

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE COSMOLOGIA, GRAVITAÇÃO E  
ASTROFÍSICA - ICRA

TESE DE DOUTORADO

# Evolução Bohmiana das Flutuações Primordiais

Grasiele Batista dos Santos

**Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto**

Trabalho apresentado ao programa de pós-graduação em física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 2012.



*À amada vó Felícia, que partiu deixando uma saudade imensa...*

“Na mesma pedra se encontram,  
Conforme o povo traduz,  
Quando se nasce - uma estrela,  
Quando se morre - uma cruz.  
Mas quantos que aqui repousam  
Hão de emendar-nos assim:  
"Ponham-me a cruz no princípio...  
E a luz da estrela no fim!”

Mário Quintana

*“(...) the actual state of our knowledge is always provisional and (...) there must be, beyond what is actually known, immense new regions to discover.”*

Louis de Broglie

# Agradecimentos

Muitos merecem ter seus nomes aqui, e o medo de um lapso momentâneo de memória é grande. Portanto, peço desculpas antes de agradecer. E agradeço:

- Ao querido Eduardo Bittencourt, pela paciência, ajuda, leitura do manuscrito e conforto. Acho que não foi fácil me aturar no período final deste trabalho.
- A Nelson Pinto Neto, pela orientação, pelos ensinamentos e pela alegria constante.
- Ao meu pai, Antônio Joaquim dos Santos, por todo o apoio.
- Às amigas Louise Rubin e Samantha Salomon, que mesmo distantes estão sempre próximas.
- A todos os pesquisadores do ICRA, pelo ótimo convívio, exemplo, estímulos e pelos pequenos seminários.
- Aos amigos e colegas do CBPF (lembrem que já pedi desculpas!): Aline Nogueira, Vicente Antunes, Rafael Perez, Rafael Aranha, Junior Toniato, Maria Elidaiana, Josephine Rua, Mariana Penna, Sandro Vitenti, Azucena Rivas-plata, Gabriel Caminha, Eduardo Zambrano, Stella Pereira, Beatriz Siffert, Érico Goulart, Marcela Campista, Habib Montoya, Clécio De Bom, Sofiane Faci, Maria Borba e Marília Carneiro.
- Às secretárias Elisete Martins, Luciene Silva, Cláudia Vanise, Sônia Ferreira e Luzia London pela disposição e ajuda constantes.

- Ao coordenador da CFC Ivan Oliveira pelo empenho a pós-graduação deste centro e ajuda financeira quando foi necessário.
- Aos professores do LAFEX Sebastião Alves Dias e José Helayël-Neto pelo empenho em preparar aulas excelentes, grande exemplo!
- Aos órgãos de fomento CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, nos propusemos a estudar a evolução das perturbações primordiais utilizando a teoria causal de de Broglie-Bohm, tanto no cenário inflacionário usual quanto em um modelo com ricochete. Este estudo foi desenvolvido com o intuito de entender uma questão fundamental que até o momento não havia sido propriamente respondida: a questão da transição quântico-clássica das perturbações. Acredita-se que as pequenas inomogeneidades clássicas observadas nos mapas da radiação cósmica de fundo na faixa de micro-ondas tenham sido as responsáveis pela formação das estruturas presentes no Universo através da instabilidade gravitacional. A origem destas perturbações é atribuída a flutuações do estado de vácuo de um campo quântico. A teoria usual se baseia em uma identificação entre o espectro das perturbações clássicas e o valor esperado das flutuações no (seu) estado de vácuo para justificar as últimas como condições iniciais para as primeiras. Claro está que esta é uma visão que apresenta limitações pois ainda há a necessidade de um processo físico que garanta a passagem de um estado de vácuo homogêneo e isotrópico para um estado assimétrico e essencialmente clássico. Este problema está diretamente ligado ao problema da medida em mecânica quântica, com o agravante de estarmos agora tratando de uma teoria cosmológica, onde a noção de observador ou ambiente clássico externo ao sistema não faz sentido. Neste trabalho mostramos que a teoria Bohmiana oferece uma resolução para esta questão de maneira simples e consistente, com a qual é possível construir um quadro completo da evolução das perturbações, fornecendo um espectro de potência consistente com a abordagem usual.

# Abstract

In this work we deal with the evolution of primordial perturbations from the point of view of the de Broglie-Bohm theory of motion, both in the usual inflationary scenario and in a bouncing model. This analysis was developed with the aim of solving a fundamental open question: the quantum-to-classical transition of these perturbations. It is believed that the small inhomogeneities observed in the cosmic microwave background radiation were the responsible for structure formation through gravitational instability. The origin of these perturbations is assigned to fluctuations of a quantum field in its vacuum state, due to the uncertainty principle. The usual view of the quantum-to-classical transition is based on an identification of the spectrum of classical perturbations with the vacuum expectation value of the quantum fluctuations to justify the latter as initial conditions for the former. This is a restricted view of the subject that works for practical purposes, but we still need a physical process to provide a consistent description of the passage of a symmetrical vacuum state to a classical inhomogeneous one. This problem is directly linked to the “measurement problem” in quantum mechanics, which is exacerbated in the cosmological context, where concepts like external observers or classical environment do not make sense. In this work we show that the Bohmian theory offers a simple and consistent resolution to this question, in which it is possible to construct a complete picture of the evolution of the perturbations, yielding a power spectrum consistent with the usual approach.

# Sumário

Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
Sumário . . . . .	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A Teoria de de Broglie-Bohm</b>	<b>7</b>
2.1 A Teoria da Onda Piloto . . . . .	8
2.2 Contextualidade e Realidade . . . . .	14
2.3 A (Não) Localidade e o (Não) Equilíbrio Quântico . . . . .	15
2.4 A Teoria Quântica Relativística . . . . .	16
2.5 O Limite Clássico . . . . .	19
<b>3 Teoria de Perturbações Cosmológicas e Origem das Sementes para Formação de Estruturas</b>	<b>22</b>
3.1 O Modelo Padrão da Cosmologia . . . . .	23
3.2 Teoria Inflacionária . . . . .	25
3.3 Teoria de Perturbações Cosmológicas na Relatividade Geral . . . . .	29
3.4 A Estatística das Flutuações Clássicas . . . . .	35
3.5 A Quantização das Perturbações Cosmológicas . . . . .	38
3.5.1 Do Quântico ao Clássico . . . . .	43
3.5.2 As Soluções Propostas e suas Lacunas . . . . .	44
<b>4 Evolução Bohmiana das Flutuações Quânticas</b>	<b>50</b>

4.1	Descrição Bohmiana das Flutuações Primordiais no Contexto Inflacionário . . . . .	51
4.1.1	O espectro de potência . . . . .	59
4.1.2	Evolução a Partir de Outros Estados Iniciais . . . . .	61
4.2	Evolução Bohmiana das Perturbações em um Modelo com Ricochete .	63
4.2.1	A Quantização Canônica da Gravitação . . . . .	63
4.2.2	Perturbações no Modelo com Ricochete Quântico . . . . .	67
4.2.3	Evolução Bohmiana das Perturbações . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Descoerência</b>	<b>78</b>
A.1	Cadeia de von Neumann . . . . .	78
A.2	Descoerência . . . . .	81
	<b>Bibliografia</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

- *Podia me dizer, por favor, qual é o caminho que devo seguir?*
- *Isso depende do lugar para onde você quer ir, disse o Gato.*
  - *Não tenho destino certo, disse Alice.*
- *Nesse caso não importa muito por onde você vá.*

Lewis Carroll [1]

O modelo padrão da cosmologia<sup>1</sup> nos dá uma descrição razoavelmente precisa da evolução do Universo que cobre aproximadamente 13,7 bilhões de anos. A principal hipótese deste modelo se reduz ao que chamamos de princípio cosmológico, o qual afirma que em grandes escalas as quantidades observáveis do Universo são as mesmas para todos os observadores. Em outras palavras, em grandes escalas nosso Universo é homogêneo e isotrópico. Esta afirmação era tomada como um princípio filosófico até que, em 1964, medidas de uma radiação em comprimentos de onda na faixa de micro-ondas de origem cosmológica com estas simetrias foram feitas [4], dando-lhe suporte<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>A definição deste termo pode variar de autor para autor. Aqui, seguimos a Ref. [2]: nos referimos ao modelo que descreve a evolução do Universo a partir de um estado muito quente e denso, onde a radiação era a componente material mais importante. Esta componente é descrita pela física de partículas elementares [3]. Desde então o Universo vem se expandindo e esfriando.

<sup>2</sup>Previsões teóricas e observações de uma radiação com temperatura próxima à medida por Penzias e Wilson já haviam sido feitas anteriormente, mas sem menção a uma origem cosmológica, veja por exemplo a Ref. [5].

Podemos portanto sumarizar o modelo padrão, do ponto de vista da interação gravitacional, de acordo com as seguintes afirmações:

1. A gravitação é regida pelas equações de Einstein;
2. Vale o princípio cosmológico, portanto existe um tempo global a partir do qual todas as quantidades relevantes no Universo são dadas<sup>3</sup>;
3. Acima da escala aproximada de 100 Mpc, a distribuição de matéria e energia é considerada contínua e pode portanto ser descrita por um fluido perfeito. Assume-se que cada componente deste conteúdo material obedece uma equação de estado do tipo  $p = \omega\rho$ , onde  $p$  e  $\rho$  são a pressão e a densidade de energia, respectivamente, e  $\omega$  é uma constante;

Estas hipóteses estão no cerne dos trabalhos de Friedmann [6], Lemaitre [7] e outros, mas não são suficientes para descrever o Universo observado [8]. Apesar de ser o modelo vigente, este possui uma série de problemas, tais como a singularidade inicial, o horizonte cosmológico, o problema da planeza etc. Um grande avanço na tentativa de resolver estes problemas foi dado pela teoria inflacionária.

A teoria inflacionária é uma teoria bem sucedida e aceita atualmente como complementar ao modelo padrão da cosmologia por explicar vários problemas que este último apresenta, conforme citado acima. Sua origem remonta aos trabalhos de A. Starobinsky [9], A. Guth [10] e K. Sato [11]. Starobinsky, na tentativa de resolver o problema da singularidade inicial, argumentou que correções quânticas na Relatividade Geral seriam importantes no universo primordial, e estas genericamente levam a termos de curvatura ao quadrado na ação de Einstein-Hilbert. A solução das equações de Einstein com estes termos extras, quando a curvatura é grande, levam a uma evolução do tipo de Sitter, com uma constante cosmológica efetiva. Na tentativa de resolver o problema dos monopólos magnéticos, Guth propôs que o universo primordial, enquanto esfriava, ficou preso em um falso vácuo com uma densidade de energia alta, algo similar a uma constante cosmológica. Ele poderia decair somente através de um processo de nucleação de bolhas via tunelamento quântico de acordo com a Teoria da Grande Unificação. Bolhas de vácuo verdadeiro

---

<sup>3</sup>Isto se deve ao fato de que podemos definir uma escala de tempo onde as equações  $t = e^{te}$  definem as hypersuperfícies onde a distribuição de matéria é homogênea.

se formariam espontaneamente no fundo de vácuo falso. Este modelo apresentava o problema de não produzir radiação e portanto não reaquecer. Isto só aconteceria se as bolhas colidissem. No entanto, se a inflação durou o tempo suficiente para resolver o problema das condições iniciais, as colisões seriam muito raras. A resolução deste problema veio independentemente de A. Linde [12] e de A. Albrecht e P. Steinhardt [13], que propuseram o modelo de *rolamento lento* ou *inflação nova*, onde um campo escalar descendo lentamente seu potencial (em comparação com a expansão do Universo) produziria um período de expansão acelerada resolvendo o problema dos monopólos. Além disso, seria capaz de produzir um reaquecimento do universo e a produção de radiação quando o potencial se tornasse mais íngreme, através do processo de ressonância paramétrica.

Neste contexto, a (nova) inflação é uma teoria capaz de fazer previsões bastante gerais independente do modelo exato subjacente. Um campo escalar real sob determinadas condições é capaz de gerar um período de expansão acelerada, independente da forma exata de seu potencial. Essa fase de expansão acelerada prevê um universo muito próximo de plano, o que é confirmado pelas observações. É também uma teoria que resolve o problema do horizonte ao inflar uma região pequena conectada causalmente para além do raio de Hubble, o que oferece a possibilidade de tentar entender porque a radiação de fundo que medimos hoje é homogênea e isotrópica mesmo para regiões que, em princípio, estariam desconectadas e com propriedades diversas umas das outras se a evolução do fator de escala fosse somente dada pelas equações de Friedmann com radiação como fonte<sup>4</sup>. A ela também foi atribuída a explicação da origem das sementes para formação de estruturas: estas seriam resultado de flutuações quânticas do campo escalar que foram ampliadas durante a fase de expansão acelerada. Contudo, devido à escala de energia em que acontece, não é possível obter observações diretas do modelo inflacionário e seu suporte observacional está baseado nesta previsão de condições iniciais.

No entanto, um problema fundamental com respeito a este modelo permanece: a transição quântico-clássica destas flutuações primordiais. O espectro que observamos no mapa da radiação cósmica de fundo em micro-ondas está relacionado a

---

<sup>4</sup>No entanto, o problema da homogeneidade e isotropia não é resolvido, pois a inflação não oferece um mecanismo físico que possa ter sido responsável por instaurar estas simetrias, apenas garante que esse mecanismo possa atuar de maneira causal.

pequenas inhomogeneidades clássicas. Por outro lado, se flutuações quânticas são as boas condições iniciais, o espectro deveria ser uma quantidade de origem quântica, dado pelo valor esperado das flutuações quânticas do campo no estado de vácuo. O que se faz é utilizar cálculos perturbativos clássicos no espectro calculado quânticamente e o que é obtido coincide com as observações. Esta é a “justificativa” para impor flutuações quânticas como condições iniciais para a subsequente evolução do Universo observável. Mas qual seria o processo responsável por transformar flutuações quânticas em perturbações clássicas? Muitos autores negligenciaram este ponto, apesar de seu papel importante como fundamento para as previsões da inflação com respeito à origem de estruturas no Universo. Como afirmar que a inflação resolve o problema das condições iniciais para formação de estruturas se não respondermos esta questão? Veremos que alguns autores se preocuparam com esta lacuna e tentaram preenchê-la de diversas maneiras.

A transição quântico-clássica é uma questão de muitos debates já na mecânica quântica não-relativística. Ela está relacionada a um problema fundamental que a nível prático é, em geral, deixado de lado: o problema da medida na interpretação de Copenhague [14]. Esta interpretação se estabeleceu como a principal abordagem à teoria quântica depois do congresso de Solvay em 1927, embora não tenha havido um consenso entre os participantes quanto a preferência por esta visão [15]. Segundo N. Bohr [16], nossas mentes são clássicas e por isso nossas teorias científicas devem se basear em conceitos clássicos. Para que tenhamos acesso ao resultado de uma medida, o aparato deve também ser clássico e não é possível responder como se dá a interação entre aparato e sistema medido. Von Neumann tentou descrever o aparato quanticamente [17], mas precisou impor a noção de *colapso da função de onda*, um processo sem um mecanismo claro subjacente que não obedece a unitariedade da equação de Schrödinger e que acontece sob efeito de uma medida. Embora o algoritmo da mecânica quântica funcione no nível prático e nos forneça previsões (probabilísticas) de experimentos em laboratório, enfrentamos um problema conceitual gravíssimo ao tentar aplicar esta teoria ao Universo em sua totalidade. Não há neste contexto uma noção de ambiente clássico externo ou de observadores, e não podemos usar nossas medidas para explicar um processo do qual somos resultado. Ou seja, tendo em vista o objetivo da construção de uma cosmologia quântica, a

formulação da teoria quântica a ser adotada é essencial e está claro que a visão de Copenhague não é uma escolha consistente.

Neste trabalho utilizaremos a teoria quântica de de Broglie-Bohm para tratar a evolução das perturbações primordiais. Sua origem remonta aos trabalhos de de Broglie na década de 1920 [18], e foi aprimorada por D. Bohm na década de 1950 [19]. Trata-se de uma teoria ontológica, isto é, supõe a realidade física dos objetos que descreve e está livre do problema da medida, como veremos adiante. Assim, é uma teoria que pode ser aplicada ao estudo do Universo do ponto de vista quântico consistentemente. Mostraremos que a evolução das perturbações no cenário inflacionário se aproxima da evolução clássica no regime esperado (para comprimentos de onda que crescem além do raio de Hubble durante a inflação) e o espectro de potência calculado utilizando a descrição Bohmiana fornece o resultado calculado através de valores esperados usuais.

Como dito anteriormente, a teoria inflacionária prevê condições iniciais naturais para a evolução de estruturas e é com essas previsões que poderíamos testá-la mesmo que indiretamente. Assim, se uma outra teoria for capaz de oferecer as mesmas condições iniciais, não poderíamos em princípio descartá-la. Além disso, a inflação não se propõe a resolver o problema da singularidade inicial. No sentido de tratar esta questão, modelos com ricochete (que apresentam uma transição de uma fase de contração para uma fase de expansão sem singularidade) têm sido estudados e podem de fato levar a previsões consistentes com as observações [20]. Os primeiros modelos com ricochete surgiram no final da década de 70 [21] e começo da década de 80 [22]. O ricochete pode ser causado por modificações da Relatividade Geral, por conteúdos materiais que não satisfazem as condições de energia ou por geometrias nas quais não é possível construir uma folheação global com um tempo cosmológico bem definido<sup>5</sup>. Neste trabalho aplicaremos a teoria Bohmiana em um modelo onde o ricochete é causado por efeitos da quantização da geometria, em uma abordagem *à la* Wheeler-DeWitt. Mostraremos que também neste contexto a transição quântico-clássica das perturbações é um processo bem definido e a fase de ricochete não altera a evolução destas perturbações para o regime clássico.

---

<sup>5</sup>Estas são condições que violam as hipóteses dos *teoremas de singularidade* [23], que afirmam que (dadas as hipóteses) as singularidades são inevitáveis na teoria da Relatividade Geral.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo 2 apresenta-se uma descrição da teoria de de Broglie-Bohm onde tentou-se, além de desenvolver a formulação matemática básica, tratar os conceitos mais importantes envolvidos nesta abordagem. O capítulo 3 trata das perturbações cosmológicas, desde sua descrição clássica até sua quantização. Fornecemos também uma breve análise do cenário inflacionário e seguimos dando um panorama das visões presentes na literatura que tentam explicar o problema da transição quântico-clássica, juntamente com suas lacunas. O capítulo 4 se concentra nos resultados obtidos, a saber, a descrição das perturbações dentro da teoria Bohmiana, tanto no cenário inflacionário como em um modelo com ricochete. Mostramos também que a evolução se mantém consistente quando utilizamos outros estados iniciais que não o estado de vácuo para a variável de Mukhanov-Sasaki. No capítulo 5 apresentamos as conclusões e um possível caminho a seguir na direção de testar a teoria Bohmiana no contexto do Universo primordial. Por fim, apresentamos um apêndice com uma descrição básica do processo de descoerência, necessário para entender com clareza as críticas feitas no capítulo 3.

É importante ressaltar que neste trabalho utilizaremos os nomes “teoria Bohmiana”, “teoria causal” e “teoria de de Broglie-Bohm” indistintamente. O uso das constantes de maneira explícita ou o uso do sistema natural, em que faz-se as constantes  $c = \hbar = G = 1$ , será conforme a conveniência ao longo do texto, sendo que deixaremos esta informação clara quando necessário. A assinatura adotada para a geometria será  $(+, -, -, -)$ .

## Capítulo 2

# A Teoria de de Broglie-Bohm

*Does this mean that my observations become real only when I observe an observer observing something as it happens? This is a horrible viewpoint. Do you seriously entertain the thought that without observer there's no reality? Which observer? Any observer? Is a fly an observer? Was there no reality before 10<sup>9</sup> B.C. before life began? Or are you the observer? Then there's no reality to the world after you are dead? I know a number of otherwise respectable physicists who have bought life insurance. By what philosophy will the universe without men be understood?*

Richard Feynman [24]

Segundo a interpretação de Copenhague da mecânica quântica [25], que usualmente nos é ensinada na graduação, o resultado de um processo quântico se dá entre inúmeras possibilidades ou potencialidades do sistema com o colapso da função de onda, sob o efeito de uma medida. Por outro lado, de acordo com N. Bohr [16], o aparato de medida deve necessariamente ser clássico pois nossas mentes são clássicas, e assim toda teoria científica deveria ser descrita em termos de conceitos clássicos. A interação entre o aparato de medida e o sistema quântico sendo medido seria impossível de ser analisada por princípio e então o postulado do colapso se tornaria irrelevante. Esta conclusão o levou ao princípio da complementaridade, o qual diz que o mundo quântico se caracteriza pela impossibilidade de se aplicar determinados conceitos clássicos simultaneamente, isto é, evidências obtidas sob diferentes condições experimentais não podem ser compreendidas dentro de uma única estrutura, mas devem ser consideradas como complementares. Em ambos os casos,

temos uma situação em que existem dois mundos completamente distintos ao invés de um único, conectados por um processo inexplicável ou explicado através de um processo que não obedece a unitariedade das equações de movimento [26]. Com estas visões, outros pontos fundamentais surgem: o que exatamente qualifica um observador ou uma medição? Onde está a fronteira entre estes dois domínios? Não existe realidade sem que haja medidas? Essa situação é ainda mais grave no contexto cosmológico, onde o sistema a ser tratado é a totalidade do universo, sem um contexto clássico externo à ele. Neste capítulo apresentamos a teoria do movimento de de Broglie-Bohm, uma teoria ontológica na qual o problema da medida não se coloca e é possível construir uma cosmologia quântica consistente.

## 2.1 A Teoria da Onda Piloto

Em 1924, com sua tese de doutorado, Louis de Broglie dá início à construção de uma nova forma de dinâmica, a teoria da onda piloto, que foi publicada em 1927 e amplamente discutida no congresso de Solvay, neste mesmo ano [15]. Nesta teoria a primeira lei de Newton foi abandonada e substituída por um novo postulado segundo o qual um corpo movendo-se livremente segue uma trajetória ortogonal às superfícies de fase constante de uma onda “guia” associada. O objeto material passa a ter velocidade determinada por essa onda, e tem sua trajetória dada através de uma equação de primeira ordem, e não mais através de uma lei para a aceleração, como na teoria Newtoniana. Consideremos como exemplo um sistema quântico de  $N$  partículas não relativísticas em 3 dimensões, por simplicidade, com vetores posição  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Segundo a teoria de de Broglie, a dinâmica deste sistema é determinada por duas equações diferenciais: a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (2.1)$$

sendo  $\Psi = \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  a onda que guia o sistema (a chamada onda piloto, definida no espaço de configuração) juntamente com a equação

$$m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)}{|\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)|^2}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}_i(t)$  são as trajetórias das partículas e  $\mathbf{j}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  é uma corrente quântica associada à partícula  $i$  que deve satisfazer uma equação de conservação [27].

Note que esta equação determina  $\mathbf{x}_i(t)$  em termos das posições de todas as outras partículas do sistema. Esta é uma indicação de uma das características desta dinâmica: a não-localidade. Note também que a equação (2.2) é um ingrediente extra da teoria da onda piloto de de Broglie.

As posições das partículas  $\mathbf{x}_i(t)$  são vetores clássicos bem definidos para qualquer instante de tempo e assumimos que possuem realidade objetiva. Para a completa especificação do sistema, precisamos não apenas da onda piloto em um instante inicial, precisamos também das posições iniciais de cada partícula do sistema. Estas são variáveis adicionais às encontradas na interpretação usual de Copenhague. Como não podemos determinar exatamente estas posições iniciais, atribuímos a elas uma distribuição de probabilidade. De Broglie acabou por abandonar sua teoria pois não conseguiu explicar tanto o processo de medida quântica quanto dar sentido físico à onda piloto  $\Psi$ .

Em 1952, D. Bohm [19] consegue desenvolver a teoria, aplicando esta nova dinâmica ao próprio processo de medida, tratando o sistema considerado mais o aparato de medida como um único sistema de  $N$  partículas. A configuração total  $\mathcal{Q} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  passa a definir tanto a posição do ponteiro como a configuração do sistema medido. Esta abordagem é chamada mecânica Bohmiana. Bohm reconheceu sua teoria como sendo uma teoria de variáveis “escondidas”, no sentido de que havia variáveis que definiriam precisamente os resultados de cada processo de medida individual mas de maneira tal que os detalhes seriam extremamente complicados e incontroláveis. Segundo ele, estas variáveis seriam as posições iniciais das partículas embora outros acreditem que a própria onda piloto seja a variável escondida, já que apenas obtemos informações sobre ela através da observação do sistema quântico associado [28].

Durante uma medida quântica, a função de onda inicial  $\Psi(\mathcal{Q}, 0)$  evolui para uma superposição  $\Psi(\mathcal{Q}, t) = \sum_n c_n \Psi_n(\mathcal{Q}, t)$  em termos de funções de onda  $\Psi_n$  que se separam com respeito aos graus de liberdade do ponteiro, isto é, diferentes  $\Psi_n$  terão superposição desprezível com respeito às diferentes posições do ponteiro, considerando que o aparato de medida apresenta resolução suficiente para distinguir diferentes medidas. A configuração final  $\mathcal{Q}(t)$  poderá estar somente no suporte de um “ramo” da superposição ( $\Psi_i$ , para um  $i$  fixo). Ou seja, não há um colapso da

função de onda como em Copenhague, mas sim uma “redução” efetiva através da trajetória do sistema total que entra em um dos ramos da superposição guiado pela onda  $\Psi_i$  enquanto os outros ramos vazios continuam existindo embora não possamos observá-los. Estes correspondem às ondas vazias. Logo, o postulado do colapso e a presença de um observador clássico que realiza esse colapso através da observação fazem-se desnecessários neste contexto.

