

Dissertação de Mestrado

PONTOS TRICRÍTICOS EM MODELOS MAGNÉTICOS  
NA PRESENÇA DE CAMPOS ALEATÓRIOS COM  
DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 2007

-----

-

-----

Dissertação de Mestrado submetida ao Centro Brasileiro  
de Pesquisas Físicas, sob orientação do  
Professor **Doutor Fernando Dantas Nobre**,  
para a obtenção do título de  
Mestre em Física por **Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino**.

2007

# Agradecimentos

A Deus;

Ao meu orientador Fernando Dantas Nobre, pela paciência e disponibilidade em sempre ajudar, e por tudo o que me ensinou e que me fez ganhar grande gosto pela área da Física Estatística;

Ao professor Evaldo Curado, pelas valiosas discussões e pelas sempre boas idéias;

Aos meus pais Eduardo e Vânia e às minhas irmãs Yara e Melina, que sempre me apoiaram e torceram por mim;

Aos meus tios Carlos e Nara e à minha prima Rachel, que se tornaram a minha família nesse período em que eu permaneci no Rio de Janeiro;

À minha namorada Rachel;

Aos componentes do Grupo de Física Estatística do CBPF: Constantino Tsallis, Octavio, Luis Moyano, Jeferson, Nemésio, Veit, *Mineiro* e em especial ao amigo Diogo (*Doxp*) e ao *gajo* Sílvio Queirós. Também agradeço ao professor Welles Morgado, da PUC-Rio;

Aos amigos que fiz na pós graduação do CBPF, em especial Carlos Zarro, Felipe *Jesus*, Rafael Perez, Gabriel Menezes, Marcela, Gabriel Guérrer, Andrezinho, Ana Graice, Jandira, Fernando (*Boiúna*), Rafael Bernardi, Tiago Siman, Rafael (*Planeta*), Rômulo, André Gavini, Érico (*Hélio*) e Fabrício (*Evangelito*);

Aos peruanos Victor, Martin, Virgínia e Habib, aos colombianos Carlos Ospina, Bonilla (*Pirata*) e Zambrano (*Vampirinho*) e ao venezuelano Alexis, pela oportunidade de aprender um

pouco de Espanhol;

À Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), por terem me permitido cursar disciplinas nos seus Departamentos de Física;

Aos professores Ivan Oliveira, Roberto Sarthour, Lígia Rodrigues e Nelson Pinto, com os quais eu cursei disciplinas no CBPF, e em especial ao professor José d'Albuquerque, da UFRJ, com quem eu cursei a melhor disciplina do mestrado;

Aos funcionários do CBPF, particularmente Almério, Luzia, Beth, Regininha e Francisco;

Aos professores do departamento de Física da Universidade Federal do Ceará (UFC), especialmente: Carlos Alberto, Ramos, Murilo, Diehl, Newton Theóphilo, Júlio Auto, Josué e Renan, por tudo o que aprendi com eles durante os anos de graduação;

Aos colegas da época da graduação na UFC, que se tornaram grandes amigos: Paschoal, Teresa, Apiano, César *Soft*, Éder, George e Sérgio, entre muitos outros;

Ao ex-professor e hoje em dia grande amigo Lenilson Coutinho, com quem pude trocar muitas idéias desde o início da minha graduação;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro durante esses meses de estudo;

A todos os outros que colaboraram para a minha formação e para a realização desse trabalho, e que porventura eu tenha esquecido de mencionar aqui.

## **Resumo**

Neste trabalho estudamos alguns sistemas, essencialmente um ferromagneto e um modelo de vidro de spins, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição de probabilidades do tipo gaussiana dupla. Esta distribuição reproduz, em limites adequados, as distribuições bimodal e gaussiana simples. Os sistemas são considerados no limite de interações de alcance infinito, para o qual a teoria do campo médio é considerada exata. Os modelos são estudados pelo método das réplicas, e a estabilidade da solução com simetria de réplicas é analisada. Os efeitos da aleatoriedade no campo magnético sobre os diagramas de fases destes modelos são investigados, e em algumas situações, verificamos a existência de pontos tricríticos. Alguns de nossos resultados são comparados com verificações experimentais existentes na literatura.

## **Abstract**

In this work we study some systems, essentially a ferromagnet and a spin glass model, in the presence of random magnetic fields following a double-gaussian probability distribution. This kind of distribution recovers, in appropriate limits, the bimodal and the gaussian distributions. The systems are considered in the infinite-range-interaction limit, for which the mean field theory is exact. The models are investigated by means of the replica method, and the stability of the replica-symmetric solution is analyzed. The effects of the randomness in the magnetic fields in the phase diagrams are investigated, and in some situations, we verified the existence of tricritical points. Some of our results are compared with experimental measurements available in the literature.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1	Método das Réplicas . . . . .	9
2.2	Ferromagneto de Ising com distribuição gaussiana . . . . .	10
2.3	Ferromagneto de Ising com distribuição bimodal . . . . .	14
2.4	Modelo de Sherrington-Kirkpatrick . . . . .	17
2.5	A linha de Almeida-Thouless . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Efeitos de Campos Aleatórios de uma Distribuição do Tipo Gaussiana Dupla</b>	<b>26</b>
3.1	Ferromagneto de Ising . . . . .	26
3.2	Vidro de Spins de Ising . . . . .	33
3.2.1	A Solução com Simetria de Réplicas . . . . .	35
3.2.2	Diagramas de Fases . . . . .	37
3.2.3	Instabilidade de Almeida-Thouless para $J_o = 0$ . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Análise da Estabilidade da Solução com Simetria de Réplicas</b>	<b>64</b>
A.1	Análise da Estabilidade . . . . .	64
A.2	Expansão para Baixas Temperaturas . . . . .	72
<b>B</b>	<b>Expansões em Séries de Potências para a Magnetização</b>	<b>74</b>
B.1	Ferromagneto de Ising . . . . .	74
B.2	Vidro de Spins de Ising . . . . .	77

<b>C</b>	<b>Expansões em Baixas Temperaturas</b>	<b>84</b>
C.1	Ferromagneto de Ising . . . . .	84
C.2	Vidro de Spins de Ising . . . . .	91



# Capítulo 1

## Introdução

A área dos sistemas magnéticos desordenados continua sendo uma das mais ativas da física. Com a melhoria dos recursos computacionais e experimentais, pôde-se comprovar diversas abordagens teóricas, até então consideradas como propostas de modelagem, e este fato tornou esta área ainda mais interessante de ser estudada.

Diversos temas de investigação fazem parte desta linha de pesquisa, dos quais podemos destacar os estudos de *efeitos de campos aleatórios em sistemas ferromagnéticos* e os chamados *vidros de spins* [1]. Os modelos de ferromagnetos e antiferromagnetos em campos aleatórios começaram a ser estudados em 1975, com o trabalho de Imry e Ma [2]. Conhecidos na literatura como modelos de Ising na presença de um campo aleatório, ou em inglês, “*Random Field Ising Models*” (RFIM’s), esses tipos de sistema exibem características físicas interessantes, como fronteiras de transição de primeira ordem nos diagramas de fases e pontos tricríticos (pontos onde fronteiras de transição contínuas e de primeira ordem se encontram), entre outras.

Os RFIM’s têm sido assunto de diversas controvérsias nos últimos anos, das quais desta-

caremos duas delas. A primeira refere-se à dimensão crítica inferior  $d_l$ , abaixo da qual não existe uma transição para uma fase ferromagnética. As investigações mais recentes sugerem que  $d_l = 2$  para o RFIM [2, 3, 4].

Outro ponto de grande debate diz respeito à ordem da transição de fases para baixas temperaturas e à existência de pontos tricríticos. Aharony [5] sugeriu que, com a aproximação de campo médio, o RFIM apresenta uma transição de primeira ordem para baixas temperaturas se a distribuição de probabilidades para o campo magnético for simétrica e apresentar um mínimo para campo nulo. Caso contrário, ou seja, caso exista um máximo na distribuição simétrica para campo nulo, a transição seria contínua. Verificou-se então que, para uma distribuição gaussiana para os campos, não existe ponto tricrítico no diagrama de fases do RFIM, mas que o mesmo surge no caso de uma distribuição bimodal simétrica, já que esta apresenta um mínimo para campo nulo, ao contrário da gaussiana, que apresenta um máximo. Andelman [6] estendeu o critério de Aharony, argumentando que, para uma distribuição de campos geral simétrica com um máximo para campo nulo, a transição de fases em temperatura nula poderia não ser contínua, caso a distribuição satisfizesse algumas condições adicionais. Trabalhos mais recentes de outros autores [7, 8] mostraram que, nesse caso (distribuição simétrica em campo nulo), a transição de fases poderia ser de primeira ordem, caso as derivadas superiores da distribuição satisfizessem algumas desigualdades.

Essas duas questões, entre outras, até hoje são ainda alvos de debates intensos, para modelos mais realísticos, caracterizados por interações de curto alcance. Estas controvérsias, aliadas

aos trabalhos de Fishman e Aharony [9] e Cardy [10], que demonstraram que antiferromagnetos diluídos, na presença de um campo magnético uniforme, poderiam fornecer realizações experimentais dos RFIM's [11], produziram um grande interesse nessa linha de pesquisa.

Por outro lado, temos os vidros de spins, que são sistemas magnéticos nos quais as interações entre os momentos magnéticos estão em competição umas com as outras, devido à desordem estrutural. Estes sistemas podem então exibir uma transição para um novo estado, o chamado *estado congelado*, ou estado vidro de spins, apresentando um tipo de ordem, diferente dos tradicionais, como por exemplo, ferromagnético ou antiferromagnético. Neste estado, os spins encontram-se preferencialmente alinhados em direções aleatórias.

Existem dois ingredientes importantes na geração de um estado tipo vidro de spins em um dado sistema: frustração e desordem. A desordem provoca uma perda da invariância translacional existente nos sistemas cristalinos, enquanto que a frustração significa contradição entre interações, resultando na inexistência de uma configuração de spins unicamente favorecida por todas as interações. As frustrações implicam em diferentes configurações, todas com a mesma energia, conduzindo a um estado fundamental da fase vidro de spins altamente degenerado, além da existência de inúmeros estados metaestáveis.

Nas ligas metálicas do tipo  $AuFe$  e  $CuMn$  (materiais normalmente conhecidos como vidros de spins metálicos), os átomos magnéticos estão bastante diluídos, ocupando posições aleatórias na rede cristalina da matriz não magnética. Mesmo assim, tais átomos são suficientes para que existam interações indiretas entre eles, mediadas pelos elétrons de condução dos íons

não-magnéticos. Esta interação de troca indireta é conhecida como interação RKKY (Ruderman e Kittel [12], Kasuya [13], Yosida [14]), e apresenta um comportamento oscilatório com a distância  $r_{ij}$  entre os spins situados nos sítios  $i$  e  $j$ , decaindo com esta distância. Interações positivas entre os pares de spins favorecem alinhamentos paralelos, enquanto que acoplamentos negativos favorecem alinhamentos antiparalelos. Como consequência da competição entre tais interações, o estado de baixas temperaturas é caracterizado por um congelamento das variáveis de spin em direções aleatórias, gerando então o ordenamento vidro de spins.

Fenômenos característicos observados em sistemas do tipo vidros de spins, como o pico na susceptibilidade AC (para campos fracos), primeiramente relatados por Cannella e Mydosh, em 1972 [15], são características universais: o pico ocorre tanto na liga metálica diluída  $CuMn$  com 0,9% de Mn, como nos isolantes concentrados  $Eu_xSr_{1-x}S$ , com a concentração  $x$  no intervalo  $0.1 < x < 0.4$ . Esse pico surge a uma dada temperatura  $T_f$ , onde  $T_f$  representaria, supostamente, uma temperatura crítica, sugerindo a ocorrência de uma transição de fases. Entretanto, verificou-se que  $T_f$  se movia com a frequência do campo  $\omega$ , de tal forma que  $T_f \rightarrow 0$ , quando  $\omega \rightarrow 0$ . Trabalhos experimentais subsequentes revelaram anomalias em outras propriedades físicas, com alguns fenômenos não comuns nas transições de fase tradicionais. Como exemplo, podemos citar um máximo arredondado no calor específico, para temperaturas ligeiramente acima de  $T_f$  [16] e o fenômeno de remanência para  $T < T_f$ , onde a susceptibilidade de uma dada amostra, medida na presença de um campo magnético  $H$ , apresenta resultados diferentes, dependendo se a mesma é resfriada na presença do campo (“*field-cooled*”) ou na ausência do

campo (“*zero field-cooled*”) [17].

A natureza do tipo de ordem vidro de spins, assim como sua apropriada descrição teórica, constituem-se temas de grandes debates. Além disso, uma questão bastante comum está relacionada à possível ocorrência desta transição em diversos sistemas, no sentido de tratar-se de um novo tipo de transição de fases, ou de uma incapacidade do sistema em estabelecer o equilíbrio térmico durante o tempo de observação da experiência. O problema do ordenamento nos vidros de spins pertence à física dos materiais de estrutura desordenada, e não aparece em sistemas convencionais, como os cristais ideais. Conseqüentemente, uma série de questões adicionais aparece imediatamente:

- Qual é o parâmetro de ordem adequado para descrever um ordenamento do tipo vidro de spins?
- Como implementar os métodos da mecânica estatística para descrever apropriadamente um sistema com um grande número de variáveis, caracterizadas por desordem e frustração, que descrevem a desordem estrutural da fase congelada?
- Considerando que alguns tempos de relaxação em medidas experimentais podem exceder consideravelmente as escalas normais de tempos de observação, a questão da ergodicidade pode tornar-se um sério problema. Qual é a maneira adequada de empregar a mecânica estatística de equilíbrio para tratar um sistema caracterizado por um grande número de estados metaestáveis?

O congelamento dos momentos magnéticos, a serem representados aqui, por simplicidade, em termos de variáveis de spins escalares  $\{S_i\}$ , nos sítios  $i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) de uma rede, nos dá que

$$\langle S_i \rangle_t \neq 0, \quad (1.1)$$

para uma dada temperatura  $T < T_c$ . A média  $\langle \dots \rangle_t$  representa uma média temporal sobre um tempo de observação  $t_{obs}$ , que é muito maior que qualquer tempo microscópico. Supondo uma transição de fases genuína, em um sistema ergódico, podemos substituir as médias temporais na eq. (1.1) por médias térmicas, e definir os parâmetros de ordem magnetização  $m$  e de vidro de spins  $q$  [18],

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\langle S_i \rangle_T]_{av}, \quad (1.2)$$

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\langle S_i \rangle_T^2]_{av}, \quad (1.3)$$

respectivamente. Nas equações acima,  $\langle \dots \rangle_T$  representa uma média térmica e  $[\dots]_{av}$  uma média sobre a desordem, por exemplo, sobre as interações aleatórias. Em uma fase paramagnética, temos  $m = q = 0$  (uma vez que nesta fase  $\langle S_i \rangle_T = 0$ ) e em uma fase ferromagnética,  $m \neq 0$ ,  $q \neq 0$  (uma vez que nesta fase  $\langle S_i \rangle_T \neq 0$ ), enquanto que na fase vidro de spins, temos  $m = 0$  e  $q \neq 0$ .

