CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Finitude em Teoria Quântica de Campos: Um Estudo Algébrico

Por

MARCELO SILVA SARANDY

Tese de Doutorado

Orientador: **Professor Olivier Piguet**

Rio de Janeiro
2001

Para minha esposa Andreia.

Agradecimentos

Ao Professor Olivier Piguet, agradeço pela sua orientação sólida, pela paciência e enorme boa vontade.

Ao Professor Silvio P. Sorella, pela sua assistência e fundamental contribuição nessa tese.

A minha esposa Andreia, pelo seu amor, companheirismo e dedicação de sempre.

A minha mãe Célia, meus irmãos Flávio e Wiliam, e a João Rodrigues Bernardo (*in memoriam*), pelo apoio que recebi durante toda a vida e pelo eterno carinho e amizade.

Aos funcionários do CBPF, pelo bom atendimento nas secretarias, biblioteca, CFC, etc.

Ao Professor José A. Helayël-Neto, pela fomação acadêmica que me proporcionou e pela sua disponibilidade em auxiliar a todo momento.

Aos amigos da UERJ Vitor, Ozemar, Marco Aurélio e Luis Oxman, pelo ótimo convívio, tanto nas horas de trabalho pesado quanto no ponto do café.

Ao colegas de sala no CBPF, Gilmar, Augusto, Alexandre, Silvana e Robson, pela agradável rotina de trabalho que compartilhamos nesses anos.

Aos demais amigos e professores do CBPF, pela prazerosa convivência.

Aos amigos da UFES Boldo, Clisthenis, Sortelano, e tantos outros, pela boa recepção na universidade todas as vezes que vou a Vitória.

Aos professores da UFES, que me incentivaram a vir para o CBPF.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Teorias quânticas de campos finitas no ultravioleta são discutidas do ponto de vista da renormalização algébrica. Primeiramente, através do estudo da cohomologia BRST, demonstramos a finitude dos modelos auto-duais de Pasti-Sorokin-Tonin (PST), bem como a ausência de anomalia de gauge. Esses modelos surgiram como uma covariantização de ações com simetria de dualidade e, apesar de não possuírem uma constante de acoplamento, contêm uma série infinita de interações agrupada em um termo não polinomial. Trabalhamos explicitamente em duas, quatro e seis dimensões, apontando um argumento para estender os resultados para dimensões superiores.

Após os modelos PST, apresentamos um critério puramente algébrico para o anulamento da função beta em teorias quânticas de campos renormalizáveis, o qual está baseado nas equações de descida que seguem da condição de consistência para contratermos invariantes. Nos casos em que estaremos interessados, estas equações permitem relacionar a ação completamente quantizada a um polinômio de campos local invariante de gauge. O anulamento da dimensão anômala desse polinômio permite estabelecer um teorema de não renormalização para a função beta β_g, assegurando que se a contribuição em 1-loop se anula, então β_g se anula em todas as ordens da teoria de perturbação. Como um subproduto, o caso especial em que β_g só recebe contribuições até 1-loop, sem correções de ordens superiores, é também entendido. Os exemplos de Chern-Simons em três dimensões acoplado a matéria fermiônica e das teorias de super Yang-Mills $N = 2$ e $N = 4$ são discutidos em detalhe.

Abstract

Ultrviolet finite quantum field theories are discussed in the framework of the algebraic renormalization. Firstly, by studying the BRST cohomology, we show the finiteness of the self-dual Pasti-Sorokin-Tonin (PST) models, as well as the absence of gauge anomaly. These models have arised as a covariantization of duality symmetric actions and, although a coupling constant is not present, they have an infinite series of interactions arranged in a nonpolinomial term. We work explicitely in two, four and six dimensions, indicating an argument for the extension of the results for higher dimensions.

After the PST models, we present an algebraic criterion for the vanishing of the beta function for renormalizable quantum field theories, which is based on the descent equations following from the invariant counterterms consistency condition. In the cases we will be interested, these equations relate the fully quantized action to a local gauge invariant field polynomial. The vanishing of the anomalous dimension of this polynomial enables us to establish a nonrenormalization theorem for the beta function β_g, stating that if the one-loop order contribution vanishes, then β_g will vanish to all orders of perturbation theory. As a by-product, the special case in which β_g is only of one-loop order, without any further corrections, is also covered. The examples of Chern-Simons in three dimensions coupled to fermionic matter and $N = 2$ and $N = 4$ super Yang-Mills theories are discussed in detail.

Índice

Introdução

Desde suas formulações iniciais [1], a teoria quântica de campos (TQC) tem se mostrado de fundamental importância em física. Com vastas aplicações, ela tem permitido predizer resultados em excelente acordo com o experimento.

Entretanto, apesar de todos os seus sucessos, TQCs sempre enfrentaram uma dificuldade crônica: o problema das divergências ultravioletas (UV) [1], que impede, a princípio, a obtenção de resultados físicos finitos da teoria, impossibilitando assim qualquer comparação com dados experimentais. A origem do problema reside no fato de que campos devem ser tratados como distribuições e frequentemente ocorrem produtos de campos em pontos coincidentes, os quais são singulares [2].

A busca de uma solução para o problema das divergências UV levou ao estabelecimento da teoria de renormalização [1, 2, 3]. Ela permite, em uma ampla quantidade de casos, a subtração das divergências (através de renormalizações de parâmetros e amplitudes de campos) e a correta definição da teoria em todas as ordens perturbativas. Entre os sucessos na aplicação do procedimento de renormalização, pode-se citar a eletrodinâmica quântica e as teorias de gauge não abelianas de Yang-Mills, as quais constituem a base do nosso entendimento das interações eletrofraca e forte.

Infelizmente nem todas as TQCs podem ser completamente tratadas com o processo de renormalização. O que pode acontecer é que, para absorver as divergências, seja necessária a introdução de novos parâmetros na teoria a cada ordem da expansão em loops. Dessa forma, para se definir a teoria em todas as ordens, seria requerida a presença de um número infinito de parâmetros, implicando na completa perda de poder preditivo da teoria. Exemplos famosos que se enquadram nesse caso são a teoria de Fermi para as interações fracas, devido a seu termo quártico de interação fermiônica, e a gravitação. No primeiro caso, o problema se resolveu com o surgimento do modelo padrão de partículas de Weinberg-Salam-Glashow [4], que substitui a interação com quatro férmions por interações renormalizáveis dos férmions com os bosons de gauge eletrofracos. No caso da gravitação o problema ainda persiste e o que ainda faz sentido, pelo menos perturbativamente, é trabalhar só até uma determinada escala de energia e falar de gravitação quântica como uma teoria de gauge efetiva. São alternativas atualmente promissoras para se produzir uma teoria de gravitação quântica bem definida em todas as escalas de energia os métodos não perturbativos de quantização canônica da relatividade geral [5] e as teorias de supercordas, que apontam para a possibilidade de uma teoria finita UV de grande unificação incluindo a gravidade [6].

De fato, modelos finitos UV sempre foram um aspecto relevante e atrativo em TQC. O requerimento de um comportamento UV mais suave motivou a construção de muitos modelos, incluindo as teorias supersimétricas de Yang-Mills (SYM), as supergravidades e as supercordas.

A finitude UV será entendida aqui como o anulamento, em todas as ordens da expansão perturbativa de loops, das funções beta da teoria. Isso significa que a dependência da escala de renormalização é dada completamente pelas dimensões anômalas dos campos, as quais são, em geral, não nulas. Elas estão relacionadas às renormalizações das amplitudes de campos e dependem da escolha de gauge.

Muitas teorias finitas UV têm sido encontradas em diferentes dimensões do espaço-tempo. Exemplos em duas dimensões são os modelos de Wess-Zumino-Witten [7] e o modelo-σ supersimétrico $N = (4,0)$ [8], os quais são conformes [9] e superconforme [10] respectivamente.

Em três dimensões, a teoria de Yang-Mills topologicamente massiva, a qual é obtida adicionando a ação de Chern-Simons ao termo de Yang-Mills, é um dos exemplos mais celebrados de uma teoria completamente[1] finita [11]-[16]. Além dela, pode-se ainda citar a teoria de Chern-Simons pura, a qual também possui função beta e dimensões anômalas dos campos nulas em todas as ordens da teoria de perturbação [17]-[21]. A correspondente função beta do coeficiente de Chern-Simons se anula também na presença de matéria [22, 23, 14]. Mais geralmente, é sabido que no caso abeliano este coeficiente está fortemente vinculado pelo teorema de Coleman-Hill [24], implicando que ele pode receber no máximo correções a 1-loop[2]. Além disso, como mostrado em [25] através de um argumento topológico, este coeficiente é quantizado.

Em espaços-tempo quadrimensionais as teorias de gauge supersimétricas certamente exibem um comportamento único, levando em alguns casos a TQCs finitas, como em SYM $N = 4$ [27]-[30]. Em SYM $N = 2$, apesar da finitude UV não ser em geral uma propriedade da teoria, sua função beta obedece a um interessante teorema de não renormalização, estabelecendo que ela recebe no máximo contribuições a 1-loop [31]-[34]. No caso de SYM $N = 1$ um conjunto de condições necessárias e suficientes para o anulamento da função beta em todas as ordens da teoria de perturbação foi estabelecido [35], possibilitando classificar as teorias SYM $N = 1$ finitas.

Exemplos de teorias finitas em dimensões mais altas são fornecidos pelos modelos BF [36, 37], os quais pertecem à classe das teorias de campos topológicas do

[1] Nesse caso as dimensões anômalas dos campos também se anulam.

[2] Recentemente o teorema de Coleman-Hill foi estendido para o caso não abeliano [26].

tipo Schwarz [38].

A finitude UV das teorias mencionadas acima foram, em geral, checadas primeiro por cálculos explícitos de loops [11, 12, 13, 18, 22, 27, 31] e posteriormente provadas, em todas as ordens da teoria de perturbação, usando um conjunto adequado de identidades de Ward caracterizando as simetrias de cada modelo. Por exemplo, no caso do modelo-σ $(4,0)$ bidimensional o uso do formalismo BRST permitiu uma demonstração independente de qualquer esquema de regularização da ausência de anomalia superconforme [10]. Demonstrações análogas foram usadas no caso dos modelos de Wess-Zumino-Witten [9] e de SYM quadridimensional $N = 4$ [29, 30].

No caso de $N = 2$, uma prova baseada em identidades de Ward da finitude UV em ordens superiores a 1-loop é dada na referência [33], a qual faz uso da relação entre a ação $N = 2$ e um polinômio de campos local invariante de gauge o qual tem dimensão anômala nula. Uma demonstração diferente é disponível também no contexto do superespaço harmônico [34].

Uma análise detalhada das propriedades quânticas do multipleto de supercorrente é a base das condições de finitude para SYM $N = 1$ [35].

O anulamento da função beta para TQCs topológicas pode ser provado, de uma maneira geral, fazendo uso de uma simetria adicional não anômala, chamada supersimetria vetorial, presente tanto nas teorias tipo Schwarz como nas teorias tipo Witten [39, 40]. A existência dessa simetria está relacionada ao fato do tensor energia-momento das teorias topológicas ser uma variação BRST pura. É importante também salientar que o traço do tensor energia-momento, cuja extensão quântica integrada é diretamente relacionada à função beta, pode ser caracterizado por um conjunto de identidades de Ward baseadas em uma formulação local da invariância de dilatação [41, 19, 14, 15, 42]. Essa propriedade foi usada com sucesso para mostrar a finitude de Chern-Simons puro [19] e Yang-Mills topologicamente massivo [14, 15]. Neste último caso, uma prova diferente foi dada em [16] usando um argumento cohomológico para uma classe generalizada de teorias de Yang-Mills.

O nosso objetivo aqui é discutir perturbativamente TQCs finitas UV do ponto de vista do formalismo algébrico BRST. Iniciaremos mostrando, conforme referência [43], a finitude dos modelos auto-duais de Pasti-Sorokin-Tonin (PST) [44, 45, 46] através de uma análise detalhada da cohomologia BRST, a qual será constatada ser trivial. Apesar de não possuírem constantes de acoplamento e assim não terem nenhuma função beta associada, esses modelos contêm uma série infinita de termos de interação (os quais são agrupados em um termo não polinomial), fazendo necessária a análise de possíveis divergências UV. A proposta PST surgiu originalmente como uma covariantização do modelo de Schwarz-Sen [47] para a Eletrodinâmica de Maxwell livre, o qual incorpora a simetria de dualidade na ação mas com o sacrifício da simetria de Lorentz manifesta. Posteriormente o mecanismo PST se popularizou como uma maneira geral de conciliar simetria de Lorentz e dualidade em teorias envolvendo campos tensoriais antissimétricos com *field strengths* auto-duais [48].

Após o estudo dos modelos PST será apresentado um critério puramente algébrico, de aplicabilidade geral, para a finitude UV [49, 30, 33]. Esse critério explora o conjunto de equações de descida seguidas da condição de consistência de Wess-Zumino para contratermos invariantes [50, 51]. O que acontece, nos casos de finitude UV os quais trataremos, é que estas equações permitem estabelecer uma correspondência *um a um* entre a ação quantizada de um dado modelo e um polinômio local nos campos pertencendo à cohomologia do operador BRST no nível mais baixo das equações de descida. Como uma consequência, pode-se estabelecer um teorema de não renormalização para a função beta se a dimensão anômala desse polinômio é nula. Esse teorema assegura que se a função beta se anula a 1-loop, ela se anulará em todas as ordens, implicando a finitude UV do modelo. Como um subproduto desse teorema, será possível também entender o caso no qual a função beta recebe contribuições até 1-loop, sem correções de ordens superiores. A idéia fundamental desse critério de finitude é que a dimensão anômala do polinômio de campos o qual a ação quantizada está relacionada é mais fácil de controlar do que a própria função beta, graças a existência de identidades de Ward adicionais como, por exemplo, a equação de movimento do ghost [21], sempre presente nas teorias tipo Yang-Mills no gauge de Landau.

A tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 nós introduzimos os modelos PST e fornecemos uma demostração de sua finitude através do estudo direto da cohomologia BRST. No capítulo 2 o critério algébrico de finitude é apresentado, incluindo a análise da ausência de correções de ordens superiores para a função beta. Exemplos de aplicação do critério são discutidos no capítulo 3. Eles incluem o caso de Chern-Simons acoplado a matéria e SYM $N = 2$ e $N = 4$ em quatro dimensões. Finalmente no último capítulo sumarizamos nossos principais resultados e apresentamos nossas conclusões e perspectivas de futuros desenvolvimentos.

Capítulo 1

A Finitude dos Modelos PST

Neste capítulo nós discutiremos a renormalização dos modelos auto-duais PST. Vamos começar com a motivação física desses modelos e então com a discussão de sua quantização em duas, quatro e seis dimensões. A ausência de anomalias, bem como a finitude UV, a menos de renormalizações não-físicas, serão mostradas através do estudo da cohomologia BRST, a qual será constatada ser trivial [43]. Um argumento para uma possível generalização em dimensões arbitrárias dos resultados obtidos será também apresentado.

1.1 A covariantização de modelos com simetria de dualidade manifesta

Dualidade é um tópico que tem se tornado cada vez mais importante em TQC, permitindo estabelecer descrições equivalentes da mesma teoria em termos de campos distintos. Isso é muito interessante na medida em que a simetria de dualidade tipicamente fornece um intercâmbio dos regimes de acoplamento forte e fraco das teorias duais, abrindo a possibilidade de analisar ambas as escalas da constante de acoplamento através de cálculos perturbativos.

Um aspecto relevante no contexto das dualidades em TQC é o estudo de campos tensoriais antissimétricos com *field strengths* auto-duais, os quais são chamados de bósons quirais (ou ainda formas quirais). Eles aparecem em um amplo cenário de sistemas físicos, principalmente relacionados a teorias de superstrings [52], M5-branas [53], modelos de supergravidade em seis [54] e dez dimensões [55] e ainda em conexão com o efeito Hall quântico fracionário [56].

Na referência [47] modelos para descrever campos de gauge antissimétricos, em dimensões pares quaisquer do espaço-tempo, com simetria de dualidade manifesta na ação foram propostos por Schwarz e Sen. Esses modelos são generalizações dos trabalhos anteriores de Zwanziger [57] para campos de Maxwell em quatro dimensões e de Floreanini e Jackiw [58] e Henneaux e Teitelboim [59], os quais construíram ações para bósons quirais em $(4p+2)$ dimensões (p inteiro). Uma propriedade comum a todas essas propostas é a ausência da invariância de Lorentz (e em geral das demais simetrias do espaço-tempo) manifesta na ação, a qual é substituída por uma invariância sob transformações modificadas dos campos.

A conciliação de simetrias do espaço-tempo com a simetria de dualidade em ações auto-duais foi conseguida com a introdução de campos auxiliares. Uma dessas formulações covariantes, proposta em [60, 61] para $(1+1)$ dimensões e generalizada para dimensões mais altas em [62], faz uso de um número infinito de campos escalares auxiliares. Em contrapartida, foi introduzida há alguns anos por Pasti, Sorokin e Tonin [44, 45, 46] uma interessante formulação covariante para descrever campos antissimétricos auto-duais, a qual introduz um único campo escalar auxiliar, mas de uma maneira não polinomial.

O mecanismo PST é implementado em dimensões pares arbitrárias, onde os modelos auto-duais são usualmente definidos. No entanto, em espaços-tempo de

Minkowski com dimensões $D = 4p$ (p inteiro), não é possível definir um *field strength* como uma $2p$-forma auto-dual. Nesses casos, a prescrição é introduzir, como em [47, 57], um campo de gauge auxiliar e substituir a propriedade de auto-dualidade por uma relação de dualidade entre os dois *field-strengths* da teoria. Em particular, esse procedimento será necessário na discussão do modelo PST em quatro dimensões.

Nas seções seguintes investigaremos o comportamento quântico ultravioleta e infravermelho dos modelos PST no contexto da renormalização algébrica [50], analisando em detalhe a questão das anomalias e a estabilidade da ação clássica sob correções radiativas. Nós forneceremos uma demonstração algébrica da ausência de anomalias de gauge explicitamente em duas, quatro e seis dimensões. Além disso, nós mostraremos a finitude dos modelos PST, a menos de renormalizações não físicas, em todas as dimensões analisadas. Como veremos, a dedução desses resultados para cada dimensão é baseada sempre no mesmo tipo de argumento e sua generalização para dimensões arbitrárias parece poder ser obtida de modo análogo.

1.2 A formulação PST em D=2

1.2.1 Os aspectos clássicos

O modelo PST clássico em D=2 é definido pela ação [45, 46]

$$\Sigma_{\text{inv}} = \int d^2x \, \frac{1}{2} \left(-F^{\mu} F_{\mu} + \frac{1}{(\partial a)^2} \left(\partial^{\mu} a \, \mathcal{F}_{\mu} \right)^2 \right) , \tag{1.2.1}$$

onde $F_{\mu} \equiv \partial_{\mu} \phi$ é o *field strength* do campo escalar ϕ, $\mathcal{F}_{\mu} \equiv (\eta_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu}) \partial^{\nu} \phi = -\epsilon_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\nu}$ e a é um campo escalar auxiliar[1].

[1]Nós trabalharemos, aqui e nas seções seguintes desse capítulo, em um espaço-tempo plano de Minkowski com métrica diag$(1, -1, ..., -1)$. O símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 ... \mu_D}$ é definido por $\epsilon^{01...D-1} = 1 = (-1)^{D-1} \epsilon_{01...D-1}$.

A ação (1.2.1) é invariante sob as seguintes transformações:

$$\delta_\alpha \phi = \alpha(x)\ B,\ \ \delta_\alpha a = \alpha(x)\ , \quad \text{com } B \equiv \frac{\mathcal{F}_\mu \partial^\mu a}{(\partial a)^2}\,; \tag{1.2.2}$$

$$\delta_\epsilon \phi = f(a),\ \ \delta_\epsilon a = 0\ , \quad \text{com } f(a) \text{ uma função arbitrária de } a\,. \tag{1.2.3}$$

Na verdade, a transformação (1.2.3) corresponde a um conjunto infinito de simetrias globais. Usando esta invariância e a equação de movimento para $\phi(x)$ nós podemos obter a condição de auto-dualidade $\mathcal{F}_\mu = 0$ [63], a qual implica que $\phi(x)$ é um escalar quiral. No entanto, como nosso resultado mostrará, a simetria (1.2.2), junto apenas com o vínculo de contagem de potências para a dimensão, é suficiente para fixar a teoria (a menos de redefinições de campos) no regime quântico bem como na aproximação clássica. Dessa forma, apesar de (1.2.3) ser importante para a obtenção da condição de auto-dualidade, nós não necessitaremos incluir essa invariância entre nossos requerimentos básicos para a quantização. A mesma observação vale para os modelos em dimensões mais altas estudados nas próximas seções.

Através da simetria local (1.2.2) nós poderíamos escolher $\partial_\mu a = \delta^0_\mu$ que, quando inserido na ação (1.2.1), reproduz o modelo não-covariante de Lorentz de Floreanini-Jackiw [58]:

$$\Sigma_{\rm FJ} = \int d^2x\, \frac{1}{2}\left(-F^\mu F_\mu + \mathcal{F}_0^2\right) = \int d^2x\, \left((\partial_1\phi)^2 - \partial_0\phi\partial_1\phi\right), \tag{1.2.4}$$

com $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $i = 0, 1$. Entretranto, manteremos a arbitrário, assim preservando a invariância explícita de Lorentz.

No sentido de quantizar a o modelo PST nós devemos primeiro considerar as possíveis configurações dos campos no vácuo. O campo auxiliar a entra na ação de uma maneira não-polinomial e, para evitar uma singularidade, a condição $\partial^\mu a \partial_\mu a \neq 0$ tem que ser imposta. Então $a(x)$ é escrito como

$$a(x) = \bar{a}(x) + a'(x), \tag{1.2.5}$$

onde $\bar{a}(x)$ é o valor esperado no vácuo de $a(x)$ e $a'(x)$ sua flutuação quântica.

Nós definimos as transformações BRST correspondendo à simetria de gauge (1.2.2) como

$$
\begin{aligned}
s\phi &= cB \\
sa' &= c \\
sc &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

onde c é o ghost de Faddeev-Popov.

Além disso temos

$$
s\Sigma_{\text{inv}} = 0 \quad , \quad s^2 = 0. \tag{1.2.7}
$$

Para implementar a fixação de gauge da simetria local (1.2.2) vamos introduzir um multiplicador de Lagrange π e um antighost $\bar{c}$. A ação de fixação de gauge é dada por

$$
\Sigma_{\text{gf}} = s \int d^2x \; \bar{c}a' = \int d^2x \, (\pi a' - \bar{c}c) \, , \tag{1.2.8}
$$

com

$$
s\bar{c} = \pi \quad , \quad s\pi = 0 \quad . \tag{1.2.9}
$$

A invariância BRST pode ser escrita de uma maneira funcional pela identidade de Slavnov-Taylor. Com esta finalidade nós adicionamos à ação um termo acoplando um campo externo ϕ^* (anticampo de Batalin-Vilkovisky [64]) à variação BRST de ϕ, a qual é não-linear e sujeita a possível renormalização. Esse termo de ação de anticampos é

$$
\Sigma_{\text{ext}} = \int d^2x \; \phi^* s\phi = \int d^2x \; \phi^* cB. \tag{1.2.10}
$$

Um ponto importante a ser notado diz respeito ao comportamento infravermelho (IV) da teoria, o qual pode ser analisado a partir dos propagadores livres, listados abaixo no espaço dos momentos[2]

$$
\begin{aligned}
\langle\phi\phi\rangle &= \left(-p^2 + \frac{\partial^\mu\bar{a}\partial^\nu\bar{a}}{(\partial\bar{a})^2}(p_\mu p_\nu - 2\epsilon_{\nu\gamma}p_\mu p^\gamma + \epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{\nu\gamma}p^\lambda p^\gamma)\right)^{-1} \quad , \\
\langle\bar{c}c\rangle &= 1 \quad , \\
\langle a'\pi\ \rangle &= 1 \quad . \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

As equações (1.2.11) foram obtidas considerando $\partial\bar{a}$ como uma constante. Essa escolha particular de $\bar{a}$ foi feita apenas para fins de exibição dos propagadores. Assim, é importante ressaltar que toda a análise que se segue é realizada utilizando $\bar{a}$ arbitrário e que, portanto, todos os nossos resultados valem para $\bar{a}$ qualquer, desde que respeitando o vínculo $\partial^\mu\bar{a}\partial_\mu\bar{a} \neq 0$.

