04/00

TESE DE

DOUTORADO

Resultados Recentes em Teorias de Gauge Planares Supersimétricas

LEON RICARDO URURAHY MANSSUR

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF.

RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 2000.

Agradecimentos

- Ao meu pai, pelo apoio incondicional;
- A J.A. Helayël-Neto, H.R. Christiansen, A.L.M.A. Nogueira, M.S. Cunha e M.A. Santos, pelo excelente trabalho em equipe;
- À CAPES pela bolsa e ao CBPF e à UCP pelas instalações e hospitalidade;,
- A O.M. Del Cima, L.P. Colatto, M.A. Andrade, V.E.R. Lemes, e todo o grupo do DCP pelas sugestões e contribuições;
- Aos colegas e funcionários do CBPF, pelo melhor ambiente de trabalho possível;
- A todos os amigos e às mulheres, por me manterem no caminho...

Resumo

Neste trabalho, propomos um modelo de gauge supersimétrico em $D = 4$. Este modelo inclui um campo de Mawxell acoplado minimamente à matéria escalar e a um outro potencial de gauge, 2-forma que, por sua vez, acopla-se não-minimamente ao escalar. Através de um procedimento de redução dimensional, suplementado por uma identificação apropriada entre os 2 campos de gauge, obtemos o modelo de Maxwell-Chern-Simons em $D = 3$, com um termo de Chern-Simons e acoplamento não-mínimo, além de supersimetria $N = 2$. Mostra-se que o setor bosônico deste modelo possui soluções de vórtices topológicos. O modelo é também avaliado através do Método do Projetor Simplético, o que revela os graus de liberdade efetivamente dinâmicos do espaço de fase da teoria bosônica. Finalmente, reconsidera-se o modelo do ponto de vista do superespaço, formulando-o em termos de supercampos. Obtém-se a componente bosônica de sua carga central e se demonstra, como esperado, que esta coincide com a carga topológica.

Abstract

In this work we propose to analyse a supersymmetric gauge model in $D = 4$. It includes a Maxwell field minimally coupled to scalar matter and to another 2-form gauge potential, wich in turns couples non-minimally to the scalar. Through a process of dimensional reduction, supplemented by an identification of both gauge fields, we obtain an $N = 2$-$D = 3$ supersymmetric gauge theory with a Chern-Simons term and non-minimal coupling to matter. It is shown that the bosonic sector of this model displays topological vortex solutions. The model is still reassessed by means of the Simplectic Projector Method, and we obtain thereby the true dynamical phase space degrees of freedom of the bosonic theory. At last, we recionsider the model by formulating it with the help of superspace techniques. The bosonic component of the central charge present in the supersymmetry algebra is calculated and one shows, as expected, that it is nothing but the topological charge.

Índice

Introdução

A Supersimetria (SUSY) foi proposta no início dos anos 70 como um tipo novo de simetria de gauge global ("Supergauge Symmetry"[1]), cujas transformações levam bósons em férmions e vice-versa, através de um parâmetro fermiônico. Até a década de 80, acreditava-se que a SUSY pudesse explicar todas as controvérsias relacionadas ao Modelo Padrão, sendo uma boa proposta para a unificação das interações "fundamentais". Após este período de otimismo inicial, a teoria passou a ser vista mais acertadamente como um ingrediente importante (embora não suficiente) para sistematizar a formulação das interações fundamentais. Como um relevante subproduto, a SUSY passou a ser importante na formulação de modelos em outras áreas da Física. Neste trabalho, usamos a SUSY e um esquema de redução dimensional (à la Scherk [2]) para obter um modelo que, embora não sendo renormálizavel, possui soluções (clássicas) de vórtice, as quais têm relevância na Física da Matéria Condensada Procedemos ao tratamento e à análise do espectro do modelo verificando quais são os graus de liberdade relevantes [3], usando para este fim o Método do Projetor Simplético [4]. Concluindo, utilizamos uma formulação em superespaço para obter a carga central, e mostar que ela coincide com a carga topológica

[5].

0.1 Supersimetria, cargas centrais e cargas topológicas

Da forma como a SUSY foi originalmente introduzida, em campos componentes, alguns modelos foram propostos e extensões foram implementadas. Posteriormente, o formalismo foi aprimorado, sendo introduzida a noção de superespaço. A idéia é introduzir coordenadas fermiônicas, representadas por um espinor de Majorana, θ, em adição às coordenadas usuais (bosônicas), x^μ. Deste modo, as coordenadas trazem graus de liberdade bosônicos e fermiônicos em pé de igualdade. Como θ é fermiônico, tem propriedades de anticomutação, e por isso $\theta^n = 0$ para $n > 2$.

Um supercampo é uma função das coordenadas do superespaço, $\Phi(x, \theta)$. Devido à propriedade citada, a expansão em série de potências de θ tem um número finito de termos, com coeficientes que são funções de x e identificados com os campos componentes:

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \bar{\theta}\chi(x) + \theta^2 S(x). \tag{0.1}$$

Atuando nos campos, os geradores da SUSY (dados pelos espinores Q_a) misturam os campos bosônicos com os fermiônicos. Eles satisfazem à seguinte álgebra (por exemplo, em $D = 4$):

$$\{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = \sigma^\mu_{a\dot{b}} P_\mu, \tag{0.2}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \tag{0.3}$$

onde Q_a e $\bar{Q}_{\dot{a}}$ são espinores de Weyl (2 componentes cada), cada um pertencendo a uma representação irredutível do grupo de Lorentz; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ são índices de Lorentz e $a, b = 1, 2$ e $\dot{a}, \dot{b} = \dot{1}, \dot{2}$ são índices espinoriais (adotaremos a notação e as convenções de [6], exceto onde dito em contrário).

A generalização mais imediata seria fazer N cópias da álgebra, a chamada supersimetria extendida. Tal álgebra (N-extendida) dos geradores de SUSY foi originalmente proposta através das relações abaixo:

$$\begin{aligned} \{Q^i_a, \bar{Q}^j_{\dot{b}}\} &= \delta^{ij}\sigma^\mu_{a\dot{b}}P_\mu, && (0.4) \\ \{Q^i_a, Q^j_b\} &= 0, && (0.5) \end{aligned}$$

sendo $i, j = 1, 2, ..., N$ índices internos. No trabalho de Haag, Lopuzanski e Sohnius [7], procura-se a álgebra de supersimetria mais geral possível, e se-observa que podemos incluir termos centrais na álgebra acima, ou seja, anti-comutadores não-nulos entre as diferentes cargas da supersimetria extendida, em contraste com a eq. (0.5). Temos, neste caso [8]:

$$\begin{aligned} \{Q^i_a, \bar{Q}^j_{\dot{b}}\} &= \delta^{ij}\sigma^\mu_{a\dot{b}}P_\mu, && (0.6) \\ \{Q^i_a, Q^j_b\} &= \epsilon_{ab}Z^{ij}. && (0.7) \end{aligned}$$

Os Z^{ij} são as cargas centrais, anti-simétricas nos índices internos i e j, o que a princípio elimina este termo no caso $N = 1$ [1]. Por construção, os Z^{ij} comutam entre si, e com todos os elementos da álgebra. A carga central tem dimensão de $[m]^1$, o que a torna viável em teorias massivas ou com escala de massa introduzida via quebra espontânea de simetria interna.

[1]Existe a possibilidade de ocorrer um termo central em $N = 1$, se as condições de contorno nao forem triviais no infinito. Para um exemplo em 3 dimensões, vide [9].

Agrupando os espinores de Weyl em espinores de Majorana (4 componentes),

$$\mathcal{Q}^i \equiv \left(\begin{array}{c} Q^i_a \\ Q^{i\dot{a}} \end{array} \right), \tag{0.8}$$

podemos escrever as relações acima em termos dos espinores de Majorana:

$$\{\mathcal{Q}^i, \bar{\mathcal{Q}}^j\} = \delta^{ij}\gamma^\mu P_\mu + U^{ij} + i\gamma_5 V^{ij}, \tag{0.9}$$

onde separamos a parte real e a parte imaginária de $Z^{ij} = U^{ij} + iV^{ij}$. No caso particular de $N = 2$, temos $Z^{ij} = Z\epsilon^{ij}$. Neste caso, e usando que o lado esquerdo da equação acima é positivo-definido, obtemos um limite inferior para as massas da teoria,

$$M \geq |Z|. \tag{0.10}$$

Na referência [5], mostra-se que, dentro de certas condições, este valor coincide com a carga topológica.

A introdução de cargas centrais serve também para reduzir o grande conteúdo de spins presentes no espectro das teorias supersimétricas. As representações massivas de uma SUSY N-extendida trazem spins muito altos ($s > 2$), para os quais ainda não se dispõe de modelos Lagrangeanos locais consistentes. A introdução das cargas centrais reduz drasticamente o conteúdo de spins. permitindo valores compatíveis com os primeiros princípios de teorias quânticas de campos locais.

0.2 Objetivos e comparação com outros trabalhos na literatura

Nos últimos anos, as teorias de gauge planares, supersimétricas ou não, têm sido bem investigadas, devido às várias propriedades interessantes que exibem. Entre os mais relevantes aspectos, podemos citar: massa invariante de gauge [10], finitude ultravioleta [11] e a conexão entre a supersimetria extendida e a existência de soluções solitônicas auto-duais [12].

Recentemente, foi proposta uma teoria (não-supersimétrica) de Maxwell-Chern-Simons (MCS), com interação de momento magnético anômalo (uma generalização termo de momento magnético de Pauli), como sendo o caso mais geral possível em $(2+1)$-dimensões [13]. Foram obtidas equações auto-duais do tipo Bogomol'nyi [14], e configurações de vórtice aparecem quando oportunas relações entre os parâmetros são obedecidas [15, 16].

Tal interação consiste no seguinte: em $D = 3$, o tensor de intensidade de campo é o dual de um vetor,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\tilde{F}^{\lambda}, \tag{0.11}$$

e com este vetor construímos a seguinte derivada covariante:

$$D_{\mu} = (\partial_{\mu} + ihA_{\mu} + ig\tilde{F}_{\mu}), \tag{0.12}$$

onde h é a constante de acoplamento usual (mínimo) e g é a constante de acoplamento não-mínimo. Devemos, entretanto, ressaltar que, como a constante g possui dimensão negativa de massa, o modelo contendo tal acoplamento não é renormalizável; contudo, nada impede que este se preste a fornecer resultados interessantes no nível da teoria de campos clássica. Exemplos usualmente citados são o efeito Hall quântico fracionário e a supercondutividade a altas temperaturas críticas.

Parece existir uma relação entre o aparecimento de auto-dualidade e a extensão supersimétrica-$N = 2$ da teoria MCS com momento anômalo, através da relação entre a carga central e a carga topológica. Por meio da extensão supersimétrica, podemos obter o potencial de Higgs adequado e condições auto-duais compatíveis com as equações de Euler-Lagrange [17, 18].

A respeito disto, o trabalho da ref. [19] teve sucesso em escrever um modelo de Chern-Simons $N = 2$-supersimétrico com acoplamento com momento magnético anômalo. Este trabalho, assim como os resultados das refs. [20, 21], onde se obtém uma versão $N = 2$ do modelo de Maxwell-Higgs, depende de uma escolha especial de parâmetros para garantir a presença das 2 supersimetrias.

Em nosso trabalho, também obtivemos uma versão $N = 2$ do modelo MCS com acoplamento não-mínimo. Mas, em vez de construir nossa ação diretamente em 3 dimensões, e restringir os parâmetros de modo a obter uma extensão $N = 2$, formulamos um modelo $N = 1$ em $D = 4$ com matéria escalar, φ, acoplada minimamente a um campo de gauge usual, A_μ, e não-minimamente a um campo de gauge 2-forma ($B_{\mu\nu}$, o campo do modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond [22, 23, 24]) e constantes de acoplamento completamente independentes. Através de uma redução dimensional à la Scherk [2] (Seção 1.2, em componentes, e Seção 3.1, em supercampos), obtemos um modelo em $D = 3$ com termo de Chern-Simons misto e acoplamento com momento magnético anômalo, $N = 2$-

supersimétrico e sem tais vínculos entre as constantes de acoplamento [25].

Como discutiremos adiante, o procedimento de redução dimensional deve ser suplementado por identificações entre os campos ($A_\mu \equiv B_\mu$). Estas identificações, embora reduzam o espaço de configurações, **não** quebram as 2 supersimetrias. Isto nos permite propor um modelo que tem um termo de Chern-Simons usual (não misto).

Como não vinculamos as constantes de acoplamento, foi possível obter soluções auto-duais *topológicas*, **mesmo no regime crítico** [17]. Deve-se comparar este resultado com tentativas anteriores, onde apenas um potencial de Higgs do tipo φ^2 foi considerado para encontar soluções auto-duais [26].

Após termos proposto o modelo comentado acima, estudamos mais detalhadamente o seu espectro e identificamos os graus de liberdade dinâmicos através do procedimento do Projetor Simplético (Capítulo 2), que, similarmente ao método de Dirac para sistemas vinculados [27], consiste em fazer redefinições dos objetos da teoria consistentes com o espaço de fase vinculado.

Finalmente, no Capítulo 3, utilizamos o formalismo do superespaço para obter a carga central da teoria [28]. Este resultado é dado em termos de campos componentes que possuem comportamento topológico, o que evidencia a conexão entre a carga central e a carga topológica. Seguem-se as Conclusões Gerais.

Capítulo 1

De $N = 1$-$D = 4$ para $N = 2$-$D = 3$: Uma Análise em Componentes

Neste capítulo, apresentaremos a ação no superespaço do modelo a ser tratado, seu conteúdo de campos, bem como as simetrias nela contidas. Via um procedimento de redução dimensional, adotamos a prescrição de campos independentes de uma das coordenadas espaciais, e mostrando que a álgebra de SUSY permite uma identificação entre certos graus de liberdade, obteremos um modelo de Maxwell-Chern-Simons com duas supersimetrias e acoplamento não-mínimo [29]. Analisaremos algumas de suas propriedades que levam à existência de soluções topológicas.