Em geral, as variáveis aleatórias podem flutuar com o tempo. É então necessário comparar o tempo típico destas flutuações,  $t_{flut}$ , com o tempo da observação experimental,  $t_{obs}$ . Se  $t_{obs} \gg t_{flut}$ , as variáveis aleatórias atingem o equilíbrio térmico e suas médias tornam-se similares às

médias térmicas da mecânica estatística. Neste caso, a energia livre do sistema pode ser escrita como [19, 20]

$$F = -kT \ln[Z\{x\}]_{av}, \quad (1.4)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $Z\{x\}$  é a função de partição do sistema para uma dada amostragem de variáveis aleatórias  $\{x\}$ . Essas médias são chamadas de *médias recozidas*. Nos vidros de spins, por outro lado, devemos considerar as *médias temperadas*, já que nestes casos  $t_{flut} \gg t_{obs}$ . Neste caso, costuma-se trabalhar com a energia livre [19, 20],

$$F = [F\{x\}]_{av} = -kT[\ln Z\{x\}]_{av}. \quad (1.5)$$

O fato de aplicarmos a média sobre a desordem  $[\dots]_{av}$  na energia livre ou, equivalentemente, sobre  $\ln Z$ , ao invés de sobre  $Z$ , no sistema temperado, representa a maior dificuldade em se tratar a mecânica estatística dos sistemas magnéticos aleatórios. Uma das técnicas de maior sucesso para isto consiste no *método das réplicas* [19, 20, 21, 22, 23], que será discutido no Capítulo 2 desta dissertação.

Até então, discutimos separadamente os sistemas ferromagnéticos na presença de campos aleatórios e os vidros de spins. Porém, existem diversos sistemas na natureza, como por exemplo, os antiferromagnetos diluídos  $Fe_xZn_{1-x}F_2$  [24, 25] e  $Fe_xMg_{1-x}Cl_2$  [26, 27, 28], assim como o composto antiferromagnético misto  $Fe_xMn_{1-x}TiO_3$  [29, 30], que apresentam, dependendo da concentração  $x$ , comportamento típico de campo aleatório, vidro de spins, ou uma combinação de ambos. Consequentemente, o estudo de modelos na presença de campos aleatórios, considerando-se interações do tipo vidro de spins ou não, torna-se muito importante.

Nesta dissertação, investigamos os efeitos de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla simétrica, em um sistema com interações entre pares de spins caracterizadas por um favorecimento ferromagnético, assim como no vidro de spins de Ising, ambos no limite de interações de alcance infinito, no qual a aproximação de campo médio é considerada exata. No Capítulo 2, realizamos uma breve revisão do ferromagneto de Ising, com interações de alcance infinito, na presença de campos magnéticos aleatórios (distribuições gaussianas [31] e bimodal [5]). Além disto, neste capítulo, revisamos a teoria do modelo de vidro de spins de Ising com interações de alcance infinito, conhecido como modelo de Sherrington-Kirkpatrick (SK) [32]. No Capítulo 3, resolvemos os modelos propostos como tema desta dissertação (ferromagneto de Ising e vidro de spins de Ising, ambos na presença de um campo magnético obedecendo uma distribuição gaussiana dupla simétrica), obtemos os respectivos diagramas de fases e estudamos a estabilidade da solução no caso da presença da fase vidro de spins. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos as nossas conclusões.



# Capítulo 2

## Modelos Básicos

Neste capítulo, serão introduzidos os modelos que utilizaremos como base para o estudo que será realizado no Capítulo 3: o ferromagneto de Ising na presença de campos aleatórios obedecendo às distribuições gaussiana e bimodal, assim como o modelo de Sherrington-Kirkpatrick (SK). Apresentaremos o chamado método das réplicas, que será utilizado para resolver esses dois modelos, como também o modelo proposto no Capítulo 3 desta dissertação.

### 2.1 Método das Réplicas

No capítulo anterior, vimos que um tratamento adequado aos sistemas com desordem *temperada* envolve o cálculo de médias da energia livre de Helmholtz,

$$f = [f\{x\}]_{av} = -\frac{kT}{N}[\ln Z\{x\}]_{av}. \quad (2.1)$$

Entretanto, a média na eq. (2.1) não pode ser efetuada diretamente, já que as variáveis aleatórias estão dentro do logaritmo. Nos casos de sistemas pouco desordenados, podemos separar o Hamiltoniano do sistema  $\mathcal{H}\{x\}$  numa parte não-aleatória  $\mathcal{H}_o$  e numa perturbação

aleatória  $\delta\mathcal{H}\{x\}$ , e em seguida expandi-lo em potências de  $\delta\mathcal{H}\{x\}$ , para então efetuar a média termo a termo [33]. Vidros de spins, porém, são sistemas com alta desordem e aleatoriedade, e em muitos dos modelos,  $\mathcal{H}_o$ , a parte não-aleatória, é nula. Assim, a técnica descrita não é aplicável.

Assim, precisamos de uma teoria não-perturbativa para calcular a média em (2.1). Essa é a idéia por trás do chamado método das réplicas, que é baseado na seguinte relação exata

$$[\ln Z\{x\}]_{av} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{([Z^n\{x\}]_{av} - 1)}{n}, \quad (2.2)$$

onde usamos o fato de que  $Z^n \approx \exp(n \ln Z) = 1 + n \ln Z$ , quando  $n \rightarrow 0$ . Para  $n$  inteiro positivo, podemos expressar  $Z^n$  em termos de  $n$  réplicas idênticas e independentes do sistema,

$$Z^n\{x\} = \prod_{\alpha=1}^n Z_{\alpha}\{x\} = \prod_{\alpha=1}^n \exp[-\beta\mathcal{H}\{x, S_i^{\alpha}\}] = \exp\left[-\sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathcal{H}\{x, S_i^{\alpha}\}}{kT}\right], \quad (2.3)$$

em que  $Z_{\alpha}$  é a função de partição da alfa-ésima réplica e  $\beta = 1/kT$ . Para  $n$  inteiro positivo, é simples calcular a média sobre a desordem, e podemos expressar o resultado formalmente em termos de um hamiltoniano efetivo  $\overline{\mathcal{H}}(n)$ ,

$$[Z^n\{x\}]_{av} = \text{Tr} \exp\left[-\frac{\overline{\mathcal{H}}(n)}{kT}\right], \quad (2.4)$$

em que  $\overline{\mathcal{H}}$  é definido no espaço das variáveis  $\{S_i^{\alpha}\}$  das  $n$  réplicas do sistema, com  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ .

## 2.2 Ferromagneto de Ising com distribuição gaussiana

Os efeitos de campos aleatórios no comportamento crítico próximo a transições de fases ferromagnéticas ou antiferromagnéticas são muito interessantes. Para discutir esses efeitos,

considere um sistema com  $N$  spins  $\{S_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), com o Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N} \sum_{(i,j)} S_i S_j - \sum_i H_i S_i, \quad (2.5)$$

onde  $J$  representa o acoplamento de troca entre pares de spins, sendo o mesmo para todos eles,

$\sum_{(i,j)}$  denota uma soma sobre todos os pares distintos de spins e os campos magnéticos  $H_i$

estão distribuídos de acordo com a distribuição

$$P(H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{H_i^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (2.6)$$

que é a mesma para cada sítio. O modelo acima é conhecido como um modelo com interações de alcance infinito, para o qual sabe-se que a aproximação de campo médio é exata [34].

Vamos primeiro calcular a energia livre utilizando o método das réplicas, discutido na seção

2.1. A expressão para  $[Z^n]_{av}$  toma a forma

$$[Z^n]_{av} = \sum_{S_i^\alpha = \pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i dH_i P(H_i) \exp\left\{\beta \frac{J}{N} \sum_{(i,j)} \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha + \beta \sum_i H_i \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha\right\}, \quad (2.7)$$

em que  $\alpha = 1, \dots, n$  denota uma dada réplica e  $\beta = 1/kT$ . Utilizando a distribuição para os campos dada pela eq. (2.6), ficamos com

$$[Z^n]_{av} = \sum_{S_i^\alpha = \pm 1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \exp\left[\frac{(\beta\sigma)^2}{2} \sum_i \left(\sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha\right)^2 + \frac{\beta J}{N} \sum_{(i,j)} \sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha\right]. \quad (2.8)$$

Utilizaremos agora a identidade de Hubbard-Stratonovitch,

$$\exp\left(\frac{\lambda a^2}{2}\right) = \left[\frac{\lambda}{2\pi}\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-\frac{\lambda x^2}{2} + a\lambda x\right], \quad (2.9)$$

assim como a relação

$$\text{Tr exp} \left[ \sum_i g(S_i^\alpha) \right] = \exp[N \ln \text{Tr exp}(g(S^\alpha))], \quad (2.10)$$

para encontrar

$$\begin{aligned} [Z^n]_{av} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\alpha} \left( \frac{N\beta J}{2\pi} \right)^{1/2} dm^\alpha \exp \left[ -\frac{N\beta J}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 \right] \\ &\times \exp \left[ N \ln \text{Tr exp} \left( \beta J \sum_{\alpha} m^\alpha S^\alpha + \beta \sigma \left( \sum_{\alpha} S^\alpha \right)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

No limite termodinâmico, estas integrações são resolvidas pelo *método do ponto de sela*, que, junto com a relações (2.1) e (2.2), nos dão a expressão da energia livre por spin,

$$f = -kT \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\beta J}{2n} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \frac{1}{n} \ln \text{Tr exp } H_{\text{eff}} \right\}, \quad (2.11)$$

onde

$$H_{\text{eff}} = \beta J \sum_{\alpha} m^\alpha S^\alpha + \beta \sigma \left( \sum_{\alpha} S^\alpha \right)^2. \quad (2.12)$$

Finalmente, escolhemos como solução para a magnetização a chamada solução de simetria de réplicas, ou seja,

$$m^\alpha = m, \quad \forall \alpha, \quad (2.13)$$

de forma que agora podemos efetuar o limite  $n \rightarrow 0$  e obter, finalmente, a expressão para a energia livre do sistema,

$$f = \frac{J}{2} m^2 - \frac{1}{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \psi), \quad (2.14)$$

onde  $\psi = \beta Jm + \beta \sigma z$ , e utilizamos novamente a identidade de Hubbard-Stratonovitch da eq. (2.9).

O parâmetro magnetização é obtido a partir do mínimo da energia livre com relação a  $m$ , ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \psi. \quad (2.15)$$

A solução  $m = 0$  apresentará a menor energia livre para temperaturas e campos aleatórios suficientemente grandes. Quando a temperatura diminui, devemos encontrar a solução adicional  $m \neq 0$ , com menor energia livre. Se a transição é contínua, podemos expandir a magnetização (2.15) em potências de  $m$ , em torno de  $m = 0$  [5],

$$m = Am + Bm^3 + O(m^5), \quad (2.16)$$

em que

$$A = \beta J \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^2(\beta \sigma z) \quad (2.17)$$

$$B = -\frac{(\beta J)^3}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} [1 - 4 \tanh^2(\beta \sigma z) + 3 \tanh^4(\beta \sigma z)] \quad (2.18)$$

Uma transição de fases contínua é encontrada fazendo-se  $A = 1$ , desde que  $B < 0$ . No caso oposto,  $B > 0$ , temos uma transição de primeira ordem. Sendo assim, no caso limite,  $B = 0$ , onde as fronteiras contínua e de primeira ordem se encontram, temos o chamado *ponto tricrítico*.

A condição  $A = 1$  nos dá a equação da fronteira crítica,

$$\frac{kT}{J} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^2(\beta \sigma z). \quad (2.19)$$

Podemos reescrever o coeficiente B como

$$B = -\frac{(\beta J)^3}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dz e^{-z^2/2} [1 - 4 \tanh^2(\beta \sigma z) + 3 \tanh^4(\beta \sigma z)]. \quad (2.20)$$

Na equação (2.20), como  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $z > 0$ , pode-se verificar que o coeficiente B é sempre negativo ao longo de toda a fronteira crítica. Assim, temos sempre  $A = 1$  e  $B < 0$ , o que caracteriza uma transição contínua, e não temos então transição de primeira ordem, nem ponto tricrítico, para o ferromagneto de Ising na presença de um campo magnético aleatório gaussiano.

O diagrama de fases desse modelo é então mostrado na figura 2.1.

## 2.3 Ferromagneto de Ising com distribuição bimodal

O Hamiltoniano nesse caso é o mesmo da seção 2.2, ou seja,

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N} \sum_{(i,j)} S_i S_j - \sum_i H_i S_i, \quad (2.21)$$

mas agora a distribuição de probabilidades para os campos é dada pela soma de duas funções delta de Dirac, ou seja,

$$P(H_i) = \frac{1}{2} \delta(H_i - H_o) + \frac{1}{2} \delta(H_i + H_o), \quad (2.22)$$

que é a mesma para cada sítio. Novamente, consideraremos interações de alcance infinito, para o qual o tratamento de campo médio é exato [34].

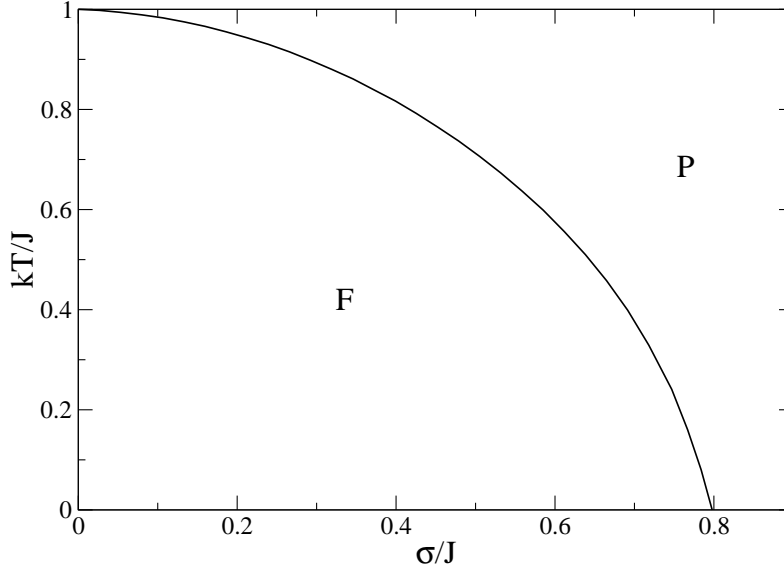


Figura 2.1: Diagrama de fases para o modelo de Ising ferromagnético sob a ação de um campo magnético aleatório obedecendo uma distribuição gaussiana, no plano temperatura versus largura da distribuição (em unidades de  $J$ ). As fases são: Paramagnética (P) e Ferromagnética (F). A fronteira de transição entre as fases é totalmente contínua.

Seguindo o mesmo procedimento da seção 2.2, obtemos a energia livre do sistema,

$$f = -kT \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\beta J}{2n} \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 + \frac{1}{2n} \ln \text{Tr} \exp H_{\text{eff}}^{+} + \frac{1}{2n} \ln \text{Tr} \exp H_{\text{eff}}^{-} \right\} \quad (2.23)$$

onde  $H_{\text{eff}}^{\pm} = \beta J \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} \pm \beta H_o \sum_{\alpha} S^{\alpha}$ .

Escolhemos novamente como solução para a magnetização a solução com simetria de réplicas, ou seja,

$$m^{\alpha} = m \quad , \quad \forall \alpha, \quad (2.24)$$

de forma que agora podemos efetuar o limite  $n \rightarrow 0$  e obter, finalmente, a expressão para a energia livre do sistema,

$$f = \frac{J}{2} m^2 - \frac{1}{2\beta} \ln(2 \cosh \Phi^{+}) - \frac{1}{2\beta} \ln(2 \cosh \Phi^{-}), \quad (2.25)$$

em que  $\Phi^\pm = \beta J m \pm \beta H_o$ .

A magnetização é dada pelo mínimo da energia livre com relação a  $m$ , ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} (\tanh \Phi^+ + \tanh \Phi^-). \quad (2.26)$$

De maneira análoga à seção anterior, a solução  $m = 0$  apresentará a menor energia livre para temperaturas e campos aleatórios suficientemente grandes. Diminuindo a temperatura, devemos encontrar a solução adicional  $m \neq 0$ , com menor energia livre. Se a transição é contínua, repetimos o procedimento da seção 2.2, e expandimos a magnetização, eq. (2.26), em potências de  $m$ , em torno de  $m = 0$ ,

$$m = Am + Bm^3 + O(m^5), \quad (2.27)$$

onde

$$A = \beta J \operatorname{sech}^2(\beta H_o) \quad (2.28)$$

$$B = -\frac{(\beta J)^3}{3} \operatorname{sech}^2(\beta H_o) [1 - 3 \tanh^2(\beta H_o)] \quad (2.29)$$

Para uma transição de fases contínua devemos ter  $A = 1$ , com  $B < 0$ , enquanto que no caso oposto,  $B > 0$ , temos uma transição de primeira ordem.

