99/3

Tese de Doutorado

ASPECTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DO MECANISMO DE MASSA TOPOLÓGICA EM TRÊS E QUATRO DIMENSÕES

Ozemar Souto Ventura

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍSAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, Fevereiro de 1999

A Ana, Juliana e
Carolina

Agradecimentos

- Ao orientador Silvio Paolo Sorella pela clareza, objetividade, delicadeza e pelo ambiente agradável e fértil que criou no grupo durante estes anos de doutorado;
- A Luiz Claudio Q. Vilar e Vitor Emanuel R. Lemes pela grande amizade e companherismo e por serem além de colaboradores e amigos, meus coorientadores;
- Aos amigos e colaboradores Claudio Sasaki, Cleverson Linhares de Jesus, Daniel Sasaki e M. Beatriz pelos momentos gratificantes que passamos juntos, sejam estes de completa descontração na cantina ou de clara produção científica;
- Ao professor M. Henneaux pela colaboração fundamental na execução do primeiro dos trabalhos citados no prefácio;
- A José A. Helayël-Neto por ter me atraido para o DCP, por ter me ensinado muito do que sei sobre teoria de campos e por ser um exemplo de figura humana a ser seguido;
- A Sebastião Alves Dias pelos ensinamentos de teoria de campos e pela prestatividade, amizade e simpatia demonstradas;
- Aos amigos que neste período moraram comigo e que têm sido fundamentais: Marcony Silva Cunha, Raul Vallejos, Julio Espinosa, José Duarte, Eduardo Tonini, Moises Rojas e Guilhermo Castillo;
- Aos amigos e colegas do DCP pelo ambiente agradável que construiram no departamento, pelas ricas discussões sobre física, pelo volei e pelo futebol que acontecem, etc: Álvaro Ferreira, Álvaro Nogueira, André Pena Firme, Aníbal O. Caride, Carlos Henrique, Cristine Ferreira, Gentil O. Pires, Hugo Christiansen, Humberto Belich, José L. Boldo, Leon Manssur, Luiz Collato, Marcelo Barbosa, Marcelo Carvalho, Márcia Moutinho, Marco Aurélio, Marcos Andrade, Mauro Negrão, Nelson P. da Silva, Ricardo Renan, Rodolfo C. Sifuentes, Roman Paunov, Sérgio Duarte, Susana Caride e Winder Alexander;
- A Rosângela Castro e Elisabeth dos Anjos pela atenção e simpatia que lhes são características e pela presteza que sempre demonstraram quando seus serviços foram necessários;
- A Miriam Coutinho pela disponibilidade que sempre demonstrou ao lidar com as nossas questões pertinentes a bolsa, cursos e outros eventos;

- Ao bibliotecário Sergio da Costa Velho pela simpatia e presteza demonstradas;

- A Ana Lúcia Maiolino, Juliana e Carolina Maiolino de Queiroz pelo carinho, amor e motivação que me deram nestes últimos anos;

- A Teresa Nazar pela presença fundamental nestes anos de Rio de Janeiro;

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelo espaço concedido para que desenvolvesse meu trabalho;

- À Universidade do Estado do Rio de Janeiro pela hospitalidade no decorrer deste trabalho;

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa.

Resumo

Na primeira parte desta tese nós mostramos que teorias de calibre tridimensionais do tipo Yang-Mills, na presença do termo de Chern-Simons, podem ser mapeadas na ação de Chern-Simons pura, através de uma redefinição não linear e covariante do campo de calibre. Na segunda parte, provamos que não existe generalização não abeliana para o mecanismo de massa topológica em quatro dimensões, que mantenha a propriedade da renormalizabilidade por contagem de potências e preserve o mesmo conteúdo de campos da ação abeliana. Para tal demonstração usamos a técnica das deformações consistentes da Equação Mestra.

Abstract

In the first part of this thesis we show that three dimensional euclidean Yang-Mills gauge theories, in the presence of the Chern-Simons action, can be seen as being generated by the pure topological Chern-Simons term through nonlinear covariant redefinitions of the gauge field. In the second part, we prove that there is no power-counting renormalizable nonabelian generalization of the abelian topological mass mechanism in four dimensions. The argument is based on the technique of consistent deformations of the master equation.

Índice

PREFÁCIO

A pesquisa apresentada nesta tese de doutorado foi realizada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Ela é parte dos trabalhos, que desenvolvemos em colaboração com Dr. Sílvio P. Sorella, Dr. Luiz C. Q. Vilar, Dr. Vitor E. R. Lemes, Dr. M. Henneaux, Dr. Alessandro Tanzini, os alunos de doutorado C. A. Sasaki, Daniel Sasaki e o aluno de mestrado Cleverson de Jesus, e que são a seguir listados:

- L. C. Vilar, V. E. R. Lemes, O. S. Ventura, C. Sasaki, S. P. Sorella and M. Henneaux, *A No-Go Theorem for the Nonabelian Topological Mass Mechanism in Four Dimensions,* **Phys. Lett. B410, (1997) 195** ;

- V. E. R. Lemes, C. L. Jesus, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar and O. S. Ventura, *Chern-Simons as a Geometrical Set up for Three Dimensional Gauge Theories,* **Phys. Rev. D58, (1998) 045010;**

- V. E. R. Lemes, C. L. Jesus, C. Sasaki, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar and O. S. Ventura, *A simple remark on three dimensional gauge theories,* **Phys. Lett. B418 (1998) 324;**

- L. C. Vilar, O. S. Ventura, C. Sasaki and S. P. Sorella, *Algebraic Characterization of Vector Supersymmetry in Topological Field Theories,* **Journ. Math. Phys. 39 (1998) 848;**

- A. Tanzini, O. S. Ventura, L. C. Q. Vilar and S. P. Sorella, *BRST Quantization of the Twisted* $N = 2$ Super-Yang-Mills Theory in $4D$, **hep-th/9811191**.

Para a elaboração desta tese foram utilizados os dois primeiros trabalhos citados.

Introdução

Nesta tese serão abordados alguns aspectos do chamado mecanismo de geração de massa topológica em três e quatro dimensões espaço-temporais. Em particular, em três dimensões, analisaremos as propriedades do mecanismo de massa topológica para os campos de calibre vetoriais tendo como fonte o termo topológico de Chern-Simons [1]. Com relação ao caso quadridimensional, estudaremos a possibilidade de generalização não-abeliana do mecanismo de massa topológica a partir do conhecido modelo abeliano de Cremmer-Sherk [2].

A motivação do estudo de mecanismos alternativos de geração de massa vem do fato de que o mecanismo usual, que fornece massa aos bosons vetoriais do modelo padrão das partículas elementares (mecanismo de Higgs), ainda que mantenha as propriedades de renormalizabilidade e unitariedade, prevê a existência de uma partícula escalar (boson de Higgs) que ainda não foi detectada.

Neste sentido, qualquer mecanismo alternativo de geração de massa é benvindo e merece cuidadosa análise. Em particular, o mecanismo de massa topológica tridimensional fornece massa para os campos vetoriais, preservando de maneira exata a invariância de calibre.

Sua implementação se faz com o acréscimo do termo topológico de Chern-Simons $\mathcal{S}_{CS}(A)$

$$\mathcal{S}_{CS}(A) = \frac{1}{2} tr \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\rho \right)$$

à ação usual de Yang-Mills $S_{YM}(A)$

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \; ,$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu] \; .$$

Os dois parâmetros que aparecem nas expressões acima são a constante de acoplamento de calibre g e a chamada massa topológica m [1]. Observamos que o propagador do campo de calibre obtido a partir da ação clássica

$$S_{YM}(A) \; + \; S_{CS}(A) \; ,$$

possui um polo massivo. De fato, adotando o calibre de Landau, obtemos

$$\left\langle A^a_\mu A^b_\nu \right\rangle = \frac{m\delta^{ab}}{p^2 - m^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + im\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{p^\lambda}{p^2} \right) \; .$$

A existência de um polo massivo na função a dois pontos do campo de calibre, oriunda do termo topológico de Chern-Simons, é conhecido como mecanismo de massa topológica.

É importante salientar que, em três dimensões, este mecanismo é válido tanto no caso abeliano quanto no caso não abeliano. Como será mostrado no Capítulo 3, esta importante característica não será mantida no caso quadridimensional.

No que se refere aos infinitos, que comumente surgem no processo de quantização, é conhecido que a ação de Chern-Simons tem função β e dimensões anômalas nulas, o que implica a finitude ultra-violeta para qualquer ordem na expansão em loops [3, 4]. Diferentemente, a teoria de Yang-Mills tridimensional pura é superrenormalizável mas, quando acoplada ao termo de Chern-Simons, é finita. Esta propriedade foi observada primeiro ao nível de um loop [1, 5] e, posteriormente, estendida para todas as ordens [6]. Um dos objetivos desta tese é dar uma prova algébrica da finitude ultravioleta da ação de Yang-Mills com massa topológica.

No contexto das teorias topológicas, a ação de Chern-Simons se enquadra entre aquelas conhecidas como do tipo Schwarz [7], ou seja, possui cohomologia de BRST associada não trivial. Ela tem sido muito importante no estudo das teorias dos nós em 3 dimensões [8] e na investigação do efeito Hall [9].

Neste trabalho, uma característica nova e interessante da ação de Chern-Simons será apresentada. Mostraremos que existe um mapeamento entre a ação de Chern-Simons e a ação de Yang-Mills tridimensional com massa topológica. Este mapeamento se faz a partir de uma redefinição não linear do campo de calibre e permitirá a demonstração algébrica da finitude do modelo de Yang-Mills com massa topológica.

Mais ainda, qualquer ação construida com a derivada covariante de calibre D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + g\,[A_\mu, \;]$$

e a curvatura $F_{\mu\nu}$ e que contenha o termo de Chern-Simons pode ser mapeada na ação de Chern-Simons pura. Considerando, por exemplo, o sistema Chern-Simons mais Yang-Mills, obtemos

$$\mathcal{S}_{YM}(A) \; + \; \mathcal{S}_{CS}(A) = \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) \; ,$$

sendo $\widehat{A}$

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n(D, F) \; .$$

Como será discutido em detalhe no Capítulo 1, os coeficientes ϑ_μ^n são funções locais e covariantes da curvatura $F_{\mu\nu}$ e da derivada covariante D_μ. Em particular, da propriedade de covariancia dos ϑ_μ^n segue que o campo A_μ é de fato uma conexão de calibre. Esta importante propriedade permitirá interpretarmos a ação de Chern-Simons como um funcional definido no espaço das conexões do tipo $\widehat{A}_\mu$. Qualquer ação de calibre do tipo Yang-Mills poderá ser obtida calculando o funcional $\mathcal{S}_{CS}$ num ponto conveniente $\widehat{A}_\mu$.

No caso quadridimensional, o mecanismo abeliano de massa topológica é implementado estendendo o termo de Maxwell para a ação de Cremmer-Sherk [2]

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4} m \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} \right) ,$$

sendo $F_{\mu\nu}$ a curvatura de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ,$$

$B_{\mu\nu}$ um campo tensorial anti-simétrico e $H_{\mu\nu\rho}$ o tensor completamente anti-simétrico

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} .$$

O propagador do campo vetorial, no calibre de Landau, é dado por [2]

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{1}{p^2 - 4m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] .$$

Analogamente ao caso tridimensional, a existência do polo massivo no propagador do campo A_μ é conhecida como mecanismo de massa topológica em 4 dimensões.

A busca de uma generalização não-abeliana consistente deste mecanismo é ainda um problema aberto. Um dos objetivos desta tese é dar uma análise detalhada de tais possíveis generalizações. Como resultado, apresentaremos um teorema No-Go onde evidencia-se a impossibilidade de se obter uma generalização não-abeliana do mecanismo de massa topológica, mantendo o conteúdo de campos, o número de simetrias e a renormalizabilidade por contagem de potências.

A novidade de que a ação de Chern-Simons pode ser vista como um gerador das teorias de calibre tridimensionais tem o seu análogo quadridimensional. No contexto das teorias de calibre abelianas, a ação pura do BF pode ser mapeada na teoria BF acoplada a termos cinéticos do tipo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$ e a termos covariantes de calibre construidos a partir das curvaturas relacionadas aos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ e suas derivadas espaço-temporais [10].

De forma a expor estes conteúdos, a tese foi organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1, estudamos a ação de Chern-Simons como um gerador funcional das teorias de calibre no espaço das conexões. Estabelecemos então alguns aspectos geométricos da teoria de Chern-Simons e mostramos o caráter covariante da transformação não linear que mapeia os campos de calibre que levam a ação de Chern-Simons em ações de Chern-Simons acrescidos a termos do tipo Yang-Mills. No Capítulo 2, apresentamos a técnica das deformações consistentes da identidade de Slavnov-Taylor (ou Equação Mestra), técnica esta que será usada na demonstração do teorema No-Go, enunciado e demonstrado no Capítulo 3. No Capítulo 4, analisamos a teoria BF abeliana como geradora de uma classe de teorias invariantes de calibre e a equivalência entre a ação do BF puro e a ação de Cremmer-Sherk. Nos apêndices, mostramos (i) um resumo do método de Batalin - Vilkovisky e (ii) a técnica de BRST estendida.

Capítulo 1

Chern-Simons como Gerador Topológico das Teorias de Calibre Tridimensionais

1.1 Introdução

Há muito tempo que a teoria de Yang-Mills acoplada ao termo topológico de Chern-Simons [1] vem sendo fonte contínua de investigação, levando a uma gama de aplicações interessantes em diferentes áreas da física teórica.

No contexto das teorias de campos, esta teoria é, mesmo que superrenormalizável por contagem de potências, finita no ultra-violeta para todas as ordens de expansão na teoria de perturbações [6]. O objetivo deste Capítulo é dar uma prova algébrica desta afirmação.

Usaremos os resultados por nós apresentados na referência [11], onde provamos que a teoria de calibre de Yang-Mills com massa topológica, cuja expressão é dada pela soma da ação de Yang-Mills e do termo de Chern-Simons [1],

$$\mathcal{S}_{YM}(A) \; + \; \mathcal{S}_{CS}(A) \; , \tag{1.1}$$

com

$$\mathcal{S}_{YM}(A) = \frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{1.2}$$

$$\mathcal{S}_{CS}(A) = \frac{1}{2} tr \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\rho \right) \tag{1.3}$$

e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu] \ . \tag{1.4}$$

pode ser mapeada na ação de Chern-Simons pura através de uma redefinição não linear do campo de calibre, ou seja,

$$\mathcal{S}_{YM}(A) \ + \ \mathcal{S}_{CS}(A) = \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) \ , \tag{1.5}$$

onde

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta^n_\mu(D, F) \ . \tag{1.6}$$

Os coeficientes $\vartheta^n_\mu(D, F)$ na eq.(1.6) são *locais e covariantes* [12], o que significa que eles são construídos unicamente com a curvatura $F_{\mu\nu}$, e a derivada covariante D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + g \left[A_\mu , \ \right] \ . \tag{1.7}$$

Como é feito usualmente, o campo de calibre A_μ é tomado como sendo avaliado num grupo de álgebra de Lie, $A_\mu = A^a_\mu T^a$, onde os T^a são os geradores antihermitianos de um grupo de Lie semisimples. Os dois parâmetros, g e m, nas expressões acima, identificam a constante de acoplamento de calibre e a chamada massa topológica [1]. De acordo com a parametrização escolhida para a ação de Yang-Mills em presença do termo de Chern-Simons (1.1), podemos assumir que a dimensão de massa do campo de calibre é 1, o que implica dizer que as dimensões dos parâmetros g, m são 0 e 1, respectivamente.
Quando inserimos a transformação (1.6) na equação (1.5), obtemos diretamente os coefi-

cientes ϑ^n_μ. Por exemplo, para os quatro primeiros coeficientes da expansão (1.6) teremos

$$
\begin{aligned}
\vartheta^1_\mu &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}F^{\sigma\tau} , \\
\vartheta^2_\mu &= \frac{1}{8}D^\sigma F_{\sigma\mu} , \\
\vartheta^3_\mu &= -\frac{1}{16}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}D^\sigma D_\rho F^{\rho\tau} + \frac{g}{48}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}\left[F^{\sigma\rho}, F_\rho{}^\tau\right] , \\
\vartheta^4_\mu &= -\frac{5}{128}D^2 D^\rho F_{\rho\mu} + \frac{5}{128}D^\nu D_\mu D^\lambda F_{\lambda\nu} \\
&\quad -\frac{7}{192}g\left[D^\rho F_{\rho\tau}, F_\mu{}^\tau\right] - \frac{1}{48}g\left[D_\nu F_{\mu\lambda}, F^{\lambda\nu}\right] .
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

É bom notar na expressão explícita dos coeficientes que, como foi dito, eles são covariantes, dependendo apenas da derivada covariante de calibre D_μ e da curvatura $F_{\mu\nu}$.

É importante dizer que os argumentos acima são também válidos na versão supersimétrica [11]. Isto foi mostrado partindo da ação supersimétrica de Chern-Simons em presença do termo de Yang-Mills com supersimetria $N = 1$,

$$\mathcal{S}^{susy} = \mathcal{S}^{susy}_{CS} + \mathcal{S}^{susy}_{YM}, \tag{1.9}$$

onde

$$\mathcal{S}^{susy}_{CS} = -\frac{1}{2}tr\int dV\left(\Gamma^\alpha D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta + \frac{g}{3}\Gamma^\alpha\left[\Gamma^\beta, D_{(\beta}\Gamma_{\alpha)}\right] + \frac{g^2}{6}\Gamma^\alpha\left[\Gamma^\beta, \{\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha\}\right]\right) , \tag{1.10}$$

e

$$\mathcal{S}^{susy}_{YM} = \frac{1}{m}tr\int dV W^\alpha W_\alpha . \tag{1.11}$$

Aqui, $dV = d^3x d^2\theta$, Γ^α é o supercampo espinorial de calibre e W^α é a super-curvatura dada por

$$W_\alpha = D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta + g\left[\Gamma^\beta, D_\beta \Gamma_\alpha\right] + \frac{g^2}{3}\left[\Gamma^\beta, \{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\}\right] . \tag{1.12}$$

Introduzindo a derivada covariante de supersimetria

$$\nabla_\alpha = D_\alpha + g\left[\Gamma_{\alpha,}\ \right], \tag{1.13}$$

obtemos os primeiros coeficientes dados por

$$
\begin{aligned}
\vartheta^1_\alpha(\nabla, W) &= -W_\alpha\,, \\
\vartheta^2_\alpha(\nabla, W) &= -\frac{1}{2}\nabla^\beta\nabla_\alpha W_\beta\,, \\
\vartheta^3_\alpha(\nabla, W) &= -\frac{1}{2}\nabla^\beta\nabla_\alpha\nabla^\gamma\nabla_\beta W_\gamma + \frac{g}{3}\left[W^\beta, \nabla_\alpha W_\beta\right]\,.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Como temos visto, as versões supersimétrica e não-supersimétrica da ação de Chern-Simons tornam inoperante, ao nível clássico, qualquer termo covariante de calibre, construido com a derivada covariante e a curvatura, que se some a esta ação.

Para este Capítulo, nosso objetivo é fornecer uma análise cohomológica detalhada e auto-consistente da equação (1.5), bem como do caráter covariante dos coeficientes $\vartheta^n_\mu(D, F)$. Ainda será feita uma generalização das fórmulas (1.5), (1.6) no sentido de dar o mesmo tratamento a qualquer termo local e invariante de calibre: $\int FD^2F$, $\int FD^4F$, *etc.* Estes fatores irão possibilitar a interpretação do termo topológico de Chern-Simons como um funcional invariante, que atua em um espaço conveniente das conecções de calibre.