1.1 Conteúdo da ação em 4 dimensões. Transformações de susy

Propomos partir da seguinte ação em 4 dimensões, a qual é a mais geral possível, escrita no superespaço $N = 1$:

$$\mathcal{S}_{4D} = \int d^4x \, d^2\theta \left\{ -\frac{1}{8}\mathcal{W}^a\mathcal{W}_a + d^2\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}\mathcal{G}^2 + \frac{1}{2}m\mathcal{V}\mathcal{G} + \frac{1}{16}\bar{\Phi}e^{2h\mathcal{V}}\Phi e^{4g\mathcal{G}} + \frac{1}{16}hv^2\mathcal{V} \right] \right\}, \tag{1.1}$$

onde m é um parâmetro de massa, h e g são constantes de acoplamento e o termo com v^2 é um típico termo de Fayet-Iliopoulos [6] (o qual permite a quebra espontânea da simetria de gauge [30]). Φ é um campo de matéria escalar quiral [6],

$$\Phi = e^{(-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)} \left[\varphi(x) + \theta^a\chi_a(x) + \theta^2 S(x) \right]; \quad \bar{D}_{\dot{a}}\Phi = 0, \tag{1.2}$$

onde D_a and $\bar{D}_{\dot{a}}$ são as derivadas covariantes de supersimetria [31]

$$\begin{aligned} D_a &= \partial_a - i\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{a}} &= -\bar{\partial}_{\dot{a}} + i\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu . \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\mathcal{W}^a$ é a intensidade de campo referente ao supercampo de calibre $\mathcal{V}$, definido pela seguinte expansão-θ [32]:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= C(x) + \theta^a b_a(x) + \bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{b}^{\dot{a}}(x) + \theta^2 H(x) + \bar{\theta}^2 H^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \\ &\quad +\theta^2\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu b(x)\right) + \bar{\theta}^2\theta\left(\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{b}(x)\right) + \theta^2\bar{\theta}^2\left(\triangle(x) - \frac{1}{4}\Box C(x)\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

sendo

$$\mathcal{W}^a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D^a \mathcal{V}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^a(x) + \theta^b\left[2\Delta(x)\delta_b^a + \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^a{}_b F_{\mu\nu}(x)\right] - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\lambda^a(x) - i\theta^2\sigma^{\mu a\dot{a}}\partial_\mu\bar{\lambda}_{\dot{a}}(x) \\
&\quad -i\theta^2\bar{\theta}_{\dot{a}}\left[\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\partial_\mu\Delta(x) + \frac{1}{4}\bar{\sigma}^{\rho\dot{a}b}(\sigma^{\mu\nu})_b{}^a\partial_\rho F_{\mu\nu}(x)\right] - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\lambda^a(x),
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$\mathcal{G}$ é a intensidade de campo referente a um outro supercampo de gauge espinorial quiral Σ_a,

$$
\mathcal{G} = \frac{i}{8}\left(D^a\Sigma_a - \bar{D}_{\dot{a}}\bar{\Sigma}^{\dot{a}}\right), \tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_a &= \psi_a(x) + \theta^b\Omega_{ba}(x) + \theta^2\left[\xi_a(x) + i\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{a}}(x)\right] - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi_a(x) \\
&\quad -i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^b\partial_\mu\Omega_{ba}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\psi_a(x); \qquad \bar{D}_{\dot{a}}\Sigma_a = 0.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

As representações irredutíveis do grupo de Lorentz acomodadas no biespinor Ω_{ba} podem ser separadas da seguinte forma:

$$
\Omega_{ba}(x) = \epsilon_{ba}\rho(x) + (\sigma^{\mu\nu})_{ba}\mathcal{B}_{\mu\nu}(x), \tag{1.8}
$$

com os campos ρ e $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ complexos:

$$
\begin{aligned}
\rho(x) &= P(x) + iM(x), \\
\mathcal{B}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{4}\left[B_{\mu\nu}(x) - i\tilde{B}_{\mu\nu}(x)\right],
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

sendo

$$
\tilde{B}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}B^{\rho\lambda}(x). \tag{1.10}
$$

Assim, $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ tem natureza auto-dual:

$$
\tilde{\mathcal{B}}_{\mu\nu} = i\mathcal{B}_{\mu\nu}. \tag{1.11}
$$

$B_{\mu\nu}$ é a 2-forma do modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR)[22, 23, 24], que aparece quando se escreve a ação em componentes. Portanto, $\mathcal{G}$ é chamado de multiplete tensorial [33].

Nossa ação, portanto, inclui dois multipletes de campos de gauge, um incluindo A_μ e o outro $B_{\mu\nu}$, além do multiplete com campos de matéria. A justificativa para a forma que apresentamos será dada quando fizermos a expansão em componentes: o primeiro termo fornece o termo cinético para A_μ; o segundo, o termo cinético para $B_{\mu\nu}$; o terceiro é responsável por um termo do tipo BF (que resultará num termo de Chern-Simons em 3 dimensões); e o último representa o acoplamento com os campos de matéria. Este acoplamento dá-se com o campo A_μ da maneira usual, via $\mathcal{V}$, enquanto que o acoplamento com $B_{\mu\nu}$ é realizado através de sua intensidade de campo, $\mathcal{G}$. Notemos também que o supercampo espinorial, Σ_a, só comparece na ação através da sua intensidade de campo, $\mathcal{G}$, o qual possui a seguinte expansão em componentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\frac{1}{2}M(x) + \frac{i}{4}\theta^a\xi_a(x) - \frac{i}{4}\bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\xi}^{\dot{a}}(x) + \frac{1}{2}\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\tilde{G}_\mu(x) \\ &+\frac{1}{8}\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^2\partial_\mu\bar{\xi}^{\dot{a}}(x) - \frac{1}{8}\theta^2\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\xi^a(x) - \frac{1}{8}\theta^2\bar{\theta}^2\Box M(x), \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde $G_{\mu\nu\kappa}$ e seu dual, $\tilde{G}_\mu$, são dados por

$$\begin{aligned} G_{\rho\mu\nu} &= \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu}, \\ \tilde{G}_\mu &= \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}G^{\nu\rho\lambda}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Vê-se que $\mathcal{G}$ carrega metade dos graus de liberdade de Σ_a: ψ_a não aparece, de ρ só permanece a parte imaginária M e, da mesma forma, $B_{\mu\nu}$ manifesta-se apenas através de $\tilde{G}_\mu$, seu *fieldstrength*.

O supercampo conexão de gauge, $\mathcal{V}$, pode ser tomado no gauge de Wess-Zumino (WZ):

$$\mathcal{V} = \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}^2\triangle(x). \tag{1.14}$$

Para maior clareza, escrevemos o campo $\mathcal{V}$ com as componentes compensadoras, pois serão necessárias mais adiante. A parametrização descrita acima para $\mathcal{G}$ também exibe uma espécie de gauge de WZ para o superpotencial espinorial Σ_a, no sentido de que os graus de liberdade carregados por ele podem ser agrupados em combinações adequadas que correspondem aos campos físicos.

Agora, iremos ver que a ação exibe os termos usuais, além dos férmions parceiros supersimétricos. Inserindo as expressões para os supercampos na ação S_{4D}, e desenvolvendo apenas a componente $\theta^2\bar{\theta}^2$, de modo a fazer a integração em $d^2\theta$ e $d^2\bar{\theta}$, ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4D} = & \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{3!}G_{\mu\nu\rho}G^{\mu\nu\rho} + m\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}A_{\mu}\partial_{\nu}B_{\rho\lambda} + 2\Delta^2 + \right. \\ & + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda + \partial_{\mu}M\partial^{\mu}M + \frac{i}{4}\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi + im\bar{\Lambda}\Gamma_5\Xi - 4mM\Delta + hv^2\Delta + \\ & + e^{-2gM}\left[(\nabla_{\mu}\varphi)(\nabla^{\mu}\varphi)^* + \frac{i}{4}\bar{X}\Gamma^{\mu}\nabla_{\mu5}X - \frac{g^2}{2}\partial_{\mu}M\left(\bar{X}\Gamma_L\Gamma^{\mu}\Xi\varphi^* + \bar{\Xi}\Gamma_L\Gamma^{\mu}X\varphi\right) + \right. \\ & + \frac{g}{2}\left[\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\Gamma_R X(\nabla_{\mu}\varphi) + \bar{X}\Gamma_L\Gamma^{\mu}\Xi(\nabla_{\mu}\varphi)^*\right] - i\frac{g^2}{4}\varphi^*\varphi\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi - \frac{g^2}{4h}\bar{\Xi}\Gamma_5\Gamma^{\mu}J_{\mu}\Xi + \\ & + \varphi\varphi^*\left(2h\Delta + igh\bar{\Lambda}\Gamma_5\Xi - g^2\partial_{\mu}M\partial^{\mu}M\right) - h(\varphi\bar{\Lambda}\Gamma_R X + \varphi^*\bar{\Lambda}\Gamma_L X) + \\ & \left.\left. + \left(S - \frac{ig}{2}\bar{X}\Gamma_L\Xi + \frac{g^2}{4}\bar{\Xi}\Gamma_L\Xi\varphi\right)\left(S^* + \frac{ig}{2}\bar{X}\Gamma_R\Xi + \frac{g^2}{4}\bar{\Xi}\Gamma_R\Xi\varphi^*\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde organizamos os campos fermiônicos de maneira a formar espinores de Majorana.

como se segue:

$$\Xi(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi_a(x) \\ \bar{\xi}^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \quad X(x) \equiv \begin{pmatrix} \chi_a(x) \\ \bar{\chi}^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda(x) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_a(x) \\ \bar{\lambda}^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

tendo escolhido a seguinte representação para as matrizes-Γ em (1+3) dimensões:

$$\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{a\dot{b}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\substack{R \\ L}} = \frac{1 \pm \Gamma_5}{2}. \tag{1.17}$$

(Os espinores de 2 componentes dos quais partimos já estavam numa representação particular. Tendo atingido uma expressão envolvendo apenas espinores de 4 componentes, claramente, a ação resultante é independente da escolha de representação . Numa das seções seguintes, iremos mudar para uma representação tipo Majorana, de maneira a proceder à redução dimensional.) A corrente, J_{μ}, é dada por

$$J_{\mu} = -\frac{ih}{2}\left[\varphi^{*}(\nabla_{\mu}\varphi) - \varphi(\nabla_{\mu}\varphi)^{*}\right], \tag{1.18}$$

sendo

$$\nabla_{\mu}\varphi = \left(\partial_{\mu} + ihA_{\mu} + ig\tilde{G}_{\mu}\right)\varphi. \tag{1.19}$$

É aqui que aparece o acoplamento não-mínimo. Este é o chamado acoplamento com momento magnetico anômalo. Mais à frente, veremos que é possível acoplar com $\tilde{F}_{\mu}$, em vez de $\tilde{G}_{\mu}$.

Nos espinores, aparece também a derivada covariante usando acoplamento com Γ_5

$$\nabla_{\mu 5}X = \left(\partial_{\mu} - ihA_{\mu}\Gamma_5 - ig\tilde{G}_{\mu}\Gamma_5\right)X. \tag{1.20}$$

É interessante notar a presença do Lagrangeano de CSKR bosônico [24] entre os 3 primeiros termos da eq. (1.15). Veremos, mais adiante, como o termo misto pode ser manipulado para obtermos o termo de Chern-Simons usual em $D = 3$. Podemos, também, reconhecer, no primeiro termo entre colchetes, um termo cinético que corresponde ao acoplamento não-mínimo de matéria escalar com os campos de gauge de CSKR.

Aplicando os geradores das transformações de supersimetria sobre os supercampos, e impondo que estes sejam escalares por tais transformações, obtemos as transformações dos campos componentes, conforme listado abaixo:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \varepsilon^a \chi_a, \\
\delta\chi_a &= 2\varepsilon_a S - 2i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\varepsilon}^{\dot{a}} D_\mu \varphi, \\
\delta S &= -i\bar{\varepsilon}_{\dot{a}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} D_\mu \chi_a + 2h\bar{\lambda}_{\dot{a}}\bar{\varepsilon}^{\dot{a}}\varphi;
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{a}}\bar{\xi}^{\dot{a}} - \frac{i}{2}\varepsilon^a \xi_a, \\
\delta\xi_a &= 2\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\varepsilon}^{\dot{a}}\left(\partial_\mu M - i\tilde{G}_\mu\right), \\
\delta\tilde{G}^\mu &= \frac{i}{2}\varepsilon^b \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_b{}^a \partial_\nu \xi_a + \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{b}}\left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\partial_\nu \bar{\xi}^{\dot{a}};
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta A^\mu &= \varepsilon^a \sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\lambda}^{\dot{a}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{a}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\lambda_a, \\
\delta\lambda_a &= 2\varepsilon_a \Delta + \frac{i}{2}\sigma^{\nu}_{a\dot{b}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b}\varepsilon_b F_{\mu\nu}, \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}\varepsilon^a \sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{a}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\partial_\mu \lambda_a,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

onde o espinor de Weyl, ε^a, é o parâmetro de SUSY.

Agora, fica claro que as eqs.(1.21) e (1.22) definem, cada uma, uma representação irredutível da álgebra de supersimetria. Nas transformações de supersimetria (1.23), omitimos os campos compensadores, pois, ainda que, a rigor, δA_μ inclua, por exemplo, os campos compensadores b_a e $\bar{b}^{\dot{a}}$, sempre podemos fixar o gauge de WZ para eliminá-los, de uma maneira análoga a uma fixação de gauge não-covariante no Eletromagnetismo usual (por exemplo, o gauge de Coulomb). Também, analogamente, em termos da intensidade de campo, isto é automático, e $\delta F_{\mu\nu}$ não inclui campos compensadores. Portanto, (1.23) fecha uma outra representação irredutível, mas no nível da intensidade de campo:

$$\delta F_{\mu\nu} = \varepsilon^a \sigma_{[\nu a\dot{a}} \partial_{\mu]} \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}_{[\nu}^{\dot{a}a} \partial_{\mu]} \lambda_a. \tag{1.24}$$

Exibimos a variação de A_μ (com a ressalva de campos compensadores) porque este campo entra na ação explicitamente, e não exclusivamente através de $F_{\mu\nu}$.

Da mesma forma, no segundo conjunto de transformações , pode-se ver que apenas M, a parte real de ρ, ξ_a e $\tilde{G}_\mu$ são relevantes. Como apenas a intensidade de campo deste multiplete contribui para a Lagrangeana, isto ocorre também na ação , como vimos anteriormente.

