

**PROCESSOS ESTOCÁSTICOS  
EM  
VARIEDADES RIEMANNIANAS**

**Gabriel Menezes**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF  
2009**

## Resumo

Nesta tese apresentaremos alguns resultados obtidos recentemente em física teórica fazendo uso da teoria quântica dos campos. Em especial, foram estudados aspectos de mecânica estatística na teoria de campos e a influência de processos estocásticos em campos clássicos definidos em diversos tipos de variedades riemannianas a serem discutidos.

Em primeiro lugar, discutiremos a existência de um valor máximo para a entropia de sistemas quânticos, limite conhecido na literatura como o limite de Bekenstein. Posteriormente, vamos nos utilizar de alguns argumentos físicos para mostrar como a existência (ou não) de um limite para a capacidade de armazenamento de informação em um sistema quântico pode nos levar a querer entender a teoria de campos de um modo diferente do usual. Vamos ver como a quantização estocástica pode ser uma maneira distinta de se estudar tal problema assim como outros encontrados na teoria de campos. A idéia original da quantização estocástica é que um sistema quantizado  $d$ -dimensional é equivalente a um sistema clássico  $(d + 1)$ -dimensional com flutuações aleatórias. Vamos utilizá-la para se analisar a quantização de teorias com ações complexa, como, por exemplo, teorias topológicas, e a quantização de teorias com campos definidos em variedades com horizonte de eventos ou com curvatura não-nula. Um estudo do efeito Hawking utilizando todas as ferramentas proporcionadas pela quantização estocástica viria a coroar essa linha de pesquisa.

## Abstract

In this thesis, we shall present some results obtained recently in the area of theoretical physics using the quantum field theory formalism. In particular, we will study aspects of statistical mechanics in field theory and the influence of stochastic processes in classical fields defined in many different types of riemannian manifolds to be discussed.

In the first place, we shall discuss the existence of an upper bound for the entropy in quantum systems, which is known in the literature as the Bekenstein bound. Later, we will use some physical arguments in order to show how the existence (or not) of a bound on information storage capacity of a quantum system may help us to understand field theory in a different point of view. We will see how the stochastic quantization could be a distinguished technique to analyze such problem as well as others found in field theory. In order to reach a better understanding of the properties and the advantages of stochastic quantization, we shall implement the method to study the quantization of theories with complex actions, such as topological theories, and the quantization of fields defined in manifolds with an event horizon or with non-zero curvature. An analysis of the Hawking effect using all the tools provided by the stochastic quantization would certainly crown such line of research.

Esta tese poderia ter um sem-número de dedicações. Um mundo de nomes de pessoas e amigos sem o auxílio dos quais, direta ou indiretamente, nenhuma letra deste texto seria possível. Mas, se fosse escrever o nome de cada um deles (ou apenas as iniciais), eu teria que redigir outra tese. Como eu acredito que isto não será possível, tentarei me limitar a poucas palavras que nem de longe expressam tudo que estas pessoas representam para mim.

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu orientador, Professor Nami Fux Svaiter. Escrevo o verbete “professor” com “pê” maiúsculo pois é isso tudo que ele é, um verdadeiro “Professor”, maiúsculo em todos os seus gestos, seu saber e seu caráter. Maiúsculo também quando se trata de acudir e promover os seus alunos, bem como nos momentos de exigência. Muito obrigado por me inspirar nas oportunidades corretas e por ajeitar meus caminhos filosóficos e científicos.

Quero dedicar também esta tese à minha família. Aos meus pais, Ana Maria e Wilson Menezes, por tudo que fizeram por mim. Eles são responsáveis por tudo que sou, tudo que não sou e tudo que me trouxe até aqui. Às minhas irmãs, Paula e Ana Luisa, pela amizade profunda e infinita, pelo carinho sincero e por todas as conversas e amparos, mesmo que indiretos. E, finalmente, à Gisele Araujo, pela paciência e afeição em todas as ocasiões em que precisei dela e por ter me dado a razão que eu precisava ter. Para cada um mencionado neste parágrafo: Ya tyebya lyublyu.

Em conclusão, dedico esta tese também a todos aqueles que foram os certos das horas incertas. Aos amigos de longa data (Fabiano, Fabio, Leandro e Mauricio), aos meus amigos do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e da física em geral (Antônio, Augusto, Carlos, Diogo, Felipe, Felipe, Fernando, Marcela, Murilo, Nuno, Rafael, Rafael, Roberto, Thalles e tantos outros), aos amigos da Universidade Federal do Rio de Janeiro, aos amigos professores, aos amigos do mundo da música e das artes (Lisa, Mike, e muitos outros), aos novos amigos, aos amigos estrangeiros (Alexis, Martin Aparicio, Victor, entre outros), aos amigos distantes, porém sempre próximos (João, Julio e Marcio), aos amigos saudosos...enfim, dedico estes textos para todos vocês que são muito caros para mim.

Outrossim, aproveito para agradecer a todos os funcionários do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelo cuidado e pela ajuda, quando necessária. Em particular, agradeço ao pessoal da biblioteca pela ajuda nos livros e ao pessoal da secretaria da Coordenação de Formação Científica, José Ricardo e a recém aposentada Myriam Coutinho. E, claro, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo financiamento de minha bolsa de Doutorado.

A todos vocês, muito obrigado!

*“Die grenzen meiner sprache  
bedeuten die grenzen meiner welt.”  
(Os limites de minha linguagem  
representam os limites de meu mundo.)*

Ludwig Wittgenstein

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução : triunfos, limitações e desafios da teoria quântica dos campos</b>	<b>1</b>
1.1	A teoria quântica de campos revista . . . . .	1
1.2	Sobre o que versa esta tese . . . . .	6
<b>2</b>	<b>A entropia específica para campos com interação</b>	<b>8</b>
2.1	Termodinâmica de buracos negros . . . . .	8
2.2	A expansão perturbativa para um acoplamento forte numa teoria escalar com auto-interação . . . . .	17
2.3	A integral funcional de valor independente e a função zeta espectral . . . . .	23
2.4	A entropia específica para a teoria $(g_0 \varphi^p)_d$ acoplada fortemente . . . . .	28
2.5	Limites para a entropia: visão geral . . . . .	41
<b>3</b>	<b>O método de quantização estocástica de Parisi-Wu</b>	<b>46</b>
3.1	Aspectos básicos da quantização estocástica . . . . .	46
3.2	Quantização estocástica para uma teoria escalar livre . . . . .	50
3.3	Quantização estocástica para a teoria escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Quantização estocástica não-markoviana</b>	<b>62</b>
4.1	Equação de Langevin generalizada com ruído colorido . . . . .	62
4.2	Equação de Langevin generalizada para o campo escalar . . . . .	73
4.3	A abordagem por Fokker-Planck . . . . .	78
4.4	O método de quantização estocástica de Parisi-Wu em teorias topológicas . . . . .	85
4.5	Quantização estocástica de uma teoria de Chern-Simons abeliana . . . . .	87
<b>5</b>	<b>A quantização estocástica em variedades riemannianas</b>	<b>94</b>
5.1	O método de quantização estocástica de Parisi-Wu em variedades riemannianas . . . . .	94
5.2	Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de Einstein . . . . .	98
5.3	Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de Rindler . . . . .	107
5.4	Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de de Sitter . . . . .	117
5.5	O método de quantização estocástica: panorama geral . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>131</b>

- A Demonstração de que o valor da função zeta espectral se anula na origem do plano complexo  $s$ , i.e.,  $\zeta_D(s)|_{s=0} = 0$  135
- B A representação de Klauder para o gerador funcional de valor independente 138
- C A equação de Langevin markoviana e não-markoviana 142
- D A função de Green retardada para o problema de difusão numa teoria de Chern-Simons Abelianas 144

# Capítulo 1

## Introdução : triunfos, limitações e desafios da teoria quântica dos campos

### 1.1 A teoria quântica de campos revista

A teoria dos campos quantizados, desenvolvida por Dirac, Fermi, Fock, Heisenberg, Jordan, Wigner e outros, é uma fusão da mecânica quântica com a teoria da relatividade especial. São dois os pilares desta teoria: o princípio de superposição dos estados quânticos com a interpretação probabilística dos valores esperados e o princípio de localidade que descarta a propagação de informação entre pontos separados por uma distância do tipo-espaço. Campos, que são distribuições que tomam valores num espaço de operadores, definidas num domínio denso com um espaço de Hilbert, comutam para distâncias do tipo-espaço

$$[\Phi(x), \Pi(x')]|_{x^0=x'^0} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.1)$$



onde  $\Pi(x')$  é o operador momento canonicamente conjugado ao operador de campo  $\Phi(x)$ .

Já na década de trinta do século passado observou-se um problema: os parâmetros utilizados para se definir uma certa teoria se referiam a medidas idealizadas em distâncias arbitrariamente pequenas, o que provocava o aparecimento de divergências ultravioletas em diversos cálculos da teoria. Esta dificuldade foi superada após a década de quarenta do século passado, devido aos esforços de Dyson, Feynman, Pauli, Schwinger, Tomonaga, Wick e muitos outros. Para o cálculo de amplitudes de transição de processos foi desenvolvida uma teoria de perturbações em um regime de acoplamento fraco. Resultados divergentes foram apontados através de um procedimento denominado de regularização e tratados com um algoritmo conhecido como renormalização perturbativa. Uma coletânea de artigos pioneiros pode ser encontrada em [1]. O livro de Collins [2] sintetiza todos os métodos e técnicas envolvidas no programa de renormalização.

Vale lembrar também que existem métodos distintos de quantização que levam a resultados análogos, cada um explicitando uma certa característica marcante da teoria de campos. O primeiro deles a ser desenvolvido foi o denominado formalismo canônico, onde os campos são entendidos como distribuições com valores em espaços de operadores. Desta forma, toda uma análise espectral torna-se fundamental para o estudo de sistemas quânticos. Outra técnica bastante popular é a de integrais de trajetória, sobre a qual faremos uma breve digressão a seguir.

Em 1933, Dirac argumentou que a formulação lagrangiana da mecânica clássica poderia ser mais fundamental que a formulação hamiltoniana. A princípio, tal afirmação não apresentava a mesma validade ao se levar em conta o mundo quântico. Ele especulou como tal situação poderia ser retificada, e chegou à conclusão que o propagador na mecânica

quântica “corresponderia” a  $e^{iS/\hbar}$ , onde  $S$  é a ação clássica calculada ao longo do caminho clássico.

Em 1948, Feynman generalizou a idéia de Dirac, argumentando que o propagador correto seria a “integral de trajetória” da quantidade  $e^{iS/\hbar}$ . Em outras palavras, o propagador pode ser escrito como uma soma sobre todos os possíveis caminhos (não apenas o clássico) entre um ponto inicial e um ponto final. Cada caminho contribui com  $e^{iS/\hbar}$  ao propagador. Portanto, enquanto Dirac considerava apenas o caminho clássico, Feynman mostrou que todos os caminhos contribuem. Sendo assim, pode-se utilizar integrais de trajetória, onde não se faz menção a operadores em lugar algum, como uma alternativa para se quantizar sistemas clássicos que, obviamente, possuem formulação lagrangiana. Apesar deste ponto de vista ser radicalmente diferente do formalismo canônico apresentado anteriormente, pode-se mostrar que resultados análogos são obtidos utilizando-se ambos os métodos.

Neste momento, o leitor pode se indagar qual seria o porquê de se utilizar outra técnica de quantização. Além da resposta óbvia (facilitar o entendimento de situações outrora bastante complicadas compreendidas via o formalismo canônico), sabemos que o desenvolvimento de técnicas novas na ciência pode nos permitir a visualização de peculiaridades do objeto de estudo antes escondidas e/ou despercebidas. Podemos entender as técnicas de investigação da física teórica como microscópios utilizados para se pesquisar micróbios, bactérias, vírus, células e outras entidades invisíveis a olho nu na biologia. Conforme a aparelhagem vai sendo modernizada (na física teórica, corresponderia a ferramentas matemáticas mais modernas), novos elementos em tais entidades são contemplados e, por conseguinte, um melhor entendimento sobre as mesmas é alcançado. De qualquer maneira, um microscópio moderno tem a mesma utilidade que um microscópio antigo, i.e.,

visualizar objetos invisíveis a olho nu. Em nossa analogia com a física teórica, o formalismo canônico e as integrais de trajetória servem para o mesmo fim, i.e., a quantização de sistemas, mas a última nos faz enxergar certos aspectos da teoria que seriam difíceis de se visualizar usando-se o primeiro. Um destes aspectos é a profunda analogia entre a teoria de campos e a mecânica estatística, analogia melhor compreendida quando trabalhamos em espaços euclidianos. Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre a quantização por integrais de trajetória, bem como possíveis aplicações no estudo de sistemas físicos, encomendamos a leitura das referências [3] [4] [5].

No começo do anos oitenta do século passado, tal analogia entre teoria de campos e mecânica estatística foi mais ainda aprofundada, com o advindo da técnica da quantização estocástica. Em poucas palavras, este método compreende a integral de trajetória como o limite de equilíbrio de um processo estocástico. Nesta introdução, não vamos entrar em maiores detalhes sobre este formalismo, visto que ele será melhor desenvolvido nos próximos capítulos.

Até o presente momento, a teoria quântica dos campos é a melhor técnica matemática que temos para a descrição de processos quânticos. Apesar desta teoria ter tido um desenvolvimento colossal a partir dos anos quarenta, o interesse nesta foi decrescendo gradualmente e quase desapareceu nos anos sessenta. Em resumo, este desinteresse foi motivado por duas razões principais, a saber. A primeira delas estava relacionada à descrição de sistemas físicos onde o acoplamento entre diferentes campos que descrevem diferentes partículas é forte, utilizando a já mencionada teoria de perturbações. A segunda estava ligada à não-renormalizabilidade da interação fraca, que fez com que as previsões da teoria quântica dos campos fossem questionadas na descrição destes processos. Desta

forma, esforços foram orientados na direção do entendimento das propriedades estruturais da teoria quântica dos campos, com a emergência de diferentes técnicas não-perturbativas. Apareceram também nesta época as teorias axiomática e construtivista dos campos com os trabalhos de Haag, Kallen e Wightman. Uma exposição moderna destes tópicos pode ser encontrada no livro de Glimm e Jaffe [6]. Além destes dois problemas relevantes, outros também foram apontados por muitos autores que questionavam o limite de aplicabilidade da teoria de campos, como, por exemplo, o famoso problema de Moscou da carga zero, levantado por Landau e vários colaboradores [7] [8] [9]. Para maiores detalhes, sugerimos a consulta do artigo de Callaway [10].

Não obstante, após uma década de esquecimento, a formulação das teorias de calibre não-abelianas [11] [12] [13] veio salvar a teoria quântica de campos de um naufrágio injusto. O problema da renormalizabilidade da interação fraca foi resolvido com os modelos de unificação das interações fundamentais, enquanto que sistemas com interação forte passaram a ser descritos pela cromodinâmica quântica. Para o leitor interessado na literatura das teorias de calibre, os livros de Leite Lopes [14], Pokorski [15], Faddeev e Slavnov [16], Bailin e Love [17] e Frampton [18] constituem uma inestimável fonte de consulta e estudo.

Apesar destes inúmeros sucessos, ainda temos situações em que a teoria de campos apresenta problemas para descrever apropriadamente um sistema em análise. Questões como o confinamento de quarks e glúons, como emerge o grupo de simetria dos quarks, a descrição termodinâmica de buracos negros e outras ainda estão sem resposta dentro do formalismo da teoria de campos. Mesmo assim, esta ainda é tomada como paradigma quando se trata sobre a quantização de sistemas físicos. Alguns autores salientam duas lições que ela nos ensinou, ao longo do século XX: os princípios de simetria e o grupo

de renormalização. Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre alguns ensinamentos e limitações da teoria quântica de campos, recomendamos o belo trabalho de David Gross [19]. De qualquer modo, podemos enumerar diversas lições apreendidas pelo estudo da teoria de campos durante o decorrer do século passado. Estas também nos mostram como a teoria de campos é bastante poderosa no sentido de modelagem e descrição de situações físicas com argumentos simples e claros e, até agora, com bastante concordância com evidências experimentais. Se estes ensinamentos nos apontam outros caminhos a serem tomados, bem como um possível esgotamento da própria teoria de campos, isto é assunto para um futuro próximo.

## 1.2 Sobre o que versa esta tese

Esta tese não se propõe a dar uma resposta final para algum dos problemas levantados no final da seção anterior. Por outro lado, pretende-se aqui apontar possíveis novos caminhos para um entendimento melhor da teoria de campos. Para tanto, devemos ter como objeto de estudo situações onde seja possível observar a necessidade de se generalizar as idéias da teoria dos campos quantizados, ainda dentro do seu próprio contexto, ou até mesmo onde podemos enxergar sinais de esgotamento da teoria em descrever fenômenos físicos, devendo-se utilizar idéias radicalmente novas. Vamos, com isso, estudar circunstâncias onde o ponto de contato com uma exequível “física nova” (seja por generalizações de idéias antigas, seja por substituição de imagens que já se encontram em estado de exaustão) apresenta-se de modo bastante claro. No plano teórico, geralmente se espera que tal ponto seja a análise da física de buracos negros, qual seja, a radiação de Hawking

e a entropia de Bekenstein. Sendo mais específico, apesar de termos procurado fazer desta tese um texto que abordasse um assunto com várias questões que remetem a uma mesma situação, qual seja, a quantização estocástica, não poderíamos deixar de acrescentar o resultado obtido para o limite de Bekenstein no caso de campos com auto-interação forte, visto que tal resultado tem implicações profundas na quantidade de informação que um sistema físico pode armazenar. Deste modo, no primeiro capítulo deste texto, vamos estudar o limite de Bekenstein para a entropia de um sistema quântico para o caso de campos com auto-interação forte. Iremos demonstrar em que situações tal limite é válido e em que situações ele falha. Demonstraremos, depois, como a quantização estocástica pode ser utilizada para se estudar ações complexas bem como a sua aplicação em espaços com curvatura diferente de zero ou com horizonte de eventos. Antes, porém, vamos ver com algum detalhe no início do próximo capítulo como surge toda esta questão da existência de um valor máximo para a entropia de sistemas quânticos. Estaremos seguindo a referência [20]. Ao longo desta tese, utilizaremos o sistema de unidades natural, qual seja,  $\hbar = c = k_B = G = 1$ .

# Capítulo 2

## A entropia específica para campos com interação

### 2.1 Termodinâmica de buracos negros

A noção de entropia de buraco negro é motivada por dois resultados da relatividade geral:

1. *Teorema da área* [21]: a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca decresce com o tempo:

$$dA \geq 0.$$

Além disso, quando dois buracos negros se superpõem, a área do novo buraco negro excederá a área total dos buracos negros originais. Por exemplo, um objeto de massa  $M$  que cai em um buraco negro de Schwarzschild fará com que a massa do mesmo aumente deste valor. Como, em quatro dimensões, a área do horizonte de eventos do buraco negro vale  $A = 16\pi M^2$ , vê-se facilmente que esta deverá aumentar também. Por outro lado, levando-se em conta processos clássicos, não se pode esperar que a área irá diminuir, visto

que o buraco negro não emitirá partículas. Este teorema sugere uma analogia entre área de buracos negros e a entropia termodinâmica.

2. *Buraco negro não tem cabelo* [22] [23] [24] [25]: um buraco negro estacionário é caracterizado por apenas três quantidades físicas: massa, momento angular e carga. Este teorema implica, entre outras coisas, que o buraco negro originário do colapso de uma estrela, por exemplo, deverá evoluir para um estado final e estacionário que é único. Acontece que temos um paradoxo aqui. Do ponto de vista de um observador fora do horizonte de eventos, a formação do buraco negro viola a segunda lei da termodinâmica. O espaço de fase parece ter sido radicalmente diminuído. O sistema que colapsa poderia ter um valor muito alto de entropia, mas o estado final não possui nenhuma!

Contudo, o teorema da área pode resolver o aparente paradoxo colocado acima: quando um sistema termodinâmico atravessa o horizonte de eventos, sua entropia é perdida para o observador de fora. Por outro lado, como vimos, a área do horizonte de eventos deverá crescer em virtude desta absorção da matéria pelo buraco negro. A pergunta que se coloca é: será que este aumento na área poderia compensar a perda da entropia da matéria? Partindo deste ponto, Bekenstein sugeriu, então, que um buraco negro poderia carregar uma entropia  $S_{BH}$  que seria proporcional à área  $A$  do horizonte de eventos:

$$S_{BH} = \frac{A}{4}.$$

Bekenstein foi além, ainda: ele propôs, também, que a segunda lei da termodinâmica vale para *soma* da entropia do buraco negro e da entropia da matéria. É a conhecida segunda lei da termodinâmica generalizada:

$$dS_{total} \geq 0.$$



Qual é a origem estatística (microscópica) para a entropia de buraco negro? Vimos que um buraco negro, visto do “lado de fora”, é classicamente único. A fórmula de Bekenstein-Hawking, no entanto, sugere que ele seja compatível com  $e^{S_{BH}}$  estados quânticos independentes. A natureza destes estados quânticos ainda permanece um mistério. Apesar de ser um assunto fascinante, este está fora do escopo deste tese.

Vamos voltar às idéias de Bekenstein sobre entropia de buracos negros. Vamos supor um buraco negro de massa  $M$ . Se a entropia de Bekenstein for levada a sério, então a primeira lei da termodinâmica sugere que buracos negros devam possuir temperatura:

$$dM = TdS_{BH}.$$

De fato, as equações de Einstein implicam nas “leis da mecânica dos buracos negros” [26].

Uma delas diz que a entropia é a área do horizonte de eventos e a gravidade de superfície  $\kappa$  faz o papel da temperatura:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA.$$

Para um buraco negro de Schwarzschild,  $\kappa = (4M)^{-1}$ . Novamente, temos um paradoxo. Sabemos que um corpo negro com temperatura diferente de zero deve irradiar. Mas, isto vai de encontro com a noção clássica de um buraco negro, pela qual nenhuma matéria pode escapar dele e, portanto, sua temperatura deve ser zero.

Tal paradoxo foi resolvido com a descoberta de que buracos negros de fato irradiam via processos quânticos. Hawking mostrou [27], através de cálculos semiclássicos, que um observador arbitrariamente distante do horizonte de eventos irá detetar um espectro térmico de partículas vindas do buraco negro, a uma temperatura:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}.$$

A descoberta da então denominada radiação Hawking clarificou a interpretação da descrição termodinâmica de buracos negros. Em particular, o resultado de Hawking afirma que a entropia de buracos negros deve ser considerada como uma contribuição genuína para a entropia total do universo, de acordo com as idéias pré-estabelecidas de Bekenstein.

Tendo em vista toda esta discussão, é natural estudar três diferentes processos envolvendo buracos negros: quando um sistema de matéria cai em um horizonte de eventos; a formação de buracos negros; e, finalmente, a evaporação de buracos negros. Este último entende que a entropia do horizonte deva ser convertida em entropia de radiação. O primeiro e o segundo implica no inverso, a saber, na conversão de entropia normal em entropia do horizonte. Estes dois últimos casos não serão analisados aqui. Neste texto, estaremos interessados apenas no primeiro caso; este terá como consequência o famoso limite de Bekenstein.

Para um observador de fora, quando um sistema de matéria cai em um buraco negro, sua entropia  $S_m$ , antes finita, vai a zero. Porém, como vimos, a entropia do buraco negro cresce. Portanto, é concebível que a entropia total  $S_m + A/4$  não decresça no processo, de modo que a segunda lei da termodinâmica não é violada.

Contudo, não é nada óbvio que a segunda lei generalizada não será violada. O crescimento da área do horizonte de eventos depende essencialmente da massa que é absorvida pelo buraco negro; não possui nenhuma relação, a princípio, com a entropia do tal sistema de matéria. Se fosse possível termos sistemas com uma entropia com valores arbitrariamente altos e com uma dada massa e um dado tamanho, a segunda lei da termodinâmica generalizada poderia ser violada.

Tendo por base toda a questão discutida acima, alguns autores compreendem as pro-

priedades termodinâmicas dos buracos negros como verdadeiras leis da natureza. Não podemos deixar de mencionar, contudo, que tais idéias ainda não apresentam unanimidade na comunidade científica. Não vamos entrar neste assunto, pois ele foge do escopo desta tese. Nos limitaremos a utilizar os argumentos anteriores sobre a termodinâmica de buracos negros e requerer que a segunda lei da termodinâmica generalizada seja válida para qualquer processo físico. Isto nos leva a pensar em um valor máximo universal para a entropia de sistemas de matéria em termos de parâmetros extensivos. Vamos ver como isso pode ser entendido na linguagem de teoria de campos.

Em mecânica estatística iniciamos as investigações sempre com sistemas definidos num volume finito, e o volume infinito é considerado posteriormente, o que chamamos de limite termodinâmico. Por outro lado, a teoria quântica de campos deve ser descrita por um número infinito de graus de liberdade. Uma linha de pesquisa bastante promissora é o estudo de campos quantizados definidos num volume finito, desde que tenhamos um mecanismo consistente de confinar o campo, como por exemplo objetos macroscópicos clássicos onde os campos devem satisfazer determinadas condições de contorno. Se não levarmos em conta condições de contorno periódicas, que já foram bastante investigadas na literatura e que não nos trazem nada de novo, vemos que existe uma necessidade fundamental de se entender a dinâmica de campos quantizados na presença de objetos macroscópicos, de forma tal que a invariância translacional da teoria tenha sido perdida. É bastante importante saber como se implementa a renormalização perturbativa em modelos que são perturbativamente renormalizáveis, se assumimos que temos quebra de invariância translacional. Um estudo pioneiro nesta direção foi realizado por Symanzik [28]. Lembremos que uma teoria é perturbativamente renormalizável se apenas um número finito de

parâmetros da teoria necessitam ser renormalizados.

Segundo esta linha de raciocínio, Fosco e Svaiter [29], investigaram um modelo escalar anisotrópico num espaço euclidiano  $d$ -dimensional, onde uma das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Nesta situação, para se implementar o programa de renormalização, dentro da teoria de perturbações, encontramos uma dificuldade que não aparece quando trabalhamos num espaço sem fronteiras. A presença de restrições geométricas tornam a avaliação das funções de Schwinger uma tarefa muito mais difícil do que aquela efetuada num espaço sem fronteiras. Para sistemas onde temos a invariância translacional, podemos passar de uma representação de coordenadas para uma representação de momentos, onde fica mais simples a análise das divergências da teoria. Como no modelo estudado se perdeu a invariância translacional numa das direções, devemos trabalhar com as funções de Schwinger de  $n$ -pontos numa representação mista.

No trabalho acima citado, os autores investigaram como implementar o programa de renormalização ao nível de um laço para a função de dois pontos associada a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente. A estrutura das divergências foi cuidadosamente analisada e foi mostrado que para estas duas condições de contorno temos apenas uma troca de sinal, na parte polar, na vizinhança das placas. O programa de renormalização implementado a nível de um laço para a função de dois pontos e quatro pontos associadas a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet foi finalizado por Caicedo e Svaiter [30]. A introdução de temperatura não apresenta nenhuma dificuldade, onde se investigou [31] modelos escalares da teoria quântica de campos a temperatura finita e também efeitos de superfície. Sendo mais específico, foi estudado um campo escalar num espaço euclidiano  $d$ -dimensional, onde uma

das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Na verdade foi generalizada parte dos resultados anteriores, pois foi assumida uma teoria escalar  $\lambda\varphi^4$  em equilíbrio com um reservatório térmico. Nesta situação, como já discutimos, a presença de restrições geométricas tornam os cálculos das funções de Schwinger muito mais complicados do que aqueles em um espaço sem fronteiras, com o agravante que temos também que somar sobre as frequências de Matsubara. O programa de renormalização pode ser implementado ao nível de um laço para a função de dois pontos e de quatro pontos, e a estrutura das divergências também pode ser analisada. Cálculos a dois laços foram efetuados por Aparicio Alcalde e colaboradores [32].

Como podemos perceber pela discussão acima, campos quantizados na presença de estruturas macroscópicas introduzem situações bastante interessantes. Por exemplo, uma situação que ainda não foi discutida é a descrição de fenômenos críticos na presença de fronteiras. O confinamento de flutuações críticas associadas a um parâmetro de ordem pode gerar forças de longo alcance entre as superfícies de um filme fino, por exemplo. Esse fenômeno é conhecido como efeito Casimir da mecânica estatística [33] [34] [35] [36]. É importante ressaltar que esses efeitos ainda estão esperando por uma comprovação experimental. Por outro lado, o efeito Casimir associado ao campo eletromagnético na presença de estruturas macroscópicas [37] foi testado experimentalmente com grande sucesso. Uma questão ainda em aberto diz respeito a dependência do sinal da força de Casimir com a dimensionalidade do sistema e outras propriedades físicas deste [38] [39] [40]. A resposta para tal questão é crucial para o problema que vamos expor em seguida.

Dentro desta abordagem de se estudar campos na presença de fronteiras, vamos voltar a discutir a possibilidade da existência de um valor máximo para a entropia de um sis-

tema de matéria. Um resultado importante na literatura, devido a Bekenstein, relaciona a entropia  $S$  e a energia média  $E$  de um sistema quantizado com um comprimento linear associado às fronteiras que confinam o sistema. Essa desigualdade estabelece que a entropia deve satisfazer  $S \leq 2\pi E R/\hbar c$ , onde  $R$  é o raio da menor esfera que pode circunscrever o sistema [41] [42] [43] [44] [45] [46] (assumindo-se que efeitos gravitacionais são suficientemente pequenos a fim de se permitir uma escolha de folheações de tempo de modo que o sistema de matéria encontra-se em repouso e o espaço é assintoticamente plano). Esse valor máximo para a entropia específica, como vimos, reflete uma condição de consistência entre a termodinâmica de buracos negros e as leis da mecânica estatística, condição esta que diz que a segunda lei da termodinâmica generalizada deve ser respeitada. Em outras palavras, a soma da entropia do buraco negro com a contribuição da entropia da matéria que se encontra fora do buraco negro nunca deve decrescer. Em um buraco negro de Schwarzschild, num espaço-tempo quadridimensional, a entropia de Bekenstein, que é proporcional a área do horizonte de eventos, exatamente satura a desigualdade. Como enfatizou 't Hooft, o buraco negro é o sistema físico mais entrópico que podemos encontrar na natureza confinado numa superfície esférica [47]. No cenário da teoria dos campos em espaços curvos, existem duas formas para explicar o grande valor de entropia para o buraco negro. A primeira é associar a entropia a um grande número de microestados internos escondidos pelo horizonte. Uma tentativa alternativa seria afirmar que a entropia do buraco negro pode ser associada com um grande número de estados possíveis que podem colapsar para formar um buraco negro. A nossa intenção não é estudar esta difícil questão, mas estamos interessados em saber se existe uma limitação intrínseca na capacidade de armazenamento de informação de um sistema quântico confinado na ausência de

gravitação.

Embora haja diversas provas que a entropia específica de sistemas confinados obedece à desigualdade proposta por Bekenstein, vários autores elaboraram diferentes argumentos tentando invalidar esse resultado [48] [49] [50] [51] [52]. Por exemplo, Deutsch argumentou que a desigualdade não se aplica para sistemas não-gravitacionais, onde um valor absoluto da energia renormalizada não pode ser medido e também que sistemas a baixas temperaturas violariam a desigualdade. Unruh usou o argumento que sistemas como um modo zero também violariam a desigualdade. Bekenstein e colaboradores desenvolveram várias contraprovas para tais argumentos. O problema levantado por Deutsch relativo a sistemas a baixas temperaturas foi resolvido na referência [53] e o problema associado a sistemas com um modo zero foi resolvido em [54]. Um outro argumento usado por alguns autores diz respeito ao fato de que a energia do ponto-zero renormalizada associada a campos quantizados poder ser negativa em algumas situações. Embora exista um argumento que se levarmos em consideração a energia associada às fronteiras que confinam o campo, podendo tornar a energia total do sistema positiva, ainda não existe um consenso de que esse argumento resolveria o problema [55].

Todas as situações descritas anteriormente tratam de teorias gaussianas. Um problema que merece ser estudado é a validade da desigualdade para campos com interação, visto que interações não-lineares [56] [57] poderiam alterar o espectro de energia do sistema confinado, invalidando a desigualdade. Temos duas distintas direções a seguir. A primeira seria investigar sistemas onde uma expansão perturbativa para um acoplamento fraco pode ser utilizada. Como enfatizou Symanzik [28], um procedimento de regularização e renormalização pode ser implementado em qualquer ordem da expansão perturbativa.

Uma outra direção é estudar sistemas confinados onde a auto-interação é forte.

Mostraremos a seguir que podemos generalizar a desigualdade acima discutida se assumirmos que o sistema em questão está sendo descrito por uma teoria escalar do tipo  $(g_0 \varphi^p)_d$  na presença de estruturas macroscópicas. Devemos também assumir que auto-interação é forte o suficiente para que usemos a expansão perturbativa para o acoplamento forte. Vamos admitir que o campo escalar está confinado no interior de um hipercubo de aresta  $L$ , e que também está em equilíbrio térmico a temperatura  $\beta^{-1}$ . A energia do ponto-zero renormalizada da teoria livre por unidade de comprimento será representada por  $\varepsilon_d^{(r)}$ . No caso de altas temperaturas podemos mostrar que a entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi$ , onde  $h_1(d)$  e  $h_2(d)$  são funções analíticas do número de dimensões euclidianas  $d$ , e  $\xi = \frac{\beta}{L}$ . Para baixas temperaturas, temos que entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1}}$ . Note que a condição de uma energia do ponto-zero renormalizada positiva é fundamental para que a última desigualdade seja válida. As discussões deste capítulo estão baseadas na referência [58].

Vejamos, agora, em breves linhas, como é feita a expansão perturbativa para um acoplamento forte.

## 2.2 A expansão perturbativa para um acoplamento forte numa teoria escalar com auto-interação

Há problemas na teoria dos campos quantizados que não estão associados a efeitos perturbativos. Tais efeitos não podem ser investigados utilizando a série perturbativa definida por Dyson, Feynman, Tomonaga, Schwinger e outros. Esta série está baseada de modo essencial na construção de um gerador funcional a partir do qual, por meio de



derivadas funcionais, podemos calcular as funções de Green da teoria - em um espaço com assinatura euclidiana, estas funções são conhecidas como funções de Schwinger. Posteriormente, deve-se empregar uma técnica de regularização e, finalmente, a renormalização perturbativa. O ponto fundamental da renormalização perturbativa é o seguinte: as funções de Green renormalizadas de qualquer teoria que não seja livre podem ser escritas como uma série formal na constante de acoplamento. Uma pergunta natural é se esta série converge. No caso de uma resposta afirmativa, a sua soma define as funções de Green da teoria em questão. No caso de uma resposta negativa, temos que lançar mão de novos conceitos matemáticos para darmos sentido a esta série divergente. É claro que o antigo conceito de convergência deve ser estendido para darmos conta de séries divergentes. Uma série divergente pode ser ressomada. Para o leitor interessado em um profundo estudo de séries divergentes indicamos os tratados de Knopp [59] e Hardy [60]. Pode-se mostrar que diferentes métodos de somabilidade dão o mesmo resultado. Um método bastante usado em teoria de campos é o método de Borel. Alguém pode se perguntar se a somabilidade de Borel é um método geral e efetivo para obtermos as soluções de uma teoria com interação, quando nos baseamos na série perturbativa. A resposta a esta pergunta não é positiva, devido à existência de instantons e renormalons, que são singularidades da transformada de Borel da série perturbativa, que aparecem no eixo positivo real do plano de Borel. Desta forma, a inversão de Borel não pode ser aplicada nos modelos conhecidos definidos em um espaço-tempo quadridimensional. Conseqüentemente o seguinte problema se coloca: uma teoria de campos pode parecer correta num regime perturbativo, todavia, em um regime não-perturbativo, resultados bastante diferentes daqueles encontrados usando-se métodos perturbativos podem ser atingidos.

Por outro lado, podemos seguir um outro caminho e efetuarmos uma expansão perturbativa não-convencional do funcional gerador das funções de Schwinger, conhecida na literatura como expansão perturbativa para o acoplamento forte [61] [62], onde não é efetuada a expansão perturbativa em torno da teoria gaussiana. A idéia básica é tratarmos a contribuição gaussiana na ação como uma perturbação com respeito aos outros termos. A diferença fundamental entre esta expansão perturbativa não-convencional e a usual é que neste caso o funcional gerador fica escrito formalmente como uma série de potências negativas da constante de acoplamento. Estamos efetuando a expansão perturbativa em torno do gerador funcional de valor independente [63] [64] [65] [66] [67] [68]. Campos definidos em diferentes pontos do espaço euclidiano estão desacoplados em primeira ordem de aproximação, pois a contribuição que contém o gradiente aparece apenas como uma perturbação.