Veremos na Seção 5, que uma vasta classe de ações não locais e invariantes de calibre pode ter o mesmo tratamento, ou seja, pode ser mapeada na ação pura de Chern-Simons.

De acordo com a análise BRST das teorias de calibre [13, 14, 15], usaremos correntemente o nome *ação do tipo Yang-Mills* para denotar termos genéricos polinomiais locais, integrados e com número de ghost zero, construidos unicamente com a curvatura $F_{\mu\nu}$ e suas derivadas covariantes. A ação correspondente é de natureza completamente diferente da ação de Chern-Simons, que é conhecidamente invariante de BRST módulo uma derivada total. Ainda que estas considerações sejam feitas no espaço - tempo euclideano, é bom lembrar que a ação de Chern-Simons, sendo a integral de uma forma de ordem três, não se acopla com a métrica num espaço curvo, enquanto que os termos do tipo Yang-Mills se acoplam de maneira não trivial [14].

Desta forma, qualquer ação local do tipo Yang-Mills poderá ser obtida avaliando o funcional de Chern-Simons em um ponto específico do espaço das conexões do tipo (1.6), garantindo então uma interpretação puramente geométrica para as teorias de calibre tridimensionais.

1.2 Cohomologia de BRST da teoria de Yang-Mills na presença do termo de Chern-Simons

1.2.1 Generalidades

A cohomologia de BRST da teoria de calibre de Yang-Mills tem sido vastamente estudada nos últimos anos. Resultados e teoremas de grande generalidade têm sido estabelecidos em várias dimensões espaço-temporais [13, 14, 15], sendo facilmente adaptados para o caso que será aqui estudado. Seguindo o procedimento padrão [16, 4], o operador de BRST correspondente à Lagrangeana de Yang-Mills acoplada com o termo de Chern-Simons (1.1) é dada por

$$
\begin{aligned}
sA_\mu &= D_\mu c \, , \\
sc &= -gc^2 \, , \\
sA^*_\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho} + \frac{1}{m}D^\nu F_{\mu\nu} - g\left\{A^*_\mu, c\right\} \, , \\
sc^* &= D^\mu A^*_\mu + g\left[c^*, c\right] \, ,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

onde c é o ghost de Faddeev-Popov e (A^*_μ, c^*) representam os dois anticampos necessários para a análise cohomológica das equações de movimento que surgem da ação (1.1) [15]. Os campos e anticampos (A_μ, c, A^*_μ, c^*) possuem números de ghost $(0, 1, -1, -2)$, respectivamente.

Para dar uma compreensão cohomológica da equação (1.5) devemos primeiro especificar o espaço funcional apropriado do operador diferencial de BRST. Como sugerido pela equação (1.6), este espaço será identificado com o espaço dos polinômios locais e integrados nos campos e anticampos de dimensão arbitrária. Mais precisamente, o operador s

atuará no espaço funcional das séries de potências formais locais e integradas nos campos e anticampos. Esta escolha é adequada em vista da generalização da equação (1.5) para termos com derivadas de ordem superior, $\int FD^2F$, $\int FD^2D^2F$, *etc.* Estes termos pertencem naturalmente ao espaço das séries de potências formais locais nos campos e anti-campos. Observe também que o inverso da massa topológica pode ser interpretado como o parâmetro de expansão para as séries de potências formais deste espaço funcional, como no caso dos coeficientes ϑ_μ^n da redefinição não linear de campos (1.6).

É simples de perceber que, dentro do espaço dos polinômios locais, a presença do termo de Chern-Simons na ação inicial (1.1) nos permite implementar um procedimento recursivo, que trivializa qualquer termo invariante de BRST contendo somente F e suas derivadas covariantes. Para termos uma noção simples e direta do significado desta afirmação é suficiente considerar a chamada aproximação abeliana das transformações de BRST (1.15), ou seja,

$$s \longrightarrow s_0 \ , \tag{1.16}$$

com

$$\begin{aligned} s_0 A_\mu &= \partial_\mu c \ , \\ s_0 c &= 0 \ , \\ s_0 A_\mu^* &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{0\nu\rho} + \frac{1}{m}\partial^\nu F_{\mu\nu}^0 \ , \\ s_0 c^* &= \partial^\mu A_\mu^* \ , \end{aligned} \tag{1.17}$$

e

$$F_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{1.18}$$

Das equações (1.17) nós vemos que as transformações dos campos e anticampos sob o operador s_0 correspondem ao caso em que todos os (anti)comutadores tenham sido eliminados, restando então apenas o conjunto de transformações abelianas. O operador s_0 é o primeiro termo da decomposição do operador diferencial de BRST completo de acordo com o operador de filtragem [17, 4]

$$\mathcal{N} = tr \int d^3x \left(A_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} + c\frac{\delta}{\delta c} + A^*_\mu \frac{\delta}{\delta A^*_\mu} + c^* \frac{\delta}{\delta c^*} \right) . \tag{1.19}$$

Como sabemos, a relevância do operador s_0 fica explícita a partir de um teorema geral [17, 4], que afirma que a cohomologia do operador de BRST completo s é isomórfica a um sub-espaço da cohomologia do operador s_0. Em particular, isto implica que se a cohomologia de s_0 é vazia, a cohomologia do operador completo s também o será.

Dando seqüência, podemos reescrever a terceira equação das (1.17) da seguinte maneira

$$F^0_{\mu\nu} = s_0(\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{*\rho}) \ - \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda F^{0\rho\lambda} \ , \tag{1.20}$$

onde a normalização usada é a do espaço euclideano

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\tau} = \delta^\nu_\sigma\delta^\rho_\tau - \delta^\nu_\tau\delta^\rho_\sigma \, . \tag{1.21}$$

Com base na equação (1.20) verificamos que é possível representar a curvatura $F^0_{\mu\nu}$ por uma variação pura de BRST, a menos de um fator de ordem $1/m$, que contém derivadas de ordem superior. A equação (1.20) tem o claro significado de uma fórmula recursiva devido ao fato de que $F^0_{\mu\nu}$ aparece em ambos os lados, o que implica dizer que nós podemos expressar $F^0_{\mu\nu}$ como uma variação pura de s_0, isto é,

$$\begin{aligned}
F^0_{\mu\nu} &= s_0(\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{*\rho}) \ - \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda F^{0\rho\lambda} \\
&= s_0\left(\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{*\rho} - \frac{1}{m}(\partial_\mu A^*_\nu - \partial_\nu A^*_\mu)\right) + \frac{1}{m^2}(\partial_\mu\partial^\sigma F^0_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial^\sigma F^0_{\mu\sigma}) \\
&= s_0\left(\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{*\rho} - \frac{1}{m}(\partial_\mu A^*_\nu - \partial_\nu A^*_\mu) + \frac{1}{m^2}(\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\partial_\rho - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\sigma)\partial^\sigma A^{*\rho}\right) \\
&\quad -\frac{1}{m^3}(\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\partial_\rho - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\sigma)\partial^\sigma\partial_\lambda F^{0\rho\lambda}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s_0 \Big(\varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{*\rho} - \frac{1}{m}(\partial_\mu A^*_\nu - \partial_\nu A^*_\mu) + \frac{1}{m^2}(\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\partial_\rho - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\sigma)\partial^\sigma A^{*\rho} \\
&\quad - \frac{1}{m^3}(\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\partial_\rho - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\sigma)\varepsilon^{\rho\lambda\tau}\partial^\sigma\partial_\lambda A^*_\tau \Big) + O(\frac{1}{m^4}) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Vemos que este procedimento iterativo irá resultar em uma série formal de potências no parâmetro de expansão $1/m$, cujos coeficientes conterão apenas o anticampo A^*_μ e suas derivadas espaço-temporais. A fórmula acima expressa a trivialidade da curvatura $F^0_{\mu\nu}$. Como consequência, qualquer termo invariante e local, que depende somente de $F^0_{\mu\nu}$ e de suas derivadas espaço-temporais, pode ser escrito como uma variação pura de s_0. Pelo teorema acima citado, a mesma propriedade vale para o operador de BRST completo s. Segue então que qualquer termo local e invariante construido com a curvatura $F_{\mu\nu}$ e suas derivadas covariantes pode ser colocado na forma de uma variação exata do operador de BRST. Assim sendo, levando em conta alguns resultados gerais sobre cohomologia de BRST das teorias de calibre [13, 14, 15], podemos inferir que, no espaço das séries formais de polinômios locais e integrados nos campos e anticampos, o único elemento não trivial com os números quânticos de uma ação pode ser identificado com o termo topológico puro de Chern-Simons.

É sempre bom lembrar que, no contexto de BRST, os termos da ação que são exatos correspondem a simples redefinições de campos. Isto nos leva a concluir que as fórmulas (1.5), (1.6) surgem como uma conseqüência da trivialidade do termo de Yang-Mills. Gostaríamos também de sublinhar que a possibilidade de escrevermos a ação de Yang-Mills de forma exata está relacionada diretamente com a presença do termo topológico de Chern-Simons na ação inicial. É fácil entender a origem deste resultado. Isto ocorre porque, a variação da ação de Chern-Simons fornece o dual da curvatura $F_{\mu\nu}$, que pode ser escrita como uma pura variação de BRST do anticampo A^*_μ nas equações (1.15). Sem a presença do termo $\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho}$ no lado direito da equação (1.15) seria impossível implementar o procedimento recursivo por nós sugerido, já que o lado esquerdo da equação (1.20) seria nulo a menos de termos de ordem $1/m$, o que inutilizaria a fórmula (1.20). Isto significa que se o termo de Chern-Simons não fosse incluido na ação inícial, não seria possível reexpressar a ação de Yang-Mills na forma de uma variação exata de termos locais de séries de potências formais. Entretanto, se o termo de Chern-Simons está presente, o termo de Yang-Mills pode ser imediatamente reabsorvido através de uma redefinição não-linear de campos.

1.2.2 Estrutura de ladder completo

As considerações cohomológicas feitas na subseção anterior podem ser entendidas de uma maneira simples se notarmos que as transformações (1.17) podem ser colocadas em uma forma que é típica das teorias topológicas do tipo Schwartz [7], como é o caso da teoria de Chern-Simons pura. De fato, no contexto da ação redefinida $\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A})$, os anticampos A^*_μ e c^* usados no processo de quantização de Batalin-Vilkovisky podem ser redefinidos de tal forma que as transformações de BRST resultantes possam ser identificadas com a chamada estrutura de ladder completo, estrutura esta que é típica dos modelos topológicos do tipo Schwartz. Tal transformação é dada por

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}^*_{\mu\nu} &= A^*_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\sigma A^{*\rho\sigma} - \frac{1}{m^2}\partial^2 A^*_{\mu\nu} + \frac{1}{m^3}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^2\partial_\sigma A^{*\rho\sigma} \\
&\quad + \frac{1}{m^4}\partial^2\partial^2 A^*_{\mu\nu} + O(1/m^5)\ , \\
\widetilde{c}^* &= c^* - \frac{1}{m^2}\partial^2 c^* + \frac{1}{m^4}\partial^2\partial^2 c^* + O(1/m^5)\ ,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

com

$$A^*_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{*\rho}\ . \tag{1.24}$$

Podemos facilmente observar que, em ordem inferior a $1/m^5$,

$$s_0 A_\mu = \partial_\mu c\ , \tag{1.25}$$

$$
\begin{aligned}
s_0 c &= 0\,, \\
s_0 \widetilde{A}^*_{\mu\nu} &= F^0_{\mu\nu}\,, \\
s_0 \widetilde{c}^* &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu \widetilde{A}^*_{\nu\rho}\,.
\end{aligned}
$$

Esta estrutura, conhecida como estrutura de ladder [4], implica que o campo A_μ e suas derivadas, bem como as derivadas do campo c, formam dubletos[1] e, portanto, não contribuem para a cohomologia do operador s_0. Isto implica que a cohomologia de s_0, no espaço dos polinômios locais dos campos e anticampos, é obtida a partir do ghost c não derivado. Como é conhecido, este resultado, combinado com a imposição da invariância de calibre rígida [13, 15], permite identificar as classes de cohomologia do operador diferencial completo de BRST com os polinômios invariantes não derivados do ghost de Faddeev-Popov construidos com monômios do tipo trc^{2n+1}, $n \geq 1$. Segue então que a cohomologia de s módulo d no setor das séries de potências locais com os mesmos números quânticos de uma Lagrangeana possui somente um elemento não trivial, correspondente (via equações de descida [4]) ao monômio trc^3. A ação resultante é o termo de Chern-Simons.
De fato, é simples verificar que a Lagrangeana de Chern-Simons

$$
\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2}tr\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3}gA_\mu A_\nu A_\rho\right)\,, \tag{1.26}
$$

é solução do seguinte sistema de equações de descida

$$
\begin{aligned}
s\mathcal{L}_{CS} + d\omega^1_2 &= 0\,, \\
s\omega^1_2 + d\omega^2_1 &= 0\,, \\
s\omega^2_1 + d\omega^3_0 &= 0\,, \\
s\omega^3_0 &= 0\,,
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

[1]Um par de campos u e v forma uma estrutura de dubleto quando suas transformações de BRST forem tais que

$$
su = v \text{ e } sv = 0.
$$

O teorema expectral [4] garante que um par de campos que forme um dubleto de BRST não aparece na cohomologia deste operador.

onde o índices i e j do cociclo ω_j^i representam o número de ghost e o grau de forma e

$$
\begin{aligned}
\omega_2^1 &= tr\left(Adc\right) , \\
\omega_1^2 &= tr\left(cdc\right) , \\
\omega_0^3 &= \frac{1}{3!}tr\left(c^3\right) .
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

Tendo justificado as equações (1.5) e (1.6) , vamos retornar ao caráter covariante dos coeficientes ϑ_μ^n na equação (1.6). Isto será analisado na próxima seção.

1.3 Algumas propriedades úteis da ação de Chern-Simons pura

Antes de analisarmos o caráter covariante dos coeficientes ϑ_μ^n na equação (1.6) vamos estabelecer algumas propriedades simples da ação de Chern-Simons. Seja A_μ uma conexão de calibre e seja $\mathcal{S}_{CS}(A)$ a correspondente ação de Chern-Simons invariante de BRST, como dada na expressão (1.3). Vamos variar o campo de calibre A_μ por uma quantidade δA_μ e tentar estabelecer a lei de transformação para δA_μ para que o novo funcional de Chern-Simons $\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A})$ avaliado em $\widehat{A}_\mu = A_\mu + \delta A_\mu$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) &= \mathcal{S}_{CS}(A) + \\
&+tr\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\frac{1}{2}\delta A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\delta A_\mu D_\nu \delta A_\rho + \frac{g}{3}\delta A_\mu \delta A_\nu \delta A_\rho\right)
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

seja ainda BRST invariante. Lembramos que a variação δA_μ não é tratada aqui como uma quantidade infinitesimal, o que significa que a fórmula (1.29) é exata.

Impondo que

$$
s\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) = 0 , \tag{1.30}
$$

e relembrando que

$$sS_{CS}(A) = 0 \ , \tag{1.31}$$

facilmente obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= tr \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left((s\delta A_\mu - g\left[\delta A_\mu, c\right]) F_{\nu\rho} + 2g(s\delta A_\mu)\delta A_\nu \delta A_\rho + \right. \\ &+ \left. (s\delta A_\mu) D_\nu \delta A_\rho + \delta A_\mu s(D_\nu \delta A_\rho) \right) \ . \end{aligned} \tag{1.32}$$

A condição (1.32) implica que

$$s\delta A_\mu = g\left[\delta A_\mu, c\right] \ , \tag{1.33}$$

o que significa que δA_μ se transforma covariantemente. Da equação (1.33) segue que o campo modificado $\widehat{A}_\mu = A_\mu + \delta A_\mu$ é uma conexão,

$$s\widehat{A}_\mu = \partial_\mu c + g\left[\widehat{A}_\mu, c\right] \ , \tag{1.34}$$

como deveria ser.

Vemos assim que se nós variamos o campo de calibre A_μ por uma quantidade arbitrária δA_μ que se transforma covariantemente sob BRST, o termo resultante de Chern-Simons $S_{CS}(A_\mu + \delta A_\mu)$ se manterá invariante de calibre. É claro que o caráter covariante persiste também no caso em que δA_μ é tomado como uma expansão em série formal de potências no parâmetro $1/m$, isto é,

$$\delta A_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n \ . \tag{1.35}$$

Da equação (1.33) , vemos que

$$s\vartheta_\mu^n = g\left[\vartheta_\mu^n, c\right] \ , \tag{1.36}$$

o que aponta para o fato de que os coeficientes ϑ_μ^n com diferentes valores de n, e portanto

com diferentes dimensões de massa, devem ser considerados como independentes.
Somando-se a isto, a equação (1.35) permite que escrevamos

$$\mathcal{S}_{CS}(A_\mu + \delta A_\mu) = \mathcal{S}_{CS}(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \mathcal{S}^n \ , \tag{1.37}$$

onde $\mathcal{S}^n$ é uma série de potências formal integrada e local, correspondente à expansão de $\mathcal{S}_{CS}(A_\mu + \delta A_\mu)$ em potências do inverso da massa topológica m, de acordo com a equação (1.35).

Entretanto, da invariância de BRST de $\mathcal{S}_{CS}(A_\mu + \delta A_\mu)$ e de $\mathcal{S}_{CS}(A)$, obtemos

$$s\mathcal{S}^n = 0 \ , \tag{1.38}$$

o que implica que os coeficientes $\mathcal{S}^n$ na equação (1.37) são invariantes de BRST. Relembrando agora que o termo de Chern-Simons é a única ação não trivial no espaço das séries de potências formais, segue que os termos $\mathcal{S}^n$ na equação (1.37) devem ser necessariamente exatos de BRST, ou seja,

$$\mathcal{S}^n = s\widehat{\mathcal{S}}^n \ , \tag{1.39}$$

para alguma série de potências formal e integrada $\widehat{\mathcal{S}}^n$ com número de ghost negativo.
Estamos agora prontos para dar a prova cohomológica da equação (1.5).
Afirmamos que vale o seguinte teorema:

Teorema 1 *Entre as classes de ações de Chern-Simons invariantes de BRST* $\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A})$

$$\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) = \frac{1}{2} tr \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(\widehat{A}_\mu \partial_\nu \widehat{A}_\rho + \frac{2}{3} g \widehat{A}_\mu \widehat{A}_\nu \widehat{A}_\rho \right) \ , \tag{1.40}$$

onde $\widehat{A}_\mu$ *é uma conexão do tipo*

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n \ , \tag{1.41}$$

é sempre possível escolher um conjunto de coeficientes covariantes ϑ_μ^n *tal que a seguinte* *relação seja verificada:*

$$\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) = \mathcal{S}_{CS}(A) + \frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, . \tag{1.42}$$

Prova.

Para provar o teorema vamos assumir o contrário, como é feito usualmente neste tipo de problema. Supondo então que a equação (1.42) não seja válida, ou seja que

$$\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) \neq \mathcal{S}_{CS}(A) + \frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, . \tag{1.43}$$

Por outro lado, da equação (1.39) podemos escrever que

$$\mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) = \mathcal{S}_{CS}(A) + s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \widehat{\mathcal{S}}^n \right) , \tag{1.44}$$

o que nos levaria a obter

$$\frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \neq s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \widehat{\mathcal{S}}^n \right) . \tag{1.45}$$

Esta desigualdade apresenta-se em frontal desacordo com os resultados obtidos na seção precedente, onde é provado que a ação de Yang-Mills pode ser expressa como uma variação pura de BRST de uma série de potências formal local, concluindo-se, portanto, a prova do teorema.

