Tese de Doutorado

Cohomologia BRST e Teorema de Noether

Claudio Anael Gomes Sasaki

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍSAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, março de 2000

Tese de Doutorado

Cohomologia BRST e Teorema de Noether

Claudio Anael Gomes Sasaki

Tese submetida ao Departamento de Campos e Partículas
como requesito para obtenção do grau
de Doutor em Física.

Orientador
Silvio Paolo Sorella

À minha
Perrone.

PREFÁCIO

Para elaboração desta tese foram utilizados os trabalhos abaixo citados:

C. A. G. Sasaki, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar e O. S. Ventura; *Algebraic Characterization of Vector Supersymmetry in Topological Field Theories*, **Journ. Math. Phys. 39 (1998) 848-866**.

C. A. G. Sasaki, D. G. G. Sasaki e S. P. Sorella; *Nonlinear Vector Susy for the Three-Dimensional Topological Massive Yang-Mills Theory*, **Mod. Phys. Lett. A 14 (1999) 391-396**.

C. A. G. Sasaki, S. P. Sorella e L. C. Q. Vilar; *Zero Curvature Formalism of the Four-Dimensional Yang-Mills in Superspace*, **Journ. Math. Phys. 40 (1999) 2735-2756**.

C. A. G. Sasaki, C. Linhares de Jesus e S. P. Sorella; *Vector Supersymmetry of Three-Dimensional Cohomological Field Theories*, **Braz. Journ. Phys 28 (1998) 44-51**.

Agradecimentos

Ao orientador Silvio Paolo Sorella por sua objetividade, dedicação e pelo ambiente agradável e fértil que criou para o grupo. Merece destaque especial o modo tolerante e respeitoso com que sempre fomos tratados por ele. Ao genial Luiz Claudio Queiroz Vilar pelos mesmos motivos que agradeço ao professor Sorella e mais ainda por ser um amigo e colega de muitos anos. Não esqueço, foi o Luiz que me chamou para trabalhar junto ao grupo que então estava em formação. Me desculpo com ele por muitas (e muitas) vezes não ter correspondido as espectativas. Aos amigos e colaboradores Ozemar S. Ventura, Daniel G.G. Sasaki, Marcelo Carvalho e Vitor E.R. Lemes pelo companheirismo e constante incentivo. A Sebastião Alves Dias pelo incentivo, ajuda e amizade. Aos amigos e colegas do inesquecível DCP pelo ambiente agradável e produtivo que construiram no departamento. São tão especiais que faço questão de lista-los. Léusinho, José Luis Boldo (o Galã do Pampas), Oswaldo (Você não foi ao Semináááááário!!), Marquinhos, L. P. Colatto, Maria Emilia (Âhh...Olguinha!), José Luiz Matheus-Valle, Luis Claudio (Português, Bacalhau e Vasco da Gama), Doctor Nelson Panza, Daniel Sasaki, Mauro Negrão (EscrotoMan), Margarida Negrão (GUIDA), O grande tricolor André Penafirme (fala garoto!), Guilherme (ACM do DCP), Ozemar Ventura, José Helayel (Sei, sei sei...sei! Claro..claro!), Alvaro Rocha Ferreira (sua b...preta!), O grande mineirinho Winder (lêspa!), Hugo Christiansen (O Vikenga), Guillermo (El Peruano Caliente), Humberto Belich Tanquito (Rapaz, tu vistes o Roman?), Lorde Gentil Oliveira Pires, Sir Marco Aurélio Kneipp (XÊDE), Leon Manssur (O Klingon hacker), Álvaro Nogueira (O Alma), Cristine Ferreira (não concordo!), Ricardo Renan (PB-inho), Marcia Moutinho (e seu chaveirinho), Vítor(zila) Lemes, Julio (isso é uma tremenda enganação!), Roman Pau9, Padre Marcelo (Rossi) Carvalho, Aníbal Caride (Que foi, queridos?!), Suzana Caride, Marcello Barbosa (Silvanet), Rodolfo Casana (O último inca peruano), Tiãomino (fala professor..!), Carlos Pinheiro (...e não cobraria nada por isso!), a supermala Antônio Teles, Marco Aurélio Monteiro, Professor José Leite Lopes e Pascoal. A Rosângela Castro, Elisabeth dos Anjos e Regina Salles Honório pela amizade, atenção e por serem adoráveis. A Miriam Coutinho pela disponibilidade que sempre demonstrou ao lidar com as nossas questões pertinentes a bolsa e cursos. Faço questão de agradecer em especial ao supertime que trabalha no Sujinho (Bar do seu Manoel), lá vai a escalação: Seu Manoel, Tiãozinho, Ismael, Halph, Jamilton (O Jajá), Andrezinho e Rodrigo. São pessoas de excelente carater, trabalhadores incansáveis, de um exepcional bom humor, simpáticos e atenciosos ao extremo. Como qualquer um que frequente o inigualável Sujinho, sempre sou recebido com carinho e amizade. Merecem uma nota de agradecimento o restaurante Varanda 33 e o original Café Amadeus ambos localizados no Rio Sul. Não posso omitir meus sinceros agradecimentos ao Departamento de Estruturas Matemáticas da UERJ e à Biblioteca W. A. Moura Melo. Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Apresentamos uma caracterização cohomológica para uma classe de identidades de Ward com termo de quebra linear. Os exemplos da supersimetria vetorial e da equação do *anti-ghost* no calibre de Landau são discutidos em detalhes. Mostramos que a existência dessas identidades de Ward com quebra linear está diretamente relacionada a certos cociclos exatos do operador de BRST, os quais dependem dos anti-campos e possuem número de *ghost* negativo, de forma análoga a reformulação cohomológica do teorema de Noether feita por M. Henneaux e seus colaboradores [1].

Abstract

An algebraic cohomological characterization of a class of linearly broken Ward identities is provided. The examples of the topological vector supersymmetry and of the Landau ghost equation are discussed in detail. The existence of such a linearly broken Ward identities turns out to be related to BRST exact antifield dependent cocycles with negative ghost number, according to the cohomological reformulation of the Noether theorem given by M. Henneaux et al [1].

Índice

Introdução

As teorias de campos topológicas [2] são modelos onde não há propagação de estados associados a exitações elementares. Estritamente falando, estes modelos não descrevem processos dinâmicos, sendo sensíveis somente aos invariantes globais da variedade base espaço-temporal onde estão definidos. Estruturas adicionais da variedade base, como a métrica, não são percebidas por uma teoria topológica. De forma pictórica, podemos dizer que o sistema de campos não percebe a diferença entre uma esfera e um elipsóide. Os valores esperados no vácuo dos observáveis destes modelos independem da métrica e por isso possibilitam o cálculo explícito de alguns invariantes topológicos.

Os modelos topológicos se dividem em duas grandes classes [3], as teorias cohomológicas de tipo Witten e os modelos de tipo Schwartz. O que caracteriza modelos do primeiro tipo é o fato de que suas ações completas são variações BRST puras. Por outro lado, a ação de um modelo do segundo tipo não pode ser completamente escrita como uma variação BRST. No entanto, ambas possuem uma propriedade em comum que é importante para nosso tratamento: o tensor energia-momento é trivial na cohomologia de BRST. Como exemplo das teorias cohomológicas podemos citar o modelo de Yang-Mills topológico [2] e o modelo sigma topológico [4]. O modelo de Chern-Simons em três dimensões [3, 5, 6] e os modelos BF [3, 7] são representantes das teorias de tipo Schwartz.

Sistemáticos estudos têm aprofundado o assunto nos últimos anos. Destacamos, em particular, que a conexão entre a teoria de Chern-Simons em três dimensões e as teorias de campos conformes em duas dimensões [8] sinaliza a possibilidade de haver uma classificação geral para as teorias conformes. Do ponto de vista matemático a conexão entre duas e três dimensões é bastante relevante para a teorias dos nós [9] e tópicos relacionados, como equação de Yang-Baxter e os grupos de tranças [10].

Atualmente, está bem estabelecido que as teorias de campos topológicas são caracterizadas, juntamente com sua simetria de BRST, por uma invariância adicional, conhecida com o nome de supersimetria vetorial [5, 6, 7, 11]. O objetivo principal desta tese é o de demonstrar que a supersimetria vetorial pode ser caracterizada de modo puramente algébrico. A existência desta supersimetria está relacionada diretamente com a invariância BRST expecífica das teorias de campos topológicas e, em particular, ao fato de podermos escrever o tensor energia-momento como uma variação de BRST exata, ou seja, como um cociclo trivial da cohomologia do operador de BRST.

Descoberta primeiramente no modelo de Chern-Simons em três dimensões quantizado no calibre de Landau [3, 6], a supersimetria vetorial possui diversas propriedades interessantes. Tais propriedades são fundamentais para o esquema da renormalização algébrica e motivaram suas extensões a outras teorias de campos topológicas como, por exemplo, os modelos BF, a corda bosônica e suas versões supersimétricas, a gravitação W_3 e o modelo de Yang-Mills topológico proposto por Witten.

É oportuno destacar que os geradores da supersimetria vetorial, os quais carregam um índice de Lorentz do espaço-tempo, formam, juntamente com o operador de BRST, uma álgebra de Wess-Zumino que é fechada, módulo equações do movimento, sobre as translações espaço-temporais. Tal fato possibilita uma interpretação supersimétrica das teorias topológicas [5, 6, 7, 11].

Outra característica peculiar da supersimetria vetorial é que esta ocorre somente após a introdução de todos os campos de *ghosts* necessários para quantizar apropriadamente o modelo. Em outras palavras, a supersimetria vetorial é uma invariância da ação quantizada, não possuindo análogo clássico. É importante observar que este fato está intimamente relacionado a escolha de um termo para a fixação de calibre na ação. Somente certos valores dos parâmetros de calibre são compatíveis com a presença de supersimetria vetorial. De outro ponto de vista, impondo a supersimetria vetorial num modelo topológico, selecionamos um valor específico para os parâmentros de calibre. Como exemplo podemos citar o caso de Chern-Simons em três dimensões, onde a supersimetria vetorial seleciona o calibre de Landau dentre uma família bem mais ampla de termos de fixação de calibre covariantes e lineares [5, 6].

Um fato interessante ocorre quando introduzimos os anti-campos de Batalin-Vilkovisky para controlar, ao nível quântico, as transformações de BRST não-lineares dos campos: a álgebra, que antes fechava módulo as equações do movimento, agora fecha exatamente sobre as translações do espaço-tempo. Contúdo, a supersimetria vetorial deixa de ser uma invariância exata da ação completamente quantizada. De fato, a introdução dos anti-campos faz com que a identidade de Ward associada a supersimetria vetorial tenha um termo de quebra clássico [6, 7, 11], isto é, uma quebra puramente linear nos campos quânticos do modelo. O aparecimento deste termo de quebra linear é uma característica notável da supersimetria vetorial, é sabido que um termo de quebra linear não sofre correções quânticas, e que portanto a utilidade da identidade de Ward da supersimetria vetorial fica preservada [12]. Tal identidade funcional, que é livre de anomalias ao nível quântico, desempenha um papel fundamental na caracterização de classes de cohomologia do operador de BRST, em particular na demonstração algébrica da finitude no regime do ultra-violeta das teorias topológicas [6, 7, 11].

Deve ser mencionado que o operador funcional relativo a supersimetria vetorial, o qual chamaremos W_μ, pode ser introduzido através de considerações geométricas para uma ampla classe de modelos de calibre [13, 14, 15, 16, 17], independente do fato deste operador ser ou não uma simetria da ação, eventualmente quebrada linearmente. Neste esquema algébrico, o operador W_μ é definido de modo a decompor a derivada espaço-temporal num anti-comutador BRST. Esta propriedade torna-se muito útil na procura de soluções para as equações de descidas, as quais estão associadas aos problemas da cohomologia BRST, como o cálculo de anomalias e de contra-termos invariantes para a renormalização.

Na prova algébrica da finitude do modelo de Chern-Simons em três dimensões no regime do ultra-violeta, o fato do operador funcional relativo a supersimetria vetorial agir de forma linear sobre os campos é uma característica bastante desejável [12]. No entanto existem sistemas de campos onde a supersimetria é realizada de modo não-linear.

Como exemplo, citamos o modelo topológico de Baulieu-Grossman [18] e da teoria de Yang-Mills com massa topológica [19], definidos num espaço-tempo de três dimensões. Este último caso será abordado em detalhes no terceiro capítulo desta tese.

A propriedade do operador W_μ de decompor a derivada do espaço-tempo num anticomutador BRST tem ainda interessantes consequências cujo significado geométrico é bastante profundo. De fato, o operador da supersimetria vetorial permite que todas as informações relevantes de um sistema de campos de calibre, como as transformações BRST dos campos, as classes de cohomologia do operador de BRST e as soluções das equações de descidas, sejam codificadas em uma única equação, a qual toma a forma de uma condição de curvatura nula [20].

Uma vez que todo o procedimento de quantização BRST pode ser adaptado de modo a incluir os modelos de calibre renormalizáveis e supersimétricos, seria natural também extender o formalismo de curvatura nula para as teorias de calibre com supersimetria $N = 1$ no superespaço. No entanto, no superespaço, a derivação das equações de descidas e a procura de suas soluções tornam-se tarefas bem mais complexas, devido a estrutura algébrica das derivadas covariantes espinoriais e aos vínculos de certos supercampos, característicos de cada modelo. Enquanto um tratamento geral é praticamente impossível, a formulação de curvatura nula foi obtida com sucesso para as teorias de Yang-Mills supersímetricas $N = 1$ no superespaço [21], facilitando, assim, a obtenção das classes de cohomologia supersimétricas relevantes papa os contratermos e as anomalias quirais.

As interessantes e úteis características da supersimetria vetorial motivaram maiores investigações acerca de sua origem. Podemos citar o caso do modelo de Yang-Mills topológico em quatro dimensões proposto por Witten [2], onde a supersimetria vetorial pode ser obtida a partir de uma redefinição linear dos geradores da álgebra de supersimetria $N = 2$. Por outro lado, para os modelos topológicos pertencentes a classe de Schwartz, não existe a conexão entre a supersimetria vetorial e a álgebra de supersimetria extendida. Para estes modelos a supersimetria vetorial foi originalmente introduzida *ad hoc* [5, 6, 7]. Posteriormente sua existência foi relacionada ao fato de que o tensor energia-momento pode ser expresso como uma pura variação de BRST [22].

Nos trabalhos que deram origem a esta tese mostramos que a supersimetria vetorial presente nas teorias topológicas está diretamente relacionada a cohomologia do operador de BRST. De fato, foi possível exibir uma caracterização puramente algébrica para a existência do operador de supersimetria e seu termo de quebra linear associado. Em particular, mostraremos que é precisamente a prescrição de linearidade nos campos quânticos para o termo de quebra da supersimetria vetorial que seleciona um conjunto particular de parâmetros de calibre [23], tornando clara a relação entre a supersimetria vetorial e o mecanismo de fixação de calibre.

Em termos mais precisos, a supersimetria vetorial nos modelos de calibre topológicos está diretamente relacionada a presença de um cociclo vetorial do operador de BRST, o qual depende dos anti-campos de um modo particular, no setor cujo número de *ghost* é -1. Em suma, a existência ou não da supersimetria vetorial depende exclusivamente do fato deste cociclo ser ou não ser trivial na cohomologia BRST. Quando o cociclo for trivial, a identidade de Ward associada a supersimetria vetorial está sempre presente, sendo acompanhada de um termo de quebra linear nos campos quânticos do modelo. Por outro lado, quando o cociclo vetorial não for BRST exato, e portanto representar uma classe de cohomologia, a supersimetria vetorial não poderá ser estabelecida. Salientamos que este último caso é exatamente o que ocorre com a teoria de Yang-Mills em quatro dimensões: a existência do cociclo vetorial não-trivial dependente dos anti-campos no setor de número de *ghost* -1 não permite que a seja definida a supersimetria vetorial.

O tratamento algébrico utilizado nesta tese é bastante similar ao da reformulação cohomológica do teorema de Noether realizado por M. Henneaux e colaboradores [1] e, em certo sentido, é uma extensão destes resultados. De fato, o cociclo vetorial mencionado anteriormente, pode estar relacionado a um conjunto de correntes, dentre as quais, podemos identificar o tensor energia-momento. Isto mostra que o cociclo dependente dos anti-campos está relacionado diretamente as transformações de Poincaré, de acordo com a análise de Henneaux e colaboradores.