A condição  $A = 1$  nos dá

$$\beta J \operatorname{sech}^2(\beta H_o) = 1, \quad (2.30)$$

enquanto que, com esse resultado, podemos reescrever o coeficiente B na fronteira crítica como

$$B = -\frac{(\beta J)^2}{3} A [1 - 3 \tanh^2(\beta H_o)] \quad (2.31)$$



Assim,  $B$  é negativo para  $\tanh^2(\beta H_o) < \frac{1}{3}$ , quando temos uma fronteira crítica contínua, e torna-se positivo para  $\tanh^2(\beta H_o) > \frac{1}{3}$ . Para valores de  $\beta H_o$  tais que  $\tanh^2(\beta H_o) > 1/3$ , não podemos mais utilizar a expansão da eq. (2.27) para encontrar a solução não-nula de  $m$ . Porém, a solução numérica da eq. (2.26) nos mostra que, nessa faixa de valores de  $\beta H_o$ , a transição se torna de primeira ordem. As duas linhas mencionadas se encontram no ponto [5]

$$\beta J = \frac{3}{2} \quad (2.32)$$

$$\tanh^2(\beta H_o) = \frac{1}{3}, \quad (2.33)$$

que é o ponto tricrítico desse sistema. O diagrama de fases desse modelo é então mostrado na figura 2.2.

A observação final dessa seção é que a existência de transição de fases de primeira ordem para baixas temperaturas, assim como de pontos tricríticos no RFIM, depende da distribuição de campos utilizada, como vimos nos exemplos dessa seção e da seção anterior.

## 2.4 Modelo de Sherrington-Kirkpatrick

Em 1975, Sherrington e Kirkpatrick propuseram que a teoria de campo médio para vidros de spins poderia ser formulada em termos de um modelo de Edwards-Anderson [18] com interações de alcance infinito, onde cada spin estaria interagindo com os demais spins da rede com a mesma distribuição de probabilidades  $P(J_{ij})$ . Essa é, claramente, uma hipótese baseada no fato de que o modelo de interações de alcance infinito para o ferromagnetismo [34] apresenta

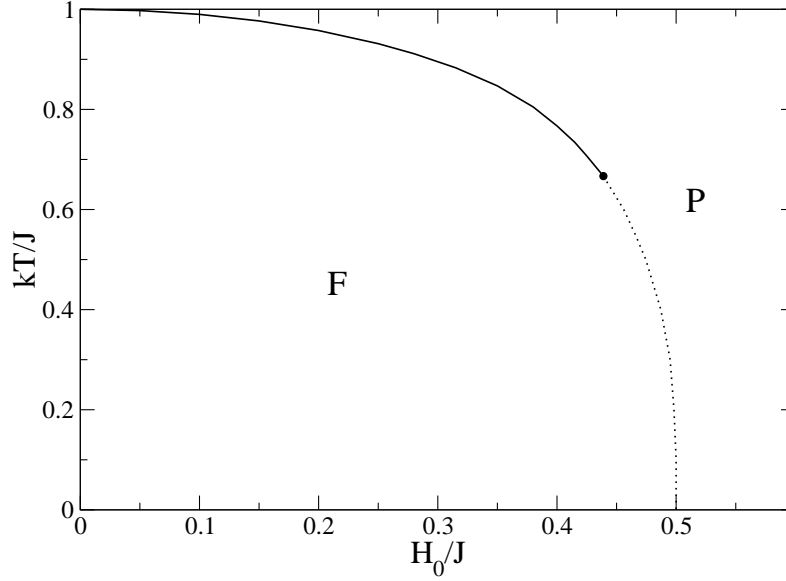


Figura 2.2: Diagrama de fases para o modelo de Ising ferromagnético sob a ação de um campo magnético aleatório obedecendo uma distribuição bimodal, no plano temperatura versus intensidade do campo magnético (em unidades de  $J$ ). As fases são: Paramagnética (P) e Ferromagnética (F). A linha pontilhada representa a fronteira crítica de primeira ordem e a linha contínua representa a fronteira crítica contínua, enquanto o ponto preto é um ponto tricrítico.

uma solução equivalente à obtida através da teoria do campo médio, e então podia-se esperar o mesmo para uma teoria desse tipo para vidros de spins.

O hamiltoniano do modelo SK é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} S_i S_j - H \sum_i S_i, \quad (2.34)$$

onde o campo magnético externo  $H$  atua sobre todos os spins do sistema, a notação  $(i, j)$  significa que a soma é feita sobre todos os pares de spins distintos e  $P(J_{ij})$  é uma distribuição gaussiana para as interações,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{J} \left[ \frac{N}{2\pi} \right]^{1/2} \exp[-N(J_{ij} - J_o/N)^2/2J^2], \quad (2.35)$$

que é a mesma para *todos* os pares de spins, com

$$[J_{ij}]_{av} = J_o/N \quad (2.36)$$

$$[J_{ij}^2]_{av} - [J_{ij}]_{av}^2 = J^2/N. \quad (2.37)$$

Inspirados em Edwards e Anderson, Sherrington e Kirkpatrick estudaram este modelo fazendo o uso do método das réplicas; assim, a expressão para  $[Z^n]_{av}$  toma a forma

$$[Z^n]_{av} = \sum_{S_i^\alpha = \pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{(i,j)} dJ_{ij} P(J_{ij}) \exp \left\{ \beta \sum_{(i,j)} J_{ij} \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha + \beta H \sum_i \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha \right\}, \quad (2.38)$$

onde  $\alpha = 1, \dots, n$  denota um índice de réplica. Utilizando a distribuição para  $J_{ij}$  dada pela eq. (2.35), podemos fazer a integração facilmente, completando os quadrados. Este procedimento nos leva a

$$[Z^n]_{av} = \sum_{S_i^\alpha = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{(i,j)} \left[ \frac{(\beta J)^2}{2N} \sum_{\alpha, \beta} S_i^\alpha S_j^\alpha S_i^\beta S_j^\beta + \frac{\beta J_o}{N} \sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha \right] + \beta H \sum_i \sum_{\alpha} S_i^\alpha \right\} \quad (2.39)$$

onde  $\sum_{\alpha, \beta}$  representa uma soma sobre todos os índices de réplicas  $\alpha$  e  $\beta$ . Extraíndo desta soma os termos com  $\alpha = \beta$ , e desprezando os termos com  $(S_i^\alpha)^2 = 1$  que não contribuirão no limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ , ficamos com

$$[Z^n]_{av} = \exp \left[ \frac{(\beta J)^2 n N}{4} \right] \sum_{S_i^\alpha = \pm 1} \left[ \exp \frac{(\beta J)^2}{2N} \sum_{(\alpha < \beta)} \left( \sum_i S_i^\alpha S_i^\beta \right)^2 + \frac{\beta J_o}{2N} \sum_{\alpha} \left( \sum_i S_i^\alpha \right)^2 + \beta H \sum_i \sum_{\alpha} S_i^\alpha \right]. \quad (2.40)$$

Os termos quadráticos podem ser simplificados utilizando novamente a identidade de Hubbard-Stratonovitch,

$$\exp\left(\frac{\lambda a^2}{2}\right) = \left[\frac{\lambda}{2\pi}\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-\frac{\lambda x^2}{2} + a\lambda x\right]. \quad (2.41)$$

Assim, a eq. (2.40) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} [Z^n]_{av} = & \exp\left[\frac{(\beta J)^2 n N}{4}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{(\alpha < \beta)} \left[\frac{N}{2\pi}\right]^{1/2} \beta J dq^{\alpha\beta} \prod_{\alpha} \left[\frac{N\beta J_o}{2\pi}\right]^{1/2} dm^{\alpha} \\ & \exp\left[-\frac{N(\beta J)^2}{2} \sum_{\alpha < \beta} (q^{\alpha\beta})^2 - \frac{N\beta J_o}{2} \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 + N \ln \text{Tr} \exp H_{\text{eff}}\right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde

$$H_{\text{eff}} = (\beta J)^2 \sum_{(\alpha < \beta)} q^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} + \beta \sum_{\alpha} (J_o m^{\alpha} + H) S^{\alpha}, \quad (2.43)$$

e agora o traço deve ser efetuado sobre as  $n$  réplicas dos spins,  $S^{\alpha}$ .

Se assumimos que a ordem dos limites pode ser trocada, ou seja, o limite  $N \rightarrow \infty$  pode ser aplicado antes do limite  $n \rightarrow 0$ , e as integrais na eq. (2.42) podem ser calculadas pelo *método do ponto de sela*, o que nos dá

$$-\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \frac{(\beta J)^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{n} \sum_{(\alpha, \beta)} (q^{\alpha\beta})^2 \right) + \frac{\beta J_o}{2} \frac{1}{n} \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 + \frac{1}{n} \ln \text{Tr} \exp H_{\text{eff}} \right], \quad (2.44)$$

onde agora a soma  $\sum_{(\alpha, \beta)}$  aplica-se a todos os pares de réplicas, enquanto que  $q^{\alpha\beta}$  e  $m^{\alpha}$  são dados consistentemente pelas condições de ponto de sela,

$$\frac{\partial f}{\partial q^{\alpha\beta}} = \frac{\partial f}{\partial m^{\alpha}} = 0 \quad (2.45)$$

ou ainda,

$$q^{\alpha\beta} = \langle S^\alpha S^\beta \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Tr} S^\alpha S^\beta \exp H_{\text{eff}}}{\text{Tr} \exp H_{\text{eff}}} \quad (2.46)$$

$$m^\alpha = \langle S^\alpha \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Tr} S^\alpha \exp H_{\text{eff}}}{\text{Tr} \exp H_{\text{eff}}} \quad (2.47)$$

Sherrington e Kirkpatrick [32] consideraram

$$m^\alpha = m, \quad \forall \alpha \quad (2.48)$$

$$q^{\alpha\beta} = q, \quad \forall (\alpha, \beta), \quad (2.49)$$

conhecida como *solução com simetria de réplicas*. Assim, com essa escolha, a eq. (2.44) pode ser escrita como

$$-\beta f = \frac{(\beta J)^2}{4}(1-q)^2 - \frac{\beta J_o}{2}m^2 + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln[2 \cosh(\eta(z))], \quad (2.50)$$

onde  $\eta(z) = \beta(Jq^{1/2}z + J_o m + H)$  e  $q$  e  $m$  são dados auto-consistentemente pelas eqs. (2.46)

e (2.47),

$$q = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2[(\eta(z))], \quad (2.51)$$

$$m = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh[(\eta(z))]. \quad (2.52)$$

Vamos discutir as soluções das eqs. (2.50), (2.51) e (2.52) para  $H = 0$ , para podermos construir um diagrama de fases. Expandindo o integrando da eq. (2.50), em torno de  $m = 0$ , para  $q$  pequeno, temos

$$\beta f = \beta f_o + \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{(kT)^2}{J^2} \right] ((\beta J)^2 q)^2 - \frac{((\beta J)^2 q)^3}{3} + \frac{17}{24} ((\beta J)^2 q)^4 + \dots, \quad (2.53)$$

em que  $\beta f_o = -\ln 2 - (\beta J)^2/4$ . A condição de ponto de sela (2.45) nos dá, para a eq. (2.53),

$$(\beta J)^2 q \left\{ 1 - \frac{(kT)^2}{J^2} - 2(\beta J)^2 q \right\} = 0. \quad (2.54)$$

Existe um temperatura crítica  $T_c$  acima da qual só temos a solução  $q = 0$ , que corresponde à fase paramagnética ( $m = q = 0$ ); abaixo de  $T_c$ , existe uma solução para  $q > 0$ , correspondente à fase vidro de spins ( $m = 0, q \neq 0$ ); esta solução pode ser obtida, em ordem mais baixa, a partir da eq. (2.54), ou seja,

$$q = \frac{(kT)^2}{2J^2} \left[ 1 - \frac{(kT)^2}{J^2} \right], \quad (2.55)$$

o que nos dá a fronteira entre as fases paramagnética e vidro de spins, definida pela temperatura crítica

$$T_c = \frac{J}{k}. \quad (2.56)$$

Abaixo desta linha, para campo nulo, temos uma fase vidro de spins caracterizada por uma susceptibilidade magnética  $\chi = (\partial m / \partial H)_{H=0}$ ,

$$\chi(T) = \frac{1 - q}{kT - J_o(1 - q)}. \quad (2.57)$$

Na região acima dessa linha, ainda considerando campo nulo,  $q$  se anula, e então a susceptibilidade da eq. (2.57) se reduz a

$$\chi(T) = \frac{1}{kT - J_o}, \quad (2.58)$$

ou seja, à Lei de Curie-Weiss. Essa susceptibilidade diverge para  $kT \rightarrow J_o$ , caracterizando uma região com ordenamento ferromagnético, com magnetização espontânea e  $q$  finito, ou seja, no

diagrama de fases  $kT/J$  contra  $J_o/J$ , a reta  $kT = J_o$ , para  $J_o > J$ , nos dá a fronteira entre as fases paramagnética e ferromagnética.

A fronteira entre as fases vidro de spins e ferromagnética, ou seja, entre as regiões com  $m = 0$  e  $m \neq 0$  (mas  $q \neq 0$ ), pode ser encontrada a partir da eq. (2.57), fazendo-se seu denominador anular-se, ou seja,

$$kT - J_o(1 - q) = 0 \Rightarrow \frac{kT}{J} = \frac{J_o}{J}(1 - q). \quad (2.59)$$

Esta equação, juntamente com a eq. (2.51) para  $q$ , com  $m = 0$ , nos dá a referida fronteira.

O diagrama de fases do modelo é exibido na figura 2.3.

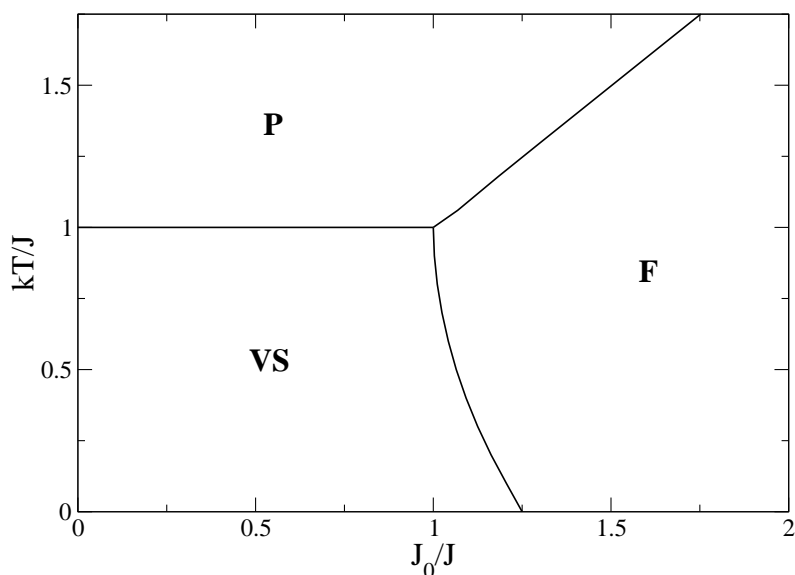


Figura 2.3: Diagrama de fases para o modelo de Sherrington-Kirkpatrick, no plano temperatura versus média das interações (em unidades de J). As fases são: Paramagnética (P), Vidro de Spins (VS) e Ferromagnética (F).

