



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
COSMO - COORDENAÇÃO DE COSMOLOGIA, ASTROFÍSICA
E INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

TESE DE DOUTORADO

Aspectos de modelos gravitacionais com derivadas de ordem superior: renormalizabilidade e violação do princípio de equivalência clássico

WALLACE MOREIRA HERDY

Orientador

Antonio José Accioly

Rio de Janeiro - RJ

Novembro de 2017

“É errado pensar que a tarefa da física é descobrir como a natureza é. A física diz respeito ao que podemos dizer sobre a natureza.”

Niels Bohr

Agradecimentos

A Deus, criador de todas as coisas.

À minha querida esposa Samanta, a quem tenho muito amor e admiração, pela paciência e companheirismo nesta jornada chamada vida.

Aos meus filhos William e Julia, pela alegria que trazem ao existirem no meu dia a dia.

Aos meus dedicados pais, Sergio e Cleuza, que sempre me incentivaram e através de seus esforços tornaram tudo isso possível.

Ao professor Antonio Accioly, excelente orientador e grande amigo, com quem tive a imensa honra de cooperar durante estes anos, por sua grande dedicação e seus valiosos ensinamentos.

Ao professor José Helayël, que me fez acreditar no sonho de seguir em Física, e para o qual minhas palavras não são capazes de expressar minha gratidão.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pela oportunidade de participar e ter as condições necessárias para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de CBPF, companheiros de caminhada, Breno, Erich, Felipe, Gabriela, Gilson, Gustavo, Ivana, José e Mylena.

Sumário

Sumário	ii
Introdução	4
Referências Bibliográficas	8
I RENORMALIZABILIDADE EM GRAVITAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR D-DIMENSIONAL	10
1 Prescrição simples para o cálculo do potencial D-dimensional para modelos gravitacionais	14
1.1 Introdução	14
1.2 Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartículas em sistemas gravitacionais D-dimensionais	15
2 Verificando a conjectura para sistemas gravitacionais D-dimensionais de quarta ordem	18
2.1 Potencial gravitacional D -dimensional de quarta ordem	18
2.1.1 $D = 3$	22

2.1.2	$D = 4$	23
2.1.3	$D = 5$	23
2.2	Testando a conjectura	24
2.3	Unitariedade de sistemas gravitacionais de quarta ordem	25
2.4	Nova Gravitação Massiva: de onde surgiu a ideia da conjectura	27
2.4.1	Unitariedade ao nível de árvore	28
2.4.2	Potencial gravitacional	29
2.4.3	Discussão da renormalizabilidade da NMG através de nossa conjectura	30
3	Examinando a conjectura para modelos gravitacionais D-dimensionais de sexta ordem	33
3.1	Potencial gravitacional D -dimensional de sexta ordem	33
3.1.1	$D = 3$	36
3.1.2	$D = 4$	36
3.1.3	$D = 5$	37
3.2	Verificando a conjectura	37
3.3	Unitariedade dos modelos gravitacionais de sexta ordem	38
4	Considerações finais sobre a renormalizabilidade	41
	Apêndice A Constante de Einstein D-dimensional	43
	Apêndice B Algumas integrais relevantes	45
	Referências Bibliográficas	47

II VIOLAÇÃO DO PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA CLÁSSICO, MAS NÃO DO FRACO, EM EXEMPLOS SEMI-

CLÁSSICOS E QUÂNTICOS	50
5 O Princípio de Equivalência	54
5.1 Os diversos Princípios de Equivalência	54
5.2 O Princípio de Equivalência Fraco da gravitação de Einstein, um princípio de equivalência local	57
6 Violações semiclássicas do CEP, mas não do WEP	62
6.1 O átomo de Bohr gravitacional de Greenberger	62
6.2 Espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo	64
7 Violações do CEP, mas não do WEP, ao nível quântico	71
7.1 O experimento COW	71
7.2 Queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito por sua função de onda Ψ	74
8 Considerações finais sobre a violação do CEP, mas nao do WEP	76
Apêndice C Seções de choque diferenciais não polarizadas para o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo	79
C.1 Partículas de spin-0	79
C.2 Partículas de spin-1/2	81
C.3 Partículas de spin-1	84
Referências Bibliográficas	88
9 Considerações finais e perspectivas futuras	93
Referências Bibliográficas	96

Resumo

Na primeira parte, uma prescrição simples para calcular o potencial clássico D-dimensional relacionado a modelos gravitacionais é obtida e usada como ferramenta para examinar a conjectura de que modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis possuem um potencial clássico finito na origem. Também é mostrado que o inverso dessa afirmação não é verdadeiro, o que implica que a finitude do potencial clássico na origem é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade do modelo. Nesta análise foram utilizados modelos gravitacionais D-dimensionais de quarta e sexta ordem. Uma atenção especial é também dedicada à Nova Gravitação Massiva. Na segunda parte, o Princípio de Equivalência é discutido em detalhe. São investigados exemplos semiclássicos e quânticos de violação do Princípio de Equivalência Clássico em um campo gravitacional, mas não do Princípio de Equivalência Fraco. Analisamos dois exemplos semiclássicos: o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger e o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo. E dois exemplos quânticos: o experimento COW e a queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito por sua função de onda Ψ .

Palavras-chave: Renormalizabilidade X unitariedade; potencial clássico não singular; modelos gravitacionais de ordem superior D-dimensionais; mecânica quântica e

princípios de equivalência, espalhamento de diferentes partículas quânticas por campo gravitacional de ordem superior externo fraco.

Áreas de conhecimento: Teoria Quântica de Campos; Gravitação.

Abstract

In the first part, a simple prescription for computing the D-dimensional classical potential related to gravitational models is obtained and used as a tool to examine the conjecture that renormalizable higher-order gravity models have a finite classical potential at the origin. It is also shown that the inverse of this statement is not true, which implies that the finiteness of the classical potential at the origin is a necessary but not sufficient condition for the renormalizability of the model. In this analysis D-dimensional four- and six-order gravity models were used. A special attention also is devoted to New Massive Gravity. In the second part, the Equivalence Principle is discussed in detail. Semiclassical and quantum examples of violation of the Classical Equivalence Principle in a gravitational field, but not of the Weak Equivalence Principle, are investigated. We analyzed two semiclassical examples: Greenberger gravitational Bohr atom and the tree-level scattering of different quantum particles by an external weak higher-order gravitational field. And two quantum examples: COW experiment and free fall in a constant gravitational field of a massive object described by its wave-function Ψ .

Introdução

Podemos dizer, em poucas palavras, que a Teoria Quântica de Campos (TQC) nasceu da junção da Relatividade Especial (RE) com a Mecânica Quântica (MQ). É notável que numa mesma época brotaram os germes de duas teorias fundamentalmente tão diferentes, a TQC e a Relatividade Geral (RG), uma descrevendo o micro e a outra o macrocosmos. Tentativas de unificação das duas descrições, ou seja, a busca por uma teoria quântica da gravitação, foram feitas sem sucesso até o momento. A dificuldade de acordo entre elas talvez se inicie com o estabelecimento dos entes matemáticos básicos sobre os quais se sustentam as teorias. Por um lado, a RG tem uma formulação geométrica, fortemente presa à noção de ponto, onde vale o Princípio de Equivalência. Por outro, o Princípio de Incerteza da teoria quântica vem negar o ponto, munindo os entes físicos primários com certa espacialidade, que talvez, seja algo de caráter mais ontológico que prático. Acredita-se que um tratamento correto do campo gravitacional sob o ponto de vista da TQC, tratamento este por hora ainda desconhecido, deverá reproduzir a teoria da RG de Einstein no limite de baixas energias, ou de modo mais geral, o Sistema Einstein-Yang-Mills-Dirac. Em outras palavras, é provável que a TQC nada mais seja que o limite de baixas energias relativo à uma teoria de campos efetiva de uma teoria mais fundamental, tal como a teoria de cordas [1].

A TQC combina harmoniosamente três dos maiores temas da física moderna: a

teoria quântica, o conceito de campo e o princípio da relatividade. Assim sendo, ela não só fornece um sólido alicerce para a física das partículas elementares contemporânea [2], mas é também um repositório de ferramentas que são essenciais para a física nuclear [3], a física atômica [4], bem como para a física da matéria condensada [5] e a astrofísica [6]. Além disso, essa teoria tem permitido que se edifiquem novas pontes entre a física e a matemática [7].

Primitivamente, a motivação para o estudo da TQC jazia na esperança de que ela viesse lançar uma nova luz sobre nossa maneira de enxergar as partículas fundamentais da matéria e suas interações. De fato, uma estrutura que incorporava, por um lado, a MQ (que tinha sido tão bem sucedida no que se refere à resolução de um grande número de problemas da física atômica no início do século passado) e, por outro, a teoria de campos (a linguagem utilizada para descrever o surpreendente quadro da realidade desvelado por Faraday, Maxwell e Hertz), certamente deveria fornecer alguma indicação confiável sobre a natureza fundamental da matéria. Na realidade, os resultados superaram em muito as expectativas. Basta citar, por exemplo, a Eletrodinâmica Quântica (QED), o primeiro filho bem sucedido do casamento da RE com a MQ. Essa teoria prediz, para citar apenas um dos seus sucessos, o momento magnético anômalo do elétron corretamente com onze casas decimais. Esta fantástica concordância entre os resultados previstos teoricamente e os obtidos experimentalmente levaram Ryder [8] a perguntar: “O que mais se poderia querer de uma teoria física?”

Já em relação à RG, é bem conhecido que ela tem divergências “selvagens” no ultravioleta, no esquema da teoria de perturbação padrão. Em princípio, uma maneira de sair desta dificuldade seria construir uma teoria em que essas divergências pudessem ser controladas. Neste contexto, destaca-se a teoria de gravitação com derivadas de ordem superior. Entendida inicialmente como uma extensão “natural” da lagrangeana de Einstein - construída via inclusão de termos de curvatura ao quadrado -, verificou-se mais tarde que ela é renormalizável mesmo quando acoplada com a matéria. Este

importante resultado foi apresentado por Kellogg Stelle em um artigo seminal de 1977 [9]. Neste sentido, teorias gravitacionais com derivadas de ordem superior são boas candidatas para essa função, já que em geral a presença de termos de ordem superior permitem-nos “domar” as divergências no ultravioleta.

Os modelos gravitacionais de ordem superior em $(3 + 1)$ dimensões foram sugeridos pela primeira vez por Hermann Weyl [10] e Arthur Eddington [11], sendo, a grosso modo, nada mais que simples generalizações da RG obtidas pela ampliação da lagrangeana de Einstein através dos escalares R^2 , $R_{\mu\nu}^2$, e $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$. Uma discussão interessante sobre estes sistemas clássicos pode ser encontrada no artigo de Peter Havas [12]. Mais tarde foi demonstrado que devido ao teorema de Gauss-Bonnet apenas dois dos termos mencionados devem ser adicionados à lagrangeana de Einstein. No entanto, somente quando foi provado que a teoria era renormalizável dentro do esquema perturbativo padrão, surgiu a Gravitação de Ordem Superior (GOS), tornando-se uma excelente candidata na longa e árdua busca por uma teoria de gravitação quântica.

Sendo assim, nosso objetivo neste trabalho é analisar algumas propriedades interessantes dos modelos gravitacionais de ordem mais alta.

É notável que recentemente muitos físicos vem se dedicando à investigação de uma suposição relacionada a modelos gravitacionais de ordem superior: sistemas renormalizáveis de ordem superior são dotados de um potencial clássico finito na origem. Parece que Stelle [9, 13] foi o primeiro a sugerir isto. Na verdade, ele examinou, de passagem, a possibilidade de que a renormalizabilidade da gravitação de quarta ordem, em quatro dimensões, estava relacionada à finitude do potencial gravitacional na origem.

Então, a Parte I de nosso trabalho consiste em investigar a premissa de que modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis — que na verdade são não unitários — são dotados de um potencial clássico que é finito na origem. Também é mostrado que a afirmação contrária não é verdadeira, o que implica que a finitude do potencial clássico na origem é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade

do modelo [14, 15].

Como consequência, veremos que o fato da teoria ter um potencial divergente na origem, permite concluir que a teoria é não renormalizável. Os sistemas que utilizamos para verificar a conjectura foram os modelos gravitacionais de quarta e sexta ordem D-dimensionais. Uma atenção especial é dedicada à Nova Gravitação Massiva (NMG, do inglês “New Massive Gravity”), uma vez que foi a análise deste modelo que inspirou nossa suposição.

Na Parte II consideramos o espalhamento, ao nível de árvore, de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo e verificamos que ele é dependente do spin, e também dispersivo (dependente da energia). Consequentemente, estes resultados violam o Princípio de Equivalência Clássico, um princípio não local. No entanto, contrariando a crença popular, ele está de acordo com o Princípio de Equivalência Fraco, que nada mais é que uma afirmação sobre efeitos puramente locais [16–18]. Além deste, examinamos outro exemplo semiclássico, o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger.

Também analisamos dois exemplos quânticos em um campo gravitacional que violam o Princípio de Equivalência Clássico, mas não o Fraco: O experimento COW e a queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito na MQ pela função de onda Ψ .

Finalizamos apresentando considerações sobre os resultados obtidos ao longo deste trabalho e apresentamos as perspectivas futuras sobre possíveis aplicações dos resultados mencionados.

Ao longo de todo o trabalho utilizamos unidades naturais. A métrica, por sua vez, tem assinatura $(+, -, -, \dots, -)$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I* (Cambridge University Press, 1995).
- [2] J. Donoghue, E. Golowich, and B. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, 1995).
- [3] S. Shapiro, and Teukolsky, *Black holes, white dwarf and neutron stars: the physics of compact objects* (Wiley-VHC, 1983).
- [4] C. Eberlein, and R. Zietal, *Phys. Rev. A* **83**, 052514 (2011).
- [5] A. Tsvelik, *Quantum field theory in condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2003).
- [6] R. Wald, *Quantum Field Theory in curved spacetime and black hole thermodynamics* (The University of Chicago Press, 1994).
- [7] N. Bogulobov, A. Logunov, and I. Todorov, *Introduction to axiomatic quantum field theory* (Reading, 1975).
- [8] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996) 2nd ed.

- [9] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [10] H. Weyl, *Space-Time Matter* (Dover, 1952).
- [11] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd. ed. (Cambridge University Press, 1924).
- [12] P. Havas, *Gen. Relativ. Gravit.* **8**, 631 (1977).
- [13] K. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978).
- [14] A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, J. de Almeida e W. Herdy, **Relating renormalizability of D-dimensional higher-order electromagnetic and gravitational models to the classical potencial at the origin**, *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750048 (2017).
- [15] A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, e J. de Almeida, *Phys. Rev. D* **95** 084007 (2017).
- [16] A. Accioly, M. Dias, B. Giacchini, and W. Herdy, **Interesting features of semiclassical gravitational deflection**, *Class Quantum Grav* **32** 175020 (2015).
- [17] A. Accioly, e W. Herdy, **Higher-order gravity and the classical equivalence principle** , *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750185 (2017).
- [18] A. Accioly, e W. Herdy, **Interesting examples of violation of the classical equivalence principle but not of the weak one** (submetido à publicação na *Advances in High Energy Physics*).

Parte I

RENORMALIZABILIDADE EM GRAVITAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR D-DIMENSIONAL

Modelos gravitacionais de ordem superior são os principais candidatos à construção de uma teoria de gravitação renormalizável. De fato, os termos de ordem superior desses sistemas são responsáveis, em geral, pela “domesticação das selvagens” divergências ultravioletas presentes na ação de Einstein-Hilbert. Além disso, como é conhecido, nestes modelos geralmente não se alcança uma coexistência pacífica entre renormalizabilidade e unitariedade.

Muitos físicos vem se dedicando à investigação da suposição de que sistemas renormalizáveis de ordem superior são dotados de um potencial clássico finito na origem [1–20]. Stelle [21, 22] examinou, de passagem, a possibilidade de que a renormalizabilidade da gravitação de quarta ordem em quatro dimensões estava relacionada a finitude do potencial gravitacional na origem. No entanto, nem Stelle, nem os autores subsequentes até agora perceberam que o inverso desta premissa não é verdadeiro.

Nosso principal objetivo aqui é exatamente testar, por meio de alguns modelos específicos, que a finitude do potencial na origem é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade de um determinado modelo de ordem superior. Visto de outro modo:

- Teoria renormalizável \Rightarrow Potencial finito na origem
- Potencial finito na origem \Rightarrow Pode ser renormalizável ou não

Uma questão natural deve ser colocada. Qual a utilidade dessa conjectura? Os benefícios que dela resultam são muito relevantes. De fato, simplesmente calculando o potencial clássico na origem podemos ficar seguros de que qualquer modelo de gravitação de ordem superior com potencial divergente na origem é não renormalizável. Além disso, usando essa premissa, podemos decidir, em certos casos, se um sistema de ordem superior é ou não renormalizável. A Nova Gravitação Massiva (NMG, do inglês “New Massive Gravity”) [23–26], por exemplo, que Ichiro Oda [27] reivindicou ser renormalizável e três anos depois Kenji Muneyukie e Nobuyoshi Ohta [28] mostraram

não ser, é não-renormalizável de acordo com nossa conjectura pois seu potencial gravitacional é divergente na origem. Uma comparação detalhada entre a simplicidade de nossa premissa e os cálculos difíceis exigidos pelos métodos usuais da TQC certamente recomenda nossa suposição nos casos mencionados. É importante lembrar que a tarefa de provar a renormalizabilidade de um determinado modelo de ordem superior é um trabalho árduo, mesmo para especialistas no assunto, o que pode facilmente ser visto olhando os artigos acima mencionados [27, 28], bem como os de Stelle [21], Ignatius Antoniadis e Terry Tomboulis [29], e Desmond Johnston [30].

