m_{\gamma'} r} + \right. \\ & - \frac{1 + \chi^2 (1 + r m_{\gamma'}) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right) + \\ & + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle \frac{1 + \chi^2 (1 + m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^2} + \right. \\ & \left. - \frac{3 + \chi^2 (3 + 3m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right] \left. \right\} + \\ & - e_1 e_2 (1 + \chi^2) \left[ \frac{2}{3m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{8m_1^2} + \frac{1}{8m_2^2} \right] \delta^3(\mathbf{r}), \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\gamma'}^{(s=1)} = & \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{m_1 m_2} \mathbf{p}^2 \right) (1 + \chi^2 e^{-m_{\gamma'} r}) - \left( \frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{2m_2^2} \right) \frac{1 + \chi^2 (1 + m_{\gamma'} r) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^2} + \right. \\ & - \frac{1 + \chi^2 (1 + m_{\gamma'} r) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^2} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{1}{2m_1^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \frac{1}{2m_2^2} \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{m_1 m_2} (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right) + \\ & + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \frac{1 + \chi^2 (1 + m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \right. \\ & \left. - \frac{3 + \chi^2 (3 + 3m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r}}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle) (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle) \right] + \\ & + \frac{3 + \chi^2 (3 + 3m_{\gamma'} r + m_{\gamma'}^2 r^2) e^{-m_{\gamma'} r}}{2r^4} \left[ \frac{1}{m_1^2} (\boldsymbol{\epsilon}_1^* \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{m_2^2} (\boldsymbol{\epsilon}_2^* \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{r}) \right] \left. \right\} + \\ & - e_1 e_2 (1 + \chi^2) \left[ \frac{2}{3m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \frac{1}{6m_1^2} + \frac{1}{6m_2^2} \right] \delta^3(\mathbf{r}). \quad (2.42) \end{aligned}$$

Novamente, apenas o caso estático de monopolo-monopolo era conhecido na literatura [102] e confere com a primeira contribuição do nosso resultado,  $V_{\gamma'} = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} (1 + \chi^2 e^{-m_{\gamma'} r})$ . Além disso, obtemos uma nova correção para esse setor, que destaca uma diferença entre o spin-1/2 e spin-1. No primeiro caso, aparece uma correção do tipo  $\chi^2 e^{-m_{\gamma'} r} / r$ , mas agora

com o fator  $m_{\gamma'}^2/m_{1(2)}^2$  (veja segundo termo da eq. (2.41)). Por outro lado, no segundo caso, aparece um decaimento com  $1/r^3$  e fator  $1/m_{1(2)}^2$  (veja segundo termo da eq. (2.42)). As interações de spin permanecem iguais.

Por último, destacamos uma outra possibilidade para o estudo da Eletrodinâmica com parafóton. Conforme [104], ao invés de considerarmos inserções, poderíamos, no contexto da integral funcional, ter integrado no campo do parafóton e obtido uma teoria efetiva para o fóton. A partir dessa Lagrangeana efetiva, calcula-se o potencial. Isso foi feito nessa referência, para o caso estático do setor de monopolo-monopolo, resultando em

$$V = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left( 1 + \frac{\chi^2}{(1 - \chi^2)} e^{-m_{\gamma'} r} \right), \quad (2.43)$$

que, após expansão em  $\chi$ , coincide com os resultados anteriores nas primeiras contribuições da ordem  $\chi^2$ .

## 2.5 Conclusões Parciais

Neste capítulo, generalizamos os resultados conhecidos na literatura para os potenciais inter-partículas nas Eletrodinâmicas de Podolsky-Lee-Wick e a do parafóton. Uma das nossas principais contribuições foi apresentar as correções dependentes do spin e da velocidade para correntes de spin-0, spin-1/2 e spin-1, abrindo possibilidades de outras investigações fenomenológicas como, por exemplo, imposição de limites em  $M$  e  $\chi$  via interação spin-órbita ou quadrupolar.

Além dos potenciais obtidos para essas Eletrodinâmicas Estendidas, destaca-se também o desenvolvimento de prescrições simples para os cálculos dos potenciais de um conjunto de Eletrodinâmicas, com propagador descrito por  $a(q)$ . Nossos resultados, eqs. (2.11), (2.14) e (2.21), já indicam uma universalidade nas interações de spin e a possibilidade de obter diferenças entre spin-1/2 e spin-1 nas correções superiores ao setor de monopolo-monopolo. Passemos agora a discussão de algumas limitações dessa prescrição.

A principal hipótese é que o propagador pudesse ser decomposto conforme a eq. (2.2). Isso é naturalmente violado por modelos com quebra da simetria de Lorentz. Para efeitos

de ilustração, consideremos um exemplo, dado pela Eletrodinâmica de Myers-Pospelov [105], descrita pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{M-P} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} (n \cdot \partial) n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu}, \quad (2.44)$$

onde  $n^\mu$  é o vetor de fundo, que quebra a simetria de Lorentz, e  $g = \xi/M_p$ , com  $\xi$  sendo uma constante adimensional supressa pela massa de Planck  $M_p$ .

Conforme [106] [107], o propagador desse modelo (com gauge fixado), no espaço dos momenta, é dado por

$$\begin{aligned} \langle A^\mu A^\nu \rangle &= \frac{1}{D(k)} \left\{ -k^2 \eta^{\mu\nu} - 4g^2 (n \cdot k)^4 n^2 w^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad - 4g^2 (n \cdot k)^4 \left[ n^\mu n^\nu - \frac{(n \cdot k)}{k^2} (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu) \right] + \\ &\quad \left. + 2gi (n \cdot k)^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha k_\beta \right\}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde  $D(k) = k^4 - 4g^2 (n \cdot k)^4 [(n \cdot k)^2 - n^2 k^2]$ .

Claramente percebe-se que a eq. (2.45) não pode ser conduzida na forma da eq. (2.2). A introdução de um vetor de fundo acarreta na mudança do conjunto de projetores de spin do modelo e, conseqüentemente, teremos novos termos no propagador.

Buscar uma prescrição geral para potenciais envolvendo modelos com violação de Lorentz ainda não parece viável, pois temos muitas possibilidades de combinações e novos termos a serem colocados na estrutura geral do propagador. Além disso, precisaríamos restringir a forma com que a quebra é implementada na Lagrangeana, uma vez que, além do vetor de fundo  $n^\mu$ , existe a possibilidade de quebra via tensores.

Uma outra limitação da nossa prescrição é que excluímos os modelos que apresentem bilineares de mistura entre o campo vetorial  $A^\mu$  com um outro campo. Nesses casos teríamos os chamados propagadores mistos. Por exemplo, considere um bilinear de mistura entre o campo vetorial  $A^\mu$  com um escalar  $\phi$  na seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{A-\phi} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - m \phi \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{4\xi} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, \quad (2.46)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro de gauge.

É possível mostrar que os propagadores são dados por

$$\langle \phi \phi \rangle = \frac{i}{k^2 - m^2}, \quad (2.47)$$

$$\langle \phi A_\mu \rangle = -\langle A_\mu \phi \rangle = \frac{m}{k^2 - m^2} \frac{k_\mu}{k^2}, \quad (2.48)$$

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i \frac{\xi}{k^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (2.49)$$

Logo, após especificarmos os acoplamentos com a matéria, poderíamos ter uma contribuição não-trivial do propagador misto  $\langle \phi A_\mu \rangle$  na amplitude e que teria relevância no potencial. Um modo de contornar a limitação da prescrição, seria utilizarmos uma outra abordagem, via inserção para obter um propagador efetivo,  $\langle A_\mu A_\nu \rangle_{eff}$ , como feito para o caso do parafóton (veja eq. (2.37)).

Uma outra possibilidade, com problema análogo ao caso anterior, seria acoplarmos  $A^\mu$  com campos tensoriais. Por exemplo, o modelo  $\{A, B\}$  apresentado no Capítulo 1. Neste caso, além de  $\langle A_\mu A_\nu \rangle$  e  $\langle B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} \rangle$ , aparece também o propagador misto  $\langle A_\mu B_{\nu\lambda} \rangle$ . A forma explícita desses propagadores, bem como os potenciais dependentes do spin e da velocidade, podem ser encontrados em [7]. Há que se ressaltar que uma prescrição geral para potencias, com termos de mistura entre  $A^\mu$  e campos tensoriais, foi desenvolvida na dissertação [108], mas sem levar em conta as contribuições de spin e da velocidade, ou seja, considerou apenas a interação monopolo-monopolo.

Através desses dois últimos exemplos, poderíamos colocar a seguinte questão: até que ponto é equivalente considerarmos o termo de mistura como sendo legítimo, i.e., sendo parte cinética da Lagrangeana, ou como inserção no propagador? A informação crucial para responder essa questão encontra-se na especificação dos acoplamentos com a matéria. Por exemplo, considere o modelo  $\{A, B\}$ . Ao efetuarmos inserções, obteríamos um propagador efetivo  $\langle A_\mu A_\nu \rangle_{eff}$ , que na amplitude poderia estar acoplado com uma corrente (pseudo-)vetorial. Por outro lado, ao interpretarmos o termo de mistura como termo cinético, teríamos os propagadores  $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ ,  $\langle A_\mu B_{\nu\lambda} \rangle$  e  $\langle B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} \rangle$ , que podem acoplar-se com as

correntes (pseudo)-vetorial e/ou (pseudo)-tensorial. A interação de spin vinda da corrente (pseudo)-tensorial não é igual a da corrente (pseudo)-vetorial e, por essa razão, esperamos diferenças nessas duas abordagens, na situação em que a matéria acopla-se com todos os campos de gauge. No caso do parafóton, adotamos a abordagem da inserção, pois este acopla-se apenas com o fóton e não (diretamente) com a matéria.

Por fim, toda a discussão feita neste capítulo ficou restrita ao espaço-tempo  $4D$ . O estudo de potenciais em dimensões arbitrárias é um objeto de investigação, conforme [109]-[112]. No entanto, esses trabalhos ficam restritos ao setor de monopolo-monopolo. A inclusão das correções de spin é uma questão em aberto, pois antes precisaríamos compreender como é a estrutura de spin da matéria em  $D$ -dimensões. No próximo capítulo, apresentaremos uma contribuição inicial, desenvolvendo alguns casos particulares em  $5D$ .

## Capítulo 3

# Aspectos de Dimensionalidade

Há mais de um século, a Física vem experimentando um reavivado interesse pelo estudo das teorias de campos definidas em espaço-tempo com dimensões mais altas do que quatro. Diversas motivações apareceram ao longo deste período, percorrendo a proposta da unificação das interações fundamentais, especificamente, no início com o Eletromagnetismo e Gravitação, chegando até as Teorias de Supergravidade e Cordas e, mais recentemente, na Matéria Condensada, com a proposta teórica dos Supercondutores Topológicos.

Uma das principais questões que surgiram nesse cenário é a chamada *redução dimensional*, i.e., a explicação de como as dimensões extras se desacoplam das quatro dimensões espaço-temporais que experimentamos. No começo, considerou-se que as dimensões extras fossem compactas e, mais adiante, com a ideia de algumas geometrias, isso poderia ser evitado.

Uma vez fixada a proposta de redução dimensional — coloca-se aqui que não existe um consenso e sim várias prescrições — surgiu, há algumas décadas, a pergunta se os efeitos quânticos deveriam ser computados antes ou depois do processo de redução. Neste capítulo pretendemos contribuir nesta questão via um estudo semi-clássico do potencial inter-partículas, realizado em dimensões superiores e, em seguida, a aplicação de uma proposta de redução do potencial. Em outras palavras, vamos efetuar os cálculos em dimensões superiores e depois reduzir, ou *restringir*, como será explicado mais adiante, ao invés de reduzirmos a ação e depois calcularmos os potenciais. Mostraremos que os dois

caminhos podem não ser comutativos se considerarmos correções superiores à interação de monopolo-monopolo.

O desenvolvimento deste capítulo encontra-se organizado da seguinte maneira. Na primeira seção, faremos uma revisão histórica dos trabalhos envolvendo dimensões extras e as reduções dimensionais. Em seguida, na segunda seção, efetuaremos os cálculos dos potenciais inter-partículas, incluindo as correções de spin e velocidade, para as Eletrodinâmicas de Maxwell e Proca em  $5D$ . Nesta seção, será proposto uma prescrição para restringir a interação de  $5D$  ao subespaço  $4D$  e os resultados serão comparados com os potenciais calculados diretamente em  $4D$ . Na terceira seção, discutiremos a Hamiltoniana de Pauli e outras possíveis simetrias em  $5D$ . Por último, apresentaremos nossas Conclusões Parciais.

### 3.1 Revisão Histórica

Em 1914, Nordström [113], tendo como objetivo elaborar um cenário unificado para o eletromagnetismo e um campo gravitacional escalar, introduz a ideia de uma quinta dimensão. Este trabalho deve ser considerado como o marco inicial da proposta de dimensões extras em Física. Nesta linha, em 1921, Kaluza [114] adotou a ideia de Nordström de uma dimensão espacial suplementar, tendo também em vista a proposta de unificar a gravitação – agora, na formulação Einsteiniana, portanto, com um campo gravitacional tensorial, não mais escalar – e o eletromagnetismo. Unificação, neste contexto, significa que, apesar de todas as suas diferenças, estas duas interações podem ser compreendidas como tendo uma origem em comum. Desde então, a proposta de se entender geometricamente os números quânticos internos (como a carga elétrica, por exemplo) ganhou adesão na comunidade das interações fundamentais. Da mesma forma que energia e momento são descritos em conexão com as translações espaço-temporais, o que se propunha era compreender os números quânticos internos e as interações a estes associadas através de simetrias ligadas às dimensões extras.

Em 1926, independentemente, três autores – Klein [115], Mandel [116] e Fock [117] – retomam a iniciativa de Nordström e Kaluza, propondo que a interação eletromagnética deixasse de ter o status de uma interação especial e passasse a ser vista simplesmente como uma componente da interação gravitacional, com o sistema gravitacional, porém, em uma dimensão extra. Em 1938, Klein [118] apresenta, na épica Conferência *New Theories in Physics*, realizada em Varsóvia, o seu notável seminário *On the theory of charged fields* – que seria a primeira versão do que chamamos atualmente *The Theory of Everything* – no qual notavelmente unificava todas as partículas conhecidas desde o elétron até então (incluindo aí os hipotéticos mésons- $\pi$  previstos por Yukawa em 1935 [119]) em uma descrição unificada das interações gravitacional, eletromagnética e nucleares (forte e fraca) em um espaço-tempo  $5D$ .

No mesmo ano de 1938, Bergmann e Einstein [120] introduzem um elemento novo a partir da proposta de Kaluza e Klein: compreender a quantização da carga elétrica de uma forma diferente do que Dirac havia proposto em seu trabalho de 1931 [68]. Bergmann e Einstein associam a simetria  $U(1)$  do eletromagnetismo à ideia de uma quinta dimensão compacta e esta propriedade justifica a natureza quantizada da carga elétrica. Logo, nesta proposta os autores propõem a geometrização da carga elétrica.

Após a considerável interrupção, devido à II Grande Guerra, no fluxo das ideias que avançavam no riquíssimo período 1925-1938, a área das interações fundamentais em associação com a teoria quântica de campos é retomada no pós-guerra, mas com direcionamento para questões das propriedades físicas e as interações entre as chamadas partículas elementares. Os mésons- $\pi$  de Yukawa são descobertos em 1947, a compreensão da Eletrodinâmica Quântica avança com interesse renovado e a Física Hadrônica, com o desenvolvimento dos aceleradores de partículas, passa a ser dominante na área das Interações Fundamentais. Neste cenário, as ideias de Kaluza-Klein deixam de ter o protagonismo que haviam conquistado na década de 1930.