Consideremos novamente o sistema de  $N$  partículas sem spin, por simplicidade. Consideremos também uma Hamiltoniana com um termo cinético usual e um potencial clássico arbitrário. A equação (2.1) na representação de coordenadas fica dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathcal{Q}, t)}{\partial t} = \left[ - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\mathcal{Q}, t) \right] \Psi(\mathcal{Q}, t). \quad (2.3)$$

A corrente  $\mathbf{j}_i$  é expressa por

$$\mathbf{j}_i(\mathcal{Q}, t) = \frac{1}{m_i} \text{Im}[\Psi^*(\mathcal{Q}, t) \nabla_i \Psi(\mathcal{Q}, t)]. \quad (2.4)$$

Escrevemos agora a função de onda na forma polar  $\Psi = R \exp(iS)$  e obtemos duas equações para as quantidades reais  $S$  e  $R$  a partir da equação (2.3),

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} + V - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R} = 0 \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_i \left( R^2 \frac{\nabla_i S}{m_i} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Substituindo a expressão da corrente quântica na equação guia (2.2) ficamos com

$$\mathbf{p}_i \equiv m_i \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \nabla_i S(\mathcal{Q}, t). \quad (2.7)$$

A equação (2.5) é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi para  $S$ , com uma quantidade extra de natureza puramente quântica, o chamado potencial quântico

$$Q \equiv - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R}, \quad (2.8)$$

que é responsável por mudar a trajetória da partícula relativamente àquela que seria obtida no caso clássico. A equação (2.6) é uma equação de conservação do número de

partículas se, para um sistema de  $N$  partículas com velocidades dadas pela equação (2.7),  $R^2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)|^2$  for a densidade de probabilidade dessas  $N$  partículas estarem<sup>1</sup> nas posições  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  em um instante  $t$ . Se para um conjunto de sistemas de  $N$  partículas não soubermos as posições iniciais das partículas de cada membro deste conjunto, mas soubermos que inicialmente a densidade de probabilidade  $P$  associada a estas quantidades é dada por

$$P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, 0) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, 0)|^2, \quad (2.9)$$

então, em um instante qualquer  $t$ , a equação (2.6) garante que a distribuição de probabilidade para as posições será  $P = R^2(t)$ . Ou seja, para um conjunto de sistemas com a mesma função de onda inicial  $\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, 0)$  e com configuração inicial distribuída de acordo com a regra (2.9), conhecida como regra de Born, a distribuição estatística de resultados de medidas concordará com a teoria quântica padrão. Este é o chamado estado de equilíbrio quântico e foi mostrado que  $|\Psi|^2$  é o único funcional local da função de onda que é equivariante, isto é, mantém sua forma funcional no tempo [29].

Inicialmente postulava-se a regra (2.9) para a concordância com a teoria usual e  $\Psi$  possuiria então um papel duplo na teoria: ela forneceria a dinâmica do sistema através da relação guia (2.7) e, secundariamente, forneceria a estatística da distribuição de posições iniciais para um conjunto de sistemas. Mais tarde percebeu-se que a regra de Born pode ser obtida dentro da teoria de de Broglie-Bohm sem nenhum postulado adicional, como foi mostrado em [30]: sistemas fora do equilíbrio rapidamente sofrem relaxação para o estado de equilíbrio apenas como consequência das equações de movimento. Esta demonstração é análoga àquela do teorema H da mecânica estatística [31].

Desta maneira, vemos que a função de onda  $\Psi$  tem um papel puramente dinâmico dentro da teoria da onda-piloto, e sua atribuição estatística é apenas efetiva. A obtenção da regra de Born apresenta, além da economia de axiomas, a possibilidade de distinção entre esta teoria e a teoria quântica usual, como veremos adiante.

Em resumo, as equações (2.1) e (2.2) definem uma dinâmica determinística tal

---

<sup>1</sup>Estarem de fato, e não apenas “serem encontradas”, como dito em [28], p. 68: “the ‘probability of finding’ is a special case of the ‘probability of being’ ”.

que, dada uma função de onda inicial  $\Psi(\mathcal{Q}, 0)$  e uma configuração inicial  $\mathcal{Q}(0) = (\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_N(0))$ , a equação (2.2) juntamente com (2.1) determinam a trajetória  $\mathcal{Q} = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  subsequente do sistema. Possíveis trajetórias não podem se cruzar dado que  $\nabla_i S$  é uma função injetora das posições. Além disso, estas trajetórias não passam por pontos onde  $|\Psi|^2 = 0$  (pontos nodais) pois a probabilidade de encontrar o sistema nestes pontos é nula.

Derivando a equação (2.7) e utilizando a equação (2.5) chegamos a equação de segunda ordem

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} = -\nabla_i (V + Q). \quad (2.10)$$

Para Bohm, esta era a equação fundamental da teoria, a equação (2.7) era vista como um vínculo para os momenta iniciais, que poderia em princípio ser relaxado, enquanto que para de Broglie a equação guia de primeira ordem era fundamental, e representava a unificação dos princípios de Fermat e Maupertuis<sup>2</sup>.

O conceito de trajetória Bohmiana fica claro quando analisamos o experimento de interferência de fenda dupla, que foi desenvolvido numericamente em [32]. A função de onda inicial considerada foi uma superposição de duas gaussianas centradas uma em cada fenda. A fase da função de onda evoluída temporalmente foi utilizada na equação guia para o cálculo das trajetórias das partículas emitidas, cujas posições iniciais encontravam-se distribuídas de acordo com as gaussianas da superposição inicial. As trajetórias são mostradas na figura 2.1. O padrão de interferência gravado no anteparo é exatamente o esperado, no entanto, podemos dizer por qual fenda a partícula passou sabendo apenas sua posição final, já que a trajetória não pode cruzar a linha horizontal que passa pelo centro do aparato (ali, a probabilidade de encontrar a partícula é nula).

O padrão observado é devido à informação carregada pela função de onda e transmitida à partícula, o que inclui dados como o tamanho das fendas, a presença de detetores, etc. O potencial quântico é tal que, exercendo uma força sobre a partícula, faz com que ela se mova para certas regiões (faixas brilhantes) em detrimento de outras (regiões escuras), de acordo com o padrão da figura 2.2. Na prática não podemos medir estas trajetórias individualmente, como veremos adiante, mas vemos que o conceito de trajetória faz sentido na teoria quântica bohmiana, ao contrário da

---

<sup>2</sup>Uma discussão detalhada desta questão pode ser encontrada na referência [15], cap. 2.

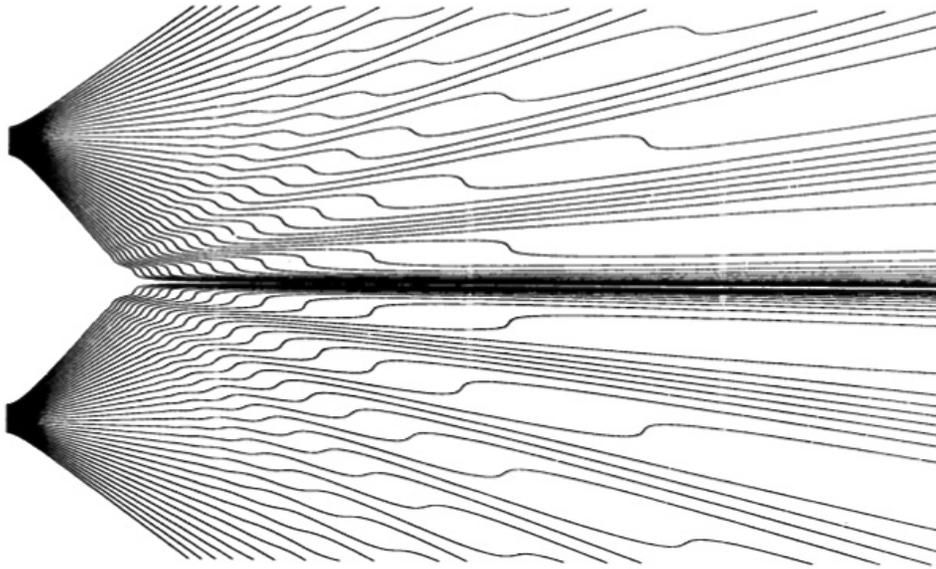


Figura 2.1: Trajetórias da experiência de fenda dupla com uma distribuição gaussiana de posições iniciais (figura retirada da Ref. [32]).

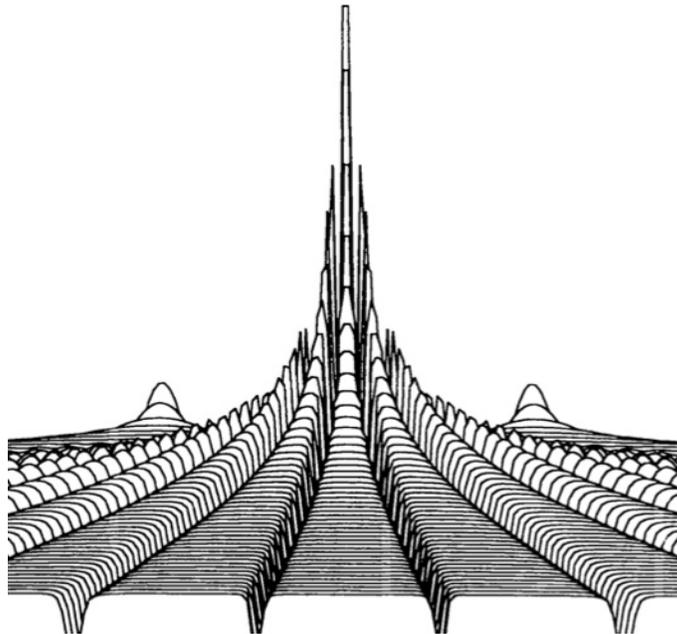


Figura 2.2: Potencial quântico para a experiência de fenda dupla vista a partir do anteparo (figura retirada da Ref. [32]).

visão ortodoxa que afirma que nem sequer podemos perguntar o que acontece entre as fendas e o anteparo, impondo um entendimento limitado do fenômeno quântico por princípio.

## 2.2 Contextualidade e Realidade

A posição é a única propriedade intrínseca da partícula na teoria de de Broglie-Bohm, pois é definida independentemente da função de onda. Todas as outras quantidades são dependentes do contexto. Isto acontece porque  $\Psi(Q, t)$  vai depender do conjunto de parâmetros que caracterizam o ambiente no qual a onda se encontra; por exemplo, a largura de cada fenda e a distância entre as fendas no experimento de interferência de fenda dupla citado anteriormente. Uma escolha diferente de parâmetros implicará em diferentes valores da função de onda em cada ponto no espaço-tempo, não somente aqueles pontos próximos aos objetos físicos com os quais os parâmetros estão associados. O campo  $\Psi$  também dependerá de características da partícula como a massa, a carga, etc., ou seja, mesmo que a partícula seja um objeto localizado no espaço, a função de onda dependerá destes parâmetros em todos os pontos do espaço. A Teoria de de Broglie-Bohm é, portanto, contextual (assim como a mecânica quântica usual). O princípio da incerteza surge como uma contingência da teoria, uma impossibilidade experimental de não afetar o sistema medido já que qualquer interação com o aparato de medida afetará  $\Psi$  em todos os pontos do espaço e este, por sua vez, afetará o sistema mudando o valor real da quantidade medida. No entanto, diferentemente da teoria usual, este não é um princípio fundamental, uma característica intrínseca ao mundo microscópico que não pode nunca ser violado (veremos adiante como possíveis situações permitiriam essa violação).

Uma outra característica fundamental da teoria é que se trata de uma teoria ontológica, ou seja, descreve “coisas” que existem independentemente de observação, não meramente potencialidades. A onda piloto também possui uma interpretação diferente da usual: alguns autores [33, 28] acreditam que se trata um campo objetivo real, mesmo que definida no espaço de configuração, e não apenas um objeto abstrato ou onda de probabilidade. Mesmo as ondas vazias, que aparecem depois que a onda se divide em ramos sem partículas, podem ser afetadas por um potencial externo e,

se superpostas posteriormente com o ramo que contém a partícula, influenciarão o subsequente movimento desta. Outros acreditam que seu papel é equivalente ao da função lagrangiana ou hamiltoniana, isto é, atua apenas como uma lei física. Esta visão é conhecida como nomológica [34].

Além de ontológica, a teoria do movimento de de Broglie-Bohm é também determinista, como foi notado anteriormente. Ressaltamos que, no entanto, o determinismo não é uma necessidade ontológica [35].

## 2.3 A (Não) Localidade e o (Não) Equilíbrio Quântico

Na época de de Broglie não foi reconhecido que sua teoria da onda piloto era uma teoria não local, como vimos através da equação (2.2)<sup>3</sup>, fato que foi somente notado por Bohm no começo dos anos 50. Em 1964, Bell mostrou que algumas correlações quânticas requeririam que qualquer que fosse a teoria de variáveis escondidas realista, esta deveria ser não-local [36]. Mais tarde foi notado que mesmo a teoria quântica usual é não local: a não-localidade parece ser uma característica fundamental da natureza, embora escondida de uma maneira que parece inacessível [37].

Vimos anteriormente que para uma distribuição inicial de posições das partículas dada de acordo com a regra de Born, as medidas são na prática limitadas pelo princípio da incerteza. Estaríamos então confinados a uma situação em que a teoria quântica do movimento de de Broglie-Bohm não poderia ser testada experimentalmente. No entanto, a teoria causal engloba a teoria quântica usual como uma restrição (validade do equilíbrio quântico) de uma física mais abrangente, aquela onde a não localidade permite a transmissão de sinais superluminais para sistemas emaranhados, e onde o princípio da incerteza pode ser violado [33]. Isto seria possível pois poderíamos utilizar partículas fora do equilíbrio para realizar medidas em sistemas comuns em equilíbrio; obteríamos assim medidas das trajetórias quânticas

---

<sup>3</sup>Para estados que podem ser escritos como produtos tensoriais, a equação guia é fatorada e cada partícula do sistema é guiada por uma fase que só dependerá das coordenadas associadas a ela, o que não acontece com estados emaranhados. Portanto é neste último caso que a não localidade se manifesta.

sem perturbar a função de onda.

Em outros termos, o equilíbrio, ou a situação onde as partículas estão inicialmente distribuídas de acordo com a regra de Born, não é uma exigência da teoria; é o equivalente, para a teoria da onda piloto, ao estado de equilíbrio térmico para a dinâmica clássica. O equilíbrio quântico não é uma lei, é uma contingência da teoria. Neste estado, os efeitos não locais se anulam em média e, para todos os propósitos práticos, não é possível emitir sinais superluminais. A impossibilidade de verificar estes tipos de efeitos da não localidade nos leva a crer que chegamos ao equivalente quântico da morte térmica do Universo, isso porque houve tempo suficiente para que os subsistemas pudessem estar em contato e relaxar desde o período quente e denso do universo primordial até a época atual.

Torna-se portanto de suma importância encontrar alguma situação onde o estado de não equilíbrio ainda seja percebido como um teste para a teoria. Uma proposta é apresentada em [38], onde a radiação cósmica de fundo em microondas (RCF) poderia ser utilizada para medir traços do estado de não equilíbrio, situação provável para o universo primordial. No contexto inflacionário estes traços estariam congelados nas perturbações cosmológicas de comprimentos de onda muito grandes e seriam detectados como anomalias no espectro de potência da RCF, em particular, com a quebra da invariância de escala das perturbações escalares.

## 2.4 A Teoria Quântica Relativística

A primeira questão importante no tratamento da teoria quântica relativística é distinguir qual é o elemento de realidade objetiva (*beable*)<sup>4</sup> inerente à teoria: as partículas associadas aos campos ou os próprios campos? Neste caso, parece não haver uma resposta única. No tratamento dos bósons, a boa escolha é atribuir realidade aos campos [40]. A questão dos férmions ainda permanece aberta, embora seja conhecido que a tentativa de formulação análoga aos bósons contenha problemas [41]. Bohm, em [40], apenas sugere tratar os férmions como partículas que, em um

---

<sup>4</sup>O termo *beable* (*be-able*) foi criado por Bell em oposição ao termo “observável” (*observ-able*), comumente utilizado na teoria usual da mecânica quântica [39]. Isto porque um elemento de realidade objetiva não é necessariamente passível de ser observado ou medido.

sistema de muitas partículas, estariam restritas a funções de onda antissimétricas. Neste tratamento é necessário a introdução da ideia do mar de Dirac, isto é, todos os estados de energia negativa no vácuo estariam preenchidos. Em [42], os elementos de realidade objetiva considerados são apenas graus de liberdade bosônicos, dado que os campos de matéria estão sempre acoplados (devido à simetria de calibre) com estes campos. Os graus de liberdade fermiônicos são considerados neste caso como propriedades da função de onda, da mesma maneira que Bell [43] tratou os graus de liberdade relativos ao spin: num experimento de Stern-Gerlach, é a posição inicial da partícula e sua trajetória subsequente que determinam a direção na qual ela sai do aparato, não existe uma rotação intrínseca associada à ela.

Consideremos como ilustração o caso bosônico, com um campo escalar  $\phi$ . Sua densidade lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2] + V(\phi). \quad (2.11)$$

Conseqüentemente, temos a hamiltoniana expressa como

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x[\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}]. \quad (2.12)$$

Para o procedimento de quantização utilizaremos a descrição funcional de Schrödinger. Tratamos o campo  $\phi$  e seu momentum conjugado  $\pi$  como operadores independentes do tempo satisfazendo as regras usuais de comutação, a saber

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.13)$$

sendo as demais relações nulas. Assim, na representação  $|\phi(\mathbf{x})\rangle$  onde o operador de campo é diagonal, o momentum é representado pela derivada funcional  $-i\delta/\delta\phi$ . A hamiltoniana se torna um operador que age sobre o objeto  $\Psi[\phi(\mathbf{x}), t] = \langle\phi(\mathbf{x})|\Psi(t)\rangle$  que é um funcional do campo e uma função do tempo.

Desta maneira, a equação de Schrödinger vem dada por

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\phi, t)}{\partial t} = \int d^3x\frac{1}{2}\left[-\hbar^2\frac{\delta^2}{\delta\phi^2} + (\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]\Psi(\phi, t). \quad (2.14)$$

Esta é uma expressão formal que necessita de processos de regularização e renormalização para estar bem definida [44]. Assumimos ainda que  $\Psi$  seja normalizada,

$$\int |\Psi|^2\mathcal{D}\phi = 1,$$

onde  $\mathcal{D}\phi$  é o produtório infinito  $\prod_{\mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x})$  na variável contínua  $\mathbf{x}$ .

Reescrevendo a função de onda na forma polar, obtemos as equações reais

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \int d^3x \frac{1}{2} \left[ -\hbar^2 \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] + Q = 0 \quad (2.15)$$

e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta}{\delta \phi} \left( R^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0, \quad (2.16)$$

com o potencial quântico dado por

$$Q[\phi, t] = -\frac{\hbar^2}{2R} \int d^3x \frac{\delta^2 R}{\delta \phi^2}.$$

Esta última expressão também necessita de um procedimento de regularização para se tornar consistente.

Assumindo que o campo  $\phi$  possui um valor bem definido para todo  $\mathbf{x}$  e para cada valor de  $t$ , qualquer que seja o estado  $\Psi$ , postulamos que sua evolução é dada através da equação guia, de maneira análoga ao caso não relativístico,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\delta S[\phi(\mathbf{x}), t]}{\delta \phi(\mathbf{x})} \Big|_{\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.17)$$

Derivando funcionalmente a equação (2.15) e substituindo (2.17), obtemos a equação de segunda ordem

$$\square \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta V[\phi, t]}{\delta \phi} - \frac{\delta Q[\phi, t]}{\delta \phi}, \quad (2.18)$$

ou seja, a evolução do campo escalar pode ser tanto não linear quanto não local mesmo na ausência de autointeração, devido à presença do potencial quântico no lado direito desta última equação. São estas as propriedades que induzem as trocas quânticas de energia. A evolução clássica se dá quando a força quântica  $\frac{\delta Q}{\delta \phi}$  se torna desprezível com relação à força clássica ao mesmo tempo em que  $Q \rightarrow 0$ , conforme veremos na próxima seção.

É importante notar que a invariância de Lorentz é quebrada ao nível de eventos individuais. Esta quebra se dá devido à caracterização dependente de estado dada aos sistemas quânticos<sup>5</sup>. No entanto, as propriedades observáveis dos campos são

---

<sup>5</sup>Note que a variável  $t$  aparece sozinha no lado direito da equação (2.18). Isto é devido ao fato de que o formalismo de Schrödinger é construído em um referencial privilegiado no qual o operador de campo é independente do tempo mas a função de estado não.

estatísticas, estando contidas nos valores esperados

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int \Psi^*[\phi] \hat{A} \Psi[\phi] \mathcal{D}\phi, \quad (2.19)$$

ou seja, a covariância de Lorentz (assim como a localidade) é um efeito estatístico.

## 2.5 O Limite Clássico

Considerando a mecânica quântica como a teoria fundamental da qual a mecânica clássica emerge, usualmente encontramos o argumento de que o limite clássico é atingido quando toma-se o limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Esta ideia apresenta vários problemas conceituais e matemáticos, a começar pelo fato de que se esperamos descrever uma teoria universal, o regime clássico deveria poder ser caracterizado sem fazer com que uma constante fundamental tenha seu valor modificado. Além disso, tomar um limite no qual  $\hbar$  seja pequeno não possui um significado absoluto, já que seu valor depende do sistema de unidades utilizado. O que podemos fazer em uma primeira análise é compará-lo com quantidades que possuem a mesma dimensão que a sua, especificando quais quantidades serão mantidas constantes durante o processo do limite. De qualquer modo, não é óbvio que este procedimento resulte em equações clássicas pois há várias sutilezas correspondentes ao domínio quântico como a dependência do estado, ou a contextualidade.

Tratando a questão do ponto de vista matemático, o problema se resume a encontrar as equações clássicas de movimento em um determinado limite. Olhando a Eq. (2.5) somos tentados a achar que tomar o limite  $\hbar \rightarrow 0$  é suficiente pois neste caso o termo referente ao potencial quântico que está multiplicado por  $\hbar^2$  iria a zero e cairíamos em uma equação de Hamilton-Jacobi clássica. Claro está que este procedimento não é bem definido, dado que o próprio  $Q$  pode depender de  $\hbar$ . Se assim não fosse, poderíamos ter tomado o limite  $\hbar \rightarrow 0$  diretamente na equação de Schrödinger, o que não faz sentido. Claro que ainda assim esperamos que de alguma forma o limite clássico seja atingido quando o termo referente ao potencial quântico seja desprezível em um certo sentido.

Do ponto de vista conceitual, no contexto da interpretação de Copenhague, a pergunta se torna: de que maneira podemos passar de uma teoria na qual a função

de onda representa somente um conhecimento estatístico do sistema para outra na qual a matéria possui uma forma independente de nossa ciência a seu respeito?

Usualmente é dito que no limite em que a energia associada a um dado sistema quântico deixa de ser discreta, ou no limite de grandes números quânticos, o limite clássico é alcançado. No entanto, estas condições não são suficientes pois ainda assim podemos ter o potencial  $Q \neq 0$ , do ponto de vista da teoria Bohmiana. Por exemplo, no caso do átomo de hidrogênio, o limite de grandes números quânticos implica em uma energia quase-contínua, isto é, a soma ou subtração de um *quantum* não modifica de forma apreciável a energia total, segundo a relação<sup>6</sup>

$$E_n \propto \frac{1}{n^2}.$$

Contudo, o elétron permanece estável no átomo, ao contrário do esperado classicamente.

Assim, a menos que seja possível obter leis de movimento típicas do domínio clássico, não podemos afirmar que o limite clássico é atingido a partir da mecânica quântica olhando apenas para o comportamento de determinadas quantidades como a energia, por exemplo, no limite  $n \rightarrow \infty$ .

Os problemas apresentados acima não surgem na interpretação de de Broglie-Bohm, que desde o começo lida com partículas e trajetórias e na qual probabilidades referem-se a estados reais, e não meras potencialidades. A teoria Bohmiana oferece uma descrição única que não separa a Natureza em domínios distintos, com uma fronteira indefinida entre eles. Neste contexto, a dinâmica quântica coincidirá com a dinâmica clássica quando a força quântica ( $-\nabla Q$ ) se tornar irrelevante frente à força clássica, ou seja, quando  $Q$  for aproximadamente constante ao longo da trajetória da partícula.

Além disso, notemos que em mecânica quântica o zero da escala de energia é definido como o zero do potencial clássico. Assim, devemos requerer que nas regiões onde  $V \rightarrow 0$  tenhamos também  $Q \rightarrow 0$  no limite clássico. Com a consideração de que  $Q$  deve ser constante, concluímos então que a condição

$$Q \rightarrow 0$$

---

<sup>6</sup>O átomo de hidrogênio segundo a teoria causal está descrito na Ref. [28], seção (4.5).

nas regiões acessíveis ao sistema caracteriza completamente o regime no qual o limite clássico é atingido, segundo a teoria Bohmiana da mecânica quântica.

É claro que além de ser numericamente desprezível ( $Q \ll$  outros tipos de energia da equação de Hamilton-Jacobi), o potencial quântico deve variar suavemente ( $\nabla Q \ll \nabla V$ ), e a expressão acima significa o limite nessas condições.

Em sistemas quânticos especiais que apresentam estados estacionários, a força quântica é finita e em geral independente de  $\hbar$ . Nestes casos fica claro que o limite  $\hbar$  muito menor que a ação clássica não é suficiente para obter o limite clássico. Este é um exemplo de um sistema quântico sem contrapartida clássica. Ele foi utilizado por Einstein como uma crítica à incompletude da teoria quântica [45] e queria com isto demonstrar que tal teoria não explica fatos reais individuais. As afirmações da mecânica quântica, segundo Einstein, poderiam se referir somente a um *ensemble* de sistemas igualmente preparados e não a propriedades individuais.