Como já discutimos acima, a idéia básica da expansão perturbativa para o acoplamento forte é tratarmos a contribuição gaussiana na ação como uma perturbação com respeito aos outros termos no gerador funcional das funções de Schwinger. Uma representação formal para o funcional de Schwinger  $Z[h]$  é dada por

$$Z[h] = \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0; x-y) \frac{\delta}{\delta h(y)} \right) Q_0[h], \quad (2.1)$$

onde  $Q_0[h]$  define o gerador funcional de valor independente,  $h(x)$  é uma fonte externa e  $K(m_0; x-y) = (-\Delta + m_0^2) \delta^d(x-y)$ . É fácil mostrar que  $Q_0[h]$  é dado por

$$Q_0[h] = \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp \left( \int d^d x \left( -\frac{g_0}{4!} \varphi^4(x) + h(x)\varphi(x) \right) \right), \quad (2.2)$$

onde novamente  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização.

Nesse momento, uma pequena digressão pode ser útil para um melhor entendimento da física que está por trás dessa expansão perturbativa alternativa. É um fato bastante

conhecido que o comportamento da expansão perturbativa convencional em potências da constante de acoplamento para os termos de altas ordens está relacionado à estrutura analítica das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, nas vizinhanças da origem [69] [70] [71]. Conseqüentemente, um importante problema a ser investigado diz respeito ao comportamento das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, em diferentes modelos [72] [73]. Como neste problema de encontrar a estrutura analítica das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento, nas vizinhanças da origem, entram em jogo efeitos não-perturbativos como instantons e renormalons, a expansão perturbativa convencional não nos pode ser muito útil. Nesta expansão perturbativa para o acoplamento forte podemos facilmente encontrar a estrutura analítica do funcional gerador das funções de Schwinger no plano complexo da constante de acoplamento. Está claro que esta informação está contida no termo de mais baixa ordem. Gostaríamos de ressaltar que a inclusão de termos de mais altas ordens da série perturbativa não deve modificar esta estrutura analítica, ou apenas criar singularidades adicionais [74].

Estamos interessados em estudar um campo escalar neutro com uma auto-interação do tipo  $(g_0 \varphi^p)$ , definido em um espaço euclidiano  $d$ -dimensional. A contribuição para a ação que vem do termo de auto-interação é dada por

$$S_I(\varphi) = \int d^d x \frac{g_0}{p!} \varphi^p(x). \quad (2.3)$$

Vamos assumir que o campo escalar está definido num espaço euclidiano compacto, com ou sem fronteiras, com um volume  $V$ . Vamos também supor que existe um operador elíptico, semi-positivo e auto-adjunto que age sobre funções escalares nesse espaço. Um exemplo padrão é o operador  $O$  definido por  $O = (-\Delta + m_0^2)$ , onde  $\Delta$  é o laplaciano

$d$ -dimensional. O núcleo  $K(m_0; x, y) \equiv K(m_0; x - y)$  é definido por

$$K(m_0; x - y) = (-\Delta + m_0^2) \delta^d(x - y). \quad (2.4)$$

Vamos usar o fato de que o gerador funcional das funções de Schwinger  $Z[V, h]$  é invariante com respeito a escolha da contribuição quadrática. Vamos então considerar uma modificação da expansão perturbativa para um acoplamento forte. O gerador funcional das funções de Schwinger  $Z[V, h]$  passa a ser definido como

$$Z[V, h] = \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0, \sigma; x - y) \frac{\delta}{\delta h(y)} \right) Q_0[\sigma, h], \quad (2.5)$$

onde a nova integral funcional de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$  é dada por

$$Q_0[\sigma, h] = \mathcal{N} \int [d\varphi] \exp \left( \int d^d x \left( -\frac{1}{2} \sigma m_0^2 \varphi^2(x) - \frac{g_0}{p!} \varphi^p(x) + h(x) \varphi(x) \right) \right), \quad (2.6)$$

e o núcleo modificado  $K(m_0, \sigma; x - y)$ , que aparece na equação (2.5), é definido por

$$K(m_0, \sigma; x - y) = (-\Delta + (1 - \sigma)m_0^2) \delta^d(x - y), \quad (2.7)$$

onde  $\sigma$  é um parametro complexo definido na região  $0 \leq \text{Re}(\sigma) < 1$ . O fator  $\mathcal{N}$  é introduzido para normalizar a teoria onde devemos impor  $Q_0[\sigma, h]|_{h=0} = 1$ . Nesse momento vamos passar a considerar  $h(x)$  como uma variável complexa. Para facilitar os cálculos podemos impor  $\text{Re}(h) = 0$ .

Estamos assumindo que o sistema que é espacialmente limitado está em equilíbrio com um reservatório térmico a temperatura  $\beta^{-1}$ . Dessa forma podemos utilizar a expansão perturbativa para um acoplamento forte para computarmos a função de partição do sistema definida por  $Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$ , onde já comentamos que  $h$  é uma fonte externa e estamos definindo o volume da variedade  $(d - 1)$ -dimensional  $V_{d-1} \equiv \Omega$ . Da função de partição definida por  $Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$  podemos encontrar a energia livre do sistema, que

vem a ser dada por  $F(\beta, \Omega) = -\frac{1}{\beta} \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}$ . A energia média do sistema  $E(\beta, \Omega)$  é definida como

$$E(\beta, \Omega) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}, \quad (2.8)$$

assim como a entropia canônica do sistema  $S(\beta, \Omega)$  espacialmente limitado em equilíbrio com um reservatório térmico

$$S(\beta, \Omega) = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \ln Z[\beta, \Omega, h]|_{h=0}. \quad (2.9)$$

Na expansão perturbativa para o acoplamento forte, o problema fundamental é dar sentido operacional ao gerador funcional de valor independente. A solução desse problema foi apresentada por Klauder em várias publicações [66] [67] [75]. Em vez de utilizar uma medida funcional que possui invariância translacional, Klauder utilizou uma medida onde a invariância translacional foi perdida, dada por  $[d\phi] = \prod_x \frac{d\phi(x)}{|\phi(x)|}$ .

Assumindo que a fonte externa é constante, o gerador funcional de valor independente se transforma na função geradora de valor independente. Até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$  é possível escrever  $\ln Z(V, h)$  como o produto de duas contribuições. Uma envolve apenas a função geradora de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$ , e a outra nos dá informações sobre as condições de contorno que estamos impondo sobre o campo escalar. Este termo está associado a derivada da função zeta espectral [76] [77] [78] [79]. Para uma aplicação bastante interessante do método da função zeta, veja a referência [80]. Vamos agora ao cálculo da derivada desta função para nosso caso.

## 2.3 A integral funcional de valor independente e a função zeta espectral

Como estamos interessados em calcular a entropia específica de sistemas confinados, apenas quantidades globais são envolvidas nos nossos cálculos. Conseqüentemente podemos assumir que a fonte externa  $h(x)$  é constante. Nessa nova situação chamaremos  $Z(V, h)$  de função geradora. A temperatura zero, até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , podemos escrever

$$\ln Z(V, h) = -\frac{1}{2Q_0(\sigma, h)} \frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h) \int d^d x \int d^d y K(m_0, \sigma; x - y). \quad (2.10)$$

Como estamos assumindo a presença de estruturas macroscópicas que fazem com que o espectro do operador  $D = (-\Delta + (1 - \sigma)m_0^2)$  tenha uma contribuição discreta, um procedimento de regularização analítica pode ser utilizado para controlar as divergências da teoria.

Temos então que  $\ln Z(\beta, \Omega, h)$  pode ser escrito como

$$\ln Z(\beta, \Omega, h) = \frac{1}{Q_0(\sigma, h)} \frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h) \left( -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s) \Big|_{s=0} \right), \quad (2.11)$$

onde  $\alpha$  é uma constante infinita e  $\zeta_D(s)$  é a função zeta espectral, associada ao operador  $D$ .

Vamos considerar a situação onde o sistema é finito em todas as direções espaciais, i.e.,  $x_i \in [0, L]$ ,  $i = 1, 2, \dots, d - 1$ . Para a coordenada euclidiana temporal vamos assumir condições periódicas (condições periódicas de Kubo-Martin-Schwinger KMS [81] [82]) e para as dimensões euclidianas espaciais vamos assumir condições de contorno de Dirichlet. Chamaremos essa última situação de condições de contorno duras. Veja por exemplo [83]. Outras condições de contorno foram discutidas nos trabalhos [38] [84]. A escolha das condições de contorno de Dirichlet permite uma fácil solução para o problema de autova-

lores de forma que a função zeta espectral associada ao operador  $D$  pode ser facilmente encontrada.

O operador  $D$  tem um espectro dado por  $\lambda_{n_1, \dots, n_d}$  onde

$$\lambda_{n_1, \dots, n_d} = \left[ \left( \frac{n_1 \pi}{L} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n_{d-1} \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{2n_d \pi}{\beta} \right)^2 + (1 - \sigma) m_0^2 \right], \quad (2.12)$$

$n_1, n_2, \dots, n_{d-1}$  são números naturais diferentes de zero enquanto que  $n_d$  são números inteiros. A função zeta espectral associada ao operador  $D$  é dada por

$$\zeta_D(s) = \sum_{n_1, \dots, n_d}^{\infty} \lambda_{n_1, \dots, n_d}^{-s}, \quad (2.13)$$

onde  $s$  é um parâmetro complexo. A série acima converge para  $\text{Re } s > \frac{d}{2}$  e a sua continuação analítica define uma função meromórfica de  $s$ , analítica em  $s = 0$ . Como em todo procedimento de regularização devemos introduzir um parâmetro de massa  $\mu$  para trabalharmos com quantidades dimensionais, de forma que a seguinte transformação pode ser feita, a saber

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right) \zeta_D(s)|_{s=0}. \quad (2.14)$$

É possível mostrar que na situação onde estamos interessados a transformação apresentada acima nos dá uma identidade (ver apêndice A). Primeiramente mostraremos esse resultado para o caso das dimensões do hipercubo serem muito maiores do que  $\beta$ . A função zeta espectral nessa situação é dada por

$$\zeta_D(s) \equiv \frac{V}{(2\pi)^{d-1} \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k \frac{1}{\left( \vec{k}^2 + \left( \frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + (1 - \sigma) m_0^2 \right)^s}. \quad (2.15)$$

Definindo a quantidade  $\nu^2 = \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^2 \left( \vec{k}^2 + (1 - \sigma) m_0^2 \right)$ , temos que a função zeta espectral passa a ser escrita como

$$\zeta_D(s) = \frac{V}{(2\pi)^{d-1} \beta} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{2s} \int d^{d-1} k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\nu^2 + n^2)^s}. \quad (2.16)$$

Nesse momento vamos definir a função zeta de Epstein-Hurwitz modificada no plano complexo  $s$ ,  $\zeta(s, \nu)$ , que vem a ser dada por:

$$\zeta(s, \nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + \nu^2)^{-s}, \quad \nu^2 > 0. \quad (2.17)$$

Gostaríamos de salientar que escrevemos a função zeta espectral nessa situação em termos da função zeta de Epstein-Hurwitz modificada. A série definida pela equação (2.17) converge absolutamente e define no plano complexo uma função analítica para  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ . É possível estender analiticamente a função zeta de Epstein-Hurwitz modificada para todo o plano complexo. Na região  $\text{Re}(s) < 1$  a literatura apresenta uma representação integral para a extensão analítica [85] [86]. Para uma diferente representação dessa extensão analítica, escrita em termos das funções de Bessel modificadas  $K_\alpha(z)$ , as funções de Macdonald, veja a referência [87]. Como já enfatizamos, a representação em série de  $\zeta(s, \nu)$  converge para  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$  e a sua extensão analítica define uma função meromórfica de  $s$  que é analítica em  $s = 0$ . A função zeta de Epstein-Hurwitz modificada em todo o plano complexo  $s$  tem pólos para  $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \text{etc.}$  Não é difícil mostrar que os valores da função zeta de Epstein-Hurwitz modificada  $\zeta(s, \nu)$ , em  $s = 0$  sua derivada  $\frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, \nu)|_{s=0}$  são dados por

$$\zeta(s, \nu)|_{s=0} = 0, \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, \nu)|_{s=0} = -2 \ln(2 \sinh \pi \nu). \quad (2.19)$$

Dessa forma o parâmetro de massa  $\mu$  não traz nenhuma ambigüidade nessa situação. Esse mesmo resultado foi obtido por Hawking [77]. Para o caso  $d = 4$  e duas somas, utilizando os resultados apresentados por vários autores [85] [86] e [87], pode se mostrar que



$\zeta_D(s)|_{s=0} = 0$ . Novamente o parâmetro de massa  $\mu$  não traz nenhuma ambigüidade nessa situação. Esse resultado pode ser generalizado para outras situações. A função zeta espectral esta relacionada ao núcleo de calor ou operador de difusão por uma transformada de Mellin. O traço do operador de difusão vem a ser a integral da parte diagonal do núcleo de calor sobre a variedade que estamos trabalhando. Se utilizamos uma expansão assintótica da parte diagonal do núcleo de calor, podemos mostrar que a função zeta espectral é uma função meromórfica no plano complexo  $s$ , possuindo pólos simples cujos resíduos dependem dos coeficientes  $B_n$ . Por sua vez, esses coeficientes dependem dos coeficientes de Seeley-DeWitt, da segunda forma fundamental das fronteiras e da geometria induzida na fronteira [76] [88]. Pode-se mostrar que a estrutura polar da extensão analítica da função zeta espectral numa variedade compacta com fronteiras vem a ser dada por

$$\zeta_D(s) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n - \frac{d}{2} + s} + g_2(s) \right], \quad (2.20)$$

onde  $n$  é um inteiro ou um semi-inteiro. Ademais,  $g_2(s)$  é uma função analítica em  $\mathbf{C}$ . Como foi enfatizado por Blau e colaboradores [89], num espaço-tempo quadridimensional sem curvatura e com partículas sem massa e fronteiras suaves, os coeficientes  $B_2$  se anulam. Mostraremos que na situação que estamos interessados, i.e., um hipercubo onde os campos satisfazem as condições de fronteira de Dirichlet, esse coeficiente se anula (apêndice A).

Para prosseguirmos, vamos analisar em (2.11) a contribuição da função zeta espectral associada ao operador  $D$ , quando levamos em consideração as restrições geométricas que as fronteiras impõem sobre o campo escalar. Utilizando o espectro do operador  $D$ , dado pela equação (2.12), e também a definição da função-zeta espectral dada por (2.13), podemos

mostrar que a derivada da função-zeta espectral em  $s = 0$  é dada por

$$\frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} = - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \left( \ln \left( \left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2 + (2\pi n_d)^2 \right) + \ln \left( 1 + \frac{a^2 \beta^2}{4n_d^2 L^2 + q^2 \beta^2} \right) \right), \quad (2.21)$$

onde  $\vec{n}_{d-1} = (n_1, n_2, \dots, n_{d-1})$ ,  $q^2 = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{d-1}^2$  e  $a^2 = \left( \frac{(1-\sigma)m_0^2 L^2}{\pi^2} \right)$ . Queremos ressaltar que em (2.21) estamos usando o resultado de que  $\zeta(s, \nu)|_{s=0} = 0$ . Fazendo uso da identidade [90]

$$\ln \left( \left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2 + (2\pi n_d)^2 \right) = \int_1^{\left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} + \ln \left( 1 + (2\pi n_d)^2 \right), \quad (2.22)$$

podemos ver que o primeiro termo do lado direito de (2.21) nos dá uma contribuição divergente. Para prosseguirmos vamos utilizar a seguinte identidade

$$\sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} = \frac{1}{2\theta} \left( 1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \quad (2.23)$$

Utilizando ambas as identidades dadas pelas equações (2.22) e (2.23), é possível expressar a soma dupla que aparece em (2.21) como uma soma simples dada por

$$\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln \left( \left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2 + (2\pi n_d)^2 \right) = 2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \int_1^{\left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2} d\theta \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) + \alpha_1, \quad (2.24)$$

onde  $\alpha_1 = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln \left( 1 + (2\pi n_d)^2 \right)$ . Integrando em  $\theta$ , obtemos que (2.24) pode ser escrita como

$$\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln \left( \left( \frac{\pi \beta q}{L} \right)^2 + (2\pi n_d)^2 \right) = 2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( \frac{\pi \beta q}{2L} + \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi \beta q}{L}} \right) \right) + \alpha_2, \quad (2.25)$$

onde  $\alpha_2 = \alpha_1 - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( 1 + 2 \ln(1 - e^{-1}) \right)$ . Usaremos o fato de que a contribuição divergente dada por  $\alpha_2$  é independente de  $\beta$ , de forma que o uso da terceira lei da termodinâmica eliminará esta contribuição. O primeiro termo do lado direito da equação (2.25) é uma contribuição divergente correspondente a energia do ponto-zero. Utilizando o conhecido

resultado matemático [91] [92] dado por

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{a^2}{n^2 + b^2} \right) = \frac{\sinh^2(\pi\sqrt{a^2 + b^2})}{\sinh^2(\pi b)}, \quad (2.26)$$

podemos escrever o último termo de (2.21) de forma mais simples. Usando as equações (2.25) e (2.26), a derivada da função zeta espectral associada ao operador  $D$  avaliada em  $s = 0$  pode ser reescrita como

$$\frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} = -2 \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[ \ln \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2 + a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)} \right) + \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}} \right) + \frac{\pi\beta q}{2L} \right] - \alpha_2. \quad (2.27)$$

Pode-se mostrar que a função geradora de valor independente  $Q_0(\sigma, h)$  satisfaz à condição  $Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = 1$  e também à

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{2p g_0^{\frac{2}{p}} (p!)^{\frac{p}{2}}}. \quad (2.28)$$

A prova das identidades acima mencionadas pode ser encontrada no apêndice B. Em seguida mostraremos que é sempre possível encontrar um valor máximo para a entropia específica num sistema a altas temperaturas onde um campo escalar com auto-interação se encontra num regime de acoplamento forte. Para o caso de baixas temperaturas ou também temperaturas intermediárias, o sinal da energia de Casimir é fundamental para a existência do valor máximo para a entropia específica.

## 2.4 A entropia específica para a teoria $(g_0 \varphi^p)_d$ acoplada fortemente

Nesta seção, vamos calcular a entropia específica  $\frac{S}{E}$  do sistema. Por simplicidade, vamos definir  $\ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0} = \ln Z(\beta, \Omega)$ . Das equações (2.8) e (2.9), e fazendo as seguintes identificações para a energia média  $E(\beta, \Omega) = E$  e para a entropia  $S(\beta, \Omega) = S$ , temos

que

$$\frac{S}{E} = \beta - \ln Z(\beta, \Omega) \left( \frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta, \Omega) \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Levando as equações (2.27) e (2.28) na equação (2.11), temos que  $\ln Z(\beta, \Omega)$  é dado por

$$\ln Z(\beta, \Omega) = - \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{2p(p!)^{\frac{p}{2}} g_0^{\frac{2}{p}}} \left( \frac{\alpha'}{2} + I_2(\beta) \right), \quad (2.30)$$

onde  $\alpha' = \alpha + \alpha_2$  e a quantidade  $I_2(\beta)$  escreve-se:

$$I_2(\beta) = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[ \ln \left( \frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)} \right) + \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}} \right) + \frac{\pi\beta q}{2L} \right]. \quad (2.31)$$

Definamos  $C_1$  e  $C_2 = -\frac{2C_1}{\alpha'}$ , que dependem apenas de  $p$  e  $g_0$  e não de  $\beta$ , como sendo:

$$C_1 = - \frac{\alpha' \Gamma(\frac{2}{p})}{4p(p!)^{\frac{p}{2}} g_0^{\frac{2}{p}}}. \quad (2.32)$$

Deste modo, a quantidade  $\ln Z(\beta, \Omega)$  pode ser escrita de uma maneira geral como

$$\ln Z(\beta, \Omega) = C_1 - C_2 I_2(\beta). \quad (2.33)$$

Aproveitamos para aludir ao fato que a quantidade  $C_1$  corresponde a uma expressão divergente,  $C_2$  é finito e o último termo da soma no lado direito da equação (2.27) é proporcional a energia do ponto zero. De modo a renormalizar  $\ln Z(\beta, \Omega)$  podemos utilizar, primeiramente, a terceira lei da termodinâmica. A derivada de  $\ln Z(\beta, \Omega)$  com respeito à  $\beta$  vale

$$\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta, \Omega) = -C_2 \frac{d}{d\beta} I_2(\beta), \quad (2.34)$$

onde a derivada de  $I_2(\beta)$  com respeito à  $\beta$  é dada por

$$\frac{d}{d\beta} I_2(\beta) = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( \left( \sqrt{q^2+a^2} \coth\left(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\right) - q \coth\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right) \right) + \frac{2q}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}} - 1} + q \right). \quad (2.35)$$

Usando a definição da energia média dada pela equação (2.8), e as equações (2.34) e (2.35), temos que a energia média não-renormalizada é dada por

$$E = \frac{\pi C_2}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( \left( \sqrt{q^2 + a^2} \coth\left(\frac{\pi\beta}{2L} \sqrt{q^2 + a^2}\right) - q \coth\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right) \right) + \frac{2q}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}} - 1} + q \right). \quad (2.36)$$

Para  $a = 0$ , i.e., o caso sem massa, usando a equação (2.32) temos que a energia média não-renormalizada  $E(\beta, \Omega)$  torna-se

$$E(\beta, \Omega)|_{a=0} = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{4p (p!)^{\frac{p}{2}} g_0^{\frac{p}{2}} L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left( \frac{2q}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}} - 1} + q \right). \quad (2.37)$$

A fórmula acima tem a interpretação simples de ser somas no espaço de fase sobre a energia média de cada modo, onde a energia do ponto zero está incluída. Perceba que a divergência que aparece na energia média dada por (2.37) vem da energia do ponto zero, esta última dada por

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.38)$$

e seu sinal é dado pela razão entre o primeiro e o segundo termo do lado direito da equação (2.37), para uma energia do ponto zero negativa. O sinal da energia média renormalizada será discutido com mais detalhes ao longo deste capítulo.

Façamos, agora, uma breve digressão sobre como achar a energia do ponto zero renormalizada. Uma regularização analítica produz a energia do ponto zero renormalizada. Usando a definição da função zeta de Epstein dada por

$$A(a_1, a_2, \dots, a_k; 2s) = \sum_{\vec{n}_k=-\infty}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_k n_k^2)^{-s}, \quad (2.39)$$

podemos encontrar a extensão analítica da função zeta de Epstein no plano complexo, em particular no valor  $s = -\frac{1}{2}$ , para definirmos a energia de Casimir. A estrutura das

divergências da extensão analítica desta função é bem conhecida na literatura [93] [94] [95] [96]. A energia do ponto zero renormalizada  $E_0^r$  é definida como a parte finita de uma função meromórfica que possui pólos simples. Detalhes destes cálculos podem ser encontrados nas referências [39] [97]. Como salientado na referência [89], existe uma ambigüidade no procedimento de renormalização para se encontrar a energia de Casimir.

É possível demonstrar que, na regularização de uma quantidade mal-definida, se a introdução de um corte exponencial produzir uma função analítica com um pólo na origem, a extensão analítica da função zeta generalizada, ou o método da função zeta, é equivalente à aplicação de um corte com a subtração da parte singular na origem [98] [99]. Uma vez aceita a vantagem do método da função zeta sobre o método do corte com a subtração dos termos polares, devido ao fato de ser um método de extensão analítica, estamos frente a um problema: o comportamento de escala não-trivial da energia do vácuo. Isto decorre do fato de que, em um método de extensão analítica, é necessário introduzir um parâmetro de massa  $\mu$ , i.e., uma escala de normalização de forma que a função zeta de Epstein seja adimensional para todos os valores de  $s$ . Se considerarmos uma mudança na escala de normalização  $\mu \rightarrow \mu'$ , é possível mostrar que, em um espaço-tempo com  $d$  dimensões, a ambigüidade da energia do ponto zero renormalizada está relacionada ao coeficiente  $B_{\frac{d}{2}}$  pela expressão:

$$E_0^r(\mu') = E_0^r(\mu) - \mu \frac{B_{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{d/2}} \ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right). \quad (2.40)$$

Muito embora, em situações gerais, exista uma ambigüidade no procedimento de renormalização, em nosso caso  $\zeta_D(s)|_{s=0} = B_{\frac{d}{2}} = 0$ . Portanto, a mudança de escala acima é trivial e, conseqüentemente, a energia do ponto zero renormalizada não depende de  $\mu$ .

Note que, apesar de aparecer a constante de acoplamento em nossa expressão para

energia média renormalizada, até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , estamos interessados apenas na razão  $\frac{S}{E}$ , onde não existe tal dependência. É importante ressaltar que isto acontece apenas nesta expansão de acoplamento forte, até a ordem  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , onde somos capazes de separar  $\ln Z$  em duas contribuições, conforme dito anteriormente: uma que é proporcional à função zeta espectral e outra que possui uma contribuição da função geradora de valor independente  $Q_0(\sigma, h)$ .

Após estas discussões, podemos apresentar a entropia do sistema. Substituindo as equações (2.33) e (2.34) na definição da entropia (2.9), temos a seguinte expressão para a entropia do sistema

$$S = C_1 - \beta C_2 \left( \frac{I_2(\beta)}{\beta} - \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) \right). \quad (2.41)$$

Um sistema com um estado fundamental único corresponde a um estado de entropia nula a temperatura zero. Para sistemas com estados fundamentais degenerados, esta propriedade também é válida se a entropia for uma quantidade extensiva. Como, a temperatura zero, o sistema vai para um estado fundamental não-degenerado, a entropia deve se anular. Portanto, esta expressão da entropia dada por (2.41) deve satisfazer a terceira lei da termodinâmica, i.e., a entropia de um sistema tem a propriedade restritiva  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} S = 0$ .

Para continuarmos, vamos analisar o seguinte limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{I_2(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) = \frac{\pi a^2}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q^2 + a^2} + q} + \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} q. \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.42) em (2.41), e usando a terceira lei da termodinâmica, chegamos a

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} S = C_1 = 0. \quad (2.43)$$

Portanto, o primeiro passo a se dar para obtermos um resultado finito para  $\ln Z(\beta, \Omega)$  foi alcançado, já que fomos capazes de renormalizar  $C_1$  para zero usando a lei citada

anteriormente. Após isso, temos

$$\ln Z(\beta, \Omega) = -C_2 I_2(\beta). \quad (2.44)$$

Note que em  $\ln Z(\beta, \Omega)$  (veja (2.31)) ainda temos a contribuição que vem da energia do ponto zero, a qual é dada por

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

Após uma continuação analítica, obtemos a energia renormalizada do ponto zero, definida por  $E_0^{(r)}$ , e, conseqüentemente, um resultado finito para  $\ln Z(\beta, \Omega)$ .

Substituindo a equação (2.44) na equação (2.29), podemos observar que, para o caso  $a = 0$ , i.e., sem massa, o quociente  $\frac{S}{E}$  nos dá

$$\frac{S}{E} = 2\pi R T_d(\xi), \quad (2.46)$$

onde estamos definindo uma variável sem dimensões  $\xi$  dada por  $\xi = \beta/L$ . Como o campo está confinado dentro do hipercubo, o raio da menor esfera  $(d-1)$ -dimensional que circunscreve este sistema deverá ser dado por  $R = \frac{1}{2}\sqrt{(d-1)}L$ . A função  $T_d(\xi)$ , definida na equação (2.46), é dada por

$$T_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P_d(\xi) + R_d(\xi)}{\varepsilon_d^{(r)} + P_d(\xi)}, \quad (2.47)$$

onde  $\varepsilon_d^{(r)} = LE_0^{(r)}$  e as funções positivas  $P_d(\xi)$  e  $R_d(\xi)$  estão definidas, respectivamente, por

$$P_d(\xi) = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \pi q \left( e^{\pi \xi q} - 1 \right)^{-1} \quad (2.48)$$

e

$$R_d(\xi) = - \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \ln \left( 1 - e^{-\pi \xi q} \right). \quad (2.49)$$



Agora, vamos estudar a função  $T_d(\xi)$ , dada por (2.47). O limite quântico vale sempre que  $T_d(\xi) \leq 1$  para todos os valores de  $\xi$ . A partir da definição da função  $T_d(\xi)$ , dada por (2.47), temos que  $T_d(\xi)$  possui um valor divergente apenas quando a energia renormalizada do ponto zero for negativa. Para o ponto  $\xi = \xi_0$ , o qual satisfaz  $\varepsilon_d^{(r)} + P_d(\xi_0) = 0$ , a cota quântica não é legítima.

Cálculos numéricos podem nos ajudar a entender tal cota quântica. Na figura (1), apresentamos o gráfico da função  $T_d(\xi)$  para o caso  $d = 3$  sobre o intervalo  $0 < \xi < 2$ . Como a energia renormalizada do ponto zero é positiva [97], a função  $T_d(\xi)$  também será positiva para todos os valores de  $\xi$ . Há um máximo para algum valor de  $\xi$ , que denominamos  $\xi_{max}$ , o qual é perto da unidade. Para este caso, verificamos a existência de uma cota quântica. Na figura (2), apresentamos a mesma função  $T_d(\xi)$  para o caso  $d = 4$  sobre o intervalo  $0 < \xi < 2$ . Como neste caso a energia renormalizada do ponto zero é negativa, temos que, para alguns valores de  $\xi = \xi_0$  a função  $T_d(\xi)$  diverge. Há um valor crítico  $\xi_c$  onde, para  $\xi > \xi_c$ , a entropia específica encontra-se sem limite superior.

Vamos investigar dois casos. O primeiro será onde a energia renormalizada do ponto zero é positiva (veja Fig. 1), onde um valor máximo para  $T_d(\xi)$  aparece. O segundo caso, com uma energia renormalizada do ponto zero negativa, invalida a cota quântica. Para dimensões do espaço-tempo pares, a energia renormalizada do ponto zero é sempre negativa. Para o caso de espaço-tempo com dimensão ímpar, sabe-se que, para  $d \leq 29$ , esta quantidade é positiva, e para  $d > 29$ , ela muda o seu sinal [39].

Para os casos de energia renormalizada do ponto zero positiva, uma equação para o valor máximo de  $T_d(\xi)$  pode ser encontrada. A equação para o máximo é dada por  $R_d(\xi_{max}) = \varepsilon_d^{(r)} \xi_{max}$ . Substituindo este  $\xi_{max}$  na equação (2.47) podemos achar que

$T_d(\xi_{max}) = \frac{\xi_{max}}{\pi\sqrt{d-1}}$ . Usando o mesmo procedimento na equação (2.46), teremos que  $\frac{S}{E} = \beta_{max}$ , onde  $\beta_{max} = L\xi_{max}$ . Portanto, podemos concluir que, para espaço-tempo com dimensões ímpares  $d \leq 29$ , existe um valor máximo para a função  $T_d(\xi)$ .

Podemos ver que o valor máximo de  $T_d(\xi)$  depende da energia renormalizada do ponto zero, onde, para o caso  $d = 3$ , é menor que um. Para provar que, para  $d \leq 29$  ímpar,  $T_d(\xi)$  satisfaz a desigualdade  $T_d(\xi) < 1$ , vamos definir uma função auxiliar  $R'_d(\xi)$  que satisfaz  $R_d(\xi) < R'_d(\xi)$ . Tal função é dada por

$$R'_d(\xi) = - \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr r^{d-2} \ln(1 - e^{-\pi\xi r}), \quad (2.50)$$

onde a parte angular da integração  $\Omega_R$  corresponde à região onde  $r_i > 0$ . Efetuando esta integral [92], teremos que

$$R'_d(\xi) = S_{d-1} \Gamma(d-1) \zeta(d) \left(\frac{1}{\pi\xi}\right)^{d-1}. \quad (2.51)$$

onde o termo angular é  $S_{d-1} = \frac{(\sqrt{\pi})^{d-1}}{2^{d-2}\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ . Usando a equação (2.51) na equação para o máximo, i.e.,  $R_d(\xi_{max}) = \varepsilon_d^{(r)} \xi_{max}$ , podemos encontrar que  $\xi_{max} < \xi'_{max}$ , onde

$$\xi'_{max} = \left( \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^{d-1}} \frac{\Gamma(d-1) \zeta(d)}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \varepsilon_d^{(r)}} \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (2.52)$$

e  $T_d(\xi_{max}) < \frac{\xi'_{max}}{\pi\sqrt{d-1}}$ . Na tabela (1) apresentamos os valores máximos para  $d = 3$  até  $d = 29$ , para  $d$ 's ímpares.

<b>d</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>13</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$6.2 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-4}$	$4.4 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-6}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.3763	0.2645	0.2303	0.2130	0.2025	0.1953

<b>d</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	<b>19</b>	<b>21</b>	<b>23</b>	<b>25</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$2.0 \times 10^{-6}$	$4.5 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-8}$	$2.2 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-9}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1901	0.1861	0.1829	0.1804	0.1784	0.1769

<b>d</b>	<b>27</b>	<b>29</b>	<b>31</b>
$\varepsilon_d^{(r)}$	$2.3 \times 10^{-10}$	$3.0 \times 10^{-11}$	$-1.1 \times 10^{-11}$
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1761	0.1781	sem máximo

Tabela 2.1: Valores da energia do vácuo  $\varepsilon_d^{(r)}$  e valores máximos para a função  $T_d(\xi_{max})$

em dimensões ímpares, no intervalo de  $d = 3$  até  $d = 29$ .

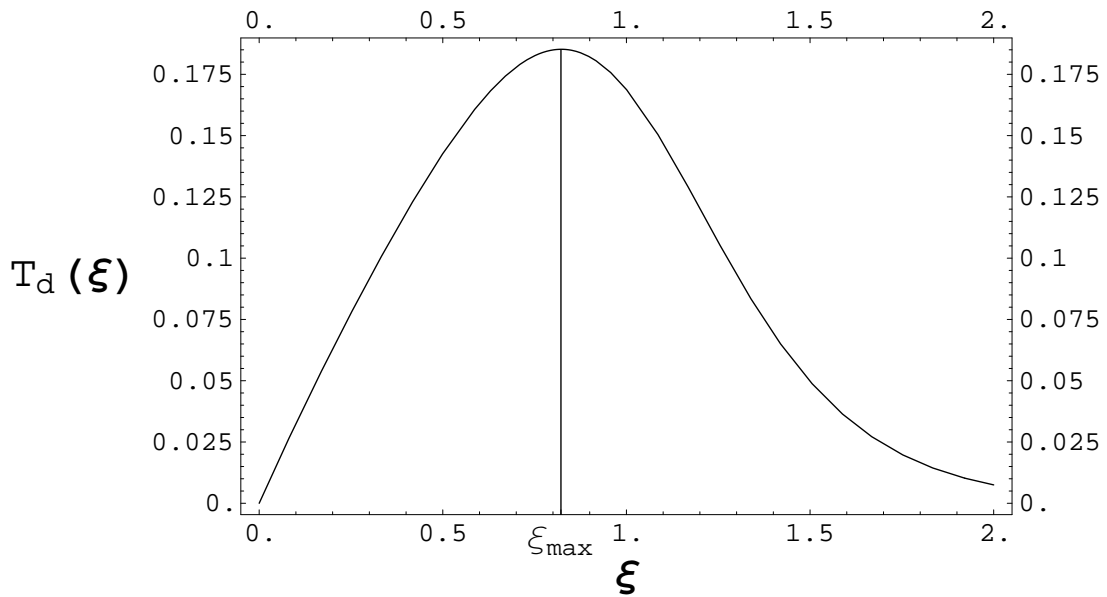


Figura 2.1:  $T_d(\xi)$  como uma função de  $\xi$  para o caso de energia renormalizada positiva do ponto zero para  $d = 3$ .