Apesar do hiato que se preanunciava para as chamadas Teorias de Kaluza-Klein, é importante destacar que a ideia de se geometrizar as interações (agora, na década de 1950, é a vez das interações nucleares) não está completamente esquecida. Shaw e Salam (na tese [121]) e contemporaneamente, Yang-Mills [122] concebem, em 1954, as chamadas Teorias de Yang-Mills-Shaw, que se propõem a descrever, com uma abordagem mais geometrizada, a interação nuclear forte entre prótons e nêutrons, não mais mediada pela troca de bósons escalares (os mésons  $-\pi$  de Yukawa), mas, agora, em maior proximidade ao paradigma eletromagnético: a troca de bósons vetoriais. Na formulação de Yang-Mills-Shaw os próprios mésons  $-\pi$  interagem nuclearmente trocando também esta nova categoria de mediadores. Em 1956, Utiyama [123] publica um importante trabalho, no qual sublinha de forma mais contundente a similaridade da formulação de Yang-Mills-Shaw com a descrição geométrica da gravidade em que se baseia a Teoria da Relatividade Geral. Em 1961, Kibble [124] aprofunda e esclarece melhor o trabalho de Utiyama e reescreve a gravitação como uma teoria de Yang-Mills-Shaw elegendo a simetria de Lorentz da Relatividade Especial como grupo de gauge da formulação. Podemos estabelecer este marco como o final daquela que se poderia chamar fase-I das Teorias de Kaluza-Klein. Mesmo sem introduzir as dimensões extra, as Teorias de Yang-Mills-Shaw seguem a proposta de Kaluza-Klein de se geometrizar interações associadas a números quânticos internos, como carga elétrica e spin isotópico. A área de dimensões extras e/ou geometrização de simetrias internas entra em silêncio de novo, mas, desta vez, somente até 1976.

O período 1962-1976 é efervescente em outras direções: muitas novas ideias, outros paradigmas, avanços na compreensão da implementação de simetrias, grandes previsões teóricas, descobertas que consagram estas previsões, completa-se a Teoria Eletrofraca de Salam-Glashow-Weinberg em 1967; entra em cena a liberdade assintótica com os experimentos do SLAC em 1968/1969 e Gross-Wilczek e Politzer, independentemente, demonstram, em 1973, no âmbito de uma Teoria de Yang-Mills-Shaw com grupo de gauge  $SU(3)$ , a propriedade de liberdade assintótica dos quarks. Neste contexto, as interações eletrofracas e nucleares fortes atingem o status teórico de teorias quânticas de campos consistentes

e aptas a descrever a fenomenologia do mundo das partículas genuinamente elementares (quarks, léptons carregados, neutrinos e bósons vetoriais intermediários). Temos, então, formulado o Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares.

Deve-se, aqui, chamar atenção para o relevante trabalho de Dirac de 1963 [125], onde o autor estuda o grupo de anti-de Sitter,  $SO(2, 3)$ , e obtém a peculiar representação dos *singletons*, que são restritas ao espaço de anti-de Sitter e não aparecem como representações do grupo de Poincaré, mesmo no limite de constante cosmológica nula. Ainda que sendo realizado em (1+3) dimensões, i.e., sem a incorporação de uma dimensão extra, este trabalho merece ser citado por antecipar a ideia da correspondência *AdS/CFT*, conjecturada por Maldacena (1998) [126] e reafirmada por Witten (1998) [127], ao discutirem o espaço de anti-de Sitter 5-dimensional,  $AdS_5$ .

No novo cenário que se descortina, dois grande projetos ocupam a comunidade da área das interações fundamentais: a formulação consistente de uma teoria quântica da gravitação e a busca de um formalismo unificado que demonstre que todas as quatro interações (eletromagnética, nuclear fraca, nuclear forte e gravitação) têm uma origem em comum. A gravitação, de um ponto de vista mais microscópico, catalisa um grande número de esforços e isto contribui para o que ocorrerá alguns anos à frente, mais exatamente, em 1978, o renascimento das Teorias de Kaluza-Klein. A ponte que se estabelece para este ressurgimento é a introdução da Supersimetria (1973) e da Supergravidade (1976) na área das teorias para as interações fundamentais.

É justamente o aparecimento das teorias de supergravidade que restaura o interesse e estimula a busca de novos caminhos para as Teorias de Kaluza-Klein e os métodos de redução dimensional. Em 1975, Scherk e Schwarz [128] retomam os cenários multidimensionais e propõem um método de redução dimensional apropriado para estudar o espectro de campos em modelos reduzidos dimensionalmente a partir de modelos definidos inicialmente em dimensões mais altas. A redução dimensional é trivial: consiste em se considerar apenas as configurações de campos que não dependem das coordenadas espaço-temporais extras; considera-se que os campos dependam apenas das coordenadas

espaço-temporais do espaço de Minkowski em  $4D$ . Esta prescrição funciona para o estudo do chamado setor de modos-zero (campos de massa nula) e é útil também para se chegar às simetrias internas do modelo reduzido. Entretanto, a ideia é imposta por decreto, e não segue naturalmente da dinâmica do sistema de campos

Buscando uma prescrição com mais fundamentação dinâmica, Cremmer e Scherk [129] desenvolvem, em 1976, um novo mecanismo de redução dimensional, um passo adiante da proposta de Kaluza-Klein: a chamada redução dimensional por compactificação espontânea, na qual a dinâmica que se dá em dimensões mais altas indica, através das soluções das equações de campo, que a geometria pode ser fatorada em um espaço-tempo de  $(1+3)$  dimensões e um espaço interno  $N$ -dimensional, cujas isometrias se associam às simetrias de gauge do mundo quadridimensional. A compactificação espontânea abre uma nova era de efervescentes atividades na busca pela unificação e encontra uma forte base teórica na supersimetria; esta provê, através de seus supermultipletes, os campos de matéria necessários para a indução da compactificação espontânea. Sem supersimetria, a introdução destes campos torna-se um processo *ad-hoc*. Em um cenário de supersimetria estendida, a matéria é naturalmente introduzida nos supermultipletes de gauge ou nos supermultipletes de gravitação.

Em seguida à contribuição de Cremmer-Scherk, o período 1976-1978 foi marcado pela publicação de vários trabalhos onde se apresentavam diferentes modelos *à la* Kaluza-Klein baseados no fenômeno da compactificação espontânea, sempre com vistas ao projeto de unificação de todos os campos de força. Em 1978, Nahm [130] mostra que 11 é o número máximo de dimensões permitidas pela supersimetria e, em 1979, Scherk e Schwarz [131] estudam a geração de massa e um mecanismo de quebra espontânea da supersimetria por redução dimensional na formulação de compactificação espontânea da supergravidade, abordagem que se difundiu sob a terminologia de Supergravidades de Kaluza-Klein. Estas foram de central importância e dominaram a literatura referente à unificação e à investigação da gravitação quântica até 1987.

Em 1980, destaca-se o trabalho de Freund-Rubin [132], que aplica o mecanismo da compactificação espontânea à supergravidade maximalmente estendida (11-dimensional): chega-se a um espaço-tempo quadridimensional com constante cosmológica negativa, isto é, um espaço-tempo de anti-de Sitter ( $AdS$ ). Este trabalho é a base para a compreensão da relação entre supersimetria e espaços da categoria  $AdS$ . Cabe ressaltar também que, em 1980, Orzalesi [133] publica um importante trabalho de revisão crítica sobre a unificação do ponto de vista das Teorias de Kaluza-Klein.

Em 1981, Witten [134] publica um trabalho indicando que 11 dimensões, além de ser o espaço-tempo mais amplo possível para acomodar a supersimetria, é também o número mínimo de dimensões para acomodar um grupo de isometria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , que nada mais é do que o grupo de gauge do Modelo Padrão.

Recebeu notada atenção o trabalho de Percacci e Randjbar-Daemi [135], em 1982, onde os autores mostram que o mecanismo de compactificação espontânea, associado à presença de campos de Yang-Mills já introduzidos em altas dimensões, pode eliminar a constante cosmológica do mundo em (1+3) dimensões e ter como solução o produto cartesiano entre um espaço-tempo plano quadridimensional (Minkowski), no lugar de um espaço  $AdS$ , e um espaço compacto N-dimensional, como pressupõe o mecanismo.

Em 1980, uma novidade no que diz respeito às Teorias de Kaluza-Klein: um método de redução dimensional alternativo e radicalmente diferente dos esquemas de Scherk-Schwarz e do fenômeno de compactificação espontânea: a chamada redução dimensional por transformação de Legendre, desenvolvido por Sohnius, Stelle e West [136]. Este processo não omite dependência nas coordenadas espaciais extras, também não as compactifica e não se baseia em uma solução clássica para os campos que definem o modelo em dimensões mais altas. O esquema de Sohnius-Stelle-West é uma proposta realmente nova e se mostra muito conveniente para a obtenção de modelos supersimétricos estendidos com supersimetria realizada *off-shell*, que é uma questão não trivial (veja, por exemplo, a tese [137]).

Uma outra contribuição que deve ser destacada é o trabalho de Dolan e Duff [138], em 1984, onde os autores mostram, pela primeira vez, a conexão entre a receita de Kaluza-

Klein e o aparecimento de álgebras de dimensão infinita, do tipo Kac-Moody, ao analisarem as simetrias dos modelos reduzidos em 4 dimensões incluindo os estados massivos juntamente aos tradicionais modos-zero. Foi um outro importante passo nos anos das Supergravidades e Cosmologias de Kaluza-Klein.

Os quase dez anos de avanços nesta frente de trabalhos, que constituem a fase-II das Teorias de Kaluza-Klein, estão sumarizados e descritos, de forma muito didática, em um artigo de revisão assinado por Duff, Nilsson e Pope em 1986 [139] e em um livro publicado por Appelquist, Chodos e Freund em 1987 [140]. Segue-se, a partir da fase-II, a era das compactificações, dos espaços de Calabi-Yau, dos *orbifolds* e da busca por configurações de vácuo das teorias de supercordas, o que se inaugura com o célebre trabalho *Vacuum Configurations for Superstrings*, de Candelas, Horowitz, Strominger e Witten (1985) [141], no qual são discutidas também várias questões de interesse para uma fenomenologia possível além do Modelo-Padrão, baseada em supersimetria.

A literatura das Teorias de Kaluza-Klein é mais marcadamente dominada pelo estudo de aspectos geométricos e clássicos. O passo essencial é escrever um modelo clássico com as simetrias desejadas e que realize algum esquema de unificação que se esteja procurando. Mas, cumprida esta primeira etapa, é de fundamental relevância se compreender como os resultados clássicos – a estabilidade do estado de vácuo, o espectro de massas e as relações entre as constantes de acoplamento – reagem frente à inclusão dos efeitos quânticos. E, a este ponto abrem-se duas frentes de ataque ao problema: decidir se a quantização será realizada nas dimensões superiores, visando a posterior conexão com a arena quadridimensional, ou se será investigada após algum esquema de redução dimensional ter ocorrido, considerando-se, então, todos os campos e interações do modelo nas quatro dimensões. A escolha de um ou de outro procedimento pode ser irrelevante do ponto de vista puramente clássico, mas, com o processo de quantização, o procedimento pode não ser comutativo: *quantizar-e-reduzir* pode levar a resultados distintos de *reduzir-e-quantizar*.

Na direção de se considerar efeitos quânticos em Teorias de Kaluza-Klein, chamamos atenção para os artigos de Appelquist e Chodos em 1983 [142], onde os autores computam

o potencial efetivo a *1-loop* em termos da componente extra da métrica em 5 dimensões; os autores consideram o modelo 5-dimensional de Kaluza-Klein para unificar gravitação e eletromagnetismo e obtêm o resultado a *1-loop* em cinco dimensões. A partir deste resultado, mostram que a dimensão extra tende a se contrair a um tamanho na escala do comprimento de Planck. Estes dois trabalhos, na verdade, descrevem a contrapartida gravitacional do Efeito Casimir da Eletrodinâmica. Podemos dizer que Appelquist e Chodos iniciam a fase da quantização das Teorias de Kaluza-Klein. Ainda em 1983, Appelquist, Chodos e Myers [143] mostram como efeitos quânticos podem gerar instabilidades no processo de redução dimensional. Em seguida, Chodos (1984) [144] apresenta um trabalho mais genérico, onde tece várias considerações sobre as Teorias de Kaluza-Klein e, em particular, faz algumas digressões sobre os aspectos quânticos destas teorias.

Em 1984, Candelas e Weinberg [145] propõem a chamada redução dimensional auto-consistente e partem de  $(4+N)$  dimensões, onde consideram um sistema de gravitação acoplada a campos de matéria que não auto-interagem e cujo tensor energia-momento corrigido à ordem de *1-loop* é o responsável pela curvatura da variedade compacta  $N$ -dimensional que emerge das  $N$  dimensões extras. Neste esquema, os autores também apresentam um procedimento para se calcular cargas e constantes de acoplamento de gauge do modelo reduzido 4-dimensional. Em seguida, Delbourgo e Weber (1986) [146] também estudam efeitos das correções quânticas diretamente em 5 dimensões. Derivam os propagadores do gráviton e do fóton e o efeito dos modos massivos de spin-2 no espaço-tempo 5-dimensional, baseando-se fortemente na proposta de Appelquist e Chodos para tratar a questão.

Cabe destacar também o trabalho de Huggins e Toms (1985) [147] onde computam, no modelo 5-dimensional, uma ação efetiva a *1-loop* para discutir a componente Maxwelliana desta ação efetiva induzida como efeito das correções de *1-loop*. De um ponto de vista sincrônico, foi uma contribuição de significado para a época.

Retomando de forma mais enfática o que colocamos acima, a tarefa de executar a quantização e computar correções quânticas no âmbito das Teorias de Kaluza-Klein coloca-

nos frente à duas possibilidades: realiza-se o programa no espaço-tempo completo com dimensão  $D > 4$  e, em seguida, reduz-se o modelo com os efeitos quânticos já computados nas dimensões mais altas; ou, alternativamente, procede-se inicialmente à redução e, uma vez que o estado de vácuo, os modos-zero, as flutuações massivos e todos os acoplamentos tenham sido determinados em  $D = 4$ , passa-se à quantização e ao cômputo dos efeitos quânticos já no espaço-tempo reduzido quadridimensional. Trabalhos publicados sobre a questão, e que serão citados mais à frente, mostram que pode, de fato, haver uma espécie de inequivalência quântica entre modelos de Kaluza-Klein quando se adota um ou outro ponto de vista. Estabelece-se, a partir dos trabalhos de Appelquist e Chodos de 1983, uma rica literatura no tópico das altas dimensões, mecanismos de compactificação e efeitos quânticos das altas dimensionalidades. Optamos aqui por fazer uma varredura do tópico, de 1983 à atualidade, apenas demarcando o aparecimento daquelas ideias — e as correspondentes referências seminais — que vieram a definir novas direções na discussão dos efeitos quânticos inerentes às teorias de campos definidas em dimensionalidades mais altas.

A década de 1990 avança ainda com grande interesse na influência, via efeitos quânticos, das dimensões extras e sua compactificação no mecanismo da quebra eletrofraca e em processos que realizavam testes de precisão da Teoria Eletrofraca. Importante lembrar que, no período 1989-2000, o acelerador LEP do CERN encontrava-se no pleno de suas operações, e a era dos testes de precisão do setor eletrofraco constituía-se em uma grande questão deste período. Daí, o grande estímulo de se tentar detectar indiretamente as dimensões extras através de seus efeitos quânticos.

Já na reta final da década de 1990, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali quebram a quase monotonia da área: publicam, em 1998, uma série de artigos [148] em que relacionam o problema da hierarquia de gauge do Modelo-Padrão a uma nova escala — sub-milimétrica — para as dimensões extra, tirando-as da escala de Planck. Na proposta destes autores — que passou a ser conhecida como *Large Extra Dimensions* — as novas dimensões compactas e sub-milimétricas são responsáveis pelo enfraquecimento da força

gravitacional relativamente à força fraca na escala sub-nuclear. Este foi um passo muito inovador para a área, que, até então, sempre preconizou a escala Planckiana para as dimensões extras. Logo em seguida, em 1999, Randall e Sundrum [149] introduzem um novo cenário para as dimensões extras, ao qual passou-se a ser referido como *warped dimensions*: o que estes autores propõem é que os testes ligados à força gravitacional não impedem que sejam consideradas não-compactas (no modelo 5-dimensional a quinta dimensão pode ser infinita) as dimensões extra ao nosso Universo quadridimensional; este ponto de vista é realmente um corte no pensamento da área. E toda a ideia está baseada na existência de uma geometria não-fatorada, na qual a métrica do espaço-tempo quadridimensional passa a depender das dimensões extras. Quebra-se, então, neste cenário, a premissa de que a geometria do espaço-tempo completo seja fatorável, podendo, agora, termos a presença das coordenadas espaciais extras na própria métrica do espaço-tempo quadridimensional.