## 2.5 A linha de Almeida-Thouless

Em 1978, de Almeida e Thouless [35] estudaram a estabilidade da solução com simetria de réplicas para o modelo SK. Como consequência dessa análise, em toda a fase vidro de spins, assim como em parte da fase ferromagnética, a solução utilizada por Sherrington e Kirkpatrick é instável. Esta solução é estável apenas para temperaturas tais que (ver Apêndice A)

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \beta (Jq^{1/2}z + J_0 m). \quad (2.60)$$

Esta desigualdade é satisfeita na fase paramagnética, porém violada em toda a região da fase vidro de spins. Na fase ferromagnética, essa desigualdade é satisfeita para altas temperaturas, mas violada para baixas temperaturas. Considerando baixas temperaturas,  $q$  e  $m$  são próximos da unidade, de tal forma que uma expansão para  $T$  pequeno (ver Apêndice A) permite escrever a desigualdade acima como

$$\frac{kT}{J} > \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{J_0^2}{2J^2}\right). \quad (2.61)$$

Levando em conta a linha de Almeida-Thouless [obtida substituindo a desigualdade por uma igualdade na eq. (2.60)], o diagrama de fases do modelo SK é exibido na figura 2.4. Desta forma, surge uma nova região na fase ferromagnética, que foi denominada como fase *ferromagnética mista* (F'), caracterizada por ordenamento ferromagnético e instabilidade na solução por simetria de réplicas.

Como observação final desse capítulo, destacamos que a solução correta para a região instável do diagrama de fases foi encontrada em 1979/1980 por Parisi [36, 37], num proce-



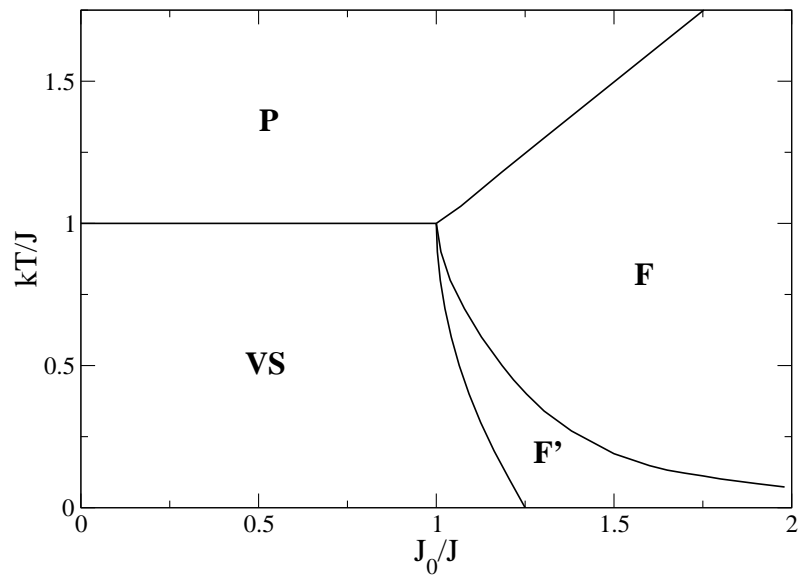


Figura 2.4: Diagrama de fases para o modelo de Sherrington-Kirkpatrick, no plano temperatura versus interação média (em unidades de  $J$ ), levando em conta a linha de Almeida-Thouless. As fases são: Paramagnética (P), Vidro de Spins (VS), Ferromagnética (F) e Ferromagnética mista (F').

dimento que ficou conhecido como *quebra da simetria de réplicas*.

## Capítulo 3

# Efeitos de Campos Aleatórios de uma Distribuição do Tipo Gaussiana Dupla

Após termos apresentado, na introdução, as motivações para estudar sistemas com campos aleatórios e vidros de spins, assim como os modelos básicos desses sistemas no capítulo 2, vamos agora estudar os efeitos de campos aleatórios de uma distribuição formada por duas gaussianas, centradas em  $+H_o$  e  $-H_o$ , com mesma largura  $\sigma$ , em sistemas ferromagnéticos e em vidros de spins.

### 3.1 Ferromagneto de Ising

Vamos considerar um modelo como o estudado na seção 2.2, ou seja, com o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N} \sum_{(i,j)} S_i S_j - \sum_i H_i S_i, \quad (3.1)$$

com a diferença de que, agora, a aleatoriedade no campo é dada pela distribuição

$$P(H_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \left\{ \exp \left[ -\frac{(H_i - H_o)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(H_i + H_o)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (3.2)$$

A distribuição dada pela eq. (3.2) é mostrada nas figuras 3.1 e 3.2, para diversos valores da razão  $H_o/\sigma$ . Podemos notar que esta distribuição pode apresentar dois picos, para  $\sigma < H_o$ , um único pico, para  $\sigma > H_o$  (assim como uma distribuição do tipo gaussiana simples), ou então apresentar o seu mínimo achatado, para  $\sigma = H_o$ . A distribuição pode ainda apresentar uma forma como a mostrada na figura 3.2, que no limite  $\sigma \rightarrow 0$  recupera a distribuição bimodal.

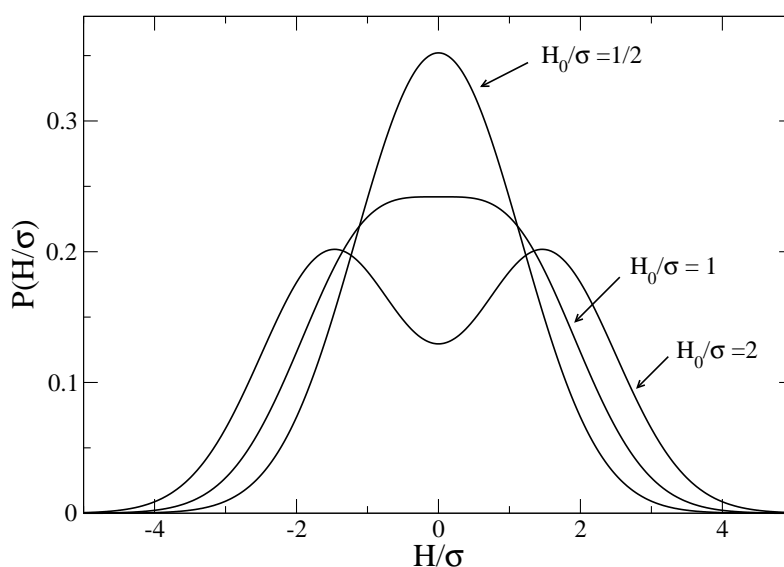


Figura 3.1: Distribuição de probabilidades para o campo magnético, em unidades de  $H/\sigma$ . Os valores mostrados representam as situações  $\sigma < H_o$  ( $H_o/\sigma = 2$ ),  $\sigma = H_o$  ( $H_o/\sigma = 1$ ) e  $\sigma > H_o$  ( $H_o/\sigma = 1/2$ ).

Seguindo o mesmo procedimento da seção 2.2, obtemos a energia livre do nosso sistema, com o uso do método das réplicas, e considerando a hipótese de simetria de réplicas,

$$f = \frac{J}{2}m^2 - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \Phi^+) - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \Phi^-), \quad (3.3)$$

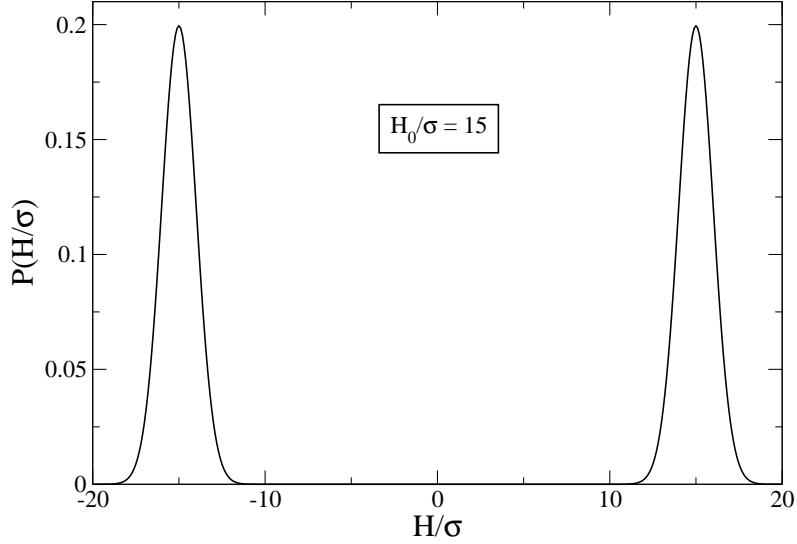


Figura 3.2: Distribuição de probabilidades para o campo magnético, em unidades de  $H/\sigma$ . Nesta figura, temos o limite  $\sigma \ll H_o$ , que, se for extrapolado para  $\sigma \rightarrow 0$ , recupera a distribuição bimodal. Nesta figura, temos  $H_o/\sigma = 15$ .

onde  $\Phi^\pm = \beta(Jm + \sigma z \pm H_o)$ . A magnetização é dada pelo mínimo da energia livre em relação a  $m$ ,

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^-. \quad (3.4)$$

Neste sistema, temos a existência de duas fases, ferromagnética e paramagnética, cuja transição entre elas está relacionada à magnetização, ou seja, na fase ferromagnética temos  $m \neq 0$  e na fase paramagnética temos  $m = 0$ . Como a presente distribuição recupera no limite  $\sigma \rightarrow 0$  a distribuição bimodal, discutida na seção 2.2, esperamos, neste caso também, a ocorrência de fronteiras de transição contínuas e de primeira ordem, que se encontram num ponto tricrítico.

Vamos, então, expandir a eq. (3.4) em potências de  $m$  (ver Apêndice B), para analisar a

existência de pontos tricríticos. Ficamos com

$$m = Am + Bm^3 + Cm^5 + O(m^7), \quad (3.5)$$

em que

$$A = \beta J \{1 - \rho_1\} \quad (3.6)$$

$$B = -\frac{(\beta J)^3}{3} \{1 - 4\rho_1 + 3\rho_2\} \quad (3.7)$$

$$C = \frac{(\beta J)^5}{15} \{2 - 17\rho_1 + 30\rho_2 - 15\rho_3\}, \quad (3.8)$$

onde usamos a notação

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^{2k} \beta(H_o + \sigma z). \quad (3.9)$$

A fronteira contínua é encontrada fazendo-se  $A = 1$ , ou seja,

$$\frac{1}{\beta J} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \beta(H_o + \sigma z), \quad (3.10)$$

desde que  $B < 0$ . Essa linha termina quando  $B = 0$ , o que nos dá

$$1 - 4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \beta(H_o + \sigma z) + 3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^4 \beta(H_o + \sigma z) = 0. \quad (3.11)$$

Na região com  $A = 1$  e  $B > 0$ , a fronteira é de primeira ordem. A coordenada do ponto tricrítico é encontrada resolvendo-se numericamente as eqs. (3.10) e (3.11).

Antes de mostrar o diagrama de fases, vamos efetuar uma análise do problema em baixas temperaturas. A expressão para a magnetização em  $T = 0$  resulta em (ver Apêndice C)

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right), \quad (3.12)$$

e para a energia livre

$$f = -\frac{J}{2}m^2 - \frac{H_o}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(Jm + H_o)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(Jm - H_o)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (3.13)$$

Agora, expandindo a eq. (3.12) em potências de  $m$ , obtemos (ver Apêndice C)

$$m = am + bm^3 + cm^5 + O(m^7), \quad (3.14)$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{J}{\sigma} \right) \exp \left( -\frac{H_o^2}{2\sigma^2} \right) \quad (3.15)$$

$$b = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{J}{\sigma} \right)^3 \left\{ \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^2 - 1 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2\sigma^2} \right) \quad (3.16)$$

$$c = \frac{1}{120} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{J}{\sigma} \right)^5 \left\{ \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^4 - 6 \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^2 + 3 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2\sigma^2} \right). \quad (3.17)$$

Teremos um ponto tricrítico em  $T = 0$  quando  $a = 1$  e  $b = 0$ , ou seja,

$$\frac{J}{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left( \frac{H_o^2}{2\sigma^2} \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{H_o}{\sigma} = 1. \quad (3.19)$$

Usando o resultado (3.19) na eq. (3.18), obtemos

$$\frac{J}{\sigma} = \sqrt{\frac{e\pi}{2}}, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$\frac{\sigma}{J} = \sqrt{\frac{2}{e\pi}} \cong 0.4839. \quad (3.21)$$

Assim, devemos esperar que, à medida que o valor de  $\sigma$  aumenta, o ponto tricrítico do sistema diminua sua coordenada no eixo  $kT/J$ , até que, para  $\sigma \cong 0.4839J$ , o ponto tricrítico esteja em  $T = 0$ ; para um valor de  $\sigma$  acima deste limiar, o sistema não apresenta mais ponto tricrítico, ou seja, a fronteira de transição entre as fases ferromagnética e paramagnética é totalmente contínua.

Então, temos um limite para a existência de pontos tricríticos nesta fronteira:

- $0 \leq \sigma \leq \sqrt{2/(e\pi)}$  : há ponto tricrítico
- $\sigma > \sqrt{2/(e\pi)}$  : não há ponto tricrítico

O ponto tricrítico representa o limite da validade da expansão em série da eq. (3.5); além dele, temos uma fronteira de primeira ordem, que deve ser determinada a partir de uma construção de Maxwell, igualando as energias livres das fases ferromagnética e paramagnética, ou seja, devemos impor

$$f(m \neq 0) = f(m = 0). \quad (3.22)$$

O diagrama de fases para valores típicos do parâmetro  $\sigma$ , em unidades de  $J$ , é mostrado na figura 3.3. Neste diagrama de fases, temos a ocorrência de duas fases distintas, *Ferromagnética*

(F), com  $m \neq 0$ , e *Paramagnética* (P), com  $m = 0$ . O valor  $\sigma/J = 0$  nos dá o limite da distribuição bimodal, discutida na seção 2.3, cuja fronteira crítica é bem conhecida [5]. As linhas pontilhadas representam transições de fase de primeira ordem, enquanto que as linhas não pontilhadas representam transições contínuas; os pontos pretos são pontos tricríticos. Os diagramas foram feitos no plano  $kT/J$  contra  $H_0/J$ .

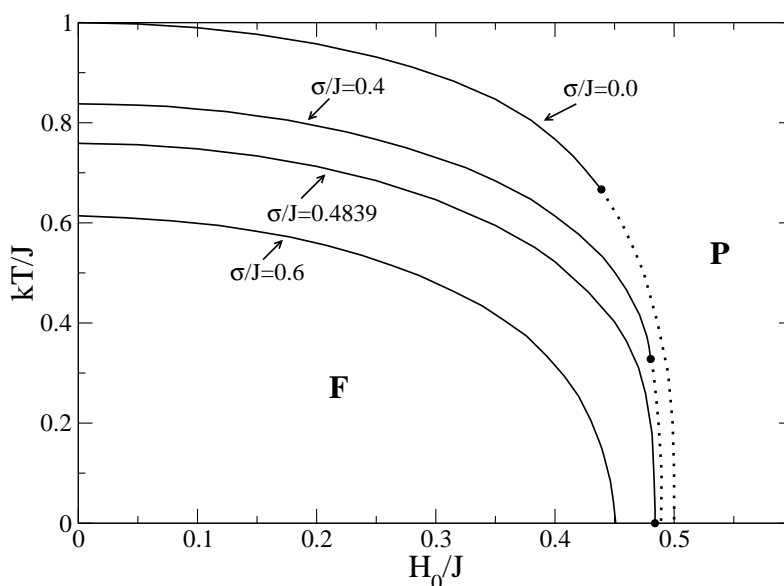


Figura 3.3: Diagrama de fases para o modelo de Ising ferromagnético sob a ação de um campo aleatório obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla, no plano temperatura contra média do campo magnético (em unidades de J). Os valores do parâmetro  $\sigma$  estão indicados. As fases são: Paramagnética (P) e Ferromagnética (F). As linhas pontilhadas representam transições de fase de primeira ordem, enquanto que as linhas não pontilhadas representam transições contínuas; os pontos pretos representam pontos tricríticos.