Podemos reescrever variações dos campos em termos de espinores de 4 componentes:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \bar{\mathcal{E}}\Gamma_L X \\
\delta X &= 2\left(S - i\Gamma^\mu D_\mu \varphi^*\right)\Gamma_L \mathcal{E} + 2\left(S^* - i\Gamma^\mu D_\mu \varphi\right)\Gamma_R \mathcal{E} \\
\delta S &= -i\bar{\mathcal{E}}\Gamma^\mu \Gamma_L D_\mu X + 2h\bar{\mathcal{E}}\Gamma_R \Lambda\varphi
\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2}\bar{\mathcal{E}}\Gamma_5 \Xi \\
\delta \Xi &= 2\Gamma^\mu \left(\Gamma_5 \partial_\mu M - i\tilde{G}_\mu\right)\mathcal{E} \\
\delta \tilde{G}^\mu &= \frac{i}{2}\bar{\mathcal{E}}\Gamma^{\mu\nu}\partial_\nu \Xi
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$
\begin{aligned}
\delta F_{\mu\nu} &= \bar{\mathcal{E}}\Gamma^{[\nu}\Gamma_5\partial^{\mu]}\Lambda \\
\delta\Lambda &= 2\Delta\mathcal{E} - \frac{i}{2}\Gamma_5\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}F_{\nu\mu}\mathcal{E} \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}\bar{\mathcal{E}}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda,
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Sendo $\mathcal{E}$, o parâmetro da transformação de susy, um espinor de Majorana

$$
\mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_a \\ \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \end{pmatrix}.
$$

1.2 A redução dimensional: de $D = 4$ para $D = 3$

De agora em diante, iremos usar índices do tipo $\hat{\mu}$ para denotar índices de Lorentz em 4 dimensões e do tipo μ para índices do Lorentz em 3 dimensões.

Para realizar a redução dimensional, suporemos os campos de $D = 3$ independentes da terceira componente espacial, de maneira a eliminar esta coordenada[2]:

$$
\partial_3(\text{campos}) = 0. \tag{1.28}
$$

Por outro lado, suporemos que as componentes $\hat{\mu} = 3$ dos campos de $D = 4$ são escalares, do ponto de vista de 3 dimensões. Neste esquema, a invariância de Poincaré em $D = 4$ foi quebrada em um produto direto de uma invariância de Poincaré em $D = 3$ por um fator $U(1)$. O campo vetorial, $A_{\hat{\mu}}$, de $D = 4$ é quebrado em um vetor de $D = 3$, A_μ, e em um escalar de $D = 3$, A_3. Portanto, A_μ é da representação vetorial do grupo de Lorentz em 3 dimensões e é um singlete do fator $U(1)$, enquanto A_3 corresponde a um campo escalar independente. Os graus de liberdade relevantes *off-shell* de $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ são $B_{\mu\nu}$ e $B_{\mu 3}$, tendo em vista que é um tensor anti-simétrico. Para explicitar este fato, em 3 dimensões, renomearemos:

$$N \equiv A^3, \quad B^\mu \equiv B^{3\mu}. \tag{1.29}$$

Usaremos o dual de $B_{\mu\nu}$, o qual denotaremos por Z_μ:

$$B^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho} Z_\rho, \tag{1.30}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho 3}$. A intensidade de campo reduz-se a

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \tag{1.31}$$

e à componente

$$\tilde{G}^3 = -\partial_\mu Z^\mu. \tag{1.32}$$

Como só $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}}$ comparece na ação, vemos que apenas a divergência de Z_μ contribui. Portanto, depois da redução, os termos bosônicos escrevem-se como abaixo:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6} G_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} G^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &= -\frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \partial_\mu Z^\mu \partial_\nu Z^\nu, \\
-\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N, \\
m \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}} A^{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\nu}} B^{\hat{\rho}\hat{\lambda}} &= 2m \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu B^\rho + 2mN \partial_\mu Z^\mu, \\
(\nabla_{\hat{\mu}} \varphi)^* (\nabla^{\hat{\mu}} \varphi) &= (\nabla_\mu \varphi)^* (\nabla^\mu \varphi) - (hN - g\partial_\mu Z^\mu)^2 |\varphi|^2 .
\end{aligned}$$

Para proceder à redução dimensional no setor fermiônico, notemos que se pode sempre construir uma representação da álgebra de Clifford como um produto tensorial de matrizes-γ de ordem mais baixa. Usaremos Γ^μ para denotar as matrizes de Dirac em $D = 4$, e γ^μ para as matrizes de Dirac em $D = 3$. Um conjunto de matrizes-Γ convenientes em $D = 4$

é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\mu} &= \begin{pmatrix} \gamma^{\mu} & 0 \\ 0 & -\gamma^{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
\Gamma_{5} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_{\substack{R \\ L}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.33}
$$

Tomando $\gamma^0 \equiv \sigma_y$, $\gamma^1 \equiv i\sigma_x$, e $\gamma^2 \equiv i\sigma_z$, teremos representações de Majorana tanto em $D = 4$ como em $D = 3$. Deste modo, um espinor de Majorana em $D = 4$ é real e divide-se num dublete de espinores de Majorana reais em $D = 3$.

Vale notar, ao reduzir dimensionalmente o setor fermiônico, que os graus de liberdade se reorganizam como se segue. Os espinores de 4 componentes, na representação que escolhemos, contêm, cada um, 2 espinores de 2 componentes:

$$
X(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \omega(x) \end{pmatrix}, \quad \Xi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}. \tag{1.34}
$$

Podemos reorganizá-los nos seguintes espinores de Dirac:

$$
\begin{aligned}
X_{\pm} &= \chi \pm i\omega \\
\Xi_{\pm} &= \xi \pm i\zeta \\
\Lambda_{\pm} &= \lambda \pm i\eta.
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

Em outras palavras, em $D = 3$, os 2 férmions de Majorana correspondentes a cada espinor de $D = 4$ tornam-se completamente independentes e, além disso, podem ser acomodados em espinores de Dirac da maneira indicada na eq.(1.35). No mesmo sentido, o parâmetro infinitesimal de SUSY quebra-se em dois espinores dissociados,

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm i\delta, \tag{1.36}$$

revelando, assim, a existência de duas supersimetrias na teoria reduzida.

1.3 O Modelo N=2–D=3. Transformações de susy e identificação dos graus de liberdade

Em termos dos campos bosônicos e férmions de Dirac definidos acima, a ação em $D = 3$ lê-se como se segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{3D} \;=\; & \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu B_\lambda + 2\Delta^2 + (\partial_\mu Z^\mu)^2 + hv^2\Delta + \right.\\
& + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_- \partial\!\!\!/ \Lambda_- + \frac{i}{4}\bar{\Xi}_- \partial\!\!\!/ \Xi_- + \frac{i}{2}m(\bar{\Lambda}_+\Xi_- - \bar{\Lambda}_-\Xi_+) + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N - 4mM\Delta + \\
& + 2mN\partial_\mu Z^\mu + \partial_\mu M\partial^\mu M + e^{-2gM}\Big[(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* - (hN - g\partial_\mu Z^\mu)^2\varphi\varphi^* + \\
& + \frac{1}{4}(hN - g\partial_\mu Z^\mu)\bar{X}_+X_+ + \frac{i}{8}(\bar{X}_-\nabla\!\!\!\!/\,_-X_- + \bar{X}_+\nabla\!\!\!\!/\,_+X_+) + \\
& + \frac{g}{4}\left[\left(\bar{\Xi}_-\gamma^\mu X_- + \bar{X}_+\gamma^\mu\Xi_+\right)\nabla_\mu\varphi - i\left(\bar{\Xi}_-X_-\varphi + \bar{X}_-\Xi_-\varphi^*\right)(hN - g\partial_\mu Z^\mu)\right] + \\
& - \frac{g^2}{4}\partial_\mu M\left(\bar{X}_-\gamma^\mu\Xi_-\varphi^* + \bar{\Xi}_-\gamma^\mu X_-\varphi\right) - i\frac{g^2}{8}\varphi^*\varphi\left(\bar{\Xi}_-\partial\!\!\!/\Xi_- + \bar{\Xi}_+\partial\!\!\!/\Xi_+\right) + \\
& + \frac{g^2}{4h}\left(\frac{1}{2}(\bar{\Xi}_-\gamma^\mu J_\mu\Xi_- - \bar{\Xi}_+\gamma^\mu J_\mu\Xi_+) + \bar{\Xi}_-\Xi_- h(hN - g\partial_\mu Z^\mu)\varphi\varphi^*\right) + \\
& + \varphi\varphi^*\left(2h\Delta + \frac{igh}{2}(\bar{\Lambda}_+\Xi_- - \bar{\Xi}_-\Lambda_+) - g^2\partial_\mu M\partial^\mu M\right) - \frac{h}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) + \\
& \left. + \left|S - \frac{ig}{4}\bar{X}_-\Xi_+ + \frac{g^2}{8}\varphi\bar{\Xi}_-\Xi_+\right|^2\Big]\right\},
\end{aligned} \tag{1.37}$$

onde $\nabla\!\!\!/_\pm X_\pm \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu \pm ihA_\mu \pm ig\tilde{G}_\mu)(\chi \pm i\omega)$. Pode-se reconhecer nesta expressão uma teoria de Chern-Simons mista nos três primeiros termos[1]. A este ponto, devemos chamar atenção para o campo Z_μ, dual da 2-forma $B_{\mu\nu}$ em 3 dimensões. Seu termo cinético não é construído de um tensor de intensidade de campo, como seria com campos de calibre usuais. Sua transformação de calibre mostra que podemos eliminar a parte transversa deste campo. Um campo desta natureza não corresponde a excitações físicas: um campo de calibre 2-forma não apresenta nenhum grau de liberdade *on-shell* em $D = 3$. Adiante, quando identificarmos os campos de gauge aqui presentes, a 3-divergência de Z_μ será identificada com o campo auxiliar do outro multiplete de calibre, Δ.

Agora, calcularemos as transformações de SUSY agindo nos campos $3D$. O multiplete escalar transforma-se como abaixo:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_- X_+, \\
\delta S &= -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+ \left(\not{D} - ihN\right) X_+ + h\bar{\varepsilon}_+\Lambda_-\varphi, \\
\delta X_+ &= 2S\varepsilon_+ + 2\left(hN\varphi - i\not{D}\varphi\right)\varepsilon_-, \\
\delta X_- &= 2S^*\varepsilon_- + 2\left(hN\varphi^* - i\not{D}\varphi^*\right)\varepsilon_+;
\end{aligned} \tag{1.38}$$

o multiplete vetorial transforma-se como se segue:

$$\begin{aligned}
\delta N &= -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_+\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\Lambda_-), \\
\delta\Lambda_\pm &= (2\Delta + i\not{\partial} N)\varepsilon_\pm \pm \gamma_\mu \tilde{F}^\mu \varepsilon_\pm, \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}(\bar{\varepsilon}_+\not{\partial}\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\not{\partial}\Lambda_-),
\end{aligned} \tag{1.39}$$

[1]Na verdade, o setor bosônico caracteriza uma teoria de calibre preservando paridade que pode ser relacionada à supercondutividade a temperaturas finitas [34].

$$\delta\tilde{F}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_{+}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_{\lambda}\partial_{\nu}\Lambda_{+} - \bar{\varepsilon}_{-}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_{\lambda}\partial_{\nu}\Lambda_{-});$$

e, finalmente, as componentes do multiplete tensorial transformam-se segundo as expressões:

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_{+}\Xi_{-} - \bar{\varepsilon}_{-}\Xi_{+}), \\
\delta\Xi_{\pm} &= \pm 2(\partial\!\!\!/ M + i\partial_{\mu}Z^{\mu})\varepsilon_{\mp} - 2i\gamma_{\mu}\tilde{G}^{\mu}\varepsilon_{\mp}, \\
\delta(\partial_{\mu}Z^{\mu}) &= \frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}_{+}\partial\!\!\!/\Xi_{-} - \bar{\varepsilon}_{-}\partial\!\!\!/\Xi_{+}), \qquad (1.40) \\
\delta\tilde{G}^{\mu} &= -\frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_{-}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_{\lambda}\partial_{\nu}\Xi_{+} + \bar{\varepsilon}_{+}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_{\lambda}\partial_{\nu}\Xi_{-}).
\end{aligned}$$

Estas variações de SUSY, por um lado, mostram explicitamente que S_{3D} possui supersimetria-$N=2$, e, por outro lado, sugerem como chegar a uma Lagrangeana de Maxwell-Chern-Simons (MCS) $N=2$, mostrando que os dois multipletes de gauge satisfazem a transformações análogas.

Para tanto, devemos comparar os conjuntos de transformações (1.39) e (1.40). A tentativa natural seria iniciar identificando os dois campos vetoriais, $A_{\mu} \equiv B_{\mu}$, e, então, procurar a devida correspondência entre férmions e entre auxiliares, de modo a obter um novo modelo que apresente as duas supersimetrias que já possuímos. Concluímos que, fazendo

$$N \equiv -M, \quad \Delta \equiv -\frac{1}{2}\tilde{G}^{3} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}Z^{\mu}, \quad \Lambda_{\pm} \equiv \pm\frac{i}{2}\Xi_{\mp}, \qquad (1.41)$$

mantemos as transformações acima e, portanto, obteremos uma teoria MCS supersimétrica-$N=2$ com acoplamento não-mínimo.