Como nós podemos ver, o propagador $\langle\phi\phi\rangle$ não é integrável a momentos pequenos. Isto é um comportamento típico de campos escalares não massivos em espaços-tempo bidimensionais. Assim temos que regularizar o propagador mal definido em longas distâncias e, no sentido de fazer isso, introduz-se uma massa reguladora [36, 65] tal que

$$
\langle\phi\phi\rangle = \left(-p^2 + \frac{\partial^\mu\bar{a}\partial^\nu\bar{a}}{(\partial\bar{a})^2}(p_\mu p_\nu - 2\epsilon_{\nu\gamma}p_\mu p^\gamma + \epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{\nu\gamma}p^\lambda p^\gamma) + m_\phi^2\right)^{-1} \quad , \qquad (1.2.12)
$$

onde m_ϕ^2 é a massa reguladora, dando um comportamento bem definido ao propagador no limite IV.

Essa massa pode ser introduzida, formalmente mantendo a invariância BRST, através da ação de massa

$$
\Sigma_{\rm m} = s\int d^2x\ \frac{1}{2}\tau_2\phi^2 = \int d^2x\left(\frac{1}{2}(\tau_1 + m_\phi^2)\phi^2 - \tau_2\phi c B\right), \qquad (1.2.13)
$$

onde τ_1 e τ_2 são novos campos externos com as seguintes transformações BRST:

$$
s\tau_2 = \tau_1 + m_\phi^2 \quad , \quad s\tau_1 = 0. \qquad (1.2.14)
$$

[2]Usando a notação abreviada $\langle...\rangle \equiv \langle 0|T...|0\rangle_{\rm livre}$, onde T é o operador de ordenamento temporal.

Então a ação clássica total para o modelo PST em D=2,

$$\Sigma = \Sigma_{\rm inv} + \Sigma_{\rm gf} + \Sigma_{\rm ext} + \Sigma_{\rm m} \ , \tag{1.2.15}$$

é invariante sob transformações BRST, o que é expresso em termos funcionais pela identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^2x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi} + c\frac{\delta\Sigma}{\delta a'} + \pi\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + (\tau_1 + m_\phi^2)\frac{\delta\Sigma}{\delta\tau_2} \right) = 0 \ . \tag{1.2.16}$$

De (1.2.16) define-se o operador de Slavnov-Taylor linearizado como abaixo

$$\mathcal{S}_\Sigma = \int d^2x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*}\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta\phi^*} + c\frac{\delta}{\delta a'} + \pi\frac{\delta}{\delta\bar{c}} + (\tau_1 + m_\phi^2)\frac{\delta}{\delta\tau_2} \right) \ . \tag{1.2.17}$$

Para qualquer funcional γ pode-se mostrar que $\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}(\gamma) = 0$ [50]. Além disso, levando em conta a identidade de Slavnov-Taylor (1.2.16), obtem-se a nilpotência do operador de Slavnov-Taylor linearizado:

$$\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{S}_\Sigma = 0. \tag{1.2.18}$$

As dimensões UV and IV, bem como a carga de Faddeev-Popov (número de ghost) de todos os campos são exibidos na tabela 1.2.1.

	ϕ	a'	c	π	$\bar{c}$	ϕ^*	τ_1	τ_2	s
UV	0	-1	-1	3	3	2	2	2	0
IV	1	-1	-1	3	3	2	2	2	0
NG	0	0	1	0	-1	-1	0	-1	1

Tabela 1.2.1: Dimensões UV e IV e número de ghost (NG).

Antes de discutir o comportamento quântico do modelo é importante listar vínculos importantes, além da identidade Slavnov-Taylor, obedecidos pela ação clássica total (1.2.15). A condição de gauge e a equação do antighost lêem-se

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\pi} = a' \quad , \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} = -c \ . \tag{1.2.19}$$

A dependência da ação clássica total (1.2.15) com relação a a' e $\bar{a}$ é essencialmente dada através da combinação $a' + \bar{a}$, o que é expresso pelo seguinte vínculo:

$$\left(\frac{\delta}{\delta a'} - \frac{\delta}{\delta \bar{a}}\right) \Sigma = \pi. \tag{1.2.20}$$

onde o lado direito é uma quebra clássica, isto é, um termo linear nos campos quânticos o qual, dessa forma, não é renormalizado.

Além disso, importantes vínculos são dados pelas equações de movimento integradas de a' e ϕ, as quais implicam que a ação clássica total depende essencialmente das derivadas desses campos. Essas equações são dadas por

$$\int d^2x \, \frac{\delta \Sigma}{\delta a'} = \int d^2x \; \pi, \tag{1.2.21}$$

$$\int d^2x \, \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \tau_2 \frac{\delta}{\delta \phi^*}\right) \Sigma = \int d^2x \, \left(\tau_1 + m_\phi^2\right) \phi. \tag{1.2.22}$$

onde o lado direito dessas equações são também quebras clássicas.

1.2.2 Os apectos quânticos

Esta subseção é destinada a estudar a possibilidade de implementar a identidade de Slavnov-Taylor em nível quântico e a estabilidade da ação clássica sob correções radiativas. Isso implica estudar todas as possíveis anomalias e contratermos invariantes da ação total.

Primeiramente, é importante mencionar que não existe problema na extensão quântica de vínculos do tipo (1.2.19 - 1.2.22) [50].

Para mostrar que a identidade de Slavnov-Taylor pode ser implementada em nível quântico iniciaremos aplicando o principio de ação quântica [50, 66], o qual assegura que qualquer quebra possível $\Delta^{(1)}$ da identidade de Slavnov-Taylor tem a forma

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \Delta^{(1)} \cdot \Gamma = \Delta^{(1)} + \mathcal{O}(\hbar\Delta^{(1)}) \ . \tag{1.2.23}$$

onde Γ é o funcional quântico de vértice e $\Delta^{(1)}$ é um polinômio de campos integrado, local, invariante de Lorentz, de dimensão UV ≤ 2, dimensão IV ≥ 2 e número de ghost 1.

A identidade $\mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}(\Gamma) = 0$ e o fato que $\mathcal{S}_\Gamma = \mathcal{S}_\Sigma + \mathcal{O}(\hbar)$, leva à condição de consistência de Wess-Zumino para a quebra $\Delta^{(1)}$

$$\mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(1)} = 0, \tag{1.2.24}$$

a qual constitui um problema de cohomologia. A prova da ausência de anomalia consiste em mostrar que $\Delta^{(1)}$ está no setor trivial da cohomologia, isto é, $\Delta^{(1)} = \mathcal{S}_\Sigma \hat{\Delta}^{(0)}$, onde $\hat{\Delta}^{(0)}$ é um polinômio local nos campos, com número de ghost 0 e chamado de contratermo não invariante. Com efeito, sendo esse o caso, uma redefinição $\Gamma \to \Gamma + \hat{\Delta}^{(0)}$ assegura a identidade de Slavnov-Taylor, permitindo o cancelamento da anomalia ordem a ordem da teoria de perturbação.

Para caracterizar todos os possíveis contratermos invariantes $\Delta^{(0)}$, que é um problema equivalente ao de estudar as perturbações da ação clássica total [50], somos levados novamente a uma equação de cohomologia

$$\mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(0)} = 0, \tag{1.2.25}$$

onde $\Delta^{(0)}$ é um polinômio de campos integrado, local, invariante de Lorentz, de dimensão UV ≤ 2, dimension IV ≥ 2 e número de ghost 0.

Anomalias e contratermos $\Delta^{(G)}$ (onde $G = 0, 1$ denota o número de ghost) têm também que obedecer às condições

$$\frac{\delta \Delta^{(G)}}{\delta \pi} = 0 \quad , \quad \frac{\delta \Delta^{(G)}}{\delta \bar{c}} = 0 \ ,$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta a'} - \frac{\delta}{\delta \bar{a}}\right) \Delta^{(G)} = 0,$$
$$\int d^2x \; \frac{\delta \Delta^{(G)}}{\delta a'} = 0,$$
$$\int d^2x \; \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \tau_2 \frac{\delta}{\delta \phi^*}\right) \Delta^{(G)} = 0, \tag{1.2.26}$$

que seguem do requerimento dos vínculos (1.2.19 - 1.2.22) em todas as ordens da série de perturbação.

Introduzimos agora o operador de contagem, que será importante para determinar a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$:

$$\mathcal{N} = \int d^2x \sum_i \Phi_i \frac{\delta}{\delta \Phi_i}, \tag{1.2.27}$$

com Φ_i denotando cada campo da teoria e a soma em i passando sobre todos os campos. Então $\mathcal{S}_\Sigma$ decompõe-se como

$$\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_\Sigma^0 + \mathcal{S}_\Sigma^1 + \ldots \tag{1.2.28}$$

onde $\mathcal{S}_\Sigma^n$ é a contribuição para $\mathcal{S}_\Sigma$ de potência n nos campos, definida através de $[\mathcal{N}, \mathcal{S}_\Sigma^n] = n \; \mathcal{S}_\Sigma^n$. As transformações $\mathcal{S}_\Sigma^0$ são

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_\Sigma^0 a' = c \;, & \mathcal{S}_\Sigma^0 c = 0 \;, \\ \mathcal{S}_\Sigma^0 \phi = 0 \;, & \mathcal{S}_\Sigma^0 \phi^* = \left.\dfrac{\delta \Sigma}{\delta \phi}\right|_{\text{aprox. linear}} \;, \\ \mathcal{S}_\Sigma^0 \bar{c} = \pi \;, & \mathcal{S}_\Sigma^0 \pi = 0 \;, \\ \mathcal{S}_\Sigma^0 \tau_2 = \tau_1 + m_\phi^2 \;, & \mathcal{S}_\Sigma^0 \tau_1 = 0 \;, \end{array} \tag{1.2.29}$$

com ${\mathcal{S}_\Sigma^0}^2 = 0$.

De acordo com um teorema geral [50, 67, 68], a cohomologia do operador completo $\mathcal{S}_\Sigma$ é isomorfa a um subespaço da cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma^0$. Assim, primeiro analisaremos o operador $\mathcal{S}_\Sigma^0$. Estudando a dependência mais geral da cohomologia com relação aos anticampos ϕ^*, pode-se escrever

$$\Delta^{(G)} = \int d^2x \, \phi^* Z^{(G+1)} + \text{termos independentes dos anticampos} . \tag{1.2.30}$$

onde $Z^{(G+1)}$ é um polinômio de campos arbitrário, não-integrado, local, invariante de Lorentz, com dimensão UV ≤ 0, dimensão IV ≥ 0 e número de ghost $G+1$ dependendo de todos os campos exceto ϕ^*. Assim, de (1.2.24) e (1.2.25), na ordem mais baixa em n, temos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}^0_\Sigma \Delta^{(G)} = 0 \\
&= -\int d^2x\, \phi^* \mathcal{S}^0_\Sigma Z^{(G+1)} + \text{termos independentes dos anticampos,} \qquad (1.2.31)
\end{aligned}
$$

De (1.2.31) obtemos um novo (local) problema de cohomologia

$$
\mathcal{S}^0_\Sigma\; Z^{(G+1)}(x) = 0\ . \qquad (1.2.32)
$$

Observa-se em (1.2.29) a existência de vários dubletos de $\mathcal{S}^0_\Sigma$, os quais são definidos como pares de campos do tipo $(\Phi_1,\, \Phi_2 = \mathcal{S}^0_\Sigma \Phi_1)$. São eles $(\bar{c},\, \pi)$, $(\tau_2,\, \tau_1 + m^2_\phi)$, $(a',\, c)$, bem como todas as suas derivadas. Como é bem conhecido [50, 67], tais dubletos pertencem ao setor trivial da cohomologia.

Visto que c e, em particular, todas as suas derivadas estão em dubletos, não existem campos com número de ghost positivo no setor não trivial da cohomologia, que é assim vazia para $G = 0, 1$.

Vamos agora analisar os termos independentes de ϕ^*. Isto significa estudar

$$
\mathcal{S}^0_\Sigma \int d^2x\; Q^{(G)} = 0 \qquad (1.2.33)
$$

onde $Q^{(G)}$ tem dimensão UV ≤ 2, dimensão IV ≥ 2 e número de ghost $G = 1$ para anomalias e $G = 0$ para os contratermos invariantes.

Usando (1.2.33) e o lema de Poincaré algébrico [50, 51] obtem-se o conjunto de equações de descida

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}^0_\Sigma Q^{(G)} = \partial^\mu Q^{(G+1)}_\mu\ , \\
&\mathcal{S}^0_\Sigma Q^{(G+1)}_\mu = \partial^\nu Q^{(G+2)}_{[\mu\nu]}\ , \\
&\mathcal{S}^0_\Sigma Q^{(G+2)}_{[\mu\nu]} = 0
\end{aligned}
\qquad (1.2.34)
$$

Não existe solução não trivial com número de ghost $G = 1$, o que significa que a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ com $G = 1$ é vazia e o modelo é livre de anomalia.

Com relação aos possíveis contratermos invariantes ($G = 0$) obtemos que a solução não trivial mais geral para o nível mais alto das equações de descida é dada por

$$Q^{(0)} = \Omega(\phi, \bar{a}), \tag{1.2.35}$$

onde $\Omega(\phi, \bar{a})$ é um polinômio arbitrário de ϕ, com coeficientes como funções arbitrárias de $\bar{a}$, de dimensão UV ≤ 2, dimensão IV ≥ 2 e número de ghost 0.

A cohomologia do operador completo $\mathcal{S}_\Sigma$ pode ser determinada completando a solução (1.2.35) para um invariante de $\mathcal{S}_\Sigma$, impondo os vínculos (1.2.26). Então obtem-se que o contratermo mais geral pode ser, no máximo, a ação invariante (1.2.1) :

$$\int d^2x \; Q^{(0)} = \Sigma_{\rm inv}. \tag{1.2.36}$$

No entanto $\Sigma_{\rm inv}$ é trivial :

$$\Sigma_{\rm inv} = \frac{1}{2} \, \mathcal{S}_\Sigma \int d^2x \; \phi\phi^* - \Sigma_{\rm m} \; . \tag{1.2.37}$$

visto que o termo de massa $\Sigma_{\rm m}$ é trivial, de acordo com (1.2.13). Portanto a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ no setor $G = 0$ é vazia e o modelo PST em $D = 2$ é finito, a menos de possíveis renormalizações, não físicas, das amplitudes de campo, as quais correspondem à solução trivial da equação de cohomologia (1.2.25).

É importante mencionar que permanece a questão do limite $m_\phi \to 0$, visto que m_ϕ não é uma massa física e foi introduzida apenas como um *cut-off* infravermelho. A existência de funções de Green finitas no limite de massa nula é, em geral, uma questão bastante não trivial, que não trataremos aqui. Esse tipo de discussão pode ser encontrada em [68] no contexto do modelo sigma não-linear bidimensional e em [36] em conexão com o modelo BF.

1.3 A finitude do modelo D=6

1.3.1 O modelo clássico

A extensão da ação PST para dimensão D=6 é dada por [45]

$$\Sigma_{\rm inv} = \int d^6x \left(-\frac{1}{6} F^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2(\partial a)^2}\, \partial^\mu a\ \mathcal{F}_{\mu\nu\rho} \mathcal{F}^{\nu\rho\lambda} \partial_\lambda a \right), \tag{1.3.1}$$

onde $F_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\rho A_{\mu\nu} + \partial_\nu A_{\rho\mu}$ é o *field strength* do campo tensorial antissimétrico $A_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho} \equiv F_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\epsilon\delta} F^{\sigma\epsilon\delta} = -\frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\epsilon\delta} \mathcal{F}^{\sigma\epsilon\delta} \tag{1.3.2}$$

e a é um campo escalar auxiliar.

A ação (1.3.1) é invariante sob o seguinte conjunto de quatro transformações:

$$\begin{aligned}
&\delta_I A_{\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}\alpha_{\nu]} = \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu\ , \quad \delta_I a = 0\ ; \\
&\delta_{II} A_{\mu\nu} = 2\,\phi_{[\mu}\partial_{\nu]} a = \phi_\mu \partial_\nu a - \phi_\nu \partial_\mu a\ , \quad \delta_{II} a = 0\ ; \\
&\delta_{III} A_{\mu\nu} = \beta B_{\mu\nu}\,, \quad \delta_{III} a = \beta\,, \quad \text{com } B_{\mu\nu} \equiv \frac{\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\partial^\rho a}{(\partial a)^2}\,; \\
&\delta_{IV} A_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(a)\ , \quad \delta_{IV} a = 0\ , \quad \text{com } f_{\mu\nu}(a) \text{ uma função arbitrária de } a.
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Em (1.3.3) α_μ, ϕ_μ e β denotam os parâmetros infinitesimais das transformações.

Como em $D=2$ temos que requerer $\partial^\mu a \partial_\mu a \neq 0$ e então separar $a(x)$ em $\bar{a}(x)$ e $a'(x)$ de acordo com (1.2.5).

As transformações BRST, surgindo das simetrias locais (1.3.3) são dadas por

$$\begin{aligned}
&sA_{\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}\alpha_{\nu]} + 2\,\phi_{[\mu}\partial_{\nu]} a + \beta B_{\mu\nu}, \\
&sa' = \beta, \\
&s\beta = 0\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s\alpha_\mu &= \partial_\mu \alpha + \partial_\mu a\omega - \phi_\mu \beta \ , \\
s\phi_\mu &= -\partial_\mu \omega - \partial_\mu a\phi + 2\,\partial_{[\mu}\phi_{\nu]}\frac{\partial^\nu a\beta}{(\partial a)^2} - B_{\mu\nu}\frac{\beta\partial^\nu\beta}{(\partial a)^2} \ , \\
s\alpha &= -\omega\beta \ , \\
s\omega &= -\phi\beta \ , \\
s\phi &= -B_{\mu\nu}\frac{\beta\partial^\mu\beta\partial^\nu\beta}{(\partial a)^4} + 2\,\frac{\partial^\mu a}{(\partial a)^4}\partial_{[\mu}\phi_{\nu]}\beta\partial^\nu\beta + \frac{\partial^\mu a}{(\partial a)^2}\partial_\mu\phi\beta.
\end{aligned}
\tag{1.3.4}
$$

onde α_μ, ϕ_μ e β são agora ghosts anticomutantes com número de ghost 1. Os campos α, ω e ϕ são ghosts comutantes com número de ghost 2, os quais foram introduzidos para fixar os graus de liberdade residuais vindo das simetrias redutíveis (as duas primeiras simetrias do conjunto (1.3.3)). De fato, três modos zeros surgem de (1.3.3): $\alpha_\mu = \partial_\mu X$; $\phi_\mu = \partial_\mu a Y$; $\alpha_\mu = \partial_\mu a Z$, $\phi_\mu = -\partial_\mu Z$.

Temos que (1.3.1) é invariante sob transformações BRST, as quais são nilpotentes

$$
s\Sigma_{\text{inv}} = 0 \ \ , \ \ s^2 = 0. \tag{1.3.5}
$$

Seguindo a prescrição de Batalin-Vilkovisky [64] para teorias com simetrias redutíveis implementamos a ação de fixação de gauge

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\text{gf}} = s\int d^6x \Big(&\bar{\alpha}^\mu\partial^\nu A_{\mu\nu} + \bar{\alpha}^\mu\partial_\mu\bar{c} + \bar{\alpha}\partial^\mu\alpha_\mu + \bar{\phi}\partial^\mu\phi_\mu + \bar{\beta}a' + \\
&+ \sum_{n\in Z}\left(x_n\,\bar{\phi}^\mu A_{\mu\nu} + y_n\,\bar{c}'\bar{\phi}_\nu + z_n\,\bar{\phi}'\phi_\nu\right)\frac{\partial^\nu a}{(\partial a)^{2n}}\Big) ,
\end{aligned}
\tag{1.3.6}
$$

onde introduzimos os antighosts $\bar{\alpha}^\mu$, $\bar{\phi}^\mu$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\phi}'$, $\bar{\phi}$ e $\bar{\beta}$, os multiplicadores de Lagrange π^μ, ρ^μ, π, ρ', ρ e b e pares extras de campos $(\bar{c},\lambda)$ and $(\bar{c}',\lambda')$ transformando-se como

$$
s\bar{C} = \Pi \ , \quad s\Pi = 0 \ , \tag{1.3.7}
$$

com $\bar{C} = (\bar{\alpha}^\mu,\, \bar{\phi}^\mu,\, \bar{\alpha},\, \bar{\phi}',\, \bar{\phi},\, \bar{\beta},\, \bar{c},\, \bar{c}')$ e $\Pi = (\pi^\mu,\, \rho^\mu,\, \pi,\, \rho',\, \rho,\, b,\, \lambda,\, \lambda')$.

O somatório na segunda linha de (1.3.6) foi introduzido devido a fixações de gauge não lineares adotadas. A presença de infinitos parâmetros x_n, y_n e z_n não é nociva à teoria, já que são parâmetros de gauge, sendo assim não físicos [50].

Diferentemente do caso $D = 2$ não existe problema no limite IV porque todos os propagadores são integráveis em pequenos momentos nos modelos PST em $D > 2$, não sendo assim necessário introduzir nenhuma massa reguladora. As dimensões UV, as quais são então iguais às dimensões IV, e números de ghost de todos os campos introduzidos até aqui são mostrados na tabela 1.3.1 e na tabela 1.3.2.

	$A_{\mu\nu}$	a'	α_μ	ϕ_μ	β	α	ω	ϕ	s
Dim	2	-1	1	2	-1	0	1	2	0
NG	0	0	1	1	1	2	2	2	1

Tabela 1.3.1: Dimensão (Dim) e número de ghost (NG).

	$\bar{\alpha}^\mu$	π^μ	$\bar{\phi}^\mu$	ρ^μ	$\bar{\alpha}$	π	$\bar{\phi}'$	ρ'	$\bar{\phi}$	ρ	$\bar{\beta}$	b	$\bar{c}$	λ	$\bar{c}'$	λ'
Dim	3	3	4	4	4	4	4	4	3	3	7	7	2	2	2	2
NG	-1	0	-1	0	-2	-1	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	1	0	1

Tabela 1.3.2: Dimensão (Dim) e número de ghost (NG).

Para obter a identidade de Slavnov-Taylor introduzimos a ação de campos externos

$$\Sigma_{\text{ext}} = \int d^6x \left(\frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} s A^{\mu\nu} + \alpha^*_\mu s \alpha^\mu + \phi^*_\mu s \phi^\mu + \alpha^* s \alpha + \omega^* s \omega + \phi^* s \phi \right), \quad (1.3.8)$$

onde $A^*_{\mu\nu}$, α^*_μ, ϕ^*_μ, α^*, ω^* e ϕ^* são os anticampos, com dimensões UV e números de ghost dados na tabela 1.3.3.

	$A^*_{\mu\nu}$	α^*_μ	ϕ^*_μ	α^*	ω^*	ϕ^*
Dim	4	5	4	6	5	4
NG	-1	-2	-2	-3	-3	-3

Tabela 1.3.3: Dimensão (Dim) e número de ghost (NG).

