

Tese de Doutorado

# Quantização Estocástica e Aplicações

---

Thalles Carvalho G. R. de Aguiar

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, outubro de 2012.

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

## **Quantização Estocástica e Aplicações**

Tese de Doutorado submetida ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas sob orientação do Prof. Dr. Nami Fux Svaiter para obtenção do título de Doutor em Física por Thalles Carvalho G. R. de Aguiar.

Rio de Janeiro, outubro de 2012.

À minha família

## **Agradecimentos**

- À minha família, namorada e amigos por todo apoio e estímulo.
- Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter pela orientação, motivação, paciência e ajuda.
- Aos colegas do CBPF pela ajuda nos trabalhos.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

## Resumo

Nesta tese, estudamos duas aplicações distintas do método de quantização estocástica. Na primeira situação, implementamos o método de quantização estocástica para um campo escalar auto-interagente definido na versão euclidiana da variedade de de Sitter. As funções de correlação dois pontos associadas ao campo escalar massivo auto-interagente são calculadas até a primeira ordem na expansão perturbativa da constante de acoplamento  $\lambda$ , e analisamos a regularização estocástica covariante aplicada a esta situação. Em seguida, aplicamos a quantização de Parisi e Wu para estudar um campo escalar livre a temperatura finita no espaço-tempo de Minkowski. Primeiramente, utilizamos a abordagem markoviana para obter o propagador livre da teoria. Em seguida, aplicamos a abordagem não-markoviana da quantização estocástica a esta situação, e investigamos a convergência do processo estocástico através de uma análise de Fokker-Planck.

## Abstract

In this thesis, we study two distinct applications of the stochastic quantization method. In the first situation, we implement the quantization method of Parisi and Wu into the study of a self-interacting field defined in the Euclidean version of the de Sitter manifold. The two-point correlation functions associated to this self-interacting massive scalar field are calculated up to the first order in the perturbative expansion of the constant coupling  $\lambda$ , and we analyze the covariant stochastic regularization applied to this situation. Next, we apply the quantization method of Parisi-Wu to study a free scalar field at finite temperature defined in Minkowski spacetime. First, we make use of the Markovian approach to obtain the free propagator of the theory. Then, we apply the non-Markovian approach of stochastic quantization to this situation, and investigate the convergence of the stochastic process through a Fokker-Planck equation analysis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantização estocástica para campos euclidianos</b>	<b>8</b>
2.1	Quantização de campos escalares livres . . . . .	8
2.2	Quantização de campos escalares interagentes . . . . .	12
2.3	A regularização estocástica . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Quantização de campos escalares na variedade de de Sitter</b>	<b>19</b>
3.1	Quantização estocástica de Parisi-Wu em variedades riemannianas . . . . .	19
3.2	Campos escalares livres no espaço-tempo de de Sitter . . . . .	22
3.3	Campos escalares interagentes no espaço-tempo de de Sitter . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Quantização estocástica a temperatura finita no espaço tempo de Min-</b>	
	<b>kowski</b>	<b>30</b>
4.1	A abordagem markoviana . . . . .	31
4.2	A abordagem não-markoviana . . . . .	35
4.3	A análise de Fokker-Planck . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>O Espaço-tempo de de Sitter</b>	<b>47</b>
A.1	Conceitos gerais . . . . .	47

A.2 A variedade de de Sitter . . . . .	50
<b>B</b> Formulação de tempo real da teoria quântica de campos	<b>54</b>
<b>C</b> Cálculo das componentes da matriz $\Omega$	<b>59</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Motivados pela tentativa de quantizar um campo de calibre sem a necessidade de fixação do calibre e introdução de campos auxiliares (os fantasmas de Fadeev e Popov), Parisi e Wu desenvolveram em 1981 o método de quantização estocástica [1]. O método é formulado em torno de um processo estocástico com respeito a um tempo fictício, o parâmetro de Markov. O método se fundamenta na ideia de que o comportamento quântico de um sistema  $d$ -dimensional pode ser obtido como o limite de equilíbrio de um sistema clássico  $d + 1$ -dimensional, inicialmente fora do equilíbrio e acoplado a um reservatório térmico, e cuja evolução no parâmetro de Markov é descrita por uma equação de Langevin. O reservatório térmico na teoria é representado por um campo de ruído estocástico.

É possível notar a semelhança entre medida de integração de contorno euclidiana e a distribuição de Boltzman de um sistema estatístico em equilíbrio. Assim, as funções de Green euclidianas estão relacionadas a funções de correlação de um sistema estatístico em equilíbrio, cuja temperatura é dada por  $T = \frac{\hbar}{k}$ , sendo  $\hbar$  a constante de Planck reduzida e  $k$  a constante de Boltzmann (entretanto, no decorrer desta tese utilizaremos  $\hbar = k = 1$ ). As funções de correlação de uma teoria de campos euclidiana em  $d$  dimensões podem ser obtidas a partir de funções de correlação de uma teoria em  $d + 1$  dimensões descrita por uma ação de Fokker-Planck. O parâmetro de markov, a princípio, não deve

ser interpretado como uma variável temporal propriamente dita, e sim tratado como uma ferramenta matemática. Entretanto, há estudos sobre uma possível relação entre a quantização estocástica e a correspondência AdS/CFT [2–4], o que poderia implicar em uma conexão entre processos estocásticos e gravitação.

Uma característica crucial da quantização estocástica é a escolha do processo estocástico com respeito ao parâmetro de Markov não ser única. Isso significa que diferentes equações de Langevin que evoluem para uma situação de equilíbrio nos fornecem a mesma teoria quântica. Esta propriedade pode ser utilizada para regularizarmos a teoria ou contornarmos as complicações resultantes da presença de uma ação complexa (problema do sinal), através da modificação do termo de fricção da equação de Langevin. Esta nova equação, livre de problemas, fornece uma teoria equivalente à original, no sentido que no limite de equilíbrio, quando o parâmetro de Markov vai a infinito,  $\tau \rightarrow \infty$ , as médias estocásticas das funções de correlação de alguma quantidade se tornam valores esperados no vácuo da teoria euclidiana, e recupera-se assim a teoria quântica de campos.

É importante ressaltar que, diferentemente dos métodos de quantização canônica e por integrais de trajetória, que se baseiam na hamiltoniana e lagrangiana do sistema, o método de quantização estocástica pode ser implementado a partir de uma equação clássica de movimento, apenas. Dessa forma, é possível aplicar o método a sistemas que não apresentam o formalismo canônico. Outra ferramenta bastante útil resultante do método de quantização estocástica é o processo de regularização estocástica, que preserva todas as simetrias originais do sistema considerado, por não se tratar de uma regularização da ação.

As ideias por trás do método de Parisi-Wu remontam a 1827, com o descobrimento do movimento browniano [5]. Entretanto, foi somente em 1905 em um dos trabalhos de Albert Einstein [6] e depois em 1906 num trabalho independente de Marian Smoluchowski [7] que um tratamento matemático mais rigoroso sobre o fenômeno foi obtido, atraindo a atenção de físicos e matemáticos e corroborando para o conceito de átomo, ainda não

completamente estabelecido na época. Posteriormente, a teoria do movimento browniano foi desenvolvida por P. Langevin [8], G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein [9], entre outros.

Basta fazermos a extensão analítica para o tempo imaginário,  $t \rightarrow -it$  para notarmos a semelhança entre a equação de Schrödinger para uma partícula livre e uma equação de difusão para uma partícula browniana. Essa semelhança levou muitos físicos a acreditarem na ideia que flutuações quânticas seriam originadas através de um movimento clássico aleatório da partícula causado pela interação com um substrato não-observável, sendo a teoria quântica apenas uma teoria efetiva.

Por volta de 1952, baseado nessa idéia, D. Bohm [10] desenvolveu uma teoria na qual era possível obter uma equação de movimento newtoniana a partir da equação de Schrödinger. Tal equação newtoniana apresentava um termo de força chamado, então, de força quanto-mecânica, que deveria ser considerada como um termo de força aleatório representando a interação com o suposto substrato não-observável. Em 1966, Nelson [11] formulou um método de quantização que obtinha a mecânica quântica a partir de considerações da teoria de movimento browniano, tendo a constante de Planck como constante de difusão. Apesar dessas teorias serem formuladas em termos do tempo real  $t$  e se utilizarem de interpretações estocásticas para a mecânica quântica, elas são incapazes de descrever situações com muitas partículas ou campos. Para uma revisão sobre mecânica estatística fora do equilíbrio e processos estocásticos veja as referências [12, 13].

Desde seu desenvolvimento, o método de quantização estocástica foi plenamente aplicado para diversos campos definidos em variedades euclidianas planas [14–18]. O método também foi aplicado para o caso de gravidade euclidiana linearizada e também não-linearizada [19, 20], além da gravidade lorentziana [21].

Nessa tese, aplicaremos o método de quantização estocástica a duas situações distintas. Primeiramente, aplicaremos o método de Parisi-Wu na descrição de um campo bosônico auto-interagente definido no espaço-tempo de de Sitter [22]. Apesar de haver na literatura aplicações do método para campos escalares auto-interagentes em variedades que possam

---

ser analiticamente continuadas para a situação euclidiana [23], aplicações do método a uma teoria semi-clássica, ou seja, campos quânticos na presença de um campo gravitacional clássico, não foram completamente exploradas pela literatura. Nosso objetivo é preencher parte dessa lacuna. Uma introdução sobre teorias de campo na variedade plana euclidiana pode ser encontrada nas referências [24, 25]. Material sobre a variedade de de Sitter e teorias quânticas de campo em espaços curvos pode ser encontrado nas referências [26–32].

Em seguida, apresentaremos um estudo de uma teoria de campo a temperatura finita utilizando o formalismo de tempo real [33], ou seja, trabalharemos no espaço-tempo de Minkowski. Berges *et al* [34–36] estudaram através de simulações na rede a dinâmica de campos quânticos, em teorias escalares e de calibre abelianas e não-abelianas, no espaço-tempo de Minkowski utilizando técnicas da quantização estocástica, ou seja, utilizando o formalismo de tempo real juntamente com a quantização estocástica. Nesta tese, aplicaremos as versões markoviana e não-markoviana da quantização estocástica para quantizar um campo escalar livre neutro a temperatura finita, utilizando o formalismo de tempo real da teoria de campos. Apesar da versão não-markoviana apresentar cálculos mais extensos em relação à abordagem markoviana, seu estudo é importante como um passo inicial se desejarmos aplicá-la a modelos mais complexos futuramente, como teorias de calibre a temperaturas finitas no espaço-tempo de Minkowski. Nesse caso, esperamos que a quantização estocástica em sua versão não-markoviana forneça vantagens significativas em relação à sua versão markoviana.

Existem três abordagens distintas para se estudar uma teoria de campos a temperatura finita: o formalismo de tempo imaginário, formulado por Matsubara [37], dinâmica de campos térmicos [38], que é essencialmente operatorial, e o formalismo por integrais de contorno [39], sendo estes dois últimos formulados usando o tempo real. Uma revisão sobre esses assuntos pode ser feita nas referências [40, 41].

No formalismo de Matsubara, uma rotação de Wick é realizada e a dimensão temporal imaginária se torna periódica, cujo período é dado por  $\beta = \frac{1}{T}$ , sendo  $T$  a temperatura de

equilíbrio. Essa periodicidade é refeletida na relação KMS (Kubo-Martin-Schwinger) para os propagadores:  $D(t, t') = D(t', t + i\beta)$ . Nesse formalismo, ao calcularmos as quantidades de interesse da teoria, como propagadores e funções de partição, aparecem somas sobre as frequências de Matsubara,  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  para bósons e  $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$  para férmions. Ao fim, para responder a questões dinâmicas, devemos conhecer as funções de Green de tempo real, portanto, na maior parte dos casos devemos continuar analiticamente as funções de Green para o domínio real.

No formalismo da dinâmica de campos térmicos, as médias térmicas de um observável sobre um ensemble estatístico são identificadas como o valor esperado deste observável em um vácuo dependente da temperatura, o vácuo térmico. Assim como no formalismo de tempo real, a formulação da dinâmica de campos térmicos, conhecida por TFD, apresenta a duplicação dos graus de liberdade, e é uma característica indispensável na construção da teoria [42]. Esta duplicação é devida à duplicação do espaço de Hilbert da teoria é o que permite que médias térmicas possam ser identificadas como valores esperados do vácuo térmico.

Alternativamente, no formalismo de integrais de contorno, as quantidades relevantes são definidas em um contorno fechado no plano complexo temporal. Este formalismo também apresenta a duplicação dos graus de liberdade, devido ao ordenamento temporal utilizado para definir as funções de Green no contorno. Os cálculos perturbativos e regras de Feynman são bastante similares aos da teoria de campos no vácuo. Este formalismo é bastante adequado à obtenção das funções de Green e ao desenvolvimento de teorias quânticas fora do equilíbrio [43–45]. No apêndice B, apresentamos uma breve introdução ao desenvolvimento deste formalismo.

A quantização estocástica foi formulada originalmente utilizando-se o espaço-tempo euclidiano, de forma a fazer a teoria matematicamente bem definida. Entretanto, existem formulações da quantização estocástica diretamente no espaço-tempo de Minkowski [46–49], e o tempo imaginário não é estritamente necessário. Em um desses trabalhos [50],

os autores propõem uma modificação do esquema de Parisi-Wu ao introduzir um termo de fricção complexo na equação de Langevin. Dessa forma, a formulação da quantização estocástica em Minkowski pode ser interpretada como um caso especial do método de Parisi-Wu no espaço-tempo euclidiano, porém, com ações complexas.

Mesmo quando formulada no espaço-tempo euclidiano, aparecem dificuldades no caso de ações complexas. Uma ação complexa leva à não-convergência do processo estocástico no limite assintótico do parâmetro de Markov. De fato, já foi mostrado que o método de quantização estocástica pode ser aplicado com sucesso a sistemas cujas ações permanecem complexas após a rotação de Wick e teorias topológicas, como a teoria de Chern-Simons, [51–53]. Podemos tomar como exemplo de teoria que apresenta ação complexa, o caso de um condensado de Bose-Einstein relativístico na presença de um potencial químico [54,55], onde a ação se comporta como  $S * (\mu) = S(-\mu)$ . Outro exemplo onde o problema aparece é na cromodinâmica quântica com potencial químico finito. Várias técnicas foram aplicadas para contornar este problema neste caso, como a utilização da teoria de matrizes randômicas e a reformulação da teoria em termos de graus de liberdade diferentes [56–61].

Esta tese está organizada da seguinte forma: No capítulo seguinte, apresentamos uma revisão geral do método de quantização estocástica de Parisi e Wu. No terceiro capítulo, consideramos o método de Parisi-Wu aplicado a um campo escalar auto-interagente na variedade de de Sitter. No capítulo 4, o método é aplicado a uma teoria escalar no espaço-tempo de Minkowski, tanto em sua abordagem markoviana quanto na não-markoviana. As conclusões são apresentadas no capítulo 5. Nos apêndices A e B fazemos breves revisões sobre a variedade de de Sitter e a formulação da teoria de campos em tempo real via integrais de contorno, respectivamente, e no apêndice C apresentamos um cálculo detalhado dos elementos da matriz  $\Omega_{ab}(k, \tau)$ , definida no capítulo 4.

Nessa tese vamos utilizar o sistema natural de unidades, a saber,  $c = \hbar = k_B = G = 1$ . No capítulo 5 e apêndice C, índices contravariantes e covariantes são definidos de acordo com a métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Em toda a tese, índices repetidos devem ser

somados.