Até agora, temos estudado a cota quântica para dimensões gerais, baseado nas somas dada por (2.48) e (2.49). Contudo, podemos encontrar uma função  $T'_d(\xi)$  que limita superiormente a função  $T_d(\xi)$  a qual é mais fácil de se lidar. Para este propósito, de modo

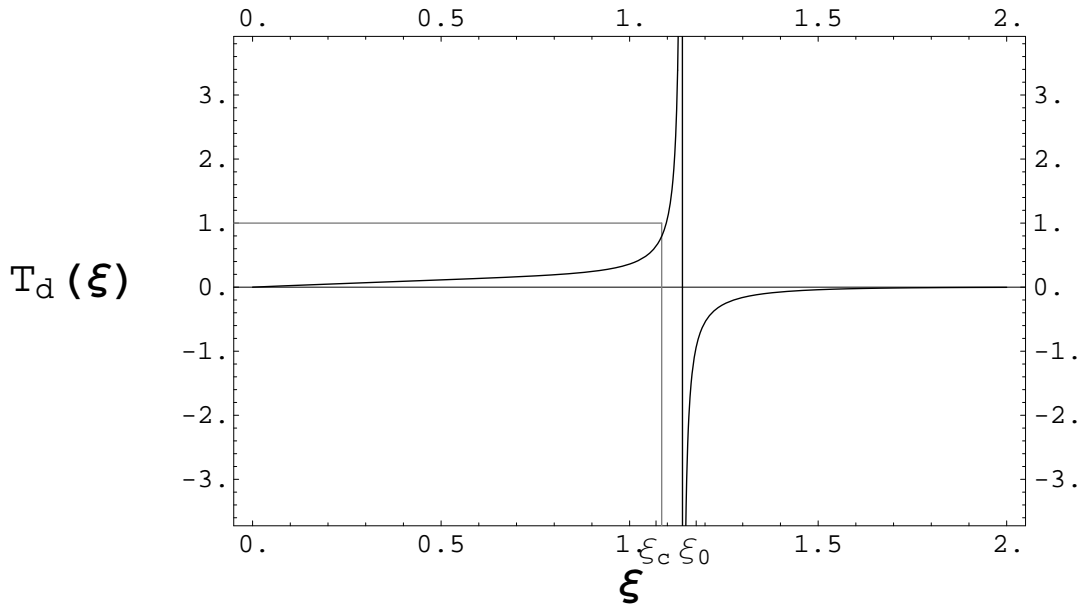


Figura 2.2:  $T_d(\xi)$  como uma função de  $\xi$  para o caso de energia renormalizada negativa do ponto zero para  $d = 4$ .

similar ao definirmos a função  $R'_d(\xi)$ , vamos também definir as funções auxiliares  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$ , que obedecem às seguintes relações

$$P_d(\xi) < P'_d(\xi), \quad (2.53)$$

e

$$P_d(\xi) > P''_d(\xi), \quad (2.54)$$

de modo que a entropia específica satisfaz à desigualdade

$$\frac{S}{E} < 2\pi R T'_d(\xi), \quad (2.55)$$

onde

$$T'_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P'_d(\xi) + R'_d(\xi)}{\varepsilon_d^{(r)} + P''_d(\xi)}. \quad (2.56)$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher como funções auxiliares  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$  as integrais

$$P'_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr r^{d-1} (e^{\pi \xi r} - 1)^{-1} \quad (2.57)$$

e

$$P''_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_1^\infty dr r^{d-1} (e^{\pi \xi r} - 1)^{-1}. \quad (2.58)$$

Efetuando tais integrais [92], obtemos que  $P'_d(\xi)$  e  $P''_d(\xi)$  são dadas por

$$P'_d(\xi) = \pi S_{d-1} \Gamma(d) \zeta(d) \left( \frac{1}{\pi \xi} \right)^d \quad (2.59)$$

e

$$P''_d(\xi) = \pi S_{d-1} \left( \Gamma(d) \zeta(d) - f(d) \right) \left( \frac{1}{\pi \xi} \right)^d, \quad (2.60)$$

onde a série  $f(d)$  é dada por

$$f(d) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{(d+l-1)!}. \quad (2.61)$$

Para atingirmos um limite superior para a entropia específica em um espaço-tempo euclidiano  $d$ -dimensional genérico, temos apenas que substituir as equações (2.51), (2.59) e (2.60) na equação (2.56). Teremos

$$T'_d(\xi) = \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1} + h_2(d) \xi^{-1}}, \quad (2.62)$$

onde

$$h_1(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^d \sqrt{d-1}} \zeta(d) \left( \Gamma(d) + \Gamma(d-1) \right), \quad (2.63)$$

e

$$h_2(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^{d-1}} \left( \Gamma(d) \zeta(d) - f(d) \right). \quad (2.64)$$

Vamos estudar o comportamento da entropia específica para altas e baixas temperaturas. Para o primeiro caso, temos:

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi. \quad (2.65)$$

Este comportamento da entropia específica, que aumenta com  $\beta$  neste limite de altas temperaturas, foi obtido por Deutsch na referência [50]. Bekenstein, usando a condição  $\beta \ll R$  (limite de altas temperaturas), também obteve o mesmo comportamento na referência [46]. Como a energia térmica pode compensar a energia renormalizada do ponto zero negativa, o limite quântico é válido.

Quando consideramos o limite de baixas temperaturas para a entropia específica, podemos ver que o problema do sinal da energia renormalizada do ponto zero aparece, podendo invalidar o limite quântico. Neste limite, temos:

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)}} \xi^{1-d}. \quad (2.66)$$

É bem conhecido que a energia renormalizada do ponto zero para campos escalares não-massivos dentro de um cubo, assumindo condições de contorno de Dirichlet, muda de sinal com a dimensão, i.e., para  $d = 2$ , temos que  $E_0^{(r)} < 0$ , para  $d = 3$ , temos que  $E_0^{(r)} > 0$ , e para o caso importante  $d = 4$ , tem-se  $E_0^{(r)} < 0$ . Muito embora muitos autores afirmem que a energia das fronteiras de tais sistemas podem compensar a energia renormalizada do ponto zero negativa, produzindo uma energia líquida positiva, esta é uma questão ainda em aberto na literatura.

Em resumo, examinamos campos escalares com auto-interação no regime de forte acoplamento em equilíbrio com um banho térmico na presença de fronteiras macroscópicas. Na expansão perturbativa de acoplamento forte, podemos dividir o problema de definir o

funcional gerador em duas partes: como definir precisamente o funcional gerador de valor independente e como ir além desta aproximação de valor independente, levando em conta a parte da perturbação. Utilizando a representação de Klauder para o funcional gerador de valor independente, e até a ordem de  $(g_0)^{-\frac{2}{p}}$ , mostramos que é possível obter um limite quântico para o sistema definido por um campo escalar com auto-interação no regime de forte acoplamento. Estabelecemos, assim, um limite na capacidade de armazenamento de informação de um sistema fortemente acoplado em um tratamento independente da física gravitacional.

Mostramos que, no regime de forte acoplamento, a temperaturas baixas e intermediárias ( $\beta \approx L$ ), a cota quântica depende do sinal da energia renormalizada do ponto zero  $E_0^{(r)}$ . Para dimensões  $d$  pares do espaço-tempo e também para valores ímpares que satisfazem à desigualdade  $d > 29$ ,  $E_0^{(r)}$  é uma quantidade negativa. Portanto, a cota quântica não é válida. Para valores ímpares de  $d$  que satisfazem à  $d \leq 29$ ,  $E_0^{(r)}$  é uma quantidade positiva. Nesta situação, a entropia específica obedece a uma cota quântica. Definindo  $\varepsilon_d^{(r)}$  como sendo a energia renormalizada do ponto para a teoria livre por unidade de comprimento, atingimos as seguintes dependências funcionais: para baixas temperaturas:  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)} \xi^{d-1}}$ , onde  $R$  é o raio da menor esfera que circunscreve o sistema; para o caso de altas temperaturas, temos que a entropia específica sempre satisfaz a uma cota quântica, dado por  $\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \xi$ .

Muito embora nossos resultados estejam baseados em uma escolha bem particular de um formato para as fronteiras macroscópicas que confinam o campo no volume  $\Omega$ , é interessante observar que a cota quântica é independente de qualquer configuração das fronteiras. Em outras palavras, mesmo tendo escolhido um hipercubo para confinar os

campos em um volume finito, uma fronteira arbitrária deveria dar os mesmos resultados. Se tivermos um domínio  $G$  e se considerarmos o problema de autovalor para um operador diferencial parcial de segunda ordem auto-adjunto que atua em funções escalares, uma propriedade importante de monotonicidade dos autovalores associados com a condição de contorno de Dirichlet nos leva ao resultado de que, sob tais condições de contorno, o  $n$ -ésimo autovalor do domínio  $G$  nunca excede ao  $n$ -ésimo autovalor do subdomínio  $G^*$ . Da mesma maneira, o comportamento assintótico dos autovalores não dependem do formato, mas apenas do tamanho do domínio fundamental. Estes dois resultados podem ser usados para se demonstrar que, para qualquer configuração, encontraremos os mesmos resultados.

## 2.5 Limites para a entropia: visão geral

Vimos nas seções anteriores que o dito limite de Bekenstein para a entropia de um sistema de matéria não possui caráter universal. Existem evidências também que mostram que um limite para a entropia pode não existir para teorias com liberdade assintótica [100] [101]. Isto pode decorrer do fato de ele não ser um limite covariante. Vimos também a importância da verificação de um valor máximo para a entropia de modo a estabelecer um argumento teórico para a existência do princípio holográfico, assim como esclarecer seu significado. O princípio holográfico, por sua vez, se torna necessário se quisermos manter a unitariedade em processos físicos que envolvam a formação de buracos negros. Este princípio, como dito acima, implica em uma redução radical do número de graus de liberdade necessários para se manter a unitariedade. Note que, em uma teoria de



campos local definida num espaço-tempo clássico, o número dos graus de liberdade deve ser proporcional ao volume do sistema. Estamos em face a uma dificuldade fundamental de combinar os princípios da teoria dos campos quantizados com o princípio holográfico. A questão que naturalmente aparece nesse contexto é explicar como a localidade emerge se a natureza deve ser regida por uma holografia.

Basicamente, podemos tomar duas linhas de raciocínio de modo a resolver tal embate. Uma delas é entender que a localidade é uma característica fundamental das teorias físicas. A princípio, uma teoria local pode se tornar holográfica, desde que seja identificada alguma invariância de calibre, de modo que só os números de graus de liberdade físicos previstos por um máximo na entropia são levados em conta. A dificuldade, é claro, está em como estabelecer (ou encontrar) tal invariância de calibre. A título de ilustração, podemos citar os trabalhos de 't Hooft [102] [103] [104] [105] [106] que investigam modelos locais onde estados quânticos são entendidos como limites, em certo sentido, de um sistema dissipativo clássico. Outro tipo de abordagem considera a localidade não como um objeto fundamental, mas como um fenômeno emergente. Neste caso, o princípio holográfico tem significado fundamental. Como dito anteriormente, a grande questão seria entender a emergência da localidade visto que dados holográficos são associados, de modo natural, a áreas de superfícies. Outro ponto seria compreender como tais dados holográficos são gerados e a evolução dos mesmos, além de como traduzi-los para um espaço-tempo habitado por campos quânticos locais. Dentro deste contexto, podemos citar a correspondência entre a teoria de campos conforme e o espaço de Anti-de Sitter (Ads/CFT) [107] [108] [109], a qual empresta uma certa evidência para este ponto de vista. No entanto, uma crítica usualmente feita é que esta correspondência não poderia ajudar a compreender o

assunto de modo mais amplo, já que ela se beneficia de várias peculiaridades existentes em universos de Anti-de Sitter para os quais ela se aplica.

Quais das duas abordagens seria a “correta”? Claro está que vai depender do que se considera mais fundamental, a eliminação da maioria dos graus de liberdade ou a manutenção da localidade. Muito embora estejamos tratando estes dois objetos como mutuamente exclusivos, pode ser que eles não o sejam. De toda esta discussão, podemos aprender uma coisa: independente de qual situação seja fundamental, se realmente verificarmos a existência universal de um valor máximo para a entropia de um sistema de matéria arbitrário, este fato deve implicar em algum aspecto não-local das teorias físicas. Portanto, o estudo de circunstâncias que exibem particularidades não-locais pode vir a ser bastante importante para a compreensão da “oposição” princípio holográfico/localidade. Além disso, se tomamos a teoria dos campos quantizados como ponto de partida para o entendimento de teorias físicas fundamentais, podemos levar em conta as idéias de 't Hooft citadas nos parágrafos anteriores que consideram o mundo quântico como limite, em certo sentido, de uma conjuntura clássica. Na verdade, podemos ampliar esta intenção e imaginarmos o seguinte: dentro de uma certa situação clássica, temos aspectos do modelo que são conhecidos para nós e que sabemos como analisar (se o leitor preferir, pode conceber estes aspectos como sendo os verdadeiros graus de liberdade necessários para se estudar o modelo em questão). Contudo, temos certas peculiaridades do sistema considerado que devem ser levadas em conta para uma melhor descrição do mesmo, mas que, por apresentarem uma natureza mais complicada de se modelar facilmente, se tornam “desconhecidas” para nós (dentro da analogia anterior, certo graus de liberdade que, muito embora não-físicos, a introdução destes no sistema se faz necessário para um estudo

mais apurado deste último); devemos, portanto, encontrar uma maneira de inserir tais “peculiaridades desconhecidas” em nossa análise. Feito isto, podemos pensar em um certo “limite” em que dados objetos físicos deste sistema clássico passam a exibir propriedades quânticas. Em outras palavras, a descrição quântica do sistema pode ser vista como um limite assintótico de alguma quantidade (ou variável) deste em uma situação clássica. O leitor mais atento já deve ter percebido que estas idéias são bastante semelhantes ao modelo da quantização estocástica. De certo modo, processos estocásticos podem ser pensados como o estudo de um sistema com variáveis conhecidas e com variáveis que possuam características aleatórias (que seriam, em analogia com a discussão acima, as tais “peculiaridades desconhecidas”); dito de outra maneira, a influência destas últimas na descrição do sistema se faz de forma incerta. Basta lembrarmos do exemplo muito conhecido do andar do bêbado. O instinto deste o levará a caminhar para casa em linha reta; contudo, seu estado etílico lhe desviará de sua rota de modo imprevisível. Em uma linguagem mais técnica, processos estocásticos analisam situações onde a existência de certos objetos aleatórios, em um sentido pré-determinado, passam a conferir ao sistema em questão características fortuitas, imprevisíveis.

Como isto pode nos ajudar a entender melhor a dicotomia princípio holográfico/localidade? Bom, se imaginarmos que tal condição pode gerar, de alguma maneira ainda a ser compreendida, elementos que concedam uma particularidade aleatória às teorias físicas, o estudo de processos estocásticos pode aprofundar nosso entendimento acerca do tema. Além disso, como o princípio holográfico requer um máximo na entropia de sistemas físicos, e como a entropia se encontra naturalmente inserida dentro do contexto de processos estocásticos, pode ser que haja um elo natural entre os dois assuntos. Soma-

se isso ao fato de que, conforme discutido anteriormente, a coexistência do princípio holográfico e da localidade só poderá ser pacífica se tivermos alguma característica não-local em nossa descrição física; isto acontece de maneira natural em processos estocásticos não-markovianos, onde a introdução de uma memória traz uma não-localidade para o sistema. Dentro deste contexto, a análise com mais profundidade de processos estocásticos em variedades riemannianas pode vir a ser útil na compreensão deste assunto tão importante e fascinante. Cumpre deixar claro ao leitor que tais idéias ainda estão no campo da especulação. Se realmente os processos estocásticos são fundamentais para o entendimento da questão colocada acima, ou se configura apenas uma coincidência no plano da semântica, isto só será verificado após intensas análises sobre a matéria. Além do mais, como é de praxe no estudo de objetos da ciência, este tratamento configura a visão particular do autor a respeito de um problema ainda em aberto na física teórica. Em vista disso, iremos introduzir, nos próximos capítulos, a denominada quantização estocástica de campos. Vamos ver, primeiramente, como ela nos ajuda a quantizar um campo escalar com auto-interação e como podemos usá-la na regularização de teorias físicas. Feito esta análise preliminar, vamos ao estudo da quantização estocástica não-markoviana. Veremos que ela também pode nos auxiliar a contornar sérias dificuldades na quantização de teorias com ações complexas. Como uma generalização da quantização estocástica, vamos introduzir, finalmente, o seu estudo em espaços-tempo com curvatura ou com horizonte de eventos. Vamos mostrar que a quantização estocástica de campos definidos em tais variedades pode ser implantada sem maiores dificuldades.

# Capítulo 3

## O método de quantização estocástica de Parisi-Wu

### 3.1 Aspectos básicos da quantização estocástica

Na versão euclidiana da teoria de campos estamos interessados em calcular as funções de Schwinger da teoria em questão. Em 1981, Parisi e Wu [110] introduziram a quantização estocástica como uma alternativa às quantizações canônica ou por integrais de trajetória. Por simplicidade discutiremos um campo escalar. Em linhas gerais podemos descrever o método de quantização estocástica da seguinte forma. A princípio efetuamos uma continuação analítica para tempo complexo. Desta forma obtemos a teoria de campos euclidiana. Em seguida introduzimos um parâmetro de Markov  $\tau$ , chamado na literatura de tempo fictício. Assumimos que o campo euclidiano depende das coordenadas euclidianas e deste parâmetro de Markov. Introduzimos um ruído branco gaussiano e assumimos que o campo euclidiano satisfaz uma equação de Langevin markoviana:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x),$$

onde  $S$  é a ação euclidiana do sistema. Devemos assumir também que as funções de correlação associadas ao ruído satisfazem

$$\langle \eta(\tau, x) \rangle_\eta = 0,$$

e também

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau')\delta^d(x - x'),$$

onde  $\langle \dots \rangle_\eta$  significa média estocástica. Por ruído branco entendemos um campo aleatório cuja transformada de Fourier de dois pontos é uma função constante. Define-se processo markoviano como sendo aquele que é um processo estocástico sem memória.

Pode-se mostrar que as funções de Schwinger (funções de correlações de  $n$ -pontos euclidianas) da teoria em questão podem ser obtidas no limite assintótico do parâmetro de Markov  $\tau \rightarrow \infty$ , onde calculamos médias estocásticas  $\langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta$ .

Desta forma temos que:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \frac{\int [d\varphi] \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) e^{-S[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{-S[\varphi]}},$$

onde  $S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_I[\varphi]$  é a ação  $d$ -dimensional. Este resultado nos leva a considerar a medida funcional como a distribuição estacionária associada a um processo estocástico. Note que a solução da equação de Langevin necessita de uma condição inicial, como por exemplo:

$$\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = \varphi_0(x).$$

Queremos enfatizar que a quantização estocástica introduz uma nova forma de se regularizar teorias de campos, que preserva todas as simetrias da teoria original. Existem duas formas distintas de se introduzir a regularização estocástica. A primeira é suavizar o ruído branco no funcional original [111] [112]. A outra possibilidade é modificar a equação

de Langevin markoviana para uma equação de Langevin não-markoviana [113]. Recentemente, foi investigada esta modificação no trabalho [114]. Discutiremos mais adiante como uma equação de Langevin não-markoviana pode auxiliar na implementação da quantização estocástica em teorias topológicas [115]. Não deixemos de citar que este método também pode ajudar no estudo da equação de Langevin de Parisi-Wu em variedades riemannianas compactas sem ou com horizonte de eventos [116] [117].

Como dito anteriormente, este método de quantização difere das outras quantizações de campos, a canônica e a de integrais de trajetória, em muitos aspectos. A idéia principal da quantização estocástica é a equivalência entre um sistema quântico em  $d$  dimensões e um sistema clássico  $(d+1)$ -dimensional com flutuações aleatórias. Como foi ratificado por diversos autores [118], a quantização estocástica pode revelar novos elementos estruturais da teoria clássica que permanecem, até agora, despercebidos. Alguns dos mais importantes artigos sobre o tema podem ser encontrados em [119]. Uma ligeira introdução em quantização estocástica pode ser encontrada nas referências [120] e [121]. O leitor interessado no tema pode encontrar na referência [122] uma ótima fonte de informação.

O método original proposto por Parisi e Wu pode ser implementado para se quantizar quaisquer campos de spin um, abeliano ou não-abeliano e também campos de spin semi-inteiro. A generalização para campos fermiônicos se inicia nos trabalhos [123] [124] [125]. Pode-se mostrar que, para campos de férmions não-massivos, ter-se-á problemas de convergência. Um modo de se evitar tal problema seria a introdução de um kernel na equação de Langevin descrevendo a evolução de dois campos grassmannianos. Dentro deste contexto, é válido perguntar se tem sentido um movimento browniano com variáveis que anticomutam entre si. Não vamos nos preocupar em dar uma resposta para tal questão.

Limitaremos-nos a examinar, a princípio, o método da quantização estocástica para a teoria escalar  $(\lambda\varphi^4)_d$  usando uma equação de Langevin com um kernel de memória e um ruído colorido. Nós averiguamos que tipo de teoria surge no limite assintótico deste processo não-markoviano ao nível de um laço. Dentro deste contexto, pode-se perguntar se tal teoria gaussiana, estacionária e não-markoviana atingirá o equilíbrio com a estrutura de suas divergências ultravioletas sob controle.

Este método de quantização aplicado a campos fermiônicos e bosônicos converge na direção de resultados não-regularizados. A fim de se obter uma teoria regularizada, o processo estocástico original deve ser modificado. Uma maneira de se fazer tal mudança consiste em substituir o processo markoviano, introduzindo um ruído colorido nas relações de Einstein [111] [112] [113] [126]. Tal procedimento é eminentemente perturbativo, como já foi salientado na literatura. Motivados por problemas que aparecem quando se tenta inserir este esquema de regularização em teorias de gauge não-abelianas com a fixação de gauge de Zwanziger [127] [128] [129], Bern et al [130] [131] [132] e Halpern [133] derivaram um procedimento de regularização verdadeiramente não-perturbativo para a cromodinâmica quântica, ainda em um cenário markoviano. Introduce-se uma equação de Langevin modificada com um regulador multiplicando o ruído, mantendo-se, com isso, as relações de Einstein originais bem como a distribuição de probabilidade do ruído. Este programa de regularização contínua obteve muito sucesso na regularização invariante não-perturbativa de todas as teorias quânticas de campos. A idéia de qualquer regularização estocástica é partir de uma teoria com interação, depois constroem-se gráficos de árvore de Langevin, cujas pernas terminam em um fator de ruído regularizado. Como é possível obter-se os laços da teoria por contração dos fatores de ruído, obtém-se, assim, uma teoria



onde cada laço fechado contém ao menos alguma potência do regulador. Com esta modificação, pode-se mostrar que o sistema converge para uma teoria regularizada. O próximo passo para se construir uma teoria finita é utilizar um procedimento de renormalização, por exemplo, um esquema de subtração mínima.

Entretanto, é importante lembrar que diferentes tipos de sistemas estocásticos são permitidos a princípio; por exemplo, para um campo escalar, um processo não-markoviano pode ser gerado, modificando-se a equação de Langevin com a introdução de um kernel de memória. Para se garantir que tal equação de Langevin generalizada pode ser utilizada como uma ferramenta de quantização, deve-se verificar se o processo converge em algum limite assintótico e também se converge para a distribuição de equilíbrio correta. Desta forma, preocupamo-nos com a seguinte pergunta: que tipo de teoria de campo escalar com auto-interação surge no limite assintótico deste processo não-markoviano ao nível de um laço? Nós demonstraremos no capítulo seguinte que, muito embora um sistema descrito por uma equação de Langevin estacionária, gaussiana e não-markoviana com um kernel de memória converge para o equilíbrio, nós obteremos uma teoria não-regularizada.

## 3.2 Quantização estocástica para uma teoria escalar livre

Nesta seção iremos discutir, com algum detalhe, os princípios básicos da quantização estocástica de campos introduzida por Parisi e Wu. Para o leitor interessado em um melhor entendimento de processos estocásticos, bem como equações de Langevin, recomendamos a consulta das referências [134] [135] [136] [137] [138] [139]. Para uma leitura mais avançada em processos estocásticos, assim como resultados rigorosos em quantização estocástica, recomendamos também [140] [141]. Para entender melhor a conexão entre

processos de Wiener e a construção rigorosa de integrais de trajetória, ver a referência [142]. De qualquer forma, no apêndice *C* discutimos, com algum detalhe, os princípios básicos do movimento browniano descrito por uma equação de Langevin markoviana e não-markoviana.

Vamos considerar um campo escalar neutro com uma auto-interação do tipo  $(\lambda\varphi^4)$ , definido em um espaço-tempo de Minkowski  $d$ -dimensional. A teoria de campos euclidiana pode ser obtida por continuação analítica no tempo imaginário tendo como suporte a condição de energia positiva para a teoria de campo relativística. O ponto inicial da quantização estocástica para se alcançar a teoria de campos euclidiana é uma equação de Langevin markoviana. Vamos admitir uma variedade euclidiana em  $d$  dimensões, onde estamos escolhendo condições de contorno periódicas para um campo escalar e também para um campo de ruído aleatório. Por exemplo, eles podem ser definidos em um tóro  $d$ -dimensional  $\Omega \equiv T^d$ . Depois, suplementa-se o campo escalar  $\varphi(x)$  e o ruído  $\eta(x)$  com uma coordenada extra  $\tau$ , o denominado parâmetro de Markov, tal que  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau, x)$  e  $\eta(x) \rightarrow \eta(\tau, x)$ . Portanto, os campos e o ruído estão definidos no seguinte domínio:  $T^d \times R_+$ . A evolução deste sistema dinâmico fora do equilíbrio é descrita por meio da subsequente equação de Langevin:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x), \quad (3.1)$$

onde  $\tau$  é o parâmetro de Markov,  $\eta(\tau, x)$  é um campo de ruído e  $S_0$  é a ação livre definida como sendo:

$$S_0[\varphi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2(x) \right). \quad (3.2)$$

Obtemos, das equações (3.1) e (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -(-\Delta + m_0^2) \varphi(\tau, x) + \eta(\tau, x), \quad (3.3)$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano  $d$ -dimensional. A equação (3.3) define um processo de Ornstein-Uhlenbeck e nós estamos admitindo:

$$\langle \eta(\tau, x) \rangle_\eta = 0, \quad (3.4)$$

e para a função de correlação de dois-pontos associada ao campo de ruído

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta^d(x - x'), \quad (3.5)$$

onde  $\langle \dots \rangle_\eta$  simbolizam médias estocásticas. Entende-se média estocástica de qualquer funcional de  $\varphi$ , dado por  $F[\varphi]$ , como sendo uma média realizada sobre o ruído  $\eta$  com distribuição gaussiana:

$$\langle F[\varphi] \rangle_\eta = \frac{\int [d\eta] F[\varphi] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(\tau, x)\right]}{\int [d\eta] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(\tau, x)\right]}, \quad (3.6)$$

onde  $[d\eta] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(\tau, x)\right]$  é uma medida funcional.

Vamos conceituar a função de Green retardada para o problema de difusão acima discutido  $G(\tau - \tau', x - x')$ . Ela satisfaz à  $G(\tau - \tau', x - x') = 0$  se  $\tau - \tau' < 0$  e também à seguinte equação diferencial:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (-\Delta_x + m_0^2) \right] G(\tau - \tau', x - x') = \delta^d(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (3.7)$$

Usando a função de Green retardada e a condição inicial  $\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = 0$ , a solução para a equação (3.3) é

$$\varphi(\tau, x) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^d x' G(\tau - \tau', x - x') \eta(\tau', x'). \quad (3.8)$$

Estamos interessados em calcular médias estocásticas, mais precisamente, em nosso caso, a quantidade  $\langle \varphi(\tau, x)\varphi(\tau', x') \rangle_\eta$ . Utilizando as equações (3.4), (3.5) e (3.8), teremos

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2) \rangle_\eta = 2 \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} d\tau' \int_\Omega d^d x' G(\tau_1 - \tau', x_1 - x') G(\tau_2 - \tau', x_2 - x'), \quad (3.9)$$

onde  $\min(\tau_1, \tau_2)$  significa o mínimo entre  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Empregando uma representação de Fourier, a função de correlação de dois-pontos  $\langle \varphi(\tau, x)\varphi(\tau', x') \rangle_\eta \equiv D(\tau, x; \tau', x')$  é dada por

$$D(\tau, x; \tau', x') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{e^{-ip(x-x')}}{(p^2 + m_0^2)} e^{-(p^2 + m_0^2)(\tau - \tau')}. \quad (3.10)$$

Podemos usar uma análise de Fourier para se indicar que, no limite em que os parâmetros de Markov  $\tau$  e  $\tau'$  vão para o infinito, nós recuperamos a teoria de campos livre euclidiana padrão. Vamos definir, portanto, as transformadas de Fourier para o campo e para o ruído, dadas por  $\varphi(\tau, k)$  e  $\eta(\tau, k)$ . Teremos, respectivamente

$$\varphi(\tau, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x e^{-ikx} \varphi(\tau, x) \quad (3.11)$$

e

$$\eta(\tau, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x e^{-ikx} \eta(\tau, x). \quad (3.12)$$

Levando a equação (3.11) na equação (3.2), a ação livre para o campo escalar em um espaço  $(d+1)$ -dimensional, escrita em termos dos coeficientes de Fourier, terá a seguinte forma

$$S_0[\varphi(k)] |_{\varphi(k)=\varphi(\tau, k)} = \frac{1}{2} \int d^d k \varphi(\tau, k)(k^2 + m_0^2)\varphi(\tau, k). \quad (3.13)$$

Substituindo as equações (3.11) e (3.12) na equação (3.3), ter-se-á que cada coeficiente de Fourier satisfaz uma equação de Langevin dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, k) = -(k^2 + m_0^2)\varphi(\tau, k) + \eta(\tau, k), \quad (3.14)$$

cuja solução é apresentada abaixo:

$$\varphi(\tau, k) = \exp\left(-(k^2 + m_0^2)\tau\right) \varphi(0, k) + \int_0^\tau d\tau' \exp\left(-(k^2 + m_0^2)(\tau - \tau')\right) \eta(\tau', k). \quad (3.15)$$

Usando a propriedade gaussiana do ruído aleatório, vemos que os coeficientes de Fourier do ruído satisfazem

$$\langle \eta(\tau, k) \rangle_\eta = 0 \quad (3.16)$$

e

$$\langle \eta(\tau, k) \eta(\tau', k') \rangle_\eta = 2(2\pi)^d \delta(\tau - \tau') \delta^d(k + k'). \quad (3.17)$$

A representação de Fourier para a função de correlação de dois-pontos  $\langle \varphi(\tau, k) \varphi(\tau', k') \rangle_\eta$  pode agora ser derivada. Lembrando a equação (3.15) e admitindo que  $\varphi(\tau, k)|_{\tau=0} = 0$ , obtemos, assim:

$$D(k; \tau, \tau) = (2\pi)^d \delta^d(k + k') \frac{1}{(k^2 + m_0^2)} \left(1 - \exp\left(-2\tau(k^2 + m_0^2)\right)\right), \quad (3.18)$$

onde definimos  $\langle \varphi(\tau, k) \varphi(\tau', k') \rangle_\eta|_{\tau=\tau'} \equiv D(k, k'; \tau, \tau')$ . A partir deste ponto, vamos redefinir a função de correlação de dois-pontos como sendo  $D(k; \tau, \tau) \rightarrow (2\pi)^d D(k; \tau, \tau)$ .

No limite  $\tau \rightarrow \infty$ , recupera-se a função de dois-pontos padrão da teoria de campos livre euclidiana. Gostaríamos de mencionar a existência de outras equações de Langevin markovianas. Pode-se introduzir um kernel definido em um tóro  $d$ -dimensional. A equação de Langevin modificada seria:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int d^d y K(x, y) \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(y)}|_{\varphi(y)=\varphi(\tau, y)} + \eta(\tau, x). \quad (3.19)$$

O segundo momento do campo de ruído seria alterado para:

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') K(x, x'). \quad (3.20)$$

Escolhendo um kernel apropriado, pode-se mostrar que todas as conclusões citadas acima permanecem inalteradas.

### 3.3 Quantização estocástica para a teoria escalar $(\lambda\varphi^4)_d$

Nesta seção, vamos apresentar a quantização estocástica para a teoria escalar  $(\lambda\varphi^4)_d$  com auto-interação. Neste caso, a ação será dada por  $S = S_0 + S_I$ , onde  $S_0$  é a parte livre, dada por (3.2), e  $S_I$  é a parte da interação, definida pela seguinte contribuição não-gaussiana:

$$S_I[\varphi] = \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (3.21)$$

A equação de Langevin é dada agora por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -(-\Delta + m_0^2) \varphi(\tau, x) - \frac{\lambda}{3!} \varphi^3(\tau, x) + \eta(\tau, x). \quad (3.22)$$

A função de correlação de dois-pontos associada com o campo aleatório é dada pelas relações já apresentadas, enquanto que as outras funções de correlação se anulam, i.e.,

$$\langle \eta(\tau_1, x_1) \eta(\tau_2, x_2) \dots \eta(\tau_{2k-1}, x_{2k-1}) \rangle_\eta = 0, \quad (3.23)$$

e também

$$\langle \eta(\tau_1, x_1) \dots \eta(\tau_{2k}, x_{2k}) \rangle_\eta = \sum \langle \eta(\tau_1, x_1) \eta(\tau_2, x_2) \rangle_\eta \langle \eta(\tau_k, x_k) \eta(\tau_l, x_l) \rangle_\eta \dots, \quad (3.24)$$

onde a soma é para ser tomada sobre todos as diferentes sortes nas quais os índices  $2k$  podem ser divididos em  $k$  partes, i.e., em  $k$  pares. Efetuando-se médias gaussianas sobre o ruído branco, é possível provar que (veja, por exemplo, [122])

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \dots \varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \frac{\int [d\varphi] \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) e^{-S[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{-S[\varphi]}}, \quad (3.25)$$

onde  $S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_I[\varphi]$  é a ação  $d$ -dimensional e o lado direito desta última equação é o resultado usual dado pelo método das integrais de trajetória. Na equação acima,

$[d\varphi] e^{-S(\varphi)}$  é uma medida invariante por translações. Este resultado nos força a considerar a medida euclidiana da integral de trajetória como sendo uma distribuição estacionária de um processo estocástico. Note que a solução da equação de Langevin precisa de uma condição inicial, como, por exemplo

$$\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = \varphi_0(x). \quad (3.26)$$

Vamos utilizar a equação de Langevin para resolvermos perturbativamente a teoria de campos com interação. Uma maneira de se lidar com a equação (3.22) é aplicar o método das funções de Green. Vamos assumir que a constante de acoplamento é uma quantidade pequena. Para resolver a equação de Langevin para o caso de uma teoria com interação, utilizaremos uma série perturbativa em  $\lambda$ . Portanto, podemos escrever

$$\varphi(\tau, x) = \varphi^{(0)}(\tau, x) + \lambda\varphi^{(1)}(\tau, x) + \lambda^2\varphi^{(2)}(\tau, x) + \dots \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.27) na equação (3.22), e, se igualarmos os termos com as mesmas potências em  $\lambda$ , as equações que resultarão são

$$\left[ \frac{\partial}{\partial\tau} + (-\Delta_x + m_0^2) \right] \varphi^{(0)}(\tau, x) = \eta(\tau, x), \quad (3.28)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial\tau} + (-\Delta_x + m_0^2) \right] \varphi^{(1)}(\tau, x) = -\frac{1}{3!} \left( \varphi^{(0)}(\tau, x) \right)^3, \quad (3.29)$$

e assim por diante. Usando a função de Green retardada e admitindo que temos que  $\varphi^{(q)}(\tau, x)|_{\tau=0} = 0$ ,  $\forall q$ , a solução para a primeira equação, dada por (3.28), pode ser escrita formalmente como sendo

$$\varphi^{(0)}(\tau, x) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^d x' G(\tau - \tau', x - x') \eta(\tau', x'). \quad (3.30)$$

A segunda equação, dada por (3.29), pode também ser resolvida utilizando o método acima. Obtemos

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(\tau, x) = & -\frac{1}{3!} \int_0^\tau d\tau_1 \int_\Omega d^d x_1 G(\tau - \tau_1, x - x_1) \\ & \times \prod_{i=1}^3 \left( \int_0^{\tau_1} d\tau'_i \int_\Omega d^d x'_i G(\tau_1 - \tau'_i, x_1 - x'_i) \eta(\tau'_i, x'_i) \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Vemos que podemos gerar todos os diagramas de árvore com as contribuições do campo de ruído. Podemos considerar também a função de correlação de  $n$ -pontos dada por  $\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \dots \varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta$ . Substituindo os resultados acima na função de correlação de  $n$ -pontos, e tomando as médias sobre o campo de ruído branco, assim como utilizando a propriedade da decomposição de Wick definida pela equação (3.24), são gerados os diagramas estocásticos. Cada um destes diagramas estocásticos tem a forma de um diagrama de Feynman, salvo o fato que nós temos que levar em conta que estamos juntando dois campos de ruído branco várias vezes. Enfatizamos aqui que a quantização estocástica é baseada no fato de que, muito embora tem-se de início um sistema fora do equilíbrio, a equação de Langevin markoviana o força a atingir o equilíbrio. Além disso, quando o equilíbrio termodinâmico é atingido, os valores esperados estocásticos irão coincidir com as funções de Schwinger da teoria de campos euclidiana.

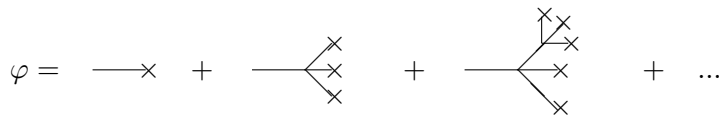


Figura 3.1: Expansão perturbativa para o campo escalar onde as pequenas cruces denotam campos de ruído.



$$\langle \varphi \varphi \rangle_\eta = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \tau_1 \qquad \tau_2 \\ (a) \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \tau_1 \qquad \tau_2 \\ (b) \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \tau_1 \qquad \tau_2 \\ (c) \end{array}$$

Figura 3.2: As correções ao nível de um laço para a função de correlação de dois-pontos.