Então a ação total é

$$\Sigma = \Sigma_{\text{inv}} + \Sigma_{\text{gf}} + \Sigma_{\text{ext}} \quad (1.3.9)$$

e a identidade de Slavnov-Taylor é escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^6x \bigg(& \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_{\mu\nu}}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^*_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega} + \\ & + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi} + \beta\frac{\delta\Sigma}{\delta a'} + \pi^\mu\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\alpha}^\mu} + \rho^\mu\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}^\mu} + \pi\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\alpha}} + \rho'\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}'} + \rho\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}} + \\ & + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\beta}} + \lambda\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + \lambda'\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}'}\bigg) = 0. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Da identidade de Slavnov-Taylor obtemos o operador nilpotente de Slavnov-Taylor linearizado

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\Sigma = \int d^6x \bigg(& \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta A^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta A^*_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^*_\mu}\frac{\delta}{\delta\alpha^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^\mu}\frac{\delta}{\delta\alpha^*_\mu} + \\ & + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*_\mu}\frac{\delta}{\delta\phi^\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^\mu}\frac{\delta}{\delta\phi^*_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^*}\frac{\delta}{\delta\alpha} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha}\frac{\delta}{\delta\alpha^*} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega^*}\frac{\delta}{\delta\omega} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta}{\delta\omega^*} + \\ & + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^*}\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta\phi^*} + \beta\frac{\delta}{\delta a'} + \pi^\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\alpha}^\mu} + \rho^\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}^\mu} + \pi\frac{\delta}{\delta\bar{\alpha}} + \rho'\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}'} + \\ & + \rho\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}} + b\frac{\delta}{\delta\bar{\beta}} + \lambda\frac{\delta}{\delta\bar{c}} + \lambda'\frac{\delta}{\delta\bar{c}'}\bigg). \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

A ação clássica total (1.3.9) obedece a vários vínculos que podem ser estendidos ao nível quântico. Vamos estabelecer alguns deles, os quais desempenharão um papel especial. Primeiramente, vamos estabelecer a equação de movimento integrada do ghost α^μ e a equação de movimento não integrada do ghost α, as quais são dadas por

$$\int d^6x\, \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^\mu} = 0\ , \qquad \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha} = \partial^\mu\partial_\mu\bar{\alpha} - \partial^\mu\alpha^*_\mu\ . \tag{1.3.12}$$

A equação de movimento integrada para a', que expressa, a menos de uma quebra clássica, que a ação depende de a' somente através de suas derivadas é

$$\int d^6x\, \frac{\delta\Sigma}{\delta a'} = \int d^6x\ b. \tag{1.3.13}$$

Finalmente, existe o vínculo entre a e a', o qual é também classicamente quebrado e expressa que a ação depende essencialmente da combinação $\bar{a} + a'$. Ele é dado por

$$\left(\frac{\delta}{\delta a'} - \frac{\delta}{\delta\bar{a}}\right)\Sigma = b. \tag{1.3.14}$$

1.3.2 Ausência de anomalias e finitude

Conforme apresentado na subseção 1.2.2, as possíveis anomalias e contratermos invariantes são caracterizados pelo seguinte problema de cohomologia

$$\mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(G)} = 0, \tag{1.3.15}$$

onde $\Delta^{(G)}$ é um polinômio de campos integrado, local, invariante de Lorentz, de dimensão UV 6 e número de ghost G, com os candidatos a anomalias no setor $G = 1$ e os possíveis contratermos invariantes no setor $G = 0$.

De acordo com a referência [50], os vínculos (1.3.12 - 1.3.14) podem ser implementados em nível quântico. Assim, segue que $\Delta^{(G)}$ obedece aos mesmos vínculos, mas com seus lados direitos igualados a zero. Então, em particular, ele dependerá de α_μ através somente de suas derivadas, e não dependerá de α, conforme (1.3.12).

Para resolver (1.3.15), expandimos $\mathcal{S}_\Sigma$ de acordo com um operador de contagem, similar a (1.2.27), agindo sobre todos os campos. Dessa forma, podemos escrever a expansão para $\mathcal{S}_\Sigma$

$$\mathcal{S}_\Sigma = \overline{\mathcal{S}}^0_\Sigma + \overline{\mathcal{S}}^1_\Sigma + \dots \tag{1.3.16}$$

No entanto, ao invés de simplesmente estudar a cohomologia de $\overline{\mathcal{S}}^0_\Sigma$ como fizemos no caso $D = 2$, introduziremos duas novas filtrações, uma delas correspondendo a uma expansão em potências de ϕ e a outra em termos de $(\phi_\mu,\, \omega,\, \alpha)$. Denotando os correspondentes termos de n-ésima ordem respectivamente como $\tilde{\mathcal{S}}^n_\Sigma$ e $\mathcal{S}^n_\Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}^0_\Sigma &= \tilde{\mathcal{S}}^0_\Sigma + \tilde{\mathcal{S}}^1_\Sigma \ , \\ \tilde{\mathcal{S}}^0_\Sigma &= \mathcal{S}^0_\Sigma + \mathcal{S}^1_\Sigma \ , \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

com as expansões parando em ordem 1 visto que $\overline{\mathcal{S}}^0_\Sigma$ e $\tilde{\mathcal{S}}^0_\Sigma$ são, no máximo, lineares em ϕ e $(\phi_\mu,\, \omega,\, \alpha)$, respectivamente.

Essas novas filtrações são muito convenientes, como será visto abaixo, já que elas produzem mais pares de dubletos, todos ficando no setor trivial da cohomologia.

Nosso objetivo agora é mostrar que a cohomologia de $\mathcal{S}^0_\Sigma$ é trivial, implicando na trivialidade da cohomologia de $\tilde{\mathcal{S}}^0_\Sigma$, então naquela de $\overline{\mathcal{S}}^0_\Sigma$, o que finalmente significa que a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ é trivial.

As tranformações $\mathcal{S}^0_\Sigma$ são

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{S}^0_\Sigma A_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\alpha_{\nu]} \ , & \mathcal{S}^0_\Sigma \alpha_\mu = 0 \ , \\
\mathcal{S}^0_\Sigma a' = \beta \ , & \mathcal{S}^0_\Sigma \beta = 0 \ , \\
\mathcal{S}^0_\Sigma \phi = 0 \ , & \mathcal{S}^0_\Sigma \alpha = 0 \ , \\
\mathcal{S}^0_\Sigma \phi_\mu = -\partial_\mu \omega \ , & \mathcal{S}^0_\Sigma \omega = 0 \ , \\
\mathcal{S}^0_\Sigma \Phi^* = \left.\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\Phi}\right|_{\text{ordem } 0} \ , &
\end{array}
\tag{1.3.18}
$$

com $\Phi^* = (A^*_{\mu\nu}, \phi^*_\mu, \alpha^*_\mu, \alpha^*, \omega^*, \phi^*)$ e $\Phi = (A_{\mu\nu}, \phi_\mu, \alpha_\mu, \alpha, \omega, \phi)$.

As tranformações dos antighosts, multiplicadores de Lagrange e pares de campos extras $(\bar{c}, \lambda)$ e $(\bar{c}', \lambda')$ permanecem idênticas às suas tranformações BRST listadas em (1.3.7).

Além dos dubletos envolvendo os antighosts, os multiplicadores de Lagrange e os campos extras, existe um dubleto adicional em (1.3.18), que é dado por (a', β), o qual elimina a possibilidade de ter campos dimensão negativa na cohomologia de $\mathcal{S}^0_\Sigma$. Além disso, no espaço dos polinômios de campos locais não integrados, ϕ_μ e suas derivadas simétricas compõem dubletos com derivadas de ω.

Começando com os cociclos envolvendo os campos externos, podemos escrever a sua dependência mais geral como

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(G)}_{\text{ext}} = \int d^6x \ \Big(& \frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} X^{(G+1)\mu\nu} + \alpha^*_\mu X^{(G+2)\mu} + \phi^*_\mu Y^{(G+2)\mu} + \alpha^* X^{(G+3)} + \omega^* Y^{(G+3)} + \\
& + \phi^* Z^{(G+3)} \Big) + \text{ termos independentes dos anticampos,}
\end{aligned}
\tag{1.3.19}
$$

onde $X^{(G+1)\mu\nu}$, $X^{(G+2)\mu}$, $Y^{(G+2)\mu}$, $X^{(G+3)}$, $Y^{(G+3)}$ e $Z^{(G+3)}$ são polinômios arbitrários independentes dos campos externos.

Resolvendo a condição de invariância sob $\mathcal{S}^0_\Sigma$ de (1.3.19), pode-se mostrar, de uma maneira similar que em $D = 2$, que a dependência com relação a campos externos é trivial em $\mathcal{S}^0_\Sigma$.

Uma vez que os anticampos foram eliminados, a cohomologia pode depender dos campos remanescentes, que não pertecem a dubletos. Em particular, em nível não integrado, a cohomologia dependerá somente de $\partial_{[\rho}A_{\mu\nu]}$, $\partial_{[\mu}\phi_{\nu]}$, ϕ, $\partial_{(\mu}\alpha_{\nu)}$ [3], suas derivadas, e ω.

Os cociclos independentes dos campos externos serão denotados por

$$\Delta^{(G)} = \int d^6x \; Q^{(G)}(x) \; . \tag{1.3.20}$$

A condição de invariância sob $\mathcal{S}^0_\Sigma$ leva ao conjunto de equações de descida

$$\mathcal{S}^0_\Sigma Q^{(G+k)}_{[\mu_1..\mu_k]} = \partial^\lambda Q^{(G+k+1)}_{[\mu_1..\mu_k\lambda]} \tag{1.3.21}$$

com $k = 0, .., 6$ e, visto que a dimensão do espaço-tempo é igual a 6, $Q^{(G+7)}_{[\mu_1..\mu_7]} = 0$.

A dimensão e número de ghost dos campos proíbem qualquer possível solução não trivial no setor $G = 1$, implicando a ausência de anomalia na teoria.

No setor $G = 0$, a solução mais geral para o nível mais alto das equações de descida é

$$Q^{(0)} = \Omega(\partial_{[\rho}A_{\mu\nu]}, \bar{a}), \tag{1.3.22}$$

onde $\Omega(\partial_{[\rho}A_{\mu\nu]}, \bar{a})$ é um polinômio dependendo de $\partial_{[\rho}A_{\mu\nu]}$, com coeficientes como funções arbitrárias de $\bar{a}$.

[3] $\partial_{(\mu}\alpha_{\nu)}$ denota derivadas simétricas em μ, ν

A condição de invariância sob o operador completo $\mathcal{S}_\Sigma$, com os vínculos (1.3.13) e (1.3.14) sendo levados em conta, implica que

$$\Delta^{(0)} = \Sigma_{\rm inv} \ , \tag{1.3.23}$$

onde $\Sigma_{\rm inv}$ é a ação invariante (1.3.1). Entretanto, ela é um cociclo trivial

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm inv} = \frac{1}{2}\,\mathcal{S}_\Sigma \int d^6x \,\Big(&\frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \alpha^*_\mu \alpha^\mu - \phi^*_\mu \phi^\mu + \alpha^* \alpha + \omega^* \omega + \phi^* \phi \\ &- \bar{\alpha}^\mu \partial^\nu A_{\mu\nu} - \bar{\phi}^\mu A_{\mu\nu} \partial^\nu a - \bar{\phi}' \partial^\mu a \phi_\mu - \bar{\alpha} \partial^\mu \alpha_\mu - \bar{\phi} \partial^\mu \phi_\mu \Big) \, .\end{aligned} \tag{1.3.24}$$

Como conclusão, o modelo PST em $D = 6$ é finito a menos de renormalizações não físicas.

1.4 O modelo PST em D=4

Um potencial de gauge com grau de forma p, com um *field strength* (grau de forma $p+1$) auto-dual não nulo em um espaço-tempo de Minkowski, pode somente existir em dimensões $D = 2(p+1)$ para p par, o que restringe as dimensões relevantes da discussão de p-formas auto-duais para $2, 6, 10, ...$

Para ultrapassar essa restrição e definir uma ação com simetria de dualidade em $D = 4$, introduziremos dois potenciais de gauge A^a_μ, $a = 1, 2$ [47, 57], com a condição de auto-dualidade sendo agora uma relação de dualidade entre os dois field stregths $F^a_{\mu\nu}$ da teoria.

O mecanismo PST se aplica então de maneira análoga aos casos anteriores e a ação PST em $D = 4$ é [44, 45, 46]

$$\Sigma_{\rm inv} = \int d^4x \, \left(-\frac{1}{8} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4(\partial a)^2} \, \partial^\mu a \, \mathcal{F}^a_{\mu\nu} \mathcal{F}^{a\nu\rho} \partial_\rho a \right) \tag{1.4.1}$$

onde $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu$ é o *field strength* do potencial de gauge A^a_μ, a é um campo escalar auxiliar e

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}^{ab} F^b_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{a\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{L}^{ab}\mathcal{F}^{b\rho\sigma} \ , \tag{1.4.2}$$

one $\mathcal{L}$ é uma matriz (2×2) antisimétrica com $\mathcal{L}^{12} = 1$. Como pode ser notado de (1.4.2), a condição de dualidade $\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = 0$ implica em uma relação entre os dois diferentes *field strengths* $F^a_{\mu\nu}$ da teoria.

A ação (1.4.1) tem as seguintes simetrias (exibindo somente as variações não nulas):

$$\begin{aligned}
&\delta_I A^a_\mu = \partial_\mu \alpha^a \ ; \\
&\delta_{II} A^a_\mu = \phi^a \partial_\mu a \ ; \\
&\delta_{III} A^a_\mu = \beta \hat{B}^a_\mu \ , \quad \delta_{III} a = \beta \ , \quad \text{com } B^a_\mu \equiv \frac{\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\partial^\nu a}{(\partial a)^2} \text{ and } \hat{B}^a_\mu = \mathcal{L}^{ab} B^b_\mu \ ; \\
&\delta_{IV} A^a_\mu = f^a_\mu(a) \ , \quad \text{com } f^a_\mu(a) \text{ uma função arbitrária de } \ a \ .
\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Novamente tem-se que requerer $\partial^\mu a \partial_\mu a \neq 0$ e assim separar $a(x)$ em $\bar{a}(x)$ e $a'(x)$ de acordo com (1.2.5).

O conjunto de simetrias locais em (1.4.3) leva às seguintes transformações BRST:

$$\begin{aligned}
&sA^a_\mu = \partial_\mu \alpha^a + \phi^a \partial_\mu a + \beta \hat{B}^a_\mu, \\
&sa' = \beta, \\
&s\beta = 0 \ , \\
&s\alpha^a = -\beta\phi^a \ , \\
&s\phi^a = \frac{\beta}{(\partial a)^2}(\partial^\mu a \partial_\mu \phi^a - \hat{B}^a_\mu \partial^\mu \beta) \ ,
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

onde α^a,ϕ^a e β são agora ghosts de Faddeev-Popov.

A ação total é então

$$\Sigma = \Sigma_{\text{inv}} + \Sigma_{\text{gf}} + \Sigma_{\text{ext}}, \tag{1.4.5}$$

com Σ_{inv} dada em (1.4.1) e [4]

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{gf}} &= s \int d^4x \; (\bar{\alpha}^a \partial^\mu A^a_\mu + \sum_{n \in \mathcal{Z}} x_n \, \bar{\phi}^a A^a_\mu \frac{\partial^\mu a}{(\partial a)^{2n}} + \bar{\beta} a'), \\
\Sigma_{\text{ext}} &= \int d^4x \; (A^{*a}_\mu s A^{a\mu} + \alpha^{*a} s\alpha^a + \phi^{*a} s\phi^a),
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

onde introduzimos os campos externos acoplados às transformações BRST não lineares, bem como antighosts e multiplicadores de Lagrange transformando-se como

$$s\,\bar{C} = \Pi \;, \quad s\,\Pi = 0 \;, \tag{1.4.7}$$

com $\bar{C} = (\bar{\alpha}^a, \, \bar{\phi}^a, \, \bar{\beta})$ e $\Pi = (\pi^a, \, \rho^a, \, b)$.

As dimensões e números de ghost de todos os campos são exibidos abaixo na tabela 1.4.1.

	A^a_μ	a'	β	α^a	ϕ^a	$\bar{\beta}$	b	$\bar{\alpha}^a$	π^a	$\bar{\phi}^a$	ρ^a	A^{*a}_μ	α^{*a}	ϕ^{*a}	s
Dim	1	-1	-1	0	1	5	5	2	2	3	3	3	4	3	0
NG	0	0	1	1	1	-1	0	-1	0	-1	0	-1	-2	-2	1

Tabela 1.4.1: Dimensão (Dim) e número de ghost (NG).

A identidade de Slavnov-Taylor obedecida pela ação clássica total (1.4.5) escreve-se como

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a}_\mu} \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^{*a}} \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^{*a}} \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^a} + \right. \\
\left. + \beta \frac{\delta\Sigma}{\delta a'} + \pi^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\alpha}^a} + \rho^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}^a} + b \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\beta}} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

[4]Novamente, como em $D = 6$, uma soma infinita de termos com parâmetros de gauge x_n associados é introduzida em Σ_{gf}, devido à escolha de gauge não linear para a simetria δ_{II} do conjunto (1.4.3).

a qual leva ao seguinte operador nilpotente de Slavnov-Taylor linearizado

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_\Sigma = \int d^4x \biggl(& \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a}_\mu}\frac{\delta}{\delta A^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A^{*a}_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^{*a}}\frac{\delta}{\delta\alpha^{a}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^{a}}\frac{\delta}{\delta\alpha^{*a}} + \\
& + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^{*a}}\frac{\delta}{\delta\phi^{a}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^{a}}\frac{\delta}{\delta\phi^{*a}} + \pi^a\frac{\delta}{\delta\bar{\alpha}^a} + \rho^a\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}^a} + b\frac{\delta}{\delta\bar{\beta}} \biggr) . \qquad (1.4.9)
\end{aligned}
$$

A ação clássica total (1.4.5), como nos casos anteriores, obedece a vínculos fortes, que podem ser estendidos a nível quântico e são importantes no estudo da cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$. As equações de movimento integradas de a' e do ghost α, e o vínculo entre a' e $\bar{a}$ são respectivamente dados por

$$
\begin{aligned}
& \int d^4x \, \frac{\delta\Sigma}{\delta a'} = \int d^4x \; b, \\
& \int d^4x \, \frac{\delta\Sigma}{\delta\alpha^a} = 0, \\
& \left(\frac{\delta}{\delta a'} - \frac{\delta}{\delta\bar{a}}\right)\Sigma = b. \qquad (1.4.10)
\end{aligned}
$$

A cohomologia do operador $\mathcal{S}_\Sigma$ pode ser adequadamente analisada expandindo-o primeiro de acordo com um operador de contagem tipo (1.2.27), agindo sobre todos os campos, e então expandindo a contribuição de ordem mais baixa desta série em potências de ϕ^a somente. Seguindo exatamente o mesmo procedimento como nos casos $D = 2$ e $D = 6$ verifica-se que a cohomologia da contribuição mais baixa da última expansão (em potências de ϕ^a) é vazia no setor de número de ghost 1, implicando a ausência de anomalia. Para número de ghost 0, encontramos, em ordem mais baixa, a parte quadrática da ação invariante (1.4.1), que corresponde a ação completa invariante para o operador $\mathcal{S}_\Sigma$ exato. No entanto, este termo é novamente trivial de $\mathcal{S}_\Sigma$, traduzindo assim a finitude

$$
\Sigma_{\text{inv}} = \frac{1}{2}\, \mathcal{S}_\Sigma \int d^4x \left(A^{*a}_\mu A^{a\mu} - \alpha^{*a}\alpha^a - \phi^{*a}\phi^a - \bar{\alpha}^a\partial^\mu A^a_\mu - \bar{\phi}^a A^a_\mu \partial^\mu a\right) \quad (1.4.11)
$$

1.5 Considerações sobre a finitude em dimensões arbitrárias

Como pode-se notar de todos os casos analisados, a ação invariante de gauge $\Sigma_{\rm inv}$ está sempre no setor trivial da cohomologia BRST, o que pode ser entendido como uma consequencia de $\Sigma_{\rm inv}$ ser bilinear no campo de gauge para qualquer dimensão. De fato, a estrutura do modelo PST permite, para uma dimensão arbitrária, estabelecer que

$$2\,\Sigma_{\rm inv} + \mathcal{S}_\Sigma X = \sum_i \mathcal{N}_i\,\Sigma, \tag{1.5.1}$$

onde Σ é a ação clássica total, $\mathcal{S}_\Sigma X$ é alguma contribuição que pode vir do setor de gauge-fixing (ou da ação de massa $\Sigma_{\rm m}$ no caso de $D=2$) e a soma em i passa sobre todos os campos Φ_i os quais possuem um anticampo Φ_i^* associado, com os operadores de contagem $\mathcal{N}_i$ definidos como

$$\mathcal{N}_i = \int d^Dx \left(\Phi_i \frac{\delta}{\delta\Phi_i} - \Phi_i^* \frac{\delta}{\delta\Phi_i^*}\right). \tag{1.5.2}$$

De (1.5.1) podemos escrever

$$\Sigma_{\rm inv} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_\Sigma \left(\sum_i \int d^Dx\,(-1)^{[\Phi_i]}\Phi_i^*\Phi_i - X\right), \tag{1.5.3}$$

com $[\Phi_i]$ denotando a paridade de Φ_i, ou seja, 0 para Φ_i comutante e 1 para Φ_i anticomutante.

A equação (1.5.3) sugere a finitude do modelo PST em qualquer dimensão, visto que a ação invariante de gauge, que se configura sempre como o único possível candidato a identificar uma classe não trivial da cohomologia BRST, é na verdade trivial de $\mathcal{S}_\Sigma$.

Capítulo 2

Um Critério Algébrico de Finitude

Neste capítulo apresentaremos um critério algébrico de finitude UV [49, 30, 33] para TQCs renormalizáveis. Como comentado anteriormente, ele faz uso do conjunto de equações de descida que seguem da condição de consistência de Wess-Zumino [50, 51]. Mostraremos que um teorema de não renormalização para a função beta β_g é formulado se for possível estabelecer uma relação entre a ação completamente quantizada e um polinômio de campos local, invariante de gauge e com dimensão anômala nula, o qual é solução do nível mais baixo das equações de descida. Nesse caso se a contribuição em 1-loop para β_g se anular então β_g é nula em todas as ordens da teoria de perturbação. Além disso, será possível também entender o caso especial em que β_g só recebe contribuição em 1-loop, sem correções de ordem mais alta.

Primeiramente introduziremos as propriedades gerais, clássicas e quânticas, das teorias que trataremos, estabelecendo as hipóteses necessárias para a aplicação do critério de finitude UV. Em seguida será apresentada em detalhe a demonstração do teorema, incluindo a análise da ausência de correções de ordens superiores para a função beta.

2.1 Requerimentos gerais do critério de finitude

2.1.1 As propriedades clássicas

Vamos começar fixando as notações e especificando as suposições clássicas e quânticas sobre a estrutura dos modelos que consideraremos. Trabalharemos em um espaço-tempo plano D-dimensional, onde é definido um conjunto de campos genericamente denotados por $\{\Phi^i\}$, com i rotulando os diferentes tipos de campos necessários para quantizar propriamente o modelo, isto é, campos de gauge, campos de matéria, ghosts, ghosts de ghosts, etc. De acordo com o procedimento de quantização de Batalin-Vilkovisky [64], para cada campo Φ^i com número de ghost G_{Φ^i} e dimensão d_{Φ^i}, introduzimos um anticampo correspondente Φ^{i*} com número de ghost $-(1+G_{\Phi^i})$ e dimensão $(D-d_{\Phi^i})$.

O nosso ponto de partida é assim uma ação clássica $\Sigma(\Phi^i, \Phi^{i*})$, que será considerada ser não massiva e, por simplicidade, possuir uma única constante de acoplamento g. A ação $\Sigma(\Phi^i, \Phi^{i*})$ é renormalizável por contagem de potências e obedece à identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^Dx \, \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^{i*}} = 0 \,, \tag{2.1.1}$$

a qual leva ao operador linearizado nilpotente $\mathcal{S}_\Sigma$

$$\mathcal{S}_\Sigma = \int d^Dx \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^i}\frac{\delta}{\delta\Phi^{i*}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^{i*}}\frac{\delta}{\delta\Phi^i} \right) \,, \qquad \mathcal{S}_\Sigma\mathcal{S}_\Sigma = 0 \,. \tag{2.1.2}$$

A dependência da ação com relação à constante de acoplamento g será dada adotando-se a seguinte parametrização

$$\Sigma = \frac{1}{g^2}\int d^Dx \, \mathcal{L}_{\rm inv} \; + \Sigma_{\rm gf} \; + \Sigma_{\Phi^*} \,, \tag{2.1.3}$$

onde $\mathcal{L}_{\rm inv}$ é a Lagrangeana invariante clássica identificada como a parte de Σ que é independente dos anticampos, ghosts e multiplicadores de Lagrange, os quais entram no termo de fixação de gauge $\Sigma_{\rm gf}$ e na ação de anticampos Σ_{Φ^*}. Com esta parametrização um diagrama de Feynman com L-loops comporta-se como $g^{2(L-1)}$.

Diferenciando agora a identidade de Slavnov-Taylor (2.1.1) com respeito à constante de acoplamento g, obtemos a equação

$$\mathcal{S}_\Sigma \frac{\partial \Sigma}{\partial g} = 0 \,, \tag{2.1.4}$$

mostrando que $\partial\Sigma/\partial g$ é um cociclo de $\mathcal{S}_\Sigma$. Na verdade, o requerimento de que g seja um parâmetro físico da teoria impõe que $\partial\Sigma/\partial g$ seja não trivial[1], identificando portanto a cohomologia do operador $\mathcal{S}_\Sigma$ no setor dos polinômios de campos locais integrados com número de ghost zero e dimensão D.