O conteúdo desta tese se distribui da seguinte forma: no primeiro capítulo, depois de estabelecermos a notação e demais convenções, mostramos como algumas classes de cohomologia relativas ao operador de BRST relacionam-se com correntes conservadas e, portanto, caracterizam invariâncias da ação clássica. A parte final deste capítulo é dedicada a uma rápida apresentação dos resultados obtidos por Henneaux e colaboradores. O capítulo seguinte se inicia com uma exposição ilustrativa da supersimetria vetorial presente no modelo de Chern-Simons em três dimensões. As diversas características da supersimetria vetorial, que mencionamos nesta introdução, são apresentadas de modo a tornarem-se familiares. Logo após, segue-se uma sequência de comentários indicando quais propriedades são genaralizadas a outros modelos. O cenário geral onde a demonstração da raiz algébrica da supersimetria vetorial é estabelecido na sequência. Mostra-se, em seguida, que um determinado polinômio integrado com um índice de Lorentz e com dependência linear nos anti-campos é um cociclo do operador de BRST, em função da invariância de Poincaré da teoria. Depois de analisarmos em detalhes a natureza deste cociclo, mostramos que a trivialidade deste polinômio na cohomologia é uma propriedade dos modelos topológicos, possibilitando a caracterização algébrica da supersimetria vetorial. Paralelamente, explicitamos a profunda relação entre o termo de quebra da supersimetria vetorial e o procedimento de fixação de calibre. Ao final do capítulo, mostramos como uma identidade de Ward associada a supersimetria, incluindo o termo de quebra clássico, pode ser derivada diretamente do cociclo trivial acima mencionado. O último capítulo, o terceiro, é dedicado a abordar em detalhes quatro casos bastante ilustrativos do formalismo estudado. No primeiro deles focaliza-se a presença da supersimetria vetorial no sistema BF em quatro dimensões. A existência da supersimetria vetorial no sistema de *ghosts* b-c é descrita no segundo exemplo. A seguir, no terceiro, exibimos uma outra identidade de Ward que também pode ser caracterizada de forma totalmente análoga a supersimetria vetorial. Trata-se da equação do *ghost*, presente em teorias com invariância rígida e quantizadas no calibre de Landau. A partir deste exemplo podemos especular sobre a existência de uma classificação cohomológica geral das invariâncias em modelos de calibre quânticos, ou mesmo da viabilidade de geração de simetrias devidamente apropriadas a um específico sistema de campos. No último tópico do capítulo enfocamos a obtenção da supersimetria vetorial não-linear para o modelo de

Yang-Mills com massa topológica em três dimensões, por intermédio de uma redefinição não-linear, porém local e covariante, do campo de calibre.

Não nos preocupamos em justificar em detalhes certas passagens onde trabalhamos com tópicos básicos da cohomologia do operador de BRST, como as equações de descidas e suas relações com a supersimetria vetorial, em função da existência de uma excelente e bem difundida literatura focalizando este assunto [12, 1, 24].

Capítulo 1

Formulação cohomológica do teorema de Noether

Como já dissemos na Introdução, conheciamos diversas características do operador W_μ, particularmente o fato deste operador definir uma supersimetria vetorial para teorias de campos topológicas. Por outro lado sabiamos que o mesmo operador não definia uma simetria exata para teorias não-topológicas. Nossa investigação foi na direção de esclarecer este ponto, como veremos em detalhes nos capítulos seguintes.

Os resultados que obtivemos podem ser vistos como extensões dos trabalhos de M. Henneaux e seus colaboradores [1], os quais exibiram uma reformulação do teorema de Noether segundo a cohomologia de BRST. Esta versão cohomológica do teorema de Noether relaciona cociclos do operador de BRST à conservação de correntes clássicas.

Neste capítulo descrevemos de forma simplificada como quantidades pertencentes a classes de cohomologia podem caracterizar certas invariâncias. Neste percurso introduziremos as tecnicas que nos serão úteis no próximo capítulo onde demonstramos a caracterização algébrica da supersimetria vetorial. Não é nosso objetivo esgotar o assunto, de fato existem muitos resultados parciais, mas ainda esperamos resultados gerais que relacionem classes de cohomologia à correntes conservadas para teorias completamente quantizadas. Por último fazemos uma breve exposição dos resultados obtidos por Henneaux e colaboradores onde comentamos os aspectos básicos da versão cohomológica do teorema de Noether.

De modo específico, vamos considerar uma dada ação clássica

$$S_{inv}(\phi) = \int d^D x \, \mathcal{L}_{inv}(\phi) \tag{1.1}$$

definida num espaço-tempo euclidiano com D dimensões que possua um conjunto de invariâncias locais δ_g:

$$\delta_g S_{inv} = 0.$$

Os campos ϕ^i $(i = 1, ..., n)$ são descritos coletivamente pelo arranjo ϕ. As transformações de calibre locais para os campos presentes na ação de partida,

$$\delta_g \phi^i = R^i_\alpha(\phi) \, \varepsilon^\alpha(x) \tag{1.2}$$

como sabemos, dependem de parâmetros infinitesimais $\varepsilon^\alpha(x)$ $\alpha = 1, ..., p$. As quantidades $R^i_\alpha(\phi)$, como indicado, em geral dependem dos campos e suas derivadas, são os geradores das transformações de calibre. É importante frizar que o conjunto de simetrias pode ser redutível, em outras palavras podem haver relações entre as próprias simetrias.

Apenas para exemplificar um caso redutível, digamos que uma teoria de calibre seja construida com um tensor completamente antissimétrico e cujo posto é três

$$G_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

onde $B_{\mu\nu}$ é um campo tensorial antissimétrico cujo posto é dois. É direta a verificação que esta teoria é invariante face as transformações

$$\delta_g B_{\mu\nu} = \partial_\mu \eta_\nu - \partial_\nu \eta_\mu. \tag{1.4}$$

Porém, como é fácil se verificar, existe uma simetria entre as próprias transformações acima:

$$\delta_g \eta_\mu = \partial_\mu \alpha. \tag{1.5}$$

Sendo assim é claro que as transformações $\delta_g B_{\mu\nu}$ não são todas independentes, neste sentido é que o sistema de simetrias é redutível. Este tipo de teoria possui um estrutura mais complicada que as teorias irredutíveis, em outras palavras, o conjunto de relações algébricas entre os geradores das transformações de simetria é bem mais complexo quando comparado ao caso irredutível onde as invariâncias são independentes umas das outras.

Nossa análise será suficientemente geral para apreciar também as chamadas álgebras abertas, isto é, teorias onde as relações algébricas entre geradores são tomadas módulo equações de movimento, como nos modelos BF que veremos no terceiro capítulo desta tese.

Como é bem conhecido, campos de *ghosts* tornam-se necessários para descrever a estrutura de calibre de teorias de campos de modo compacto. Os *ghosts* $\xi^{\alpha}(x)$ são introduzidos em substituição aos parâmetros de gauge $\varepsilon^{\alpha}(x)$ e possuem estatística oposta a estes. Assim, por exemplo, no caso de uma supersimetria, onde os parâmetros infinitesimais são férmions (anti-comutantes), os *ghosts* serão bosons (comutantes) e vice-versa. Para nossos propósitos, os campos clássicos e os *ghosts* serão representados indistintamente por Φ. Seguindo o procedimento padrão para quantização de teorias de calibre, com a introdução dos *ghosts* necessários para identificar a estrutura algébrica, os campos (e *ghosts*) da teoria passam a carregar dois índices discretos, o número de *ghost* N_{Φ^i} e a dimensão d_{Φ^i}. A função destes índices é ajudar na construção de polinômios de campos potencialmente úteis nos processos de quantização e análise do modelo, como por exemplo a construção das classes de cohomologia do operador de BRST.

Introduzimos agora um operador s, que por definição é um diferencial, isto é, verifica uma regra de Leibniz graduada e é nilpotente , $s^2 = 0$. O diferencial s atua nos campos e *ghosts* do modelo segundo

$$\begin{aligned} s\phi^i &= R^i_\alpha(\phi)\,\xi^\alpha, \\ s\xi^\alpha &= Q^\alpha_\beta(\phi,\xi)\,\xi^\beta, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde o termo $Q^\alpha_\beta(\phi,\xi)$ é, de fato, caracterizado pelo requerimento de nilpotência do operador s.

Como o operador s eleva de uma unidade o número de *ghost* de um monômio de campos, dizemos que carrega um número de *ghost*. A introdução deste operador diferencial é o primeiro passo do tratamento BRST para a quantização dos modelos de calibre [12]. É bom lembrar que o método BRST é suficientemente geral para admitir o caso em que s é nilpotente módulo equações do movimento. Por convenção adimitimos que o operador s carrega número de *ghost* 1.

As transformações não lineares do operador s introduzem novas funções de Green que precisam ser renormalizadas, uma vez que o diferencial s encorpora as invariâncias do modelo em questão. Estas funções de Green envolvem operadores compostos dando origem assim a inserções nas funções de Green. De modo a levar a cabo este programa, para cada campo com transformação não linear por s são introduzidos anti-campos de Batalin e Vilkovisky. Os anti-campos relativos aos campos clássicos ϕ^i são denotadas respectivamente por ϕ_i^*. Os anti-campos dos *ghosts* ξ^α são identificados por ξ_α^*. Um anti-campo genérico será representado por Φ_i^*. O número de *ghost* e dimensão de uma fonte Φ_i^* são respectivamente $-(1+N_{\Phi^i})$ e $(D-d_{\Phi^i})$. Em resumo, o número de *ghost* dos campos clássicos é zero, um racional positivo para os *ghosts* ξ^α e um racional estritamente negativo para os anti-campos.

Construimos então uma ação

$$S = S_{inv} + \int d^D x \, \left(\phi_i^* R_\alpha^i \xi^\alpha + \xi_\alpha^* s \xi^\alpha + U\left(\Phi, \Phi^*\right)\right), \tag{1.7}$$

onde o termo $U(\Phi, \Phi^*)$ representa um polinômio que possui pelo menos um termo quadrático nos anti-campos e cujos coeficientes dependem em geral dos campos do modelo, que satisfaça a identidade de Slavnov-Taylor

$$\int d^D x \, \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i^*}\frac{\delta S}{\delta \phi^i} + \frac{\delta S}{\delta \xi_\alpha^*}\frac{\delta S}{\delta \xi^\alpha}\right) = 0. \tag{1.8}$$

Esta identidade possibilita a análise das propriedades fundamentais das funções de Green com inserções de operadores compostos, sendo portanto peça-chave na renormalização das simetrias ao nível quântico.

Da identidade acima podemos derivar o operador funcional nilpotente

$$\mathcal{B}_S = \int d^D x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i^*} \frac{\delta}{\delta \phi^i} + \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta}{\delta \phi_i^*} + \frac{\delta S}{\delta \xi_\alpha^*} \frac{\delta}{\delta \xi^\alpha} + \frac{\delta S}{\delta \xi^\alpha} \frac{\delta}{\delta \xi_\alpha^*} \right), \tag{1.9}$$

$$\mathcal{B}_S \mathcal{B}_S = 0,$$

denominado operador linearizado de Slavnov-Taylor e que carrega número de *ghost* 1. A nilpotência deste operador vem do fato de que a ação S satisfaz a identidade de Slavnov-Taylor, como pode ser facilmente reconhecido. Como estamos à princípio interessados em obtermos simetrias globais da ação clássica, não nos preocuparemos com os termos de fixação de calibre. Mais adiante faremos breves comentários sobre uma análise um pouco mais geral onde os termos de fixação de calibre podem figurar na ação.

Com a introdução do operador linearizado e nilpotente $\mathcal{B}_S$ podemos imediatamente considerar problemas de cohomologia relativos à certos setores relevantes do sistema de campos.

Vamos nos deter aos setores da cohomologia integrada que possuam cociclos $\mathcal{B}_S$-exatos com número de *ghost* negativo, ou no máximo nulo, e que contém pelo menos um anti-campo em cada um dos seus monômios constituintes. Em símbolos, estamos considerando um polinômio integrado

$$\Omega_a^{-g} = \int d^D x \, \left(\mathcal{N}_a^i \left(\Phi, \Phi^* \right) \phi_i^* + \mathcal{V}_a^\beta \left(\Phi, \Phi^* \right) \xi_\beta^* \right), \tag{1.10}$$

onde g (o número de *ghost*) é maior ou no mínimo igual a zero, $\mathcal{N}_a^i \left(\Phi, \Phi^* \right)$ e $\mathcal{V}_a^\beta \left(\Phi, \Phi^* \right)$ são polinômios locais nas variáveis Φ^i,Φ_i^* e suas derivadas tal que

$$\Omega_a^{-g} = \mathcal{B}_S \Xi_a^{-g-1}. \tag{1.11}$$

O índice a pode representar propriedades tensoriais do espaço-tempo, graus de liberdade internos e eventualmente engloba todas essas características.

Observamos que Ξ_a^{-g-1} possui um número de *ghost* estritamente negativo e portanto é formado necessariamente por polinômios cujos monômios contituintes dependem dos anti-campos, ou seja

$$\Xi_a^{-g-1} = \int d^D x \; \left(\mathcal{M}_a^i \left(\Phi, \Phi^*\right) \phi_i^* + \mathcal{P}_a^\beta \left(\Phi, \Phi^*\right) \xi_\beta^* \right). \tag{1.12}$$

A tarefa que segue é a análise da condição de que Ω_a^{-g} é um cociclo $\mathcal{B}_S$-exato. Explicitando a ação do operador funcional (1.9) na condição (1.11) acima e fazendo-se uma restrição às variáveis clássicas, o que corresponde a tomar o limite com anti-campos iguais a zero,

$$\mathcal{B}_S \Xi_a^{-g-1} - \Omega_a^{-g} \Big|_{\phi^* = \xi^* = 0} = 0, \tag{1.13}$$

obtemos a identidade funcional

$$\int d^D x \; \left(\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \Xi_a^{-g-1}}{\delta \phi_i^*} + \frac{\delta S}{\delta \phi_i^*} \frac{\delta \Xi_a^{-g-1}}{\delta \phi^i} + \frac{\delta S}{\delta \xi^\beta} \frac{\delta \Xi_a^{-g-1}}{\delta \xi_\beta^*} + \frac{\delta S}{\delta \xi_\beta^*} \frac{\delta \Xi_a^{-g-1}}{\delta \xi^\beta} \right) \Bigg|_{\phi^* = \xi^* = 0} = 0. \tag{1.14}$$

Uma vez que a restrição de S ao conjunto de variáveis clássicas é S_{inv}, a identidade acima se resume à

$$\int d^D x \; \mathcal{M}_a^i \left(\phi\right) \frac{\delta S_{inv}}{\delta \phi^i} = 0. \tag{1.15}$$

Vimos então que a ação invariante S_{inv} possui uma simetria global adicional relacionada a um setor trivial da cohomologia do operador nilpotente $\mathcal{B}_S$ e cujos geradores δ_a carregam o (multi) índice a,

$$\delta_a \phi^i = \mathcal{M}_a^i \left(\phi\right). \tag{1.16}$$

Neste ponto fazem-se necessários alguns comentários, uma simetria global adicional em geral acarreta novas restrições ao comportamento quântico da teoria, deste modo para efetuarmos adequadamente a quantização do modelo é preciso levar em consideração a presença de tais invariâncias logo de partida. A natureza da nova invariância decorre da forma do polinômio $\mathcal{M}_a^i \left(\phi\right)$, se este for composto de monômios não-lineares nos campos, então será preciso definir $\mathcal{M}_a^i$ como um operador composto para dar sequência a renormalização das funções de Green com inserções que são naturalmente associadas às invariâncias. Como sabemos, precisamos introduzir novos anti-campos para levar este programa a cabo, o antigo sistema de anti-campos que haviamos definido não é suficiente para levar em consideração a nova invariância global do modelo em questão. Não entraremos em detalhes quanto as técnicas para conduzir este problema, apenas nos limitamos a mencionar que é possível, de forma sistemática, englobar todas as invariâncias adicionais num operador de BRST generalizado [25].

Em síntese, o que exibimos acima de maneira simples, torna visível a relação entre cociclos do operador de BRST e simetrias globais de modelos de campos clássicos. Modelos que possuem este tipo de invariância suportam a presença de correntes que são conservadas em virtude das equações de movimento. Precisamos mencionar ainda, que objetos não triviais da cohomologia do operador de BRST que dependem dos anti-campos também podem dar origem a invariâncias globais.

No esquema que traçamos anteriormente, como procurávamos simetrias da ação classica, obviamente não introduzimos os termos de fixação de calibre. No entanto, o mesmo raciocínio algébrico se aplica a teorias completamente quantizadas, onde o operador de Slavnov-Taylor suporta também os termos de fixição de calibre. Neste caso, não são necessárias as restrições às variáveis classicas que fizemos no tratamento acima e invariâncias da ação quantizada são estabelecidas. A caracterização cohomológica da supersimetria vetorial, que veremos em detalhes no capítulo seguinte, é exatamente um caso de invariância da ação contendo termos de fixação de calibre. Deve-se comentar que para teorias completamente quantizadas, embora existam muitos resultados parciais, ainda esperamos por um esquema geral relacionando classes de cohomologia à correntes conservadas .

Num contexto bastante geral, capaz de incluir os principais modelos de calibre conhecidos, um teorema de Noether cohomológico foi formulado em uma série de artigos [1]. O teorema se estabelece após uma detalhada análise da cohomologia do operador $\mathcal{B}_S$, de fato ele decorre de vários resultados algébricos bastante profundos e gerais. Nos parágrafos que seguem daremos uma exposição resumida deste teorema de Noether algébrico.

A primeira observação relevante [26] e que torna explícita a estrutura algébrica do operador $\mathcal{B}_S$ é a de que este contém dois setores, os quais carregam informações essenciais. O primeiro setor está associado ao operador de Koszul-Tate η, que age exclusivamente sobre os anti-campos e por isso introduz a presença das equações de movimento na cohomologia. O operador exterior longitudinal s, o qual implementa a invariância de calibre está associado ao segundo setor mencionado. Em geral estamos mais familiarizados com o modelo de Yang-Mills, onde muitos aspéctos algébricos aparecem de modo simplificado, é preciso lembrar contúdo, que Yang-Mills é de fato um caso muito particular onde o operador exterior s se torna um diferencial uma vez que a álgebra de calibre fecha exatamente sem o auxílio das equações do movimento. Em contraste, num modelo genérico, o operador de Koszul-Tate η é a única parte do operador $\mathcal{B}_S$ que é garantidamente um diferencial nilpotente. Realmente, de forma bastante simplificada, o diferencial $\mathcal{B}_S$ pode ser escrito como uma soma do operador de BRST s com o diferencial de Koszul-Tate η, isto é

$$\mathcal{B}_S = s + \eta.$$

Numa teoria de calibre é o operador de BRST completo $\mathcal{B}_S$ que está associado aos problemas fisicamente relevantes tais como a renormalização (subtração de infinitos) e ao cálculo de anomalias (renormalização das simetrias ao nível quântico) [12]. Veremos no próximo capítulo como o carater topológico de um modelo está relacionado com a cohomologia do operador $\mathcal{B}_S$. Resumindo, grande parte da física dos modelos envolvendo campos de calibre está diretamente relacionada ao operador completo de BRST $\mathcal{B}_S$, em particular às suas classes de cohomologia.