Os modelos que usaremos para testar nossa conjectura são os sistemas gravitacionais de quarta e sexta ordem em D -dimensões, que são definidas pelas seguintes ações:

$$I^{(\text{quartaordem})} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[\frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \mathcal{L}_M \right], \quad (1)$$

$$I^{(\text{sextaordem})} = \int d^D x \sqrt{|g|} \frac{1}{\kappa^2} \left[2R + \frac{\alpha_0}{2} R^2 + \frac{\beta_0}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma_0}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \frac{\alpha_1}{2} R \square R + \frac{\beta_1}{2} R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + \frac{\gamma_1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta} - \mathcal{L}_M \right], \quad (2)$$

onde $\sigma = \pm 1$, α , β , γ , α_0 , β_0 , γ_0 , α_1 , β_1 , e γ_1 , são constantes arbitrárias, $\kappa^2 = 4\kappa_D$, e \mathcal{L}_M é a Lagrangeana para a matéria, sendo

$$\kappa_D = \left(\frac{D-2}{D-3} \right) G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}, \quad (3)$$

a constante de Einstein D -dimensional para $D > 3$ (ver Apêndice A). Aqui G_D é a constante de Newton em D -dimensões ($D > 3$), e Γ é a função gama. Note que κ_D reduz-se a seu valor usual em quatro dimensões, a saber $\kappa_D = 8\pi G_4$. Observamos também que a constante de Einstein em $D = 3$ não pode ser relacionada a G_3 , uma vez que a RG em três dimensões é trivial e, como consequência, não tem limite Newtoniano. No entanto, por uma questão de simplicidade, κ_3 será usado a partir de agora como o símbolo para a constante de Einstein em $D = 3$, embora não esteja relacionado a G_3 .

Para verificar nossa conjectura precisamos conhecer o potencial clássico. Portanto, para ser bem sucedido na tarefa de verificar a suposição em questão, é útil de antemão construir uma prescrição simples para o cálculo do potencial mencionado. Quanto mais fácil a prescrição, maior será sua utilidade. Logo, no Capítulo 1, construímos um método simples para calcular o potencial clássico D -dimensional para os modelos gravitacionais baseado no funcional gerador. Utilizando essa prescrição, verificamos a conjectura para modelos gravitacionais D -dimensionais de quarta e sexta ordem nos Capítulos 2 e 3, respectivamente. Ressaltamos que no Capítulo 2 uma atenção especial é dedicada à NMG, uma vez que uma análise cuidadosa desse modelo forneceu os ingredientes que nos levaram a formular a conjectura. Apresentamos também uma discussão da unitariedade ao nível de árvore dos modelos acima mencionados. A finalidade desse estudo é confirmar a premissa geral de que modelos gravitacionais de ordem mais alta renormalizáveis são não unitários. No Capítulo 4 apresentamos nossos comentários.

Chamamos a atenção para o fato de que nossa discussão é restrita aos modelos locais onde o propagador tem pólos simples e reais.

Os detalhes técnicos são relegados aos Apêndices.

Capítulo 1

Prescrição simples para o cálculo do potencial D -dimensional para modelos gravitacionais

Uma prescrição simples para calcular o potencial clássico D -dimensional relacionado a modelos gravitacionais é obtida através de um método baseado no funcional gerador. Essa prescrição será empregada como suporte para examinar a premissa de que sistemas de ordem superior renormalizáveis tem um potencial clássico finito na origem.

1.1 Introdução

De tempos em tempos, novos e interessantes modelos gravitacionais são propostos com o objetivo de superar os obstáculos inerentes à descrição teórica da interação gravitacional. No entanto, todos esses sistemas devem, inevitavelmente, reproduzir a energia gravitacional Newtoniana no limite não relativístico, mais uma correção à mencionada energia. Assim, é extremamente importante ter uma receita fácil na mão para encontrar este potencial, de forma que seu comportamento infravermelho possa

ser analisado com rapidez e eficiência.

Existem, obviamente, muitos métodos poderosos na literatura que permitem calcular o aludido potencial. Infelizmente todos esses métodos, além de exigir excessivos cálculos algébricos, são também, como consequência, procedimentos muito demorados.

Então, precisamos conceber um método em que os obstáculos acima mencionados possam ser superados ou, pelo menos, reduzidos a um mínimo. Para isso, construímos na Seção 1.2 uma prescrição simples para calcular a energia potencial de modelos gravitacionais D -dimensionais, que depende fortemente das integrais de trajetória de Feynman [31–33]. O ingrediente principal do método é um “propagador” no espaço dos momentos, obtido descartando-se todos os termos do propagador usual que sejam ortogonais às correntes externas conservadas, e fazendo-se em seguida $k^0 = 0$, onde k^μ é o momento da partícula trocada [34].

1.2 Uma prescrição simples para o cálculo da energia potencial interpartículas em sistemas gravitacionais D -dimensionais

Da TQC sabemos que o funcional gerador para os diagramas de Feynman conexos, $W_D(J)$, está relacionado com o funcional gerador $Z_D(T)$ para teorias de gravitação linearizada por $Z_D(T) = e^{iW_D(T)}$ [31–33], onde

$$W_D(T) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \int d^D x d^D y T^{\mu\nu}(x) D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) T^{\alpha\beta}(y). \quad (1.1)$$

Aqui $T^{\mu\nu}(x)$ ($= T^{\nu\mu}(x)$) e $D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y)$ são, respectivamente, a corrente externa conservada e o propagador.

Agora, tendo mente que

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{\mu\nu,\alpha\beta}(k),$$

$$T^{\mu\nu}(k) = \int d^D x e^{-ikx} T^{\mu\nu}(x),$$

nós obtemos

$$W_D(T) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T^{\mu\nu}(k)^* \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) T^{\alpha\beta}(k),$$

onde $\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$ é o ‘propagador modificado’ no espaço dos momentos obtido negligenciando todos os termos do propagador usual de Feynman que são ortogonais às correntes externas conservadas [34].

Assumindo então que a corrente externa conservada é independente do tempo, obtemos, da equação precedente

$$W_D(T) = -\frac{\kappa_D}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \left[\delta(k^0) T \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) \times \right. \\ \left. \times \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} T^{\mu\nu}(x) T^{\alpha\beta}(y) \right], \quad (1.2)$$

onde o intervalo de tempo T é produzido pelo fator $\int dx^0$.

Manipulações algébricas simples, por outro lado, reduzem (1.2) à forma

$$W_D(T) = -\kappa_D T \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}), \quad (1.3)$$

onde $\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)|_{k^0=0}$, e

$$\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \int \int d^{D-1} \mathbf{x} d^{D-1} \mathbf{y} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \frac{T^{\mu\nu}(x) T^{\alpha\beta}(y)}{2}.$$

Agora, no caso específico de duas massas M_1 e M_2 localizadas, respectivamente, em \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 , a corrente assume a forma

$$T^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \left[M_1 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + M_2 \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2) \right].$$

Sendo assim,

$$\Delta^{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = M_1 M_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \eta^{\alpha 0} \eta^{\beta 0}, \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

Como consequência,

$$W_D(T) = -\kappa_D T \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (1.5)$$

Por outro lado,

$$Z_D(T) = \langle 0 | e^{-iH_D T} | 0 \rangle = e^{-iE_D T}, \quad (1.6)$$

o que implica em

$$E_D = -\frac{W_D(T)}{T}. \quad (1.7)$$

Logo, a energia potencial gravitacional interpartículas D -dimensional pode ser calculada através da simples expressão

$$E_D(r) = \kappa_D \frac{M_1 M_2}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (1.8)$$

Consequentemente, o potencial gravitacional D -dimensional proveniente de uma massa M em repouso é dado por

$$V_D(r) = \kappa_D \frac{M}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}). \quad (1.9)$$

Usando a prescrição acima descrita é possível testar a conjectura mencionada facilmente, como será demonstrado nos próximos dois capítulos.

Capítulo 2

Verificando a conjectura para sistemas gravitacionais D -dimensionais de quarta ordem

A prescrição é empregada como suporte para examinar a premissa de que sistemas de ordem superior renormalizáveis tem um potencial clássico finito na origem. Também é mostrado que o oposto desta conjectura não é verdadeiro, o que implica que a finitude do potencial clássico é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade do modelo. O sistema utilizado para verificar a conjectura neste capítulo foi o modelo gravitacional D -dimensional de quarta ordem. Uma atenção especial é dedicada à NOVA GRAVITAÇÃO MASSIVA, uma vez que foi a análise deste modelo que inspirou nossa suposição.

2.1 Potencial gravitacional D -dimensional de quarta ordem

Para encontrar o potencial gravitacional precisamos de antemão calcular o propa-

gador. No entanto, antes de obtê-lo, vale lembrar que este cálculo exige apenas o conhecimento da parte quadrática linearizada do modelo. Por outro lado, uma vez que o invariante de Gauss-Bonnet linearizado é uma derivada total em qualquer dimensão do espaço-tempo > 3 (a restrição para $D = 4$ existe somente quando levamos em consideração a estrutura não linear completa) [35], e, além disso, tendo o tensor de curvatura e o tensor de Ricci o mesmo número de componentes em $D = 3$ [36], nós podemos desconsiderar para o cálculo o termo na ação (1) contendo $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ para $D > 2$.

Para calcular o propagador lembramos que para pequenas flutuações em torno da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, a métrica completa assume forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Linearizando a Lagrangeana associada à parte quadrática da ação (1), ou seja

$$\mathcal{L}^{(\text{quartaordem})} = \sqrt{|g|} \left[\frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right], \quad (2.2)$$

através da equação anterior e somando ao resultado a Lagrangeana fixadora de *gauge*, $\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu \gamma^{\mu\nu})^2$, onde $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ e λ é um parâmetro de *gauge* (*gauge* de Donder), encontramos

$$\mathcal{L}^{(\text{quartaordem})} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{O}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

onde, no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left(\sigma + \frac{\beta \kappa^2 k^2}{4} \right) k^2 P^{(2)} + \frac{k^2}{2\lambda} P^{(1)} + \frac{k^2}{4\lambda} P^{(0-w)} - \frac{k^2}{4\lambda} \sqrt{D-1} \left[P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)} \right] + \\ & + \left[-(D-2)\sigma + (D-1)\alpha \kappa^2 k^2 + D \frac{\beta \kappa^2 k^2}{4} + \frac{D-1}{4\lambda} \right] k^2 P^{(0-s)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Invertendo este operador encontramos o propagador para a gravitação de quarta ordem D -dimensional, a saber,

$$D^{(\text{quartaordem})} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right] P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{1}{\sigma(D-2)} \left[\frac{1}{k^2 - m_0^2} - \frac{1}{k^2} \right] P^{(0-s)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{4\lambda}{k^2} + \frac{(D-1)m_0^2}{\sigma k^2(k^2 - m_0^2)(D-2)} \right] P^{(0-w)} + \\
& + \frac{\sqrt{D-1}m_0^2}{(D-2)\sigma k^2(k^2 - m_0^2)} \left[P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)} \right], \tag{2.5}
\end{aligned}$$

onde $\{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(0-ws)}\}$ é o conjunto usual de operadores de Barnes-Rivers D -dimensional, e

$$m_2^2 \equiv -\frac{4\sigma}{\beta\kappa^2}, \quad m_0^2 \equiv \frac{4\sigma(D-2)}{\kappa^2[4\alpha(D-1) + D\beta]}. \tag{2.6}$$

Aqui estamos supondo que não existem táquions no modelo, o que implica em $m_2^2 > 0$ e $m_0^2 > 0$.

Aliás, o conjunto completo dos operadores de Barnes-Rivers D -dimensional no espaço dos momentos é dado por

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa} \right) - \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} \right), \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} &= \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} &= \frac{1}{\sqrt{D-1}} \theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda},
\end{aligned}$$

onde $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ e $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ são, respectivamente, os operadores de projeção vetorial transversal e longitudinal usuais. A tabela multiplicativa para esses operadores é exibida na Tabela 2.1 [34].

A expressão para o propagador pode ser trivialmente obtida através de (2.5). Fazendo os cálculos apropriados chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[-\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} \right] \left[\frac{1}{2} (\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}) - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{D-1} \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} \right] + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \right] \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} \left. \right\}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Tabela 2.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Como consequência,

$$\mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{D-3}{D-2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} - \frac{1}{(D-1)(D-2)(\mathbf{k}^2 + m_0^2)} \right) \quad (2.8)$$

Portanto, o potencial gravitacional D -dimensional gerado por uma massa estática M pode ser calculada através da expressão

$$V_D^{(\text{quartaordem})}(r) = -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{D-1}} \left[\frac{D-3}{D-2} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{D-2}{D-1} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{(D-2)(D-1)} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right].$$

Fazendo as integrações, encontramos (ver Apêndice B)

$$V_D^{(\text{quartaordem})}(r) = -\frac{\kappa_D M}{\sigma(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left[\frac{D-3}{D-2} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) - \frac{D-2}{D-1} \left(\frac{m_2}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_2 r) + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \left(\frac{m_0}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_0 r) \right] \quad (D=4,5), \quad (2.9)$$

e

$$V_3^{(\text{quartaordem})}(r) = \frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} \left[K_0(m_2 r) - K_0(m_0 r) \right], \quad (2.10)$$

em que K_ν e a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem ν .

Tendo em conta que

$$K_\nu(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.11)$$

é trivial constatar que (2.9) e o potencial gravitacional de Newton concordam assintoticamente se, e somente se, $\sigma = +1$. Portanto, assumiremos de agora em diante que $\sigma = +1$ para $D > 3$.

Para $D = 3$, a equação (2.10) reproduz para $r \rightarrow \infty$, utilizando (2.11), o potencial gravitacional relativo à gravitação de Einstein tridimensional.

Antes de prosseguir, é importante chamar a atenção para o fato de que nossa discussão será restrita a sistemas em 3, 4, e 5 dimensões, pois somente nestes modelos é possível calcular o potencial gravitacional analiticamente.

Analisamos em seguida o comportamento para pequenas distâncias do potencial gravitacional relativo aos sistemas mencionados.

2.1.1 $D = 3$

Lembrando que para $x \ll 1$ [37],

$$\begin{aligned} K_0(x) \sim & -\left(\gamma + \ln \frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} \left(1 - \gamma - \ln \frac{x}{2}\right) + \\ & + x^4 \left(\frac{1}{128}(3 - 2\gamma) - \frac{1}{64} \ln \frac{x}{2}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni, podemos reescrever a expressão para o potencial gravitacional (2.10) como

$$\begin{aligned} V_3(r) = & \frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} \left[\ln \frac{m_0}{m_2} + \frac{(m_2 r)^2}{4} \left(1 - \gamma - \ln \frac{m_2 r}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{(m_0 r)^2}{4} \left(1 - \gamma - \ln \frac{m_0 r}{2}\right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto, quando $r \rightarrow 0$, obtemos

$$V_3(0) = \frac{\kappa_3 M}{4\pi\sigma} \ln \frac{m_0}{m_2}. \quad (2.14)$$

Como resultado, em teorias gravitacionais tridimensionais de quarta ordem completas, isto é, modelos sem nenhuma relação especial entre seus parâmetros, temos um

potencial gravitacional que é finito na origem. No entanto, a NMG [23], por exemplo, onde seus parâmetros são ligados pela relação $8\alpha + 3\beta = 0$, é singular na origem. Observe que σ para estes sistemas é igual a -1. Analisaremos o modelo em questão na Seção 2.4.

2.1.2 $D = 4$

Levando em conta que $K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ [37], imediatamente obtemos de (2.9)

$$V_4(r) = -\frac{\kappa_4 M}{8\pi r} \left(1 - \frac{4}{3} e^{-m_2 r} + \frac{1}{3} e^{-m_0 r} \right). \quad (2.15)$$

Para verificar se $V_4(r)$ é regular na origem, expandimos as exponenciais em $r = 0$ em séries de potência. Fazendo isso é fácil verificar que a contribuição dos termos de ordem superior cancelam a contribuição Newtoniana tornando o modelo livre de singularidade. De fato, o potencial aludido pode ser escrito como

$$V_4(r) = MG_4 \frac{m_0 - 4m_2}{3} + \mathcal{O}(r). \quad (2.16)$$

O cancelamento da singularidade ocorre porque os termos de ordem zero que contém as derivadas de ordem superior produzem um coeficiente +1 responsável pelo anulamento do coeficiente -1 do termo original de Newton.

2.1.3 $D = 5$

Sabendo que para $x \rightarrow 0$ [37],

$$K_1(x) \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{4} \left[2\gamma - 1 + \frac{1}{8} \left(2\gamma - \frac{5}{2} \right) x^2 + \frac{1}{192} \left(2\gamma - \frac{10}{3} \right) x^4 + \dots \right] + \frac{x}{2} \ln \frac{x}{2} \left[1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + \dots \right],$$

podemos escrever $V_5(r)$ como

$$V_5(r) = -\frac{\kappa_5 M}{48(2\pi)^2} \left[\left(m_0^2 - 9m_2^2 \right) \left(2\gamma - 1 + 2 \ln r \right) + \right.$$

$$+m_0^2 \ln \frac{m_0^2}{4} - 9m_2^2 \ln \frac{m_2^2}{4} + \dots \Big]. \quad (2.17)$$

Como consequência, o potencial gravitacional de quarta ordem completo em cinco dimensões é divergente na origem. Porém, se $m_0^2 = 9m_2^2$, este potencial é finito no ponto citado. Consequentemente, encontramos um potencial não singular na origem em cinco dimensões relacionado à gravitação de quarta ordem [34], sendo seu valor dado por

$$V_5(0) \Big|_{m_0^2=9m_2^2} = -\frac{3\kappa_5 M m_2^2 \ln 3}{32\pi^2}. \quad (2.18)$$

Vamos então verificar nossa conjectura para gravitação de quarta ordem em D -dimensões.