Vemos claramente nos diagramas que, com o aumento da largura das gaussianas ( $\sigma$ ), a fase ferromagnética é reduzida; para valores de  $\sigma$  suficientemente grandes, esta fase é totalmente



destruída. Outro efeito que ocorre com o aumento de  $\sigma$  é a diminuição da fronteira associada à transição de primeira ordem, a qual desaparece completamente a partir do valor limite  $\sigma = \sqrt{2/(e\pi)}J \cong 0.4839J$ , como calculado na eq. (3.21). Ou seja, para valores de  $\sigma$  a partir desse limiar, a transição entre as fases ferromagnética e paramagnética é sempre contínua, como comentado anteriormente.

Para terminar essa seção, destacamos que a destruição da linha de transição de primeira ordem nos antiferromagnetos diluídos do tipo  $Fe_xMg_{1-x}Cl_2$ , devido à presença de campos magnéticos aleatórios, na faixa de valores  $0.7 < x < 1.0$ , quando este composto se comporta tipicamente como um sistema ferromagnético sob ação de um campo aleatório, foi observada em 1995 por Kushauer *et al.* [38].

## 3.2 Vidro de Spins de Ising

Nesta seção, estudaremos o modelo SK, discutido na seção 2.4, considerando a mesma distribuição de probabilidades para o campo magnético usada na seção 3.1, ou seja,

$$P(H_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \left\{ \exp \left[ -\frac{(H_i - H_o)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(H_i + H_o)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (3.23)$$

O Hamiltoniano deste sistema é, portanto,

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} S_i S_j - \sum_i H_i S_i, \quad (3.24)$$

com uma distribuição de probabilidades gaussiana para as constantes de troca  $\{J_{ij}\}$ ,

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{J} \left[ \frac{N}{2\pi} \right]^{1/2} \exp[-N(J_{ij} - J_o/N)^2/2J^2], \quad (3.25)$$

de acordo com o modelo SK. Na expressão acima,  $J_o \geq 0$ , de modo a assegurar um favorecimento ferromagnético para o sistema.

Com estas distribuições, temos uma energia livre  $F(\{J_{ij}\}, \{H_i\})$ , de modo que a média sobre a desordem pode ser efetuada através de integrais independentes,

$$[F(\{J_{ij}\}, \{H_i\})]_{J,H} = \int \prod_{(ij)} [dJ_{ij} P(J_{ij})] \prod_i [dH_i P(H_i)] F(\{J_{ij}\}, \{H_i\}). \quad (3.26)$$

O procedimento usual consiste em aplicar o método das réplicas [19], de forma a obter a energia livre por spin como

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [\ln Z(\{J_{ij}\}, \{H_i\})]_{J,H} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{nN} ([Z^n]_{J,H} - 1), \quad (3.27)$$

onde  $Z^n$  é a função de partição das  $n$  cópias do sistema definido na eq. (3.24). O procedimento padrão nos leva a

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{(\beta \sigma)^2}{2} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}), \quad (3.28)$$

em que

$$g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) = \frac{\beta J_o}{2} \sum_\alpha (m^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha,\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{2} \ln \text{Tr}_\alpha \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}^+) - \frac{1}{2} \ln \text{Tr}_\alpha \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}^-), \quad (3.29)$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^\pm = \beta J_o \sum_\alpha m^\alpha S^\alpha + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha,\beta)} q^{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta + (\beta \sigma)^2 \sum_{(\alpha,\beta)} S^\alpha S^\beta \pm \beta H_o \sum_\alpha S^\alpha. \quad (3.30)$$

Nas equações acima, os índices de soma  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ) são índices de réplicas,  $\text{Tr}_\alpha$  representa um traço sobre as variáveis de spins de cada uma das réplicas e  $\sum_{(\alpha, \beta)}$  denota a soma sobre pares distintos de réplicas.

Os extremos da função  $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$  nos dão as equações de equilíbrio para a magnetização e o parâmetro de ordem de vidro de spins, respectivamente,

$$m^\alpha = \frac{1}{2} \langle S^\alpha \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle S^\alpha \rangle_- \quad (3.31)$$

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \langle S^{\alpha\beta} \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle S^{\alpha\beta} \rangle_-, \quad (\alpha \neq \beta), \quad (3.32)$$

em que  $\langle \dots \rangle_\pm$  representam médias térmicas com relação aos “hamiltonianos efetivos” definidos na eq. (3.30).

Na seção seguinte apresentaremos a solução com simetria de réplicas.

### 3.2.1 A Solução com Simetria de Réplicas

A solução com simetria de réplicas é obtida supondo que os parâmetros  $m^\alpha$  e  $q^{\alpha\beta}$  são independentes dos índices de réplicas, ou seja,

$$m^\alpha = m; \quad \forall \alpha$$

$$q^{\alpha\beta} = q; \quad \forall (\alpha, \beta).$$

Utilizando esta escolha, reescrevemos a energia livre por spin na eq. (3.28) da seguinte

forma,

$$\begin{aligned} \beta f &= -\frac{(\beta J)^2}{4}(1-q)^2 + \frac{\beta J_o m^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \xi^+) - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \xi^-), \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que

$$\xi^\pm = \beta \left\{ J_o m + J \left[ q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right]^{1/2} z \pm H_o \right\}. \quad (3.34)$$

Os parâmetros de ordem são expressos então por

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^-, \quad (3.35)$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \xi^-. \quad (3.36)$$

Devido à presença de campos magnéticos aleatórios, o parâmetro de ordem de vidro de spins  $q$  é sempre induzido ( $q \neq 0$ ); a transição para a fase vidro de spins é normalmente caracterizada [39, 40, 41] pelo surgimento de uma instabilidade na solução com simetria de réplicas [35]. No caso em questão, a linha AT é dada por (ver Apêndice A)

$$\left( \frac{kT}{J} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi^-, \quad (3.37)$$

cuja expansão para baixas temperaturas (ver Apêndice A) nos dá a expressão

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{G} \left\{ \exp \left[ -\frac{(J_o + H_o)^2}{2J^2 G^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(J_o - H_o)^2}{2J^2 G^2} \right] \right\}, \quad (3.38)$$

onde

$$G = \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.39)$$

Na seção seguinte discutiremos os diagramas de fases.

### 3.2.2 Diagramas de Fases

Nesta seção discutiremos os efeitos de campos aleatórios, obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla, nos diagramas de fases do vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na aproximação de simetria de réplicas.

Na presença de campos aleatórios, o parâmetro de vidro de spins  $q$  é sempre induzido ( $q \neq 0$ ), de forma que não há ordenamento espontâneo do tipo vidro de spins, como no caso do modelo SK na ausência de campos ou sob a ação de um campo uniforme. Porém, temos uma transição de fases associada à magnetização; desta maneira, duas fases são possíveis neste sistema, a saber:

- fase ferromagnética:  $m \neq 0, q \neq 0$ ;
- fase independente:  $m = 0, q \neq 0$ .

A fronteira crítica que separa estas duas fases pode ser encontrada resolvendo-se numericamente as equações de equilíbrio (3.35) e (3.36); no caso de transição de fases de primeira ordem, vamos utilizar também a energia livre por spin, eq. (3.33).

Empregaremos então o procedimento usual para encontrar a fronteira crítica entre as fases paramagnética e ferromagnética. Expandindo a eq. (3.35) em potências de  $m$ , obtemos (ver

Apêndice B)

$$m = A_1(q)m + A_3(q)m^3 + A_5(q)m^5 + O(m^7), \quad (3.40)$$

em que

$$A_1(q) = \beta J_o \{1 - \rho_1\} \quad (3.41)$$

$$A_3(q) = -\frac{(\beta J_o)^3}{3} \{1 - 4\rho_1 + 3\rho_2\} \quad (3.42)$$

$$A_5(q) = \frac{(\beta J_o)^5}{15} \{2 - 17\rho_1 + 30\rho_2 - 15\rho_3\}, \quad (3.43)$$

onde adotamos a notação

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^{2k} \beta J \left[ \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z + \frac{H_o}{J} \right]. \quad (3.44)$$

Os coeficientes nas eqs. (3.41), (3.42) e (3.43) dependem de  $q$  que, por sua vez, está relacionado com  $m$ , de acordo com a eq. (3.36). Sendo assim, expandimos a eq. (3.36) em potências de  $m$  (ver Apêndice B), obtendo

$$q = q_o + (\beta J_o)^2 \frac{\Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} m^2 + O(m^4), \quad (3.45)$$

com

$$\Gamma = 1 - 4\rho_1(q_o) + 3\rho_2(q_o), \quad (3.46)$$

e onde  $q_o$  corresponde à solução da eq. (3.36) para  $m = 0$ . Substituindo a eq. (3.45) na eq. (3.40), obtemos os coeficientes, independentes de  $q$ , da expansão da magnetização em potências de  $m$  (ver Apêndice B), ou seja,

$$m = A'_1 m + A'_3 m^3 + O(m^5), \quad (3.47)$$

em que

$$A'_1 = A_1(q_o) \quad (3.48)$$

$$A'_3 = -\frac{(\beta J_o)^3}{3} \left[ \frac{1 + 2(\beta J)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} \right] \Gamma. \quad (3.49)$$

As fronteiras críticas são determinadas utilizando o procedimento padrão, a saber:

- Para transições de fases contínuas,  $A'_1 = 1$  e  $A'_3 < 0$ ; resolvemos então numericamente as eqs.  $A'_1 = 1$  e (3.36).
- Para transições de fases de primeira ordem,  $A'_1 = 1$  e  $A'_3 > 0$ ; a fronteira crítica é determinada através de uma construção de Maxwell, ou seja, resolvendo numericamente a equação obtida igualando as energias livres das duas fases, em conjunto com as eqs. (3.35) e (3.36).
- Quando os dois tipos de transição estão presentes, as fronteiras críticas contínua e de primeira ordem encontram-se em um ponto tricrítico, que define o limite de validade das expansões em séries; além do ponto tricrítico, a magnetização é descontínua. A localização deste ponto é obtida resolvendo-se numericamente as eqs.  $A'_1 = 1$ ,  $A'_3 = 0$  e (3.36), desde que a condição  $A'_5 < 0$  seja satisfeita.

Antes de considerar os resultados numéricos, faremos a análise para  $T = 0$ , tal como efetuado no caso do ferromagneto da seção 3.1. Em  $T = 0$ , temos  $q = 1$ , de modo que a expressão para a magnetização pode ser escrita como (ver Apêndice C)

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}} \right) \quad (3.50)$$

enquanto que para a energia livre, temos

$$f = -\frac{J_o}{2}m^2 - \frac{H_o}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{J}{\sqrt{2\pi}}G \left\{ \exp \left[ -\frac{(J_o m + H_o)^2}{2J^2G^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(J_o m - H_o)^2}{2J^2G^2} \right] \right\}, \quad (3.51)$$

onde  $G$  é dado pela eq. (3.39). Empregando um procedimento similar ao utilizado em temperaturas finitas, expandimos a eq. (3.50) em potências de  $m$ , e obtemos (ver Apêndice C)

$$m = a_1 m + a_3 m^3 + a_5 m^5 + O(m^7), \quad (3.52)$$

onde

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G} \left( \frac{J_o}{J} \right) \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (3.53)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G^3} \left( \frac{J_o}{J} \right)^3 \left\{ \frac{1}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 - 1 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (3.54)$$

$$a_5 = \frac{1}{120} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right)^5 \left\{ \frac{1}{G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 - \frac{6}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + 3 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (3.55)$$

Para  $[H_o/(GJ)]^2 < 1$ , temos uma fronteira contínua dada por  $a_1 = 1$ , ou seja,

$$\frac{J_o}{J} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} G \exp \left[ \frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right], \quad (3.56)$$

a qual termina em ( $a_3 = 0$ ),

$$\frac{1}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{H_o}{J} = \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.57)$$

Com este resultado, a eq. (3.56) pode ser escrita como

$$\frac{J_o}{J} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.58)$$



ou seja, para  $T = 0$ , esta é a coordenada do ponto tricrítico no eixo  $J_o/J$ , a qual depende do desvio padrão da distribuição. O valor limite  $H_o/J$  para o qual o ponto tricrítico ocorre em  $T = 0$  também depende de  $\sigma$ , como pode ser visto na eq. (3.57). Acima deste valor de  $H_o/J$ , o ponto tricrítico não ocorre mais em  $T = 0$ , mas, sim, em uma temperatura finita.

Os diagramas de fases considerados foram construídos escolhendo os eixos  $kT/J$  e  $J_o/J$ . Para cada valor fixo de  $\sigma/J$ , escolhemos cinco diferentes valores de  $H_o/J$ , correspondendo a situações físicas distintas; obtemos assim, quinze diagramas de fases, exibidos a seguir. Em todos os diagramas de fases (figuras 3.4 a 3.18), temos a ocorrência de quatro fases distintas. Primeiro, temos a divisão mais básica, entre as fases *ferromagnética*, com  $m \neq 0$ , e *independente*, com  $m = 0$ . Porém, nestas fases, temos o aparecimento de fronteiras de instabilidade do tipo Almeida-Thouless (AT), que sinalizam o limite de validade da solução com simetria de réplicas. Abaixo destas linhas, a condição de estabilidade é violada; a região da fase independente onde ocorre tal instabilidade é usualmente denominada de fase *Vidro de Spins* (VS), enquanto que a região instável da fase ferromagnética é denominada *Ferromagnética Mista* (F'), caracterizada por ordenamento ferromagnético e instabilidade da solução com simetria de réplicas [39, 40, 41]. A região da fase independente restante é denominada de fase *Paramagnética* (P), já que, apesar de termos  $q \neq 0$ , a solução com simetria de réplicas é estável.

Este problema apresenta um comportamento bem interessante, e temos no limite  $\sigma = 0$  o caso bem conhecido do modelo SK sobre ação de uma distribuição bimodal, já estudado na literatura por Nogueira *et al.* [39]. Primeiro, vamos nos concentrar num dado valor fixo de

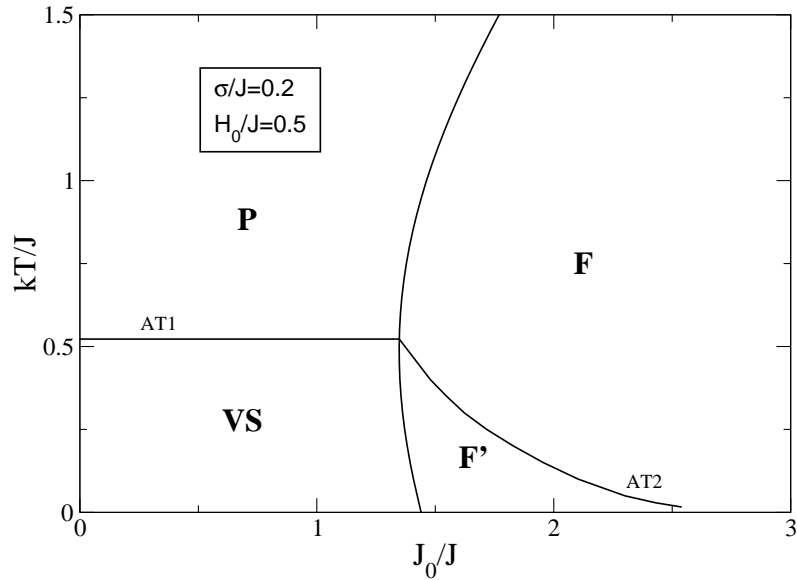


Figura 3.4: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Os valores dos parâmetros  $\sigma$  e  $H_o$  estão indicados. As fases são: Paramagnética (P), Ferromagnética (F), Ferromagnética Mista (F') e Vidro de Spins (VS). As linhas de instabilidade de Almeida-Thouless estão indicadas por AT1 e AT2, sinalizando o limite de validade da solução com simetria de réplicas. Neste caso temos apenas fronteiras críticas contínuas.