Na maioria dos problemas, o setor fisicamente relevante da cohomologia do operador de BRST é aquele que envolve polinômios integrados constituídos de funções locais com relação aos campos, em outras palavras, é a cohomologia do operador $\mathcal{B}_S$ definida no espaço dos funcionais locais. A solução do problema de cohomologia para um dado setor é um grupo aditivo, cada elemento deste grupo identifica uma classe de equivalência de cociclos. Representantes destas classes são ditos cociclos não-triviais, os cociclos triviais são aqueles que definem justamente o módulo na relação de equivalência por $\mathcal{B}_S$.

Denotaremos por $\mathcal{H}^k(\mathcal{B}_S)$ o grupo de cohomologia do operador nilpotente $\mathcal{B}_S$ agindo sobre os funcionais locais cujo número de *ghost* é k. Podemos ver os funcionais locais como integrais de n-formas diferenciais exteriores, onde n é a dimensão do espaço-tempo onde as formas diferenciais estão definidas. Como veremos a seguir, este enfoque permite que se trabalhe com um problema de cohomologia um pouco mais tratável do que aquele que busca diretamente o grupo $\mathcal{H}^k(\mathcal{B}_S)$, não obstante relacionado a este. De fato, identificar os elementos independentes, que formam uma base, na cohomologia integrada é, em geral, uma tarefa bastante árdua. Felizmente esta abordagem direta pode ser evitada partindo-se em direção ao problema da cohomologia ao nível não-integrado. Consideremos então um problema de cohomologia para o caso dos funcionais locais, isto é:

$$\mathcal{B}_S\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A} = \int \omega_D^k. \tag{1.17}$$

k denota o número de *ghost* da D-forma local ω. Vale a pena lembrar que os valores 0 e 1 para o número de *ghost* correspondem aos problemas citados acima, respectivamente ao cálculo de contratermos e a caracterização das anomalias. Assumindo condições de contorno regulares podemos escrever imediatamente

$$\mathcal{B}\omega_D^k + d\omega_{D-1}^{k+1} = 0. \tag{1.18}$$

Na expressão acima $d = dx^\mu\partial_\mu$ é a derivada exterior do espaço-tempo. As relações algébricas existentes entre os operadores $\mathcal{B}_S$ e d são dadas abaixo:

$$\mathcal{B}_S^2 = d^2 = \mathcal{B}_S d + d\mathcal{B}_S = 0. \tag{1.19}$$

Deve ser observado que quando passamos do problema integrado para sua extensão local não é mais permitido fazer integrações por partes e portanto os campos e suas derivadas serão considerados variáveis independentes. Convém explicitar a ação da derivada exterior sobre uma função local genérica f,

$$
\begin{aligned}
& df\left(\Phi, \partial_\mu \Phi, ..., \partial_{\mu_1 ... \mu_s} \Phi\right) \qquad (1.20)\\
= & \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi}\partial_\mu \Phi + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial_\nu \Phi\right)}\partial_\mu \partial_\nu \Phi + ... + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial_{\nu_1 ... \nu_s}\Phi\right)}\partial_\mu \partial_{\nu_1 ... \nu_s}\Phi\right) dx^\mu .
\end{aligned}
$$

Aqui o símbolo Φ engloba tanto os campos quanto os anti-campos.

Como sabe-se, as equações (1.18) definem um problema de cohomologia de $\mathcal{B}_S$ módulo d, uma vez que a D-forma ω_D^k é $\mathcal{B}_S$-fechada módulo a ação do operador d. Neste caso $\mathcal{A}$ é BRST-exata se, e somente se,

$$
\omega_D^k = \mathcal{B}_S \hat{\omega}_D^{k-1} + d\hat{\omega}_{D-1}^k . \qquad (1.21)
$$

De fato a cohomologia de BRST no espaço dos funcionais locais, $\mathcal{H}^k\left(\mathcal{B}_S\right)$, é isomórfica ao grupo de cohomologia $\mathcal{H}^{k,D}\left(\mathcal{B}_S \mid d\right)$ do operador de BRST $\mathcal{B}_S$ agindo sobre as D-formas locais módulo d. Sem entrar em detalhes indicamos que geralmente desconsidera-se a restrição $\oint \hat{\omega}_D^{k-1} = 0$, a qual depende de condições de contorno específicas, e conduz-se um tratamento puramente algébrico para caracterizar o conjunto $\mathcal{H}^{k,D}\left(\mathcal{B}_S \mid d\right)$. Este é o procedimento padrão, portanto podem ocorrer elementos na cohomologia $\mathcal{H}^{k,D}\left(\mathcal{B}_S \mid d\right)$ os quais não definem funcionais locais $\mathcal{B}_S$-fechados. Sempre que isto ocorrer necessita-se de uma análise mais apurada para mapearmos quais são os objetos que realmente se relacionam com o grupo $\mathcal{H}^k\left(\mathcal{B}_S\right)$.

Para melhor apreciarmos o teorema de Noether cohomológico, vamos rapidamente listar alguns poucos resultados e suposições preliminares. De modo a tornar a exposição simples e objetiva, consideramos somente teorias de calibre clássicas redutíveis de ordem um, e cujos campos são bosônicos. No entanto frizamos que os resultados são válidos também em situações bem mais gerais. Por último, com o propósito de nos familiarizarmos com a metodologia e análise empregadas na demonstração do teorema, vamos migrar para a notação original [1] que utiliza funções núcleo em integrais de convolução. É bem fácil retornar para a notação que empregamos no tratamento anterior.

Numa teoria redutível as transformações de calibre para os campos clássicos no modelo de partida se escreve

$$\delta_g \phi^i (x) = \int R^i_\alpha (x, x') \, \varepsilon^\alpha (x') \, dx', \tag{1.22}$$

as relações

$$R^i_\alpha (x, x') = R^i_\alpha \delta (x - x') + R^{i\mu}_\alpha \partial_\mu \delta (x - x') + ... + R^{i\mu_1 ... \mu_k}_\alpha \partial_{\mu_1} ... \partial_{\mu k} \delta (x - x') \,, \tag{1.23}$$

onde $\delta (x - x')$ é a delta de Dirac, não são todas independentes. Como já comentamos anteriormente, existem relações não-triviais entre os seus geradores, fato este que representamos através da expressão

$$\int Z^\alpha_\Delta (x, x') \, R^i_\alpha (x', x'') \, dx' = 0. \tag{1.24}$$

Para teorias redutíveis de ordem um as quantidades $Z^\alpha_\Delta (x, x')$ são independentes e portanto não apresentam relações algébricas não-triviais. É bem conhecido que a estrura algébrica de uma teoria redutível somente é fixada com a presença de *ghosts* de *ghosts*. Abaixo listamos o conteúdo de campos relevante para um modelo redutível de ordem um e indicamos seus respectivos números de *ghost*.

	ϕ^i	c^α	c^Δ	ϕ^*_i	c^*_α	c^*_Δ
N_g	0	1	2	-1	-2	-3

(1.25)

Os ϕ^i 's são os campos clássicos, c^a os fantasmas e as quantidades c^Δ são os *ghosts dos ghosts*. Os respectivos anti-campos são obviamente ϕ^*_i, c^*_α e c^*_Δ. Em modelos de calibre irredutíveis, como Yang-Mills, não temos as quantidades $Z^\alpha_\Delta (x, x')$ que caracterizam dependência entre as transformações de calibre dos campos clássicos. Neste caso, obviamente, não temos *ghosts de ghosts* e nem seus respectivos anti-campos. É desnecessário lembrar que se a teoria não tiver liberdade de calibre, então as quantidades $R^i_\alpha (x, x')$ e $Z^\alpha_\Delta (x, x')$ serão identicamente nulas.

Já mencionamos que a parte do operador de BRST que carrega informações sobre os anti-campos e equações de movimento é a diferencial de Koszul-Tate η. Abaixo exibimos a ação do operador de Koszul-Tate sobre os campos genéricos do modelo redutível de ordem um:

$$
\begin{aligned}
\eta\phi^i(x) &= 0, \eta c^\alpha(x) = 0, \eta c^\Delta(x) = 0, \\
\eta\phi_\iota^*(x) &= -\frac{\delta\mathcal{L}_{inv}}{\delta\phi^i}(x), \\
\eta c_\alpha^*(x) &= \int \phi_i^*(x') R_\alpha^i(x,x') dx', \\
\eta c_\Delta^*(x) &= -\int c_\alpha^*(x') Z_\Delta^\alpha(x,x') dx' \\
&+\frac{1}{2}\int \phi_i^*(x')\phi_j^*(x'') M_\Delta^{ij}(x;x',x'') dx'dx''.
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

Completando a caracterização do operador de Koszul-Tate. Para esta mesma teoria redutível de ordem um escrevemos abaixo a parte do operador de BRST que implementa a invariância de calibre:

$$
\begin{aligned}
s\phi^i(x) &= \int R_\alpha^i(x,x') c^\alpha(x') dx', \\
sc^\alpha(x) &= \int Z_\Delta^\alpha(x,x') c^\Delta(x') dx' + \frac{1}{2}\int C_{\beta\gamma}^\alpha(x;x',x'') c^\beta(x') c^\gamma(x'') dx'dx'', \\
sc^\Delta(x) &= \int C_{\alpha\Gamma}^\Delta(x;x',x'') c^\alpha(x') c^\Gamma(x'') dx'dx'' \\
&+\frac{1}{3}\int C_{\alpha\beta\gamma}^\Delta(x;x',x'',x''') c^\alpha(x') c^\beta(x'') c^\gamma(x''') dx'dx''dx'''.
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

As quantidades M_Δ^{ij}, $C_{\beta\gamma}^\alpha$, $C_{\alpha\Gamma}^\Delta$ e $C_{\alpha\beta\gamma}^\Delta$ são constantes de estrutura generalizadas apropriadamente escolhidas para que o operador $\mathcal{B}_S$ seja nilpotente. A ação do operador s sobre os anti-campos, como sabe-se, é definida de tal modo que seja nilpotente módulo o operador de Koszul-Tate. Sem explorar demasiadamente o formalismo, apenas comentamos que as cohomologias de $\mathcal{B}_S$ e de η estão relacionadas. De fato, teoremas muito significativos decorrem das relações entre os dois operadores nilpotentes. Enfocaremos primeiramente um resultado geral que diz respeito às classes de cohomologia de $\mathcal{B}_S$ módulo d e de η módulo d. Existe uma equivalência entre as cohomologias $\mathcal{H}^k(\mathcal{B}_S \mid d)$ e $\mathcal{H}^{-k}(\eta \mid d)$ quando o número de *ghost* k for negativo. Em outras palavras os grupos aditivos acima são isomórficos para valores negativos de k. Este resultado é obtido com a aplicação do método das perturbações homológicas aos conjuntos que são classes de equivalência em um determindo domínio algébrico. O cerne do teorema de Noether cohomológico está no fato de que o grupo de cohomologia $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d) \equiv \mathcal{H}^{-1,D}(\mathcal{B}_S \mid d)$ definido para as D-formas de um espaço-tempo de dimensão D é isomórfico ao espaço das correntes conservadas não triviais. Observamos que não chega a ser surpreendente que a cohomologia do operador de BRST esteja diretamente relacionada com constantes do movimento, uma vez que o operador $\mathcal{B}_S$ envolve explicitamente as equações de movimento.

O conjunto $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ pode conter objetos os quais não são cociclos cohomologicamente triviais, estes por sua vez são D-formas cujo número de *ghost* é -1 soluções da equação

$$\eta a + dj = 0, \tag{1.28}$$

onde j é uma forma de grau $D-1$ e número de *ghost* zero. Pelo fato da contribuição dos *ghosts* ser trivial na cohomologia de η podemos assumir que a e j independem dos *ghost*. Assim, de modo geral, escrevemos

$$a = a^i \phi_i^* + a^{i\mu} \partial_\mu \phi_i^* + \ldots + a^{i\mu_1 \ldots \mu_l} \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} \phi_i^*. \tag{1.29}$$

Observe que com esta caracterização de a, a equação (1.28) exprime o fato de que j é uma corrente conservada em virtude das equações do movimento do sistema. Realmente, uma vez que

$$\eta \phi_i^*(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i}(x) \tag{1.30}$$

como vimos anteriormente, temos

$$a^i \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} + a^{i\mu} \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} + \ldots + a^{i\mu_1 \ldots \mu_l} \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} = dj \tag{1.31}$$

que em notação indicial se escreve

$$X^i \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} + X^{i\mu} \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} + \ldots + X^{i\mu_1 \ldots \mu_l} \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} = \partial_\mu j^\mu. \tag{1.32}$$

Como sabemos, nem a nem j são completamentes determinados num problema de cohomologia. No caso da corrente, uma redefinição do tipo $j \to j + dk$ ainda satisfaz a equação (1.28). Realmente o que é fixado são as classes de equivalência. Assim, os elementos de uma dada classe do grupo $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ diferem por uma quantidade $\eta m + dn$. Uma variação $a \to a + \eta m + dn$ gera uma redefinição da corrente $j \to j + \eta n + dk$. Constata-se então que a corrente j é d-fechada módulo η e que existe um mapeamento do conjunto $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ para o conjunto $\mathcal{H}^{0,D-1}(d \mid \eta)$.

Um raciocínio algébrico direto estabelece um isomorfismo entre os grupos:

$$\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d) \cong \mathcal{H}^{0,D-1}(d \mid \eta), \tag{1.33}$$

em palavras, as classes de cohomologia desses dois grupos aditivos estão em correspondência biunívoca. Este resultado, caso particular de uma proposição mais geral [27], aponta exatamente na direção de uma reformulação algébrica do teorema de Noether. Consideremos primeiramente o conjunto $\mathcal{H}^{0,D-1}(d \mid \eta)$, seus elementos são exatamente classes de equivalência de correntes conservadas módulo equações de movimento. Uma corrente é dita identicamente conservada quando é conservada independentemente da dinâmica, ou seja, $dj = 0$ ou $j = dk$. O elemento neutro do grupo é caracterizado como a classe de correntes que coincidem com uma corrente tipo dk, módulo equações do movimento. Previsivelmente o conjunto $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ é constituído de classes de equivalência de objetos identificados como simetrias globais. Realmente, observemos que por integrações por partes podemos escrever um representante de uma classe de $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ como

$$a = X^i \phi_i^* dx^0 ... dx^{D-1}. \tag{1.34}$$

É fácil verificar que com a como escrito acima, a equação (1.32) agora se escreve

$$X^i \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^i} = \partial_\mu j^\mu \tag{1.35}$$

mostrando claramente que a define uma simetria global clássica

$$\delta_X \phi^i = X^i(\phi). \tag{1.36}$$

Em síntese, o grupo $\mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d)$ é identificado com o espaço das classes de equivalência das simetrias globais. Alguns comentários fazem-se necessários, simetrias de calibre relacionam configurações dinâmicas que são fisicamente equivalentes (simetria interna) e portanto são identificadas. O sistema tem mais coordenadas que graus de liberdade e portanto a dinâmica clássica na realidade se processa numa equivalência de trajetórias do espaço de coordenadas. Simetrias de calibre e simetrias triviais da ação (proporcionais as equações de movimento) são fisicamente irrelevantes. Abaixo exibimos a forma geral do gerador de uma tranformação de *gauge* que inclui uma parte trivial:

$$X^i(x) = \int R^i_\alpha(x,x')\, t(x')\, dx' + \int \mu^{ij}(x,x') \frac{\delta \mathcal{L}_{inv}}{\delta \phi^j(x')} dx' \tag{1.37}$$

com $\mu^{ij}(x,x') = -\mu^{ji}(x',x)$. Não é difícil mostrar que uma invariancia de calibre equivale a termos

$$X^i \phi_i^* = \eta c + \partial_\mu b^\mu, \tag{1.38}$$

ou seja, $a = X^i \phi_i^* dx^0 ... dx^{D-1}$ é um objeto trivial da cohomologia do operador de Koszul-Tate módulo derivadas. Uma simetria da ação é dita ser uma simetria trivial se ela coincide com uma simetria de calibre módulo simetrias triviais da ação.

Concluindo, o espaço das classes de equivalência das correntes conservadas é isomórfico ao espaço das classes de equivalência das invariâncias globais,

$$\mathcal{H}^{0,D-1}(d \mid \eta) \cong \mathcal{H}^{1,D}(\eta \mid d).$$

Uma dada simetria não trivial corresponde a uma corrente conservada não trivial e vice-versa.

Capítulo 2

Caracterização algébrica da supersimetria vetorial

De modo a tornar clara e direta a exposição do material deste capítulo abordaremos logo de partida um exemplo de teoria que possui supersimetria vetorial, a ação do modelo de Chern-Simons em três dimensões quantizada no calibre de Landau. Procedendo desta forma, as características básicas da supersimetria vetorial serão mais facilmente identificadas, o que possibilitará uma análise geral mais efetiva.