Estados estacionários surgem, por exemplo, em um sistema no qual uma partícula está confinada em uma caixa. A função de onda correspondente é uma superposição de ondas planas que apresenta interferência, devido à reflexão nas paredes da caixa. Einstein acreditava que este sistema deveria apresentar um limite clássico quando considerássemos sua contrapartida macroscópica, se a teoria quântica pretendesse ser uma teoria física universal. A interpretação ortodoxa não é capaz de fornecer esta descrição pois não atribui propriedades objetivas à matéria. A teoria causal fornece uma solução em que velocidade da partícula na caixa é nula, ao contrário do que se esperaria em uma situação clássica. Einstein conclui daí que a teoria quântica é incompleta.

No entanto, a descrição segundo a teoria causal é consistente justamente pelo fato de que este sistema não possui tal limite, contrariando a expectativa de Einstein. Embora a energia se torne quase-contínua no regime de grandes números quânticos, o potencial quântico permanece finito, contrariando a condição  $Q \rightarrow 0$ .

## Capítulo 3

# Teoria de Perturbações Cosmológicas e Origem das Sementes para Formação de Estruturas

*“The vacuum is a boiling sea of nothingness, full of sound and fury, signifying a great deal.”*

Anônimo [46]

Acredita-se que a formação de estruturas em grande escala do Universo teve início com as pequenas inomogeneidades originadas a partir de flutuações quânticas que foram ampliadas através de um processo inflacionário. Estas flutuações possuíam amplitudes significativas somente em escalas próximas à de Planck que, com a inflação, foram ampliadas até escalas galácticas mantendo suas amplitudes aproximadamente inalteradas. Nas diversas descrições encontradas na literatura, a passagem de um estado quântico simétrico para um estado assimétrico e essencialmente clássico é assumido implicitamente. Esta transição das flutuações para um regime em que se tornaram perturbações clássicas é, portanto, ainda não fundamentada. Neste capítulo descreveremos a teoria de perturbações cosmológicas, a começar pela análise do modelo padrão da cosmologia na primeira seção. Na segunda seção discutiremos o cenário inflacionário. Depois passaremos ao estudo das perturbações clássicas na Relatividade Geral e à estatística associada. Analisare-

mos também a quantização destas perturbações e por fim discutiremos os problemas relacionados à transição quântico-clássico deste sistema.

### 3.1 O Modelo Padrão da Cosmologia

O modelo padrão, conhecido como *Big Bang*, propõe que o Universo, há aproximadamente 14 bilhões de anos, possuía uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica a uma temperatura e densidade de energia altíssimas e desde então vem se expandido e resfriando. Para abarcar o princípio cosmológico mencionado no Cap. 1, vamos supor uma folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies 3-dimensionais do tipo espaço, homogêneas e isotrópicas, tal que o Universo possa ser bem descrito pela métrica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij}^{(3)} dx^i dx^j \quad (3.1)$$

$$= a^2(\eta) [d\eta^2 - \gamma_{ij}^{(3)} dx^i dx^j], \quad (3.2)$$

onde  $a$  é o fator de escala,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\gamma_{ij}^{(3)}$  representa a métrica de seções espaciais 3-dimensionais de curvatura constante,  $t$  é o tempo cósmico e  $\eta$  é o tempo conforme, tal que  $a(\eta)d\eta = cdt$ .

Para estudarmos a evolução temporal desta métrica, vamos assumir que a gravitação é descrita pela Relatividade Geral, através das equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde  $\kappa = 8\pi G/c^4$ ,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura e  $\Lambda$  é a constante cosmológica, vista como uma contribuição ao tensor momentum-energia total e responsável pela expansão acelerada atual, não tendo papel significativo no Universo primordial.

As simetrias assumidas impõem, por sua vez, restrições sobre o conteúdo material  $T_{\mu\nu}$  do Universo. Definindo o projetor no 3-espaço como sendo

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu,$$

onde  $u^\mu$  é o vetor normal às hipersuperfícies que satisfaz  $u^\mu u_\mu = +1$ , temos que as equações de Einstein levam às condições

$$\gamma[T_{\mu\nu}] \propto \gamma_{\mu\nu}, \quad \gamma[T_{\mu n}] = 0, \quad (3.4)$$

onde o índice  $n$  representa projeção na direção normal,  $T_{\mu n} \equiv T_{\mu\nu} u^\nu$ . Estas condições implicam que o conteúdo material do Universo deve ser descrito através de um fluido perfeito, que pode ser formado por várias componentes e cujo tensor momentum-energia total é dado por

$$T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N T_{\mu\nu}^{(i)} = (\rho_T + p_T) u_\mu u_\nu + p_T g_{\mu\nu} , \quad (3.5)$$

onde  $\rho_T$  e  $p_T$  são a densidade de energia e pressão totais, respectivamente, no referencial definido por  $u^\mu$ , e o índice  $i$  se refere a cada componente.

Deste modo, para o caso de um único fluido,  $\Lambda = 0$  e métrica dada por (3.1), as equações de Einstein se reduzem às de Friedmann, a saber

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.7)$$

onde  $k = -1, 0, +1$  se a seção espacial for aberta, plana ou fechada, respectivamente. Nestas últimas equações tomamos  $c = 1$  e o ponto representa derivada com respeito ao tempo cósmico.

A essas equações somamos a conservação de energia,  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ , proveniente da identidade de Bianchi, o que resulta em

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (3.8)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble. Essa equação implica que a densidade de energia de um dado fluido evolui como

$$\rho = \rho_0 x^{3(1+\omega)}, \quad (3.9)$$

onde  $x \equiv a_0/a = 1 + z$  e  $z$  é a função de deslocamento para o vermelho (*redshift*), e o índice ‘0’ representa o valor atual da quantidade. Na equação acima estamos considerando fluidos barotrópicos, isto é, aqueles para os quais a pressão só depende da densidade de energia, tal que a equação de estado  $\omega = p/\rho$  é uma constante.

Definimos um parâmetro adimensional  $\Omega_0$  como sendo

$$\Omega_0 \equiv \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}, \quad (3.10)$$

que expressa a razão entre a densidade de energia atual do fluido e a densidade crítica  $\rho_c \equiv 3H_0/(8\pi G)$  que corresponde à densidade de energia total no caso de um universo plano. Quando há mais de um fluido presente, temos  $\Omega = \sum_i \Omega_{(i)}$ .

Considerando a existência de diferentes componentes para o conteúdo material do universo, vamos assumir que cada um deles evolui de maneira independente, isto é, não há troca de energia entre eles. Assim, a Eq. (3.8) vale separadamente para cada um destes componentes. A radiação, para a qual  $\omega = 1/3$ , é dominante quando o fator de escala é pequeno. A medida em que o Universo se expande, a matéria ( $\omega \approx 0$ ) passa a ter contribuição maior para a densidade de energia. A partir de um dado momento, uma componente escura de energia, com densidade de energia aproximadamente constante ( $\omega \approx -1$ ), passa a ser mais importante. Portanto, de acordo com a equação (3.9), distinguimos três fases dinamicamente diferentes na história da expansão do Universo:

- $z \gtrsim z_{eq} \sim 10^4$ : época dominada pela radiação, tal que  $a(t) \propto t^{1/2}$ ;
- $z_{eq} \gtrsim z \gtrsim z_\Lambda$ : época dominada pela matéria, tal que  $a(t) \propto t^{3/2}$ ;
- $z \lesssim z_\Lambda$ : época dominada pela “energia escura”;

onde  $z_{eq}$  representa o momento da igualdade entre matéria e radiação.

## 3.2 Teoria Inflacionária

A inflação é definida como um período de expansão acelerada do Universo, onde a presença de fluidos que violam a condição de energia forte causa uma força repulsiva [10, 47]. Considerando que o Universo é homogêneo e isotrópico (em grandes escalas), podemos descrevê-lo pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dada pela Eq. (3.1) e pelas equações de Friedmann. De acordo com a equação (3.6), uma expansão acelerada ( $\ddot{a} > 0$ ) só será possível para fluidos que obedeçam  $\rho + 3p < 0$ . Uma fase como essa, no passado remoto do Universo, pode amenizar diversos problemas do modelo padrão ou mesmo resolvê-los [48]. Brevemente, podemos citar o problema do horizonte, que está diretamente ligado ao problema da homogeneidade. Segundo medidas da radiação cósmica de fundo em micro-ondas

(RCFM) o Universo é praticamente homogêneo (a menos de pequenas perturbações da ordem de  $10^{-4}$  na densidade de energia, como veremos logo adiante). Isso implica a necessidade de um ajuste muito fino, no qual um número muito grande de regiões desconectadas causalmente teriam que estar à mesma temperatura. Este problema, referente ao horizonte, é resolvido pois o mecanismo inflacionário permite que uma região muito menor, e portanto conectada causalmente, tenha sido ampliada significativamente. Este cenário permite que a homogeneização tenha ocorrido, embora não ofereça um mecanismo que efetivamente a cause.

Um outro problema que é resolvido diz respeito ao fato de observarmos hoje um Universo praticamente plano, ou seja,  $\Omega_T \approx 1$ , de acordo com (3.10). Porém, se o Universo esteve sempre desacelerando,  $|\Omega_T - 1|$  tenderia sempre a crescer. O ajuste no valor inicial desse parâmetro teria que ser enorme para que hoje  $\Omega_T$  continuasse próximo de 1. Contudo, se o Universo passou por um período inflacionário, qualquer que tenha sido o valor de  $\Omega$  inicialmente, este estaria hoje em um valor próximo ao medido. Claro que para que isso aconteça a inflação tem que ter durado uma quantidade de tempo suficiente. Este tempo de duração do período inflacionário é medido através do parâmetro  $N$  (número de *e-folds*), definido como o logaritmo da razão do fator de escala no fim da inflação pelo fator de escala no início dela,  $N = \ln(a_f/a_i)$ . É possível mostrar, sob certas condições, que são necessários no mínimo 60 *e-folds* para que os problemas citados acima sejam de fato resolvidos [49].

A maneira mais simples de gerar uma fase acelerada é através de um campo escalar real (comumente chamado de *inflaton*), com ação dada por

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right]. \quad (3.11)$$

Através da variação desta expressão com relação à métrica, obtemos o tensor momentum-energia,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V(\varphi) \right]. \quad (3.12)$$

A densidade de energia e a pressão para um observador comóvel com o campo (considerado homogêneo por hipótese), para o qual a quadri-velocidade se escreve

como  $u^\mu = \delta_0^\mu$ , são dadas pelas relações<sup>1</sup>

$$\rho \equiv T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (3.13)$$

e

$$p \equiv -\frac{1}{3}T_{ij}\gamma^{ij} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (3.14)$$

A equação de movimento para este campo é a equação de Klein-Gordon, obtida variando-se a ação com respeito a  $\varphi$ , que no contexto de FLRW lê-se

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (3.15)$$

Assim, a dinâmica do campo escalar na geometria de FLRW fica dada pela equação acima juntamente com as equações de Friedmann (3.6) e (3.7), sendo que uma destas últimas pode ser escrita em termos das outras duas, sendo portanto redundante. No entanto, a dinâmica dada acima nem sempre gera uma expansão acelerada. Este comportamento surge, por exemplo, se assumirmos que a energia cinética é desprezível com respeito à energia potencial<sup>2</sup>, ou seja,

$$V(\varphi) \gg \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2. \quad (3.16)$$

Este é o regime conhecido como rolamento lento (*slow-roll*), no qual o campo “desce” lentamente o potencial pois a velocidade do campo é baixa e o termo de fricção da equação (3.15) domina o termo  $\ddot{\varphi}$ . Podemos então definir 2 parâmetros que darão a validade deste regime:

$$\epsilon = \frac{3\dot{\varphi}^2/2}{\dot{\varphi}^2/2 + V(\varphi)} = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.17)$$

e

$$\delta = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} + \epsilon. \quad (3.18)$$

As condições de rolamento lento serão satisfeitas se  $\epsilon$  e  $\delta$  forem muito menores que 1 e se  $\xi \sim \mathcal{O}(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ .

---

<sup>1</sup>O campo de velocidades comóvel com o fluido é dado por  $u^\mu = \partial^\mu\varphi/(\sqrt{g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi})$ . A hipótese de homogeneidade implica que  $\partial_i\varphi = 0$ . Lembrando que  $g^{00} = 1$ , chegamos a  $u^\mu = \delta_0^\mu$ .

<sup>2</sup>Há diversos tipos de potenciais possíveis que são capazes de gerar um mecanismo inflacionário, para detalhes veja o artigo de revisão em [48].

As equações de movimento (Friedmann e Klein-Gordon) podem ser reescritas em termos dos parâmetros definidos acima como

$$H^2 = \frac{\kappa V}{3 - \epsilon}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{(3 - \delta)H} V_{,\varphi}(\varphi), \quad (3.19)$$

e resultam, para o regime de rolamento lento, em

$$H^2 \simeq \frac{\kappa}{3} V(\varphi) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \dot{\varphi} \simeq \frac{1}{3H} V_{,\varphi}(\varphi) + \mathcal{O}(\delta), \quad (3.20)$$

onde  $V_{,\varphi}$  representa a derivada do potencial com respeito ao campo  $\varphi$ . Nesta aproximação, podemos reescrever os parâmetros de rolamento lento em termos do potencial, a saber

$$\epsilon \simeq \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad \delta \simeq \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2 + \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{V_{,\varphi\varphi}}{V}, \quad (3.21)$$

onde  $m_{pl} = \sqrt{1/8\pi G}$  é a massa de Planck reduzida.

O fim da inflação se dá quando as condições de rolamento lento deixam de ser válidas. A partir daí começa o período em que praticamente toda a matéria do Universo será criada e a temperatura voltará a aumentar (a expansão exponencial faz com que a temperatura do Universo caia drasticamente durante a inflação). O campo  $\varphi$  atinge o mínimo do potencial e começa a oscilar em torno deste ponto. É iniciado um regime não perturbativo de ressonância paramétrica no qual o campo inflaton começa a decair em partículas ultra-relativísticas, o chamado período de pré-aquecimento [50]. Esta nomenclatura é devido ao fato de que neste ponto o equilíbrio térmico ainda está longe de se estabelecer. O processo de reaquecimento continua com a amplitude de oscilação do inflaton diminuindo gradualmente e seu decaimento em outras partículas. O equilíbrio é alcançado ao fim do processo e então o Universo passa a evoluir de maneira esperada em uma era dominada pela radiação. Qualquer modelo inflacionário precisa apresentar essa saída suave (*graceful exit*) para a fase dominada pela radiação para estar em concordância com os dados já bem estabelecidos do modelo padrão. No entanto, os detalhes destes processos são altamente dependentes do modelo inflacionário específico.

O quadro acima descrito é conhecido como inflação fria (*cold inflation*). Uma alternativa possível é o cenário de inflação morna (*warm inflation*) [51], na qual efeitos dissipativos devido ao acoplamento do inflaton com outros graus de liberdade

são levados em consideração durante a expansão acelerada. Neste caso, radiação é produzida ao longo de toda a expansão inflacionária e há transferência de energia entre estas duas componentes, de tal maneira que flutuações térmicas na radiação são transferidas ao campo escalar e se tornam a principal fonte para as perturbações primordiais. Este modelo pode ser testado frente ao modelo de inflação fria pois produz não-gaussianidades na radiação cósmica de fundo.

### 3.3 Teoria de Perturbações Cosmológicas na Relatividade Geral

O Universo observável claramente não é homogêneo e isotrópico, afinal podemos ver estruturas complexas como galáxias, aglomerados, etc., que não são descritos por uma métrica do tipo FLRW. Por outro lado, as medidas da RCFM mostram que o desvio desta configuração era pequeno na época do desacoplamento de fótons e bárions e isso nos sugere realizar um tratamento perturbativo. Este tratamento perturbativo em cosmologia foi implementado pela primeira vez por Lifshitz e Khalatnikov [52]. Existem ao menos dois formalismos na literatura; um deles está descrito em [53] baseado no formalismo quase-maxwelliano da RG [54]. Vários trabalhos foram feitos seguindo esta linha, veja por exemplo as refs. [55, 56, 57]. Neste trabalho seguiremos o formalismo desenvolvido em [58]. A equivalência entre estas duas descrições para perturbações escalares nos modelos de Friedmann foi mostrada em [59].

Inomogeneidades na distribuição de matéria induzem perturbações na métrica. Assim, em primeira ordem,

$$ds^2 = \left[ g_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \right] dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.22)$$

Assumiremos a métrica de fundo dada por

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) [d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad (3.23)$$

onde colocamos  $k = 0$  e utilizamos o tempo conforme.

A quantidade  $\delta g_{\alpha\beta}$  pode ser caracterizada por três tipos distintos de perturbações: escalar, vetorial e tensorial. Enquanto permanecermos no regime linear, estas

perturbações se desacoplam e, portanto, podem ser estudadas separadamente. A componente  $\delta g_{00}$  se comporta como um escalar sob rotações tridimensionais, logo podemos escrevê-la como

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi,$$

onde  $\phi$  é uma quantidade escalar definida no 3-espaco. As componentes  $\delta g_{0i}$  podem ser decompostas como

$$\delta g_{0i} = a^2(B_{,i} + S_i),$$

onde  $B$  é um escalar e  $S_i$  é um vetor que só contem parte transversa, isto é,  $\partial_i S^i = 0$ . Já as componentes  $\delta g_{ij}$  se comportam como um tensor (simétrico) sob rotações em 3 dimensões, logo podemos decompô-las como

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij}).$$

Vamos nos restringir às perturbações escalares, que são as responsáveis pela formação de estruturas no Universo<sup>3</sup>. Neste caso, temos quatro funções que caracterizarão a métrica perturbada, que é então escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2(\partial_i B)dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E]dx^i dx^j\}. \quad (3.24)$$

Partimos da suposição de que o modelo de fundo é FLRW e de que a perturbação  $\delta g_{\mu\nu}$  é pequena. A maneira como é feita a correspondência entre os pontos da variedade de fundo e a variedade perturbada é arbitrária: esta é a chamada liberdade de calibre da teoria. Esta liberdade pode ser traduzida em termos da invariância da Relatividade Geral (RG) sob transformações de coordenadas e pode fazer com que perturbações fictícias apareçam, relativas apenas ao sistema que é utilizado para o modelo perturbado, mantendo as coordenadas do modelo de fundo fixas (uma análise detalhada desta questão pode ser encontrada em [60]).

Consideremos então uma transformação infinitesimal de coordenadas,  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha$ , com  $\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i)$ . Podemos decompor a parte espacial deste vetor em uma

---

<sup>3</sup>As perturbações vetoriais estão relacionadas a movimentos de rotação do fluido. São modos que decaem muito rapidamente (para grandes comprimentos de onda) e que por isso não são de muito interesse em cosmologia. As perturbações tensoriais descrevem as ondas gravitacionais, que são os graus de liberdade do campo gravitacional. Elas não induzem perturbações no fluido perfeito no regime linear. Para uma descrição detalhada destas questões veja, por exemplo, a referência [47].

parte transversa e outra longitudinal,  $\xi^i = \xi_{\perp}^i + \zeta^i$ . Assim, as funções escalares se transformam da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)', & \tilde{B} &= B + \zeta' - \xi^0, \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, & \tilde{E} &= E + \zeta.\end{aligned}\quad (3.25)$$

onde ' representa derivada com respeito ao tempo conforme. As funções  $\zeta$  e  $\xi^0$  podem ser escolhidas de forma a anular duas das quatro funções escalares, de tal maneira que nos resta apenas dois graus de liberdade para as perturbações escalares. Podemos ainda construir duas quantidades invariantes a partir destas últimas e estas quantidades vão gerar o espaço das perturbações físicas. As combinações invariantes de calibre mais simples que podemos montar são os chamados potenciais de Bardeen

$$\Phi(\eta, \mathbf{x}) \equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]', \quad \Psi(\eta, \mathbf{x}) \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \quad (3.26)$$

Se estas quantidades forem nulas, elas o serão em qualquer outro sistema de coordenadas e possíveis perturbações da métrica serão fictícias.

Para a densidade de energia de um fluido perfeito, a variável invariante de calibre que caracteriza a perturbação é

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho - \rho'_0(B - E'). \quad (3.27)$$

Para as 4-velocidades do fluido que, dada uma folheação em 3-espacos homogêneos, se escrevem como  $u_{\alpha} = (a, 0, 0, 0)$ , temos que as variáveis invariantes de calibre que descrevem  $\delta u_{\alpha}$  são dadas por

$$\widetilde{\delta u}_0 = \delta u_0 - [a(B - E')]', \quad \widetilde{\delta u}_i = \delta u_i - a(B - E')_{,i}. \quad (3.28)$$

Se o conteúdo material do universo for um campo escalar, este campo perturbado será expresso como  $\varphi(\eta) + \delta\varphi(\mathbf{x}, \eta)$ , e a quantidade invariante de calibre associada à perturbação será dada por

$$\widetilde{\delta\varphi}(\eta, \mathbf{x}) = \delta\varphi - \varphi'(B - E'). \quad (3.29)$$

Podemos também fixar o calibre e trabalhar com sistemas de coordenadas especiais, escolhendo as funções  $\xi^0$  e  $\zeta$ . Uma das escolhas mais utilizadas é o chamado calibre Newtoniano (ou longitudinal, representado por  $l$ ), no qual define-se  $E_l = B_l = 0$ .

Consideremos então a RG com um tensor momentum-energia associado a um campo escalar como fonte. Para o tratamento perturbativo devemos linearizar as equações de Einstein que, em primeira ordem, resultam em

$$\delta G_{\beta}^{\alpha} = \kappa \delta T_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.30)$$

No entanto,  $\delta G$  e  $\delta T$  não são invariantes de calibre. Para tratar esta questão, podemos usar as perturbações da métrica e do campo para construir quantidades invariantes e então reescrever a equação acima de maneira independente de coordenadas, ou seja, em termos dos potenciais  $\Phi$  e  $\Psi$  e da variável  $\widetilde{\delta\varphi}$ .

Para o campo escalar, as perturbações invariantes de calibre do tensor momentum-energia são

$$\widetilde{\delta T}_0^0 = \widetilde{\delta\rho} = -\varphi'^2 \Phi + \varphi' \widetilde{\delta\varphi}' + a^2 V_{,\varphi} \widetilde{\delta\varphi}, \quad (3.31)$$

$$\widetilde{\delta T}_i^0 = \frac{1}{a}(\rho_0 + p_0)\widetilde{\delta u}_i = \frac{1}{a^2}(\varphi' \widetilde{\delta\varphi})_{,i}, \quad (3.32)$$

$$\widetilde{\delta T}_j^i = -\widetilde{\delta p} \delta_j^i = [-\varphi'^2 \Phi + \varphi' \widetilde{\delta\varphi}' - a^2 V_{,\varphi} \widetilde{\delta\varphi}] \delta_j^i, \quad (3.33)$$

onde as quantidades  $\widetilde{\delta\rho}$  e  $\widetilde{\delta u}$  (invariantes de calibre) estão dadas pelas equações (3.27) e (3.28), respectivamente. De maneira análoga construímos as quantidades invariantes  $\widetilde{\delta G}_{\beta}^{\alpha}$ .

Através da componente  $i - j$  da equação de Einstein,  $\widetilde{\delta G}_{\beta}^{\alpha} = \kappa \widetilde{\delta T}_{\beta}^{\alpha}$ , dado que para o campo escalar  $\delta T_j^i = 0$  para  $i \neq j$ , obtemos

$$\Phi = \Psi.$$

As outras componentes da equação (3.30) resultam em

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{\kappa}{2} a^2 (-\varphi'^2 \Phi + \varphi' \widetilde{\delta\varphi}' + a^2 V_{,\varphi} \widetilde{\delta\varphi}), \quad (3.34)$$

$$\mathcal{H}\Phi + \Phi' = \frac{\kappa}{2} \varphi' \widetilde{\delta\varphi}, \quad (3.35)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 (-\varphi'^2 \Phi + \varphi' \widetilde{\delta\varphi}' - a^2 V_{,\varphi} \widetilde{\delta\varphi}), \quad (3.36)$$

onde  $\mathcal{H} = a'/a$ .

Subtraindo a equação (3.34) da equação (3.36) e usando a equação de vínculo (3.35) para escrever  $\widetilde{\delta\varphi}$  em termos de  $\varphi$  e  $\Phi$ , obtemos

$$\Phi'' - \nabla^2 \Phi + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Phi' + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Phi = 0. \quad (3.37)$$

Além desta última equação, ainda precisamos da equação de Klein-Gordon que dá a dinâmica para as perturbações  $\widetilde{\delta\varphi}$ . Escrevendo-a já em termos das quantidades invariantes de calibre, conseguimos obter

$$\widetilde{\delta\varphi}'' + 2\mathcal{H}\widetilde{\delta\varphi}' - \nabla^2\widetilde{\delta\varphi} + a^2\frac{d^2V}{d\varphi^2}\widetilde{\delta\varphi} - 4\varphi'\Phi' + 2a^2\frac{dV}{d\varphi}\Phi = 0. \quad (3.38)$$

Temos então duas variáveis e duas equações para tratar a análise das perturbações escalares de um campo escalar em um universo de FLRW perturbado. E ainda é possível tornar a interpretação física da equação (3.37) mais clara com uma mudança de variáveis. Efetuando uma transformada de Fourier desta equação utilizando a expressão

$$\Phi(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \Phi_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.39)$$

e considerando as novas variáveis como sendo

$$u_k \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \frac{a^2\theta}{\mathcal{H}} \Phi_k, \quad \theta \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{\rho}{\rho+p} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \frac{\mathcal{H}}{a\varphi'}, \quad (3.40)$$

podemos reescrever a equação (3.37) como

$$u_k'' + \left( k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k = 0. \quad (3.41)$$

A equação acima pode ser vista como a de um oscilador com frequência dependente do tempo dada por  $\omega^2(k, \eta) \equiv k^2 - \theta''/\theta$ . As soluções assintóticas são facilmente calculadas. Para os modos com  $k^2 \gg \theta''/\theta$ , ou pequenos comprimentos de onda, a variável  $u$  oscila pois  $u \propto \exp(ik\eta)$ . O comprimento de onda cresce com a expansão e eventualmente fica maior que o raio de Hubble, parando então de oscilar. Para estes modos,  $k^2 \ll \theta''/\theta$ , e a solução de (3.41) pode ser expandida em termos de  $k^2$  [47]. Em ordem zero, obtemos

$$u(\eta, k) = A_1(k)\theta(\eta) \int^\eta \frac{d\tau}{\theta^2(\tau)} + A_2(k)\theta(\eta). \quad (3.42)$$

$A_1$  é uma constante arbitrária associada ao modo crescente (pois  $\theta \rightarrow \infty$  para  $a \rightarrow 0$ ) e  $A_2$  está associada ao modo que decresce com a evolução do Universo. A evolução das perturbações está ilustrada na figura (3.1).