2.2 Testando a conjectura

De acordo com nossa conjectura, a condição necessária para um modelo de ordem superior D -dimensional ser renormalizável é que ele tenha um potencial clássico finito na origem. Como acabamos de demonstrar, sistemas gravitacionais de quarta ordem completos em $D = 3$ e 4 são finitos na origem, enquanto que em $D = 5$ o modelo completo tem uma singularidade no ponto mencionado. Assim, se a conjectura está correta, ambos os modelos completos em três e quatro dimensões podem ser renormalizáveis, enquanto em cinco dimensões deve ser não renormalizável.

Agora, como os modelos gravitacionais completos de quarta ordem em $D = 3$ e 4 são renormalizáveis [21,28], eles concordam com nossa conjectura, pois como acabamos de demonstrar, eles não têm uma singularidade na origem.

No que diz respeito ao sistema de cinco dimensões, é trivial mostrar por contagem de potência que o modelo completo é não renormalizável. De fato, neste caso, o grau de divergência superficial é dado por

$$\delta = 5 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=3}^{\infty} (n-2)V_n - E \right), \quad (2.19)$$

o que mostra claramente que o sistema é não renormalizável desde que δ torna-se maior à medida que o número de vértices aumenta. Lembrando que esse modelo é divergente na origem, ele está de acordo com nossa suposição que afirma que os sistemas renormalizáveis devem ser sempre finitos na origem.

Por outro lado, o potencial gravitacional em relação à NMG é divergente na origem, como veremos na Seção 2.4. De acordo com nossa conjectura, a NMG deve ser não renormalizável, e de fato ela é não renormalizável conforme [28].

Já o modelo em cinco dimensões, com seus parâmetros ligados pela relação $m_0^2 = 9m_2^2$, tem um potencial que é livre de singularidade na origem. Ainda assim, este modelo específico é não renormalizável por contagem de potências. No entanto, ele também está de acordo com nossa conjectura.

Note que nossa suposição diz que a existência de um potencial clássico livre de singularidade na origem é uma condição necessária, *mas não suficiente*, para a renormalizabilidade da teoria.

Ou seja,

- Potencial finito na origem \Rightarrow Pode ser renormalizável ou não

Por uma questão de completeza, discutiremos agora a unitariedade ao nível de árvore dos modelos gravitacionais de quarta ordem.

2.3 Unitariedade de sistemas gravitacionais de quarta ordem

Em 1986, Antoniadis e Tomboulis [29] argumentaram que a presença do *ghost* massivo de spin-2 no propagador nu era inconclusiva, já que esta excitação era instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido é explicitamente dependente de *gauge*. Utilizando argumentos padrões da TQC, eles concluíram que as

teorias de GOS são unitárias. No ano seguinte Johnston [30] provou que as conjecturas de Antoniadis e Tomboulis não eram verdadeiras, uma vez que o par de pólos complexos que aparecem no propagador re-somado são independentes de *gauge*, implicando na não unitariedade das teorias de gravitação com derivadas de ordem superior.

Veremos agora que os modelos gravitacionais completos de quarta ordem são não unitários em $D = 3, 4$ e 5 . Para isso, faremos uso de um método pioneiro desenvolvido por Martinus Veltman [38], que tem sido amplamente utilizado desde que foi concebido. A prescrição consiste em saturar o propagador com correntes externas conservadas e calcular depois os resíduos nos pólos simples deste propagador saturado (*PS*). Se os resíduos em todos os pólos são positivos ou nulos, o sistema é unitário ao nível de árvore, mas se pelo menos um dos resíduos é negativo, o modelo é não unitário ao nível de árvore.

Para $D = 4$ e 5 obtemos de (2.7) o propagador saturado no espaço dos momentos (note que escolhemos $\sigma = +1$ pelas razões já explicadas)

$$\begin{aligned} PS(k) &= T_{\mu\nu}(k)D^{\mu\nu,\alpha\beta}(k)T_{\alpha\beta}(k) \\ &= \frac{A}{k^2} - \frac{B}{k^2 - m_2^2} + \frac{C}{k^2 - m_0^2}. \end{aligned}$$

Aqui,

$$A \equiv T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}, \quad B \equiv T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-1}, \quad C \equiv \frac{T^2}{(D-1)(D-2)},$$

onde $T_{\mu\nu}$ é a corrente externa conservada, sendo $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Agora, tendo em conta que [34]

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2}\right)\Big|_{k^2=0} > 0 \quad , \quad \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3}\right)\Big|_{k^2=m_2^2} > 0, \quad (2.20)$$

chegamos à conclusão que

$$Res(PS)|_{k^2=0} > 0,$$

$$Res(PS)|_{k^2=m_0^2} > 0,$$

$$Res(PS)|_{k^2=m_2^2} < 0,$$

o que mostra que a gravitação de quarta ordem é não unitária para $D = 4$ e 5 .

Se $D = 3$, os resultados encontrados estão apresentados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Sinais dos resíduos do PS nos pólos $k^2 = 0$, $k^2 = m_0^2$, $k^2 = m_2^2$ relacionados à gravitação de quarta ordem completa em três dimensões.

$D = 3$	$\sigma = +1$	$\sigma = -1$
$Res(PS(k)) _{k^2=0}$	$= 0$	$= 0$
$Res(PS(k)) _{k^2=m_0^2}$	> 0	< 0
$Res(PS(k)) _{k^2=m_2^2}$	< 0	> 0

Assim, a gravitação tridimensional de quarta ordem completa é não unitária para $\sigma = \pm 1$. Além disso, também é renormalizável [28].

NMG, por sua vez, é unitária ao nível de árvore e não renormalizável (ver Seção 2.4), enquanto a gravitação de quarta ordem em cinco dimensões, com seus parâmetros limitados pela relação $m_0^2 = 9m_2^2$, é não unitária e não renormalizável por contagem de potência.

Os resultados precedentes confirmam, como esperado, que qualquer modelo de gravitação de ordem superior renormalizável é sempre não unitário.

2.4 Nova Gravitação Massiva: de onde surgiu a ideia da conjectura

Agora, dirigimo-nos à questão da NMG [23]. Nosso principal interesse nesse sistema deve-se ao fato de que foi através da análise de suas propriedades que a ideia da conjectura veio à tona. Como é conhecido, este modelo suscitou grande interesse na comunidade científica quando foi concebido, por ser um modelo de gravitação de

ordem superior unitário ao nível de árvore. De fato, os sistemas gravitacionais de ordem superior unitários ao nível de árvore são extremamente raros na física. Por outro lado, a referida teoria causou considerável controvérsia no que diz respeito à sua renormalizabilidade. Como já dito, foi reivindicado inicialmente ser renormalizável por Oda [27], sendo alguns anos depois mostrado ser não renormalizável por Muneyuki e Ohta [28]. É exatamente o desacordo entre esses resultados que discutiremos através de nossa conjectura. No entanto, por razões de clareza, começamos por apresentar alguns pontos importantes para o sistema em questão.

2.4.1 Unitariedade ao nível de árvore

A partir de (2.5) é simples obter o propagador saturado, isto é

$$PS(k) = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right] \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right] + \frac{1}{\sigma} \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - m_0^2} \right] \frac{1}{2} T^2. \quad (2.21)$$

A Equação (2.6), por sua vez, fornece as restrições

$$\frac{\sigma}{\beta} < 0, \quad \frac{\sigma}{8\alpha + 3\beta} > 0. \quad (2.22)$$

Agora, os resíduos do $PS(k)$ nos pólos $k^2 = m_2^2$, $k^2 = 0$, e $k^2 = m_0^2$ são, respectivamente,

$$Res(PS)|_{k^2=m_2^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) \Big|_{k^2=m_2^2}, \quad (2.23)$$

$$Res(PS)|_{k^2=0} = \frac{1}{\sigma} \left(T_{\mu\nu}^2 - T^2 \right) \Big|_{k^2=0}, \quad (2.24)$$

$$Res(PS)|_{k^2=m_0^2} = \frac{1}{2\sigma} \left(T^2 \right) \Big|_{k^2=m_0^2}. \quad (2.25)$$

Daí, chegamos à conclusão que $Res(PS)|_{k^2=m_2^2} > 0$ se $\sigma = -1$ (que assumimos ser o caso a partir de agora), e $Res(PS)|_{k^2=0} = 0$. Como resultado, não precisamos nos

preocupar com esses pólos. O pólo problemático é $k^2 = m_0^2$, já que $Res(PS)|_{k^2=m_0^2} < 0$. Uma maneira de sair dessa dificuldade é considerar o limite $m_0 \rightarrow \infty$ do modelo em discussão, o que nos leva a concluir que $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$. Assim, a classe de modelos definida pela Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\beta}{2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (2.26)$$

onde $\kappa^2 = 4\kappa_3$, estão livres de fantasmas ao nível de árvore. Por razões de conveniência, substituímos β por $\frac{4}{\kappa^2 m_2^2}$. A Lagrangeana resultante,

$$\mathcal{L}_{\text{NMG}} = \sqrt{|g|} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (2.27)$$

define o famoso sistema chamado de Nova Gravitação Massiva [23–26].

Neste ponto, é interessante lembrar alguns comentários que, num certo sentido, previam a não renormalizabilidade da NMG.

- Não está claro se a relação particular entre α e β irá sobreviver à renormalização em um dado loop, ou mesmo em um loop. Em outras palavras, a unitariedade além do nível de árvore tem que ser verificada [39].
- Muito provavelmente, a NMG é não renormalizável, uma vez que só melhoram as projeções de spin-2 do propagador, mas não a projeção de spin-0 [40].

Sem dúvida essas observações anteciparam por alguns anos a prova definitiva relacionada à não renormalizabilidade da NMG.

2.4.2 Potencial gravitacional

De (2.10) obtemos sem qualquer dificuldade

$$V_{\text{NMG}}(r) = -\frac{\kappa_3 M}{4\pi} K_0(m_2 r). \quad (2.28)$$

Note que o potencial relativo à NMG tem uma singularidade logarítmica na origem. $V_{\text{NMG}}(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. E no limite $m_2 \rightarrow \infty$, $V_{\text{NMG}}(r) \rightarrow 0$, reproduzindo desta forma o potencial gravitacional tridimensional usual.

2.4.3 Discussão da renormalizabilidade da NMG através de nossa conjectura

De acordo com Oda [27], NMG é renormalizável. No entanto, o autor cometeu um erro ao considerar a NMG como um modelo gravitacional tridimensional completo (com $\sigma = -1$), sendo este último renormalizável. Em outras palavras, embora a NMG tenha origem no modelo gravitacional completo (ver Figura 2.1), o sistema em discussão tem uma restrição entre seus parâmetros ($\alpha = -\frac{3}{8}\beta$). É exatamente essa relação entre os parâmetros o responsável pela quebra da renormalizabilidade do modelo completo, como foi demonstrado por Muneyuki e Ohta [28].

Examinando o gráfico mostrado na Figura 2.1, vemos claramente que à medida que m_0 torna-se cada vez maior, o potencial completo $V_3(r)$ com $\sigma = -1$ e $m_2 < m_0$ (ver (2.10)) rapidamente se aproxima do potencial relativo à NMG e eventualmente eles coalescem. Vale a pena mencionar que para chegar ao potencial da NMG a partir do potencial completo acima, este último deve necessariamente tornar-se singular na origem, o que ocorre no limite $m_0 \rightarrow \infty$. É notável que esta é precisamente a condição para evitar ao nível de árvore, o fantasma massivo de spin-0 que “assombra” a gravitação de quarta ordem tridimensional completa. Consequentemente, a presença da singularidade na NMG está correlacionada com a ausência de fantasma ao nível de árvore. Em outras palavras, unitariedade ao nível de árvore e a existência de uma singularidade no potencial parecem estar entrelaçadas. Na Figura 2.2, o comportamento da gravitação de quarta ordem completa em três dimensões é representado no que diz respeito a sua unitariedade, renormalizabilidade, e a existência do potencial gravitacional finito na origem. Esta figura demonstra que em três dimensões um sistema unitário

é não renormalizável, estando conectado a um potencial singular na origem, enquanto um modelo renormalizável está relacionado ao potencial finito na origem, sendo além disso não unitário. Curiosamente, foi exatamente a análise deste modelo que nos levou a propor a conjectura analisada neste trabalho [25].

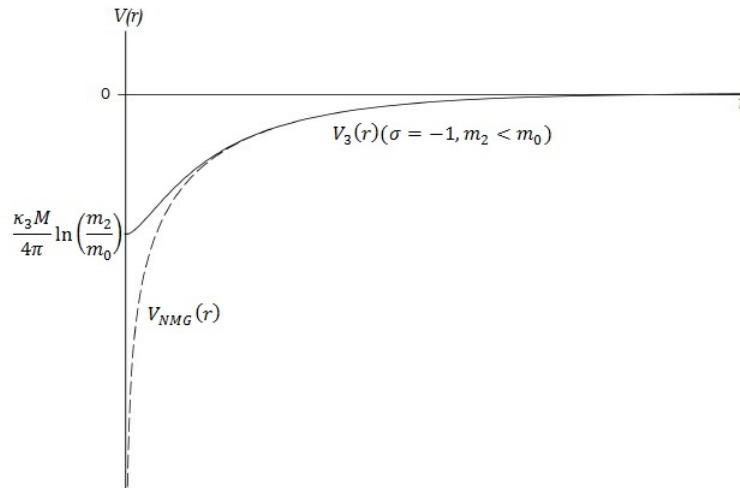


Figura 2.1: Potencial gravitacional para ambos, o modelo gravitacional de quarta ordem completo em três dimensões com $\sigma = -1$ e $m_2 < m_0$ (linha contínua) e a NMG (linha tracejada).

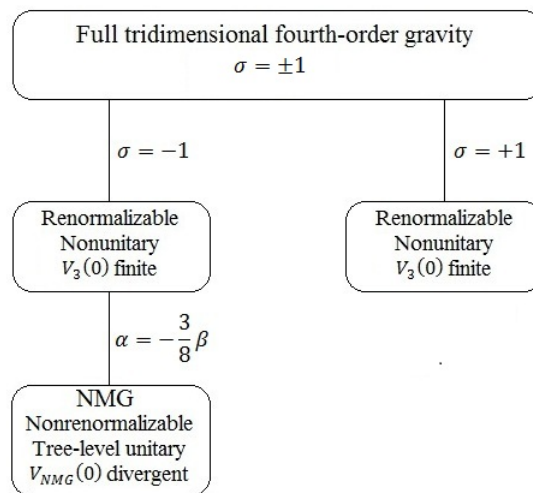


Figura 2.2: Renormalizabilidade, unitariedade, e o potencial gravitacional na origem referente à gravitação de quarta ordem completa em três dimensões ($\sigma = \pm 1$) .

Capítulo 3

Examinando a conjectura para modelos gravitacionais D -dimensionais de sexta ordem

A prescrição é agora empregada como suporte para examinar a mesma premissa, a de que sistemas de ordem superior renormalizáveis tem um potencial clássico finito na origem. O sistema utilizado para verificar a conjectura neste capítulo foi o modelo gravitacional D -dimensional de sexta ordem. Novamente é mostrado que o oposto desta conjectura não é verdadeiro, o que implica que a finitude do potencial clássico é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade do modelo.

3.1 Potencial gravitacional D -dimensional de sexta ordem

Uma vez que estamos interessados apenas na parte linear da ação (2), não levamos o termo γ_0 em consideração. Por outro lado, a parte quadrática da ação resultante

pode ser escrita como

$$I^{(\text{sexta-ordem})} = \int d^D x \sqrt{|g|} \frac{1}{\kappa^2} \left[2R + \frac{1}{2} R F_1(\square) R + \frac{1}{2} R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F_3(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} \right], \quad (3.1)$$

onde

$$F_1(\square) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \square, \quad F_2(\square) \equiv \beta_0 + \beta_1 \square, \quad F_3(\square) \equiv \gamma_1 \square.$$

Agora, na aproximação de campo fraco obtemos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} F_3(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu} F_3(\square) R^{\mu\nu} - R F_3(\square) R + \partial\Omega + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), encontramos

$$I^{(\text{sexta-ordem})} = \int d^D x \sqrt{|g|} \frac{1}{\kappa^2} \left[2R + \frac{1}{2} R (F_1(\square) - F_3(\square)) R + \frac{1}{2} R_{\mu\nu} (F_2(\square) + 4F_3(\square)) R^{\mu\nu} \right]. \quad (3.3)$$

Fazendo as seguintes redefinições,

$$F_1(\square) - F_3(\square) \Rightarrow F_1(\square), \quad F_2(\square) + 4F_3(\square) \Rightarrow F_2(\square),$$

chegamos à conclusão de que a parte quadrática de nossa ação original se reduz, nesta aproximação, a

$$I^{(\text{sexta-ordem})} = \int d^D x \sqrt{|g|} \frac{1}{\kappa^2} \left[2R + \frac{\alpha_0}{2} R^2 + \frac{\beta_0}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\alpha_1}{2} R \square R + \frac{\beta_1}{2} R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} \right]. \quad (3.4)$$

Tomando a mesma série de ações que utilizamos para verificar nossa conjectura relacionada com modelos de gravitação de quarta ordem em D -dimensões, obtemos

que o propagador relativo aos sistemas de sexta ordem pode ser escrito, no espaço dos momentos, como

$$D(k) = \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{m_{2-}^2}{k^2 - m_{2+}^2} - \frac{m_{2+}^2}{k^2 - m_{2-}^2} \right) \right] P^{(2)} - \frac{1}{D-2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{m_{0-}^2}{k^2 - m_{0+}^2} - \frac{m_{0+}^2}{k^2 - m_{0-}^2} \right) \right] P^{(0-s)} + (\dots) \quad (3.5)$$

Aqui, (...) representa o conjunto de termos que são irrelevantes para o cálculo do potencial, e

$$m_{2\pm}^2 = \frac{\beta_0}{2\beta_1} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\beta_1}{\beta_0^2}} \right),$$

$$m_{0\pm}^2 = \frac{\xi_0}{2\xi_1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(D-2)\xi_1}{\xi_0^2}} \right),$$

onde $\xi_l = (D-1)\alpha_l + \frac{D}{4}\beta_l$ ($l = 0, 1$).