Inicia-se, com Randall e Sundrum, a fase das chamadas *warped geometries* e cenários de *brane-world*, com muitas aplicações ao estudo de efeitos quânticos nos processos envolvendo as partículas do Modelo-Padrão e às consequências dos *brane-worlds* na formulação de modelos cosmológicos. Na concepção das *warped geometries*, nosso Universo é um espaço de anti-de Sitter 5-dimensional, no qual todas as partículas do Modelo-Padrão estão localizadas em uma *brana* quadridimensional, enquanto os grávitons propagam-se e têm a sua dinâmica no interior do mundo 5-dimensional. A partir daí o modelo de Randall-Sundrum se consolidou e vem sendo regularmente discutido na literatura da área.

Na linha dos efeitos quânticos em teorias de campos em mais altas dimensões, poderíamos citar, em seguida à ampla aceitação das *warped geometries*, os trabalhos de Álvarez e Faedo (2006, 2007) [150], que também demarcam uma fronteira no tópico das correções quânticas. Nestes trabalhos, os autores atacam frontalmente a questão de comparar os procedimentos de quantização e cômputo de correções a *1-loop* no espaço-tempo completo e no espaço-tempo reduzido com a inclusão das torres de campos massivos. Colocam em evidência as condições sob as quais as duas metodologias podem ou não ser



equivalentes. Nos casos em que a inequivalência quântica fica comprovada, faz-se importante rever uma série de trabalhos da literatura onde se tratou a questão como se a equivalência fosse natural, como ocorre a nível clássico. Estes trabalhos merecem a devida atenção se o foco é a discussão sobre como computar correções quânticas para modelos com mais dimensões.

Mais recentemente, podemos citar a linha de trabalhos iniciada por Bauman e Dienes [151] e, em especial, no artigo de 2012, onde aplicam um método de regularização que propuseram em 2008 para o cálculo de efeitos radiativos em teorias com dimensões compactas. No trabalho de 2012, computam e demonstram explicitamente como as correções a *1-loop*, calculadas no setor de modos massivos de Kaluza-Klein, alteram as relações entre massas e constantes de acoplamento. O trabalho tem consequências para o estudo de processos em Física além do Modelo-Padrão.

Antes de finalizar, desejamos destacar a introdução de uma dimensão extra em uma questão bastante atual da Física de Matéria Condensada: o comportamento de uma nova categoria de materiais, denominados supercondutores topológicos, ainda em fase de síntese em laboratório. Para descrever a dinâmica dos elétrons e fótons neste material em nossas 3 dimensões espaciais, o interessante trabalho de Qi-Witten-Zhang [152] introduz uma quarta dimensão espacial e formula um modelo eletrodinâmico em (1+4) dimensões e adicionam à ação Maxwelliana o termo topológico de Chern-Simons, que, no mundo (1+3)-dimensional induz naturalmente o termo tipo-axiônico, fundamental para a compreensão de propriedades dos supercondutores topológicos. Consideramos interessante citar este trabalho, pois abre um novo horizonte de dimensões extras em sistemas de Matéria Condensada.

## **3.2 Potencial em 5D e sua restrição para 4D**

Após este levantamento cronológico de como evoluíram as ideias e a literatura no campo das dimensões superiores e possíveis esquemas de redução dimensional, acreditamos ter um contexto bem delineado para apresentarmos a nossa proposta de realizar a conexão entre um estudo semi-clássico (cálculo de potenciais inter-partículas) realizado em dimensões superiores e a sua redução ao mundo  $4D$ . O esquema em questão está sendo denominado de redução por *restrição dimensional* e o elemento-chave para a realização deste processo é a integração do potencial nas dimensões espaciais extras ou, equivalentemente, como será explicado mais adiante, na premissa de que a interação entre as partículas não transfere momento nas dimensões extras. Faremos isso para o espaço-tempo  $5D$  e incluiremos as correções dependentes do spin e da velocidade ao potencial. O contexto será o estudo das Eletrodinâmicas de Maxwell e Proca. Antes disso, discutiremos a descrição de férmions massivos em  $5D$ , bem como a simetria de paridade.

### 3.2.1 Férmions massivos e a Paridade em $5D$

Começamos esta subseção, fixando algumas convenções. Para o espaço-tempo de Minkowski em  $5D$ , adotaremos a métrica  $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}(+, -, -, -, -)$ , onde  $\hat{\mu}, \hat{\nu} = (0, i, 4)$  com  $i = (1, 2, 3)$ . Uma escolha das matrizes da álgebra de Clifford,  $\{\gamma^{\hat{\mu}}, \gamma^{\hat{\nu}}\} = 2\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , é dada por  $\gamma^{\hat{\mu}} = (\gamma^{\mu}, \gamma^4 \equiv i\gamma_5)$ , onde  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , com  $\gamma^{\mu}$  ( $\mu = 0, i$ ) satisfazendo a álgebra de Clifford em  $4D$ . Uma outra possibilidade seria  $\gamma^{\hat{\mu}} = (i\gamma_5\gamma^{\mu}, \gamma^4 \equiv i\gamma_5)$ . Utilizaremos a primeira proposta, pois esta será mais conveniente na decomposição dos espinores e no estudo do limite não-relativístico.

A Lagrangeana para o espinor de Dirac massivo em  $5D$  é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{5D} = \bar{\psi} i\gamma^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.1)$$

Definimos a transformação de paridade em  $5D$  como  $x'_0 = x_0$ ,  $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'_4 = \mathbf{x}_4$ . Logo, mantemos a transformação usual em  $4D$  e a dimensão espacial extra,  $\mathbf{x}_4$ , permanece inalterada a fim de termos uma transformação discreta.

Vamos propor a seguinte transformação de paridade para o espinor

$$\psi'(x') = P \psi(x). \quad (3.2)$$

Neste ponto, gostaríamos de encontrar uma forma explícita para a matriz  $P$ . Iniciamos com a imposição da invariância do termo cinético na eq. (3.1). Assim, usando a eq. (3.2) e  $\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 = \bar{\psi} \gamma^0 P^{\dagger} \gamma^0$ , obtemos as seguintes relações

$$P^{\dagger} = P^{-1}, \quad \gamma^0 \gamma^i P = -P \gamma^0 \gamma^i, \quad \gamma^0 \gamma^4 P = P \gamma^0 \gamma^4. \quad (3.3)$$

as quais fixam

$$P = i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (3.4)$$

O fator  $i$  é apenas para futuras conveniências. No entanto, ainda não terminamos, pois é necessário considerar também a transformação do termo de massa na eq. (3.1). Dos resultados anteriores, encontramos que

$$m \bar{\psi}' \psi' = m \bar{\psi} \gamma^0 P^{\dagger} \gamma^0 P \psi = -m \bar{\psi} \psi \quad (3.5)$$

ou seja, o termo de massa quebra a simetria de paridade em  $5D$ .

Uma maneira de contornar este problema é dada pela duplicação da representação fermiônica. Uma proposta similar foi considerada em [153], no contexto do espaço-tempo de Minkowski  $3D$ , também para conciliar a simetria da paridade com férmions massivos. Uma outra possibilidade seria modificarmos o termo de massa, como feito em [154], mas não seguiremos este caminho aqui. Logo, definimos o espinor duplicado:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Além disso, vamos também definir as matrizes de Clifford, na representação duplicada, como

$$\Gamma^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} \gamma^{\hat{\mu}} & 0 \\ 0 & -\gamma^{\hat{\mu}} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

assim, o conjugado de Dirac de  $\Psi$  fica expresso por  $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger} \Gamma^0 = (\bar{\psi}, -\bar{\chi})$ , com  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$  e  $\bar{\chi} = \chi^{\dagger} \gamma^0$ .

A Lagrangeana de Dirac para o espinor duplicado é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Dirac},2\times}^{5D} &= \bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \\ &= \bar{\psi} i \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi + \bar{\chi} i \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \chi - m \bar{\psi} \psi + m \bar{\chi} \chi.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Após todas essas considerações, se implementarmos a transformação de paridade em  $\Psi$  através de

$$\Psi' = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

então é possível mostrar que a Lagrangeana, eq. (3.8), é invariante por paridade, uma vez que a transformação troca

$$\bar{\psi} i \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi \longleftrightarrow \bar{\chi} i \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \chi, \quad -m \bar{\psi} \psi \longleftrightarrow m \bar{\chi} \chi. \quad (3.10)$$

Agora estamos preparados para seguir com o cálculo do potencial de interação inter-partículas em  $5D$ .

### 3.2.2 Eletrodinâmica de Maxwell em 5D

Nesta subseção, seguiremos a metodologia descrita na seção 1.1. Logo, como ponto de partida, necessitamos da solução livre da equação de Dirac,

$$(\Gamma^{\hat{\mu}} p_{\hat{\mu}} - m) \Psi(p) = 0, \quad (3.11)$$

que é equivalente às equações

$$(\gamma^{\hat{\mu}} p_{\hat{\mu}} - m) \psi(p) = 0, \quad (\gamma^{\hat{\mu}} p_{\hat{\mu}} + m) \chi(p) = 0. \quad (3.12)$$

Consideremos a decomposição

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \lambda \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $\xi, \varphi, \lambda$  e  $\zeta$  são bi-espinores. Usando as eqs. (3.12), na representação de Dirac para  $\gamma^{\mu}$ , podemos eliminar  $\varphi, \lambda$  e os espinores se reduzem para

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m) \xi \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - i \mathbf{p}_4) \xi \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\chi(p) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + i\mathbf{p}_4) \zeta \\ (E+m)\zeta \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Os espinores acima diferem essencialmente por um sinal negativo no termo da dimensão extra, i.e., no termo com  $\mathbf{p}_4$ . Isso é uma consequência da simetria de paridade e terá um importante impacto nas interações trazidas pela dimensão extra. Esperamos obter mais interações no formalismo com férmion duplicado e o formalismo com quebra de paridade (sem duplicação) será recuperado tomando-se  $\zeta = 0$ .

Desde que estamos lidando com dois bi-espinores,  $\xi$  e  $\zeta$ , precisamos introduzir uma nomenclatura nas contrações da eq. (1.13), assim, definimos

$$\delta_\xi = \xi_f^\dagger \xi_i, \quad \delta_\zeta = \zeta_f^\dagger \zeta_i, \quad \langle \mathbf{S} \rangle_\xi = \xi_f^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi_i, \quad \langle \mathbf{S} \rangle_\zeta = \zeta_f^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \zeta_i. \quad (3.16)$$

Tendo estabelecido as soluções livres dos espinores, passemos ao cálculo da corrente vetorial do espinor duplicado,

$$J^\mu = \bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\chi} \gamma^\mu \chi. \quad (3.17)$$

Inserindo as eqs. (3.14) e (3.15) na eq. (3.17) é possível mostrar que as componentes da corrente, com as atribuições de momenta da Fig. 1.1 para a partícula 1, assumem a forma

$$\begin{aligned} J_{(1)}^0 &= 2m_1 (\delta_{\xi,1} + \delta_{\zeta,1}) + \frac{1}{m_1} \left\{ (\delta_{\xi,1} + \delta_{\zeta,1}) (\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_4^2) + \right. \\ &\quad + i (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi + \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta] + i \mathbf{q}_4 \mathbf{p} \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi - \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta] + \\ &\quad \left. - i \mathbf{p}_4 \mathbf{q} \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi - \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta] \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} J_{(1)}^i &= 2 (\delta_{\xi,1} + \delta_{\zeta,1}) \mathbf{p}_i - 2i \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_j [\langle \mathbf{S}_{1,k} \rangle_\xi + \langle \mathbf{S}_{1,k} \rangle_\zeta] + \\ &\quad + 2i \mathbf{q}_4 [\langle \mathbf{S}_{1,i} \rangle_\xi - \langle \mathbf{S}_{1,i} \rangle_\zeta], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$J_{(1)}^4 = 2 (\delta_{\xi,1} + \delta_{\zeta,1}) \mathbf{p}_4 - 2i \mathbf{q} \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi - \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta]. \quad (3.20)$$

Antes de partirmos para a amplitude, é interessante analisarmos a transformação de paridade dessas componentes. A partir da eq. (3.9), temos que a transformação de paridade dos bi-espinores é dada por  $\xi' = \zeta$  e  $\zeta' = -\xi$ . Esta é a razão para colocarmos o fator  $i$  em  $P = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , i.e., para obter uma transformação real. Desde que  $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}'_4 = \mathbf{q}_4$ ,  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4$ , notamos a existência de algumas combinações lineares específicas com o spin nas equações acima, a fim de manter o comportamento vetorial da corrente sob paridade. Por exemplo, no segundo termo da eq. (3.20), temos que  $\mathbf{q}' \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle'_\xi - \langle \mathbf{S}_1 \rangle'_\zeta] = \mathbf{q} \cdot [\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi - \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta]$ , que é consistente com  $J_{(1)}^4 = J_{(1)}^4$ . Um argumento similar vale para os demais termos. Consequentemente, é sugestivo definirmos

$$\langle \mathbf{S}^\pm \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle_\xi \pm \langle \mathbf{S} \rangle_\zeta, \quad (3.21)$$

que pode ser entendido como o produto

$$\langle \mathbf{S}^\pm \rangle = \begin{pmatrix} \xi_f^\dagger & \zeta_f^\dagger \end{pmatrix} \mathbf{S}^\pm \begin{pmatrix} \xi_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{S}^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \pm \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

O  $\langle \mathbf{S}^+ \rangle$  pode ser interpretado como o valor esperado do spin, pois  $\mathbf{S}^+$  satisfaz a álgebra do grupo  $SU(2)$ ,  $[\mathbf{S}_i^+, \mathbf{S}_j^+] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k^+$ , e é par sob paridade,  $\langle \mathbf{S}^+ \rangle' = \langle \mathbf{S}^+ \rangle$ . Por outro lado, o operador  $\mathbf{S}^-$  e seu valor esperado não satisfazem tais propriedades. Desde que  $\mathbf{S}^-$  é formado por dois spin,  $\boldsymbol{\sigma}/2$ , e sob paridade satisfaz  $\langle \mathbf{S}^- \rangle' = -\langle \mathbf{S}^- \rangle$ , este será denominado de pseudo-spin.

É conveniente também definirmos  $\Delta = \delta_\xi + \delta_\zeta$ , que é invariante sob paridade,  $\Delta' = \Delta$ .

Após todas essas definições, podemos reescrever as componentes da corrente vetorial, eqs (3.18)-(3.20), como segue

$$\begin{aligned} J_{(1)}^0 &= 2m_1\Delta_1 + \frac{1}{m_1} \left[ \Delta_1 (\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_4^2) + i (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle + \right. \\ &\quad \left. + i \mathbf{q}_4 (\mathbf{p} \cdot \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) - i \mathbf{p}_4 (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$J_{(1)}^i = 2\Delta_1 \mathbf{p}_i - 2i \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{S}_{1,k}^+ \rangle + 2i \mathbf{q}_4 \langle \mathbf{S}_{1,i}^- \rangle, \quad (3.25)$$

$$J_{(1)}^4 = 2\Delta_1 \mathbf{p}_4 - 2i \mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1^- \rangle, \quad (3.26)$$

Essas componentes exibem algumas contribuições similares ao caso  $4D$ , conforme eqs. (1.17) e (1.18), e também novos termos associados à dimensão extra.

Agora procedemos ao cálculo da amplitude para a Eletrodinâmica de Maxwell em  $5D$ , descrita pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{5D} = -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^2. \quad (3.27)$$

De um modo similar feito no Capítulo 1, obtemos a amplitude

$$\mathcal{M}_{NR}^{5D} = -\frac{g_1 g_2}{\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}_4^2} \frac{J_{(1)}^{\hat{\mu}} J_{(2)\hat{\mu}}}{(2E_1)(2E_2)}, \quad (3.28)$$

onde  $g_{1(2)}$  denota a constante de acoplamento em  $5D$ .