Como sabemos, ao nível clássico, o modelo de Chern-Simons não-abeliano é definido pela ação S_{cs} de um campo de calibre A^a_μ que toma valores numa álgebra de Lie, de modo suscinto escrevemos

$$S_{cs} = -\frac{k}{4\pi}\int d^3x\ \varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(A^a_\mu\partial_\nu A^a_\rho + \frac{1}{3}f^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho\right). \tag{2.1}$$

Na ação acima, k é uma constante adimensional, as quantidades f^{abc} são as constantes de estrutura que caracterizam a álgebra de Lie em questão, por último $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ é o tensor de Levi-Civita. O modelo de Chern-Simons é um exemplo de uma teoria invariante de calibre, ou seja a transformação do campo A^a_μ,

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\theta^a + f^{abc}A^b_\mu\theta^c \equiv (D_\mu\theta)^a\,, \tag{2.2}$$

onde θ é um parâmetro local, não muda a forma da ação clássica:

$$\delta S_{cs} = 0. \tag{2.3}$$

Ao tentarmos definir o modelo numa variedade mais geral, observamos que a Lagrangeana não se acopla os tensor métrico. Isto implica que o tensor energia-momento é identicamente nulo, o que por sua vez demonstra que o modelo não possui excitações físicas. O modelo de Chern-Simons é uma típica teoria topológica, suas funções de Green estão relacionadas com invariantes topológicos da variedade em que o modelo foi definido. De fato é possivel mostrar que o valor esperado

$$\langle \mathcal{W}(\gamma_1) \ldots \mathcal{W}(\gamma_n) \rangle$$

de operadores de Wilson

$$\mathcal{W}(\gamma_i) = TrPe^{\oint_{\gamma_i} A_\mu dx^\mu},$$

sendo γ_i uma curva fechada suave, é relacionado a invariantes topológicos das teorias dos nós [2, 4, 8]. Outra característica muito interessante do modelo de Chern-Simons em três dimensões, que vem da imposição de invariância de calibre sobre o funcional gerador das funções de Green do modelo, é a quantização da constante de acoplamento adimensional. Este não é um resultado perturbativo, as próprias transformações de calibre não são tomadas na aproximação com parâmetros infinitesimais. Em resumo, podemos afirmar que o modelo de Chern-Simons apresenta uma grande riqueza matemática e vários aspectos relevantes para a física teórica.

Para quantizar o modelo, precisamos fazer uma escolha de calibre, a condição de Landau se mostra bastante conveniente, neste caso, a ação com o termo de fixição de calibre se escreve

$$\tilde{S}_{cs} = S_{cs} + \int d^3x \; \left(b^a \partial A^a + \bar{c}^a \partial^\mu \left(D_\mu c\right)^a\right). \tag{2.4}$$

Os campos $b, c, \bar{c}$ representam respectivamente o multiplicador de Lagrange e os *ghosts* de Fadeev-Popov. Com a introdução destes campos podemos caracterizar a simetria

BRST do modelo, temos:

$$
\begin{aligned}
&sA_\mu^a = (D_\mu c)^a\,,\\
&sc^a = -\tfrac{1}{2}f^{abc}c^b c^c,\\
&s\overline{c}^a = b^a,\\
&sb^a = 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

É direta a verificação de que o operador s é nilpotente e identifica uma invariância da ação $\bar{S}_{cs}$, ou seja

$$s\bar{S}_{cs} = 0. \tag{2.6}$$

A ação quantizada $\bar{S}_{cs}$ também possui uma simetria exata cujo gerador carrega um índice do espaço-tempo, a supersimetria vetorial δ_μ. O efeito dessa invariância sobre os campos do modelo de Chern-Simons é mostrado nas transformações abaixo:

$$
\begin{aligned}
&\delta_\mu c = A_\mu,\\
&\delta_\mu A_v = \varepsilon_{\mu v\rho}\partial^\rho \overline{c},\\
&\delta_\mu b = \partial_\mu \overline{c},\\
&\delta_\mu \overline{c} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Será conveniente escrevermos a supersimetria vetorial como um operador funcional:

$$\delta_\mu = \int d^3x\,\left(A_\mu^a \frac{\delta}{\delta c^a} + \varepsilon_{\mu v\rho}\partial^\rho \overline{c}^a \frac{\delta}{\delta A_v^a} + \partial_\mu \overline{c}^a \frac{\delta}{\delta b^a}\right). \tag{2.8}$$

Sobre a ação de Chern-Simons quantizada, temos

$$\delta_\mu \bar{S}_{cs} = 0. \tag{2.9}$$

Os geradores das duas invariâncias quando atuam sobre os campos do modelo obedecem as seguintes relações algébricas:

$$
\begin{aligned}
\{\delta_\mu, \delta_v\}\left(A_\rho^a, c^a, b^a, \bar{c}^a\right) &= 0, \\
s^2\left(A_\rho^a, c^a, b^a, \bar{c}^a\right) &= 0, \\
\{s, \delta_\mu\}\left(c^a, b^a, \bar{c}^a\right) &= \partial_\mu\left(c^a, b^a, \bar{c}^a\right), \\
\{s, \delta_\mu\} A_\rho^a &= \partial_\mu A_\rho^a + 2\varepsilon_{\nu\mu\rho}\frac{\delta \bar{S}_{cs}}{\delta A_\nu(x)}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

O símbolo $\{\ ,\ \}$ representa um anti-comutador e ∂_μ é o gerador das translações espaço-temporais. Em síntese podemos resumir a álgebra dos geradores na tabela abaixo:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= 0, \\
\{\delta_\mu, \delta_\nu\} &= 0, \\
\{s, \delta_\mu\} &= \partial_\mu + (\text{equações de movimento})\,.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Como a álgebra dos geradores é fechada módulo equações do movimento para os campos, e como δ_μ alterna bósons e férmions, falamos com propriedade em uma álgebra supersimétrica de Wess-Zumino [5, 6].

Um datalhe importante é que a supersimetria vetorial deste modelo age de forma linear sobre os campos, sendo assim não é necessário a introdução de fontes adicionais para tratar dos efeitos perturbativos de tal invariância. Seguindo o esquema de BRST, nosso próximo passo é construir a ação completa do modelo de Chern-Simons, isto é, introduzir anti-campos para controlar os efeitos das transformações de BRST não-lineares.

A ação completa do sistema aparece em destaque a seguir [3]:

$$
S = S_{cs} + \int d^3x\ \left(b^a \partial A^a + \partial^\mu \bar{c}^a \left(D_\mu c\right)^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a + \hat{A}_\mu^{*a}\left(D^\mu c\right)^a - \frac{1}{2} f^{abc} C^{*a} c^b c^c\right). \tag{2.12}
$$

Como é bem conhecido, A_μ é o campo de calibre do modelo, b é um multiplicador de

Lagrange, c é o *ghost* do campo de *gauge*, $\bar{c}$ o anti-ghost, $\hat{A}^*_\mu$ anti-campo do campo de calibre e C^* o anti-campo do *ghost*.

A tabela abaixo exibe os valores para o número de *ghost* e dimensão dos campos e anti-campos.

	A^a_μ	$\hat{A}^{*a}_\mu$	c^a	C^{*a}	$\bar{c}^a$	b^a
N_g	0	-1	1	-2	-1	0
dim	1	2	0	3	1	1

(2.13)

Para destacar uma importante propriedade da supersimetria vetorial, a ação completa (2.12) foi quantizada no calibre de Feynman, um pouco mais geral que a condição de Landau usada anteriormente. Observamos que α, na ação (2.12), é o parâmetro de calibre.

A identidade de Slavnov-Taylor, a qual expressa a invariância da ação completa frente as transformações de BRST, escreve-se

$$\int d^3x \;\left(\frac{\delta S}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta S}{\delta \hat{A}^{*a}_\mu} + \frac{\delta S}{\delta c^a}\frac{\delta S}{\delta C^{*a}} + b^a\frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Com o auxílio das condições

$$\frac{\delta S}{\delta b^a} = \partial A^a + \alpha b^a \tag{2.15}$$

e

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a} + \partial^\mu \frac{\delta S}{\delta \hat{A}^{*a}_\mu} = 0, \tag{2.16}$$

respectivamente, a condição do calibre de Feynman e a equação do *ghost*, podemos encontrar uma ação $\sum(A, A^*, c, C^*)$, dita reduzida, que satisfaz uma identidade de Slavnov-Taylor homogênea, isto é

$$\int d^3x \;\left(\frac{\delta \Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta \Sigma}{\delta A^{*a\mu}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta \Sigma}{\delta C^{*a}}\right) = 0. \tag{2.17}$$

As ações completa e reduzida são relacionadas pela equação abaixo

$$S = \Sigma + \int d^3x \ b^a \partial A^a + \int d^3x \ \frac{\alpha}{2} b^a b^a, \tag{2.18}$$

onde

$$\Sigma = S_{cs} + \int d^3x \ \left(A_\mu^{*a} (D^\mu c)^a - \frac{1}{2} f^{abc} C^{*a} c^b c^c \right), \tag{2.19}$$

e a fonte A_μ^{*a} associada ao anti-campo $\hat{A}_\mu^{*a}$ através da relação

$$A_\mu^{*a} = \hat{A}_\mu^{*a} + \partial^\mu \bar{c}^a. \tag{2.20}$$

Da equação (2.17) derivamos o operador funcional nilpotente linearizado de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{B}_\Sigma = \int d^3x \ \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{a\mu}} \frac{\delta}{\delta A_\mu^{*a}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^{*a}} \frac{\delta}{\delta A^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta C^{*a}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta C^{*a}} \frac{\delta}{\delta c^a} \right) \tag{2.21}$$

tal que

$$\frac{1}{2} \mathcal{B}_\Sigma \Sigma = \int d^3x \ \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta C^{*a}} \right) = 0. \tag{2.22}$$

Abaixo exibimos a ação do operador funcional de BRST $\mathcal{B}_\Sigma$ sobre os campos e fontes que ocorrem na ação reduzida Σ,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma A_\mu^a &= (D_\mu c)^a, \\ \mathcal{B}_\Sigma c^a &= -\tfrac{1}{2} f^{abc} c^b c^c, \\ \mathcal{B}_\Sigma C^{*a} &= \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}, \\ \mathcal{B}_\Sigma A_\mu^{*a} &= \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Com a introdução dos anti-campos $A^{*a\mu}$ e C^{*a}, a forma funcional do operador δ_μ da equação (2.8) é modificada de acordo com a seguinte expresão:

$$\begin{aligned} \delta_\mu &\to W_\mu, \\ W_\mu &= \int d^3x \, \left(A^a_\mu \frac{\delta}{\delta c^a} + \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{*a\nu} \frac{\delta}{\delta A^a_\rho} + C^{*a} \frac{\delta}{\delta A^{*a\mu}} \right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

É direta a verificação que o operador W_μ define uma simetria da ação reduzida de Chern-Simons quebrada linearmente, ou seja

$$W_\mu \Sigma = \bar{\Delta}^{cl}_\mu, \tag{2.25}$$

onde

$$\bar{\Delta}^{cl}_\mu = \int d^3x \, \left(C^{*a} \partial_\mu c^a - A^{*a}_\nu \partial_\mu A^{a\nu} \right) \tag{2.26}$$

é o termo de quebra linear nos campos da teoria.

É oportuno comentar que, em contraste com a equação (2.10) que descreve uma estrutura algébrica tipo Wess-Zumino para os operadores s e δ_μ, módulo equações de movimento dos campos, a álgebra gerada pelo operador linearizado de BRST $\mathcal{B}_\Sigma$ e porW_μ é uma álgebra exata, ou seja

$$\{\mathcal{B}_\Sigma, W_\mu\} = \partial_\mu. \tag{2.27}$$

Isto ocorre porque a transformação de BRST do anti-campo A^*_μ compensa o termo proporcional à equação de movimento do campo de calibre A_μ, como pode ser facilmente verificado.

Traduzindo o conteúdo da identidade acima para a ação completa obtemos a seguinte expressão [5, 6]

$$\mathcal{W}_\mu S = \Lambda^{cl}_\mu, \tag{2.28}$$

com

$$\mathcal{W}_\mu = \int d^3x \, \left(A^a_\mu \frac{\delta}{\delta c^a} + \varepsilon_{\mu\nu\rho} \left(\hat{A}^{*a\nu} + \partial^\nu \bar{c}^a \right) \frac{\delta}{\delta A^a_\rho} + C^{*a} \frac{\delta}{\delta A^{*a\mu}} + \partial_\mu \bar{c}^a \frac{\delta}{\delta b^a} \right) \tag{2.29}$$

e

$$\Lambda^{cl}_{\mu} = \int d^3x \, \left(C^{*a}\partial_\mu c^a - \hat{A}^{*a}_{\nu}\partial_\mu A^{a\nu} - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\hat{A}^{*a\nu}\partial^\rho b^a \right) + \alpha \int d^3x \; b^a \partial_\mu \bar{c}^a. \tag{2.30}$$

Das equações descritas acima concluímos que o operador $\mathcal{W}_\mu$ será uma simetria quebrada linearmente do modelo de Chern-Simons somente se o parâmentro α de calibre for nulo, o que corresponde a escolhermos o calibre de Landau para efetuarmos a quantização do modelo. Revertendo o argumento, quando o modelo de Chern-Simons é quantizado no gauge de Landau, o operador $\mathcal{W}_\mu$ é uma supersimetria da ação completa que apresenta um termo de quebra linear com relação aos campos:

$$\Lambda^{cl}_{\mu} = \int d^3x \, \left(C^{*a}\partial_\mu c^a - \hat{A}^{*a}_{\nu}\partial_\mu A^{a\nu} - \varepsilon_{\mu\nu\rho}\hat{A}^{*a\nu}\partial^\rho b^a \right). \tag{2.31}$$

O exemplo de Chern-Simons quantizado no calibre de Landau não é totalmente fortúito, de fato foi o primeiro modelo onde a presença da supersimetria vetorial foi detectada. No próximo capítulo veremos em detalhes outros exemplos de modelos topológicos que possuem a mesma invariância. O objetivo principal deste capítulo será mostrar que a supersimetria vetorial pode ser estabelecida por métodos puramente algébricos, em outras palavras, a existência da supersimetria vetorial está diretamente relacionada com um determinado setor da cohomologia de BRST para um certo sistema de campos.

Agora estamos em condições de apreciar as propriedades gerais da supersimetria vetorial, que por possuir um índice de Lorentz e, juntamente com o operador de BRST, dar origem a uma álgebra fechada sobre as translações do espaço-tempo, permite uma interpretação supersimétrica [5, 6, 7, 11].

Por outro lado, hoje sabemos que a supersimetria vetorial e a invariância de BRST caracterizam uma grande classe de teorias topológicas, a saber: os modelos BF [7, 12], a teoria cohomológica de Witten [11], a corda bosônica e suas extensões supersimétricas [15, 20, 12].

Destacamos que, somente após a introdução de todos os *ghosts* necessários para quantizar o modelo adequadamente é que a supersimetria vetorial pode ocorrer. Em outras palavras, a supersimetria vetorial é uma invariância da ação quântizada e não tem um correspondente clássico. Deste modo, não chega a ser surpreendente o fato de que esta funcione como um seletor de termos para o mecanismo de fixação de calibre: uma dada teoria topológica somente possui supersimetria vetorial para uma específica escolha do parâmetro de calibre. No exemplo de Chern-Simons que vimos acima, a supersimetria vetorial selecionou o calibre de Landau dentre uma família de condições mais gerais. É oportuno um comentário sobre teorias definidas em espaços com três dimensões, pois nestes casos o parâmetro de calibre α tem dimensão de massa, havendo portanto quebra na invariância de escala. É bom lembrar também, que a condição de Landau é a única que leva a um propagador que não corre o risco de introduzir divergências na região do infra-vermelho e que respeita a invariância de escala da versão clássica do modelo.

Uma outra propriedade geral da supersimetria vetorial que pudemos observar no modelo de Chern-Simons em três dimensões é que, quando são introduzidas fontes de BRST para controlar, ao nível quântico, as transformações não-lineares dos campos e passamos a trabalhar com a ação completa, a álgebra formada pelo operador de Ward relativo à supersimetria vetorial passa ser uma álgebra que fecha sobre as translações espaço-temporais, sem nenhuma restrição dinâmica. Por outro lado, como vimos, a supersimetria vetorial do modelo completo deixa de ser uma invariância exata pois aparece um termo de quebra que é linear nos campos da teoria.

O aparecimento do termo de quebra [6, 7, 11], muito longe de ser problemático, é de fato uma característica desejável. Por tratar-se de uma quebra clássica, a identidade de Ward relativa a supersimetria vetorial não deixa de ser útil no regime quântico [12] e, além de não conter anomalias, é bem mais restritiva. A identidade de Ward da supersimetria vetorial com o termo de quebra clássico desempenha um papel crucial na demonstração algébrica da finitude ultravioleta do modelo de Chern-Simons em três dimensões [6, 7, 11].

No que segue mostraremos como a existência da supersimetria vetorial está intimamente relacionada a classes de cohomologia de BRST que carregam um índice do espaço-tempo, possuem número de ghost -1, e dependem dos anti-campos. De fato, provaremos que a existência da supersimetria vetorial somente é possível se a cohomologia do referido setor for vazia. O aparecimento do termo de quebra linear, como veremos, também se deve a forma do cociclo trivial.

Todas as definições e convenções que listaremos abaixo já foram focalizadas no exemplo do modelo de Chern-Simons e portanto já estamos um pouco familiarizados.