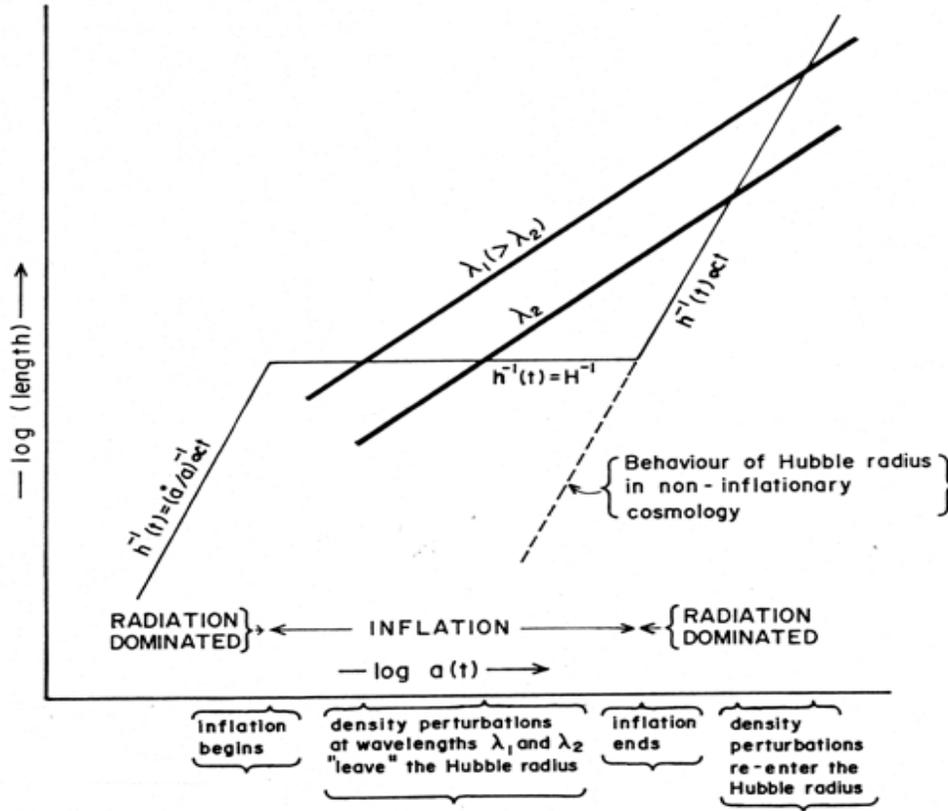


Figura 3.1: Evolução de perturbações com comprimentos de onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  comparadas ao raio de Hubble (figura retirada do sítio [61]).

A equação (3.37) possui uma integral primeira para os modos muito maiores que a escala de Hubble ( $k/a \ll H$ ) que pode ser expressa através da definição da quantidade

$$\zeta \equiv \frac{2}{3} \left( \frac{8\pi G}{3} \right)^{-1/2} \theta^2 \left( \frac{u}{\theta} \right)' = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1} \Phi' + \Phi}{1 + \omega} + \Phi, \quad (3.43)$$

onde a segunda igualdade é obtida com o uso das equações de fundo e da equação de estado  $p = \omega\rho$ . Esta é a chamada perturbação de curvatura intrínseca, dada no calibre comóvel<sup>4</sup>. Com isto, podemos escrever a equação de movimento (3.37) em

<sup>4</sup>O calibre comóvel corresponde à imposição das condições  $\phi = 0$  e  $\delta u_{||}^i = 0$ , onde as duas barras indicam que tomamos a parte longitudinal das componentes espaciais da perturbação de velocidade.

termos de uma derivada primeira de  $\zeta$  [62], a saber

$$\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\zeta}{d\eta} \propto \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Phi. \quad (3.44)$$

Pela equação acima, vemos que  $\zeta$  é constante para modos tais que  $k/\mathcal{H} \ll 1$ , ou seja, grandes comprimentos de onda, pois neste caso  $\zeta' \approx 0$ . Assim, temos uma quantidade que é conservada e que é puramente geométrica. A equação de conservação é válida para qualquer tipo de fluido presente, mesmo para  $\omega$  variável (é importante aqui que as perturbações de entropia sejam desprezíveis, de outra maneira teríamos um termo extra proporcional a  $\delta S$ ). Deste modo,  $\zeta$  pode ser utilizada na análise de perturbações de densidade independente da matéria responsável pelas flutuações, e pode ainda ser utilizada para propagar o espectro do fim da inflação para a era dominada pela radiação sem que seja necessário conhecer os detalhes dos processos de pré-aquecimento e reaquecimento.

### 3.4 A Estatística das Flutuações Clássicas

Assumiremos que as flutuações primordiais são geradas aleatoriamente. Esta hipótese está baseada no modelo de que as perturbações primordiais surgiram a partir de flutuações de um estado de vácuo e que, como tais, só podemos conhecer seus valores esperados neste estado, como veremos na próxima seção. Devemos portanto usar de ferramentas estatísticas para analisar os dados e fazer previsões. Assim, trataremos nossas variáveis de perturbação como variáveis aleatórias, compondo um *ensemble* estatístico.

É conveniente descrever processos aleatórios utilizando transformadas de Fourier. Seja então uma variável aleatória  $\delta(\mathbf{x})$  de média nula, que pode representar o contraste de densidade de energia, por exemplo. Sua transformada de Fourier no caso discreto é dada por

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.45)$$

e no caso contínuo por

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.46)$$

O mecanismo inflacionário mais simples prevê somente processos Gaussianos homogêneos e isotrópicos, para os quais a distribuição de probabilidade é dada por [63]

$$P(\delta_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2\pi\mu_k^2} \exp\left(-\frac{a_{\mathbf{k}}^2 + b_{\mathbf{k}}^2}{2\mu_k^2}\right), \quad (3.47)$$

onde escrevemos  $\delta_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} + ib_{\mathbf{k}}$ , com os vínculos  $a_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}$  e  $b_{\mathbf{k}} = -b_{-\mathbf{k}}$  pois a variável  $\delta(\mathbf{x})$  é real. A variância  $\mu_k^2$  é a mesma para as duas componentes  $a_{\mathbf{k}}$  e  $b_{\mathbf{k}}$  (homogeneidade) e depende somente do módulo de  $\mathbf{k}$  (isotropia). Todas as funções de correlação não nulas podem ser expressas em termos desta quantidade, ou seja, a variância caracteriza completamente o processo Gaussiano.

Por conveniência vamos utilizar a decomposição  $\delta_{\mathbf{k}} = r_{\mathbf{k}}e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$  e reescrever a distribuição (3.47) como

$$P(r_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}})dr_{\mathbf{k}}d\phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi\mu_k^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r_{\mathbf{k}}^2}{\mu_k^2}\right)r_{\mathbf{k}}dr_{\mathbf{k}}d\phi_{\mathbf{k}}. \quad (3.48)$$

Calculemos agora a seguinte média

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}}, \delta_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= \int \frac{d\phi_{\mathbf{k}}d\phi_{\mathbf{k}'}}{4\pi^2} e^{i(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{\mathbf{k}'})} \times \\ &\times \int \frac{(2r_{\mathbf{k}}dr_{\mathbf{k}})(2r_{\mathbf{k}'}dr_{\mathbf{k}'})}{\sigma_k^2\sigma_{k'}^2} r_{\mathbf{k}}r_{\mathbf{k}'} \exp\left[-\left(\frac{r_{\mathbf{k}}^2}{\sigma_k^2} + \frac{r_{\mathbf{k}'}^2}{\sigma_{k'}^2}\right)\right] \\ &= \langle r_{\mathbf{k}}^2 \rangle \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \sigma^2 \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  é a delta de Kronecker e  $\sigma_k^2 = 2\mu_k^2$ . A quantidade  $\sigma^2$  é chamada de *espectro de potência* das flutuações e será muito importante na caracterização das perturbações cosmológicas.

O valor da variável  $\delta(\mathbf{x})$  em um ponto específico também é uma variável estocástica. Logo, faz sentido perguntar pela probabilidade de que ela assuma um valor específico  $q$ . Como a transformada de Fourier desta quantidade é a “soma” de variáveis aleatórias, cada uma delas com distribuição Gaussiana e média nula,  $\delta(\mathbf{x})$  também será uma Gaussiana de média nula. Assim, a distribuição de probabilidade para  $q$  terá a forma

$$P[q] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2\Delta^2}\right), \quad (3.50)$$

onde a dispersão  $\Delta^2 = \langle q^2 \rangle = \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle$  será determinada utilizando a relação (3.49),

como se segue

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* \rangle e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sigma_k^2 = \frac{V^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sigma_k^2 \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} V^{-1/2} \int_0^\infty \sigma_k^2 k^2 dk \equiv \int_0^\infty \Delta_k^2 \frac{dk}{k}, \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_k^2 \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi V}} k^3 \sigma_k^2, \tag{3.52}$$

é uma medida da dispersão, isto é, o contraste de densidade pode ter uma flutuação de até  $\pm \Delta$  em um dado ponto; flutuações maiores que este valor têm probabilidade baixa.

Por causa da homogeneidade, a distribuição para  $\delta(\mathbf{x})$  é independente do ponto  $\mathbf{x}$ . Para obtermos informações a respeito da distribuição espacial desta quantidade, construímos a função de correlação de dois pontos, definida como:

$$\begin{aligned}
 \xi(\mathbf{x}) &\equiv \langle \delta(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* \rangle \exp [i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}] \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sigma_k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = V^{-1/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Vemos a partir desta expressão que a função de correlação é a transformada de Fourier do espectro de potência.

Podemos ainda construir uma outra média, considerando um volume espacial grande do Universo, da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle_V &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{\sqrt{V}} \delta^2(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{\sqrt{V}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{V}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} |\delta_{\mathbf{k}}|^2, \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

onde substituímos a integral espacial pela delta de Dirac, considerando um volume muito grande, a saber

$$\int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{3.55}$$

Uma questão importante surge no contexto das perturbações primordiais, o fato de não possuímos mais de um universo disponível para compor um *ensemble* e a partir deste realizar médias. Esta questão está relacionada à chamada *variância cósmica*: as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo estão definidas para todo ponto no espaço e no tempo, mas podemos observá-las somente de um ponto (aqui) para um dado instante (agora). O que se faz para contornar este problema é assumir que a média no *ensemble*, dada pela equação (3.51) pode ser substituída pela média espacial (3.54) se pudermos dividir o céu em um número suficientemente grande de regiões, regiões estas que devem ser grandes comparadas àquelas onde os campos estão correlacionados, tal que em cada uma delas tenhamos uma realização da variável aleatória  $\delta(\mathbf{x})$ . Esta associação entre as médias baseia-se na hipótese de ergodicidade [64], que estabelece que se esperarmos uma quantidade de tempo suficiente, os pontos representativos do sistema irão cobrir todo o espaço de fase acessível, isto é, todos os microestados são igualmente prováveis depois de um longo período de tempo. Neste caso, médias no *ensemble* podem ser substituídas por médias temporais ou, no caso das perturbações primordiais, por médias espaciais.

É através da associação descrita acima que relacionamos as distribuições de probabilidade de um *ensemble* estatístico com a distribuição real de densidades no Universo, isto é, através da identificação

$$|\delta_k|^2 = \sigma_k^2,$$

baseada nas equações (3.54) e (3.51).

### 3.5 A Quantização das Perturbações Cosmológicas

Na penúltima seção discutimos a evolução clássica das perturbações. Em um contexto puramente clássico, a escolha de condições iniciais é arbitrária, sendo dada na época mais remota dominada pela radiação. O mecanismo inflacionário permite que condições mais naturais sejam colocadas se supusermos que nos primórdios do Universo efeitos quânticos tenham tido um papel considerável. Neste caso, pequenas flutuações quânticas de um estado de vácuo (pequenos comprimentos de onda, os quais podem ter suas amplitudes fixadas *a priori* respeitando o princípio da incerteza) podem ter sido ampliadas por este processo gerando as pequenas perturbações

clássicas que originaram, por sua vez, as estruturas do Universo. Procederemos então com a quantização das perturbações, mas mantendo a descrição do fundo clássica, isto é, o espaço-tempo continua obedecendo as equações da RG. Nesta seção manteremos as constantes explícitas de modo a fixarmos a amplitude inicial das perturbações de acordo com o princípio da incerteza e mantermos uma interpretação física clara.

Vamos considerar primeiramente como se dá a quantização de um campo escalar real livre e sem massa em um espaço-tempo FLRW e depois aplicaremos os resultados às perturbações. Seja então um campo escalar expandido em série de Fourier<sup>5</sup>

$$\varphi(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{a(\eta)} \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^3k \varphi_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.56)$$

onde  $\varphi_{\mathbf{k}}^* = \varphi_{-\mathbf{k}}$  devido à realidade do campo escalar e o fator de escala foi colocado por conveniência.

A ação total do sistema que compreende um campo escalar  $\varphi$  em um campo gravitacional é dada por

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \\ &= \frac{1}{2c} \int d^4x a^2(\eta) [\varphi'^2 - \delta^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi], \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde na segunda linha substituímos a métrica de FLRW com seções espaciais planas. Reescrevendo esta expressão em termos dos modos definidos em (3.56) obtemos

$$S = \frac{1}{2c} \int d\eta \int_{R^{3+}} d^3\mathbf{k} \left[ \varphi_{\mathbf{k}}'^* \varphi_{\mathbf{k}}' + \varphi_{\mathbf{k}}' \varphi_{\mathbf{k}}'^* - 2\frac{a'}{a} (\varphi_{\mathbf{k}}' \varphi_{\mathbf{k}}^* + \varphi_{\mathbf{k}}'^* \varphi_{\mathbf{k}}) + \left( \frac{a'^2}{a^2} - k^2 \right) (\varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}^* + \varphi_{\mathbf{k}}^* \varphi_{\mathbf{k}}) \right]. \quad (3.58)$$

Podemos através da expressão acima calcular o momentum conjugado ao campo  $\varphi_{\mathbf{k}}$ , que é dado por

$$\pi_{\mathbf{k}} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathbf{k}}}{\delta \varphi_{\mathbf{k}}'^*} = \frac{1}{c} \left( \varphi_{\mathbf{k}}' - \frac{a'}{a} \varphi_{\mathbf{k}} \right). \quad (3.59)$$

A equação de Euler-Lagrange nos fornece a equação de movimento

$$\varphi_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \varphi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.60)$$

---

<sup>5</sup>A base considerada é a de ondas planas já que estamos trabalhando com seções espaciais planas e a dinâmica do campo  $\varphi$  é dada pela equação de Klein-Gordon.

A Hamiltoniana será dada pela expressão

$$\begin{aligned} H &= \pi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}'^* + \pi_{\mathbf{k}}^*\varphi_{\mathbf{k}}' - \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \\ &= c \left( \pi_{\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}}^* + \frac{k^2}{c^2}\varphi_{\mathbf{k}}'\varphi_{\mathbf{k}} \right) + \frac{a'}{a}(\pi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^* + \pi_{\mathbf{k}}^*\varphi_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

De posse da expressão acima, quantizaremos este campo escalar através dos métodos usuais de quantização canônica em espaços curvos [65]. Transformamos  $\varphi(\eta, \mathbf{x})$  e  $\pi_{\varphi}(\eta, \mathbf{x})$  em operadores e exigimos que a seguinte regra de comutação seja satisfeita

$$[\hat{\varphi}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}_{\varphi}(\eta, \mathbf{y})] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Podemos ainda expandir  $\hat{\varphi}$  em termos de operadores de criação e aniquilação da seguinte maneira

$$\hat{\varphi}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{a(\eta)} \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}(\eta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\eta)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (3.62)$$

fixando adequadamente a normalização e a amplitude, e onde os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^{\dagger}$  deverão satisfazer as relações de comutação

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.63)$$

O operador Hamiltoniano fica então dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3\mathbf{k} \left[ \hbar k (\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{-\mathbf{k}}) - i\hbar \frac{a'}{a} (\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \right]. \quad (3.64)$$

A evolução temporal dos operadores de criação e aniquilação é dada através das equações

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{d\eta} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{H}], \quad \frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{d\eta} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{H}], \quad (3.65)$$

que podem ser resolvidas com uso das transformações de Bogoliubov dadas por

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(\eta) = u_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}(\eta_i) + v_k(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}(\eta_i), \quad (3.66)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\eta) = u_k^*(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\eta_i) + v_k^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}(\eta_i), \quad (3.67)$$

onde  $\eta_i$  é um dado instante de tempo inicial. A função  $f_k \equiv [u_k(\eta) + v_k^*(\eta)]/\sqrt{2k}$  é uma função complexa dependente do tempo que deve satisfazer a seguinte equação de movimento, de acordo com as equações (3.65),

$$f_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) f_k = 0. \quad (3.68)$$

Para que as relações de comutação sejam preservadas, o vínculo  $|u_k(\eta)|^2 - |v_k(\eta)|^2 = 1$  deve ser obedecido. Temos também a seguinte relação

$$f_k f_k'^* - f_k^* f_k' = i\hbar, \quad (3.69)$$

que determina a normalização do Wronskiano construído com as soluções independentes  $f_k$  e  $f_k^*$  de (3.68)<sup>6</sup>.

Tratemos agora o caso das perturbações do campo escalar sobre uma geometria também perturbada. Para obtermos equações de movimento para as perturbações em primeira ordem precisamos calcular a ação (3.57) até segunda ordem nas perturbações do campo e da métrica. Lembrando da descrição da seção 3.3 na qual encontramos somente um grau de liberdade para o sistema considerado, depois de um longo cálculo [66] chegamos a<sup>7</sup>

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ v'^2 - \delta^{ij} \partial_i v \partial_j v + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (3.70)$$

onde  $v(\eta, \mathbf{x}) \equiv a \left( \widetilde{\delta\varphi} + \frac{\varphi'}{\mathcal{H}} \Phi \right)$  é uma variável invariante de calibre que mistura as perturbações da métrica e do campo, a chamada variável de Mukhanov-Sasaki, e  $z = \sqrt{\kappa/2} a \varphi' / \mathcal{H}$ . A ação (3.70) nada mais é do que a de um campo escalar com uma massa dependente do tempo.

O procedimento de quantização será o usual aplicado na quantização de um campo escalar em um espaço-tempo curvo através do método da quantização canônica introduzido anteriormente. A variável  $v(\eta, \mathbf{x})$  se torna um operador  $\hat{v}$  que será expandido em termos de operadores de criação e aniquilação como

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [f_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_k^*(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (3.71)$$

---

<sup>6</sup>O Wronskiano construído com soluções de (3.68) é independente do tempo. Além disso, se as soluções forem linearmente independentes, então o Wronskiano é diferente de zero e pode, portanto, ser normalizado de modo a fixar adequadamente as amplitudes das soluções.

<sup>7</sup>Uma maneira mais intuitiva e mais rápida de visualizar este resultado pode ser encontrada em [47], cap. 8. A variável  $u$  definida em (3.40) não é a mais adequada para a quantização pois gera uma ação com termos de derivada de ordem superior, por isso a necessidade de introduzir a variável  $v$ .

Os modos  $f_k$  são aqueles dados através de transformações de Bogoliubov e satisfazem a equação de movimento (para mais detalhes veja a ref. [67])

$$f_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) f_k = 0. \quad (3.72)$$

Uma particular escolha da função modo  $f_k$  corresponde a uma particular escolha do estado de vácuo definido por  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ . No entanto, podemos fixar essa escolha notando que o comprimento de onda associado a um dado  $k$  sempre pode ser encontrado dentro do raio de Hubble contanto que  $|\eta|$  seja grande o suficiente. Neste caso a curvatura do espaço-tempo pode ser desprezada e o modo se comporta como se estivesse em um espaço-tempo de Minkowski. Portanto, a escolha mais natural corresponde ao vácuo usual de Minkowski,  $f_k = (1/\sqrt{2k}) \exp(-ik\eta)$  no limite  $k^2 \gg z''/z$ . Com a escolha deste estado de vácuo, podemos calcular o espectro de potência da perturbação de curvatura, por exemplo, que agora também será tratada como um operador e que se relaciona com a variável  $v$  através da equação

$$\hat{\zeta} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\hat{v}}{a\sqrt{\rho}}.$$

Logo,

$$\langle 0 | \hat{\zeta}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\zeta}(\eta, \mathbf{x} + \mathbf{r}) | 0 \rangle = \frac{\hbar\kappa}{8\pi^2 z^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\text{sen}kr}{kr} k^3 |f_k|^2, \quad (3.73)$$

de onde lemos o espectro de potência

$$P_\zeta \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta_k|^2 = \frac{\hbar\kappa}{8\pi^2} k^2 \left| \frac{f_k}{z} \right|^2. \quad (3.74)$$

No regime de rolamento lento temos que  $z''/z \simeq a''/a$  pois  $\varphi$  e  $\mathcal{H}$  variam pouco comparados ao fator de escala. A solução da equação de movimento (3.72), assumindo  $a(\eta) = l_0(-\eta)^{1+\beta}$ , fica dada por

$$f_k(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i(k\eta_i - \pi\beta/2)} \sqrt{-k\eta} H_{-\beta-1/2}^{(1)}(-k\eta), \quad (3.75)$$

onde  $H^{(1)}$  é uma função de Hankel do tipo 1 e  $\beta \approx -2$ , o que corresponde a uma evolução aproximadamente do tipo de Sitter. No limite  $k\eta \rightarrow 0$ , o espectro de potência é dado por

$$P_\zeta \propto k^{2\beta+4} \equiv k^{n_s-1}. \quad (3.76)$$

Desta maneira obtemos um espectro invariante de escala, isto é, independente de  $k$ , no caso específico de uma solução exata do tipo de Sitter ( $\beta = -2$ ), o que corresponderia a uma inflação eterna sem uma saída suave para a era dominada pela radiação. Além disso, como uma solução do tipo de Sitter exata exibe isotropia e homogeneidade também na direção temporal, as flutuações quânticas não iriam evoluir para perturbações clássicas neste caso (analogamente ao caso de flutuações quânticas no espaço de Minkowski). Portanto, a solução deve apresentar um pequeno desvio da invariância de escala, ou seja, um parâmetro de Hubble que não seja exatamente constante, para que as flutuações quânticas possam evoluir e a saída suave para a era de radiação possa acontecer. Modelos inflacionários em geral preveem um pequeno desvio para o vermelho, isto é,  $n_s < 1$ , o que está de acordo com as medidas obtidas pelo projeto WMAP7 [68],  $n_s = (0.963 \pm 0.014)$ .

### 3.5.1 Do Quântico ao Clássico

É usualmente dito que a inflação provê uma descrição para o surgimento das sementes da estrutura cósmica já que, como vimos nas seções anteriores, estas teriam se originado a partir de flutuações quânticas do estado de vácuo do campo representado pela variável de Mukhanov-Sasaki. O espectro destas flutuações (de origem quântica), quando calculado utilizando o espectro clássico de Harrison-Zel'dovich [69], concorda aproximadamente com o espectro de perturbações invariante de escala observado. Precisamos, entretanto, de um mecanismo que justifique a relação imposta entre estes dois espectros, ou seja, que conecte de forma consistente incertezas quânticas e flutuações de densidade clássicas, que mais tarde poderão dar origem às estruturas cósmicas através da instabilidade gravitacional. Muitos autores não reconhecem este fato como um problema apesar das várias tentativas de elaboração de justificativas, que serão descritas abaixo. Outros autores, porém, admitiram que apesar destas tentativas o quadro ainda não está completo [70]. Em particular, na referência [71] encontra-se uma crítica extensa do tratamento dado a essa transição quântico-clássica.

A principal objeção ao quadro, assim como usualmente é apresentado, diz respeito ao estado quântico inicial, que é altamente homogêneo e isotrópico (ou seja, é invariante sob a ação do grupo de simetria do espaço de fundo). Esta simetria se

mantém através da evolução unitária provida pelas equações de movimento, ou seja, a teoria quântica padrão não pode justificar a existência de um universo não homogêneo (a criação de estruturas) a partir de flutuações quânticas do estado de vácuo. Poderia-se então argumentar que a função de onda do Universo passa pelo processo de colapso, através de um processo de medida. A medida de um observável cujos autoestados não são simétricos força o sistema a assumir um dos possíveis estados assimétricos. Entretanto, já na formulação usual da mecânica quântica, sabemos que esse processo não é bem definido, dando origem ao problema da medida [72]. No contexto cosmológico a situação agrava-se pois neste caso não somos capazes de responder perguntas como: o que está realizando a medida? qual observável está sendo medido? quando o colapso ocorreu? É certo que não podemos considerar nossas medidas da CMB como causadoras deste colapso já que nossa própria existência depende da formação das inomogeneidades e posterior formação de estruturas, nossas ações não podem ser causa delas.