Após algumas manipulações algébricas, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{J_{(1)}^{\hat{\mu}} J_{(2)\hat{\mu}}}{(2E_1)(2E_2)} &= \Delta_1 \Delta_2 \left[ \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} \right) + \right. \\ &- \frac{1}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) (\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}_4^2) \left. \right] + \\ &+ i \mathbf{q} \cdot \left\{ \mathbf{p} \times \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right] + \right. \\ &- \mathbf{p}_4 \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2 \left. \right\} + \\ &+ i \mathbf{q}_4 \mathbf{p} \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{q}_4 \mathbf{q}}{m_1 m_2} \cdot [ (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) ] + \\ &- \frac{1}{m_1 m_2} [ \mathbf{q}^2 \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle + \mathbf{q}_4^2 \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle ] + \\ &+ \frac{1}{m_1 m_2} [ (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle) (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle) - (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) (\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) ]. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Por fim, resta apenas o cálculo da integral de Fourier,

$$V_{5D} = - \int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \mathcal{M}_{NR}^{5D}. \quad (3.30)$$

Como explicado no Apêndice, utilizaremos  $\mathbf{R}$  para denotar o vetor euclidiano em  $4D$ , a fim de evitar confusão com  $\mathbf{r}$ , usado para o vetor em  $3D$ . Logo, usando as integrais dadas pelas eqs. (A.8)- (A.10), obtemos

$$\begin{aligned} V_{5D}^{\text{Maxwell}} = & g_1 g_2 \left\{ \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4\pi^2 R^2} \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} \right) + \right. \\ & - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^4(\mathbf{R}) + \\ & - \frac{1}{2m_1 m_2} [ \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle + \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle ] \delta^4(\mathbf{R}) + \\ & - \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{2\pi^2 R^4} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ & - \frac{(\mathbf{x}_4 \mathbf{p} - \mathbf{p}_4 \mathbf{r})}{2\pi^2 R^4} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ & - \frac{2}{\pi^2 m_1 m_2} \frac{\mathbf{x}_4 \mathbf{r}}{R^6} \cdot \left[ (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) \right] + \\ & - \frac{1}{\pi^2 R^4} \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) \left( \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{R^2} (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) - \frac{2}{R^2} (\langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2^- \rangle \cdot \mathbf{r}) \right] \left. \right\}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Como antecipado no começo desta subseção, no caso com espinor duplicado temos novas interações. Por exemplo, observa-se um acoplamento não-trivial entre spin e pseudo-spin do tipo  $\langle \mathbf{S}^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}^- \rangle$ . Podemos checar que esta contribuição existe somente no caso com simetria de paridade. Para isso, examinemos a seguinte dependência no potencial:

$$(\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle) = 2(\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta \times \langle \mathbf{S}_2 \rangle_\xi) + 2(\langle \mathbf{S}_2 \rangle_\zeta \times \langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi), \quad (3.32)$$

assim, no caso de quebra de paridade, tomamos  $\zeta = 0$ , que implica  $\langle \mathbf{S} \rangle_\zeta = 0$  e conduz a uma contribuição nula. O mesmo ocorre para o último termo do potencial, que é também



linear em  $\langle \mathbf{S} \rangle_\zeta$ ,

$$\begin{aligned} (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) - (\langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2^- \rangle \cdot \mathbf{r}) &= 2 (\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\zeta \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2 \rangle_\xi \cdot \mathbf{r}) + \\ &+ 2 (\langle \mathbf{S}_1 \rangle_\xi \cdot \mathbf{r}) (\langle \mathbf{S}_2 \rangle_\zeta \cdot \mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalizado o cálculo do potencial de Maxwell em  $5D$ , passemos a proposta da *restrição dimensional*.

### 3.2.3 Restrição para 4D

Por simplicidade, usaremos um esquema de redução, em que fixamos  $\mathbf{x}_4$  a ser constante nos campos e, portanto,  $\partial_4(\text{campos}) = 0$ . Logo, o termo de interação da Eletrodinâmica de Maxwell em  $5D$  é reduzido para

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}^{5D} &= \int d^4x \, d\mathbf{x}_4 \, g_{(5)} \bar{\psi}_{(5)} \gamma^{\hat{\mu}} \psi_{(5)} A_{(5)\hat{\mu}} \rightarrow \\ &\rightarrow \int d^4x \, \left( \frac{g_{(5)}}{\sqrt{L}} \right) (\bar{\psi}_{(5)} \sqrt{L}) \gamma^{\hat{\mu}} (\psi_{(5)} \sqrt{L}) (A_{(5)\hat{\mu}} \sqrt{L}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde  $L = \int d\mathbf{x}_4$  denota o comprimento da dimensão extra.

A dimensão canônica de massa dos campos e das constantes de acoplamento em  $5D$  e  $4D$  é dada por:  $[\psi_{(5)}] = 2$ ,  $[A_{(5)\hat{\mu}}] = 3/2$ ,  $[g_{(5)}] = -1/2$  e  $[\psi_{(4)}] = 3/2$ ,  $[A_{(4)\mu}] = 1$ ,  $[g_{(4)} \equiv e] = 0$ , respectivamente. Logo, o fator  $\sqrt{L}$  restaura a dimensão correta em  $4D$ , tal que  $g_{(4)} = g_{(5)}/\sqrt{L}$ ,  $\psi_{(4)} = \psi_{(5)} \sqrt{L}$  and  $A_{(4)\hat{\mu}} = A_{(5)\hat{\mu}} \sqrt{L}$ . Para nossos propósitos, precisamos apenas da relação entre as constantes de acoplamento, que é independente do esquema de redução.

Vamos agora propor o seguinte procedimento. Primeiro, definimos a média de  $V_{5D}$  na dimensão extra,

$$\langle V_{5D} \rangle_L = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} d\mathbf{x}_4 V_{5D}, \quad (3.35)$$

e então estendemos para o caso não-compacto, tomando o limite  $L \rightarrow \infty$ ,

$$V_{\text{res}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle V_{5D} \rangle_L. \quad (3.36)$$

O potencial  $V_{\text{res}}$ , definido acima, será chamado de potencial restrito ou a restrição do potencial em  $5D$  para o subespaço  $4D$ .

A princípio, poderíamos pensar que esta prescrição é apenas um procedimento estatístico, desde que na eq. (3.35), tenhamos uma média no intervalo  $-L/2 < \mathbf{x}_4 < L/2$  com probabilidades iguais  $1/L$  e então tomamos o limite não-compacto. No entanto, existe um significado físico para esta operação. Ao substituirmos a definição do potencial  $V_{5D}$ , eq. (3.30), na eq. (3.36), e recordando que  $g_{(5)} = \sqrt{L} g_{(4)}$ , podemos mostrar que

$$V_{\text{res}} = - \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[ \mathcal{M}_{NR}^{5D} \Big|_{\mathbf{q}_4=0} \right], \quad (3.37)$$

onde está implícito  $g_{(5)} \rightarrow g_{(4)}$  na amplitude acima.

Uma vez que na eq. (3.37) tomamos  $\mathbf{q}_4 = 0$ , compreendemos a prescrição como uma restrição da interação ao subespaço  $4D$  imerso em  $5D$ , sem perder as propriedades das partículas em  $5D$ , a saber:  $\Delta$ , (pseudo-)spin  $\langle \mathbf{S}^\pm \rangle$  e os momenta  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_4$ . Por essa razão, evitaremos o uso da expressão *redução dimensional* do potencial ou potencial *reduzido*. Nossa prescrição é apenas uma restrição na amplitude, em que o momento transferido na dimensão extra,  $\mathbf{q}_4$ , é desprezível em comparação com  $\mathbf{q}$  no processo. Lembrando que estamos considerando um espalhamento elástico, assim, temos também que  $q^0 = 0$ .

Aqui colocamos uma importante observação: esta prescrição é bem definida para  $r \neq 0$ , de modo que o potencial restrito não contemplará termos de contato, i.e., aqueles com  $\delta^3(\mathbf{r})$ . Na passagem da eq. (3.36) para eq. (3.37), foi efetuado uma troca de integração e assumido funções não-singulares.

Vamos agora aplicar a restrição ao potencial  $V_{5D}^{\text{Maxwell}}$ , i.e., usamos a prescrição na eq. (3.36) e integramos a eq. (3.31), ou, equivalentemente, tomamos a integral de Fourier  $3D$  da amplitude, eq. (3.28)-(3.29) com  $\mathbf{q}_4 = 0$ , resultando na seguinte expressão (para

$r \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
V_{\text{res}}^{\text{Maxwell}} &= \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \left\{ \Delta_1 \Delta_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} \right) + \right. \\
&- \frac{\mathbf{L}}{r^2} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\
&+ \frac{\mathbf{Q}_{ij}}{r^2} \frac{1}{m_1 m_2} [\langle \mathbf{S}_{1,i}^+ \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j}^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_{1,i}^- \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j}^- \rangle] + \\
&\left. + \frac{\mathbf{p}_4 \mathbf{r}}{r^2} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Comparando  $V_{\text{res}}^{\text{Maxwell}}$  com o potencial calculado diretamente em  $4D$ , eq. (1.20), observamos algumas similaridades, após usarmos o seguinte dicionário:  $\delta \leftrightarrow \Delta$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{S}^+ \rangle$ . Note que, em  $V_{\text{res}}^{\text{Maxwell}}$ , temos o termo de Coulomb, dominante em longas distâncias. A novidade é que obtivemos contribuições dependentes da velocidade na dimensão extra, i.e. com  $\mathbf{p}_4$ , e também correções na interação de quadrupolo, que não dependem da velocidade, a saber, uma interação entre pseudo-spin, proporcional a  $\mathbf{Q}_{ij} \langle \mathbf{S}_{1,i}^- \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j}^- \rangle$ . Este termo aparece devido a interação intermediada pela componente  $A^4$  de  $A^{\hat{\mu}}$  e pelo fato de que a componente extra da corrente, eq. (3.26), possui o acoplamento do pseudo-spin com o momento transferido em  $3D$ ,  $\mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S}^- \rangle$ .

Por último, gostaríamos de comentar que nossa proposta possui algumas similaridades com a chamada *Off-shell Quantum Electrodynamics*, ou também conhecida como *Pre-Maxwell Electrodynamics*, discutida, por exemplo, em [155]. Neste cenário, os autores também introduziram uma dimensão extra, mas efetuaram sua integração nos campos/correntes, e não no potencial, como feito aqui.

### 3.2.4 Eletrodinâmica de Proca em 5D e sua restrição

Na subseção anterior, discutimos a restrição do potencial inter-partículas para a Eletrodinâmica de Maxwell. Vamos agora generalizar este resultado para um caso em que o bóson intermediador possui massa e seja descrito pela Lagrangeana de Proca em  $5D$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}}^{5D} = -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^2 + \frac{1}{2} m^2 A_{\hat{\mu}}^2, \quad (3.39)$$

que fornece o seguinte propagador

$$\langle A_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} \rangle = -\frac{i}{q^2 - m^2} \left( \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{q_{\hat{\mu}} q_{\hat{\nu}}}{m^2} \right). \quad (3.40)$$

De um modo similar feito em seções anteriores, temos que  $\mathcal{M} = i g_1 g_2 J_{(1)}^{\hat{\mu}} \langle A_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} \rangle J_{(2)}^{\hat{\nu}}$ . Novamente  $g_{1(2)}$  denota a constante de acoplamento. Recordando da relação entre  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}_{NR}$ , eq. (1.2), obtemos

$$\mathcal{M}_{NR}^{5D} = -\frac{g_1 g_2}{\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}_4^2 + m^2} \frac{J_{(1)}^{\hat{\mu}} J_{(2)}^{\hat{\nu}}}{(2E_1)(2E_2)}, \quad (3.41)$$

onde, na última passagem, foram utilizadas a conservação da corrente e  $q^0 = 0$ .

Por fim, prosseguimos ao cálculo do potencial. Note que o produto das correntes, presente na amplitude não-relativística, eq. (3.41), foi calculado na eq. (3.29). Assim, usando a prescrição, eq. (3.30), e fazendo uso das integrais de Fourier, eqs. (A.5)-(A.7) do Apêndice, obtemos

$$\begin{aligned} V_{5D}^{\text{Proca}} = & g_1 g_2 \left\{ \frac{m K_1}{4\pi^2 R} \Delta_1 \Delta_2 \left[ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} + \frac{m^2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right] + \right. \\ & - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^4(\mathbf{R}) - \frac{\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle + \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle}{2m_1 m_2} \delta^4(\mathbf{R}) + \\ & + \frac{m^3 K_1}{4\pi^2 R} \frac{\langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle}{m_1 m_2} - \frac{1}{4\pi^2 R^2} \left[ \frac{4m K_1}{R} + 2m^2 K_0 + \right. \\ & - \left. \frac{r^2}{R} \left( \frac{8m K_1}{R^2} + \frac{4m^2 K_0}{R} + m^3 K_1 \right) \right] \frac{\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle}{m_1 m_2} + \\ & - \frac{1}{4\pi^2 R^2} \left( \frac{2m K_1}{R} + m^2 K_0 \right) \left[ (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \left( \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right) + \right. \\ & + \left. (\mathbf{x}_4 \mathbf{p} - \mathbf{p}_4 \mathbf{r}) \cdot \left( \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ & - \frac{1}{4\pi^2 R^3} \left( \frac{8m K_1}{R^2} + \frac{4m^2 K_0}{R} + m^3 K_1 \right) \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \mathbf{x}_4 \mathbf{r} \cdot [(\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + \right. \\ & + \left. (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle)] + (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \mathbf{r})(\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) - (\langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \mathbf{r})(\langle \mathbf{S}_2^- \rangle \cdot \mathbf{r}) \right] \left. \right\}. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Este potencial exhibe todas as contribuições dependentes do spin e da velocidade presentes no caso de Maxwell, eq.(3.31). Este último é recuperado no limite de massa nula.

No entanto, a lei de potência no decaimento depende das funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem  $\nu$ ,  $K_\nu(z)$  (aqui com  $\nu = 0, 1$ ). A seguir, vamos analisar isso nos limites assintóticos de  $z = mR$ .

De acordo com [156] [157], o comportamento de  $K_\nu(z)$ , quando  $z \rightarrow \infty$  é dado por

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad (3.43)$$

sendo válido para  $|\arg z| < 3\pi/2$ . Uma vez que estamos considerando valores reais para  $z$ , a última condição é satisfeita. Aplicando este comportamento na eq. (3.42), obtemos o seguinte limite assintótico (com  $m$  fixo)

$$\begin{aligned} V_{5D}^{\text{Proca}} \Big|_{R \rightarrow \infty} &\sim \frac{g_1 g_2}{4} \sqrt{\frac{m}{2\pi^3}} e^{-mR} \left\{ \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R^{3/2}} \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} \right) + \right. \\ &+ \frac{m^2}{8} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R^{3/2}} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{m^2}{m_1 m_2} \frac{1}{R^{3/2}} \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle + \\ &- m \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{R^{5/2}} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ &- m \frac{(\mathbf{x}_4 \mathbf{p} - \mathbf{p}_4 \mathbf{r})}{R^{5/2}} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\ &- \frac{m^2}{m_1 m_2} \frac{\mathbf{x}_4 \mathbf{r}}{R^{7/2}} \cdot [(\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + (\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle)] + \\ &+ \frac{m^2}{m_1 m_2} \frac{r^2}{R^{7/2}} [\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle] + \\ &\left. - \frac{m^2}{m_1 m_2} \frac{1}{R^{7/2}} [(\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \mathbf{r})(\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \cdot \mathbf{r}) - (\langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \mathbf{r})(\langle \mathbf{S}_2^- \rangle \cdot \mathbf{r})] \right\}. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Aqui notamos um comportamento peculiar. Além do fator comum  $e^{-mR}$ , temos uma lei de potência com decaimento fracionário em todos os termos. O termo dominante, associado à interação de monopolo-monopolo, decai com  $R^{3/2}$ , ao passo que os demais decaem com potências superiores e/ou possuem massas dos férmions nos denominadores.