Como consequência,

$$\mathcal{P}_{00,00}(\mathbf{k}) = -\frac{D-3}{D-2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{m_{0-}^2}{\mathbf{k}^2 + m_{0+}^2} - \frac{m_{0+}^2}{\mathbf{k}^2 + m_{0-}^2} \right) - \frac{D-2}{D-1} \frac{1}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{m_{2-}^2}{\mathbf{k}^2 + m_{2+}^2} - \frac{m_{2+}^2}{\mathbf{k}^2 + m_{2-}^2} \right).$$

Segue que o potencial gravitacional D -dimensional para modelos de sexta ordem é dado por

$$V_3(r) = \frac{\kappa_3 M}{4\pi} \left\{ \frac{m_{0-}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} K_0(m_{0+} r) - \frac{m_{0+}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} K_0(m_{0-} r) - \frac{m_{2-}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} K_0(m_{2+} r) + \frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} K_0(m_{2-} r) \right\}, \quad (3.6)$$

$$V_D(r) = -\frac{\kappa_D M}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left\{ \frac{D-3}{D-2} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{0-}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{m_{0+}}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{0+} r) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{0+}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{m_{0-}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{0-}r) + \\
& + \frac{D-2}{D-1} \frac{m_{2-}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{m_{2+}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{2+}r) - \\
& - \frac{D-2}{D-1} \frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{m_{2-}}{r} \right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(m_{2-}r) \left. \right\} (D = 4, 5). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Vemos, usando (2.11), que (3.7) e o potencial gravitacional de Newton coincidem para $r \rightarrow \infty$, enquanto (3.6) e o potencial gravitacional usual associado à teoria tridimensional de Einstein concordam assintoticamente.

Vamos fazer uma análise do comportamento próximo à origem do potencial gravitacional que acabamos de encontrar.

3.1.1 $D = 3$

Levando (2.12) em consideração, encontramos que para $r \ll 1$, (3.6) assume a forma

$$\begin{aligned}
V_3(r) = & \frac{\kappa_3 M}{4\pi} \left(\frac{m_{2-}^2 \ln m_{2+} - m_{2+}^2 \ln m_{2-}}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} - \right. \\
& \left. - \frac{m_{0-}^2 \ln m_{0+} - m_{0+}^2 \ln m_{0-}}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} + \dots \right). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Consequentemente, o potencial gravitacional tridimensional de sexta ordem é finito na origem e tem o seguinte valor

$$V_3(0) = \frac{\kappa_3 M}{4\pi} \left(\frac{m_{2-}^2 \ln m_{2+} - m_{2+}^2 \ln m_{2-}}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} - \frac{m_{0-}^2 \ln m_{0+} - m_{0+}^2 \ln m_{0-}}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \right). \quad (3.9)$$

3.1.2 $D = 4$

Neste caso, o potencial gravitacional é dado por

$$\begin{aligned}
V_4(r) = & \frac{\kappa_4 M}{4\pi r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{m_{0-}^2 e^{-m_{0+}r} - m_{0+}^2 e^{-m_{0-}r}}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} - \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} \frac{m_{2-}^2 e^{-m_{2+}r} - m_{2+}^2 e^{-m_{2-}r}}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Expandindo as exponenciais em $r = 0$, obtemos

$$V_4(r) = \frac{\kappa_4 M}{4\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{m_{2-}^2 m_{2+} - m_{2+}^2 m_{2-}}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} - \frac{1}{6} \frac{m_{0-}^2 m_{0+} - m_{0+}^2 m_{0-}}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \right) + \mathcal{O}(r). \quad (3.11)$$

Assim, o potencial gravitacional para a gravitação de sexta ordem em quatro dimensões é finito na origem, sendo seu valor neste ponto igual a

$$V_4(0) = \frac{\kappa_4 M}{4\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{m_{2-}^2 m_{2+} - m_{2+}^2 m_{2-}}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} - \frac{1}{6} \frac{m_{0-}^2 m_{0+} - m_{0+}^2 m_{0-}}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \right). \quad (3.12)$$

3.1.3 $D = 5$

É fácil mostrar que se $r \ll 1$, (3.7) reduz-se, para $D = 5$, a

$$V_5(r) = \frac{\kappa_5 M}{(2\pi)^2} \left\{ -\frac{3}{8} \frac{m_{2+}^2 m_{2-}^2}{m_{2+}^2 + m_{2-}^2} \ln \frac{m_{2+}}{m_{2-}} + \frac{1}{24} \frac{m_{0+}^2 m_{0-}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \ln \frac{m_{0+}}{m_{0-}} + \dots \right\}, \quad (3.13)$$

que converge para um valor finito na origem, que é igual a

$$V_5(0) = -\frac{\kappa_5 M}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{3}{8} \frac{m_{2+}^2 m_{2-}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \ln \frac{m_{2+}}{m_{2-}} - \frac{1}{24} \frac{m_{0+}^2 m_{0-}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \ln \frac{m_{0+}}{m_{0-}} \right\}. \quad (3.14)$$

Examinemos agora nossa conjectura para modelos de gravitação D -dimensional de sexta ordem.

3.2 Verificando a conjectura

Não é difícil verificar por contagem de potência que a divergência superficial relacionada aos modelos em questão pode ser escrita como

$$\delta = D + \frac{6-D}{2} E - \frac{6-D}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) V_n. \quad (3.15)$$

Portanto, concluímos que

- $3 \leq D \leq 5 \Rightarrow \delta$ diminui à medida que o número de vértices aumenta \Rightarrow super-renormalizável.

- $D = 6 \Rightarrow \delta$ é independente do número de vértices \Rightarrow renormalizável.
- $D \geq 7 \Rightarrow \delta$ aumenta à medida que o número de vértices aumenta \Rightarrow não-renormalizável.

Uma vez que o potencial gravitacional só pode ser calculado analiticamente para $D = 3, 4, 5$, restringimos nossa análise a essas dimensões.

Por outro lado, provamos que o potencial gravitacional para os modelos completos é finito em $r = 0$ nas dimensões acima. Assim, estes modelos estão em total acordo com a nossa suposição que exige que eles devam ser não singulares na origem.

Para completar, estudaremos finalmente a unitariedade dos modelos mencionados.

3.3 Unitariedade dos modelos gravitacionais de sexta ordem

A partir de (3.5) verificamos que o propagador saturado é dado pela expressão

$$\begin{aligned}
PS(k) = & \frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} T^2 \right) + \left[\frac{1}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(\frac{m_{2-}^2}{k^2 - m_{2+}^2} - \frac{m_{2+}^2}{k^2 - m_{2-}^2} \right) \right] \times \\
& \times \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) - \frac{1}{(D-1)(D-2)} \times \\
& \times \left[\frac{1}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} \left(\frac{m_{0-}^2}{k^2 - m_{0+}^2} - \frac{m_{0+}^2}{k^2 - m_{0-}^2} \right) \right] T^2. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Res(PS(k))|_{k^2=0} &= \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} T^2 \right) \Big|_{k^2=0}, \\
Res(PS(k))|_{k^2=m_{2+}^2} &= \frac{m_{2-}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) \Big|_{k^2=m_{2+}^2}, \\
Res(PS(k))|_{k^2=m_{2-}^2} &= -\frac{m_{2+}^2}{m_{2+}^2 - m_{2-}^2} \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T^2 \right) \Big|_{k^2=m_{2-}^2},
\end{aligned}$$

$$Res(PS(k))|_{k^2=m_{0+}^2} = -\frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{0-}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} T^2 \Big|_{k^2=m_{0+}^2}, \quad (3.17)$$

$$Res(PS(k))|_{k^2=m_{0-}^2} = \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{m_{0+}^2}{m_{0+}^2 - m_{0-}^2} T^2 \Big|_{k^2=m_{0-}^2}. \quad (3.18)$$

Nosso próximo passo é obter os sinais relacionados aos resíduos. Para fazer isso, no entanto, precisamos saber de antemão como m_{2+}^2 e m_{2-}^2 , bem como m_{0+}^2 e m_{0-}^2 são ordenados. Para facilitar esta tarefa, redefinimos os seguintes parâmetros

$$\alpha_0 \mapsto \kappa^2 \alpha_0, \quad \alpha_1 \mapsto \kappa^4 \alpha_1, \quad \beta_0 \mapsto \kappa^2 \beta_0, \quad \beta_1 \mapsto \kappa^4 \beta_1,$$

o que implica que em termos desses parâmetros redefinidos, as massas m_{\pm}^2 e $m_{0\pm}^2$ assumem a forma

$$m_{2\pm}^2 = \frac{\beta_0}{2\kappa^2\beta_1} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\beta_1}{\beta_0^2}} \right), \quad (3.19)$$

$$m_{0\pm}^2 = \frac{\xi_0}{2\kappa^2\xi_1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(D-2)\xi_1}{\xi_0^2}} \right), \quad (3.20)$$

onde $\xi_l = (D-1)\alpha_l + \frac{D}{4}\beta_l$ ($l = 0, 1$). Na verdade, estamos interessados nas seguintes regiões nos espaços paramétricos

$$\Omega_\beta = \left\{ (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \kappa^2 m_{2+}^2 > 0 \text{ e } \kappa^2 m_{2-}^2 > 0 \right\},$$

$$\Omega_\xi = \left\{ (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \kappa^2 m_{0+}^2 > 0 \text{ e } \kappa^2 m_{0-}^2 > 0 \right\},$$

$$\Omega_\alpha = \left\{ (\alpha_0, \alpha_1) = \left(\frac{4\xi_0 - D\beta_0}{4(D-1)}, \frac{4\xi_1 - D\beta_1}{4(D-1)} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid (\beta_0, \beta_1) \in \Omega_\beta \text{ e } (\xi_0, \xi_1) \in \Omega_\xi \right\}.$$

Levando (3.19) e (3.20) em conta, podemos escrever

$$\Omega_\beta = \left\{ (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_0 < 0 \text{ e } -\beta_0^2/16 < \beta_1 < 0 \right\},$$

$$\Omega_\xi = \left\{ (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_0 > 0 \text{ e } 0 < \xi_1 < \xi_0^2/4(D-2) \right\}.$$

Como resultado, verificamos que nessas regiões as massas são ordenadas como se segue

$$m_{2+}^2 > m_{2-}^2 \text{ e } m_{0+}^2 > m_{0-}^2. \quad (3.21)$$

Agora, de (2.20) e (3.21), chegamos à conclusão que

$$Res(PS(k))|_{k^2=0} > 0,$$

$$Res(PS(k))|_{k^2=m_{2+}^2} > 0, \quad Res(SP(k))|_{k^2=m_{2-}^2} < 0,$$

$$Res(PS(k))|_{k^2=m_{0+}^2} < 0, \quad Res(SP(k))|_{k^2=m_{0-}^2} > 0.$$

Conseqüentemente, o conteúdo de partículas do modelo é composto por três partículas “saudáveis” e dois fantasmas, o que mostra claramente que a gravitação completa de sexta ordem é não unitária.

Os resultados acima demonstram que os modelos renormalizáveis de gravitação de ordem superior são não unitários.

Capítulo 4

Considerações finais sobre a renormalizabilidade

Verificamos que os modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis possuem um potencial clássico livre de singularidade na origem. Especificamente, os sistemas gravitacionais de quarta ordem em $D=3$ e 4 (modelos completos), e os sistemas de sexta ordem em $D=3, 4$ e 5 .

- Teoria renormalizável \Rightarrow Potencial finito na origem

Consequentemente, modelos que divergem na origem serão não renormalizáveis, conforme visto no sistema de quarta ordem em $D=5$ (completo) e na NMG.

O inverso não é necessariamente verdadeiro, como já visto no modelo de quarta ordem em cinco dimensões, com seus parâmetros ligados pela relação $m_0^2 = 9m_2^2$, que tem um potencial que é livre de singularidade na origem. E apesar disto, é não renormalizável por contagem de potência.

- Potencial finito na origem \Rightarrow Pode ser renormalizável ou não

Considere mais um exemplo com o sistema gravitacional em quatro dimensões de-

finido pela Lagrangeana [17]

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha_0}{2} R^2 + \frac{a_1}{2} R \square R + \frac{b_0}{2} R_{\mu\nu}^2 \right),$$

em que as massas dos modos relacionados aos termos de ordem superior são dados por

$$m_{(0)\pm}^2 = \frac{3a_0 + b_0 \pm \sqrt{(3a_0 + b_0)^2 - 24a_1\kappa^{-2}}}{6a_1},$$

$$m_{(2)}^2 = \frac{4}{|b_0|\kappa^2}. \quad (4.1)$$

Aqui $m_{(2)}$ e $m_{(0)+}$ são excitações fantasmas, enquanto $m_{(0)-}$ é um modo "saudável" [12].

Neste cenário, o potencial é dado por

$$V_4(r) = -\frac{G_4 M}{r} \left[1 - \frac{4}{3} e^{-m_{(2)} r} + \frac{1}{3} \left(\frac{m_{(0)-}^2}{m_{(0)-}^2 - m_{(0)+}^2} e^{-m_{(0)+} r} + \frac{m_{(0)+}^2}{m_{(0)+}^2 - m_{(0)-}^2} e^{-m_{(0)-} r} \right) \right], \quad (4.2)$$

e, como consequência, na região próxima à origem assume a forma

$$V_4(r) \sim G_4 M \left[-\frac{4}{3} m_{(2)} + \frac{1}{3} \frac{m_{(0)+} m_{(0)-} (m_{(0)+} - m_{(0)-})}{m_{(0)+}^2 - m_{(0)-}^2} \right] + \mathcal{O}(r). \quad (4.3)$$

Portanto, o potencial é finito em $r = 0$. No entanto, o modelo em questão é não renormalizável por contagem de potência, o que implica que a finitude do potencial clássico na origem é uma condição necessária, mas certamente não suficiente, para a renormalizabilidade do modelo.

Também confirmamos a premissa geral de que os modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis são não unitários.

Apêndice **A**

Constante de Einstein D-dimensional

Como é bem conhecido, a equação de Poisson D -dimensional pode ser escrita como

$$\nabla_{D-1}^2 \varphi_D(\mathbf{x}) = G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \rho, \quad (\text{A.1})$$

onde ρ é a densidade de massa.

Por outro lado, a métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas é

$$ds^2 = \left[\frac{1 + \frac{1}{2}\varphi_D(\mathbf{x})}{1 - \frac{1}{2}\varphi_D(\mathbf{x})} \right]^2 dt^2 - \left[1 - \frac{1}{2}\varphi_D(\mathbf{x}) \right]^{\frac{4}{D-3}} \times \\ \times \left[(dx^1)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \right]. \quad (\text{A.2})$$

No limite Newtoniano, isto é, longe das distribuições de massa, a métrica anterior assume a forma

$$ds^2 = \left[1 + 2\varphi_D(\mathbf{x}) \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2}{D-3}\varphi_D(\mathbf{x}) \right] \times \\ \times \left[(dx^1)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \right]. \quad (\text{A.3})$$

A partir das equações de Einstein, ou seja, $G_{\mu\nu} = \kappa_D T_{\mu\nu}$, achamos então

$$G_{00} = \kappa_D \rho = \frac{D-2}{D-3} \nabla_{D-1}^2 \varphi_D(\mathbf{x}). \quad (\text{A.4})$$

Portanto, chegamos à conclusão que

$$\kappa_D = \frac{D-2}{D-3} G_D \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \quad (D > 3). \quad (\text{A.5})$$

Em $D = 3$, κ_3 não pode ser relacionado a G_3 . No entanto, para simplificar, κ_3 é usado em geral como símbolo para a constante de Einstein tridimensional, embora não esteja relacionado a G_3 [34].

Apêndice **B**

Algumas integrais relevantes

As integrais relacionadas aos modelos tratados no texto podem ser genericamente escritas como

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} f(|\mathbf{k}|) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{B.1})$$

Agora, tendo em mente que

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} f(|\mathbf{k}|) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-3}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{D-1}{2}} f(x) J_{\frac{D-3}{2}}(xr) dx \quad (D > 2), \quad (\text{ver Ref. 13})$$

onde $x \equiv |\mathbf{k}|$, prontamente encontramos os seguintes resultados

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{D-3}} \int_0^\infty y^{\frac{D-5}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{D-3}} I_D,$$

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{D-3}} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{D-1}{2}}}{y^2 + m^2 r^2} J_{\frac{D-3}{2}}(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{r^{D-3}} \mathcal{I}_D(r).$$

Aqui,

$$I_D \equiv \int_0^\infty y^{\frac{D-5}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(y) dy, \quad (\text{B.2})$$

e

$$\mathcal{I}(r) \equiv \int_0^\infty \frac{y^{\frac{D-1}{2}}}{y^2 + m^2 r^2} J_{\frac{D-3}{2}}(y) dy.$$

Da Referência [37], obtemos

$$I_D = 2^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \quad (D = 4, 5),$$

$$\mathcal{I}_D(r) = (mr)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \quad (D = 3, 4, 5).$$

Portanto,

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{2^{\frac{D-5}{2}}}{r^{D-3}} \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \quad (D = 4, 5),$$

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(mr) \quad (D = 3, 4, 5).$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **363**, 223 (1995).
- [2] E. Tomboulis, arXiv:hep-th/9702146.
- [3] L. Modesto, *Phys. Rev. D* **86**, 044005 (2012).
- [4] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, e A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 031101 (2012).
- [5] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, e R. Turcati, *Int. J. Mod. Phys. D* **22**, 1342015 (2013).
- [6] L. Modesto e L. Rachwal, *Nucl. Phys. B* **869**, 228 (2014).
- [7] L. Modesto, arXiv:14026795.
- [8] C. Bambi, D. Malafarina, A. Marciano, e L. Modesto, *Phys. Lett. B* **734**, 27 (2014).
- [9] I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **744**, 67 (2015).
- [10] V. Frolov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 051102 (2015).
- [11] V. Frolov, A. Zelnikov, e T. de Paula Netto, *JHEP* **1506**, 107 (2015).
- [12] L. Modesto, T. de Paula Netto, e I. L. Shapiro, *JHEP* **1504**, 098 (2015).