Há também questões relacionadas à estatística do sistema que devem ser consideradas, seguindo o que foi exposto na seção 3.4. Temos a estatística quântica por um lado presente no cálculo de valores esperados de observáveis, como calculado na expressão (3.73). Por outro lado temos uma estatística associada a um *ensemble* clássico representado por um campo estocástico correspondente a um conjunto de universos, conforme calculado em (3.51). E além destas, temos uma descrição estatística das inomogeneidades dentro do nosso próprio Universo, de acordo com a equação (3.54). A identificação destas últimas duas repousa sobre hipóteses de ergodicidade e equilíbrio conforme descrito anteriormente, que não são satisfeitas no sistema considerado devido à falta de ergodicidade do processo estocástico quando realizado em uma 2-esfera [64].

Várias justificativas foram elaboradas na tentativa de responder estas questões, mas todas elas até o presente momento possuem pontos falhos, principalmente relacionados ao problema da medida, como veremos a seguir.

### 3.5.2 As Soluções Propostas e suas Lacunas

Alguns autores acreditam que o problema da medida na mecânica quântica não é pertinente, e afirmam que toda a informação física que podemos saber sobre o

sistema considerado está dado através dos valores esperados de produtos dos campos em questão. Desta forma, mesmo que o sistema seja invariante por rotações e translações, determinadas correlações não possuem estas simetrias, o que seria o caso das flutuações primordiais. Contudo, esta não pode ser considerada uma descrição fundamental. O processo físico responsável pela quebra das simetrias não é levado em consideração neste contexto. Este tratamento é razoável em uma abordagem semi-clássica de uma teoria, em que quantidades clássicas são identificadas com quantidades quânticas via valores esperados.

Mesmo considerando apenas uma descrição efetiva, o problema das flutuações primordiais traz um detalhe extra no que diz respeito a estes valores esperados pois a relação entre as correlações quânticas e clássicas é não-linear. Isto é, o valor esperado de um campo de flutuações clássico se acopla com a raiz quadrada do valor esperado da contrapartida quântica do campo de flutuações ao quadrado, a saber

$$\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle_{cl} = \sqrt{\langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle_{qu}},$$

relação esta que não é usual nos tratamentos semi-clássicos e pode trazer dificuldades na definição da transformada de Fourier das quantidades.

Considerando que a transição quântico-clássica da teoria usual apresenta falhas, pode-se argumentar que o processo de descoerência é capaz de explicar a emergência dos aspectos clássicos de um dado sistema quântico. Descoerência é o processo através do qual um sistema que está em interação com um ambiente transfere “coerência” para os graus de liberdade deste ambiente, que são inacessíveis ou não são passíveis de serem observados (veja detalhes no apêndice (A)). Este processo é responsável pela supressão de fenômenos de interferência quântica, representados por exemplo pelo estado “gato de Schrödinger” [73]. Logo, o primeiro passo é identificar estes graus de liberdade. Esta é uma questão delicada do ponto de vista cosmológico, em que o sistema considerado é todo o Universo e, mesmo em um tratamento semiclássico, como definir o que são graus de liberdade irrelevantes independentemente de um observador? Mesmo que de alguma maneira isso pudesse ser feito, ainda há outra questão importante a responder. O processo de descoerência explica o porquê de não observarmos interferências típicas de sistemas quânticos em objetos macroscópicos e por isso alguns acreditam que o problema da medida fica resolvido, o que é um equívoco [74]. Há um problema com relação a esta abordagem no que diz respeito ao

resultado da medida: não é possível justificar a interpretação de que o estado misto descrito pela matriz densidade reduzida descreva um *ensemble* estatístico e que o sistema esteja em um estado definido, embora desconhecido, entre todos os estados representados pelos elementos diagonais da matriz. Afinal, a matriz densidade total ainda possui elementos fora da diagonal não-nulos, e o estado do sistema ainda é uma superposição de possibilidades e não um resultado concreto clássico.

Alguns acreditam que se a interpretação de vários universos for somada à descrição anterior, então o problema está resolvido. Segundo a Ref. [71], esta interpretação não alivia o problema da medida, pois a “divisão dos universos” estaria em correspondência 1-1 com o que seria uma medida na interpretação de Copenhague<sup>8</sup>. Portanto, as questões que podem ser colocadas são as mesmas: quando a divisão ocorre? o que serve como estímulo para que a divisão ocorra?.

Argumenta-se que, nesse quadro conjunto de vários universos e descoerência, todas as alternativas possíveis (referentes aos elementos diagonais da matriz densidade) coexistem em uma realidade com vários “ramos”, mas seríamos capazes de perceber apenas um ramo. Segundo a Ref. [71], nada impediria em princípio que alguns desses ramos pudessem interferir com o nosso (um processo de “recoerência”), o que levaria a efeitos observáveis imprevisíveis. Desta maneira, não poderíamos argumentar que o estado inicial de um dado sistema representa a totalidade da realidade e, para uma dada superposição, poderiam existir várias outras realidades alternativas ou ramos que deveriam ser considerados na descrição. Entretanto, a probabilidade de interferência entre os ramos é muito baixa [75], primeiro porque devemos ter aparatos de medida que indiquem valores claros, isto é, nos quais não há superposição entre dois ou mais valores diferentes do ponteiro. Além disso, a descoerência torna praticamente impossível a observação de interferência entre os ramos. Assim, a crítica exposta na Ref. [71] com respeito a esta interpretação parece estar mal formulada. De qualquer maneira, o processo de descoerência precisa estar presente nesta formulação para definir a base preferencial de um “ponteiro” que não existe, se estamos tratando de questões cosmológicas. Logo, este quadro ainda não é satisfatório.

---

<sup>8</sup>Para uma discussão detalhada desta interpretação e variações dela (várias mentes e vários mundos) veja, por exemplo, a referência [27] e referências contidas nela.

Em [76] a descrição da transição quântico-clássica é feita através de uma particular realização do processo de descoerência, a chamada descoerência sem descoerência. Nesta descrição não é necessária a existência de outros campos além do campo inflaton que sirvam de ambiente. O ponto é que o campo escalar apresenta modos decrescentes que se anulam assintoticamente como resultado da dinâmica inflacionária, e são portanto tratados como inobserváveis. Na formulação de Schrödinger, isso se reflete em um estado de vácuo altamente comprimido (*squeezed*) no espaço de fase, o que é entendido como um comportamento estocástico clássico do sistema. A variável  $v_{\mathbf{k}}$  pode assumir qualquer valor com uma probabilidade correspondente  $|\psi|^2$  enquanto seu momentum conjugado assume o valor clássico correspondente. Assim, o sistema quântico é efetivamente equivalente ao sistema aleatório clássico, que é um conjunto de trajetórias clássicas com uma certa probabilidade associada a cada uma delas. Além disso, com a consideração de que o modo decrescente é desprezível, o comutador entre operadores de campo e seus respectivos momenta conjugados são aproximadamente nulos, o que aparentemente imita uma situação clássica [77]. Algumas questões importantes surgem deste argumento<sup>9</sup>. Entre elas, a questão do que é “observável” ou experimentalmente acessível a observadores é um argumento recorrente porém inaceitável se quisermos uma descrição consistente da formação de estruturas. Outro ponto é como definir uma “medida” para operadores, isto é, extrair um número a partir de um operador que meça sua importância ou irrelevância no contexto dado.

O fato de obtermos um estado comprimido (em torno de um valor clássico do momentum conjugado ao campo) a partir da evolução do estado de vácuo também não garante a “classicalidade” do sistema dado que sempre é possível encontrar um novo conjunto de operadores em termos dos quais o vácuo será o usual. Seria então necessário um mecanismo que garantisse um conjunto especial de operadores, com respeito aos quais o sistema estará em um estado comprimido.

Segundo [77], esse mecanismo seria um processo de descoerência usual, em que há interação do sistema (flutuações associadas com cada número de onda  $k$ ) com um ambiente inobservável gerando um sistema emaranhado. A descoerência leva a

---

<sup>9</sup>Veja a referência [78] para uma descrição extensa de todas as possíveis inconsistências do tratamento exposto em [77].

um *ensemble* aparente de pacotes de onda para o observável cujos membros não se interferem e define uma base preferencial para ponteiro, o que garantiria o conjunto privilegiado citado acima, com relação ao qual a medida será feita.

Este ambiente poderia ser constituído por outros campos presentes no Universo à época da inflação. Na ausência destes campos, outros dois processos podem ser responsáveis pela descoerência: a interação entre modos com diferentes  $k$ , dada a não-linearidade da teoria total, e o emaranhamento dos modos entre regiões espaciais diferentes. Este último leva, em particular, a um emaranhamento entre regiões fora e dentro do raio de Hubble.

O mecanismo de descoerência, segundo alguns autores, é então a justificativa para a “coincidência” entre correlações quânticas e espectros clássicos pois leva a um aparente *ensemble* de pacotes de onda para as amplitudes do campo. Ou seja, este argumento baseia-se no fato de que a matriz densidade reduzida do sistema tem a forma utilizada na descrição de um *ensemble* estatístico. Isto é uma indicação clara na crença de que a descoerência resolve o problema da medida na mecânica quântica, o que é uma conclusão equivocada (para detalhes, veja o apêndice A).

Na tentativa de resolver o problema da medida mas mantendo as bases da interpretação de Copenhague surgiu a interpretação de histórias consistentes [79, 80]. Sua extensão para aplicação em cosmologia quântica foi desenvolvida em [81]. Segundo esta abordagem, dado um estado inicial do sistema  $|\psi\rangle_i$ , considera-se uma família de histórias caracterizadas por um conjunto de operadores de projeção  $\{\hat{P}_n(t_n)\}$ , cada um deles associado ao sistema possuindo um valor de uma certa propriedade física em um dado intervalo do espectro desta propriedade em um dado intervalo de tempo. Uma dada família é dita auto-consistente se as histórias que ela contém não interferem entre si. Neste caso é possível atribuir probabilidades a cada história individual dentro desta família<sup>10</sup>. Um grande problema apresentado por este tratamento é que, em princípio, um número grande de famílias coerentes podem existir mas que são mutualmente inconsistentes [82]. A regra seria sempre selecionar uma única família em cada análise. Mas como escolhê-la? Parece não haver uma maneira clara sem se basear *a priori* no conjunto de perguntas sendo feitas sobre o sistema.

---

<sup>10</sup>Note que estamos considerando uma granulação grossa nas histórias, isto é, os projetores estão associados a intervalos do espectro do observável em intervalos de tempo. Segundo a interpretação de histórias consistentes, é a essas histórias que faz sentido atribuir probabilidades.

Em uma descrição do Universo, o que selecionaria o conjunto apropriado de projetores, e portanto a família apropriada? Em particular, é possível construir uma família consistente em que a probabilidade do Universo ser homogêneo e isotrópico é 1, o que nunca levaria a formação de estruturas (para detalhes desta consideração, veja a Ref. [78]).

Em [71], uma outra proposta para solução do problema da transição quântico-clássica é apresentada de uma maneira fenomenológica, baseada nas idéias de R. Penrose [83]. Este tratamento propõe que uma teoria mais fundamental de gravitação quântica pode ser responsável por desencadear o colapso da função de onda associada aos campos de matéria, isto é, graus de liberdade gravitacionais que não são descritos pela métrica<sup>11</sup> poderiam eventualmente ser excitados e resultariam no colapso da função de onda do sistema associado às flutuações quânticas e demais campos presentes, se existirem. O estado resultante pode então não mais obedecer às simetrias do estado inicial. Este é o chamado colapso dinâmico da função de onda. Entretanto, para que esta descrição seja consistente, ainda é necessária uma teoria completa de gravitação quântica e também uma implementação deste processo no contexto do problema da medida na teoria quântica padrão, que ainda está em processo de construção [84].

---

<sup>11</sup>A métrica passa a ser interpretada como uma descrição efetiva de um comportamento médio dos graus de liberdade gravitacionais verdadeiros e obedece uma equação de Einstein semi-clássica  $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R = \kappa\langle\psi|\hat{T}_{\mu\nu}(g, \hat{\varphi}, \hat{\pi})|\psi\rangle$ , onde  $|\psi\rangle$  é um estado pertencente ao espaço de Hilbert e onde os efeitos de retro-reação (*back-reaction*) são desprezados por serem rapidamente suprimidos.

## Capítulo 4

# Evolução Bohmiana das Flutuações Quânticas

*“One does not solve problems by making them more difficult.”*

B. DeWitt

Vimos no último capítulo as dificuldades em descrever a transição do regime quântico para o clássico das flutuações primordiais. Em [78] uma objeção com respeito à teoria Bohmiana como tentativa de explicação para esta transição é colocada: o que gravita, de fato, é a onda piloto  $\Psi$  ou a trajetória do sistema no espaço de configurações  $\mathcal{Q} = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$ ? Veremos neste capítulo que podemos assumir que o que de fato gravita é o campo. A ele será atribuído realidade física. A existência da trajetória Bohmiana no espaço de configurações é a responsável por quebrar a simetria do estado inicial das perturbações. A teoria de de Broglie-Bohm fornece ainda um limite clássico que é atingido naturalmente, sem a necessidade de impor uma correspondência entre valores esperados quânticos e correlações clássicas sem embasamento físico, tanto no caso inflacionário como em um modelo com ricochete. Começaremos nossa análise aplicando a teoria Bohmiana às perturbações no modelo inflacionário, mostrando que elas se comportam como clássicas no limite esperado. Depois calcularemos o espectro de potência e estenderemos nossa análise para outros estados iniciais. Por fim, descreveremos e aplicaremos a teoria Bohmiana às perturbações em um modelo com ricochete, mostrando que ainda assim o limite clássico

é obtido conforme o esperado. Os resultados deste capítulo encontram-se na Ref. [85]. Ao longo deste capítulo utilizaremos a convenção  $\hbar = 1$ .

## 4.1 Descrição Bohmiana das Flutuações Primordiais no Contexto Inflacionário

Como foi visto no capítulo anterior, as perturbações primordiais escalares em um universo do tipo FLRW podem ser tratadas através da métrica

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ [1 + 2\Phi(\eta, \mathbf{x})] d\eta^2 - [1 - 2\Phi(\eta, \mathbf{x})] \delta_{ij} dx^i dx^j \}, \quad (4.1)$$

que é a expressão (3.1) com a escolha do calibre Newtoniano e com a restrição ao caso de curvatura espacial nula.

Vamos relembrar brevemente o que foi visto na seção (3.5) para fixar a notação e então introduzir o formalismo funcional de Schrödinger. Seja então a variável de Mukhanov-Sasaki dada por

$$y \equiv a \left( \widetilde{\delta\varphi} + \frac{\varphi'}{\mathcal{H}} \Phi \right), \quad (4.2)$$

com a qual reescrevemos a ação na forma

$$S = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left( y'^2 - y_{,i} y^{,i} + \frac{z''}{z} y \right), \quad (4.3)$$

onde  $z \equiv \sqrt{\kappa/2} a \varphi' / \mathcal{H}$  (veja a equação (3.70)). A Hamiltoniana do sistema representado pela ação (4.3) é dada pela expressão

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left( p^2 + y^{,i} y_{,i} + 2 \frac{z'}{z} y p \right), \quad (4.4)$$

onde  $p$  é o momentum canonicamente conjugado a  $y$ . As equações de movimento são dadas através dos parênteses de Poisson, a saber

$$\begin{aligned} y'(\eta, \mathbf{x}) &= \{y(\eta, \mathbf{x}), H(\eta, \mathbf{x}')\} \\ &= p(\eta, \mathbf{x}) + \frac{z'}{z} y(\eta, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} p'(\eta, \mathbf{x}) &= \{p(\eta, \mathbf{x}), H(\eta, \mathbf{x}')\} \\ &= y^{,i}{}_{,i}(\eta, \mathbf{x}) - \frac{z'}{z} p(\eta, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir das equações acima, podemos escrever a equação de movimento clássica na forma

$$y'' - y'^i{}_{,i} - \frac{z''}{z}y = 0. \quad (4.7)$$

Passemos agora à representação de Fourier, onde introduzimos os modos  $y_{\mathbf{k}}(\eta)$  através da expressão

$$y(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} y_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.8)$$

modos estes que devem satisfazer a condição  $y_{\mathbf{k}}^* = y_{-\mathbf{k}}$  devido ao fato do campo  $y(\eta, \mathbf{x})$  ser real. A Hamiltoniana passa a ser escrita como

$$H_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3k \left( p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^* + k^2 y_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}^* + \frac{z'}{z} [p_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}^* + y_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^*] \right), \quad (4.9)$$

e a equação de movimento é escrita na forma

$$y_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) y_{\mathbf{k}} = 0, \quad (4.10)$$

onde  $k = |\mathbf{k}|$ .

Para a quantização, utilizaremos o formalismo funcional de Schrödinger [44], no qual o estado do sistema é descrito por um funcional de onda  $\Psi[y, y^*, \eta]$  cuja evolução temporal obedece a equação diferencial funcional de Schrödinger que, de acordo com a Hamiltoniana acima, fica dada por

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3\mathbf{k} \left[ -\frac{\delta^2}{\delta y_{\mathbf{k}}^* \delta y_{\mathbf{k}}} + k^2 y_{\mathbf{k}}^* y_{\mathbf{k}} - i \frac{z'}{z} \left( \frac{\delta}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} y_{\mathbf{k}}^* + y_{\mathbf{k}} \frac{\delta}{\delta y_{\mathbf{k}}} \right) \right] \Psi, \quad (4.11)$$

onde tratamos  $y_{\mathbf{k}}$  e  $y_{\mathbf{k}}^*$  como campos independentes. Restringimos a integração a região  $\mathbb{R}^{3+}$  para evitar a contribuição redundante de modos repetidos, devido à condição de realidade  $y_{\mathbf{k}}^* = y_{-\mathbf{k}}$ .

O próximo passo será encontrar a solução da equação (4.11) dado um estado de vácuo inicial, pois as perturbações primordiais são usualmente atribuídas às flutuações quânticas do estado de vácuo do campo representado pela variável introduzida em (4.2). Para isso, passemos momentaneamente à descrição de Heisenberg, onde somente os operadores são dependentes do tempo e não o estado  $\Psi$ .

O campo  $y_{\mathbf{k}}$  passa a ser um operador, que pode ser expresso em termos de operadores de criação  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  e aniquilação  $\hat{a}(\mathbf{k})$ . Assim, reescrevemos a Hamiltoniana

(4.9) como

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2} \left[ k(\hat{a}(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})) + i\frac{z'}{z}(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}) - \hat{a}(\mathbf{k})\hat{a}(-\mathbf{k})) \right], \quad (4.12)$$

onde o operador  $\hat{a}(\mathbf{k})$  é definido pela expressão

$$\hat{a}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \hat{y}(\mathbf{k}) + i\frac{1}{\sqrt{k}} \hat{p}(\mathbf{k}) \right). \quad (4.13)$$

Desta maneira, podemos representar os operadores  $\hat{y}$  e  $\hat{p}$  através das expressões

$$\hat{y}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})}{\sqrt{2k}}, \quad \hat{p}(\mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{k}{2}}(\hat{a}(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})). \quad (4.14)$$

As relações de comutação não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} [\hat{y}(\mathbf{k}, \eta), \hat{p}^\dagger(\mathbf{k}', \eta)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\hat{a}(\mathbf{k}, \eta), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', \eta)] &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Vamos definir agora os modos do campo, que chamaremos de  $f_k(\eta)$ , como

$$\hat{y}(\mathbf{k}, \eta) \equiv f_k(\eta)\hat{a}(\mathbf{k}, \eta_i) + f_k^*(\eta)\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \eta_i), \quad (4.15)$$

onde  $f_k(\eta_i) = 1/\sqrt{2k}$ , de acordo com a primeira equação de (4.14). Analogamente, podemos definir os modos do momentum canonicamente conjugado ao campo como

$$\hat{p}(\mathbf{k}, \eta) \equiv -i[g_k(\eta)\hat{a}(\mathbf{k}, \eta_i) - g_k^*(\eta)\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \eta_i)], \quad (4.16)$$

onde  $g_k(\eta_i) = \sqrt{k/2}$ , de acordo com a segunda equação de (4.14). De acordo com a equação (4.5), podemos relacionar estes modos da seguinte maneira:

$$g_k = i \left( f_k' - \frac{z'}{z} f_k \right). \quad (4.17)$$

Já vimos que a evolução temporal dos operadores de criação e aniquilação (na representação de Heisenberg) é dada através das transformações de Bogoliubov (veja as Eqs. (3.66) e (3.67)). Na representação de Schrödinger, a evolução temporal é dada através da matriz unitária  $S$  [44], sendo que os operadores não dependem explicitamente do tempo. Assim, podemos representar a evolução dos operadores de criação e aniquilação como

$$\begin{aligned} S\hat{a}(\pm\mathbf{k}, \eta_i)S^{-1} &= g_k^*(\eta)\hat{y}(\pm\mathbf{k}, \eta_i) + if_k^*(\eta)\hat{p}(\pm\mathbf{k}, \eta_i), \\ S\hat{a}^\dagger(\pm\mathbf{k}, \eta_i)S^{-1} &= g_k(\eta)\hat{y}(\mp\mathbf{k}, \eta_i) - if_k(\eta)\hat{p}(\mp\mathbf{k}, \eta_i). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vimos também no capítulo anterior que os modos  $f_k$  satisfazem a equação de movimento clássica (4.10). Se assumirmos que o fator de escala é dado por uma lei de potência do tempo conforme<sup>1</sup>,  $a(\eta) = l_0(-\eta)^{1+\beta}$ , onde devemos ter  $\beta \leq -2$  no caso inflacionário ( $l_0$  é uma constante com dimensão de comprimento), temos que a solução desta equação com a condição inicial  $f_k(\eta_i) = 1/\sqrt{2k}$  (veja a seção 3.5) será então dada por

$$f_k(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i(k\eta_i - \pi\beta/2)} \sqrt{-k\eta} H_{-\beta-1/2}^{(1)}(-k\eta). \quad (4.19)$$

O estado de vácuo do sistema, em um dado instante  $\eta_i$ , é definido por

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \eta_i)|0, \eta_i\rangle = 0. \quad (4.20)$$

Este estado corresponde a um estado Gaussiano que permanece como tal durante toda sua evolução temporal. Segue das equações (4.15) e (4.16) que o estado  $|0, \eta_i\rangle_H$ , na representação de Heisenberg, é autoestado do operador  $\hat{y}(\mathbf{k}) + i\gamma_k^{-1}\hat{p}(\mathbf{k})$  com autovalor nulo, onde os operadores  $\hat{y}(\mathbf{k})$ ,  $\hat{p}(\mathbf{k})$  e a função  $\gamma_k$  dependem do tempo, sendo que esta última é dada por

$$\gamma_k \equiv \frac{g_k^*}{f_k^*} = \frac{1}{2|f_k|^2} - i\frac{F(k)}{|f_k|^2}, \quad (4.21)$$

onde  $F(k) = \text{Im}(f_k^* g_k)$ .

Na representação de Schrödinger, o estado evoluído no tempo é definido como

$$|0, \eta\rangle_S \equiv S|0, \eta_i\rangle,$$

onde  $S$  é a matriz de evolução temporal introduzida nas equações (4.18). Este estado satisfaz a equação

$$S \hat{a}(\mathbf{k}, \eta_i) S^{-1}|0, \eta\rangle_S = 0, \quad (4.22)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\{\hat{y}(\mathbf{k}, \eta_i) + i\gamma_k^{-1}(\eta)\hat{p}(\mathbf{k}, \eta_i)\}|0, \eta\rangle_S = 0. \quad (4.23)$$

---

<sup>1</sup>Veremos adiante que nossos resultados independem desta particular escolha do fator de escala, a evolução das perturbações será a mesma qualquer que seja o comportamento temporal de  $a(\eta)$ .

Na representação de campos, o operador  $\hat{p}$  é representado por  $\hat{p}(\mathbf{k}, \eta_i) = -i\partial/\partial\hat{y}^*(\mathbf{k}, \eta_i)$  e o estado solução da equação acima é dado por um funcional de onda Gaussiano, que pode ser escrito como o produto  $\Psi = \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3+}} \Psi_{\mathbf{k}}(y_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{k}}^*, \eta)$ , onde

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|f_k(\eta)|} \exp \left\{ -\frac{1}{2|f_k(\eta)|^2} |y_{\mathbf{k}}|^2 + i \left[ \left( \frac{|f_k(\eta)|'}{|f_k(\eta)|} - \frac{z'}{z} \right) |y_{\mathbf{k}}|^2 - \int^{\eta} \frac{d\tilde{\eta}}{2|f_k(\tilde{\eta})|^2} \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Nesta expressão o fator de normalização já está colocado explicitamente e a função  $f_k$  deve ser solução da equação clássica de movimento tal que, no regime  $k^2 \gg z''/z$ , satisfaça a condição

$$f(k) = \frac{e^{ik(\eta-\eta_i)}}{\sqrt{2k}}. \quad (4.25)$$

Isto é, para pequenos comprimentos de onda,  $f_k$  deve representar o estado de vácuo de um oscilador harmônico.

Passaremos agora à descrição Bohmiana, escrevendo o funcional de onda como  $\Psi = R e^{iS}$ , com  $R = |\Psi|$ , como visto no capítulo 2. A equação funcional (4.11) é agora separada em suas partes real e imaginária resultando em outras duas equações, uma para a fase  $S$  e outra para a amplitude  $R$ , como segue:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} + \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}} + k^2 y_{\mathbf{k}}^* y_{\mathbf{k}} + \frac{z'}{z} \left( \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} y_{\mathbf{k}}^* + y_{\mathbf{k}} \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{1}{R} \frac{\delta^2 R}{\delta y_{\mathbf{k}}^* \delta y_{\mathbf{k}}} \right] = 0, \quad (4.26)$$

e

$$\frac{\partial R^2}{\partial \eta} + \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{\delta}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} \left[ R^2 \left( \frac{\delta S}{\delta y} + \frac{z'}{z} y_{\mathbf{k}}^* \right) \right] + \frac{\delta}{\delta y_{\mathbf{k}}} \left[ R^2 \left( \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} + \frac{z'}{z} y_{\mathbf{k}} \right) \right] \right\} = 0. \quad (4.27)$$

A equação para  $S$  é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi com um termo extra correspondente ao potencial quântico, como visto no capítulo 2, e será analisado adiante.