Vamos agora para a situação em que  $z \rightarrow 0$ . Os limites assintóticos de interesse estão exibidos em [158] e [159], respectivamente,

$$K_0(z) \sim -\log\left(\frac{z}{2}\right) [1 + O(z^2)] - \gamma [1 + O(z^2)], \quad (3.45)$$

$$K_1(z) \sim \frac{1}{z} [1 + O(z^2)] + \frac{z}{2} \log\left(\frac{z}{2}\right) [1 + O(z^2)], \quad (3.46)$$

onde  $\gamma = 0.57721\dots$  é a constante de Euler-Mascheroni.

Usando esses limites na eq. (3.42), obtemos (com  $m$  fixo)

$$\begin{aligned}
V_{5D}^{\text{Proca}} \Big|_{R \rightarrow 0} &\sim \frac{g_1 g_2}{4\pi^2 R^2} \left\{ \Delta_1 \Delta_2 \left[ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} + \frac{m^2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right] + \right. \\
&+ \frac{m^2}{m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle - \left[ \frac{4}{R^2} - 2m^2 \left( \log \left( \frac{mR}{2} \right) + \gamma \right) + \right. \\
&- \left. \left. \frac{r^2}{R^2} \left( \frac{8}{R^2} + m^2 \left( 1 - 4\gamma - 4 \log \left( \frac{mR}{2} \right) \right) \right) \right] \frac{\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^- \rangle}{m_1 m_2} + \right. \\
&- \left( \frac{2}{R^2} - m^2 \left( \log \left( \frac{mR}{2} \right) + \gamma \right) \right) \left[ (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \left( \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right) + \right. \\
&+ \left. (\mathbf{x}_4 \mathbf{p} - \mathbf{p}_4 \mathbf{r}) \cdot \left( \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] + \\
&- \frac{1}{R^2} \left( \frac{8}{R^2} + m^2 \left( 1 - 4\gamma - 4 \log \left( \frac{mR}{2} \right) \right) \right) \frac{1}{m_1 m_2} \left[ \mathbf{x}_4 \mathbf{r} \cdot [ (\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_2^- \rangle) + \right. \\
&+ \left. ( \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \times \langle \mathbf{S}_1^- \rangle ) ] + ( \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \mathbf{r} ) ( \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \cdot \mathbf{r} ) - ( \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \cdot \mathbf{r} ) ( \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \cdot \mathbf{r} ) \right] \left. \right\}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Por último, aplicamos a restrição na Eletrodinâmica de Proca. Seguindo a prescrição discutida na subseção 3.2.3, i.e., tomamos  $\mathbf{q}_4 = 0$  na amplitude não-relativística, eq. (3.41) com eq. (3.29), e calculamos as integrais de Fourier 3D para  $r \neq 0$  (conforme as eqs. (A.2)-(A.4) do Apêndice), que fornece

$$\begin{aligned}
V_{\text{res}}^{\text{Proca}} &= e_1 e_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \left\{ \Delta_1 \Delta_2 \left[ \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_4^2}{m_1 m_2} \right) \right] + \frac{m^2}{m_1 m_2} \langle \mathbf{S}_1^+ \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle + \right. \\
&- \mathbf{L} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^+ \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \frac{(1+mr)}{r^2} + \\
&+ \frac{1}{m_1 m_2} \frac{\mathbf{Q}_{ij}^{(m)}}{r^2} [ \langle \mathbf{S}_{1,i}^+ \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j}^+ \rangle - \langle \mathbf{S}_{1,i}^- \rangle \langle \mathbf{S}_{2,j}^- \rangle ] + \\
&+ \left. \mathbf{p}_4 \mathbf{r} \cdot \left[ \Delta_1 \langle \mathbf{S}_2^- \rangle \left( \frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] \frac{(1+mr)}{r^2} \right\}, \quad (3.48)
\end{aligned}$$

onde definimos o tensor

$$\mathbf{Q}_{ij}^{(m)} = (1 + mr) \delta_{ij} - (3 + 3mr + m^2 r^2) \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{r^2}. \quad (3.49)$$

O potencial de Proca restrito exhibe os mesmos termos dependentes do spin e da velocidade do caso de Maxwell, eq. (1.20), acrescido das contribuições com a massa  $m$ . O

potencial de Maxwell é recuperado no caso de massa nula. Novamente as novas contribuições, associadas ao pseudo-spin, aparecem no acoplamento com  $\mathbf{p}_4$  e no quadrupolo.

### 3.3 Incursões Exploratórias em 5D

Nas seções anteriores, estudamos as interações inter-partículas em  $5D$  para as Eletrodinâmicas de Maxwell e Proca. Constatou-se o aparecimento de interações envolvendo os (pseudo-)spin  $\mathbf{S}^\pm$  nos potenciais, como consequência da duplicação da representação fermiônica, a fim de compatibilizar o termo de massa com a simetria de paridade.

Nesta seção, mantemo-nos inicialmente no estudo de  $\mathbf{S}^\pm$ , mas agora, ao invés de considerar as interações inter-partículas, investigaremos a interação de uma partícula sujeita a um campo externo em  $5D$ ,  $A_{\hat{\mu}}$ . A principal motivação é analisarmos quais os possíveis acoplamentos deste campo com  $\mathbf{S}^\pm$ . Para isso, faremos um estudo no regime não-relativístico, via obtenção da equação de Pauli. Em seguida, apresentaremos um estudo mais exploratório: propondo outras simetrias em  $5D$ , junto com a paridade, e construindo novas Lagrangeanas para férmions na representação duplicada, com e sem massa.

#### 3.3.1 Equação de Pauli em 5D

Começamos com a descrição que quebra a paridade em  $5D$ . Assim, partimos da equação de Dirac para o espinor  $\psi$ , com acoplamento mínimo  $D_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} + iqA_{\hat{\mu}}$ ,

$$(i \gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} - m) \psi = 0. \quad (3.50)$$

Conforme a prescrição usual [160], propomos a decomposição

$$\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

de modo que a equação de Dirac, eq. (3.50), fornece

$$e^{-imt} [i \gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} - m + m \gamma^0] \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = 0. \quad (3.52)$$

Utilizando novamente a representação de Dirac para as matrizes de Clifford de  $4D$ , (1.10), e recordando a nossa convenção,  $\gamma^{\hat{\mu}} = (\gamma^{\mu}, \gamma^4 \equiv i\gamma_5)$ , obtemos as seguintes equações acopladas

$$iD_0 \xi + (i\sigma_i D_i - D_4) \varphi = 0, \quad (3.53)$$

$$(i\sigma_i D_i + D_4) \xi + (2m + iD_0) \varphi = 0. \quad (3.54)$$

Considerando a aproximação não-relativística e de campos fracos,  $2m \gg iD_0$ , podemos eliminar  $\varphi$  através da eq. (3.54),

$$\varphi = -\frac{i\sigma_i D_i + D_4}{2m} \xi. \quad (3.55)$$

Agora inserindo este resultado na eq. (3.53), obtemos

$$iD_0 \xi - \frac{1}{2m} (i\sigma_i D_i - D_4) (i\sigma_j D_j + D_4) \xi = 0. \quad (3.56)$$

Após manipulações algébricas, é possível mostrar que a equação acima pode ser reescrita na forma

$$i \partial_t \xi = H_{\text{Pauli}}^{(\xi)} \xi \quad (3.57)$$

onde definimos a Hamiltoniana de Pauli para  $\xi$ ,

$$H_{\text{Pauli}}^{(\xi)} = \frac{(\mathbf{p}_I - q\mathbf{A}_I)^2}{2m} + q\phi - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4) \quad (3.58)$$

com  $\mathbf{p}_I = -i \nabla_I$  e  $I = 1, 2, 3, 4$ .

É interessante discutirmos as interações presentes nesta Hamiltoniana, a fim de compreendermos melhor como uma partícula não-relativística pode interagir em  $5D$ :

- 1)  $(\mathbf{p}_I - q\mathbf{A}_I)^2/2m$  é a generalização do termo cinético para o caso de 4 dimensões espaciais. O termo  $q\mathbf{A}$  é responsável pela conhecida fase de Aharonov-Bohm [162] [163]. Espera-se uma nova contribuição da componente  $q\mathbf{A}_4$ .
- 2)  $q\phi$  refere-se a energia usual do tipo carga-potencial.



- 3)  $q \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}/2m$  é o termo de Pauli, que acopla o campo magnético,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , com o spin  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$ .
- 4)  $q \boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4)/2m$  é uma nova interação que acopla o spin com gradientes dos potenciais. Este é o termo responsável pela quebra da paridade. Note que mesmo após um processo de redução dimensional, em que assumimos  $\partial_4(\text{campos}) = 0$ , ainda sobraria uma contribuição, com o acoplamento  $\mathbf{S} \cdot (\nabla \mathbf{A}_4)$ .

Vamos agora obter a equação de Pauli para o espinor duplicado,  $\Psi$ . A equação de Dirac para  $\Psi$ , com acoplamento mínimo, é dada por

$$(i \Gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} - m) \Psi = 0. \quad (3.59)$$

Uma vez que  $\Psi = (\psi, \chi)^t$ , temos que a equação acima fornece as equações

$$(i \gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} - m) \psi = 0 \quad , \quad (i \gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} + m) \chi = 0. \quad (3.60)$$

O limite não-relativístico da primeira equação foi obtido na eq. (3.57), assim, resta obtermos o limite da segunda equação. Em analogia com a eq. (3.51), propomos que

$$\chi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

de modo que a equação de Dirac para  $\chi$  resulta em

$$e^{-imt} [i \gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} + m + m \gamma^0] \begin{pmatrix} \lambda \\ \zeta \end{pmatrix} = 0. \quad (3.62)$$

Novamente, após manipulações algébricas, obtemos as seguintes equações acopladas

$$(i D_0 + 2m) \lambda + (i \sigma_i D_i - D_4) \zeta = 0, \quad (3.63)$$

$$(i \sigma_i D_i + D_4) \lambda + i D_0 \zeta = 0. \quad (3.64)$$

No limite não-relativístico e de campos fracos, a eq. (3.63) fornece

$$\lambda = -\frac{i\sigma_i D_i - D_4}{2m} \zeta. \quad (3.65)$$

Note que, em comparação com a eq. (3.55), houve uma troca de sinal no termo com  $D_4$ . Substituindo a eq. (3.65) na eq. (3.64), obtemos

$$iD_0\zeta - \frac{1}{2m} (i\sigma_i D_i + D_4)(i\sigma_j D_j - D_4)\zeta = 0 \quad (3.66)$$

que pode ser conduzida na forma

$$i\partial_t \zeta = H_{\text{Pauli}}^{(\zeta)} \zeta \quad (3.67)$$

onde definimos

$$H_{\text{Pauli}}^{(\zeta)} = \frac{(\mathbf{p}_I - q\mathbf{A}_I)^2}{2m} + q\phi - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4) \quad (3.68)$$

Ao compararmos as Hamiltonianas  $H_{\text{Pauli}}^{(\xi)}$  e  $H_{\text{Pauli}}^{(\zeta)}$ , eqs. (3.58) e (3.68), observamos apenas uma troca de sinal no último termo. Isso é uma consequência da simetria de paridade: recordando que  $\xi' = \zeta$ ,  $\zeta' = -\xi$  e como  $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4)]' = -\boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4)$ , temos que a paridade estabelece um mapeamento entre as duas equações de Pauli, ou seja, eq. (3.57)  $\longleftrightarrow$  eq. (3.67).

Esses fatos nos motiva a colocar as equações de Pauli numa formulação unificada,

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = H_{\text{Pauli}} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

onde a Hamiltoniana de Pauli total (ou duplicada) é definida por

$$H_{\text{Pauli}} = \begin{pmatrix} H_{\text{Pauli}}^{(\xi)} & 0 \\ 0 & H_{\text{Pauli}}^{(\zeta)} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

que pode ser reescrita como

$$H_{\text{Pauli}} = \frac{(\mathbf{p}_I - q\mathbf{A}_I)^2}{2m} + q\phi - \frac{q}{m} \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{B} - \frac{q}{m} \mathbf{S}^- \cdot (\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_4). \quad (3.71)$$

Aqui naturalmente chegamos nas estruturas de spin  $\mathbf{S}^+$  e pseudo-spin  $\mathbf{S}^-$ , definidas na seção anterior. Portanto, fica claro a nossa interpretação de que  $\mathbf{S}^+$  é realmente o spin, pois ele acopla-se com o campo magnético  $\mathbf{B}$ , gerando o termo de Pauli na representação duplicada, ao passo que  $\mathbf{S}^-$  não é exatamente um spin, mas sim um novo elemento trazido pela dimensão extra.

A simetria de paridade da eq. (3.69) pode ser checada ao efetuarmos a transformação de similaridade na Hamiltoniana total,  $H'_{\text{Pauli}}(x') = U H_{\text{Pauli}}(x) U^\dagger$ , junto com

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

onde definimos a matriz ( $4 \times 4$ ) unitária

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

A diferença entre a Hamiltoniana total, eq. (3.70), e aquela que quebra a paridade, eq. (3.58), é sutil, sendo essencialmente a troca  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2 \longleftrightarrow \mathbf{S}^-$  no último termo, associado à dimensão extra.

### 3.3.2 Outras simetrias em 5D

A fim de conciliarmos a paridade com espinores massivos em  $5D$ , duplicamos a representação do espinor, assim, o termo cinético ficou dado por

$$\mathcal{L}_{\text{cin}}(\Psi) = \bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (3.74)$$

A questão que nos limitamos a investigar nesta seção é a seguinte: existem outras simetrias para o termo cinético acima? Passemos a apresentação de uma possível simetria. Para isso, considere a transformação de fase global,  $\Psi' = e^{i\alpha q \tau_5} \Psi$ , com  $\alpha$  sendo o parâmetro da transformação,  $q$  a carga da simetria e

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Neste momento vale a pena recordarmos algumas propriedades do conjugado de Dirac. Em  $4D$ , definimos  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  e para matrizes  $M, N$  temos que:  $\overline{MN} = \gamma^0 M^\dagger \gamma^0$ ,  $\overline{(\overline{MN})} = \overline{N} \overline{M}$  e  $\overline{(M\psi)} = \bar{\psi} \overline{M}$ . A generalização para o caso da representação duplicada em  $5D$  é direta, bastando trocar  $\psi \rightarrow \Psi$  e  $\gamma^0 \rightarrow \Gamma^0$ . Com essas propriedades, temos que  $\overline{\Psi'} = \bar{\Psi} e^{-i\alpha q \bar{\tau}_5}$  e podemos analisar a transformação do termo cinético, eq. (3.74), que fornece

$$\mathcal{L}_{\text{cin}}(\Psi') = \bar{\Psi}' i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi' - m \bar{\Psi}' \Psi' = \bar{\Psi} e^{-i\alpha q \bar{\tau}_5} i \Gamma^{\hat{\mu}} e^{i\alpha q \tau_5} \partial_{\hat{\mu}} \Psi - m \bar{\Psi} e^{-i\alpha q \bar{\tau}_5} e^{i\alpha q \tau_5} \Psi. \quad (3.76)$$

Uma vez que  $\bar{\tau}_5 = \Gamma^0 \tau_5^\dagger \Gamma^0 = \tau_5$  e  $[\tau_5, \Gamma^{\hat{\mu}}] = 0$ , teremos que as fases se cancelam na equação acima, garantindo a invariância do termo cinético,  $\mathcal{L}_{\text{cin}}(\Psi') = \mathcal{L}_{\text{cin}}(\Psi)$ .