# Capítulo 2

## Quantização estocástica para campos euclidianos

### 2.1 Quantização de campos escalares livres

A quantização estocástica é um método relativamente recente utilizado para quantizarmos teorias de campo clássicas. Baseado na teoria de processos estocásticos, ela foi proposta em 1981 por G. Parisi e Y. S. Wu [1], numa tentativa de desenvolver um método para quantizar teorias de calibre, mas sem a necessidade de fixar o calibre do sistema e introdução de campos adicionais. A ideia principal da quantização estocástica é que um sistema quântico em  $d$  dimensões pode ser encarado como o limite de um sistema estatístico clássico evoluindo em  $d + 1$  dimensões acoplado a um banho térmico.

A dimensão extra  $\tau$  atribuída ao sistema representa um tempo fictício chamado parâmetro de Markov, em que os campos evoluem segundo uma equação de Langevin. O limite de equilíbrio é equivalente a tomar  $\tau \rightarrow \infty$ . O banho térmico é simulado através de um ruído estocástico. No limite de equilíbrio, as médias estocásticas das quantidades relacionadas ao sistema se tornam valores esperados no vácuo para o sistema.

Nessa seção, faremos uma revisão da quantização estocástica para campos bosônicos



livres, de forma a ilustrar a aplicação do método. Consideremos, então, um sistema descrito por um campo bosônico  $\phi(x)$  definido em uma variedade euclidiana  $d$ -dimensional. Existe uma importante analogia entre a teoria de campos euclidiana e a mecânica estatística clássica. A medida de integrais de trajetória euclidiana é relacionada à distribuição de Boltzmann de um sistema em equilíbrio térmico. As funções de Green da teoria euclidiana são escritas como

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}}, \quad (2.1)$$

onde  $S_E$  é a ação euclidiana do sistema. Se fizermos  $S_E \rightarrow 1/T S_E$ , onde  $T$  é a temperatura, a semelhança entre a equação anterior e o valor esperado estatístico de um sistema em equilíbrio a uma temperatura  $T$  é visível. Logo, a ideia da quantização estocástica é considerar a medida funcional euclidiana como uma distribuição estacionária de um processo estocástico.

Para um sistema descrito por um campo escalar não interagente em uma variedade euclidiana plana  $d$ -dimensional, a ação euclidiana é dada por

$$S_0[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \phi(x))^2 + m_0^2 \phi^2(x) \right). \quad (2.2)$$

Escolhemos condições de contorno periódicas para o campo, o que equivale a defini-lo em um  $d$ -toro  $\Omega = \mathcal{T}^d$ . Para a implementação do método, é necessário acrescentar uma variável ao campo, o tempo de Markov,  $\phi(x) \rightarrow \phi(x, \tau)$ . Dessa forma, o campo fica definido em um domínio  $\mathcal{T}^d \times \mathbb{R}^{(+)}$ . Supomos que, estando o sistema acoplado a um banho térmico com temperatura  $T$ , este atinge o equilíbrio no limite em que o tempo de Markov vai a infinito. Portanto, como o sistema é considerado inicialmente fora do equilíbrio, sua evolução no tempo de Markov é descrita por uma equação de Langevin do

tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left. \frac{\delta S_0}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi(x, \tau)} + \eta(x, \tau). \quad (2.3)$$

O termo  $\eta(x, \tau)$ , definido no mesmo domínio de  $\phi(x, \tau)$ , é o ruído, que representa os efeitos do banho térmico do sistema. Utilizando a ação dada pela equação (2.2) a equação de Langevin acima fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left( -\Delta + m_0^2 \right) \phi(x, \tau) + \eta(x, \tau), \quad (2.4)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace definido na variedade euclidiana  $d$ -dimensional. Assumindo que o ruído é branco e satisfaz uma distribuição de probabilidade gaussiana, obtemos as relações de correlação

$$\langle \eta(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (2.5)$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta^d(x - x'). \quad (2.6)$$

Em geral, de forma análoga à teoria do movimento browniano, a média estocástica de qualquer funcional do campo  $\phi$ ,  $F[\phi]$ , é dada por

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\eta F[\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(x, \tau) \right\}}{\int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(x, \tau) \right\}}. \quad (2.7)$$

Para resolver a equação de Langevin (2.3) definimos a função de Green retardada para o problema de difusão,  $G(x - x', \tau - \tau')$ . Essa função de Green satisfaz

$$\begin{aligned} G(x - x', \tau - \tau') &= 0, \quad \tau - \tau' < 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( -\Delta + m_0^2 \right) \right] G(x - x', \tau - \tau') &= \delta(\tau - \tau') \delta^d(x - x'), \quad \tau - \tau' > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Com a condição inicial  $\phi(x, \tau = 0) = 0$ , a solução para a equação (2.4) pode ser escrita

como a convolução da função de Green com a fonte, no caso, o ruído,

$$\phi(x, \tau) = \int_{\Omega} d^d x' \int_0^{\tau} d\tau' G(x - x', \tau - \tau') \eta(x', \tau'). \quad (2.9)$$

Definindo as transformadas de Fourier do campo e do ruído,

$$\phi(k, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x e^{-ikx} \phi(x, \tau), \quad (2.10)$$

$$\eta(k, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x e^{-ikx} \eta(x, \tau), \quad (2.11)$$

e substituindo essas expressões na equação (2.4) obtemos a seguinte equação de Langevin na representação dos momentos,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(k, \tau) = - (k^2 + m_0^2) \phi(k, \tau) + \eta(k, \tau). \quad (2.12)$$

A equação acima é satisfeita por cada modo de Fourier  $\phi(k, \tau)$ . Na equação de Langevin acima, o “coeficiente de fricção” é dado por  $k^2 + m_0^2$ . Sua solução é escrita como

$$\phi(k, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau' e^{-(k^2 + m_0^2)(\tau - \tau')} \eta(k, \tau'). \quad (2.13)$$

Utilizando a decomposição (2.11) é possível mostrar que as relações (2.5) e (2.6) na representação de momentos ficam escritas como

$$\langle \eta(k, \tau) \rangle_{\eta} = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle \eta(k, \tau) \eta(k', \tau') \rangle_{\eta} = 2(2\pi)^d \delta(\tau - \tau') \delta^d(k + k'). \quad (2.15)$$

Dessa forma é possível calcular, utilizando as equações (2.13), (2.14) e (2.15), a função de

correlação  $\langle \phi(k, \tau)\phi(k', \tau) \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(k, \tau)\phi(k', \tau) \rangle_\eta &\equiv D(k, k', \tau) \\
 &= \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^\tau d\tau_2 e^{-(k^2+m_0^2)(\tau-\tau_1)} e^{-(k'^2+m_0^2)(\tau-\tau_2)} \langle \eta(k, \tau_1)\eta(k', \tau_2) \rangle_\eta \\
 &= (2\pi)^d \delta^d(k+k') \frac{1}{k^2+m_0^2} (1 - e^{-2\tau(k^2+m_0^2)}). \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Finalmente, tomando o limite no qual o sistema vai ao equilíbrio,  $\tau \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \phi(k, \tau)\phi(k', \tau) \rangle_\eta = D(k, k') = (2\pi)^d \delta^d(k+k') \frac{1}{k^2+m_0^2}, \tag{2.17}$$

que é a função de dois pontos euclidiana ou função de Schwinger para o campo bosônico. A afirmação feita acima de que no limite em que o tempo de Markov vai para o infinito obtemos a teoria de campos euclidiana foi verificada para o caso de um campo escalar não-interagente. A equivalência entre a quantização estocástica e os demais métodos de quantização, em especial o método de integrais de trajetória, já foi bastante discutida na literatura e demonstrada de diversas maneiras [?]. Dentre as quais, se destacam as provas através do uso de técnicas diagramáticas [15] e uma análise da equação de Fokker-Planck e análise da equação de Langevin [17].

## 2.2 Quantização de campos escalares interagentes

Consideremos agora o método de quantização estocástica aplicados à teoria escalar auto-interagente. Consideraremos uma interação do tipo  $\lambda\phi^4$ . A ação total do sistema é dada por  $S = S_0 + S_I$ , onde  $S_0$  é descrita pela equação (2.2) e a ação de interação por

$$S_I[\phi] = \int_\Omega d^d x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x). \tag{2.18}$$

De forma análoga ao caso de campos livres, o equivalente à equação (2.3) fica escrito

como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left( -\Delta + m_0^2 \right) \phi(x, \tau) - \frac{\lambda}{3!} \phi(x, \tau) + \eta(x, \tau). \quad (2.19)$$

As funções de correlação de um e dois pontos associadas ao ruído continuam sendo dadas pelas expressões (2.5) e (2.6), enquanto as demais funções de correlação são dadas por

$$\langle \eta(x_1, \tau_1) \dots \eta(x_{2k-1}, \tau_{2k-1}) \rangle_\eta = 0, \quad (2.20)$$

$$\langle \eta(x_1, \tau_1) \dots \eta(x_{2k}, \tau_{2k}) \rangle_\eta = \sum \langle \eta(x_1, \tau_1) \eta(x_2, \tau_2) \rangle_\eta \dots \langle \eta(x_{2k-1}, \tau_{2k-1}) \eta(x_{2k}, \tau_{2k}) \rangle_\eta, \quad (2.21)$$

onde a soma deve ser tomada sobre todas as diferentes maneiras em que os  $2k$  índices podem ser divididos em  $k$  pares. Essa propriedade nada mais é do que uma expressão do teorema de decomposição de Wick. É interessante notar que, tomando médias estocásticas sobre o ruído, é possível mostrar que

$$\lim_{\tau_i \rightarrow \infty} \langle \phi(x_1, \tau_1) \dots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1, \tau_1) \dots \phi(x_n, \tau_n) e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}}. \quad (2.22)$$

A medida funcional das integrais de trajetória euclidianas pode ser considerada como uma distribuição estacionária de um processo estocástico. Vamos agora assumir que a constante de acoplamento  $\lambda$  que aparece na ação de interação  $S_I[\phi]$  é uma quantidade pequena. Dessa forma, podemos resolver a equação (2.19) perturbativamente. Supomos que o campo  $\phi(x, \tau)$  pode ser escrito como uma expansão na constante de acoplamento,

$$\phi(x, \tau) = \phi^{(0)}(x, \tau) + \lambda \phi^{(1)}(x, \tau) + \lambda^2 \phi^{(2)}(x, \tau) + \dots \quad (2.23)$$

Substituindo a expansão anterior na equação (2.19) e equacionando termos de mesma

ordem em  $\lambda$ , obtemos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (-\Delta + m_0^2) \right] \phi^{(0)}(x, \tau) = \eta(x, \tau), \quad (2.24)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (-\Delta + m_0^2) \right] \phi^{(1)}(x, \tau) = -\frac{1}{3!} \left( \phi^{(0)}(x, \tau) \right)^3. \quad (2.25)$$

$\vdots$

A equação (2.24) é idêntica à equação (2.4). Se assumirmos que  $\phi^{(j)}(x, \tau = 0) = 0, \forall j$ , sua solução é dada pela convolução da função de Green para o problema de difusão, definida nas equações (2.8), com o ruído,

$$\phi^{(0)}(x, \tau) = \int_{\Omega} d^d x' \int_0^{\tau} d\tau' G(x - x', \tau - \tau') \eta(x', \tau'). \quad (2.26)$$

A solução da equação (2.26) fica escrita como

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, \tau) &= -\frac{1}{3!} \int_{\Omega} d^d x_1 \int_0^{\tau} d\tau_1 G(x - x_1, \tau - \tau_1) \times \\ &\times \left( \int_{\Omega} d^d x' \int_0^{\tau_1} d\tau' G(x_1 - x', \tau_1 - \tau') \eta(x', \tau') \right)^3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Consideremos, agora, as funções de correlação de  $n$  pontos  $\langle \phi(x_1, \tau_1) \dots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_{\eta}$ . Substituindo os resultados acima e levando em conta as propriedades de decomposição descritas pela equação (2.21), são gerados os gráficos estocásticos, que possuem uma grande semelhança com os gráficos de Feynman da teoria de campos. Podemos, como foi feito na seção anterior, calcular a função de correlação de dois pontos  $\langle \phi(x_1, \tau_1) \phi(x_2, \tau_2) \rangle_{\eta}$ . Utilizando as expressões (2.26) e (2.27) podemos mostrar que na representação de momentos

$$\langle \phi(k_1, \tau_1) \phi(k_2, \tau_2) \rangle_{\eta} = \langle \phi(k_1, \tau_1) \phi(k_2, \tau_2) \rangle_{\eta}^{(0)} + \langle \phi(k_1, \tau_1) \phi(k_2, \tau_2) \rangle_{\eta}^{(1)}, \quad (2.28)$$

onde  $\langle \phi(k_1, \tau_1) \phi(k_2, \tau_2) \rangle_\eta^{(0)} = D(k_1, k_2, \tau)$  é a contribuição de ordem zero para a função de dois pontos, definida na equação (2.16). A contribuição de primeira ordem é

$$\langle \phi(k_1, \tau_1) \phi(k_2, \tau_2) \rangle_\eta^{(1)} = (a) + (b), \quad (2.29)$$

onde

$$(a) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_1} d\tau G(k_1, \tau_1 - \tau) D(k, \tau, \tau) D(k_2, \tau_2, \tau), \quad (2.30)$$

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_2} d\tau G(k_2, \tau_2 - \tau) D(k, \tau, \tau) D(k_1, \tau_1, \tau). \quad (2.31)$$

Após um cálculo simples, é fácil mostrar que no limite de equilíbrio, em que  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ , nós obtemos a função de Schwinger de dois pontos numa aproximação de um laço:

$$(a) \Big|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{1}{(k_2^2 + m_0^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{1}{k^2 + m_0^2}. \quad (2.32)$$

$$(b) \Big|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{1}{k^2 + m_0^2}. \quad (2.33)$$

Apesar de ter sido possível obter as funções de Schwinger no limite de equilíbrio, isso não garante que obtivemos uma teoria finita fisicamente aceitável. O passo seguinte é aplicar um procedimento de regularização à teoria, o que será feito mais à frente através da regularização estocástica.

## 2.3 A regularização estocástica

A expressão (2.33) é claramente divergente se  $d \geq 2$ , devido à integração nos momentos. Um passo fundamental no processo de quantização de uma teoria é encontrar um esquema de regularização satisfatório, de forma a tornar as integrações da teoria finitas em um estágio anterior à renormalização. No fim, a teoria renormalizada deve ser inde-

pendente do processo de regularização adotado. Alguns métodos de regularização acabam por ser incompatíveis com as simetrias da teoria, que devem ser preservadas. Por exemplo, a regularização na rede, que discretiza o espaço, quebra a invariância por translação e rotação de uma teoria.

Uma generalização do método de quantização de Parisi e Wu sugere um novo método de regularização para a teoria de campos. Graças à presença do parâmetro de Markov como uma dimensão adicional é possível desenvolver um esquema de regularização que preserva todas as simetrias da teoria: a regularização estocástica.

O processo de regularização estocástica consiste em modificar o processo estocástico original representado pela equação (2.19) através da introdução de um regulador, seja no termo de fricção ou na correlação do ruído. O processo estocástico modificado é diferente do processo original. Eles coincidem apenas no limite em que o kernel se aproxima da unidade.