$\sigma/J$ . Para valores pequenos da magnitude do campo  $H_o/J$ , o coeficiente  $A'_3$ , dado pela eq. (3.49), é sempre negativo, representando uma fronteira de transição de fases contínua, como mostrado nas figuras 3.4, 3.9 e 3.14. Para uma pequena faixa de valores de  $H_o/J$ , o coeficiente  $A'_3$  pode mudar de sinal duas vezes: ele é negativo para altas temperaturas, torna-se positivo para temperaturas intermediárias, voltando a ser negativo para baixas temperaturas, como mostrado nas figuras 3.6, 3.11 e 3.16. Neste caso, a fronteira crítica é composta por duas partes contínuas,

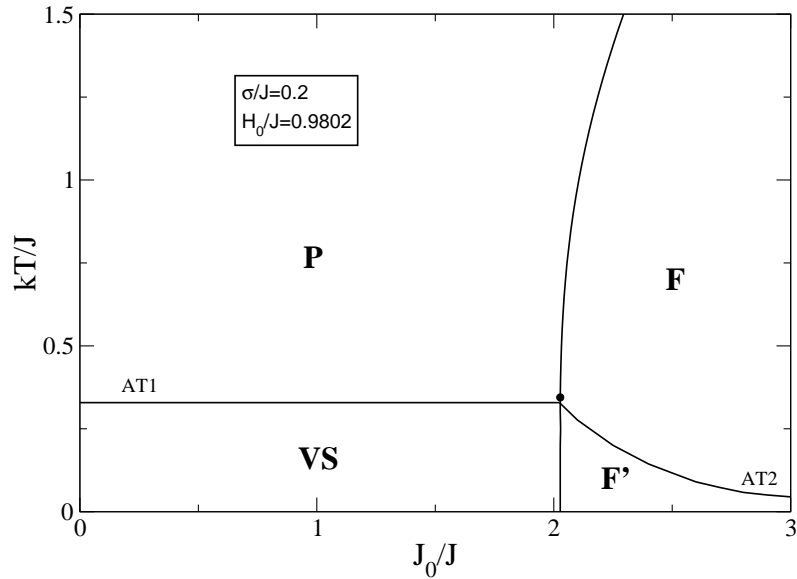


Figura 3.5: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura versus média das interações (em unidades de  $J$ ). O ponto preto representa um ponto especial, um colapso de dois pontos tricríticos, quando  $H_o/J = H_o^1/J$ . A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

calculadas por  $A'_1 = 1$ , interpoladas por uma parte de primeira ordem, calculada igualando-se as energias livres de cada fase, definindo assim dois pontos tricríticos. Existe ainda uma outra faixa de valores maiores de  $H_o/J$  em que temos apenas uma fronteira contínua e uma de primeira ordem, como mostrado nas figuras 3.7, 3.8, 3.12, 3.13, 3.17 e 3.18.

Com o aumento do valor de  $H_o/J$ , a parte do diagrama de fases relativa à fase ferromagnética diminui. Encontramos então dois valores limites de  $H_o/J$ , que chamaremos  $H_o^{(1)}/J$  e  $H_o^{(2)}/J$  (cuja evolução com o aumento de  $\sigma/J$  é mostrada na figura 3.19), para os quais a fronteira ferromagnética-independente se modifica qualitativamente. Para  $H_o/J < H_o^{(1)}/J$ , a fronteira é contínua, como ocorre na figura 3.4. Dois pontos tricríticos são encontrados na faixa

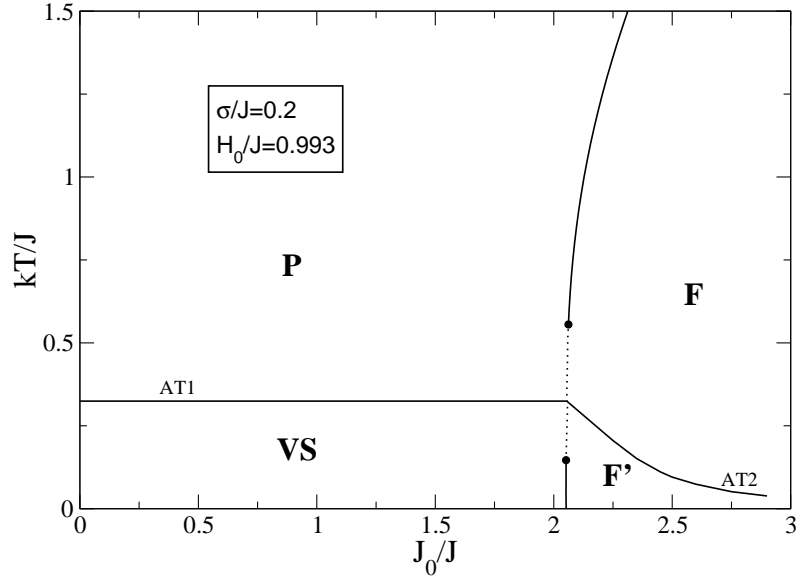


Figura 3.6: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.2$  e  $H_o/J = 0.993$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, a temperaturas finitas. A linha tracejada representa uma fronteira de primeira ordem. A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

de valores  $H_o^{(1)}/J \leq H_o/J \leq H_o^{(2)}/J$ , como ocorre nas figuras 3.6, 3.11 e 3.16; esses pontos se movem em direções opostas, no eixo da temperatura ( $kT/J$ ), com o aumento de  $H_o/J$ , de forma que o ponto tricrítico de mais baixa temperatura colapsa com o eixo  $T = 0$  para  $H_o/J = H_o^{(2)}/J$ , como mostrado nas figuras 3.7, 3.12 e 3.17. Para  $H_o/J > H_o^{(2)}/J$ , existe apenas um ponto tricrítico, em temperatura finita, assim como nas figuras 3.8, 3.13 e 3.18. Os valores limites  $H_o^{(1)}/J$  foram encontrados numericamente, enquanto que os valores de  $H_o^{(2)}/J$  foram encontrados analiticamente, a partir da expansão da magnetização em  $T = 0$ , feita anteriormente, e os valores são dados pela eq. (3.57). É importante notar que, quando aumentamos

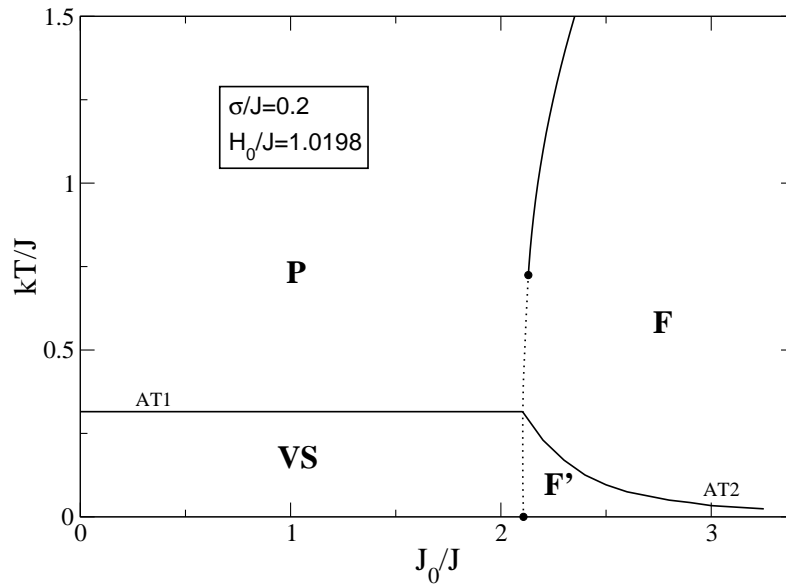


Figura 3.7: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.2$  e  $H_0/J = H_o^2/J = 1.0198$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, sendo que um deles colapsa com o eixo  $kT/J = 0$ . A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

$\sigma/J$ , a fronteira ferromagnética-independente se desloca para valores maiores de  $J_0/J$ , ou seja, a fase independente torna-se dominante, deslocando as fases ferromagnéticas ( $F$  e  $F'$ ) para a região de  $J_0/J$  maiores, e achatando as fases vidro de spins e ferromagnética mista para a região de baixas temperaturas.

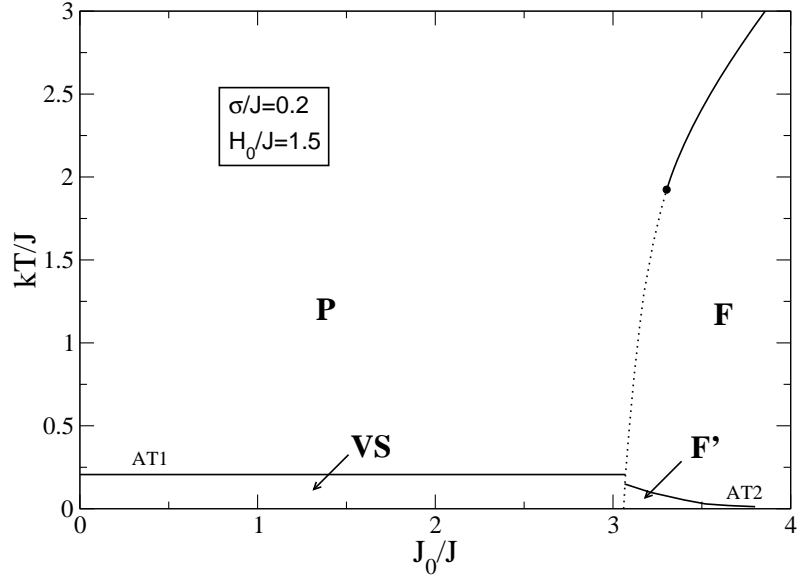


Figura 3.8: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Neste caso, o ponto tricrítico para temperatura nula desaparece e temos apenas o ponto tricrítico para temperatura finita; as linhas AT não se tocam. A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

### 3.2.3 Instabilidade de Almeida-Thouless para $J_o = 0$

Vimos na seção 3.2.1 que a linha de Almeida-Thouless para o sistema investigado neste capítulo é

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \text{sech}^4 \xi^+ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \text{sech}^4 \xi^-, \quad (3.59)$$

lembrando que

$$\xi^\pm = \beta \left\{ J_o m + J \left[ q + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2 \right]^{1/2} z \pm H_o \right\}. \quad (3.60)$$

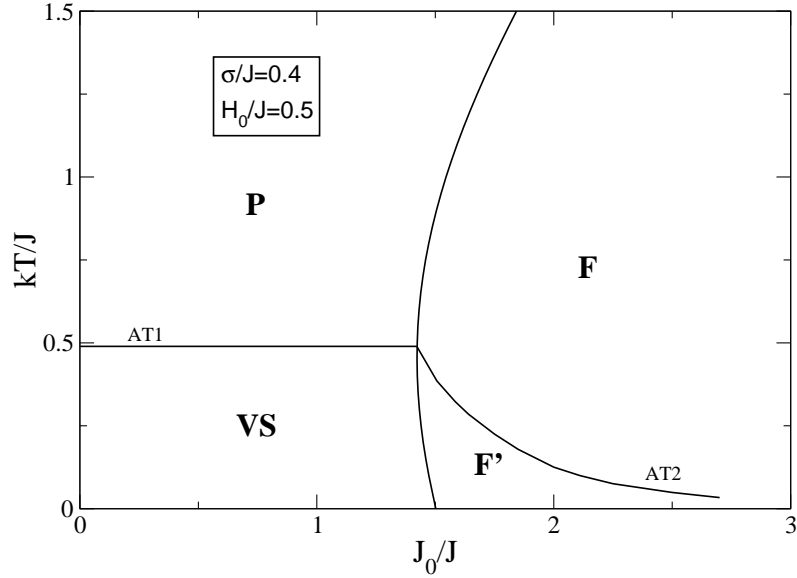


Figura 3.9: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Neste caso temos apenas fronteiras críticas contínuas. A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

Vamos considerar esta expressão para  $J_o = 0$ . A eq. (3.59) pode ser escrita como

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi_o^+ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi_o^-, \quad (3.61)$$

em que

$$\xi_o^\pm = \beta \left\{ J \left[ q + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2 \right]^{1/2} z \pm H_o \right\}. \quad (3.62)$$

Efetuada a troca  $z \rightarrow -z$  na integral com  $\xi_o^-$  da eq. (3.61), podemos reescrevê-la como

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi_o^+. \quad (3.63)$$

Este é exatamente o resultado obtido por Soares *et al.* [40] [ver eq. (3.1) dessa referência, para  $J_o = 0$ ], onde o modelo SK foi tratado na presença de uma distribuição para os campos do

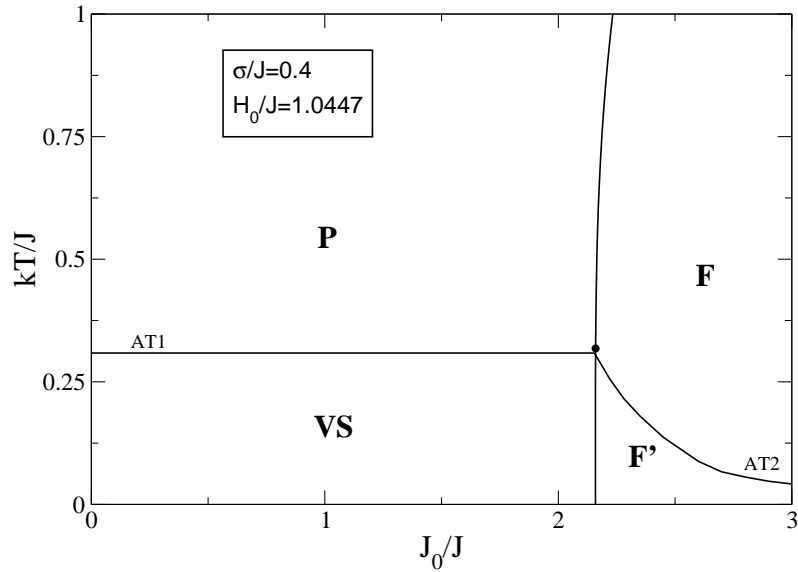


Figura 3.10: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). O ponto preto representa um ponto especial, um colapso de dois pontos tricríticos, quando  $H_o/J = H_o^1/J$ . A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

tipo gaussiana simples, centrada em  $H_o$ . Neste caso, para um dado valor de  $\sigma/J$ , a eq. (3.63) define uma linha no plano  $H_o/J$  contra  $kT/J$ , abaixo da qual a solução com simetria de réplicas é instável. Esta linha AT, inicialmente introduzida no modelo SK ( $\sigma/J = 0$ ) [35], é atualmente associada a efeitos de irreversibilidade em sistemas reais, e vários pesquisadores experimentais reportam a sua observação [19]. Vamos analisar como esta linha é afetada pela presença do campo magnético aleatório dado pela distribuição de probabilidades do tipo gaussiana dupla.

Para  $H_o/J \gg 1$ , obtemos da eq. (3.63)

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{G} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(H_o/J)^2}{G^2} \right], \quad (3.64)$$

em que  $G$  é dado pela eq. (3.39). A eq. (3.64) indica um decréscimo exponencial da linha



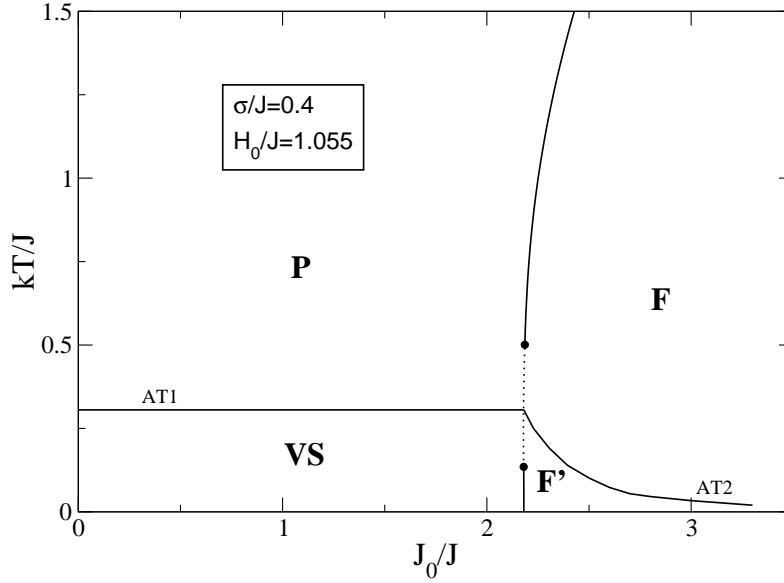


Figura 3.11: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.4$  e  $H_o/J = 1.055$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, a temperaturas finitas. A nomenclatura utilizada é mesma das figuras 3.4 e 3.6.