Vamos agora estudar como seria o caso da simetria local,  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ . De modo usual, introduzimos um campo de gauge,  $A_{\hat{\mu}}$ , e uma derivada covariante,  $\mathcal{D}_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} - iq \tau_5 A_{\hat{\mu}}$ , tal que  $\mathcal{D}'_{\hat{\mu}} \Psi' = e^{i\alpha q \tau_5} \mathcal{D}_{\hat{\mu}} \Psi$ , onde  $A'_{\hat{\mu}} = A_{\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\mu}} \alpha$ . Isso garante a invariância de

$$\bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \mathcal{D}_{\hat{\mu}} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi = \mathcal{L}_{\text{cin}} + q \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_5 \Psi A_{\hat{\mu}}. \quad (3.77)$$

Falta apenas introduzirmos a dinâmica para  $A_{\hat{\mu}}$ . Antes disso, é conveniente analisarmos a transformação de paridade da corrente associada à interação acima. Utilizando que  $\Psi = (\psi, \chi)^t$ , obtemos

$$J_5^{\hat{\mu}} \equiv \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_5 \Psi = \bar{\psi} \gamma^{\hat{\mu}} \psi - \bar{\chi} \gamma^{\hat{\mu}} \chi. \quad (3.78)$$

Ao contrário da corrente vetorial,  $J^{\hat{\mu}} = \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \Psi$ , apresentada em seções anteriores, notamos a existência de um sinal relativo em  $J_5^{\hat{\mu}}$ , especificamente, entre as correntes de  $\psi$  e  $\chi$ . Com a transformação de paridade  $\psi' = P\chi$  e  $\chi' = P\psi$ , temos que  $J_5'^0 = -J_5^0$ ,  $J_5'^i = J_5^i$  e  $J_5'^4 = -J_5^4$ , ou seja, a corrente  $J_5^{\hat{\mu}}$  transforma-se como um pseudo-vetor em  $5D$ . Assim, para termos a invariância de paridade na eq. (3.77), devemos ter  $A_{\hat{\mu}}$  sendo também um pseudo-vetor. Isso permite introduzirmos, além do termo usual de Maxwell, o termo de Chern-Simons, de modo que a Lagrangeana total fica dada por

$$\mathcal{L}_5 = \bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + q \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_5 \Psi A_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^2 + \mu \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\lambda}} A_{\hat{\mu}} F_{\hat{\nu}\hat{\alpha}} F_{\hat{\beta}\hat{\lambda}}, \quad (3.79)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro com dimensão canônica de massa  $[\mu] = -3/2$ . Por construção, a Lagrangeana acima é invariante sob paridade e transformação  $\tau_5$ .

É interessante ressaltarmos algo bem peculiar de  $5D$ : a corrente pseudo-vetorial,  $J_5^\mu$ , é conservada, pelo teorema de Noether, independentemente do termo de massa. Note que isso não acontece em  $4D$ , pois

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) \sim m \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (3.80)$$

Neste momento, finalizamos a discussão da simetria  $\tau_5$ . Passemos agora a análise de outras simetrias da eq. (3.74), no caso em que  $m = 0$ . Por exemplo, as transformações de fase com as matrizes

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

deixa o termo cinético invariante. Para mostrar isso, utiliza-se o fato de que, ao contrário de  $\tau_5$ , que comuta com  $\Gamma^{\hat{\mu}}$ , temos  $\tau_3 \Gamma^{\hat{\mu}} = -\Gamma^{\hat{\mu}} \tau_3$  e  $\tau_4 \Gamma^{\hat{\mu}} = -\Gamma^{\hat{\mu}} \tau_4$ . Além disso, essas matrizes satisfazem  $\bar{\tau}_3 = -\tau_3$  e  $\bar{\tau}_4 = -\tau_4$ .

Em analogia ao caso de  $\tau_5$ , podemos tornar a simetria local. As correspondentes Lagrangeanas, invariantes também sob paridade, são dadas por

$$\mathcal{L}_3 = \bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi + q \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_3 \Psi A_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^2, \quad (3.82)$$

$$\mathcal{L}_4 = \bar{\Psi} i \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi + q \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_4 \Psi A_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^2 + \mu \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\lambda}} A_{\hat{\mu}} F_{\hat{\nu}\hat{\alpha}} F_{\hat{\beta}\hat{\lambda}}. \quad (3.83)$$

com o campo vetorial  $A_{\hat{\mu}}$  sendo vetor e pseudo-vetor, respectivamente.

Neste ponto, gostaríamos de esclarecer uma questão. A princípio, ao considerarmos  $m = 0$  não seria necessário duplicar a representação do espinor para ter a simetria de paridade. A motivação inicial para duplicarmos está no fato de que as correntes obtidas apresentam termos de mistura entre os espinores  $\psi$  e  $\chi$ , a saber

$$J_3^\mu = \bar{\Psi} \Gamma^{\hat{\mu}} \tau_3 \Psi = \bar{\psi} \gamma^{\hat{\mu}} \chi + \bar{\chi} \gamma^{\hat{\mu}} \psi, \quad (3.84)$$

$$J_4^\mu = \bar{\Psi} \Gamma^\mu \tau_4 \Psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \chi - i \bar{\chi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.85)$$

Isso não ocorreu nas correntes  $J_4^\mu$  e  $J_5^\mu$ , cujos bilineares possuem a forma  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \pm \bar{\chi} \gamma^\mu \chi$ .

### 3.4 Conclusões Parciais

Na seção 3.2, foi calculado o potencial inter-partículas em  $5D$ , levando-se em conta as contribuições do spin e da velocidade. Escolhemos um dos cenários mais simples possíveis: a interação eletromagnética. Uma outra possibilidade seria a interação de Yukawa, mas esta não foi desenvolvida nesta tese. A razão pela escolha do caso eletromagnético se deve ao fato deste possuir uma riqueza maior, uma vez que temos uma componente extra para o campo de gauge/corrente, teremos um novo acoplamento na amplitude. Ademais, é possível mostrar que, a menos de um sinal relativo, todas as correções de spin/velocidade associadas à corrente escalar estão contidas na componente temporal da corrente vetorial.

Na subseção 3.2.1, a fim de compatibilizar a simetria de paridade com férmions massivos em  $5D$ , duplicamos a representação fermiônica. Seria um senso comum imaginarmos que, após duplicarmos a representação, teríamos a seguinte alteração nas interações de spin  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2 \rightarrow \mathbf{S}^+$ , existentes na amplitude  $4D$ . Além disso, também aparece um outro elemento, denominado aqui de pseudo-spin  $\mathbf{S}^-$ , que está associado aos novos acoplamentos trazidos pela dimensão extra.

Na subseção 3.2.2, obtivemos o potencial para a Eletrodinâmica de Maxwell em  $5D$ , eq. (3.31), que exhibe interações envolvendo  $\langle \mathbf{S}^+ \rangle$  e  $\langle \mathbf{S}^- \rangle$ , bem como termos de velocidade. A pergunta que apareceu é a seguinte: *seria possível comunicarmos, através de alguma prescrição ou mecanismo, os efeitos de  $\mathbf{S}^-$  para o subespaço  $4D$  e, ao mesmo tempo, conciliar com o decaimento observado  $1/r$  para o termo de Coulomb?* Uma possível resposta a esta questão é a *restrição dimensional*, proposta na subseção 3.2.3, que nada mais é do que uma restrição feita na amplitude não-relativística  $5D$ , anulando-se o momento

transferido da dimensão extra ( $\mathbf{q}_4 = 0$ ). A princípio, poderíamos manter o momento  $\mathbf{p}_4$  não-nulo e, por essa razão, evitamos o uso do termo *redução dimensional*.

De fato, neste caso não ocorre uma redução dimensional, pois no cálculo da amplitude levamos em conta todas as propriedades das partículas em  $5D$  – leia-se aqui  $\xi$ ,  $\zeta$ , os momentos  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_4$  e os (pseudo)-spin – e restringimos a interação ao subespaço  $4D$ . O ponto que poderia ser criticado nessa prescrição é a imposição de que  $\mathbf{q}_4 = 0$ , sem uma explicação de um modelo que forneça naturalmente isso. Poderíamos dizer que nos limites de energia disponíveis, todo momento transferido fica concentrado em  $\mathbf{q}$  e que, na dimensão extra, seria uma boa aproximação  $\mathbf{q}_4 = 0$ . Como vimos na seção 3.1, em alguns processos de redução dimensional também é proposto um *ansatz*. O que devemos respeitar, como um dos principais requerimentos, é que a teoria descreva o comportamento observado em longas distâncias e, no nosso caso, obtivemos o decaimento correto para o termo de Coulomb. A novidade aqui é a interação de quadrupolo, que continua com o decaimento  $1/r^3$  conhecido, mas agora com a presença do spin e pseudo-spin na interação. Fica em aberto a questão de como isso poderia influenciar em algum experimento ou que efeito teríamos nos níveis de energia ao colocarmos a interação quadrupolar modificada. O mesmo ocorre para o caso da Eletrodinâmica de Proca em  $5D$  e sua restrição, i.e., a principal modificação em  $4D$  aparece no setor de quadrupolo.

Por fim, com relação à seção 3.3, embora os assuntos discutidos tenham uma certa originalidade, consideramo-los ainda em seu estágio inicial, faltando alguns prosseguimentos ou até fixar cenários para aplicações.

Na primeira subseção 3.3.1, em que deduzimos a Hamiltoniana de Pauli em  $5D$ , generalizamos o resultado da literatura [161], acomodando agora a simetria de paridade, que esperamos estar presente em uma descrição de eletromagnetismo. Nosso resultado trouxe, sob outra perspectiva, as estruturas de spin ( $\mathbf{S}^+$ ) e pseudo-spin ( $\mathbf{S}^-$ ), definidas anteriormente, no contexto dos potenciais inter-partículas. Além disso, observamos que as novas interações, associadas à dimensão extra, aparecem em acoplamentos com o pseudo-spin.

Conforme a tese [9], temos que o tensor de intensidade,  $F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , pode ser mapeado nos campos eletromagnéticos  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$  e no setor extra  $\{\mathbf{e}, b\}$ , contemplando no total os 10 graus de liberdade de um tensor anti-simétrico em  $5D$ . O setor extra é justamente as derivadas/gradientes de  $\mathbf{A}_4$ . Se colocarmos uma dinâmica para o campo  $A^{\hat{\mu}}$  como, por exemplo, o termo de Maxwell, teremos o acoplamento dos campos eletromagnéticos com o setor extra, mas ao reduzirmos para  $4D$ , esses ficam desacoplados.

Na segunda subseção 3.3.2, tomamos um caminho ainda mais exploratório, buscando outras interações além do eletromagnetismo, mas fixando como guia a simetria de paridade. Elaboramos algumas possíveis Lagrangeanas respeitando esta simetria. Por exemplo, verificamos que, para acomodar o termo de Chern-Simons, precisamos considerar o campo  $A^{\hat{\mu}}$  como sendo um pseudo-vetor, assim, como consequência, devemos alterar a forma funcional da corrente, obtendo, por exemplo, a  $J_5^{\hat{\mu}}$ . Apresentamos também a possibilidade de modelos com férmions sem massa. Nesta parte, precisamos elaborar o cenário físico de interesse, ou seja, se ficamos no contexto de Física de Partículas ou buscamos algo na Matéria Condensada.

A seguir, colocaremos nossas perspectivas de aplicações e outros possíveis encaminhamentos.



# Capítulo 4

## Considerações Finais

Conforme antecipado no início da Tese, nesta parte final faremos uma análise mais geral dos assuntos discutidos nos capítulos anteriores e apresentaremos nossas perspectivas.

Com relação aos Capítulos 1 e 2, após estudarmos várias situações, envolvendo diferentes mecanismos de massa e representações para um mesmo spin, além de diversos acoplamentos, podemos resumir nossa conclusão como segue:

*é possível, através da análise dos potenciais inter-partículas, dependentes do spin e da velocidade, identificarmos diferenças nos perfis dos potenciais quando investigamos a partícula trocada – ou melhor, o campo intemediador – e também as partículas interagentes (leia-se aqui as correntes/fontes).*

No primeiro caso, da análise da partícula trocada, já seria intuitivo esperarmos possíveis alterações, pois entra em cena o aspecto *off-shell* do campo. Para ser mais claro, consideremos um exemplo simples, com dois processos em que sejam trocados um campo escalar  $\phi$  (sem massa), com dinâmica dada pela equação de Klein-Gordon,  $\square \phi = 0$  e uma 2-forma,  $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ , descrita pela Lagrangeana  $\mathcal{L} = G_{\mu\nu\kappa}^2/6$ , onde  $G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}$  é o tensor de intensidade de  $B_{\mu\nu}$ . A equação de movimento desta fornece  $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = 0$ . Se substituirmos  $G^{\mu\nu\kappa} = \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} W_\sigma$  e contraírmos com o tensor de Levi-Civita, obtemos  $\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha = 0$ , ou seja,  $W_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ . Portanto, nas duas situações *on-shell*, os campos propagam um spin-0. No entanto, ao considerarmos esses como bósons intermediadores é a partícula virtual (campo *off-shell*) que participa dos processos, podendo ter a

propagação de outros spin no caso tensorial e, além disso, cada campo pode acoplar-se diferentemente com a matéria: o campo escalar via correntes (pseudo-)escalar e  $B_{\mu\nu}$  via correntes (pseudo-)tensorial ou até através de um acoplamento não-mínimo, proveniente da derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + ig\tilde{G}_\mu$  (com  $\tilde{G}_\mu \sim \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}G^{\nu\kappa\lambda}$ ). Cada acoplamento pode trazer uma dependência diferente no spin e na velocidade e, portanto, esperamos notar algumas diferenças nos potenciais.

No segundo caso, envolvendo o estudo das correntes/fontes, foge um pouco do senso comum, pois mesmo em uma descrição *on-shell* – recordemos que foram utilizadas as equações (livres) na construção das correntes/fontes – é possível observar diferenças na descrição da interação. Isso foi notado em [164], com a observação de diferentes contribuições no quadrupolo elétrico para duas representações distintas do spin-1 e, mais sutilmente, também em [8], no contexto dos potenciais, com o aparecimento de diferenças no setor de interação entre as polarizações, com a perspectiva de mudanças no setor de spin para as correções superiores (relativísticas).

Em vista disso, colocamos dois prosseguimentos, como continuação natural da discussão acima:

- estudo de outras possíveis representações para os spin-0, spin-1, spin-2 e, considerando-os como bósons intermediadores, analisar os perfis dos potenciais.
- estudo da interação eletromagnética do spin-2, massivo e carregado.

Para o segundo prosseguimento, citamos algumas motivações em propostas do Além do Modelo Padrão. Houve uma pesquisa intensa entre 2008 e 2011 [165] [166], para a introdução de acoplamentos não-mínimos com o fóton e ficou, como questão em aberto, um estudo desses acoplamentos a nível de potenciais. Recentemente, a colaboração LIGO detectou ondas gravitacionais [167], que podem estar associadas a buracos negros do tipo Kerr. No entanto, caso venham a ser observadas ondas associadas a buracos negros do tipo Reissner-Nordstrom, teríamos a possibilidade de grávitons (spin-2) massivos e carregados.

Em nossos trabalhos, os intermediadores ficaram restritos a serem bósons. Situações com a troca de férmions – especificamente, com a troca de dois neutrinos – foram investigadas em [168] [169], mas ainda existem outras possibilidades não exploradas. Por exemplo, como objetos de pesquisa atual, temos os denominados ELKO: uma nova categoria de espinores, que satisfazem a equação de Klein-Gordon e possuem dimensão canônica de massa um. O último fato impossibilita acoplarmos este com os férmions (matéria usual) nos dubletes do Modelo Padrão – leia-se aqui via um acoplamento renormalizável – e, assim, coloca-se o ELKO como um possível candidato à matéria escura. O fato deste ser neutro também exclui a possibilidade de interações usuais, via acoplamentos mínimos, com o fóton. Logo, as interações do ELKO ficariam restritas a gravitação e ao Higgs. Para maiores detalhes, destacamos a dissertação [170]. Há que se ressaltar que ainda encontra-se em aberto um estudo dos potenciais inter-partículas neste contexto. Logo, colocamos mais essa perspectiva:

- estudo da Teoria de Campo (clássica e quântica) para as diferentes propostas de ELKO, incluindo as análises dos campos em um referencial arbitrário, de suas propagações e possíveis acoplamentos. Em seguida, após fixados os processos de interesse, prosseguir com os cálculos dos potenciais inter-partículas na presença de ELKO como partículas interagentes e/ou mediadores.