Seguindo as convenções do primeiro capítulo vamos considerar um sistema de campos $\{\Phi^i\}$ que descreve um modelo adequadamente quantizado em um espaço-tempo euclidiano de D dimensões. O índice i engloba todas as peculiaridades de cada campo envolvido. Como sabemos, a cada campo é atribuido um grau dito número de *ghost* N_{Φ^i} e uma dimensão canônica d_{Φ^i}. Os anti-campos Φ_i^*que correspondem respectivamente aos campos Φ^i possuem número de *ghost* $-(1+N_{\Phi^i})$ e dimensão $(D-d_{\Phi^i})$. Uma consideração adicional é que o conjunto dos campos não contenha os dubletos de BRST, os quais como sabemos, somente dão contribuições triviais à cohomologia do operador de BRST em qualquer setor. Resumindo, não farão parte do conjunto de campos os anti-*ghosts* e os respectivos multiplicadores de Lagrange, os quais estão sempre em dubletos de BRST [28]. Trabalharemos então com a ação reduzida [12] $\Sigma(\Phi^i, \Phi_i^*)$, ou seja, uma ação obtida a partir da ação completa exigindo-se que esta seja solução da identidade de Slavnov-Taylor homogênea [29]

$$\int d^Dx \ \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*} = 0, \tag{2.32}$$

renormalizável por contagem de potências e invariante por translações no espaço-tempo D-dimensional, ou seja

$$P_\mu\Sigma = \int d^Dx \ \left(\partial_\mu\Phi^i\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i} + \partial_\mu\Phi_i^*\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*}\right) = 0. \tag{2.33}$$

Alguns comentários se fazem necessários, na equação acima P_μ é o operador que gera as translações espaço-temporais. A identidade de Slavnov-Taylor, equação (2.32), pode ser escrita com a ajuda do operador linearizado e nilpotente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma &= \int d^3x \ \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i}\frac{\delta}{\delta\Phi_i^*} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*}\frac{\delta}{\delta\Phi^i} \right), \\ \int d^Dx \ \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_\Sigma\Sigma = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

como vimos acima no exemplo Chern-Simons. A ação reduzida é uma parte da ação completa que não depende dos multiplicadores de Lagrange e sua dependência nos anti-*ghosts* ocorre somente através de uma redefinição dos anti-campos similar à da equação (2.20).

Em resumo, para caracterizarmos a ação reduzida de uma dado modelo partimos da identidade de Slavnov-Taylor e da invariância translacional.

No que segue estaremos tratando com polinômios locais relativos à cohomologia do operador linearizado de BRST.

No capítulo anterior vimos que cociclos lineares nos anti-campos e constituídos de polinômios que carregam número de ghost negativo estão associados a grandezas conservadas. Introduzimos então um polinômio local, integrado, cuja dimensão é $D+1$, o número de *ghost* é -1, que possua um índice vetorial no espaço-tempo e tenha dependência linear nos anti-campos:

$$\Omega_\mu^{-1} = \int d^Dx \ \left[\omega_\mu^{-1}\right]_{D+1} \equiv \int d^Dx \ (-1)^{\left(1+N_{\Phi^i}\right)}\, \Phi^i\partial_\mu\Phi_i^*. \tag{2.35}$$

É simples a demonstração de que Ω_μ^{-1} é um invariante do operador nilpotente $\mathcal{B}_\Sigma$ em consequência da invariância translacional da ação reduzida,

$$\mathcal{B}_\Sigma\Omega_\mu^{-1} = \int d^Dx \ \left(\partial_\mu\Phi^i\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i} + \partial_\mu\Phi_i^*\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*} \right) = 0 \equiv \mathcal{P}_\mu\Sigma = 0.$$

No caso do modelo de Chern-Simons o cociclo invariante $\Omega_{\text{CS}_\mu}^{-1}$ se escreve

$$\Omega_{\text{CS}_\mu}^{-1} = \int d^3x \ \left(c^a\partial_\mu C^{*a} - A_\nu^a\partial_\mu A^{*a\nu}\right). \tag{2.36}$$

Como sabemos, um dado polinômio $\mathcal{B}_\Sigma$-invariante pode ou não caracterizar uma classe de equivalência de cohomologia, em outras palavras um cociclo $\mathcal{B}_\Sigma$-invariante pode ou não ser tomado como representante de uma classe de cohomologia relativo a um setor do operador nilpotente $\mathcal{B}_\Sigma$. Numa cohomologia, os cociclos invariantes podem ser exatos ou não. Podemos verificar facilmente que o polinômio $\Omega^{-1}_{\mathrm{CS}\mu}$ é $\mathcal{B}_\Sigma$-exato, uma vez que

$$\Omega^{-1}_{\mathrm{CS}\mu} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2}_{\mathrm{CS}\mu}, \tag{2.37}$$

onde

$$\Xi^{-2}_{\mathrm{CS}\mu} = \int d^3x \left(\frac{\pi}{k} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^{*a\nu} A^{*a\rho} - C^{*a} A^a_\mu \right). \tag{2.38}$$

Em contraste, para o modelo de Yang-Mills em quatro dimensões [23], mostra-se que o polinômio

$$\Omega^{-1}_{\mathrm{YM}\mu} = \int d^4x \left(c^a \partial_\mu C^{*a} - A^a_\nu \partial_\mu A^{*a\nu} \right), \tag{2.39}$$

embora invariante por $\mathcal{B}_\Sigma$, não é exato

$$\Omega^{-1}_{\mathrm{YM}\mu} \neq \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2}_{\mathrm{YM}\mu}. \tag{2.40}$$

A equação anterior deve ser entendida no sentido de que não existe nenhum polinômio local, $\Xi^{-2}_{\mathrm{YM}\mu}$, integrado, com número de *ghost* -2 e com dimensão 5 tal que a relação $\Omega^{-1}_{\mathrm{YM}\mu} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2}_{\mathrm{YM}\mu}$ seja possível.

De modo geral temos as duas possíbilidades:

1. Ω^{-1}_μ é $\mathcal{B}_\Sigma$-exato e

   $$\Omega^{-1}_\mu = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2}_\mu, \tag{2.41}$$

   onde Ξ^{-2}_μ é um polinômio local integrado com número de *ghost* -2 e dimensão $(D+1)$.

2. Ω^{-1}_μ é um elemento de um classe de cohomologia integrada do operador nilpotente $\mathcal{B}_\Sigma$, e não pode ser escrito como uma variação de um polinômio Ξ^{-2}_μ, frente a atuação de $\mathcal{B}_\Sigma$.

Para analisarmos em detalhes as duas possibilidades e relacionarmos os resultados com o carater topológico dos modelos, vamos focalizar as equações de descidas [1, 12, 28] correspondentes a invariância de Ω_μ^{-1}, ou seja $\mathcal{B}_\Sigma \Omega_\mu^{-1} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Sigma \left[\omega_\mu^{-1}\right]_{D+1} &= \partial^{\nu_1} \left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_D \\
\mathcal{B}_\Sigma \left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_D &= \partial^{\nu_2} \left[\omega_{[\nu_1\nu_2]\mu}^{1}\right]_{D-1} \\
\mathcal{B}_\Sigma \left[\omega_{[\nu_1\nu_2]\mu}^{1}\right]_{D-1} &= \partial^{\nu_3} \left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3]\mu}^{2}\right]_{D-2} \\
&\;\;\cdots\cdot \\
&\;\;\cdots\cdot \\
\mathcal{B}_\Sigma \left[\omega_{[\nu_1\nu_2....\nu_{D-1}]\mu}^{D-2}\right]_2 &= \partial^{\nu_D} \left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3....\nu_{D-1}\nu_D]\mu}^{D-1}\right]_1 \\
\mathcal{B}_\Sigma \left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3....\nu_{D-1}\nu_D]\mu}^{D-1}\right]_1 &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Nas equações acima as quantidades $\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3....\nu_j]\mu}^{j-1}\right]_{D-j+1}$ com $(j = 0, ..., D)$ são correntes cujo número de *ghost* é $(j-1)$, possuem antissimetria nos índices $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_j)$, e dimensão $(D - j + 1)$. As equações de descidas relacionam cociclos locais com correntes de dimensões menores, precisamente este aspecto permite uma interpretação mais simples do conteúdo físico de Ω_μ^{-1}, como veremos a seguir. É conveniente notar desde já que o cociclo $\left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_D$ na segunda equação da torre acima possui os mesmos números quânticos que caracterizam o tensor energia-momento, ou seja, número de *ghost* zero, dimensão D e dois índices de espaço-tempo. Como sabemos, teorias com tensor energia-momento não-nulo descrevem exitações físicas que se propagam.

São conhecidos muitos resultados gerais sobre a cohomologia dos setores que aparecem nas equações de descidas (2.42). Baseados nestes trabalhos [28] podemos concluir que a existência de uma cohomologia não-trivial, ou seja a presença de cociclos não-exatos, no setor polinomial cujo número de *ghost* é zero, a dimensão é a do espaço-tempo e com dois índices de Lorentz, acarreta a existência de soluções não-triviais no nível superior das equações de descidas, e portanto estaria caracterizada a não-trivialidade de Ω_μ^{-1}. O que acabamos de observar deixa clara a profunda relação entre o tensor energia-momento e a existência de uma cohomologia não-trivial no setor dos polinômios locais integrados com dimensão $D+1$ e número de *ghost* -1.

Na teoria de Yang-Mills, por exemplo, o fato do cociclo Ω_{μ}^{-1} ser não-trivial está diretamente relacionado as características algébricas do tensor energia-momento. Afim de esclarecer este ponto vamos considerar as equações de descidas relativas a cohomologia de Yang-Mills:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\Sigma}\left[\omega_{\mu}^{-1}\right]_{5} &= \partial^{\nu_1}\left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_{4} \\
\mathcal{B}_{\Sigma}\left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_{4} &= \partial^{\nu_2}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2]\mu}^{1}\right]_{3} \\
\mathcal{B}_{\Sigma}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2]\mu}^{1}\right]_{3} &= \partial^{\nu_3}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3]\mu}^{2}\right]_{2} \\
\mathcal{B}_{\Sigma}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3]\mu}^{2}\right]_{2} &= \partial^{\nu_4}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4]\mu}^{3}\right]_{1} \\
\mathcal{B}_{\Sigma}\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4]\mu}^{3}\right]_{1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

As soluções das equações acima, ou seja, as expressões gerais para cada corrente $\left[\omega_{[\nu_1\nu_2\nu_3....\nu_j]\mu}^{j-1}\right]_{D-j+1}$ com $(j=0,...,4)$, podem ser obtidas por cálculos diretos. Para $j=2,3,4$ obtemos somente soluções trivias das equações de descidas. O primeiro polinômio a tomar valores numa cohomologia é a corrente $\left[\omega_{\nu_1\mu}^{0}\right]_{4}$ cuja expressão é proporcional à

$$
\left(F_{\nu_1\sigma}^{a}F_{\mu}^{a\sigma}-\frac{1}{4}g_{\nu_1\mu}F_{\rho\sigma}^{a}F^{a\rho\sigma}\right)+\mathcal{B}_{\Sigma}\left(A_{\nu_1}^{*a}A_{\mu}^{a}\right). \tag{2.44}
$$

O tensor métrico do espaço-tempo é indicado com $g_{\nu_1\mu}$ na equação acima, onde também reconhecemos o tensor energia-momento melhorado que, como é bem sabido, é um invariante sob a ação do operador de BRST, e que portanto pode ser escolhido como representante de uma classe de cohomologia no setor dos polinômios de número de *ghost* zero, dois índices de Lorentz e dimensão quatro [28]. Exatamente pelo fato de termos uma solução não-trivial neste nível é que o cociclo vetorial Ω_{μ}^{-1} é não exato, e portanto um cociclo não-trivial da cohomologia no seu setor. Vale lembrar que o termo $\mathcal{B}_{\Sigma}\left(A_{\nu_1}^{*a}A_{\mu}^{a}\right)$ que aparece naturalmente no cálculo do cociclo assegura que o tensor energia-momento seja conservado sem recorrer as equações do movimento. O resultado que obtivemos acima é bem geral, e as mesmas conclusões são tiradas se introduzirmos campos de matéria (como férmions), pois estes irão figurar nos setores triviais da cohomologia do sistema de Yang-Mills. Em resumo, a não trivialidade do tensor energia-momento $\mathcal{B}_\Sigma$-invariante é uma condição suficiente para que o polinômio Ω_μ^{-1} seja um cociclo não-trivial da cohomologia ao nível integrado. Como veremos um pouco mais adiante caso o polinômio Ω_μ^{-1} de um dado modelo não seja $\mathcal{B}_\Sigma$-exato, então o modelo não possui supersimetria vetorial.

2.1 As teorias de campo topológicas

Já adiantamos anteriormente que nas teorias topológicas o cociclo Ω_μ^{-1} é sempre $\mathcal{B}_\Sigma$-exato, ou seja

$$\Omega_\mu^{-1} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi_\mu^{-2}, \tag{2.45}$$

onde Ξ_μ^{-2} é um polinômio local integrado com número de *ghost* -2. Este fato é devido à relação especial entre os campos presentes num modelo topológico. De fato, são conhecidos inúmeros resultados algébricos [7, 11, 12, 30, 31, 32, 33] que proibem a existência de cociclos não-triviais com índices de Lorentz livres na cohomologia do operador de BRST, em outras palavras, as soluções de todos os níveis das equações de descidas (2.42) são triviais.

De um modo geral os modelos ditos topológicos se dividem em duas grandes classes [3]: as teorias cohomológicas e as teorias tipo Schwartz. Ambas têm em comum o fato do tensor energia-momento ser trivial na cohomologia do operador de BRST. As teorias cohomológicas são aquelas onde a ação clássica acrescida do termo de fixação de calibre pode ser escrita como uma variação de BRST de um polinômio integrado com número de *ghost* -1. Os modelos deste tipo também são caracterizados por uma simetria adicional, a chamada *shift symmetry* [3, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Como exemplos de teorias cohomológicas temos as teorias de Witten [2] e os modelos sigma topológicos [4].

Em contraste com os modelos cohomológicos, as teorias tipo Schwartz não podem ser escritas como uma variação de BRST. De qualquer forma o que confere o carater topológico a esses modelos é o fato de que a parte da ação que depende do tensor métrico está no termo de fixação de calibre, e portanto num setor BRST trivial da ação. Dois importantes exemplos deste tipo de teoria são o modelo de Chern-Simons em três dimensões [3, 5, 6] e os modelos BF [3, 7], este último será também mostrado em detalhes no próximo capítulo.

Destacamos que nas teorias cohomológicas o tensor energia-momento é identicamente nulo ao passo em que nas teorias tipo Schwartz ele aparece como um objeto que é uma variação de BRST pura.

Todos os setores da cohomologia do operador de BRST de uma teoria do tipo cohomológica são nulos [3, 11, 30, 31, 32]. Este resultado é uma consequência da *shift symmetry*. Resumindo, neste caso o cociclo vetorial Ω_μ^{-1} é trivial.

Considerando agora o caso Schwartz, somos autorizados a afirmar que o conteúdo de campos destes modelos é tal que torna possivel a existência de classes de cohomologia não triviais para o operador de BRST [6, 7, 12]. Mencionamos na Introdução que este tipo de teoria topológica pode ser formulada de um modo puramente geométrico, através de uma equação de curvatura nula [20] para uma conexão generalizada, a qual tem os campos do modelo como componentes. Esta equação, que está associada à chamada estrutura de ladder completo, implica que todas as classes não triviais do operador de BRST dos modelos tipo Schwartz possam ser identificadas com polinômios locais invariantes formados exclusivamente por *ghosts* escalares de dimensão zero, não derivados que estão presentes no modelo considerado [6, 7, 12]. Podemos concluir facilmente que os setores envolvidos nas equações de descidas (2.42) possuem cohomologia vazia e que portanto o cociclo vetorial Ω_μ^{-1} é BRST exato.

Agora vamos analizar mais de perto como a condição de exatidão $\Omega_\mu^{-1} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi_\mu^{-2}$ acarreta a existência da supersimetria vetorial nos modelos topológicos. O operador $\mathcal{B}_\Sigma$ agindo sobre um polinômio como Ξ_μ^{-2} gera termos de contato de uma identidade de Ward. Isto pode ser facilmente compreendido, bastando observar a forma de $\mathcal{B}_\Sigma$. Contúdo, está identidade de Ward não poderá expressar uma simetria exata do modelo em questão, pelo simples fato de que o resultado final da ação de $\mathcal{B}_\Sigma$ sobre Ξ_μ^{-2} ser o polinômio integrado Ω_μ^{-1}. Existe então um termo de quebra para a simetria que se origina do fato de que o cociclo Ω_μ^{-1} é $\mathcal{B}_\Sigma$-exato. O termo de quebra, por sua vez, é linear com relação aos campos do modelo, novamente isto se deve a forma do polinômio Ω_μ^{-1}. No entanto, quando movemos da ação reduzida para a ação completa, podem aparecer termos quadráticos os quais dependem dos *anti-ghosts* através das fontes redefinidas. Como vimos no exemplo de Chern-Simons acima, estes termos quadráticos dependentes dos *anti-ghosts* não põem em risco a utilidade da identidade de Ward associada a invariância, uma vez que podem ser reinterpretados como termos de contato da simetria atraves de uma adequada escolha do parâmetro de calibre. Insistimos mais uma vez que é precisamente a forma do cociclo Ω_μ^{-1} a responsavel por esta propriedade. Em resumo, a imposição de uma identidade de Ward perfeitamente compatível com o Princípio de Ação [36] seleciona uma classe de condições de calibre. Condições de calibre não-lineares, serão obviamente incompatíveis com a presença da supersimetria vetorial. No próximo capítulo veremos como tudo isto funciona também para o modelo BF em quatro dimensões.