Podemos representar a equação (3.27) graficamente como mostra a figura (3.1) (o campo de ruído é representado por uma pequena cruz). Utilizando esta expansão em diagramas, é possível demonstrar que a função de correlação de dois-pontos até o nível de um laço é dada pela figura (3.2), onde simbolizamos a função de Green retardada por uma linha e a função de dois-pontos livre por uma linha cruzada. As regras para se obter os valores algébricos dos diagramas estocásticos são similares às regras de Feynman. Por exemplo, a função de dois-pontos ao nível de um laço é dada por

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_1} d\tau G(k_1; \tau_1 - \tau) D(k; \tau, \tau) D(k_2; \tau_2, \tau). \quad (3.32)$$

$$(c) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_2} d\tau G(k_2; \tau_2 - \tau) D(k; \tau, \tau) D(k_1; \tau_1, \tau). \quad (3.33)$$

Um cômputo simples mostra que, no limite assintótico dos parâmetros de Markov, i.e.,  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ , nós recuperamos o resultado correto de equilíbrio:

$$(b)|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{1}{(k_2^2 + m_0^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{1}{(k^2 + m_0^2)}. \quad (3.34)$$

Obter as funções de Schwinger no limite assintótico não garante que temos uma teoria física finita. O próximo passo seria estabelecer um esquema de regularização adequado. Como o grau de divergência de um diagrama estocástico nunca excede àquele do diagrama de Feynman correspondente, pode-se utilizar uma técnica convencional de regularização,

como, por exemplo, a regularização dimensional [143] [144] [145] [146]. Um ponto crucial é empregar um esquema satisfatório de regularização que preserve todas as simetrias do modelo original. A presença do parâmetro de Markov como uma dimensão extra nos leva ao método da regularização estocástica, a qual preserva todas as simetrias da teoria estudada. Há dois diferentes procedimentos de regularização estocástica: um que é não-markoviano e perturbativo, e outro que é markoviano e não-perturbativo. Existem, em geral, dois meios diferentes de se implantar a regularização estocástica perturbativa. O primeiro é começar com uma equação de Langevin com um kernel de memória. Sabe-se da literatura que este método pode remover, na melhor das hipóteses, apenas dois graus de divergência. Outra possibilidade seria modificar apenas o campo de ruído no funcional de probabilidade:

$$\langle F[\varphi] \rangle_\eta = \frac{\int [d\eta] F[\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \int d\tau' \eta(\tau, x) K_\Lambda^{-1} \eta(\tau', x) \right]}{\int [d\eta] \exp \left[ -\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \int d\tau' \eta(\tau, x) K_\Lambda^{-1} \eta(\tau', x) \right]}, \quad (3.35)$$

onde  $K_\Lambda$  é um kernel de memória. Neste caso, mudamos as correlações do campo de ruído para:

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2 K_\Lambda(\tau, \tau') \delta^d(x - x'). \quad (3.36)$$

O kernel  $K_\Lambda$  deve ser escolhido de tal forma que, quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} K_\Lambda(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad (3.37)$$

recuperando a teoria usual.

Como a equação de Langevin não é afetada neste esquema de regularização estocástica, o campo físico é o mesmo que no caso regularizado. Contudo, a função de correlação de dois-pontos a zero ordem na constante de acoplamento  $\lambda$  é dada por:

$$\begin{aligned}
D(k; \tau, \tau') &= \\
2\delta^d(k + k') \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' G(k; \tau - s) G(k; \tau' - s') K_\Lambda(s - s') &= \\
2\delta^d(k + k') \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \exp(-(\tau + \tau' - s - s')(k^2 + m_0^2)) K_\Lambda(s - s'). & \quad (3.38)
\end{aligned}$$

É possível provar que uma condição necessária que a função de regularização  $K_\Lambda$  deve satisfazer de modo a tornar finitos os laços divergentes é  $K_\Lambda(\tau) |_{\tau=0} = 0$ . A seguinte sequência de funções obedecendo tal condição foram propostas:

$$K_\Lambda^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2n!} \Lambda^2 (\Lambda^2 | \tau |)^n \exp(-\Lambda^2 | \tau |). \quad (3.39)$$

Para o caso  $n = 0$ , nós obtemos, para a função de correlação de dois-pontos:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} D(k; \tau, \tau) = \frac{\delta^d(k + k')}{(k^2 + m_0^2)} \frac{\Lambda^2}{(\Lambda^2 + k^2 + m_0^2)}. \quad (3.40)$$

Como os diagramas estocásticos possuem linhas cruzadas em seus laços, temos que as divergências ultravioletas podem ser regularizadas, escolhendo-se um  $n$  apropriado. Note que é possível utilizar um regulador diferente do tipo  $K_\sigma(\tau) = \frac{1}{2} \sigma \tau^{\sigma-1}$ . Este esquema de regulador é bastante similar à regularização analítica de Bollini et al [147] e Speer [148]. A relação entre a regularização com um corte exponencial e o procedimento de regularização analítico foi extensivamente estudado por Kay [149] e também por Svaiter e Svaiter [83] [98] [150] em uma série de artigos analisando o efeito Casimir.

Vamos agora discutir um outro procedimento de regularização contínua [133] que preserva todas as simetrias do modelo original. Começemos com um sistema de Langevin de Parisi-Wu markoviano regularizado:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} |_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \int d^d y R_{xy}(\Delta) \eta(\tau, y). \quad (3.41)$$

As correlações do ruído, dadas pelas equações (3.4) e (3.5), são mantidas inalteradas. O regulador  $R(\Delta)$  que multiplica o ruído é uma função do laplaciano:

$$\Delta_{xy} = \int d^d z (\partial_\mu)_{xz} (\partial_\mu)_{zy}, \quad (3.42)$$

onde  $(\partial_\mu)_{xy} = \partial_\mu^x \delta^d(x - y)$ . Vamos trabalhar com um regulador de kernel de calor, com a forma:

$$R(\Delta; \Lambda) = \exp\left(\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right), \quad (3.43)$$

onde  $\Lambda$  é um parâmetro introduzido para se regularizar a teoria. As restrições básicas na forma deste regulador são:

$$R(\Delta; \Lambda)|_{\Lambda \rightarrow \infty} = 1, \quad (3.44)$$

ou

$$R_{xy}(\Delta; \Lambda)|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \delta^d(x - y), \quad (3.45)$$

o que garante que o processo regularizado dado por (3.41) reduz-se ao processo formal dado por (3.1) no limite formal do regulador  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Com esta modificação na equação de Langevin, é possível mostrar que todas as contribuições para a função de  $n$ -pontos em todas as ordens na constante de acoplamento  $\lambda$  são finitas. Por exemplo, a contribuição para a função de dois-pontos ao nível de um laço dada pela equação (3.34) é reescrita como sendo:

$$(b)|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \frac{R_{k_2}^2}{(k_2^2 + m_0^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2m_0^2)} \int d^d k \frac{R_k^2}{(k^2 + m_0^2)}, \quad (3.46)$$

onde  $R_k$  é a transformada de Fourier do regulador, i.e.,  $R_k(\Lambda) = R(\Delta; \Lambda)|_{\Delta=-k^2}$ .

No próximo capítulo, vamos estudar uma equação de Langevin generalizada com um kernel de memória e um ruído colorido, que define um processo não-markoviano.

# Capítulo 4

## Quantização estocástica não-markoviana

### 4.1 Equação de Langevin generalizada com ruído colorido

Vamos, neste momento, retomar a discussão de processos não-markovianos, onde a equação de Langevin é modificada com a introdução de um kernel de memória e o ruído passa a ser colorido. Iremos nos focar na quantização estocástica, sem entrar em maiores detalhes em processos estocásticos em geral.

O programa da quantização estocástica, proposto por Parisi e Wu, e a regularização estocástica foram realizados para campos genéricos definidos em variedades euclidianas planas. Claro está que o programa da quantização estocástica pode ser implantado sem maiores problemas em uma variedade curva, desde que seja possível a execução da rotação de Wick, levando-nos a uma ação euclidiana real. A idéia que permeia as discussões anteriores é que a implantação da quantização estocástica em variedades curvas está relacionada

ao seguinte fato. Para variedades estáticas, é possível efetuar a rotação de Wick, i.e., estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana para a região riemanniana sem problemas. Por outro lado, para variedades que não são estáticas, devemos ampliar o formalismo para além da assinatura euclidiana, i.e., formular a quantização estocástica em um espaço pseudo-riemanniano. Veja, por exemplo, a discussão apresentada por Huffel e Rumpf [151] e Gozzi [152]. No primeiro destes artigos, os autores propuseram uma modificação no esquema original de Parisi-Wu, introduzindo um termo complexo na equação de Langevin, para se estabelecer a quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski. Gozzi estudou o espectro do hamiltoniano de Fokker-Planck, que não era auto-adjunto, para justificar tal programa. Veja também as referências [153] [154]. Estas situações são casos especiais de uma formulação euclidiana ordinária para sistemas com ações complexas.

A principal diferença entre a implantação da quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski e no espaço euclidiano é que no último a aproximação para o estado de equilíbrio é uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck. Na formulação de Minkowski, o hamiltoniano não é hermitiano e os autovalores deste são, em geral, complexos. A parte real de tais autovalores é importante para o comportamento assintótico para tempos de Markov grandes, e a aproximação ao equilíbrio é alcançada apenas se formos capazes de mostrar que o hamiltoniano é positivo definido. A questão crucial é a seguinte: o que acontece se a equação de Langevin descreve uma difusão com uma ação complexa? Alguns autores sustentam que é possível obter resultados significativos de processos de difusão de equação de Langevin em torno de uma ação complexa. Parisi [155] e Klauder e Peterson [156] investigaram a equação de Langevin complexa, onde algumas

simulações numéricas em sistemas unidimensionais foram apresentadas. As referências [157] [158] não podem deixar de ser mencionadas dentro deste contexto. Gostaríamos também de mencionar a abordagem desenvolvida por Okamoto e colaboradores [159] onde o papel de um kernel na equação de Langevin complexa foi estudado.

Deve-se ressaltar que há diversos exemplos onde a ação euclidiana é complexa. O caso mais simples é a quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski, conforme discutida anteriormente. Outras situações são, por exemplo, sistemas da cromodinâmica quântica com potencial químico finito a uma temperatura finita; teorias  $SU(N)$ , com  $N > 2$ , onde o determinante fermiônico torna-se complexo e também a ação efetiva. Termos complexos podem aparecer também na equação de Langevin para férmions, mas um kernel apropriado pode solucionar este problema [123] [124] [125]. Outro caso que merece atenção é a quantização estocástica de teorias de campo topológicas. Uma característica peculiar deste tipo de teorias é o aparecimento de uma unidade imaginária  $i$  à frente das ações topológicas no espaço euclidiano. Uma tentativa de se usar uma equação de Langevin markoviana com um ruído branco para se quantizar a teoria falha pois tal equação de Langevin não tenderá a algum equilíbrio para grandes valores do parâmetro de Markov. Existem, na literatura, diferentes propostas para se resolver tal problema abordado. Entraremos em mais detalhes sobre a quantização estocástica de teorias topológicas mais adiante. Em conclusão, muito embora muitos métodos alternativos tenham sido sugeridos para se lidar com sistemas físicos interessantes onde a ação euclidiana é complexa [160] [161] [162] [163], estas abordagens não apresentam nenhuma maneira geral de se resolver dificuldades particulares que aparecem em cada situação. Aqui iremos proceder com a quantização estocástica de teorias com ação imaginária, introduzindo um kernel de

memória na equação de Langevin. Assumiremos também as funções de correlação de um ruído colorido [164]. Iremos mostrar que, para uma larga classe de operadores elípticos não-hermitianos, que definem diferentes modelos na teoria dos campos, o nosso sistema não-markoviano converge no limite assintótico do parâmetro de Markov, e obtemos, assim, as funções de Schwinger da teoria.

Uma questão natural que se poderia colocar aqui é se a física trata, essencialmente, de processos markovianos ou não-markovianos. Em outras palavras, os processos que comumente ocorrem na natureza devem ser entendidos por meio de modelos onde uma memória de eventos anteriores existe? Se a resposta para tal pergunta for positiva, compreendemos, portanto, que a quantização estocástica pode ser o formalismo mais prático para se inserir tal quantidade em nossos cálculos. De fato, se rememorarmos de como a integral de trajetória é construída, vemos que a utilização da completeza dos vetores de estado se faz mister. Esta é usada da seguinte maneira:

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int dx \langle \varphi_1 | x \rangle \langle x | \varphi_2 \rangle,$$

onde  $\int dx |x\rangle \langle x| = 1$  e  $\varphi_1, \varphi_2$  são vetores de estado, respectivamente, inicial e final de um processo de transição quântico arbitrário. Se compararmos esta equação com uma que é típica de processos markovianos, i.e., a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$P(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1),$$

onde  $P(x_i, t_i | x_j, t_j)$  é a função distribuição de probabilidades condicional de  $x_i, t_i$ , dado o valor  $x_j, t_j$ , com  $t_j < t_i$ , vemos que a formulação das integrais de trajetória é, implicitamente, markoviana. Com alguma maior dificuldade, podemos apresentar argumentos



semelhantes para o formalismo canônico. Se quisermos descrever situações eminentemente não-markovianas, é possível que a maneira mais simples e direta de se fazer isto seja via quantização estocástica, em particular a quantização estocástica não-markoviana. Muito embora esta quantização a ser introduzida aqui é não-linear apenas no setor de Markov (em outras palavras, é uma memória do tempo markoviano fictício  $\tau$ ), veremos como ela já nos apresenta resultados nada triviais.

Como uma aplicação das idéias previamente discutidas, vamos agora mostrar como é possível quantizar uma teoria com uma ação complexa utilizando uma equação de Langevin não-markoviana. Vamos seguir passos semelhantes à referência [165]. Considere a seguinte ação euclidiana:

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \varphi K \varphi, \quad (4.1)$$

com a seguinte equação de Langevin markoviana:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -K \varphi + \eta(\tau, x). \quad (4.2)$$

onde  $K$  é um operador elíptico (com algumas pequenas mudanças, a prova a seguir pode ser feita para operadores hiperbólicos). A função  $\varphi$  é um campo escalar, por simplicidade, mas os resultados aqui apresentados podem ser generalizados para campos com maior spin. Se permitirmos que  $K$  seja não-hermitiano, a ação na equação (4.1) torna-se complexa. Há muitos tratamentos na literatura para se lidar com ações complexas; um deles é o emprego de uma equação de Langevin, separando-se o campo em uma parte real e em uma parte imaginária,  $Re(\varphi) = \varphi_1$  and  $Im(\varphi) = \varphi_2$  [122]. Com esta abordagem, teremos duas equações de Langevin, uma para cada campo  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Outra maneira é utilizar uma

equação de Langevin modificada:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int d^d y \kappa(x, y) \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(y)} \Big|_{\varphi(y)=\varphi(\tau, y)} + \eta(\tau, x), \quad (4.3)$$

onde uma mudança subsequente no segundo momento do campo de ruído é

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \kappa(x, x'). \quad (4.4)$$

Com estas modificações, podemos escolher um kernel adequado:

$$\kappa(x, x') = K_x^\dagger \delta(x - x'), \quad (4.5)$$

de modo que a equação de Langevin torna-se

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -K.K^\dagger \varphi + \eta(\tau, x). \quad (4.6)$$

Vemos que obtemos, assim, uma versão “bosonizada” da equação de Langevin (4.2) e o problema da convergência para o equilíbrio desaparece, já que  $K.K^\dagger$  é um operador hermitiano. Esta é a prescrição geralmente empregada na literatura para se lidar com férmions [123] [124] [125]. Na verdade, a raiz deste problema está no fato que não existe um análogo clássico para campos fermiônicos.

Outrossim, outra abordagem pode ser utilizada. Vamos considerar a seguinte equação de Langevin não-markoviana:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(s, x)} + \eta(\tau, x), \quad (4.7)$$

onde  $M_\Lambda$  é um kernel de memória e o campo estocástico aleatório  $\eta(\tau, x)$  apresenta as seguintes relações de correlação:

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2M_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^d(x - x'). \quad (4.8)$$

Neste caso onde  $M_\Lambda(|\tau - \tau'|)$  tem uma largura no tempo fictício, a descrição é gaussiana não obstante não-markoviana. Para o caso de um campo escalar livre euclidiano temos que a equação de Langevin generalizada escreve-se como sendo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) K \varphi(s, x) + \eta(\tau, x). \quad (4.9)$$

Vamos demonstrar aqui que este método leva a convergência para o equilíbrio, embora tenhamos uma equação de Langevin complexa.

Podemos introduzir uma decomposição em modos tal que

$$\varphi(\tau, x) = \int d\tilde{\mu}(n) \varphi_n(\tau) u_n(x) \quad (4.10)$$

e

$$\eta(\tau, x) = \int d\tilde{\mu}(n) \eta_n(\tau) u_n(x), \quad (4.11)$$

onde  $u_n(x)$  são polinômios ortogonais e a medida  $\tilde{\mu}(k)$  depende da métrica na qual estamos interessados. Cada coeficiente de Fourier  $\varphi_n$  obedece a uma equação de Langevin (não-markoviana) dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_n(\tau) = -\lambda_n \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) \varphi_n(s) + \eta_n(\tau), \quad (4.12)$$

onde  $\lambda_n$  é um autovalor associado ao operador  $K$  e  $\eta_n(\tau)$  obedece à

$$\langle \eta_n(\tau) \eta_{n'}(\tau') \rangle_\eta = 2M_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^d(n, n'). \quad (4.13)$$

Seguindo Fox [166] [167], definamos a transformada de Laplace do kernel de memória:

$$M(z) = \int_0^\infty d\tau M_\Lambda(\tau) e^{-z\tau}. \quad (4.14)$$

Com a condição inicial  $\varphi_n(\tau)|_{\tau=0} = 0$ , a solução de (4.12) é:

$$\varphi_n(\tau) = \int_0^\infty d\tau' G_n(\tau - \tau') \eta_n(\tau'), \quad (4.15)$$

onde, utilizando a função escada  $\theta(\tau)$ , a função de Green  $G_n(\tau)$  é definida por:

$$G_n(\tau) \equiv \Omega_n(\tau) \theta(\tau). \quad (4.16)$$

A função  $\Omega_n(\tau)$  que aparece na equação (4.16) é definida através de sua transformada de Laplace:

$$\Omega_n(z) = \left( z + \lambda_n M(z) \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

Da equação (4.15) e das correlações do ruído modificadas, obtemos que a função de correlação escalar livre  $D_n(\tau, \tau')$  é dada por:

$$\begin{aligned} D_n(\tau, \tau') &= \\ &= 2\delta^d(n, n') \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' G_n(\tau - s) G_n(\tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|) \\ &= 2\delta^d(n, n') \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \Omega_n(\tau - s) \Omega_n(\tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para prosseguirmos, devemos escrever  $D_n(\tau, \tau')$  de um modo simplificado. Note que a transformada dupla de Laplace do lado direito é dada por:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\tau e^{-z\tau} \int_0^\infty d\tau' e^{-z'\tau'} \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \Omega_n(\tau - s) \Omega_n(\tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|) = \\ &= \Omega_n(z) \Omega_n(z') \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{-z's'} e^{-zs} M_\Lambda(|s - s'|). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora, com simples manipulações, chegamos à:

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{-z's'} e^{-zs} M_\Lambda(|s - s'|) = \frac{M(z) + M(z')}{z + z'}. \quad (4.20)$$

Portanto, obtemos a identidade:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\tau e^{-z\tau} \int_0^\infty d\tau' e^{-z'\tau'} \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \Omega_n(\tau - s) \Omega_n(\tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|) = \\ &= \Omega_n(z) \Omega_n(z') \left( \frac{M(z) + M(z')}{z + z'} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lembrando a equação (4.17), podemos mostrar que:

$$\Omega_n(z) \Omega_n(z') \left( \frac{M(z) + M(z')}{z + z'} \right) = \frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{\Omega_n(z) + \Omega_n(z')}{z + z'} - \Omega_n(z) \Omega_n(z') \right). \quad (4.22)$$

Logo, em paralelo com o resultado (4.20), finalmente obtemos uma expressão bastante simples para  $D_n(\tau, \tau')$  em termos de  $\Omega_n(\tau)$ . Temos

$$D_n(\tau, \tau') = \frac{2}{\lambda_n} \delta^d(n, n') \left( \Omega_n(|\tau - \tau'|) - \Omega_n(\tau) \Omega_n(\tau') \right). \quad (4.23)$$

Agora, precisamos de uma expressão para o kernel de memória de modo a investigar a convergência da equação (4.23). Vários tipos de kernel foram propostos na literatura:

$$M_\Lambda^{(m)}(\tau) = \frac{1}{2m!} \Lambda^2 (\Lambda^2 |\tau|)^m \exp(-\Lambda^2 |\tau|). \quad (4.24)$$

Por simplicidade, vamos tomar o caso  $m = 0$ . Então, das equações (4.14), (4.17) e (4.24), e aplicando a transformada de Laplace inversa [168], obtemos a seguinte expressão para a função  $\Omega$ :

$$\Omega_n(\tau) = \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \exp\left(-\tau \frac{\Lambda^2}{2}\right), \quad (4.25)$$

onde definimos a quantidade  $\beta$  dada por:

$$\beta \equiv x + iy, \quad (4.26)$$

onde

$$x = \sqrt{\frac{\Lambda^4 + \alpha_R + |z|}{2}}, \quad (4.27)$$

$$y = \alpha_I \sqrt{\frac{1}{2(\Lambda^4 + \alpha_R + |z|)}}, \quad (4.28)$$

e, finalmente:

$$|z| = \sqrt{(\Lambda^4 + \alpha_R)^2 + \alpha_I^2}, \quad (4.29)$$

com  $\alpha = -2\Lambda^2\lambda_n$  e nós escrevemos  $\alpha$  como sendo  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ , onde  $\alpha_R$  e  $\alpha_I$  são quantidades reais. Similarmente, temos, para a função de Green:

$$G_n(\tau) = \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \exp\left(-\tau \frac{\Lambda^2}{2}\right) \theta(\tau). \quad (4.30)$$

Agora, de modo a obter convergência, devemos requerer que  $G_n \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Utilizando identidades hiperbólicas vemos que, a fim de se ter  $G_n \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ , devemos ter:

$$|\lambda_n^R| > \frac{(\lambda_n^I)^2}{2\Lambda^2}, \quad (4.31)$$

onde escrevemos os autovalores como sendo  $\lambda_n = \lambda_n^R + i\lambda_n^I$ . Já que  $\Lambda$  é, a princípio, arbitrário, vemos que a condição dada por (4.31) não parece colocar restrições sérias nos autovalores do operador  $K$ . Porém, temos outra restrição. Note que, com esta prescrição, a função  $M(x - y; \tau)$  definida na referência [114] como sendo

$$M(x - y, \tau) \equiv \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) G(\tau - s, x - y), \quad (4.32)$$

onde  $G(\tau - s, x)$  é a função de Green retardada para o problema de difusão, cuja transformada de Fourier vale:

$$M(k, \tau) = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{1}{9\Lambda^4 + \beta^2} \left\{ 8\Lambda^2 - 4 \exp\left(-\frac{3\Lambda^2}{2}\tau\right) \left[ 2\Lambda^2 \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \left(\frac{3\Lambda^4}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.33)$$

não será mais hermitiana. Mas, se impormos a seguinte restrição:

$$|\lambda_n^R| < 5\Lambda^2, \quad (4.34)$$

sua parte real permanecerá positiva, o que implica que a parte real dos autovalores do hamiltoniano de Fokker-Planck definidos na dita referência é real, assegurando, portanto,

convergência para o equilíbrio, isto é, o sistema atinge seu estado fundamental. Parece que as equações (4.31) e (4.34) podem ser impostas simultaneamente sem maiores restrições à  $\Lambda$ . Em particular, é permitido tomarmos valores arbitrariamente grandes para  $\Lambda$ , o que implica que nossa abordagem funciona para quase todos os autovalores  $\lambda_n$ . Pode ser facilmente provado que a presença dos modos zero para teorias sem massa destrói a convergência para o equilíbrio.

A partir dos resultados acima, é fácil verificar que a função de dois-pontos livre é dada por:

$$\begin{aligned}
D_n(\tau, \tau') &= \\
&= \frac{2}{\lambda_n} \delta^d(n, n') \left[ \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta(\tau - \tau')}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta(\tau - \tau')}{2}\right) \right) \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2} |\tau - \tau'| \right) \right. \\
&\quad - \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau'}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau'}{2}\right) \right) \\
&\quad \left. \times \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}(\tau + \tau')\right) \right]. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Para  $\tau = \tau'$ , obtemos:

$$D_n(\tau, \tau) = \frac{2}{\lambda_n} \delta^d(n, n') \left( 1 - \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right)^2 \exp(-\Lambda^2 \tau) \right). \tag{4.36}$$

Logo, no limite  $\tau \rightarrow \infty$ , obtemos o seguinte resultado:

$$D_n(\tau, \tau) = \frac{2}{\lambda_n} \delta^d(n, n'). \tag{4.37}$$

Portanto, a menos de uma constante insignificante, obtemos, no limite assintótico  $\tau \rightarrow \infty$ , a convergência para o equilíbrio esperada, e a função de Schwinger de dois-pontos foi encontrada.

Mostramos, portanto, que, para uma grande classe de operadores elípticos que não são hermitianos que definem modelos diferentes na teoria dos campos, nosso sistema converge

no limite assintótico do parâmetro de Markov  $\tau \rightarrow \infty$ , e obtemos as funções de Schwinger da teoria. Muito embora seja nada trivial, o método proposto pode ser estendido para teorias com interação com ações complexas. Na próxima seção vamos aplicar este método para um campo escalar livre e mais adiante vamos utilizá-lo para se estudar a quantização estocástica de teorias topológicas.

## 4.2 Equação de Langevin generalizada para o campo escalar

Sabe-se que a equação de Langevin dada por (3.1) é apenas uma escolha particular dentro de uma larga classe de equações descrevendo processos não-markovianos. Para se convencer que a equação de Langevin não-markoviana pode também ser utilizada como uma ferramenta de quantização, deve-se averiguar se o processo converge no limite assintótico e se a convergência é feita para a correta distribuição de equilíbrio. Na seção anterior foi apresentado, em linhas gerais, como proceder para se implementar a quantização estocástica em sistemas com ação complexa. Nesta seção seremos mais específicos, apresentando o método para um modelo bem definido. Vamos discutir a teoria de campos escalar livre utilizando uma equação de Langevin com um kernel de memória e também um ruído colorido. Queremos enfatizar que, a princípio, não é necessário a implantação deste método para a conhecida teoria  $(\lambda\varphi^4)_d$ . O intuito desta seção é puramente pedagógico para nos inteirarmos das sutilezas que podem aparecer em diferentes modelos. Posteriormente será apresentado a quantização de uma teoria topológica. Nestas duas próximas seções nos basearemos no trabalho [114]



Vamos introduzir uma equação de Langevin com um kernel de memória dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau - s) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(s, x)} + \eta(\tau, x), \quad (4.38)$$

onde  $K_\Lambda$  é um kernel de memória, representado anteriormente por  $M_\Lambda$ , e o campo estocástico  $\eta(\tau, x)$  satisfaz:

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = 2K_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^d(x - x'). \quad (4.39)$$

Para o campo escalar livre, a equação de Langevin generalizada é

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau - s) (-\Delta + m_0^2) \varphi(s, x) + \eta(\tau, x). \quad (4.40)$$

Efetuada uma transformada de Fourier para o campo escalar e para o campo aleatório, obtemos, novamente, que cada modo obedece a uma equação de Langevin dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, k) = - \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau - s) (k^2 + m_0^2) \varphi(s, k) + \eta(\tau, k). \quad (4.41)$$

Com a condição inicial  $\varphi(\tau, k)|_{\tau=0} = 0$ , a solução da equação (4.41) será:

$$\varphi(\tau, k) = \int_0^\infty d\tau' G(k, \tau - \tau') \eta(\tau', k), \quad (4.42)$$

onde, usando a função degrau  $\theta(\tau)$ , a função de Green  $G(k, \tau)$  é definida por:

$$G(k, \tau) \equiv \Omega(k, \tau) \theta(\tau). \quad (4.43)$$

A função  $\Omega(k, \tau)$  que aparece na equação (4.43) é definida através de sua transformada de Laplace:

$$\Omega(k, z) = \left( z + (k^2 + m_0^2) K(z) \right)^{-1}. \quad (4.44)$$

É fácil ver que, no limite  $K_\Lambda(\tau) \rightarrow \delta(\tau)$ , obtemos o resultado usual para a função de Green.

Para calcularmos a função de correlação escalar livre  $D(k; \tau, \tau')$ , podemos proceder com passos semelhantes àqueles utilizados na seção anterior. Esta pode ser expressa como sendo:

$$D(k; \tau, \tau') = 2 \frac{\delta^d(k + k')}{(k^2 + m_0^2)} \left( \Omega(k, |\tau - \tau'|) - \Omega(k, \tau) \Omega(k, \tau') \right). \quad (4.45)$$

Como na seção anterior, vamos utilizar a expressão (4.24) para nosso kernel de memória.

Vamos novamente nos ater ao caso  $m = 0$ . Teremos, portanto:

$$K_\Lambda(\tau) = \frac{1}{2} \Lambda^2 \exp(-\Lambda^2 |\tau|). \quad (4.46)$$

Obtemos, portanto, a seguinte expressão para a função  $\Omega$ :

$$\Omega(k, \tau) = \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \exp\left(-\tau \frac{\Lambda^2}{2}\right), \quad (4.47)$$

onde nós definimos uma quantidade real  $\beta$  dada por:

$$\beta \equiv \Lambda \sqrt{2(k^2 + m_0^2) - \Lambda^2}. \quad (4.48)$$

Do mesmo modo, teremos, para a função de Green:

$$G(k, \tau) = \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \exp\left(-\tau \frac{\Lambda^2}{2}\right) \theta(\tau). \quad (4.49)$$

Dos resultados acima, é fácil ver que a função de dois-pontos livre é dada por:

$$\begin{aligned} D(k; \tau, \tau') &= \\ &= 2 \frac{\delta^d(k + k')}{(k^2 + m_0^2)} \left[ \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta(\tau - \tau')}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta(\tau - \tau')}{2}\right) \right) e^{-\frac{\Lambda^2}{2}|\tau - \tau'|} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta\tau'}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta\tau'}{2}\right) \right) e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(\tau + \tau')} \right]. \quad (4.50) \end{aligned}$$

Para  $\tau = \tau'$ , obtemos:

$$D(k; \tau, \tau) = 2 \frac{\delta^d(k + k')}{(k^2 + m_0^2)} \left( 1 - \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sin\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right)^2 \exp(-\Lambda^2 \tau) \right). \quad (4.51)$$

Portanto, no limite  $\tau \rightarrow \infty$ , obtemos o seguinte resultado:

$$D(k; \tau, \tau) = 2 \frac{\delta^d(k + k')}{(k^2 + m_0^2)}. \quad (4.52)$$

Esta equação é muito semelhante ao resultado costumeiro de equilíbrio, a menos de uma constante multiplicativa. Esta é uma primeira evidência de que as divergências ultravioletas que surgem na série perturbativa podem não ser regularizadas. Agora, vamos estudar a teoria de campo escalar  $(\lambda\varphi^4)_d$  com auto-interação dentro deste cenário não-markoviano.

A equação de Langevin escreve-se como:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = - \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau - s) \left( (-\Delta + m_0^2) \varphi(s, x) + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3(s, x) \right) + \eta(\tau, x). \quad (4.53)$$

Esta equação pode ser resolvida por iteração como antes. Portanto, após igualarmos termos com potências iguais em  $\lambda$ , obtemos:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (-\Delta_x + m_0^2) \right] \varphi^{(0)}(\tau, x) = \eta(\tau, x), \quad (4.54)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (-\Delta_x + m_0^2) \right] \varphi^{(1)}(\tau, x) = - \frac{1}{3!} \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau - s) \left( \varphi^{(0)}(s, x) \right)^3, \quad (4.55)$$

e assim por diante. As soluções das duas primeiras equações podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\varphi^{(0)}(\tau, x) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^d x' G(\tau - \tau', x - x') \eta(\tau', x'). \quad (4.56)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(\tau, x) = & - \frac{1}{3!} \int_0^\tau d\tau_1 \int_\Omega d^d x_1 G(\tau - \tau_1, x - x_1) \int_0^{\tau_1} ds K_\Lambda(\tau_1 - s) \\ & \left( \int_0^{\tau_1} d\tau' \int_\Omega d^d x' G(\tau_1 - \tau', x_1 - x') \eta(\tau', x') \right)^3, \end{aligned} \quad (4.57)$$

com a função de Green dada pela equação (4.49).

Para as funções de correlação de  $n$ -pontos, a teoria de perturbação é bastante similar ao caso markoviano, exceto que para cada vértice no diagrama estocástico temos associado

um kernel de memória. Por exemplo, a correção de um laço para a função de dois-pontos é dada por ((b) e (c) dados pela figura (3.2)):

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_1} d\tau \int_0^\tau ds G(k_1, \tau_1 - \tau) D(k; s, s) D(k_2; \tau_2, s) K_\Lambda(|\tau - s|). \quad (4.58)$$

$$(c) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_2} d\tau \int_0^\tau ds G(k_2, \tau_2 - \tau) D(k; s, s) D(k_1; \tau_1, s) K_\Lambda(|\tau - s|). \quad (4.59)$$

Das equações (4.49) e (4.50), é fácil provar que a equação (4.58) pode ser repartida em quatro partes, três das quais possuem um regime oscilatório que decai a zero para  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ . Logo, obtém-se:

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^d(k_1 + k_2) \int d^d k \int_0^{\tau_1} d\tau \int_0^\tau ds I, \quad (4.60)$$

onde:

$$I \equiv \int_0^{\tau_1} d\tau \int_0^\tau ds \Omega(k_1, \tau_1 - \tau) \Omega(k_2, \tau_2 - s) \Omega(k, 0) K_\Lambda(|\tau - s|), \quad (4.61)$$

a qual, a partir das equações (4.46) e (4.47), pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I &= \\ &= \frac{\Lambda^2}{2} e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(\tau_1 + \tau_2)} \int_0^{\tau_1} d\tau \left( \frac{\Lambda^2}{\beta_1} \sin\left(\frac{\beta_1(\tau_1 - \tau)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta_1(\tau_1 - \tau)}{2}\right) \right) \\ &e^{-\frac{\Lambda^2}{2}\tau} \int_0^\tau ds \left( \frac{\Lambda^2}{\beta_2} \sin\left(\frac{\beta_2(\tau_2 - s)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta_2(\tau_2 - s)}{2}\right) \right) e^{\frac{3\Lambda^2}{2}s}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Após simples manipulações, obtemos o resultado final, no limite  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ :

$$(b)|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -2\lambda \frac{\delta^d(k_1 + k_2)}{(k_2^2 + m_0^2)} f(\Lambda; \beta_1, \beta_2) \int d^d k \frac{1}{(k^2 + m_0^2)}, \quad (4.63)$$

onde:

$$f(\Lambda; \beta_1, \beta_2) \equiv \left( \frac{(72\Lambda^4 + 9\beta_1^2 - \beta_2^2)\Lambda^4 + \beta_2^2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{(4\Lambda^4 + (\beta_1 - \beta_2)^2)(4\Lambda^4 + (\beta_1 + \beta_2)^2)} \right) \left( \frac{2\Lambda^2}{9\Lambda^4 + \beta_2^2} \right), \quad (4.64)$$

and  $\beta_i = \Lambda \sqrt{2(k_i^2 + m_0^2) - \Lambda^2}; i = 1, 2$ . Portanto, vemos que, mesmo tendo obtido convergência no limite assintótico do parâmetro fictício  $\tau$ , não conseguimos obter uma teoria regularizada. Na verdade, a menos de uns polinômios de  $\Lambda$ , alcançamos algo muito parecido com o resultado usual de equilíbrio. Como a regularização estocástica ordinária requer a modificação apenas do funcional de probabilidade do campo  $\eta$ , sem modificar a equação de Langevin, uma questão natural se põe: por que uma teoria com um ruído interno e colorido não produz resultados finitos na teoria de perturbação? Vamos tentar responder tal interpelação dentro de uma análise de Fokker-Planck.