Agora, com relação ao Capítulo 3, temos duas perspectivas imediatas. A primeira é a elaboração de um material de divulgação com a discussão de dimensões extras, tendo como a base a revisão histórica apresentada na seção 3.1. A segunda é a submissão de um trabalho com os resultados discutidos na seção 3.2. Ainda nesta seção, temos outros possíveis encaminhamentos:

- poderíamos considerar outras interações em  $5D$  e suas restrições como, por exemplo, o caso da gravitação. Além disso, não consideramos a corrente topológica,  $J^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}} \sim \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\lambda}} (\bar{\Psi} \Gamma_{\hat{\rho}} \Psi)$ . Neste caso, o acoplamento

ocorre com uma 3-forma e, conforme [6] [171], existem motivações para aplicar esta em cenários de inflação em Cosmologia.

- estender a prescrição da restrição dimensional para o caso do espaço-tempo  $4D$ . Logo, considerando espalhamento elástico,  $q^0 = 0$ , e com a interação restrita ao plano bidimensional,  $\mathbf{q}_z = 0$ , esperamos ter uma descrição alternativa para sistemas de baixa dimensionalidade, como o grafeno. Aqui teríamos a possibilidade do acoplamento entre  $\mathbf{p}_z$  com  $\mathbf{q}_x$  e  $\mathbf{q}_y$  na amplitude, podendo gerar novas interações no potencial dependentes da velocidade no eixo  $z$ .

No estudo de sistemas de baixa dimensionalidade temos pelo menos três abordagens. Na primeira, aplica-se  $z = 0$  no potencial calculado no espaço-tempo  $4D$ . Na segunda, calcula-se o potencial diretamente no espaço-tempo  $3D$ . Na terceira, caso seja possível implementarmos a restrição, teríamos um espaço-tempo  $4D$  com a interação restrita ao subespaço. Seria interessante, como uma primeira investigação, analisar o caso eletromagnético e comparar os potenciais. Acreditamos que possam existir diferenças. Inicialmente, já podemos dizer que o decaimento do termo associado à interação monopolo-monopolo para  $V_{4D} \Big|_{z=0}$  será diferente de  $V_{3D}$ . Ademais, não podemos esquecer de algumas diferenças marcantes como, por exemplo, a dinâmica do campo eletromagnético,  $A^\mu$ , que é diferente em  $3D$  e  $4D$ , devido ao aparecimento do termo de Chern-Simons em  $3D$ , alterando a estrutura do propagador. A fixação da dimensionalidade poderá também ter um impacto nas interações de spin.

Por último, vamos apresentar nossas perspectivas para a seção 3.3. Retornando ao espaço-tempo  $5D$ . Em seções anteriores, nos potenciais inter-partículas, obtivemos as contribuições do (pseudo)-spin. Na seção 3.3, por um outro caminho, via análise da equação de Pauli em  $5D$ , também notamos as presenças do spin e pseudo-spin, este associado aos acoplamentos trazidos pela dimensão extra. A partir da equação de Pauli colocamos os seguintes encaminhamentos:

- analisar o aspecto clássico, i.e., as equações de movimento e a força de Lorentz em  $5D$ . Coloca-se aqui também o estudo de soluções em que a partícula fique confinada em  $4D$ .
- analisar o aspecto quântico como, por exemplo, as fases geométricas. Uma outra questão seria o estudo da equação de Schrödinger em  $5D$ , a fim de averiguar os efeitos da dimensão extra nos níveis de energia ou também os efeitos da fronteira quando a partícula fica confinada ao subespaço  $4D$ .

Além dessas possibilidades, poderíamos investigar o aspecto da dimensionalidade na área do Nanomagnetismo. Especificamente, na procura de uma extensão da equação de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) [172]. A partir de extensões da equação de Pauli é possível obtermos modificações na equação de LLG. Isso já foi feito no caso em que os férmions acoplam-se com a torção [173] e também na situação com fracionalidade [174]. Agora na presença de dimensão extra é ainda uma questão em aberto. Em vista disso, propomos:

- investigar efeitos associados à holografia sobre a equação de LLG.

Esta pesquisa nos coloca algumas questões não-triviais, como a interpretação microscópica do que seria a magnetização neste cenário, bem como o papel do pseudo-spin.

Por último, com respeito a subseção 3.3.2, em que apresentamos outras simetrias em  $5D$  para a Lagrangeana de Dirac, temos os seguintes prosseguimentos:

- no caso da simetria  $\tau_5$ , em que a Lagrangeana, eq. (3.79), possui termo de massa, poderíamos seguir com o cálculo do potencial e comparar com o resultado obtido via corrente vetorial.
- nos casos das simetrias  $\tau_3$  e  $\tau_4$ , as Lagrangeanas não possuem termo de massa (veja eqs. (3.82) e (3.83)), assim, propomos duas abordagens. Na primeira, ficaríamos no contexto de Física de Partículas e obteríamos a massa via algum procedimento de redução dimensional

para  $4D$ . Na segunda abordagem, relativa à Matéria Condensada, interpretaríamos os férmions como quase-partículas, em analogia com os férmions de Weyl em semimetais [175]-[177]. Neste caso, a motivação seria analisar a holografia de  $5D$  para  $4D$  e averiguar os efeitos associados as interações produzidas pelas correntes  $J_3^{\hat{\mu}}$  e  $J_4^{\hat{\mu}}$ , eqs. (3.84) e (3.85), que misturam os campos fermiônicos.

Finalizamos aqui nossas perspectivas e esperamos que a presente tese possa ser útil para futuras investigações do grupo e pesquisadores em geral.

# Apêndice A

## Integrais de Fourier

Abaixo exibimos as integrais relevantes para o desenvolvimento desta Tese. Começamos definindo algumas classes de integrais, utilizadas no Capítulo 2,

$$I_n(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (\mathbf{q}^2)^n a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.1a})$$

$$I_{ij}(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{A.1b})$$

$$\mathbf{I}(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathbf{q} a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{A.1c})$$

Note que a última equação pode ser reescrita como  $\mathbf{I}(r) = -i\vec{\nabla} I_0(r) = -iI'_0(r)\hat{\mathbf{r}}$ .

A seguir, apresentamos algumas integrais de Fourier em  $3D$  e  $4D$ . Iniciamos com os casos massivos em  $3D$ :

$$\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} \mathbf{q}_i = \frac{i \mathbf{x}_i}{4\pi r^3} (1 + mr) e^{-mr}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \frac{\delta_{ij}}{3} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{e^{-mr}}{4\pi r^3} \left[ (1 + mr) \delta_{ij} - (3 + 3mr + m^2 r^2) \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{r^2} \right], \quad (\text{A.4})$$

onde  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as componentes do vetor  $\mathbf{r}$  e  $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$ . A partir destas integrais podemos obter os casos sem massa tomando o limite  $m \rightarrow 0$  [178].

Nas situações envolvendo as integrais de Fourier em  $4D$ , a fim de evitar confusão, utilizaremos  $\mathbf{R}$ , ao invés de  $\mathbf{r}$ , para denotar o vetor euclidiano em  $4D$  e  $\mathbf{x}_I$  para suas

componentes, com índice maiúsculo  $I = 1, 2, 3, 4$ . Com isso, os casos massivos ficam dados por

$$\int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{m}{4\pi^2 R} K_1(mR), \quad (\text{A.5})$$

$$\int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} \mathbf{q}_I = \frac{i \mathbf{x}_I}{4\pi^2 R^2} \left[ \frac{2mK_1(mR)}{R} + m^2 K_0(mR) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} \mathbf{q}_I \mathbf{q}_J &= \frac{1}{4} \delta_{IJ} \delta^4(\mathbf{R}) + \frac{\delta_{IJ}}{4\pi^2 R^2} \left[ \frac{2mK_1(mR)}{R} + m^2 K_0(mR) \right] + \\ &- \frac{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_J}{4\pi^2 R^3} \left[ \frac{8mK_1(mR)}{R^2} + \frac{4m^2 K_0(mR)}{R} + m^3 K_1(mR) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde  $R = \sqrt{\mathbf{R}^2}$  e  $K_\nu(z)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem  $\nu$ .

A primeira integral, eq. (A.5), é um caso particular com  $D = 5$  do resultado apresentado na dissertação [179]. As demais podem ser obtidas via derivação da primeira, exceto pela delta de Dirac, que é colocada posteriormente a fim de garantir que o traço da eq. (A.7) esteja bem definido.

Utilizando os limites assintóticos das funções de Bessel modificadas, apresentados nas eqs. (3.45) e (3.46), é possível calcular o limite de massa nula das integrais acima, que resulta em

$$\int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2} = \frac{1}{4\pi^2 R^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2} \mathbf{q}_I = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\mathbf{x}_I}{R^4}, \quad (\text{A.9})$$

$$\int \frac{d^4 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{q}^2} \mathbf{q}_I \mathbf{q}_J = \frac{1}{4} \delta_{IJ} \delta^4(\mathbf{R}) + \frac{1}{2\pi^2 R^4} \left[ \delta_{IJ} - 4 \frac{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_J}{R^2} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Note que o traço da última fornece a delta de Dirac.



# Apêndice B

## Acoplamentos fermiônicos

Abaixo listamos o limite não-relativístico de algumas fontes/correntes fermiônicas em  $4D$  na aproximação até a primeira ordem nos momenta. Adotamos as atribuições de momenta da Fig. 1.1 para a partícula 1.

A partir da eq. (1.11) temos que

1) Fonte escalar ( $S$ ):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \approx 2m \delta. \quad (\text{B.1})$$

2) Fonte pseudo-escalar ( $PS$ ):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) i\gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) = -2i \mathbf{q} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle. \quad (\text{B.2})$$

3) Corrente vetorial ( $V$ ):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^\mu \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2). \quad (\text{B.3})$$

3i) Para  $\mu = 0$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^0 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \approx 2m \delta, \quad (\text{B.4})$$

3ii) Para  $\mu = i$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^i \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) = 2 \mathbf{p}_i \delta - 2i \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{S}_k \rangle. \quad (\text{B.5})$$

4) Corrente pseudo-vetorial (*PV*):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2). \quad (\text{B.6})$$

4i) Para  $\mu = 0$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^0 \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) = 4 \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{p}, \quad (\text{B.7})$$

4ii) Para  $\mu = i$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \gamma^i \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \approx 4m \langle \mathbf{S}_i \rangle. \quad (\text{B.8})$$

5) Corrente tensorial (*T*):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \Sigma^{\mu\nu} \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2). \quad (\text{B.9})$$

5i) Para  $\mu = 0$  e  $\nu = i$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \Sigma^{0i} \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) = -2 \epsilon_{ijk} \mathbf{p}_j \langle \mathbf{S}_k \rangle - \frac{i}{2} \delta \mathbf{q}_i, \quad (\text{B.10})$$

5ii) Para  $\mu = i$  e  $\nu = j$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \Sigma^{ij} \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \approx 2m \epsilon_{ijk} \langle \mathbf{S}_k \rangle. \quad (\text{B.11})$$

6) Corrente pseudo-tensorial (*PT*):

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) i \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2). \quad (\text{B.12})$$

6i) Para  $\mu = 0$  e  $\nu = i$ ,

$$\bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) i \Sigma^{0i} \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \approx -2m \langle \mathbf{S}_i \rangle, \quad (\text{B.13})$$

6ii) Para  $\mu = i$  e  $\nu = j$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) i \Sigma^{ij} \gamma_5 \psi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) &= -2 (\mathbf{p}_i \langle \mathbf{S}_j \rangle - \mathbf{p}_j \langle \mathbf{S}_i \rangle) + \\ &- \frac{i}{2} \delta \epsilon_{ijk} \mathbf{q}_k. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Charles Galton Darwin, *Philosophical Magazine* **39** (1920), 537.
- [2] J. Sucher, *The Concept of Potential in Quantum Field Theory*, arXiv: 9412388 [hep-ph].
- [3] Barry R. Holstein, John F. Donoghue, *Phys.Rev.Lett.* **93** (2004) 201602.
- [4] B.R. Holstein, A. Ross, *Spin Effects in Long Range Electromagnetic Scattering*, arXiv: 0802.0715v1 [hep-ph].
- [5] S. Aldaihan, D. E. Krause, J. C. Long, W. M. Snow, *Calculations of the dominant long-range, spin-independent contributions to the interaction energy between two nonrelativistic Dirac fermions from double-boson exchange of spin-0 and spin-1 bosons with spin-dependent couplings*, arXiv: 1611.01580 [hep-ph].
- [6] D. Cocuroci, José Abdalla Helayël-Neto, M. J. Neves, L.P.R. Ospedal, *Eur.Phys.J. C* **75** (2015) 322.
- [7] F. A. Gomes Ferreira, P.C. Malta, L.P.R. Ospedal, J.A. Helayël-Neto, *Eur.Phys.J. C* **75** (2015) 238.
- [8] P.C. Malta, L.P.R. Ospedal, K. Veiga, J.A. Helayël-Neto, *Adv. High Energy Phys.* **2016** (2016) 2531436; Errata disponível em arXiv:1510.03291 [hep-th].

- [9] Denis Cocuroci, *Incursões Exploratórias nos Domínios do Além-Modelo-Padrão*, Tese de Doutorado, CBPF (2015).
- [10] Kim Pedro Bitencourt Veiga, *Efeitos de Spin e Polarização na Interação entre Fontes e Correntes de Bosons Vetoriais Carregados*, Tese de Doutorado, CBPF (2016).
- [11] Pedro Cavalcanti Malta, Tese em desenvolvimento (defesa prevista para Junho de 2017).
- [12] G.P. de Brito, P.C. Malta, L.P.R. Ospedal, Phys.Rev. D **95** (2017) 016006.
- [13] L.P.R. Ospedal, J.A. Helayël-Neto, *Trabalho em fase de redação*.
- [14] C.W.F. Everitt *et al*, Adv. Space Res. **32** (2003) 1297.
- [15] Y. Fujii, Nature Physical Science **234** (1971) 5.
- [16] E. Fischbach *et al*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 3; E. Fischbach, C. Talmadge, Nature **356** (1992) 207.
- [17] A. Franklin, E. Fischbach, *The Rise and Fall of the Fifth Force*, Springer, 2016.
- [18] E. Fischbach, C. Talmadge, *The search for non-Newtonian gravity*, Springer-Verlag, 1999.
- [19] E.G. Adelberger, B.R. Heckel, A.E. Nelson, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2003. **53** 77.
- [20] Jens H. Gundlach, New Journal of Physics **7** (2005) 205.
- [21] Lorenzo Iorio, Ann. Phys. (Berlin) **524** (2012) 371.

- [22] Jiro Murata, Saki Tanaka, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 033001.
- [23] E.G. Adelberger *et al*, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **62** (2009) 102.
- [24] B. Mashhoon, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 2399.
- [25] Richard T. Hammond, *Rep. Prog. Phys.* **65** (2002) 599.
- [26] Bruce M. Barker, Suraj N. Gupta, Richard D. Haracz, *Phys.Rev.* **149** (1966) 1027.
- [27] Wei-Tou Ni, *Rep. Prog. Phys.* **73** (2010) 056901.
- [28] Derek F. Jackson Kimball *et al*, *Ann. Phys. (Berlin)* **525** (2013) 514.
- [29] Xiao-Chun Duan *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 023001.
- [30] E.R. Williams, J.E. Faller, H.A. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 721.
- [31] L.P. Fulcher, *Phys. Rev. A* **33** (1986) 759.
- [32] Shlomi Kotler *et al*, *Nature* **510** (2014) 376.
- [33] Michael Dine, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **65** (2015) 43.
- [34] Chris Quigg, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** (2009) 505.
- [35] Jonathan L. Feng, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **48** (2010) 495.
- [36] P.F. Smith, J.D. Lewin, *Phys. Rep.* **187** (1990) 203.
- [37] G. Jungman, M. Kamionkowski, K. Griest, *Phys. Rep.* **267** (1996) 195.
- [38] Gianfranco Bertona, Dan Hooper, Joseph Silk, *Phys. Rep.* **405** (2005) 279.
- [39] Jihn E. Kim, *Phys. Rep.* **150** (1987) 1.