Existem duas possibilidades de escolha para o regulador. Uma possibilidade é a regularização estocástica covariante [62], que é puramente markoviana. A ideia é construir uma nova equação regularizada de Langevin, com o termo que contém a contribuição do ruído modificado,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \int d^d y R_{xy}(\Delta) \eta(y, \tau), \quad (2.34)$$

onde o regulador é função do Laplaciano,

$$\Delta_{xy} = \int d^d z (\partial_\mu)_{xz} (\partial_\mu)_{zy}, \quad (2.35)$$

e

$$(\partial_\mu)_{xz} = \partial_\mu(x) \delta^d(x - z). \quad (2.36)$$

Para que os processos estocásticos coincidam ao fim do processo de regularização, é ne-



cessário que o regulador se aproxime da unidade à medida em que o corte ultravioleta  $\Lambda$  se aproxima do infinito. Essa propriedade possibilita a escolha de diversos reguladores. O regulador escolhido no decorrer desta tese é da forma

$$R(\Delta, \Lambda) = \exp \left\{ \frac{\Delta}{\Lambda^2} \right\}, \quad (2.37)$$

que claramente satisfaz

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} R(\Delta, \Lambda) = 1, \quad (2.38)$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} R_{xy}(\Delta, \Lambda) = \delta^d(x - y), \quad (2.39)$$

garantindo que o processo estocástico regularizado seja reduzido ao processo original no limite em que o parâmetro  $\Lambda$ , introduzido para regularizar a teoria, vá ao infinito. Com essa modificação da equação de Langevin é possível mostrar que todas as contribuições para as funções de  $n$  pontos em todas as ordens da expansão na constante de acoplamento são finitas. De fato, as contribuições para a função de dois pontos dadas pelas equações (2.32) e (2.33) ficam reescritas como

$$(b) \Big|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{1}{(k_2^2 + m_0^2)} \frac{R_{k_1}^2(\Lambda)}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{R_k^2(\Lambda)}{k^2 + m_0^2}, \quad (2.40)$$

$$(b) \Big|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)} \frac{R_{k_2}^2(\Lambda)}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{R_k^2(\Lambda)}{k^2 + m_0^2}, \quad (2.41)$$

onde  $R_k$  é a transformada de Fourier do regulador, definida por

$$R_k(\Lambda) = R(\Delta, \Lambda) \Big|_{\Delta = -k^2}. \quad (2.42)$$

Claramente, as equações (2.41) e (2.40) são expressões finitas, devido à convergência das integrais envolvendo o regulador. No próximo capítulo, os passos desenvolvidos até agora

serão aplicados para investigar a quantização de um campo escalar no espaço-tempo de de Sitter.

Outra possibilidade é tomar um kernel dependente de  $\tau$ , somente, e introduzi-lo no termo de fricção. Isso corresponde a escolher a correlação do ruído como  $\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle = 2\delta^d(x - x')K(\tau - \tau')$ . Essa escolha implica que o novo processo é essencialmente não-markoviano. Como a função delta das coordenadas espaciais ainda aparece na correlação do ruído, esta se mantém invariante sobre transformações de simetria. Este método de regularização já foi aplicado para o caso de férmions e teorias supersimétricas [63]. Dentre as possíveis escolhas de kernel de memória propostas em [63], temos

$$K_n(\tau) = \frac{1}{2n!} \Lambda^2 (\Lambda^2 |\tau|)^n \exp(-\Lambda^2 |\tau|). \quad (2.43)$$

Se escolhermos aquele com  $n = 0$ , ou seja,

$$K_0(\tau) = \Lambda^2 \exp(-\Lambda^2 |\tau|), \quad (2.44)$$

a expressão regularizada para o propagador livre dado na equação (2.17) no espaço de momentos fica expressa por

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \phi(k, \tau) \phi(k', \tau') \rangle_\eta = (2\pi)^d \frac{\delta^d(k + k')}{k^2 + m_0^2} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + k^2 + m_0^2}. \quad (2.45)$$

Além de regularizarmos a teoria no ultravioleta, é possível também regularizar os propagadores no infravermelho, no caso de uma teoria sem massa, através de uma pequena modificação no regulador (2.43).

No capítulo 4, embora não estejamos interessados diretamente na regularização, e sim na evolução deste processo estocástico para o equilíbrio, consideraremos uma equação de Langevin com um kernel de memória para estudar a quantização de um campo escalar no espaço tempo de Minkowski.

# Capítulo 3

## Quantização de campos escalares na variedade de de Sitter

### 3.1 Quantização estocástica de Parisi-Wu em variedades riemannianas

No capítulo anterior, o método da quantização estocástica foi empregado para se estudar campos escalares com auto-interação em variedades que podem ser continuadas analiticamente para a situação euclidiana. A equação de Langevin para os coeficientes de Fourier foi resolvida e a função de dois pontos ao nível de um laço foi exibida. Mostramos que esta diverge e, a fim de torná-la finita, nos utilizamos da regularização estocástica covariante. É importante ressaltar que este procedimento de estender a variável real para o domínio complexo na situação acima faz com que a ação se torne uma quantidade real, permitindo a implementação da quantização estocástica de modo relativamente simples. Queremos mostrar que esse esse procedimento também funciona quando, partindo de uma variedade pseudo-riemanniana, via extensão analítica da coordenada temporal, encontramos uma variedade riemanniana onde os campos estão definidos. Uma equação

de Langevin generalizada convergirá para uma situação de equilíbrio onde as funções de correlação calculadas como média de todas as realizações do ruído se tornarão as funções de Schwinger associadas ao campo em questão na variedade curva.

Nosso propósito neste capítulo é discutir a quantização estocástica de campos escalares com auto-interação definidos na variedade de de Sitter. Vamos calcular a função de Schwinger de dois pontos ao nível de um laço e aplicar a regularização estocástica covariante para controlar divergências ultravioletas.

Para tanto, vamos primeiramente fazer uma generalização do método desenvolvido no capítulo anterior, para espaços-tempo curvos. Consideremos uma variedade  $\mathcal{M}^d$  que admite um campo vetorial de Killing não-nulo  $X$ . Se for sempre possível introduzir coordenadas  $(t, x^j)$  localmente de forma que  $X^0 = \frac{\partial}{\partial t}$  e as componentes do tensor métrico forem independentes de  $t$  a variedade é estacionária. Para variedades estáticas, é possível realizar uma rotação de Wick e estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana para o domínio riemanniano, onde a quantização estocástica pode ser implementada.

Consideremos, então, uma teoria de campos clássica definida em  $\mathcal{M}^d \times \mathbb{R}^{(+)}$ , onde  $\mathbb{R}^{(+)}$  representa o setor do parâmetro de Markov  $\tau$ , acoplada a um banho térmico. Em geral, é possível introduzir uma decomposição de Fourier da forma

$$\phi(x, \tau) = \int d\tilde{\mu}(k) \phi_k(\tau) u_k(x), \tag{3.1}$$

onde a medida  $d\tilde{\mu}(k)$  depende da métrica de  $\mathcal{M}^d$ , e os modos  $u_k(x)$  são soluções da equação de Klein-Gordon definida nessa variedade. Para campos definidos em espaços-tempo cujos elementos de linha são escritos da forma

$$ds^2 = g_{oo} dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j, \tag{3.2}$$

é possível mostrar que a equação de Langevin correta é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \frac{g_{00}}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \eta(x, \tau), \quad (3.3)$$

onde  $g = \det g_{\mu\nu}$  e  $S$  é a ação euclidiana dada por

$$S[\phi] = \int d^d x \sqrt{g} \mathcal{L}[\phi]. \quad (3.4)$$

Impomos que o ruído  $\eta(x, \tau)$  ainda satisfaz uma distribuição estatística gaussiana e seja branco, ou seja, as equações (2.5) e (2.6) ficam escritas como

$$\langle \eta(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (3.5)$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = \frac{2}{\sqrt{g(x)}} \delta^d(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (3.6)$$

Na seção seguinte, empregaremos tais generalizações para a quantização de um campo bosônico em um espaço de de Sitter quadridimensional. Antes de prosseguirmos, gostaríamos de salientar que a equação de Langevin acima contém a componente  $g_{00}$  do tensor métrico, que a torna não-covariante. Isto não é um problema, pois a covariância deve ser restaurada na situação de equilíbrio. Similarmente, na quantização de um sistema fermiônico a introdução do kernel  $K(x, y)$  quebra a simetria local de calibre, e apesar disso, os observáveis apresentam tal simetria.

## 3.2 Campos escalares livres no espaço-tempo de de Sitter

Existem diversas formas de representar o espaço de de Sitter quadridimensional. A mais simples é pelo hiperbolóide

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \quad (3.7)$$

imerso em um espaço de Minkowski de cinco dimensões, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2. \quad (3.8)$$

Da forma da equação (3.7), percebe-se que o grupo de simetria do espaço de de Sitter é o grupo de dez parâmetros  $SO(1, 4)$  das transformações de Lorentz homogêneas no espaço de imersão de cinco dimensões, conhecido como grupo de de Sitter. Assim como o grupo de Poincaré tem um papel central na quantização de campos no espaço de Minkowski, o grupo de de Sitter é fundamental para a discussão da quantização de uma teoria no espaço-tempo de de Sitter. Por ser um espaço maximalmente simétrico, o espaço-tempo de de Sitter  $S_{1,3}$  possui curvatura de Ricci dada por  $\frac{d(d-1)}{\alpha^2}$ .

Vamos introduzir em  $S_{1,3}$  as coordenadas  $x^\beta = (t, \xi^i)$ , onde  $\beta, \delta, \gamma = 0, 1, 2, 3$  e  $i, j = 1, 2, 3$ . Temos:

$$z^0 = \alpha \tan t \quad ; \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad (3.9)$$

$$z^a = \frac{\alpha}{\cos t} k^a(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad ; \quad a, b = 1, 2, 3, 4, \quad (3.10)$$

$\xi^1, \xi^2, \xi^3$  sendo as coordenadas na esfera  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 1$ . O "futuro" ("passado") infinitamente remoto corresponde a  $t = \pi/2$  ( $t = -\pi/2$ ) para as coordenadas do tipo tempo  $t$ . As esferas tridimensionais  $z^0 = const.$  são hipersuperfícies de tempos iguais.

Podemos escrever

$$dk_1^2 + dk_2^2 + dk_3^2 + dk_4^2 = \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^j, \quad (3.11)$$

onde  $\omega_{ij} = \frac{\partial k_a}{\partial \xi_i} \frac{\partial k_a}{\partial \xi_j}$  é o tensor métrico de  $S_3$ . Dessa forma, o intervalo do espaço-tempo de de Sitter pode ser denotado da seguinte maneira,

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 t} \left( dt^2 - \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^j \right). \quad (3.12)$$

Com uma rotação de Wick, chegamos ao espaço de de Sitter euclidiano escrito nas coordenadas (3.9) e (3.10). Consideremos a seguinte densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (m_0^2 + \xi R) \phi^2. \quad (3.13)$$

Note que foi introduzido um acoplamento entre o campo bosônico e o campo gravitacional representado pelo termo  $\xi R \phi^2$ , onde  $\xi$  é um fator numérico e  $R$  o escalar de curvatura de Ricci. Se tomarmos  $\xi = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}$ , a inserção desse termo de acoplamento garante que a teoria seja invariante sob transformações conformes no caso em que  $m_0 = 0$ . Como estamos considerando  $d = 4$ , temos  $R = \frac{12}{\alpha^2}$  e  $\xi = \frac{1}{6}$ . Utilizando as equações (3.4) e (3.13), a equação de Langevin (3.3) fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x, \tau) = -\frac{\alpha^2}{\cosh^2 t} \left( -\Delta + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \varphi(x, \tau) + \eta(x, \tau), \quad (3.14)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami em 4 dimensões, definido por

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{-1/2} \partial_\mu (g^{1/2} g_{\mu\nu} \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Procedemos, então, de forma análoga ao caso plano. Definimos a função de Green retardada para o problema de difusão  $G(x - x', \tau - \tau')$ , que satisfaz

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\alpha^2}{\cosh^2 t} \left( -\Delta_x + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \right] G(x - x', \tau - \tau') = \delta(\tau - \tau') \delta^d(x - x'), \quad (3.16)$$

se  $\tau - \tau' > 0$  e  $G(x - x', \tau - \tau') = 0$ , se  $\tau - \tau' < 0$ . Usando a função de Green e a condição inicial  $\phi(x, \tau = 0) = 0$  a solução fica escrita como

$$\phi(x, \tau) = \int_{\Omega} d^4 x' \int_0^{\tau} d\tau' \sqrt{g(x')} G(x - x', \tau - \tau') \eta(x', \tau'). \quad (3.17)$$

Para encontrarmos a função de Green, e consequentemente a solução da equação de Langevin, é útil fazermos uma expansão de Fourier do campo e do ruído, segundo a equação (3.1). Nesse caso, os modos  $u_k(x)$  [65, 66] são dados por

$$u_{ps\sigma}^{\pm}(x) = N \sqrt{s+1} \Xi_{s\sigma}[k(\xi)] f_p^{\pm}(t) \cosh t, \quad (3.18)$$

com  $s = 0, 1, 2, \dots$  e  $\sigma = 1, 2, \dots, (s+1)^2$ . As funções  $\Xi_{s\sigma}[k(\xi)]$  são polinômios ortogonais harmônicos em  $k$  de grau  $s$ . Eles são identificados pelo índice  $\sigma$ . As funções  $f_p^{\pm}(t)$  são expressas através de funções hipergeométricas,

$$f_p^{\pm}(t) = \frac{1}{(ip)!} \sqrt{\Gamma(ip + \mu) \Gamma(ip - \mu + 1)} e^{\pm ip t} F\left(\mu, 1 - \mu; ip + 1; \frac{1 \pm \tanh t}{2}\right), \quad (3.19)$$

com  $\mu = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4m^2})$  e  $m = m_0 \alpha$ . A medida para a decomposição na equação (3.1) nesse caso é

$$\int d\tilde{\mu}_{ps\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int dp \sum_{s, \sigma}. \quad (3.20)$$

Substituindo a decomposição de Fourier com os modos dados pela equação (3.18) na equação de Langevin (3.14) e através de uma redefinição dos momentos, é possível concluir



que cada modo de Fourier satisfaz uma equação de Langevin do tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_q(\tau) = -(q^2 + 1)\phi_q(\tau) + \eta_q(\tau), \quad (3.21)$$

onde

$$q^2 = p^2 + \kappa^2 \quad (3.22)$$

$$\text{com } \kappa^2 = s(s + 2). \quad (3.23)$$

Tomando a condição inicial  $\phi_q(\tau = 0) = 0$ , a solução da equação (3.21) fica escrita como

$$\phi_q(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_q(\tau - \tau') \eta(\tau'), \quad (3.24)$$

onde a função de Green é dada por

$$G(\tau - \tau') = e^{-(q^2+1)(\tau-\tau')} \theta(\tau - \tau'). \quad (3.25)$$

A função de dois pontos  $D_q(\tau, \tau')$  pode ser calculada de forma semelhante ao caso plano euclidiano, levando em conta que na representação de momentos a segunda relação (3.6) fica escrita como

$$\langle \eta_q(\tau) \eta_{q'}(\tau') \rangle = 2(2\pi) \delta(p + p') \delta_{ss'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\tau - \tau'). \quad (3.26)$$

De fato, obtemos

$$D_q(\tau, \tau') = \langle \phi_q(\tau) \phi_{q'}(\tau') \rangle = \delta(p + p') \delta_{ss'} \delta_{\sigma\sigma'} \frac{1}{q^2 + 1} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right), \quad (3.27)$$

ou na representação de coordenadas

$$\begin{aligned} D(x, x', \tau, \tau') &= \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(x') D_q(\tau, \tau') \\ &= \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(x') \frac{1}{q^2 + 1} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

No limite em que  $\tau = \tau' \rightarrow \infty$  obtemos seguinte expressão

$$\begin{aligned} D(x, x') &= \mathcal{N}^2 \frac{\cosh t \cosh t'}{\sin \gamma} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^2 \sin(s+1)\gamma \int dp \frac{f_p^+(t) f_p^-(t')}{p^2 + (s+1)^2} \\ &= \mathcal{N}^2 \frac{\cosh t \cosh t'}{\sin \gamma} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \sin(s+1)\gamma f_{i(s+1)}^+(t) f_{i(s+1)}^-(t'), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde utilizamos o teorema da soma dos polinômios harmônicos [64],

$$\sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} \Xi_{\sigma s}(\xi^i) \Xi_{\sigma s}(\xi'^i) = \frac{(s+1) \sin(s+1)\gamma}{2\pi^2 \sin \gamma}, \quad (3.30)$$

com  $\gamma = \pm \arccos \sum_{\alpha=1}^4 k_\alpha(\xi) k_\alpha(\xi')$ . A expressão (3.29) é claramente divergente, entretanto, é possível mostrar que, definindo a função  $\Delta(t, t')$  como

$$\Delta(t, t') = \sum_{s=0}^{\infty} f_{i(s+1)}^+(t) f_{i(s+1)}^-(t') \cos(s+1)\gamma, \quad (3.31)$$

que é uma expressão finita, é possível reescrever a expressão (3.29) como

$$D(x, x') = -\mathcal{N}^2 \frac{\cosh t \cosh t'}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \Delta(t, t'). \quad (3.32)$$

Apesar de já ser conhecida na literatura [65, 66], o resultado acima foi obtido através de um método de quantização alternativo.