O que acabamos de expor demonstra o carater puramente algébrico da identidade de Ward associada a supersimetria vetorial. Realmente, uma vez que o polinômio Ω_μ^{-1}, para teorias topológicas, é trivial, sabemos que a equação (2.45) é necessariamente satisfeita para algum polinômio local Ξ_μ^{-2}. A partir daí, o processo é bem simples: escrevemos a expressão mais geral possível para o polinômio Ξ_μ^{-2}, respeitando sempre os vínculos impostos pela dimensão do espaço-tempo e pelo conteúdo de campos do modelo em questão. Em geral, esta expressão dependerá de um conjunto de parâmetros livres e globais, os quais serão determinados justamente impondo a condição de trivialidade do polinômio Ω_μ^{-1}.

Capítulo 3

Exemplos

Neste capítulo apresentaremos quatro exemplos interessantes, casos particulares do esquema geral exposto nos capítulos anteriores desta tese. Nos limitaremos a apreciar os modelos em linhas gerais, uma introdução básica e os detalhes do processo de quantização podem ser encontrados nas referências. O primeiro caso que abordaremos envolve a supersimetria vetorial presente num modelo topológico, o sistema BF definido em um espaço-tempo quadridimensional. No segundo exemplo descrevemos a presença da supersimetria vetorial no sistema de *ghost* b-c. Em seguida mostramos o interessante exemplo da equação do *ghost*, uma simetria muito útil na renormalização algébrica de teorias de calibre. Por último focalizamos um sistema de campos que apresenta uma supersimetria vetorial não-linear, o modelo de Yang-Mills com massa topológica definido em três dimensões. Neste tópico final nos afastamos da caracterização cohomológica da invariância, o objetivo é estabelecer a presença da supersimetria vetorial através de uma redefinição local a covariante do campo de calibre.

3.1 Sistema BF em quatro dimensões

De certo modo, os sistemas BF generalizam as propriedades dos modelos de Chern-Simons para espaços com dimensões pares. No que segue, mostraremos como a presença da supersimetria vetorial num sistema BF formulado em um espaço-tempo quadridimensional

[3], cuja ação clássica se escreve logo abaixo

$$S_{BF} = -\frac{1}{4} \int d^4x \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} B^a_{\rho\sigma}, \tag{3.1}$$

pode ser caracterizada algebricamente de modo análogo ao modelo de Chern-Simons em três dimensões que vimos em detalhes no capítulo anterior.

Os aspectos principais da quantização deste modelo podem ser obtidos nas referências. Por tratar-se de uma álgebra aberta é necessário empregar o método de Batalin e Vilkovisky [29]. Nos limitaremos a transcrever os resultados, em particular usaremos a notação da ref [7].

O conjunto de multiplicadores $\left\{b^a, h^a_\mu, \omega^a, \lambda^a\right\}$, o conjunto de anti-*ghosts* $\left\{\bar{c}^a, \bar{\xi}^a_\mu, \bar{\phi}^a, e^a\right\}$ e os *ghosts* c^a, ξ^a_μ e ϕ^a são necessários para construirmos o termo de fixação de calibre S_{gf}, que mostramos a seguir

$$\begin{aligned} S_{gf} \;=\; & \int d^4x \, (b^a \partial A^a - \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + h^a_\nu \partial_\mu B^{a\mu\nu} \\ & + \omega^a \partial \xi^a + h^{a\mu} \partial_\mu e^a + \omega^a \lambda^a - \lambda^a \partial \bar{\xi}^a \\ & - \partial^\mu \bar{\phi}^a \left[(D_\mu \phi)^a + f^{abc} c^b \xi^c_\mu \right] \\ & - \partial^\mu \bar{\xi}^{a\nu} \left[(D_\mu \xi_\nu)^a - (D_\nu \xi_\mu)^a + f^{abc} B^b_{\mu\nu} c^c \right] \\ & + \frac{1}{2} f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\partial_\mu \bar{\xi}^a_\nu \right) \left(\partial_\rho \bar{\xi}^b_\sigma \right) \phi^c \Big) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

A tabela abaixo exibe os valores para o número de *ghost* e dimensão dos campos na ação.

	A^a_μ	$B^a_{\mu\nu}$	c^a	ξ^a_μ	ϕ^a	$\bar{c}^a$	$\bar{\xi}^a_\mu$	$\bar{\phi}^a$	e^a	b^a	h^a_μ	ω^a	λ^a
N_g	0	0	1	1	2	-1	-1	-2	0	0	0	-1	1
dim	1	2	0	1	0	2	1	2	2	2	1	2	2

Seguindo a receita da quantização, precisamos introduzir um conjunto de anti-campos $\left\{\hat{A}^{*a}_\mu, \hat{B}^{*a}_{\mu\nu}, C^{*a}, \phi^{*a}, \hat{\xi}^{*a}_\mu\right\}$ os quais são associados aos campos $\left\{A^a_\mu, B^a_{\mu\nu}, c^a, \phi^a, \xi^a_\mu\right\}$, respectivamente. Na tabela a seguir indicamos os valores do número de *ghost* e da dimensão para cada anti-campo:

	$\hat{A}^{*a}_{\mu}$	$\hat{B}^{*a}_{\mu\nu}$	C^{*a}	ϕ^{*a}	$\hat{\xi}^{a}_{\mu}$
N_g	-1	-1	-2	-3	-2
dim	3	2	4	4	3

Escrevemos logo abaixo a parte da ação total que contém os termos de anti-campos,

$$\begin{aligned} S_f &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\hat{B}^{*a\mu\nu}\left[(D_\nu \xi_\mu)^a - (D_\mu \xi_\nu)^a - f^{abc}B^b_{\mu\nu}c^c + f^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial_\rho \bar{\xi}^b_\sigma\right)\phi^c \right] \right. \\ & -\hat{A}^{*a}_\mu (D^\mu c)^a + \frac{1}{2}f^{abc}C^{*a}c^b c^c + f^{abc}\phi^{*a}c^b\phi^c + \hat{\xi}^{*a}_\mu\left[(D^\mu\phi)^a + f^{abc}c^b\xi^{c\mu}\right] \\ & \left. +\frac{1}{8}f^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{B}^{*a}_{\mu\nu}\hat{B}^{*b}_{\rho\sigma}\phi^c \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

A ação completa

$$S = S_{BF} + S_{gf} + S_f \tag{3.4}$$

obedece a seguinte identidade de Slavnov-Taylor

$$\begin{aligned} \int d^4x & \left(\frac{\delta S}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta S}{\delta \hat{A}^{*a}_\mu} + \frac{\delta S}{\delta c^a}\frac{\delta S}{\delta C^{*a}} + \frac{1}{2}\frac{\delta S}{\delta B^a_{\mu\nu}}\frac{\delta S}{\delta \hat{B}^{*a\mu\nu}} + \frac{\delta S}{\delta \phi^a}\frac{\delta S}{\delta \phi^{*a}} \right. \\ & \left. + \frac{\delta S}{\delta \xi^a_\mu}\frac{\delta S}{\delta \hat{\xi}^{*a\mu}} + h^a_\mu \frac{\delta S}{\delta \bar{\xi}^a_\mu} + b^a\frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a} + \omega^a \frac{\delta S}{\delta \bar{\phi}^a} + \lambda^a \frac{\delta S}{\delta e^a}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Para definirmos a ação reduzida do modelo, escrevemos as condições de fixação de calibre:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta b^a} &= \partial A^a, \\ \frac{\delta S}{\delta h^a_\mu} &= \partial_\mu e^a + \partial^\nu B^a_{\nu\mu}, \\ \frac{\delta S}{\delta \omega^a} &= \lambda^a + \partial \xi^a, \\ \frac{\delta S}{\delta \lambda^a} &= -\partial \bar{\xi}^a - \omega^a. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Fazendo o comutador das condições de calibre acima com o operador funcional de

Slavnov-Taylor (3.5) geramos novas identidades, as equações dos *ghosts*:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a} + \partial^\mu \frac{\delta S}{\delta \hat{A}^{*a\mu}} &= 0, \\
\frac{\delta S}{\delta \bar{\phi}^a} - \partial^\mu \frac{\delta S}{\delta \hat{\xi}^{*a\mu}} &= 0, \\
\frac{\delta S}{\delta e^a} &= -\partial h^a, \\
\frac{\delta S}{\delta \bar{\xi}^{a\nu}} + \partial^\mu \frac{\delta S}{\delta \hat{B}^{*a\mu\nu}} &= -\partial_\nu \lambda^a.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Com a introdução dos anti-campos redefinidos,

$$
\begin{aligned}
A^{*a\mu} &= \hat{A}^{*a\mu} + \partial^\mu \bar{c}^a, \\
\xi^{*a\mu} &= \hat{\xi}^{*a\mu} - \partial^\mu \bar{\phi}^a, \\
B^{*a\mu\nu} &= \hat{B}^{*a\mu\nu} + \left(\partial^\mu \bar{\xi}^{a\nu} - \partial^\nu \bar{\xi}^{a\mu}\right),
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

podemos em seguida escrever a ação reduzida Σ_{BF} do sistema BF,

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{BF} = \int d^4x \Big(& -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} B^a_{\rho\sigma} + \xi^{*a}_\mu \left[(D^\mu\phi)^a + f^{abc} c^b \xi^{c\mu}\right] - A^{*a\mu}(D_\mu c)^a \\
& + \frac{1}{2} B^{*a\mu\nu}\left[(D_\nu \xi_\mu)^a - (D_\mu \xi_\nu)^a - f^{abc} B^b_{\mu\nu} c^c + f^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial_\rho \bar{\xi}^b_\sigma\right)\phi^c\right] \\
& + \frac{1}{8} f^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^{*a}_{\mu\nu} B^{*b}_{\rho\sigma}\phi^c + \frac{1}{2} f^{abc} C^{*a} c^b c^c + f^{abc}\phi^{*a} c^b \phi^c\Big).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

A ação completa se escreve

$$
S = \Sigma_{BF} + \int d^4x \left(b^a \partial A^a + h^a_\nu \partial_\mu B^{a\mu\nu} + \omega^a \partial \xi^a + h^{a\mu}\partial_\mu e^a + \omega^a \lambda^a - \lambda^a \partial \bar{\xi}^a\right). \tag{3.10}
$$

A ação reduzida, como sabemos, obedece a uma identidade de Slavnov-Taylor homogênea de tal modo que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{B}_\Sigma \Sigma_{BF} = 0 = \int d^4x \Big(& \frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta A^{*a\mu}} + \frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta c^a}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta C^{*a}} + \frac{1}{2}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta B^a_{\mu\nu}}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta B^{*a\mu\nu}} \\
& + \frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta \phi^a}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta \phi^{*a}} + \frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta \xi^a_\mu}\frac{\delta \Sigma_{BF}}{\delta \xi^{*a\mu}}\Big),
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Sigma &= \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta A^{*a\mu}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta A^{*a}_\mu}\frac{\delta}{\delta A^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta C^{*a}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta C^{*a}}\frac{\delta}{\delta c^a} \right. \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta B^a_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta B^{*a\mu\nu}} + \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta B^{*a\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta B^a_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta \phi^a}\frac{\delta}{\delta \phi^{*a}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta \phi^{*a}}\frac{\delta}{\delta \phi^a} \\
&\left. + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta \xi^a_\mu}\frac{\delta}{\delta \xi^{*a\mu}} + \frac{\delta\Sigma_{BF}}{\delta \xi^{*a\mu}}\frac{\delta}{\delta \xi^a_\mu} \right) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

é um operador nilpotente,

$$\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0. \qquad (3.13)$$

Para o BF em quatro dimensões, o cociclo vetorial Ω^{-1}_μ invariante frente a ação de $\mathcal{B}_\Sigma$ toma a seguinte forma:

$$\Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu} = \int d^4x \left(c^a \partial_\mu C^{*a} - A^a_\nu \partial_\mu A^{*a\nu} + \xi^a_\nu \partial_\mu \xi^{*a\nu} - \phi^a \partial_\mu \phi^{*a} - \frac{1}{2} B^a_{\nu\tau} \partial_\mu B^{*a\nu\tau} \right). \qquad (3.14)$$

Como sabemos, o cociclo $\Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu}$ é $\mathcal{B}_\Sigma$-fechado em decorrência da invariância translacional $\mathcal{P}_\mu$,

$$\mathcal{B}_\Sigma \Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu} = \mathcal{P}_\mu \Sigma_{BF} = 0.$$

A cohomologia do operador $\mathcal{B}_\Sigma$ no setor dos polinômios locais integrados com número de *ghost* -1 e com um índice de Lorentz livre, como sabemos, é vazia [7, 12]. Sendo assim, exatamente como no caso de Chern-Simons em três dimensões que vimos no capítulo anterior, o polinômio $\Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu}$ acima é $\mathcal{B}_\Sigma$-exato, ou seja

$$\Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2}_{\mathrm{BF}\mu}, \qquad (3.15)$$

para algum polinômio local integrado $\Xi^{-2}_{\mathrm{BF}\mu}$ cuja dimensão é 5 e o número de *ghost* é -2. É imediata a verificação de que neste caso

$$\Xi^{-2}_{\mathrm{BF}\mu} = \int d^4x \left(C^{*a} A^a_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{*a\nu} B^{*a\rho\sigma} - \phi^{*a}\xi^a_\mu - \xi^{*a\nu} B^a_{\nu\mu} \right). \qquad (3.16)$$

Desenvolvendo a expressão $\Omega^{-1}_{\mathrm{BF}\mu} = \mathcal{B}_{\Sigma}\Xi^{-2}_{\mathrm{BF}\mu}$, obtemos os termos de contato da supersimetria vetorial, em seguida escrevemos todo o conteúdo em função da ação completa $S = S_{BF} + S_{gf} + S_f$. Procedendo assim obtemos a identidade de Ward da supersimetria vetorial $\mathcal{W}_\mu$, a qual é quebrada por um termo clássico e linear nos anti-campos:

$$\mathcal{W}_\mu S = \Delta^{cl}_\mu , \tag{3.17}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\mu \;=\; & \int d^4x \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\tau v\mu}\left(\hat{B}^{*a\tau\nu} + \partial^t\bar{\xi}^{a\nu} - \partial^\nu\bar{\xi}^{a\tau}\right)\frac{\delta}{\delta A^a_\sigma} + A^a_\mu\frac{\delta}{\delta c^a} - \partial_\mu\bar{c}^a\frac{\delta}{\delta b^a} \right.\\
& -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\tau v\mu}\left(\hat{A}^{*a\sigma} + \partial^\sigma\bar{c}^a\right)\frac{\delta}{\delta B^a_{\tau\nu}} - B^a_{\nu\mu}\frac{\delta}{\delta\xi^a_\nu} - \xi^a_\mu\frac{\delta}{\delta\phi^a} + \bar{\phi}^a\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^{a\mu}}\\
& -\partial_\mu\bar{\phi}^a\frac{\delta}{\delta\omega^a} + \partial_\mu e^a\frac{\delta}{\delta\lambda^a} - \left(\omega^a\delta^t_\mu + \partial_\mu\bar{\xi}^{a\tau}\right)\frac{\delta}{\delta h^{a\tau}} + C^{*a}\frac{\delta}{\delta\hat{A}^{*a\mu}}\\
& \left. +\phi^{*a}\frac{\delta}{\delta\hat{\xi}^{*a\mu}} - \hat{\xi}^{*a\nu}\frac{\delta}{\delta\hat{B}^{*a\nu\mu}}\right) ,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e o termo de quebra linear

$$\begin{aligned}
\Delta^{cl}_\mu \;=\; & \int d^4x \left(\hat{A}^{*a\nu}\partial_\mu A^a_\nu - C^{*a}\partial_\mu c^a - \hat{\xi}^{*a\nu}\partial_\mu\xi^a_\nu + \phi^{*a}\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}\hat{B}^{*a\tau v}\partial_\mu B^a_{\tau\nu} \right.\\
& \left. -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\tau\nu\mu}\hat{B}^{*a\tau\nu}\partial^\sigma b^a + \frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\tau\nu\mu}\hat{A}^{*a\sigma}\partial^t h^{a\nu}\right) .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Do mesmo modo que em Chern-Simons em três dimensões, o operador funcional da supersimetria vetorial juntamente com o operador nilpotente de BRST formam uma álgebra tipo Wess-Zumino, isto é

$$\{B_\Sigma, \mathcal{W}_\mu\} = \mathcal{P}_\mu ,$$

possibilitando a interpretação supersimétrica do modelo. Para concluir, vale lembrar que esta construção pode ser extendida para os modelos BF definidos em espaços com dimensões mais altas [7, 12].

3.2 A supersimetria vetorial no sistema de *ghosts* b-c

Nosso último exemplo, onde mostramos a origem cohomológica da supersimetria vetorial, é o sistema de *ghosts* b-c definido num espaço-tempo bidimensional e cuja ação se escreve

$$S_{b-c} = \int dz d\bar{z}\, b\bar{\partial}c. \tag{3.20}$$

Os campos $b = b_{zz}$ e $c = c^z$ têm caráter anticomutante e carregam número de *ghost* -1 e $+1$, respectivamente. A ação do sistema b-c é, de fato, uma parte da ação quantizada da corda bosônica [3, 38], o setor de *ghost*.