Podemos postular agora a existência de um campo  $y(\mathbf{x}, \eta)$  com realidade física, cuja evolução temporal é dada através das equações guia abaixo

$$y_{\mathbf{k}}^{*'} = \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}} + \frac{z'}{z} y_{\mathbf{k}}^*, \quad y_{\mathbf{k}}' = \frac{\delta S}{\delta y_{\mathbf{k}}^*} + \frac{z'}{z} y_{\mathbf{k}}. \quad (4.28)$$

Estas equações, juntamente com a equação (4.27), garantem que a distribuição  $R^2 = |\Psi|^2$  é preservada no tempo, isto é, esta distribuição é *equivariante*. Assim, a equação (4.27) passa a ser uma equação de continuidade para a quantidade  $R^2$ .

Tomando a derivada temporal da última equação guia, por exemplo, e utilizando a equação (4.26), obtemos a equação de segunda ordem

$$y_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) y_{\mathbf{k}} = - \frac{\delta Q}{\delta y_{\mathbf{k}}^*}, \quad (4.29)$$

onde

$$Q \equiv - \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3 \mathbf{k} \frac{1}{2R} \frac{\delta^2 R}{\delta y_{\mathbf{k}}^* \delta y_{\mathbf{k}}} \quad (4.30)$$

é o potencial quântico. A equação acima é a equação clássica de movimento com um termo extra representando uma força de origem quântica.

Através do funcional de onda (4.24), lemos a fase  $S$  e a amplitude  $R$ , com as quais obteremos as soluções de (4.28) e calcularemos o potencial quântico  $Q$  através de (4.30). Começaremos a análise da transição quântico-clássica das perturbações através das equações guia e depois mostraremos que o comportamento do potencial quântico corrobora os resultados da primeira análise, no sentido de obter o regime clássico dentro da teoria, sem adicionar processos do tipo colapso da função de onda ou mesmo descoerência.

A partir da equação guia, temos que

$$y_{\mathbf{k}}' = h(\eta) y_{\mathbf{k}} \rightarrow y_{\mathbf{k}} = C(\mathbf{k}) \exp \left[ \int_{\eta} h(\eta') d\eta' \right], \quad (4.31)$$

onde

$$h(\eta) = \frac{F_k(\eta)}{|f_k|^2} + \frac{z'}{z}, \quad (4.32)$$

e  $C(\mathbf{k})$  é uma constante de integração que só depende do vetor de onda  $\mathbf{k}$ , relacionada com a distribuição inicial do campo  $y_{\mathbf{k}}(\eta_i)$ .

Substituindo a expressão (4.17) na expressão para a função  $F(k)$ , escrevemos  $h(\eta)$  como

$$h(\eta) = \frac{1}{2} \frac{d \ln (|f_k|^2)}{d\eta}. \quad (4.33)$$

Logo, a equação guia pode ser facilmente integrada resultando em

$$y_{\mathbf{k}}(\eta) \sim |f_k(\eta)|, \quad (4.34)$$

que podemos ainda escrever na forma

$$y_{\mathbf{k}}(\eta) = y_{\mathbf{k}}(\eta_i) \frac{|f_{\mathbf{k}}(\eta)|}{|f_{\mathbf{k}}(\eta_i)|}. \quad (4.35)$$

A função modo  $f_{\mathbf{k}}$  é solução da equação clássica (4.10), ou seja, é dada por uma função de Hankel conforme a Eq. (4.19), no caso específico de uma evolução do tipo lei de potência para o fator de escala. Esta função pode ser escrita em termos das funções de Bessel  $J_{\nu}$  [86], sendo dada por

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z), \quad (4.36)$$

onde

$$Y_{\nu}(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [\cos(\nu\pi)J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)], \quad (4.37)$$

e  $\nu = -1/2 - \beta$ .

Para  $|z| \ll 1$ , podemos utilizar a seguinte representação em série da função de Bessel para encontrar o limite assintótico da solução (4.19),

$$J_{\nu}(z) = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (4.38)$$

Para o caso em que  $|z| \gg 1$ , utilizamos a representação

$$\begin{aligned} J_{\pm\nu}(z) = & \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z \mp \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2z)^{2k}} \frac{\Gamma(\nu + 2k + 1/2)}{(2k)! \Gamma(\nu - 2k + 1/2)} \right] + \\ & - \sin\left(z \mp \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2z)^{2k+1}} \frac{\Gamma(\nu + 2k + 3/2)}{(2k + 1)! \Gamma(\nu - 2k - 1/2)} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto, para pequenos comprimentos de onda ( $k\eta \gg 1$ ), a solução (4.19) é dada aproximadamente por flutuações do estado de vácuo de Minkowski, a saber

$$f_{\mathbf{k}}(\eta) \sim e^{-ik\eta} \left( 1 + \frac{A_{\mathbf{k}}}{\eta} + \dots \right). \quad (4.40)$$

Logo, a solução (4.35) se comporta de maneira muito diferente da solução clássica, já que o termo de oscilação  $e^{ik\eta}$  é eliminado devido à presença do módulo.

Por outro lado, para grandes comprimentos de onda, a solução (4.19) é dada de acordo com a expressão (4.38) por

$$f_{\mathbf{k}}(\eta) \sim A_{\mathbf{k}}^d |\eta|^{\alpha_d} + A_{\mathbf{k}}^g |\eta|^{\alpha_g} \approx A_{\mathbf{k}}^g |\eta|^{\alpha_g}, \quad (4.41)$$

onde  $|\eta|^{\alpha_d}$  é o modo decrescente ( $\alpha_d > 0$ ) e  $|\eta|^{\alpha_g}$  corresponde ao modo crescente ( $\alpha_g < 0$ )<sup>2</sup>. Logo,  $f_k$  e  $|f_k|$  tem o mesmo comportamento temporal, devido à presença de um modo crescente na solução.

Este é o limite clássico da teoria, isto é, a equação de movimento (4.28) fornece uma evolução para as perturbações que naturalmente passa do regime quântico para um comportamento que simula a evolução clássica, sem a necessidade de adicionar um processo não unitário à mão (originado por um processo do tipo medida) para forçar uma conexão entre estes dois domínios. A quebra da simetria do estado inicial se dá devido à existência da “partícula” (representando todo o sistema em consideração) descrevendo uma trajetória no espaço de configurações do campo: embora a distribuição de possíveis configurações iniciais do campo  $y(\eta, \mathbf{x})$  seja uniforme no 3-espaço, o que representa a simetria do estado de vácuo de Bunch-Davies (homogeneidade e isotropia), a equação guia fornece uma evolução que não preservará estas características. A trajetória do sistema no espaço de configurações é tal que o sistema entra em um determinado ramo da superposição inicial, que representa uma particular distribuição de posições das perturbações, isto é, o universo com uma determinada configuração de anisotropias. Qual o ramo a ser seguido dependerá das condições iniciais, às quais não temos acesso, mas supomos que estejam em equilíbrio quântico (distribuídas de acordo com  $|\Psi_{vac}|^2$ ). Os outros ramos continuam existindo, mas não temos acesso a eles. Assim, apesar de o estado inicial ser invariante rotacional e translacional, assim como a onda guia durante toda a evolução temporal, a solução da equação guia não mantém estas simetrias. Passemos agora à segunda análise a qual nos referimos anteriormente, aquela relacionada às forças.

De posse do potencial quântico, podemos fazer uma análise das forças clássica e quântica presentes no sistema, e estudar em que condições uma tem contribuição maior do que a outra. Este potencial é facilmente calculado de acordo com a Eq. (4.30), resultando em

$$Q = -\frac{|y_{\mathbf{k}}(\eta_i)|^2}{4|f_k|^4} + \frac{1}{2|f_k|^2}. \quad (4.42)$$

A força clássica é dada por  $F_{cl} = -\partial V / \partial y_{\mathbf{k}}^*$ , onde

$$V = \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) y_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}^*. \quad (4.43)$$

---

<sup>2</sup>Lembremos que  $-\infty < \eta < 0$  e, portanto,  $|\eta|$  está decrescendo com a evolução.

A força quântica,  $F_q \equiv -\partial Q/\partial y_{\mathbf{k}}^*$ , lê-se

$$F_q = \frac{y_{\mathbf{k}}}{4|f_k|^4}, \quad (4.44)$$

onde  $Q$  está dado por (4.42). Deste modo, temos a razão entre estas duas quantidades dada por

$$\frac{F_{cl}}{F_q} = -4|f_k|^4 \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right). \quad (4.45)$$

Para  $k^2 \gg z''/z$  (pequenos comprimentos de onda), o segundo termo dentro do parênteses pode ser desprezado e o valor da função  $f_k$  pode ser aproximado por seu valor inicial  $1/\sqrt{2k}$ , o que resulta em  $F_{cl}/F_q \approx -1$ . Ou seja, a força clássica e quântica estão balanceadas. Logo, o comportamento dos modos é aproximadamente aquele de um estado estacionário neste regime, com velocidade próxima de zero, de acordo com a equação guia. Para  $k^2 \ll z''/z$  (grandes comprimentos de onda), a razão entre as forças se torna muito grande devido ao modo crescente da função  $f_k$ , a força quântica se torna então desprezível frente à força clássica. Desta maneira, os modos passam a obedecer a evolução clássica e a transição ocorre suavemente.

É importante notar que no limite de grandes comprimentos de onda, em que  $f_k$  é dado pelo modo crescente, temos  $Q \rightarrow 0$ . Este resultado está em completo acordo com o critério que estabelecemos na seção (2.5) para definir consistentemente o limite clássico da teoria.

### 4.1.1 O espectro de potência

Iremos agora analisar as propriedades estatísticas da teoria de perturbações Bohmiana. Para o cálculo do espectro de potência, utilizaremos as hipóteses apresentadas no capítulo anterior (veja a seção 3.4) para justificar a equivalência entre a média calculada no *ensemble* e a média calculada sobre regiões espaciais grandes comparadas àquelas em que há correlação entre os campos.

Seja  $y(\eta, \mathbf{x}, y_i)$  uma solução da equação guia tal que  $y(\eta_i, \mathbf{x}, y_i) = y_i(\mathbf{x})$ . Se assumirmos que inicialmente o campo tem uma distribuição de equilíbrio  $|\Psi(y_i, \eta_i)|^2$ , a equação de continuidade garante que esta distribuição se manterá com a evolução temporal. Desta maneira, a função de correlação pode ser escrita como

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle y(\eta, \mathbf{x})y(\eta, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\text{dBB}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \mathcal{D}y_i |\Psi(y_i, \eta_i)|^2 y(\eta, \mathbf{x}; y_i) y(\eta, \mathbf{x} + \mathbf{r}; y_i) \\
 &= \int \mathcal{D}y |\Psi(y, \eta)|^2 y(\eta, \mathbf{x}) y(\eta, \mathbf{x} + \mathbf{r}). \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

Para o cálculo desta expressão utilizaremos a transformada de Fourier do campo Bohmiano, tratando suas partes real  $y_{\mathbf{k}r}$  e imaginária  $y_{\mathbf{k}i}$  como variáveis independentes, por conveniência. Substituindo  $|\Psi_{\mathbf{k}}(y_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{k}}^*, \eta)|^2$  avaliado em  $\eta_i$  calculado com a expressão (4.24) na expressão acima, obtemos<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 \xi(r) &= \int \prod_{\mathbf{k}} dy_{\mathbf{k}r} dy_{\mathbf{k}i} \left\{ |N_{\mathbf{k}}|^2 \exp\left(\frac{-|y_{\mathbf{k}r}|^2 - |y_{\mathbf{k}i}|^2}{|f_{\mathbf{k}}|^2}\right) \right\} \Big|_{\eta_i} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} y_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{k}' y_{\mathbf{k}'}(\eta) e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})}. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Substituindo agora a solução (4.35) nesta expressão obtemos integrais Gaussianas nas variáveis  $y_{\mathbf{k}r}$  e  $y_{\mathbf{k}i}$  que podem ser facilmente resolvidas.

Assim, após algumas simplificações chegamos a

$$\begin{aligned}
 \langle y(\eta, \mathbf{x}) y(\eta, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\text{dBB}} &= \int \frac{1}{2} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} |f_{\mathbf{k}}(\eta)|^2 \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int dk \frac{\sin kr}{r} k |f_k(\eta)|^2, \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

onde na última linha realizamos a integração sobre os ângulos no espaço dos momentos.

Este resultado é o mesmo obtido na teoria usual (veja, por exemplo, a Ref. [47]) o que mostra a consistência da teoria. Porém, utilizamos aqui a solução (4.35) explicitamente e tomamos uma média sobre as configurações iniciais dos campos Bohmianos, que é válida durante toda a evolução. O espectro das perturbações não é uma quantidade que ora é calculado usando a teoria quântica, ora é calculado assumindo uma estatística clássica<sup>4</sup>. Esta é uma questão fundamental já que, como vimos no segundo capítulo, a teoria Bohmiana pretende ser uma descrição universal da Natureza.

<sup>3</sup>Estamos assumindo isotropia estatística, isto é,  $\xi$  dependerá apenas do módulo da distância  $r$  entre os pontos do espaço.

<sup>4</sup>É importante notar que este resultado corrobora aquele da descrição usual pois estamos assumindo uma distribuição de equilíbrio,  $|\Psi|^2$ , para os valores iniciais do campo  $y(\mathbf{x}, \eta_i)$ .

### 4.1.2 Evolução a Partir de Outros Estados Iniciais

Podemos assumir estados iniciais diferentes daquele dado através da equação (4.24). Veremos que, para alguns exemplos específicos, a solução da equação guia não muda e obtemos o mesmo comportamento para as funções dos modos  $f_k$ .

Consideremos como primeiro exemplo um estado coerente de dois modos [25], que deve satisfazer as seguintes relações

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{k}, \eta_i) |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S &= \left\{ \sqrt{\frac{k}{2}} y(\mathbf{k}, \eta_i) + \frac{i}{\sqrt{2k}} p(\mathbf{k}, \eta_i) \right\} |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S \\
 &= \alpha |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S \\
 &= \left\{ \sqrt{\frac{k}{2}} \langle y \rangle_i + \frac{i}{\sqrt{2k}} \langle p \rangle_i \right\} |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S,
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde o sinal  $\langle \rangle_i$  significa o valor esperado das quantidades  $y(\mathbf{k}, \eta_i)$  e  $p(\mathbf{k}, \eta_i)$  no estado  $|\alpha\beta, \eta_i\rangle_S$ . Este estado deve também satisfazer

$$\begin{aligned}
 a(-\mathbf{k}, \eta_i) |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S &= \left\{ \sqrt{\frac{k}{2}} y(-\mathbf{k}, \eta_i) + \frac{i}{\sqrt{2k}} p(-\mathbf{k}, \eta_i) \right\} |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S \\
 &= \beta |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S \\
 &= \left\{ \sqrt{\frac{k}{2}} \langle y \rangle_i^* + \frac{i}{\sqrt{2k}} \langle p \rangle_i^* \right\} |\alpha\beta, \eta_i\rangle_S.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

O estado evoluído temporalmente satisfará as equações

$$\begin{aligned}
 Sa(\mathbf{k}, \eta_i) S^{-1} |\alpha\beta, \eta\rangle_S &= \alpha |\alpha\beta, \eta\rangle_S \\
 &= (g_k^*(\eta) \langle y \rangle + i f_k^*(\eta) \langle p \rangle) |\alpha\beta, \eta\rangle_S, \\
 Sa(-\mathbf{k}, \eta_i) S^{-1} |\alpha\beta, \eta\rangle_S &= \beta |\alpha\beta, \eta\rangle_S \\
 &= (g_k^*(\eta) \langle y \rangle^* + i f_k^*(\eta) \langle p \rangle^*) |\alpha\beta, \eta\rangle_S,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde agora os valores esperados são correspondentes a um instante arbitrário  $\eta$ .

Desta maneira, na representação de Schrödinger, as equações acima resultam em

$$\left( \gamma_k y_{\mathbf{k}}(\eta_i) + i \frac{\delta}{\delta y_{-\mathbf{k}}(\eta_i)} \right) \Psi_\alpha = (\gamma_k \langle y \rangle + i \langle p \rangle) \Psi_\alpha, \tag{4.52}$$

$$\left( \gamma_k y_{-\mathbf{k}}(\eta_i) + i \frac{\delta}{\delta y_{\mathbf{k}}(\eta_i)} \right) \Psi_\beta = (\gamma_k \langle y \rangle^* + i \langle p \rangle^*) \Psi_\beta. \tag{4.53}$$

Vemos através das equações (4.49) e (4.51) que  $\langle y \rangle$  é solução da equação de movimento clássica com condições iniciais  $y(\eta_i) = \langle y \rangle_i$ ,  $p(\eta_i) = \langle p \rangle_i$  e  $\langle p \rangle = \langle y \rangle' - \frac{\alpha'}{\alpha} \langle y \rangle$ .

A função de onda composta que é solução das equações acima resulta em

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}(y_i, \eta) &\equiv \langle y(\mathbf{k}, \eta_i), y(-\mathbf{k}, \eta_i) | \alpha\beta, \eta \rangle_S \\ &= N_k \exp[-\gamma_k |y_i - \langle y \rangle|^2 + i(y_i^* \langle p \rangle + y_i \langle p \rangle^*)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde  $N_k$  representa o fator de normalização.

Neste caso, a fase é dada por

$$S = \frac{F(k)}{|f_k|^2} |y_i - \langle y \rangle|^2 + y_i^* \langle p \rangle + y_i \langle p \rangle^*,$$

e a correspondente equação guia resulta, de maneira análoga ao que foi feito para o caso do estado de vácuo, em

$$y_{\mathbf{k}} - \langle y \rangle \propto |f_k|. \quad (4.55)$$

Vimos que  $\langle y \rangle$  é solução da equação clássica de movimento (4.10) assim como  $f_k$ , e além disso temos que para grandes comprimentos de onda  $|f_k| \approx f_k$ . Portanto, a soma  $f_k + \langle y \rangle$  obedecerá também a equação clássica de tal maneira que, no limite de grandes comprimentos de onda, o sistema evoluído a partir de um estado coerente de dois modos inicial se comportará classicamente.

Consideremos agora um estado inicial com um número arbitrário  $N$  de partículas com momenta  $\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$  que denotamos por  $|N_k, N_{-k}, \eta_i\rangle_S \equiv |N, \eta_i\rangle_S$ . O estado evoluído temporalmente resulta em [87]

$$\Psi_N(y_i, y_i^*, \eta) = \left(-\frac{f_k}{f_k^*}\right)^N L_N\left(\frac{|y_i|^2}{|f_k|^2}\right) \Psi_i(y_i, y_i^*, \eta), \quad (4.56)$$

onde  $\Psi_i$  é a função de onda relativa ao estado de vácuo e  $L_N$  é um polinômio de Laguerre, representado através da fórmula de Rodrigues por [88]

$$L_N(x) = \frac{1}{N!} e^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^N (x^N e^{-x}). \quad (4.57)$$

Como o argumento do polinômio de Laguerre em (4.56) é real, o polinômio também o será. Para encontrarmos a fase  $S_N$  da função de onda (4.56) notemos que, para uma função complexa  $\psi$ , podemos sempre escrever

$$S = -\frac{i}{2} \ln \frac{\psi}{\psi^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_N}{\Psi_N^*} &= \left(\frac{f_k}{f_k^*}\right)^{2N} \frac{\Psi_i}{\Psi_i^*} \\ &= \left(\frac{f_k}{f_k^*}\right)^{2N} \exp\left[2i \frac{|y_i|^2}{|f_k|^2} F(k)\right].\end{aligned}\quad (4.58)$$

Logo,

$$S_N = -iN \ln\left(\frac{f_k}{f_k^*}\right) + \frac{|y_i|^2}{|f_k|^2} F(k).\quad (4.59)$$

O primeiro termo da expressão acima não depende do campo  $y_{\mathbf{k}}$  e o segundo termo é exatamente a fase da função de onda correspondente ao estado de vácuo  $\Psi_i$ . Desta maneira, obtemos neste caso a mesma expressão para a equação guia dada no caso do estado de vácuo, Eq. (4.28), resultando portanto em trajetórias Bohmianas com o mesmo comportamento temporal.

## 4.2 Evolução Bohmiana das Perturbações em um Modelo com Ricochete

### 4.2.1 A Quantização Canônica da Gravitação

Uma cosmologia quântica pode ser construída através do processo de quantização canônica da Relatividade Geral [89]. Este processo de quantização está baseado no formalismo hamiltoniano desta teoria, que pressupõe uma folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies 3-dimensionais do tipo espaço e conseqüentemente a existência de um tempo global. Utilizamos também o método de Dirac para sistemas hamiltonianos vinculados [90], dado que a RG apresenta vínculos devido à sua invariância sob difeomorfismos.

As hipersuperfícies podem ser definidas através de equações para as coordenadas na forma  $\phi(x^\mu) = cte$ . Suas normais são dadas pelas 1-formas  $n = n_\mu dx^\mu = \partial_\mu \phi dx^\mu$ . Há sempre uma coordenada do tipo tempo  $x^0 = t$  que pode parametrizar as hipersuperfícies, tal que  $n_\mu = N \delta_\mu^0$ , onde  $N$  é um fator de normalização escolhido para que tenhamos  $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1$ . As projeções nas hipersuperfícies são construídas com

a quantidade  $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$ , com componentes matriciais dadas por

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g^{ij} - N^2 g^{0i} g^{0j} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Definindo  $N^i \equiv g^{i0} N$ , podemos escrever as componentes do tensor métrico como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/N^2 & N^i/N^2 \\ N^j/N^2 & h^{ij} - N^i N^j/N^2 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

tal que podemos escrever o elemento de linha na forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= N^2 dt^2 - h_{ij} (N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j), \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde  $N_i = h_{ij} N^j$ . A quantidade  $N(t, x^i)$ , chamada *função lapso*, dá a taxa de variação do tempo próprio de um observador com 4-velocidade  $n^\mu$  com respeito à coordenada  $t$ . O *vetor deslocamento*  $N^i(t, x^j)$  dá a variação dos pontos com mesmo rótulo  $x^i$  com respeito a coordenada  $t$  quando passamos de uma hipersuperfície a outra.

A medida da curvatura das hipersuperfícies com respeito ao espaço-tempo na qual estão imersas é dada através da curvatura extrínseca, definida como

$$K_{\mu\nu} \equiv -h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}, \quad (4.63)$$

cujas componentes não nulas se resumem a

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (2D_{(i} N_{j)} - \partial_t h_{ij}), \quad (4.64)$$

onde  $D$  representa a derivada covariante no 3-espaço.

Com as quantidades definidas acima, reescrevemos o escalar de Ricci e colocamos a lagrangiana correspondente à ação de Einstein-Hilbert na forma<sup>5</sup>

$$\mathcal{L}[N, N^i, h_{ij}] = N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K^{ij}K_{ij} - K^2). \quad (4.65)$$

---

<sup>5</sup>Na expressão que se segue foram descartados termos de derivadas totais, uma temporal e uma espacial. Isto só é possível pois estamos considerando seções espaciais com curvatura positiva. Para detalhes veja a Ref. [91].

Vamos agora construir a hamiltoniana da RG. Como a densidade lagrangiana (4.65) não depende de  $\partial_t N$  e de  $\partial_t N^i$ , os momenta canonicamente conjugados às variáveis  $N$  e  $N^i$  são fracamente nulos<sup>6</sup>,

$$\Pi_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 N^\mu)} \approx 0, \quad (4.66)$$

onde  $N^0 \equiv N$ . O momentum canonicamente conjugado a  $h_{ij}$  é dado por

$$\Pi_{ij} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t h^{ij})} = -\sqrt{h}(K_{ij} - h_{ij}K). \quad (4.67)$$

A densidade hamiltoniana canônica é obtida de maneira usual, através da transformada de Legendre  $\mathcal{H}_c = \Pi_{ij}\partial_t h^{ij} - \mathcal{L}$ . Portanto, obtemos<sup>7</sup>

$$H_c = \int d^3x (N\mathcal{H} + N_j\mathcal{H}^j), \quad (4.68)$$

onde

$$\mathcal{H} = G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R, \quad (4.69)$$

$$\mathcal{H}^j = -2D_i\Pi^{ij}, \quad (4.70)$$

e

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \quad (4.71)$$

é a chamada métrica de DeWitt.

A densidade hamiltoniana total deve incluir os vínculos (4.66), o que é feito com o uso de multiplicadores de Lagrange, resultando

$$\mathcal{H}_T = N\mathcal{H} + N_j\mathcal{H}^j + \lambda^\mu\Pi_\mu. \quad (4.72)$$

Por consistência os vínculos devem se manter no tempo, isto é,  $\dot{\Pi}_\mu = \{\Pi_\mu, \mathcal{H}_T\} = 0$ , o que leva aos novos vínculos

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad (4.73)$$

$$\mathcal{H}^i \approx 0. \quad (4.74)$$

<sup>6</sup>Na teoria de Dirac, esta terminologia é utilizada para representar o fato de que estas quantidades não são nulas em todo o espaço de fase, apenas em um subespaço deste. Portanto, os parênteses de Poisson delas com outras funções do espaço de fase não são necessariamente nulos.

<sup>7</sup>Aqui descartamos um termo de divergência considerando que a análise é feita em um espaço-tempo fechado. Para o caso de espaços-tempos abertos, isto não é possível.