- [13] A. Accioly, J. Helayël-Neto, G. Correia, G. Brito, J. de Almeida, e W. Herdy, **Interparticle potencial energy for D-dimensional electromagnetic models from the corresponding scalar ones**, *Phys. Rev. D* **93** 105042 (2016).
- [14] A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, J. de Almeida e W. Herdy, **Relating renormalizability of D-dimensional higher-order electromagnetic and gravitational models to the classical potencial at the origin**, *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750048 (2017).
- [15] A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, e J. de Almeida, *Phys. Rev. D* **95** 084007 (2017).
- [16] A. Accioly, B. L. Giacchini, e I. L. Shapiro, arXiv: 161005856.
- [17] B. L. Giacchini, *Phys. Lett. B* **766**, 306 (2017).
- [18] J. Edholm, A. Koshelev, e A. Mazumdar, arXiv:160401989.
- [19] L. Modesto e I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **755**, 279 (2016).
- [20] L. Modesto, *Nucl. Phys. B* **909**, 279 (2016).
- [21] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [22] K. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978).
- [23] E. Bergshoeff, O. Holm, e P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [24] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 101302 (2009).
- [25] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, e R. Turcati, *Phys. Rev. D* **83**, 104005 (2011).
- [26] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati e B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28**, 225008 (2011).

- [27] I. Oda, *J. High Energy Phys.* **05**, 064 (2009).
- [28] K. Muneyuki e N. Ohta, *Phys. Rev. D* **85**, 101501(R) (2012).
- [29] I. Antoniadis e E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33**, 2756 (1986).
- [30] D. Johnston, *Nucl. Phys. B* **297**, 721 (1988).
- [31] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton, NJ) (2010).
- [32] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, England) (1996).
- [33] L. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, (Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y.) (2005).
- [34] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone e W. Herdy, **Simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity systems**, *Class Quantum Grav* **32** 035021 (2015).
- [35] A. Accioly, A. Azeredo, e H. Mukai, *J. Math. Phys.* **43**, 473 (2002).
- [36] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Pol.* **24**, 734 (1963).
- [37] I. Gradshteyn e I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed. (Academic Press, New York, 1994).
- [38] M. Veltman, em *Methods in Field Theory*, editado por R. Balian e J. Zinn-Justin (World Scientific, Singapore, 1981).
- [39] E. Bergshoeff *et al.*, *Class Quantum Grav* **27**, 235012 (2010).
- [40] İ. Güllü e B. Tekin, *Phys. Rev. D* **80**, 064033 (2009).

Parte II

VIOLAÇÃO DO PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA CLÁSSICO, MAS NÃO DO FRACO, EM EXEMPLOS SEMICLÁSSICOS E QUÂNTICOS

O Princípio de Equivalência (PE) está intrinsecamente ligado à história da teoria da gravitação e desempenhou um papel importante no seu desenvolvimento. Newton considerou esse princípio uma pedra angular da mecânica, ao ponto de dedicar a ele o primeiro parágrafo do famoso *Principia* [1].

O PE tem sido objeto de muitos debates ao longo do tempo [2–15]. Uma questão natural sempre é colocada: qual é a conexão entre o PE e a mecânica quântica? Algumas pessoas acreditam que a mecânica quântica e o chamado Princípio de Equivalência Fraco (WEP, do inglês “weak equivalence principle”) não podem coexistir pacificamente. Na realidade, existe uma certa confusão entre o chamado Princípio de Equivalência Clássico (CEP, do inglês “classical equivalence principle”) da teoria Newtoniana e o WEP. Muitos pesquisadores são levados ao equívoco comum de que eles coincidem mesmo de forma não local (ver por exemplo [16–20]). Parece que estas discussões, nas quais as pessoas têm diferentes pontos de vista, têm sua origem na maneira de tratar os conceitos de *localidade* e *não localidade*.

Como é conhecido, os testes quânticos do PE são radicalmente diferentes dos clássicos, porque as descrições clássicas e quânticas do movimento são fundamentalmente diferentes. Em particular, a universalidade da queda livre (UFF, do inglês “universality of free fall”) possui um significado claro no contexto clássico. Agora, como a UFF e o WEP devem ser entendidos em mecânica quântica é um ponto muito mais sutil. Em geral, é assumido implicitamente que a mecânica quântica é válida no referencial de queda livre associado aos corpos de teste clássicos. No entanto, um problema inevitável em relação aos objetos quânticos é a existência de spins semi-inteiros, que não possuem equivalência clássica. Para as partículas de spin inteiro, o PE pode ser levado em conta através do princípio de acoplamento mínimo (ver seções C.1 e C.3 do Apêndice C); enquanto o procedimento para acoplar um campo de spin 1/2 à gravitação é muito mais complexo e requer o uso de uma representação espinorial do grupo de Lorentz (ver seção C.2 do Apêndice C).

O experimento científico mais citado utilizado para apoiar a idéia de que, pelo menos em alguns casos, a mecânica quântica e o WEP podem ser reconciliados, é o experimento COW [17]. Embora esse teste, como devemos provar, está de acordo com o WEP, ele está em desacordo com o CEP. Outro exemplo de violação quanto-mecânica do CEP, mas não do WEP, é fornecido através da análise da queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito por sua função de onda Ψ .

Ao nível semiclássico, um evento interessante em que o CEP é violado, mas não o WEP, é o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo. Recordamos de antemão que, na teoria de Einstein, o espalhamento de qualquer partícula por um campo gravitacional fraco externo não é dispersiva, o que, obviamente, está de acordo com o WEP. Em outras palavras, o ângulo de deflexão de todas as partículas massivas será exatamente igual. O mesmo é válido para as partículas sem massa. Obviamente, o ângulo de deflexão será diferente se a partícula é massiva ou não.

Sendo assim, uma questão crucial deve então ser colocada: por que estudar a deflexão de partículas quânticas ao nível de árvore no âmbito da gravitação de ordem superior? Não é difícil responder a esta pergunta. A gravitação de ordem superior é o único modelo que é renormalizável juntamente com os seus acoplamentos com a matéria, até agora [21]. No entanto, uma vez que esse sistema é renormalizável, ele é obrigatoriamente não unitário [15, 22]. Chamamos a atenção para o fato de que a ruptura da unitariedade é realmente um problema sério. Felizmente, trataremos apenas da versão linearizada da gravitação de ordem superior, que é estável [23]. A razão pela qual ela não diverge é devido ao “fantasma” não poder ser acelerado, devido à conservação de energia. Outra maneira de ver isso é analisando as soluções de onda livre. Observamos que este modelo não está em desacordo com o resultado encontrado por Thomas Sotiriou e Valerio Faraoni [24]. De fato, apesar de conter um fantasma massivo de spin-2, como afirmado por esses autores, o fantasma aludido não pode causar

problemas [25].

Nosso objetivo principal aqui é mostrar que, em todas as situações descritas acima, o WEP não é violado, mas o CEP é.

Esta parte do trabalho está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 5 analisamos as diversas versões do Princípio de Equivalência, diferenciando-as, e enfatizamos o fato do Princípio de Equivalência Fraco (WEP), da teoria de Einstein, ser um princípio de equivalência local.

Discutimos no Capítulo 6 dois exemplos de violação semiclássica do CEP, mas não do WEP, em um campo gravitacional. Em particular, estudamos:

- O átomo de Bohr gravitacional de Greenberger.
- O espalhamento de diferentes partículas quânticas ao nível de árvore por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo.

Após uma investigação minuciosa de ambos os modelos, chegamos à conclusão de que eles não violam o WEP, mas não estão de acordo com o CEP. No que diz respeito ao segundo exemplo, vale a pena observar que os ângulos de deflexão resultantes dependem do spin e da energia. Além disso, os ângulos de deflexão bem conhecidos (relacionados à partículas massivas e não massivas) preditos pela RG são recuperados através de um processo de limite adequado.

No Capítulo 7 analisamos dois exemplos quânticos em um campo gravitacional constante que violam o CEP, mas não o WEP: o experimento COW e a queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito na mecânica quântica pela função de onda Ψ .

Nossas considerações finais são apresentadas no Capítulo 8.

As longas contas relativas ao cálculo das secções de choque não polarizadas para a deflexão de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo são colocadas no Apêndice C.

Capítulo 5

O Princípio de Equivalência

“Então ocorreu-me o ‘pensamento mais feliz de minha vida’, da seguinte forma. O campo gravitacional tem apenas uma existência relativa ... Porque para um observador em queda livre, a partir do telhado de uma casa, não existe (pelo menos em seus arredores imediatos) nenhum campo gravitacional. De fato, se o observador deixa cair alguns corpos, estes permanecem, em relação um ao outro, em um estado de repouso ou de movimento uniforme, independentemente da sua composição química específica ou natureza física (nesta consideração a resistência do ar é, naturalmente, ignorada). O observador tem o direito de interpretar seu estado como ‘em repouso’.” Assim Einstein recordou mais tarde a origem do seu Princípio de Equivalência, o que o levou à descoberta da Relatividade Geral [26]. Hoje o Princípio de Equivalência é considerado como uma ideia heurística cujo conteúdo central é incorporado automaticamente na Relatividade Geral, de forma apropriada.

5.1 Os diversos Princípios de Equivalência

Antes de prosseguir gostaríamos de discutir o princípio de equivalência no âmbito da gravitação de Newton e de Einstein.

Inicialmente, a discussão sobre o princípio de equivalência acontece inteiramente

no contexto da gravidade Newtoniana. A versão moderna do observador de Einstein, que cai do telhado, pode ser substituída por astronautas em queda livre em um ônibus espacial ao redor da Terra. Os astronautas ficam “sem peso”. Objetos movendo-se livremente dentro do ônibus permanecem em repouso ou em movimento uniforme com relação aos astronautas (desprezando-se a resistência do ar, etc ... como Einstein fez). A partir de um estudo do movimento de tais objetos, ao longo de um curto período de tempo, os astronautas não podem dizer se eles estão em queda livre no campo gravitacional da Terra ou se estão em repouso no espaço vazio longe de qualquer fonte de gravitação. Com efeito, o campo gravitacional desapareceu no referencial de queda livre do ônibus espacial.

Mas o princípio de equivalência teve várias versões ao longo da história. A famosa universalidade da queda livre (UFF) é conhecida como Princípio de Equivalência de Galileu. Afirma que se uma bala de canhão e uma pena são soltos, eles vão cair no chão do laboratório com a mesma aceleração (g), e isto é uma peculiaridade das forças gravitacionais, não compartilhada pelas outras forças, o que é essencial para chegar-se à conclusão sobre a igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial, conhecido como Princípio de Equivalência de Newton (“ $m_i = m_g$ ”). A massa gravitacional de um corpo regido pela atração gravitacional é a mesma massa inercial regida pela lei de movimento. Estes dois Princípios são equivalentes no quadro da referida teoria, e naturalmente descrevem efeitos *não locais*. Um amálgama destes dois princípios define o chamado Princípio de Equivalência Clássico (CEP), pedra angular da gravitação Newtoniana, e que tem um caráter *não local*. Sendo assim, os objetos que caem com a mesma aceleração, caem por causa da igualdade entre as massas gravitacional e inercial. A detecção de uma pequena diferença de aceleração seria suficiente para distinguir a presença de uma atração gravitacional. Esta igualdade não só implica que um campo gravitacional pode ser eliminado por queda livre, mas também que ele pode ser criado pela aceleração.

Então, o Princípio de Equivalência é a ideia de que não existe um experimento que possa distinguir uma aceleração uniforme de um campo gravitacional uniforme. Os dois são totalmente “equivalentes”. Isto não soa matematicamente impreciso? E é. Princípios como este e o Princípio da Relatividade, que fazem declarações sobre as leis da física com antecedência à sua formulação matemática são geralmente assim. Isso não significa que eles não têm conteúdo.

Foi a partir daí que Einstein desenvolveu a Relatividade Geral. E incorporou o Princípio de Equivalência, não mais no contexto de campos gravitacionais, mas no novo contexto da geometria do espaço-tempo, como veremos adiante. No âmbito da gravitação Einsteiniana dois princípios são geralmente considerados: o Princípio de Equivalência Fraco (WEP) e o Princípio de Equivalência de Einstein (EEP, do inglês “Einstein equivalence principle”).

O WEP basicamente afirma que *localmente*

$$\frac{m_G}{m_I} = 1,$$

onde m_G e m_I são respectivamente as massas gravitacional e inercial. Consequentemente, não podemos distinguir localmente entre campos inerciais e gravitacionais por meio de experimentos de ‘corpos em queda livre’.

O EEP, por outro lado, incorpora o *WEP*, a *invariância local de Lorentz* — o resultado de qualquer experimento não gravitacional local é independente da velocidade do referencial de queda livre em que é executado — e a *invariância local de posição* — o resultado de qualquer experimento não gravitacional local é independente de onde e quando é executado [27].

O EEP pode ser considerado, em um sentido mais amplo, como o coração e a alma da teoria da gravitação. Não seria um exagero dizer que se o EEP vale, então a gravitação deve necessariamente ser um fenômeno do ‘espaço-tempo curvo’; em outras palavras, os efeitos da gravitação devem ser equivalentes aos efeitos de viver em um espaço-tempo curvo [27]. O poder do EEP deriva de sua afirmação de que ele se aplica a

todas as leis da física. Como exemplo, se aceitamos o EEP, nós aceitamos também que a luz “cai” em um campo gravitacional com a mesma aceleração que corpos materiais.

Por volta de 1960, Leonard Schiff conjecturou que *toda teoria de gravitação completa e auto-consistente que obedece ao WEP deve também, inevitavelmente, obedecer ao EEP* [28]. Essa suposição é conhecida como conjectura de Schiff. De acordo com ele, a validade do WEP deve garantir a validade da invariância local de Lorentz e de posição, e portanto do EEP. No entanto, uma prova rigorosa da conjectura de Schiff é improvável. De fato, alguns contra-exemplos especiais estão disponíveis na literatura [29–32]. Apesar disso, existem alguns argumentos poderosos de ‘plausibilidade’, tais como a hipótese de conservação de energia [33] e o formalismo $TH\epsilon\mu$ [34], entre outros, que podem ser formulados.

Vale ressaltar que, mesmo no nível clássico, há muitas controvérsias relacionadas ao significado do EEP. Como escreveu John Synge no prefácio do seu conhecido livro [35]: “Sugiro que a parteira seja agora enterrada com honras apropriadas e os fatos do espaço-tempo absoluto enfrentados”.

5.2 O Princípio de Equivalência Fraco da gravitação de Einstein, um princípio de equivalência local

Os referenciais inerciais locais

Na Relatividade Geral, o espaço-tempo é curvo, e seus elementos de linha são definidos em termos dos coeficientes da matriz métrica $g_{\alpha\beta}$. A gravidade então é descrita em termos de espaço-tempo e as equações possuem genericamente a forma Geometria=Distribuição de Matéria. O Princípio de Equivalência Fraco (WEP) sugere que as propriedades locais de curvatura do espaço-tempo devem ser indistinguíveis daquelas

do espaço-tempo plano da Relatividade Especial. Uma expressão concreta desta ideia física é a exigência de que, dada uma métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ em um sistema de coordenadas, em cada ponto P do espaço-tempo seja possível introduzir novas coordenadas x'^{α} tal que

$$g'_{\alpha\beta}(x'_P) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (5.1)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski do espaço-tempo plano e x'_P são as coordenadas de localização do ponto P .

Quão longe se pode ir no uso de transformações de coordenadas para fazer coincidir a métrica com a do espaço-tempo plano? Evidentemente que não é possível encontrar coordenadas em que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ sobre a totalidade de um espaço-tempo curvo. Se fosse possível, o espaço-tempo seria plano. Mas pode-se encontrar coordenadas x'^{α} de tal modo que, no ponto P , a primeira derivada da métrica desapareça:

$$\left. \frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \right|_{x=x_P} \equiv (g'_{\alpha\beta,\gamma})_P = 0, \quad (5.2)$$

Um sistema de coordenadas que satisfaz estas duas condições (5.1) e (5.2) em um ponto P é chamado de *referencial inercial local* no ponto P . É como um referencial inercial do espaço plano, mas somente em uma vizinhança infinitesimal de um único ponto P . É por isso que é chamado de referencial inercial *local*. As equações (5.1) e (5.2) podem ser satisfeitas em qualquer outro ponto, mas em um conjunto diferente de coordenadas.

Os referenciais inerciais locais dão uma expressão à ideia do WEP onde a geometria do espaço-tempo curvo é localmente indistinguível daquela do espaço-tempo plano. Além da geometria, o mesmo princípio sugere que outras leis da física (como aquelas do movimento de partículas, por exemplo) tomam a mesma forma em um referencial inercial local, como o fazem no espaço plano. Isto não é um requisito para uma teoria consistente no espaço curvo, mas serviu como ponto de partida para supor como as conhecidas leis no espaço-tempo plano podiam ser generalizadas para trabalhar no

espaço-tempo curvo [26].