AT no diagrama de fases  $H_o/J$  contra  $kT/J$ , para valores altos de  $H_o/J$ . Considerando agora  $H_o/J \ll 1$  e  $\sigma/J \ll 1$ , podemos definir uma variável  $\tau$ , dada por

$$\tau = 1 - \frac{T}{T_o} \cong \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left[ \left(\frac{H_o}{J}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2 \right]^{1/3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{\sigma}{J}\right)^{2/3}, \quad (3.65)$$

em que  $T_o$  é a temperatura obtida das eqs. (3.63) e (3.36) para  $J_o = H_o = 0$ , isto é

$$\frac{T_o}{J} \cong \left[ 1 - 2 \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{\sigma}{J}\right)^{2/3} \right]^{1/2}. \quad (3.66)$$

A eq. (3.65) apresenta, em ordem mais baixa, dois regimes distintos, ou seja, o regime de

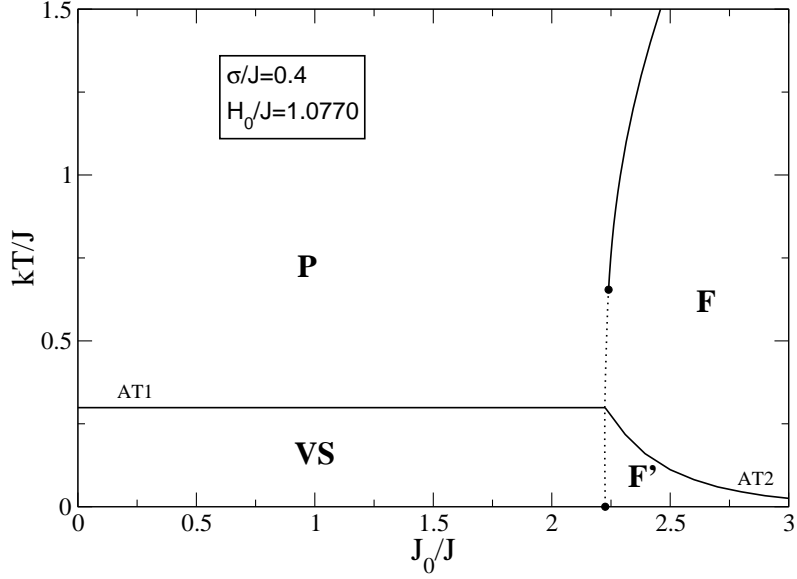


Figura 3.12: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.4$  e  $H_o/J = H_o^2/J = 1.0770$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, sendo que um deles colapsa com o eixo  $kT/J = 0$ . A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

*campo aleatório,*

$$\tau = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{\sigma}{J} \right)^{-4/3} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 \quad (\sigma \gg H_o), \quad (3.67)$$

e o regime *vidro de spins,*

$$\tau = \left( \frac{3}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{H_o}{J} \right)^{2/3} \quad (\sigma \ll H_o). \quad (3.68)$$

Estes dois regimes são interpolados por uma mudança na curvatura da linha AT, e esta mudança ocorre em um ponto de inflexão. Este fato, que não é observado na linha AT para  $\sigma/J = 0$  (ver Fig. 3.20), é claramente observado para valores maiores, como, por exemplo,  $\sigma/J = 0.3$  (ver Fig. 3.21) e  $\sigma/J = 0.6$  (ver Fig. 3.22).

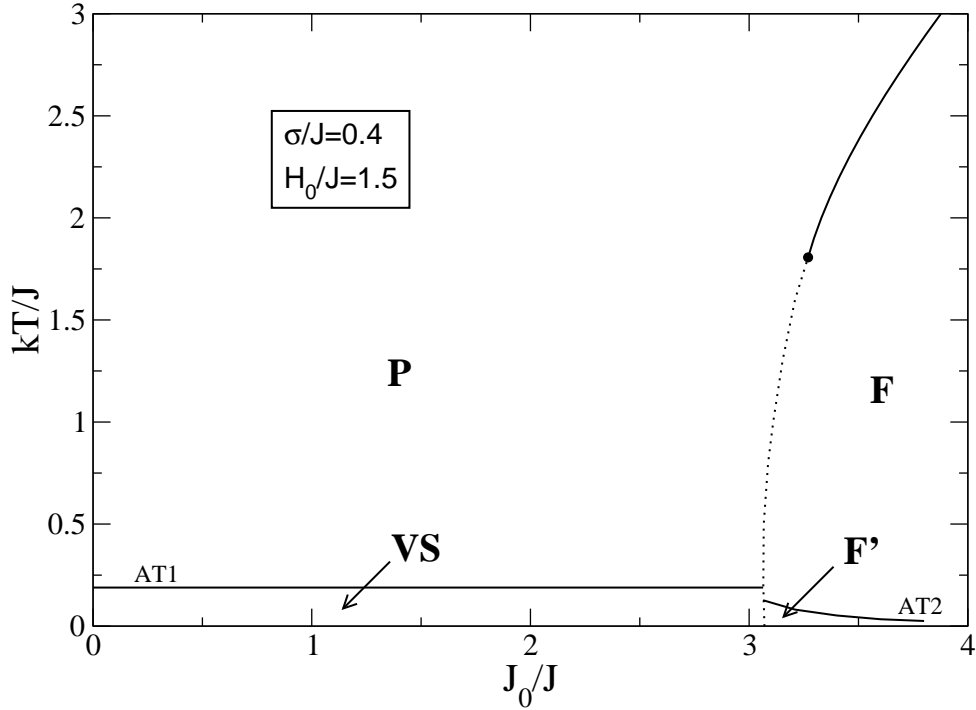


Figura 3.13: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Neste caso, o ponto tricrítico para temperatura nula desaparece e temos apenas o ponto tricrítico para temperatura finita; as linhas AT não se tocam. A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

Podemos definir um expoente de “crossover”  $\phi$ , associado ao comportamento da linha AT nas eqs. (3.67) e (3.68), através de

$$\tau \sim \left( \frac{H_o}{J} \right)^{2/\phi} \quad (H_o/J \ll 1). \quad (3.69)$$

Para os dois regimes mencionados acima, nas eqs. (3.67) e (3.68), este expoente varia de  $\phi = 1$  (regime de campo aleatório) a  $\phi = 3$  (regime vidro de spins). Essa mudança de comportamento foi observada experimentalmente ao longo da linha de irreversibilidade do antiferromagneto de

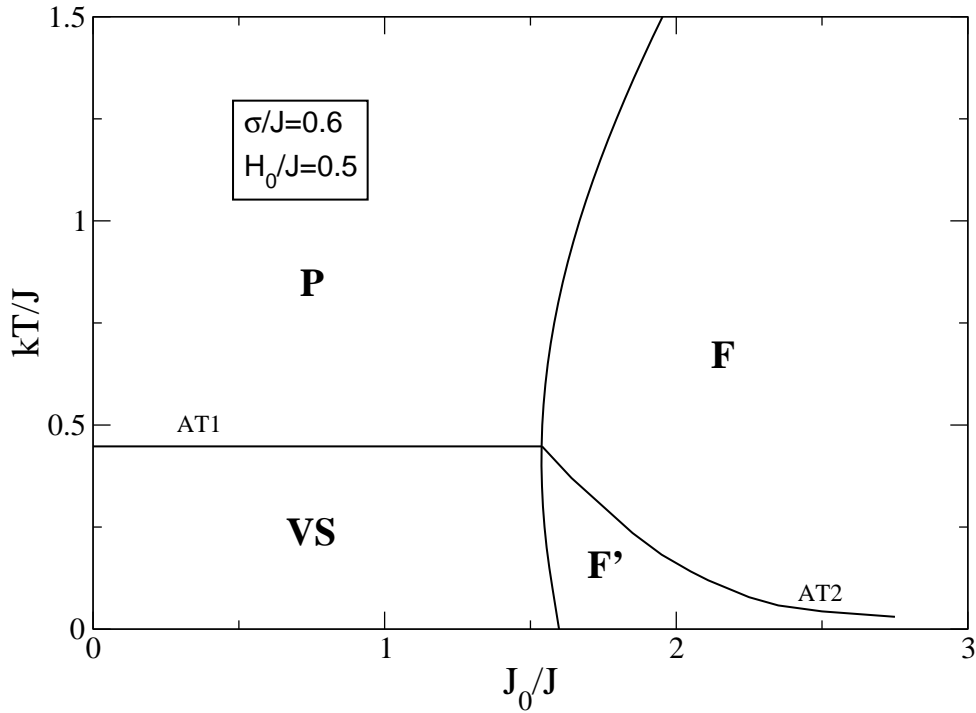


Figura 3.14: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Neste caso temos apenas fronteiras críticas contínuas. A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

Ising  $Fe_xZn_{1-x}F_2$ , para  $x = 0.31$  [24, 25, 42, 43] (ver Fig. 3.23). Com o aumento de  $\sigma/J$ , cresce a região em que a linha AT é dominada pelo regime de campo aleatório, ou seja, o ponto de inflexão ocorre para valores maiores de  $H_o/J$ , como mostra a Fig. 3.24. Quando  $\sigma/J$  é suficientemente grande, a linha AT se torna uma linha vertical, coincidindo com o eixo  $H_o/J$  quando  $\sigma/J \rightarrow \infty$ . Nesta faixa de valores de  $\sigma/J$ , temos que  $\phi = 1$  ( $H_o \ll \sigma$ ), e a mudança de concavidade mencionada desaparece. Assim, concluímos que a região de instabilidade é reduzida pelo aumento do campo aleatório, isto é, quando  $\sigma/J$  aumenta. Então, o mesmo efeito

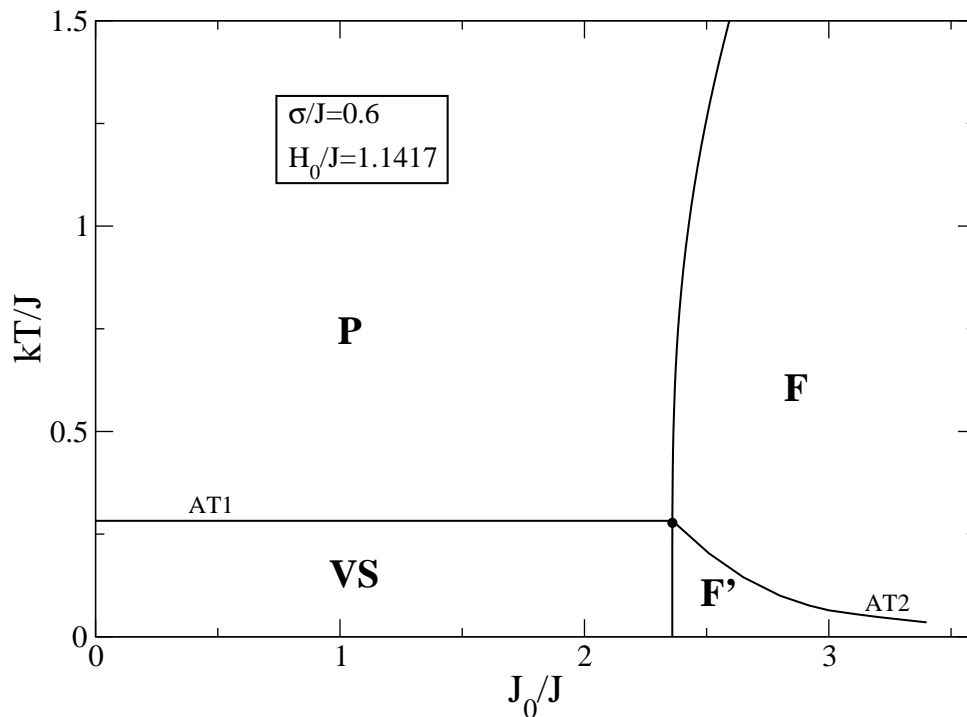


Figura 3.15: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). O ponto preto representa um ponto especial, um colapso de dois pontos tricríticos, quando  $H_o/J = H_o^1/J$ . A nomenclatura utilizada é a mesma da figura 3.4.

que é observado para o vidro de spins de Ising sob a ação de um campo aleatório dado por uma distribuição de probabilidades do tipo gaussiana simples também é observado para o caso da distribuição com dois picos (gaussiana dupla).

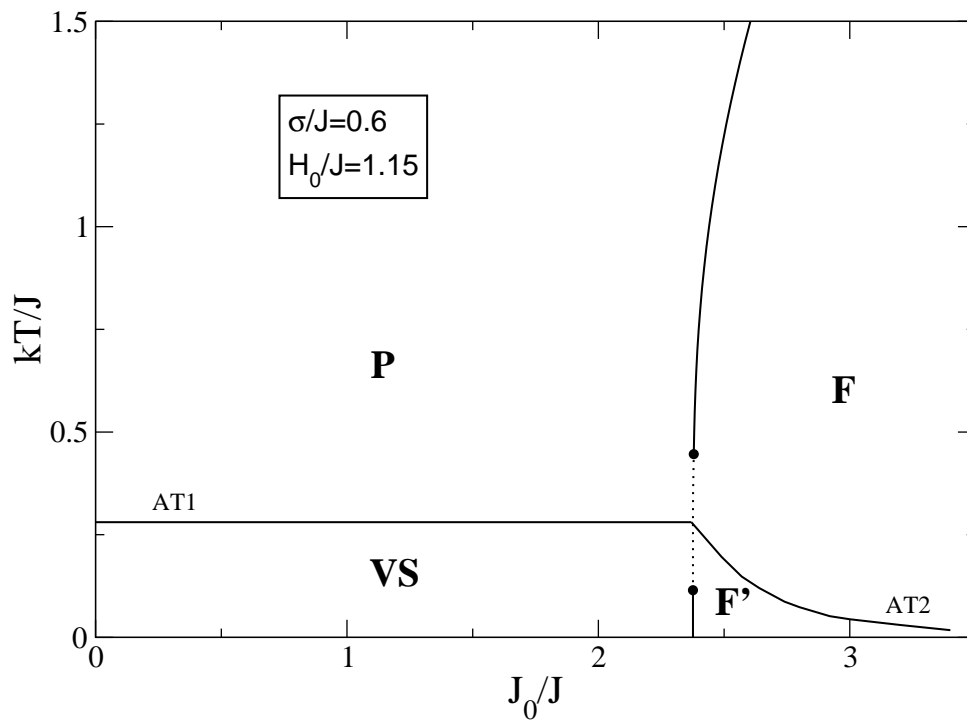


Figura 3.16: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.6$  e  $H_o/J = 1.15$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, a temperaturas finitas. A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

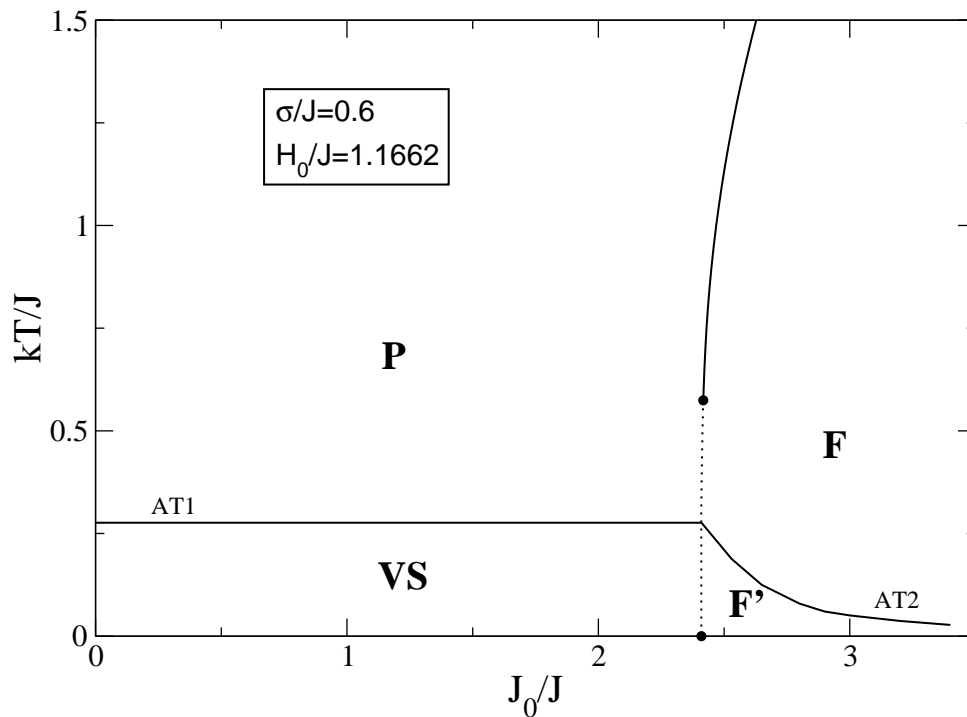


Figura 3.17: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferro-magnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Para os valores mostrados,  $\sigma/J = 0.6$  e  $H_o/J = H_o^2/J = 1.1662$ , temos a existência de dois pontos tricríticos, sendo que um deles colapsa com o eixo  $kT/J = 0$ . A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.