### 4.3 A abordagem por Fokker-Planck

Embora tenhamos estudado a teoria de perturbação estocástica utilizando uma abordagem em termos de uma equação de Langevin, para melhor compreendermos nossos resultados é mais adequado trabalharmos dentro de uma formulação de Fokker-Planck para nosso método. Como sabemos, funções de correlação são introduzidas como médias sobre  $\eta$ :

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \mathcal{N} \int [d\eta] \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(\tau, x)\right), \quad (4.65)$$

onde  $\varphi(x, \tau)$  obedece à equação de Langevin não-markoviana usual (ver primeira equação do capítulo anterior) e  $\mathcal{N}$  é dado por

$$\mathcal{N}^{-1} = \int [d\eta] \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau \eta^2(\tau, x)\right). \quad (4.66)$$

Um jeito alternativo de se escrever tal média é feito introduzindo-se a densidade de

probabilidade  $P[\varphi, \tau]$ , a qual é definida da seguinte maneira [169]:

$$P[\varphi, \tau] \equiv \int [d\eta] \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau' \eta^2(\tau', x)\right) \prod_y \delta(\varphi(y) - \varphi(\tau, y)). \quad (4.67)$$

onde, por simplicidade, nós absorvemos o fator  $\mathcal{N}$  na medida funcional original. Em termos de  $P[\varphi, \tau]$ , as funções de correlação em tempos iguais valem:

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \int [d\varphi] \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) P[\varphi, \tau]. \quad (4.68)$$

A densidade de probabilidade  $P[\varphi, \tau]$  satisfaz à equação de Fokker-Planck [134]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P[\varphi, \tau] = \int d^d x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \right) P[\varphi, \tau], \quad (4.69)$$

com a condição inicial:

$$P[\varphi, 0] = \prod_y \delta(\varphi(y)). \quad (4.70)$$

A quantização estocástica diz que devemos ter:

$$w. \lim_{\tau \rightarrow \infty} P[\varphi, \tau] = \frac{\exp(-S[\varphi])}{\int [d\varphi] \exp(-S[\varphi])}, \quad (4.71)$$

onde o limite, supostamente, é pra ser tomado de modo “fraco” (*weakly*, por isso o  $w$  na expressão acima) no sentido do trabalho de Floratos e Iliopoulos. Novamente, seguindo a obra citada anteriormente, para a teoria de perturbação, podemos separar a ação em duas partes:

$$S = S_0 + \lambda S_I. \quad (4.72)$$

As funções de Green da teoria são computadas como séries de potências em  $\lambda$ . Similarmente, podemos expandir em série a densidade de probabilidade:

$$P[\varphi, \tau] = \sum_0^\infty P_k[\varphi, \tau]. \quad (4.73)$$

Portanto, a função de correlação de  $n$ -pontos na  $k$ -ésima ordem é dada por:

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta = \lambda^k \int [d\varphi] \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \cdots \varphi(\tau_n, x_n) P_k[\varphi, \tau]. \quad (4.74)$$

A equação de Fokker-Planck torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P_k(\varphi, \tau) &= \int d^d x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \right) P_k(\varphi, \tau) + \\ &+ \int d^d x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta S_I}{\delta \varphi(x)} P_{k-1}(\varphi, \tau), \end{aligned} \quad (4.75)$$

com as condições iniciais:

$$P_0[\varphi, 0] = \prod_y \delta(\varphi(y)), \quad (4.76)$$

$$P_k[\varphi, 0] = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.77)$$

Podemos escrever uma solução formal para a equação de Fokker-Planck da seguinte maneira:

$$P_k[\varphi, \tau] = \int [d\varphi'] \int_0^\tau d\tau' \mathcal{D}_0[\varphi, \varphi', \tau - \tau'] \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \frac{\delta S_I}{\delta \varphi'(x)} P_{k-1}(\varphi', \tau'), \quad (4.78)$$

onde o funcional de Green da equação de Fokker-Planck livre satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{D}_0[\varphi, \varphi', \tau - \tau'] &= \prod_x \delta(\varphi(x) - \varphi'(x)) \delta(\tau - \tau') + \\ &+ \int d^d x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \right) \mathcal{D}_0[\varphi, \varphi', \tau - \tau'], \end{aligned} \quad (4.79)$$

com a condição de contorno:

$$\mathcal{D}_0[\varphi, \varphi', \tau - \tau']|_{\tau=\tau'_+} = \prod_x \delta(\varphi(x) - \varphi'(x)). \quad (4.80)$$

Para nosso caso, dever-se-á modificar as equações acima, de modo que possamos levar em conta a presença do kernel de memória. Por exemplo, a equação de Fokker-Planck livre

é:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_0[\varphi, \tau] = \int d^d x \int d^d y \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} M(x-y, \tau) + \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} N[\varphi; \tau, x] \right) P_0[\varphi, \tau], \quad (4.81)$$

onde:

$$M(x-y, \tau) \equiv \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau-s) G(\tau-s, x-y), \quad (4.82)$$

e

$$N[\varphi; \tau, x] \equiv \delta(x-y) \int_0^\tau ds K_\Lambda(\tau-s) S_0 |_{\varphi(x)=\varphi(s,x)}. \quad (4.83)$$

Agora, podemos ver de um modo mais claro porque foi requerido que  $\beta$ , definido na equação (4.48), fosse real. Lembrando a seguinte transformação familiar:  $P[\varphi, \tau] = \psi[\varphi, \tau] \exp\left(-\frac{\hat{S}[\varphi]}{2}\right)$ , com  $\hat{S} \equiv M^{-1}N$  ( $M = M(x-y, \tau)$ ,  $N = N[\varphi; \tau, x]$ ), podemos reescrever a equação (4.81) como uma equação do tipo Schrödinger:

$$\dot{\psi} = -2\mathcal{H}\psi, \quad (4.84)$$

onde  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano de Fokker-Planck:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y Q(x) M(x-y, \tau) Q(y), \quad (4.85)$$

onde:

$$Q(x) \equiv \hat{\Pi}(x) + \frac{1}{2} [\hat{\Pi}(x), \hat{S}], \quad (4.86)$$

e  $\hat{\Pi}(x) \equiv -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}$ . Ressaltamos aqui que esta derivação é puramente formal. Vamos estudar agora a função  $M(x-y, \tau)$ . No espaço de Fourier, ela é dada por:

$$M(k, \tau) = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{1}{9\Lambda^4 + \beta^2} \left\{ 8\Lambda^2 - 4 \exp\left(-\frac{3\Lambda^2}{2}\tau\right) \left[ 2\Lambda^2 \cos\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \left(\frac{3\Lambda^4}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.87)$$



onde usamos as equações (4.46) e (4.49). Logo, vemos que, no limite  $\tau \rightarrow \infty$ , a função  $M$  será positiva definida, o que, de acordo com a equação (4.85), garante que o hamiltoniano de Fokker-Planck seja positivo definido também. Em outras palavras, a parte real de seus autovalores será positiva. Porém, o que aconteceria se  $\beta$  fosse um número puramente imaginário? Bom, a função de Green seria dada por:

$$G(k, \tau) = \left( \frac{\Lambda^2}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\beta\tau}{2}\right) \right) \exp\left(-\tau \frac{\Lambda^2}{2}\right) \theta(\tau). \quad (4.88)$$

Logo, das equações (4.87) e (4.88), é fácil ver que  $M(k, \tau)$  poderia deixar de ser positiva definida e, por conseguinte,  $\mathcal{H}$  também o deixaria de ser. Logo, neste caso, não há garantia que a parte real dos autovalores deste último seja positiva. Em outras palavras, não se pode assegurar que no limite  $\tau \rightarrow \infty$ , o sistema atingirá seu estado fundamental, i.e., que ele convergirá para um equilíbrio.

Agora, vamos estudar a solução da equação (4.81). Esta será da forma:

$$P_0[\varphi, \tau] = \int [d\eta] \prod_y \delta(\varphi(y) - \varphi(\tau, y)) \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau'' \int d\tau' \eta(\tau'', x) K_{\Lambda}^{-1}(\tau'' - \tau') \eta(\tau', x)\right), \quad (4.89)$$

onde  $\varphi(\tau, y)$  é dado pela equação (4.42). Pode-se reescrever esta última equação na forma:

$$P_0[\varphi, \tau] = \int [d\eta] \int [d\xi] \exp\left(i \int d^d x \xi(\varphi(x) - \varphi(\tau, x))\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d x \int d\tau'' \int d\tau' \eta(\tau'', x) K_{\Lambda}^{-1}(\tau'' - \tau') \eta(\tau', x)\right). \quad (4.90)$$

Usando a equação (4.42) e efetuando-se as integrações funcionais em  $\eta$  e  $\xi$ , obtemos:

$$P_0[\varphi, \tau] = N_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' \varphi(x) D^{-1}(\tau, x; \tau, x') \varphi(x')\right), \quad (4.91)$$

onde a função  $D$  é apenas a função de correlação de dois-pontos livre e  $N_0^{-1}$  é um fator

de normalização. No espaço dos momenta, obtemos, para  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$P_0[\varphi, \tau] = N_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^d k \varphi(k)(k^2 + m_0^2)\varphi(-k)\right). \quad (4.92)$$

Como podemos ver, este resultado assemelha-se com o resultado de equilíbrio usual, a menos de uma constante, em contraste com o resultado obtido por Breit et al [111]. Agora, procedendo com passos semelhantes (ver referência [169]), é possível mostrar que o funcional de Green para a equação de Fokker-Planck livre é dado por ( $\Delta_0^{-1}$  é um fator de normalização):

$$\mathcal{D}_0[\varphi, \varphi', \tau] = \Delta_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d k \varphi_i(k) D_{ij}(\tau) \varphi_j(-k)\right), \quad (4.93)$$

onde:

$$\varphi_i \equiv (\varphi(k) \quad \varphi'(k)), \quad (4.94)$$

e os elementos da matriz  $D_{ij}$  são dados por:

$$D_{ij}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} D(k; \tau, \tau) & -D(k; \tau, \tau) G(k, \tau) \\ -D(k; \tau, \tau) G(k, \tau) & D(k; \tau, \tau) G(k, \tau) G(k, \tau) \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

É fácil verificar que, no limite  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $P_0$  e  $\mathcal{D}_0$  satisfarão, a menos de constantes, relações similares às obtidas por Floratos e Iliopoulos. Este comportamento pode ser entendido se percebermos a estrutura similar entre as funções de Green do esquema usual de Parisi-Wu e de nossa abordagem não-markoviana. O mesmo vale para ambas funções de correlação de dois-pontos. Contudo, para teorias escalares não-massivas, aquelas estimativas encontradas em [169] decaem como uma potência inversa de  $\tau$ . Em nosso tratamento, mesmo na situação sem massa, um comportamento exponencial é encontrado. Portanto, no limite  $\tau \rightarrow \infty$ , obtemos uma convergência melhorada.

A partir de todos estes resultados, nós esperamos obter funções de probabilidade na teoria de perturbação que são bem parecidas com as densidades de probabilidade do

equilíbrio usual. Portanto, a teoria não se encontra regularizada. Como bem observado em [166], nada se perde ao se usar uma descrição não-markoviana no lugar de uma markoviana, desde que seja gaussiana.

A equação de Langevin dada pela equação (3.1) é apenas uma escolha particular dentro de uma larga classe de equações de relaxação. Investigamos se o método de quantização de Parisi-Wu poderia ser generalizado admitindo-se uma equação de Langevin com um kernel de memória com as correlações do ruído aleatório modificadas. Depois, estudamos a teoria  $(\lambda\varphi^4)$  até o nível de um laço introduzindo uma equação de Langevin não-markoviana e examinamos a teoria de campo com interação que surge no limite assintótico deste processo não-markoviano.

Para se asseverar que a primeira modificação pode ser de fato utilizada, deve-se verificar primeiramente se o sistema evolui para o equilíbrio no limite assintótico. Depois, deve-se mostrar que o mesmo converge para a distribuição de equilíbrio correta. Nós provamos que, embora o sistema atinja o equilíbrio, obtemos uma teoria não-regularizada. Em contraste com a regularização dimensional e outros procedimentos de regularização, uma propriedade notável da regularização estocástica é que ela preserva todas as simetrias da teoria original. Com nossos resultados, é fácil de ver que o sistema descrito por esta equação de Langevin não-markoviana converge, mas as virtudes da regularização estocástica que esperávamos aparecer neste método foram perdidas.

Uma continuação natural seria discutir a quantização estocástica de campos de bósons e férmions em espaços riemannianos. Uma aplicação diferente da quantização estocástica seria uma discussão de uma teoria de campos com interação na presença de estruturas macroscópicas. Sabe-se muito bem que, efetuando-se a expansão perturbativa de acopla-

mento fraco, para se renormalizar a teoria de campos com interação, devemos não apenas introduzir os contra-termos de volume usuais, mas também os contra-termos de superfície. Isto pode ser feito ao nível de um laço e a temperatura finita [29] [30] [170]. Ao se generalizar o cálculo para laços de ordem superior, encontram-se divergências sobrepostas. Uma pergunta natural seria como se implementaria a quantização estocástica em sistemas onde estruturas macroscópicas estão presentes.

## 4.4 O método de quantização estocástica de Parisi-Wu em teorias topológicas

Nas duas seções anteriores, estudamos a quantização estocástica de uma teoria de campos escalar com auto-interação, assumindo um processo não-markoviano, modificando a equação de Langevin pela introdução de um kernel de memória [135] [166] [171]. Foi demonstrado que, muito embora um sistema com uma equação de Langevin estacionária, gaussiana e não-markoviana com um kernel de memória e um ruído colorido converge no limite assintótico do parâmetro de Markov  $\tau$  para o equilíbrio, não logramos uma teoria regularizada.

Neste momento, queremos continuar a investigar as virtudes desta quantização estocástica não-markoviana, agora aplicada ao caso de uma teoria de campos topológica. Uma das características peculiares deste tipo de teoria é a presença de uma unidade imaginária  $i$  em frente à ação topológica no espaço euclidiano. Como a teoria topológica não depende da métrica do espaço-tempo, o peso da medida da integral de trajetória permanece sendo  $e^{iS}$  mesmo após uma rotação de Wick. Outra particularidade de uma ação topológica é o fato dela ser a integral de uma densidade que não possui limite in-

ferior no espaço euclidiano. Isto significa que, se uma tentativa de se usar uma equação de Langevin markoviana com um ruído branco para se quantizar tal teoria for posta em prática, encontrar-se-ão problemas sérios se o fator  $i$  for ignorado. Esta equação de Langevin não vai tender a equilíbrio algum no limite de grande  $\tau$ . Portanto, neste sentido, o uso de uma equação de Langevin com uma ação complexa [156] torna-se essencial para se aplicar a quantização estocástica a uma ação topológica [172] [173] [174].

Há na literatura uma abordagem para se resolver o problema de convergência citado anteriormente. Analisando a teoria de Chern-Simons puramente topológica, Ferrari e Huffel introduziram um kernel não-trivial na equação de Langevin [175]. Por outro lado, Wu e Zhu [176] mostraram que uma equação de Langevin para uma teoria de Maxwell-Chern-Simons converge para o resultado usual de equilíbrio sem a necessidade de se introduzir tal kernel. O método deles, porém, só funciona no caso em que o coeficiente de Chern-Simons for real.

Vamos demonstrar que, se nos servimos de uma equação de Langevin não-markoviana com um ruído colorido, este problema de convergência pode ser resolvido de uma maneira diferente. Empregaremos este tratamento à teoria de Chern-Simons tridimensional abeliana e vamos revelar que obtemos convergência para o equilíbrio mesmo com um coeficiente de Chern-Simons imaginário. Seguiremos as mesmas linhas da referência [115].

## 4.5 Quantização estocástica de uma teoria de Chern-Simons abeliana

Vamos considerar a seguinte ação para a teoria de Maxwell-Chern-Simons em três dimensões, no espaço euclidiano:

$$S = \int d^3x \left( \frac{1}{4\varepsilon^2} A_\mu(x) (-\Delta \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu(x) - i \frac{\kappa}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu(x) \partial_\nu A_\rho(x) \right), \quad (4.96)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace tridimensional. Ao fim de nossos cálculos vamos fazer  $\varepsilon \rightarrow \infty$  para obtermos resultados referentes a uma teoria puramente topológica, como discutido na referência [176]. Note o fator  $i$  situado à frente do termo topológico, como mencionado anteriormente. Para computarmos as funções de Schwinger da teoria, vamos usar o método da quantização estocástica. Vamos apresentar a seguinte equação de Langevin não-markoviana:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_\mu(\tau, x) = - \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} \Big|_{A_\mu(x)=A_\mu(s,x)} + \eta_\mu(\tau, x), \quad (4.97)$$

onde  $M_\Lambda(\tau - s)$  é um kernel de memória e  $\Lambda$  é um parâmetro arbitrário. Teremos, das equações (4.96) e (4.97), no espaço dos momenta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} A_\mu(\tau, k) &= - \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) A_\nu(s, k) + \\ &\quad - \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) A_\nu(s, k) + \eta_\mu(\tau, k) \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde o campo estocástico  $\eta_\mu(\tau, k)$  satisfaz:

$$\langle \eta_\mu(\tau, k) \rangle_\eta = 0 \quad (4.99)$$

e também

$$\langle \eta_\mu(\tau, k) \eta_\nu(\tau', k') \rangle_\eta = 2\delta_{\mu\nu} M_\Lambda(|\tau - \tau'|) \delta^d(k + k'). \quad (4.100)$$

Para a condição inicial  $A_\mu(\tau, k)|_{\tau=0} = 0$ , a solução da equação (4.98) será dada por:

$$A_\mu(\tau, k) = \int_0^\infty d\tau' G_{\mu\nu}(k; \tau - \tau') \eta_\nu(\tau', k), \quad (4.101)$$

onde nós introduzimos a função de Green retardada  $G_{\mu\nu}(k, \tau)$ , a qual obedece à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{\mu\nu}(k, \tau) &= -\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} \right) \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) G_{\rho\nu}(k, s) + \\ &\quad -\frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\rho\sigma} k_\sigma \int_0^\tau ds M_\Lambda(\tau - s) G_{\rho\nu}(k, s) + \delta_{\mu\nu} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (4.102)$$

para  $\tau > 0$  e  $G_{\mu\nu}(k, \tau) = 0$  para  $\tau < 0$ .

Para prosseguirmos com os cálculos, vamos exibir a transformada de Laplace da equação (4.102):

$$\begin{aligned} z G_{\mu\nu}(k, z) &= -\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} \right) M_\Lambda(z) G_{\rho\nu}(k, z) + \\ &\quad -\frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\rho\sigma} k_\sigma M_\Lambda(z) G_{\rho\nu}(k, z) + \delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.103)$$

onde:

$$M_\Lambda(z) = \int_0^\infty d\tau M_\Lambda(\tau) e^{-z\tau}. \quad (4.104)$$

Para o resultado sem memória (ou, formalmente, quando  $M_\Lambda(\tau) \rightarrow \delta(\tau)$ ), teremos, da equação (4.102):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{\mu\nu}(k, \tau) &= -\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} \right) G_{\rho\nu}(k, \tau) + \\ &\quad -\frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\rho\sigma} k_\sigma G_{\rho\nu}(k, \tau) + \delta_{\mu\nu} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (4.105)$$

cuja transformada de Laplace vale:

$$\begin{aligned} z G_{\mu\nu}(k, z) &= -\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} \right) G_{\rho\nu}(k, z) + \\ &\quad -\frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\rho\sigma} k_\sigma G_{\rho\nu}(k, z) + \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Note a semelhança entre as equações (4.103) e (4.106). A solução para a equação (4.105) é dada por [176]

$$G_{\mu\nu}(k, \tau) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \left( \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \cos\left(\frac{\kappa}{4\pi} k\tau\right) + \epsilon_{\mu\nu\sigma} \frac{k_\sigma}{k} \sin\left(\frac{\kappa}{4\pi} k\tau\right) \right) \exp\left(\frac{-k^2}{\varepsilon^2} \tau\right), \quad (4.107)$$

cuja transformada de Laplace vale:

$$G_{\mu\nu}(k, z) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{1}{z} + \frac{\left( \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) z - \epsilon_{\mu\nu\sigma} k_\sigma \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) \right)}{\left( z + \frac{k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 + \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 k^2}. \quad (4.108)$$

Comparando as equações (4.103) e (4.106), obtemos o análogo da equação (4.108) com memória:

$$G_{\mu\nu}(k, z) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{1}{z} + \frac{\left( \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) z - \epsilon_{\mu\nu\sigma} k_\sigma \left( \frac{\kappa'}{4\pi} \right) \right)}{\left( z + \frac{k^2}{\varepsilon'^2} \right)^2 + \left( \frac{\kappa'}{4\pi} \right)^2 k^2}, \quad (4.109)$$

onde:

$$\frac{1}{\varepsilon'^2} \equiv \frac{M_\Lambda(z)}{\varepsilon^2} \quad (4.110)$$

e

$$\kappa' \equiv \kappa M_\Lambda(z). \quad (4.111)$$

No apêndice *D*, derivamos em detalhe a transformada de Laplace inversa da equação (4.109). Esta é dada por:

$$G_{\mu\nu}(k, \tau) = \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + g_{\mu\nu} G_1(k, \tau) + \tilde{g}_{\mu\nu} G_2(k, \tau) \right) \theta(\tau), \quad (4.112)$$

onde as quantidades  $G_i(k, \tau)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  estão definidas no apêndice *D*. Vemos que nosso  $G_{\mu\nu}(k, \tau)$  não se aproxima de zero para  $\tau \rightarrow \infty$ . A razão para tal comportamento é a presença do termo longitudinal  $\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ , o qual é corriqueiro na quantização estocástica de



todas as teorias de calibre sem a fixação de calibre e pode ser eliminado por uma fixação de calibre estocástica adequada. Não obstante, o aparecimento deste termo produzirá nenhuma contribuição para quantidades invariantes de calibre.

Após esta discussão, estamos capazes de apresentar a função de correlação de dois-pontos. Temos que  $D_{\mu\nu}(k; \tau, \tau')$  é dada por

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k; \tau, \tau') &\equiv \langle A_\mu(\tau, k) A_\nu(\tau', k') \rangle_\eta = \\ &= \delta^d(k + k') \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' G_{\mu\kappa}(k, \tau - s) G_{\lambda\nu}(k, \tau' - s') \langle \eta_\kappa(s, k) \eta_\lambda(s', k') \rangle_\eta \\ &= 2\delta^d(k + k') \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' G_{\mu\lambda}(k, \tau - s) G_{\lambda\nu}(k, \tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Logo, levando a equação (4.112) na equação acima e separando o resultado em cinco diferentes contribuições, teremos:

$$D_{\mu\nu}(k; \tau, \tau') = 2\delta^d(k + k') (J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \quad (4.114)$$

onde:

$$J_1 \equiv \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} M_\Lambda(|s - s'|), \quad (4.115)$$

$$J_2 \equiv \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' g_{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} G_1(k; \tau - s) G_1(k; \tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|), \quad (4.116)$$

$$J_3 \equiv \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \tilde{g}_{\mu\lambda} \tilde{g}_{\lambda\nu} G_2(k; \tau - s) G_2(k; \tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|), \quad (4.117)$$

$$J_4 \equiv \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' g_{\mu\lambda} \tilde{g}_{\lambda\nu} G_1(k; \tau - s) G_2(k; \tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|), \quad (4.118)$$

e, finalmente

$$J_5 \equiv \int_0^\tau ds \int_0^{\tau'} ds' \tilde{g}_{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} G_2(k; \tau - s) G_1(k; \tau' - s') M_\Lambda(|s - s'|). \quad (4.119)$$

Tais equações podem ser resolvidas por ordenação dos tempos fictícios  $s$  e  $s'$  ( $s > s'$  por exemplo) e com a avaliação das integrais em  $s$  ( $s'$ ) no intervalo  $[0, t]$  ( $[0, s]$ ). Obtemos,

para  $J_1$ , no limite  $\tau \rightarrow \infty$ ,

$$J_1 = \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( \tau - \frac{1}{\Lambda^2} \right). \quad (4.120)$$

As integrais  $J_2$  e  $J_3$  podem ser resolvidas em analogia com o caso escalar [114]. Procedendo com as seguintes substituições:

$$(k^2 + m^2)_1 \rightarrow \frac{\alpha}{\Lambda^2} (1 - \Lambda^4) + \Lambda^2 y_1 + \frac{(\alpha^2 - y_1^2)}{\Lambda^2}, \quad (4.121)$$

$$(k^2 + m^2)_2 \rightarrow \frac{\alpha}{\Lambda^2} (1 + \Lambda^4) - \Lambda^2 y_1 - \frac{(\alpha^2 - y_1^2)}{\Lambda^2}, \quad (4.122)$$

onde o índice 1 (2) significa que o resultado vale para função  $G_1$  ( $G_2$ ) (veja o apêndice D), teremos, no limite assintótico  $\tau \rightarrow \infty$ , que

$$\begin{aligned} J_2 = & \left( \frac{\alpha}{\Lambda^2} (1 - \Lambda^4) + \Lambda^2 y_1 + \frac{(\alpha^2 - y_1^2)}{\Lambda^2} \right)^{-1} \left[ \frac{\Lambda^2}{(\sigma\gamma)^2} \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4} \right) \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho + \right. \\ & \left. + (\sigma\gamma)^{-2} \left( \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4} \right)^2 - \frac{\Lambda^4}{4} k^2 \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 \right) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.123)$$

e

$$\begin{aligned} J_3 = & \left( \frac{\alpha}{\Lambda^2} (1 + \Lambda^4) - \Lambda^2 y_1 - \frac{(\alpha^2 - y_1^2)}{\Lambda^2} \right)^{-1} \left[ - \frac{\Lambda^2}{(\sigma\gamma)^2} \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma - \gamma)^2}{4} \right) \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho + \right. \\ & \left. + (\sigma\gamma)^{-2} \left( \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma - \gamma)^2}{4} \right)^2 - \frac{\Lambda^4}{4} k^2 \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 \right) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.124)$$

As integrais restantes  $J_4$  e  $J_5$  podem ser calculadas sem maiores complicações [91]. Novamente, no limite assintótico  $\tau \rightarrow \infty$ , chegamos aos resultados abaixo:

$$\begin{aligned} J_4 + J_5 = & \frac{f(\Lambda, \sigma, \gamma)}{g(\Lambda, \sigma, \gamma)} \left[ - \frac{\Lambda^2}{(2\sigma\gamma)} \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho + \right. \\ & + (\sigma\gamma)^{-2} \left( \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4} \right) \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma - \gamma)^2}{4} \right) + \frac{\Lambda^4}{4} k^2 \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 \right) \\ & \left. \times \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.125)$$

onde:

$$\begin{aligned}
f(\Lambda, \sigma, \gamma) \equiv & 153\Lambda^{14} + \Lambda^{10} \left[ 18(\sigma + \gamma)^2 + 17(\sigma - \gamma)^2 + 9\sigma\gamma \right] + \Lambda^6 \left[ (\sigma + \gamma)^4 + (\sigma - \gamma)^4 + \right. \\
& + \frac{\sigma\gamma}{2} \left( (\sigma + \gamma)^2 + (\sigma - \gamma)^2 \right) - \frac{9}{2}\sigma\gamma \left( (\sigma + \gamma)^2 - \sigma\gamma(1 - 2\sigma\gamma) \right) \left. \right] + \\
& + \Lambda^2\sigma\gamma \left[ \frac{(\sigma + \gamma)^2}{2} - \sigma\gamma(\sigma + \gamma)^2 - \frac{1}{2}(\sigma + \gamma)^2(\sigma - \gamma)^2 \right], \tag{4.126}
\end{aligned}$$

e

$$g(\Lambda, \sigma, \gamma) \equiv \left( 9\Lambda^4 + (\sigma - \gamma)^2 \right) \left( 9\Lambda^4 + (\sigma + \gamma)^2 \right) (\Lambda^4 + \sigma^2) (\Lambda^4 + \gamma^2). \tag{4.127}$$

Como aludido anteriormente, o termo longitudinal linearmente divergente, encontrado na equação (4.120), pode ser eliminado por uma fixação de calibre estocástica. Agora, tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , verifica-se que as contribuições  $J_2$  e  $J_3$  se anulam. Então, finalmente, obtemos, para a função de correlação de dois-pontos puramente topológica:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(k; \tau, \tau') = & 2\delta^d(k + k') \left[ \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( \tau - \frac{1}{\Lambda^2} \right) + \frac{f'(\Lambda, \sigma, \gamma)}{g'(\Lambda, \sigma, \gamma)} \left( -\frac{\Lambda^2}{2Q(y'_1)} \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{\beta'}{Q^2(y'_1)} - 1 \right) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \right) \right], \tag{4.128}
\end{aligned}$$

onde  $\beta' = \beta|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = \frac{\Lambda^4}{4} k^2 \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)$ ,  $y'_1 = y_1|_{\varepsilon \rightarrow \infty}$  e:

$$\begin{aligned}
f'(\Lambda, \sigma, \gamma) = f|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = & 120\Lambda^{14} + \frac{19}{2}\Lambda^{10}Q(y'_1) + 9\Lambda^6Q^2(y'_1) + \\
& - \frac{\Lambda^6}{2}Q(y'_1) + \frac{9}{2}\Lambda^4Q(y'_1) + \Lambda^2Q^2(y'_1) - 18Q^2(y'_1) + \frac{9}{2}Q(y'_1), \tag{4.129}
\end{aligned}$$

$$g'(\Lambda, \sigma, \gamma) = g|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 64\Lambda^8Q^2(y'_1) + 32\Lambda^4Q^3(y'_1) + 4Q^4(y'_1), \tag{4.130}$$

$$Q(y'_1) \equiv \left( \Lambda^4 y'_1 - (y'_1)^2 \right)^{1/2}. \tag{4.131}$$

Percebemos que em nossa última expressão para a função de dois-pontos permaneceu um termo proporcional ao propagador transversal de Maxwell. Esta é uma situação anômala, já que a contribuição de Maxwell está ausente nos resultados usuais da teoria de Chern-Simons puramente topológica. A origem de tal fato excepcional reside no uso da equação

de Langevin não-markoviana. Para driblarmos tal problema e recuperarmos, assim, o produto usual, devemos optar por fazer:

$$\beta' = Q^2(y_1'), \quad (4.132)$$

o que nos leva a:

$$y_1' = \frac{\Lambda}{2} \pm \frac{(\Lambda^8 - 4\beta')^{1/2}}{2}. \quad (4.133)$$

Logo, se escolhermos:

$$y_1 = \frac{\Lambda}{2} \pm \frac{(\Lambda^8 - 4\beta')^{1/2}}{2} + \frac{C}{\varepsilon^n}, \quad (4.134)$$

onde  $C$  é uma constante real e  $n$  é um número inteiro arbitrariamente grande. Levando esta última equação em (D.23), teremos uma equação cúbica em  $C$ . Da teoria usual de Galois de soluções por radicais de polinômios [177] [178], podemos sempre escolher uma raiz real a partir de três raízes possíveis. Em outras palavras, podemos sempre escolher uma constante real de modo que a função de correlação de dois-pontos convirja para um termo “puramente topológico”, com algumas pequenas distinções em comparação ao termo habitual. Ou seja, para readquirirmos o resultado usual, tivemos que impor um vínculo nos parâmetros da teoria. Nota-se também que nosso tratamento ainda é válido quando  $\kappa$  é puramente imaginário [o que é matematicamente análogo a escrever  $A_\mu = A'_\mu + iA''_\mu$ , onde  $A'_\mu$  é real, e em seguida tomar a parte real da equação de Langevin (4.98) no espaço das coordenadas].

# Capítulo 5

## A quantização estocástica em variedades riemannianas

### 5.1 O método de quantização estocástica de Parisi-Wu em variedades riemannianas

Neste capítulo vamos mostrar como se faz a implementação da quantização estocástica de campos escalares com auto-interação em variedades riemannianas estáticas e com horizonte de eventos. Existe a possibilidade deste novo método alternativo de quantização melhorar o nosso entendimento acerca de vários problemas em aberto até o presente momento, como, por exemplo, a perda de informação na formação de um buraco-negro e o problema da entropia do buraco-negro, conforme argumentado anteriormente.

Todo o programa da quantização estocástica e regularização estocástica foi implementado para campos genéricos definidos numa variedade euclidiana. Alguns autores chegaram a aplicar este método para a gravitação euclidiana linearizada e também para a teoria não-linearizada. Queremos salientar que toda uma situação que fica entre o primeiro e o segundo caso foi totalmente esquecida. Um passo lógico e consistente seria discutir uma situação intermediária entre o caso de campos num espaço-tempo plano e a

gravitação quântica, isto é, a teoria semi-clássica, ou seja a teoria de campos em espaços curvos.

O programa da quantização estocástica foi aplicado para a teoria  $\lambda\varphi^4$ , definida numa variedade curva pseudo-riemanniana cuja extensão analítica para a variedade riemanniana é trivial. Sendo mais específico, campos escalares definidos no espaço-tempo de Einstein e Rindler foram estudados [116]. A equação de Langevin foi resolvida nas situações acima descritas e a função de Schwinger de dois-pontos na aproximação de um laço foi apresentada. Um procedimento de regularização estocástica foi utilizado nesta etapa.

Trabalhando no espaço de Rindler, uma questão que se coloca diz respeito ao comportamento das funções de correlação do ruído, perto do horizonte de eventos. Não é difícil ver que sempre que tivermos  $g = \det g_{\mu\nu} = 0$ , estas funções de correlação divergem. Desta forma as funções de correlação de  $n$ -pontos  $\langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta$  estarão mal definidas, pois são soluções da equação de Langevin. Uma solução para este problema é definir o domínio do operador diferencial em questão, impondo por exemplo condições de contorno nas soluções da equação de Langevin numa bola em torno do horizonte de eventos, que se traduz por um ponto em Rindler. Por outro lado, no limite  $g = \det g_{\mu\nu} \rightarrow \infty$ , todas as funções de correlação se anulam. Este programa tem contato com todo o programa de implementar a renormalização perturbativa em variedades onde a invariância translacional foi quebrada [29] [31] [32].

Voltando ao problema de se implementar a quantização estocástica em uma variedade curva, estes autores discutiram também como o parâmetro de Markov com a sua dimensão extra, fornece um procedimento de regularização que preserva todas as simetrias da teoria original. Este ponto é extremamente importante. Como a regularização

estocástica não é uma regularização na ação, pode ser um ponto de partida para se construir uma prova de uma renormalização que independa da regularização num espaço-tempo curvo. Enfatizamos que todo o programa de quantização estocástica pode ser implementado sem dificuldades (módulo problemas de horizonte de eventos, etc.) se for possível obter após a rotação de Wick uma ação euclidiana real. Se a variedade curva original for estática, é possível estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana e encontrar a variedade riemanniana sem problemas. Para variedades curvas que não são estáticas este procedimento anterior não se aplica e devemos estender o formalismo da quantização estocástica além do caso de uma métrica positiva definida e formular a quantização estocástica numa variedade pseudo-riemanniana.

Algumas tentativas foram efetuadas nesta direção no espaço-tempo de Minkowski. Como citamos anteriormente, Huffel e Rumpf [151] propuseram uma modificação no esquema original de Parisi e Wu introduzindo um termo de deslocamento complexo na equação de Langevin original. Gozzi [152] estudou o espectro de hamiltonianos de Fokker-Planck que não são auto-adjuntos. Ainda neste contexto, os trabalhos de Huffel e Landshoff e também Callaway et al merecem ser citados [153] [154].

Toda esta discussão nos remete ao seguinte problema. A diferença fundamental entre a implementação da quantização estocástica no espaço euclidiano e no espaço-tempo de Minkowski está relacionado ao fato que, no caso de uma ação real euclidiana, o estado de equilíbrio é obtido, pois este é uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck. Por outro lado, com a formulação no espaço-tempo de Minkowski, os hamiltonianos são geralmente não-hermitianos, tendo autovalores complexos. A parte real destes autovalores são importantes, pois determinam o comportamento assintótico do sistema para tempos

de Markov grandes. O sistema tende ao equilíbrio apenas nos casos em que a parte real dos auto-valores é positiva e definida.

Muito embora haja alguns artigos discutindo a quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski [151] [152], esta quantização foi originalmente apresentada como um método alternativo de quantização para campos definidos em espaços euclidianos. Portanto, nosso objetivo aqui é examinar a quantização estocástica de campos escalares definidos em uma variedade estática com curvatura sem horizonte de eventos e também em uma variedade plana com horizonte de eventos, i.e., fazer a continuação analítica para métricas que geram ações reais.

Nosso objetivo agora é estabelecer a quantização estocástica para a teoria  $\lambda\phi^4$  com auto-interação em uma variedade riemanniana e, do mesmo modo, em uma variedade plana com horizonte de eventos: o espaço-tempo de Einstein [179] e o de Rindler [180] [181] [182] [183], onde formas positivas definidas podem ser obtidas que geram ações reais na equação de Langevin de Parisi-Wu. O único artigo que possui algo em comum com toda esta discussão é o artigo de Huang [184]. Este autor utilizou a quantização estocástica para encontrar o tensor de energia-momentum regularizado associado com um campo escalar em um espaço-tempo inhomogêneo. Ressaltamos que, embora o movimento browniano em uma variedade tenha sido analisado por matemáticos, há alguns artigos estudando o movimento browniano em variedades gerais. Veja, por exemplo, a referência [185].

Um ponto realmente importante em um procedimento de regularização é que este deve preservar todas as simetrias da lagrangeana não-regularizada. Muitos autores enfatizaram que, *a priori*, não se pode esperar que exista uma prova da renormalização de teorias em



um espaço com curvatura que seja independente da regularização usada. A presença do parâmetro de Markov como uma dimensão extra nos leva a uma esquema de regularização, o qual preserva todas as simetrias da teoria sob estudo. Como esta regularização estocástica não é uma regularização de ação, ela poderia servir para o auxílio da construção de tal prova. Como um ponto de partida para este programa, devemos calcular a função de dois-pontos até a primeira ordem na constante de acoplamento  $\lambda$  e aplicar a regularização estocástica contínua. Nossos termos devem ser comparados com os da literatura.

## 5.2 Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de Einstein

O objetivo desta seção é estabelecer a quantização e a regularização estocásticas para a teoria  $\lambda\varphi^4$  ao nível de um laço no espaço-tempo de Einstein, seguindo as mesmas linhas da referência [116]. Vamos considerar uma variedade  $M^4$  que admite um vetor de Killing  $X$  do tipo tempo não-nulo. Se for possível introduzir coordenadas  $t = x^0, x^1, x^2, x^3$  localmente tais que  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  e se as componentes do tensor métrico forem independentes de  $t$ ,  $M^4$  é estacionária. Se, além disso, a distribuição  $X^\perp$  dos 3-planos ortogonais a  $X$  for integrável, então  $M^4$  é estática. Cada curva integral do campo de vetores de Killing  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  é uma linha de universo de um possível observador. Como  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  gera isometrias, os 3-planos  $X^\perp$  são invariantes sob estas isometrias. Para variedades estáticas, é possível efetuar a rotação de Wick, i.e., estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana para um domínio riemanniano sem problemas. Portanto, para um espaço-tempo estático, a implantação da quantização estocástica é feita diretamente.