### 3.3 Campos escalares interagentes no espaço-tempo de de Sitter

Agora, vamos aplicar o método para o caso de uma teoria auto-interagente, com ação de interação dada por

$$S_I[\phi] = \int_{\Omega} d^d x \sqrt{g(x)} \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x), \quad (3.33)$$

e a equação de Langevin obtida é

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x, \tau) = -\frac{\alpha^2}{\cosh^2 t} \left( -\Delta + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \varphi(x, \tau) + \frac{\lambda}{3!} \frac{\alpha^2}{\cosh^2 t} \phi(x, \tau) + \eta(x, \tau). \quad (3.34)$$

Da mesma forma que no caso euclidiano plano, podemos resolver a equação acima através de uma série perturbativa em  $\lambda$ . A função de dois pontos na representação de momentos é dada por  $\langle \phi_q(\tau_1) \phi_k(\tau_2) \rangle = (a) + (b) + (c)$ , onde o termo  $(a)$  é a contribuição de ordem zero dada pela equação (3.27). Os termos  $(b)$  e  $(c)$  são as contribuições de primeira ordem em  $\lambda$ , escritos como

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta(q, k) \int d\tilde{\mu}(p) u_p^+ u_p^- \int_0^{\tau_1} d\tau G_q(\tau_1 - \tau) D_p(\tau, \tau) D_k(\tau_2, \tau), \quad (3.35)$$

$$(c) = -\frac{\lambda}{2} \delta(q, k) \int d\tilde{\mu}(p) u_p^+ u_p^- \int_0^{\tau_2} d\tau G_k(\tau_2 - \tau) D_p(\tau, \tau) D_q(\tau_1, \tau), \quad (3.36)$$

onde  $G_q(\tau - \tau')$  e  $D_q(\tau, \tau')$  são definidos pelas equações (3.25) e (3.27), respectivamente. Substituindo essas expressões e tomando o limite de equilíbrio ( $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ ) obtemos

$$(b) \Big|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I \quad (3.37)$$

$$\text{e } (c) \Big|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{1}{(q^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I, \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

onde

$$q^2 = p^2 + s(s + 2), \quad (3.40)$$

$$k^2 = p'^2 + s'(s' + 2) \quad (3.41)$$

$$\text{e } \delta(q, k) = \delta(p + p')\delta_{ss'}\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (3.42)$$

A quantidade  $I$  é definida por

$$I = \mathcal{N}^2 \cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty} (s + 1)^3 \int d\bar{p} f_{\bar{p}}^+(t_1) f_{\bar{p}}^-(t_1) \frac{1}{\bar{p}^2 + (s + 1)^2}. \quad (3.43)$$

Lembrando que as funções  $f_{\bar{p}}^+(t_1)$  e  $f_{\bar{p}}^-(t_1)$  são, de fato, funções hipergeométricas, a integral acima pode ser resolvida escolhendo o contorno apropriado no plano  $\bar{p}$  complexo. O resultado é

$$I = \mathcal{N}^2 \cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty} (s + 1)^2 f_{\bar{p}}^+(t_1) f_{\bar{p}}^-(t_1) \Big|_{\bar{p}=-i(s+1)}. \quad (3.44)$$

A série nessa equação é claramente divergente, e portanto, é necessário regularizá-la e obter um resultado finito para a função de dois pontos. Isso pode ser feito, assim como demonstrado no capítulo anterior, através da regularização estocástica covariante. Introduzimos, então, a seguinte equação de Langevin regularizada

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \frac{g_{00}}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_0}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \int d^4 y \sqrt{g} R_{xy}(\Delta) \eta(y, \tau), \quad (3.45)$$

onde o regulador é função do laplaciano. Usando a decomposição em modos dada pela equação (3.1), concluímos que cada modo de Fourier satisfaz uma equação do tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_q(\tau) = -(q^2 + 1)\phi_q(\tau) + R_q \eta_q(\tau), \quad (3.46)$$

onde  $R_q = R_{xy}(\Delta)|_{\Delta=-(p^2+(s+1)^2)}$  e  $R_{xy}(\Delta) = \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(y) R_q$ . Repetindo os cálcu-

los da seção anterior, é possível mostrar que a função de correlação de dois pontos para o campo livre na representação de momentos fica

$$D_q(\tau, \tau') = N^2 \delta(q, k) \frac{R_q^2}{(q^2 + 1)} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right). \quad (3.47)$$

Dessa forma, as contribuições de primeira ordem para a função de dois pontos dadas pelas equações (3.38) e (3.39) ficam reescritas como

$$(b)_\Lambda \Big|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{R_k^2}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I(\Lambda), \quad (3.48)$$

$$(c)_\Lambda \Big|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{R_q^2}{(q^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I(\Lambda). \quad (3.49)$$

O termo  $I(\Lambda)$  é dado por

$$I(\Lambda) = \mathcal{N}^2 \cosh^2 t_1 \int dp \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^3 \frac{e^{-2(p^2+(s+1)^2)/\Lambda^2}}{p^2 + (s+1)^2} f_p^+(t_1) f_p^-(t_1). \quad (3.50)$$

Apesar de não ter sido possível expressar a equação acima em termos de funções conhecidas, a presença da função exponencial garante que a integral seja finita. Isso seria mais bem analisado através de tratamento numérico da expressão acima, o que está fora do escopo desta tese. Dessa forma, obtivemos a função de Schwinger de dois pontos regularizada numa aproximação de um laço para um campo massivo conformalmente acoplado no espaço-tempo de de Sitter. Um tratamento similar pode ser utilizado para a obtenção das funções de Schwinger de quatro pontos.

Um ponto importante a se ressaltar é que o procedimento de regularização estocástica preserva todas as simetrias da lagrangiana não-regularizada. O próximo passo seria isolar as partes divergentes no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  e removê-las através de uma redefinição adequada das constantes da teoria, ou seja, implementar o programa de renormalização.

## Capítulo 4

# Quantização estocástica a temperatura finita no espaço tempo de Minkowski

Através do formalismo de tempo real da teoria de campos a temperatura finita é possível descrever tanto sistemas em equilíbrio quanto sistemas fora do equilíbrio. Um gás bosônico fracamente interagente com um gradiente de temperatura, por exemplo, é descrito de forma mais apropriada através do formalismo de tempo real. Nesse caso, o propagador apresenta uma estrutura matricial, devido à duplicação dos graus de liberdade. Ao longo deste capítulo, desenvolveremos o formalismo da quantização estocástica para uma teoria de campos formulada no espaço-tempo de Minkowski, tanto em sua abordagem markoviana quanto em sua abordagem não-markoviana, incluindo um kernel de memória na equação de Langevin.

## 4.1 A abordagem markoviana

Considere um processo estocástico qualquer  $z(t)$ . Se a probabilidade de encontrarmos para  $z(t)$  o valor  $z_1$  num instante de tempo  $t_1$ , sabendo que  $z(t_0) = z_0$ , é independente do conhecimento do valor de  $z(t)$  para instantes de tempo anteriores a  $t_0$ , o processo estocástico é um processo markoviano. A história do sistema anterior ao tempo  $t_0$  está toda contida na informação de que  $z(t_0) = z_0$ . O segundo momento de uma distribuição de probabilidade deste tipo é dada por  $\langle z(t) z(t') \rangle \propto \delta(t - t')$ .

Antes de estudarmos a abordagem não-markoviana, é conveniente fazermos uma análise da quantização estocástica markoviana de uma teoria de campos a temperatura finita formulada no espaço-tempo de Minkovski por se tratar de um caso mais simples. No espaço-tempo de Minkowski, a generalização da equação de Langevin dada pela Eq.(2.3) deve ser da forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = i \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)} + \eta(x, \tau), \quad (4.1)$$

onde  $S(\phi)$  é a ação do campo escalar livre,

$$S(\phi) = \int d^4x \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - i\epsilon \phi^2 \}, \quad (4.2)$$

e as funções de correlação para o campo de ruído são dadas por

$$\langle \eta(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (4.3)$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = 2 \delta(|\tau - \tau'|) \delta^4(x - x'). \quad (4.4)$$

Note que, devido à presença do fator  $i$  à frente do termo de fricção, a equação de Langevin se torna complexa e, dessa forma, o campo estocástico  $\phi(x, \tau)$  também pode assumir valores complexos. Além disso, o termo imaginário  $-(i/2)\epsilon\phi^2$  é necessário para garantirmos a convergência do processo estocástico [17]. Após todos os cálculo terem sido feitos, deve-

mos tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Uma discussão detalhada sobre como desenvolver uma solução perturbativa do caso auto-interagente e sobre diagramas estocásticos pode ser encontrada em [46] e [50]

Como discutido no apêndice B, a duplicação dos graus de liberdade é inevitável na formulação de tempo real de uma teoria de campos. Dessa forma, se desejamos obter a teoria campos a temperatura finita no espaço-tempo de Minkowski a partir da quantização estocástica de forma correta, devemos introduzir o isovetor  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix}$ . A ação livre para este campo é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi_a(x) (D_F^{-1})_{ab}(x - x') \phi_b(x'), \quad (4.5)$$

onde as componentes de  $D_F$  são dadas pela Eq. (B.14). Na representação de Fourier, temos

$$(D_F)_{ab}(k) = (U^t)_{ac}(\theta) (D_0)_{cd}(k) (U)_{db}(\theta), \quad (4.6)$$

onde

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

com  $\theta$  definido através de

$$\cosh^2 \theta = \frac{e^{\beta|k_0|}}{e^{\beta|k_0|} - 1}, \quad (4.8)$$

e

$$D_0(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Dessa forma, podemos separar  $D_F$  em dois termos,  $D_F = D_0 + D_\beta$ , onde toda dependência na temperatura aparece em  $D_\beta$ ,

$$D_\beta(k) = \frac{-i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \begin{pmatrix} 2 \sinh^2 \theta & \sinh 2\theta \\ \sinh 2\theta & 2 \sinh^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$



Vale ressaltar que no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  temos

$$\frac{\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \rightarrow \pi \delta(k^2 - m^2). \quad (4.11)$$

Assim como no caso de temperatura nula, para obtermos convergência quando  $\tau \rightarrow \infty$ , nas expressões acima devemos primeiramente considerar  $\epsilon$  finito, e tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  apenas após todos os cálculos terem sido realizados. Este procedimento é o mesmo adotado no caso de integrais de trajetória [67].

A equação de Langevin markoviana para o caso fora do equilíbrio é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_a(k, \tau) = i(D_F^{-1})_{ab}(k) \phi_b(k, \tau) + \eta_a(k, \tau), \quad (4.12)$$

onde  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix}$  e  $a, b = 1, 2$ . As funções de correlação do ruído são dadas por

$$\langle \eta_a(k, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (4.13)$$

$$\langle \eta_a(k, \tau) \eta_b(k', \tau') \rangle_\eta = 2(2\pi)^4 \delta_{ab} \delta^4(k + k') \delta(|\tau - \tau'|), \quad (4.14)$$

e, novamente,  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$ ,  $a, b = 1, 2$ . Das Eqs. (4.9) e (4.10) temos

$$D_F^{-1}(k) = I(k, \epsilon) \begin{pmatrix} \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{2i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \sinh^2 \theta & \frac{i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \sinh 2\theta \\ \frac{i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \sinh 2\theta & \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{2i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \sinh^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde

$$I(k, \epsilon) = \frac{-(k^2 - m^2)^2 - \epsilon^2(\cosh^4 \theta + \sinh^4 \theta) - \frac{\epsilon^2}{2} \sinh^2 2\theta}{((k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2)^2}. \quad (4.16)$$

As funções de correlação são escritas como

$$\langle \eta_a(k, \tau) \rangle_\eta = 0,$$

$$\langle \eta_a(k, \tau) \eta_b(k', \tau') \rangle_\eta = 2(2\pi)^4 \delta_{ab} \delta^4(k + k') \delta(|\tau - \tau'|), \quad (4.17)$$

com  $a, b = 1, 2$ . Como o termo de fricção na equação de Langevin (4.12) é uma quantidade complexa, cada componente  $\phi_a(k, \tau)$  se torna uma quantidade complexa  $\phi_a = \phi_{aR} + i\phi_{aI}$ . Considerando o campo de ruído um campo real, obtemos duas equações de Langevin,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{aR}(k, \tau) = -Re \left[ (D_F^{-1})_{ab}(k) \right] \phi_{bI}(k, \tau) - Im \left[ (D_F^{-1})_{ab}(k) \right] \phi_{bR}(k, \tau) + \eta_a(k, \tau), \quad (4.18)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{aI}(k, \tau) = -Re \left[ (D_F^{-1})_{ab}(k) \right] \phi_{bR}(k, \tau) - Im \left[ (D_F^{-1})_{ab}(k) \right] \phi_{bI}(k, \tau). \quad (4.19)$$

Esta separação em partes imaginária e real se mostrará útil mais à frente, quando discutirmos a abordagem de Fokker-Plank. Por ora, vamos considerar a Eq.(4.12) como uma equação para o campo complexo  $\phi_a$ . Sua solução é dada por

$$\phi_a(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' (g(k, \tau - \tau'))_{ab} \eta_b(k, \tau'), \quad (4.20)$$

onde  $g(k, \tau) = e^{iD_F^{-1}(k)\tau}\theta(\tau)$  é a função de Green para o problema de difusão.