Os fatores numéricos da eq.(1.1) são convenientes para o modelo com dois campos de gauge, isto é, sem a identificação (1.41). No modelo em que os identificamos, é mais conveniente reescalar os fatores numéricos deste modo:

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\sqrt{3} \quad \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\sqrt{3}$$
$$h \rightarrow \sqrt{3}h \quad g \rightarrow \sqrt{3}g \quad m \rightarrow \frac{3}{4}m. \tag{1.42}$$

(Notemos que isto não altera os termos de interação , que dependem de $h\mathcal{V}$ e $g\mathcal{G}$.) Assim, obtemos os fatores corretos para os termos cinéticos usuais. Fazendo isto, a eq.(1.1) torna-se:

$$S'_{4D} = \int d^4x\, d^2\theta \left\{ -\frac{1}{24}\mathcal{W}^a\mathcal{W}_a + d^2\bar{\theta}\left[-\frac{1}{6}\mathcal{G}^2 + \frac{1}{8}m\mathcal{V}\mathcal{G} + \frac{1}{16}\bar{\Phi}e^{2h\mathcal{V}}e^{4g\mathcal{G}}\Phi + \frac{1}{16}hv^2\mathcal{V}\right]\right\}, \tag{1.43}$$

da qual resulta o termo de MCS em $D = 3$:

$$\begin{aligned}
S_{MCS}^{N=2} \;=\; & \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + 2\Delta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N + 2mN\Delta + hv^2\Delta + \right.\\
& +\frac{1}{2}\bar{\Lambda}_-(i\partial\!\!\!/ + m)\Lambda_- + e^{2gN}\Big[(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* - (hN - 2g\Delta)^2\varphi\varphi^* + \\
& +\frac{1}{4}(hN - 2g\Delta)\, X_+X_+ + \frac{i}{8}(\bar{X}_-\nabla\!\!\!\!/\,_-X_- + \bar{X}_+\nabla\!\!\!\!/\,_+X_+) + \\
& +\frac{ig}{2}\left(\bar{\Lambda}_+\nabla\!\!\!\!/\,\varphi X_- - \bar{\Lambda}_-(\nabla\!\!\!\!/\,\varphi)^*X_+\right) - \frac{g}{2}(hN - 2g\Delta)\left(\bar{\Lambda}_+X_-\varphi + \bar{\Lambda}_-X_+\varphi^*\right) + \\
& -\frac{ig^2}{2}\partial_\mu N\left(\bar{X}_-\gamma^\mu\Lambda_+\varphi^* - \bar{\Lambda}_+\gamma^\mu X_-\varphi\right) - i\frac{g^2}{2}\varphi^*\varphi\left(\bar{\Lambda}_+\partial\!\!\!/\,\Lambda_+ + \bar{\Lambda}_-\partial\!\!\!/\,\Lambda_-\right) + \\
& +\frac{g^2}{h}\left(\frac{1}{2}(\bar{\Lambda}_+\gamma^\mu J_\mu\Lambda_+ - \bar{\Lambda}_-\gamma^\mu J_\mu\Lambda_-) + \bar{\Lambda}_+\Lambda_+h(hN - 2g\Delta)\varphi\varphi^*\right) + \\
& +\varphi\varphi^*\left(2h\Delta + 2gh\bar{\Lambda}_+\Lambda_+ - g^2\partial_\mu N\partial^\mu N\right) + \\
& \left. -\frac{h}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) + \left| S + \frac{g}{2}\bar{X}_-\Lambda_- - \frac{g^2}{2}\varphi\bar{\Lambda}_+\Lambda_-\right|^2 \Big] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

onde agora ambos os acoplamentos, mínimo e não-mínimo, ocorrem dentro do mesmo multiplete de gauge:

$$\nabla_\mu\varphi = \left(\partial_\mu + ihA_\mu + ig\tilde{F}_\mu\right)\varphi. \tag{1.45}$$

1.4 Propriedades do modelo. Limite de Bogomol'nyi e o acoplamento magnético crítico

Nas seções precedentes, obtivemos e justificamos o modelo que analisaremos agora. Resulta que a parte bosônica deste modelo possui soluções com conteúdo topológico, isto é, que satisfazem a condições de contorno não-triviais no infinito. No que se segue, mostraremos como obter tais soluções.

Consideremos a parte bosônica da Lagrangeana (1.44):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}G\partial_\mu N\partial^\mu N + e^{2gN}(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* + \frac{m}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu \\ &+ \left\{2\Delta^2 + 2mN\Delta + hv^2\Delta - e^{2gN}|\varphi|^2\left[(hN-2g\Delta)^2 - 2h\Delta\right]\right\}, \qquad (1.46)\end{aligned}$$

onde

$$G(\varphi) = 1 - g^2 2e^{2gN}|\varphi|^2. \qquad (1.47)$$

Omitimos o escalar S, pois sua equação de movimento, neste caso, reduz-se a $S = 0$, e ele se desacopla dos demais sem maiores problemas.

Vamos, agora, eliminar o campo auxiliar, Δ. Sua equação de movimento fornece

$$\Delta = -\frac{h}{4G}\left(2e^{2gN}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 4ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right). \qquad (1.48)$$

Usando esta equação para eliminar Δ na eq.(1.46), obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}G\partial_\mu N\partial^\mu N + e^{2gN}(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* + \frac{m}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu - U, \qquad (1.49)$$

onde temos o seguinte potencial tipo-Higgs:

$$U = \frac{h^2}{8G}\left(2e^{2gN}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 4ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right)^2 + h^2N^2e^{2gN}|\varphi|^2. \qquad (1.50)$$

o qual depende de 2 campos, um escalar real, N, e um escalar complexo, φ. Serão úteis o campo ϕ, definido em termos dos dois escalares como

$$\phi = \sqrt{2}e^{gN}\varphi, \tag{1.51}$$

assim como as correntes

$$\begin{aligned} H_\mu &= \frac{ih}{2}\left(\varphi^* D_\mu\varphi - \varphi D_\mu\varphi^*\right) \\ \mathcal{J}_\mu &= \frac{ih}{2}\left(\phi^*\nabla_\mu\phi - \phi\nabla_\mu\phi^*\right). \end{aligned} \tag{1.52}$$

Em termos do campo ϕ, o potencial escreve-se com abaixo:

$$U = \frac{h^2}{8G}\left(|\phi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 2g|\phi|^2N\right)^2 + h^2N^2|\phi|^2. \tag{1.53}$$

Para $g = 0$, esta expressão fornece o potencial de Higgs do modelo MCS mínimo, dado pela Lagrangeana encontrada nas refs.[15, 35], como esperado.

Assim, a equação de movimento para o campo de gauge pode ser escrita como

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + m\tilde{F}^\rho = \mathcal{J}^{\,\rho} - \frac{g}{h}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\mathcal{J}_\nu, \tag{1.54}$$

cuja componente temporal fornece uma equação correspondente à Lei de Gauss:

$$-\partial_i E_i + mB - \frac{g}{h}\epsilon_{ij}\partial_i\mathcal{J}_j + \mathcal{J}_0 = 0. \tag{1.55}$$

Podemos notar que, devido ao termo de massa, o campo de gauge agora é de curto alcance, como acontece com teorias de Chern-Simons [36]. O primeiro termo apresenta integral espacial nula devido ao comportamento de E_i no infinito, e o terceiro termo, com a ajuda do teorema de Stokes, resulta numa integral de linha tomada no infinito espacial, que se anula para configurações de energia finita. Dos termos restantes, obtemos que a carga das soluções de vórtice é relacionada ao fluxo magnético por

$$Q = m\Phi_B, \tag{1.56}$$

onde $\Phi_B \equiv -\int d^2x B$.

Podemos, seguindo o procedimento usual, calcular o funcional de energia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int d^2x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\varphi)}\partial_0\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu)}\partial_0 A_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0 N)}\partial_0 N - \mathcal{L} \right\} \\
&= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G\left(B^2+E^2\right) + \frac{1}{2}G\partial_0 N\partial_0 N + \frac{1}{2}G\partial_i N\partial_i N + e^{2gN}(D_0\varphi)(D_0\varphi)^* + \right. \\
&\left. + e^{2gN}(D_i\varphi)(D_i\varphi)^* + U \right\},
\end{aligned} \tag{1.57}$$

o qual pode ser reescrito, usando a espressão para o potencial, eq.(1.50), e completando quadrados, como sendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G\left[B \pm \frac{h}{2G}\left(2e^{2gN}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 4ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right)\right]^2 \right. \\
&\mp hB\left(e^{2gN}|\varphi|^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{m}{h}N + ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right) + \frac{1}{2}G\left(E_i \mp \partial_i N\right)^2 \\
&\pm GE_i\partial_i N + e^{2gN}\left(|D_0\varphi \mp ihN\varphi|^2 \mp 2NH_0 + |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \right. \\
&\left.\left. \mp \frac{1}{h}\epsilon_{ij}\partial_i H_j \pm hB|\varphi|^2 \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Notemos que a derivada ∇_μ não aparece explicitamente, mas contribui implicitamente através de G. Como ocorre com teorias de Chern-Simons, o termo linear em $\tilde{F}_\mu$ não contribui, pois não depende da métrica.

Procuraremos agora mostrar que existe um limite mínimo para a energia, chamado de limite de Bogomol'nyi[2].

[2] Veja a ref.[37] para um tratamento geral de Equações de Bogomol'nyi em outros modelos.

Fazendo uso das seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}e^{2gN}\epsilon_{ij}\partial_i H_j &= \frac{1}{2h}\epsilon_{ij}\partial_i \mathcal{J}_j + \frac{1}{2h}\partial_i E_i - \frac{g}{h}\epsilon_{ij}\left(\partial_i N\right)\mathcal{J}_j - 2g^2 e^{2gN}|\varphi|^2 E_i \partial_i N \\
2e^{2gN}H_0 &= \mathcal{J}_0 + hge^{2gN}|\varphi|^2 B,
\end{aligned}$$

da Lei de Gauss (1.55). integrando por partes, e deixando de lado termos de superfície, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{hv^2}{2}|\Phi_B| + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G\left[B \pm \frac{h}{2G}\left(2e^{2gN}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 4ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right)\right]^2 \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}G\left(E_i \mp \partial_i N\right)^2 + e^{2gN}\left(|D_0\varphi \mp ihN\varphi|^2 + |\left(D_1 \pm iD_2\right)\varphi|^2 \right) \right\}. \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

Fazendo os quadrados na expressão acima iguais a zero, claramente a estaremos minimizando. Assim, obtemos as seguintes equações de primeira ordem, chamadas de equações auto-duais:

$$\begin{aligned}
&B \pm \frac{h}{2G}\left(2e^{2gN}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 4ge^{2gN}|\varphi|^2 N\right) = 0 \\
&E_i \mp \partial_i N = 0 \\
&D_0\varphi \mp ihN\varphi = 0 \qquad (1.60) \\
&\left(D_1 \pm iD_2\right)\varphi = 0,
\end{aligned}$$

ou, em termos do campo ϕ.

$$\begin{aligned}
&B \pm \frac{h}{2G}\left(|\phi|^2 - v^2 + \frac{2m}{h}N + 2g|\phi|^2 N\right) = 0 \\
&A_0 \mp N = 0 \\
&\nabla_1\phi \pm i\nabla_2\phi = 0. \qquad (1.61)
\end{aligned}$$

Com estas equações , atingimos o limite inferior de energia:

$$\mathcal{E} = \frac{hv^2}{2}|\Phi_B|. \tag{1.62}$$

Agora, analisaremos um valor especial da constante de acoplamento magnética,

$$g_c = -h/m, \tag{1.63}$$

para o qual, veremos, as equações de movimento (1.54) reduzem-se a primeira ordem, de maneira análoga às do modelo de CS puro. Esta escolha dá a estatística fracionária que descreve *anyons* [38]. Em [19], este é o valor que precisa ser fixado *a priori* para obtermos uma teoria de MCS - $N = 2$ trabalhando diretamente em $D = 3$. Aqui, ao contrário, conseguimo-la via redução dimensional, até este momento sem tal fixação . Naquele caso, obtém-se apenas um potencial de Higgs simétrico do tipo ϕ^2, fornecendo apenas soluções não-topológicas [26].

Portanto, para $g = g_c$ temos

$$\mathcal{J}_\mu = m\tilde{F}_\mu, \tag{1.64}$$

cuja componente temporal é

$$m\left(1 - \frac{h^2}{m^2}|\phi|^2\right) B = h^2 A_0|\phi|^2. \tag{1.65}$$

Mostraremos, agora, que em nosso modelo, podemos escolher $g = g_c$ com um potencial que admita quebra espontânea de simetria (abandonaremos o índice c no que se segue). Devido a isto, foram encontrados vórtices topológicos [17], em contraste com tentativas anteriores.

Usando $A_0 = \pm N$, da eq.(1.61), e definindo γ por $m = \gamma h v$, temos

$$B = \pm \gamma h v N \frac{|\phi|^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2}. \tag{1.66}$$

Por outro lado, a primeira das equações auto-duais (1.61) fornece

$$B = \mp \frac{h v^2}{2} \frac{|\phi|^2 - v^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2} \gamma^2 \mp \gamma h v N. \tag{1.67}$$

Portanto, as eqs.(1.66) e (1.67) dão:

$$N = \frac{(|\phi|^2 - v^2)}{2\gamma v} \tag{1.68}$$

$$B = \mp \frac{h}{2} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)}{(\gamma^2 v^2 - |\phi|^2)}. \tag{1.69}$$

A eq. (1.68) permite eliminar N como um campo auxiliar. O resultado para o potencial (1.53) é o potencial de quebra espontânea

$$U = \frac{h^4}{8} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2}{m^2 - h^2 |\phi|^2}. \tag{1.70}$$

Notemos que para $m, h \to \infty$, com $m/h^2 \to$ constante ($g_c \to 0$ e $\gamma \to \infty$), recaímos num potencial de Higgs típico de um modelo de CS puro, como esperado.

As eqs.(1.69) e (1.66) permitem encontrar os vórtices auto-duais, mostrando que v^2 é o valor máximo de $|\phi|$, assumido no infinito. Para tal, basta adotar simetria rotacional e trabalhar com as condições de contorno. A análise deve ser feita numericamente. Isto foge ao escopo deste trabalho, mas foi conduzida de maneira completa no trabalho correlato, ref.[17], onde se mostra que o modelo possui uma fase topológica e uma fase não-topoloógica . Aqui, será suficiente saber que a teoria de fato apresenta tais soluções .

Concluindo, percebemos que a vantagem de nossa estratégia de tratamento do modelo $N = 2$-$D = 3$ consistiu em trazê-lo de $D = 4$; o ato de produzí-lo em $D = 3$, via redução dimensional, possibilitou uma maior flexibilidade sobre os parâmetros livres, dando um modelo menos vinculado no espaço dos parâmetros.

Capítulo 2

Tratamento Hamiltoniano do Modelo $N = 2$-$D = 3$

A idéia deste capítulo é utilizar o Método do Projetor Simplético (MPS) [4], um procedimento para a quantização de sistemas vinculados, para estudar o modelo de gauge porposto no capítulo anterior.

O modelo que desenvolvemos traz simultaneamente 3 potenciais vetoriais, sendo que um deles apresenta transformação de gauge não-convencional e tem dinâmica (*off-shell*) em sua componente longitudinal.

Aplicando-se o MPS, chegamos a uma leitura muito clara de quem são os graus de liberdade físicos do setor bosônico do modelo $N = 2$-$D = 3$.

2.1 O Método do Projetor Simplético

Neste procedimento, o ponto crucial é a identificação, entre as coordenadas vinculadas originais, das quantidades que representam os graus de liberdade físicos. Assim, enquanto no método de Dirac [27] o que se faz é redefinir os parênteses de Poisson, obtendo os parênteses de Dirac (os quais podem então ser promovidos a comutadores na versão quantizada), no método do projetor simplético redefinimos os próprios campos, de modo a obter aqueles que têm conteúdo físico. Claro que os parênteses de Poisson entre os campos assim redefinidos recuperam os parênteses de Dirac.