Nas seções anteriores, estivemos trabalhando em um espaço euclidiano  $R^d \times R^{(+)}$ , onde

$R^d$  é o espaço euclidiano usual e  $R^{(+)}$  é o setor de Markov. Agora, vamos generalizar isto para uma situação mais complicada, i.e., vamos trabalhar em uma variedade riemanniana  $M$  geral (e, por enquanto, estática). Em outras palavras, vamos considerar uma teoria de campos clássica definida em uma variedade  $M \times R^{(+)}$  acoplada a um reservatório térmico. Portanto, em uma variedade quadridimensional com curvatura, a equação de Parisi-Wu para campos escalares será

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x), \quad (5.1)$$

onde  $g = \det g_{\mu\nu}$  e a ação euclidiana clássica  $S_0$  é dada por

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}. \quad (5.2)$$

Na equação acima,  $\mathcal{L}$  é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) \varphi^2. \quad (5.3)$$

Note que introduzimos um acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional representado pelo termo  $\xi R \varphi^2$ , onde  $\xi$  é um fator numérico e  $R$  é a curvatura escalar de Ricci. O campo de ruído  $\eta(\tau, x)$  obedece às seguintes correlações generalizadas:

$$\langle \eta(\tau, x) \rangle_\eta = 0, \quad (5.4)$$

e

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = \frac{2}{\sqrt{|g(x)|}} \delta^4(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (5.5)$$

Substituindo as equações (5.2) e (5.3) na equação de Langevin dada pela equação (5.1), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\left(-\Delta + m^2 + \xi R\right) \varphi(\tau, x) + \eta(\tau, x), \quad (5.6)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami quadridimensional definido por:

$$\begin{aligned}\Delta &= |g|^{-1/2} \partial_\mu (|g|^{1/2} g_{\mu\nu} \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu,\end{aligned}\tag{5.7}$$

$\nabla$  denotando a derivada covariante.

Para prosseguirmos, como na situação sem curvatura, vamos introduzir a função de Green retardada para o problema de difusão  $G(\tau - \tau', x, x')$ , a qual obedece à:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( -\Delta_x + m^2 + \xi R(x) \right) \right] G(\tau - \tau', x, x') = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta^4(x - x') \delta(\tau - \tau'),\tag{5.8}$$

se  $\tau - \tau' > 0$ , e  $G(\tau - \tau', x, x') = 0$  se  $\tau - \tau' < 0$ .

Utilizando a função de Green retardada e a condição inicial  $\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = 0$ , uma solução formal para a equação (5.6) é

$$\varphi(\tau, x) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^4x' \sqrt{|g(x')|} G(\tau - \tau', x - x') \eta(\tau', x').\tag{5.9}$$

Vemos que, a fim de se resolver a equação (5.6), precisamos inverter o operador diferencial dado pela equação (5.7). Dependendo da métrica  $g_{\mu\nu}$  definida sobre a variedade, isto pode ser uma empreitada laboriosa. No caso euclidiano, isto é facilmente resolvido, pois decompomos os campos em modos de Fourier (ondas planas), os quais são soluções da equação de Klein-Gordon com uma métrica plana; cada modo de Fourier, como vimos, obedece a uma equação de Langevin. Logo, se a equação de Klein-Gordon em uma variedade geral com curvatura nos permitir obter soluções que possam ser representadas por uma soma de modos similar ao caso plano, poderemos, da mesma maneira, decompor nossos campos em tais modos de um meio tal que cada um deles, novamente, irá obedecer a uma equação de Langevin. Então, a equação (5.6) poderá ser resolvida de uma jeito simples e

direto. Claro está que este procedimento só nos será útil se admitirmos variedades com vetores de Killing globais, o que, infelizmente, não é sempre o caso. Logo, admitindo que seja assim, podemos escrever a decomposição de modos da seguinte maneira:

$$\varphi(\tau, x) = \int d\tilde{\mu}(k) \varphi_k(\tau) u_k(x), \quad (5.10)$$

e

$$\eta(\tau, x) = \int d\tilde{\mu}(k) \eta_k(\tau) u_k(x), \quad (5.11)$$

onde a medida  $\tilde{\mu}(k)$  depende da métrica na qual estamos interessados. Por exemplo, no caso plano, temos que, em um espaço quadridimensional,  $d\tilde{\mu}(k) = d^4k$ , e os modos  $u_k(x)$  são dados por:

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ikx}. \quad (5.12)$$

Então vemos que, no caso plano, as equações (5.10) e (5.11) reduzem-se à decomposição de Fourier dada pelas equações (3.11) e (3.12), respectivamente.

Agora, apliquemos este formalismo ao caso da variedade euclidiana de Einstein. O elemento de linha geral de Robertson-Walker é dado por [186] [187]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j &= (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (5.14)$$

e, para a variedade de Einstein, temos ( $K = 1$ ),  $f(\chi) = r = \sin \chi$ ,  $0 \leq \chi \leq 2\pi$ .

A equação (5.14) nos dá o elemento de linha das seções espaciais no caso pseudo-riemanniano, as quais são, respectivamente, as seções hiperbólica, plana ou fechada, dependendo se  $K = -1, 0, 1$ . Escrevendo  $C(\rho) = a^2(t)$ , com o parâmetro de tempo conforme

$\rho$  dado por

$$\rho = \int^t dt' a^{-1}(t'), \quad (5.15)$$

o elemento de linha pode ser colocado na forma:

$$ds^2 = C(\rho) \left( -d\rho^2 + \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (5.16)$$

No caso mais simples, isto é, espaço-tempo estático com  $C(\rho) = C = a^2 = \text{constante}$ , a curvatura escalar é dada por  $R = \frac{6K}{C}$ . Após a rotação de Wick, estaremos trabalhando na variedade euclidiana de Einstein. Neste caso, podemos decompor os modos da seguinte forma:

$$u_k(x) = C^{-1/2} \mathbf{X}_{\vec{k}}(\vec{x}) e^{ik_\rho \rho}, \quad (5.17)$$

com  $\vec{x} = (r, \theta, \phi)$  ou  $(\chi, \theta, \phi)$  e  $\mathbf{X}_{\vec{k}}$  sendo uma solução de

$$\Delta^{(3)} \mathbf{X}_{\vec{k}} = -(q^2 - K) \mathbf{X}_{\vec{k}}. \quad (5.18)$$

Na equação (5.18),  $\Delta^{(3)}$  é o laplaciano associado com a métrica espacial  $h_{ij}$ , que vem a ser dado por:

$$\Delta = h^{-1/2} \partial_i (h^{1/2} h^{ij} \partial_j). \quad (5.19)$$

Além disso, as funções  $\mathbf{X}_{\vec{k}}$  são normalizadas de modo que:

$$\int d^3x h^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_{\vec{k}}(\vec{x}) \mathbf{X}_{\vec{k}'}^*(\vec{x}) = \delta(\vec{k}, \vec{k}'), \quad (5.20)$$

onde  $\delta(\vec{k}, \vec{k}')$  é a função  $\delta$  com respeito à medida  $\tilde{\mu}$ :

$$\int d\tilde{\mu}(k') f(\vec{k}) \delta(\vec{k}, \vec{k}') = f(\vec{k}'). \quad (5.21)$$

As autofunções  $\mathbf{X}_{\vec{k}}$  do laplaciano tridimensional são, para  $K = 1$ :

$$\mathbf{X}_{\vec{k}}(\vec{x}) = \Pi_{qJ}^+(\chi) Y_{MJ}(\theta, \phi), \quad (5.22)$$

com  $\vec{k} = (q, J, M)$ ,  $M = -J, -J + 1, \dots, J$ ,  $J = 0, 1, \dots, q - 1$  e  $q = 1, 2, \dots$ . As  $Y_{MJ}$  são os usuais harmônicos esféricos. As funções  $\Pi_{qJ}^+$  podem ser definidas a partir de [188]:

$$\Pi_{qJ}^-(\chi) = \left[ \frac{1}{2} \pi q^2 (q^2 + 1) \dots (q^2 + J^2) \right]^{-1/2} \sinh^J \chi \left( \frac{d}{d \cosh \chi} \right)^{J+1} \cos q\chi, \quad (5.23)$$

ao substituírmos  $q$  por  $-iq$  e  $\chi$  por  $-i\chi$  na última.

Com estas definições, a medida  $\tilde{\mu}(k)$  para o universo de Einstein é definida como sendo:

$$\int d\tilde{\mu}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk_\rho \sum_{q,J,M}. \quad (5.24)$$

Logo, inserindo a decomposição de modos dada pela equação (5.17) na (5.6), temos que cada coeficiente de modo satisfaz uma equação de Langevin dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_k(\tau) = -\frac{1}{C} (k^2 + \mu^2) \varphi_k(\tau) + \eta_k(\tau), \quad (5.25)$$

onde  $k^2 = q^2 + k_\rho^2$  e  $\mu^2 = Cm^2 + (6\xi - 1)K$  e  $K = 1$ . Por simplicidade, fazemos a seguinte redefinição:  $\frac{1}{C}(k^2 + \mu^2) \rightarrow (k^2 + \mu^2)$ .

A solução para a equação (5.25), com a condição inicial  $\varphi_k(\tau)|_{\tau=0} = 0$ , escreve-se:

$$\varphi_k(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_k(\tau, \tau') \eta(\tau', k), \quad (5.26)$$

onde

$$G_k(\tau, \tau') = \exp\left(- (k^2 + \mu^2)(\tau - \tau')\right) \theta(\tau - \tau') \quad (5.27)$$

é a função de Green retardada para o problema de difusão.

Usando as correlações de ruído, temos que cada coeficiente de modo do ruído satisfaz

$$\langle \eta_k(\tau) \rangle_\eta = 0 \quad (5.28)$$

e

$$\langle \eta_k(\tau) \eta_{k'}(\tau') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta^4(k, k'), \quad (5.29)$$

onde  $\delta^4(k, k') = \delta(k_\rho + k'_\rho) \delta_{qq'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$ . A função de dois-pontos  $D_k(\tau, \tau')$  pode ser calculada de modo bem semelhante ao caso da métrica plana euclidiana. Teremos

$$D_k(\tau, \tau') = \frac{1}{(2\pi)} \delta^4(k, k') \frac{1}{(k^2 + \mu^2)} \left( e^{-((k^2 + \mu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k^2 + \mu^2)(\tau + \tau'))} \right), \quad (5.30)$$

ou, no espaço das “coordenadas”:

$$\begin{aligned} D(\tau, \tau'; x, x') &= \int d\tilde{\mu}(k) u_k(x) u_k^*(x') D_k(\tau, \tau') = \\ &= \int d\tilde{\mu}(k) u_k(x) u_k^*(x') \frac{1}{(k^2 + \mu^2)} \\ &\times \left( e^{-((k^2 + \mu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k^2 + \mu^2)(\tau + \tau'))} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde  $\int d\tilde{\mu}(k)$  é dado por (5.24).

Agora, vamos empregar este método para o caso de uma teoria com uma ação de interação dada por:

$$S_I[\varphi] = \int d^4x \sqrt{|g(x)|} \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (5.32)$$

Do mesmo modo, podemos resolver a equação usando uma série perturbativa em  $\lambda$ . A função de dois-pontos até o nível de um laço é dada por:

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \rangle_\eta^{(1)} = (a) + (b) + (c), \quad (5.33)$$

onde (a) é a função de dois-pontos a zero ordem, dada pela equação (5.30), enquanto que (b) e (c) são dados, respectivamente, por

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(k_1, k_2) \int d\tilde{\beta}(k) \int_0^{\tau_1} d\tau G_{k_1}(\tau_1 - \tau) D_k(\tau, \tau) D_{k_2}(\tau_2, \tau), \quad (5.34)$$

$$(c) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(k_1, k_2) \int d\tilde{\beta}(k) \int_0^{\tau_2} d\tau G_{k_2}(\tau_2 - \tau) D_k(\tau, \tau) D_{k_1}(\tau_1, \tau), \quad (5.35)$$

onde  $\int d\tilde{\beta}(q) \equiv \frac{1}{2\pi} \int dk_\rho \sum_{q, J, M} \mathbf{X}_{\vec{q}} \mathbf{X}_{\vec{q}}$ . Estas são as contribuições em primeira ordem.

Um simples cálculo mostra que obtemos, para  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ :

$$(b)|_{\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(k_1, k_2) \frac{1}{(k_2^2 + \mu^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2\mu^2)} \int d\tilde{\beta}(k) \frac{1}{(k^2 + \mu^2)}. \quad (5.36)$$

Vamos definir a quantidade  $I$  como sendo:

$$\begin{aligned}
 I &= \int d\tilde{\beta}(q) \frac{1}{(k^2 + \mu^2)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dk_\rho \sum_{q,J,M} \mathbf{X}_{\vec{q}} \mathbf{X}_{\vec{q}} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)} \\
 &= \int dk_\rho \sum_q \mathbf{X}_{\vec{q}} \mathbf{X}_{\vec{q}} \frac{q^2}{(q^2 + b^2)}, \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

onde  $b^2 = k_\rho^2 + \mu^2$ . Não é difícil mostrar que a série que aparece nesta equação é divergente.

Logo, precisamos de um procedimento para regularizá-la e, com isso, obtermos um valor finito para a função de dois-pontos. Como veremos agora, isto pode ser alcançado com a ajuda da regularização estocástica covariante [133].

A generalização da equação (3.41) para um espaço-tempo geral em quatro dimensões é

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \int d^4 y \sqrt{|g|} R_{xy}(\Delta) \eta(\tau, y), \tag{5.38}$$

onde, por razões de covariância, o regulador agora é uma função do laplaciano covariante:

$$\Delta_{xy} = \int d^4 z \sqrt{|g(z)|} (\nabla_\mu)_{xz} (\nabla_\mu)_{zy}, \tag{5.39}$$

com

$$(\nabla_\mu)_{xy} = \nabla_\mu^x \delta^4(x - y). \tag{5.40}$$

Usando a decomposição em modos dada pela equação (5.17), a equação (5.38) reduz-se

a

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_k(\tau) = -\frac{1}{C} (k^2 + \mu^2) \varphi_k(\tau) + \eta_k(\tau) R_k, \tag{5.41}$$

onde  $R_k = R_{xy}(\Delta)|_{\Delta=-k^2+K}$  e

$$R_{xy}(\Delta) = \int d\tilde{\mu}(k) u_k(x) u_k^*(y) R_k. \tag{5.42}$$



Logo, a solução para a equação de Langevin regularizada é a seguinte:

$$\varphi_k(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_k(\tau, \tau') \eta(\tau', k), \quad (5.43)$$

onde  $G_k(\tau, \tau')$  é dada por (5.27). Daí, é fácil mostrar que a função de dois-pontos a zero ordem e a contribuição regularizada  $(b)_\Lambda$  em primeira ordem na constante de acoplamento são dadas por, respectivamente:

$$D_k(\tau, \tau') = \frac{1}{(2\pi)} \delta^4(k, k') \frac{R_k^2}{(k^2 + \mu^2)} \left( e^{-((k^2 + \mu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k^2 + \mu^2)(\tau + \tau'))} \right), \quad (5.44)$$

e

$$(b)_\Lambda|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(k_1, k_2) \frac{R_{k_2}^2}{(k_2^2 + \mu^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + 2\mu^2)} \int d\tilde{\beta}(k) \frac{R_k^2}{(k^2 + \mu^2)}. \quad (5.45)$$

Vamos isolar a parte onde se encontravam os problemas. Temos:

$$\begin{aligned} I_\Lambda &= \int d\tilde{\beta}(k) \frac{R_k^2}{(k^2 + \mu^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk_\rho \sum_{q,J,M} \mathbf{X}_{\bar{q}} \mathbf{X}_{\bar{q}} \frac{R_k^2}{(k^2 + \mu^2)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Após alguns cálculos tediosos [91] [92] [168], chegamos a:

$$I_\Lambda = \frac{1}{4} e^{\frac{2K}{c\Lambda^2} + \frac{2}{c\Lambda^2} \mu^2} \int_\mu^\infty dx (x^2 - \mu^2)^{1/2} \text{erfc}(\sqrt{\alpha}x), \quad (5.47)$$

onde  $\text{erfc}(x)$  é a função erro complementar. Com muito trabalho, é possível generalizar nossos resultados para a função de quatro-pontos.

Um ponto bem importante é que este procedimento de regularização preserva todas as simetrias da lagrangeana não-regularizada, já que não é uma regularização de ação. O próximo passo seria o isolamento das partes infinitas no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  e a sua consequente remoção com uma redefinição adequada das constantes da teoria, i.e., realizar um

programa de renormalização. Uma pergunta natural seria se podemos realmente renormalizar todas as funções de  $n$ -pontos em todas as ordem na constante de acoplamento  $\lambda$ . Birrel [189] colocou argumentos que mostram que, *a priori*, não podemos esperar que uma prova da renormalizabilidade da teoria  $\lambda\varphi^4$ , em um espaço com curvatura, exista que seja independente da regularização utilizada. Uma tentativa de demonstração geral da renormalizabilidade da teoria  $\lambda\varphi^4$  definida em um espaço-tempo que pode ser continuado analiticamente para a situação euclideana foi dada por [190]. Usando o método de Epstein-Glaser, Brunetti e Fredenhagen [191] apresentaram uma construção perturbativa deste teoria em um espaço-tempo suave globalmente hiperbólico com curvatura.

Nossa derivação demonstra que a regularização estocástica pode ser uma tentativa na direção de edificação de tal prova independente de regularizações, muito embora estejamos ainda restringidos à mesma situação estudada por Bunch. Decerto sabemos que, neste caso de universo de Einstein, a função de dois-pontos livre se apresenta como uma soma de funções de dois-pontos de frequência positiva do espaço de Minkowski, logo é natural esperar que, como no caso de Minkowski, de fato exista uma prova da renormalizabilidade de tal teoria com interação independente de regularizações.

### 5.3 Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de Rindler

Agora vamos considerar a quantização estocástica em um espaço-tempo com um horizonte de eventos, ainda seguindo a referência [116]. O buraco negro de Schwarzschild é a solução mais familiar para as equações de Einstein no vácuo, e possui um horizonte de eventos. Na origem, há uma singularidade de curvatura e em  $R = 2M$  temos uma singularidade devido ao mau comportamento deste sistema de coordenadas em particu-

lar. Não obstante não seja possível estender o espaço-tempo através da singularidade, é possível continuar analiticamente a variedade de  $r > 2M$  à região  $r < 2M$ , ( $r \neq 0$ ). A máxima extensão da variedade descrita pelo elemento de linha de Schwarzschild com  $2M < r < \infty$  é a extensão usual de Kruskal [192]. O espaço-tempo de Kruskal define duas regiões exteriores assintoticamente planas e também duas regiões dentro do horizonte de eventos, limitadas pelas singularidades do passado e do futuro. Como sabemos que, perto do horizonte, as coordenadas de Schwarzschild  $t$  e  $r$  comportam-se como coordenadas do espaço-tempos de Rindler, devemos investigar, portanto, a quantização estocástica na métrica de Rindler. O material de base relevante para nós pode ser encontrado no livro [193] e também nos artigos [194] [195] [196] [197].

Vamos considerar um espaço-tempo de Minkowski plano em  $d$ -dimensões onde estamos usando coordenadas cartesianas  $y^\mu = (y^0, y^1, \dots, y^{d-1})$ . É possível encontrar um sistema de coordenadas curvilíneo  $x^\mu = (t, x^1, \dots, x^{d-2}, z)$ , chamado de sistema de coordenadas de Rindler, e mostrar que este é adaptado naturalmente a um observador com aceleração própria constante. É importante enfatizar que este sistema de coordenadas com a transformação de coordenadas respectiva cobre apenas a região  $y^{d-1} > |y^0|$ . Como estas coordenadas não cobrem todo o espaço-tempo de Minkowski, podemos definir três transformações de coordenadas, com os sistemas de coordenadas respectivos definidos em diferentes regiões do espaço-tempo de Minkowski. Tais regiões são conhecidas na literatura como sendo as regiões L de Rindler, F de Milne, e, finalmente, P de Milne. As quatro transformações de coordenadas e os sistemas de coordenadas em conjunto cobrem todo o espaço-tempo de Minkowski. O sistema de coordenadas que cobre a região dentro do cone de luz é o espaço-tempo  $d$ -dimensional de Milne.

A implantação da quantização canônica no espaço-tempo de Rindler é muito simples, já que, se o espaço-tempo possui uma geometria estacionária, há campos de vetores de Killing  $K$  do tipo tempo que geram o grupo de Lie a um parâmetro de isometrias e modos ortogonais que satisfazem  $\mathcal{L}_K u_n(x) = -i\omega u_n$ , onde  $\mathcal{L}_K$  é a derivada de Lie com respeito a  $K$  e  $u_n(x)$  são os modos de frequência positiva. Nesta situação, existe uma maneira natural de se definir modos com frequências positiva e negativa. Note que o elemento de linha de Rindler não depende de  $t$ , e conseqüentemente há um jeito direto de se definir modos de frequências positiva e negativa a fim de se impor a quantização canônica no espaço-tempo de Rindler.

Há muito tempo que se reconhece que o vácuo de Rindler  $|0, R\rangle$  que aparece na quantização canônica do Fulling de um campo escalar no espaço-tempo de Rindler não é unitariamente equivalente ao vácuo de Minkowski  $|0, M\rangle$ . Vamos definir os seguintes funcionais geradores  $Z(h)$  e  $Z_R(h)$ , i.e.,

$$Z(h) = \frac{\langle 0, M, out | 0, M, in \rangle_h}{\langle 0, M, out | 0, M, in \rangle_{h=0}} \quad (5.48)$$

e

$$Z_R(h) = \frac{\langle 0, R, out | 0, R, in \rangle_h}{\langle 0, R, out | 0, R, in \rangle_{h=0}} \quad (5.49)$$

onde  $|0, M, in\rangle$ ,  $|0, M, out\rangle$ ,  $|0, R, in\rangle$  e, finalmente,  $|0, R, out\rangle$  são os estados de vácuo assintóticos no infinito passado e no infinito futuro ( $IN$  e  $OUT$ , respectivamente) para a teoria com a densidade hamiltoniana de Minkowski e Rindler, respectivamente.

Começando a partir de  $Z(h)$ , é possível, após continuação analítica e imposição de periodicidade no tempo euclidiano, definir  $Z(\beta; h)$ , i.e., o funcional de Schwinger a temperatura finita. Claro está que  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} Z(\beta; h) = Z(\infty; h) \equiv Z(h)$ , onde  $Z(\infty; h)$  é o funcional euclidiano a temperatura zero, o qual gera as funções de Schwinger de todo o

espaço euclidiano. Do mesmo modo, é possível definir  $Z_R(\beta; h)$ , i.e. o funcional euclidiano de Rindler a temperatura finita. Novamente, temos que  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} Z_R(\beta; h) = Z_R(\infty; h) \equiv Z(h)$ , onde  $Z_R(\infty; h)$  é o funcional euclidiano a temperatura zero, o qual gera todas as funções de Schwinger da variedade de Rindler estendida analiticamente.

Das definições acima, vamos definir as seguintes funções de Schwinger. Estamos seguindo a discussão de Christensen e Duff [198]:

i)  $G_\beta(x, x')$  é uma função de dois-pontos, i.e., a função de Schwinger obtida a partir do funcional de Schwinger a temperatura finita.

ii)  $G_\infty(x, x')$  é uma função de dois-pontos, i.e., a função de Schwinger obtida a partir do funcional de Schwinger a temperatura zero.

Agora, vamos analisar a função de dois-pontos que somos capazes de construir na variedade euclidiana. Lembremos que a métrica euclidiana de Rindler possui uma singularidade de coordenada na origem onde  $z = 0$ . O ponto  $z = 0$  é uma singularidade cônica da variedade euclidiana, contudo é um ponto regular se o tempo euclidiano for periódico.

i)  $G^{(1)}(x, x')$  é a função de dois-pontos que é periódica no tempo euclidiano de Rindler. Esta é a função de Schwinger escalar de dois-pontos usual. É uma função da distância geodética entre dois pontos na variedade. Como todos os caminhos em torno da origem são topologicamente equivalentes, temos que  $G^{(1)}(x, x')$  deve ser periódica no tempo euclidiano de Rindler. Portanto, estas funções de Green podem ser geradas por derivadas funcionais de  $Z(\beta; h)$ , i.e., o funcional de Schwinger a temperatura finita Schwinger.

ii)  $G^{(0)}(x, x')$  é a função de dois-pontos que aparece na situação onde o espaço euclidiano possui um buraco na origem. No caso onde os dois pontos estão na linha de universo circular, é possível relacionar as duas funções de dois-pontos  $G^{(1)}(x, x')$  e  $G^{(0)}(x, x')$ . Isto

pode ser feito utilizando-se uma simples identidade trigonométrica

$$G^{(1)}(\tau, \tau') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G^{(0)}\left(\tau, \tau' + \frac{2\pi n}{a}\right). \quad (5.50)$$

Como a função de Schwinger a temperatura finita deve ser periódica no tempo euclidiano com periodicidade  $\beta$ , fazendo a identificação  $\beta = \frac{2\pi}{a}$ , é claro que  $G^{(1)}(x, x') = G_{\beta}(x, x')$ . Também teremos que  $G^{(0)}(x, x') = G_{\infty}(x, x')$ . Portanto, estas funções de Green podem ser geradas por derivadas funcionais de  $Z(\infty; h)$ , o qual é o funcional euclidiano a temperatura zero que gera as funções de Schwinger em todo o espaço euclidiano.

Agora, depois de uma rotação de Wick, vamos aplicar a quantização estocástica para o espaço de Rindler quadridimensional, o qual se torna uma variedade multiplamente conexa, com a métrica euclidiana:

$$ds^2 = z^2 dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2. \quad (5.51)$$

No espaço euclidiano de Rindler, a equação de Langevin para o campo  $\varphi(x)$  será:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\sqrt{|g|} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x), \quad (5.52)$$

onde  $S_0$  é a ação euclidiana para os campos escalares livres. Note que esta expressão é bastante diferente da equação de Langevin para a métrica de Einstein, equação (5.1), já que temos uma potência inversa do determinante da métrica multiplicado por  $\frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)}$ .

Logo, com a métrica de Rindler acima, temos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -(-\Delta + z^2 m^2) \varphi(\tau, x) + \eta(\tau, x), \quad (5.53)$$

onde o operador  $\Delta$  é definido por:

$$\Delta = \partial_t^2 + z^2(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_z^2) + z\partial_z. \quad (5.54)$$

Para prosseguirmos com a implantação da quantização estocástica, temos que usar as correlações do ruído generalizadas, dadas pelas equações (5.4) e (5.5).

A partir dos modos apresentados nas referências [199] [200], podemos obter os seguintes modos euclidianos:

$$u_{k\nu}(\vec{x}, z) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \nu \sinh(\pi\nu) \right)^{1/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} K_{i\nu}(\mu z), \quad (5.55)$$

onde  $\vec{k}\cdot\vec{x} = k_0 t + k_1 x_1 + k_2 x_2$ ,  $\mu = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  e  $K_\mu(x)$  são as funções de Macdonald. Estas são normalizadas da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{dz}{z} K_{i\nu}(\mu z) K_{i\nu'}(\mu z) = \frac{\delta(\nu, \nu')}{(\nu + \nu')(\sinh(\pi\nu) \sinh(\pi\nu'))^{1/2}}. \quad (5.56)$$

Agora, usamos a decomposição geral em modos, dada pelas equações (5.10) e (5.11), com a seguinte medida:

$$\int d\tilde{\mu}(k) = \int_0^\infty d\nu \int d\vec{k} = \int_0^\infty d\nu \int dk_1 \int dk_2 \int \frac{dk_0}{2\pi}. \quad (5.57)$$

Lembrando a equação (5.55) para os modos, teremos, novamente, que cada coeficiente de modo obedece à uma equação de Langevin com a forma:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_{k\nu}(\tau) = -(k_0^2 + \nu^2) \varphi_{k\nu}(\tau) + \eta_{k\nu}(\tau). \quad (5.58)$$

A solução para a equação (5.58), com a condição inicial  $\varphi_{k\nu}(\tau)|_{\tau=0} = 0$ , escreve-se:

$$\varphi_{k\nu}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_{k\nu}(\tau, \tau') \eta(\tau', k), \quad (5.59)$$

onde

$$G_{k\nu}(\tau, \tau') = \exp\left(- (k_0^2 + \nu^2)(\tau - \tau')\right) \theta(\tau - \tau') \quad (5.60)$$

é a função de Green retardada para o problema de difusão. Usando as correlações do ruído, temos que cada coeficiente de modo para o ruído aleatório satisfaz

$$\langle \eta_k(\tau) \rangle_\eta = 0 \quad (5.61)$$

e

$$\langle \eta_k(\tau) \eta_{k'}(\tau') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta(k, k') \delta(\nu, \nu'), \quad (5.62)$$

onde  $\delta(k, k') = \delta(k_0 + k'_0) \delta(\vec{k} + \vec{k}')$ .

A função de dois-pontos  $D_k^{(0)}(\tau, \tau')$  pode ser calculada de modo similar ao caso de Einstein. Temos:

$$D_{k\nu}^{(0)}(\tau, \tau') = \delta(k, k') \delta(\nu, \nu') \frac{1}{(k_0^2 + \nu^2)} \left( e^{-((k_0^2 + \nu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k_0^2 + \nu^2)(\tau + \tau'))} \right), \quad (5.63)$$

ou, no espaço das “coordenadas”:

$$D^{(0)}(x, x'; \tau, \tau') = \frac{1}{4\pi^4} \int_0^\infty d\nu \int dk \nu \sinh(\pi\nu) K_{i\nu}(\mu z) K_{i\nu}(\mu z') \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{k_0^2 + \nu^2} \left( e^{-((k_0^2 + \nu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k_0^2 + \nu^2)(\tau + \tau'))} \right). \quad (5.64)$$

No limite  $\tau = \tau' \rightarrow \infty$ , e procedendo com passos similares aos da referência [199], pode-se provar que obtemos, assim, o resultado usual para a função de dois-pontos livre, i.e., a função de Schwinger de dois-pontos para uma distância geodética (linha reta) entre os pontos  $x$  e  $x'$ . Como é bem conhecido [198], esta função é determinada unicamente pelo requerimento que, na ausência de quaisquer buracos no espaço, identifica-se o “ângulo”  $t$  (o qual é o “tempo” euclidiano) com o ângulo  $t + 2\pi n$  ( $n = \text{inteiro}$ ), pois todos os caminhos em torno da origem são topologicamente equivalentes. Portanto, como esperado,  $D^{(0)}$  deve ser periódica em  $t$  com período  $2\pi$ . Mas, sabemos que, quando fazemos a continuação analítica  $t \rightarrow it$  na métrica de Rindler, o horizonte de eventos, o qual no espaço de



Minkowski é representado por uma barreira impenetrável ao observador acelerado, traduz-se, na linguagem euclidiana, na afirmação que caminhos fechados em torno da origem não podem ser contraídos de modo contínuo a um ponto. Um observador inercial vê um espaço com a topologia usual,  $R^4$ , mas a topologia vista por um observador acelerado é diferente, i.e., seu espaço possui um buraco. Logo, caminhos que dão voltas em torno da origem não podem ser todos deformados um no outro; eles caem em classes topologicamente distintas rotuladas pelo número de voltas  $n$ . Agora, não identificamos  $t$  com  $t+2\pi n$ . Esta função de dois-pontos, a qual denominaremos  $D^{(1)}$ , exibe uma periodicidade infinita. Para obtê-la, devemos trabalhar com os seguintes modos [201]:

$$u_{k\nu}(\vec{x}, z) = \frac{1}{2\pi^2} (\nu \sinh(\pi\nu))^{1/2} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2) - k_0 |t|} K_{i\nu}(\mu z), \quad (5.65)$$

Com esta prescrição, obtemos os mesmos resultados encontrados na literatura [202]:

$$\begin{aligned} D^{(0)}(x, x'; \tau, \tau') &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D^{(1)}(x, x'; \tau, \tau') \\ &= \frac{1}{4\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^\infty d\nu \int dk \nu \sinh(\pi\nu) K_{i\nu}(\mu z) K_{i\nu}(\mu z') \\ &\quad \times \frac{e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2) - k_0 |t| + 2\pi n}}{k_0^2 + \nu^2} \left( e^{-((k_0^2 + \nu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k_0^2 + \nu^2)(\tau + \tau'))} \right), \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde a distância geodética entre os pontos  $x$  e  $x'$  é um comprimento de arco na função  $D^{(1)}$ . É interessante notar que, usando os modos dados pela equação (5.65) (veja referência [201]), e então somando sobre todas as configurações com um número de voltas  $n$ , o resultado é igual àquele alcançado quando utilizamos os modos dados por (5.55) (veja referência [199]).

Vamos repetir o método para o caso de uma teoria com auto-interação com uma ação de interação dada por:

$$S_I[\varphi] = \int d^4x \sqrt{|g(x)|} \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (5.67)$$

Neste caso, temos equações similares ao caso de Einstein. A equação (5.34), por exemplo, escreve-se, no espaço de Rindler:

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta(k_1, k_2) \delta(\nu_1, \nu_2) \int d\tilde{\beta}(k) \int_0^{\tau_1} d\tau G_{k_1\nu_1}(\tau_1 - \tau) D_{k\nu}^{(0)}(\tau, \tau) D_{k_2\nu_2}^{(0)}(\tau_2, \tau), \quad (5.68)$$

a qual, no limite  $\tau = \tau' \rightarrow \infty$ , torna-se:

$$(b)|_{\tau_1=\tau_2\rightarrow\infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta(k_1, k_2) \delta(\nu_1, \nu_2) \frac{1}{(k_2^2 + \nu_2^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)} \int d\tilde{\beta}(k) \frac{1}{(k^2 + \nu^2)} \quad (5.69)$$

com semelhantes divergências e  $\int d\tilde{\beta} \equiv \int d\nu \int dk \nu \sinh(\pi\nu) K_{i\nu}(\mu z) K_{i\nu}(\mu z)$ . Agora, podemos empregar a regularização contínua como antes [133], com um regulador que é função do seguinte operador:

$$\Delta' = z^2(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_z^2) + z\partial_z - z^2 m^2. \quad (5.70)$$

A equação de Langevin regularizada escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \varphi_{k\nu}(\tau) = -(k_0^2 + \nu^2) \varphi_{k\nu}(\tau) + R_{k\nu} \eta_{k\nu}(\tau), \quad (5.71)$$

com a solução:

$$\varphi_{k\nu}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_{k\nu}(\tau, \tau') R_{k\nu} \eta(\tau', k). \quad (5.72)$$

onde  $R_{k\nu}(\Lambda) = R(\Delta'; \Lambda)|_{\Delta'=\nu^2}$ . Então, é fácil mostrar que a função de dois-pontos a zero ordem e a contribuição regularizada  $(b)_\Lambda$  ao nível de um laço são dadas por, respectivamente:

$$D_{k\nu}^\Lambda(\tau, \tau') = \delta(k, k') \delta(\nu, \nu') \frac{R_{k\nu}^2}{(k_0^2 + \nu^2)} \left( e^{-((k_0^2 + \nu^2)|\tau - \tau'|)} - e^{-((k_0^2 + \nu^2)(\tau + \tau'))} \right), \quad (5.73)$$

e

$$(b)|_{\tau_1=\tau_2\rightarrow\infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta(k_1, k_2) \delta(\nu_1, \nu_2) \frac{R_{k_2\nu_2}^2}{(k_2^2 + \nu_2^2)} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)} \int d\tilde{\beta}(k) \frac{R_{k\nu}^2}{(k^2 + \nu^2)}. \quad (5.74)$$

Então, a parte regularizada da contribuição acima escreve-se:

$$I = \frac{1}{4\pi^4} \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\vec{k} \int \frac{dk_0}{2\pi} \nu \sinh(\pi\nu) K_{i\nu}(\mu z) K_{i\nu}(\mu z) \frac{e^{-\frac{2\nu^2}{\Lambda^2}}}{k_0^2 + \nu^2}. \quad (5.75)$$

Com algumas manipulações assaz tediosas [92] [91] [168], chegamos em:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\Lambda m}{16} e^{\frac{\pi^2 \Lambda^2}{8}} f(\Lambda, z), \quad (5.76)$$

onde a função  $f(\Lambda, z)$  é dada por

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\gamma} K_1(m\gamma) e^{-\frac{\Lambda^2 \alpha^2}{8}} \left( e^{\frac{i\pi\alpha\Lambda^2}{4}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\Lambda}{2\sqrt{2}}(i\alpha + \pi)\right) - e^{-\frac{i\pi\alpha\Lambda^2}{4}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\Lambda}{2\sqrt{2}}(i\alpha - \pi)\right) \right), \quad (5.77)$$

onde  $\gamma^2 = 2z^2(1 + \cosh \alpha)$  e  $\operatorname{erfc}(x)$  é a função erro complementar, a qual satisfaz a seguinte identidade:

$$\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x). \quad (5.78)$$

Não é possível apresentar a solução da integral na equação (5.77) em termos de funções conhecidas. Não obstante tal inconveniência, é fácil verificar que esta função  $f(\Lambda, z)$  possui convergência forte, provando que de fato regularizamos a contribuição para a função de dois-pontos ao nível de um laço. Cálculos similares podem ser efetuados para a função de quatro-pontos. A partir destas discussões deve ficar claro que é uma simples tarefa derivar as funções de Schwinger da teoria, pelo menos ao nível de um laço.