- [40] A.D. Dolgov, Phys. Rep. **320** (1999) 1.
- [41] Paul Langacker, Rev. Mod. Phys. **81** (2009) 119.
- [42] E.G. Adelberger, B.R. Heckel, C.W. Stubbs, W.F. Rogers, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **41** (1991) 269.
- [43] P. Fayet, Nuclear Physics B **347** (1990) 743; Class. Quantum Grav. **13** (1996) A19; C. R. Acad. Sci. Paris, t. 2, Série IV, p. 1257, 2001; Adv. Space Res. **32** (2003) 1289.
- [44] A. Krasznahorkay *et al*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 042501; J. L. Feng *et al*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 071803.
- [45] J. E. Moody, F. Wilczek, Phys. Rev. D **30** (1984) 130.
- [46] Masahiro Kawasaki, Kazunori Nakayama, Annu. Rev. Nuc. Part. Sci. **63** (2013) 69.
- [47] M. Kuster, G. Raffelt, B. Beltrán, Lecture Notes in Physics: *Axions*, Springer-Verlag, 2008.
- [48] B. A. Dobrescu, I. Mocioiu, JHEP **11** (2006) 005.
- [49] Marco Cirelli, Eugenio Del Nobile, Paolo Panci, JCAP **10** (2013) 019.
- [50] Shi-Lin Zhu *et al*, Nuc. Phys. **748 A** (2005) 435.
- [51] K. Tullney *et al*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 100801.
- [52] Yi Liao, Ji-Yuan Liu, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 081101.
- [53] Matthew Kenzie, “A Review of Unparticle Physics”, Master Dissertation, Imperial College London (2010).

- [54] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. Luty, J. Thaler, JHEP **07** (2005) 029.
- [55] H.-C. Cheng, M.A. Luty, S. Mukohyama, J. Thaler, JHEP **05** (2006) 076.
- [56] Y.M.P. Gomes, P.C. Malta, Phys. Rev. D **94** (2016) 025031.
- [57] Werner Heil *et al*, Ann. Phys. **525** (2013) 529; M Burghoff *et al*, J. of Phys.: Conf. Series **295** (2011) 012017.
- [58] H. Yan *et al*, Eur. Phys. J. **64C** (2009) 421; Yu. N. Pokotilovski, Phys. Lett. **686 B** (2009) 423; S. Karpuk *et al*, Physics of Particles and Nuclei **44** (2013) 904; C. B. Fu, T. R. Gentile, W. M. Snow, Phys. Rev. D **83** (2011) 031504; W. Zheng *et al*, Phys. Rev. D **85** (2012) 031505.
- [59] F. M. Piegsa, G. Pignoll, Phys. Rev. Lett. **108** (2013) 181801; V. V. Voronin, V. V. Fedorov, I. A. Kuznetsov, JETP Lett. **90** (2009) 5; Yu. N. Pokotilovski, JETP Lett. **94** (2011) 413; JETP Lett. **96** (2012) 205.
- [60] S. G. Karshenboim, Phys. Rev. D **82** (2010) 113013; M. P. Ledbetter, M.V. Romalis, D. F. Jackson Kimball, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 040402.
- [61] Pedro Bargueño, Ricardo Pérez de Tudela, Phys. Rev. D **78** (2008) 102004; Yonghong Hu, Zhongzhu Liu, Qing Xu, Jun Luo, Phys. Lett. A **373** (2008) 9.
- [62] T.M. Leslie, J.C. Long, Phys. Rev. D **89**, (2014) 114022.
- [63] B. R. Heckel, W. A. Terrano, E. G. Adelberger, Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 091803.



- [64] L. Hunter, J. Gordon, S. Peck, D. Ang, J.F. Lin, *Science* **339** (2013) 928.
- [65] I. Antoniadis et al, *C. R. Physique* **12** (2011) 755; J.S.M. Ginges, V.V. Flambaum, *Phys. Rep.* **397** (2004) 63; Timothy J. Sumner, *Space Sci Rev* **148** (2009) 475.
- [66] Michele Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory*, Oxford University Press, 2005.
- [67] P. Gaete, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 127702; *Phys. Rev. D* **61** (2000) 125002.
- [68] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **133** (1931) 60.
- [69] M. Born, *Proc. Roy. Soc. A* **143** (1933) 410; M. Born, L. Infeld, *Nature* **132** (1932) 970; *Proc. Roy. Soc. A* **144** (1934) 425; **147** (1934) 522; **150** (1935) 141.
- [70] W. Heisenberg, H. Euler, *Zeitschr. Phys.* **98** (1936) 714; arXiv: 0605038 [physics.hist-ph].
- [71] Sergio de Oliveira Vellozo, *Uma Discussão sobre o Spin e a Estabilidade da Carga Elétrica na Eletrodinâmica de Born-Infeld*, Tese de Doutorado, CBPF (2009).
- [72] Carlos Eduardo Lopes Ducap, *Estabilidade de Modelos de Universo Magnético*, Dissertação de Mestrado, CBPF (2014).
- [73] G. Zavattini *et al*, *J.Phys.Conf.Ser.* **442** (2013) 012057.
- [74] F. Della Valle *et al*, *Phys.Rev. D* **90** (2014) 092003.
- [75] Stephen L. Adler, *Ann. of Phys.* **67** (1971) 599.

- [76] A. Salam, P.T. Matthews, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 311.
- [77] A. Salam, Proc. R. Soc. London A **211** (1952) 276; Phys. Rev. **86** (1952) 731.
- [78] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1988.
- [79] J.A. Helayël-Neto, A. Penna-Firme, I. L. Shapiro, JHEP **01** (2000) 009.
- [80] A. Salam, A. Komar, Nucl. Phys. **21** (1960) 624.
- [81] A. Salam, Phys. Rev. **127** (1962) 331.
- [82] A. Salam, Phys. Rev. **130** (1963) 1287.
- [83] T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. **128** (1962) 885.
- [84] A. Salam, R. Delbourgo, Phys. Rev. B **135** (1964) 1398.
- [85] K. H. Tzou, Il Nuovo Cim. **33** (1964) 286.
- [86] H. Aronson, Phys. Rev. **186** (1969) 1434.
- [87] G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Rev. **188** (1969) 2218.
- [88] M. Gomez-Bock *et al*, *Concepts of Electroweak Symmetry Breaking and Higgs Physics*, arXiv: 0712.2419 [hep-ph].
- [89] R. Jackiw, Phys. Rev. D **57** (1998) 2635.
- [90] S. Ferrara, M. Porrati and V. Teledgi, Phys. Rev. D **46** (1992) 3529.
- [91] S. Fidelman *et al*, Phys. Lett. B **592** (2004) 1.
- [92] B. Podolsky, Phys. Rev. **62** (1942) 68.

- [93] B. Podolsky, Phys. Rev. **65** (1944) 228.
- [94] T. Lee, G. Wick, Nucl. Phys. B **9** (1969) 209.
- [95] T. Lee, G. Wick, Phys. Rev. D **2** (1970) 209.
- [96] Pedro Igor Cavalcante Caneda, *Eletrodinâmica Quântica de Lee-Wick*,  
Dissertação de Mestrado, CBPF (2016).
- [97] B. Grinstein, D. O'Connell, M.B. Wise, Phys. Rev. D **77** (2008) 025012.
- [98] Antonio Accioly, Patricio Gaete, José Helayël-Neto, Esley Scatena,  
Rodrigo Turcati, Mod.Phys.Lett. A **26** (2011) 1985.
- [99] L.B. Okun, Sov. Phys. JETP **56** (1982) 502
- [100] H. Georgi, P. Ginsparg, S.L. Glashow, Nature **306** (1983) 765.
- [101] B. Holdom, Phys. Lett. B **166** (1986) 196.
- [102] J. Jaeckel, S. Roy, Phys. Rev. D **82** (2010) 125020.
- [103] Joerg Jaeckel, Andreas Ringwald, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **60** (2010)  
405.
- [104] Patricio Gaete, Ivan Schmidt, Int. J. Mod. Phys. A **26** (2011) 863.
- [105] Robert C. Myers, Maxim Pospelov, Phys.Rev.Lett. **90** (2003) 211601.
- [106] C.Marát Reyes, Phys.Rev. D **82** (2010) 125036.
- [107] Esley Scatena, Rodrigo Turcati, Phys.Rev. D **90** (2014) 127703.
- [108] Gilson Correia Silva, *Prescrição para o cálculo de energia potencial  
interpartículas em modelos eletromagnéticos com termo de mixing* ,  
Dissertação de Mestrado, CBPF (2015).

- [109] Antonio Accioly, José Helayël-Neto, F. E. Barone, F. A. Barone, Patricio Gaete, Phys.Rev. D **90** (2014) 105029.
- [110] Antonio Accioly , José Helayël-Neto, F.E. Barone, Wallace Herdy, Class.Quant.Grav. **32** (2015) 035021.
- [111] Antonio Accioly, José Helayël-Neto, Gilson Correia, Gustavo Brito, José de Almeida, Wallace Herdy, Phys.Rev. D **93** (2016) 105042.
- [112] G.B. de Gracia, G.P. de Brito, Int.J.Mod.Phys. A **31** (2016) 1650070.
- [113] G. Nordström, Phys. Zeitschr. **15** (1914) 504.
- [114] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. K1 (1921) 966.
- [115] O. Klein, Zeits. für Phys. **37** (1926) 895.
- [116] H. Mandel, Zeits. für Phys. **39** (1926) 136.
- [117] V. Fock, Zeits. für Phys. **39** (1926) 226.
- [118] O. Klein, Talk “On the theory of charged fields” presented in the Meeting “New Theories in Physics”, organized by the International Union of Physics, Warsaw, September 1938.
- [119] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc.Japan **17** (1935) 48.
- [120] A. Einstein, P. Bergmann, Ann. Math. **39** (1938) 685.
- [121] R. Shaw, “The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles”, Ph.D. Thesis (Part II, Chapter 3), Cambridge (1954).
- [122] C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. **94** (1954) 191.

- [123] R. Utiyama, Phys. Rev. **101** (1956) 1597.
- [124] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2** (1961) 212.
- [125] P. A. M. Dirac, J. Math. Phys. **4** (1963) 901.
- [126] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.
- [127] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253.
- [128] J. Scherk, J. H. Schwarz, Phys. Lett. 57B (1975) 463.
- [129] E. Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. B **103** (1976) 393; Nucl. Phys. B **108** (1976) 409.
- [130] W. Nahm, Nucl. Phys. B **135** (1978) 149.
- [131] J. Scherk, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **153** (1979) 61; Phys. Lett. 82B (1979) 60; Phys. Lett. 84B (1979) 83.
- [132] P. G. O. Freund, M. A. Rubin, Phys. Lett. 97B (1980) 233.
- [133] C. Orzalesi, “Multidimensional Unified Theories”, University of Parma Preprint IFPR/TH/63 (1980); Fortsch. Phys. **29** (1981) 413.
- [134] E. Witten, Nucl. Phys. B **186** (1981) 412.
- [135] S. Randjbar-Daemi, R. Percacci, Phys. Lett. 117B (1982) 41.
- [136] M. F. Sohnius, K. S. Stelle, P. C. West, Nucl. Phys. B **173** (1980) 127; Phys. Lett. 92B (1980) 123.
- [137] Patrick Brockill, *Cordas BPS Não-Abelianas e Uma Análise Simplética da Redução de Legendre*, Tese de Doutorado, CBPF (2006).
- [138] L. Dolan, M. J. Duff, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 14.

- [139] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, C. N. Pope, Phys. Rep. **130** (1986) 1.
- [140] T. Appelquist, A. Chodos, P. G. O. Freund, “Modern Kaluza-Klein Theories”, Addison-Wesley Pub. Co. 1987.
- [141] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, Nucl. Phys. B **258** (1985) 46.
- [142] T. Appelquist, A. Chodos, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 141; Phys. Rev. D **28** (1983) 772.
- [143] T. Appelquist, A. Chodos, E. Myers, Phys. Lett. 127B (1983) 51.
- [144] A. Chodos, Comments Nucl. Part. Phys. **13** (1984) 171; “Quantum Aspects of Kaluza-Klein Theories”, Yale University Preprint YTP/84-05.
- [145] P. Candelas, S. Weinberg, Nucl. Phys. B **237** (1984) 397.
- [146] R. Delbourgo, R. O. Weber, Il Nuovo Cim. 92A (1986) 347.
- [147] S. R. Huggins, D. J. Toms, Nucl. Phys. B **263** (1986) 433.
- [148] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. B429 (1998) 263; Phys. Rev. D **59** (1999) 086004; Physics Today (2002) 35.
- [149] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [150] E. Álvarez, A. F. Faedo, JHEP **05** (2006) 046; Phys. Rev. D **74** (2006) 124029; J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 6641.
- [151] S. Bauman, K. S. Dienes, Phys. Rev. D **85** (2012) 125011; Phys. Rev. D **77** (2008) 125005; Phys. Rev. D **77** (2008) 125006.
- [152] X.-L. Qi, E. Witten, S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **87** (2013) 134519.

- [153] N. Dorey, N.E. Mavromatos, Nucl.Phys. B **386** (1992) 614.
- [154] J. Kociński, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 4257.
- [155] M. C. Land, L. P. Horwitz, *Off-Shell Quantum Electrodynamics*, arXiv: 9601021 [hep-th].
- [156] M.Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, 1972.
- [157] <http://functions.wolfram.com/03.04.06.0010.01>
- [158] <http://functions.wolfram.com/03.04.06.0039.01>
- [159] <http://functions.wolfram.com/03.04.06.0040.01>
- [160] James D. Drell, Sidney D. Bjorken, *Relativistic Quantum Mechanics*, MC Graw Hill Book Company, 1964.
- [161] H. Belich, D. Cocuroci, G. S. Dias, J. Helayël-Neto, M. Orlando, Journal of Advances in Physics **8** (2015) 2249; arXiv:1204.1537 [hep-th].
- [162] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Lecture Notes in Physics **340**, Springer-Verlag, 1989.
- [163] J. Hamilton, *Aharonov-Bohm and other Cyclic Phenomena*, Springer Tracts in Modern Physics **139**, 1997.
- [164] E.G. Delgado-Acosta, M. Kirchbach, M. Napsuciale, S. Rodriguez, Phys.Rev. D85 (2012) 116006.
- [165] M. Porrati, R. Rahman, Nucl. Phys. B **801** (2008) 174; Phys. Rev. D **80** (2009) 025009; Phys. Rev. D **84** (2011) 045013.

- [166] Yu. M. Zinoviev, Nucl. Phys. B **821** (2009) 431; Mod. Phys. Lett. A **24** (2009) 17; J. High Energy Phys. **03** (2011) 082.
- [167] B. P. Abbott et al, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.
- [168] G. Feinberg, J. Sucher, Phys. Rev. **166** (1968) 1638; Phys. Rep. **180** (1989) 83.
- [169] S.D.H. Hsu, Pierre Sikivie, Phys. Rev. D **49** (1994) 4951.
- [170] Rodolfo José Bueno Rogerio, *Campos Espinoriais ELKO*, Dissertação de Mestrado, UNESP-Guaratinguetá (2014).
- [171] Tomi S. Koivisto, Nelson J. Nunes, Phys.Lett. B **685** (2010) 105; Phys.Rev. D **80** (2009) 103509; Phys.Rev. D **88** (2013) 123512.
- [172] Isaak Mayergoyz Giorgio Bertotti Claudio Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems*, Elsevier Science, 2008.
- [173] Cristine N. Ferreira, Cresus F. L. Godinho, J.A. Helayël-Neto, *Torsion Effects and LLG Equation* , arXiv:1606.06610 [hep-th], Aceito no *Annalen der Physik*.
- [174] José Weberszpil, José Abdalla Helayël-Neto, *Structural scale  $q$ -derivative and the LLG-Equation in a scenario with fractionality*, arXiv:1701.08076 [math-ph].
- [175] Oskar Vafek, Ashvin Vishwanath, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **5** (2014) 83.
- [176] Binghai Yan, Claudia Felser, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **8** (2017) 11.1.
- [177] M. Zahid Hasan, Su-Yang Xu, Ilya Belopolski, Shin-Ming Huang, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **8** (2017) 16.1.



- [178] G.S. Adkins, *Three-dimensional Fourier transforms, integrals of spherical Bessel functions, and novel delta function identities*, arXiv: 1302.1830v1 [math-ph].
- [179] Wallace Moreira Herdy, *Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial  $D$ -dimensional em modelos eletromagnéticos e gravitacionais*, Dissertação de Mestrado, CBPF (2014).