O resultado acima fornece uma simples compreensão cohomológica das equações (1.5) e (1.6). Ele pode ser estendido para cobrir o caso em que a ação inicial (1.1) é acrescida de um termo generalizado do tipo Yang-Mills. Vamos relembrar o fato de que entre as ações invariantes construidas com $F_{\mu\nu}$ e suas derivadas covariantes, a Lagrangeana de Yang-Mills $trF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é o termo de menor dimensão. Qualquer outro termo deste tipo conteria um número maior de $F_{\mu\nu}$ ou de D_μ, o que aumentaria sua dimensão. Como conseqüência, a transformação abeliana (1.17) só é modificada por termos de ordens superiores em $F^0_{\mu\nu}$ e suas derivadas espaço-temporais. Isto implica dizer que, se a ação de Chern-Simons está incluida na ação inicial, será sempre possível generalizar a fórmula (1.20), possibilitando assim que se expresse a curvatura $F^0_{\mu\nu}$ como uma variação exata de BRST de uma série formal de potências locais. Cabe observar que em todos os casos o tratamento é o mesmo. A única diferença se dará em relação aos coeficientes ϑ^n_μ das redefinições não linerares (1.6), que deverão então ser convenientemente modificados. Entretanto os ϑ^n_μ permanecem covariantes, como será ilustrado nos exemplos a seguir.

1.4 Exemplos

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos na seção anterior, vamos calcular os coeficientes ϑ^n_μ em alguns casos em que acrescentamos à ação inicial (1.1) termos generalizados do tipo Yang-Mills. Vamos estudar os casos particulares em que os termos acrescidos são

$$\mathcal{S}_\lambda(A) = \frac{\lambda}{2m^2} tr \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\sigma} D_\nu F_\rho{}^\sigma \ , \tag{1.46}$$

e

$$\mathcal{S}_\tau(A) = \frac{\tau}{4m^3} tr \int d^3x F^{\mu\nu} D^2 F_{\mu\nu} \ , \tag{1.47}$$

onde λ, τ são dois parâmetros arbitrários e adimensionais. Os termos (1.46) e (1.47) foram de fato considerados nas referências [18, 19] como termos de *higher derivatives regularization* para o modelo de Yang-Mills com massa topológica.

Vamos escolher então, como ação inicial, a expressão

$$\mathcal{S}_{YM}(A) \ + \ \mathcal{S}_{CS}(A) + \mathcal{S}_\lambda(A) \ . \tag{1.48}$$

Neste caso, os primeiros coeficientes ϑ^n_μ da expansão (1.41) têm a forma

$$
\begin{aligned}
\vartheta^1_\mu &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \ , \\
\vartheta^2_\mu &= \frac{(1-4\lambda)}{8}D^\sigma F_{\sigma\mu} \ , \\
\vartheta^3_\mu &= -\frac{(1-4\lambda)}{16}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}D^\sigma D_\rho F^{\rho\tau} + \frac{g}{48}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}\left[F^{\sigma\rho}, F_\rho^{\ \tau}\right] \ .
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

Analogamente, no caso em que a ação de partida é

$$
\mathcal{S}_{YM}(A) \ + \ \mathcal{S}_{CS}(A) + \mathcal{S}_\tau(A) \ , \tag{1.50}
$$

nós obtemos

$$
\begin{aligned}
\vartheta^1_\mu &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \ , \\
\vartheta^2_\mu &= \frac{1}{8}D^\sigma F_{\sigma\mu} \ , \\
\vartheta^3_\mu &= -\frac{1}{16}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}D^\sigma D_\rho F^{\rho\tau} + \frac{g}{48}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}\left[F^{\sigma\rho}, F_\rho^{\ \tau}\right] + \frac{\tau}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}D^2 F^{\nu\rho} \ .
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

Claro que, com a premissa da presença do termo de Chern-Simons, quaisquer outras combinações tais como $\int trF^2$, $\int trFD^2F$, $\int tr\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\sigma}D_\nu F_\rho^{\ \sigma}$, levarão a resultados semelhantes.

Gostaríamos, finalmente, de citar que a expressão para o coeficiente ϑ^1_μ é independente dos parâmetros, λ e τ, o que aponta para o fato que os dois termos $\mathcal{S}_\lambda(A)$ e $\mathcal{S}_\tau(A)$, das equações (1.46) e (1.47), são respectivamente de ordem $1/m^2$ e $1/m^3$.

1.5 Alguns aspectos conclusivos

Os resultados estabelecidos na seção anterior nos levam a organizar os aspectos conclusivos em duas classes distintas. Na primeira classe serão incluidas as considerações de natureza geométrica. Na segunda classe nós discutiremos aspectos de teoria de campos. Faremos aqui contato com os resultados perturbativos da teoria de Yang-Mills com massa topológica [1, 5, 6, 19, 20, 21, 22]. Tentaremos também fornecer um suporte consistente para uma questão que surge quase naturalmente e que é de grande interesse no sentido de melhorar nosso presente entendimento da ação quântica efetiva $1PI$ das teorias de calibre tridimensionais.

1.5.1 Considerações geométricas

Surge das considerações deste trabalho uma interpretação muito simples e atraente. O termo de Chern-Simons pode de fato ser interpretado como um funcional invariante de calibre no espaço de todas as conexões de calibre possíveis do tipo (1.40). Qualquer ação do tipo Yang-Mills é então reproduzida avaliando o funcional de Chern-Simons em um ponto específico deste espaço, o que aponta para uma escolha específica da conexão de calibre ou, equivalentemente, dos coeficientes covariantes ϑ^n_μ.

Neste sentido, o termo de Chern-Simons pode ser considerado como um gerador topológico para teorias de calibre tridimensionais do tipo Yang-Mills.

Além disso, esta interpretação geométrica fornece uma percepção direta de quão rígido pode ser um objeto topológico. O significado de rigidêz aqui, é claro, se refere à equivalência clássica, a menos de redefinções não lineares e locais, com ações do tipo Yang-Mills na presença do termo de Chern-Simons. Cabe citar aqui, que a rigidez acima mencionada do termo de Chern-Simons foi apontada anteriormente por [23] no contexto das deformações consistentes da Equação Mestra.

1.5.2 Aspectos de teoria de campos

Yang-Mills com massa topológica e finitude ultravioleta

Aspectos clássicos

Mesmo sabendo que a ação de Yang-Mills com termo de massa topológica (1.1) é super-renormalizável por contagem de potências, afirmamos que esta Lagrangeana é finita no ultravioleta para todas as ordens de teoria de perturbação. Esta propriedade foi primeiramente observada ao nível de um loop [1, 5] e foi posteriormente estendida para todas as ordens [6]. A finitude ultravioleta foi provada no calibre de Landau, calibre este que será sempre assumido por nós.

Para fazer uso dos resultados estabelecidos nas seções 3 e 4, vamos primeiro analisar o significado das fórmulas (1.42) e (1.44) de um ponto de vista de teoria de campos. Em particular, a equação (1.44) implica que a ação de Yang-Mills pode ser escrita como uma variação pura de BRST de uma série de potências, que contém termos de dimensões arbitrárias, de acordo com a não linearidade das redefinições de campos (1.6). Isto parece estar em desacordo com a contagem de potências padrão, já que impusemos que o operador diferencial de BRST atue no espaço dos termos locais de dimensão arbitrária. Assim mesmo, podemos dar um significado para a equação (1.44) adotando um ponto de vista mais geral e tomando como ação de partida a série de potências formal

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_{CS}(A) + \frac{1}{4m} tr \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{m^j} \left(\sum_{k=1}^{d_k} \alpha_k^j \mathcal{S}_j^k(A) \right) , \qquad (1.52)$$

onde α_k^j são coeficientes arbitrários e $\mathcal{S}_j^k$ são todas as possíveis ações do tipo Yang-Mills com dimensões mais altas construidas com a curvatura $F_{\mu\nu}$ e suas derivadas covariantes D. O índice k da somatória dupla (1.52) é necessário para termos em conta a degenerescência (d_k) de diferentes ações de Yang-Mills com a mesma dimensão. Notemos também que, de acordo com os resultados das seções 3 e 4, a ação $\mathcal{S}(A)$ da equação (1.52) pode ser colocada na forma de um termo puro de Chern-Simons, isto é, $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A})$, após uma escolha conveniente da conexão de calibre $\widehat{A}$.

Para a ação completamente quantizada no calibre de Landau, teremos

$$\Sigma = \mathcal{S} + tr \int d^3x \left(b\partial A + \partial^\mu \bar{c} D_\mu c + A_\mu^* D^\mu c - g c^* c^2 \right) , \qquad (1.53)$$

onde b e $\bar{c}$ são o multiplicador de Lagrange e o *antighost*. A razão desta escolha é que, se a ação de partida Σ é uma série de potências formal, o operador diferencial de BRST é naturalmente definido no espaço das séries formais de potência.

É interessante notar que este ponto de vista segue de perto as recentes perspectivas sobre renormalização em teorias de calibre apontadas em [24]. Olhando para resultados gerais de cohomologia de teorias de calibre [13, 15], a ação (1.53) é dita renormalizavel na medida que todas as divergências podem ser reabsorvidas pelos infinitos termos de Σ, termos estes que são do tipo Yang-Mills locais e invariantes de BRST.

Ainda que a ação Σ justifique o uso do espaço das séries formais de potências para o operador diferencial de BRST, nós temos sempre o problema do número infinito de parâmetros presentes na expressão (1.52). Entretanto, é fácil ver que todos os coeficientes (m, α_k^j) correspondem a termos que são triviais de BRST [4]. Quando lembramos dos resultados da seção anterior onde vimos que todo termo do tipo Yang-Mills pode ser escrito como uma variação pura de BRST de séries de potências formais, inferimos diretamente que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial m} &= \text{variação de } BRST \ , \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_k^j} &= \text{variação de } BRST \ ,
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

sendo o lado esquerdo da equação (1.54) entendido como séries formais de potências. As equações acima afirmam então que a dependência da ação $\mathcal{S}$ dos parâmetros m, α_k^j pode ser controlada através de uma redefinição não linear do campo de calibre, como mostrado a seguir nas seções que se seguem. A validade, ao nível quântico, da primeira destas equações é fundamental para se entender a finitude desta teoria.

Vemos então que, mesmo que exista um número infinito de parâmetros, a equação (1.54) implica que Σ possui um único parâmetro não trivial g, que corresponde ao parâmetro contido na ação de Chern-Simons,

$$
g\frac{\partial \Sigma}{\partial g} = \mathcal{S}_{CS}(A) + (\text{variação de } BRST) \ . \tag{1.55}
$$

Esta situação é semelhante à de alguns modelos bem conhecidos tais como o modelo sigma não linear bidimensional [25] e o modelo de super Yang-Mills com supersimetria $N = 1$ em quatro dimensões [26] que, apesar da presença de um número infinito de parâmetros, são caracterizados por um conjunto finito de acoplamentos não triviais de BRST. Podemos notar também que a imposição de que apenas um número finito de parâmetros sejam não triviais de BRST é uma condição mais forte que aquela assumida em [24]. Esta imposição, combinada com a completeza dos vínculos estruturais de [24], podem dar um significado mais preciso para teorias que, aparentemente, não são renormalizáveis por contagem de potências.

Como é bem sabido, o tensor de energia-momento clássico $T_{\mu\nu}$, simétrico e invariante de BRST, pode ser obtido através do procedimento padrão de acoplar a ação $\mathcal{S}$ a uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ sendo que, ao final, deve ser tomado o limite em que o espaço-tempo é chato, isto é,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \eta^{\mu\nu}} \right|_{\eta \rightarrow chata} . \tag{1.56}$$

Como o termo de Chern-Simons não se acopla com a métrica, ele não contribui para o tensor $T_{\mu\nu}$.

Temos então que, em função do caráter topológico do termo de Chern-Simons, uma equação semelhante a (1.54) vale para o tensor de energia-momento clássico simétrico e invariante de BRST $T_{\mu\nu}$ que emerge de $\mathcal{S}$,

$$T_{\mu\nu} = \text{variação de } BRST . \tag{1.57}$$

Para fazermos uma análise do caráter quântico das equações (1.54) (1.57), usaremos a técnica de BRST estendida a seguir descrita.

Técnica de BRST estendida para o parâmetro m

A técnica de BRST estendida [27] é o método mais potente para controlar a dependência de uma teoria ao nível quântico dos parâmetros associados a termos exatos de BRST (ver apêndice B). Vamos apresentar aqui como esta técnica pode ser utilizada no caso do parâmetro m da ação Σ na equação (1.53).

A ação Σ obedece à identidade clássica de Slavnov-Taylor

$$tr \int d^3x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} \frac{\delta \Sigma}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^*} + b \frac{\delta \Sigma}{\delta \overline{c}} \right) = 0 \ , \tag{1.58}$$

donde concluimos que o operador linearizado $\mathcal{B}_\Sigma$ definido por

$$\mathcal{B}_\Sigma = tr \int d^3x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta A^{*\mu}} \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c} \frac{\delta}{\delta c^*} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c} + b \frac{\delta}{\delta \overline{c}} \right) \ , \tag{1.59}$$

é nilpotente

$$\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0 \ . \tag{1.60}$$

Como sabemos [4], este operador identifica o operador diferencial de BRST completo atuando nos campos e anticampos.

Lembrando dos resultados das seções 3 e 4, temos

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial m} = \mathcal{B}_\Sigma \Lambda \ , \tag{1.61}$$

onde Λ tem número de ghost -1 e é uma série de potências formal, local e integrada nos campos e anticampos. De acordo com [27], nós introduzimos o termo Λ na ação clássica Σ por meio de um parâmetro constante ξ de número de ghost 1, tal que

$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma + \xi \Lambda \ . \tag{1.62}$$

Vamos calcular agora a quantidade

$$tr \int d^3x \left(\frac{\delta \widetilde{\Sigma}}{\delta A_\mu} \frac{\delta \widetilde{\Sigma}}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta \widetilde{\Sigma}}{\delta c} \frac{\delta \widetilde{\Sigma}}{\delta c^*} + b \frac{\delta \widetilde{\Sigma}}{\delta \overline{c}} \right) \ . \tag{1.63}$$

É esperado que a expressão (1.63) seja não nula, em função de usarmos a ação modificada $\widetilde{\Sigma}$. Entretanto, como $\xi\xi = 0$, nós facilmente chegamos a

$$tr \int d^3x \left(\frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta A_\mu} \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta c} \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta c^*} + b \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta \bar{c}} \right) = -\xi \mathcal{B}_\Sigma \Lambda \; . \tag{1.64}$$

Assim sendo, com

$$\xi \mathcal{B}_\Sigma \Lambda = \xi \frac{\partial\Sigma}{\partial m} = \xi \left(\frac{\partial\widetilde{\Sigma}}{\partial m} - \xi \frac{\partial\Lambda}{\partial m} \right) = \xi \frac{\partial\widetilde{\Sigma}}{\partial m} \; , \tag{1.65}$$

vemos que a ação modificada $\widetilde{\Sigma}$ satisfaz à identidade de Slavnov-Taylor modificada

$$\int d^3x tr \left(\frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta A_\mu} \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta c} \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta c^*} + b \frac{\delta\widetilde{\Sigma}}{\delta \bar{c}} \right) + \xi \frac{\partial\widetilde{\Sigma}}{\partial m} = 0 \; . \tag{1.66}$$

Reconhecemos facilmente nesta expressão um tipo de identidade de Slavnov-Taylor extendida [27]. De fato, de um ponto de vista cohomológico os parâmetros ξ e m formam um dubleto, isto é,

$$\mathcal{B}_{\widetilde{\Sigma}} m = \xi \; , \qquad \mathcal{B}_{\widetilde{\Sigma}} \xi = 0 \; . \tag{1.67}$$

A ausência de anomalias de calibre em três dimensões (ver subseção 1.2.2) garante que a identidade (1.66) vale ao nível quântico

$$\int d^3x tr \left(\frac{\delta\widetilde{\Gamma}}{\delta A_\mu} \frac{\delta\widetilde{\Gamma}}{\delta A^{*\mu}} + \frac{\delta\widetilde{\Gamma}}{\delta c} \frac{\delta\widetilde{\Gamma}}{\delta c^*} + b \frac{\delta\widetilde{\Gamma}}{\delta \bar{c}} \right) + \xi \frac{\partial\widetilde{\Gamma}}{\partial m} = 0 \; . \tag{1.68}$$

Atuando com o operador de teste $\partial/\partial\xi$ na expressão (1.68) e tomando $\xi = 0$ obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma}{\partial m} &= \mathcal{B}_\Gamma \left[\Lambda \cdot \Gamma \right] \; , \\ \Gamma &= \widetilde{\Gamma}\Big|_{\xi=0} \; , \end{aligned} \tag{1.69}$$

O mesmo procedimento se aplica para os parâmetros α_k^j bem como para o tensor de momentum e energia. No último caso a técnica de BRST estendida tem que ser aplicada em segundo. Primeiro nós consideramos a inserção integrada $\int d^3x \left[T_\mu^\mu \cdot \Gamma \right]$, para a qual vale

$$\int d^3x \left[T^\mu_\mu \cdot \Gamma\right] = \text{variação de } BRST\,. \tag{1.70}$$

Uma aplicação ulterior da técnica de BRST estendida, cujos parâmetros dependem localmente do espaço-tempo, permite obtermos os resultados apresentados agora.

Aspectos quânticos

Fazendo uso da técnica do operador de BRST estendido [27] e tendo em mente que em três dimensões não existem anomalias de calibre, segue que as equações (1.54) e (1.57) são facilmente estendidas ao nível quântico, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma}{\partial m} &= \text{variação de } BRST\,, \\
\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha^j_k} &= \text{variação de } BRST\,, \\
\left[T^\mu_\mu \cdot \Gamma\right] &= \text{variação de } BRST + \text{derivada total}\,,
\end{aligned} \tag{1.71}$$

onde, como usual, os termos da esquerda devem ser entendidos como inserções quânticas exatas de BRST de séries de potências formais e T^μ_μ é o traço de $T_{\mu\nu}$.

Isto implica, em particular, que a dependência da teoria quântica do ponto de renormalização μ pode ser controlada pela introdução de termos convenientes exatos de BRST. Sendo estes termos séries de potências formais, eles correspondem a possíveis redefinições não lineares de campos.

As equações (1.71), contidas implicitamente na análise da referência [11], representam nosso entendimento algébrico das propriedades da finitude ultravioleta e do papel da redefinição não linear de campos ao nível quântico.

Foi feita recentemente uma prova diferente e independente da finitude da teoria de Yang-Mills com massa topológica que inclui o anulamento das dimensões anômalas dos campos [22].

Uma questão aberta: a equivalência quântica completa

Talvez a mais intrigante questão que naturalmente surge no presente contexto seja se a equivalência clássica entre a teoria de Yang-Mills com massa topológica e o modelo de Chern-Simons puro, como mostrado na equação (1.5), pode ou não ser estendida ao nível da ação efetiva $1PI$ completa $\Gamma(A)$. Não estamos aptos ainda para dar uma resposta satisfatória e definitiva para esta questão. Apenas alguns termos de $\Gamma(A)$ foram calculados até agora, sendo $\Gamma(A)$ uma série infinita de termos no parâmetro de expansão em loops $\hbar$.

O que nós queremos mostrar aqui é que, apesar do seu carater não local, um grande número de termos que contribuem para $\Gamma(A)$ podem, de fato, ser absorvidos na ação de Chern-Simons através de uma redefinição não local e covariante dos campos.

Quanto ao que se segue, nós iremos nos referir estritamente ao espaço-tempo euclideano plano $\mathcal{R}^3$ governado pela métrica plana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(+,+,+)$.