O espaço curvo Riemanniano

A equação básica de movimento para partículas de teste em um espaço-tempo curvo arbitrário tem a forma geral da equação para uma geodésica (tipo tempo), a saber

$$\ddot{x}_\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0, \quad (5.3)$$

Os coeficientes $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, chamados símbolos de Christoffel, são construídos da métrica e suas derivadas primeiras.

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} [g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\beta\delta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}]$$

O segundo termo na equação geodésica (5.3) é a aceleração inercial da partícula. Assim, vemos que acelerações inerciais podem ser descritas de maneira geral pelos símbolos de Christoffel. A partir do Princípio de Equivalência, segue que acelerações gravitacionais também podem ser descritas por eles. Sendo derivados do tensor métrico, fica claro que o tensor métrico desempenha um papel importante no potencial gravitacional. Mais precisamente, os símbolos de Christoffel descrevem, de acordo com o Princípio de Equivalência, a "soma" das acelerações inercial e gravitacional.

No entanto, quando acelerações gravitacionais estão presentes, o espaço não pode ser o espaço-tempo plano de Minkowski. No espaço de Minkowski temos que $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ em toda parte. Não é possível fazer desaparecer os símbolos de Christoffel em toda parte.

Como vimos, em um referencial inercial local, as coordenadas são centradas em um ponto P no espaço-tempo em que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ no ponto e as derivadas primeiras da métrica desaparecem (5.2). Nestas coordenadas, os símbolos de Christoffel desaparecem em P ,

$$(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_P = 0$$

e a equação geodésica (5.3) toma a mesma forma que para uma partícula livre no espaço plano:

$$\ddot{x}_\alpha = 0.$$

No entanto, não é possível encontrar coordenadas que fazem todas as derivadas segundas da métrica desaparecer em um ponto para um espaço-tempo curvo geral. Logo,

$$(\dot{g}'_{\alpha\beta,\gamma\delta})_P \neq 0 \quad \text{ou} \quad (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta})_P \neq 0,$$

o que implica na própria definição de localidade, onde $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ desaparece em P , mas não nas proximidades.

O sistema conhecido como coordenadas normais de Riemann define um referencial inercial local onde os símbolos de Christoffel desaparecem somente em um ponto P . Este é o significado das chamadas coordenadas geodésicas, um sistema de coordenadas que é *localmente* Minkowskiano [36]. A existência de referenciais inerciais locais é meramente a afirmação de que espaços curvos tem um espaço “tangente” plano a ele em um determinado ponto.

Portanto, para uma determinada aproximação, na medida em que o referencial torna-se pequeno, partículas livres movem-se, por um momento, em linhas retas. Nestas coordenadas temos, portanto, os análogos de referenciais inerciais na mecânica newtoniana. Mas somente de forma local, no ponto. Daí o entendimento sobre o WEP ser um “princípio de equivalência local”. Chamamos a atenção para o fato de que o WEP é localmente idêntico ao Princípio de Equivalência Clássico (CEP). É talvez essa igualdade local dos dois princípios que levou alguns autores [16–20] a afirmar que é impossível uma coexistência pacífica entre a mecânica quântica e o WEP. No entanto, como nós veremos mais adiante, esta afirmação é falsa.

Sendo assim, quando o campo gravitacional está presente, o espaço será necessariamente um espaço curvo Riemanniano. O campo gravitacional então aparece sim-

plesmente como a expressão do fato de estarmos em um espaço Riemanniano curvo e não mais no espaço plano de Minkowski. Por isso dizemos que na Relatividade Geral o campo gravitacional pode ser reduzido à geometria, ou *geometrizado*.

Um imediata consequência disso é a não existência de referenciais inerciais na Relatividade Geral. De fato, um referencial inercial, por definição, é onde as acelerações inerciais desaparecem, e conseqüentemente, as acelerações gravitacionais deveriam ser separadas das inerciais, em contradição ao Princípio de Equivalência. Somente no caso de campos gravitacionais fracos seria possível reintroduzir referenciais inerciais da Relatividade Especial, como uma primeira aproximação [37].

Capítulo 6

Violações semiclássicas do CEP, mas não do WEP

Analisaremos cuidadosamente duas violações semiclássicas do Princípio de Equivalência Clássico (CEP) em um campo gravitacional, mas não do Princípio de Equivalência Fraco (WEP). A saber, o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger e o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior externo fraco.

6.1 O átomo de Bohr gravitacional de Greenberger

Até onde sabemos, Daniel Greenberger [16] foi o primeiro a prever a existência de efeitos de interferência dependentes da massa relacionados a uma partícula ligada a um campo gravitacional externo.

Aqui estamos particularmente interessados em analisar o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger, que do ponto de vista clássico consiste em uma pequena massa m ligada a uma massa muito maior M pelo potencial $V(r) = -\frac{GMm}{r}$, no limite onde todos os efeitos de recuo possam ser negligenciados. Se nos restringirmos às órbitas circulares, chegamos à conclusão que classicamente $\omega^2 r^3 = GM$ (ver Figura 6.1).

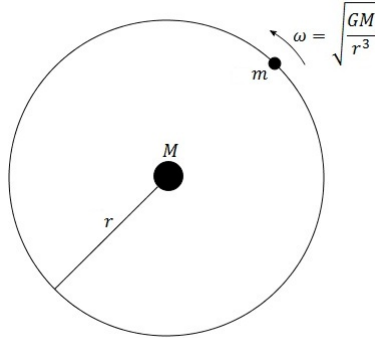


Figura 6.1: Átomo de Bohr gravitacional de Greenberger com órbita circular.

A partir daí, Greenberger aplicou o mesmo postulado proposto por Bohr: ‘As partículas movem-se em órbitas restritas pela exigência de que o momento angular seja um múltiplo inteiro de \hbar ’. Portanto, de acordo com este postulado, para órbitas circulares de raio r , os possíveis valores de r estão restritos à $L = mr^2\omega = n$ (uma vez que estamos empregando unidades naturais, $\hbar = 1$), de modo que

$$\omega_n = \frac{(GM)^2 m^3}{n^3}, \quad r_n = \frac{n^2}{GMm^2}, \quad E_n = \frac{(GM)^2 m^3}{2n^2}. \quad (6.1)$$

Das equações acima vemos que o menor raio de Bohr varia com $\frac{1}{m^2}$, e a velocidade angular (consequentemente a frequência orbital) com m^3 . Como consequência, seria trivial determinar a massa da partícula orbitante meramente pela observação de seu raio. Este resultado, obviamente, está em contradição com o que se espera da gravitação Newtoniana e do CEP. No entanto, não existe nenhum conflito entre este resultado e o WEP. De fato, o WEP, como já tínhamos mencionado, é uma afirmação puramente local, enquanto que o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger é um objeto que tem extensão espacial. Note, no entanto, que o átomo de Bohr gravitacional não é um sistema totalmente quântico, mas apenas semiquântico ou semiclássico, exatamente como acontece com o modelo original do átomo de Bohr, onde, de acordo com o postulado acima mencionado, o objeto em órbita tem uma trajetória bem definida e além disso

existe a suposição adicional *ad hoc* da quantização do momento angular. Em um tratamento totalmente quanto-mecânico, uma probabilidade da presença é obtida através da função de onda, o “princípio da incerteza”, que expressa a ligação entre a largura da função de onda mencionada nos espaços direto e recíproco.

6.2 Espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo

A ação para a gravitação de ordem superior pode ser escrita como

$$I = \int \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right] - I_M, \quad (6.2)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, com G sendo a constante de Newton, α e β são coeficientes adimensionais livres, e I_M é a ação da matéria.

A variação da ação anterior com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ conduz às equações de campo relacionadas com a Gravitação de Ordem Superior (GOS) clássica. Executando a variação, prontamente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\lambda}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] + \\ + \frac{\alpha}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{1}{2} \Theta_{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

onde $\Theta_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

Na aproximação de campo fraco, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, as equações de campo anteriores reduzem-se a

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square \right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6\kappa} R^{(\text{lin})} \eta_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad (6.3)$$

onde

$$R^{(\text{lin})} = \frac{\kappa}{2} \square h - \kappa \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \\ \Gamma_\mu &\equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\kappa}{2}R^{(\text{lin})}{}_{,\mu}.\end{aligned}$$

Aqui os índices são levantados (abaixados) com $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$), e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da relatividade especial.

A Equação (6.3) é invariante sob a transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \kappa\Lambda^\mu(x)$, que deve ser infinitesimal para evitar inconsistência com a equação $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$. Sob essa transformação,

$$\begin{aligned}h_{\mu\nu} &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}), \\ \gamma_{\mu\nu} &\rightarrow \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - (\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\Lambda^\lambda{}_{,\lambda}), \\ R^{(\text{lin})} &\rightarrow \bar{R}^{(\text{lin})} = R^{(\text{lin})}, \\ \Gamma_\mu &\rightarrow \bar{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu - \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Pode-se mostrar que é sempre possível escolher um sistema de coordenadas de tal modo que as condições de *gauge*, $\Gamma_\mu = 0$, na métrica linearizada se mantenham [38]. Logo, o gauge de Teysandier é definido pela condição subsidiária $\Gamma_\mu = 0$ sobre os potenciais. Vamos então mostrar como podemos realizar este gauge assumindo que inicialmente $\Gamma_\mu \neq 0$. Um breve olhar em (6.4) claramente mostra que a condição para o desaparecimento de $\bar{\Gamma}_\mu$ pode ser alcançado pela escolha $\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu$. Supondo agora que esta condição é satisfeita, a solução geral da equação (6.3) é dada pela soma algébrica [39, 40]

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(\text{E})} - \phi\eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu},\tag{6.5}$$

onde $h_{\mu\nu}^{(\text{E})}$ é solução das equações de Einstein linearizadas no gauge de de Donder, isto é,

$$\square h_{\mu\nu}^{(\text{E})} = \frac{\kappa}{2}\left[\frac{T\eta_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu}\right], \quad \gamma_{\mu\nu}^{(\text{E})}{}^{,\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu\nu}^{(\text{E})} \equiv h_{\mu\nu}^{(\text{E})} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(\text{E})},\tag{6.6}$$

onde ϕ e $\psi_{\mu\nu}$ satisfazem, respectivamente, as equações

$$\left(\square + m_0^2\right)\phi = \frac{\kappa T}{12}, \quad \left(\square + m_2^2\right)\psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu}\right], \quad \square\psi = \psi_{\mu\nu}{}^{;\mu\nu}. \quad (6.7)$$

É interessante notar que neste *gauge* muito especial, as equações para $\psi_{\mu\nu}$, ϕ , e $h_{\mu\nu}^{(E)}$ são totalmente desacopladas. Como resultado, a solução geral para as equações de campo linearizadas reduz-se a uma soma algébrica de soluções das equações relacionadas aos três campos mencionados.

Nós agora estamos prontos para encontrar a solução geral das equações de campo da GOS linearizada originadas por uma partícula pontual de massa M localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Tendo em conta que o tensor de energia-momento correspondente é dado por $T_{\mu\nu} = M\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\delta^3(\mathbf{r})$, prontamente obtemos

$$h_{\mu\nu}(r) = h_{\mu\nu}^{(E)}(r) + h_{\mu\nu}^{(R^2)}(r) + h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}(r), \quad (6.8)$$

com

$$h_{\mu\nu}^{(E)}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi}\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{r} - \frac{2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}}{r}\right],$$

$$h_{\mu\nu}^{(R^2)}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi}\left[-\frac{1}{3}\frac{e^{-m_0 r}}{r}\eta_{\mu\nu}\right],$$

$$h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi}\left[-\frac{2}{3}\frac{e^{-m_2 r}}{r}\eta_{\mu\nu} + 2\frac{e^{-m_2 r}}{r}\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\right].$$

Nota-se que para $m_0, m_2 \rightarrow \infty$, a solução acima reproduz a solução das equações de campo de Einstein linearizadas no *gauge* de de Donder, como deveria ser.

Por outro lado, o campo gravitacional fraco externo, no espaço dos momentos, nominalmente $h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k})$, é definido por

$$h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{r}). \quad (6.9)$$

Assim,

$$h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) = h_{\text{ext}}^{(\text{E})\lambda\rho}(\mathbf{k}) + h_{\text{ext}}^{(\text{R}_{\mu\nu}^2)\lambda\rho}(\mathbf{k}) + h_{\text{ext}}^{(\text{R}^2)\lambda\rho}(\mathbf{k}), \quad (6.10)$$

com

$$h_{\text{ext}}^{(\text{E})\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{4\mathbf{k}^2} \eta^{\mu\nu} - \frac{\kappa M}{2} \frac{\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}}{\mathbf{k}^2},$$

$$h_{\text{ext}}^{(\text{R}_{\alpha\beta}^2)\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa M}{6} \frac{\eta^{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} + \frac{\kappa M}{2} \frac{\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}}{\mathbf{k}^2 + m_2^2},$$

$$h_{\text{ext}}^{(\text{R}^2)\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa M}{12} \frac{\eta^{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2}.$$

Agora, estamos prontos para calcular o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo. No entanto, uma vez que estes cálculos são muito extensos, foram colocados no Apêndice C.

O resultado dos experimentos analisados no Apêndice C estão resumidos na Tabela 6.1 [41]. Um olhar nessa tabela é suficiente para nos convencer que as seções de choque diferenciais não polarizadas e, claro, os ângulos de deflexão, dependem do spin e da energia da partícula espalhada. Lembramos que as constantes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2, E_0, E_1, E_2, A'_0, A'_1, A'_2, B'_0, B'_1, B'_2, C'_0, C'_1, C'_2, E'_0, E'_1,$ e E'_2 também estão definidas no Apêndice C.

Tendo em mente que qualquer experimento realizado para testar o desvio das partículas quânticas requer o conhecimento do ângulo de deflexão gravitacional, que, é claro, é um objeto estendido, chegamos à conclusão de que esses resultados podem ser interpretados corretamente como uma violação do CEP (que é não local), mas não do WEP (que é local).

Uma questão importante deve ser levantada agora: é possível recuperar os ângulos de deflexão ao nível de árvore relacionados à relatividade geral a partir da Tabela 6.1?

Tabela 6.1: Seções de choque diferenciais não polarizadas para o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo, onde θ é o ângulo de espalhamento.

m	s	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$
0	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - 3}{3(1 + \frac{\lambda_2}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2})} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{3(1 + \frac{\lambda_0}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2})}\right)^2$
$\neq 0$	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - (3+2\lambda)}{3(1 + \frac{\lambda_2}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2})} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\lambda}{2}}{3(1 + \frac{\lambda_0}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2})}\right)^2$
0	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$
$\neq 0$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \sum_{n=0}^2 \left[\frac{E_n \lambda^n}{4} + \frac{A_n \lambda^n}{9(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{B_n \lambda^n}{9(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{C_n \lambda^n}{9(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})} \right]$
0	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{4} \csc^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$
$\neq 0$	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \sum_{n=0}^2 \left[\frac{E'_n \lambda^n}{12} + \frac{A'_n \lambda^n}{27(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{B'_n \lambda^n}{27(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{C'_n \lambda^n}{27(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})} \right]$

A resposta é afirmativa. De fato, no limite $\lambda_2, \lambda_0 \rightarrow \infty$, a Tabela 6.1 é reduzida à Tabela 6.2.

É digno de nota que as seções de choque diferenciais não polarizadas apresentadas na Tabela 6.2, bem como os ângulos de deflexão correspondentes, são dependentes do spin. Além disso, para as partículas massivas, o desvio também continua dependendo da energia.

Por que o campo gravitacional de Einstein percebe o spin? Porque existe a pre-

Tabela 6.2: Seções de choque diferenciais não polarizadas ao nível de árvore para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional Einsteiniano fraco externo.

m	s	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$
0	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$
$\neq 0$	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$
0	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \lambda + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$
0	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^4 \frac{\theta}{2} - \frac{\lambda}{3} \left(1 - \frac{3\lambda}{4} - 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$

sença do momento de transferência \mathbf{k} no espalhamento responsável pela sondagem da estrutura interna (spin) da partícula. Conseqüentemente, os resultados geométricos de Einstein são recuperados quando $\mathbf{k} \rightarrow 0$. Ou seja, no limite não trivial de um momento de transferência pequeno, o que corresponde a um limite não trivial de ângulo pequeno, já que $|\mathbf{k}| = 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\theta}{2}$, as partículas massivas (não massivas) se comportam da mesma maneira, independentemente do spin. De fato, se o spin é ‘desligado’, encontramos a

partir da Tabela 6.2 que para $m = 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{16G^2 M^2}{\theta^4}, \quad (6.11)$$

enquanto que para $m \neq 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{16G^2 M^2}{\theta^4} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2. \quad (6.12)$$

Essas seções de choque diferenciais podem ser relacionadas à trajetória clássica com parâmetro de impacto b através das relações $bdb \sim -\frac{d\sigma}{d\Omega}\theta d\theta$. Como resultado, concluímos que para $m = 0$

$$\theta \sim \frac{4GM}{b}, \quad (6.13)$$

e para $m \neq 0$,

$$\theta \sim \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right). \quad (6.14)$$

A primeira equação dá o ângulo de deflexão gravitacional para uma partícula clássica sem massa — um resultado previsto por Einstein há muito tempo; enquanto a última apenas dá a predição da relatividade geral para o desvio de uma partícula massiva por um campo gravitacional fraco externo [42]. Os resultados da Tabela 6.2, em resumo, reproduzem para pequenos ângulos aqueles preditos pela teoria geométrica de Einstein, confirmando assim a precisão de nossos cálculos analíticos. Note que desde que $\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{1-\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2}$, com \mathbf{v} sendo a velocidade da partícula que entra, a Equação (6.14) nos diz que para $|\mathbf{v}| \ll 1$, $\theta \rightarrow \frac{2GM}{b\mathbf{v}^2}$, que não é nada além da previsão de Newton para o ângulo de deflexão gravitacional. Esta equação reproduz também a Equação (6.13) no limite $|\mathbf{v}| \rightarrow 1$. Curiosamente, uma vez que $\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{m^2}{E^2 - m^2}$, para $\frac{m}{E} \ll 1$ a Equação (6.14) leva ao resultado

$$\theta \sim \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{m^2}{2E^2}\right), \quad (6.15)$$

que foi recentemente utilizado para encontrar um limite superior na massa do fóton [43–45].