Estes vínculos são conhecidos como super-hamiltoniana e super-momentum, respectivamente. Assim, podemos tratar  $N$  e  $N^i$  como multiplicadores de Lagrange e eliminá-los do espaço de fase da teoria, tal que a hamiltoniana da RG passa a ser dada por

$$H_{GR} = \int d^3x (N\mathcal{H} + N_j\mathcal{H}^j). \quad (4.75)$$

Para quantizarmos a teoria procederemos da maneira usual, pedindo que os parênteses de Poisson se transformem em comutadores e que as variáveis no espaço de fase se transformem em operadores agindo sobre um funcional de onda  $\Psi[h_{ij}, t]$ . Este, por sua vez, deve obedecer uma equação do tipo Schrödinger, a saber

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_{GR} \Psi. \quad (4.76)$$

Entretanto, enfrentamos aqui uma questão delicada pois os vínculos (4.73) e (4.74) não podem se tornar equações envolvendo operadores. Se isto fosse feito, todos os comutadores com estas quantidades se anulariam. Assim, seguindo Dirac, o que devemos pedir são as seguintes condições sobre o funcional de onda:

$$\hat{H}\Psi(h_{ij}, t) = 0, \quad (4.77)$$

$$\hat{H}^i\Psi(h_{ij}, t) = 0. \quad (4.78)$$

Vemos, portanto, que a equação (4.76) implica que  $\Psi$  não depende do tempo. A falta de um tempo explícito na equação de movimento proveniente do vínculo da hamiltoniana,  $\hat{H}\Psi = 0$  nos impede de descrever a dinâmica do sistema [92].

Uma tentativa de contornar este problema seria identificar o tempo com  $\sqrt{\hbar}$ , mas neste caso problemas relacionados a probabilidades negativas aparecem. Isto porque a equação de WDW se apresenta como uma equação do tipo Klein-Gordon com termo de massa que também varia com este “tempo”. É preciso colocar esta equação na forma de uma equação tipo Schrödinger (e portanto encontrar alguma variável que possa caracterizar a passagem do tempo) para que seja possível definir uma probabilidade usual a partir do funcional de onda  $\Psi$ . Uma outra maneira de contornar o problema é assumir simetrias para o espaço-tempo de início e tratar modelos simplificados com graus de liberdade restritos, como o de mini-superespaço. Neste modelo, quantizamos apenas os graus de liberdade que restam de uma geometria homogênea e isotrópica. A partir daí, podemos estudar perturbações quânticas sobre este fundo quantizado [93].

A prescrição acima pode ser implementada introduzindo o conceito de trajetórias Bohmianas, tornando a descrição quântica do Universo consistente (conforme apontamos no cap. 1). Em [94], modelos são construídos utilizando fluidos de radiação e poeira, gerando em ambos os casos trajetórias para o fator de escala nas quais a singularidade inicial é substituída por um ricochete, que liga uma fase de contração a uma fase posterior de expansão, e que acontece devido ao comportamento quântico da geometria do espaço-tempo. Na próxima seção estudaremos perturbações sobre um fundo quantizado segundo esta prescrição, com conteúdo material dado por um fluido perfeito. Depois veremos que as próprias perturbações neste modelo poderão ser descritas através das trajetórias Bohmianas.

### 4.2.2 Perturbações no Modelo com Ricochete Quântico

Seja a ação usual da Relatividade Geral com um fluido perfeito como conteúdo material dada por

$$S = -\frac{1}{16l_{Pl}^2} \int \sqrt{-g} R d^4x - \int \sqrt{-g} \rho d^4x, \quad (4.79)$$

onde  $l_{Pl}^2 = 8\pi G/3$  é o comprimento de Planck ( $\hbar = c = 1$ ),  $\rho$  é a densidade de energia do fluido cuja pressão é dada por  $p = \omega\rho$ , com  $\omega$  constante.

Assim como no caso inflacionário, seja a métrica do espaço-tempo dada por pequenas perturbações (escalares, por simplicidade) em torno de uma métrica homogênea e isotrópica,  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$ , tal que para o fundo temos

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = N^2(t) dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.80)$$

onde consideramos seções espaciais planas. Podemos decompor  $\delta g_{\mu\nu}$  como<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= 2N^2\phi, \\ \delta g_{0i} &= -NaB_{,i}, \\ \delta g_{ij} &= 2a^2(\psi\delta_{ij} - E_{,ij}). \end{aligned} \quad (4.81)$$

---

<sup>8</sup>Introduzimos a função lapso  $N(t)$  que é uma restrição da função  $N(x^i, t)$  apresentada na seção anterior e que representa uma liberdade na escolha do tempo. Se  $N(t) = 1$ , por exemplo, fixamos a coordenada temporal como o tempo cósmico.

A partir das expressões acima é possível calcular a Hamiltoniana perturbada que, depois de transformações canônicas e de Legendre, e também de redefinições da função lapso, pode ser reescrita como [95]

$$H = N \left[ H_0^{(0)} + H_0^{(2)} \right] + \Lambda_N P_N + \int d^3x \phi \pi_\psi + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi, \quad (4.82)$$

onde as quantidades  $H_0^{(0)}$  e  $H_0^{(2)}$  são dadas por

$$H_0^{(0)} \equiv \frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\omega}}, \quad (4.83)$$

e

$$H_0^{(2)} \equiv \frac{1}{2a^3} \int d^3x \pi^2 + \frac{a\omega}{2} \int d^3x v^i v_{,i}. \quad (4.84)$$

A quantidade  $P_T$  em  $H_0^{(0)}$  é uma constante cinemática definida como  $P_T \equiv \rho a^{3(\omega+1)} V$ , que foi introduzida como o momentum conjugado a uma variável  $T$  que é cíclica e fará o papel do tempo quando o sistema for quantizado.

A variável  $v$  está relacionada ao potencial de Bardeen de maneira similar ao caso inflacionário, a saber

$$D^2 \Phi = - \frac{3l_{Pl}^2 \sqrt{(\omega+1)\rho_0}}{2\sqrt{\omega}} a \left( \frac{v}{a} \right)', \quad (4.85)$$

onde  $D^2$  é o operador Laplaciano espacial (tridimensional). Vemos que a variável  $v$  corresponde ao campo  $y$  da seção anterior.

É importante ressaltar que as equações clássicas de fundo não foram utilizadas na simplificação acima, o que é essencial para um processo consistente de quantização do fundo.

Procederemos agora com a quantização. As quantidades  $N$ ,  $\phi$ ,  $\Lambda_N$  e  $\Lambda_\phi$  são multiplicadores de Lagrange dos vínculos

$$H_0^{(0)} + H_0^{(2)} \approx 0, \quad \pi_\psi \approx 0, \quad P_N \approx 0, \quad \pi_\phi \approx 0,$$

respectivamente. Os vínculos de primeira classe agindo sobre o funcional de onda  $\Psi[N, a, \phi(x^i), \psi(x^i), v(x^i), T]$  devem resultar em

$$\frac{\partial}{\partial N} \Psi = \frac{\delta}{\delta \phi} \Psi = \frac{\delta}{\delta \psi} \Psi = H \Psi = 0. \quad (4.86)$$

As três primeiras equações implicam que o funcional de onda não depende de  $N$ ,  $\phi$  e  $\psi$ , afinal estes são multiplicadores de Lagrange dos vínculos. A última expressão é a equação de WDW.

Como  $P_T$  aparece linearmente na Hamiltoniana, escolhemos o calibre  $N = a^{3\omega}$  e interpretamos  $T$  como um parâmetro temporal. Assim, a equação de WDW assume a forma<sup>9</sup>

$$i \frac{\partial}{\partial T} \Psi = \frac{1}{4} \left\{ a^{(3\omega-1)/2} \frac{\partial}{\partial a} \left[ a^{(3\omega-1)/2} \frac{\partial}{\partial a} \right] \right\} + \frac{a^{3\omega-1}}{2} \int d^3 \delta \frac{\delta^2}{\delta v^2} \Psi + \frac{a^{3\omega+1}\omega}{2} \int d^3 x v^i v_{,i} \Psi. \quad (4.87)$$

Escolhendo o *ansatz*

$$\Psi[a, v, T] = \Psi_{(0)}[a, T] \Psi_{(2)}[a, v, T], \quad (4.88)$$

obtemos as correspondentes equações de WDW,

$$i \frac{\partial \Psi_{(0)}(a, T)}{\partial T} = \frac{a^{(3\omega-1)/2}}{4} \frac{\partial}{\partial a} \left[ a^{(3\omega-1)/2} \frac{\partial}{\partial a} \right] \Psi_{(0)}(a, T), \quad (4.89)$$

e

$$i \frac{\partial \Psi_{(2)}(a, v, T)}{\partial T} = - \frac{a^{3\omega-1}}{2} \int d^3 x \frac{\delta^2}{\delta v^2} \Psi_{(2)}(a, v, T) + \omega \frac{a^{(3\omega+1)}}{2} \int d^3 x v^i v_{,i} \Psi_{(2)}(a, v, T). \quad (4.90)$$

Estamos interessados aqui principalmente nas perturbações, o que corresponde ao funcional de onda  $\Psi_{(2)}(a, v, T)$ . O fator de escala  $a(T)$  no argumento deste funcional pode ser tratado como uma função prescrita do tempo, a trajetória Bohmiana, obtida da equação em ordem zero para  $\Psi_{(0)}(a, T)$ . Para encontrar esta solução, notemos que a densidade de probabilidade  $\rho(a, T)$  tem uma medida não trivial devido à escolha da ordenação para a equação de WDW, e vem dada por  $\rho(a, T) = a^{1-3\omega} |\Psi_{(0)}(a, T)|^2$ . A equação da continuidade para esta distribuição é então dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{a^{3\omega-1}}{2} \frac{\partial S}{\partial a} \rho \right] = 0, \quad (4.91)$$

<sup>9</sup>Uma questão importante com relação a equação de WDW é a ordenação utilizada. Aqui a ordenação em  $a$  foi escolhida de tal maneira a resultar numa equação de Schrödinger covariante sob redefinições do campo. Outras escolhas são possíveis, embora em alguns casos anomalias possam aparecer devido a uma má escolha desta ordenação.

o que implica a equação guia

$$\dot{a} = -\frac{a^{3\omega-1}}{2} \frac{\partial S}{\partial a}. \quad (4.92)$$

A partir da solução da equação (4.89), obtemos a fase de  $\Psi_{(0)}(a, T)$ , substituímos na equação acima e encontramos a trajetória Bohmiana para o fator de escala [95], a saber

$$a(T) = a_b \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3(\omega-1)}}, \quad (4.93)$$

onde  $T_b$  é uma constante arbitrária relacionada à largura da função Gaussiana inicial, e  $a_b$  é uma constante de integração. Esta é uma solução não-singular e tende para a solução clássica nos limites  $T \rightarrow \pm\infty$ . Considerando que esta é a quantidade que entra na equação (4.90) e utilizando o tempo conforme segundo a equação

$$NdT = ad\eta \Rightarrow d\eta = [a(T)]^{3\omega-1} dT, \quad (4.94)$$

obtemos

$$i \frac{\partial \Psi_{(2)}}{\partial \eta} = \int d^3x \left( -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta v^2} + \frac{\omega}{2} v_{,i} v^{,i} - \frac{a''}{2a} v^2 \right) \Psi_{(2)}. \quad (4.95)$$

A equação de evolução na representação de Heisenberg correspondente à equação de Schrödinger acima, em termos dos modos normais  $v_k$ , fica dada por

$$v_k'' + \left( \omega k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (4.96)$$

Esta equação tem a mesma forma da equação de evolução das perturbações escalares obtidas no modelo inflacionário. O ponto fundamental neste caso é que  $a(\eta)$  não é mais uma solução clássica das equações do fundo, mas sim trajetórias Bohmianas do fundo quantizado.

Foi mostrado em [96] que este modelo é capaz de gerar perturbações com espectro invariante de escala se o fluido dominante durante a entrada das flutuações na região do potencial  $a''/a$  na fase de contração for do tipo poeira ( $\omega \approx 0$ ), independentemente do fluido que domine durante o próprio ricochete.

### 4.2.3 Evolução Bohmiana das Perturbações

Na seção anterior aplicamos a teoria de de Broglie-Bohm apenas para o fundo, o qual teve seu único grau de liberdade (o fator de escala) quantizado, segundo o

procedimento de quantização de Wheeler-DeWitt. Nesta seção aplicaremos a teoria de dBB também às perturbações, seguindo a linha do procedimento adotado para o caso inflacionário.

Como vimos anteriormente, o estado de vácuo (4.24) foi construído baseado no fato de que a Hamiltoniana do sistema é do tipo oscilador harmônico com frequência dependente do tempo e que para pequenos comprimentos de onda a curvatura do espaço-tempo é desprezível, o que também acontece com a Hamiltoniana das perturbações no modelo com ricochete, de acordo com a equação (4.95). Portanto, o estado inicial no presente modelo também é aquele dado pela equação (4.24). A equação guia não será modificada e obteremos a mesma solução para os modos  $v_k$ , dada por

$$v'_k = \frac{\delta S}{\delta v_k^*} + \frac{a'}{a} v_k \Rightarrow v_k \propto |f_k(\eta)|, \quad (4.97)$$

em termos das funções  $f_k(\eta)$ , que obedecem a equação de movimento (4.96).

A expressão para  $f_k(\eta)$  pode então ser expandida em termos de  $k^2$  de acordo com a solução formal da equação (4.96) obtida em [66], a saber

$$\begin{aligned} \frac{f_k}{a} = & A_1(k) \left[ 1 - k^2 \int_0^\eta \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} \int_0^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} \bar{c}_s^2 \bar{a}^2 + \dots \right] + \\ & + A_2(k) \left[ \int_{\eta^*}^\eta \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} - k^2 \int_0^\eta \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} \int_0^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} \bar{c}_s^2 \bar{a}^2 \int_{\eta^*}^{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde  $c_s = \sqrt{\omega}$  e  $\eta^*$  é uma escolha conveniente da constante de integração, relacionada ao tempo conforme onde as condições iniciais são colocadas, o que neste caso corresponde a  $\eta^* \rightarrow -\infty$ . As condições iniciais de vácuo podem ser consistentemente colocadas em  $\eta^* \rightarrow -\infty$ , pois aí os modos estão em uma região onde o potencial  $a''/a$  é desprezível. O ricochete acontece em  $\eta = 0$ , quando o potencial é máximo.

Assim que os modos entram na região onde o potencial é significativo, isto é,  $c_s^2 k^2 \leq a''/a$ , as oscilações cessam e os primeiros termos da solução (4.98) podem ser utilizados como boa aproximação. O termo

$$A_2(k) \int_{-\infty}^\eta \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2}$$

crece na fase de contração, à medida que as perturbações se aproximam do ricochete. Na fase de expansão, este termo pode ser reescrito como

$$A_2(k) \int_{-\infty}^\eta \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} = A_2(k) \left( B - \int_{\bar{\eta}}^\infty \frac{d\bar{\eta}}{\bar{a}^2} \right), \quad (4.99)$$

onde

$$B \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\eta a^{-2}$$

é uma constante. Assim, a solução para as funções  $f_k$  próxima ao ricochete fica dada por

$$f_k = [A_1(k) + A_2(k)B]a(\eta) + A_2(k)a(\eta) \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})}, \quad (4.100)$$

onde o segundo termo do lado direito corresponde ao modo decrescente na fase de expansão.

Em [97] a quantidade  $B$  foi calculada explicitamente para o modelo de ricochete quântico e mostrou-se que ela é proporcional a uma potência da função de desvio para o vermelho (*redshift*) correspondente ao ricochete,  $x_b \equiv a_0/a_b$ , a saber

$$B \propto x_b^{3(1-\omega)/2}.$$

A potência é positiva para fluidos convencionais (isto é, que obedecem todas as condições de energia), para os quais  $-1/3 < \omega < 1/3$ <sup>10</sup>.

A função de deslocamento para o vermelho, por sua vez, deve ser grande se o ricochete acontece muito antes da nucleossíntese, tal que tenhamos  $x_b \gg 10^{10}$ . Isto implica que  $B$  é um número muito grande, o que torna a quantidade  $A_1$  na solução (4.100) irrelevante. Logo, para grandes comprimentos de onda e próximo ao ricochete, obtemos

$$f_k(\eta) \approx A_2(k) \left[ B a(\eta) + a(\eta) \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})} \right], \quad (4.101)$$

de tal maneira que, em relação à evolução temporal, temos

$$|f_k| \sim f_k, \quad (4.102)$$

assim como no caso de grandes comprimentos de onda na teoria inflacionária.

Vemos portanto que a presença de um modo crescente (na fase de contração, na região onde o potencial é significativo) garante que as perturbações atinjam o comportamento clássico. O ricochete não atrapalha a evolução nem a transição quântico-clássica das perturbações pois estas não sentem a escala nem os efeitos quânticos

---

<sup>10</sup>De fato, espera-se que  $\omega$  esteja muito próximo de zero para que o espectro resultante seja aproximadamente invariante de escala, como dito na seção anterior. Veja a Ref. [96].

da geometria que levam ao ricochete. Este padrão de evolução das perturbações também é válido para modelos mais gerais, contanto que a escala do ricochete seja pequena e que a RG possa ser usada para estimar o comportamento das perturbações longe deste evento, de acordo com a análise feita em [97].

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

*“Todo trabalho científico quer ser superado e ser superado não é apenas seu destino, mas seu objetivo.”*

Paolo Rossi [98]

Neste trabalho nos propusemos a analisar a transição quântico-clássica das perturbações primordiais responsáveis pela formação de estruturas; para este fim utilizamos a teoria quântica de de Broglie-Bohm. Nossa principal motivação foi fornecer uma descrição consistente para esta questão fundamental que ainda não havia sido elucidada, e para a qual o ponto de vista da teoria ortodoxa (Copenhague) não pode oferecer compreensão mais profunda. Muitos autores negligenciaram este problema que, de um ponto de vista fundamental, está ligado ao poder de predição do modelo inflacionário. Apesar de visões mais completas terem sido abordadas, vimos que as mais importantes ainda deixam lacunas em suas descrições.

Estas lacunas estão diretamente ligadas à afirmação de que o processo de descoerência é suficiente para resolver o problema da medida e fornecer um limite clássico para o sistema quântico, que como vimos é uma afirmação equivocada. No contexto de uma teoria cosmológica o problema é amplificado e muito cuidado deve ser tomado para que não entremos em argumentos cíclicos que expliquem nossa origem a partir de nossas próprias medidas.

A teoria Bohmiana foi muito criticada ao longo de sua história e, para muitos, a possível falta de evidências observacionais que a diferencie da visão usual a relega

a um nível puramente especulativo. Contudo, como já citado neste trabalho, a condição de equilíbrio quântico, que faz com que suas previsões estatísticas coincidam com a da visão usual, não precisa ser imposta e talvez seja possível encontrar situações em que esta condição tenha sido violada. O universo primordial, por exemplo, pode ter sido o cenário ideal para violações do equilíbrio quântico. No entanto, devido à rápida relaxação destes processos, ainda é necessário um mecanismo que congele estes efeitos.

O ponto fundamental, no entanto, é que a teoria bohmiana é uma teoria que trata de objetos com realidade física e na qual o problema da medida não se coloca, como visto no segundo capítulo deste trabalho e pode, portanto, ser aplicada à cosmologia.

A teoria Bohmiana aplicada às perturbações no contexto inflacionário mostrou que a transição do regime quântico para o clássico está bem definido tanto matematicamente quanto conceitualmente. A evolução das perturbações a partir do estado de vácuo, dada pela equação guia, passa naturalmente de um regime puramente quântico em que a força quântica e a clássica se equilibram, para um regime em que a equação de movimento apresenta o mesmo comportamento da contrapartida clássica da evolução. O resultado se mostrou robusto em relação ao uso de outros estados iniciais, a saber, um estado coerente de dois modos e um estado inicialmente com  $N$  partículas. Na Ref. [99] foi demonstrado um teorema que garante que a evolução Bohmiana fornece corretamente o limite clássico para uma superposição geral de estados de  $N$  partículas tomado como estado inicial.

Com relação às simetrias iniciais do estado de vácuo (homogeneidade e isotropia), vimos que estas são quebradas pela presença da trajetória Bohmiana no espaço de configuração: mesmo que a distribuição inicial dos campos no espaço de configuração não dependa dos pontos do espaço tridimensional, a equação guia não preserva a homogeneidade e a isotropia. O sistema será guiado pela função de onda (que permanecerá invariante) para um determinado ramo, que representa uma determinada configuração de anisotropias na RCFM. Aqui, o postulado do colapso como justificativa para a quebra da invariância do estado inicial não se coloca e a formação de estruturas é possível como resultado da trajetória do sistema no espaço de configuração.

Vimos também que a descrição Bohmiana é consistente em um modelo com ricochete proveniente de uma cosmologia quantizada através da abordagem de Wheeler-DeWitt. Neste contexto, as condições iniciais de vácuo são dadas no passado distante do Universo, quando ele era grande e rarefeito. A evolução destas perturbações é tal que elas começam a se comportar classicamente ao entrar em uma região na qual o potencial responsável pelo ricochete começa a ser importante. Apesar dos efeitos quânticos da geometria, que fazem com que a contração do espaço-tempo atinja um volume espacial mínimo dando lugar a uma fase de expansão, a evolução das perturbações não é afetada. Isto se deve à escala em que o ricochete acontece, que é muito pequena quando comparada ao comprimento de onda das perturbações de interesse cosmológico, que nesta época são grandes comparadas à escala do ricochete.

Como perspectiva, seria interessante tentar encontrar efeitos observacionais de um possível desvio do equilíbrio quântico, o que levaria a uma indicação de que a teoria de de Broglie-Bohm seria de fato a mais adequada para a descrição da teoria quântica. Seguindo esta linha, a Ref. [38] apresenta sugestões de possíveis efeitos na RCFM de um desvio do equilíbrio na fase primordial, que podem ter sido congelados antes que a inflação fosse capaz de apagá-los. Em particular, um desvio do equilíbrio quântico forneceria uma distribuição não-gaussiana para as flutuações primordiais, o que implicaria em uma distribuição não uniforme para as fases das perturbações clássicas observadas na RCFM, que por sua vez poderia originar anomalias nas fases dos coeficientes  $a_{lm}$  da expansão das anisotropias de temperatura em harmônicos esféricos, a saber

$$\frac{\delta T}{T_0} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

onde  $T_0 \simeq 2.73 K$  é a temperatura medida da radiação de fundo [100]. Claro está que muitos efeitos astrofísicos podem gerar não-gaussianidades no mapa da RCFM. Ainda é difícil reconhecer se um efeito deste tipo, caso medido, seria resultado de um processo inadequado de limpeza dos dados ou realmente um efeito de uma física mais fundamental. Neste último caso uma análise quantitativa detalhada do desvio do equilíbrio pode fornecer as condições necessárias para justificar um tal efeito.

Em suma, reforçamos que mesmo sem evidências claras de desvios do equilíbrio em sistemas quânticos até o presente momento, a teoria de de Broglie-Bohm tem-se mostrado uma teoria mais completa do que a visão ortodoxa em termos de descri-

ção física de sistemas quânticos, principalmente no que diz respeito à aplicação em cosmologia. Este fato em si é suficiente para considerá-la uma teoria viável para a descrição da teoria quântica.

# Apêndice A

## Descoerência

Na tentativa de descrever quanticamente o processo de medida e descartar as idéias de Bohr de que analisar os passos intermediários de uma medida seria impossível, von Neumann [17] criou o processo conhecido hoje como *cadeia de von Neumann* que, apesar de não conseguir explicar a medida sem fazer uso do postulado do colapso, preparou o terreno para avanços posteriores importantes, onde destacamos o processo de descoerência [101]. Neste processo, a interação do sistema com seu ambiente produz dinamicamente uma supressão dos efeitos de interferência quântica, o que já foi verificado experimentalmente, como pode-se constatar por exemplo na Ref. [102]. Vamos, na próxima seção, dar uma breve descrição da cadeia idealizada por von Neumann e, então, na segunda seção, descreveremos com algum detalhe o processo de descoerência, de tal maneira a deixar clara a crítica exposta na seção (3.5.2).

### A.1 Cadeia de von Neumann

Vamos considerar medidas de primeira espécie, nas quais a interação entre o aparato de medida (A) e o sistema considerado (S) acontece em um intervalo de tempo finito e, neste intervalo, é mais importante que qualquer outra. Seja  $\hat{S}$  o observável que será medido tal que  $\hat{S}|s_i\rangle = s_i|s_i\rangle$ . Seja  $\hat{X}$  o operador relacionado a posição do centro de massa do ponteiro tal que  $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ . A interação provocada pela medida irá introduzir uma correlação entre os estados referentes ao aparato

a ao sistema,  $|\phi_A\rangle$  e  $|\phi_S\rangle$ , respectivamente. Fora do intervalo de medida, o estado total pode ser descrito como um produto tensorial entre os estados pertencentes aos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_S$ , a saber,  $|\Psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_S\rangle$ . Se inicialmente o sistema estiver em um dos autoestados de  $\hat{S}$ , a medida não o modificará mas deverá alterar o estado do aparato de tal maneira a fazer com que ele registre um valor proporcional ao autovalor do estado do sistema. Esta interação pode ser implementada por um operador evolução  $U_I$  que satisfaça

$$U_I|s_i\rangle \otimes |x\rangle = |s_i\rangle \otimes |x + \lambda s_i\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento. Esta interação pode ser obtida através da Hamiltoniana  $\hat{H}_I = -g(t)\hat{S} \otimes \hat{P}$ , onde  $\hat{P}$  é o momentum canonicamente conjugado a  $\hat{X}$  e  $g(t)$  é tal que  $\lambda = \int_{\Delta t} g(t)dt$ , que é diferente de zero somente no intervalo de interação  $\Delta t$  [27].