A parametrização (2.1.3) leva a

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial g} = -\frac{2}{g^3}\int \omega_D^0 + \mathcal{S}_\Sigma \Delta^{-1}, \tag{2.1.5}$$

onde

$$\omega_D^0 = d^D x \mathcal{L}_{\rm inv} \;+\; (\text{termos dependentes de } \Phi^*) \tag{2.1.6}$$

é um polinômio não integrado com grau de forma D e número de ghost zero e Δ^{-1} é um polinômio integrado com número de ghost negativo. O aparecimento de possíveis termos dependentes dos anticampos no lado direito de (2.1.6) acontece nos casos os quais temos que lidar com algebras de gauge abertas, que se só fecham a menos de equações de movimento. Como veremos, este será o caso de SYM $N = 2$ e $N = 4$.

Assim a condição de consistência integrada

$$\mathcal{S}_\Sigma \int \omega_D^0 = 0 \tag{2.1.7}$$

[1]Pode ser provado [50] que quantidades físicas, tais como funções de Green de operadores invariantes de gauge, são independentes de um parâmetro α para o qual $\partial\Sigma/\partial\alpha$ é trivial, ou seja, $\partial_\alpha\Sigma = \mathcal{S}_\Sigma \Xi$ para algum polinômio de campos local Ξ. Tal parâmetro é chamado parâmetro de gauge.

pode ser transcrita, em nível não integrado, no seguinte conjunto de equações de descida [50, 59]

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}_\Sigma \, \omega^0_D + d\,\omega^1_{D-1} = 0 \ , \\
&\mathcal{S}_\Sigma \, \omega^1_{D-1} + d\,\omega^2_{D-2} = 0 \ , \\
&\qquad ..., \\
&\mathcal{S}_\Sigma \, \omega^{D-1}_1 + d\,\omega^D_0 = 0 \ , \\
&\mathcal{S}_\Sigma \, \omega^D_0 = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{2.1.8}
$$

com $\omega^p_{D-p}\,(p = 0, ..., D)$ sendo polinômios locais nos campos com grau de forma $(D-p)$ e número de ghost p.

No que se segue estaremos interessados na classe de modelos obedecendo às suposições dadas abaixo:

- **i)** A cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ é vazia em todos os setores com grau de forma $1 \leq p \leq D$.

- **ii)** O setor com grau de forma zero é não nulo, com um único elemento não trivial ω^D_0.

2.1.2 As propriedades quânticas

Com relação aos aspectos quânticos, o primeiro requerimento é a ausência de anomalia na extensão quântica da identidade de Slavnov-Taylor, ou seja

$$
\begin{aligned}
&\Gamma = \Sigma + O\,(\hbar) \ , \\
&\mathcal{S}\,(\Gamma) = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{2.1.9}
$$

onde Γ é o funcional quântico de vértice.

Como usual, a dependência de Γ com respeito ao ponto de renormalização μ é governada pela equação de Callan-Symanzik, cuja forma genérica é

$$\mathcal{C}\Gamma = 0 \ , \quad \mathcal{C} \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \hbar\beta_g\frac{\partial}{\partial g} - \hbar\,\gamma_{\Phi^i}\,\mathcal{N}_{\Phi^i}\ , \tag{2.1.10}$$

onde β_g é a função beta, γ_{Φ^i} denota as dimensões anômalas dos campos e $\mathcal{N}_{\Phi^i}$ é o operador de contagem

$$\mathcal{N}_{\Phi^i} = \int d^Dx \left(\Phi^i\frac{\delta}{\delta\Phi^i} - \Phi^{i*}\frac{\delta}{\delta\Phi^{i*}}\right)\ . \tag{2.1.11}$$

Seguindo o procedimento descrito em [50] e fazendo uso da ausência de anomalia na identidade de Slavnov-Taylor (2.1.9), os cociclos $\left\{\omega^p_{D-p}; 0 \le p \le D\right\}$ podem ser promovidos a inserções quânticas $\left[\omega^p_{D-p}\cdot\Gamma\right]$, obedecendo à versão quântica das equações de descida (2.1.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Gamma\left[\omega^p_{D-p}\cdot\Gamma\right] + d\left[\omega^{p+1}_{D-p-1}\cdot\Gamma\right] &= 0\ , \\ \mathcal{S}_\Gamma\left[\omega^D_0\cdot\Gamma\right] &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Além disso, as inserções $\left[\omega^p_{D-p}\cdot\Gamma\right]$ possuem a mesma dimensão anômala γ_ω e satisfazem a seguinte equação de Callan-Symanzik [50]

$$\mathcal{C}\left[\omega^p_{D-p}\cdot\Gamma\right] + \hbar\gamma_\omega\left[\omega^p_{D-p}\cdot\Gamma\right] = \hbar\,\mathcal{S}_\Gamma\left[\Xi^{p-1}_{D-p}\cdot\Gamma\right]\ , \tag{2.1.13}$$

para algum polinômio de campos cohomologicamente trivial Ξ^{p-1}_{D-p}.

A última importante propriedade requerida para a aplicação do critério de finitude UV será que a dimensão anômala γ_ω da inserção $\left[\omega^D_0\cdot\Gamma\right]$ se anule, isto é, $\gamma_\omega = 0$. Assim

$$\mathcal{C}\left[\,\omega^D_0\cdot\Gamma\right] = \hbar\,\mathcal{S}_\Gamma\left[\Xi^{D-1}_0\cdot\Gamma\right]\ , \tag{2.1.14}$$

a qual implica que

$$\mathcal{C}\left[\int\omega^0_D\cdot\Gamma\right] = \hbar\,\mathcal{S}_\Gamma\left[\int\Xi^{-1}_D\cdot\Gamma\right]\ . \tag{2.1.15}$$

Sumarizando, estamos lidando com uma teoria não massiva, renormalizável por contagem de potências e para a qual existe uma relação um a um entre as soluções ω_D^0 and ω_0^D correspondendo respectivamente aos níveis mais alto e mais baixo do conjunto de equações de descida (2.1.8). Além disso, é requerido que a identidade de Slavnov-Taylor seja livre de anomalia e que a inserção quântica $\left[\omega_0^D \cdot \Gamma\right]$ tenha dimensão anômala nula, como indicado em (2.1.14). Estas propriedades vincularão fortemente a função beta β_g. A principal idéia fundamentando esta construção é explorar a correspondência um a um entre $\partial\Sigma/\partial g$ e o cociclo ω_0^D, analisando como as propriedades de não renormalização de ω_0^D afetam os cociclos que fazem parte das equações de descida (2.1.8), incluindo em particular $\partial\Sigma/\partial g$.

2.2 O estabelecimento do critério de finitude

2.2.1 O teorema de finitude

O objetivo dessa subseção é, levando em conta as considerações anteriores, extrair uma informação precisa sobre o comportamento da função beta. Seja $\beta_g^{(n)}$ a contribuição de ordem $\hbar^n$ para a função beta β_g. Consideremos então uma teoria não massiva e especificada por um funcional quântico de vértice $\Gamma = \Sigma + O(\hbar)$ o qual obedece às hipóteses mencionadas na seção anterior, isto é, os requerimentos clássicos **i)** e **ii)** e as propriedades quânticas contidas em (2.1.9) e (2.1.15).

Então estabelece-se o seguinte teorema

Teorema: *Se a contribuição em ordem 1-loop* $\beta_g^{(1)}$ *se anula, ou seja,* $\beta_g^{(1)} =$ 0, *então* β_g *é nula em todas as ordens da teoria de perturbação.*

Demonstração: No sentido de provar o teorema, vamos primeiro mostrar que a seguinte identidade é válida

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = -\frac{2}{g^3}\tilde{a}\left[\int \omega_D^0 \cdot \Gamma\right] + \mathcal{S}_\Gamma\left[\Delta^{-1}\cdot\Gamma\right] \ , \tag{2.2.1}$$

onde $[\Delta^{-1}\cdot\Gamma]$ é uma inserção integrada com número de ghost negativo e $\tilde{a}$ é uma série formal de potências em $\hbar$

$$\tilde{a} = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\hbar^j a_j\right) \ . \tag{2.2.2}$$

A equação (2.2.1) é estabelecida por indução em $\hbar$. Em ordem zero ela é obviamente verificada devido a (2.1.5). Vamos supor então que ela vale em ordem $\hbar^n$, isto é

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = -\frac{2}{g^3}\left(1 + \sum_{j=1}^{n}\hbar^j a_j\right)\left[\int \omega_D^0 \cdot \Gamma\right] + \mathcal{S}_\Gamma\left[\widehat{\Delta}^{-1}\cdot\Gamma\right] + \hbar^{n+1}\Theta_{n+1} + O\left(\hbar^{n+2}\right) \ . \tag{2.2.3}$$

onde, do princípio de ação quântica [50], Θ_{n+1} é um polinômio de campos local integrado com número de ghost zero que obedece à condição

$$\mathcal{S}_\Sigma\Theta_{n+1} = 0 \ , \tag{2.2.4}$$

que segue de

$$\mathcal{S}_\Gamma\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S}_\Gamma\mathcal{S}_\Gamma = 0\,. \tag{2.2.5}$$

Portanto, levando em conta que a única classe de cohomologia não trivial de $\mathcal{S}_\Sigma$ com os mesmos números quânticos da ação pode ser representada por $\int \omega_D^0$, nós temos que

$$\Theta_{n+1} = a_{n+1}\int \omega_D^0 + \mathcal{S}_\Sigma\widehat{\Theta}_{n+1}^{-1} \ , \tag{2.2.6}$$

a qual estabelece a validade de (2.2.1) em ordem $\hbar^{n+1}$, e assim em todas as ordens por indução.

Voltando então à prova do teorema, nós agimos com o operador de Callan-Symanzik $\mathcal{C}$ em (2.2.1). Fazendo uso de (2.1.10) e (2.1.15), e tendo em mente a relação de comutação exata

$$\mathcal{C}\mathcal{S}_\Gamma - \mathcal{S}_\Gamma\mathcal{C} = 0\,, \tag{2.2.7}$$

nós obtemos a condição

$$\left[\mathcal{C}, \frac{\partial}{\partial g}\right]\Gamma = -\left(\mathcal{C}\left(\frac{2}{g^3}\tilde{a}\right)\right)\left[\int \omega_D^0 \cdot \Gamma\right] + \hbar\mathcal{S}_\Gamma\left[\Omega^{-1}\cdot\Gamma\right]\,, \tag{2.2.8}$$

para alguma inserção trivial irrelevante $[\Omega^{-1}\cdot\Gamma]$ com número de ghost negativo. Calculando o comutador no lado esquerdo de (2.2.8) e observando que, visto que a teoria é não massiva, os coeficientes adimensionais a_j não dependem de μ, nós encontramos

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial g}\beta_g\right)\frac{2}{g^3}\tilde{a} + \beta_g\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{2}{g^3}\tilde{a}\right)\right)\left[\int \omega_D^0\cdot\Gamma\right] = \mathcal{S}_\Gamma\left[\hat{\Omega}^{-1}\cdot\Gamma\right]\,, \tag{2.2.9}$$

Devido ao fato de que a inserção $[\int\omega_D^0\cdot\Gamma]$ não pode ser escrita como uma variação $\mathcal{S}_\Gamma$ pura, a equação (2.2.9) finalmente implica a condição

$$\left(\frac{\partial}{\partial g}\beta_g\right)\frac{2}{g^3}\tilde{a} + \beta_g\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{2}{g^3}\tilde{a}\right) = 0\,. \tag{2.2.10}$$

Esta equação expressa o conteúdo do teorema, estabelecendo de fato que se a contribuição em 1-loop da função beta se anula, ou seja, $\beta_g^{(1)} = 0$, então $\beta_g = 0$.

Para uma melhor entendimento de (2.2.10) vamos expandir β_g e $\tilde{a}$ em potências de $\hbar$, produzindo

ordem 1 :

$$g\frac{\partial\beta_g^{(1)}}{\partial g} - 3\beta_g^{(1)} = 0 \;\Rightarrow\; \beta_g^{(1)} \sim g^3. \tag{2.2.11}$$

ordem 2 :

$$\left(g\frac{\partial\beta_g^{(2)}}{\partial g} - 3\beta_g^{(2)}\right) + \beta_g^{(1)}\,g\frac{\partial a_1}{\partial g} = 0. \tag{2.2.12}$$

ordem n :

$$\left(g\frac{\partial\beta_g^{(n)}}{\partial g} - 3\beta_g^{(n)}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(g\frac{\partial\beta_g^{(n-i)}}{\partial g} - 3\beta_g^{(n-i)}\right)a_i + \beta_g^{(n-i)}\,g\frac{\partial a_i}{\partial g}\right) = 0. \tag{2.2.13}$$

Assim torna-se aparente que se $\beta_g^{(1)} = 0$ nas equações acima, então $\beta_g^{(n)} = 0$ para todos os n, visto que $\beta_g^{(n)}$ é de ordem maior do que 3 em g para $n > 1$.

Antes de discutir as aplicações deste resultado, vamos mostrar que o presente desenvolvimento fornece também uma compreensão algébrica simples do caso o qual β_g recebe contribuições no máximo até ordem 1-loop como, por exemplo, em SYM $N = 2$. Esse tópico será o objetivo da próxima subseção.

2.2.2 Ausência de correções de ordens superiores

É conhecido que a função beta β_g depende do esquema de renormalização, sendo somente o coeficiente de primeira ordem universal [69]. No entanto, para algumas teorias acontece que β_g recebe contribuições somente até 1-loop. Esta afirmação significa na verdade que existem esquemas de renormalização onde todas as contribuições de ordens mais altas se anulam. Estes esquemas podem ser identificados de uma maneira algébrica através da seguinte proposição

Proposição: Para qualquer esquema de renormalização onde a seguinte identidade vale

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = -\frac{2}{g^3}\left[\int \omega_D^0 \cdot \Gamma\right] + \mathcal{S}_\Gamma\left[\Delta^{-1} \cdot \Gamma\right] , \tag{2.2.14}$$

para alguma inserção integrada $[\Delta^{-1} \cdot \Gamma]$, a função beta β_g tem no máximo contribuições a 1-loop.

Demonstração: A equação (2.2.14) é equivalente a (2.2.1) com o requerimento que agora $a_j = 0$ para qualquer j. Repetindo portanto os mesmos passos como antes, a equação (2.2.10) se torna

$$g\frac{\partial \beta_g}{\partial g} - 3\beta_g = 0 \ , \tag{2.2.15}$$

a qual implica que β_g tem contribuições somente a 1-loop, ou seja, $\beta_g \sim g^3$. A identidade (2.2.14) será muito útil na análise de SYM $N = 2$.

Capítulo 3

Aplicações do Critério de Finitude

Apresentaremos agora aplicações do critério de finitude UV, as quais incluem os casos de Chern-Simons tridimensional acoplado a matéria fermiônica e as teorias de SYM $N = 2$ e $N = 4$ em quatro dimensões. Esses exemplos ilustram o caráter geral do teorema introduzido no capítulo anterior, evidenciando a possibilidade de compreender as propriedades de não renormalização de vários modelos através de um mesmo argumento.

3.1 A finitude de Chern-Simons acoplado a matéria fermiônica

A ação clássica invariante de gauge da teoria de Chern-Simons em $\mathcal{R}^3$ acoplada a espinores não massivos é dada por

$$S_{\rm inv} = \int d^3x \left(\frac{1}{2g^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \,\mathrm{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + i\overline{\Psi}\, \gamma^\mu \, D_\mu \Psi \right) . \qquad (3.1.1)$$

O campo de gauge A_μ pertence à representação adjunta de um grupo G

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\, \tau_a, \qquad (3.1.2)$$

o qual é um grupo de Lie compacto com álgebra

$$[\tau_a, \tau_b] = f_{abc}\,\tau_c\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\tau_a\tau_b = \delta_{ab}\ . \tag{3.1.3}$$

com as matrizes τ_a escolhidas antihermiteanas e ortonormais.

Os campos de matéria pertencem a uma representação finita arbitrária de G, sendo os correspondentes geradores denotados por T_a. Assim a derivada covariante se escreve como

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu + A^a_\mu T_a)\Psi\ . \tag{3.1.4}$$

Adotando a condição de Landau para a fixação de gauge temos

$$S_{\rm gf} = s\,\mathrm{Tr}\int d^3x\ \bar{c}\partial^\mu A_\mu = \mathrm{Tr}\int d^3x\ (b\partial^\mu A_\mu + \bar{c}\partial^\mu D_\mu c) \tag{3.1.5}$$

onde $c, \bar{c}$ e b denotam o ghost de Faddeev-Popov, o antighost e o multiplicador de Lagrange, todos na mesma representação de A_μ. As transformações BRST dos campos são

$$\begin{aligned}
&sA_\mu = -D_\mu c = -\left(\partial_\mu c + [A_\mu, c]\right)\\
&sc = c^2\\
&s\Psi = c^a T_a\,\Psi\\
&s\overline{\Psi} = \overline{\Psi}\,T_a\,c^a\\
&s\bar{c} = b\\
&sb = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Acoplando agora as transformações BRST dos campos A_μ, c, Ψ e $\overline{\Psi}$, que são não lineares, aos seus respectivos anticampos A^*_μ, c^*, $\overline{\Psi}^*$ e Ψ^* obtemos

$$S_{\rm ext} = \int d^3x\ \left(\mathrm{Tr}\ \left(-A^*_\mu D^\mu c + c^* c^2\right) + \overline{\Psi}^* c^a T_a\,\Psi - \overline{\Psi}\,T_a\,c^a\,\Psi^*\right)\ , \tag{3.1.7}$$

A ação clássica completa Σ é assim

$$\Sigma = S_{\rm inv} + S_{\rm gf} + S_{\rm ext}\,, \tag{3.1.8}$$

obedecendo à identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^3x \left(\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta c} + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} \right) + \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\Psi}^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\Psi}} \right) = 0 \ . \tag{3.1.9}$$

O operador de Slavnov-Taylor linearizado $\mathcal{S}_\Sigma$ então obtido lê-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Sigma \ = \ & \int d^3x \left(\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_\mu}\frac{\delta}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A^\mu}\frac{\delta}{\delta A^*_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^*}\frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c}\frac{\delta}{\delta c^*} + b\frac{\delta}{\delta\bar{c}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\Psi}^*}\frac{\delta}{\delta\Psi} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi}\frac{\delta}{\delta\overline{\Psi}^*} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi^*}\frac{\delta}{\delta\overline{\Psi}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\Psi}}\frac{\delta}{\delta\Psi^*} \right) , \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

com $\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{S}_\Sigma = 0$.

A tabela 3.1.1 exibe as dimensões canônicas, números de ghost e a estatística comutante (C) ou anticomutante (A) de todos os campos e anticampos.

	A_μ	c	$\bar{c}$	b	$\overline{\Psi}$	Ψ	A^*_μ	c^*	Ψ^*	$\overline{\Psi}^*$
Dim	1	0	1	1	1	1	2	3	2	2
NG	0	1	-1	0	0	0	-1	-2	-1	-1
Est	C	A	C	A	A	A	C	C	C	C

Tabela 3.1.1: Dimensão (Dim), número de ghost (NG) e estatística (Est).

Vamos agora passar ao estudo da caracterização da cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ no setor de contratermos invariantes

$$\mathcal{S}_\Sigma\Delta^0 = 0 \ , \tag{3.1.11}$$

onde Δ^0 é um polinômio de campos local integrado com número de ghost 0. Denotando

$$\Delta^0 = \int d^3x \, \omega^0 \ , \tag{3.1.12}$$

obtemos o seguinte conjunto de equações de descida

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Sigma\omega^0 &= \partial^\mu\omega^1_\mu \ , \\ \mathcal{S}_\Sigma\omega^1_\mu &= \partial^\nu\omega^2_{[\mu\nu]} \ , \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_\Sigma \omega^2_{[\mu\nu]} = \partial^\rho \omega^3_{[\mu\nu\rho]} \, ,$$
$$\mathcal{S}_\Sigma \omega^3_{[\mu\nu\rho]} = 0 \, . \tag{3.1.13}$$

A única solução não trivial para $\omega^3_{[\mu\nu\rho]}$ é dada por

$$\omega^3_{[\mu\nu\rho]} = \zeta \, \varepsilon_{\mu\nu\rho} \, \frac{1}{3} \mathrm{Tr}\, c^3 \tag{3.1.14}$$

onde ζ é um parâmetro constante. Os cociclos mais altos ω^0, ω^1_μ e $\omega^2_{[\mu\nu]}$ podem ser calculados, resultando em

$$\omega^2_{[\mu\nu]} = -\zeta \, \varepsilon_{\mu\nu\rho} \, \mathrm{Tr}\, c\partial^\rho c \, ,$$
$$\omega^1_\mu = \zeta \, \varepsilon_{\mu\nu\rho} \, \mathrm{Tr}\, A^\nu \partial^\rho c \, ,$$
$$\omega^0 = -\zeta \, \varepsilon^{\mu\nu\rho} \, \mathrm{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \, . \tag{3.1.15}$$

Com respeito às possíveis contribuições vindas do setor espinorial e dos anti-campos, descobre-se por inspeção direta que eles dão origem somente a soluções cohomologicamente triviais, como pode ser checado para o termo de Dirac aparecendo na ação completa Σ

$$i\overline{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi = \mathcal{S}_\Sigma(\overline{\Psi}\Psi^*) \, . \tag{3.1.16}$$

A solução dada nas equações (3.1.14) e (3.1.15) é assim a solução não trivial mais geral das equações de descida (3.1.13).

Agindo com $\partial/\partial g$ na identidade de Slavnov-Taylor obtemos

$$\mathcal{S}_\Sigma \frac{\partial \Sigma}{\partial g} = 0 \tag{3.1.17}$$

com

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial g} = -\frac{1}{g^3} \int d^3x \, \varepsilon^{\mu\nu\rho} \, \mathrm{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \tag{3.1.18}$$

Torna-se aparente portanto que $\partial\Sigma/\partial g$ coincide com Δ^0 se tomamos $\zeta = 1/g^3$. Em particular, $\partial\Sigma/\partial g$ identifica a única classe de cohomologia não trivial de $\mathcal{S}_\Sigma$ no setor de contratermos. Além disso, existe uma relação *um a um* entre $\partial\Sigma/\partial g$ e o polinômio de ghost $\mathrm{Tr}\, c^3$, implicando que todas as hipóteses clássicas do critério de finitude são satisfeitas. Com relação aos aspectos quânticos, destacamos que a identidade de Slavnov-Taylor pode ser estabelecida para o funcional de vértice Γ, devido à ausência de anomalia de gauge em Chern-Simons em três dimensões [50, 14].

Assim, de acordo com as hipóteses gerais necessárias para a aplicação do critério de finitude, o último requerimento a ser satisfeito é provar que o polinômio invariante de gauge $\mathrm{Tr}\, c^3$ pode ser promovido a uma inserção quântica $[\mathrm{Tr}\, c^3 \cdot \Gamma]$ com dimensão anômala nula. Isso é assegurado pela chamada equação do ghost, isto é, a identidade de Ward que surge como consequência da equação de movimento do ghost [21, 50]

$$\int d^3x \left(\frac{\delta}{\delta c} + [\bar{c}, \frac{\delta}{\delta b}] \right) \Sigma = \Delta^{\mathrm{cl}} , \tag{3.1.19}$$

onde Δ^{cl} é uma quebra clássica

$$\Delta^{\mathrm{cl}} = \int d^3x \left([A^*_\mu, A^\mu] - [c^*, c] + \left(\overline{\Psi}^* T^a\, \Psi + \overline{\Psi}\, T^a\, \Psi^* \right) \tau_a \right) . \tag{3.1.20}$$

Como mostrado em detalhes em [21, 50], a identidade de Ward (3.1.19) permite controlar a dependência da teoria com relação ao ghost de Faddeev-Popov, implicando em particular, o anulamento da dimensão anômala de $[\mathrm{Tr}\, c^3 \cdot \Gamma]$ em todas as ordens da teoria de perturbação (apêndice A).

Com respeito ao comportamento em 1-loop da função beta, ressaltamos que a finitude UV em 1-loop de Chern-Simons, com e sem matéria, é um resultado bem conhecido, tendo sido checado de muitas maneiras por vários autores (veja por exemplo [18]). Portanto, pelo teorema de finitude, β_g se anula em todas as ordens da série perturbativa. Este exemplo mostra, de uma maneira simples, como podemos obter informção sobre a função beta β_g a partir do conhecimento da dimensão anômala da inserção invariante de gauge $[\mathrm{Tr}\, c^3 \cdot \Gamma]$.

3.2 Super Yang-Mills $N = 2$

A propriedade de não renormalização da função beta de SYM $N = 2$, que estabelece que β_g recebe somente contribuições em 1-loop, é conhecida de longo tempo [31, 32]. Nesta seção, rediscutiremos esse resultado no contexto do critério de finitude UV, fornecendo uma prova puramente algébrica desse resultado.