Vamos checar a convergência do processo, ou seja, analisar se  $g(k, \tau)|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Diagonalizando  $iD_F(k)$ , obtemos a matriz  $D'(k)$ , dada por

$$D'(k) = i I(k, \epsilon) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{\pm \sqrt{(k^2 - m^2)^2 - \epsilon^2 \sinh^2 2\theta} - i\epsilon(1 + 2 \sinh^2 \theta)}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2}. \quad (4.22)$$

Como  $I(k, \epsilon) < 0$ , como pode ser visto na Eq. (4.16), de fato, obtemos  $g(k, \tau)|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . É importante enfatizar que, como no caso de temperatura zero, a convergência do processo estocástico só foi possível porque mantivemos  $\epsilon$  finito nas Eqs. (4.9) e (4.10). É possível verificar a partir das Eqs. (4.21) e (4.22) que, se tomarmos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  no

início dos cálculos, perderemos o fator de convergência  $e^{I(k,\epsilon)\epsilon(1+2\sinh^2\theta)\tau}$ .

Agora estamos prontos para calcular a função de dois pontos  $\langle\phi_a(k,\tau)\phi_b(k',\tau)\rangle_\eta$ . Procedendo de forma similar ao caso de temperatura zero, é fácil mostrar que a função de correlação de dois pontos é dada por

$$\langle\phi_a(k,\tau)\phi_b(k',\tau)\rangle_\eta = (2\pi)^4\delta^4(k+k')i(D_F)_{ac}(k)(1 - e^{2iD_F^{-1}(k)\tau})_{cb}. \quad (4.23)$$

De fato, no limite  $\tau \rightarrow \infty$  recuperamos os resultados usuais. A seguir, vamos aplicar a mesma metodologia desenvolvida nesta seção para estudar os efeitos da introdução de um kernel de memória nesta teoria de campos no espaço-tempo de Minkowski.

## 4.2 A abordagem não-markoviana

Em um processo estocástico não-markoviano, o valor de uma variável estocástica em um determinado instante de tempo  $t$  depende da história do sistema, ou seja, depende de instantes anteriores ao instante  $t$ . Nesse caso, se considerarmos novamente um processo estocástico qualquer  $z(t)$ , a probabilidade de encontrarmos para  $z(t)$  o valor  $z_1$  num instante de tempo  $t_1$ , sabendo que  $z(t_0) = z_0$ , depende do conhecimento do valor de  $z(t)$  para instantes de tempo anteriores a  $t_0$ . Assim, os segundos momentos da distribuição de probabilidade não são mais expressos por uma  $\delta(t - t')$ , mas sim por um kernel de memória,  $\langle z(t)z(t') \rangle \propto K(t, t')$ .

A introdução de um termo de memória na equação de Langevin dada por (2.3) já foi estudada na literatura [52] para o caso de um campo escalar com auto-interação no espaço-tempo euclidiano. Nesse caso, a teoria desenvolvida a partir da equação de Langevin generalizada, que descreve um processo estocástico não-markoviano, apresentou convergência exponencial até mesmo para um campo escalar sem massa. Isto não ocorre com a abordagem markoviana do campo escalar sem massa, onde a comportamento do

processo estocástico é o inverso de potências em  $\tau$ . O objetivo desta seção é estudar uma teoria de campos a temperatura finita no espaço-tempo de Minkowski, através da abordagem não-markoviana da quantização estocástica. Assim como nas seções anteriores, trabalharemos com um campo escalar. No espaço-tempo de Minkowski, a equação de Langevin com um kernel de memória  $M_\Lambda(\tau - s)$  é escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = i \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi(x,s)} + \eta(x, \tau), \quad (4.24)$$

onde  $S$  é a ação para o campo escalar livre, dada pela Eq. (4.5). A distribuição de probabilidade para os campos de ruído é tal que os primeiro e segundo momentos são dados por

$$\langle \eta_a(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (4.25)$$

$$\langle \eta_a(x, \tau) \eta_b(x', \tau') \rangle_\eta = 2 \delta_{ab} M_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^4(x - x'). \quad (4.26)$$

O ruído, apesar de continuar gaussiano, não é mais um ruído branco pois a correlação no tempo de Markov nos segundos momentos não é mais expressa através de uma função  $\delta(|\tau - \tau'|)$ . Vale ressaltar que Eq. (4.24) é uma equação matricial, devido à duplicação dos graus de liberdade. Novamente, o termo de fricção desta equação de Langevin é complexo e, se mantivermos o ruído real, devemos ter a mesma separação da seção anterior:  $\phi_a = \phi_{aR} + i\phi_{aI}$ .

Usando uma decomposição de Fourier para os campos escalar e de ruído, dada por

$$X(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{ikx} X(k, \tau), \quad (4.27)$$

onde o campo  $X$  representa tanto o campo de ruído  $\eta$  quanto o campo escalar  $\phi$ , cada

modo de Fourier  $\phi(k, \tau)$  satisfaz uma equação de Langevin da forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_a(k, \tau) = i \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) (D_F^{-1})_{ab}(k) \phi_b(k, s) + \eta_a(k, \tau), \quad (4.28)$$

onde  $D_F^{-1}(k)$  é o inverso de  $D_F(k)$ , definido pela Eq. (4.6). Através dessa decomposição, obtemos das equações (4.25) e (4.26) as seguintes correlações para os modos de Fourier do ruído,

$$\langle \eta_a(k, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (4.29)$$

$$\langle \eta_a(k, \tau) \eta_b(k', \tau') \rangle_\eta = 2(2\pi)^4 \delta_{ab} M_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^4(k + k'). \quad (4.30)$$

Definindo a transformada de Laplace do kernel de memória como

$$M(z) = \int_0^\infty d\tau M_\Lambda(\tau) e^{-z\tau}, \quad (4.31)$$

obtemos a solução para a Eq. (4.28), sujeita à condição inicial  $\phi_a(k, \tau = 0) = 0$ ,  $a = 1, 2$ :

$$\phi_a(k, \tau) = \int_0^\infty d\tau' G_{ab}(k, \tau - \tau') \eta_a(k, \tau'). \quad (4.32)$$

Na Eq.(4.32),  $G_{ab}(k, \tau - \tau') = \Omega_{ab}(k, \tau - \tau') \theta(\tau - \tau')$  é a função de Green retardada para este problema de difusão não-markoviano e cada componente da matriz  $\Omega$  é definida através de sua transformada de Laplace,

$$\Omega_{ab} = \left[ z\mathbb{I} - i M(z) D_F^{-1}(k) \right]_{ab}^{-1}, \quad (4.33)$$

onde  $\mathbb{I}$  denota uma matriz identidade  $2 \times 2$ . Assim, a função de correlação de dois pontos

na representação de Fourier é escrita na forma

$$\begin{aligned} \langle \phi_a(k, \tau) \phi_b(k', \tau') \rangle_\eta &= D_{ab}(k, \tau, \tau') \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k + k') \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' [\Omega(k, \tau - s) \Omega(k', \tau' - s')]_{ab} M_\Lambda(|s - s'|). \end{aligned} \quad (4.34)$$

A transformada de Laplace bidimensional da equação acima [68, 69] é dada por

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\tau e^{-z\tau} \int_0^\infty d\tau' e^{-z'\tau'} \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' [\Omega(k, \tau - s) \Omega(k', \tau' - s')]_{ab} M_\Lambda(|s - s'|) \\ &= [\Omega(k, z) \Omega(k', z')]_{ab} \left( \frac{M(z) + M(z')}{z + z'} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Usando a Eq. (4.33) essa expressão se torna

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\tau e^{-z\tau} \int_0^\infty d\tau' e^{-z'\tau'} \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' [\Omega(k, \tau - s) \Omega(k', \tau' - s')]_{ab} M_\Lambda(|s - s'|) \\ &= i \left( \frac{\Omega(k, z) + \Omega(k', z')}{z + z'} - \Omega(k, z) \Omega(k', z') \right)_{ac} (D_F)_{cb}(k). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos para a função de dois pontos a expressão

$$D_{ab}(k, \tau, \tau') = 2i(2\pi)^4 \delta^4(k + k') (\Omega(k, |\tau' - \tau|) - \Omega(k, \tau) \Omega(k, \tau'))_{ac} (D_F)_{cb}(k). \quad (4.37)$$

Para investigarmos a convergência da equação acima precisamos especificar uma forma para o kernel de memória  $M_\Lambda$ . A expressão para  $M_\Lambda$  deve ser tal que no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  obtenhamos

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M_\Lambda(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad (4.38)$$

de forma a recuperarmos a teoria original. A exemplo do que foi discutido no capítulo 2, masi precisamente a equação (2.43), uma possível escolha para o kernel de memória é a

expressão

$$M_\Lambda(\tau) = \frac{1}{2}\Lambda^2 e^{-\Lambda^2|\tau|}. \quad (4.39)$$

Na referência [52], é mostrado que a escolha desse kernel de memória, dentre uma classe de opções, de fato produz uma teoria euclidiana com uma convergência para o processo estocástico considerado, entretanto, as divergências ultravioletas não foram devidamente regularizadas.

Substituindo a transformada de Laplace expressa pela Eq. (4.39) na Eq. (4.33), obtemos a expressão completa para a matriz  $\Omega$ . O cálculo explícito de suas componentes encontra-se no Apêndice C. Dessa forma, somos capazes de obter uma expressão para a função de correlação de dois pontos no limite  $\tau = \tau' \rightarrow \infty$

$$D_{ab}(k, \tau, \tau')|_{\tau=\tau' \rightarrow \infty} = i (2\pi)^4 \delta^4(k + k')(D_F)_{ab}(k). \quad (4.40)$$

Apesar de apresentar cálculos mais complexos, em relação à abordagem markoviana, quando tratamos teorias escalares, esperamos que a abordagem não-markoviana forneça simplificações e contorne problemas se tratarmos sistemas mais complexos, como teorias de calibre. O estudo da abordagem não-markoviana no caso do campo escalar pode ser justificado como um passo necessário para entendermos mais profundamente o que acontece quando aplicamos essa abordagem da quantização estocástica a temperaturas finitas, utilizando o formalismo de integrais de trajetória com tempo real da teoria de campos.

### 4.3 A análise de Fokker-Planck

A seguir, aplicaremos uma análise da equação de Fokker-Planck associada ao processo descrito acima, com o objetivo de verificar as vantagens de se utilizar o método não-markoviano, em vez do markoviano. Na quantização de Parisi-Wu em sua versão eu-

clidiana, as funções de correlação de  $n$  pontos são introduzidas na quantização estocástica através de médias sobre o ruído  $\eta$ :

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1, \tau_1) \phi(x_2, \tau_2) \cdots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta = \\ & N^{-1} \int [d\eta] \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(x, \tau)\right) \phi(x_1, \tau_1) \phi(x_2, \tau_2) \cdots \phi(x_n, \tau_n), \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $\phi$  satisfaz uma equação de Langevin euclidiana,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = - \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi(x, \tau)} + \eta(x, \tau), \quad (4.42)$$

e  $S$  é a versão euclidiana da ação dada pela Eq. (4.2).  $N$  é expresso por

$$N = \int [d\eta] \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(x, \tau)\right). \quad (4.43)$$

Uma outra forma de escrever essa média é através da introdução de uma densidade de probabilidade  $P[\phi, \tau]$ , definida por [70]

$$P[\phi, \tau] \equiv \int [d\eta] \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(x, \tau)\right) \prod_y \delta(\phi(y) - \phi(y, \tau)). \quad (4.44)$$

Em termos de  $P$ , as funções de correlação ficam expressas por

$$\langle \phi(x_1, \tau_1) \phi(x_2, \tau_2) \cdots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta = N \int [d\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) P[\phi, \tau]. \quad (4.45)$$

A densidade de probabilidade livre  $P$  satisfaz a seguinte equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P[\phi, \tau] = \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta \phi(x)} + \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right) P[\phi, \tau], \quad (4.46)$$



sujeita à condição inicial

$$P[\phi, 0] = \prod_y \delta(\phi(y)). \quad (4.47)$$

Segundo o método de quantização estocástica, devemos ter

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P[\phi, \tau] = \frac{\exp(-S[\phi])}{\int [d\phi] \exp(-S[\phi])}. \quad (4.48)$$

Nesta tese estamos considerando a formulação da quantização estocástica em tempo real, definida no espaço-tempo Minkowski. Nesse caso, como já vimos, o termo de fricção da equação de Langevin é uma quantidade complexa. Quando  $\phi$  satisfaz a Eq. (4.1), ou seja, quando estamos trabalhando no espaço-tempo de Minkowski, é possível [71] obter uma equação de Fokker-Planck equivalente à equação (4.46).

Para o caso de temperatura finita e tempo real, o funcional de distribuição é dado por

$$\begin{aligned} P[\phi_1, \phi_2, \tau] &= N'' \int \prod_{i=1}^2 [d\eta_i] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d\tau \eta_i(x, \tau) \delta_{ij} \eta_j(x, \tau)\right) \prod_y \delta(\phi_1(y) - \phi_1(y, \tau)) \\ &\quad \times \prod_z \delta(\phi_2(z) - \phi_2(z, \tau)), \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde  $\phi_a(y, \tau)$  satisfaz Eq. (4.12),  $a = 1, 2$ , e

$$N''^{-1} = \int \prod_{i=1}^2 [d\eta_i] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d\tau \eta_i(x, \tau) \delta_{ij} \eta_j(x, \tau)\right). \quad (4.50)$$

De forma similar à Eq. (4.45), qualquer valor esperado estocástico deve ser escrito como

$$\langle F[\phi_1(x, \tau), \phi_2(y, \tau)] \rangle_\eta = \int [d\phi_1][d\phi_2] F[\phi_1(x), \phi_2(y)] P[\phi_1, \phi_2, \tau], \quad (4.51)$$

onde o funcional de distribuição  $P[\phi_1, \phi_2, \tau]$  satisfaz a seguinte equação de Fokker-Planck

no espaço de momentos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} P[\phi_1, \phi_2, \tau] &= \int d^4k \left[ \frac{\delta^2 P}{\delta \phi_{aR}(k) \delta \phi_{aR}(-k)} + \right. \\
 &+ \frac{\delta}{\delta \phi_{aR}(k)} \left( \left( Re[(D_F^{-1})_{ab}(k)] \phi_{bI}(k) + Im[(D_F^{-1})_{ab}(k)] \phi_{bR}(k) \right) P \right) + \\
 &\left. + \frac{\delta}{\delta \phi_{aI}(k)} \left( \left( -Re[(D_F^{-1})_{ab}(k)] \phi_{bR}(k) + Im[(D_F^{-1})_{ab}(k)] \phi_{bI}(k) \right) P \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

É possível mostrar que

$$\begin{aligned}
 P[\phi_1, \phi_2, \tau] \Big|_{\tau \rightarrow \infty} &= N_{eq}^{-1} \exp \left( - \int d^4k \phi_{aR}(k) \tilde{I}_{ab} \phi_{bR}(-k) \right) \times \\
 &\times \exp \left( \int d^4k \phi_{aR}(k) \left( \tilde{I} + \tilde{I}^3 \cdot (\tilde{I}^2 + \tilde{R}^2)^{-1} \right)_{ab} \phi_{bI}(-k) + \right. \\
 &\left. - 2\phi_{aR}(k) (\tilde{I}^2 \cdot \tilde{R}^{-1})_{ab} \phi_{bI}(-k) \right),
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

onde  $\tilde{R} = Re [iD_F^{-1}(k)]$  e  $\tilde{I} = Im [iD_F^{-1}(k)]$ , e  $D_F^{-1}$  é o inverso de  $D_F$ , dada por  $(D_F)_{ab}(k)$ , dado pela Eq. (4.6). O comportamento assintótico quando  $\tau \rightarrow \infty$  é da forma

$$\frac{\partial P[\phi_1, \phi_2, \tau]}{\partial \tau} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow O(e^{I(k, \epsilon) \epsilon (1+2 \sinh^2 \theta) \tau}). \tag{4.54}$$

Apesar do comportamento do fator de convergência obtido acima ser exponencial, sua expressão depende explicitamente de valores de  $k$ , portanto, deve ser levado em conta na integral em  $k$  ao calcularmos  $\frac{\partial P[\phi, \tau]}{\partial \tau}$ . Apesar da expressão da distribuição de probabilidades dada pela Eq.(4.53) não ser da forma  $e^{iS}$ , os valores esperados obtidos coincidem com aqueles obtidos pelo método de integrais de trajetória.