Violações do CEP, mas não do WEP, ao nível quântico

Analisaremos em detalhes dois exemplos quânticos de violação do Princípio de Equivalência Clássico (CEP), mas não do Princípio de Equivalência Fraco (WEP), no campo gravitacional da Terra. A saber, o experimento COW e a queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito pela sua função de onda Ψ .

7.1 O experimento COW

Em meados da década de 1970, alguns anos após o artigo de Greenberger ter sido publicado, usando um interferômetro de nêutrons, Colella, Overhauser e Werner [17] analisaram o deslocamento de fase quanto-mecânico de um nêutron causado pela sua interação com o campo gravitacional da Terra. Vamos então obter o mencionado deslocamento de fase. Para realizar esta tarefa, faremos uso de uma abordagem de deslocamento de fase não integrável para a gravitação construída utilizando a similaridade da gravitação teleparalela com o eletromagnetismo [46].

O eletromagnetismo, como é bem conhecido, possui além do formalismo diferencial

usual, uma formulação *global* em termos de fator de fase não integrável [47]. Consequentemente, pode ser considerado como a ação invariante de gauge de um fator de fase não integrável (dependente do caminho). Como resultado, para uma partícula com carga elétrica e viajando de um ponto inicial P para um ponto final Q , o fator de fase assume a forma

$$\Phi_e(P|Q) = \exp \left[ie \int_P^Q A_\mu dx^\mu \right], \quad (7.1)$$

onde A_μ é o potencial de gauge eletromagnético. Observa que o fator de fase eletromagnético pode também ser escrito como

$$\Phi_e(P|Q) = \exp [iS_e], \quad (7.2)$$

onde S_e é a ação integral que descreve a interação da partícula carregada com o campo eletromagnético.

Agora, na abordagem da gravitação teleparalela, o campo fundamental que descreve a gravitação é o potencial de gauge translacional $B^a{}_\mu$. Consequentemente, a ação integral relativa a interação de uma partícula de massa m com um campo gravitacional é dada por [48]

$$S_g = \int_P^Q m B^a{}_\mu u_a dx^\mu. \quad (7.3)$$

Então, o correspondente fator de fase não integrável gravitacional acaba por ser

$$\Phi_g(P|Q) = \exp \left[im \int_P^Q B^a{}_\mu u_a dx^\mu \right]. \quad (7.4)$$

Vale mencionar que, semelhantemente ao fator de fase eletromagnético, representa a lei *quanto-mecânico* que substitui a equação de força de Lorentz gravitacional *clássica* [49].

Tendo em mente que um campo gravitacional Newtoniano é caracterizado pela condição em que apenas $B^0{}_0 \neq 0$, e levando em conta que $u^0 = \gamma \simeq 1$ para nêutrons térmicos, o fator de fase gravitacional torna-se

$$\Phi_g(P|Q) = \exp \left[im \int_P^Q B_{00} dt \right]. \quad (7.5)$$

Na aproximação Newtoniana, a expressão acima se reduz a

$$\Phi_g(P|Q) = \exp \left[img \int_P^Q z(t) dt \right] \equiv \exp i\phi, \quad (7.6)$$

onde g é a aceleração gravitacional e z é a distância a partir Terra tomada de algum ponto de referência.

Agora estamos prontos a calcular a fase ϕ através das duas trajetórias da Figura 7.1, supondo que o segmento AC está em $z = 0$. Para a trajetória ACD obtemos prontamente

$$\phi_{ACD} = mg \int_C^D z(t) dt. \quad (7.7)$$

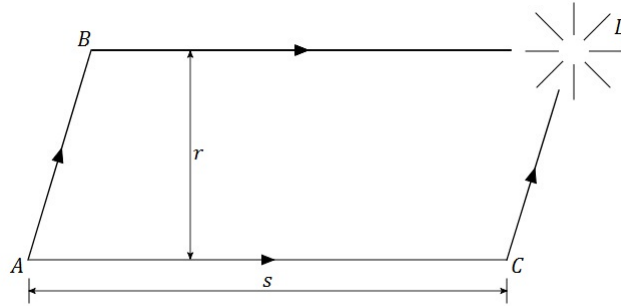


Figura 7.1: Experimento para detectar interferência quântica induzida pela gravidade.

A trajetória ABD dá por sua vez

$$\phi_{ABD} = mg \int_A^B z(t) dt + mgr \int_B^D dt. \quad (7.8)$$

Tendo em mente que a velocidade do nêutron é constante ao longo do segmento BD, encontramos

$$\int_B^D dt \equiv \frac{s}{v} = \frac{sm\lambda}{2\pi} \quad (7.9)$$

onde $\lambda = \frac{2\pi}{mv}$ é o comprimento de de Broglie relacionado ao nêutron.

Portanto,

$$\Delta\phi = \phi_{ABD} - \phi_{ACD} = \frac{rsg\lambda m^2}{2\pi}. \quad (7.10)$$

Então, chegamos à conclusão que o deslocamento de fase obtido no experimento COW depende da massa do nêutron. Este notável experimento mostra uma divergência entre o CEP e a mecânica quântica. Observe, no entanto, que o deslocamento de fase COW entre os dois caminhos dos nêutrons nos quais estas partículas estão se movendo em alturas diferentes em um campo gravitacional, depende da área (macroscópica) do quadrilátero formado pela trajetória dos caminhos seguidos pelo nêutron, sendo como consequência um efeito não local. Portanto, o experimento COW não viola o WEP.

Chamamos a atenção para o fato de que experimentos mais recentes e mais precisos foram realizados desde o experimento COW (1975) para testar o WEP em sistemas microscópicos através da interferometria de átomos [50, 51]. Novamente, esses experimentos estão de acordo com o WEP (são não locais), mas não concordam com o CEP.

7.2 Queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito por sua função de onda Ψ

Considere agora o interessante, mas simples, caso de queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo quanto-mecânico descrito por sua função de onda Ψ [52]. Vamos supor que a função de onda seja inicialmente Gaussiana.

Neste caso, a equação de Schrödinger deve ser satisfeita com o Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz. \quad (7.11)$$

O tempo de vôo da partícula pode ser calculado a partir de alguma posição inicial z_0 até $z = 0$, onde a posição inicial é determinada pelo valor esperado $z_0 = \langle \Psi_0 | z | \Psi_0 \rangle$ da posição no estado inicial Gaussiano Ψ_0 . Agora, embora o tempo de voo seja distribuído estaticamente com o valor médio concordando com o valor universal clássico

$$T = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}, \quad (7.12)$$

o desvio padrão dos valores medidos do tempo de vôo em torno de T depende da massa da partícula

$$\sigma = \frac{2\pi}{\Delta_0 mg}, \quad (7.13)$$

sendo Δ_0 a largura do pacote de onda Gaussiano inicial.

Portanto, chegamos à conclusão de que, neste sentido, o movimento quântico da partícula não é universal, pois depende do valor de sua massa, o que naturalmente viola o CEP, mas não o WEP (o objeto é descrição pela função de onda, sendo assim estendido no espaço).

Considerações finais sobre a violação do CEP, mas não do WEP

Dois exemplos semiclássicos que violam o CEP, mas não o WEP, em um campo gravitacional externo, foram discutidos de um ponto de vista teórico: o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger e o espalhamento ao nível da árvore de diferentes partículas quânticas devido a um campo gravitacional de ordem superior fraco externo. Neste último caso, o espalhamento é dependente do spin e da energia da partícula espalhada. Analisamos também um experimento semelhante ao que acabamos de descrever, onde o campo gravitacional de ordem superior fraco externo é substituído por um campo gravitacional Einsteiniano fraco externo que também viola o CEP, mas não o WEP.

Dois exemplos quânticos, que também concordam com o WEP, mas não estão de acordo com o CEP, foram analisados posteriormente: o experimento COW e a queda livre em um campo gravitacional constante de um objeto massivo descrito por sua função de onda Ψ .

No entanto, entre os quatro exemplos estudados neste trabalho, apenas um é baseado em um teste experimental: o experimento COW. Por esta razão, iremos elaborar um pouco mais sobre o teste acima mencionado. Embora o experimento COW tenha

sido conduzido em 1975, uma versão mais precisa do mesmo foi realizada em 1997 [53], e seus autores relataram que, nesta experiência, o deslocamento de fase induzido gravitacionalmente do nêutron foi medido com uma incerteza estatística da ordem de 1 parte em 1000, em dois interferômetros diferentes. Uma discrepância entre o valor medido experimentalmente e o teoricamente previsto do deslocamento de fase devido à gravidade também foi observada no nível de 1 %. Foram discutidas extensões à descrição teórica na forma de um interferograma de nêutrons em função da inclinação em um campo gravitacional e comparadas com o experimento. Vale ressaltar que experiências passadas verificaram a equivalência quanto-mecânica entre massas gravitacionais e inerciais com uma precisão de cerca de 1 %.

Chamamos a atenção para o fato de que um deslocamento de fase da forma dada na Equação (7.10) seria previsto para uma partícula quanto-mecânica na presença de qualquer potencial escalar; no nosso caso é o potencial gravitacional Newtoniano. Para descrever completamente este efeito, precisamos apenas da mecânica quântica e da teoria de Newton. Portanto, nenhuma descrição métrica da gravidade é necessária. Esse fenômeno, é claro, é inexplicável pela gravidade clássica de Newton. Indubitavelmente, o experimento COW representa a primeira evidência da gravidade interagindo de uma maneira verdadeiramente quanto-mecânica. No entanto, do ponto de vista da teoria quântica, esse efeito é bem entendido como um efeito Aharonov-Bohm escalar e se manifesta de forma semelhante para cargas elétricas em potenciais elétricos [54, 55].

Assim, chegamos à conclusão de que não violamos o WEP, quer por meio de exemplos semiclássicos, ou de exemplos da mecânica quântica realizados em um campo gravitacional. A razão para isso não é muito complicada. O WEP é uma afirmação *local*, enquanto que os exemplos semiclássicos ou quanto-mecânicos, em um campo gravitacional, são *não locais*.

Por que algumas pessoas acreditam que é possível violar o WEP? Como já comentamos, essa idéia errada decorre da maneira como lidam com os conceitos de localidade

e não-localidade, o que os leva a confundir o WEP (declaração local) com o CEP (declaração não-local). Isso pode ser facilmente confirmado, por exemplo, pela maneira como a classe de experimentos COW é analisada por diferentes pessoas. Alguns deles interpretam a discrepância entre a experiência e a teoria, atribuindo isto a uma possível diferença entre as formas em que a gravidade atua de forma clássica e quântica [53], como uma violação do WEP. Esta interpretação é completamente errada, uma vez que estas experiências não são locais e conseqüentemente podem violar o CEP, mas não o WEP. Outras pessoas, por sua vez, felizmente maiores em número do que aqueles a que nos referimos, interpretaram corretamente o resultado dessas experiências.

Apêndice **C**

Seções de choque diferenciais não polarizadas para o espalhamento ao nível de árvore de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo

C.1 Partículas de spin-0

A Lagrangeana para um campo escalar massivo minimamente acoplado à gravitação pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2), \quad (\text{C.1})$$

e leva à primeira ordem em k ao seguinte Lagrangeano de interação de um campo escalar com um campo gravitacional fraco

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right].$$

A partir do Lagrangeano precedente obtemos prontamente o vértice do processo representado na Figura C.1

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \left[p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - \eta_{\mu\nu} (p \cdot q - m^2) \right],$$

onde o campo externo é um campo gravitacional fraco de ordem superior.

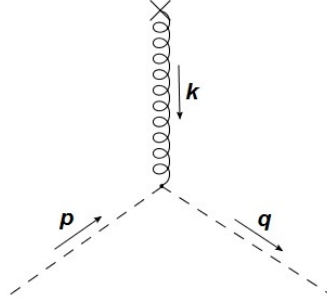


Figura C.1: Diagrama de Feynman para a interação entre uma partícula de spin-0 e um campo gravitacional fraco externo.

Agora, a seção de choque diferencial para o processo acima é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(4\pi)^2}, \quad (\text{C.2})$$

onde a amplitude de Feynman \mathcal{M} coincide com $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Consequentemente, a seção de choque diferencial para o espalhamento ao nível de árvore de uma partícula massiva de spin-0 por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo assume a forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - (3 + 2\lambda)}{3(1 + \frac{1}{4}\lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})} + \frac{\frac{1}{2}\lambda - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{3(1 + \frac{1}{4}\lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})} \right]^2, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{m_2^2}{\mathbf{p}^2}, \quad \lambda_0 \equiv \frac{m_0^2}{\mathbf{p}^2}. \quad (\text{C.4})$$

Agora, uma vez que, no caso das partículas massivas, $E^2 = \mathbf{p}^2(1 + \lambda)$, onde E é a energia da partícula, λ_2 e λ_0 podem ser escritos como

$$\lambda_2 = \frac{(1 + \lambda)m_2^2}{E^2}, \quad \lambda_0 = \frac{(1 + \lambda)m_0^2}{E^2}, \quad (\text{C.5})$$

o que mostra claramente que todos os parâmetros na Equação (C.4) são dependentes da energia.

No limite $m \rightarrow 0$, obtemos a seção de choque diferencial para o espalhamento ao nível de árvore de um bóson não massivo de spin-0 por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 \left[1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - 3}{3(1 + \frac{1}{4}\lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})} - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{3(1 + \frac{1}{4}\lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})} \right]^2. \quad (\text{C.6})$$

Note que, quando $m = 0$, $\lambda_2 = \frac{m_2^2}{E^2}$ e $\lambda_0 = \frac{m_0^2}{E^2}$. Aqui estamos usando os mesmos símbolos para denotar os parâmetros λ_2 e λ_0 como os utilizados para o caso massivo, pois seu significado é bastante claro a partir do contexto. Portanto, a partir de agora, estes símbolos serão utilizados tanto para partículas massivas como para partículas sem massa.

C.2 Partículas de spin-1/2

Como é bem conhecido, a Lagrangeana gravitacional para um férmion massivo é dado por [56]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \bar{\psi} \nabla_\mu \gamma^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (\text{C.7})$$

com a notação

$$\gamma^\mu = \gamma^p e_p^\mu, \quad \nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i w_\mu \psi, \quad \bar{\psi} \nabla_\mu = \partial_\mu \bar{\psi} - i \bar{\psi} w_\mu.$$

Aqui, $e_n^\nu \equiv \eta_{mn} g^{\mu\nu} e_\mu^m(x)$ é um tipo diferente de tetrada onde o índice m é abaixado com a métrica de Minkowski η_{mn} , enquanto o índice μ é levantado com $g^{\mu\nu}$. A conexão

de campo $w_\mu(x)$ é expressa em termos das tetradas como

$$w_\mu(x) = \frac{1}{4}\sigma^{mn}\left[e_m^\nu\left(\partial_\mu e_{n\nu} - \partial_\nu e_{n\mu}\right) + \frac{1}{2}e_m^\rho e_n^\sigma\left(\partial_\sigma e_{l\rho} - \partial_\rho e_{l\sigma}\right)e_\mu^l - (m \leftrightarrow n)\right],$$

onde as matrizes de Dirac são denotadas por γ^n , e $\sigma^{mn} = \frac{i}{2}[\gamma^m, \gamma^n]$.

Tendo em mente que para a ordem k [57]

$$e_\mu^m = \delta_\mu^m + \frac{\kappa}{2}h_\mu^m + \mathcal{O}(k^2), \quad (\text{C.8})$$

nós encontramos que dentro desta aproximação a Lagrangeana para a interação de um férmion com um campo gravitacional fraco tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -\frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}\left\{\frac{i}{2}\left[(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \partial^\nu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \right. \right. \\ & \left. \left. -\eta^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)\right] + \eta^{\mu\nu}m\bar{\psi}\psi\right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Segue-se que o vértice para o processo mostrado na Figura C.2 é

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\kappa}{8}h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})\left[2\eta_{\mu\nu}(\not{p} + \not{q} - 2m) - \gamma_\mu(p + q)_\nu - (p + q)_\mu\gamma_\nu\right], \quad (\text{C.10})$$

onde $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$ é dado por (6.10).

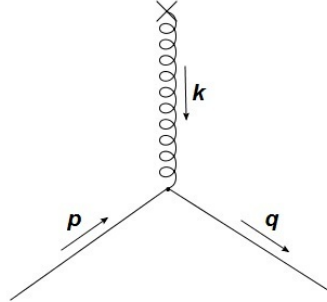


Figura C.2: Diagrama para a interação de um férmion com um campo gravitacional fraco externo.