Um esboço do método é como se segue: dados um conjunto de campos e momentos canonicamente conjugados $\xi_i(x)$, e os vínculos por $\Omega^m(x)$ (assumindo aí que já se escolheu as fixações de gauge de modo a promover todos os vínculos a segunda classe), definimos o projetor simplético como sendo

$$\Lambda_j^i(x,y) = \delta_j^i \delta^2(x-y) - \varepsilon^{ik} \int d^2z\, d^2w \left[\delta_k(x)\Omega^m(z)\right] g_{mn}^{-1}(z,w) \left[\delta_j(y)\Omega^n(w)\right] , \qquad (2.1)$$

onde os índices i, j, k se referem ao espaço de fase, os índices m, n se referem aos vínculos, ε^{ik} é a matriz simplética,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

g_{ij} é a matriz de parênteses de Poisson entre os vínculos,

$$g_{mn}(x,y) = \{\Omega_m(x), \Omega_n(y)\} , \qquad (2.3)$$

e

$$\delta_k(x)\Omega^m(z) \equiv \frac{\delta\Omega^m(z)}{\delta\xi_k(x)}. \qquad (2.4)$$

A prescrição geral para obtermos as variáveis projetadas lê-se como abaixo:

$$\xi^{i*}(x) = \int d^2y \, \Lambda^i_j(x,y)\, \xi^j(y) \,. \tag{2.5}$$

Notemos que isto é equivalente ao procedimento de Dirac.

2.2 O modelo e seus vínculos

Relembramos que, na redução, obtemos do campo $A_{\hat{\mu}}$ os campos A_μ e N, e, de $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, obtemos B_μ e $B_{\mu\nu}$, cujo dual é Z_μ. Sabemos que Z_μ é um campo de gauge longitudinal, com sua transformação de calibre peculiar e sem dinâmica *on-shell*.

As transformações de gauge são:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu a, \tag{2.6}$$

$$B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu b, \tag{2.7}$$

$$Z'_\mu = Z_\mu + \epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu b^\lambda, \tag{2.8}$$

onde a, b e b^λ são funções arbitrárias: a é a função de gauge associada à simetria de gauge de $A_{\hat{\mu}}$, e a função $b_{\hat{\mu}}$, associado a $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, reduz-se como b_μ e $b \equiv b_3$. A transformação de gauge de Z_μ mostra que este campo tem invertidos os papéis da parte longitudinal e da parte transversa (a parte longitudinal é agora invariante de gauge), o que, como veremos, encontrará reflexo nos vínculos.

A Lagrangeana do setor de campos de gauge antes da identificação em $3D$ assume a forma:

$$\mathcal{L}^{\text{gauge}}_{3D} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}{}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu Z^\mu)^2 + m\epsilon^{\mu\nu\lambda}B_\mu\partial_\nu A_\lambda + mN(\partial_\mu Z^\mu). \tag{2.9}$$

Antes de analisar o modelo, devemos mencionar que os 3 graus de liberdade massivos que se propagam em 4D [39] agora, em $3D$, estão acomodados nos campos A_μ, B_μ, e N, cada um com um grau de liberdade *on-shell*; o potencial vetor Z_μ, com sua transformação de gauge não-usual (2.8) e seu termo cinético longitudinal $(\partial_\mu Z^\mu)^2$, não propaga nenhum grau de liberdade *on-shell*. De fato, como mostrado em (1.30), Z_μ é apenas o dual do campo de Kalb-Ramond em $3D$, o qual sabidamente é não-propagante.

O momento canonicamente conjugado a A_μ é:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 A_\mu\right)} = -F^{0\mu} + m\epsilon^{\nu 0\mu} B_\nu \ , \tag{2.10}$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0 & (2.11) \\ \pi^i &= -F^{0i} + m\epsilon^{0ik} B_k. & (2.12) \end{aligned}$$

Além disto,

$$P^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 B_\mu\right)} = -G^{0\mu}, \tag{2.13}$$

ou

$$\begin{aligned} P^0 &= 0 & (2.14) \\ P^i &= -G^{0i}. & (2.15) \end{aligned}$$

Para o escalar N,

$$\pi_N \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 N\right)} = \partial_0 N. \tag{2.16}$$

Finalmente,

$$\pi'^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 Z_\mu\right)} = \left(mN + \partial^\nu Z_\nu\right)\eta^{\mu 0}, \tag{2.17}$$

ou

$$\pi'^0 = (\partial^\mu Z_\mu + mN) \tag{2.18}$$

$$\pi'^i = 0. \tag{2.19}$$

Agora, estamos prontos para escrever a Hamiltoniana canônica da teoria:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi^\mu \partial_0 A_\mu + P^\mu \partial_0 B_\mu + \pi'^\mu \partial_0 Z_\mu + \pi_N \partial_0 N - \mathcal{L} = \\
&= \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{2}P_i^2 + \frac{1}{2}\pi_N^2 + \frac{1}{2}\pi_0'^2 + A_0\left(\partial_i \pi_i\right) + B_0\left(\partial_i P_i - m\epsilon_{0ij}\partial_i A_j\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + m\epsilon_{0ik}\pi_i B_k + \frac{1}{2}m^2 B_k B_k + \frac{1}{4}G_{ij}G_{ij} + \frac{1}{2}\left(\partial_i N\right)^2 + \frac{1}{2}m^2 N^2 \\
&\quad + \pi_0'\left(\partial_i Z_i - mN\right) .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

A Hamiltoniana primária é

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + v_m \Omega_m, \tag{2.21}$$

onde os vínculos primários são

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \pi_0 \approx 0 \\
\Omega_2 &= P_0 \approx 0 \\
\Omega_3 &= \pi_1' \approx 0 \\
\Omega_4 &= \pi_2' \approx 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Como se pode notar imediatamente, Ω_3 e Ω_4 são devidos às características não-usuais de Z_μ. A condição de consistência dos vínculos fornece os seguintes vínculos secundários:

$$\Omega_5 = \partial_i \pi_i \approx 0$$

$$\begin{aligned} \Omega_6 &= \partial_i P_i - m\epsilon_{0ij}\partial_i A_j \approx 0 \\ \Omega_7 &= \pi'_0 - f(t) \approx 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

para um certo $f(t)$. Como estes são todos vínculos de primeira classe escolheremos as seguintes condições de fixação de gauge:

$$\begin{aligned} \Omega_8 &= A_0 \approx 0 \\ \Omega_9 &= B_0 \approx 0 \\ \Omega_{10} &= Z_1 \approx 0 \\ \Omega_{11} &= Z_2 \approx 0 \\ \Omega_{12} &= \partial_i A_i \approx 0 \\ \Omega_{13} &= \partial_i B_i \approx 0 \\ \Omega_{14} &= Z_0 \approx 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Impusemos o "gauge de Coulomb" sobre Z_μ, em analogia direta com o procedimento usual aplicado a A_μ e B_μ. Como resultado, o conjunto de vínculos relacionados a Z_μ já indicam que suas variáveis do espaço de fase devem ser excluídas do subconjunto dinâmico.

2.3 Obtenção dos graus de liberdade físicos

Agora, devemos construir a matriz $g_{mn}(x,y) = \{\Omega_m(x), \Omega_n(y)\}$. Temos para as componentes não-nulas:

$$g_{8,1} = g_{9,2} = g_{10,3} = g_{11,4} = g_{14,7} =$$

$$-g_{1,8} = -g_{2,9} = -g_{3,10} = -g_{4,11} = -g_{7,14} = \delta^2(x-y) \tag{2.25}$$

$$g_{12,5} = g_{13,6} = -g_{5,12} = -g_{6,13} = \partial_i^x \partial_i^y \delta^2(x-y). \tag{2.26}$$

Notando que esta matriz é diagonal por blocos, a inversa é facilmente calculada. Os termos não-nulos são:

$$\begin{aligned} g^{-1}_{8,1} = g^{-1}_{9,2} = g^{-1}_{10,3} = g^{-1}_{11,4} = g^{-1}_{14,7} &= \\ -g^{-1}_{1,8} = -g^{-1}_{2,9} = -g^{-1}_{3,10} = -g^{-1}_{4,11} = -g^{-1}_{7,14} &= -\delta^2(x-y) \qquad (2.27) \\ g^{-1}_{12,5} = g^{-1}_{13,6} = -g^{-1}_{5,12} = -g^{-1}_{6,13} &= -\nabla^{-2}(x,y). \qquad (2.28) \end{aligned}$$

Iremos indexar os campos e momentos como se segue:

$$\begin{aligned} &(A_0, A_1, A_2, N, B_0, B_1, B_2, Z_0, Z_1, Z_2, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_N, P_0, P_1, P_2, \pi_0', \pi_1', \pi_2') \equiv \\ &(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}, \xi_{16}, \xi_{17}, \xi_{18}, \xi_{19}, \xi_{20}). \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular o projetor simplético (2.1), e calcular as variáveis projetadas (2.5). As variáveis não-nulas são:

$$\xi^{2*}(x) = A_1^{\perp}(x) \tag{2.29}$$

$$\xi^{3*}(x) = A_2^{\perp}(x) \tag{2.30}$$

$$\xi^{4*}(x) = N(x) \tag{2.31}$$

$$\xi^{6*}(x) = B_1^{\perp}(x) \tag{2.32}$$

$$\xi^{7*}(x) = B_2^{\perp}(x) \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} \xi^{12*}(x) &= \pi_1^{\perp}(x) + m\int d^2y\, \partial_{x_2}\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}B_1(y) + \partial_{y_2}B_2(y)\right] \\ &= \pi_1^{\perp}(x) \qquad (2.34) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{13*}(x) &= \pi_2^{\perp}(x) - m\int d^2y\partial_{x_1}\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}B_1(y)+\partial_{y_2}B_2(y)\right] \\
&= \pi_2^{\perp}(x) && (2.35) \\
\xi^{14*}(x) &= \pi_N(x) && (2.36) \\
\xi^{16*}(x) &= P_1^{\perp}(x) + m\partial_{x_1}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}A_2(y)-\partial_{y_2}A_1(y)\right] \\
&= P_1^{\perp}(x) + m\partial_{x_1}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\nabla\times A^{\perp}\right]_y && (2.37) \\
\xi^{17*}(x) &= P_2^{\perp}(x) + m\partial_{x2}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\partial_{y_1}A_2(y)-\partial_{y_2}A_1(y)\right] \\
&= P_2^{\perp}(x) + m\partial_{x_2}\int d^2y\nabla^{-2}(x,y)\left[\nabla\times A^{\perp}\right]_y . && (2.38)
\end{aligned}
$$

(Isto fornece um total de 6 g.l. no espaço de fase, visto que existe um vínculo Ω_12 relacionando A_1 a A_2, e assim por diante.)

A Hamiltoniana vinculada é obtida da Hamiltoniana primária usando os vínculos e condições de gauge, agora como igualdades fortes. Obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_v &= \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{2}P_i^2 + \frac{1}{2}\pi_N^2 + \frac{1}{2}\pi_0'^2 + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + m\epsilon_{0ik}\pi_iB_k + \frac{1}{2}m^2B_kB_k + \\
&+\frac{1}{4}G_{ij}G_{ij} + \frac{1}{2}\left(\partial_iN\right)^2 + \frac{1}{2}m^2N^2, && (2.39)
\end{aligned}
$$

ou, na notação simplética,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_v &= \frac{1}{2}\left(\xi_{12}^2+\xi_{13}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\xi_{16}^2+\xi_{17}^2\right) + \frac{1}{2}\xi_{14}^2 + \frac{1}{2}\xi_{18}^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_2\right)^2 + \\
&- \left(\partial_1\xi_3\right)\left(\partial_2\xi_2\right) + m\left(\xi_{12}\xi_7-\xi_{13}\xi_6\right) + \frac{1}{2}m^2\left(\xi_6^2+\xi_7^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_7\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_6\right)^2 + \\
&- \left(\partial_1\xi_7\right)\left(\partial_2\xi_6\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_4\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_4\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\xi_4^2. && (2.40)
\end{aligned}
$$

A Hamiltoniana física é obtida reescrevendo-a em termos das variáveis projetadas:

$$
\mathcal{H}^* = \frac{1}{2}\left(\xi_{12}^{*2}+\xi_{13}^{*2}\right) + \frac{1}{2}\left(\xi_{16}^{*2}+\xi_{17}^{*2}\right) + \frac{1}{2}\xi_{14}^{*2} + \frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_3^*\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_2^*\right)^2 +
$$

$$
-\left(\partial_1\xi_3^*\right)\left(\partial_2\xi_2^*\right)+m\left(\xi_{12}^*\xi_7^*-\xi_{13}^*\xi_6^*\right)+\frac{1}{2}m^2\left(\xi_6^{*2}+\xi_7^{*2}\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_7^*\right)^2+
$$
$$
+\frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_6^*\right)^2-\left(\partial_1\xi_7^*\right)\left(\partial_2\xi_6^*\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_1\xi_4^*\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_2\xi_4^*\right)^2+\frac{1}{2}m^2\xi_4^{*2}\,. \tag{2.41}
$$

Finalmente. as equações de movimento são obtidas diretamente das equações de Hamilton-Jacobi por meio dos parênteses de Poisson das variáveis projetadas com esta Hamiltoniana. Temos

$$
\dot{\xi}_4^* = \{\xi_4^*, \mathcal{H}^*\} = \xi_{14}^*\,, \tag{2.42}
$$

fornecendo

$$
\ddot{\xi}_4^* = \dot{\xi}_{14}^* = \{\xi_{14}^*, \mathcal{H}^*\} = -m^2\xi_4^* + \nabla^2\xi_4^*\,, \tag{2.43}
$$

ou seja

$$
\Box\xi_4^* = -m^2\xi_4^*\,. \tag{2.44}
$$

Analogamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi}_2^* &= \partial_2\partial_2\xi_2^* - \partial_1\partial_2\xi_3^* + m\xi_{17}^* \\
\ddot{\xi}_3^* &= \partial_1\partial_1\xi_3^* - \partial_1\partial_2\xi_2^* - m\xi_{16}^* \\
\ddot{\xi}_6^* &= -m^2\xi_6^* + \partial_2\partial_2\xi_6^* - \partial_1\partial_2\xi_7^* + m\xi_{13}^* \\
\ddot{\xi}_7^* &= -m^2\xi_7^* + \partial_1\partial_1\xi_7^* - \partial_1\partial_2\xi_6^* - m\xi_{12}^*.
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

Assim, temos um escalar massivo, ξ_4^*. um vetor transverso sem massa (ξ_2^*, ξ_3^*), e um vetor transverso massivo (ξ_6^*, ξ_7^*). de acordo com o que era esperado da nossa contagem de graus de liberdade no contexto da Lagrangeana 3D dada por (2.9). tendo em mente o mapeamento de $B_{\mu\nu}$ em Z_μ. Mais ainda. isto está de acordo com a distribuição de graus de liberdade que pode ser inferida do modelo original em $4D$.