No caso não-markoviano, a distribuição de probabilidades satisfaz a equação de Fokker-

Planck dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P = \int d^4 k \left[ \frac{\delta^2}{\delta \phi_{aR}(k) \delta \phi_{bR}(-k)} K_{ab}(k, \tau) P - \frac{\delta}{\delta \phi_{aR}(k)} \left( \text{Re} \left( i \frac{\delta N}{\delta \phi_{aR}(-k)} \right) P \right) + \right. \\ \left. - \frac{\delta}{\delta \phi_{aI}(k)} \left( \text{Im} \left( i \frac{\delta N}{\delta \phi_{aI}(-k)} \right) P \right) \right], \quad (4.55)$$

onde  $K_{ab}$  e  $N$  são definidos por

$$K_{ab}(k, \tau) = 2 \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) G_{ab}(k, \tau - s), \quad (4.56)$$

$$N[\phi; k, \tau - s] = \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) S(\phi(k)). \quad (4.57)$$

Nas equações acima,  $G_{ab}$  é a função de Green retardada para o problema de difusão não-markoviano. Apesar da distribuição de probabilidade para o caso não-Markoviano satisfazer relações semelhantes às equações (4.53) e (4.54), sua convergência é dominada pelo termo  $e^{-\Lambda^2 \tau}$ , presente no kernel de memória  $M_\Lambda(\tau)$ . Como  $\Lambda$  é um parâmetro livre do modelo, sempre podemos ajustá-lo de forma a obter uma convergência melhorada. Estas são características relevantes no caso de uma simulação numérica. Além disso, ressaltamos que apesar do termo de fricção da equação de Langevin ser complexo, a distribuição de probabilidade é real, e o caráter complexo permanece somente no campo  $\phi$ . Ao fim de todo o processo, devemos integrar as quantidades obtidas sobre a componente imaginária  $\phi_I$ , de forma a obtermos o campo físico real  $\phi$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Para variedades estáticas é possível realizar uma rotação de Wick e estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana para o domínio riemanniano. Esta característica, apesar de não ser fundamental, está relacionada diretamente à aplicação do método de quantização estocástica em espaços curvos. Essa situação pode ser vista como um caso especial da formulação euclidiana para sistemas com ações complexas.

Para espaços-tempos curvos incompletos, a aplicação do método não é tão simples, e apresenta problemas ainda não compreendidos completamente. Se a variedade apresenta um horizonte de eventos, ainda não se sabe exatamente como se comportam as funções de correlação do ruído próximo do horizonte. De fato, quando temos  $g = \det g_{\mu\nu} = 0$  a função de correlação (3.6) é divergente, e as funções de Schwinger  $\langle \phi(x_1, \tau_1) \cdots \phi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta$  perdem seu significado físico. No nosso trabalho, tal problema foi evitado através de uma escolha adequada do sistema de coordenadas para a variedade de de Sitter, onde o horizonte de eventos cosmológico não aparece. A partir daí, foi possível obter a função de Schwinger de dois pontos a nível de um laço para um campo escalar auto-interagente. Em seguida, apresentamos a correção da ordem de um laço para a função de dois pontos, dada por (3.48), foi feita finita através da generalização da equação de Langevin, introduzindo um kernel regulador no termo de ruído.

Se considerarmos espaços-tempos curvos não-estáticos, devemos desenvolver o programa de quantização estocástica diretamente na variedade pseudo-riemanniana, o que traz problemas de convergência do processo estocástico. De forma similar, para quantizar um campo clássico fora do equilíbrio utilizando a quantização de Parisi-Wu, devemos trabalhar no espaço-tempo de Minkowski. Esse caso apresenta os mesmos problemas de convergência, pois um termo de fricção imaginário aparece naturalmente na equação de Langevin.

Nesta tese, investigamos com um campo escalar livre a temperatura finita, no espaço-tempo de Minkowski. Neste caso, assim como na formulação de tempo real da teoria de campos, devemos levar em conta a duplicação dos graus de liberdade do campo. Levando essa característica em conta, obtivemos as funções de dois pontos da teoria, primeiramente, através de uma abordagem markoviana e, em seguida, através da introdução de um kernel de memória no termo de fricção. Mostramos que o processo estocástico converge no limite de equilíbrio, e que apresenta um fator de convergência exponencial, devido à modificação do processo estocástico original para um processo não-markoviano. Na formulação no espaço de Minkowski, ao contrário do que ocorre na variedade euclidiana, a hamiltoniana de Fokker-Planck associada ao processo estocástico não é hermitiana e seus autovalores são, em geral, complexos. Entretanto, o comportamento do sistema quando tomamos o limite de equilíbrio está ligado à parte real destes autovalores. Se pudermos garantir que a parte real de tais autovalores seja positiva, o processo estocástico convergirá para o equilíbrio.

Apesar de não ser uma tarefa trivial, o processo de quantização via método de Parisi-Wu pode ser desenvolvido para uma teoria de campos a temperatura finita com interação. Nesse caso, é possível desenvolver uma teoria perturbativa fora do equilíbrio. Além disso, nesse caso, os critérios de convergência seriam os mesmos apresentados nesta tese, pois, para campos fracamente interagentes, a teoria de perturbação é desenvolvida em torno da teoria livre.

---

Uma continuação natural do trabalho apresentado nessa tese é investigar a aplicação do método de quantização estocástica de campos escalares no espaço-tempo de de Sitter utilizando o sistema de coordenadas dado por (A.16), onde o horizonte de eventos aparece explicitamente. Além disso, outras perspectivas seriam incluir interação no modelo do campo escalar a temperatura finita e, ainda, aplicar a abordagem não-markoviana do programa de quantização de Parisi-Wu a um campo definido em uma variedade pseudo-riemanniana, sem a necessidade de uma rotação de Wick. Apesar da abordagem não-markoviana fornecer cálculos mais complexos para o caso de um campo escalar, é de se esperar que ela tenha êxito em simplificar as contas e contornar problemas se considerarmos sistemas mais complexos, como campos de calibre. Portanto, outra continuação seria trabalhar com campos de calibre a temperatura finita, diretamente no espaço-tempo de Minkowski, através do uso da formulação não-markoviana da quantização de Parisi e Wu.

Para finalizar, gostaríamos de enfatizar que o método de quantização estocástica ainda está em desenvolvimento, e podem ser encontradas novas aplicações a diversos sistemas. O estudo de um novo método de quantização aplicado a um sistema pode revelar detalhes ainda não investigados através dos métodos mais tradicionais, as quantizações canônica e por integrais de trajetória.

# Apêndice A

## O Espaço-tempo de de Sitter

### A.1 Conceitos gerais

No espaço-tempo de Minkowski, a expansão de um campo escalar massivo em ondas planas determina os modos de frequência positiva e negativa. Os modos de frequência positiva com respeito a  $t$  são autofunções do vetor de Killing  $\partial_t$ , ortogonal às hipersuperfícies em que  $t$  é constante, que satisfazem a expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} u_k(x) = -i\omega u_k(x), \quad \omega = k^2 + m^2 > 0. \quad (\text{A.1})$$

Nota-se claramente que  $u_k(x) \propto e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  satisfaz essa relação. O coeficiente na expansão de Fourier que acompanha  $u_k$  define o estado de vácuo e o espaço de Fock do sistema, i.e., se o campo é expresso por

$$\phi(x) = \sum_k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)], \quad (\text{A.2})$$

temos que o vácuo é definido por

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (\text{A.3})$$

Portanto, o estado de vácuo do sistema é invariante sob transformações do grupo de Poincaré. Isso significa que diferentes observadores inerciais concordam sobre a escolha do estado de mais baixa energia associado a um campo quantizado. Entretanto, se sairmos do grupo de Poincaré e permitirmos que observadores não inerciais implementem uma quantização canônica, o estado de vácuo definido por esses observadores não deve, a princípio, coincidir com o estado de vácuo dos observadores inerciais. Num espaço-tempo sem curvatura, uma forma natural de definirmos modos de frequências positivas e negativas associadas a um observador não-inercial é mostrarmos que a linha de universo desse observador é uma curva integral de um vetor de Killing do tipo tempo, que é um gerador de isometrias. Se estes modos não coincidem com os modos inerciais temos diferentes vácuos para observadores inerciais e não-inerciais. Este fato não é nada mais, nada menos, que uma consequência de que, em um sistema quantizado descrito por infinitos graus de liberdade, temos infinitas representações não unitariamente equivalentes associadas à álgebra dos operadores. Uma situação bastante instrutiva associada à discussão acima é o efeito Unruh-Davies [72], no qual um detector acelerado vê o vácuo de Minkowski como um estado térmico, de temperatura proporcional à aceleração.

Quando consideramos espaços-tempos curvos, em geral, não há vetores de Killing para definirmos o que são modos de frequência positiva, e não há um sistema de coordenadas natural (como o sistema cartesiano, em Minkowski) para a expansão do campo (A.2). Para obtermos informações mais precisas sobre o estado do campo é necessário construir quantidades locais, como  $\langle \psi | T_{\mu\nu}(x) | \psi \rangle$ .

Em muitos casos, o espaço-tempo pode ser tratado como assintoticamente plano no seu futuro e/ou passado remotos. Sob essas circunstâncias, é natural a escolha do vácuo definido pela equação (A.3) como o vácuo do sistema, ou seja, há ausência de partículas para todos os observadores inerciais nas regiões assintóticas. Se escolhermos o estado do campo como vácuo na região de passado remoto ( $t \rightarrow -\infty$ ), então ele permanecerá nesse estado durante toda sua evolução. Entretanto, fora da região de passado remoto,



observadores em queda livre podem detectar partículas nesse estado. Além disso, se o espaço-tempo considerado é assintoticamente plano na região de futuro remoto ( $t \rightarrow \infty$ ), o estado de vácuo nessa região pode não coincidir com o vácuo definido na região de passado remoto, e nesse caso, observadores inerciais no futuro remoto detectarão partículas. Podemos dizer, então, que partículas foram criadas durante a evolução do espaço-tempo. É possível mostrar que a produção de partículas ocorre somente quando a simetria conforme é quebrada, ou seja, quando o campo considerado é massivo.

Apesar das considerações anteriores, deve existir uma aproximação para teorias em espaços curvos em que o conceito de partícula faça algum sentido, pois a teoria quântica de campos no espaço de Minkowski fornece uma boa descrição dos efeitos quânticos observados, apesar de vivermos em um universo em expansão. De fato, no limite em que a taxa de expansão é pequena em relação à massa e ao momento das partículas, a criação de partículas deve ir a zero, recuperando assim a teoria no espaço de Minkowski. Espera-se, dessa forma, que apenas os modos de baixa frequência em relação à taxa de expansão sejam excitados. Considerando o campo no vácuo no passado remoto, e como a criação de partículas de grande momento e massa é suprimida, na região de futuro remoto detectores inerciais não devem detectar tais modos. O campo, portanto, deve estar num estado de “quase vácuo” nos modos de alta frequência, entretanto *quanta* de baixa frequência podem ser registrados.

Se nas regiões de passado e futuro remoto o espaço-tempo não é assintoticamente plano, a escolha das soluções da equação para o campo deve ser tal que a produção de partículas pela evolução do espaço-tempo seja mínima. O vácuo definido por tais soluções é chamado de vácuo adiabático.

O estado de vácuo de um campo não é necessariamente desprovido de *quanta*. Entretanto, se existem simetrias do espaço-tempo, pode existir um conjunto particular de modos e coordenadas de forma que existam estados de muitas partículas com algum sentido físico. No caso de variedades conformalmente planas, existem campos vetoriais de

Killing conformes satisfazendo uma equação do tipo (A.1). Uma métrica de uma variedade conformalmente plana pode ser escrita como  $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$ . Para um campo escalar de massa nula, por exemplo, a equação de Klein-Gordon proveniente da densidade lagrangiana (3.13) é invariante sob transformações conformes, e os modos de frequência positiva são definidos em relação ao vetor de Killing conforme do tipo tempo  $\partial_\eta$ , onde  $\eta$  é o tempo conforme. Dessa forma, a decomposição em modos de Fourier do campo fica escrita como

$$\phi(x) = \Omega(x) \sum_k [a_k \bar{u}_k(x) + a_k^\dagger \bar{u}_k^*(x)], \quad (\text{A.4})$$

onde  $\bar{u}_k(x) \propto e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \omega\eta)}$ . Portanto, o vácuo conforme é definido por

$$a_k |0\rangle = 0. \quad (\text{A.5})$$

Para uma exposição mais detalhada sobre o assunto, consulte as referências [73–75]

## A.2 A variedade de de Sitter

O espaço-tempo de de Sitter é um espaço-tempo homogêneo e isotrópico com relação a todos os pontos, descrito pelo tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica  $\lambda$  positiva no vácuo.

O espaço de de Sitter é o único espaço-tempo curvo maximalmente simétrico. Este espaço possui um grupo de isometrias de dez parâmetros, chamado grupo de de Sitter. O espaço-tempo de de Sitter pode ser representado pelo hiperbolóide  $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2$  imerso em um espaço de Minkowski 5-dimensional. Dessa forma, o grupo de de Sitter é o grupo ortogonal em cinco dimensões  $SO(4)$  das transformações de Lorentz homogêneas no espaço de Minkowski 5-dimensional

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2. \quad (\text{A.6})$$

O escalar de curvatura, portanto, é dado por  $R = 12/\alpha^2$ .

Para que seja possível a quantização de campos na variedade de de Sitter, é necessário especificar um sistema de coordenadas, para obtenção dos modos de frequência positiva e negativa.

Vamos considerar primeiramente as coordenadas  $(t, \mathbf{x})$ , tal que

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha \sinh \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha^{-1} e^{\frac{t}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \\ z_i &= e^{\frac{t}{\alpha}} x_i, \\ z_4 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} e^{\frac{t}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2, \quad \infty < t, x_i < \infty. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Essas coordenadas cobrem a região da variedade de de Sitter em que  $z_0 + z_4 > 0$ . Dessa forma, o elemento de linha (A.6) fica escrito como

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\frac{t}{\alpha}} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2. \tag{A.8}$$

Definindo o tempo conforme por

$$\eta = -\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}, \quad -\infty < \eta < 0, \tag{A.9}$$

podemos reescrever o elemento de linha (A.3) na sua forma conforme ao elemento de linha de Minkowski 4-dimensional,

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^2 \left( d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right). \tag{A.10}$$

Esse elemento de linha possui a forma de um elemento de linha de Robertson-Walker com a seção espacial plana. Os modos de frequência positiva nesse sistema de coordenadas são dados por

$$u_k(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} H_\nu^{(2)}(k\eta), \tag{A.11}$$

onde  $\nu^2 = 9/4 - (m^2\alpha^2 + 2)$  e  $H_\nu$  é a função de Hankel. É possível mostrar que não há produção de partículas durante a expansão, já que o vácuo nesse caso é invariante sob transformações do grupo de de Sitter.