3.2.1 A ação clássica e suas simetrias

Para estudar as propriedades de SYM $N = 2$, faremos uso do procedimento de *twist*, o qual permite substituir os índices espinoriais de supersimetria $(\alpha, \dot{\alpha})$ por índices de Lorentz. O conteúdo físico da teoria é deixado inalterado, visto que o *twist* é simplesmente uma mudança linear de variáveis, com a versão após o *twist* sendo então perturbativamente indistinguível da versão original. No entanto, o uso das novas variáveis simplifica consideravelmente a análise das propriedades de finitude, permitindo identificar um subconjunto de supercargas o qual é na verdade relevante para controlar o comportamento UV.

O grupo de simetria global de $N = 2$ no espaço-tempo plano Euclideano é $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)_{\mathcal{R}}$, onde $SU(2)_L \times SU(2)_R$ é o grupo de rotação, $SU(2)_I$ é o grupo de simetria interna e $U(1)_{\mathcal{R}}$ corresponde à simetria $\mathcal{R}$. Os campos do multipleto vetorial são dados por $(A_\mu, \psi^i_\alpha, \overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}}, \phi, \overline{\phi})$, onde $\psi^i_\alpha, \overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}}$ são espinores de Weyl com $i = 1, 2$ sendo o índice interno da representação fundamental $SU(2)_I$, e $\phi, \overline{\phi}$ são escalares complexos. Todos os campos pertecem à representação adjunta do grupo de gauge. Após o *twist*, esses campos decompõem-se em [70, 33] (apêndice B)

$$
\begin{array}{lcl}
A_\mu & \rightarrow & A_\mu, \qquad (\phi, \overline{\phi}) \rightarrow (\phi, \overline{\phi}) \\
\psi^i_\alpha & \rightarrow & (\eta,\, \chi_{\mu\nu}), \qquad \overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}} \rightarrow \psi_\mu .
\end{array}
\tag{3.2.1}
$$

Note que $(\psi_\mu, \chi_{\mu\nu}, \eta)$ anticomutam devido aos seus caráteres espinoriais, e $\chi_{\mu\nu}$ é um campo tensorial antissimétrico auto-dual. A ação de SYM $N=2$ em termos das novas variáveis é encontrada ser [70, 33]

$$
\begin{aligned}
S^{\mathrm{N}=2} = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\int d^4x \Big(& \frac{1}{2}F^+_{\mu\nu}F^{+\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{\phi}\left\{\psi^\mu, \psi_\mu\right\} - \chi^{\mu\nu}(D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu)^+ + \\
& + \eta D_\mu\psi^\mu - \frac{1}{2}\overline{\phi}D_\mu D^\mu\phi - \frac{1}{2}\phi\left\{\chi^{\mu\nu}, \chi_{\mu\nu}\right\} - \frac{1}{8}\left[\phi, \eta\right]\eta - \frac{1}{32}\left[\phi, \overline{\phi}\right]\left[\phi, \overline{\phi}\right]\Big) ,
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

onde g é a única constante de acoplamento e

$$
\begin{aligned}
& F^+_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad , \quad \tilde{F_{\mu\nu}}^+ = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{+\rho\sigma} = F^+_{\mu\nu} , \\
& (D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu)^+ = (D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(D^\rho\psi^\sigma - D^\sigma\psi^\rho) .
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

É imediato ver que associando a $\left(A_\mu, \psi_\mu, \chi_{\mu\nu}, \eta, \phi, \overline{\phi}\right)$ as respectivas cargas $\mathcal{R}$ $(0, -1, 1, -1, 2, -2)$, a expressão (3.2.2) tem carga $\mathcal{R}$ total nula.

A ação $S^{\mathrm{N}=2}$ é invariante sob transformções de gauge com parâmetro infinitesimal ζ

$$
\begin{aligned}
& \delta^g_\zeta A_\mu = -D_\mu\zeta = -\left(\partial_\mu\zeta + [A_\mu, \zeta]\right) , \\
& \delta^g_\zeta\gamma = [\zeta, \gamma] \quad , \text{ with } \gamma = \left(\psi_\mu, \chi_{\mu\nu}, \eta, \phi, \overline{\phi}\right) .
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

as quais levam às transformações BRST usuais, com $\delta^g_\zeta \to s$ e $\zeta \to c$, onde c é o ghost de Faddeev-Popov transformando-se como $sc = c^2$.

Com relação às transformações de supersimetria $(\delta^\alpha_i, \overline{\delta}^i_{\dot{\alpha}})$ de SYM $N=2$, o procedimento de *twist* dá surgimento às seguintes novas transformações [70, 33] (apêndice B): uma escalar δ, uma vetorial δ_μ e uma tensorial auto-dual $\delta_{\mu\nu}$, as quais deixam a ação invariante. É importante enfatizar que $S^{\mathrm{N}=2}$ é unicamente fixada pelas simetrias de gauge, escalar δ e vetorial δ_μ. Devido a essa propriedade, a transformação tensorial $\delta_{\mu\nu}$ não será levada em conta em nossa análise subsequente.

Para quantizar a teoria apropriadamente nós coletaremos todas as transformações (s, δ, δ_μ) em um operador estendido Q

$$Q = s + \omega\delta + \varepsilon^\mu \delta_\mu \ , \tag{3.2.5}$$

onde ω e ε^μ são ghosts globais, isto é, ghosts constantes associados respectivamente às simetrias rígidas δ e δ_μ. O operador Q age sobre os campos como

$$\begin{aligned}
&QA_\mu = -D_\mu c + \omega\psi_\mu + \frac{\varepsilon^\nu}{2}\chi_{\nu\mu} + \frac{\varepsilon_\mu}{8}\eta, \\
&Q\psi_\mu = \{c, \psi_\mu\} - \omega D_\mu \phi + \varepsilon^\nu \left(F_{\nu\mu} - \frac{1}{2}F^+_{\nu\mu}\right) - \frac{\varepsilon_\mu}{16}\left[\phi, \bar{\phi}\right], \\
&Q\chi_{\sigma\tau} = \{c, \chi_{\sigma\tau}\} + \omega F^+_{\sigma\tau} + \frac{\varepsilon^\mu}{8}\left(\epsilon_{\mu\sigma\tau\nu} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma}\right) D^\nu\bar{\phi}, \\
&Q\eta = \{c, \eta\} + \frac{\omega}{2}\left[\phi, \bar{\phi}\right] + \frac{\varepsilon^\mu}{2} D_\mu \bar{\phi}, \\
&Q\phi = [c, \phi] - \varepsilon^\mu \psi_\mu, \\
&Q\bar{\phi} = \left[c, \bar{\phi}\right] + 2\omega\eta, \\
&Qc = c^2 - \omega^2\phi - \omega\varepsilon^\mu A_\mu + \frac{\varepsilon^2}{16}\bar{\phi}, \\
&Q\omega = 0, \\
&Q\varepsilon^\mu = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

A nilpotência de Q é estabelecida a menos de translações espaco-temporais e equações de movimento

$$\begin{aligned}
Q^2 &= \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu \quad \text{sobre} \quad \left(A_\mu, \phi, \bar{\phi}, \eta, c, \omega, \varepsilon^\mu\right) , \\
Q^2 &= \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu \ + \ \text{(eqs. de movimento)} \quad \text{sobre} \quad (\psi_\mu, \chi_{\mu\nu}) \ .
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

As dimensões, cargas $\mathcal{R}$ e números de ghost de todos os campos introduzidos até aqui, bem como sua estatística comutante (C) ou anticomutante (A) são exibidos na tabela 3.2.1.

	A_μ	ψ_μ	$\chi_{\mu\nu}$	η	ϕ	$\overline{\phi}$	c	ω	ε^μ
Dim	1	3/2	3/2	3/2	1	1	0	-1/2	-1/2
Carga$\mathcal{R}$	0	1	-1	-1	2	-2	0	-1	1
NG	0	0	0	0	0	0	1	1	1
Est	C	A	A	A	C	C	A	C	C

Tabela 3.2.1: Dimensão (Dim), carga $\mathcal{R}$, número de ghost (NG) e estatística (Est).

Seguindo o procedimento de Batalin-Vilkovisky [64], nós obtemos a seguinte ação [70, 33]

$$\Sigma = S^{\mathrm{N=2}} + S_{\mathrm{gf}} + S_{\mathrm{ext}}, \tag{3.2.8}$$

onde S_{gf} é o termo de fixação de gauge no gauge de Landau e S_{ext} contém os acoplamentos das tranformações não lineares $Q\Phi_i$ aos anticampos $\Phi_i^* = (A_\mu^*,\ \psi_\mu^*,\ \frac{1}{2}\chi_{\mu\nu}^*,\ \eta^*,\ \phi^*,\ \overline{\phi}^*,\ c^*)$. Esses termos são dados por[1]

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{gf}} &= Q \int d^4x \mathrm{Tr}\left(\bar{c}\partial A\right), \\ S_{\mathrm{ext}} &= \mathrm{Tr} \int d^4x \left(\Phi_i^* Q \Phi_i + \frac{g^2}{32}\left(4\omega^2\chi^{*2} - 8\omega\varepsilon_\mu \chi^{*\mu\nu}\psi_\nu^* + \varepsilon^2\psi^{*2} - (\varepsilon\psi^*)^2\right)\right), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

onde $\bar{c}, b$ denotam o antighost e o multiplicador de Lagrange, transformando-se sob Q como

$$Q\bar{c} = b, \qquad Qb = \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu\bar{c}, \tag{3.2.10}$$

com

$$Q^2 = \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu \quad \text{sobre} \quad (\bar{c}, b)\ . \tag{3.2.11}$$

Os números quânticos associados aos anticampos, antighost e multiplicador de Lagrange estão na Tabela 3.2.2.

[1] A presença de termos quadráticos nos anticampos em S_{ext} é devido ao fato de que o operador Q é nilpotente a menos de equações de movimento.

	A^*_μ	ψ^*_μ	$\chi^*_{\mu\nu}$	η^*	ϕ^*	$\overline{\phi}^*$	c^*	$\bar{c}$	b
Dim	3	5/2	5/2	5/2	3	3	4	2	2
Carga$\mathcal{R}$	0	-1	1	1	-2	2	0	0	0
NG	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	0
Est	A	C	C	C	A	A	C	A	C

Tabela 3.2.2: Dimensão (Dim), carga $\mathcal{R}$, número de ghost (NG) e estatística (Est).

A ação completa Σ satisfaz assim a seguinte identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \omega\varepsilon^\mu \Delta^{\rm cl}_\mu, \tag{3.2.12}$$

onde

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \mathrm{Tr}\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^*_i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i} + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu\bar{c}\frac{\delta\Sigma}{\delta b}\right). \tag{3.2.13}$$

e $\Delta^{\rm cl}_\mu$ é o polinômio de campos local integrado

$$\begin{aligned}\Delta^{\rm cl}_\mu &= \mathrm{Tr}\int d^4x \Big(c^*\partial_\mu c - \phi^*\partial_\mu\phi - A^{*\nu}\partial_\mu A_\nu + \psi^{*\nu}\partial_\mu\psi_\nu + \\ &\quad -\bar{\phi}^*\partial_\mu\bar{\phi} + \eta^*\partial_\mu\eta + \frac{1}{2}\chi^{*\nu\rho}\partial_\mu\chi_{\nu\rho}\Big).\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Note que $\Delta^{\rm cl}_\mu$, sendo linear nos campos quânticos, é uma quebra clássica e não será afetada por correções quânticas. Da identidade de Slavnov-Taylor segue que o operador linearizado $\mathcal{S}_\Sigma$ definido como

$$\mathcal{S}_\Sigma = \mathrm{Tr}\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi^*_i}\frac{\delta}{\delta\Phi_i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i}\frac{\delta}{\delta\Phi^*_i} + b\frac{\delta}{\delta\bar{c}} + \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu\bar{c}\frac{\delta}{\delta b}\right) \tag{3.2.15}$$

é nilpotente modulo uma derivada total, ou seja

$$\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{S}_\Sigma = \omega\varepsilon^\mu\partial_\mu. \tag{3.2.16}$$

O aparecimento do operador de translação no espaço-tempo ∂_μ no lado direito de (3.2.16) é devido à estrutura supersimétrica da teoria. É imediato, no entanto, que o operador $\mathcal{S}_\Sigma$ é estritamente nilpotente quando age no espaço dos polinômios de campos locais integrados. Além disso, como veremos em detalhe, a presença da derivada espaço-temporal ∂_μ dará surgimento a um conjunto não usual de equações de descida as quais vincularão fortemente os possíveis contratermos invariantes não triviais. Nós demonstraremos que essas equações podem ser resolvidas de uma maneira sistemática usando a álgebra supersimétrica $N = 2$.

3.2.2 O Contratermo invariante

Procedendo como no exemplo de Chern-Simons na seção anterior, agimos com o operador $\partial/\partial g$ em ambos os lados da identidade de Slavnov-Taylor (3.2.12). Observando então que o termo de quebra linear Δ_μ^{cl} não depende da constante de acoplamento g, nós obtemos a condição

$$\mathcal{S}_\Sigma \frac{\partial \Sigma}{\partial g} = 0 \ , \tag{3.2.17}$$

com $\partial\Sigma/\partial g$ identificando então a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ no setor dos contratermos invariantes. Temos agora que provar a existência uma relação um a um entre $\partial\Sigma/\partial g$ e o polinômio de campos que é solução do nível mais baixo das equações de descida. Nesse sentido somos levados a estudar a condição de consistência para os contratermos integrados invariantes

$$\mathcal{S}_\Sigma \int d^4x\, \Omega^0 = 0 \ , \tag{3.2.18}$$

onde Ω^0 tem os mesmos números quânticos da lagrangeana.

Devido a (3.2.16), a condição de consistência integrada (3.2.18) pode ser traduzida em nível local como

$$\mathcal{S}_\Sigma \Omega^0 = \partial^\mu \Omega_\mu^1 \ , \tag{3.2.19}$$

onde Ω_μ^1 é um polinômio de campos local com número de ghost 1 e dimensão 3. Aplicando agora o operador $\mathcal{S}_\Sigma$ em ambos os lados de (3.2.19) e fazendo uso de

(3.2.16), obtemos a condição

$$\partial^\mu \left(\mathcal{S}_\Sigma \Omega^1_\mu - \omega \varepsilon_\mu \Omega^0 \right) = 0 \ , \tag{3.2.20}$$

que, devido ao lema de Poincaré algébrico [50, 51] implica

$$\mathcal{S}_\Sigma \Omega^1_\mu = \omega \varepsilon_\mu \Omega^0 + \partial^\nu \Omega^2_{[\nu\mu]} \ , \tag{3.2.21}$$

para algum polinômio de campos local $\Omega^2_{[\nu\mu]}$ antissimétrico nos índices de Lorentz μ, ν e com número de ghost 2. O procedimento pode ser iterado, produzindo o seguinte conjunto de equações de descida

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\Sigma \Omega^0 &= \partial^\mu \Omega^1_\mu \ , \\
\mathcal{S}_\Sigma \Omega^1_\mu &= \partial^\nu \Omega^2_{[\nu\mu]} + \omega \varepsilon_\mu \Omega^0 \ , \\
\mathcal{S}_\Sigma \Omega^2_{[\mu\nu]} &= \partial^\rho \Omega^3_{[\rho\mu\nu]} + \omega \varepsilon_\mu \Omega^1_\nu - \omega \varepsilon_\nu \Omega^1_\mu \ , \\
\mathcal{S}_\Sigma \Omega^3_{[\mu\nu\rho]} &= \partial^\sigma \Omega^4_{[\sigma\mu\nu\rho]} + \omega \varepsilon_\mu \Omega^2_{[\nu\rho]} + \omega \varepsilon_\rho \Omega^2_{[\mu\nu]} + \omega \varepsilon_\nu \Omega^2_{[\rho\mu]}, \\
\mathcal{S}_\Sigma \Omega^4_{[\mu\nu\rho\sigma]} &= \omega \varepsilon_\mu \Omega^3_{[\nu\rho\sigma]} - \omega \varepsilon_\sigma \Omega^3_{[\mu\nu\rho]} + \omega \varepsilon_\rho \Omega^3_{[\sigma\mu\nu]} - \omega \varepsilon_\nu \Omega^3_{[\rho\sigma\mu]} \ .
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

É interessante frisar que essas equações são de um tipo não usual, com os cociclos de número de ghost menor aparecendo nas equações dos cociclos com número de ghost maior, tornando o sistema (3.2.22) não trivial. Nós observamos que a última equação para $\Omega^4_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ é não homogênea, uma propriedade que vincula fortemente as possíveis soluções. Na verdade é possível resolver o sistema (3.2.22) de uma maneira sistemática usando a estrutura de $N = 2$. Para isto introduzimos o operador

$$\mathcal{W}_\mu = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon^\mu}, \mathcal{S}_\Sigma \right] \ , \tag{3.2.23}$$

que obedece às relações

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{W}_\mu, \mathcal{S}_\Sigma\} &= \partial_\mu \ , \\
\{\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu\} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Esta álgebra é típica de TQCs topológicas [39, 40]. Em particular, como mostrado em [71], (3.2.24) permite que $\mathcal{W}_\mu$ seja usado como um operador de subida para as equções de descida (3.2.22). Dessa forma, a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Omega^0 &= \frac{1}{4!}\mathcal{W}^\mu\mathcal{W}^\nu\mathcal{W}^\rho\mathcal{W}^\sigma\Omega^4_{[\sigma\rho\nu\mu]} \, , \\
\Omega^1_\mu &= \frac{1}{3!}\mathcal{W}^\nu\mathcal{W}^\rho\mathcal{W}^\sigma\Omega^4_{[\sigma\rho\nu\mu]} \, , \\
\Omega^2_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2!}\mathcal{W}^\rho\mathcal{W}^\sigma\Omega^4_{[\sigma\rho\mu\nu]} \, , \\
\Omega^3_{[\mu\nu\rho]} &= \mathcal{W}^\sigma\Omega^4_{[\sigma\mu\nu\rho]} \, ,
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

com $\Omega^4_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ dado por

$$\Omega^4_{[\mu\nu\rho\sigma]} = \omega^4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\phi^2. \tag{3.2.26}$$

De (3.2.25) a importância do operador $\mathcal{W}_\mu$ torna-se agora explícita. Atuando-o sucessivamente sobre (3.2.26) obtemos a relação

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial g} = \frac{2\omega^4}{3g^3}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{W}_\mu\mathcal{W}_\nu\mathcal{W}_\rho\mathcal{W}_\sigma\int d^4x\mathrm{Tr}\frac{\phi^2}{2} + \mathcal{S}_\Sigma\Xi^{-1} \, , \tag{3.2.27}$$

para algum Ξ^{-1} irrelevante. Esta equação mostra que existe uma relação um a um entre a solução do nível mais baixo das equações de descida (3.2.22) e a ação de $N = 2$, de modo que os requerimentos clássicos **i)** e **ii)** do capítulo anterior são satisfeitos. A equação (3.2.27) sugere que o comportamento UV de $N = 2$ pode ser discutido analisando o polinômio invariante de gauge $\mathrm{Tr}\phi^2$, que desempenha o papel de um prepotencial perturbativo.

3.2.3 A dimensão anômala nula de $\left[\mathrm{Tr}\phi^2 \cdot \Gamma\right]$

Com respeito aos aspectos quânticos, a identidade de Slavnov-Taylor (3.2.12) pode ser estendida em nível quântico sem anomalias [72]. Assim, para aplicar o critério de finitude, resta-nos estabelecer que a dimensão anômala da inserção $[\mathrm{Tr}\phi^2 \cdot \Gamma]$ é nula. Isso acontece graças a uma identidade de Ward relacionando $\mathrm{Tr}\phi^2$ ao polinômio invariante de gauge $\mathrm{Tr}(-3\omega^2 c\phi + c^3)/\omega^4$, cuja dimensão anômala se anula devido à equação do ghost. Esse fato implica que a dimensão anômala de $[\mathrm{Tr}\phi^2 \cdot \Gamma]$ se anula também. Vamos demonstrar isso seguindo o procedimento desenvolvido em [33].

Introduzindo um operador de contagem $\mathcal{N}_\varepsilon$

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \varepsilon^\mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\mu}, \tag{3.2.28}$$

decompomos $\mathcal{S}_\Sigma$ em uma expansão em ε^μ

$$\mathcal{S}_\Sigma = b_\Sigma + \varepsilon^\mu W_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu W_{\mu\nu}. \tag{3.2.29}$$

Os operadores b_Σ e W_μ obedecem à álgebra

$$\begin{aligned} b_\Sigma b_\Sigma &= 0, \\ \{b_\Sigma, W_\mu\} &= \omega \partial_\mu, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

a qual segue de (3.2.16).

A atuação de b_Σ em ϕ e c, que pode ser obtida de (3.2.6), é dada por

$$\begin{aligned} b_\Sigma \phi &= [c, \phi], \\ b_\Sigma c &= c^2 - \omega^2 \phi. \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Assim, podemos então escrever

$$\mathrm{Tr}\phi^2 = b_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{\omega^2} c\phi + \frac{1}{3\omega^4} c^3\right). \tag{3.2.32}$$

Mostraremos que essa propriedade pode ser estendida quanticamente. Para tanto, a simetria de BRST ordinária e a simetria escalar δ serão suficientes. Portanto deste ponto até o fim de nossa discussão sobre SYM $N = 2$ consideraremos $\varepsilon^\mu = 0$ e denotaremos $\Sigma \equiv \Sigma|_{\varepsilon=0}$, $\Gamma \equiv \Gamma|_{\varepsilon=0}$ e $\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \mathcal{S}(\Gamma)|_{\varepsilon=0}$, com o operador de Slavnov-Taylor linearizado sendo dado por $\mathcal{S}_\Sigma|_{\varepsilon=0} \equiv b_\Sigma$.

Vamos definir

$$Q' \equiv s + \omega\delta, \tag{3.2.33}$$

o qual, como Q em (3.2.5), descreve uma simetria da ação e é nilpotente a menos de equações de movimento.

Consideremos então os polinômios de campos

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &\equiv \mathrm{Tr}\omega^4\phi^2, \\ \Omega_c &\equiv \mathrm{Tr}\left(-\omega^2 c\phi + \frac{1}{3}c^3\right), \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

para os quais vale

$$\Omega_\phi = Q'\Omega_c. \tag{3.2.35}$$

Então a ação

$$\Sigma' = \Sigma + S_{\sigma\lambda}, \tag{3.2.36}$$

onde

$$S_{\sigma\lambda} = \int d^4x \left(\sigma\Omega_\phi + \lambda\Omega_c\right), \tag{3.2.37}$$

com $\sigma(x)$ e $\lambda(x)$ sendo campos externos, satisfaz a identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}'(\Sigma') = 0, \tag{3.2.38}$$

com

$$\mathcal{S}'(\Sigma') = \mathcal{S}(\Sigma') + \int d^4x\, \lambda\frac{\delta\Sigma'}{\delta\sigma}. \tag{3.2.39}$$

É aparente de (3.2.39) que os campos externos $\sigma(x)$ e $\lambda(x)$ formam um dubleto de BRST, estando assim no setor trivial da cohomologia do operador de Slavnov-Taylor linearizado $b_{\Sigma'}$ [50].

Além disso, a ação Σ' satisfaz à equação do ghost

$$\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta c} + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta \beta} \right] + \lambda \frac{\delta}{\delta \sigma} \right) \Sigma' = \Delta^{\rm cl}, \tag{3.2.40}$$

onde $\Delta^{\rm cl}$ é uma quebra clássica dada por

$$\Delta^{\rm cl} = \int d^4x \left([c, c^*] + [\phi^*, \phi] + \left[A^*_\mu, A_\mu \right] + \left[\psi^*_\mu, \psi_\mu \right] + \left[\bar{\phi}^*, \bar{\phi} \right] + [\eta^*, \eta] + \frac{1}{2} \left[\chi^*_{\mu\nu}, \chi_{\mu\nu} \right] \right). \tag{3.2.41}$$

Visto que a identidade de Slavnov-Taylor ordinária (3.2.12) não é afetada por anomalias e os campos externos $\sigma(x)$ e $\lambda(x)$ compõem um dubleto, a relação clássica (3.2.38) pode estendida em nível quântico

$$\mathcal{S}'(\Gamma') = 0, \tag{3.2.42}$$

onde Γ' é o funcional de vértice $\Gamma' = \Sigma' + O(\hbar)$.

De modo similar, a equação do ghost (3.2.40) é livre de anomalias, valendo também para Γ' [21, 50].