Vamos iniciar com uma definição mais precisa da ação completa $1PI$. O funcional $\Gamma(A)$ é tomado como sendo a ação efetiva $1PI$ calculada do Yang-Mills com massa topológica sob quantização, no calibre de Landau, onde, no final, os anticampos, os multiplicadores de Lagrange e os ghosts são levados a zero. Deste modo $\Gamma(A)$ depende somente do campo clássico A_μ definido através da transformação de Legendre do gerador das funções de Green conexas $\mathcal{Z}^c(J)$

$$\Gamma(A) = \sum_{n=2}^{\infty} \int d^3x_1....d^3x_n A(x_1)....A(x_n)\Gamma^n(x_{1,....,}x_n) \ , \qquad (1.72)$$

onde $\Gamma^n(x_{1,....,}x_n)$ é a função de Green $1PI$ de n pontos. É importante dizer que os índices de grupo não foram especificados na equação (1.72) porque eles não são relevantes para as considerações feitas neste trabalho.

Vamos citar aqui os fatos principais sobre Chern-Simons puro e Yang-Mills com massa topológica ao nível quântico que serão úteis a seguir:

- $\Gamma(A)$ é invariante de calibre e contém contribuições locais e não locais para cada ordem de teoria de perturbações;

- para uma teoria pura de Chern-Simons a covariância geral não é quebrada ao nível quântico [28, 29, 30, 31, 32], o que implica que a dependência da métrica do espaço-tempo não é física. Vamos também citar que a teoria de Chern-Simons pura é, mesmo que renormalizável por contagem de potências, finita no ultravioleta [28, 29, 30, 31];

- como provado por [6], a teoria de Chern-Simons pura é recuperada se tomarmos o limite de massa infinita $m \to \infty$ na Lagrangeana de Yang-Mills com massa topológica;

- mesmo que o tensor antisimétrico $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ esteja presente, regularizações que preservam explicitamente a invariância de BRST foram construidas para Yang-Mills com massa topológica [6, 19, 20]. Ainda que não seja necessário para a análise algébrica, a existência de regularizações que preservem a simetria de BRST são úteis no sentido de permitir cálculos. Isto significa que a invariância de BRST pode ser mantida manifestamente em todos os passos, o que implica que $\Gamma(A)$ pode ser construida sem sair do espaço dos termos invariantes de calibre.

Vamos focalizar agora a estrutura da ação $1PI$ efetiva $\Gamma(A)$. Desnecessário dizer que $\Gamma(A)$ é, em princípio, um objeto complicado. Mais ainda, devido à invariância de calibre, $\Gamma(A)$ conterá certamente um grande número de termos construidos com a curvatura F e suas derivadas covariantes levando a uma combinação complexa e não local mas, invariante de calibre [5].

Entretanto, é simples de ver que se partimos de uma ação não local e invariante de calibre, construida com F e suas derivadas covariantes na presença do termo de Chern-Simons, a fórmula recursiva (1.20) pode ser adaptada convenientemente para o caso não local, com o resultado que termos não locais podem ser reabsorvidos no Chern-Simons puro, através de uma pura redefinição não local de campos. Gostariamos de salientar que, a despeito da não localidade, o campo de calibre redefinido ainda se transformará como uma conexão, já que os coeficientes que entram na redefinição não local são covariantes, como será mostrado no próximo exemplo. Então, uma grande quantidade de efeitos quânticos advindos dos termos não locais construidos com F podem ser analisados interpretando a teoria de Chern-Simons como um funcional invariante de calibre definido no espaço das conexões de calibre do tipo $\widehat{A} = A + \delta A$, onde δA contém agora termos covariantes locais e não locais, $\delta A = \delta A^{loc} + \delta A^{nloc}$.

Para termos uma melhor compreensão de como as coisas acontecem no caso não local, vamos calcular os primeiros coeficientes, ϑ^1_μ e ϑ^2_μ, para a ação não local

$$\mathcal{S}^{nloc}_{YM}(A) = \frac{1}{4m}\int d^3x d^3y F^2(x)\left|x-y\right| F^2(y) \ , \tag{1.73}$$

com

$$F^2(x) = tr F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \ . \tag{1.74}$$

A expressão (1.73) é um dos termos invariantes e dependentes de F mais simples que é esperado aparecer na expansão em loops de $\Gamma(A)$. Os coeficientes ϑ^1_μ e ϑ^2_μ são facilmente encontrados e fornecem

$$\begin{aligned} \vartheta^1_\mu &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho}(x)\int d^3y\left|x-y\right| F^2(y) \ , \\ \vartheta^2_\mu &= -\frac{1}{8}\left(\int d^3y\left|x-y\right| F^2(y)\right) D^x_\sigma \int d^3z F_\mu{}^\sigma(x)\left|x-z\right| F^2(z) \ , \end{aligned} \tag{1.75}$$

onde D^x_σ é a derivada covariante atuando no ponto x. Então

$$\mathcal{S}_{CS}(A) + \mathcal{S}^{nloc}_{YM}(A) = \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) + O(1/m^3) \ , \tag{1.76}$$

com

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{m}\vartheta^1_\mu + \frac{1}{m^2}\vartheta^2_\mu + O(1/m^3) \ . \tag{1.77}$$

Como havia sido antecipado, os coeficientes ϑ^1_μ e ϑ^2_μ na equação (1.75), ainda que não locais, transformam-se covariantemente, o que implica dizer que o campo redefinido $\widehat{A}_\mu$ é ainda uma conexão. O caráter covariante dos coeficientes ϑ_μ para o caso não local pode provavelmente ser entendido notando que, pelo fato de o Teorema da seção 3 ter um carater puramente geométrico, ele pode em princípio ser aplicado em ações não locais construidas com F e suas derivadas covariantes. Gostariamos de enfatizar que a dependência espaço-temporal entre os termos $F^2(x)$ e $F^2(y)$ na equação (1.73) é completamente irrelevante.

Exemplos mais sofisticados de ações não locais dependentes de F podem ser tomados, levando a resultados semelhantes. Vemos assim que uma grande classe de termos não locais pode ser reabsorvido no Chern-Simons puro. Em nossa opinião esta observação é um sinal de que a rigidez, anteriormente mencionada, do termo topológico de Chern-Simons persiste ao nível quântico. Ainda que tenhamos uma sólida compreensão da cohomologia de BRST no espaço dos funcionais locais [13, 14, 15], a situação é completamente diferente no caso não local. Dentro do nosso conhecimento, não existe nenhuma prova do fato de que termos não locais sejam construidos essencialmente com a curvatura e suas derivadas. Note que não estamos requerendo aqui a caracterização completa dos termos não locais, incluindo o conhecimento da dependência do espaço-tempo das funções de Green $1PI$ de n pontos $\Gamma^n(x_{1,\ldots,}x_n)$. Uma simples caracterização que garanta a presença da curvatura F pode ser suficiente para estabelecer a equivalência quântica entre $\Gamma(A)$ e $\mathcal{S}_{CS}(A)$.

Vamos concluir esta seção apontando um possível caminho a favor desta hipótese. As considerações acima lembram fortemente a sugestão feita por [5] (ver seção IV em particular) a partir dos cálculos a um e dois loops da teoria de Yang-Mills com massa topológica e da teoria de Chern-Simons [1, 5, 6, 19, 20, 28, 29].

Após termos reabsorvido todos os possíveis termos não locais, deveríamos estar aptos a escrever a ação efetiva $1PI$ completa $\Gamma(A)$ na seguinte forma

$$\Gamma(A) = \zeta \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A}) \ + \Xi \ , \tag{1.78}$$

com

$$\widehat{A} = A + \delta A^{loc} + \delta A^{nloc} \ . \tag{1.79}$$

O coeficiente ζ da equação (1.78) , é uma série de potências em $\hbar$ relacionados às próprias possíveis correções finitas do termo de Chern-Simons e pode ser reabsorvido por uma ulterior redefinição multiplicativa do campo de calibre e da constante de acoplamento g. O termo extra Ξ na equação (1.78) representa todos os termos não locais e invariantes de calibre, que não podem ser reabsorvidos através de uma redefinição não linear de campos. Entretanto Ξ tem alguns vínculos. Ele não contém m, por exemplo, devido ao fato de que, pela equação (1.71), termos que dependem de m podem ser reabsorvidos através de redefinições não lineares de campos. Isto significa que Ξ deve sobreviver ao limite de massa infinita $m \to \infty$. Então, as considerações de Chern-Simons puro devem ser aplicáveis. Assim sendo, de acordo com [5] (ver seção IV), Ξ deve ser nulo, devido a um argumento de paridade [5] e à covariância de Chern-Simons no calibre de Landau [28, 29, 30, 31, 32]. Em resumo, a ação efetiva $1PI$ do Yang-Mills com massa topológica no espaço-tempo plano $\mathcal{R}^3$ pode ser relacionada com o termo de Chern-Simons puro, a menos de redefinições não lineares de campos. Este comportamento pode ser completamente diferente para uma variedade curva genérica, bem como outros tipos de invariantes topológicos podem aparecer, tais como a torsão de Ray-Singer [33].

É importante sublinhar aqui que a redefinição não linear de campos foi anteriormente usada por [20] para relacionar a ação efetiva a um loop de Chern-Simons no calibre do cone de luz com a ação pura de Chern-Simons.

Capítulo 2

Técnica das Deformações Consistentes

2.1 Introdução

As simetrias de um sistema, isto é, suas propriedades de invariância sob transformações locais ou globais, são de grande valia na solução de problemas físicos e matemáticos. Simetrias em física implicam leis de conservação. Por exemplo, a homogeneidade do espaço implica que um sistema isolado é invariante sob translações, o que leva à conservação do momento linear total de um sistema isolado. Isto permite uma grande simplificação na análise do movimento de um sistema de partículas que interagem entre si, já que podemos investigar o movimento do centro de massa do sistema independentemente do movimento de cada partícula em relação a ele [34].

Consideremos como um segundo exemplo de simetria sistemas que apresentam uma invariância de calibre, como é o caso do eletromagnetismo de Maxwell. Tal invariância tem grande importância no processo de renormalização da ação quantizada, na medida que limita o número de contratermos possíveis e torna a teoria quântica unitária.

No contexto das teorias de calibre, alguns sistemas necessitam de um número maior de graus de liberdade, como é o caso da ação com simetria $SU(2) \times U(1)$, que descreve o modelo padrão das partículas elementares. Neste caso, ainda que a transformação dos campos seja não linear (não-abeliana), ela leva à renormalizabilidade da teoria no ultravioleta.

Lagrangeanas com simetrias não lineares podem ser obtidas a partir de um processo de deformação de uma simetria linear anteriormente existente em uma Lagrangeana inicial. Para este fim, existem dois procedimentos comumente usados, a saber: o método de Noether [35] e o método das deformações consistentes [36].

2.2 Método de Noether

O procedimento conhecido como método de Noether consiste de três partes que ilustraremos através de um exemplo aplicativo, a saber: acrescendo um índice de grupo ao campo A_μ $\left(A_\mu \rightarrow A^a_\mu\right)$ da Lagrangeana de Maxwell, obteremos a Lagrangeana de Yang-Mills com simetria não-abeliana.

Como ponto de partida, tomamos a Lagrangeana

$$S^{(0)} = -\frac{1}{4}\int d^4x F^{(0)a\mu\nu} F^{(0)a}_{\mu\nu}\,, \tag{2.1}$$

onde

$$F^{(0)a}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\,. \tag{2.2}$$

O índice a tem valores que vão de 1 até N, onde N corresponde ao número de geradores do grupo de simetria para o qual se quer generalizar. O segundo passo é a identificação das simetrias local e global. Para o caso em estudo, as simetrias apresentam as seguintes propriedades:

(i) simetria local

$$\begin{aligned} \delta\left(\varepsilon\right) A^a_\mu &= \partial_\mu \varepsilon^a\,, \\ \delta\left(\varepsilon\right) F^{(0)a}_{\mu\nu} &= 0\,, \\ \delta\left(\varepsilon\right) S^{(0)} &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

(ii) simetria global

$$\begin{aligned}
\delta(\omega) A_\mu^a &= f^{abc}\omega^b A_\mu^a, \\
\delta(\omega) F_{\mu\nu}^{(0)a} &= f^{abc}\omega^b F_{\mu\nu}^{(0)c}, \\
\delta(\omega) S^{(0)} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde f^{abc} são constantes de estrutura do grupo em questão e ω^a é um parâmetro global. Em seguida temos que tornar local a simetria que anteriormente era global. Quando tomamos $\omega^a = \omega^a(x)$, a simetria $\delta(\omega)$ é perdida por um termo da forma

$$\delta(\omega) S^{(0)} = \int d^4x \partial_\mu \omega^a J^{a\mu}, \tag{2.5}$$

com

$$J^{a\mu} = -f^{abc} A_\nu^b F^{(0)c\mu\nu}. \tag{2.6}$$

A idéia do método é recupera-la, corrigindo $S^{(0)}$ com um termo adicional, de forma a compensar a variação de $S^{(0)}$. Introduzimos então um termo adicional, de tal forma que

$$S^{(1)} = S^{(0)} - \frac{1}{2} g \int d^4x A_\mu^a J^{a\mu}, \tag{2.7}$$

onde se introduziu a constante de acoplamento g para parametrizar a autointeração $A_\mu^a J^{a\mu}$. Vamos agora unir as duas transformações, (2.3) e (2.4), numa transformação local que some as transformações anteriores, e tomemos a relação entre os parâmetros das transformações como sendo dada por $\varepsilon^a(x) = \frac{1}{g}\omega^a(x)$. Sendo assim,

$$\delta A_\mu^a = f^{abc}\omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu \omega^a. \tag{2.8}$$

Com esta escolha, o segundo termo de (2.8) gera, em $S^{(1)}$, o termo $\int d^4x \partial_\mu \omega^a J^{a\mu}$. Com isto vemos que, na ordem zero em g, a simetria é reobtida. No entanto, um termo de primeira ordem em g surge, a saber

$$\delta S^{(1)} = -g \int d^4x \left(f^{cab} A^a_\mu A^b_\nu\right) \left(f^{cnm} A^{n\nu} \partial^\mu \omega^m\right) . \tag{2.9}$$

Este termo sugere a forma aproximada do próximo termo a ser somado na ação $S^{(1)}$. O termo necessário é tal que

$$S^{(2)} = S^{(1)} + \frac{g^2}{4} \int d^4x \left(f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right) \left(f^{ade} A^{d\nu} A^{e\mu}\right) \tag{2.10}$$

Utilizando agora a identidade de Bianchi, é fácil mostrar que $\delta S^{(2)} = 0$, e que $S^{(2)}$ toma a forma

$$S^{(2)} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{a\mu v} F^a_{\mu\nu} , \tag{2.11}$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu . \tag{2.12}$$

O fechamento da álgebra

$$[\delta_1, \delta_2] A^a_\mu = \delta_3 A^a_\mu , \tag{2.13}$$

com

$$\omega^a_3 = -f^{abc} \omega^b_1 \omega^c_2 , \tag{2.14}$$

e a invariância da ação $S^{(2)}$, nos dá a certeza de estarmos apresentando uma teoria completa com invariância local.

Dois outros exemplos ilustrativos de aplicação deste método são a construção do modelo de Yang-Mills supersimétrico a partir do modelo linear [37] e a obtenção da ação de Einstein-Hilbert a partir da Lagrangeana que descreve a partícula de spin 2 conhecida como Lagrangeana de Fierz-Pauli [35].

2.3 Método das deformações consistentes

O método que iremos descrever a seguir é baseado no formalismo de anticampos (ou fontes de BRST). Este método permite a construção dos termos de interação via deformações consistentes da equação mestra. Seguindo o trabalho original [36], o ponto de partida é a ação invariante $S_{inv}\left[\phi^a\right]$ com simetrias de calibre local

$$\delta_\varepsilon \phi^a = R^a_\alpha \varepsilon^\alpha, \qquad \delta_\varepsilon S_{inv}\left[\phi^a\right] = 0, \tag{2.15}$$

sendo R^a_α o operador que faz a transformação dos campos. De acordo com o formalismo de anticampos (para uma revisão apropriada das subseqüentes considerações cohomológicas ver [16]), nós introduzimos o ghost C^α e um conjunto conveniente de anticampos ϕ^{*A}, tal que a ação

$$S_0\left[\phi^A, \phi^{*A}\right] = S_{inv}\left[\phi^a\right] + \int d^4x \phi^*_a R^a_\alpha C^\alpha + ... , \tag{2.16}$$

seja solução da equação mestra

$$(S_0, S_0) = \int d^4x \frac{\delta S_0}{\delta \phi^A} \frac{\delta S_0}{\delta \phi^{*A}} = 0, \tag{2.17}$$

onde $\phi^A = (\phi^a, C^\alpha)$ denota coletivamente todos os campos e ghosts Os termos pontilhados de (2.16) se referem a termos de fixação de calibre ou possíveis termos quadráticos nos anticampos. O operador de BRST s no espaço dos campos e anticampos é definido através do antibraket (Ver apêndice A para maiores detalhes)

$$s\phi^A = \left(\phi^A, S_0\right) = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^{*A}}, \qquad s\phi^{*A} = \left(\phi^{*A}, S_0\right) = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^A}. \tag{2.18}$$

Vamos agora supor que a ação S_0 se refere a uma teoria de campos livres e que não contenha nenhuma constante de acoplamento ou parâmetros de massa e consideremos a possibilidade de introduzirmos interações consistentes à ação S_0, isto é,

$$S_0 \rightarrow S = S_0 + g_i S_i + g_i g_j S_{ij} + ... \tag{2.19}$$

tal que a ação resultante S ainda satisfaça à Equação Mestra deformada

$$(S,S)=0\,. \tag{2.20}$$

Em função da localidade e renormalizabilidade por contagem de potências, nós iremos nos limitar às interações S_i que sejam polinômios locais e integrados nos campos e anticampos com dimensão menor ou igual a quatro. Isto significa que os parâmetros da expansão g_i devem ter dimensão positiva em unidade de massa, o que significa que eles têm o significado de constantes de acoplamento e massas. Como foi mostrado na referência [36], o vínculo de validade da Equação Mestra (2.20) automaticamente implica a existência de uma ação deformada $S^g_{inv}\left[\phi^A\right]$,

$$S^g_{inv}\left[\phi^A\right]=S\left[\phi^A,\phi^{*A}=0\right]=S_{inv}\left[\phi^A\right]+O(g_i), \tag{2.21}$$

que é deixada invariante sob uma versão deformada e consistente da simetria de calibre original, isto é,

$$\delta^g_\varepsilon S^g_{inv}\left[\phi^A\right]=0, \tag{2.22}$$

com

$$\begin{aligned} \delta^g_\varepsilon\phi^a &= \frac{\delta S}{\delta\phi^{*a}}\left[\phi^A,\phi^{*A}=0\right], \qquad (C^\alpha\rightarrow\varepsilon^\alpha)\,, \\ \delta^g_\varepsilon\phi^a &= R^a_\alpha\varepsilon^\alpha+O(g_i). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Com as equações (2.21) e (2.23) verifica-se que podemos acrescentar termos de interações invariantes à ação livre inicial deformando convenientemente a simetria de calibre, deformação esta que é feita ordem por ordem em g_i. Por exemplo, no caso em que a ação inicial é a ação de Maxwell, a construção acima leva naturalmente à ação não-abeliana de Yang-Mills com os conhecidos termos de interação cúbico e quártico. Na verdade, a maior utilidade de se trabalhar com a Equação Mestra está no fato de que a procura de termos não triviais de BRST pode ser reduzida a um problema de cohomologia do operador de BRST abeliano (2.18) , cujas classes de cohomologia são eventualmente conhecidas ou mais facilmente calculáveis. Esta simplificação vem do fato de que interações que são triviais de BRST representam apenas redefinições dos campos [36]. Para uma melhor compreensão deste ponto, vamos expandir a Equação Mestra (2.20) em potências dos parâmetros deformadores g_i :

$$(S_0, S_0) = 0,$$

$$(S_0, S_i) = 0$$

$$2\,(S_0, S_{ij}) + (S_i, S_j) = 0 \qquad (2.24)$$

A primeira das equações é obviamente a Equação Mestra para a teoria livre S_0, e é satisfeita a priori. Da segunda condição nós vemos que S_i tem que ser invariante sob a ação do operador de BRST abeliano $s\,. \equiv (.,S_0)$. Vale dizer que interações do tipo $S_i = (T_i, S_0)$, onde T_i é um polinômio local e integrado, tem que ser negligenciadas já que correspondem a redefinições de campos [36]. Isto significa que termos de interação não triviais de primeira ordem em g_i que podem ser acrescentados na ação livre S_0, têm que estar na cohomologia de s. No que se refere à terceira equação, é fácil de ver que ela admite solução somente se o antibracket (S_i, S_j) puder ser escrito na forma de um cociclo exato, isto é, $(S_i, S_j) = (T_{ij}, S_0)$, para algum polinômio local e integrado T_{ij}. Por outro lado, se (S_i, S_j) está na cohomologia de s, há uma obstrução cujo efeito é gerar vínculos entre as várias constantes g_i. As mesmas conclusões valem para as equações que se referem às ordens mais altas da expansão da Equação Mestra deformada (2.20). Em outras palavras, em cada passo, os parâmetros g_i devem satisfazer a um certo número de condições. No entanto, pode acontecer que estas condições só sejam verificadas se um subconjunto destes parâmetros for nulo. Isto significaria que a interação em primeira ordem nestes parâmetros estaria proibida, ou seja, o processo de deformação seria restringido a um sub-grupo de acoplamentos. Como veremos no próximo capítulo, este é o caso da generalização não-abeliana cuja possibilidade nós estamos estudando. Como nós iremos mostrar, a ação abeliana do BF de Cremmer-Sherk [2] e as duas simetrias de calibre, que esta ação apresenta, só podem ser consistentemente deformadas se o produto da constante de acoplamento de Yang-Mills e da massa topológica m for nula, implicando que não existe uma generalização não-abeliana e renormalizável por contagem de potências do termo de massa topológica $m\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}B_{\rho\sigma}$.