Concluindo, vemos que o MPS não apresentou qualquer tipo de inconsistência quando aplicado ao peculiar modelo de gauge que estamos analisando ao longo desta tese.

Capítulo 3

Superespaço, Supercampos e o Modelo $N = 2$-$D = 3$

Neste capítulo, pretendemos rediscutir os resultados do Capítulo 1, usando o formalismo de superespaço e supercampos. Além disto, obteremos a parte bosônica da carga central do modelo, escrita em termos dos campos da teoria. O resultado será comparado com que foi obtido na Seção 1.4.

3.1 Formulação da teoria em supercampos e redução dimensional no superespaço

Conforme discutido anteriormente, nosso modelo, em $D = 4$, tem um campo de matéria, Φ, acoplado minimamente ao campo de gauge usual $A_{\hat{\mu}}$, além do acoplamento não-mínimo a um vetor de intensidade de campo, $\tilde{G}_{\hat{\mu}}$, obtido da 2-forma $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, um campo de gauge

Abeliano. Tal modelo $4D$ foi construído para fornecer um acoplamento tipo-Pauli da matéria escalar em $3D$, após a redução dimensional.

Com este objetivo, escrevemos a ação em componentes e fizemos uma redução dimensional de 3+1 para 2+1 dimensões. Obtivemos um modelo que acomoda dois potenciais vetoriais de gauge, A_μ e B_μ, assim como supersimetria $N = 2$. Observando que ambos os multipletes de gauge satisfazem à mesma álgebra $N = 2$, pudemos identificar as componentes destes dois multipletes de gauge sem perder as supersimetrias. Como resultado, exibimos um modelo de Maxwell-Chern-Simons $N = 2$ com acoplamento não mínimo em $3D$.

Do setor bosônico do modelo, observamos que se pode encontrar um espectro solitônico, topológico e não-topológico [17]. Através do método do projetor simplético, exibimos os graus de liberdade físicos do setor de gauge bosônico.

Agora, iremos suplementar esta discussão com uma formulação em supercampos. Em particular, reescreveremos a identificação dos campos de gauge em termos dos supercampos, calcularemos as cargas de SUSY em termos de campos componentes e destas obteremos a carga central, a ser comparada com a carga topológica.

No espaço-tempo quadridimensional, vamos obter expressões para os supercampos da teoria independentes de representação, primeiro agrupando os espinores de Weyl em espinores de Majorana (usando as matrizes-gama convenientes, (1.17)), e definindo:

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_a \\ \bar{\theta}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} \equiv \begin{pmatrix} W_a \\ \bar{W}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_a \\ \bar{b}^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Assim, obtemos as seguintes espressões para (1.4), (1.12) e (1.2):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= C + \bar{\Theta}B + \bar{\Theta}\Theta I - i\bar{\Theta}\Gamma_5\Theta J - \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Gamma_5\Gamma^\mu\Theta A_\mu + \\
&\quad +(\bar{\Theta}\Theta)\bar{\Theta}\left(\Lambda - \frac{i}{2}\Gamma^\mu\partial_\mu B\right) + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}\Theta)^2\left(\Delta - \frac{1}{4}\Box C\right) \qquad (3.2)\\
\mathcal{G} &= -\frac{1}{2}M - \frac{i}{4}\bar{\Theta}\Gamma_5\Xi + \frac{1}{4}\bar{\Theta}\Gamma^\mu\Gamma_5\Theta\tilde{G}_\mu + \frac{1}{8}(\bar{\Theta}\Theta)(\bar{\Theta}\Gamma^\mu\Gamma_5\partial_\mu\Xi) - \frac{1}{16}(\bar{\Theta}\Theta)^2\Box M \qquad (3.3)\\
\Phi &= \varphi + (\bar{\Theta}\Gamma_R X) - i(\bar{\Theta}\Gamma^\mu\Gamma_R\Theta)\partial_\mu\varphi - i(\bar{\Theta}\Gamma^\mu\Gamma_R\Theta)(\bar{\Theta}\Gamma_L\partial_\mu X) + \\
&\quad +(\bar{\Theta}\Gamma_L\Theta)S - \frac{1}{8}(\bar{\Theta}\Theta)^2\Box\varphi, \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

onde explicitamos os campos compensadores, tendo definido, na eq. (1.4), $H = I + iJ$.

A medida de integração assume a forma:

$$
d^2\theta d^2\bar{\theta} = (d\bar{\Theta}\Gamma_L d\Theta)(d\bar{\Theta}\Gamma_R d\Theta) = \frac{1}{2}(d\bar{\Theta}d\Theta)^2\,, \qquad (3.5)
$$

enquanto os geradores de SUSY,

$$
\begin{aligned}
Q_a &= \partial_a + i\,\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\sigma}^\mu_{\dot{a}a}\partial_\mu \\
\bar{Q}_{\dot{a}} &= -\bar{\partial}_{\dot{a}} - i\,\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

podem ser arranjados como se segue

$$
\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_a \\ \bar{Q}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \qquad (3.7)
$$

claramente satisfazendo à álgebra de SUSY $N = 1$ em $D = 4$

$$
\{\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}\} = 2\Gamma^\mu P_\mu. \qquad (3.8)
$$

Agora, temos expressões independentes de representação , adequadas para fazermos uma redução dimensional no superespaço. Para isto, da mesma forma como foi feito em componentes no Capítulo 1, iremos primeiro mudar para a representação de Majorana (1.33). Nesta representação, denotaremos os espinores definidos em (1.16) e (3.1) por

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} W \\ Y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

onde W, Y, e as letras minúsculas representam espinores de Majorana de 2 componentes em 3 dimensões [1]. Da mesma forma, definimos

$$D = \begin{pmatrix} D_\theta \\ D_\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_\theta \\ Q_\tau \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Devido ao aparecimento recorrente dos projetores quirais $\Gamma_{\substack{R \\ L}}$, será conveniente definir as coordenadas fermiônicas, em 3 dimensões, por meio dos seguintes espinores de Dirac:

$$\theta_\pm = \theta \pm i\tau. \tag{3.11}$$

Este rearranjo de graus de liberdade fermiônicos em termos de espinores de Dirac é relacionado à representação de Weyl original em $4D$: esta representação de Majorana em $3D$ difere daquela representação de Weyl por uma permutação das matrizes de Pauli [40].

Agora os geradores da SUSY em $3D$ são [2]

$$Q_\theta \;\; = \;\; -\bar{\partial}_\theta + i\gamma^\mu \theta \partial_\mu$$

[1]Notemos que o sinal menos em Γ^0 se reflete nos espinores barrados como $\bar{\Theta} = \Theta^\dagger \Gamma^0 = (\bar{\theta} \quad -\bar{\tau})$.

[2]Notemos o sinal menos relativo entre as definições dos geradores, o que é permitido pela álgebra de cada SUSY.

$$Q_\tau = \bar{\partial}_\tau - i\gamma^\mu \tau \partial_\mu \tag{3.12}$$

$$Q_\pm = Q_\theta \pm iQ_\tau. \tag{3.13}$$

satisfazendo à álgebra

$$\begin{aligned} \{Q_+, \bar{Q}_-\} &= 0 \\ \{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} &= 4\gamma^\mu P_\mu \mp 4P_3, \end{aligned} \tag{3.14}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \{Q_\theta, \bar{Q}_\theta\} &= \{Q_\tau, \bar{Q}_\tau\} = 2\gamma^\mu P_\mu \\ \{Q_\theta, \bar{Q}_\tau\} &= -\{Q_\tau, \bar{Q}_\theta\} = -2iP_3 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Isto coincide com a super-álgebra de Poincaré $N = 2$ usual em 2+1 dimensões [42, 41]. Notemos a presença da carga central, que é como se interpreta P_3 em $3D$. As derivadas covariantes de SUSY são, portanto,

$$\begin{aligned} D_\theta &= -\partial_{\bar{\theta}} - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu \\ D_\tau &= \partial_{\bar{\tau}} + i\gamma^\mu \tau \partial_\mu \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$D_\pm = -2\bar{\partial}_\pm - i\gamma^\mu \theta_\pm \partial_\mu. \tag{3.17}$$

Como explicado no Capítulo 1, iremos renomear os campos resultantes da redução dimensional usando as eqs. (1.29, 1.30, 1.31, 1.32). Com isto, os supercampos de gauge escrevem-se, em $D = 3$ (podemos usar as expansões em (θ, τ) ou em $\theta_\pm$):

$$\mathcal{V}_{3D} = C + \bar{\theta} b - \bar{\tau} d + (\bar{\theta}\theta - \bar{\tau}\tau) I + 2\bar{\theta}\tau J + i\bar{\tau}\not{A}\theta + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta + \bar{\tau}\tau) N +$$

$$
\begin{aligned}
& +(\bar{\theta}\theta-\bar{\tau}\tau)\left[\bar{\theta}\left(\lambda-\frac{i}{2}\partial\!\!\!/ b\right)-\bar{\tau}\left(\eta+\frac{i}{2}\partial\!\!\!/ d\right)\right]-\bar{\theta}\theta\bar{\tau}\tau\left(\Delta-\frac{1}{4}\Box C\right) \\
= \;& C+\frac{1}{2}(\bar{\theta}_-b_++\bar{\theta}_+b_-)+\frac{1}{2}(\bar{\theta}_-\theta_+H^*+\bar{\theta}_+\theta_-H)+\frac{1}{2}\bar{\theta}_-A\!\!\!/\theta_-+\frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_-N+ \\
& -\frac{1}{2}\bar{\theta}_+\left(\Lambda_+-\frac{i}{2}\partial\!\!\!/ b_-\right)(\bar{\theta}_+\theta_+)-\frac{1}{2}\bar{\theta}_-\left(\Lambda_--\frac{i}{2}\partial\!\!\!/ b_+\right)(\bar{\theta}_-\theta_-)+ \\
& -\frac{1}{2}(\bar{\theta}_-\theta_-)^2\left(\Delta-\frac{1}{4}\Box C\right), \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{3D} \;=\;& -\frac{1}{2}M-\frac{1}{4}\bar{\theta}\zeta-\frac{1}{4}\bar{\tau}\xi-\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\tau\tilde{G}_\mu-\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta+\bar{\tau}\tau)\tilde{G}_3 \\
& +\frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\tau}\gamma^\mu\partial_\mu\xi)+\frac{i}{8}(\bar{\tau}\tau)(\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\mu\zeta)+\frac{1}{8}\bar{\theta}\theta\bar{\tau}\tau\Box M \\
=\;& -\frac{1}{2}M-\frac{i}{8}\bar{\theta}_+\Xi_-+\frac{i}{8}\bar{\theta}_-\Xi_+-\frac{1}{4}\bar{\theta}_+\gamma^\mu\theta_+\tilde{G}_\mu-\frac{1}{4}\bar{\theta}_-\theta_-\tilde{G}_3 \\
& -\frac{1}{32}(\bar{\theta}_+\theta_-+\bar{\theta}_-\theta_+)(\bar{\theta}_+\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_+-\bar{\theta}_-\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_-)+\frac{1}{16}(\bar{\theta}_-\theta_-)^2\Box M. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Embora $\mathcal{G}_{3D}$ já seja a super-intensidade de campo, incluindo $\tilde{G}_\mu$, que será identificado com $\tilde{F}_\mu$, será útil escrever as seguintes super-intensidades de campo de $\mathcal{V}_{3D}$, herdados de 4 dimensões:

$$W = -\frac{1}{4}(\bar{D}_\theta D_\theta-\bar{D}_\tau D_\tau)D_\theta\mathcal{V} \qquad (3.20)$$

$$Y = -\frac{1}{4}(\bar{D}_\theta D_\theta-\bar{D}_\tau D_\tau)D_\tau\mathcal{V} \qquad (3.21)$$

$$W_\pm = -\frac{1}{8}(\bar{D}_+D_-+\bar{D}_-D_+)D_\pm\mathcal{V}. \qquad (3.22)$$

Sendo o campo de matéria Φ_{3D} quiral, a notação $\theta_\pm$ é quase obrigatória:

$$\Phi_{3D}=e^{(-\frac{i}{2}\bar{\theta}_-\gamma^\mu\theta_-\partial_\mu)}\left(\varphi+\frac{1}{2}\bar{\theta}_-X_++\frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_+S\right). \qquad (3.23)$$

A medida de integração reduz-se à forma:

$$\frac{1}{2}(d\bar{\Theta}d\Theta)^2=-d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau=\frac{1}{8}(d\bar{\theta}_+d\theta_-+d\bar{\theta}_-d\theta_+)^2. \qquad (3.24)$$

e usaremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_{\pm}\theta_{\mp} &= \bar{\theta}\theta - \bar{\tau}\tau \mp 2i\bar{\tau}\theta & (3.25)\\
\bar{\theta}_{\pm}\theta_{\pm} &= \bar{\theta}\theta + \bar{\tau}\tau & (3.26)\\
\int d\bar{\theta}_{\pm}d\theta_{\mp}\bar{\theta}_{\mp}\theta_{\pm} &= -16 & (3.27)\\
\int d\bar{\theta}_{\pm}d\theta_{\mp}\bar{\theta}_{\pm}\theta_{\mp} &= 0. & (3.28)
\end{aligned}$$

3.2 Identificação dos graus de liberdade em termos de supercampos

O último passo para obter nossa Lagrangeana de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é a identificação entre os multipletes de gauge, de modo que a teoria tenha um só campo de gauge. Uma abordagem em supercampos permitirá um maior entendimento do que obtivemos no capítulo anterior. É sabido que, em $D = 3$, podemos usar um supercampo linear como super-intensidade de campo para acomodar os graus de liberdade de gauge contidos em $\mathcal{V}_{3D}$ [42] (daqui em diante abandonaremos o índice $_{3D}$ por comodidade). Sabe-se também que tal supercampo linear, $\mathcal{S}$, está relacionado a $W_{\pm}$. Na nossa notação, isto se escreve:

$$\begin{aligned}
W &= D_{\theta}\mathcal{S}, & (3.29)\\
Y &= -D_{\tau}\mathcal{S}, & (3.30)
\end{aligned}$$

ou

$$W_{\pm} = -D_{\pm}\mathcal{S}. \qquad (3.31)$$

Agora, vale a pena notar que $\mathcal{G}$ é também um supercampo linear determinado pelo mesmo tipo de vínculo supersimétrico. Portanto, a expansão (θ, τ) de $\mathcal{S}$ deve ser análoga à de $\mathcal{G}$, mas contendo os graus de liberdade de $W_{\pm}$. Este fato está por trás da identificação entre componentes preservando $N = 2$ que obtivemos no capítulo anterior. Se isto for verdade, devemos mostrar que a identificação pode ser realizada diretamente no nível dos supercampos, e suas componentes devem ser as que obtivemos anteriormente.