Derivando a identidade de Slavnov-Taylor (3.2.42) com relação ao campo externo $\lambda(x)$ e tomando $\lambda(x) = \sigma(x) = 0$, obtemos

$$b_{\Gamma'} \left. \frac{\delta \Gamma'}{\delta \lambda(x)} \right|_{\lambda=\sigma=0} = \left. \frac{\delta \Gamma'}{\delta \sigma(x)} \right|_{\lambda=\sigma=0}, \tag{3.2.43}$$

o que significa que a relação (3.2.35) entre os operadores compostos Ω_ϕ e Ω_c permanece verdadeira em nível quântico, produzindo

$$\left[{\rm Tr} \phi^2 \cdot \Gamma' \right] = b_{\Gamma'} \left[{\rm Tr} \left(-\frac{c\phi}{\omega^2} + \frac{c^3}{3\omega^4} \right) \cdot \Gamma' \right]. \tag{3.2.44}$$

Como consequência da equação do ghost (3.2.40) a inserção quântica $\left[{\rm Tr} \left(-\frac{c\phi}{\omega^2} + \frac{c^3}{3\omega^4} \right) \cdot \Gamma' \right]$, composta de polinômios de c não diferenciado, possui dimensão anômala nula (apêndice A)

$$\mathcal{C} \left[{\rm Tr} \left(-\frac{c\phi}{\omega^2} + \frac{c^3}{3\omega^4} \right) \cdot \Gamma' \right] = 0, \tag{3.2.45}$$

onde $\mathcal{C}$ é o operador de Callan-Symanzik, o qual comuta com $b_{\Gamma'}$

$$[\mathcal{C}, b_{\Gamma'}] = 0. \tag{3.2.46}$$

Portanto aplicando $b_{\Gamma'}$ em (3.2.45) temos finalmente

$$\mathcal{C}\left[\mathrm{Tr}\phi^2 \cdot \Gamma'\right] = 0, \tag{3.2.47}$$

completando a prova do anulamento da dimensão anômala da inserção quântica $[\mathrm{Tr}\phi \cdot \Gamma']$.

3.2.4 O teorema de não renormalização da função beta

Para chegarmos ao teorema de não renormalização da função beta vamos novamente seguir alguns passos da referência [33], partindo de (3.2.27) e tomando $\varepsilon^\mu = 0$, o que resulta em

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial g} = \frac{2}{3g^3} \int d^4x \, W^4 \mathrm{Tr} \frac{\phi^2}{2} + b_\Sigma \int d^4x \, \mathrm{Tr}\left(\phi\phi^* - \psi^*_\mu \psi^\mu\right). \tag{3.2.48}$$

onde denotamos $W^4 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\mu W_\nu W_\rho W_\sigma$, com W_μ definido em (3.2.29), e onde explicitamos o setor trivial de (3.2.27).

A expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial g} = \frac{1}{g^3} b_\Sigma \Xi, \tag{3.2.49}$$

com Ξ dado por

$$\Xi = \frac{2}{3} \int d^4x \, W^4 \mathrm{Tr}\left(-\frac{c\phi}{\omega^2} + \frac{c^3}{3\omega^4}\right) + g^3 \int d^4x \, \mathrm{Tr}\left(\phi\phi^* - \psi^*_\mu \psi^\mu\right). \tag{3.2.50}$$

Nossa tarefa será obter a extensão quântica de (3.2.49). Nesse sentido, vamos considerar a ação modificada pela introdução de um parâmetro α

$$\Sigma' = \Sigma + \frac{\alpha}{g^3} \Xi, \tag{3.2.51}$$

a qual satisfaz a identidade

$$\mathcal{S}(\Sigma') + \alpha \frac{\partial \Sigma'}{\partial g} = 0 \ . \tag{3.2.52}$$

O fato de que α e g se transformam como um dubleto BRST permite implementar (3.2.52) em nível quântico

$$\mathcal{S}(\Gamma') + \alpha \frac{\partial \Gamma'}{\partial g} = 0 \ . \tag{3.2.53}$$

Derivando (3.2.53) com respeito a α e tomando $\alpha = 0$ encontramos

$$b_{\Gamma'} \frac{\partial \Gamma'}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial \Gamma'}{\partial g}\bigg|_{\alpha=0} \ . \tag{3.2.54}$$

Agora, em nível clássico, de (3.2.51) temos

$$\frac{\partial \Sigma'}{\partial \alpha} = \frac{1}{g^3} \Xi \ , \tag{3.2.55}$$

com Ξ consistindo de dois termos: $\int d^4x \ W^4 \mathrm{Tr} \left(-\frac{c\phi}{\omega^2} + \frac{c^3}{\omega^4} \right)$, o qual possui dimensão anômala nula, e $g^3 \int d^4x \ \mathrm{Tr}(\phi\phi^* - \psi^*_\mu \psi_\mu)$, o qual é puramente clássico, sendo um funcional linear nos campos quânticos $\phi(x)$ e $\psi_\mu(x)$.

Consequentemente, podemos estender (3.2.55) em nível quântico

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial \alpha} = \frac{1}{g^3} \Xi \cdot \Gamma' \tag{3.2.56}$$

e, da relação (3.2.54), obtemos

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial g} = \frac{1}{g^3} b_{\Gamma'} \left(\Xi \cdot \Gamma' \right) \ , \tag{3.2.57}$$

ou

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial g} = \frac{2}{3g^3} \int d^4x \ \left(W^4 \mathrm{Tr} \phi^2 \right) \cdot \Gamma' + b'_\Gamma \int d^4x \ \mathrm{Tr}(\phi\phi^* - \psi^*_\mu \psi_\mu) \cdot \Gamma' \ , \tag{3.2.58}$$

Esta equação tem a forma de (2.2.14), implicando em particular, a ausência dos coeficientes $\tilde{a}$ de (2.2.2). Portanto a proposição da subseção 2.2.2 do capítulo anterior se aplica aqui, com o resultado de que a função beta de SYM $N = 2$ é de fato de ordem 1-loop somente, isto é, $\beta_g \sim g^3$.

3.3 Super Yang-Mills $N = 4$

O caso de SYM $N = 4$ pode ser tratado de maneira similar a $N = 2$. O grupo de simetria global da teoria de SYM $N = 4$ em espaço-tempo plano Euclideano é $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$, onde $SU(2)_L \times SU(2)_R$ é o grupo de rotação e $SU(4)$ é o grupo de simetria interna de $N = 4$. Os campos do multipleto de $N = 4$ são dados por $(A_\mu, \lambda^\alpha_u, \overline{\lambda}^u_{\dot\alpha}, \Phi_{uv})$, onde $(u, v = 1, .., 4)$ são índices da representação fundamental de $SU(4)$, e os seis campos escalares reais do modelo são coletados em um tensor antissimétrico e auto-conjugado Φ_{uv}. Através da transformação de *twist*, estes campos se decompõem em [74, 75, 30] (apêndice B)

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A_\mu, \\
\overline{\lambda}^u_{\dot\alpha} &\rightarrow \psi_\mu,\ \chi_\mu, \\
\lambda^\alpha_u &\rightarrow \eta,\ \xi,\ \chi_{\mu\nu},\ \psi_{\mu\nu}, \\
\Phi_{uv} &\rightarrow B_{\mu\nu},\ \phi,\ \overline{\phi},\ \tau,
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

onde $\chi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são antissimétricos e auto-duais com relação aos índices de Lorentz.

A ação de $N = 4$ em termos dos novos campos é dada por[2]

$$
\begin{aligned}
S^{\mathrm{N=4}} = & \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\int d^4x \Big(D_\mu\phi D^\mu\overline{\phi} + i\psi_\mu D_\nu\chi^{\mu\nu} + i\chi_\mu D_\nu\psi^{\mu\nu} - \chi_\mu D^\mu\xi + \\
& + \psi_\mu D^\mu\eta - i\overline{\phi}\left\{\psi_{\mu\nu}, \psi^{\mu\nu}\right\} + i\phi\left\{\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}\right\} + i\tau\left\{\psi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}\right\} + \\
& - \left\{\psi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\rho}\right\} B_\rho{}^\nu - i\chi_{\mu\nu}\left[\xi, B^{\mu\nu}\right] - i\psi_{\mu\nu}\left[\eta, B^{\mu\nu}\right] + 4i\overline{\phi}\left\{\xi, \xi\right\} + \\
& - 4i\phi\left\{\eta, \eta\right\} + 4i\tau\left\{\xi, \eta\right\} + \psi_\mu\left[\chi_\nu, B^{\mu\nu}\right] + i\phi\left\{\chi_\mu, \chi^\mu\right\} + \\
& - i\overline{\phi}\left\{\psi_\mu, \psi^\mu\right\} - i\psi_\mu\left[\chi^\mu, \tau\right] - 4\left[\phi, \overline{\phi}\right]\left[\phi, \overline{\phi}\right] + 4\left[\phi, \tau\right]\left[\overline{\phi}, \tau\right] + \\
& + \left[\phi, B_{\mu\nu}\right]\left[\overline{\phi}, B^{\mu\nu}\right] - H^\mu\left(H_\mu - D_\mu\tau + i D^\nu B_{\mu\nu}\right) + \\
& + H^{\mu\nu}\left(-H_{\mu\nu} + \frac{i}{4}F^+_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[B_{\mu\rho}, B^\rho{}_\nu\right] - i\left[B_{\mu\nu}, \tau\right]\right)\Big),
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

[2]Os geradores do grupo são escolhidos aqui serem hermiteanos.

onde g é a única constante de acoplamento e $H_{\mu\nu}$ e H_μ são campos auxiliares, com $H_{\mu\nu}$ auto-dual.

Nesta formulação podemos definir uma carga conservada, que é consequência do procedimento de *twist*, chamada aqui carga G (apêndice B). As dimensões canônicas, cargas G e a estatística comutante (C) ou anticomutante (A) dos campos estão na tabela 3.3.1.

	A_μ	ψ_μ	χ_μ	$\psi_{\mu\nu}$	$\chi_{\mu\nu}$	ξ	η	ϕ	$\overline{\phi}$	τ	$B_{\mu\nu}$	H_μ	$H_{\mu\nu}$
Dim	1	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	1	1	1	1	2	2
CargaG	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	0	0	0	0
Est	C	A	A	A	A	A	A	C	C	C	C	C	C

Tabela 3.3.1: Dimensão (Dim), carga G e estatística (Est).

Nós observamos que, para os campos (A_μ, ψ_μ, $\chi_\mu\nu$, η, ϕ, $\overline{\phi}$), as cargas G coincidem com as cargas $\mathcal{R}$ de SYM $N = 2$.

Com relação às transformações $(\delta_u^\alpha, \overline{\delta}_{\dot\alpha}^u)$ de SYM $N = 4$, o procedimento de *twist* faz surgir as seguintes transformações [75, 30] (apêndice B): duas escalares, δ^+ and δ^-, duas vetoriais, δ_μ^+ and δ_μ^-, e duas tensorais auto-duais, $\delta_{\mu\nu}^+$ and $\delta_{\mu\nu}^-$. Sendo consequência da supersimetria, todas essas tranformações deixam a ação invariante. No entanto, como mostrado em [30], a ação $S^{\mathrm{N=4}}$ é unicamente fixada pelas duas transformações vetoriais δ_μ^+, δ_μ^- e pela escalar δ^+, além da simetria de gauge. Em outras palavras, o requerimento de invariância sob transformações de gauge, δ_μ^+, δ_μ^- e δ^+ fixa todos os coeficientes numéricos relativos dos vários termos da ação (3.3.2). Assim, não levaremos em conta na nossa análise as transformações tensoriais $\delta_{\mu\nu}^+$,

$\delta^{-}_{\mu\nu}$, como feito no caso de $N=2$. A ação de δ^{+} sobre os campos lê-se

$$
\begin{array}{ll}
\delta^{+}A_{\mu}=\psi_{\mu}\,, & \delta^{+}\tau=\xi \\
\delta^{+}\psi_{\mu}=D_{\mu}\phi\,, & \delta^{+}\chi_{\mu}=H_{\mu}\,, \\
\delta^{+}\phi=0 & \delta^{+}\xi=i\left[\tau,\phi\right] \\
\delta^{+}\overline{\phi}=-\eta & \delta^{+}B_{\mu\nu}=\psi_{\mu\nu}\,, \\
\delta^{+}\eta=i\left[\phi,\bar{\phi}\right] & \delta^{+}\psi_{\mu\nu}=i[B_{\mu\nu},\phi] \\
\delta^{+}\chi_{\mu\nu}=H_{\mu\nu} & \delta^{+}H_{\mu}=i\left[\chi_{\mu},\phi\right] \\
\delta^{+}H_{\mu\nu}=i\left[\chi_{\mu\nu},\phi\right]. &
\end{array}
\tag{3.3.3}
$$

Na primeira coluna de (3.3.3) nós reconhecemos as transformações escalares obtidas com o *twist* da subálgebra $N=2$ na presença do campo auxiliar $H_{\mu\nu}$. Para δ^{-} obtemos

$$
\begin{array}{ll}
\delta^{-}A_{\mu}=\chi_{\mu}\,, & \delta^{-}\tau=-\eta\,, \\
\delta^{-}\chi_{\mu}=-D_{\mu}\overline{\phi}\,, & \delta^{-}\psi_{\mu}=-H_{\mu}+D_{\mu}\tau\,, \\
\delta^{-}\bar{\phi}=0\,, & \delta^{-}\eta=i\left[\tau,\bar{\phi}\right], \\
\delta^{-}\phi=-\xi\,, & \delta^{-}\chi_{\mu\nu}=i\left[B_{\mu\nu},\bar{\phi}\right], \\
\delta^{-}\xi=i\left[\phi,\overline{\phi}\right], & \delta^{-}B_{\mu\nu}=-\chi_{\mu\nu}\,, \\
\delta^{-}\psi_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}+i\left[B_{\mu\nu},\tau\right], & \\
\delta^{-}H_{\mu\nu}=-i\left[\psi_{\mu\nu},\bar{\phi}\right]+i\left[\chi_{\mu\nu},\tau\right]+i\left[B_{\mu\nu},\eta\right]\,, & \\
\delta^{-}H_{\mu}=-D_{\mu}\eta+i\left[\psi_{\mu},\bar{\phi}\right]+i\left[\chi_{\mu},\tau\right]\,. &
\end{array}
\tag{3.3.4}
$$

Analogamente, para as transformações vetoriais δ^{+}_{μ} e δ^{-}_{μ} temos

$$
\begin{array}{ll}
\delta^{+}_{\mu}A_{\nu}=-4i\chi_{\mu\nu}-4g_{\mu\nu}\eta\,, & \delta^{+}_{\mu}\tau=\chi_{\mu}, \\
\delta^{+}_{\mu}\phi=\psi_{\mu}\,, & \delta^{+}_{\mu}\bar{\phi}=0, \\
\delta^{+}_{\mu}\xi=D_{\mu}\tau-H_{\mu}\,, & \delta^{+}_{\mu}\eta=-D_{\mu}\overline{\phi}, \\
\delta^{+}_{\mu}B_{\nu\rho}=-i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}\chi^{\lambda}\,, & \delta^{+}_{\mu}\psi_{\nu\rho}=D_{\mu}B_{\nu\rho}+i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}H^{\lambda}, \\
\delta^{+}_{\mu}\chi_{\nu\rho}=i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}D^{\lambda}\overline{\phi}\,, & \delta^{+}_{\mu}\chi_{\nu}=-4\left[B_{\mu\nu},\overline{\phi}\right]+4ig_{\mu\nu}\left[\tau,\overline{\phi}\right], \\
\delta^{+}_{\mu}\psi_{\nu}=4iH_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}-4ig_{\mu\nu}[\overline{\phi},\phi]\,, & \\
\delta^{+}_{\mu}H_{\nu\rho}=D_{\mu}\chi_{\nu\rho}+\theta_{\mu\nu\rho\lambda}\left[\psi^{\lambda},\overline{\phi}\right]+i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}D^{\lambda}\eta\,, & \\
\delta^{+}_{\mu}H_{\nu}=D_{\mu}\chi_{\nu}+4\left[\eta,B_{\mu\nu}\right]+4\left[\psi_{\mu\nu},\overline{\phi}\right]-4ig_{\mu\nu}\left[\eta,\tau\right]-4ig_{\mu\nu}\left[\xi,\overline{\phi}\right]\,, &
\end{array}
\tag{3.3.5}
$$

e

$$
\begin{array}{ll}
\delta_\mu^- A_\nu = -4i\psi_{\mu\nu} + 4g_{\mu\nu}\xi\,, & \delta_\mu^- \tau = \psi_\mu, \\
\delta_\mu^- \phi = 0\,, & \delta_\mu^- \bar{\phi} = -\chi_\mu, \\
\delta_\mu^- \xi = -D_\mu \phi\,, & \delta_\mu^- \eta = -H_\mu, \\
\delta_\mu^- B_{\nu\rho} = +i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}\psi^\lambda\,, & \delta_\mu^- \psi_\nu = -4\left[B_{\mu\nu}, \phi\right] - 4ig_{\mu\nu}\left[\tau, \phi\right], \\
\delta_\mu^- \psi_{\nu\rho} = -i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}D^\lambda \phi\,, &
\end{array}
$$
$$
\begin{aligned}
&\delta_\mu^- \chi_{\nu\rho} = -D_\mu B_{\nu\rho} - i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}H^\lambda + i\theta_{\mu\nu\rho\lambda}D^\lambda \tau\,, \\
&\delta_\mu^- \chi_\nu = 4iH_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + 4ig_{\mu\nu}\left[\bar{\phi}, \phi\right] - 4\left[B_{\mu\nu}, \tau\right]\,, \\
&\delta_\mu^- H_{\nu\rho} = D_\mu \psi_{\nu\rho} + \theta_{\mu\nu\rho\lambda}\left(\left[\psi^\lambda, \tau\right] - \left[\chi^\lambda, \phi\right] - iD^\lambda \xi\right) + i\left[\psi_\mu, B_{\nu\rho}\right]\,, \\
&\delta_\mu^- H_\nu = -D_\mu \psi_\nu + D_\nu \psi_\mu + 4\left[\psi_{\mu\nu}, \tau\right] - 4\left[\xi, B_{\mu\nu}\right] + 4\left[\chi_{\mu\nu}, \phi\right] + 4ig_{\mu\nu}\left[\eta, \phi\right]\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.6}
$$

onde $\theta_{\mu\nu\rho\sigma}$ denota a combinação

$$
\theta_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} = 4\Pi^+_{\mu\sigma\nu\rho}\,, \tag{3.3.7}
$$

com $\Pi^+_{\mu\sigma\nu\rho}$ sendo o projetor sobre as duas-formas auto-duais. Vamos também fornecer aqui as relações algébricas entre entre δ^+, δ^-, δ^+_μ e δ^-_μ

$$
\begin{array}{ll}
\left\{\delta^+, \delta^+\right\} = \delta^g_{-2\phi} & \left\{\delta^+_\mu, \delta^+\right\} = \partial_\mu + \delta^g_{A_\mu} \\
\left\{\delta^-, \delta^-\right\} = \delta^g_{2\bar{\phi}} & \left\{\delta^-_\mu, \delta^-\right\} = \partial_\mu + \delta^g_{A_\mu} \\
\left\{\delta^+, \delta^-\right\} = \delta^g_{-\tau} & \left\{\delta^+_\mu, \delta^-\right\} = 0 \\
\left\{\delta^-_\mu, \delta^+\right\} = 0 & \left\{\delta^+_\mu, \delta^+_\nu\right\} = \delta^g_{-8g_{\mu\nu}\bar{\phi}} \\
\left\{\delta^-_\mu, \delta^-_\nu\right\} = \delta^g_{8g_{\mu\nu}\phi} & \left\{\delta^+_\mu, \delta^-_\nu\right\} = \delta^g_{-4iB_{\mu\nu} - 4g_{\mu\nu}\tau} + \text{eqs. de movimento},
\end{array}
\tag{3.3.8}
$$

onde δ^g_γ denota uma transformação de gauge com parâmetro γ.

No sentido da quantização da teoria, procedemos como antes e introduzimos um operador BRST generalizado Q

$$
Q = s + \omega^+\delta^+ + \omega^-\delta^- + \varepsilon^{+\mu}\delta^+_\mu + \varepsilon^{-\mu}\delta^-_\mu\,, \tag{3.3.9}
$$

onde s é a transformação BRST ordinária para as transformações de gauge e ω^+, ω^-, $\varepsilon^{+\mu}$ e $\varepsilon^{-\mu}$ são ghosts globais [30]. Definindo a ação de Q sobre o ghost de

Faddeev-Popov c como

$$
\begin{aligned}
Qc &= ic^2 + (\omega^{+^2} - 4\varepsilon^{-^2})\phi + (4\varepsilon^{+^2} - \omega^{-^2})\overline{\phi} + (\omega^+\omega^- + 4\varepsilon^{+\mu}\varepsilon^-_\mu)\tau + \\
&\quad + 4i\varepsilon^{+\mu}\varepsilon^{-\nu}B_{\mu\nu} - (\omega^+\varepsilon^{+\mu} + \omega^-\varepsilon^{-\mu})A_\mu \,, \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

segue que o operador Q é nilpotente modulo equações de movimento e uma derivada total

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= \left(\omega^+\varepsilon^{+\mu} + \omega^-\varepsilon^{-\mu}\right)\partial_\mu \text{ sobre } \left(\phi, \overline{\phi}, \eta, \xi, \tau, c, \omega^-, \omega^+, \varepsilon^{-\mu}, \varepsilon^{+\mu}\right), \\
Q^2 &= \left(\omega^+\varepsilon^{+\mu} + \omega^-\varepsilon^{-\mu}\right)\partial_\mu + \text{(eqs. de mov.) sobre } (A_\mu, H_\mu, \psi_\mu, \chi_\mu, B_{\mu\nu}, H_{\mu\nu}, \psi_{\mu\nu}, \chi_{\mu\nu}) \,.
\end{aligned}
\qquad (3.3.11)
$$

Introduzindo então um conjunto de anticampos Φ_i^* acoplados às transformações não lineares $Q\Phi_i$ dos campos, obtemos para a ação de campos exteriores

$$
\begin{aligned}
S_{\text{ext}} &= \mathrm{Tr}\int d^4x \Big(\Phi_i^* Q\Phi_i + 4g^2\varepsilon^{+\mu}\varepsilon^{-\nu}\Big(\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}A^{*\rho}H^{*\lambda} + \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B_\nu^{*\delta}H^*_{\mu\delta} - B_\mu^{*\delta}H^*_{\nu\delta}\right) - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\psi^{*\rho}\chi^{*\lambda} + \frac{1}{2}\left(\psi_\nu^{*\delta}\chi^*_{\mu\delta} - \psi_\mu^{*\delta}\chi^*_{\nu\delta}\right)\Big)\Big) \qquad (3.3.12)
\end{aligned}
$$

onde, para um campo tensorial de ordem p

$$
\Phi_i^* Q\Phi_i = \frac{1}{p!}\Phi_i^{*\mu_1..\mu_p} Q\Phi_{i\mu_1..\mu_p} \,.
$$

O termo de fixação de gauge no gauge de Landau é dado por

$$
S_{\text{gf}} = Q\ \mathrm{Tr}\int d^4x\,(\bar{c}\partial^\mu A_\mu) + 4g^2\varepsilon^{+\mu}\varepsilon^{-\nu}\,\mathrm{Tr}\int d^4x\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^\rho\bar{c}H^{*\lambda} \,, \qquad (3.3.13)
$$

onde o antighost $\bar{c}$, introduzido através da redefinição do anticampo A^*_μ para $A^*_\mu \to A^*_\mu + \partial_\mu\bar{c}$, é requerido transformar-se como

$$
\begin{aligned}
Q\bar{c} &= b \,, \\
Qb &= (\omega^+\varepsilon^{+\mu} + \omega^-\varepsilon^{-\mu})\partial_\mu\bar{c} \,, \qquad (3.3.14)
\end{aligned}
$$

com b sendo o multiplicador de Lagrange e

$$
Q^2 = \left(\omega^+\varepsilon^{+\mu} + \omega^-\varepsilon^{-\mu}\right)\partial_\mu \text{ sobre } (\bar{c}, b) \,. \qquad (3.3.15)
$$

Finalmente, a ação completa Σ

$$\Sigma = S^{\mathrm{N=4}} + S_{\mathrm{ext}} + S_{\mathrm{gf}} \ , \tag{3.3.16}$$

obedece à identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \left(\omega^{+}\varepsilon^{+\mu} + \omega^{-}\varepsilon^{-\mu}\right)\Delta^{\mathrm{cl}}_{\mu}, \tag{3.3.17}$$

com

$$\mathcal{S}\left(\Sigma\right) = \mathrm{Tr}\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i} + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + \left((\omega^{+}\varepsilon^{+\mu} + \omega^{-}\varepsilon^{-\mu})\partial_\mu\bar{c}\right)\frac{\delta\Sigma}{\delta b}\right) \ , \tag{3.3.18}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathrm{cl}}_{\rho} \ = \ & \mathrm{Tr}\int d^4x \Big(-A^*_\mu\partial_\rho A^\mu - H^{*\mu}\partial_\rho H_\mu - \frac{1}{2}B^{*\mu\nu}\partial_\rho B_{\mu\nu} - \tau^*\partial_\rho\tau + \\
& -\frac{1}{2}H^{*\mu\nu}\partial_\rho H_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\psi^{*\mu\nu}\partial_\rho\psi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi^{*\mu\nu}\partial_\rho\chi_{\mu\nu} + \psi^{*\mu}\partial_\rho\psi_\mu + \\
& + \chi^{*\mu}\partial_\rho\chi_\mu + \xi^*\partial_\rho\xi + \eta^*\partial_\rho\eta - \phi^*\partial_\rho\phi - \overline{\phi}^*\partial_\rho\overline{\phi} + c^*\partial_\rho c\Big) \ .
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Como antes, $\Delta^{\mathrm{cl}}_{\rho}$ é linear nos campos quânticos, representando uma quebra clássica não afetada assim por correções quânticas. O operador de Slavnov-Taylor linearizado $\mathcal{S}_\Sigma$

$$\mathcal{S}_\Sigma = \mathrm{Tr}\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i^*}\frac{\delta}{\delta\Phi_i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Phi_i}\frac{\delta}{\delta\Phi_i^*} + b\frac{\delta}{\delta\bar{c}} + (\omega^{+}\varepsilon^{+\mu} + \omega^{-}\varepsilon^{-\mu})\partial_\mu\bar{c}\frac{\delta}{\delta b}\right) \ , \tag{3.3.20}$$

é nilpotente modulo uma derivada total

$$\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{S}_\Sigma = (\omega^{+}\varepsilon^{+\mu} + \omega^{-}\varepsilon^{-\mu})\partial_\mu \ . \tag{3.3.21}$$

A tabela 3.3.2 exibe os números quânticos correspondentes aos anticampos e a tabela 3.3.3 os números quânticos relacionados ao ghost c, ghosts globais, antighost $\bar{c}$ e multiplicador de Lagrange b.