Capítulo 3

O Teorema No-Go

3.1 Versão abeliana

No contexto da busca de novos mecanismos de geração de massa é sabido que, para o caso de espaços-tempo tridimensionais, a ação topológica de Chern-Simons é capaz de fornecer massa para o campo de Yang-Mills [1]. Esta afirmação tem validade nos casos abeliano e não abeliano. A questão que surge imediatamente é se existe ou não um mecanismo equivalente em quatro dimensões. No caso abeliano uma resposta foi apontada na referência [2] onde se apresentou um mecanismo análogo, que faz uso de um campo tensorial antisimétrico $B_{\mu\nu}$ acoplado à conexão de calibre A_μ. A ação é

$$S_m^{ab} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} m \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} \right) , \tag{3.1}$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $H_{\mu\nu\rho}$ o tensor completamente anti-simétrico

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \,. \tag{3.2}$$

A ação (3.1) é deixada invariante pelas transformações locais

$$\delta^g A_\mu = \partial_\mu \varepsilon, \qquad \delta^g B_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3}$$

e

$$\delta^t A_\mu = 0, \qquad \delta^t B_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \,. \tag{3.4}$$

As equações (3.3) e (3.4) correspondem à transformação de calibre usual e à transformação vetorial relacionada ao carater tensorial do campo $B_{\mu\nu}$. O parâmetro m do termo topológico $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}B_{\rho\sigma}$ tem dimensão de massa. É fácil verificar que este termo fornece um polo não nulo na função de Green de dois pontos levando à existência de uma massa topológica invariante de calibre [2],

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{1}{p^2 - 4m^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right] \,. \tag{3.5}$$

Esta construção apresenta a grande vantagem de dar massa ao campo de calibre A_μ mantendo em três o número de graus de liberdade da ação completa (3.1), ou seja, o número de graus de liberdade de um campo vetorial massivo de spin 1.

Para provarmos esta afirmação, seguiremos os passos da primeira referência de [2]. Notemos primeiramente que o tensor $H_{\mu\nu\rho}$ tem 4 componentes independentes, e pode, portanto, ser escrito em função de um quadrivetor ϕ_μ como

$$H_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\phi^\sigma . \tag{3.6}$$

É direto que, usando a contração Minkowskiana do tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2\left(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\alpha\right)$, podemos escrever

$$\phi_\mu = \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\nu\rho\sigma} \,. \tag{3.7}$$

onde ϕ_μ tem divergência nula, $\partial^\mu \phi_\mu = 0$. Isto significa que as componentes de ϕ não são completamente independentes. Se introduzirmos um multiplicador de Lagrange χ, tal que sua equação de movimento reflita a condição de divergência nula de ϕ, a ação resultante é expressa por

$$S_m^{ab} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi_\mu \phi^\mu + 2m\phi^\mu A_\mu + 2\phi^\mu \partial_\mu \chi \right) . \tag{3.8}$$

Quando tomamos a transformação

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{m} \partial_\mu \chi , \tag{3.9}$$

obtemos

$$S_m^{ab} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi_\mu \phi^\mu + 2m\phi^\mu A'_\mu \right) . \tag{3.10}$$

Finalizando a diagonalização, tomemos

$$h_\mu = \phi_\mu + 2mA'_\mu , \tag{3.11}$$

para obter

$$S_m = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - 2m^2 A'^\mu A'_\mu + \frac{1}{2} h^\mu h_\mu \right) . \tag{3.12}$$

Desde que a ação não contém termos cinéticos para o campo h, ele não propaga nenhum grau de liberdade físico. Com isto concluimos que a ação mostrada em (3.1) contém apenas três graus de liberdade relacionados a um campo vetorial massivo.

Nosso objetivo, neste Capítulo, é discutir a possível generalização não-abeliana da ação (3.1). A análise será feita com o uso do método das deformações consistentes desenvolvido na referência [36] e apresentada no Capítulo anterior. Do resultado de nossa análise surge um teorema No-Go, mostrando a impossibilidade da generalização não-abeliana da ação (3.1), que mantenha o mesmo conjunto de simetrias locais, o mesmo conteúdo de campos e a propriedade de renormalizabilidade por contagem de potências [38]. Em outras palavras, generalizações não-abelianas da ação (3.1) necessitam de acoplamentos não renormalizáveis como na referência [39], ou da introdução de campos extras.

3.2 O Teorema No-Go

Vamos agora aplicar a técnica das deformações consistentes, construida no Capítulo anterior, à análise de uma possível extensão não-abeliana da ação (3.1) . Nós iremos partir da seguinte ação livre e invariante de calibre

$$\Sigma_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{12} H^a_{\mu\nu\rho} H^{a\mu\nu\rho} \right), \tag{3.13}$$

onde $F^a_{\mu\nu}$ e $H^a_{\mu\nu\rho}$ são as curvaturas abelianas

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu, \tag{3.14}$$

e

$$H^a_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B^a_{\nu\rho} + \partial_\nu B^a_{\rho\mu} + \partial_\rho B^a_{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

para um grupo com n geradores $(a = 1, ..., n)$. É bom lembrar que, dentro do contexto das deformações consistentes da Equação Mestra, o parâmetro massivo m da equação (3.1) é considerado como um parâmetro deformador como qualquer outra constante de acoplamento. Isto implica que o termo topológico $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} B_{\rho\sigma}$ irá aparecer como uma deformação consistente de primeira ordem.

A ação (3.13) é obviamente deixada invariante pelas transformações de calibre

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon A^a_\mu &= \partial_\mu \varepsilon^a, \qquad \delta_\varepsilon B^a_{\mu\nu} = 0 \\ \delta_\omega A^a_\mu &= 0, \qquad \delta_\omega B^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_\nu - \partial_\nu \omega^a_\mu \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como existe um modo zero $\delta_\omega \omega^a_\mu = \partial_\mu \lambda^a$ da transformação de $B^a_{\mu\nu}$ (ela é reduzível) nós introduzimos um conjunto de ghosts $(c^a, \eta^a_\mu, \rho^a)$, onde c^a e η^a_μ estão relacionados às transformações de calibre (3.16) e ρ^a é o ghost relacionado com a redutibilidade. Quando introduzimos os anticampos $(A^{*a\mu}, B^{*a}_{\mu\nu}, c^{*a}, \eta^{*a\mu}, \rho^{*a})$ através da ação de anticampos Σ_{ant}

$$\Sigma_{ant} = \int d^4x \left(A^{*\mu}_a \partial_\mu c^a + B^{*\mu\nu}_a \partial_\mu \eta^a_\nu + \eta^{*\mu}_a \partial_\mu \rho^a \right), \tag{3.17}$$

obtemos a ação livre completa

$$S_0 = \Sigma_0 + \Sigma_{ant}, \tag{3.18}$$

que satisfaz à Equação Mestra

$$(S_0, S_0) = 0, \tag{3.19}$$

onde

$$(S_0, S_0) = \int d^4x \left(\frac{\delta S_0}{\delta A^{a\mu}} \frac{\delta S_0}{\delta A^*_{\alpha\mu}} + \frac{1}{2} \frac{\delta S_0}{\delta B^{a\mu\nu}} \frac{\delta S_0}{\delta B^*_{\alpha\mu\nu}} + \frac{\delta S_0}{\delta c^a} \frac{\delta S_0}{\delta c^*_\alpha} + \frac{\delta S_0}{\delta \eta^{a\mu}} \frac{\delta S_0}{\delta \eta^*_{\alpha\mu}} + \frac{\delta S_0}{\delta \rho^a} \frac{\delta S_0}{\delta \rho^*_\alpha} \right). \tag{3.20}$$

De acordo com a equação (2.18) , a transformação de BRST nilpotente é dada por

$$\begin{aligned} sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a, & sA^{*a}_\mu &= \partial^\nu F^a_{\nu\mu}, \\ sB^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu \eta_\nu - \partial_\nu \eta_\mu, & sB^{*a}_{\mu\nu} &= \partial^\rho H^a_{\rho\mu\nu}, \\ s\eta^a_\mu &= \partial_\mu \rho^a, & s\eta^{*a}_\mu &= -\partial^\nu B^{*a}_{\mu\nu} \\ sc^a &= 0, & sc^{*a} &= \partial^\mu A^{*a}_\mu. \\ s\rho^a &= 0, & s\rho^{*a} &= -\partial^\mu \eta^{*a}_\mu \end{aligned} \tag{3.21}$$

É importante salientar que mesmo que os anticampos (c^*_a, ρ^*_a) conjugados aos ghosts (c_a, ρ_a) não apareçam explicitamente na expressão (3.17) , já que c^a e ρ^a não se transformam sob a atuação de s no limite abeliano, eles são necessários para permitir uma deformação das transformações e da álgebra de calibre [36]. Vamos mostrar, para uso posterior, os números quânticos de todos os campos e anticampos.

	A^a_μ	$B^a_{\mu\nu}$	c^a	η^a_μ	ρ^a	A^{*a}_μ	$B^{*a}_{\mu\nu}$	c^{*a}	η^{*a}_μ	ρ^{*a}
N_g	0	0	1	1	2	-1	-1	-2	-2	-3
dim	1	1	0	0	-1	3	3	4	4	5

número de ghost e dimensões

Vamos agora caracterizar os possíveis termos de interação S_i, que podem ser acrescentados à ação (3.18), e que preservam a Equação Mestra (3.19). Seguindo o esquema algébrico do Capítulo anterior, as interações consistentes que podem ser introduzidas em primeira ordem nos parâmetros deformadores são termos não triviais da equação

$$(S_0, S_i) = 0, \tag{3.22}$$

onde S_i são polinômios locais e integrados com número de ghost zero e dimensão quatro.

A solução de (3.22) para um campo de calibre que é uma p-forma foi estudada na referência [40] e segue três categorias: (i) as que não deformam a simetria de calibre; (ii) as que deformam a simetria de calibre mas não a álgebra de calibre; (iii) as que deformam as transformações e a álgebra de calibre.

A primeira categoria contém funções invariantes de calibre (= funções das componentes da curvatura e suas derivadas) bem como termos do tipo Chern-Simons. Os únicos candidatos permitidos pela invariância de Lorentz e pela contagem de potências são os termos cinéticos $\sim F^2$, H^2 (que já estão presentes na Lagrangeana original) e o termo do tipo Chern-Simons $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}$ (o termo do tipo Chern-Simons $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H^a_{\mu\nu\rho}A^a_\sigma$ difere de $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}$ por uma derivada total, logo estes termos não são independentes). Isto implica dizer que existe somente um novo vértice independente na primeira categoria, que é denotado por S_2,

$$S_2 = m\int d^4x \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}\right) . \tag{3.23}$$

A segunda categoria envolve interações do tipo Noether $A^a_\mu j^{a\mu}$ e $B^a_{\mu\nu}k^{a\mu\nu}$, onde j^a_μ são correntes conservadas invariantes de calibre, enquanto $k^a_{\mu\nu}$ são correntes conservadas invariantes de calibre tensoriais antisimétricas. $(\partial_\mu k^{\mu\nu}_a = 0)$. Existem somente dois tipos de correntes conservadas antisimétricas não triviais e invariantes de calibre, que são $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}_a$ e $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{H}^a_\rho\overline{H}^b_\sigma$ [40] onde $\overline{H}^a_\mu$ é a 1-forma dual de $H^a_{\mu\nu\rho}$. O tensor conservado $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{H}^a_\rho\overline{H}^b_\sigma$, que fornece o acoplamento de Freedman-Townsend [39], é excluido via renormalizabilidade por contagem de potências, já que ele requer uma constante de acoplamento com dimensão massiva -1. Com isto ficamos só com $B^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}$. Analogamente, existem infinitos termos possíveis invariantes de calibre para a corrente conservada j^a_μ, mas a renormalizabilidade por contagem de potências elimina todos os acoplamentos da forma $A^a_\mu j^{a\mu}$, exceto $A^a_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H^a_{\nu\rho\sigma}$ e $A^a_\mu \partial_\nu F^{a\mu\nu}$. Mas $A^a_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H^a_{\nu\rho\sigma}$ é equivalente ao termo de Chern-Simons (3.23), enquanto $A^a_\mu \partial_\nu F^{a\mu\nu}$ é nulo *on-shell* e pode ser reabsorvido por redefinições dos campos. Resumindo, existe somente um acoplamento novo da segunda categoria, ou seja, $\mu B^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$, onde μ é um parâmetro com dimensão de massa. Este acoplamento é do tipo Chapline-Manton [41] e tem a seguinte extensão invariante de BRST,

$$S_3 = \mu \int d^4x \left(\frac{1}{2} B^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + A^{*a\mu} \eta^a_\mu + c^{*a} \rho^a \right) . \tag{3.24}$$

É interessante notar que a expressão (3.24) permite, para o caso abeliano, o surgimento de um termo de massa relacionado a um mecanismo de geração de massa não topológica. É imediato notar que a ação abeliana

$$\begin{aligned} S^{ab}_\mu &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} - \mu B_{\mu\nu} \right)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \qquad (3.25) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{\mu}{2} B_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right) , \end{aligned}$$

que é deixada invariante sob as transformações

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon + \mu \varepsilon_\mu \, , \qquad \delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \, , \tag{3.26}$$

é tal que os termos $B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, em (3.25), fornecem massas não topológicas para os campos $B_{\mu\nu}$ e A_μ. A ação (3.25) foi considerada anteriormente na referência [42]. Note que um campo do tipo 2-forma massivo em quatro dimensões descreve partículas massivas de spin 1, exatamente como a 1-forma.

Finalmente, a terceira categoria contém somente o vértice familiar da interação cúbica de Yang-Mills com o parâmetro adimensional de interação g (ver segunda referência de [40]),

$$S_1 = g \int d^4x f^{abc} \left(-\frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} A^{b\mu} A^{c\nu} + A^{*a}_\mu A^{b\mu} c^c + \frac{1}{2} c^{*a} c^b c^c \right) \tag{3.27}$$

Cabe salientar que a equação (3.27) não pode vir acompanhada por uma deformação do tipo $A^a_\mu B^b_{\rho\sigma} H^{c\mu\rho\sigma} f_{abc}$. Este vértice de interação descreve o acoplamento mínimo do campo de Yang-Mills com um campo carregado $B^a_{\mu\nu}$ na representação adjunta. Ele tem a forma do tipo Noether $A^a_\mu j^{a\mu}$ onde a corrente $j^a_\mu = B^b_{\rho\sigma} H^c_{\mu\rho\sigma} f_{abc}$ não é invariante sob as transformações de calibre da 2-forma $B_{\mu\nu}$. Por esta razão, o termo $A^a_\mu B^b_{\rho\sigma} H^{c\mu\rho\sigma} f_{abc}$ é também não invariante de calibre e portanto não define um observável. Segue então que este termo não pode ser uma deformação consistente.

Tendo caracterizado as possíveis interações não triviais, que podem ser adicionados em primeira ordem nos parâmetros deformadores (g, m, μ), vamos voltar ao estudo das ordens superiores nas condições de consistência fixadas pela validade da Equação Mestra deformada. Como vimos anteriormente, a condição de consistência em segunda ordem, isto é, a terceira equação do sistema (2.24), pode ser resolvida somente se os antibrackets (S_i, S_j), com $i, j = 1, 2, 3$, puderem ser escritos como cociclos exatos de BRST. O antibracket (S_2, S_2) é automaticamente nulo, desde que S_2 é independente dos anticampos. Somando-se a isto, os vínculos que seguem de (S_1, S_1) são as equações usuais que levam ao vértice de Yang-Mills puro e são satisfeitos quando identificamos os parâmetros f^{abc} como as constantes de estrutura do grupo de Lie. Considerando agora os antibrackets (S_2, S_3) e (S_3, S_3), vemos que eles são triviais de BRST

$$(S_2, S_3) = \frac{2}{3} m\mu \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H^a_{\mu\nu\rho} \eta^a_\sigma = s\left(\frac{m\mu}{2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^a_{\mu\nu} B^a_{\rho\sigma}\right) ,$$

$$(S_3, S_3) = -2\mu^2 \int d^4x \partial^\mu B^a_{\mu\nu} \eta^{a\nu} = s\left(\frac{\mu^2}{2} \int d^4x B^{a\mu\nu} B^a_{\mu\nu}\right) , \tag{3.28}$$

de maneira que não apresentam nenhuma obstrução. Vamos agora analisar os termos (S_1, S_3) e (S_1, S_2), dados respectivamente por

$$\begin{aligned}(S_1, S_3) \;=\; & -g\mu \int d^4x \left(f^{abc} F^a_{\mu\nu} A^{b\mu} \eta^{c\nu} - \partial^\mu \left(A^b_\mu A^c_\nu\right) \eta^a_\nu + \left(\partial^\mu B^a_{\mu\nu}\right) A^{b\nu} c^c \right. \\ & \left. - A^{*a}_\mu c^c \eta^{b\mu} - A^{*a}_\mu A^{b\mu} \rho^c - c^{*a} c^b \rho^c\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$(S_1, S_2) = -\frac{2}{3} mg \int d^4x f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H^a_{\mu\nu\rho} A^b_\sigma c^c \,. \tag{3.30}$$

É fácil de verificar que as expressões acima não são triviais de BRST, levando então a uma obstrução real para o procedimento de deformação da Equação Mestra. No caso da expressão (3.29) observamos que a dependência dos anticampos não contém derivadas no espaço-tempo. Por outro lado, das equações (3.21) vemos que as transformações de BRST que levam nos anticampos sempre introduzem derivadas no espaço-tempo, o que implica que (S_1, S_3) não pode ser escrito como uma variação de BRST pura. Semelhantemente, uma simples contagem de derivadas no espaço-tempo que aparecem na expressão (3.30) e das que aparecem nas transformações de BRST mostradas em (3.21) , mostra que o único candidato a reproduzir o antibracket (S_1, S_2) como variação trivial de BRST é dado por

$$\int d^4x f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^a_{\mu\nu} A^b_\rho A^c_\sigma \,. \tag{3.31}$$

No entanto, observamos que

$$s\left(\int d^4x f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^a_{\mu\nu} A^b_\rho A^c_\sigma\right) = 2\int d^4x f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\partial_\mu \eta^a_\nu A^b_\rho A^c_\sigma + B^a_{\mu\nu} \partial_\rho c^b A^c_\sigma\right) \,. \tag{3.32}$$

Como podemos ver, a variação BRST de (3.31) contém univocamente η^a_μ, o que implica dizer que (S_1, S_2) é um elemento não trivial da cohomologia do operador de BRST.