Como é bem conhecido, a ação (3.20) é invariante face as seguintes transformações não-lineares de BRST:

$$\begin{aligned} sc &= c\partial c, \\ sb &= -(\partial b)\, c - 2b\partial c, \\ s^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Em particular, destacamos que o lado direito da transformação BRST do campo b é exatamente a componente T_{zz} do tensor energia-momento associado a ação (3.20). É precisamente esta característica que confere o caráter topológico ao sistema de *ghosts* b-c.

Uma vez que as transformações (3.21) são não-lineares, precisamos introduzir os anti-campos $b^* = b_{\bar{z}}^{z*}$ e $c^* = c^*_{zz\bar{z}}$ que possuem número de *ghost* 0 e -2, respectivamente. Escrevemos abaixo a ação completa S,

$$S = S_{b-c} + \int dz d\bar{z}\, \left(c^* c\partial c + b^* \left(c\partial b - 2b\partial c\right)\right), \tag{3.22}$$

que obedece a identidade de Slavnov-Taylor

$$\int dzd\bar{z} \left(\frac{\delta S}{\delta b}\frac{\delta S}{\delta b^*} + \frac{\delta S}{\delta c}\frac{\delta S}{\delta c^*} \right) = \frac{1}{2}\mathcal{B}_S S = 0. \tag{3.23}$$

$\mathcal{B}_S$ denota o operador linearizado e nilpotente de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{B}_S = \int dzd\bar{z} \left(\frac{\delta S}{\delta b}\frac{\delta}{\delta b^*} + \frac{\delta S}{\delta b^*}\frac{\delta}{\delta b} + \frac{\delta S}{\delta c}\frac{\delta}{\delta c^*} + \frac{\delta S}{\delta c^*}\frac{\delta}{\delta c} \right), \tag{3.24}$$

e

$$\mathcal{B}_S\mathcal{B}_S = 0.$$

Lembramos que neste exemplo o operador $\mathcal{B}_S$ tem dimensão 1.

A tabela abaixo indica a dimensão e o número de *ghost* para cada campo do sistema b-c.

	c	b	c^*	b^*
N_g	1	-1	-2	0
dim	0	1	1	0

Consideramos a seguir, em componentes, o polinômio vetorial de dimensão dois

$$\begin{aligned} \Omega_z^{-1} &= \int dzd\bar{z}\ \left(b\partial b^* + c\partial c^*\right), \\ \Omega_{\bar{z}}^{-1} &= \int dzd\bar{z}\ \left(b\bar{\partial} b^* + c\bar{\partial} c^*\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Realmente, é fácil verificar que em função da invariância translacional da ação (3.22) o polinômio Ω^{-1} é um cociclo de $\mathcal{B}_S$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_S\Omega_z^{-1} &= \mathcal{P}_z S = 0, \\ \mathcal{B}_S\Omega_{\bar{z}}^{-1} &= \mathcal{P}_{\bar{z}} S = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como nos exemplos anteriores, o polinômio Ω^{-1} associado ao sistema b-c é um cociclo exato do operador $\mathcal{B}_S$, ou seja, existem polinômios locais Ξ_z^{-2} e $\Xi_{\bar{z}}^{-2}$ com número de *ghost* -2 e dimensão 1 que satisfazem as condições

$$
\begin{aligned}
\Omega_z^{-1} &= \mathcal{B}_S \Xi_z^{-2}, \\
\Omega_{\bar{z}}^{-1} &= \mathcal{B}_S \Xi_{\bar{z}}^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Após manipulações algébricas bastante simples, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Xi_z^{-2} &= -\int dz d\bar{z}\ c^*, \\
\Xi_{\bar{z}}^{-2} &= -\int dz d\bar{z}\ c^* b^*.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Convertendo as equações (3.27) em termos de contato, obtemos duas identidades de Ward com termo de quebra linear

$$
\int dz d\bar{z}\ \frac{\delta S}{\delta c} = -\int dz d\bar{z}\ \left(b \partial b^* + c \partial c^*\right) \tag{3.29}
$$

e

$$
\int dz d\bar{z}\ \left(b^* \frac{\delta S}{\delta c} + c^* \frac{\delta S}{\delta b}\right) = -\int dz d\bar{z}\ \left(b \bar{\partial} b^* + c \bar{\partial} c^*\right), \tag{3.30}
$$

as quais são as identidades de Ward da supersimetria vetorial que ocorrem no sistema de *ghosts* b-c [12, 15, 20].

3.3 Invariância rígida: A equação do ghost no calibre de Landau

A seguir focalizamos um exemplo bastante interessante de uma identidade de Ward que possui termo de quebra clássico. Como nos casos da supersimetria vetorial tratados anteriormente, os termos de contato desta identidade funcional podem ser caracterizados de forma puramente algébrica.

Esta identidade de Ward, no entanto, não é relativa a um modelo de calibre específico, porém está presente em todos os casos onde a simetria de calibre rígida é uma invariância exata da ação.

Para tornar mais clara e objetiva esta abordagem, vamos considerar a ação reduzida de Yang Mills em quatro dimensões,

$$\Sigma_{YM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + A^{*a\mu} (D_\mu c)^a - \frac{1}{2} f^{abc} C^{*a} c^b c^c \right). \tag{3.31}$$

Observamos que a ação de Yang-Mills quantizada no calibre de Feynman se escreve

$$S_{YM} = \Sigma_{YM} + \int d^4x \left(b^a \partial A^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a \right). \tag{3.32}$$

Como os aspectos da quantização deste modelo são similares aos casos já abordados anteriormente, nos eximimos de fazer uma exposição mais detalhada, nos limitaremos a comentar brevemente as características essenciais do modelo.

A invariância rígida presente na ação de Yang-Mills simplesmente traduz o fato de que todos os campos e fontes pertencem à representação adjunta do grupo de calibre, isto é

$$\mathcal{R}^a \Sigma_{YM} = \int d^4x \, f^{abc} \left(A^b_\mu \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta A^c_\mu} + A^{*b}_\mu \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta A^{*c}_\mu} + c^b \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta c^c} + c^{*b} \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta c^{*c}} \right) = 0. \tag{3.33}$$

A seguir vamos considerar um polinômio local integrado de dimensão quatro,

$$\Omega^{-1a} = \int d^4x \; f^{abc} \left(A^{b\mu} A^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right), \tag{3.34}$$

o qual é linear com relação aos anti-campos redefinidos $\left(A^*_\mu, C^*\right)$, possui número de *ghost* -1, e tem um índice de grupo na representação adjunta.

Da mesma forma que o cociclo vetorial do modelo de Chern-Simons no capítulo anterior, o polinômio Ω^{-1a} também é invariante frente a ação do operador de BRST $\mathcal{B}_\Sigma$. De fato, é fácil mostrar que Ω^{-1a} é $\mathcal{B}_\Sigma$-invariante como uma consequência da ação Σ_{YM}

possuir a simetria rígida $\mathcal{R}^a$,

$$\mathcal{B}_\Sigma \Omega^{-1a}_{\rm YM} = \mathcal{R}^a \Sigma_{YM} = 0. \tag{3.35}$$

O operador $\mathcal{B}_\Sigma$, como sabemos, é o operador de Slavnov-Taylor linearizado, no caso de Yang-Mills em quatro dimensões escrevemos

$$\mathcal{B}_\Sigma = \int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta A^a_\mu} \frac{\delta}{\delta A^{*a\mu}} + \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta A^{*a\mu}} \frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta C^{*a}} + \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta C^{*a}} \frac{\delta}{\delta c^a} \right). \tag{3.36}$$

Um conhecido resultado da cohomologia dos grupos de Lie afirma que não há classes de cohomologia com um índice livre no grupo [28]. Assim podemos concluir que $\Omega^{-1a}_{\rm YM}$ pode ser escrito como uma variação de BRST de um certo polinômio local integrado de dimensão 4, cujo número de *ghost* é -2:

$$\Omega^{-1a}_{\rm YM} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2a}_{\rm YM} \tag{3.37}$$

Não é difícil mostrar que a forma mais geral para $\Xi^{-2a}_{\rm YM}$ pode ser escrita como

$$\Xi^{-2a}_{\rm YM} = \beta \int d^4x \, C^{*a}, \tag{3.38}$$

onde β é um parâmetro arbitrário.

Desenvolvendo a equação $\Omega^{-1a}_{\rm YM} = \mathcal{B}_\Sigma \Xi^{-2a}_{\rm YM}$, isto é, atuando com o operador $\mathcal{B}_\Sigma$ sobre $\Xi^{-2a}_{\rm YM}$ e igualando a expressão a $\Omega^{-1a}_{\rm YM}$, obtemos

$$\int d^4x \; f^{abc} \left(A^{b\mu} A^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right) = \beta \int d^4x \; \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta c^a} = \beta \int d^4x \; f^{abc} \left(A^{b\mu} A^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right), \tag{3.39}$$

donde concluimos que $\beta = 1$.

Obtemos assim uma identidade funcional,

$$\int d^4x \, \frac{\delta \Sigma_{YM}}{\delta c^a} = \int d^4x \, f^{abc} \left(A^{b\mu} A^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right). \tag{3.40}$$

Traduzindo o conteúdo da identidade acima em termos da ação completa, usando a condição de calibre de Feynman

$$\frac{\delta S_{YM}}{\delta b^a} = \partial A^a + \alpha b^a \tag{3.41}$$

e a redefinição do anti-campo $A^{*a\mu}$,

$$A^{*a\mu} = \hat{A}^{*a\mu} + \partial^\mu \bar{c}^a, \tag{3.42}$$

obtemos ao final a seguinte identidade funcional

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta c^a} - f^{abc} \bar{c}^b \frac{\delta S}{\delta b^c} \right) = \int d^4x\, f^{abc} \left(A^{b\mu} \hat{A}^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right) + \alpha \int d^4x\, f^{abc} b^b \bar{c}^c \tag{3.43}$$

Devemos observar que o lado direito da expressão acima, além de um termo de quebra linear, contém ainda um termo quadrático nos campos quânticos do modelo, ou seja, $\alpha\, f^{abc} b^b \bar{c}^c$. O problema com este termo é que ele se renormaliza e portanto precisa ser definido como uma inserção, porém a utilidade prática da identidade acima ficará comprometida. Por outro lado, fazendo-se a escolha $\alpha = 0$, obtemos uma identidade de Ward quebrada linearmente, a qual reconhecemos como a identidade de Ward da equação do *ghost* [39]:

$$\mathcal{G}^a S = \Delta^a,$$

onde

$$\mathcal{G}^a = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta c^a} - f^{abc} \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta b^c} \right)$$

e

$$\Delta^a = \int d^4x\, f^{abc} \left(A^{b\mu} A^{*c}_\mu - c^b C^{*c} \right).$$

a qual está sempre presente em modelos de calibre quantizados no calibre de Landau.

A equação do *ghost*, apesar de estar associada a uma escolha específica de calibre, é de muita utilidade no estudo da finitude no regime do ultra-violeta para uma grande classe polinômios da cohomologia de BRST [40]. O que ocorre é que, ao nível quântico, estes polinômios invariantes são promovidos a inserções locais as quais possuem dimensões anômalas independentes do parâmetro de calibre α. Sendo assim, o estudo da finitude dos polinômios invariantes da cohomologia de BRST pode ser efetuado no calibre de Landau, sem perda de generalidade. Lembramos que a equação do *ghost* possibilita uma prova de que as dimensões anômalas são nulas para polinômios invariantes do tipo $tr\left(c^{2n+1}\right)$, com $n \geq 1$. Estes, por sua vez, estão profundamente relacionados com com as anomalias de calibre e com os termos de Chern-Simons generalizados [12]. Os resultados que acabamos de mencionar são fundamentais para a demonstração do teorema de não-renormalização das anomalias de calibre e axial, o conhecido teorema de Adler-Bardeen [12, 40, 41]. Para finalizar, lembramos que a equação do *ghost* é renormalizável [12, 39] e que, recentemente, foi estabelecida sua versão supersimétrica para teorias de calibre definidas no superespaço $N = 1$ [42].

3.4 A supersimetria vetorial não-linear para Yang-Mills com massa topológica em três dimensões

Há cerca de dois anos, numa série de trabalhos [43] ficou estabelecido que teorias de calibre tipo Yang-Mills definidas num espaço-tempo de três dimensões, e em presença do termo topológico de Chern-Simons, podem ser reescritas na forma de uma ação de Chern-Simons pura, através de uma redefinição não-linear, porém local e covariante do campo de calibre. De fato, no caso da teoria de Yang-Mills com massa topológica cuja ação é formada pelo termo de Chern-Simons somada à ação de Yang-Mills,

$$S_{YMTM}\left(A\right) = S_{CS}\left(A\right) + S_{YM}\left(A\right), \tag{3.44}$$

onde

$$\begin{aligned} S_{YM}\left(A\right) &= \frac{1}{4m} tr \int d^3x \; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \\ S_{CS}\left(A\right) &= \frac{1}{2} tr \int d^3x \, \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\rho\right), \end{aligned} \tag{3.45}$$

temos

$$S_{YMTM}(A) = S_{CS}\left(\hat{A}\right), \tag{3.46}$$

com a redefinição

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n (D, F). \tag{3.47}$$

Em (3.45) os parâmetros g e m identificam a constante de acoplamento e a chamada massa topológica, respectivamente. Como mostrado em [43], os coeficientes ϑ_μ^n são polinômios locais e covariantes, no sentido de que podem ser expressos em termos do tensor $F_{\mu\nu}$ e de suas derivadas covariantes. A título de exemplo, exibimos a seguir os primeiros termos da redefinição do campo de calibre A_μ:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\mu^1 &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}F^{\sigma\tau}, \\
\vartheta_\mu^2 &= \frac{1}{8}D^\sigma F_{\sigma\mu}, \\
\vartheta_\mu^3 &= -\frac{1}{16}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}D^\sigma D_\rho F^{\rho\tau} + \frac{g}{48}\varepsilon_{\mu\sigma\tau}\left[F^{\sigma\rho}, F_\rho{}^\tau\right], \\
\vartheta_\mu^4 &= -\frac{5}{128}D^2 D^\rho F_{\rho\mu} + \frac{5}{128}D^\nu D_\mu D^\lambda F_{\lambda\nu} \\
&\quad -\frac{7}{192}g\left[D^\rho F_{\rho\tau}, F_\mu{}^\tau\right] - \frac{g}{48}\left[D_\nu F_{\mu\lambda}, F^{\lambda\nu}\right].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

A equação (3.46) expressa a equivalência clássica entre a teoria de Yang-Mills com massa topológica a a ação do modelo de Chern-Simons, equivalência esta produzida pela redefinição (3.47).

É natural então perguntar-nos se, devido à (3.46), a supersimetria vetorial ainda estaria presente quando a ação de Yang-Mills for somada à ação pura de Chern-Simons. Podemos mostrar que a resposta a questão acima é afirmativa, ou seja, a ação do modelo de Yang-Mills com massa topológica possui a supersimetria vetorial. A observação de que neste caso os campos do modelo formam uma estrutura de multipleto corrobora os indícios de existência da supersimetria vetorial no modelo de Yang-Mills com a presença de massa topológica. Em contraste com o caso de Chern-Simons puro, a supersimetria vetorial é realizada de modo não-linear sobre os campos, porém do mesmo modo que a redefinição (3.47), a supersimetria vetorial aparecerá como uma série de potências no parâmetro $1/m$.

Para estabelecer os resultados que enunciamos acima, precisamos primeiramente lembrar que os coeficientes $\vartheta_{\mu}^{n}(D,F)$ na expansão (3.47) se transformam covariantemente, i.e.

$$s\vartheta_{\mu}^{n}=g\left[\vartheta_{\mu}^{n},c\right] \tag{3.49}$$

frente as transformações de BRST dos campos do modelo. Uma consequência imediata desta propriedade é a de que o campo $\hat{A}_{\mu}$ se transforma como uma legítima conexão de calibre frente as transformações de BRST,

$$s\hat{A}_{\mu}=-\left(\partial_{\mu}c+g\left[\hat{A}_{\mu},c\right]\right). \tag{3.50}$$

Se, para quantizarmos a ação de Yang-Mills com massa topológica, escolhermos a condição de Landau para a conexão $\hat{A}_{\mu}$, ou seja

$$\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}=0, \tag{3.51}$$

teremos

$$\Sigma_{YMTM}(A)=S_{YMTM}(A)+tr\int d^{3}x\ \left(b\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}+\bar{c}\partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}c+g\left[\hat{A}_{\mu},c\right]\right)\right) \tag{3.52}$$

como a ação quantizada do modelo. Lembrando que

$$S_{YMYM}(A)=S_{CS}(A)+\frac{1}{4m}tr\int d^{3}x\ F^{2}=S_{CS}\left(\hat{A}\right), \tag{3.53}$$

identificamos facilmente que

$$\Sigma_{YMTM}(A)=S_{CS}\left(\hat{A}\right)+tr\int d^{3}x\ \left(b\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}+\bar{c}\partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}c+g\left[\hat{A}_{\mu},c\right]\right)\right). \tag{3.54}$$

A expressão anterior é facilmente reconhecida como a ação quantizada do modelo de

Chern-Simons vista como um funcional da conexão de calibre $\hat{A}_\mu$. Por analogia, concluímos que a ação $\Sigma_{YMTM}(A)$ é invariante face a seguinte transformação vetorial:

$$tr \int d^3x \, \left(\hat{A}_\mu \frac{\delta}{\delta c} + \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \bar{c} \frac{\delta}{\delta \hat{A}_\nu} + \partial_\mu \bar{c} \frac{\delta}{\delta b} \right) \Sigma_{YMTM}(A) = 0. \tag{3.55}$$

Movendo da conexão $\hat{A}_\mu$ para o campo de calibre A_μ, obtemos a esperada identidade funcional não-linear da supersimetria vetorial da ação quantizada do modelo de Yang-Mills com massa topológica [19], ou seja

$$\mathcal{W}_\mu = Tr \int d^3x \left(\left(A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n \right) \frac{\delta}{\delta c} + \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\alpha \bar{c} \mathcal{M}_\lambda^\beta(x) \frac{\delta}{\delta A_\lambda} + \partial_\mu \bar{c} \frac{\delta}{\delta b} \right) \tag{3.56}$$

onde a matriz

$$\mathcal{M}_\lambda^\beta(x) = \int d^3y \, \frac{\delta A_\lambda(y)}{\delta \hat{A}_\beta(x)} \tag{3.57}$$

é facilmente obtida invertendo-se a transformação (3.47) para a conexão de calibre.