Apesar de não haver produção de partículas, pode ser mostrado que um detector comóvel (para o qual a expansão é isotrópica) possui uma função resposta  $\mathcal{F}(E)$  característica de um espectro térmico cuja temperatura é dada por  $T = (2\pi\alpha)^{-1}$ . Portanto, apesar de não haver criação de partículas, um detector que permaneça ligado durante a expansão se comportará como se estivesse exposto a um banho de térmico. Um detector ligado adiabaticamente após o fim da expansão não registrará partículas.

Outro sistema de coordenadas que pode ser utilizado é dado por  $(t, \rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \alpha \sinh \frac{t}{\alpha}, \\
 z_1 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} \cos \rho, \\
 z_2 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} \sin \rho \cos \theta, \\
 z_3 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} \sin \rho \sin \theta \cos \varphi, \\
 z_4 &= \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} \sin \rho \sin \theta \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Todo o espaço-tempo de de Sitter é coberto por essas variáveis se  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq \rho \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Definindo o tempo conforme por  $\eta = 2/\tan\left(\frac{e^t}{\alpha}\right)$ , com  $0 \leq \eta \leq \pi$ , o elemento de linha dado por (A.6) se torna

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 \eta} \left[ d\eta^2 - d\rho^2 - \sin^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \tag{A.13}$$

Apesar de não ser possível definir o vácuo adiabático no passado ou futuro remotos, pois com as coordenadas (A.12) a taxa de expansão nessas regiões não é pequena em relação à frequência, é possível definí-lo como sendo o estado com ausência de modos com

grandes momentos. Dessa forma, os modos de frequência positiva são dados por

$$\begin{aligned}
 u_k(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} \eta}{\alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[ \frac{\pi \Gamma(k + \frac{1}{2} - \nu)}{4\gamma(k + \frac{1}{2} + \nu)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\nu\pi/2} \\
 &\times \left[ P_{k-\frac{1}{2}}^\nu(-\cos \eta) + \frac{2i}{\pi} Q_{k-\frac{1}{2}}^\nu(-\cos \eta) \right]. \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Essa coordenatização do espaço de de Sitter é equivalente àquela dada por (A.7), portanto, todas as propriedades já discutidas anteriormente são igualmente válidas no caso de coordenadas definidas por (A.12).

É possível definir um sistema de coordenadas estático por

$$\begin{aligned}
 z_0 &= (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{t}{\alpha}, \\
 z_1 &= (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cosh \frac{t}{\alpha}, \\
 z_2 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\
 z_3 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z_4 &= r \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

com  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , que cobre a região onde  $z_0 + z_1 > 0$ . Nessas coordenadas, obtemos para o elemento de linha a expressão

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{A.16}$$

Esse elemento de linha é similar ao elemento de linha de Schwarzschild, e possui uma singularidade em  $r = \alpha$ , o que caracteriza um horizonte de eventos para um observador situado em  $r = 0$ . Nessas coordenadas o estado de vácuo não é invariante sob o grupo de de Sitter, e é possível mostrar que o valor esperado nesse vácuo do tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  diverge em  $r = \alpha$ . Como a posição do horizonte depende da origem da coordenada radial, o estado de vácuo não é invariante sob translações espaciais.

# Apêndice B

## Formulação de tempo real da teoria quântica de campos

Nesta seção faremos uma breve revisão da formulação de uma teoria de campos escalar em temperaturas finitas no espaço-tempo de Minkowski. Diferentemente da formulação em tempo imaginário, na formulação de tempo real não aparecem somas sobre frequências de Matsubara [37] e, portanto, não há necessidade de calcular extensões analíticas de funções de Green. Além disso, a formulação de tempo real é a formulação mais adequada para o desenvolvimento de teorias de campo fora do equilíbrio, já que a investigação de propriedades dinâmicas é mais naturalmente realizada nesse formalismo. Isso se deve ao fato de que a variável temporal desempenha um papel importante, e não pode ser interpretada como uma temperatura.

Como já foi dito anteriormente, por simplicidade trabalharemos com um campo escalar neutro. O operador de campo na representação de Heisenberg são dados por

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iHt} \phi(0, \mathbf{x}) e^{-iHt}, \quad (\text{B.1})$$

onde a variável temporal  $t$  pode, a princípio, assumir valores complexos. As principais

quantidades a serem calculadas são as funções de Green térmicas,  $G_C(x_1, \dots, x_N)$ , definidas como

$$G_C(x_1, \dots, x_N) = \langle T_C (\phi(x_1) \dots \phi(x_N)) \rangle_\beta, \quad (\text{B.2})$$

onde o ordenamento temporal é tomado ao longo de um contorno  $C$  no plano complexo, que será definido mais adiante. Considerando uma parametrização  $t = z(v)$  deste contorno, as seguintes expressões

$$\theta_C(t - t') = \theta(v - v'), \quad (\text{B.3})$$

$$\delta_C(t - t') = \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1} \delta(v - v'), \quad (\text{B.4})$$

definem as funções  $\theta$  e  $\delta$ . A diferenciação funcional também pode ser generalizada da seguinte maneira,

$$\frac{\delta j(x)}{\delta j(x')} = \delta_C(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{B.5})$$

para funções  $j(x)$  definidas no contorno  $C$ . As funções de Green definidas pela Eq. (B.2) podem ser obtidas através de um funcional gerador  $Z_C[\beta; j]$  através da expressão

$$G_C(x_1, \dots, x_N) = \frac{(-i)^N}{Z_C[\beta; j]} \frac{\delta^N Z_C[\beta; j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_N)} \Big|_{j=0}. \quad (\text{B.6})$$

na equação acima, o funcional gerador é dado por

$$\begin{aligned} Z[\beta; j] &= \text{Tr} \left[ e^{-\beta H} T_C \exp \left( i \int_C d^4x j(x) \phi(x) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi' \langle \phi'(x); t - i\beta | T_C \exp \left( i \int_C d^4x j(x) \phi(x) \right) | \phi'(x); t \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde o contorno  $C$  deve percorrer todos os argumentos das funções de Green. A partir dessa expressão, é possível notar que o contorno  $C$  deve começar em  $t_i = t$  e terminar em

$t_f = t - i\beta$ . Podemos reescrever a expressão para o funcional gerador como

$$Z_C[\beta; j] = \mathcal{N} \exp \left\{ -i \int_C d^4x V \left( \frac{\delta}{i\delta} j(x) \right) \right\} Z_C^F[\beta; j] \quad (\text{B.8})$$

onde  $\mathcal{N}$  é um parâmetro de normalização e o funcional gerador livre é dado por

$$Z_C^F[\beta; j] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_C d^4x \int_C d^4y j(x) D_C^F(x-y) j(y) \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Na Eq. (B.9), o propagador  $D_C^F(x-y)$  é definido através da expressão

$$D_C^F(x-x') = \theta_C(t-t') D_C^>(x, x') + \theta_C(t'-t) D_C^<(x, x'), \quad (\text{B.10})$$

onde  $D_C^>(x, x')$  e  $D_C^<(x, x')$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned} D_C^>(x, x') &= \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_\beta, \\ D_C^<(x, x') &= \langle \phi(x') \phi(x) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

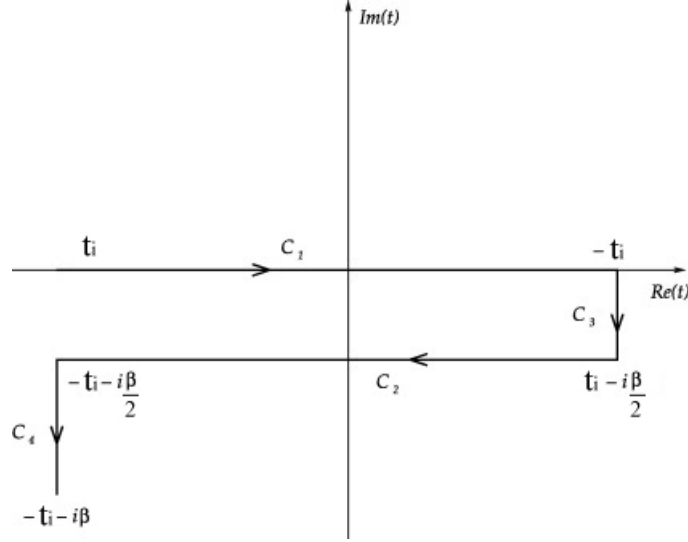
Como o propagador  $D_C^F(x-x')$  é bem definido no intervalo  $-\beta \leq \text{Im}(t-t') \leq \beta$ , podemos concluir que o contorno  $C$  deve ser tal que a parte imaginária da variável temporal  $t$  não cresça conforme o parâmetro  $v$  assume valores maiores. Além disso, já que estamos interessados nas funções de Green cujos argumentos são reais, o contorno deve conter todo o eixo real. Uma possível escolha para o contorno  $C$  pode ser descrita como [40]:

1.  $C$  inicia em um valor  $t_i$ , grande e negativo.
2. O contorno segue o eixo real até um valor grande e positivo  $-t_i$ . Essa parte de  $C$  é denotada por  $C_1$ .
3. O contorno de  $-t_i$  até  $-t_i - i\frac{\beta}{2}$ , seguindo uma linha reta. Essa parte é denotada



por  $C_3$ .

4. o contorno segue uma linha horizontal  $C_2$  indo de  $-t_i - i\frac{\beta}{2}$  até  $t_i - i\frac{\beta}{2}$ .
5. Finalmente, segue uma linha vertical  $C_4$  de  $t_i - i\frac{\beta}{2}$  até  $t_i - i\beta$ .



Tomando  $t_i \rightarrow -\infty$ , o gerador funcional livre pode ser fatorizado,

$$Z_C^F[\beta; j] = Z_{C_1 \cup C_2}^F[\beta; j] Z_{C_3 \cup C_4}^F[\beta; j]. \quad (\text{B.12})$$

As funções de Green com argumentos temporais reais podem ser deduzidas de  $Z_{C_1 \cup C_2}^F[\beta; j]$  somente. O funcional gerador  $Z_{C_3 \cup C_4}^F[\beta; j]$  pode ser considerado apenas como uma constante multiplicativa. Escolhemos  $t$  e  $t'$  reais, partindo de  $-\infty$  e indo até  $\infty$  e, assim, identificamos as fontes como  $j_1(x) = j(t, \mathbf{x})$  e  $j_2(x) = j(t - i\beta/2, \mathbf{x})$ . Além disso,  $\frac{\delta j_a(x)}{\delta j_b(x')} = \delta_{ab} \delta^4(x - x')$ . Munidos dessas expressões, podemos reescrever o funcional gerador na forma

$$Z_C^F[\beta; j] = \mathcal{N}' \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' j_a(x) D_{ab}^F j_b(x') \right\}, \quad (\text{B.13})$$

onde, novamente,  $\mathcal{N}'$  é um fator de normalização. As componentes do propagador matricial  $D_{ab}^F(x - x')$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 D_{11}^F(x - x') &= D_F(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\
 D_{22}^F(x - x') &= D_F^*(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\
 D_{12}^F(x - x') &= D^<(t - t' + i\beta/2, \mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\
 D_{21}^F(x - x') &= D^>(t - t' - i\beta/2, \mathbf{x} - \mathbf{x}').
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

O funcional gerador efetivo pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
 Z_C[\beta; j] &= \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi_a(x) (D_F^{-1})_{ab}(x - x') \phi_b(x') \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -i \int d^4x (V(\phi_1) - V(\phi_2)) + i \int d^4x j_a(x) \phi_a(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

O campo  $\phi_2$  pode ser interpretado como um campo fantasma no contorno  $C_2$ . essa duplicação dos graus de liberdade, que não ocorre na formulação de tempo imaginário, é inevitável na formulação de tempo real. Uma revisão completa sobre teoria de campos a temperatura finita, tanto em sua formulação de tempo imaginário quanto em sua formulação de tempo real pode ser encontrada no trabalho de Landsman e van Weert [41].

# Apêndice C

## Cálculo das componentes da matriz

$\Omega$

Neste apêndice apresentamos o cálculo das componentes  $\Omega_{ab}(k, \tau)$ , definida a partir da Eq. (4.33). Podemos escrever a matriz  $\Omega$  como a inversa da matriz  $A$ , cujas componentes são dadas por,

$$A = \begin{pmatrix} z - i M(z) d' & i M(z) b' \\ i M(z) b' & z - i M(z) a' \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

As quantidades que aparecem na matriz  $A$  são definidas por

$$a' = \frac{a}{ad - b^2}, \quad (\text{C.2})$$

$$b' = \frac{b}{ad - b^2}, \quad (\text{C.3})$$

$$d' = \frac{d}{ad - b^2}, \quad (\text{C.4})$$

e

$$a = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} 2 \sinh^2 \theta, \quad (\text{C.5})$$

$$b = \frac{-i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \sinh 2\theta, \quad (\text{C.6})$$

$$d = \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} 2 \sinh^2 \theta. \quad (\text{C.7})$$

dessa forma, temos

$$(\Omega)_{ab}(k, z) = (A^{-1})_{ab} = \begin{pmatrix} \Omega_{11}(k, z) & \Omega_{12}(k, z) \\ \Omega_{21}(k, z) & \Omega_{22}(k, z) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\Omega_{11}(k, z) = \frac{z - i M(z) a'}{(z - i M(z) a')(z - i M(z) d') + M^2(z) b'^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$\Omega_{12}(k, z) = \Omega_{21}(z) = \frac{-i M(z) b'}{(z - i M(z) a')(z - i M(z) d') + M^2(z) b'^2}, \quad (\text{C.10})$$

$$\Omega_{22}(k, z) = \frac{z - i M(z) d'}{(z - i M(z) a')(z - i M(z) d') + M^2(z) b'^2}. \quad (\text{C.11})$$

A transformada de Laplace do kernel de memória, definido pela Eq. (4.39), é dada por

$$M(z) = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{1}{z + \Lambda^2}. \quad (\text{C.12})$$

Inserindo a expressão anterior nas Eqs. (C.9), (C.10) and (C.11) obtemos

$$\Omega_{11}(k, z) = \frac{P(z, t_a)}{Q(z)}, \quad (\text{C.13})$$

$$\Omega_{12}(k, z) = \Omega_{21}(z) = \frac{-t_b(z + \Lambda^2)}{Q(z)}, \quad (\text{C.14})$$

$$\Omega_{22}(k, z) = \frac{P(z, t_d)}{Q(z)}, \quad (\text{C.15})$$

onde  $t_j = i \frac{j' \Lambda^2}{2}$ ,  $j = a, b, d, e$

$$P(z, t_j) = z^3 + 2\Lambda^2 z^2 + (\Lambda^4 - t_j)z - t_j \Lambda^2, \quad (\text{C.16})$$

$$Q(z) = z^4 + 2\Lambda^2 z^3 + (\Lambda^4 - u)z^2 - u\Lambda^2 z + v, \quad (\text{C.17})$$

com  $u = \frac{i(a'+d')\Lambda^2}{2}$  e  $v = \frac{(b'^2 - a'd')\Lambda^4}{4}$ . A partir das Eqs. (C.2), (C.3) e (C.4), podemos escrever

$$u = \frac{-\Lambda^2 \epsilon (1 + 2 \sinh^2 \theta) ((k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2)}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2 (\cosh^4 \theta - \sinh^4 \theta) + \frac{\epsilon^2}{2} \sinh^2 2\theta}, \quad (\text{C.18})$$

e

$$v = \frac{\Lambda^4}{4} \frac{((k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2)}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2 (\cosh^4 \theta + \sinh^4 \theta) - \frac{\epsilon^2}{2} \sinh^2 2\theta}, \quad (\text{C.19})$$

de forma que  $u < 0$  e  $v > 0$ . Para obtermos a transformada invversa de Laplace de cada componente da matriz  $\Omega$ , devemos procurar soluções da equação de quarta ordem  $Q(z) = 0$ . A equação de quarta ordem tem a forma