Vemos assim que a implementação consistente do método das deformações da Equação Mestra em segunda ordem requer que os dois parâmetros massivos, m e μ, satisfaçam os seguintes vínculos:

$$\begin{aligned} g\mu &= 0 \,, \\ gm &= 0 \,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Isto implica dizer que se insistirmos em acrescentar o termo de Yang-Mills na ação, teremos que $\mu = 0$ e $m = 0$. Por outro lado, se escolhermos implementar os termos massivos μ ou m, a interação de Yang-Mills é inteiramente perdida ($g = 0$) e nós ficamos com os dois modelos massivos abelianos apresentados nas equações (3.1) e (3.25) para um conjunto de n campos não interagentes. [Ambos os termos massivos podem ser considerados simultaneamente já que (S_2, S_3) e (S_3, S_3) são termos triviais de BRST].

O que estamos mostrando é, em essência, que não é possível generalizar a ação massiva dada em (3.1) para uma ação não-abeliana, local e renormalizável por contagem de potências que contenha o mesmo conteúdo de campos e tenha o mesmo conjunto de simetrias. Isto conclui a demonstração do teorema no-go sobre a introdução da massa topológica em quatro dimensões para um grupo não abeliano.

3.3 Comentários

Como qualquer teorema No-Go, nosso resultado não é mais forte que as premissas assumidas. Primeiro, excluimos acoplamentos que não sejam renormalizáveis por contagem de potências, já que nosso objetivo é construir uma alternativa ao mecanismo de Higgs com as mesmas propriedades quânticas desejadas. Se nós relaxamos esta condição (e isto é sugerido por um enfoque mais moderno da teoria da renormalização apresentado em [24, 43]), podemos construir uma Lagrangeana que incorpore os termos de massa topológica e o acoplamento de Yang-Mills. Esta Lagrangeana contém também o termo de interação não renormalizável por contagem de potências de Freedman-Townsend e foi obtida explicitamente na referência [39] (ver também [44]). Ela contém duas constantes de acoplamento independentes, a primeira m com dimensão de massa e a segunda α com dimensão do inverso da massa. A Lagrangeana do modelo é

$$L = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}B^a_{\mu\nu}\Phi^a_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\beta^{a\mu}\beta^a_\mu - \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{3.34}$$

onde β^a_μ é um campo auxiliar que é, no limite livre, igual ao dual de $H^a_{\mu\nu\rho}$. Na equação (3.34), $F^a_{\mu\nu}$ é a curvatura tradicional dada por

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \,, \tag{3.35}$$

$$g = m\alpha ,$$

e $\Phi^a_{\mu\nu}$ é dado por uma expressão semelhante com $\beta^a_\mu + mA^a_\mu$ no lugar de A^a_μ e α no lugar de g,

$$\Phi^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \beta^a_\nu - \partial_\nu \beta^a_\mu + m\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) + \alpha f^{abc}\left(\beta^a_\mu + mA^a_\mu\right)\left(\beta^a_\nu + mA^a_\nu\right) . \tag{3.36}$$

As deformações de primeira ordem são, neste caso, o termo de massa topológica $m\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} B^a_{\mu\nu} \left(\partial_\rho A^a_\sigma - \partial_\sigma A^a_\rho\right)$ e o vértice de Freedman-Townsend $\alpha f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} B^a_{\mu\nu} \beta^b_\rho \beta^c_\lambda$. O acoplamento de Yang-Mills emerge na segunda ordem sendo que a constante de acoplamento de Yang-Mills g é relacionada com a massa topológica m e com a constante de acoplamento de Freedman-Townsend α através da relação $g = m\alpha$. A Lagrangeana (3.34) tem termos de até quarta ordem nas constantes de acoplamento. É claro que nós poderíamos incluir de maneira equivalente o termo de massa na Lagrangeana livre inicial. Neste caso, a expansão nas constantes de acoplamento pára na segunda ordem (ver [45] para formulação em primeira ordem).

A segunda premissa assumida em nossa análise é que a teoria interagente possui o mesmo conteúdo de campos e o mesmo número de simetrias de calibre que a ação livre inicial. Esta imposição é necessária para que a teoria de perturbações em torno da parte quadrática possa ser implementada. Um relaxamento destas hipóteses foi proposto na referência [46], onde uma generalização não-abeliana da ação abeliana (3.1) foi proposta. Aqui, a curvatura abeliana F é representada pela não-abeliana e as derivadas de B são representadas por derivadas covariantes (onde a dois-forma B se transforma na representação adjunta). Esta generalização é invariante sob transformações de calibre do tipo Yang-Mills, mas não sob as transformações tensoriais (3.4). Esta generalização não fornece uma deformação consistente da teoria abeliana porque ela perde a invariância sob transformações de calibre tensoriais.

Vale dizer que a simetria de calibre (3.4) pode ser reobtida na versão não-abeliana se acrescentarmos um campo vetorial extra que se transforma apropriadamente [46]. Mas quando isto é feito, a teoria não possui o mesmo número de simetrias no limite abeliano, já que neste limite, o campo extra desaparece da Lagrangeana. Isto não significa que ela é fisicamente inconsistente, mas que a teoria livre não pode ser usada diretamente como ponto de partida para uma expansão perturbativa padrão (obscurecendo em particular o significado da renormalizabilidade por contagem de potências).

Uma construção equivalente ao mecanismo de geração de massa acima descrito foi proposto recentemente por Jackiw e Pi [47] no contexto das teorias de calibre tridimensionais. Neste trabalho, o papel que é desempenhado pelo campo $B^a_{\mu\nu}$ é feito por um campo vetorial B^a_μ. Um análogo do teorema no-go acima apresentado foi obtido na referência [48]. Os autores de [47] analisam a teoria não-abeliana com menos simetrias de calibre que aquela obtida pelo acoplamento mínimo do campo A^a_μ ao campo B^a_μ. A teoria resultante sofre das mesmas dificuldades que a teoria apresentada em [46], já que uma expansão perturbativa padrão em torno do limite livre não pode ser implementada. Se esta teoria, ou a versão quadridimensional de [46], pode ser quantizada consistentemente ainda é uma questão aberta.

Capítulo 4

Massa Topológica em Quatro Dimensões com Extensão não Analítica da Simetria no Parâmetro Massivo

4.1 Introdução

No Capítulo anterior, analisamos a possibilidade de existência de um mecanismo de geração de massa topológica para o campo de calibre vetorial de teorias não-abelianas em quatro dimensões. Procuramos, então, possíveis generalizações não-abelianas do modelo descrito por [2]

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} m \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} \right) . \qquad (4.1)$$

Como vimos, o resultado de nossas análises levou a um teorema No-Go que mostra a impossibilidade de tal generalização se quizermos manter o mesmo número de simetrias e a propriedade da renormalizabilidade por contagem de potências.

Na última seção do Capítulo anterior, discutimos as limitações deste teorema e mostramos que as condições que podem ser relaxadas com o intuito de se construir a versão não-abeliana, que mais se aproxima de uma generalização do modelo original (4.1) , são (i) mudança do conteúdo de campos, (ii) perda da renormalizabilidade por contagem de potências ou (iii) perda da simetria tensorial. Neste Capítulo, a exemplo do caso tridimensional estudado no Capítulo 2, abriremos mão da segunda condição. Partindo da ação conhecida como modelo BF não-abeliano puro [49],

$$\mathcal{S}_{BF}^{nab}(A,B)=\frac{1}{2}m\int d^4x\, tr\, \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}B_{\rho\sigma}\right)\,, \tag{4.2}$$

mostraremos que redefinições não analíticas - no parâmetro massivo m - dos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ fornecem uma possível extensão não-abeliana do modelo (4.1). No entanto, diferente da situação encontrada no Capítulo 2, quando estudamos a ação do modelo de Chern-Simons-Yang-Mills, veremos que no caso presente as redefinições dos campos de calibre implicam uma redefinição da simetria tensorial.

Gostaria de salientar que o tratamento apresentado aqui se limitará ao regime clássico, devido à perda da renormalizabilidade por contagem de potências.

4.2 Caso abeliano

4.2.1 Equivalência entre o BF puro e o modelo de Cremmer-Sherk

O objetivo desta seção é mostrar a equivalência clássica entre as ações abelianas de Cremmer-Sherk [2] e da teoria BF pura, ou seja, que uma teoria pode ser mapeada na outra via uma redefinição dos campos de calibre. Seguindo os mesmos passos do caso tridimensional, procuramos uma redefinição não analítica, no parâmetro massivo m, dos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ de tal maneira que seja válida a relação

$$\mathcal{S}_M^{ab}(A)\ +\ \mathcal{S}_H^{ab}(A,B)+\mathcal{S}_{BF}^{ab}(A,B)=\mathcal{S}_{BF}^{ab}(\widehat{A},\widehat{B})\,, \tag{4.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_M^{ab}(A) &= -\frac{1}{4}\int d^4x\,(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\ , \\
\mathcal{S}_H^{ab}(A,B) &= -\frac{1}{12}\int d^4x\,(H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho})\ , \\
\mathcal{S}_{BF}^{ab}(A,B) &= \frac{1}{2}m\int d^4x\,(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}B_{\rho\sigma})
\end{aligned}$$

e as definições das curvaturas $F_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu\rho}$ são as mesmas dadas em (3.2), ou seja,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

e

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu}\,.$$

Tomaremos aqui redefinições dos campos de calibre da forma

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_\mu &= A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^n}\vartheta_\mu^n, \\
\widehat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^n}\phi_{\mu\nu}^n\,.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A ação $\mathcal{S}_{BF}^{ab}(\widehat{A},\widehat{B})$ é deixada invariante pelas transformações de calibre locais

$$\delta^g\widehat{A}_\mu = \partial_\mu\widehat{\varepsilon}, \qquad \delta^g\widehat{B}_{\mu\nu} = 0 \tag{4.5}$$

e

$$\delta^t\widehat{A}_\mu = 0, \qquad \delta^t\widehat{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\widehat{\varepsilon}_\nu - \partial_\nu\widehat{\varepsilon}_\mu\,. \tag{4.6}$$

Introduzindo (4.4) em (4.3), obtemos diretamente os coeficientes da expansão (4.4). Os quatro primeiros coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\vartheta_\mu^1 &= \frac{1}{24}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\nu\rho\sigma}\,, \\
\vartheta_\mu^2 &= b\partial^\nu F_{\nu\mu}\,,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_\mu^3 &= -\frac{a}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\partial_\alpha H^{\alpha\rho\sigma}\,, \\
\vartheta_\mu^4 &= M\partial^2\partial^\nu F_{\nu\mu}\,, \\
\phi_{\mu\nu}^1 &= \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\,, \\
\phi_{\mu\nu}^2 &= a\partial^\alpha H_{\alpha\mu\nu}\,, \\
\phi_{\mu\nu}^3 &= -\frac{b}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho\partial_\alpha F^{\alpha\sigma}\,, \\
\phi_{\mu\nu}^4 &= N\partial^2\partial^\alpha H_{\alpha\mu\nu}\,,
\end{aligned}
$$

onde a, b, M e N são constantes adimensionais restritas apenas pelas condições,

$$
a+b=-\frac{1}{16} \quad \text{e} \quad M+N=\frac{1}{2^8}-ab.
$$

Como vemos, até a ordem de expansão no parâmetro massivo considerada, os coeficientes, $\phi_{\mu\nu}^n$ e ϑ_μ^n, mostrados em (4.7) apresentam dois parâmetros adimensionais livres. De fato, todas as ordens pares da expansão em m de (4.4) são caracterizadas por um novo parâmetro adimensional não fixado.

A série formal (4.4) , que redefine os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$, fornece o mapeamento clássico pretendido. No que se refere às simetrias de calibre e tensorial, a ação

$$
S_{YM}^{ab}(A) \ + \ S_H^{ab}(A,B)+S_{BF}^{ab}(A,B)
$$

é mantida invariante sob o mesmo conjunto de transformações (4.5) em (4.6) , agora escritas em termos dos campos transformados,

$$
\delta^g A_\mu=\partial_\mu\varepsilon, \qquad \delta^g B_{\mu\nu}=0 \tag{4.8}
$$

e

$$
\delta^t A_\mu=0, \qquad \delta^t B_{\mu\nu}=\partial_\mu\varepsilon_\nu-\partial_\nu\varepsilon_\mu\,. \tag{4.9}
$$

Apresentaremos na seção seguinte a generalização não-abeliana da equação (4.3) . Como veremos, a exemplo do caso abeliano, a simetria de calibre vetorial manterá a mesma forma mas a simetria tensorial só poderá ser obtida como uma série infinita de termos *não analíticos* no parâmetro de massa m.

4.2.2 Argumento cohomológico

Para dar um argumento cohomológico das equações (4.3) e (4.4) usamos a formulação de anticampos, ou seja, o formalismo de Batalin-Vilkovisky (ver apêndice A). Cinco anticampos são necessários $(A^{*\mu}, B^{*}_{\mu\nu}, c^{*}, \eta^{*\mu}, \rho^{*})$, correspondendo respectivamente à conexão de calibre A_{μ}, ao campo tensorial antisimétrico $B_{\mu\nu}$, ao ghost de Faddev-Popov c, ao ghost relacionado à simetria de calibre do campo $B_{\mu\nu}$ e ao ghost ρ. Este último está relacionado ao ghost η e é necessário porque a simetria do campo tensorial $B_{\mu\nu}$ é redutível e requer, para sua completa fixação, um ghost extra.

Como já mencionamos, a análise da cohomologia do operador diferencial de BRST identifica os termos que podem, ou não, ser reabsorvidos por redefinições de campos [36]. Neste contexto, quantidades que não pertencem à cohomologia deste operador são passíveis de serem absorvidas, ao nível clássico, por redefinições de campos. Como iremos agora mostrar, os termos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$, contidos na ação (4.3), não fogem a esta regra.

A trivialidade destes termos se baseia fortemente na forma das transformações de BRST dos anticampos $A^{*a\mu}$ e $B^{*a}_{\mu\nu}$, dadas por

$$
\begin{aligned}
sA^{*}_{\mu} &= \frac{2}{m}\partial^{\nu}F_{\nu\mu} + \frac{2}{3}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\nu\rho\sigma} \,, \\
sB^{*}_{\mu\nu} &= \frac{2}{m}\partial^{\rho}H_{\rho\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \,,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

onde s é o operador diferencial de BRST. Contraindo convenientemente as expressões contidas em (4.10) com a densidade tensorial ε[1], obtemos

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s B^{*\rho\sigma} + \frac{1}{2m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\chi H^{\chi\rho\sigma} \tag{4.11}$$

e

$$H_{\mu\nu\rho} = +\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s A^{*\sigma} - \frac{1}{2m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\chi F^{\chi\sigma} \,. \tag{4.12}$$

As equações (4.11) e (4.12) podem ser usadas de maneira recursiva para obtermos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} s \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} B^{*\rho\sigma} + \frac{1}{m} F^*_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^2 B^{*\rho\sigma} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2m^3}\partial^2 F^*_{\mu\nu} + \frac{1}{4m^4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^4 B^{*\rho\sigma} \right\} + O\left(1/m^5\right) \,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{4} s \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{*\sigma} + \frac{1}{m} H^*_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2m^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\chi F^{*\chi\sigma} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2m^3}\partial^2 H^*_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4m^4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^2\partial_\chi F^{*\chi\sigma} \right\} + O\left(1/m^5\right) \,, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde

$$F^*_{\mu\nu} = \partial_\mu A^*_\nu - \partial_\nu A^*_\mu$$

e

$$H^*_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B^*_{\nu\rho} + \partial_\rho B^*_{\mu\nu} + \partial_\nu B^*_{\rho\mu} \,.$$

A trivialidade das curvaturas $F_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu\rho}$, que fica evidente nas equações (4.13) e (4.14), pode ser usada para mostrar que os termos $\int F^2$ e $\int H^2$ podem ser escritos da forma

[1]A contração da densidade de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é tomada como sendo a do espaço-tempo Minkowskiano

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2\left(\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha\right) \,.$$

$$\int d^4x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}s\int d^4x \left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}B^{*\mu\nu}F^{\rho\sigma} + \frac{1}{m}F^{\mu\nu}F^{*}_{\mu\nu} + \right. \tag{4.15}$$
$$+\frac{1}{2m^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\partial^2 B^{*\mu\nu} + \frac{1}{2m^3}F^{\rho\sigma}\partial^2 F^{*}_{\rho\sigma} +$$
$$\left. +\frac{1}{4m^4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\partial^4 B^{*\mu\nu}\right) + O\left(1/m^5\right)$$

e

$$\int d^4x \left(H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right) = \frac{1}{4}s\int d^4x \left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\mu\nu\rho}A^{*\sigma} + \frac{1}{m}H^{\mu\nu\rho}H^{*}_{\mu\nu\rho} + \right. \tag{4.16}$$
$$+\frac{1}{2m^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\mu\nu\rho}\partial^{\chi}F^{*}_{\chi\sigma} + \frac{1}{2m^3}H^{\mu\nu\rho}\partial^2 H^{*}_{\mu\nu\rho}$$
$$\left. +\frac{1}{4m^4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\mu\nu\rho}\partial^2\partial^{\chi}F_{\chi\sigma}\right) + O\left(1/m^4\right),$$

o que nos leva a concluir que eles podem ser reabsorvidos por redefinições dos campos.

A análise acima implementada é análoga àquela feita no caso tridimensional. Observando as transformações de BRST dos anticampos A^* e B^*, dadas em (4.10), vemos que os termos que levam à conclusão da trivialide das curvaturas são $\frac{2}{3}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\nu\rho\sigma}$ e $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. Obviamente, estes termos estão ligados diretamente ao termo topológico εBF. Vemos então que, nos casos tridimensional e quadridimensional, a presença dos termos topológicos é que leva à existência das redefinições de campos apresentada.

Vamos agora procurar uma possível generalização não-abeliana deste tratamento.

4.3 Possível generalização não-abeliana

Como vimos no Capítulo anterior, não existe versão não-abeliana da ação de Cremmer-Sherk [2] que seja renormalizável por contagem de potências e que mantenha as simetrias de calibre e tensorial. Mostraremos agora que, se abrirmos mão da renormalizabilidade por contagem de potências, tal generalização é direta e a ação resultante é dada por

$$\mathcal{S} = tr \int d^4x \left(\frac{1}{2} m \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right), \tag{4.17}$$

onde

$$H_{\mu\nu\rho} = D_\mu B_{\nu\rho} + D_\rho B_{\mu\nu} + D_\nu B_{\rho\mu} \tag{4.18}$$

e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g \left[A_\mu, A_\nu \right], \tag{4.19}$$

sendo D_μ a derivada covariante de calibre

$$D_\mu = \partial_\mu + g \left[A_\mu, \; \right]. \tag{4.20}$$

Para tanto, partiremos da ação pura do BF não-abeliano [49]

$$\mathcal{S}_{BF}^{nab}(\widehat{A}, \widehat{B}) = \frac{1}{2} m \int d^4x \left\{ tr \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{B}_{\rho\sigma} \right) \right\}, \tag{4.21}$$

onde a definição da curvatura relacionada ao campo $\widehat{A}$ é aquela apresentada em (4.19) fazendo $A \to \widehat{A}$.