Esta seção deixa claro que ainda há, pelo menos, dois pontos bem delicados que merecem ser investigados. O primeiro é relacionado com o comportamento do ruído aleatório perto do horizonte de eventos, e o segundo é a validade do programa além da assinatura euclidiana.

## 5.4 Quantização estocástica para a teoria do campo escalar $(\lambda\varphi^4)_d$ : o caso do espaço de de Sitter

Nas seções anteriores, o método da quantização estocástica foi empregado para se estudar campos escalares com auto-interação em variedades que podem ser continuadas analiticamente para a situação euclidiana, i.e., o espaço de Einstein e de Rindler. A equação de Langevin para os coeficientes de Fourier foi resolvida e então a função de dois pontos ao nível de um laço foi exibida. Mostramos que esta diverge e, a fim de torná-la finita, nos utilizamos de uma regularização estocástica covariante. É importante ressaltar que este procedimento de estender a variedade real para uma complexa nas situações acima faz com que a ação seja uma quantidade real, permitindo a implementação da quantização estocástica de modo relativamente simples. Neste momento, cumpre lembrar aqui como a interpretação estocástica de campos livres e com interação aparece na física. Vamos à ela.

Existem dois tratamentos fundamentais para se conectar a folha euclidiana de uma variedade complexa com uma folha lorentziana. A primeira lida com as propriedades analíticas das funções de  $n$ -pontos na variedade do espaço-tempo complexa. A idéia de campos euclidianos foi introduzida por Schwinger, onde a ação clássica deve ser analiticamente continuada para o tempo euclidiano. Além disso, Symanzik [203] construiu a integral funcional euclidiana onde o funcional de persistência do vácuo definido em um espaço de Minkowski torna-se uma média de mecânica estatística de campos clássicos com um peso de Boltzmann, isto é, um funcional de um processo estocástico generalizado. Nesta abordagem, o campo escalar euclidiano livre é um processo gaussiano generalizado

com média zero e covariância  $\langle x | -\Delta + m^2 | y \rangle$ . Veja, por exemplo, a referência [204] para uma introdução pedagógica no assunto. Mais adiante, Osterwalder e Schraeder [205] [206] provaram que, para teorias escalares, as funções de Green euclidianas, i.e., as funções de Schwinger, as quais são momentos de uma medida de Boltzmann, são equivalentes às funções de Green no espaço de Minkowski. Uma técnica alternativa para se obter uma teoria euclidiana é começar a partir da integral de trajetória no espaço de Minkowski, onde usualmente esta integral oscila bastante. Fazendo uma rotação de Wick para o espaço euclidiano, pode-se mostrar que a integral de trajetória obtida converge e a continuação analítica de volta para o espaço de Minkowski pode ser facilmente realizada a fim de se obter os resultados usuais. Esta abordagem foi desenvolvida por Gibbons, Hawking e outros. A extensão do método euclidiano para a gravitação quântica sobre métricas positivas definidas pode ser encontrada na seleção de artigos da referência [207]. A aplicação do primeiro tratamento de processos aleatórios generalizados em espaços-tempo curvos, sendo mais específico, o espaço-tempo de de Sitter, para campos escalares livres e com interação, pode ser encontrada na referência [208]. Vale a pena ressaltar que, em um espaço curvo genérico, não é possível definir a condição espectral, e no espaço-tempo de de Sitter tal condição é substituída pelas propriedades analíticas globais das funções de  $n$ -pontos na variedade euclidiana de de Sitter [209]. Este fato provou-se ser muito importante no estudo de ações não-gaussianas em espaços curvos.

Sendo assim, uma questão natural envolvida na discussão do parágrafo acima seria o estudo da quantização estocástica de campos escalares com auto-interação definidos na variedade de de Sitter [117]. Este é o nosso propósito nesta seção. Vamos calcular a função de Schwinger de dois pontos ao nível de um laço e aplicar a regularização estocástica

contínua para se controlar divergências ultravioletas.

O espaço de de Sitter quadridimensional é representado de modo mais fácil pelo hiperbolóide [186] [187]:

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \quad (5.79)$$

imerso em um espaço de Minkowski de cinco dimensões cuja métrica é

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 \quad (5.80)$$

Da forma da equação (5.79), percebe-se que o grupo de simetria do espaço de de Sitter é o grupo a dez parâmetros  $SO(1, 4)$  das transformações de Lorentz homogêneas no espaço de imersão de cinco dimensões, conhecido como grupo de de Sitter. Assim como o grupo de Poincaré tem um papel central na quantização de campos no espaço de Minkowski, da mesma maneira o grupo de de Sitter de simetrias no espaço de de Sitter é fundamental para a discussão de sua quantização. O espaço-tempo de de Sitter  $S_{1,3}$  possui curvatura constante. A curvatura escalar de Ricci é dada por  $\frac{n(n-1)}{\alpha^2}$ .

Vamos introduzir em  $S_{1,3}$  as coordenadas  $x^\beta = (t, \xi^i)$ , onde  $\beta, \delta, \gamma = 0, 1, 2, 3$  e  $i, j = 1, 2, 3$ . Estamos seguindo as referências [210] [211]. Temos:

$$z^0 = \alpha \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad (5.81)$$

$$z^a = \frac{\alpha}{\cos t} k^a(\xi^1, \xi^2, \xi^3); \quad a, b = 1, 2, 3, 4, \quad (5.82)$$

$\xi^1, \xi^2, \xi^3$  sendo as coordenadas na esfera  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 1$ . O “futuro” (“passado”) infinitamente remoto corresponde à  $t = \pi/2$  ( $t = -\pi/2$ ) para as coordenadas do tipo tempo  $t$ . As esferas tridimensionais  $z^0 = \text{const.}$  são hipersuperfícies de tempos iguais.

Se escrevermos:

$$dk_1^2 + dk_2^2 + dk_3^2 + dk_4^2 = \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^j, \quad (5.83)$$

onde  $\omega_{ij} = \frac{\partial k_a}{\partial \xi_i} \frac{\partial k_a}{\partial \xi_j}$  é o tensor métrico de  $S_3$ , o intervalo do espaço-tempo de de Sitter pode ser denotado da seguinte maneira:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 t} \left( dt^2 - \omega_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^j \right). \quad (5.84)$$

Com uma rotação de Wick usual, chegamos ao espaço de de Sitter euclidiano escrito nas coordenadas acima.

Os modos para a equação de campo escalar acoplado conformalmente para o espaço de de Sitter euclidiano são dados por

$$u_{ps\sigma}^\pm(x) = N\sqrt{s+1} \Phi_{s\sigma}[k(\xi)] f_p^\pm(t) \cosh t, \quad (5.85)$$

com  $s = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\sigma = 1, \dots, (s+1)^2$ . As funções  $\Phi_{s\sigma}$  são polinômios harmônicos ortonormais básicos em  $k$  de grau  $s$ . Eles são indexados pelo índice  $\sigma$ . As quantidades  $f_p^\pm(t)$  são expressas através de uma função hipergeométrica

$$f_p^\pm(t) = \frac{1}{(ip)!} \sqrt{\Gamma(ip + \mu)\Gamma(ip - \mu + 1)} e^{\pm ip t} F\left(\mu, 1 - \mu; ip + 1; \frac{1 \pm \tanh t}{2}\right), \quad (5.86)$$

com  $\mu = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4m^2})$  e  $m = m_0\alpha$ . A medida para a decomposição em modos para as equações (5.10) e (5.11) é dada por

$$\int d\tilde{\mu}_{ps\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int dp \sum_{s,\sigma}. \quad (5.87)$$

A equação de Langevin de Parisi-Wu para campos escalares na variedade de de Sitter euclidiana escreve-se como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\frac{g_{00}}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau, x)} + \eta(\tau, x), \quad (5.88)$$

onde  $g = g_{00}h$ ,  $g_{\mu\nu} = g_{00}h_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ,  $g = \det g_{\mu\nu}$ . É possível provar que esta é a equação de Langevin correta para campos definidos em espaços com uma métrica dada

em termos gerais por:

$$ds^2 = g_{oo}dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j. \quad (5.89)$$

A ação euclidiana clássica  $S_0$  é dada novamente por

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}. \quad (5.90)$$

Na equação acima,  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} (m_0^2 + \xi R) \varphi^2. \quad (5.91)$$

Note que introduzimos um acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional representado pelo termo  $\xi R \varphi^2$ , onde  $\xi$  é um fator numérico e  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci. Admitindo um campo acoplado conformalmente, temos  $\xi = \frac{1}{4} \frac{(n-2)}{(n-1)}$ . O campo de ruído aleatório  $\eta(\tau, x)$  obedece a uma lei estatística gaussiana, como antes:

$$\langle \eta(\tau, x) \rangle_\eta = 0, \quad (5.92)$$

e

$$\langle \eta(\tau, x) \eta(\tau', x') \rangle_\eta = \frac{2}{\sqrt{|g(x)|}} \delta^4(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (5.93)$$

Substituindo as equações (5.90) e (5.91) na equação de Langevin (5.88), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -g_{00} \left( -\Delta + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \varphi(\tau, x) + \eta(\tau, x), \quad (5.94)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami, equação (5.7).

Para prosseguirmos, em analogia com a situação da variedade euclidiana, vamos introduzir funções de Green retardadas para o processo de difusão  $G(\tau - \tau', x, x')$ , a qual obedece à

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + g_{00} \left( -\Delta_x + m_0^2 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \right] G(\tau - \tau', x, x') = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta^4(x - x') \delta(\tau - \tau'), \quad (5.95)$$



se  $\tau - \tau' > 0$ , e  $G(\tau - \tau', x, x') = 0$  se  $\tau - \tau' < 0$ .

Usando esta função de Green e a condição inicial  $\varphi(\tau, x)|_{\tau=0} = 0$ , uma solução formal para a equação (5.94) é dada por

$$\varphi(\tau, x) = \int_0^\tau d\tau' \int_\Omega d^4x' \sqrt{|g(x')|} G(\tau - \tau', x - x') \eta(\tau', x'). \quad (5.96)$$

Levando os modos dados por (5.85) na equação (5.94), temos que cada coeficiente de Fourier satisfaz a uma equação de Langevin dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_q(\tau) = -(q^2 + 1)\varphi_q(\tau) + \eta_q(\tau), \quad (5.97)$$

onde  $q^2 = p^2 + \kappa^2$  e  $\kappa^2 = s(s + 2)$ .

A solução para a equação (5.97), com a condição inicial  $\varphi_q(\tau)|_{\tau=0} = 0$ , é dada por:

$$\varphi_q(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_q(\tau, \tau') \eta_q(\tau'), \quad (5.98)$$

onde

$$G_q(\tau, \tau') = \exp\left(-(q^2 + 1)(\tau - \tau')\right) \theta(\tau - \tau') \quad (5.99)$$

é a função de Green retardada para o processo de difusão.

Utilizando as relações (5.92) e (5.93), temos que os coeficientes de Fourier do ruído aleatório satisfazem

$$\langle \eta_q(\tau) \rangle_\eta = 0 \quad (5.100)$$

e

$$\langle \eta_q(\tau) \eta_{q'}(\tau') \rangle_\eta = 2\delta(\tau - \tau') \delta^4(q, q'), \quad (5.101)$$

onde  $\delta^4(q, q') = \delta(p + p') \delta_{ss'} \delta_{\sigma\sigma'}$ .

A função de dois pontos  $D_q(\tau, \tau')$  pode ser calculada de um modo similar aos casos anteriores. Temos:

$$D_q(\tau, \tau') = \frac{1}{(2\pi)} \delta^4(q, q') \frac{1}{(q^2 + 1)} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right), \quad (5.102)$$

ou, no espaço de representação de coordenadas:

$$\begin{aligned} D(\tau, \tau'; x, x') &= \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(x') D_q(\tau, \tau') = \\ &= \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(x') \frac{1}{(q^2 + 1)} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right), \end{aligned} \quad (5.103)$$

onde  $\int d\tilde{\mu}(q)$  é dada por (5.87) e, por simplicidade, o índice  $q$  simboliza o conjunto de índices  $ps\sigma$  que rotulam os modos. Após simples cálculos [91] [92], é fácil provar que, no limite ( $\tau' = \tau \rightarrow \infty$ ), atingimos o resultado encontrado na literatura.

Agora, vamos novamente aplicar o método para o caso de uma teoria com auto-interação cuja ação de interação é dada por

$$S_I[\varphi] = \int d^4x \sqrt{|g(x)|} \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (5.104)$$

Da mesma maneira que procedemos nos parágrafos anteriores, podemos resolver a equação de Langevin resultante desta teoria com auto-interação usando uma série perturbativa em  $\lambda$ . A função de dois pontos ao nível de um laço é dada por

$$\langle \varphi(\tau_1, x_1) \varphi(\tau_2, x_2) \rangle_\eta^{(1)} = (a) + (b) + (c), \quad (5.105)$$

onde (a) é a função de dois pontos a zero ordem dada pela equação (5.102), enquanto que (b) e (c) são dados, no espaço dos momenta, por, respectivamente:

$$(b) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \int d\tilde{\mu}(p) u_p^+ u_p^- \int_0^{\tau_1} d\tau G_q(\tau_1 - \tau) D_p(\tau, \tau) D_k(\tau_2, \tau), \quad (5.106)$$

$$(c) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \int d\tilde{\mu}(p) u_p^+ u_p^- \int_0^{\tau_2} d\tau G_k(\tau_2 - \tau) D_p(\tau, \tau) D_q(\tau_1, \tau). \quad (5.107)$$

Estas são as contribuições em primeira ordem. Substituindo as expressões para  $G_q(\tau - \tau')$  e  $D_q(\tau, \tau')$  definidas nas equações (5.99) e (5.102), respectivamente, pode-se mostrar facilmente que, no limite assintótico ( $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \infty$ ), o termo (b), por exemplo, é escrito como:

$$(b)|_{\tau_1=\tau_2\rightarrow\infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I, \quad (5.108)$$

onde a quantidade  $I$  é definida por

$$I = \int dp \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} u_{ps\sigma}^+(x_1) u_{ps\sigma}^-(x_1) \frac{1}{p^2 + (s+1)^2}. \quad (5.109)$$

Inserindo a expressão dos modos dada pela equação (5.85) e usando um teorema de soma para os polinômios harmônicos, a expressão acima torna-se

$$I = \frac{N^2}{2\pi^2} \cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^3 \int dp f_p^+(t_1) f_p^-(t_1) \frac{1}{p^2 + (s+1)^2}. \quad (5.110)$$

Relembrando o fato que as quantidades  $f_p^\pm(t)$  são funções hipergeométricas, a integral na expressão acima pode ser calculada desde que escolhamos o contorno apropriado no plano complexo da variável  $p$ . Estas funções são regulares no pólo  $p_0 = -i(s+1)$ , e a integração produz

$$I = \frac{N^2}{2\pi} \cosh^2 t_1 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^2 f_p^+(t_1) f_p^-(t_1) \Big|_{p=-i(s+1)}. \quad (5.111)$$

A série nesta equação é claramente divergente, de modo que iremos precisar de um procedimento para regularizá-la a fim de obtermos, assim, um resultado finito para a função de dois pontos. Vamos novamente utilizar uma equação de Langevin regularizada, que é uma espécie de generalização de (5.88):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x) = -\frac{g_{00}}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=\varphi(\tau,x)} + \int d^4 y \sqrt{|g|} R_{xy}(\Delta) \eta(y), \quad (5.112)$$

onde, como nos casos anteriores, o regulador é uma função do laplaciano. Usando a decomposição em modos dada pelas equações (5.10) e (5.11), a expressão acima pode ser escrita como sendo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_q(\tau) = -(q^2 + 1) \varphi_q(\tau) + R_q \eta_q(\tau), \quad (5.113)$$

onde  $R_q = R_{xy}(\Delta)|_{\Delta=-(p^2+(s+1)^2)}$  e  $R_{xy}(\Delta) = \int d\tilde{\mu}(q) u_q^+(x) u_q^-(y) R_q$ . Então, é fácil mostrar que a função de correlação de dois pontos para o campo livre no espaço dos momenta é dada por:

$$D_q(\tau, \tau') = \frac{1}{(2\pi)} \delta^4(q, q') \frac{R_q^2}{(q^2 + 1)} \left( e^{-(q^2+1)|\tau-\tau'|} - e^{-(q^2+1)(\tau+\tau')} \right), \quad (5.114)$$

e a contribuição em primeira ordem para a função de correlação de dois pontos escreve-se:

$$(b)_\Lambda|_{\tau_1=\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(q, k) \frac{R_k^2}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2 + 2)} I(\Lambda). \quad (5.115)$$

O termo  $I(\Lambda)$  é dado por

$$I(\Lambda) = \int dp \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} u_{ps\sigma}^+(x_1) u_{ps\sigma}^-(x_1) \frac{R_p^2}{p^2 + (s+1)^2}, \quad (5.116)$$

o qual é semelhante à expressão (5.109), com a diferença que ele é finito. Procedendo com cálculos similares, obtém-se:

$$I(\Lambda) = \frac{N^2}{2\pi^2} \cosh^2 t_1 \int dp \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^3 \frac{e^{-2(p^2+(s+1)^2)/\Lambda^2}}{p^2 + (s+1)^2} f_p^+(t_1) f_p^-(t_1). \quad (5.117)$$

O comportamento da função exponencial garante que a integral na equação acima é finita. Muito embora não sejamos capazes de apresentar o resultado desta integral em termos de funções conhecidas, para nosso propósito é suficiente saber que esta converge, como dito acima. Portanto, logramos obter a função de Schwinger de dois pontos regularizada ao nível de um laço para um campo escalar massivo acoplado conformalmente no espaço de de Sitter.

## 5.5 O método de quantização estocástica: panorama geral

Nas seções anteriores, utilizamos o método da quantização estocástica para se estudar campos em diferentes situações físicas. No capítulo anterior, vimos que a introdução de um kernel de memória na equação de Langevin auxilia na convergência de teorias com ações complexas. Dentro deste contexto, fizemos dois exemplos, a saber, o campo escalar com auto-interação e uma teoria topológica (Chern-Simons). O primeiro caso foi introduzido por razões meramente ilustrativas. O segundo caso, por outro lado, apresentava um problema real, a convergência para o equilíbrio afetada pela ação topológica, que é complexa. Mostrou-se, daí, que este problema é resolvido levando-se em conta um processo não-markoviano.

Neste capítulo analisamos uma teoria de campos escalares com auto-interação em variedades que podem ser continuadas analiticamente para a situação euclidiana, i.e., variedades riemannianas estáticas, a saber, a variedade de Einstein e a variedade de Rindler. Primeiro nós resolvemos uma equação de Langevin para os coeficientes de modo do campo, então exibimos a função de dois pontos ao nível de um laço. Foi demonstrada que ela diverge e usamos uma regularização estocástica covariante para regularizá-la. Foi

mostrado que, de fato, a função de dois-pontos é regularizada.

Uma pergunta natural que se apresenta, quando trabalhamos no espaço de Rindler, é o que acontece com a função de correlação do campo de ruído, dada por (5.93), perto do horizonte. Desta equação vemos que, sempre que tivermos  $g = \det g_{\mu\nu} = 0$ , esta função de correlação diverge, e, portanto, todas as funções de correlação de  $n$ -pontos  $\langle \varphi(\tau_1, x_1)\varphi(\tau_2, x_2)\dots\varphi(\tau_n, x_n) \rangle_\eta$  terão valores sem sentido, em virtude da solução da equação de Langevin. Podemos estabelecer um modelo introduzido por 't Hooft [212] [213] a fim de se levar em conta tais efeitos; em outras palavras, podemos impor uma condição de contorno às soluções da equação de Langevin em um ponto perto do horizonte. Lembramos que, em nossos cálculos para o caso de de Sitter, tal situação não aparece, visto que utilizamos um sistema de coordenadas onde o horizonte cosmológico está ausente. Por outro lado, no limite  $g = \det g_{\mu\nu} \rightarrow \infty$ , todas as funções de correlação se anulam. Gostaríamos de indicar que outro modo poderoso para se entender o comportamento das funções de correlação no limite  $g = \det g_{\mu\nu} = 0$  pode ser a quantização estocástica do modelo de Schwinger em duas dimensões em um espaço com curvatura. Este também pode ser uma maneira de se estudar a forma mais pertinente da equação de Langevin a ser utilizada em espaço-tempo com curvatura.

Discutimos também que a presença do parâmetro de Markov como uma dimensão extra nos leva a um esquema de regularização que preserve todas as simetrias da teoria sob estudo. Este é um ponto bastante importante em um procedimento de regularização. Ele deve preservar todas as simetrias da lagrangeana não-regularizada. Muito embora muitos autores tenham enfatizado que não é possível esperar que uma prova da renormalizabilidade de teorias, em um espaço com curvatura, exista que seja independente da

regularização utilizada, como a regularização estocástica não é uma regularização de ação, ela pode ajudar na construção de tal prova. Estamos cientes do fato que o programa da quantização estocástica pode ser implantado sem problemas (a menos de problemas de horizonte de eventos, etc.) se for possível efetuar a rotação de Wick, obtendo, assim, uma ação euclidiana.

A imagem que emerge destas discussões é que a implantação da quantização estocástica em um espaço-tempo com curvatura está relacionada com o seguinte fato: para variedades estáticas, é possível efetuar uma rotação de Wick, i.e., estender analiticamente a variedade pseudo-riemanniana para um domínio riemanniano sem problemas. Entretanto, para variedades não-estáticas com curvatura, teremos que generalizar o formalismo além da assinatura euclidiana, i.e., devemos formular a quantização estocástica em uma variedade pseudo-riemanniana, não em um espaço riemanniano (como o espaço euclidiano original) como foi formulada originalmente. Claro está que esta situação é um caso especial de formulação euclidiana usual para sistemas com ações complexas.

A diferença principal entre o espaço euclidiano original e a implantação da quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski é o fato de que, no caso usual de uma ação real euclidiana, a aproximação ao estado de equilíbrio é uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck. Na formulação de Minkowski, o hamiltoniano não é hermitiano e os autovalores deste são, em geral, complexos. A parte real de tais autovalores é importante para o comportamento assintótico em largos tempos de Markov. A aproximação ao equilíbrio é atingida apenas se for positivo definido. Uma questão fundamental é: o que acontece se a equação de Langevin descrever um processo de difusão com uma ação complexa? Alguns autores alegam que seja possível obter resultados significativos a partir de

tais equações de Langevin. Veja, por exemplo, o artigo seminal de Parisi [155]. Klauder et al. [157] investigou a equação de Langevin complexa, onde algumas simulações numéricas em sistemas unidimensionais foram apresentadas. Veja também as referências [156] [158]. Finalmente, gostaríamos de mencionar o tratamento desenvolvido por Okamoto et al. [159], onde o papel do kernel na equação de Langevin complexa foi estudado.

Queremos observar que existem muitos exemplos onde a ação euclidiana é complexa. A quantização estocástica no espaço-tempo de Minkowski, como discutimos; sistemas com potencial químico como, por exemplo,  $QCD$  com potencial químico não-nulo a temperatura finita; para teorias  $SU(N)$  com  $N > 2$ , o determinante fermiônico torna-se complexo e também a ação efetiva. Termos complexos podem também aparecer na equação de Langevin para férmions, mas um kernel adequado pode cuidar deste problema. Outro caso bastante instrutivo que merece nossa atenção é a quantização estocástica de teoria de campos topológica. Como salientado anteriormente, uma característica peculiar dentro deste tipo de teoria é o aparecimento de um fator  $i$  em frente a ação topológica no espaço euclidiano. Em uma teoria topológica, o peso da medida da integral de trajetória permanece o mesmo,  $e^{iS}$ , mesmo depois da rotação de Wick. Uma tentativa de se usar uma equação de Langevin markoviana com um ruído branco para se quantizar esta teoria está condenada a falhar, pois a equação de Langevin não tenderá a algum equilíbrio em largos parâmetros de Markov. Na literatura, há diferentes propostas para se resolver o problema acima mencionado. Em uma teoria de Chern-Simons puramente topológica, Ferrari e Huffel [175] introduziram um kernel não-trivial na equação de Langevin. Outra abordagem foi desenvolvida por Menezes e Svaiter [115]. Estes autores mostraram que, ao se usar uma equação de Langevin não-markoviana com um ruído colorido, o problema de convergência



pode ser resolvido. Estes autores mostraram que é possível obter convergência para o equilíbrio mesmo com um coeficiente de Chern-Simons imaginário. Concluimos dizendo que vários métodos alternativos foram propostos para se lidar com sistemas físicos interessantes onde a ação euclidiana é complexa. Estes métodos não sugerem algum modo geral de se resolver dificuldades particulares que são levantadas em cada situação.

O programa de se usar equação de Langevin complexa para uma investigação de teorias quânticas de campos no espaço-tempo de Minkowski ainda não está estabelecida e encontra-se sob discussão. Claro está que, até o problema que discutimos acima for resolvido, não se pode dizer com certeza que o programa da quantização estocástica em variedades pseudo-riemannianas não-estáticas pode ser estabelecido com sucesso.

# Capítulo 6

## Conclusões

Como dito no início do texto, esta tese se apresenta como um estudo de processos estocásticos em variedades riemannianas, com ou sem curvatura. Vimos nos primeiros capítulos como o estudo da quantização estocástica pode ser motivado através da análise da termodinâmica de buracos negros. A partir desta primeira motivação, encontramos várias outras questões que poderiam ser abordadas dentro desta técnica, a saber, a quantização de teorias cuja a ação é complexa e o estudo de teorias cujos objetos fundamentais, i.e., os campos, estão definidos em variedades curvas ou com um horizonte de eventos. Entendemos que um estudo sistemático da quantização estocástica pode nos ajudar a decifrar aspectos da teoria que permaneceram cobertos quando vistos pelos olhos dos outros métodos de quantização. Por exemplo, conforme foi dito várias vezes ao longo deste texto, ela nos presenteia com uma regularização que preserva todas as simetrias da teoria, a dita regularização estocástica covariante. Portanto, um passo importante para se entender de modo mais profundo tal regularização seria, por exemplo, o estudo da regularização do tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  em um espaço com curvatura diferente de zero. Sabemos que, quando se procede com a renormalização do  $T_{\mu\nu}$ , o seu traço  $T_{\mu\mu}$  não é mais nulo, diferente

do que acontece com o tensor momento-energia clássico. Este resultado é conhecido como sendo a anomalia do traço (ou anomalia conforme) do tensor momento-energia. Visto todas as suas vantagens, a regularização estocástica covariante de  $T_{\mu\nu}$  poderia trazer mais informações importantes sobre o tema.

Como mencionado anteriormente, outra questão importante é a quantização de campos em espaços com buracos negros. Para se proceder com a quantização estocástica neste caso, deve-se entender o que acontece com as correlações do ruído perto do horizonte de eventos. Conforme discutido no capítulo anterior, estas podem vir a divergir, dificultando a definição de um processo estocástico perto do horizonte de eventos. Outro ponto importante é como o efeito Hawking emerge dentro de um contexto de processos estocásticos em variedades. Um estudo mais detalhado sobre o assunto faz-se necessário.

Ainda na questão de processos estocásticos, uma linha de pesquisa que tem se apresentado bastante importante é o estudo de sistemas fora do equilíbrio. No estudo de sistemas fora do equilíbrio, devemos investigar mais profundamente a quantização estocástica, modificando a equação de Langevin markoviana para uma equação de Langevin não-markoviana para responder à seguinte pergunta: que classes de equações de Langevin generalizadas são aceitáveis, de forma que no limite assintótico a teoria quântica dos campos usual é recuperada?

De qualquer forma, esta tese tenta apontar diferentes caminhos para se abordar a teoria dos campos quantizados. Afinal de contas, que direções podemos esperar para a teoria quântica dos campos? No presente momento ocorre com a teoria dos campos o mesmo que ocorreu na década de sessenta do século XX. Apesar de termos vários problemas ainda em aberto, sem solução, o interesse pela teoria quântica dos campos está

decrecendo gradativamente, sendo substituída por cordas, membranas e outros objetos extensos. A teoria das cordas se apresenta como um formalismo capaz de ser usado num domínio de energia e distâncias onde a teoria quântica de campos falha, e que também se presta a resolver problemas que não podem ser atacados pela teoria dos campos. Neste nova técnica, o princípio de causalidade e as idéias da mecânica quântica são mantidos, mas trata-se de uma teoria formulada onde os objetos físicos fundamentais são entidades unidimensionais, de forma que temos uma teoria não-local. Apesar disso, as cordas interagem localmente, preservando as conseqüências da localidade, como, por exemplo, a causalidade. Outro ponto bastante atrativo é que na teoria das cordas não aparecem os problemas das divergências ultravioletas, que permeiam a teoria quântica dos campos. As teorias são finitas no ultravioleta, apesar de não sabermos se métodos perturbativos sofrem do mesmo problema que encontramos na teoria dos campos perturbativa, com séries não somáveis.

Os princípios básicos da física encontram-se em revisão no presente momento. Dentro deste contexto, podemos mencionar aqui o espetacular progresso que a cosmologia vem sofrendo desde o começo da década de 1970, o qual começou com um entendimento teórico dos processos físicos no início do universo e que culminou em uma série de descobertas observacionais. O começo desta nova era na cosmologia pode ser associada ao desenvolvimento das teorias de calibre das interações forte, fraca e eletromagnética. A descoberta da liberdade assintótica permitiu que se fosse investigadas propriedades da matéria próxima do denominado “big bang”. Muitas outras contribuições da cosmologia moderna à física poderiam ser citadas; para o leitor interessado, indicamos a referência [214]. Por outro lado, podemos nos perguntar se a teoria de cordas terá sucesso na descrição da realidade

ou será vista apenas um conjunto de “verdades matemáticas”. Até o presente momento não sabemos como responder esta pergunta, visto que esta é apenas uma possível extensão da teoria dos campos. O nosso entendimento da teoria das cordas ainda é bastante primitivo, pois nada sabemos sobre efeitos não-perturbativos e também do porquê de termos que aceitar que vivemos num espaço com alta dimensionalidade, para que a teoria seja consistente matematicamente. De qualquer maneira, para sabermos do que se trata a teoria de cordas, faz-se mister um entendimento profundo das propriedades e limitações do objeto que ela pretende generalizar, qual seja, a teoria dos campos quantizados [215].

# Apêndice A

## Demonstração de que o valor da função zeta espectral se anula na origem do plano complexo $s$ , i.e., $\zeta_D(s)|_{s=0} = 0$

Como discutido anteriormente, para levarmos em conta as propriedades de escala (“scaling”, em inglês), devemos introduzir um parâmetro arbitrário com dimensão de massa  $\mu$  para definirmos todas as quantidades físicas adimensionais e, em particular, efetuarmos a mudança

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_D(s)|_{s=0} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right) \zeta_D(s)|_{s=0}. \quad (\text{A.1})$$

Neste apêndice, provaremos que a função zeta espectral em  $s = 0$  se anula, por conseguinte a mudança acima representada é trivial. A função zeta de Epstein é definida como sendo

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s) = \sum_{n_1, \dots, n_p = -\infty}^{\infty} \left( (a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2 \right)^{-s}, \quad (\text{A.2})$$

onde a linha indica que o termo referente ao modo zero associado ao operador em questão deve ser omitido. Esta soma é convergente apenas para  $2s > p$ . Não obstante, podemos encontrar uma representação integral que vale em todo o plano complexo com exceção de pólos simples para  $p = 2s$  [93]. Esta representação é dada por

$$(\pi \eta)^{-s} \Gamma(s) Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s) =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{s} + \frac{2}{p-2s} + \eta^{-s} \int_{\eta}^{\infty} dx x^{s-1} \left( \vartheta(0, \dots, 0; a_1^2 x, \dots, a_p^2 x) - 1 \right) \\
 & + \eta^{(2s-p)/2} \int_{1/\eta}^{\infty} dx x^{(p-2s)/2-1} \left( \vartheta(0, \dots, 0; x/a_1^2, \dots, x/a_p^2) - 1 \right), \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

onde  $\eta^{p/2}$  é o produto de  $p$ 's parâmetros  $a_i$  dados por  $\eta^{p/2} = a_1 \dots a_p$ , e a função de Jacobi generalizada  $\vartheta(z_1, \dots, z_p; x_1, \dots, x_p)$ , é definido por

$$\vartheta(z_1, \dots, z_p; x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p \vartheta(z_i; x_i), \quad (\text{A.4})$$

com  $\vartheta(z; x)$  sendo a função de Jacobi, i.e.,

$$\vartheta(z; x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi(2nz - n^2x)}. \quad (\text{A.5})$$

Usando esta expressão integral para a função zeta de Epstein, dada por (A.3), podemos achar que

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = -1, \quad (\text{A.6})$$

para qualquer  $p \geq 1$ . Para continuarmos, vamos definir a função  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)$ :

$$Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s) = \sum_{n_1, \dots, n_q=1}^{\infty} \sum_{n_{q+1}, \dots, n_p=-\infty}^{\infty} \left( (a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2 \right)^{-s}. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando o resultado da equação (A.6), pode-se mostrar, após efetuarmos a continuação analítica da função  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)$ , que a seguinte propriedade é válida

$$Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0, \quad (\text{A.8})$$

onde este resultado é válido para o intervalo  $0 < q < p$ . Pode-se demonstrar esta propriedade por indução matemática. Para  $q = 1$ , temos:

$$Z_p(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = Z_p(a_2, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} + 2Z_p^{(1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0}. \quad (\text{A.9})$$

Como  $p > 1$  podemos usar a propriedade dada pela equação (A.6) para os dois primeiros termos da equação (A.9) e verificar que  $Z_p^{(1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0$ . Vamos, agora, assumir

que esta propriedade é válida para  $q$  genérico, i.e.,  $Z_p^{(q)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = 0$ , com  $p$  arbitrário, porém satisfazendo à condição  $0 < q < p$ . Para completarmos a prova, devemos verificar a propriedade para  $q + 1$ , i.e.,  $Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} = 0$  com  $p'$  também arbitrários mas obedecendo à condição  $0 < q + 1 < p'$ . A partir da propriedade

$$Z_{p'}^{(q)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} = Z_{p'-1}^{(q)}(a_1, \dots, a_q, a_{q+2}, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} + 2Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0}, \quad (\text{A.10})$$

como  $0 < q < p' - 1$  e admitindo a validade desta para  $q$  arbitrário, dado pela equação (A.8), podemos ver que os dois primeiros termos de (A.10) se anulam. Portanto, conseguimos demonstrar que  $Z_{p'}^{(q+1)}(a_1, \dots, a_{p'}; 2s)|_{s=0} = 0$ . Estamos interessados em um caso particular desta propriedade, a saber:

$$Z_p^{(p-1)}(a_1, \dots, a_p; 2s)|_{s=0} = \left( \sum_{n_1, \dots, n_{p-1}=1}^{\infty} \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} \left( (a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2 \right)^{-s} \right) \Big|_{s=0} = 0. \quad (\text{A.11})$$



# Apêndice B

## A representação de Klauder para o gerador funcional de valor independente

Para darmos um significado preciso para o funcional gerador de valor independente  $Q_0[\sigma, h]$ , podemos tanto discretizar o espaço como utilizar o resultado do Klauder que formaliza uma definição para o funcional gerador de valor independente derivado para campos escalares em um espaço euclidiano  $d$ -dimensional. Este funcional gerador é uma integral funcional gaussiana de média zero. Usando o fato que os campos definidos em cada ponto do tempo euclidiano são estatisticamente independentes, podemos escrever

$$Q_0[\sigma, h] = \exp\left(-\int d^d x L(\sigma, h(x))\right), \quad (\text{B.1})$$

para alguma função  $L(\sigma, h(x))$ . A expressão acima é fundamental para nosso estudo. Vamos ver como é possível extrair alguma informação a partir da mesma. Antes de estudarmos o caso com interação, vamos analisar um simples exemplo, com  $g_0 = 0$ . Neste caso, temos

$$Z[\beta, \Omega, h]_{g_0=0} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta h(x)} K(m_0, \sigma; x - x') \frac{\delta}{\delta h(x')}\right) Q_0[\sigma, h]_{g_0=0}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $Q_0[\sigma, h]$ , o funcional gerador de valor independente, é dado por

$$Q_0[\sigma, h]_{g_0=0} = \mathcal{N} \int [d\varphi(x)] \exp\left(\int d^d x \left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 \varphi^2(x) + h(x)\varphi(x)\right)\right), \quad (\text{B.3})$$

onde, mais uma vez, o kernel modificado  $K(m_0, \sigma; x - x')$  está definido pela equação (2.7).