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad (\text{C.20})$$

e suas raízes [76] são dadas por:

$$z_1 = -\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}D, \quad (\text{C.21})$$

$$z_2 = -\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}D, \quad (\text{C.22})$$

$$z_3 = -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}E, \quad (\text{C.23})$$

$$z_4 = -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}E, \quad (\text{C.24})$$

onde

$$R \equiv \left( \frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + y_1 \right)^{1/2}, \quad (\text{C.25})$$

$$D \equiv \begin{cases} \left( F(R) + G \right)^{1/2} & \text{for } R \neq 0 \\ \left( F(0) + H \right)^{1/2} & \text{for } R = 0, \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

$$E \equiv \begin{cases} \left( F(R) - G \right)^{1/2} & \text{for } R \neq 0 \\ \left( F(0) - H \right)^{1/2} & \text{for } R = 0, \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

$$F(R) \equiv \frac{3}{4}a_3^2 - R^2 - 2a_2, \quad (\text{C.28})$$

$$H \equiv 2 \left( y_1^2 - 4a_0 \right)^{1/2}, \quad (\text{C.29})$$

$$G \equiv \frac{1}{4}(4a_3a_2 - 8a_1 - a_3^3)R^{-1}, \quad (\text{C.30})$$

e  $y_1$  é uma raiz real da seguinte equação cúbica

$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_0)y + (4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0) = 0. \quad (\text{C.31})$$

Por conveniência, vamos assumir que  $R$ , definida por Eq.(C.25), é diferente de zero. Comparando as Eqs. (C.17) and (C.20), obtemos  $a_3 = 2\Lambda^2$ ,  $a_2 = \Lambda^4 - u$ ,  $a_1 = -u\Lambda^2$  e  $a_0 = v$ . Dessa forma, a inversa da transformada de laplace de  $\Omega_{ab}$  é dada por

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(k, \tau) = & \frac{P(z_1, t_a)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} e^{z_1\tau} + \\ & + \frac{P(z_2, t_a)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} e^{z_2\tau} + \\ & + \frac{P(z_3, t_a)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} e^{z_3\tau} + \\ & + \frac{P(z_4, t_a)}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} e^{z_4\tau}, \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{12}(k, \tau) = \Omega_{21}(k, \tau) = & - \left( \frac{t_b z_1 + t_b \Lambda^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} e^{z_1 \tau} + \right. \\
 & + \frac{t_b z_2 + t_b \Lambda^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} e^{z_2 \tau} + \\
 & + \frac{t_b z_3 + t_b \Lambda^2}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} e^{z_3 \tau} + \\
 & \left. + \frac{t_b z_4 + t_b \Lambda^2}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} e^{z_4 \tau} \right), \quad (\text{C.33})
 \end{aligned}$$

e, finalmente,  $\Omega_{22}(k, \tau) = \Omega_{11}(k, \tau; t_a \rightarrow t_d)$ . As raízes  $z_i$  são dadas por

$$z_1 = -\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{1}{2}i(\sigma + \gamma), \quad (\text{C.34})$$

$$z_2 = -\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{1}{2}i(\sigma - \gamma), \quad (\text{C.35})$$

$$z_3 = -\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{1}{2}i(\sigma - \gamma), \quad (\text{C.36})$$

$$z_4 = -\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{1}{2}i(\sigma + \gamma), \quad (\text{C.37})$$

com  $\sigma = (|u| - y_1)^{1/2}$  e  $\gamma = (-\Lambda^4 + |u| + y_1)^{1/2}$  quantidades reais. As Eqs. (C.32) e (C.33) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
 \Omega_{11}(k, \tau) = & - \left[ \left( \cos\left(\frac{(\sigma + \gamma)}{2}\tau\right) + \frac{\Lambda^2}{(\sigma + \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma + \gamma)}{2}\tau\right) \right) h_1 + \right. \\
 & + \left( \cos\left(\frac{(\sigma - \gamma)}{2}\tau\right) + \frac{\Lambda^2}{(\sigma - \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma - \gamma)}{2}\tau\right) \right) h_2 + \\
 & + 8 t_a \sin\left(\frac{\sigma \tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma \tau}{2}\right) + \\
 & \left. + 4 t_a \Lambda^2 \left( g_1 \sin\left(\frac{(\sigma + \gamma)}{2}\tau\right) + g_2 \sin\left(\frac{(\sigma - \gamma)}{2}\tau\right) \right) \right] \frac{e^{-\frac{\Lambda^2}{2}\tau}}{8 \sigma \gamma}, \quad (\text{C.38})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(k, \tau) = \Omega_{21}(k, \tau) &= \frac{t_b}{2\sigma\gamma} \left[ \frac{\Lambda^2}{(\sigma + \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma + \gamma)\tau}{2}\right) - \frac{\Lambda^2}{(\sigma - \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma - \gamma)\tau}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin\left(\frac{\sigma\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma\tau}{2}\right) \right] e^{-\frac{\Lambda^2}{2}\tau}, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

onde

$$h_1 = -(\sigma + \gamma)^2 - \Lambda^4, \quad (\text{C.40})$$

$$h_2 = (\sigma - \gamma)^2 + \Lambda^4, \quad (\text{C.41})$$

$$g_1 = i - \frac{2\Lambda^2}{(\sigma + \gamma)}, \quad (\text{C.42})$$

$$g_2 = i - \frac{2\Lambda^2}{(\sigma - \gamma)}, \quad (\text{C.43})$$

e, novamente,  $\Omega_{22}(k, \tau) = \Omega_{11}(k, \tau; t_a \rightarrow t_d)$ .

Vamos considerar, agora, os critérios de convergência para nosso processo estocástico. Para haver convergência, é necessário que a função de Green retardada para o problema de difusão satisfaça  $G_{ab}(k, \tau)|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Ou seja, devemos ter  $\Omega_{ab}(k, \tau)|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Das expressões acima, podemos ver que obteremos convergência caso todas as raízes de  $Q(z)$  sejam negativas, o que de fato ocorre se tivermos  $\sqrt{-|u| + y_1} + \sqrt{\Lambda^4 - |u| - y_1} < \Lambda^2$ . Outra forma de obtermos convergência é exigir que todas as raízes sejam complexas e suas partes reais negativas, como é o nosso caso. Portanto, as quantidades  $\sigma$  and  $\gamma$  devem ser reais, como impusemos anteriormente. Isso leva aos seguintes critérios:  $|u| - y_1 > 0$  e  $|u| + y_1 - \Lambda^4 > 0$ .

Vamos agora definir  $y_1$ . Como dito antes,  $y_1$  é uma raiz real da equação de terceira ordem

$$z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0. \quad (\text{C.44})$$

Comparando Eqs. (C.17), (C.20), (C.31) and (C.44), podemos identificar:  $b_2 = u - \Lambda^4$ ,



$b_1 = -2\Lambda^4 u - 4v$  and  $b_0 = -4uv - u^2\Lambda^4$ . Escrevendo

$$q = \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{9}b_2^2, \quad (\text{C.45})$$

$$r = \frac{1}{6}(b_1b_2 - 3b_0) - \frac{1}{27}b_2^3, \quad (\text{C.46})$$

temos que

$$q = -\frac{4}{9}\Lambda^4 u - \frac{\Lambda^8}{9} - \frac{4}{3}v - \frac{u^2}{9}, \quad (\text{C.47})$$

$$r = \frac{4}{9}\Lambda^8 u + \frac{2}{3}\Lambda^4 v + \frac{1}{18}\Lambda^4 u^2 + \frac{4}{3}uv - \frac{1}{27}\Lambda^{12} + \frac{1}{27}u^3. \quad (\text{C.48})$$

Dessa forma,  $s_1 = (r + \sqrt{q^3 + r^2})^{1/2}$  e  $s_2 = (r - \sqrt{q^3 + r^2})^{1/2}$ . Portanto,

$$y_1 = (s_1 + s_2) + \frac{\Lambda^4 - u}{3}. \quad (\text{C.49})$$

Como podemos ver,  $y_1 > 0$ . Além disso, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $y_1$  se torna um polinômio em  $\Lambda$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] G. Parisi e Y. S. Wu, *Sci. Sin.* **24**, 483 (1981).
- [2] D. Polyakov, *Class. Quant. Grav.* **18**, 1979 (2001).
- [3] D. Mansi, A. Mauri e A. Petkou, *Phys. Lett.* **B 685**, 215 (2010).
- [4] J.-H. Oh e D. Jatkar, *JHEP* **11**, 144 (2012).
- [5] R. Brown, *Philos. Mag.* **4**, 161 (1828).
- [6] A. Einstein, *Ann. Physik* **17**, 549 (1905).
- [7] M. Smoluchowski, *Ann. Physik* **21**, 756 (1906).
- [8] P. Langevin, *C. R. Acad. Sci.* **146**, 530 (1908).
- [9] G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein, *Phys. Rev.* **36**, 823 (1930).
- [10] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
- [11] E. Nelson, *Phys. Rev.* **150**, 107 (1966).
- [12] R. Zwanzig, *“Nonequilibrium Statistical Mechanics”*, Oxford University (2001).
- [13] R. Kubo, M. Toda e N. Hashitsume *“Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics”*, Springer (1991).
- [14] P. Damgaard e H. Hüffel, *“Stochastic Quantization”*, World Scientific (1988).

- 
- [15] M. Namiki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111**, 1 (1993).
- [16] B. Sakita, “*Quantum Theory of Many Variables and Systems*”, World Scientific (1985).
- [17] P. Damgaard e H. Hüffel, Phys. Rep. **152**, 227 (1987).
- [18] J. Zinn-Justin, “*Quantum Field Theory and Critical Phenomena*”, Oxford University (2002).
- [19] H. Rumpf, Phys. Rev. **D 33**, 942 (1986).
- [20] H. Rumpf, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111**, 63 (1993).
- [21] J. Ambjørn, R. Loll, W. Westra e S. Zohren, Phys. Lett. **B 680**, 359 (2009).
- [22] T. C. de Aguiar, G. Menezes e N. F. Svaiter, Class. Quantum Grav. **26**, 075003 (2009).
- [23] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Phys. **A**, Math. Theor. **40**, 8545 (2007).
- [24] D. J. Amit, “*Field Theory; The Renormalization Group and Critical Phenomena*”, World Scientific (2005).
- [25] M. Le Bellac, “*Quantum and Statistical Field Theory*”, Oxford University (1992).
- [26] N. F. Svaiter, tese de doutorado, “*Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-tempo Denning e em Espaços Curvos*”, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1989).
- [27] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley and Sons (1972).
- [28] R. Wald, “*Quantum Field Theory in Curved Spacetimes and Black Hole Thermodynamics*”, University of Chicago (1994).

- 
- [29] L. Ford “*Quantum Field Theory in Curved Spacetime*”, arXiv:gr-qc/9707062v1 (1997).
- [30] M. Spradlin, A. Strominger e A. Volovich, “*Les Houches Lectures on de Sitter Space*”, arXiv:hep-th/0110007v2 (2001).
- [31] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, “*Quantum Fields in Curved Space*”, Cambridge University (1984).
- [32] S. A. Fulling, tese de doutorado, “*Scalar Quantum field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature*”, Princeton University (1972).
- [33] T. C. de Aguiar, G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **51**, 102304 (2010).
- [34] J. Berges e I.-O. Stamatescu, Phys. Rev. Lett. **95**, 202003 (2005).
- [35] J. Berges, Sz. Borsányi, D. Sexty e I.-O. Stamatescu, Phys. Rev. **D 75**, 045007 (2007).
- [36] J. Berges e D. Sexty, Nucl. Phys. B 799, 306 (2008).
- [37] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** 351, (1955).
- [38] L. Leplae, F. Mancini and H. Umezawa, Phys. Rep. **C 10**, 151 (1974).
- [39] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [40] M. Le Bellac, “*Thermal Field Theory*”, Cambridge University Press (1996).
- [41] N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [42] Y. Takahashi e H. Umezawa, Collective Phenomena **2**, 55 (1975).
- [43] E. Calzetta e B. L. Hu, Phys. Rev. **D 37**, 2878 (1988).
- [44] S. Weiss, J. Eckel, M. Thorwart e R. Egger, Phys. Rev. **B 77**, 195316 (2008).

- 
- [45] E. Calzetta e B. L. Hu, “*Nonequilibrium Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press (2008).
- [46] E. Gozzi, Phys. Lett. **B 150**, 119 (1985).
- [47] H. Okamoto, K. Okano, L. Schülke and S. Tanaka, Nucl. Phys. **B 324**, 684 (1989).
- [48] G. Guralnik and C. Pehlevan, Nucl. Phys. **B 822**, 349 (2009).
- [49] C. Pehlevan and G. Guralnik, Nucl. Phys. **B 811**, 519 (2009).
- [50] H. Hüffel e H. Rumpf, Phys. Lett. **B 148**, 104 (1984).
- [51] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **47**, 073507 (2006).
- [52] G. Menezes e N. F. Svaiter, Physica **A 374**, 617 (2007).
- [53] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **49**, 102301 (2008).
- [54] G. Aarts, Phys. Rev. Lett. **102**, 131601 (2009).
- [55] G. Aarts, JHEP **0905**, 052 (2009).
- [56] S. Ejiri, Phys. Rev. **D 78**, 074507 (2008).
- [57] Z. Fodor, S. D. Katz e K. K. Szabo, Phys. Lett. **B 568**, 73 (2003).
- [58] R. V. Gavai e S. Gupta, Phys. Rev. **D 68**, 034506 (2003).
- [59] P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. **B 642**, 290 (2002).
- [60] J. C. Osborn, Phys. Rev. Lett. **93**, 222001 (2004).
- [61] S. Chandrasekharan e U. J. Wiese, Phys. Rev. Lett. **83**, 3116 (1999).
- [62] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, Phys. Lett. **B 165**, 151 (1985).
- [63] J. D. Breit, S. Gupta e A. Zaks, Nucl. Phys. **B 233**, 61 (1984).

- 
- [64] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, editado por A. Jeffrey e D. Zwillinger, Academic Press (2007).
- [65] N. A. Chernikov e E. A. Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincaré **9 A**, 109 (1968).
- [66] E. A. Tagirov, Ann. Phys. **76**, 561 (1973).
- [67] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Nucl. Phys. **B 230**, 181 (1984).
- [68] R. F. Fox, J. Stat. Phys. **16**, 259 (1977).
- [69] R. F. Fox, J. Math. Phys. **18**, 2331 (1977).
- [70] E. Floratos and J. Iliopoulos, Nucl. Phys. **B 214**, 392 (1983).
- [71] H. Nakazato e Y. Yamanaka, Phy. Rev. **D 34**, 492 (1986).
- [72] W. G. Unruh, N. Weiss, Phys. Rev. **D 29**, 1656 (1984).
- [73] V. L. Ginzburg e V. P. Frolov, Sov. Phys. Usp. **30** (12), 1073 (1987).
- [74] D. W. Sciama, P. Candelas e D. Deutsch, Adv. Phys. **30**, 327 (1981).
- [75] S. A. Fulling e S. N. M. Ruijsenaars, Phys. Rep. **152**, 135 (1987).
- [76] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*”, Dover (1972).