É direto que a ação (4.21) é invariante pelas transformações de calibre locais

$$\delta^g \widehat{A}_\mu = \widehat{D}_\mu \varepsilon, \quad \delta^g \widehat{B}_{\mu\nu} = g \left[\widehat{B}_{\mu\nu}, \varepsilon \right] \tag{4.22}$$

e

$$\delta^t \widehat{A}_\mu = 0, \qquad \delta^t \widehat{B}_{\mu\nu} = \widehat{D}_\mu \varepsilon_\nu - \widehat{D}_\nu \varepsilon_\mu, \tag{4.23}$$

onde $\widehat{D}_\mu$ tem a mesma definição de D_μ, dada em (4.20), trocando somente A_μ por $\widehat{A}_\mu$. Procuremos então redefinições não analíticas, no parâmetro massivo m, para os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$, tais que a condição (4.3) seja válida no regime não-abeliano, ou seja,

$$\mathcal{S}_{BF}^{nab}(\widehat{A}, \widehat{B}) = \mathcal{S}, \tag{4.24}$$

onde $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ tenham a forma

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_\mu &= A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n (D, F, H) \,, \\
\widehat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \phi_{\mu\nu}^n (D, F, H) \,.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Substituindo (4.25) em (4.24), obtemos diretamente os coeficientes ϑ_μ^n e $\phi_{\mu\nu}^n$ que mapeiam os campos clássicos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ nos respectivos A e B. Os primeiros são

$$\begin{aligned}
\vartheta_\mu^1 &= \frac{1}{24} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} H^{\nu\rho\sigma} \,, \\
\vartheta_\mu^2 &= b D^\alpha F_{\alpha\mu} + \frac{1}{64} g \left[B^{\alpha\sigma}, H_{\alpha\sigma\mu} \right] , \\
\vartheta_\mu^3 &= -\frac{a}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^\nu D_\alpha H^{\alpha\rho\sigma} + \frac{g}{768} \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \left[F_{\mu\alpha}, H_{\nu\rho\sigma} \right] \,, \\
\phi_{\mu\nu}^1 &= \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \,, \\
\phi_{\mu\nu}^2 &= a D^\alpha H_{\alpha\mu\nu} \,, \\
\phi_{\mu\nu}^3 &= -\frac{b}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^\rho D_\alpha F^{\alpha\sigma} - \frac{g}{256} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^\rho \left[B_{\alpha\beta}, H^{\alpha\beta\sigma} \right] \,,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde

$$a + b = -\frac{1}{16} \,.$$

Tendo apresentado o mapeamento dos campos, vamos voltar à questão das simetrias.

É simples verificar que a ação $\mathcal{S}$ é invariante por transformações do tipo $\delta^g A$ e $\delta^g B$ mas não é invariante por transformações do tipo $\delta^t A$ e $\delta^t B$. É claro que, com o mapeamento de campos (4.26), podemos obter as simetrias $\delta^g(A, B)$ e $\delta^t(A, B)$. Mas, na medida em que a ação $\mathcal{S}$ é invariante sob a transformação

$$\delta^g A_\mu = D_\mu \varepsilon \,, \quad \delta^g B_{\mu\nu} = g \left[B_{\mu\nu}, \varepsilon \right] \,,$$

$\delta^g \mathcal{S} = 0$, precisamos apenas nos preocupar com a simetria tensorial. Para obtê-la, partimos das transformações $\delta^t \widehat{A}$ e $\delta^t \widehat{B}$. Substituindo (4.26) em (4.23) e usando o processo iterativo no parâmetro massivo m, podemos obter $\delta^t A$ e $\delta^t B$ até a ordem de $1/m$ que se desejar. Até a segunda ordem em $1/m$ ela é dada por

$$\begin{aligned}
\delta^t A_\mu &= -\frac{g}{8m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[F^{\nu\rho},\varepsilon^\sigma\right]+ \\
&-\frac{g}{64m^2}\left(D^\rho\left[H_{\rho\mu\sigma},\varepsilon^\sigma\right]+2g\left[\left[F_{\mu\rho},\varepsilon_\sigma\right],B^{\rho\sigma}\right]\right. \\
&\left.+4g\left[\left[F_{\rho\sigma},\varepsilon_\mu\right],B^{\rho\sigma}\right]+2\left[D^\rho\varepsilon^\sigma,H_{\mu\rho\sigma}\right]\right) \\
&+O\left(1/m^3\right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\delta^t B_{\mu\nu} &= D_\mu\varepsilon_\nu - D_\nu\varepsilon_\mu + \frac{g}{24m}\varepsilon_{\alpha\rho\sigma[\mu}\left[\varepsilon_{\nu]},H^{\alpha\rho\sigma}\right]+ \\
&-\frac{g}{m^2}\left\{bD^\rho\left[F_{\rho[\mu},\varepsilon_{\nu]}\right]+\frac{g}{64}\left[\left[B^{\rho\sigma},H_{\rho\sigma[\mu}\right],\varepsilon_{\nu]}\right]+\right. \\
&\left.\left(\frac{1}{16}+a\right)\left(D^\rho\left[F_{\mu\nu},\varepsilon_\rho\right]-D^\rho\left[F_{\rho[\nu},\varepsilon_{\mu]}\right]\right)\right\}+ \\
&+O\left(1/m^3\right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Vale dizer que, a exemplo do caso tridimensional, quaisquer termos construidos com as curvaturas F e H, podem ser reabsorvidos na ação do BF puro. Quando novos termos do tipo $F^n, H^n, F^nH^m, F^nD^mH^k$, para quaisquer $n, m, k \geq 1$, são acrescentados, o tratamento é o mesmo. Mudanças surgem apenas nos coeficientes $\vartheta^n_\mu(D,F,H)$ e $\phi^n_{\mu\nu}(D,F,H)$, que deverão ser convenientemente modificados. Isto indica que o termo topológico εBF gera uma vasta classe de teorias cujo conteúdo de campos é o mesmo da teoria BF e que são caracterizadas pela simetria de calibre usual e uma simetria tensorial.

Conclusões e perspectivas

Gostariamos primeiro de dizer que a interpretação de Chern-Simons como um funcional invariante de calibre é bastante frutífera uma vez que em função deste fato é possível reproduzir qualquer ação local do tipo Yang-Mills.

É importante sublinhar também que o carater covariante dos coeficientes ϑ_μ (nos casos local e não local), que permite interpretarmos o campo redefinido $\widehat{A}_\mu$ como uma conexão de calibre, pode dar alguma luz a respeito de redefinições não lineares de campos em teoria quântica de campos.

Dos estudos aqui apresentados, surgem algumas perspectivas diretas que já estão sendo trabalhadas, a saber:

(i) será que a interpretação geométrica apresentada pode ser estendida ao nivel da ação efetiva quântica $1PI$ completa?

(ii) o que acontece quando incluimos campos de matéria na análise do gerador das teorias de calibre tridimensionais?

(iii) é a massa topológica m um parâmetro relevante para os observáveis da teoria de Yang-Mills na presença do termo de Chern-Simons?

Este último comentário surge a partir da observação de que o termo de Yang-Mills é um cociclo exato de BRST. Como mencionamos, este fato indica que ele pode ser eliminado via redefinição de campo [36], redefinição esta que foi por nós apresentada.

É importante dizer que o cálculo dos valores esperados de vácuo envolvendo variáveis de loop a baixas energias [50], tais como

$$W(\gamma,\gamma') = e^{-\oint_\gamma dx^\mu \oint_{\gamma'} dx^\nu \langle A_\mu(x) A_\nu(y)\rangle} ,$$

onde γ e γ' são duas curvas suaves que não se interseptam, calculados com as ações abelianas de Chern-Simons pura e de Chern-Simons acoplada ao termo de Maxwell apresentam os mesmos resultados, claro, independentes do parâmetro m. Estes resultados têm sugerido que, no cálculo dos observáveis destas teorias neste regime de energias, é de grande simplificação o uso do propagador da teoria de Chern-Simons pura,

$$\Delta_{\mu\nu}^{CS} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\frac{(x-y)^{\rho}}{|x-y|^{3}},$$

em vez do propagador de Maxwell-Chern-Simons,

$$\Delta_{\mu\nu}^{MCS} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\frac{(x-y)^{\rho}}{|x-y|^{3}} + \frac{m}{4\pi}\frac{e^{-m|x-y|}}{|x-y|}\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\frac{(x-y)^{\rho}}{|x-y|^{2}}\,(1-|x-y|)\right).$$

Neste sentido, a transformação forneceria um método seletivo para o cálculo de funções de Green na teoria de Maxwell-Chern-Simons. Em especial, o cálculo da quantidade

$$\chi\left(\gamma,\gamma'\right) = \oint_{\gamma} dx^{\mu} \oint_{\gamma'} dx^{\nu} \left\langle A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\right\rangle_{MCS}$$

fornece o *linking number* das curvas γ e γ'.

(iv) Ainda no contexto das teorias de calibre que são geradas pela ação de Chern-Simons, uma observação interessante pode ser feita no cálculo do determinante fermiônico de um espinor abeliano massivo que interage com um campo de calibre externo não propagante, a saber: ele pode ser expresso pela ação de Chern-Simons pura a menos de redefinições do campo de calibre [51].

Para melhor compreensão do que foi dito, vamos detalhar um pouco mais esta informação. Seja então o funcional gerador das funções de Green Γ para o modelo descrito acima

$$e^{\Gamma(A)} = \int D\psi D\overline{\psi} e^{\int d^{3}x\overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+\gamma^{\mu}A_{\mu}-m)\psi}.$$

Como sabemos, $\Gamma(A)$ pode ser escrito na forma de um *determinante fermiônico*,

$$\Gamma(A) = \log\det\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \gamma^{\mu}A_{\mu} - m\right).$$

A expressão explícita de $\Gamma(A)$ consiste de uma série infinita de diagramas (a um loop),

$$\Gamma(A) = \eta \mathcal{S}_{CS}(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma^n(A) \ ,$$

sendo

$$\Gamma^n(A) = \int d^3x_1....d^3x_n A^{\mu_1}(x_1)...A^{\mu_n}(x_n)\langle j_{\mu_1}(x_1)...j_{\mu_n}(x_n)\rangle$$

e

$$j_\mu(x) = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \ ,$$

a corrente fermiônica. Como foi mostrado por [51], os termos $\Gamma^n(A)$ podem ser expressos por

$$\Gamma^n(A) = \int d^3y_1...d^3y_n F_{\mu_1\nu_1}(y_1)...F_{\mu_n\nu_n}(y_n)\,\Omega^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(y_1...y_n) \ ,$$

onde

$$\Omega^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(y_1...y_n) = \frac{1}{(4\pi)^n}\int\left(\prod_{j=1}^{n} d^3x_j \frac{(x_j-y_j)^{\mu_j}}{|x_j-y_j|^3}\right)\langle j_{\mu_1}(x_1)...j_{\mu_n}(x_n)\rangle \ ,$$

o que significa dizer que

$$\Gamma(A) = \eta \mathcal{S}_{CS}(A) + \sum_{n=2}^{\infty}\int d^3y_1...d^3y_n F_{\mu_1\nu_1}(y_1)...F_{\mu_n\nu_n}(y_n)\,\Omega^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(y_1...y_n) \ ,$$

ou seja, que

$$\Gamma(A) = \eta \mathcal{S}_{CS}(\widehat{A})$$

a menos de redefinições do campo de calibre $\widehat{A}$. Isto significa que os efeitos quânticos da ação fermiônica citada podem ser expressos pela ação pura de Chern-Simons para uma conexão $\widehat{A}_\mu$ adequada.

No contexto das teorias de calibre quadridimensionais, temos apresentado um forte resultado mostrando a impossibilidade da generalização não-abeliana da ação de Kremmer-Sherk que mantenha a renormalizabilidade por contagem de potências, o conteúdo de campos e o número de simetrias.

Também foi apresentado um estudo do mecanismo de massa topológica no caso abeliano. A exemplo do caso tridimensional, os resultados indicam que m está relacionado a um termo que é trivial de BRST e pode, portanto, ser eliminado via redefinição de campos, redefinição esta apresentada por nós. Neste sentido, o caráter observável do parâmetro m da ação de Cremmer-Sherk surge também como perspectiva de estudo futuro.

Apêndice A

Método de Batalin-Vilkovisky

O objetivo deste apêndice é dar algumas diretrizes do método de quantização de Batalin-Vilkovisky [7]. O ponto de partida é

(a) a existência de um conjunto de campos (campos de calibre, campos de matéria, ghosts, etc), aqui denotados genericamente por ϕ^i;

(b) de uma ação $S_{inv}(\phi)$, invariante sob a atuação de um operador Q, $QS_{inv}(\phi) = 0$, tal que

(c) $Q\phi^i = P^i(\phi)$ é um polinômio local, linear ou não, nos campos, onde o operador Q tem a propriedade da nilpotência, ou seja, $Q^2 = 0$.

A questão fundamental a ser tratada por este método se refere à validade, ou não da simetria expressa por Q, ao nível quântico. Colocando a questão ao nível funcional, escrevemos uma identidade que fornece a invariância de S_{inv} (identidade de Ward), ou seja,

$$WS_{inv} = 0\,, \tag{A1}$$

onde

$$W = \int d^D x \; Q\phi^i \frac{\delta}{\delta\phi^i}\,, \tag{A2}$$

é o chamado operador de Ward.

Como dissemos, a pergunta relevante a ser respondida é se, dada a ação clássica S_{inv} e um procedimento qualquer de renormalização para cálculo das correções quânticas, existe uma Γ,

$$\Gamma = S_{inv} + \hbar\Gamma + \hbar^2\Gamma^{(2)} + \hbar^3\Gamma^{(3)} + ... , \qquad (A3)$$

tal que

$$W\Gamma = 0 . \qquad (A4)$$

A extensão da simetria ao nível quântico, deve ser feita com uma transformação nas funções de Green que deixe Γ invariante. Para entendermos a construção do método, seja uma função de Green genérica

$$\left\langle \phi^{i_1}(x_1)\,\phi^{i_2}(x_2)\,\phi^{i_3}(x_3)\,\phi^{i_4}(x_4)\,......\phi^{i_n}(x_n) \right\rangle . \qquad (A5)$$

Um exemplo simples é o caso em que o polinômio $P^i(\phi)$ é linear nos campos, ou seja,

$$P^i(\phi) = b^{ij}\phi_j . \qquad (A6)$$

Para este caso,

$$Q\left\langle \phi^{i_1}(x_1)\,\phi^{i_2}(x_2)\,\phi^{i_3}(x_3)\,\phi^{i_4}(x_4)\,.....\phi^{i_n}(x_n) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b^{i_k m}\left\langle \phi^{i_1}(x_1)\,...\phi_m(x_k)\,...\phi^{i_n}(x_n) \right\rangle . \qquad (A7)$$

No caso de uma simetria não linear do tipo

$$P^i(\phi) = b^{ijk}\phi_j\phi_k , \qquad (A8)$$

por exemplo, a operação de Q sob a função de Green leva a

$$Q\left\langle \phi^{i_1}(x_1)\,\phi^{i_2}(x_2)\,\phi^{i_3}(x_3)\,...\phi^{i_n}(x_n) \right\rangle = \sum_{k=1}^{k=n} b^{i_k ml}\left\langle \phi^{i_1}(x_1)\,...\phi_m(x_k)\,\phi_l(x_k)\,...\phi^{i_n}(x_n) \right\rangle . \qquad (A9)$$

Comparando os dois casos vemos que para renormalizar uma simetria não linear, devemos levar em consideração todas as funções de Green não elementares com inserções de operadores compostos definidos por $(A8)$. Então, na presença de uma simetria não linear, devemos não somente renormalizar massa, constante de acoplamento, carga, funções de onda, etc, mas também a própria simetria.

Para tratarmos os casos onde os polinômios P^i são não lineares, o que em suma quer dizer para renormalizarmos a simetria, vamos mudar a ação de partida, incluindo, para cada campo ϕ^i, relacionado a um polinômio P^i não linear, um anticampo ϕ^{*i} que não se transforma sob a atuação de Q ($Q\phi^{*i} = 0$),

$$S = S_{inv} + \int d^D x \phi^{*i} Q\phi_i \,. \tag{A10}$$

Esta mudança, obviamente, mantém a invariância da ação,

$$QS = 0 \,. \tag{A11}$$

A utilidade da nilpotência de Q surge agora. No caso de transformações não lineares, uma posterior variação de P^i geraria outro objeto não linear (quando $QP^i \neq 0$) e assim por diante. A nilpotência de Q garante que este processo acaba na segunda variação. Para implementarmos a renormalização da simetria, construimos então uma identidade de Slavnov-Taylor,

$$\int d^D x\, Q\phi_i \frac{\delta S}{\delta \phi_i} = \int d^D x \frac{\delta S}{\delta \phi^*} \frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \,. \tag{A12}$$

A identidade acima pode ser escrita em função do operador conhecido como operador linearizado de Slavnov-Taylor. Este operador foi muito usado nesta tese e tem a forma

$$s = \int d^D x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi^*} \frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta S}{\delta \phi} \frac{\delta}{\delta \phi^*} \right), \tag{A13}$$

cuja aplicação na ação completa, fornece

$$sS = 0 \,. \tag{A14}$$

Esta equação é comumente encontrada na literatura com o nome de Equação Mestra.

Existe uma diferença básica quando o processo de quantização é tratado com o operador linearizado, a saber, os campos e os anti-campos são tratados em pé de igualdade. Os contratermos gerados para a renormalização terão a mesma importância. Aqueles envolvendo campos renormalizarão a parte S_{inv} e os envolvendo os anticampos renormalizarão a parte estendida da ação, e portanto a simetria.

Usamos no decorrer desta tese a notação

$$(M,N) = \int d^D x \left(\frac{\delta M}{\delta \phi^*} \frac{\delta N}{\delta \phi} + \frac{\delta M}{\delta \phi} \frac{\delta N}{\delta \phi^*} \right) . \tag{A15}$$

Então, a Equação Mestra é escrita como

$$(S,S) = 0 \tag{A16}$$

e a aplicação do operador linearizado nos campos e anticampos é como segue,

$$\begin{aligned} s\phi &= (\phi, S) = \frac{\delta S}{\delta \phi^*} , \\ s\phi^* &= (\phi^*, S) = \frac{\delta S}{\delta \phi} . \end{aligned} \tag{A17}$$

Note que, muito embora os anticampos não se transformem pela atuação do operador Q, eles se transformam pela ação do operador linearizado s. Gostaria de ressaltar que quando falamos, neste contexto, em cohomologia de BRST, como o fizemos várias vezes nesta tese, nos referimos à cohomologia do operador s.

A construção aqui apresentada levou em conta a nilpotência do operador Q. Mas este método pode ser estendido para tratar da quantização de modelos onde a nilpotência é quebrada por termos proporcionais às equações de movimento. Neste caso, é necessária a introdução de termos quadráticos nos anticampos, tais que seja possível construir uma identidade de Slavnov-Taylor. Isto permitirá a definição de um operador linearizado de Slavnov-Taylor que seja finalmente nilpotente. Após a introdução destes termos, o tratamento cohomológico é o mesmo. Um exemplo aplicativo onde este tipo de situação é encontrada foi por nós estudado na quantização da ação twistada de Yang-Mills com duas supersimetrias [52].