Fica assim estabelecido o resultado mencionados anteriormente, a identidade de Ward da supersimetria vetorial para Yang-Mills com massa topológica em três dimensões é realizada de modo não linear devido a presença dos coeficientes ϑ_μ^n e da matriz $\mathcal{M}_\lambda^\beta(x)$ na expressão do operador $\mathcal{W}_\mu$.

Fica então evidente que o operador de Ward da supersimetria vetorial deste caso pode ser expandido numa série de potências no parâmetro $1/m$, gerando

$$\mathcal{W}_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n} \mathcal{W}_\mu^n. \tag{3.58}$$

Abaixo listamos os primeiros termos da série.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\mu^0 &= Tr \int \left(A_\mu \frac{\delta}{\delta c} + \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\beta \bar{c} \frac{\delta}{\delta A_\alpha} + \partial_\mu \bar{c} \frac{\delta}{\delta b} \right), \\
\mathcal{W}_\mu^1 &= Tr \int \left(\vartheta_\mu^1 \frac{\delta}{\delta c} + \frac{1}{2} D_\rho \partial^\rho \bar{c} \frac{\delta}{\delta A^\mu} - \frac{1}{2} D_\mu \partial^\rho \bar{c} \frac{\delta}{\delta A^\rho} \right), \\
\mathcal{W}_\mu^2 &= Tr \int \left(\vartheta_\mu^2 \frac{\delta}{\delta c} + \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \left(3D^2 \partial^\rho \bar{c} \delta^{\nu\alpha} - 3D^\nu D^\alpha \partial^\rho \bar{c} - [\partial^\rho \bar{c}, F^{\nu\alpha}] \frac{\delta}{\delta A^\alpha} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^3_\mu \;=\; & Tr\int\left(\vartheta^3_\mu\frac{\delta}{\delta c}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}D_\nu\left[\partial^\rho\bar{c},F^\nu_\rho\right]+\frac{5}{8}D^2D_\rho\partial^\rho\bar{c}-\left[\partial^\rho\bar{c},\vartheta^2_\rho\right]\right)\frac{\delta}{\delta A^\mu}\right.\\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\left[\partial^\nu\bar{c},D^\rho F_{\nu\mu}\right]-\left[\partial^\rho\bar{c},\vartheta^2_\mu\right]-\frac{9}{8}D_\mu\left[\partial^\nu\bar{c},F^\rho_\nu\right]\right.\\
& -\frac{9}{8}D_\nu\left[\partial^\nu\bar{c},F^\rho_\mu\right]-\frac{5}{4}D^\rho\left[\partial^\nu\bar{c},F_{\nu\mu}\right]+\frac{1}{4}D^\nu\left[\partial^\rho\bar{c},F_{\mu\nu}\right]\\
& \left.\left.\frac{5}{8}\left(D_\nu D^\rho D_\mu\partial^\nu\bar{c}-D^2D_\mu\partial^\rho\bar{c}-D_\mu D^\rho D_\nu\partial^\nu\bar{c}\right)\right)\frac{\delta}{\delta A^\rho}\right).
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Observe que o termo de ordem zero $\mathcal{W}^0_\mu$ dado acima coincide com o operador de Ward da supersimetria vetorial do modelo de Chern-Simons em três dimensões, eq. (2.8) do capítulo anterior. Finalmente, pela equação (2.10) também do capítulo anterior, concluimos que a álgebra gerada pelo operador de BRST e pelo operador de Ward da $\mathcal{W}_\mu$ é uma álgebra do tipo Wess-Zumino

$$
\begin{aligned}
\{s,\mathcal{W}_\mu\}\,A_\nu &= \partial_\mu A_\nu+2\varepsilon_{\nu\mu\rho}\int d^3y\,\frac{\delta A_\lambda(y)}{\delta\hat{A}_\rho(x)}\frac{\delta\Sigma_{YMTM}(A)}{\delta A_\lambda(y)},\\
\{s,\mathcal{W}_\mu\}\,c &= \partial_\mu c,\\
\{s,\mathcal{W}_\mu\}\,\bar{c} &= \partial_\mu\bar{c},\\
\{s,\mathcal{W}_\mu\}\,b &= \partial_\mu b,
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

cuja existência permite associar uma álgebra supersimétrica ao modelo de Yang-Mills com massa topológica.

Conclusão

Nos artigos que deram origem ao texto desta tese, mostramos que a existência da supersimetria vetorial em modelos de calibre topológicos está diretamente associada a certas classes de cohomologia de BRST. De modo similar, foi possível caracterizarmos de forma puramente algébrica a identidade de Ward associada a equação do *ghost* no calibre de Landau presente em modelos de calibre onde a invariância rígida é uma simetria exata.

Nos dois casos obtivemos as identidades de Ward, e seus respectivos termos de quebra lineares, desenvolvendo a condição de exatidão para certos cociclos do operador de BRST, os quais dependem dos anti-campos e possuem número de *ghost* -1.

Conseguimos demonstrar ainda a existência da supersimetria vetorial, realizada de modo não-linear, para o modelo de Yang-Mills com massa topológica definido num espaço-tempo euclidiano de três dimensões.

O programa de relacionar invariâncias a classes de cohomologia BRST que apresentamos aqui, longe de estar esgotado, indica amplas perspectivas futuras. Destacamos dois caminhos que consideramos promissores. O primeiro acena com a possibilidade de haver uma generalização do mecanismo algébrico para descobrirmos outros tipos de invariâncias desconhecidas eventualmente presentes em teorias de calibre. Isto é particularmente desejável na construção de provas puramente algébricas de finitude no regime ultra-violeta para modelos de calibre com supersimetria extendida $N = 2$ e $N = 4$.

O segundo caminho é a procura de uma justificativa cohomológica para a existência de infinitas correntes conservadas que definem um sistema integrável, em outras palavras, investigar a eventual relação entre as classes de cohomologia do operador de BRST e a integrabilidade de certos sistemas de campos. Lembramos que a supersimetria vetorial permite que se estabeleça uma equação de curvatura nula caracterizando certos modelos de calibre topológicos.

Estes tópicos estão sendo abordados de maneira sistemática, com intúito de conseguirmos outros exemplos, até então desconhecidos, de simetrias globais presentes nas teorias de calibre em diferentes dimensões espaço-temporais.

Bibliografia

[1] M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton NJ; **Princeton University Press 1992**;
G. Barnich, F. Brandt e M. Henneaux, **Commun. Math. Phys. 174 (1995) 57**;
G. Barnich, F. Brandt e M. Henneaux, **Commun. Math. Phys. 174 (1995) 93**;
M Henneaux, **Journ. of Pure and Applied Algebra 100 (1995) 3**;

[2] E Witten, **Commun. Math. Phys. 117 (1988) 353**;

[3] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski e G. Thompson, **Phys. Rep. 209 (1991) 129**;

[4] E. Witten; **Commun. Math. Phys. 118 (1988) 411**;

[5] D. Birmingham, M. Rakowski e G. Thompson, **Nucl. Phys. B329 (1990) 83**;
D. Birmingham, M. Rakowski, **Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 1753**;

[6] F. Delduc, F. Gieres e S.P. Sorella, **Phys. Lett. B225 (1989) 367**;
F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. B346 (1990) 313**;

[7] E. Guadagnini, N. Maggiore e S.P. Sorella, **Phys. Lett. B255 (1991) 65**;
N. Maggiore e S.P. Sorella, **Int. Journ. Mod. Phys A8 (1993) 325**;
C. Lucchesi, O. Piguet e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. B395 (1993) 325**;

[8] E. Witten, **Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351**;
R. Dijkgraaf e E. Witten, *Topological Gauge Theories and Group Cohomology*, **Princeton preprint IASSNS-HEP-89/83**, junho de 1989;

[9] V. F. R. Jones, **Bull. AMS 12 (1986) 103**;
V. F. R. Jones, **Ann. Math. 126 (1987) 335**;

[10] J. Fröhlich, *Statistics of Fields, The Yang-Baxter Equation and the Theory of Knots and Links*, **Zürich preprint ETH-88-0173**, março de 1988;
E. Witten, *Gauge Theories and Integrable Lattice Models*, **Princeton preprint IASSNS-HEP-89/11**, fevereiro de 1989;

[11] D. Birmingham e M. Rakowski, **Phys. Lett. B269 (1991) 103**;
D. Birmingham e M. Rakowski, **Phys. Lett. B275 (1992) 289**;
D. Birmingham e M. Rakowski, **Phys. Lett. B289 (1992) 271**;
A. Brandhuber, O. Moritsch, M.W. de Oliveira, O. Piguet e M. Scheweda, **Nucl. Phys. B341 (1994) 173**;

[12] O. Piguet e S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, **Monographs Series, Vol. m28, Springer-Verlag, Berlin 1995**;

[13] S.P. Sorella, **Commun. Math. Phys. 157 (1993) 231**;
S.P. Sorella e L. Tataru, **Phys. Lett. B324 (1994) 351**;

[14] M.W. de Oliveira e S.P. Sorella, **Int. Journ. Mod. Phys A9 (1994) 2979**;
O. Moritsch, M. Scheweda e S.P. Sorella, **Class. Quantum Grav. 11 (1994) 1225**;
O. Moritsch e M. Scheweda, **Helv. Phys. Acta 67 (1994) 289**;
P.A. Blaga, O. Moritsch, M. Scheweda, T. Sommer, L. Tataru e H. Zerrouki, **Phys. Rev. D51 (1995) 2792**;
O. Moritsch, M. Scheweda, T. Sommer, L. Tataru e H. Zerrouki, *BRST Cohomology of Yang-Mills Gauge Fields in the Presence of Gravity in Ashtekar Variables*, **hep-th/9409081**; S. Emery, O. Moritsch, M. Scheweda, T. Sommer e H. Zerrouki, **Helv. Phys. Acta 68 (1995) 167**;
O. Piguet, **UGVA-DPT 1995/02-880, hep-th/9502033**;

[15] M.W. de Oliveira, M. Scheweda e S.P. Sorella, **Phys. Lett. B315 (1993) 93**;
L. Tataru e I.V. Vancea, **Int. Journ. Mod. Phys. 11 (1996) 375**;

[16] A. Boresch, M. Schweda e S.P. Sorella, **Phys. Lett. B328 (1994) 36**;

[17] M. Carvalho, L.C.Q. Vilar e S.P. Sorella, **Int. Journ. Mod. Phys. A, Vol. 10 (1995) 3877**;

[18] C.A.G. Sasaki, C. Linhares de Jesus e S.P. Sorella, **Braz. Journ. Phys. 28 (1998) 44**;

[19] C.A.G. Sasaki, D.G.G. Sasaki e S.P. Sorella, **Mod. Phys. Lett. A, Vol. 14, No. 6 (1999) 391**;

[20] M. Carvalho, L.C.Q. Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, **Journ. of Math. Phys. 37 (1996) 5310**;
M. Carvalho, L.C.Q. Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, **Journ. of Math. Phys. 37 (1996) 5325**;

[21] L.C.Q. Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, **Journ. Math. Phys. 40 (1999) 2735**;

[22] N. Maggior e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. B377 (1992) 236**;

[23] C.A.G. Sasaki, S.P. Sorella, L.C.Q. Vilar e O.S. Ventura, **Journ. Math. Phys. 39 (1998) 848**;

[24] L.C.Q. Vilar, Tese de doutorado: *Formalismo de Curvatura Nula e Sistemas BRST*, CBPF, março de 1997;

[25] S.P. sorella, Notas de aula da Primeira Escola Internacional de Teoria de Campos e Gravitação, Vitória - ES, abril de 1997;

[26] J.M.L. Fisch e M. Henneaux, **Commun. Math. Phys. 128 (1990) 627**;
M. Henneaux, **Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 18A (1990) 47**;

[27] M. Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Talon e C.M. Viallet, **Phys. Lett. B267 (1991) 81**;

[28] F. Brandt, N. Dragon e M. Kreuzer, **Phys. Lett. B231 (1989) 263**;
F. Brandt, N. Dragon e M. Kreuzer, **Nucl. Phys. B332 (1990) 224**;
F. Brandt, N. Dragon e M. Kreuzer, **Nucl. Phys. B332 (1990) 250**;
M.Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Talon e C.M. Viallet, **Phys. Lett. B289 (1992) 361**;

[29] I.A. Batalin e G.A. Vilkovisky, **Phys. Lett. B102 (1981) 27**;
I.A. Batalin e G.A. Vilkovisky, **Phys. Rev. D28 (1983) 2567**;

[30] S. Ouvry, R. Stora e P. Van Baal, **Phys. Lett. B220 (1989) 159**;
A. Blasi e R. Collina, **Phys. Lett. B222 (1989) 159**;
S.P. Sorella, **Phys. Lett. B228 (1989) 159**;

[31] J. Kalkman, **Commun. Math. Phys. 153 (1993) 447**;
R. Stora, *Equivariant Cohomology and Topological Theories*, em BRS Symmetry, M. Abe, N. Nakanishi, Iojima eds., **Universal Academy Press, Tokyo, Japan, 1996**;
R. Stora, F. Thuillier e J.C. Wallet, *Algebraic Structure of Cohomological Field Theory Models and Equivariant Cohomology*, aulas da Primeira Escola Caribenha de Primavera em Matemática e Física Teórica, R. Coquereaux, M. Dubois-Violette e P. Flad Eds., **World Scientific Publ., 1995**;
R. Stora, *Exercises in Equivariant Cohomology*, **ENSLAPP-A-619/96, hep-th/9611114**;
R. Stora, *De la fixation de jauge consideree comme un des beaux arts et de la symetrie de Slavnov qui s 'ensuit*, **ENSLAPP-A-620/96, hep-th/9611115**; R. Stora, *Exercises in Equivariant Cohomology and Topological Theories*, **hep-th/9611116**;

[32] C. Becchi, R. Collina e C. Imbimbo, **Phys. Lett. B 322 (1994) 79**;
C. Becchi e C. Imbimbo, **Nucl. Phys. Lett. B462 (1996) 571**;
C. Becchi, C. Imbimbo e S. Giusto, *Gauge dependence in topological gauge theories*, **GEF-Th/96-20, hep-th/9611113**;

[33] F. Delduc, N. Maggiore, O. Piguet e S. Wolf, *Notes on Constrained Cohomology*, **UGVA-DPT 1996/05-925, hep-th/9605158**;

[34] L. Baulieu e I.M. Singer, **Nucl. Phys. B15 (1988) 12**;
L. Baulieu e I.M. Singer, **Comm. Math. Phys. 135 (1991) 253**;

[35] J.M.F. Labastida e M. Pernici, **Phys. Lett. B212 (1988) 56**;

[36] J.H. Lowenstein, **Phys. Rev. D4 (1971) 2281**;
J.H. Lowenstein, **Commun. Math. Phys. 24 (1971) 1**;
Y.P.M. Lam, **Phys. Rev. D6 (1972) 2145**;
Y.P.M. Lam, **Phys. Rev. D7 (1973) 2943**;
T.E. Clark e J.H. Lowenstein, **Nucl. Phys. B113 (1976) 109**;

[37] G. Barnich, F. Brandt e M. Henneaux, **Phys. Lett. B346 (1995) 81**;

[38] M. Green, J. Schwarz e E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. I, II, **Cambridge University Press, 1987**;

[39] A. Blasi, O. Piguet e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. Lett. B356 (1991) 154**;

[40] O. Piguet e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. B381 (1992) 373**;

[41] O. Piguet e S.P. Sorella, **Nucl. Phys. B395 (1993) 661**;

[42] O. Piguet e S.P. Sorella, **Phys. Lett. B371 (1996) 238**;

[43] V.E.R. Lemes, C. Linhares de Jesus, C.A.G. Sasaki, S.P. Sorella, O.S. Ventura e L.C.Q. Vilar, **Phys. Lett. B418 (1998) 324**;
V.E.R. Lemes, C. Linhares de Jesus,S.P. Sorella, O.S. Ventura e L.C.Q. Vilar, **Phys. Rev. D58 (1998) 045010**;
D.G. Barci, V.E.R. Lemes, C. Linhares de Jesus, M.B.D. Silva Maia Porto, S.P. Sorella, L.C.Q.Vilar, **Nucl. Phys. B524 (1998) 765-778**;

“Cohomologia BRST e Teorema do Noether”

Claudio Anael Gomes Sasaki

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Silvio Paolo Sorella – Presidente/UERJ

Sebastião Alves Dias - CBPF

Nelson Ricardo de Freitas Braga – UFRJ

Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior – UERJ

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Marco Aurélio Cattacin Kneipp – CBPF

Rio de Janeiro, 31 de março de 2000