Tomemos agora o estado inicial dado por

$$|\Psi_0\rangle = |\phi_S\rangle \otimes |\phi_A\rangle, \quad (\text{A.2})$$

onde estamos considerando

$$|\phi_S\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle, \quad (\text{A.3})$$

e

$$|\phi_A\rangle = \int dx f(x) |x\rangle. \quad (\text{A.4})$$

O estado final é então dado pela superposição

$$|\Psi_F\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |\phi_A(s_i)\rangle, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$|\phi_A(s_i)\rangle = \int dx f(x) |x + \lambda s_i\rangle = \int dx f(x - \lambda s_i) |x\rangle.$$

Supondo que  $f(x)$  seja uma gaussiana centrada em  $x = 0$  com incerteza  $\Delta x$ , o que é equivalente a dizer que o ponteiro do aparato está na posição  $x = 0$  com erro  $\Delta x$ , e assumindo que a diferença entre duas posições do ponteiro seja muito maior que a incerteza, então temos que

$$\langle \phi_A(s_i) | \phi_A(s_j) \rangle = \delta_{ij}. \quad (\text{A.6})$$

Com esta condição vemos que o estado final (A.5) do sistema total ( $A + S$ ) é uma superposição de estados ortogonais, o que garante que se o ponteiro está centrado em  $x = \lambda s_i$ , certamente o sistema quântico  $S$  estará no autoestado  $|s_i\rangle$ . Esta é a correlação entre  $A$  e  $S$  originada da interação provida pela medida.

Contudo, para observar o ponteiro, precisamos de outro aparelho (note que o processo não pode incluir ingredientes clássicos como um observador, já que isso nos traria de volta às idéias de Bohr). Consideremos então um aparato  $A_2$  que possa medir tanto  $\hat{S}$  quanto  $\hat{X}$ . Com uma interação análoga a (A.1), temos que

$$|s_i\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes |x_2, y_1\rangle \rightarrow |s_i\rangle \otimes |x_1 + \lambda_1 s_i\rangle \otimes |x_2 + \lambda_1 s_i, y_1 + \lambda_2 x_1\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Considerando o estado inicial

$$|\Psi_0\rangle = |\phi_S\rangle \otimes |\phi_{A_1}\rangle \otimes |\phi_{A_2}\rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$|\phi_S\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle,$$

$$|\phi_{A_1}\rangle = \int dx_1 f_1(x_1) |x_1\rangle,$$

e

$$|\phi_{A_2}\rangle = \int dx_2 dy_1 f_2(x_2, y_1) |x_2, y_1\rangle,$$

obtemos o estado final

$$|\Psi_F\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |\phi_{A_1}(s_i)\rangle \otimes |\phi_{A_2}(s_i)\rangle, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$|\phi_{A_1}(s_i)\rangle = \int dx_1 f_1(x_1 - \lambda_1 s_i) |x_1\rangle$$

e

$$|\phi_{A_2}(s_i)\rangle = \int dx_2 dy_1 f_2(x_2 - \lambda_1 s_i, y_1 - \lambda_2 \lambda_1 s_i) |x_2, y_1\rangle.$$

Vemos novamente uma correlação perfeita: o sistema no autoestado  $|s_i\rangle$ ,  $A_1$  apontando o autovalor correspondente  $s_i$  e  $A_2$  medindo o autovalor  $s_1$  e a posição do ponteiro de  $A_1$  centrado neste valor. No entanto, (A.9) continua sendo uma superposição que descreve as potencialidades do sistema sem indicar qual delas é de

fato realizada. Um outro aparato apenas irá prolongar a cadeia, sem efetivamente resolver a questão.

Um outro problema associado a esta análise é que não é possível dizer que observável estamos medindo. Supondo que  $|\phi_A(s_i)\rangle$  forme uma base no espaço de Hilbert do aparato, poderíamos em princípio escrever a expressão (A.5) em termos de outra base, a saber,  $|\phi_A(r_j)\rangle = \sum_i |\phi_A(s_i)\rangle \langle \phi_A(s_i) | \phi_A(r_j)\rangle$ . Assim,

$$|\Psi_F\rangle = \sum_j d_j |r_j\rangle \otimes |\phi_A(r_j)\rangle, \quad (\text{A.10})$$

onde  $|r_j\rangle$  são novos estados referentes ao sistema tal que

$$d_j |r_j\rangle = \sum_i c_i \langle \phi_A(r_i) | \phi_A(r_j)\rangle |s_j\rangle.$$

Pode-se mostrar que os estados  $|r_j\rangle$  são ortonormais e podem portanto estar associados a um outro observável,  $\hat{R} \equiv \sum_j f_j |r_j\rangle \langle r_j|$ . Desta forma, uma outra correlação surge descrita pelo mesmo estado final  $|\Psi_F\rangle$ , correlacionando agora estados de  $A$  com estados de  $S$  referentes a outro observável. O que está sendo medido afinal,  $\hat{S}$  ou  $\hat{R}$ ? Este é o problema conhecido como ambiguidade da base do ponteiro.

## A.2 Descoerência

Segundo a Ref. [101], a descoerência é um processo dinâmico de *deslocalização* de superposições quânticas, que estão definidas em um espaço de Hilbert abstrato com uma base local, que pode ser por exemplo formada pelas posições das partículas ou campos espaciais. Esta deslocalização surge através do emaranhamento entre o sistema considerado e outros sistemas, que podem representar, por exemplo, o ambiente externo ao sistema [103].

Vamos definir os graus de liberdade referentes ao ambiente através da variável  $r$ , e assumiremos  $\langle x', r' | x, r \rangle = \delta(x - x') \delta_{r, r'}$ . A expressão (A.1) é então generalizada como abaixo,

$$|s_i\rangle \otimes |\phi_A, r\rangle \rightarrow \sum_{r'} w_{r, r'}^i |\phi_A(s_i), r'\rangle, \quad (\text{A.11})$$

onde o sistema observado foi incluído no ambiente, e onde

$$|\phi_A, r\rangle = \int dx f(x) |x\rangle \otimes |r\rangle, \quad (\text{A.12})$$

$$|\phi_A(s_i), r\rangle = \int dx f(x - \lambda s_i) |x\rangle \otimes |r\rangle. \quad (\text{A.13})$$

A condição de normalização impõe que  $\sum_{r'} |w_{r,r'}^i|^2 = 1$ .

Para uma superposição de estados inicial, teremos

$$|\Psi_I\rangle = \left( \sum_i c_i |s_i\rangle \right) \otimes |\phi_A, r\rangle \rightarrow |\Psi_F\rangle = \sum_{i,r'} w_{r,r'}^i c_i |\phi_A(s_i), r'\rangle, \quad (\text{A.14})$$

tal que a probabilidade de se obter o autovalor  $s_i$  é dada por

$$p_i = \sum_{r'} |\langle \phi_A(s_i), r' | \Psi_F \rangle|^2 = |c_i|^2. \quad (\text{A.15})$$

Levando em conta o processo de descoerência, a ambiguidade da base do ponteiro apresentada na seção anterior pode ser resolvida: a base preferencial (de autoestados do observável medido) é a única que possui 100% de correlação com os estados do ponteiro (veja um exemplo específico no Cap. 3 da Ref. [27]).

A descoerência pode ser estudada também do ponto de vista do formalismo da matriz densidade. Como estamos interessados somente nos graus de liberdade referentes ao ponteiro do aparato de medida, podemos trabalhar com a matriz densidade reduzida, resultado de um traço parcial da matriz densidade total sobre os graus de liberdade que estamos descartando. Assim, para o estado final, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{red} &= \sum_r \langle r | \hat{\rho} | r \rangle = \sum_r \langle r | \Psi_F \rangle \langle \Psi_F | r \rangle \\ &= \sum_i |c_i|^2 |\phi_A(s_i)\rangle \langle \phi_A(s_i)| + \sum_{i,j,r',i \neq j} c_i c_j^* w_{r,r'}^i w_{r,r'}^{*j} |\phi_A(s_i)\rangle \langle \phi_A(s_j)|. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

O segundo termo da expressão acima é um termo típico de interferência quântica. Para um observável qualquer  $\hat{C}$  que não comute com  $\hat{X}$ , seu valor médio é dado por

$$\langle \hat{C} \rangle = \text{Tr}(\hat{C} \hat{\rho}_{red}) = \sum_i |c_i|^2 \langle \phi_A(s_i) | \hat{C} | \phi_A(s_i) \rangle + \text{termos fora da diagonal}. \quad (\text{A.17})$$

Se os termos fora da diagonal fossem não-nulos, o aparato apresentaria interferência quântica, o que não é em geral observado. No entanto, estes termos vão a zero

rapidamente na prática devido a interação com o ambiente. Deste modo, a matriz densidade reduzida do sistema será em boa aproximação diagonal, imitando o comportamento de uma mistura estatística [104].

Vimos portanto que a descoerência resolve o problema da ambiguidade do ponteiro em uma medida, além de explicar a ausência de interferência quântica a nível macroscópico. No entanto, quanto a base do ponteiro, o problema é resolvido dado que o aparato é construído de forma a prover uma determinada interação, visando medir um certo observável. No contexto cosmológico esta questão permanece delicada, precisamos de um mecanismo físico que justifique que a base adequada é aquela formada pela amplitude das perturbações.

Além disso, a questão da fronteira quântico-clássica e conseqüentemente o problema da medida permanecem pois a abordagem descrita acima se baseia na matriz densidade reduzida, e não na total. Embora a matriz densidade reduzida seja diagonal, onde cada elemento representa o ponteiro do aparato em uma certa posição (autovalor), estas diversas potencialidades não se tornam resultados clássicos. Ainda não há uma maneira de pinçar um destes autovalores entre os outros e torná-lo um resultado concreto. Nesta afirmação se baseia a crítica encontrada no Cap. 3.

# Referências Bibliográficas

- [1] Livre tradução de L. Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*, Collector's Library, London (2004).
- [2] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, New Jersey (1993).
- [3] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2004).
- [4] A. A. Penzias e R. W. Wilson, *A Measurement of Excess antenna Temperature at 4080 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [5] A. K. T. Assis e M. C. D. Neves, *History of the 2,7K Temperature Prior to Penzias and Wilson*, *Apeiron* **2**, 79 (1995).
- [6] A. Friedman, *On the Curvature of Space*, *Gen. Rel. and Grav.* **31**, 1991 (1999) e *On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space*, *Gen. Rel. and Grav.* **31**, 2001 (1999). Ambos são republicações dos originais de 1922 e 1924, respectivamente.
- [7] G. Lemaître, *Un Univers Homogène de Masse Constante et de Rayon Croissant, Rendant Compte de la Vitesse Radiale des Nébuleuses Extra-Galactiques*, *Ann. Soc. Sci. Brux. A* **47**, 49 (1927). A tradução para o inglês está publicada em *MNRAS* **91**, 483 (1931).
- [8] Y. B. Zel'dovich, *The "Hot" Model of the Universe*, *Sov. Phys. Usp.* **9**, 602 (1967).

- [9] A. A. Starobinsky, *Spectrum of Relic Gravitational Radiation and the Early State of the Universe*, JETP Lett. **30**, 682 (1979).
- [10] A. Guth, *The Inflationary Universe: a possible solution of the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [11] K. Sato, *First-Order Phase Transition of a Vacuum and the Expansion of the Universe*, MNRAS **195**, 467 (1981).
- [12] A. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B **108** (1982).
- [13] A. Albrecht e P. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [14] D. Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publications, Mineola, NY (1989).
- [15] G. Bacciagaluppi e A. Valentini, *Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solway Conference*, Cambridge University Press (2009) e arXiv:quant-ph/0609184v2.
- [16] N. Bohr, *The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory*, Nature **121**, 580 (1928).
- [17] J. von Neumann, *Les Fondements Mathématiques de la Mécanique Quantique*, Ed. Jacques Gabay, Paris (1988).
- [18] L. de Broglie, *La Mécanique Ondulatoire et la Structure Atomique de la Matière et du Rayonnement*, J. Physique (serie 6) **VIII** (5), 225 (1927). Veja também, do mesmo autor, *The Reinterpretation of Wave Mechanics*, Foundations of Physics **1**, 5 (1970). O primeiro artigo é a primeira publicação referente à teoria da onda piloto, que de Broglie chamou de “teoria da solução dupla”. O segundo artigo é um sumário dos conceitos desta teoria e de sua aplicação a uma “termodinâmica de variáveis escondidas” desenvolvida pelo autor na década de 60.

- [19] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I e II*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [20] M. Novello e S. E. P. Bergliaffa, *Bouncing Cosmologies*, Phys. Rep. **463**, 127 (2008).
- [21] M. Novello e J. M. Salim, *Nonlinear Photons in the Universe*, Phys. Rev. D **20**, 377 (1979). V. N. Melnikov e S. V. Orlov, *Nonsingular Cosmology as a Quantum Vacuum Effect*, Phys. Lett. **70A**, 263 (1979).
- [22] V. Mukhanov e G. Chibisov, *Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe*, JETP Lett. **33**, 532 (1981).
- [23] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [24] R. P. Feynman, F. B. Morinigo, W. G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation*, ed. Brian Hatfield, Addison-Wesley Publishing Company (1959).
- [25] Veja, por exemplo, C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York (1977).
- [26] Esta questão e a tentativa de resolvê-la através de uma teoria de variáveis escondidas (que é o caso da teoria de de Broglie-Bohm) estão colocadas em *Introduction to the Hidden-Variable Question* de J. S. Bell em *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, 2ª edição, Cambridge University Press (2004).
- [27] N. Pinto Neto, *Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica*, Coleção CBPF Tópicos de Física, ed. Livraria da Física, São Paulo (2010).
- [28] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1993).
- [29] S. Goldstein, W. Struyve, *On the Uniqueness of Quantum Equilibrium in Bohmian Mechanics*, J. Stat. Phys. **128** (2007).

- [30] A. Valentini, *Signal-locality, Uncertainty, and the Subquantum H-theorem. I*, Physics Letters A **156**, 5 (1991).
- [31] A demonstraçã do teorema H pode ser encontrada, por exemplo, no cap. 4 de K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2a ediçã, John Wiley & Sons, Nova York (1987).
- [32] C. Philippidis, C. Dewdney e B. J. Hiley, *Quantum Interference and the Quantum Potential*, Il Nuovo Cimento B **52**, 15 (1979).
- [33] A. Valentini, *Beyond the Quantum*, Physics World, 32 (2009) e arXiv:quant-ph/1001.2758v1.
- [34] S. Goldstein e N. Zanghì, *Reality and the Role of the Wavefunction in Quantum Theory*, arXiv:quant-ph/1101.4575 (2011).
- [35] D. Dürr, S. Teufel, *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory*, Springer-Verlag (2009).
- [36] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox* em *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics*, 2ª ediçã, Cambridge University Press (2004).
- [37] Uma explicaçã detalhada das possíveis demonstrações do teorema de Bell pode ser encontrada no capítulo 20 de L. Ballentine, *Quantum Mechanics: a Modern Development*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998) e referências lá citadas.
- [38] A. Valentini, *Inflationary Cosmology as a Probe of Primordial Quantum Mechanics*, Phys. Rev. D **82**, 063513 (2010) e arXiv:hep-th/0805.0163v2.
- [39] J. S. Bell, *The Theory of Local Beables* em *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics*, 2ª ediçã, Cambridge University Press (2004).
- [40] D. Bohm, B. J. Hiley e P. N. Kaloyerou, *An Ontological Basis for the Quantum Theory: II- A Causal Interpretation of Quantum Fields*, Phys. Rep. **144**, 349 (1987).

- [41] W. Struyve, *The de Broglie-Bohm Pilot-Wave Interpretation of Quantum Theory*, Tese de Doutorado, Universiteit Gent (2004) e arXiv:quant-ph/0506243.
- [42] W. Struyve, H. Westman, *A New Pilot-Wave Model for Quantum Field Theory*, AIP proceedings **844** (2006) e arXiv:quant-ph/0602229v1.
- [43] Veja a referência em [26].
- [44] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Westview Press, Colorado (1992).
- [45] M. Born, *The Born-Einstein Letters*, Macmillan Press Ltd. (1971).
- [46] Anônimo parafraseando W. Shakespeare em *Macbeth*, ato 5, cena 5: “And then is heard no more: it is a tale, Told by an idiot, full of sound and fury, Signifying nothing.”
- [47] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [48] A. Linde, *Inflationary Cosmology*, Lect. Notes Phys. **738**, (2008) e arXiv:hep-th/0705.0164v2.
- [49] Para um exemplo específico e mais detalhado veja, por exemplo, as notas de D. Langlois, *Inflation, Quantum Fluctuations and Cosmological Perturbations*, arXiv: hep-th/0405053v1 (2004).
- [50] L. Kofman, *Preheating after Inflation*, Lect. Notes in Phys., **738** (2007).
- [51] A. Berera e L. Z. Fang, *Thermally Induced Density Perturbations in the Inflation Era*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1912 (1995) e arXiv:astro-ph/9501024.
- [52] E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *Investigations in Relativistic Cosmology*, *Adv. Phys.* **12**, 185 (1963).
- [53] S. Hawking, *Perturbation Theory in Expanding Universe*, Ap. J. **145**, 544 (1966).

- [54] P. Jordan, J. Ehlers, W. Kundt, *Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie*, *Akad. Wiss. Lit. (Mainz) Abhandl. Math.-Nat. Kl. 2* **21** (1960); P. Jordan, J. Ehlers, W. Kundt, *Republication of: Exact solutions of the Field Equations of the General Theory of Relativity*, *Gen. Rel. Grav.* **41**, 2191 (2009).
- [55] J. M. Salim, *Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: aplicação às perturbações dos modelos cosmológicos de Friedmann*, Tese de Doutorado, CBPF/Rio de Janeiro (1982).
- [56] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, and R. Klippert, *Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **51**, 450 (1995a).
- [57] M. Campista, Tese de Doutorado, CBPF/Rio de Janeiro (2010); M. Campista, M. Novello, J. M. Salim, *The Spectrum of Scalar Fluctuations of a Bouncing Universe*, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 3095 (2010).
- [58] J. M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [59] S. E. C. E. Jorás, *Perturbações Escalares no Universo de Friedman-Robertson-Walker*, Dissertação de mestrado, CBPF, Rio de Janeiro (1994).
- [60] S. D. P. Vitenti, *Estudo das Perturbações em Universos com Ricochete*, Tese de Doutorado, CBPF, Rio de Janeiro (2011).
- [61] [http : //ned.ipac.caltech.edu/level5/Narlikar/Narlikar3\\_1.html](http://ned.ipac.caltech.edu/level5/Narlikar/Narlikar3_1.html)
- [62] J. Martin e D. Schwarz, *The influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations*, *Phys. Rev. D* **57**, 3302 (1998) e arXiv:gr-qc/970449.
- [63] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge (1993). O cap. 5 deste livro apresenta uma boa descrição da análise estatística das perturbações.

- [64] L. P. Grishchuk e J. Martin, *Best Unbiased Estimates for Microwave Background Anisotropies*, Phys. Rev. D **56** (1997) e arXiv:gr-qc/9702018.
- [65] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [66] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys. Rep. **215** (1992).
- [67] J. Martin, *Inflationary Cosmological Perturbations of Quantum-mechanical Origin*, Lec. Notes Phys. **669** (2005) e arXiv:hep-th/0406011.
- [68] D. Larson *et al*, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, Astroph. J. Supp. Series **192:16**, 1 (2011).
- [69] E. R. Harrison, *Fluctuations at the Treshold of Cosmology*, Phys. Rev. D **1** (1970); Y. B. Zel'dovich, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **160** (1972).
- [70] Veja pp. 386-387 de D. H. Lyth e A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbations*, Cambridge University Press, Cambridge (2009). Veja também pag. 348 da Ref. [47].
- [71] A. Perez, H. Sahlmann e D. Sudarsky, *On the Quantum Origin of the Seeds of Cosmic Structure*, Class. Quant. Grav., **23**, 2317 (2006) e arXiv:gr-qc/0508100.
- [72] J. S. Bell, *Against Measurement*, em *Sixty-two years of uncertainty*, Proceedings of Erice School, ed. A. I. Miller, 17-31 (1989). Também pode ser encontrado na segunda edição de *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (veja referência [26]).
- [73] E. Schrödinger, *The Present Situation in Quantum Mechanics*, Proceedings of the American Philosophical Society **124**, 323 (1980). Esta é uma tradução do original em alemão de 1935 por J. D. Trimmer.
- [74] S. L. Adler, *Why Decoherence has not Solved the Measurement Problem: a Response to P. W. Anderson*, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **34**, 135 (2003).

Este trabalho contém várias outras referências interessantes relativas ao problema da medida e descoerência em diferentes contextos.

- [75] H. Everett, III. *The Theory of Universal Wave Function*, em *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, editado por B. DeWitt e N. Graham, Princeton University Press, Princeton (1973).
- [76] D. Polarski e A. A. Starobinsky, *Semiclassicality and Decoherence of Cosmological Perturbations*, *Class. Quantum Grav.* **13**, 377 (1996).
- [77] C. Kiefer e D. Polarski, *Why do Cosmological Perturbations Look Classical to Us?*, *Adv. Sci. Lett.* **2**, 164 (2009) e arXiv:astro-ph/0810.0087.
- [78] D. Sudarsky, *Shortcomings in the Understanding of Why Cosmological Perturbations Look Classical*, *Int. J. Mod. Phys. D* **20** (2011) e arXiv:gr-qc/0906.0315.
- [79] R. B. Griffiths, *Consistent Interpretation of Quantum Mechanics Using Quantum Trajectories*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2201 (1993).
- [80] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1994).
- [81] M. Gell-Mann e J. B. Hartle, em “Complexity, Entropy and the Physics of Information”, editado por W. H. Zurek, Addison-Wesley Publishing Co., California (1990).
- [82] A. Kent, *Consistent Sets Yield Contrary Inferences in Quantum Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2874 (1997) e arXiv:gr-qc/9604012v2. Este mesmo autor apresenta uma versão da teoria que evita as contradições encontradas no trabalho acima em *Quantum Histories and Their Implications*, *Lect. Notes Phys.* **559**, 93 (2000).
- [83] R. Penrose, *On Gravity’s Role in Quantum State Reduction*, *Gen. Rel. Grav.* **28**, 581 (1996).
- [84] Alguns esquemas que podem justificar o colapso da função de onda são analisados em: A. de Unánue e D. Sudarski, *Phenomenological Analysis of Quantum*

- collapse as Source of the Seeds fo Cosmic Structure*, Phys. Rev. D **78**, 043510 (2008) e arXiv:gr-qc/0801.4702v2.
- [85] N. Pinto-Neto, G. B. Santos e W. Struyve, *Quantum-to-classical transition of primordial cosmological perturbations in de Broglie–Bohm quantum theory*, Phys. Rev. D **85**, 083506 (2012) e arXiv:gr-qc/1110.1339. *Quantum-to-classical transition of primordial cosmological perturbations in de Broglie–Bohm quantum theory: the bouncing scenario*, em preparação.
- [86] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7th ed., Academic Press, Massachusetts (2007), pags. 918-920.
- [87] J. Lesgourgues, D. Polarski e A. A. Starobinsky, *Quantum-to-classical Transition of Cosmological Perturbations for Non-vacuum Initial States*, Nuclear Phys. B **497**, 479 (1997).
- [88] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 2 ed., Nova York (1970).
- [89] B. S. de Witt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [90] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications, New York (1964).
- [91] N. Pinto Neto, *Quantum Cosmology*, Cosmology and Gravitation II, editado por M. Novello, Editions Frontières (1996).
- [92] Uma boa discussão das motivações de se construir uma gravitação quântica (e portanto uma cosmologia quântica) e do problema relacionado ao tempo mencionado no texto, pode ser encontrada no cap. 10 do livro *Programa Mínimo de Cosmologia*, editado por M. Novello, N. Pinto Neto e S. E. P. Bergliaffa, ed. Jauá, Rio de Janeiro (2010).
- [93] J. J. Halliwell e S. W. Hawking, *Origin of Structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).

- [94] J. A. de Barros, N. Pinto-Neto e M. A. Sagiuro-Leal, *The Causal Interpretation of Dust and Radiation Fluid Non-Singular Quantum Cosmologies*, Phys. Lett. A **241**, 229 (1998).
- [95] E. J. C. Pinho e N. Pinto-Neto, *Scalar and Vector Perturbations in Quantum Cosmological Backgrounds*, Phys. Rev. D **76**, 023506 (2007) e arXiv:hep-th/0610192.
- [96] P. Peter, E. J. C. Pinho e N. Pinto-Neto, *A Non Inflationary Model with Scale Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **75**, 023516 (2008) e arXiv:hep-th/0610205.
- [97] S. D. P. Vitenti e N. Pinto-Neto, *Large Adiabatic Scalar Perturbations in a Regular Bouncing Universe*, Phys. Rev. D **85**, 023524 (2012) e arXiv:astro-ph.CO/1111.0888v3.
- [98] P. Rossi, *O passado, a memória e o esquecimento*, Ed. UNESP, São Paulo (1991)
- [99] W. Ryssens, *On the Quantum-to-Classical Transition of Primordial Perturbations*, Dissertação de mestrado, Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (2012).
- [100] D. J. Fixsen, *The Temperature of the Cosmic Microwave Background*, ApJ **707**, 916 (2009) e arXiv:astro-ph/0911.1955v2.
- [101] H. D. Zeh, *Roots and Fruits of Decoherence*, Seminário dado no *Séminaire Poincaré*, Paris (2005) e arXiv:quant-ph/0512078.
- [102] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw e A. Zeilinger, *Wave-Particle Duality of  $C_{60}$  Molecules*, Nature **401**, 680 (1999).
- [103] Alguns exemplos didáticos são apresentados em: C. Kiefer e E. Joos, *Decoherence: Concepts and Examples*, Proceedings of the 10th Born Symposium (1998). Claro está que o exemplo referente à teoria gravitacional está sujeito as críticas apresentadas no cap. 3 desta tese.

- [104] B. S. DeWitt, *The Many-Universes Interpretation of Quantum Mechanics*, Foundations of Quantum Mechanics (Academic, New York) (1971). Reimpresso em *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, editado por DeWitt and Graham (1973), pp. 167–218.