Apêndice B

Simetria de BRST e Técnica de BRST estendida

Como o próprio nome indica, a técnica de BRST estendida estende o tratamento de BRST incluindo parâmetros associados à fixação de calibre. Tal construção tem a potente utilidade de controlar a dependência de uma teoria, ao nível quântico, de tais parâmetros. Para ilustrarmos a técnica, vamos usá-la para mostrar a trivialidade da dependência da ação quântica $1PI$, Γ da teoria de Yang-Mills pura em quatro dimensões, do parâmetro de fixação de calibre α. Mostraremos também a independência dos observáveis neste parâmetro. Seguiremos os passos de [4].

Teoria de Yang-Mills em 4 dimensões e Simetria de BRST

Os graus de liberdade desta teoria estão contidos no campo de calibre A_μ, que é tomado como sendo avaliado num grupo de álgebra de Lie semisimples,

$$A_\mu = A_\mu^a(x)\, T^a\,, \tag{B1}$$

onde as matrizes T^a são os geradores do grupo e possuem, portanto, as propriedades

$$\left[T^a, T^b\right] = f^{abc}T^c \quad \text{e} \quad tr\left(T^aT^b\right) = \delta^{ab}\,. \tag{B2}$$

A ação de Yang-Mills pura em quatro dimensões é dada por

$$S_{inv} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\,, \tag{B3}$$

onde g é a constante de acoplamento de Yang-Mills e $F_{\mu\nu}$ é a curvatura

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\left[A_\mu, A_\nu\right] . \tag{B4}$$

Esta ação apresenta a simetria de calibre $\delta S_{inv} = 0$, onde

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \omega + g\left[A_\mu, \omega\right] = D_\mu \omega\,, \tag{B5}$$

sendo ω um parâmetro avaliado na álgebra considerada, $\omega = \omega^a T^a$. Acrescentando à ação o termo usual de fixação de calibre,

$$\int d^4x\, tr\left(B\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}B^2\right),$$

onde B^a é um multiplicador de Lagrange e α é o parâmetro que fixa o calibre[2], a invariância de calibre é quebrada. No entanto, uma nova simetria é obtida se supusermos que o parâmetro ω seja levado num campo Grasmanniano c conhecido como ghost de Faddeev-Popov. Para explicitarmos tal afirmação, somamos à ação o termo

$$S_{FP} = -\,tr\int d^4x\; \bar{c}\;\partial^\mu D_\mu c\,, \tag{B6}$$

e tomamos

$$\begin{aligned} bA_\mu &= D_\mu c\,, \\ bc &= -gc^2\,, \\ b\,\bar{c} &= B\,, \\ bB &= 0\,. \end{aligned} \tag{B7}$$

Verificamos então que o operador b expressa uma simetria da ação (simetria de BRST). Interessante notar que o operador b que a realiza tem a característica de ser nilpotente,

[2]A escolhas $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ caracterizam os calibres de Landau e de Feymann.

o que é de grande utilidade ao processo de renormalização das teorias de calibre.

Como argumentamos no apêndice A, a existência de uma simetria não linear exige que, no processo de quantização, a simetria seja renormalizada, sendo útil nestes casos o tratamento de Batalin-Vilkovisky. Para sua implementação, acrescentamos à ação um termo extra que deve conter um anti-campo relacionado a cada campo que se transforma não linearmente sob a ação de b. No caso específico da teoria de Yang-Mills necessitamos de dois anticampos, Ω^μ e L, relacionados às transformações dos campos A_μ e c. A ação completa é então escrita como

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x\, tr\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}B^2 - \bar{c}\,\partial^\mu D_\mu c\right) + \\
&\quad + \int d^4x\, tr\left(\Omega^\mu D_\mu c - gLc^2\right) \\
&= \int d^4x\, tr\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \Omega^\mu D_\mu c - gLc^2 + b\left(\bar{c}\,\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}\,\bar{c}\,B\right)\right) .
\end{aligned} \tag{B8}
$$

A simetria de BRST é expressa funcionalmente pelo operador linearizado

$$
s = tr\int d^4x\left(\frac{\delta S}{\delta\Omega^\mu}\frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta S}{\delta A_\mu}\frac{\delta}{\delta\Omega^\mu} + \frac{\delta S}{\delta L}\frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta S}{\delta c}\frac{\delta}{\delta L} + B\frac{\delta}{\delta\,\bar{c}}\right) . \tag{B9}
$$

É sabido que o contratermo M, associado ao estudo da estabilidade da ação, deve ser invariante sob a atuação de s $(sM = 0)$. Por outro lado, a nilpotência do operador s estabelece um problema de cohomologia. É um resultado vastamente conhecido [4] que a parte do contratermo M que pertence à cohomologia do operador s está ligada à renormalização das constantes de acoplamento e das massas, isto é, aos parâmetros físicos da teoria, enquanto os termos que podem ser colocados como variação pura de BRST estão ligados à renormalização das amplitudes das funções de onda. Desta forma vemos que os setores triviais do contratermo não têm relevância física.

Trivialidade Quântica de α

Vemos diretamente que

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} tr \int d^4x\, B^2 = \frac{1}{2} s\; tr \int d^4x\; \bar{c}\, B\,. \tag{B10}$$

A técnica de BRST estendida consiste em estender o operador de BRST permitindo que o parâmetro α varie sob a ação do operador estendido de BRST, de tal forma que a nilpotência deste seja mantida e que o parâmetro α forme uma estrutura de dubleto[3], ou seja,

$$\begin{aligned} s\alpha &= \xi\,, \\ s\xi &= 0\,. \end{aligned} \tag{B11}$$

Aqui, ξ é um parâmetro Grassmaniano com número de *ghost* 1. Estendendo a ação para

$$\widetilde{S} = S + \xi\Lambda\,, \tag{B12}$$

onde Λ é tal que

$$s\Lambda = \frac{\partial S}{\partial \alpha}\,, \tag{B13}$$

a identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(S) = tr \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu} \frac{\delta S}{\delta \Omega^\mu} + \frac{\delta S}{\delta c} \frac{\delta S}{\delta L} + B \frac{\delta S}{\delta\, \bar{c}} \right)\,, \tag{B14}$$

é levada em

$$\widetilde{\mathcal{S}}\left(\widetilde{S}\right) = tr \int d^4x \left(\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta A_\mu} \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \Omega^\mu} + \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta c} \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta L} + B \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta\, \bar{c}} \right) + \xi \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{B15}$$

O problema do estudo da independência dos parâmetros de calibre, ao nível da ação

[3] Como mencionamos, campos que formam tais estruturas não pertencem à cohomologia do operador de BRST.

quântica Γ, é então traduzido no estudo da implementação da identidade de Slavnov-Taylor estendida $(B15)$ para todas as ordens da teoria de perturbações. Isto é sempre possível porquê os parâmetros α e ξ formam uma estrutura de dubletos de BRST, o que implica dizer que eles não pertencem à cohomologia deste operador [4]. Como a teoria de Yang-Mills em quatro dimensões não tem anomalias, a identidade $(B15)$ vale ao nível quântico,

$$\widetilde{S}(\widetilde{\Gamma}) = tr \int d^4x \left(\frac{\delta \widetilde{\Gamma}}{\delta A_\mu} \frac{\delta \widetilde{\Gamma}}{\delta \Omega^\mu} + \frac{\delta \widetilde{\Gamma}}{\delta c} \frac{\delta \widetilde{\Gamma}}{\delta L} \right) + \xi \frac{\partial \widetilde{\Gamma}}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{B16}$$

Quando tomamos a derivada $\frac{\partial}{\partial \xi}$ em $(B16)$ e fazemos $\xi = 0$, obtemos

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} = tr \int d^4x \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \Omega^\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta \Omega^\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta L} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c} \frac{\delta}{\delta L} + B \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right) [\Lambda . \Gamma] \ , \tag{B17}$$

onde

$$\Gamma = \widetilde{\Gamma} \Big|_{\xi=0} \,.$$

Isto mostra que a dependência quântica do funcianal gerador das funções de Green $1PI$ no parâmetro α é trivial. Vamos agora abordar a questão dos observáveis.

Quantidades observáveis $Q_i(x)$ são definidas classicamente como sendo invariantes de calibre, construídas com os campos básicos da teoria, neste caso, $A_\mu(x)$. Ao nível quântico, dizemos que as inserções relacionadas a estas quantidades são não triviais de BRST, isto é, pertencem às classes não triviais da cohomologia deste operador no setor de número de ghost igual a zero. Isto significa que tais inserções obedecem à identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}\left[Q_i\left(x\right).Z\right] = 0\,, \tag{B18}$$

onde

$$\left[Q_i\left(x\right).Z\right] \neq \mathcal{S}\left[\widetilde{Q_i}\left(x\right).Z\right] \,, \tag{B19}$$

sendo $\mathcal{S}$ definido por

$$\mathcal{S} = tr \int d^4x \left(-J_A^\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^\mu} + J_c \frac{\delta}{\delta L} + J_{\bar{c}} \frac{\delta}{\delta J_B} \right) . \tag{B20}$$

Aqui, $Z(J)$ é o funcional gerador da funções de Green[4],

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1/\hbar)^N}{N!} \int dx_1 ....dx_N J^{i_1}(x_1) ... J^{i_N(x_N)} G_{i_1...i_N}(x_1, ..., x_N) . \tag{B21}$$

O estudo do regime quântico dos operadores invariantes de calibre $Q_i(x)$ é feito introduzindo fontes externas q^i, invariantes de BRST, acopladas a eles. Construimos então um funcional gerador $Z(J,q)$ que obedece à identidade de Slavnov-Taylor,

$$\mathcal{S}Z(J,q) = 0 . \tag{B22}$$

Vamos então mostrar que os operadores invariantes de calibre

$$\langle Q_{i_1}(x_1) Q_{i_2}(x_2) ......Q_{i_n}(x_n) \rangle ,$$

que são gerados pelo funcional gerador

$$Z'_{inv}(q) = Z(J,q)|_{J=0} , \tag{B23}$$

não dependem do parâmetro de calibre α. Para isto procedemos de maneira análoga ao tratamento da função Γ. Assim, equivalentemente ao caso obtido na equação $(B15)$, teremos

$$\tilde{\mathcal{S}}Z(q,J) = \mathcal{S}_{(velho)}Z(q,J) + \xi \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(q,J) = 0 . \tag{B24}$$

Derivando esta equação com relação a ξ e tomando $\xi = 0$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z(q,J) = -\mathcal{S} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} Z(q,J) \right|_{\xi=0} . \tag{B25}$$

[4] A função de Green de n pontos é definida a partir dos valores esperados do produto temporalmente ordenado dos campos interagentes,

$$G_{i_1...i_N}(x_1, ..., x_n) = \langle T\phi_{i_1}(x_1) \phi_{i_2}(x_2) ......\phi_{i_n}(x_n) \rangle .$$

Isto mostra a independência, ao nível quântico, dos observáveis físicos em relação ao parâmetro de calibre α .

Bibliografia

[1] R. Jackiw and S. Templeton, **Phys. Rev. D23 (1981) 2291;**

S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, **Ann. Phys. (N.Y.) 140 (1982) 372;**

S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, **Phys. Rev. Lett, 48 (1982) 975;**

W. Siegel, **Nucl. Phys. B156 (1979) 135;**

J. F. Schonfeld, **Nucl. Phys. B185 (1981) 157;**

[2] E. Cremmer and J. Scherk, **Nucl. Phys. B72 (1974) 117;**

C.R. Hagen, **Phys. Rev. D19 (1979) 2367;**

T. J. Allen, M. J. Bowick and A. Lahiri, **Mod Phys. Lett. A6 (1991) 559;**

R. Amorim and J. Barcelos-Neto, **Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 917;**

[3] F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet and S. P. Sorella, **Nucl. Phys. B346, (1990) 313;**

[4] O. Piguet and S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization,* **Springer-Verlag, Berlin, 1995;**

[5] R.D. Pisarski and S. Rao, **Phys. Rev. D32 (1985) 2081;**

[6] G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz, **Nucl. Phys. B 381 (1992) 222;**

[7] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, **Phys. Rep. 209 (1991) 129;**

L. C. Vilar, O. S. Ventura, C. Sasaki, S. P. Sorella, **Journ. Math. Phys. 39 (1998) 848;**

[8] E. Guadagnini, *The Link Invariants of the Chern-Simons Field Theory,* **Walter de Gruyter, Berlin, 1993;**

[9] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systens,* **Frontiers in Physics Series, Addison-Wesley, 1991;**

[10] O. S. Ventura, L. C. Q. Vilar e V. E. R. Lemes, Trabalho em preparação;

[11] V.E.R. Lemes, C. Linhares de Jesus, C.A.G. Sasaki, S.P. Sorella, L.C.Q. Vilar and O.S. Ventura, **Phys. Lett. B418 (1998) 324;**

[12] V.E.R. Lemes, C. Linhares de Jesus, S.P. Sorella, L.C.Q. Vilar and O.S. Ventura, **Phys. Rev. D58, 4, 045010 (1998);**

[13] F. Brandt, N. Dragon and M. Kreuzer, **Phys. Lett. B231 (1989) 263;**
F. Brandt, N. Dragon and M. Kreuzer, **Nucl. Phys. B332 (1990) 224;**
F. Brandt, N. Dragon and M. Kreuzer, **Nucl. Phys. B332 (1990) 250;**

[14] M. Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Talon and C.M. Viallet, **Phys. Lett. B289 (1992) 361;**

[15] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, **Comm. Math. Phys. 174 (1995) 57;**
G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, **Comm. Math. Phys. 174 (1995) 93;**

[16] M. Henneaux and C. Teitelbom, *Quantization of Gauge System,* **Priceton University Press 1992;**

[17] J. Dixon, *Cohomology and renormalization of gauge theories,* I,II,III, **unpublished;**
J. Dixon, **Comm. Math. Phys. 139 (1991) 495;**

[18] G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz, **Phys. Lett. B 314 (1993) 328;**
G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz, **Phys. Lett. B 332 (1994) 345;**

[19] M. Asorey, F. Falceto, J.L. López and G. Luzón, **Nucl. Phys. B429 (1994) 344;**
M. Asorey, F. Falceto, J.L. López and G. Luzón, **Phys. Rev. D49 (1994) 5377;**

[20] G. Leibbrandt and C.P. Martin, **Nucl. Phys. B377 (1992) 593;**
G. Leibbrandt and C.P. Martin, **Nucl. Phys. B416 (1994) 351;**

[21] G.A.N. Kapustin and P.I. Pronin, **Phys. Lett. B 318 (1993) 465;**
G.A.N. Kapustin and P.I. Pronin, **Mod. Phys. Lett. A9 (1994) 1925;**

[22] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, **J. High Energy Phys., 02, 002 (1998);**

[23] G. Barnich and M. Henneaux, **Phys. Lett. B 311 (1993) 123;**

[24] J. Gomis and S. Weinberg, **Nucl. Phys. B 469 (1996) 473;**

[25] C. Becchi, A. Blasi, G. Bonneau, R. Collina and F. Delduc, **Comm. Math. Phys. 120 (1988) 121;**

[26] O. Piguet and K. Sibold, *Renormalized Supersymmetry,* series *Progress in Physics,* **vol. 12, Birkhäuser Boston Inc., 1986;**

[27] O. Piguet and K. Sibold, **Nucl. Phys. B253 (1985) 517;**

[28] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, **Phys. Lett. B224 (1989) 489;**
E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, **Phys. Lett. B227 (1989) 111;**
P. Cotta Ramusino, E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, **Nucl. Phys. B330 (1990) 557;**
E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, **Nucl. Phys. B330 (1990) 575;**

[29] L. Alvarez-Gaumé, J.M.F. Labastida and A.V. Ramallo, **Nucl. Phys. B334 (1990) 103;**

[30] A. Blasi and R. Collina, **Nucl. Phys. B345 (1990) 472;**

[31] F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet and S. P. Sorella, **Nucl. Phys. B346 (1990) 313;**

[32] C. Lucchesi and O. Piguet, **Nucl. Phys. B381 (1992) 281;**

[33] A. Schwarz, **Lett. Math. Phys. 2 (1978) 247;**

[34] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica, Guanabara Dois,* **1983;**

[35] E. Alvarez, **Rev. of Mod. Phys., 61 (1989) 561;**

[36] G. Barnich and M. Henneaux, **Phys. Lett. B311 (1993) 123;**

[37] P. C. West, *Supersymmetric Field Theories and the Gauge Covariant Field Theory of Strings,* **Procedings of the Twenty Eighth Scottish Universities Summer School in Physics - 1985;**

[38] L. C. Vilar, V. E. R. Lemes, O. S. Ventura, C. Sasaki, S. P. Sorella and M. Henneaux, **Phys. Lett. B410, 195 (1997);**

[39] D. Z. Freedman and P. K. Townsend, **Nucl. Phys. B177 (1981) 282;**

[40] M. Henneaux, **Phys Lett. B368 (1996) 83;**
M. Henneaux, B. Knaepen and C. Schomblond, **Comm. Math. Phys. 186 (1997) 137;**
M. Henneaux and B. Knaepen, and C. Schomblond, *All consistent interactions for exterior form gauge fields,* **hep-th / 9706119;**

[41] G. F. Chapline and N. S. Manton, **Phys. Lett. B120 (1983) 105;**
H. Nicolai and P. K.Towsend, **Phys. Lett. 98B (1981) 257;**
A. H. Chamseddine, **Nucl. Phys. B185 (1981) 403;**
A. H. Chamseddine, **Phys. Rev. D24 (1981) 3065;**
E. Bergshoeff, M. de Roo, B. de Wit and P. Van Nieuwenhuizen, **Nucl. Phys. B195 (1982) 97;**

[42] M. Kalb and P. Ramond, **Phys. Rev. D9 (1974) 2273;**

[43] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, volumes I and II,* **Cambridge University Press, Cambridge 1995 and 2996;**

[44] J. Therry-Mieg, **Nucl. Phys. B335 (1990) 334;**

[45] A. Khoudeir, **Mod. Phys. Lett. A11 (1996) 2489;**

[46] A. Lahiri, Generating Vector Boson Masses, **hep-th / 9301060;**
A. Lahiri, **Phys. Rev. 55 (1997) 5045;**
D. S. Hwang and C. Y. Lee, **J. Math. Phys. 38 (1997) 30;**
J. Barcelos-Neto, A. Cabo and M.B.D. Silva, **Z Phys. C72 (1996) 345;**
J. Barcelos-Neto and S. Rabello, *Mass generation for gauge fields in the Salam-Weinberg theory without Higgs bosons*, to appear in **Z. Phys. C, hep-th / 9601076;**

[47] R. Jackiw and S. -Y. Pi, **Phys. Lett. 403B (1997) 297;**

[48] R. Arnowitt and S. Deser, **Nucl. Phys. 49 (1963) 133;**

[49] E. Guadagnini, N. Maggiore, S. P. Sorella, **Phys. Lett. B255, (1991), 65;**

[50] C. Linhares, S. P. Sorella, V. R. R. Lemes and L. C. Q. Vilar, **hep-th / 9804186;**

[51] D. G. Barci, V. E. R. Lemes, C. Linhares de Jesus, M. B. D. Silva Maia Porto, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar, **Nucl. Phys. B524, (1998) 765;**

[52] A. Tanzini, O. S. Ventura, L. C. Q. Vilar and S. P. Sorella, **hep-th/9811191.**

"ASPECTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS DO MECANISMO DE MASSA TOPOLÓGICA EM TRÊS E QUATRO DIMENSÕES"

Ozemar Souto Ventura

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes profesores:

Silvio Paolo Sorella - Presidente

Luis Claudio Queiroz Vilar

Nelson Braga

José Abdalla Helayël-Neto

Nami Fux Svaiter

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 26 de fevereiro de 1999