O funcional de valor independente livre deve satisfazer à  $Q_0[\sigma, h]|_{h=g_0=0} = 1$ . Gostaríamos de observar que, na derivação de Klauder para o modelo de valor independente livre, um resultado foi obtido o qual é bem definido para todas as funções que são quadrado-integráveis em  $R^n$  i.e.,  $h(x) \in L^2(R^n)$ . Como estamos assumindo que  $h = cte$ , devemos normalizar nossas expressões. Portanto, temos

$$Q_0(\sigma, h)|_{g_0=0} = \exp\left(-\frac{1}{2V\sigma m_0^2} \int d^d x h^2(x)\right). \quad (\text{B.4})$$

A generalização para o campo escalar com auto-interação  $\frac{g_0}{p!} \varphi^p(x)$  é feita de maneira direta. É possível mostrar que o funcional gerador de valor independente pode ser escrito como sendo

$$Q_0(\sigma, h) = \exp\left(-\frac{1}{2V} \int d^d x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u|} (1 - \cos(hu)) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right)\right). \quad (\text{B.5})$$

Não há necessidade de entrarmos nos pormenores de tal derivação. O leitor interessado pode encontrar maiores detalhes na referência [67]. A fim de estudarmos  $Q_0(\sigma, h)$ , vamos definir  $E(m_0, \sigma, g_0, h)$  dado por

$$E(m_0, \sigma, g_0, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u|} (1 - \cos(hu)) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.6})$$

Empregando uma representação de séries para  $\cos x$  e lembrando o fato que a série obtida ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(u)$ ) converge uniformemente no intervalo  $[0, \infty)$ , a mesma pode ser integrada termo a termo. Não é difícil mostrar que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} h^{2k} \int_0^{\infty} du u^{2k-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma m_0^2 u^2 - \frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.7})$$

Agora, vamos usar o fato que o parâmetro  $\sigma$  pode ser escolhido de tal modo a facilitar nossos cálculos. Esta é a principal diferença para o resultado do Klauder. Analisando apenas o funcional gerador de valor independente, não seria possível expressar  $Q_0(\sigma, h)$  de uma forma fechada mesmo sendo a fonte externa constante. Vamos escolher  $\sigma = 0$ . Portanto, temos que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h)|_{\sigma=0} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} h^{2k} \int_0^{\infty} du u^{2k-1} \exp\left(-\frac{g_0}{p!} u^p\right). \quad (\text{B.8})$$

Neste ponto de nosso estudo vamos aproveitar para introduzir a seguinte representação integral para a função gama [91]

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} \exp(-\mu x^p) = \frac{1}{p} \mu^{-\frac{\nu}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right), \quad \text{Re}(\mu) > 0 \quad \text{Re}(\nu) > 0 \quad p > 0. \quad (\text{B.9})$$

Agora fica claro que podemos estudar a teoria  $(g_0 \varphi^p)$ , para  $p > 4$  par, mais facilmente empregando nosso método. Usando o resultado dado pela equação (B.9) na equação (B.8), temos que

$$E(m_0, \sigma, g_0, h)|_{\sigma=0} = \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{p}{2k}}}, \quad (\text{B.10})$$

onde os coeficientes  $g(p, k)$  são dados por

$$g(p, k) = \frac{2(-1)^k}{p(2k)!} (p!)^{\frac{2k}{p}} \Gamma\left(\frac{2k}{p}\right). \quad (\text{B.11})$$

Levando as equações (B.10) e (B.11) em (B.5), obtemos que o funcional gerador de valor independente  $Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0}$  pode ser escrito como sendo

$$Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0} = \exp\left[-\frac{1}{2\Omega\beta} \int_0^{\beta} d\tau \int d^{d-1}x \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{p}{2k}}}\right]. \quad (\text{B.12})$$

É fácil calcular a segunda derivada do funcional gerador de valor independente com respeito à  $h$ . Note que  $Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = 1$ . Logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=0} = \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) (2k)(2k-1) \frac{h^{2k-2}}{g_0^{\frac{p}{2k}}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{p}{2k}}}\right) +$$

$$+G(g_0, p, h), \quad (\text{B.13})$$

onde  $G(g_0, p, h)$  é dada por

$$G(g_0, p, h) = \left( \sum_{k, q=1}^{\infty} g(p, k, q) \frac{h^{2k+2q-2}}{g_0^{\frac{2(k+q)}{p}}} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g(p, k) \frac{h^{2k}}{g_0^{\frac{2k}{p}}} \right), \quad (\text{B.14})$$

e  $g(k, q) = k q g(k)g(q)$ . Estamos interessados no caso  $h = 0$ , portanto a série dupla não contribui para a equação (B.13), já que  $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$ . Deste modo, apenas o termo  $k = 1$  contribui na equação (B.13). Temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0} = \frac{1}{2p g_0^{\frac{2}{p}}} \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{(p!)^{\frac{2}{p}}}. \quad (\text{B.15})$$

# Apêndice C

## A equação de Langevin markoviana e não-markoviana

Uma maneira de analisarmos a dinâmica de um sistema fora do equilíbrio é com a utilização da teoria do movimento browniano. A expressão fundamental é a equação de Langevin que contém uma contribuição de forças de fricção e outra de forças estocásticas. A equação de movimento para uma partícula browniana é dada por

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\xi \mathbf{v}(t) + \delta \mathbf{F}(t), \quad (\text{C.1})$$

onde  $-\xi \mathbf{v}(t)$  é a força de fricção proporcional a velocidade e  $\delta \mathbf{F}(t)$  é a força estocástica. Na equação (C.1),  $m$  é a massa da partícula browniana imersa no fluido. Os efeitos da força estocástica são dadas pelas suas funções de correlação:

$$\langle \delta \mathbf{F}(t) \rangle = 0 \quad (\text{C.2})$$

e

$$\langle \delta F^i(t) \delta F^j(t') \rangle = 2B \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (\text{C.3})$$

onde  $B$  mede a intensidade da força estocástica. A função delta na equação (C.3) significa, fisicamente, que não existe correlação entre impactos que sofre a partícula browniana em

diferentes intervalos do tempo. A equação de Langevin pode ser resolvida:

$$\mathbf{v}(t) = \exp\left(-\frac{\xi}{m}t\right)\mathbf{v}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t ds \exp\left(-\frac{\xi}{m}(t-s)\right)\delta\mathbf{F}(s). \quad (\text{C.4})$$

Utilizando o fato de que a força estocástica tem uma distribuição gaussiana definida pelos seus momentos, pode-se mostrar que a velocidade quadrática média de cada partícula browniana é dada por

$$\langle v^2(t) \rangle = \exp\left(-\frac{2\xi}{m}t\right)v^2(0) + \frac{B}{\xi m}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\xi}{m}t\right)\right), \quad (\text{C.5})$$

onde  $\langle \dots \rangle$  define médias estocásticas.

Como a força estocástica  $\delta\mathbf{F}(t)$  tem uma distribuição gaussiana é possível relacionar a intensidade do ruído estocástico com a magnitude  $\xi$  da força de fricção ( $B = \xi\beta^{-1}$ ) onde  $\beta^{-1}$  é a temperatura do banho. A equação de Langevin dada pela equação (C.1) é chamada markoviana pois a força de fricção ( $-\xi\mathbf{v}(t)$ ) no tempo  $t$  é proporcional a velocidade em  $t$  e o ruído é branco. Em outras palavras, sua densidade espectral, isto é, a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos associada ao ruído, é independente da frequência.

A equação de Langevin pode ser generalizada para situações onde a fricção em um instante de tempo  $t$  depende da história da velocidade  $\mathbf{v}(s)$  para tempos  $s$  que são anteriores a  $t$ . Neste caso o coeficiente de fricção é substituído por uma função de memória. Esta equação de Langevin generalizada, conhecida por equação de Langevin não-markoviana, se escreve como

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -\int_0^\infty ds M(s)\mathbf{v}(t-s) + \delta\mathbf{F}(t). \quad (\text{C.6})$$

# Apêndice D

## A função de Green retardada para o problema de difusão numa teoria de Chern-Simons Abeliana

Neste apêndice, derivamos a função de Green retardada para o problema de difusão  $G_{\mu\nu}(k, \tau)$ . Expandindo o denominador da equação (D.1), dada por

$$G_{\mu\nu}(k, z) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{1}{z} + \frac{\left( \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) z - \epsilon_{\mu\nu\sigma} k_\sigma \left( \frac{\kappa'}{4\pi} \right) \right)}{\left( z + \frac{k^2}{\epsilon'^2} \right)^2 + \left( \frac{\kappa'}{4\pi} \right)^2 k^2}, \quad (\text{D.1})$$

temos:

$$G_{\mu\nu}(k, z) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{1}{z} + \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) I_1(z) - \epsilon_{\mu\nu\sigma} k_\sigma \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right) I_2(z), \quad (\text{D.2})$$

onde:

$$I_1(z) \equiv \frac{z}{P(z)}, \quad (\text{D.3})$$

$$I_2(z) \equiv \frac{M_\Lambda(z)}{P(z)}, \quad (\text{D.4})$$

e:

$$P(z) \equiv z^2 + 2 \frac{k^2}{\epsilon^2} M_\Lambda(z) z + \frac{k^4}{\epsilon^4} M_\Lambda^2(z) + \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 k^2 M_\Lambda^2(z). \quad (\text{D.5})$$

Usando a seguinte representação exponencial para o kernel de memória  $M_\Lambda(\tau)$ :

$$M_\Lambda^n(\tau) = \frac{1}{2n!} \Lambda^2 (\Lambda^2 | \tau |)^n \exp(-\Lambda^2 | \tau |), \quad (\text{D.6})$$

onde  $\Lambda$  é um parâmetro, teremos, para o caso  $n = 0$ :

$$I_1(z) = \frac{z^3 + 2\Lambda^2 z^2 + \Lambda^4 z}{\Omega(z)}, \quad (\text{D.7})$$

$$I_2(z) = \frac{\frac{\Lambda^2}{2}z + \frac{\Lambda^4}{2}}{\Omega(z)}, \quad (\text{D.8})$$

e:

$$\Omega(z) \equiv z^4 + 2\Lambda^2 z^3 + (\Lambda^4 + \alpha)z^2 + \alpha\Lambda^2 z + \beta, \quad (\text{D.9})$$

onde:

$$\alpha \equiv \frac{k^2 \Lambda^2}{\varepsilon^2}, \quad (\text{D.10})$$

e

$$\beta \equiv \left( \frac{k^4}{\varepsilon^4} + \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right)^2 k^2 \right) \frac{\Lambda^4}{4}. \quad (\text{D.11})$$

A fim de se obter a transformada inversa de Laplace da equação (D.2), devemos procurar soluções para a equação quártica  $\Omega(z) = 0$ . Como é bem conhecido, uma equação quártica genérica é uma equação polinomial de quarta ordem da forma:

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \quad (\text{D.12})$$

Utilizando uma técnica algébrica familiar desenvolvida por Ferrari e Cardano [216], é fácil mostrar que as raízes da equação (D.12) são dadas por:

$$z_1 = -\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}D, \quad (\text{D.13})$$

$$z_2 = -\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}D, \quad (\text{D.14})$$

$$z_3 = -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}E, \quad (\text{D.15})$$

$$z_4 = -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}E, \quad (\text{D.16})$$



onde:

$$R \equiv \left( \frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + y_1 \right)^{1/2}, \quad (\text{D.17})$$

$$D \equiv \begin{cases} \left( F(R) + G \right)^{1/2} & \text{for } R \neq 0 \\ \left( F(0) + H \right)^{1/2} & \text{for } R = 0, \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

$$E \equiv \begin{cases} \left( F(R) - G \right)^{1/2} & \text{for } R \neq 0 \\ \left( F(0) - H \right)^{1/2} & \text{for } R = 0, \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

$$F(R) \equiv \frac{3}{4}a_3^2 - R^2 - 2a_2, \quad (\text{D.20})$$

$$H \equiv 2 \left( y_1^2 - 4a_0 \right)^{1/2}, \quad (\text{D.21})$$

$$G \equiv \frac{1}{4}(4a_3a_2 - 8a_1 - a_3^3)R^{-1}, \quad (\text{D.22})$$

e  $y_1$  é uma raiz real da seguinte equação cúbica:

$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_0)y + (4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0) = 0. \quad (\text{D.23})$$

Portanto, a transformada de Laplace inversa de  $I_1(z)$  e  $I_2(z)$  será:

$$\begin{aligned} I_1(\tau) &= \frac{z_1^3 + 2\Lambda^2 z_1^2 + \Lambda^4 z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} e^{z_1\tau} + \\ &+ \frac{z_2^3 + 2\Lambda^2 z_2^2 + \Lambda^4 z_2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} e^{z_2\tau} + \\ &+ \frac{z_3^3 + 2\Lambda^2 z_3^2 + \Lambda^4 z_3}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} e^{z_3\tau} + \\ &+ \frac{z_4^3 + 2\Lambda^2 z_4^2 + \Lambda^4 z_4}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} e^{z_4\tau}, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

e

$$\begin{aligned} I_2(\tau) &= \frac{\frac{\Lambda^2}{2}z_1 + \frac{\Lambda^4}{2}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} e^{z_1\tau} + \\ &+ \frac{\frac{\Lambda^2}{2}z_2 + \frac{\Lambda^4}{2}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} e^{z_2\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{\Lambda^2}{2}z_3 + \frac{\Lambda^4}{2}}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} e^{z_3\tau} + \\
& + \frac{\frac{\Lambda^2}{2}z_4 + \frac{\Lambda^4}{2}}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} e^{z_4\tau}.
\end{aligned} \tag{D.25}$$

Agora, vamos estudar um simples critério de convergência de modo que  $G_{\mu\nu}(k, \tau) \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Nesta situação, o sistema converge para um equilíbrio. Comparando o polinômio  $\Omega(z)$  com a expressão (D.12), é trivial fazer as seguintes identificações:  $a_0 = \beta$ ,  $a_1 = \alpha\Lambda^2$ ,  $a_2 = \alpha + \Lambda^4$  e, finalmente,  $a_3 = 2\Lambda^2$ . Por conveniência, vamos assumir que  $R$ , definido pela equação (D.17), não se anula. Para continuarmos com os cálculos, vamos introduzir as seguintes quantidades reais  $\sigma$  e  $\gamma$ , definidas respectivamente por

$$\sigma \equiv \left( a_2 - \frac{1}{4}a_3^2 - y_1 \right)^{1/2} = (\alpha - y_1)^{1/2} \tag{D.26}$$

e

$$\gamma \equiv \left( a_2 + y_1 - \frac{1}{2}a_3^2 \right)^{1/2} = (\alpha + y_1 - \Lambda^4)^{1/2}, \tag{D.27}$$

onde usamos as identificações  $a_2 = \alpha + \Lambda^4$  e  $a_3 = 2\Lambda^2$ . Daí, devemos ter:

$$R = i\sigma, \tag{D.28}$$

e

$$E = i\gamma. \tag{D.29}$$

Logo, com as identificações acima, é fácil ver que  $G$ , definida por (D.22), se anula identicamente. Portanto, teremos, das equações (D.18) e (D.19), que  $D = E$ . Vemos também que:

$$\sigma^2 + \gamma^2 = 2\alpha - \Lambda^4 > 0, \tag{D.30}$$

o que implica em:

$$k^2 > \frac{\varepsilon^2 \Lambda^2}{2}, \tag{D.31}$$

onde a equação (D.10) foi usada, o que é um critério de convergência similar ao caso do campo escalar sem massa [114].

Portanto, das equações (D.13) - (D.16), (D.28) e (D.29), obtemos as seguinte soluções para  $\Omega(z) = 0$ :

$$z_1 = -\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{1}{2}i\sigma + \frac{1}{2}i\gamma, \quad (\text{D.32})$$

$$z_2 = -\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{1}{2}i\sigma - \frac{1}{2}i\gamma, \quad (\text{D.33})$$

$$z_3 = -\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{1}{2}i\sigma + \frac{1}{2}i\gamma, \quad (\text{D.34})$$

$$z_4 = -\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{1}{2}i\sigma - \frac{1}{2}i\gamma. \quad (\text{D.35})$$

Logo, destes últimos resultados, teremos, finalmente, para  $G_{\mu\nu}(k, \tau)$ :

$$G_{\mu\nu}(k, \tau) = \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + g_{\mu\nu}G_1(k, \tau) + \tilde{g}_{\mu\nu}G_2(k, \tau) \right) \theta(\tau), \quad (\text{D.36})$$

onde:

$$G_1(k, \tau) \equiv \left( \frac{\Lambda^2}{(\sigma + \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma + \gamma)}{2}\tau\right) + \cos\left(\frac{(\sigma + \gamma)}{2}\tau\right) \right) e^{-\frac{\Lambda^2}{2}\tau}, \quad (\text{D.37})$$

$$G_2(k, \tau) \equiv \left( \frac{\Lambda^2}{(\sigma - \gamma)} \sin\left(\frac{(\sigma - \gamma)}{2}\tau\right) + \cos\left(\frac{(\sigma - \gamma)}{2}\tau\right) \right) e^{-\frac{\Lambda^2}{2}\tau}, \quad (\text{D.38})$$

e  $g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  aparecendo na equação (D.36) são definidos por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \Pi_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}, \quad (\text{D.39})$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \tilde{\Pi}_{\mu\nu}, \quad (\text{D.40})$$

com:

$$h_{\mu\nu} \equiv -\frac{\Lambda^2}{2\gamma\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho} k_\rho \left( \frac{\kappa}{4\pi} \right), \quad (\text{D.41})$$

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\gamma\sigma} \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4} \right) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (\text{D.42})$$

e

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\gamma\sigma} \left( \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{(\sigma - \gamma)^2}{4} \right) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (\text{D.43})$$

# Referências

- [1] *"Selected Papers on Quantum Electrodynamics"*, J. Schwinger (ed.), Dover Pub. Inc., New York (1958).
- [2] J. C. Collins *"Renormalization"*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).
- [3] R. Mackenzie, *"Path Integral Methods and Applications"*, arXiv:quant-ph/0004090v1 (2000).
- [4] A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*, World Scientific Lecture Notes in Physics (1993).
- [5] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations*, Cambridge University Press (1987).
- [6] J. Glimm e A. Jaffe *"Quantum Physics, A Functional Point of View"*, Springer Verlag, New York (1981).
- [7] I. Ya. Pomeranchuk, V. Sudakov e K. Ter Martirosjan, Phys. Rev. **103**, 784 (1954).
- [8] L. D. Landau e I. Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk. **102**, 489 (1955).
- [9] I. Ya. Pomeranchuk, Il Nuovo Cim. **3**, 1186 (1956).
- [10] D. J. E. Callaway, Phys. Rep. **167**, 241 (1988).

- [11] C. N. Yang e R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [12] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
- [13] J. Schwinger, Ann. Phys. **2**, 407 (1957).
- [14] J. Leite Lopes, “*Gauge Field Theories*”, Pergamon Press, Oxford (1981).
- [15] S. Pokorski, “*Gauge Field Theories*”, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [16] L. D. Faddeev e A. A. Slavnov, “*Gauge Fields - Introduction to Quantum Theory*”, Addison-Wesley Publishing Company, California (1991).
- [17] D. Bailin e A. Love, “*Introduction to Gauge Field Theory*”, Institute of Physics Publishing, Bristol, England (1993).
- [18] P. H. Frampton, “*Gauge Field Theories*”, John Wiley e Sons, Inc., New York (2000).
- [19] D. J. Gross, “*The triumph and limitations of quantum field theory*”, hep-th/9704139 (1997).
- [20] R. Bousso, Rev. Mod. Phys. **74**, 825 (2002).
- [21] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).
- [22] W. Israel, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).
- [23] W. Israel, Commun. Math. Phys. **8**, 245 (1968).
- [24] B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1970).
- [25] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).

- [26] J. M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [27] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [28] K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B190**, 1 (1981).
- [29] C. D. Fosco e N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **42**, 5185 (2001).
- [30] M. I. Caicedo e N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **45**, 179 (2004).
- [31] N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **45**, 4524 (2004).
- [32] M. Aparicio Alcalde, G. Flores Hidalgo e N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **47**, 052303 (2006).
- [33] A. Ajdari, B. Duplantier, D. Hone, L. Peliti e J. Prost, *J. Phys. II France* **2**, 487 (1992).
- [34] M. L. Lyra, M. Kardar e N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **E47**, 3456 (1993).
- [35] M. Krech, "*The Casimir Effect in Critical Systems*", World Scientific, Singapore (1994).
- [36] J. G. Brankov, D. M. Danchev e M. S. Tonchev. "*Theory of Critical Phenomena in Finite Size Systems*", World Scientific, Singapore (2000).
- [37] H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948).
- [38] F. Caruso, R. De Paola e N. F. Svaiter, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A14**, 2077 (1999).
- [39] F. Caruso, N. P. Neto, B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D43**, 1300 (1991).
- [40] L. E. Oxman, N. F. Svaiter e R. L. P. G. Amaral, *Phys. Rev.* **D72**, 125007 (2005).

- [41] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973).
- [42] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D23**, 287 (1981).
- [43] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D30**, 1669 (1984).
- [44] M. Schiffer e J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D39**, 1109 (1989).
- [45] L. X. Li e L. Liu, Phys. Rev. **D46**, 3296 (1992).
- [46] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D49**, 1912 (1994).
- [47] G. 't Hooft, “*Dimensional Reduction in Quantum Gravity*”, in *Salam-Festschrift*, A. Aly, J. Ellis e S. Randbar-Daemi, Eds., World Scientific, Singapore (1993), ArXiv gr-qc/9310026.
- [48] D. N. Page, Phys. Rev **D26**, 947 (1982).
- [49] D. Unwin, Phys. Rev. **D26**, 944 (1982).
- [50] D. Deutsch, Phys. Rev. Lett. **48**, 286 (1982).
- [51] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D42**, 3596 (1990).
- [52] R. Bousso, J. High Energy Phys. **04**, 035 (2004).
- [53] J. D. Bekenstein, Found. Phys. **35**, 1805 (2005).
- [54] J. D. Bekenstein e M. Schiffer, Phys. Rev. **D42**, 3598 (1990).
- [55] R. Bousso, “*Bound States and the Bekenstein Bound*” ArXiv hep-th/0310148 (2003).

- [56] J. D. Bekenstein e E. I. Guendelman, Phys. Rev. **D35**, 716 (1987).
- [57] J. D. Bekenstein e M. Schiffer, Int. J. Mod. Phys. **C1**, 355 (1990).
- [58] M. Aparicio Alcalde, G. Menezes e N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D77**, 125024 (2008).
- [59] K. Knopp, "*Theory and Applications of Infinite Series*", Dover Publications Inc., N.Y. (1990).
- [60] G. H. Hardy, "*Divergent Series*", Oxford University Press, Great Britain (1949).
- [61] S. Kovesi-Domokos, Il Nuovo Cim. **33A**, 769 (1976).
- [62] R. Menikoff e D. H. Sharp, J. Math. Phys. **19**, 135 (1978).
- [63] J. R. Klauder, Phys. Rev. **D14**, 1952 (1976).
- [64] E. R. Caianiello, G. Scarpetta, Il Nuovo Cim. **22A**, 448 (1974).
- [65] E. R. Caianiello, G. Scarpetta, Lett. Nuovo Cim. **11**, 283 (1974).
- [66] J. R. Klauder, Ann. Phys. **117**, 19 (1979).
- [67] J. R. Klauder, "*Beyond Conventional Quantization*", Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [68] R. J. Rivers, "*Path Integral Methods in Quantum Field Theory*", Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [69] C. M. Bender e T. T. Wu, Phys. Rev. **D7**, 1620 (1973).
- [70] G. Parisi, Phys. Lett. **66B**, 167 (1977).



- [71] E. Brezin, J. C. Le Guillou e J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **D15**, 1544 (1977).
- [72] J. Zinn-Justin, Phys. Rep. **70**, 111 (1981).
- [73] G. 't Hooft, "*Under the Spell of the Gauge Principle*", World Scientific, (1994).
- [74] N. F. Svaiter, Physica **345A**, 517 (2005).
- [75] J. R. Klauder, Acta Phys. Austr. **41**, 237 (1975).
- [76] J. S. Dowker e R. Critchley, Phys. Rev. **D13**, 3224 (1976).
- [77] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **55**, 149 (1977).
- [78] R. T. Seeley, Am. Math. Proc. Symp. Pure Math. **10**, 288 (1967).
- [79] A. Voros, Comm. Math. Phys. **110**, 439 (1987).
- [80] R. B. Rodrigues e N. F. Svaiter, Physica **A328**, 466 (2003).
- [81] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957).
- [82] P. Martin e J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [83] N. F. Svaiter e B. F. Svaiter, J. Phys. **A25**, 979 (1992).
- [84] L. H. Ford e N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D54**, 2640 (1996).
- [85] L. H. Ford, Phys. Rev. **21**, 933 (1980).
- [86] L. H. Ford e N. F. Svaiter, Phys. Rev. **51**, 6981 (1995).
- [87] E. Elizalde e A. Romeo, J. Math. Phys. **30**, 1133 (1989).
- [88] J. G. Moss, Class. Quant. Grav **6**, 759 (1989).

- [89] S. K. Blau, M. Visser e A. Wipf, Nucl. Phys. **B310**, 163 (1988).
- [90] J. I. Kapusta, “*Finite-temperature Field Theory*”, Cambridge University Press (1989).
- [91] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, “*Tables of Integrals, Series and Products*”, Academic Press Inc., New York (1980).
- [92] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, “*Integrals and Series*”, Vol. 1 e 2, Gordon e Breach Science Publishers (1986).
- [93] J. Ambjorn e S. Wolfram, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).
- [94] L.H. Ford, Phys. Rev. **D21**, 933 (1980).
- [95] K. Kirsten, J. Math. Phys. **32**, 3008 (1991).
- [96] L. H. Ford e N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D51**, 6981 (1995).
- [97] J. R. Rugiero, A. H. Zimmerman e A. Vilani, Rev. Bras. Fis. **7**, 663 (1977).
- [98] B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D47**, 4581 (1993).
- [99] B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **35**, 1840 (1994).
- [100] I. P. Neupane e N. Dadhich, “*Entropy Bound and Causality Violation in Higher Curvature Gravity*”, arXiv:0808.1919 (2008).
- [101] M. Aparicio Alcalde, G. Menezes e N. F. Svaiter, em preparo.
- [102] G. 't Hooft, “*Quantum gravity as a dissipative deterministic system*”, gr-qc/9903084 (1999).

- [103] G. 't Hooft, “*Determinism and dissipation in quantum gravity*”, hep-th/0003005 (2000).
- [104] G. 't Hooft, “*Determinism in free bosons*”, hep-th/0104080 (2001).
- [105] G. 't Hooft, “*How does God play dice? (Pre-)determinism at the Planck scale*”, hep-th/0104219 (2002).
- [106] G. 't Hooft, “*Quantum mechanics and determinism*”, hep-th/0105105 (2003).
- [107] S. S. Gubser, I. R. Klebanov e A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B428**, 105 (1998).
- [108] J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).
- [109] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).
- [110] G. Parisi e Y. S. Wu, Sci. Cin. **24**, 483 (1981).
- [111] J. D. Breit, S. Gupta e A. Zaks, Nucl. Phys. **B 233** (1984) 61.
- [112] J. Alfaro, Nucl. Phys. **B 253** (1985) 464.
- [113] Z. Bern, Nucl. Phys. **B 251** (1985) 633.
- [114] G. Menezes e N. F. Svaiter, Physica **A374**, 617 (2007).
- [115] G. Menezes e N. F. Svaiter, Jour. of Math. Phys. **47**, 073507 (2006).
- [116] G. Menezes e N. F. Svaiter, J. Phys. **A40**, 2845 (2007).
- [117] T. C. de Aguiar, G. Menezes e N. F. Svaiter, Class. Quantum Grav. **26**, 075003 (2009).

- [118] H. Rumpf, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111** (1993) 63.
- [119] P. Damgaard e H. Heiffel, “*Stochastic Quantization*”, World Scientific (1988).
- [120] M. Namiki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111** (1993) 1.
- [121] B. Sakita, “*Quantum Theory of Many Variable Systems and Fields*”, World Scientific Publishing (1985).
- [122] P. Damgaard e H. Heiffel, Phys. Rep. **152** (1987) 227.
- [123] T. Fukai, H. Nakazato, J. Ohba, K. Okano e Y. Yamanaka, Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 1600.
- [124] P. H. Damgaard e K. Tsokos, Nucl. Phys. **B 235** (1984) 75.
- [125] P. H. Damgaard, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111** (1993) 43.
- [126] R. Iengo e S. Pagnani, Nucl. Phys. **B 300** (1988) 128.
- [127] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B 192** (1981) 259.
- [128] Z. Bern e M. B. Halpern, Phys. Rev. **D 33** (1986) 1184.
- [129] J. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 966.
- [130] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, Phys. Lett. **B 165** (1985) 151.
- [131] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, Nucl. Phys. **B 284** (1987) 1.
- [132] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, Nucl. Phys. **B 284** (1987) 35.
- [133] M. B. Halpern, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111** (1993) 163.

- [134] H. Risken, “*The Fokker-Planck Equation: methods*”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1996).
- [135] R. Kubo, M Toda e N. Hashitsume, “*Statistical Physics*”, Springer Verlag, Heidelberg (1991).
- [136] N. G. van Kampen, “*Stochastic methods in physics and chemistry*”, North Holland Publ., Amsterdam (1981).
- [137] S. Karlin e H. M. Taylor, “*A first course in stochastic processes*”, Academic Press, New York (1975).
- [138] W. Feller, “*Probability theory and its applications*”, John Wiley, New York (1950).
- [139] C. Anteneodo, “*Curso de processos estocásticos*”, V Escola do CBPF (2004).
- [140] Kiyosi Itô e Henry P. Jr. McKean, “*Diffusion Processes and their Sample Paths*”, Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [141] G. Jona-Lasinio e P. K. Mitter, Commun. Math. Phys. **101**, 409 (1985).
- [142] G. Roepstorff, “*Path Integral Approach to Quantum Physics*”, Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [143] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, Il Nuovo Cim. **12B**, 20 (1972).
- [144] L. F. Ashmore, Nuovo Cim. Lett. **9** (1972) 289.
- [145] G. t’Hooft e M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189.
- [146] G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 849.

- [147] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e A. G. Domingues, *Il Nuovo Cim.* **31**, 550 (1964).
- [148] E. Speer, *Jour. Math. Phys.* **9** (1968) 1404.
- [149] B. S. Kay, *Phys. Rev.* **D 20** (1979) 3052.
- [150] B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **32**, 175 (1991).
- [151] H. Huffel e H. Rumpf, *Phys. Lett.* **148B**, 104 (1984).
- [152] E. Gozzi, *Phys. Lett.* **150B**, 119 (1985).
- [153] H. Huffel e P. V. Landshoff, *Nucl. Phys.* **B260**, 545 (1985).
- [154] D. J. Callaway, F. Cooper, J. R. Klauder e H. A. Rose, *Nucl. Phys.* **B262**, 19 (1985).
- [155] G. Parisi, *Phys. Lett.* **B131**, 393 (1983)
- [156] J. R. Klauder e W. P. Peterson, *J. Stat. Phys.* **39**, 53 (1985).
- [157] J. R. Klauder, *Phys. Rev.* **A29**, 2036 (1984).
- [158] J. Ambjorn e S. K. Yang, *Phys. Lett.* **165**, 140 (1985).
- [159] H. Okamoto, K. Okano, L. Schulke e S. Tanaka, *Nucl. Phys.* **B342**, 684 (1989).
- [160] L. L. Salcedo, *Phys. Lett.* **B304**, 125 (1993).
- [161] H. Gausterer, *J. Phys.* **A27**, 1325 (1994).
- [162] H. Gausterer, *Nucl. Phys.* **A642**, 239 (1998).
- [163] C. Pehlevan e G. Guralnik, “*Complex Langevin Equations and Schwinger-Dyson Equations*”, arXiv: 0710.3756 (2007).

- [164] R. Zwanzig, K. S. J. Nordholm e W. C. Mitchell, Phys. Rev. **A5**, 2680 (1972).
- [165] G. Menezes e N. F. Svaiter, Jour. Math. Phys., **49**, 102301, (2008).
- [166] R. F. Fox, J. Math. Phys. **18** (1977) 2331.
- [167] R. F. Fox, J. Stat. Phys. **16**, 259 (1977).
- [168] H. Bateman, “*Tables of Integral Transformations*”, Vol.1, California Institute of Technology (1954).
- [169] E. Floratos e J. Iliopoulos, Nucl. Phys. **B 214** (1983) 392.
- [170] N. F. Svaiter, Jour. Math. Phys. **45** (2004) 4524.
- [171] R. Zwanzig, “*Non Equilibrium Statistical Mechanics*”, Oxford University Press (2001).
- [172] L. Baulieu e B. Grossman, Phys. Lett. **212B**, 351 (1988).
- [173] L. Baulieu, Phys. Lett. **232B**, 479 (1989).
- [174] A. P. Polchronakos e R. Tzani, Phys Lett. **259B**, 291 (1991).
- [175] F. Ferrari e H. Huffel, Phys. Lett. **B261**, 47 (1991).
- [176] Y. S. Wu e C. J. Zhu, Prog. Theor. Phys. Supp. **111**, 373 (1993).
- [177] G. Birkhoff e S. Mac Lane, *A survey of Modern Algebra*, Wiley; New York (1996).
- [178] B. L. van der Waerden, *Algebra, Vol. 1*, Springer-Verlag; New York (1993).
- [179] A. S. Eddington, “*The Mathematical Theory of Relativity*”, Chelsia Publishing Company, New York, (1975).

- [180] S. A. Fulling, "*Scalar Quantum Field Theory in Closed Universe of Constant Curvature*", Ph.D thesis, Princeton University (1972).
- [181] S. A. Fulling, Phys. Rev. **D7**, 2850 (1973).
- [182] D. W. Sciama, P. Candelas e D. Deutsch, Adv. Phys. **30**, 327 (1980).
- [183] W. Rindler, Am. J. Phys. **34**, 1177 (1966).
- [184] W.-H Huang, Phys. Rev. **D46**, 2560 (1992).
- [185] N. G. van Kampen, Jour. Stat. Phys. **44**, 1 (1986).
- [186] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, "*Quantum Fields in Curved space*", Cambridge University Press (1982).
- [187] A. A. Grib, S. G. Mamayev e V. M. Mostepanenko, "*Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*", Friedman Laboratory Publishing, St. Petesburg (1994).
- [188] M. Bander e C. I. Itzykson, Rev. Mod. Phys., **38**, 346 (1966).
- [189] N. D. Birrel, "*Quantum Gravity 2*", editado por C. J. Isham, R. Penrose e D. W. Sciama, Oxford University Press (1981).
- [190] T. S. Bunch, Ann. Phys., **131**, 118 (1981).
- [191] R. Brunetti e K. Fredenhagen, "*Interacting Quantum Fields in Curved Space: renormalizability of  $\varphi^4$* ", gr-qc/9701048.
- [192] M. D. Kruskal. Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).



- [193] R. Wald, "*Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*", University of Chicago Press, Chicago (1994).
- [194] A. Strominger, "*Lectures on Black Holes*", Le Houches, "*Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics e Field Theory*", F. David, P. Ginsparg e J. Zinn-Justin (editors), Elsevier Science B.V. (1994).
- [195] R. Brout, S. Massar, R. Parentani e Ph. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).
- [196] L.H. Ford, "*Quantum Field Theory in Curved Spacetime*", gr-qc/9707062 (1997).
- [197] T. Padmanabhan, "*Gravity e the Thermodynamic of Horizon*", gr-qc/0311036 (2003).
- [198] S. M. Christensen e M. J. Duff, Nucl. Phys. **B146**, 1178 (1978).
- [199] P. Candelas e D.J. Raine, J. Math. Phys. **17**, 2101 (1976).
- [200] G. W. Unruh, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976).
- [201] S. A. Fulling e S. N. M. Ruijsenaars, Phys. Rep. **152**, 135 (1987).
- [202] C. A. D. Zarro, Dissertação de Mestrado, "*Teoria Quântica de Campos na Presença de Horizonte de Eventos*", Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF (2006).
- [203] K. Symanzik, Euclidean Quantum Field Theory in "*Local Quantum Theory*", Academic Press, New York (1969).
- [204] C. Itzykson e J. M. Drouffe, "*Statistical Field Theory*", Cambridge University Press (1989).
- [205] K. Osterwalder e R. Schraeder, Comm. Math. Phys. **31**, 83 (1973).

- [206] K. Osterwalder e R. Schraeder, *Comm. Math. Phys.* **42**, 281 (1975).
- [207] G. W. Gibbons e S. W. Hawking, *“Euclidean Quantum Gravity”*, World Scientific (1993).
- [208] R. Figari, R. Hoegh-Krohn e C. R. Nappi, *Comm. Math. Phys.* **44** (1975).
- [209] J. Bros, H. Epstein e U. Moschella, *Comm. Math. Phys.* **196** (1998).
- [210] N. A. Chernikov e E. A. Tagirov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **9A**, 109 (1968).
- [211] E. A. Tagirov, *Ann. Phys.*, **76**, 561 (1973).
- [212] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B256**, 727 (1985).
- [213] G. 't Hooft, *Acta Phys. Pol.* **B19**, 187 (1988).
- [214] V. Mukhanov, *“Physical Foundations of Cosmology”*, Cambridge University Press (2005).
- [215] E. Witten, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 21 (2000).
- [216] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*, Dover; New York (1972).