Como vimos, depois da redução dimensional, o conteúdo de campos de $\mathcal{W}$ é dado por W e Y. Anticomutando as derivadas covariantes nas eqs.(3.20) e (3.21), podemos escrever W como derivadas:

$$W = -\frac{1}{4} D_\theta (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V} \qquad (3.32)$$

$$Y = \frac{1}{4} D_\tau (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V}, \qquad (3.33)$$

o que fornece, em componentes,

$$W = D_\theta \left\{ -N + \bar{\theta}\lambda + \bar{\theta}\theta\Delta + \bar{\tau}\left[\eta - i\bar{\not{F}}\theta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\not{\partial}\eta\right] + \bar{\tau}\tau\left[\Delta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\not{\partial}\lambda + \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\Box N\right]\right\}, \qquad (3.34)$$

e uma expressão análoga para Y, trocando D_θ por D_τ. Por termos fatorado a derivada, o termo entre colchetes é proporcional a $\mathcal{S}$, em comparação com (3.29) e deve ser comparado com $\mathcal{G}$, eq. (3.19). Calibrando o fator de proporcionalidade de modo a ter $A_\mu \equiv B_\mu$, obtemos as identificações

$$W = -2 D_\theta \mathcal{G} \qquad (3.35)$$

$$Y = 2 D_\tau \mathcal{G}. \qquad (3.36)$$

Escrevendo em termos de $\theta_\pm$, obtém-se

$$W_\pm = -2D_\pm \mathcal{G}. \tag{3.37}$$

As componentes desta relação são precisamente (1.41), o que mostra que a eq.(3.37) vem a ser a versão em supercampos $N = 2$ de (1.41), como já era esperado.

Após a redefinição (1.42), a ação $N = 2$ em $D = 3$ finalmente se escreve, agora incluindo o termo de Fayet-Iliopoulos da Seção 1.4,

$$\mathcal{S}_{3D-N=2} = \int d^3x\; d\bar{\theta}d\theta\; d\bar{\tau}d\tau \left\{ \frac{1}{4}\mathcal{G}^2 - \frac{1}{8}m\mathcal{V}\mathcal{G} - \frac{1}{16}\overline{\Phi}e^{2h\mathcal{V}}e^{4g\mathcal{G}}\Phi + \frac{1}{16}hv^2\mathcal{V} \right\}, \tag{3.38}$$

onde $\mathcal{G}$ agora se lê

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{8}(D_\theta^2 + D_\tau^2)\mathcal{V}. \tag{3.39}$$

3.3 Cargas de supersimetria e carga central

Obteremos agora as cargas conservadas de SUSY e a carga central. Primeiramente, desenvolveremos uma versão do Teorema de Noether adequada ao superespaço e ao número de derivadas presentes. Nem todos as derivadas de todos os campos comparecem, mas, por outro lado, temos derivadas segundas. A ação da teoria é da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \int d^3x\; d^2\theta\; d^2\tau\; \mathcal{L}[\Phi, \bar{\Phi}, \mathcal{V}, D_\theta^2\mathcal{V}, D_\tau^2\mathcal{V}]. \tag{3.40}$$

Notemos a presença de derivadas segundas de $\mathcal{V}$ e nenhuma outra, devido exclusivamente à contribuição de $\mathcal{G}$. Portanto, considerando-as, as equações de movimento assumem a forma

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} = 0, \qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\Phi}} = 0$$

$$D_\theta^2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_\theta^2\mathcal{V})}\right)+D_\tau^2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_\tau^2\mathcal{V})}\right)+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathcal{V}} \;=\; 0. \tag{3.41}$$

A ação é invariante por transformações de SUSY, ou seja

$$S'\equiv\int_{\Omega'}d^3x'\,d^2\theta'\,d^2\tau'\,\mathcal{L}'[\phi'(x',\theta',\tau')]=\int_\Omega d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau\,\mathcal{L}[\phi(x,\theta,\tau)], \tag{3.42}$$

onde Ω é o volume integrado no superespaço e ϕ representa todos os supercampos de maneira genérica. Por outro lado, a Lagrangeana tem sua forma invariante por transformações de SUSY dos supercampos , ou seja, $\mathcal{L}'(\phi')=\mathcal{L}(\phi')$. Disto resulta que [43]

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'}d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau\,\mathcal{L}[\phi'(x,\theta,\tau)]-\int_\Omega d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau\,\mathcal{L}[\phi(x,\theta,\tau)] &= \\ \int_\Omega d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau\,\left\{\mathcal{L}[\phi'(x,\theta,\tau)]-\mathcal{L}[\phi(x,\theta,\tau)]+D_A\left(\mathcal{L}[\phi(x,\theta,\tau)]\delta x^A\right)\right\} &= 0,\end{aligned} \tag{3.43}$$

onde o último termo resulta da variação do volume Ω, e A se refere às coordendas do superespaço $(x^0,x^1,x^2,\theta_1,\theta_2,\tau_1,\tau_2)$, sendo $D_A=(\partial_\mu,D_\theta,D_\tau)$. Portanto, ficamos com

$$\int d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau\left[\delta\mathcal{L}+D_A(\mathcal{L}\delta x^A)\right]=0, \tag{3.44}$$

Para o nosso caso, com derivadas segundas de $\mathcal{V}$ apenas,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi}\delta\Phi+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar\Phi}\delta\bar\Phi+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathcal{V}}\delta\mathcal{V}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\delta D_AD_B\mathcal{V}\\ &= -D_AD_B\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\right)\delta\mathcal{V}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\delta D_AD_B\mathcal{V}\\ &= D_A\left[-D_B\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\right)\delta\mathcal{V}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\delta(D_B\mathcal{V})\right],\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde foram usadas as equações de movimento (3.41). Finalmente, nosso super-Teorema de Noether fornece (sem derivadas primeiras),

$$\int d^3x\,d^2\theta\,d^2\tau D_A\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\delta(D_B\mathcal{V})-D_B\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(D_AD_B\mathcal{V})}\right)\delta\mathcal{V}+\mathcal{L}\delta x^A\right]=0. \tag{3.46}$$

Para obtermos a densidade de carga de SUSY, devemos tomar a componente temporal da super-corrente da expressão acima ($A = x^0$). Neste caso, apenas contribui o último termo, pois o campo $\mathcal{G}$, o único que traz derivadas de $\mathcal{V}$, só fornece derivadas espinoriais (as quais, todavia, contribuem para as componentes espinoriais da super-corrente).

As transformações de SUSY das coordenadas são dadas por [6]

$$
\begin{aligned}
\delta x^\mu &= i(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta + \bar{\delta}\gamma^\mu\tau) \\
\delta\theta &= \varepsilon, \quad \delta\tau = \delta.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Portanto,

$$
J^0 = i(\bar{\varepsilon}\gamma^0\theta + \bar{\delta}\gamma^0\tau)\mathcal{L}. \tag{3.48}
$$

Do modo como a escrevemos, a super-corrente conservada (3.46), inclui os parâmetros ε e δ da eq.(1.36), os quais devem ser fatorados deixando uma densidade de carga conservada respectiva a cada um:

$$
Q_\theta = i\gamma^0 \int d^2x\ d^2\theta\ d^2\tau\ \mathcal{L}\theta \tag{3.49}
$$

$$
Q_\tau = i\gamma^0 \int d^2x\ d^2\theta\ d^2\tau\ \mathcal{L}\tau. \tag{3.50}
$$

Agora, vamos calcular cada uma destas duas cargas em termos de campos componentes. Como usual neste tipo de cálculo, selecionamos apenas os termos de ordem $\theta^2\tau^2$, que fornecem resultado não-nulo na integração. Para integrar, usaremos também reordenamentos de Fierz:

$$
(\bar{\theta}\psi)\theta = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\psi \tag{3.51}
$$

$$
(\bar{\tau}\gamma^\mu\theta)(\bar{\theta}\psi)(\bar{\tau}\chi) = \frac{1}{4}(\bar{\tau}\tau)(\bar{\theta}\theta)\bar{\chi}\gamma^\mu\psi. \tag{3.52}
$$

Além disto, como estamos interessados em calcular apenas a parte bosônica da carga central (para comparar com o que foi obtido na Seção 1.4), será suficiente reter os termos que apresentam um férmion. Com isto, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_\theta \;=\;& i\gamma^0 \int d^2x \,\Big\{ -\frac{i}{2}N\partial\!\!\!/\,\lambda + \lambda\Delta + \frac{i}{2}\tilde{F\!\!\!/}\,\eta - \frac{m}{2}N\left(\lambda - \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\, b\right) + \frac{m}{2}(I - N/2)\lambda \\
& + \frac{m}{4}(2J - iA\!\!\!/\,)\eta - i\frac{m}{4}\tilde{F\!\!\!/}\,d + \frac{m}{2}\Delta b - i\frac{m}{4}C\partial\!\!\!/\,\lambda + \frac{hv^2}{2}\left(\lambda - \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\, b\right) \\
& - e^{(2hC+2gN)}\Big[g^2\left(2\Delta\lambda\varphi^2 + i\tilde{F\!\!\!/}\,\eta\varphi^2\right) + h^2\left(2(I - N/2)\varphi^2 b - (2J - iA\!\!\!/\,)d\varphi^2\right) \\
& - hg\left(2(I - N/2)\varphi^2\lambda + (2J - iA\!\!\!/\,)\eta\varphi^2 - i\tilde{F\!\!\!/}\,d\varphi^2 + 2\Delta\varphi^2 b\right) \\
& + h\left(\frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)b - \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)d + \frac{1}{2}(I - N/2)\left(X_+\varphi^* + X_-\varphi\right)\right. \\
& \left. + \frac{i}{4}(2J - iA\!\!\!/\,)\left(X_+\varphi^* - X_-\varphi\right) + \frac{1}{2}(\varphi^*\partial\!\!\!/\,\varphi - \varphi\partial\!\!\!/\,\varphi^*)d + \left(\lambda - \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\, b\right)\varphi^2\right) \\
& + g\left(-\frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)\lambda - \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)\eta + \frac{1}{2}\Delta\left(X_+\varphi^* + X_-\varphi\right)\right. \\
& \left. + \frac{1}{4}\tilde{F\!\!\!/}\left(X_+\varphi^* - X_-\varphi\right) + \frac{1}{2}(\varphi^*\partial\!\!\!/\,\varphi - \varphi\partial\!\!\!/\,\varphi^*)\eta - \frac{i}{2}(\partial\!\!\!/\,\lambda)\varphi^2\right) \\
& + \left(\frac{1}{4}X_+S^* + \frac{1}{4}X_-S + \frac{i}{8}X_-\partial\!\!\!/\,\varphi + \frac{i}{8}X_+\partial\!\!\!/\,\varphi^* - \frac{i}{8}\varphi\partial\!\!\!/\,X_- - \frac{i}{8}\varphi^*\partial\!\!\!/\,X_+\right)\Big]\Big\} \\
& + \text{termos que não contribuem},
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Q_\tau \;=\;& ig^0 \int d^2x \,\Big\{ -\frac{i}{2}N\partial\!\!\!/\,\eta + \eta\Delta - \frac{i}{2}\tilde{F\!\!\!/}\,\lambda - \frac{m}{2}N\left(\eta + \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\, d\right) - \frac{m}{2}(I + N/2)\eta \\
& + \frac{m}{4}(2J + iA\!\!\!/\,)\lambda - i\frac{m}{4}\tilde{F\!\!\!/}\,b - \frac{m}{2}\Delta d + i\frac{m}{4}C\partial\!\!\!/\,\eta + \frac{hv^2}{2}\left(\eta + \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\, d\right) \\
& - e^{(2hC+2gN)}\Big[g^2\left(2\Delta\eta\varphi^2 - i\tilde{F\!\!\!/}\,\lambda\varphi^2\right) + h^2\left(2(I + N/2)\varphi^2 d + (2J + iA\!\!\!/\,)b\varphi^2\right) \\
& + hg\left(2(I + N/2)\varphi^2\eta - (2J + iA\!\!\!/\,)\lambda\varphi^2 + i\tilde{F\!\!\!/}\,b\varphi^2 + 2\Delta\varphi^2 d\right) \\
& + h\left(\frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)d + \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)b - \frac{i}{2}(I + N/2)\left(X_+\varphi^* - X_-\varphi\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{1}{4}(2J+i\not{A})(X_+\varphi^*+X_-\varphi)+\frac{1}{2}(\varphi^*\not{\partial}\varphi-\varphi\not{\partial}\varphi^*)b+\left(\eta+\frac{i}{2}\not{\partial}d\right)\varphi^2\Big)
$$

$$
-g\left(-\frac{1}{2}(S\varphi^*+S^*\varphi)\eta+\frac{i}{2}(S\varphi^*-S^*\varphi)\lambda+\frac{i}{2}\Delta(X_+\varphi^*-X_-\varphi)\right.
$$

$$
\left.+\frac{i}{4}\tilde{\not{F}}(X_+\varphi^*+X_-\varphi)+\frac{1}{2}(\varphi^*\not{\partial}\varphi-\varphi\not{\partial}\varphi^*)\lambda+\frac{i}{2}(\not{\partial}\eta)\varphi^2\right) \tag{3.54}
$$

$$
+\left(-\frac{i}{4}X_+S^*+\frac{i}{4}X_-S+\frac{1}{8}X_-\not{\partial}\varphi-\frac{1}{8}X_+\not{\partial}\varphi^*-\frac{1}{8}\varphi\not{\partial}X_-+\frac{1}{8}\varphi^*\not{\partial}X_+\right)\Big]\Big\}
$$

+termos que não contribuem.