A seção de choque diferencial não polarizada para o processo em mãos, por sua vez, é dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2m)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_{r',r} \left| \mathcal{M}_{r',r} \right|^2, \quad (\text{C.11})$$

onde

$$\mathcal{M}_{r',r} = \bar{u}_{r'}(\mathbf{q}) V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) u_r(\mathbf{p}).$$

Tendo em conta a relação

$$\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad (\text{C.12})$$

verificamos que a seção de choque diferencial não polarizada relativa ao espalhamento de um férmion massivo por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo é

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \sum_{n=0}^2 \left[\frac{E_n(\lambda)^n}{4} + \frac{A_n(\lambda)^n}{9(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \right. \\ & \left. + \frac{B_n(\lambda)^n}{9(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{C_n(\lambda)^n}{9(4 + \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2})(4 + \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2})} \right], \end{aligned}$$

onde

$$E_0 = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad E_1 = 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1, \quad E_2 = 1;$$

$$A_0 = -(72 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2} - 144 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$A_1 = -(60 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2} - 24 \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2} - 112 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 32,$$

$$A_2 = -24 \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2} - 32;$$

$$B_0 = 0,$$

$$B_1 = (6 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2} + 6 \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2} + 20 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 28,$$

$$B_2 = 6 \lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2} + 28;$$

$$C_0 = 0, \quad C_1 = -16 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 32, \quad C_2 = -32.$$

No limite $m \rightarrow 0$, obtemos a seção de choque diferencial para um férmion não massivo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2. \quad (\text{C.13})$$

C.3 Partículas de spin-1

A Lagrangeana gravitacional para um fóton massivo pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right], \quad (\text{C.14})$$

do qual obtemos trivialmente a Lagrangeana para a interação de um fóton massivo com um campo gravitacional fraco

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} + m^2 \left(A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} A_\alpha^2 \right) \right].$$

Conseqüentemente, o vértice para o processo representado na Figura C.3 é dado por

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \left[\left(\eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} \right) (p \cdot q - m^2) - \eta_{\alpha\beta} p_\nu q_\mu + \right. \\ \left. + \eta_{\mu\beta} p_\nu q_\alpha - \eta_{\mu\nu} p_\beta q_\alpha + \eta_{\alpha\nu} p_\beta q_\mu + \eta_{\beta\nu} p_\alpha q_\mu - \eta_{\mu\nu} p_\alpha q_\beta + \eta_{\alpha\mu} p_\nu q_\beta \right],$$

onde o campo externo é um campo gravitacional de ordem superior fraco.

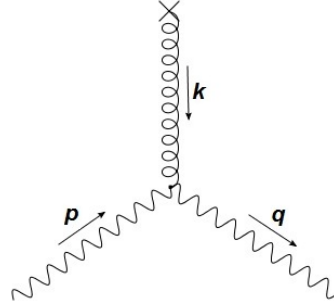


Figura C.3: Diagrama para a interação entre um fóton e um campo gravitacional fraco externo.

Portanto, a seção de choque diferencial não polarizada para o processo acima pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \sum_{r',r} |\mathcal{M}_{r',r}|^2, \quad (\text{C.15})$$

onde

$$\mathcal{M}_{r',r} = \epsilon_{r'}^\alpha(\mathbf{q}) V_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \epsilon_r^\beta(\mathbf{p}). \quad (\text{C.16})$$

Aqui $\epsilon_r^\beta(\mathbf{p})$ e $\epsilon_{r'}^\alpha(\mathbf{q})$ são, respectivamente, as polarizações dos fótons de entrada e de saída.

Agora, tendo em mente que

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}, \quad (\text{C.17})$$

chegamos à conclusão de que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \sum_{n=0}^2 \left[\frac{E'_n(\lambda)^n}{12} + \frac{A'_n(\lambda)^n}{27(4 + \lambda_2 csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{B'_n(\lambda)^n}{27(4 + \lambda_0 csc^2 \frac{\theta}{2})^2} + \frac{C'_n(\lambda)^n}{27(4 + \lambda_2 csc^2 \frac{\theta}{2})(4 + \lambda_0 csc^2 \frac{\theta}{2})} \right],$$

onde

$$E'_0 = 4 + 8 \cos^4 \frac{\theta}{2}, \quad E'_1 = -4 + 16 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad E'_2 = 3;$$

$$A'_0 = -128 - 32 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 272 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 168\lambda_2 + 144\lambda_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 216\lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2},$$

$$A'_1 = 160 - 592 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 324\lambda_2 - 252\lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2},$$

$$A'_2 = -96 - 72\lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2};$$

$$B'_0 = -80 + 64 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 16 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 24\lambda_0,$$

$$B'_1 = 16 + 128 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 36\lambda_0 + 36\lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2},$$

$$B'_2 = 84 + 18\lambda_0 \csc^2 \frac{\theta}{2};$$

$$C'_0 = 64 - 32 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 32 \cos^4 \frac{\theta}{2},$$

$$C'_1 = -32 - 112 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$C'_2 = -96.$$

Por outro lado, a Lagrangeana gravitacional para um fóton não massivo tem a forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.18})$$

e a partir dele encontramos a Lagrangeana para a interação entre um fóton sem massa e um campo gravitacional fraco

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} \right). \quad (\text{C.19})$$

Segue-se que o vértice para a interação de um fóton não massivo com um campo gravitacional de ordem superior fraco externo é

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \left[\left(\eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} \right) p \cdot q - \eta_{\alpha\beta} p_{\nu} q_{\mu} + \right. \\ \left. + \eta_{\mu\beta} p_{\nu} q_{\alpha} - \eta_{\mu\nu} p_{\beta} q_{\alpha} + \eta_{\alpha\nu} p_{\beta} q_{\mu} + \eta_{\beta\nu} p_{\alpha} q_{\mu} - \eta_{\mu\nu} p_{\alpha} q_{\beta} + \eta_{\alpha\mu} p_{\nu} q_{\beta} \right].$$

Agora, a seção de choque diferencial para o processo em discussão pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_{r',r} \left| \mathcal{M}_{r',r} \right|^2, \quad (\text{C.20})$$

onde

$$\mathcal{M}_{r',r} = \epsilon_{r'}^{\alpha}(\mathbf{q}) V_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \epsilon_r^{\beta}(\mathbf{p}). \quad (\text{C.21})$$

Tendo em mente que

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^{\mu}(\mathbf{p}) \epsilon_r^{\nu}(\mathbf{p}) = -\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{(p \cdot n)^2} \left[p^{\mu} p^{\nu} - p \cdot n (p^{\mu} n^{\nu} + p^{\nu} n^{\mu}) \right],$$

onde $n^2 = 1$, chegamos à conclusão de que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \lambda_2 \csc^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2.$$

Referências Bibliográficas

- [1] I. Newton, *Principia - Livro 1*, (EDUSP, São Paulo, Brasil) (2008).
- [2] A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **363**, 223 (1995).
- [3] E. Tomboulis, arXiv:hep-th/9702146.
- [4] L. Modesto, *Phys. Rev. D* **86**, 044005 (2012).
- [5] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, e A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 031101 (2012).
- [6] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, e R. Turcati, *Int. J. Mod. Phys. D* **22**, 1342015 (2013) (menção honrosa em concurso de ensaios em 2013 da Gravity Research Foundation).
- [7] L. Modesto e L. Rachwal, *Nucl. Phys. B* **869**, 228 (2014).
- [8] L. Modesto, arXiv:14026795.
- [9] C. Bambi, D. Malafarina, A. Marciano, e L. Modesto, *Phys. Lett. B* **734**, 27 (2014).
- [10] I. L. Shapiro, *Phys. Lett. B* **744**, 67 (2015).
- [11] V. Frolov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 051102 (2015).

- [12] V. Frolov, A. Zelnikov, e T. de Paula Netto, *JHEP* **1506**, 107 (2015).
- [13] L. Modesto, T. de Paula Netto, e I. L. Shapiro, *JHEP* **1504**, 098 (2015).
- [14] A. Accioly, J. Helayël-Neto, G. Correia, G. Brito, J. de Almeida, e W. Herdy, **Interparticle potencial energy for D-dimensional electromagnetic models from the corresponding scalar ones**, *Phys. Rev. D* **93** 105042 (2016).
- [15] A. Accioly, G. Correia, G. P. Brito, J. de Almeida e W. Herdy, **Relating renormalizability of D-dimensional higher-order electromagnetic and gravitacional models to the classical potencial at the origin**, *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750048 (2017).
- [16] D. Greenberger, *Ann. Phys. (NY)* **47**, 116 (1968).
- [17] R. Colella, A. Overhauser, e S. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1472 (1975).
- [18] R. Aldrovandi, J. Pereira, e K. Vu, *AIP Conf. Proc.* **810**, 217 (2006).
- [19] R. Aldrovandi, J. Pereira, e K. Vu, *AIP Conf. Proc.* **861**, 277 (2006).
- [20] N. Kajuri, *Phys. Rev. D* **94**, 084007 (2016).
- [21] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [22] A. Accioly, J. de Almeida, G. P. Brito, e G. Correia, *Phys. Rev. D* **95**, 084007 (2017).
- [23] I. L. Shapiro, A. Pelinson, e F. Salles, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1430034 (2014).
- [24] T. Sotiriou, e V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [25] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Giacchini e W. Herdy, **Classical and tree-level approaches to gravitacional deflection in higher-derivate gravity**, *Phys. Rev. D* **91** 125009 (2015).

- [26] J. B. Hartle, *Gravity – An Introduction to Einstein’s General Relativity* (Addison Wesley, 2003).
- [27] C. Will, arXiv: 1403. 7377v1 [gr-qc].
- [28] K. Thorne, D. Lee, e A. Lightman, Phys. Rev. D **7**, 3563 (1973).
- [29] H. Ohanian, Phys. Rev. D **10**, 2041 (1974).
- [30] W.-T. Ni, Phys. Rev. Lett. **38**, 301 (1977).
- [31] A. Coley, Phys. Rev. Lett. **49**, 853 (1982).
- [32] A. Accioly, U. Wichoski, e N. Bertarello, Braz. J. Phys. **23**, 392 (1993).
- [33] M. Haugan, Ann. Phys. (N.Y.) **118**, 156 (1979).
- [34] A. Lightman, e D. Lee, Phys. Rev. D **8**, 364 (1973).
- [35] J. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [36] L. Ryder, *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
- [37] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, (D. Reidel Publishing Company, 1974), Chap. IV.
- [38] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, B. Giacchini e W. Herdy, **Dispersive photon propagation in semiclassical higher-derivate gravity**, *Mod. Phys. Lett. A* **30** 1550052 (2015).
- [39] P. Teyssandier, Classical Quantum Gravity **6**, 219 (1989).
- [40] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, e E. de Rey Neto, Prog. Theor. Phys. **104**, 103 (2000).

- [41] A. Accioly, e W. Herdy, **Higher-order gravity and the classical equivalence principle** , *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750185 (2017).
- [42] A. Accioly, e S. Ragusa, *Classical Quantum Gravity* **19**, 5429 (2002); (E) **20**, 4963 (2003).
- [43] A. Accioly, J. Helayël-Neto, e E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374**, 3806 (2010).
- [44] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, R. Turcati, e J. Morais, *Classical Quantum Gravity* **27**, 205010 (2010).
- [45] A. Accioly, J. Helayël-Neto, e E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82**, 065026 (2010).
- [46] R. Aldrovandi, J. Pereira, e K. Vu, *Classical Quantum Gravity* **21**, 51 (2004).
- [47] T. Wu, e C. Yang, *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975).
- [48] R. Aldrovandi, J. Pereira, e K. Vu, *Gen. Relat. Grav.* **36**, 101 (2004).
- [49] R. Aldrovandi e J. Pereira, *Teleparallel Gravity*, *Fundamental Theories of Physics* vol 173, Springer (2013).
- [50] A. Peters, K. Chung, e S. Chu, *Nature* **400**, 849 (1999).
- [51] S. Merlet, Q. Bodart, N. Malossi, A. Landragin, F. Dos Santos, O. Gitlein, e L. Timmen, *Metrologia* **47**, L9 (2010).
- [52] A. Accioly, e W. Herdy, **Interesting examples of violation of the classical equivalence principle but not of the weak one** (submetido à publicação na *Advances in High Energy Physics*).
- [53] K. Littrell, B. Allman, e S. Werner, *Phys. Rev A* **56** , 1767 (1997).
- [54] M. Zych, F. Costa, I. Pikovski, e Č. Brukner, *Nature Commun.* **2**, 505, (2011).

- [55] B. Allman, W.-T. Lee, O. Motrunich, e S. Werner, Phys. Rev. A **60**, 4272 (1999).
- [56] S. Choi, J. Shim, e H. Song, Phys. Rev. D **51**, 2751 (1955).
- [57] R. Woodard, Phys. Lett. **148B**, 440 (1984); H. Cho e K. Ng, Phys. Rev. D **47**, 1692 (1993).

Considerações finais e perspectivas futuras

Analisamos algumas propriedades interessantes dos modelos gravitacionais de ordem superior. A relevância disto está no fato da Gravitação de Ordem Superior ser uma candidata na longa e árdua busca por uma teoria de gravitação quântica.

Na Parte I investigamos a premissa de que modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis são dotados de um potencial clássico que é finito na origem. Os sistemas que utilizamos para verificar a conjectura foram os modelos gravitacionais de quarta e sexta ordem D-dimensionais. Também mostramos que a afirmação contrária não é verdadeira, o que implica em nossa conjectura: a finitude do potencial clássico na origem é uma condição necessária, mas não suficiente, para a renormalizabilidade do modelo. Consequentemente, modelos que divergem na origem são não renormalizáveis, como vimos.

Também confirmamos a premissa geral de que os modelos gravitacionais de ordem superior renormalizáveis são não unitários.

Em resumo, se um modelo gravitacional de ordem superior é renormalizável, ele é necessariamente não unitário e, além disso, é dotado de um potencial clássico finito na origem, mas o oposto não é verdadeiro em geral.

Por último, mas não menos importante, observamos que, embora tenhamos apenas

testado a nossa premissa para alguns modelos gravitacionais de ordem superior D -dimensionais, a suposição parece ser completamente geral. De fato, no que diz respeito aos modelos gravitacionais de ordem superior D -dimensionais, nossa conjectura é válida também para a ação gravitacional D -dimensional abaixo

$$I_D = \int d^D x \sqrt{|g|} \left(\frac{2\sigma}{\kappa^2} R + \frac{1}{2\kappa^2} R F_1(\square) R + \frac{1}{2\kappa^2} R^{\mu\nu} F_2(\square) R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa^2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F_3(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} \right).$$

Aqui,

$$F_1(\square) = \sum_{n=0}^p \alpha_n (-\square)^n, \quad (9.1)$$

$$F_2(\square) = \sum_{n=0}^q \beta_n (-\square)^n, \quad (9.2)$$

$$F_3(\square) = \sum_{n=0}^r \gamma_n (-\square)^n, \quad (9.3)$$

onde α_n ($n = 0, \dots, p$), β_n ($n = 0, \dots, q$) e γ_n ($n = 0, \dots, r$) são coeficientes reais. Estes resultados serão publicados posteriormente. [1, 2].

Na Parte II analisamos exemplos semiclássicos e quânticos e sua relação com os Princípios de Equivalência Clássico (CEP) e Fraco (WEP). Dois exemplos semiclássicos foram discutidos de um ponto de vista teórico. Consideramos o espalhamento, ao nível de árvore, de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional de ordem superior fraco externo e verificamos que ele é dependente do spin, e também dispersivo (dependente da energia da partícula espalhada). Além deste, analisamos também o átomo de Bohr gravitacional de Greenberger. Vimos que os resultados violam o CEP, um princípio não local. No entanto, eles estão de acordo com o WEP, que nada mais é que uma afirmação sobre efeitos puramente locais.

Também analisamos dois exemplos quânticos, em um campo gravitacional, que violam o CEP, mas não o WEP: O experimento COW e a queda livre em um campo

gravitacional constante de um objeto massivo descrito na Mecânica Quântica pela função de onda Ψ .

Assim, chegamos à conclusão de que não violamos o WEP, quer por meio de exemplos semiclássicos, ou de exemplos da mecânica quântica realizados em um campo gravitacional [3, 4]. Como já dito, o WEP é uma afirmação *local*, enquanto que os exemplos semiclássicos ou quanto-mecânicos, em um campo gravitacional, são *não locais*. Em outras palavras, a única maneira de violar o WEP seria criar um experimento *local*, num campo gravitacional, que discordasse do referido princípio.

Nós ressaltamos que as seguintes referências [5–7] podem ser úteis para aqueles interessados em investigações relacionadas aos assuntos tratados nesta segunda parte do trabalho.

Durante as pesquisas realizadas, percebemos que devido aos “diversos” princípios de equivalência existentes, há a necessidade de uma padronização das definições e das características destes princípios. Além disso, tendo em mente que existem comunidades disjuntas que pensam em problemas relacionando princípio de equivalência e mecânica quântica, é notável a discrepância no modo de pensar e tratar assuntos análogos. Por isso, acreditamos que seria certamente benéfico para estas comunidades interagir uns com os outros.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Accioly, J. de Almeida, G. P. Brito, e W. Herdy, **Interesting features of a general class of higher-derivative theories of quantum gravity** (submetido à publicação na *EPJC*).
- [2] A. Accioly, J. de Almeida, e W. Herdy, **Absence of Newton singularities in a general class of (super)renormalizable D-dimensional higher-order gravity models** (será submetido à publicação na *PRD*).
- [3] A. Accioly, e W. Herdy, **Higher-order gravity and the classical equivalence principle** , *Mod. Phys. Lett. A* **32** 1750185 (2017).
- [4] A. Accioly, e W. Herdy, **Interesting examples of violation of the classical equivalence principle but not of the weak one** (submetido à publicação na *Advances in High Energy Physics*).
- [5] G. Rosi, G. D'Amico, L. Cacciapuoti, F. Sorrentino, M. Prevedelli, M. Zych, Ā. Brukner, e G. Timo, arXiv:1704.02296v2 [physics.atom-ph].
- [6] M. Zych e Ā. Brukner, arXiv:1502.00971v1 [gr-qc].
- [7] P. Orlando, R. Mann, K. Modi, e F. Pollock, arXiv:1511.02943v1 [quant-ph].