Repetindo os mesmos passos de SYM $N = 2$, a relação *um a um* (3.2.27) se generaliza [30] para

$$g\frac{\partial\Sigma}{\partial g} = -\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{96g^2}\mathcal{W}_\mu\mathcal{W}_\nu\mathcal{W}_\rho\mathcal{W}_\sigma\mathrm{Tr}\int d^4x\left(\omega^{+2}\,\phi - \omega^{-2}\,\overline{\phi} \ + \omega^{+}\omega^{-}\tau\right)^2 + \ \mathcal{S}_\Sigma\Xi^{-1} \ , \tag{3.3.22}$$

	A^*_μ	ψ^*_μ	χ^*_μ	$\psi^*_{\mu\nu}$	$\chi^*_{\mu\nu}$	ξ^*	η^*	ϕ^*	$\overline{\phi}^*$	τ^*	$B^*_{\mu\nu}$	H^*_μ	$H^*_{\mu\nu}$	c^*
Dim	3	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	3	3	3	3	2	2	4
CargaG	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	0	0	0	0	0
NG	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2
Est	A	C	C	C	C	C	C	A	A	A	A	A	A	C

Tabela 3.3.2: Dimensão (Dim), carga G, número de ghost (NG) e estatística (Est).

	c	ω^+	ω^-	ε^+	ε^-	$\bar{c}$	b
Dim	0	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	2	2
CargaG	0	-1	1	1	-1	0	0
NG	1	1	1	1	1	-1	0
Est	A	C	C	C	C	A	C

Tabela 3.3.3: Dimensão (Dim), carga G, número de ghost (NG) e estatística (Est).

para algum polinômio de campos local Ξ^{-1}. No presente caso o operador de subida $\mathcal{W}_\mu$ é definido como

$$\mathcal{W}_\mu = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\omega^+}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{+\mu}} + \frac{1}{\omega^-}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{-\mu}}\right), \mathcal{S}_\Sigma\right] , \tag{3.3.23}$$

e obedece às mesmas relações (3.2.24).

Novamente a equação de movimento do ghost c pode ser usada para mostrar que a solução do nível mais baixo das equações de descida, que corresponde à inserção $\left[\mathrm{Tr}\left(\omega^{+2}\phi - \omega^{-2}\overline{\phi} + \omega^+\omega^-\tau\right)^2 \cdot \Gamma\right]$, tem de fato dimensão anômala nula. Definindo o operador de contagem

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \varepsilon^{+\mu}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{+\mu}} + \varepsilon^{-\mu}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{-\mu}}, \tag{3.3.24}$$

podemos expandir $\mathcal{S}_\Sigma$ em potências de $\varepsilon^{+\mu}$ e $\varepsilon^{-\mu}$. Denotaremos a componente de ordem mais baixa por b_Σ, definido por $[\mathcal{N}_\varepsilon, b_\Sigma] = 0$. Assim, de modo análogo ao caso $N = 2$ podemos estabelecer

$$\left[\mathrm{Tr}\left(\omega^{+2}\phi - \omega^{-2}\overline{\phi} + \omega^+\omega^-\tau\right)^2 \cdot \Gamma\right] = b_\Sigma\left[\mathrm{Tr}\left(c\left(\omega^{+2}\phi - \omega^{-2}\overline{\phi} + \omega^+\omega^-\tau\right) + \frac{i}{3}c^3\right) \cdot \Gamma\right], \tag{3.3.25}$$

o que leva, tendo em mente a equação do ghost, ao anulamento da dimensão anômala de $\left[\mathrm{Tr}\left(\omega^{+2}\,\phi-\omega^{-2}\,\overline{\phi}\,+\omega^{+}\omega^{-}\tau\right)^{2}\cdot\Gamma\right]$ (apêndice A).

Portanto, de acordo com nosso teorema, a finitude UV de $N=4$ em todas as ordens da teoria de perturbação segue do já bem conhecido anulamento da função beta β_g em 1-loop [27].

Conclusões

Discutimos nesta tese TQCs finitas UV através de métodos puramente algébricos. Apresentaremos aqui um breve sumário dos resultados obtidos e as perspectivas de futuros desenvolvimentos.

Iniciamos aplicando o formalismo BRST para mostrar a finitude UV e a ausência de anomalia dos modelos PST auto-duais. Trabalhamos explicitamente em duas, quatro e seis dimensões e apontamos um argumento para uma possível extensão dos resultados para dimensões superiores. Um estudo completo para dimensões arbitrárias ainda é um ponto a ser desenvolvido.

Apesar de não possuírem constante de acoplamento e assim uma função beta associada, esses modelos contêm uma série infinita de interações, agrupadas em um termo não polinomial. Isso motivou uma análise de possíveis divergências existentes e de como absorvê-las. A finitude UV foi entendida então como a trivialidade da cohomologia BRST, com as divergências possíveis estando relacionadas a renormalizações das amplitudes de campos.

Com relação ao estudo da anomalia de gauge nos modelos PST, sua ausência já havia sido inferida em [45] para $D = 2$ por uma discussão canônica da álgebra de vínculos. Nós fornecemos uma demonstração diferente desse resultado e o estendemos para dimensões mais altas.

Uma questão interessante que merece futuras investigações é a implementação do vínculo de auto-dualidade em nível quântico. Como dito no capítulo 1, ele surge na aproximação clássica através da equação de movimento do campo de gauge e da simetria global presente no modelo PST, que é dada para D=2, por exemplo, pela transformação (1.2.3). No entanto, o entendimento desse vínculo em nível quântico é um problema em aberto. Em particular, a própria validade da simetria global após a quantização necessita ser melhor estudada.

Após os modelos PST, introduzimos um critério algébrico de finitude UV, o qual está baseado nas equações de descida que seguem da condição de consistência para contratermos invariantes. Consideramos os casos em que essas equações estabelecem uma correspondência um a um entre as soluções de seus níveis mais alto e mais baixo o que, de uma maneira geral, significa uma relação entre a ação e um polinômio de campos local invariante de gauge. O anulamento da dimensão anômala deste polinômio, estendido em nível quântico, leva ao teorema de finitude apresentado no capítulo 2, afirmando que se o coeficiente em 1-loop da função beta se anula, então a função beta se anula em todas as ordens. Nesse caso, uma análise em 1-loop permite-nos então estabelecer se um dado modelo pode ser finito UV em todas as ordens da teoria de perturbação. Isso pode ser conseguido por um ajuste de termos no coeficiente da função beta em 1-loop, como uma escolha apropriada das representações do grupo de gauge. Este resultado é bastante análogo ao teorema de não renormalização de Adler-Bardeen [76] para a anomalia de gauge. Como é bem conhecido, o requerimento do anulamento do coeficiente da anomalia de gauge em 1-loop resulta de fato em uma escolha cuidadosa das representações espinoriais, levando a classificar as representações livres de anomalia.

É importante ressaltar que o presente critério de finitude UV também abrange o caso no qual a função beta recebe contribuicões no máximo em 1-loop, como em SYM $N = 2$.

Os exemplos exibidos no capítulo 3 revelam o caráter geral do teorema, permitindo demonstrar as propriedades de não renormalização de vários modelos através de um mesmo argumento, conforme discutido explicitamente para as teorias de Chern-Simons acoplado a matéria, SYM $N = 2$ e $N = 4$.

Finalmente, um tópico importante a mencionar é que, apesar do teorema de finitude ter sido discutido para modelos com uma única constante de acoplamento, ele pode ser generalizado quando mais acoplamentos estão presentes. Nesse caso, a derivada da ação Σ com respeito a cada acoplamento identificará uma classe não trivial da cohomologia integrada do operador de Slavnov-Taylor linearizado $\mathcal{S}_\Sigma$. As funções beta dos acoplamentos que puderem ser postas em correspondência com polinômios de campos não renormalizados pertecendo a cohomologia de $\mathcal{S}_\Sigma$ no nível mais baixo das equações de descida obedecerão ao teorema de finitude. Por outro lado, as funções beta de acoplamentos relacionadas a classes de cohomologia não integradas no nível mais alto das equações de descida, como acontece por exemplo na teoria de Yang-Mills pura, serão livres para receberem correções quânticas.

Apêndice A

A Equação do Ghost

Neste apêndice revisaremos as propriedades da equação de movimento do ghost, que constitui uma poderosa identidade de Ward presente no gauge de Landau. Em particular, esta equação implica que o ghost c e os cociclos de ghost compostos $\mathrm{Tr}\, c^{(2p+1)}$ possuem dimensão anômala nula [21, 50].

A.1 A teoria clássica e a equação do ghost

Consideremos uma teoria de gauge em um espaço-tempo D-dimensional, cujo conteúdo de campos é dado por um campo de gauge $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$ na representação adjunta de um grupo de Lie compacto G e campos de matéria ϕ^i (escalares e/ou espinoriais) em uma representação arbitrária finita de G, com os geradores denotados por matrizes T_a. As transformações nilpotentes BRST são então dadas por

$$
\begin{aligned}
&sA_\mu = -D_\mu c = -(\partial_\mu c + [A_\mu, c]), s\phi^i = c^a T_a \phi^i, \\
&sc = c^2, \quad s\bar{c} = b, \quad sb = 0,
\end{aligned}
\tag{A.1.1}
$$

com c sendo o ghost Faddeev-Popov, $\bar{c}$ o antighost e b um multiplicador de Lagrange, todos na mesma representação do campo de gauge A_μ.

A ação clássica total invariante BRST é

$$\Sigma = \Sigma_{\rm inv}(A_\mu, \phi^i) + \Sigma_{\rm gf} + \Sigma_{\rm ext}, \tag{A.1.2}$$

onde $\Sigma_{\rm inv}(A_\mu, \phi^i)$ é a ação invariante de gauge e $\Sigma_{\rm gf}$ e $\Sigma_{\rm ext}$ são respectivamente a ação de fixação de gauge no gauge de Landau $\partial \cdot A = 0$ e a ação de anticampos, as quais são escritas como

$$\begin{aligned} \Sigma_{\rm gf} &= {\rm Tr} \int d^D x\, s\,(\bar{c}\partial^\mu A_\mu) = \int d^D x\,(b\partial^\mu A_\mu, + \bar{c}\partial^\mu D_\mu c)\,, \\ \Sigma_{\rm ext} &= \int d^D x \left({\rm Tr} \left(A^*_\mu s A^\mu + c^* sc \right) + \phi^{*i} s\phi^i \right). \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

A ação (A.1.2) obedece à identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^D x \left({\rm Tr} \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_\mu} \frac{\delta\Sigma}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^*}\frac{\delta\Sigma}{\delta c} + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} \right) + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^{*i}}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^i} \right) = 0. \tag{A.1.4}$$

Além da identidade de Slavnov-Taylor, a teoria é caracterizada por mais alguns vínculos extensíveis em nível quântico. A condição de gauge de Landau lê-se

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} = \partial^\mu A_\mu. \tag{A.1.5}$$

Derivando (A.1.4) com relação a b e usando (A.1.5) obtemos a equação do antighost

$$\left(\frac{\delta}{\delta\bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A^*_\mu} \right) \Sigma = 0, \tag{A.1.6}$$

a qual traduz a propriedade da ação depender de $\bar{c}$ e A^*_μ somente através da combinação $A^*_\mu + \partial_\mu \bar{c}$.

Temos ainda o vínculo da invariância da ação com relação às transformações rígidas, o qual é expresso de uma maneira funcional pela identidade de Ward

$$\begin{aligned} W^{\rm rig}\Sigma = \int d^D x &\left(\left[A_\mu, \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} \right] + \left\{ c, \frac{\delta\Sigma}{\delta c} \right\} + \left\{ \bar{c}, \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} \right\} + \left[b, \frac{\delta\Sigma}{\delta b} \right] + \right. \\ &\left. + \left[A^*_\mu, \frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_\mu} \right] + \left[c^*, \frac{\delta\Sigma}{\delta c^*} \right] - \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^i} T^a \phi^i + \phi^{*i} T^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^{*i}} \right) \tau_a \right) = 0. \end{aligned} \tag{A.1.7}$$

Finalmente, no gauge de Landau existe uma identidade integrada adicional: a equação de movimento do ghost. Derivando a ação com relação ao ghost c e integrando no espaço-tempo obtemos

$$\int d^D x \frac{\delta \Sigma}{\delta c} = \int d^D x \left([\partial_\mu \bar{c}, A^\mu] + \left[A^*_\mu, A^\mu \right] - [c^*, c] + (-1)^{[\phi^i]+1} \phi^{*i} T_a \phi^i \tau^a \right), \tag{A.1.8}$$

onde $[\phi^i]$ denota a paridade de ϕ^i, a qual é 0 para ϕ^i comutante e 1 para ϕ^i anticomutante. Integrando por partes o primeiro termo no lado direito de (A.1.8) e usando a condição de gauge (A.1.5) encontramos a equação funcional

$$\int d^D x \left(\frac{\delta}{\delta c} + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta b} \right] \right) \Sigma = \Delta^{\mathrm{cl}}, \tag{A.1.9}$$

onde

$$\Delta^{\mathrm{cl}} = \int d^D x \left(\left[A^*_\mu, A^\mu \right] - [c^*, c] + (-1)^{[\phi^i]+1} \phi^{*i} T_a \phi^i \tau^a \right), \tag{A.1.10}$$

com Δ^{cl} uma quebra clássica, isto é, uma quebra linear nos campos quânticos e assim não renormalizada.

Assumiremos aqui que a identidade de Slavnov-Taylor pode ser estendida em nível quântico, com os campos de matéria estando em representações livres de anomalia. Com relação aos demais vínculos, incluindo a equação do ghost, pode-se mostrar sua extensão quântica, conforme [21, 50]. Nas próximas seções discutiremos como a equação do ghost pode ser usada para mostrar que o ghost c e o cociclo $\operatorname{Tr} c^3$ possuem dimensão anômala nula no gauge de Landau. A generalização do resultado para $\operatorname{Tr} c^{(2p+1)}$, com p um inteiro positivo qualquer, pode ser encontrada em [77].

A.2 Não renormalização do ghost c

Os possíveis contratermos invariantes L_i os quais podem ser adicionados à ação a cada ordem da teoria de perturbação obedecem à condição de consistência

$$\mathcal{S}_\Sigma L_i = 0, \tag{A.2.1}$$

onde $\mathcal{S}_\Sigma$ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado

$$\mathcal{S}_\Sigma = \int d^D x \left(\mathrm{Tr} \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^*_\mu} \frac{\delta}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A^\mu} \frac{\delta}{\delta A^*_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c} \frac{\delta}{\delta c^*} + b \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta\Sigma}{\delta \phi^{*i}} \frac{\delta}{\delta \phi^i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta \phi^i} \frac{\delta}{\delta \phi^{*i}} \right). \tag{A.2.2}$$

Os vários contratermos invariantes correspondem a renormalizações dos parâmetros da teoria e das amplitudes de campos. Em particular, o contratermo relacionado à renormalização do ghost c e de seu anticampo c^* é

$$L_{(c)} = \mathcal{S}_\Sigma \int d^D x \, \mathrm{Tr} c^* c = \mathcal{N}_c \Sigma, \tag{A.2.3}$$

onde $\mathcal{N}_c$ denota o operador de contagem

$$\mathcal{N}_c = \int d^D x \left(c^* \frac{\delta}{\delta c^*} - c \frac{\delta}{\delta c} \right) \tag{A.2.4}$$

O contratermo $L_{(c)}$ pode ser escrito como

$$L_{(c)} = \int d^D x \, \mathrm{Tr} \left(-c^* c^2 + \text{termos independentes de c}^* \right). \tag{A.2.5}$$

No entanto a preservação da equação do antighost (A.1.9) requer que os contratermos obedeçam à equação homogênea

$$\int d^D x \left(\frac{\delta}{\delta c} + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta b} \right] \right) L_i = 0. \tag{A.2.6}$$

Este requerimento exclui o contratermo (A.2.5), o que assegura a não renormalização do ghost c e de seu anticampo c^*.

A.3 Não renormalização de $\mathrm{Tr}\, c^3$

Para estudarmos a dimensão anômala do campo de ghost composto $\mathrm{Tr}\, c^3$ introduzimos na ação clássica Σ, dada em (A.1.2), o termo

$$\Sigma_{(\rho)} = \int d^D x \, \frac{\rho}{3} \mathrm{Tr}\, c^3, \tag{A.3.1}$$

onde ρ é um campo externo de dimensão D e número de ghost -3. A nova ação clássica $\tilde{\Sigma}$ é então

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + \Sigma_{(\rho)}, \tag{A.3.2}$$

A equação do ghost permanece válida, mas é modificada para

$$\int d^D x \left(\frac{\delta}{\delta c} + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta b} \right] + \rho \frac{\delta}{\delta c^*} \right) \tilde{\Sigma} = \Delta^{\mathrm{cl}}, \tag{A.3.3}$$

com a quebra clássica Δ^{cl} permanecendo inalterada.

A condição de gauge, a equação do antighost e a identidade de Slavnov-Taylor são as mesmas das equações (A.1.5), (A.1.6) e (A.1.4), respectivamente. A extensão quântica desses vínculos, inclusive da identidade de Slavnov-Taylor, permanece também inalterada já que, como discutido em [50], a introdução do campo externo ρ não contribui com nenhuma anomalia de gauge.

Os possíveis contratermos são os mesmos com a adição de um contratermo da forma (A.3.1)

$$L_{(\rho)} = \int d^D x \, \frac{\rho}{3} \mathrm{Tr}\, c^3 = \mathcal{N}_\rho \tilde{\Sigma}, \tag{A.3.4}$$

onde $\mathcal{N}_\rho$ é o operador de contagem

$$\mathcal{N}_\rho = \int d^D x \, \rho \frac{\delta}{\delta \rho}. \tag{A.3.5}$$

No entanto este contratermo, junto com o contratermo (A.2.5) são descartados pela equação do ghost (A.3.3). Isto significa que o campo externo ρ não é renormalizado, implicando na ausência de (A.3.5) da equação de Callan-Symanzik para o funcional de vértice $\Gamma = \tilde{\Sigma} + O(\hbar)$

$$\mathcal{C}\Gamma = 0, \tag{A.3.6}$$

onde o operador de Callan-Symanzik $\mathcal{C}$, o qual é dado genericamente por (2.1.10) (capítulo 2), é independente de ρ.

Logo, derivando (A.3.6) com relação a ρ e tomando $\rho = 0$, é imediato que a extensão quântica de $\mathrm{Tr}\, c^3$, definida pela inserção

$$\left[\mathrm{Tr}\, c^3 \cdot \Gamma\right] \equiv \left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho}\right|_{\rho=0}, \tag{A.3.7}$$

não é renormalizada, possuindo assim dimensão anômala nula

$$\mathcal{C}\left[\mathrm{Tr}\, c^3 \cdot \Gamma\right] = 0. \tag{A.3.8}$$

Apêndice B

O Procedimento de *Twist* em Teorias de Super Yang-Mills

O *twist* é uma mudança linear de variáveis em teorias supersimétricas, a qual tem a propriedade substituir índices espinoriais por índices de Lorentz, permitindo levar espinores em campos escalares, vetoriais e tensoriais anticomutantes. Neste apêndice revisaremos o procedimento de *twist* em teorias de SYM $N = 2$ e $N = 4$, abordando as transformações na álgebra de supersimetria e no conteúdo de campos.

B.1 O *twist* em SYM $N = 2$

Iniciaremos com o *twist* da álgebra de supersimetria de $N = 2$ na ausência de carga central e então passaremos à discussão da transformação dos campos componentes. Seguiremos a análise das referências [78, 70].

B.1.1 A álgebra de supersimetria $N = 2$

Na ausência de extensão central a superálgebra $N = 2$ é caracterizada por 8 cargas $\left(\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot\alpha}\right)$ obedecendo às seguintes relações

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{j\dot\alpha}\right\} &= \delta^i_j \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\alpha} \partial_\mu, \\
\left\{\mathcal{Q}^i_\alpha, \mathcal{Q}^j_\beta\right\} &= \left\{\overline{\mathcal{Q}}^i_{\dot\alpha}, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot\beta}\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

onde $(\alpha, \dot\alpha) = 1, 2$ são índices espinoriais, $(i, j) = 1, 2$ os índices internos rotulando as diferentes cargas de $N = 2$ e $\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\alpha} = (1, i\,\vec\sigma)$, com $\vec\sigma$ denotando as matrizes de Pauli.