Agora vamos calcular o anticomutador entre as duas cargas, eq.(3.15). Poderíamos, para isto, calcular os momentos canonicamente conjugados, reconhecê-los nas expressões acima, e calcular diretamente usando os anticomutadores entre os campos e os momentos canonicamente conjugados. Entretanto, isto é trabalhoso, devido ao fato de que existem vínculos (principalmente entre os campos fermiônicos, que são os que queremos eliminar através do anticomutador). E portanto, deveríamos levar isto em conta, por exemplo, usando parênteses de Dirac [3].

Uma maneira mais fácil de obter o mesmo resultado seria atuando com um dos geradores de SUSY sobre o outro. Em $4D$, temos que

$$
\delta_{SUSY}=\varepsilon^a Q_a+\bar{\varepsilon}_{\dot{a}}\bar{Q}^{\dot{a}}, \tag{3.55}
$$

o que fornece em $3D$

$$
\delta_{SUSY}=\bar{\varepsilon}Q_\theta-\bar{\delta}Q_\tau. \tag{3.56}
$$

A variação devida a τ é dada por

$$
\delta_\tau=-\bar{\delta}Q_\tau. \tag{3.57}
$$

[3]Embora os parênteses de Poisson constituam os primeiros termos dos parênteses de Dirac, e eventualmente possam fornecer nosso resultado

Explicitando os índices espinoriais para maior clareza, podemos escrever portanto que

$$\delta_\tau Q_{\theta_\beta} = [-\bar{\delta}_\alpha Q_{\tau_\alpha}, Q_{\theta_\beta}] = \{Q_{\theta_\beta}, \bar{Q}_{\tau_\alpha}\}\delta_\alpha = -2iP_3\delta_\beta. \tag{3.58}$$

Para calcular o lado esquerdo acima, precisaremos das variações de SUSY dos férmions (os termos restantes se anulam ao fazermos férmions = 0). Usando as eqs.(1.38, 1.39), completando-as com as transformações dos férmions compensadores e tomando a variação devida apenas ao parâmetro referente a τ, ou seja, δ, obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta_\tau b &= -(2J - i\not{A})\delta \\
\delta_\tau d &= 2(I + N/2)\delta + i\not{\partial} C\delta \\
\delta_\tau \lambda &= i\tilde{\not{F}}\delta \\
\delta_\tau \eta &= (2\Delta + i\not{\partial} N)\delta \\
\delta_\tau X_+ &= 2iS\delta - 2i\left(hN\varphi - i\not{D}\varphi\right)\delta \\
\delta_\tau X_- &= -2iS^*\delta + 2i\left(hN\varphi^* - i\not{D}\varphi^*\right)\delta.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Usando isto e a eq.(3.53), poderemos calcular o lado esquerdo da eq.(3.58), o que fornece P_3. Obtemos que

$$\begin{aligned}
\delta_\tau Q_\theta &= i\gamma^0 \int d^2x \left\{\frac{hv^2}{2}\left(\delta_\tau\lambda - \frac{i}{2}\not{\partial}\,\delta_\tau b\right) + \frac{i}{2}\tilde{\not{F}}\delta_\tau\eta + \Delta\delta_\tau\lambda + \text{outros termos}\right\} \\
&= -\int d^2x\gamma^0 \left\{\frac{hv^2}{4}\tilde{\not{F}}\delta + \tilde{\not{F}}\Delta\delta + \text{outros termos}\right\},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

usando que $\partial_\mu A^\mu = 0$, além do gauge de Wess-Zumino. É importante notarmos que os demais termos não contribuem para o fluxo magnético, embora possam conter termos no campo elétrico.

Usando agora a eq.(1.48), podemos eliminar o auxiliar Δ. A contribuição ao fluxo magnético é dada somente pelo segundo termo da eq.(1.48),

$$\Delta = \frac{hv^2}{4} + \text{outros termos}, \tag{3.61}$$

o que fornece

$$\delta_\tau Q_\theta = -\frac{hv^2}{2}\int d^2x\tilde{F}_0\delta + \text{outros termos}. \tag{3.62}$$

Na expressão acima, usamos o comportamento no infinito para obter que a parte espacial se anula na integração, com o termo temporal fornecendo o fluxo magnético, pois $\tilde{F}_0 = B$. Finalmente, para a carga central obtemos

$$P_3 = i\frac{hv^2}{4}\Phi_B + \text{outros termos}, \tag{3.63}$$

com $\Phi_B \equiv -\int d^2xB$.

Portanto, conseguimos calcular a carga central e mostrar que ela inclui a carga topológica de nosso modelo (no sentido de que v é o valor constante de ϕ no infinito), em total acordo com resultados gerais que estabelecem uma origem topológica para as cargas centrais em modelos com configurações topológicas não-triviais.

Conclusões Gerais

Neste trabalho, obtivemos a extensão $N = 2$-supersimétrica de um modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs em 3 dimensões com acoplamento (não-mínimo) via momento magnético anômalo, como um subproduto de um modelo de Mawxell-BF N=1, D=4 e acoplamento não-mínimo entre o campo de matéria e uma 2-forma potencial de gauge Abeliano.

Com relação ao resultado de [19], onde o autor extende a SUSY na ausência de um supercampo escalar neutro, notamos que nosso procedimento fornece um modelo $N = 2$-$D = 3$ contendo tal escalar "extra", N, como conseqüência natural da redução dimensional do campo de gauge, tendo assim sua presença naturalmente justificada.

Ainda em contraste com [19], não tivemos a necessidade de impor que todos os campos presentes tivessem a mesma massa. A razão é que, em nosso caso, construímos a ação $N = 2$-$D = 3$ com multipletes de gauge e de matéria que são independentes. A degenerescência de massa ocorre apenas dentro de cada multiplete. Em [19], o modelo é formulado em termos de um único multiplete de gauge que abrange o escalar entre suas componentes. Com a nossa estratégia, abrimos a possibilidade de gerar vórtices topológicos [17], um assunto que ainda não foi esgotado.

Mostramos que o modelo proposto pode fornecer soluções de vórtices auto-duais [17, 18] nos setores topológico e não-topológico, inclusive exibindo a forma do potencial de quebra espontânea de simetria, bastando focalizar na parte bosônica do modelo e considerar o regime crítico. A análise apresentada nestes trabalhos permitirá reconsiderar tais resutados mesmo fora do regime crítico.

Em outra linha, utilizamos com eficácia o Método do Projetor Simplético para extrair o conjunto de variáveis do espaço de fase que efetivamente exibem a dinâmica do setor de gauge do modelo formulado em 3 dimensões. As equações de movimento revelam que o termo de Chern-Simons é a fonte da massa para o campo escalar, além da geração de massa topológica .

A presença de duas excitações vetoriais transversas, uma massiva e outra sem massa, e uma escalar massiva no setor de gauge é, portanto, a informação relevante confirmada como parte do nosso conhecimento do modelo, no que se refere à sua estrutura de espaço de fase.

Suplementamos a discussão com uma análise no superespaço. Conseguimos reproduzir os resultados do primeiro capítulo neste contexto, inclusive a identificação de graus de liberdade que nos fornece o modelo estudado.

Finalmente, calculamos a parte bosônica da carga central (isto é, aquela que se obtém fazendo os férmions iguais a zero na expressão completa), obtendo um valor que coincide com a carga topológica, como seria razoável esperar que acontecesse [5]. Isto foi obtido eliminando os campos auxiliares, usando a condição de gauge de Wess-Zumino, e usando as condições de contorno, as quais fornecem justamente a topologia das soluções. O próximo passo seria investigar o que trazem os termos adicionais que são gerados desta maneira.

Uma possibilidade que ainda pode ser explorada é a de se integrar numa das variáveis fermiônicas de modo a obtermos um modelo $N = 2$ que é manifestamente $N = 1$-supersimétrico em 3 dimensões. Isto pode ser de utilidade no estudo da supergravidade, mais objetivamente: na análise do acoplamento do modelo $N = 2$-$D = 3$ que estudamos ao setor da $N = 2$-supergravidade [44]. A reconsideração do estudo de vórtices em presença de um *background* de gravitação é uma questão relevante, vistos os seus intrincados aspectos analíticos e os seus aspectos físicos, como a possibilidade de geração de vórtices no próprio setor gravitacional. Esta questão nunca foi explorada em $3D$ e, em sua contrapartida 4-dimensional (estudo das cordas cósmicas), a presença de um *background* de gravitação introduz aspectos muito curiosos no estudo das configurações topológicas. A discussão deveria ser prosseguida em colaborações futuras, com vistas à obtenção dos vórtices magnéticos e das configurações topologicamente não-triviais no setor de gravitação.

Bibliografia

[1] J. Wess, B. Zumino, Nuc. Phys. **B 70**(1974)39.

[2] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories,* in *Recent Developments in Gravitation*, Cargèse 1978, Ed. M. Lévy , S. Deser, Plenum Press; L. Brink, J.H. Schwarz, J. Scherk, Nucl. Phys. **B121** (1977) 77.

[3] J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, M.A. Santos, *An Extended Abelian Chern-Simons Model and the Symplectic Projector Method*, em andamento.

[4] C. Marcio do Amaral, Nuovo Cim., **B 25** (1975) 817; C. Marcio do Amaral, P. Pitanga, Rev. Bras. Fís., **12, no 3**, (1982) 473;
P. Pitanga, K.C. Mundim, Nuovo Cim., **A 101** (1989) 345;
P. Pitanga, Nuovo Cim., **A 103** (1990) 1529;
P. Pitanga, *Sobre o Método do Projetor Simplético...*, Tese de Doutorado, CBPF, 1991.

[5] Z. Hlousek, D. Spector, Nuc. Phys. **B370**(1992) 143;
idem, Nuc. Phys. **B397** (1993) 173.

[6] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2a. ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1992.

[7] R. Haag, J.T. Lopuzański, M. Sohnius, Nuc. Phys. **B88** (1975) 257.

[8] O. Piguet, *Supersymmetry, Supercurrent, and Scale Invariance*, Notas do curso dado na UCP e no CBPF, Rio de Janeiro, 1996, CBPF-NF-072/96, UGVA-DPT 1996/08-938, `hep-th/9611003`.

[9] L.P. Colatto, Helv. Phys. Acta **67** (1994) 357.

[10] R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. **D23** (1981) 2291; J. Schonfeld, Nucl. Phus. **B185** (1981) 157;

S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 975.

[11] A. Blasi, R. Collina, Nucl.Phys. **B345** (1990) 472;

F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet, S.P. Sorella, Nucl. Phys. **B346** (1990) 313;

A. Blasi, O. Piguet, S.P. Sorella, Nucl. Phys. **B356** (1991) 154;

C. Lucchesi, O. Piguet, Nucl. Phys. **B381** (1992) 281.

[12] R. Jackiw, K. Lee, E.J. Weinberg, Phys. Rev. **D42** (1990) 3488;

R. Jackiw, E.J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2234.

[13] J. Stern, Phys. Lett. **B265** (1991) 119;

I.I. Kogan, Phys. Lett. **B262** (1991) 83.

[14] E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.

[15] C. Lee, K. Lee, H. Min, Phys. Rev. **D45** (1992) 4588.

[16] M. Torres, Phys. Rev. **D46** (1992) R2295;

T. Lee, H. Min, Phys. Rev. **D50** (1994) 7738;

M. Torres, Phys. Rev. **D51** (1995) 4533.

[17] M. S. Cunha, *Vórtices Auto-Duais do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Acoplamento Não-Mínimo*, Tese de Doutorado, CBPF, Janeiro de 1999.

[18] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 1721.

[19] P. Navrátil, Phys. Lett. **B365** (1996) 119.

[20] J. Edelstein, C. Núñez, F. Schaposnik, Phys. Lett. **B329** (1994) 39, e referências.

[21] T. Lee, H. Min, Phys. Rev. **D50** (1994) 7738.

[22] E. Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. **B72** (1974) 117.

[23] M. Kalb, P. Ramond, Phys. Rev. **D9** (1974) 2273.

[24] W.A. Moura Melo, *Monopólos Magnéticos Abelianos e Quantização da Massa Topológica em (3+1) dimensões*, Tese de Mestrado, CBPF, 1997.

[25] G.T. Horowitz, Commun. Math. Phys. **125** (1989) 417;

M. Blau, G. Thompson, Ann. Phys. **205** (1991) 130;

D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson, Phys. Rep. **C209** (1991) 129.

[26] M. Torres, Phys. Rev. **D46** (1992) R2295;

A. Antillon, J. Escalona, M. Torres, Phys. Rev. **D55** (1997) 6327.

[27] P.A.M. Dirac, Can. J. Math, **2** (1950) 129;

P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, Academic Press, New York) 1967.

[28] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Superspace Results on a Maxwell-Chern-Simons Theory with Non-Minimal Coupling*, em progresso.

[29] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 147 `hep-th/9802096`.

[30] M.F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39.

[31] O. Piguet, S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization,* Monographs Series, m 28, Springer Verlag, Berlin, 1995.

[32] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory And String Theory,* (Institute Of Physics, Ing., London) 1994.

[33] V.E.R. Lemes, A.L.M.A. Nogueira, J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 3145.

[34] N. Dorey, N.E. Mavromatos, Phys. Lett. **B 266** (1991) 163;

idem, Nucl. Phys. **B386** (1992) 614.

[35] C. Lee, K. Lee, E. Weinberg, Phys. Lett. **B243** (1990) 105.

[36] R. Jackiw, *Physics, Geometry and Topology*, ed. H.C. Lee, NATO ASI Series B; Physics vol. 238 (Plenum Press, New York, 1990).

[37] C.A.S. Almeida, H.R. Christiansen, M.S. Cunha, `hep-th/9706206`.

[38] S. Forte, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 193, e referências.

[39] W. A. Moura-Melo, N. Panza, J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 3949.

[40] M.A. de Andrade, O.M. Del Cima, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 1367.

[41] O. Aharony, A. Hanany, K. Intriligator, N. Seiberg, M.J. Strassler, *Aspects of $N = 2$ Supersymmetric Gauge Theories in Three Dimensions*, `hep-th/9703110`, RU-97-10, IASSNS-HEP-97/18.

[42] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry* (Benjamin/Cummings, Reading, Massachussets, 1983).

[43] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2a. ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1980).

[44] H.R. Christiansen, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, em progresso.

"RESULTADOS RECENTES EM TEORIAS DE GAUGE PLANARES SUPERSIMÉTRICAS"

Leon Ricardo Ururahy Manssur

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Abdalla Helayël-Neto – Presidente

Hugo Rolando Christiansen - Co-orientador

José Luiz Matheus Valle

Marco Antonio de Andrade

Sebastião Alves Dias

Marco Aurélio Cattacin Kneipp - Suplente

Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro, 02 de maio de 2000