Uma propriedade especial de $N = 2$ é que tanto os índices espinoriais como os índices internos tomam valores de 1 até 2, o que possibilita identificar o índice interno i com um dos índices espinoriais $(\alpha, \dot\alpha)$. É precisamente esta identificação que define o procedimento de *twist*. Conforme [78, 70] isso é equivalente a uma redefinição do grupo de rotação quadridimensional. De fato, no espaço-tempo plano Euclideano o grupo de simetria global de $N = 2$ é $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)_\mathcal{R}$, onde $SU(2)_L \times SU(2)_R$ é o grupo de rotação, $SU(2)_I$ é o grupo de simetria interna e $U(1)_\mathcal{R}$ corresponde à simetria $\mathcal{R}$, com as cargas $\mathcal{R}$ de $\left(\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot\alpha}\right)$ sendo respectivamente $(1, -1)$. O procedimento de *twist* consiste em substituir o grupo de rotação $SU(2)_L \times SU(2)_R$ por $SU(2)'_L \times SU(2)_R$, onde $SU(2)'_L$ é o subgrupo diagonal de $SU(2)_L \times SU(2)_I$. Identificando portanto o índice interno i com o índice espinorial α, a álgebra de $N = 2$ (B.1.1) torna-se

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{Q}^\beta_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{\gamma\dot\alpha}\right\} &= \delta^\beta_\gamma \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\alpha} \partial_\mu, \\
\left\{\mathcal{Q}^\beta_\alpha, \mathcal{Q}^\delta_\gamma\right\} &= \left\{\overline{\mathcal{Q}}_{\alpha\dot\alpha}, \overline{\mathcal{Q}}_{\beta\dot\beta}\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{B.1.2}$$

Vamos agora definir os geradores $(\delta, \delta_\mu, \delta_{\mu\nu})$, com cargas $\mathcal{R}$ $(1, -1, 1)$ respectivamente, por

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\beta\alpha},$$

$$\delta_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathcal{Q}}_{\alpha\dot{\alpha}} \ (\overline{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} ,$$

$$\delta_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}\mathcal{Q}_{\beta\alpha} = -\delta_{\nu\mu}, \tag{B.1.3}$$

onde $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é o tensor antissimétrico responsável por abaixar e levantar índices espinoriais α e

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\overline{\sigma}_\mu). \tag{B.1.4}$$

Note que os geradores $\delta_{\mu\nu}$ são auto-duais

$$\delta_{\mu\nu} = \widetilde{\delta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta^{\rho\sigma}, \tag{B.1.5}$$

o que é consequência das matrizes $\sigma_{\mu\nu}$ serem auto-duais. As equações (B.1.3) mostram que podemos substituir as cargas espinoriais $\left(\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot{\alpha}}\right)$ pelos geradores escalar δ, vetorial δ_μ e tensorial auto-dual $\delta_{\mu\nu}$. Em termos desses geradores a álgebra de supersimetria é dada por

$$\begin{aligned}
&\delta^2 = 0, \\
&\{\delta, \delta_\mu\} = \partial_\mu, \\
&\{\delta_\mu, \delta_\nu\} = 0
\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

e

$$\begin{aligned}
\{\delta_\mu, \delta_{\rho\sigma}\} &= -(\varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu}\partial^\nu + g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho), \\
\{\delta, \delta_{\mu\nu}\} &= \{\delta_{\mu\nu}, \delta_{\rho\sigma}\} = 0,
\end{aligned} \tag{B.1.7}$$

onde $g_{\mu\nu} = diag(+,+,+,+)$ é a métrica plana Euclideana e onde fizemos uso das relações

$$\begin{aligned}
&tr(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}, \\
&\sigma_{\mu\nu}\sigma_\rho = -(\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\sigma^\tau + g_{\mu\rho}\sigma_\nu - g_{\nu\rho}\sigma_\mu).
\end{aligned} \tag{B.1.8}$$

Como podemos ver de (B.1.6), a álgebra de supersimetria, quando escrita em termos dos novos geradores, apresenta uma estrutura algébrica típica das teorias topológicas, com o gerador escalar δ desempenhando um papel de uma carga do tipo BRST e o gerador vetorial δ_μ correspondendo à supersimetria vetorial.

É importante observar que as cargas supersimétricas $\left(\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot\alpha}\right)$, tais como definidas em (B.1.1), referem-se a uma realização linear de supersimetria, significando que elas agem linearmente nas componentes dos multipletos de $N = 2$. Se ao invés disso, trabalhamos no gauge de Wess-Zumino, o que tem a vantagem reduzir o número de campos componentes da teoria, a supersimetria é realizada não linearmente e a álgebra supersimétrica se fecha apenas modulo equações de movimento e transformações de gauge. Dessa forma, a álgebra $N = 2$ no gauge de Wess-Zumino se escreve como

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathcal{Q}^i_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{j\dot\alpha}\right\} &= \delta^i_j \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\alpha} \partial_\mu + (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}) \,, \\
\left\{\mathcal{Q}^i_\alpha, \mathcal{Q}^j_\beta\right\} &= \left\{\overline{\mathcal{Q}}^i_{\dot\alpha}, \overline{\mathcal{Q}}^j_{\dot\beta}\right\} = (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}). \qquad \text{(B.1.9)}
\end{aligned}
$$

Analogamente, para a versão após o *twist* temos

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &= (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}), \\
\{\delta, \delta_\mu\} &= \partial_\mu + (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}), \\
\{\delta_\mu, \delta_\nu\} &= (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}), \qquad \text{(B.1.10)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\{\delta, \delta_{\mu\nu}\} &= \{\delta_{\mu\nu}, \delta_{\rho\sigma}\} = (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}), \\
\{\delta_\mu, \delta_{\rho\sigma}\} &= -(\varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu}\partial^\nu + g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho) + (\text{transf. gauge}) + (\text{eqs. de mov.}).
\end{aligned}
\qquad \text{(B.1.11)}
$$

B.1.2 O *twist* do multipleto de gauge

O multipleto de gauge de SYM $N = 2$ contém um campo de gauge A_μ, um campo espinorial ψ^i_α $(i = 1, 2)$ e seu conjugado $\overline{\psi}^i_{\dot\alpha}$ e dois escalares $(\phi, \overline{\phi})$, onde $\overline{\phi}$ é o complexo conjugado de ϕ. Todos esses campos são considerados estarem na representação adjunta do grupo de gauge.

Vamos então aplicar o procedimento de *twist* para o multipleto de gauge de $N = 2$. Identificando o índice interno i com o índice espinorial α, o campo espinorial $\overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}}$ pode ser relacionado a um campo vetorial anticomutante ψ_μ

$$\overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}} \stackrel{\text{Twist}}{\longrightarrow} \overline{\psi}_{\alpha\dot{\alpha}} \longrightarrow \psi_\mu = (\overline{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\overline{\psi}_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{B.1.12}$$

Para o espinor ψ^i_β temos

$$\psi^i_\beta \stackrel{\text{Twist}}{\longrightarrow} \psi_{\alpha\beta} = \psi_{(\alpha\beta)} + \psi_{[\alpha\beta]}, \tag{B.1.13}$$

onde $\psi_{(\alpha\beta)}$ e $\psi_{[\alpha\beta]}$ são respectivamente as componentes simétricas e antissimétricas nos índices espinoriais α, β. À parte antissimétrica $\psi_{[\alpha\beta]}$ é associado um campo escalar anticomutante η

$$\psi_{[\alpha\beta]} \longrightarrow \eta = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{[\alpha\beta]}, \tag{B.1.14}$$

enquanto a parte simétrica $\psi_{(\alpha\beta)}$ é levada em um campo antissimétrico auto-dual $\chi_{\mu\nu}$

$$\psi_{(\alpha\beta)} \longrightarrow \chi_{\mu\nu} = \tilde{\chi}_{\mu\nu} = (\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}\psi_{(\alpha\beta)}. \tag{B.1.15}$$

Dessa maneira, o procedimento de *twist* substitui o multipleto vetorial $(A_\mu, \psi^i_\alpha, \overline{\psi}^i_{\dot{\alpha}}, \phi, \overline{\phi})$ por $(A_\mu, \psi_\mu, \chi_{\mu\nu}, \eta, \phi, \overline{\phi})$.

B.2 O *twist* em SYM $N = 4$

O caso de SYM $N = 4$ pode ser tratado de maneira similar a $N = 2$. Vamos começar descrevendo como o procedimento de *twist* pode ser aplicado. O grupo de simetria global da teoria de SYM $N = 4$ em espaço-tempo Euclideano é $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$, onde $SU(2)_L \times SU(2)_R$ é o grupo de rotação e $SU(4)$ é o grupo de simetria interna de $N = 4$. Assim a operação de *twist* pode ser realizada de mais de uma maneira, dependendo de como o grupo de simetria interna é combinado com o grupo de rotação [73]. Nós seguiremos o procedimento de Vafa e Witten [74], no qual $SU(4)$ é separado em $SU(2)_F \times SU(2)_I$, de modo que o grupo de simetria global após o *twist* é $SU(2)'_L \times SU(2)_R \times SU(2)_F$, onde $SU(2)'_L$ é o subgrupo diagonal de $SU(2)_L \times SU(2)_I$ e $SU(2)_F$ é um grupo de simetria interna residual. A transformação de *twist* corresponde a identificar o índice do grupo interno $SU(2)_I$ com o índice espinorial α de $SU(2)_L$.

Então, analogamente ao caso $N = 2$ substituimos as 16 supercargas $\left(\mathcal{Q}^u_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}^v_{\dot\alpha}\right)$ de $N = 4$, onde $(u, v = 1, .., 4)$ são índices da representação fundamental de $SU(4)$, por geradores δ^i, δ^i_μ e $\delta^i_{\mu\nu}$ [74, 75, 30], onde $i = 1, 2$ denota o índice interno da representação fundamental da simetria residual $SU(2)_F$. Esses geradores também satisfazem a uma álgebra típica de teorias topológicas, conforme (3.3.8) (capítulo 3).

Os campos do multipleto de $N = 4$ são dados por $(A_\mu, \lambda^\alpha_u, \overline{\lambda}^u_{\dot\alpha}, \Phi_{uv})$, com $(u, v = 1, .., 4)$ índices de $SU(4)$, e os seis campos escalares reais do modelo são coletados em um tensor antissimétrico e auto-conjugado Φ_{uv}. Novamente de modo similar a $N = 2$, estes campos decompõem-se sob o novo grupo de simetria como [74, 75, 30]

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A_\mu \, , \\
\overline{\lambda}^u_{\dot\alpha} &\rightarrow \psi^i_\mu \, , \\
\lambda^\alpha_u &\rightarrow \eta^i, \, \chi^i_{\mu\nu} \, , \\
\Phi_{uv} &\rightarrow B_{\mu\nu}, \, \phi^{ij} \, ,
\end{aligned}
\tag{B.2.1}
$$

onde $(i, j = 1, 2)$ são índices do grupo de isospin residual $SU(2)_F$, ϕ^{ij} é um tensor simétrico e $\chi^i_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são auto-duais com relação aos índices de Lorentz.

Podemos abrir mão da invariância de isospin manifesta e explicitar os dubletos de $SU(2)_F$ como $\psi^i_\mu = (\psi_\mu, \chi_\mu)$, $\eta^i = (\eta, \xi)$, $\chi^i_{\mu\nu} = (\chi_{\mu\nu}, \psi_{\mu\nu})$ e o tripleto como

$\phi^{ij} = (\phi, \overline{\phi}, \tau)$. Explicitando também os geradores δ^i, δ^i_μ e $\delta^i_{\mu\nu}$ obtemos (δ^+,δ^-), (δ^+_μ,δ^-_μ) e ($\delta^+_{\mu\nu}$,$\delta^-_{\mu\nu}$).

Nesta formulação da teoria, a invariância sob o subgrupo de Cartan de $SU(2)_F$ ainda é mantida manifesta, permitindo definir uma carga conservada, similar a um número de ghost. Esta carga será chamada aqui de carga G. Campos com carga G ímpar possuem caráter anticomutante e campos com carga G par são comutantes. Esse novo número quântico pode ser visto como um resíduo fermiônico, identificando os campos relacionados a espinores na tranformação de *twist*. As cargas G dos geradores e dos campos são dadas, respectivamente, nas tabelas B.2.1 e B.2.2.

	δ^+	δ^-	δ^+_μ	δ^-_μ	$\delta^+_{\mu\nu}$	$\delta^-_{\mu\nu}$
Carga G	1	-1	-1	1	1	-1

Tabela B.2.1: Carga G dos geradores de $N = 4$.

	A_μ	ψ_μ	χ_μ	$\psi_{\mu\nu}$	$\chi_{\mu\nu}$	ξ	η	ϕ	$\overline{\phi}$	τ	$B_{\mu\nu}$
Carga G	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	0	0

Tabela B.2.2: Carga G dos campos do multipleto de $N = 4$.

Referências Bibliográficas

[1] J. Schwinger (editor), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics* , Dover, New York, 1958.

[2] N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of Quantized Fields*, J. Willey, New York, 1980;
H. Epstein and V. Glaser, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **19** (1973) 211.

[3] G. 't Hooft, *Gauge Theory and Renormalization*, hep-th/9410038, apresentado na *International Conference on: "The History of the Original Ideas and Basic Discorveries in Particle Physics"*, Erice, Italy.

[4] A. Salam, *Proceedings of the* 8^{th} *Nobel Symposium*, Ed. N. Svartholm, Stockholm, 1968; *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 525, *Science* **210** (1980) 723 (Nobel Lecture);
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264; *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 515, *Science* **210** (1980) 1212 (Nobel Lecture);
S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579; *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 539, *Science* **210** (1980) 1319 (Nobel Lecture).

[5] C. Rovelli, *J.Math.Phys.* **41** (2000) 3776 (hep-th/9910131);
A. Ashtekar, gr-qc/9901023; gr-qc/9302024, apresentado na *Les Houches Summer School on Gravitation and Quantization* (1992); *Non-Perturbative Canonical Gravity* World Scientific, Singapoure (1991).

[6] J. Polchinski, *String Theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge (1998); *Int.J.Mod.Phys.* **A14** (1999) 2633 (hep-th/9812104), apresentado na *26th SLAC Summer Institute on Particle Physics*, Stanford (1998); M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[7] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **92** (1984) 455.

[8] C. M. Hull and E. Witten, *Phys. Lett.* **B160** (1985) 398.

[9] C. Becchi and O. Piguet, *Nucl. Phys.* **B315** (1989) 153.

[10] C. Becchi and O. Piguet, *Nucl. Phys.* **B347** (1990) 596.

[11] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.

[12] R.D. Pisarski and S. Rao, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 2081;
R.D. Pisarski, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 664.

[13] G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz, *Nucl. Phys.* **B381** (1992) 222 (hep-th/9206007).

[14] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, *JHEP* **02** (1998) 002 (hep-th/9711191).

[15] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, *Lett. Math. Phys.* **47** (1999) 265.

[16] V.E.R. Lemes, C.L. de Jesus, C.A.G. Sasaki, S.P. Sorella, L.C.Q. Vilar and O.S.Ventura, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 324 (hep-th/9709098);
V.E.R. Lemes, C.L. de Jesus, S.P. Sorella, L.C.Q. Vilar and O.S.Ventura,*Phys. Rev.* **D58** (1998) 045010 (hep-th/9801021).

[17] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B311** (1988) 46, *Phys.Lett.* **B206** (1988) 601.

[18] S. Deser, J. McCarthy and Z.Yang, *Phys. Lett.* **B222** (1989) 61;
E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 111; *Nucl. Phys.* **B330** (1990) 575;
M. Chaichian and W. F. Chen, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 125004 (hep-th/9806127);
M. Chaichian, W. F. Chen and V. Ya. Fainberg, *Eur. Phys. J.* **C5** (1998) 545 (hep-th/9706068);
M. Chaichian, W. F. Chen and H.C. Lee, *Phys. Lett.* **B409** (1997) 325 (hep-th/9703219).

[19] A. Blasi and R. Collina, *Nucl. Phys.* **B345** (1990) 472.

[20] F. Delduc, O. Piguet, C. Lucchesi and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 313.

[21] A. Blasi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B356** (1991) 154.

[22] G. Semenoff, P. Sodano and Yong-Shi Wu, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 715;
W. Chen, G. Semenoff and Yong-Shi Wu, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 1833;
W. Chen and G. Semenoff, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1625.

[23] A. Blasi, N. Maggiore and S.P. Sorella, *Phys. Lett.* **B285** (1992) 54 (hep-th/9204045);
A.N. Kapustin and P.I. Pronin , *Phys. Lett.* **B318** (1993) 465.

[24] S. Coleman and B. Hill, *Phys. Lett.* **B159** (1985) 184.

[25] T. Matsuyama, *Progr. Theoret. Phys.* **77** (1987) 711.

[26] F.T. Brandt, A. Das and J. Frenkel, *Phys. Lett.* **B494** (2000) 339 (hep-th/0009093); *Phys. Rev.* **D63** (2000) 085015 (hep-th/0012087).

[27] S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 413;
D.R.T. Jones, *Phys. Lett.* **B72** (1977) 199;

E.C. Poggio and H.N. Pendleton, *Phys. Lett.* **B72** (1977) 200;
O. Tarasov, A. Vladimirov and A. Yu, *Phys. Lett.* **B93** (1980) 429;
M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1063;
W.E. Caswell and D. Zanon, *Nucl. Phys.* **B182** (1981) 125.

[28] M.F. Sohnius and P.C. West, *Phys. Lett.* **B100** (1981) 245;
P.S. Howe, K.S. Stelle and P.C.West, *Phys. Lett.* **B124** (1983) 55;
S. Mandelstam, *Nucl. Phys.* **B213** (1983) 149;
L. Brink, O. Lindgren and B. Nilsson, *Nucl. Phys.* **B212** (1983) 401;
P.S.Howe, K.S.Stelle and P.K.Townsend *Nucl. Phys.* **B236** (1984) 125;

[29] P.L. White, *Class. Quan. Grav.* **9** (1992) 413.

[30] V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy, S.P. Sorella, A. Tanzini and O.S. Ventura, *JHEP* **01** (2001) 016 (hep-th/0011001).

[31] L.V. Avdeev and O.V. Tarasov, *Phys. Lett.* **B112** (1982) 356.

[32] M. Grisaru and W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 292.

[33] A. Blasi, V.E.R. Lemes, N. Maggiore, S.P. Sorella, A. Tanzini, O.S. Ventura and L.C.Q. Vilar, *JHEP* **05** (2000) 039 (hep-th/0004048).

[34] I.L. Buchbinder, S.M. Kuzenko and B.A. Ovrut, *Phys. Lett.* **B433** (1998) 335 (hep-th/9710142).

[35] O. Piguet and K. Sibold, *Phys. Lett.* **B177** (1986) 373; *Int. Journ. Mod. Phys.* **A1** (1986) 913;
C. Lucchesi, O. Piguet and K. Sibold, *Phys. Lett.* **B201** (1988) 241; *Int. Journ. Mod. Phys.* **A2** (1987) 385; *Helv. Phys. Acta* **61** (1988) 321.

[36] A. Blasi and N. Maggiore, *Class. Quan. Grav.* **10** (1993) 37 (hep-th/9207008).

[37] C. Lucchesi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 395 (hep-th/9208047).

[38] A.S. Schwarz, *Lett.Math.Phys.* **2** (1978) 247.

[39] F. Delduc, F. Gieres and S.P. Sorella, *Phys. Lett.* **B225** (1989) 367;
F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 313;
D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.

[40] A. Brandhuber, O. Moritsch, M.W. de Oliveira, O. Piguet and M. Schweda, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 173 (hep-th/9407105).

[41] G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi and R. Collina, *Nucl.Phys.* **B197** (1982) 347.

[42] G. Barnich, *JHEP* **12** (1998) 003 (hep-th/9805030).

[43] O.M. Del Cima, O. Piguet and M.S. Sarandy, *Nucl. Phys.* **B600** (2001) 387 (hep-th/0012067).

[44] P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Phys.Lett.* **B352** (1995) 59 (hep-th/9503182); *Phys.Rev.* **D52** (1995) R4277 (hep-th/9506109).

[45] P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 6292 (hep-th/9611100).

[46] P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics*, (Leuven University Press), **Series BV6** (1996) 167 (hep-th/9509052).

[47] J.H. Schwarz and A. Sen, *Nucl.Phys.* **B411** (1994) 35 (hep-th/9304154).

[48] K. Lechner, P.A. Marchetti and M. Tonin, hep-th/0107061;
K. Lechner and P.A. Marchetti, *Nucl. Phys.* **B569** (2000) 529 (hep-th/9906079);
K. Lechner, *Fortsch.Phys.* **47** (1999) 209 (hep-th/9712231); *Nucl. Phys.* **B537** (1999) 361 (hep-th/9808025);
G. Dall'Agata, K. Lechner and M. Tonin, *Nucl. Phys.* **B512** (1998) 179 (hep-th/9710127); *JHEP* **9807** (1998) 017 (hep-th/9806140);
I. Bandos, K. Lechner, A. Nurmagambetov, P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Phys.Rev.Lett.* **78** (1997) 4332 (hep-th/9701149); *Phys.Lett.* **B408** (1997) 135 (hep-th/9703127).

[49] V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy, S.P. Sorella, O.S. Ventura and L.C.Q. Vilar, hep-th/0103110 (Aceito para publicação em *J. Phys. A*).

[50] O. Piguet and S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Monographs Series **m 28**, Springer Verlag, Berlim, 1995.

[51] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, *Phys.Rept.* **338** (2000) 439 (hep-th/0002245).

[52] D.J. Gross, J.A. Harvey and E. Martinec *Phys.Rev.Lett.* **54** (1985) 502.

[53] C.G. Callan, J.A. Harvey and A. Strominger, *Nucl.Phys.* **B367** (1991) 60;
E. Witten, *J.Geom.Phys.* **22** (1997) 103 (hep-th/9610234) and *JHEP* **0005** (2000) 032 (hep-th/9912279).

[54] P.S. Howe, G. Sierra and P.K. Towsend, *Nucl.Phys.* **B221** (1983) 331;
L.J. Romans *Nucl.Phys.* **B276** (1986) 71;
E. Bergshoeff, E. Sezgin and A. Van Proeyen, *Class.Quant.Grav.* **16** (1999) 3193 (hep-th/9904085).

[55] P.S. Howe and P.C. West, *Nucl. Phys.* **B238** (1984) 181;
G. Dall'Agata, K. Lechner and M. Tonin, hep-th/9812170, apresentado em

Quantum Aspects of Gauge Theories, Supersymmetry and Unification, Grécia, 1998.

[56] X.G. Wen, *Phys.Rev.Lett.* **64** (1990) 2206.

[57] D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 880.

[58] R. Floreanini and R. Jackiw, *Phys.Rev.Lett.* **59** (1987) 1873.

[59] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Phys.Lett.* **B206** (1988) 650.

[60] B. McClain, Y.S. Wu and F. Yu *Nucl.Phys.* **B343** (1990) 689.

[61] C. Wotzasek, *Phys.Rev.Lett.* **66** (1991) 129.

[62] I. Martin and A. Restuccia, *Phys.Lett.* **B323** (1994) 311;
F.P. Devecchi and M. Henneaux, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 1606 (hep-th/9603031).

[63] A. Maznytsia, C.R. Preitschopf and D. Sorokin, *Nucl.Phys.* **B539** (1999) 438 (hep-th/9805110).

[64] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Phys.Rev.* **D28** (1983) 2567.

[65] R. Leitgeb, M. Schweda and H. Zerrouki, *Nucl.Phys.* **B542** (1999) 425 (hep-th/9904204).

[66] J.H. Lowenstein, *Phys.Rev.* **D4** (1971) 2281, *Comm.Math.Phys.* **24** (1971) 1;
Y.M.P. Lam, *Phys.Rev.* **D6** (1972) 2145, *Phys.Rev.* **D7** (1973) 2943;
T.E. Clark and J.H. Lowenstein, *Nucl.Phys.* **B113** (1976) 109.

[67] J. Dixon, *Comm.Math.Phys.* **139** (1991) 495;
F. Brandt, N. Dragon and M. Kreuzer, *Phys.Lett.* **B231** (1989) 263, *Nucl.Phys.* **B332** (1990) 224.

[68] C. Becchi, A. Blasi, G. Bonneau, R. Collina and F. Delduc, *Comm.Math.Phys.* **120** (1988) 121.

[69] D.J. Gross, *Applications of the renormalization group to high energy physics,* in *Les Houches* 1975, *Proceedings, Methods in Field Theory,* eds. R Balian and J. Zinn-Justin, North-Holland, 1976;
S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields,* vol.II, Cambridge University Press, 1996.

[70] F. Fucito, A. Tanzini, L.C.Q. Vilar, O.S. Ventura, C.A.G. Sasaki and S.P. Sorella, *Lectures given at 1st School on Field Theory and Gravitation*, Vitoria, Brazil, 1997, hep-th/9707209;
A. Tanzini, O.S. Ventura, L.C.Q. Vilar and S.P. Sorella, *J. Phys.* **G26** (2000) 1117.

[71] E. Guadagnini, M. Maggiore and S.P. Sorella, *Phys. Lett.* **B255** (1991) 65;
S.P. Sorella, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993) 231.

[72] N. Maggiore, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 3937.

[73] J.P. Yamron, *Phys. Lett.* **B213** (1988) 325.

[74] C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 3.

[75] C. Lozano, Ph.D. thesis, Universidad de Santiago de Compostela, Spain 1999, hep-th/9907123.

[76] S.L. Adler and W.A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1517.

[77] O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B381** (1992) 373.

[78] M. Mariño, Ph.D. thesis, Universidad de Santiago de Compostela, Spain 1996, hep-th/9701128.

“Finitude em Teoria Quântica de Campos em Estudo Algébrico”

MARCELO SILVA SARANDY

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Olivier Piguet – Presidente/UFES

Sílvio Paolo Sorella – UERJ

Francesco Toppan - CBPF

Sebastião Alves Dias – CBPF

Convidado especial: Alexander William Smith – CBPF

Suplente: Cresus Fonseca de Lima Godinho - CBPF

Rio de Janeiro 04 de dezembro de 2001