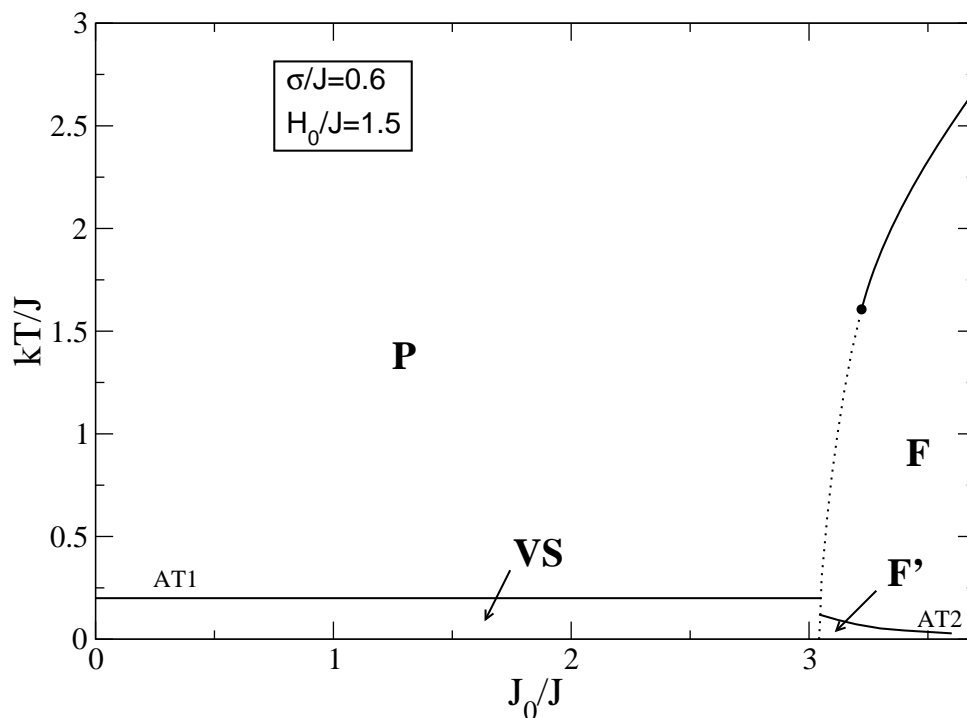


Figura 3.18: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising com favorecimento ferromagnético, na presença de campos magnéticos aleatórios obedecendo uma distribuição do tipo gaussiana dupla. O diagrama é exibido no plano temperatura contra média das interações (em unidades de  $J$ ). Neste caso, o ponto tricrítico para temperatura nula desaparece e temos apenas o ponto tricrítico para temperatura finita; as linhas AT não se tocam. A nomenclatura utilizada é a mesma das figuras 3.4 e 3.6.



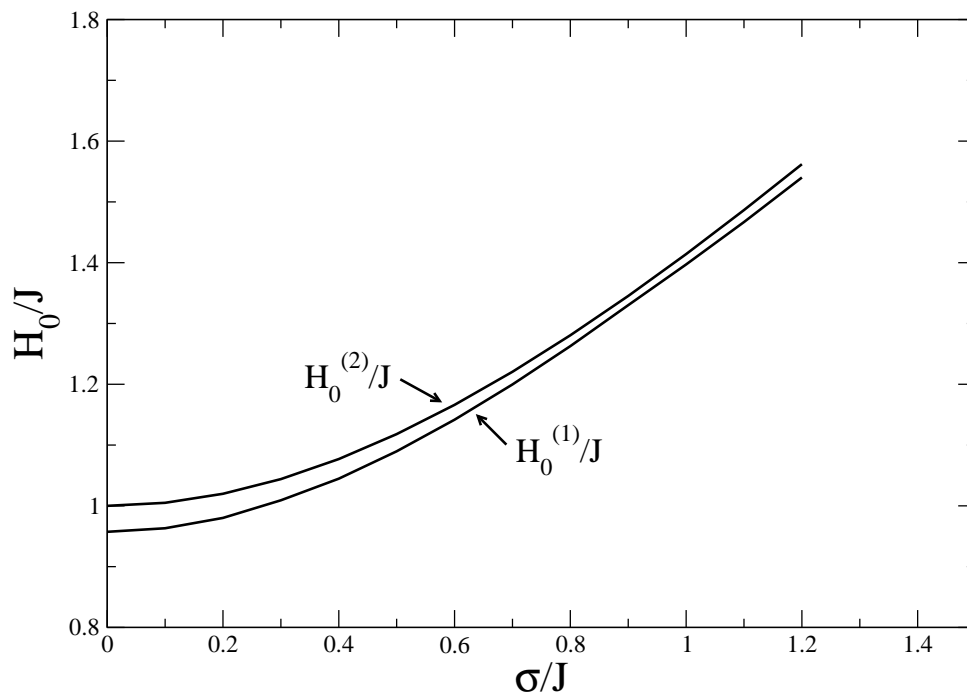


Figura 3.19: Evolução dos valores críticos  $H_o^{(1)}/J$  e  $H_o^{(2)}/J$  com o aumento de  $\sigma/J$ . A região abaixo do valor  $H_o^{(1)}/J$  representa os diagramas de fases onde temos fronteiras completamente contínuas; sob a curva  $H_o/J = H_o^{(1)}/J$ , temos o possível colapso de dois pontos tricríticos, como discutido no texto; a região entre os valores  $H_o^{(1)}/J$  e  $H_o^{(2)}/J$  representa os diagramas de fases onde temos dois pontos tricríticos; sob a curva  $H_o/J = H_o^{(2)}/J$ , temos o colapso do ponto tricrítico inferior com o eixo  $kT/J = 0$ ; a região acima do valor crítico  $H_o^{(2)}/J$  representa os diagramas de fases onde temos apenas um ponto tricrítico, a temperatura finita.

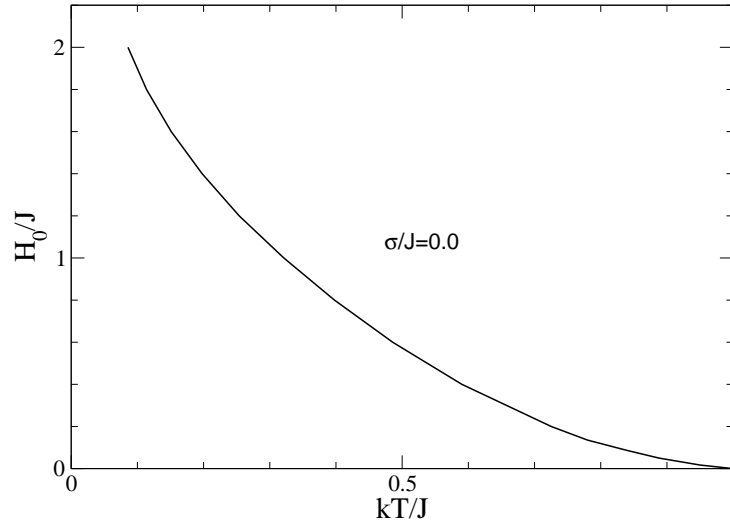


Figura 3.20: Linha de Almeida-Thouless no diagrama média do campo magnético contra temperatura (para  $J_o = 0$ ). Para o valor  $\sigma/J = 0$ , não observamos mudança na concavidade da curva.

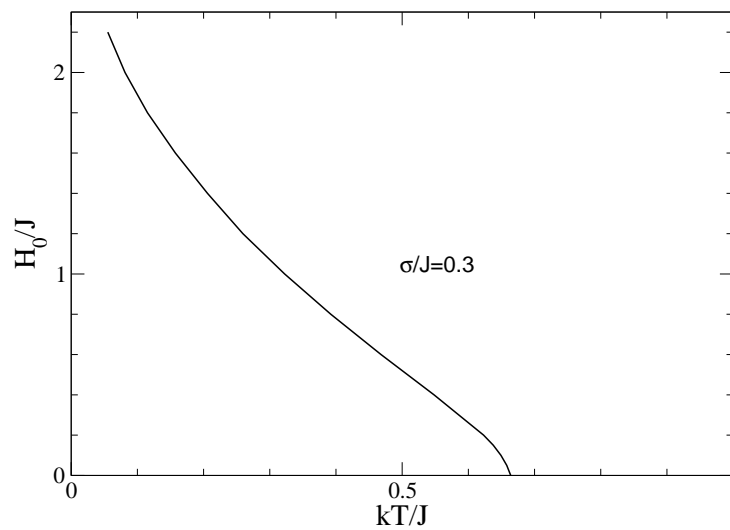


Figura 3.21: Linha de Almeida-Thouless no diagrama média do campo magnético contra temperatura (para  $J_o = 0$ ). Para o valor  $\sigma/J = 0.3$ , observamos a mudança na concavidade da curva.

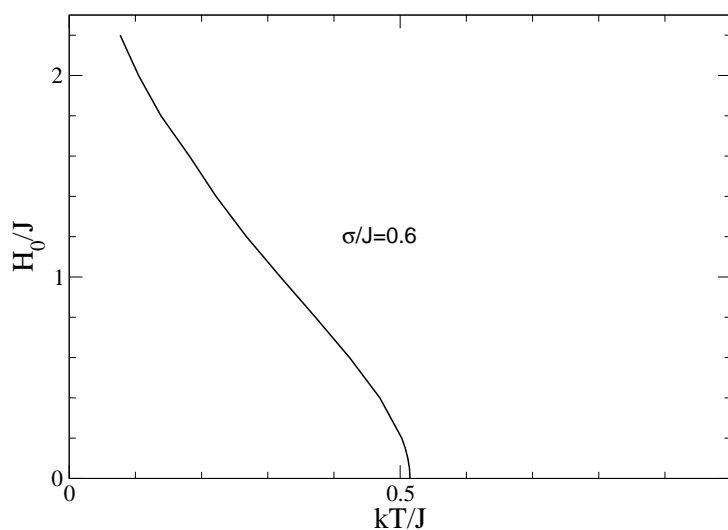


Figura 3.22: Linha de Almeida-Thouless no diagrama média do campo magnético contra temperatura ( $J_o = 0$ ). Para o valor de  $\sigma/J = 0.6$ , observamos uma mudança ainda maior na concavidade da curva.

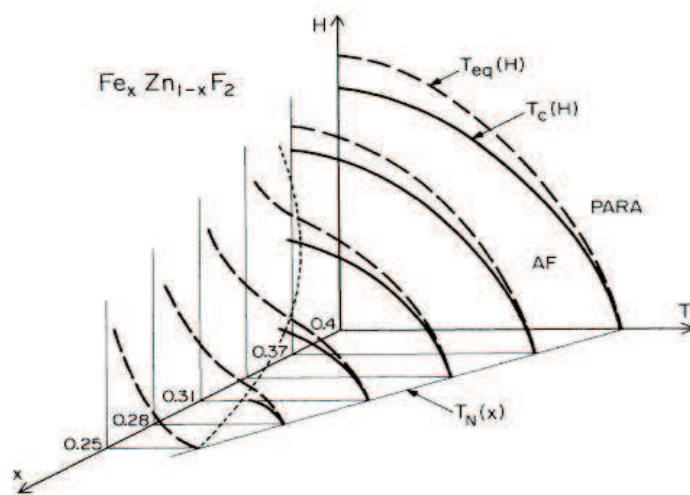


Figura 3.23: Diagrama de fases do composto  $Fe_x Zn_{1-x} F_2$ , campo magnético contra temperatura, para diversos valores da concentração  $x$ . A linha  $T_c(H)$  representa a fronteira crítica entre as fases Paramagnética e Antiferromagnética. A linha  $T_{eq}(H)$  está associada a efeitos de irreversibilidade e é normalmente associada à linha AT. A linha  $T_N(H)$  representa a temperatura de Neil para diferentes valores de  $x$  (da Ref. [24]).

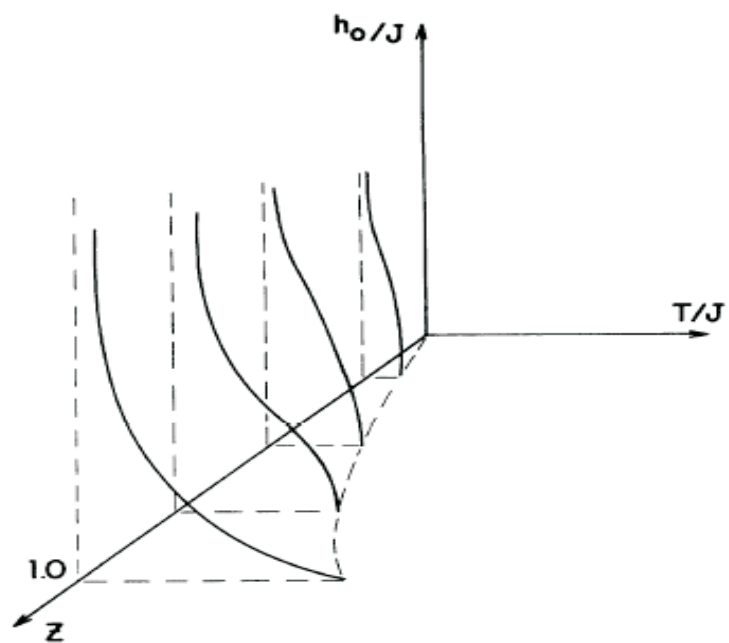


Figura 3.24: Evolução da linha de Almeida-Thouless com a variação de  $\sigma/J$  [ $z = 1/(1 + \sigma/J)$ ]. A região de instabilidade é reduzida com o aumento de  $\sigma/J$  (da Ref. [40]). As variáveis da figura apresentam a seguinte correspondência com as nossas:  $h_o \rightarrow H_o$  e  $k = 1$ .

## Capítulo 4

# Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos sistemas ferromagnéticos e vidros de spins, ambos na presença de campos aleatórios. No caso do vidro de spins, discutimos detalhadamente a solução com simetria de réplicas.

No capítulo 2, fizemos uma revisão da teoria utilizada para resolver os nossos modelos. Discutimos o método das réplicas, o modelo de Ising ferromagnético sob ação de um campo aleatório definido por distribuições bimodal e gaussiana, assim como o modelo de Sherrington-Kirkpatrick e sua estabilidade.

No capítulo 3, estudamos os efeitos de uma distribuição de probabilidades para o campo magnético do tipo gaussiana dupla (centrada em  $+H_o$  e  $-H_o$ , com largura  $\sigma$  cada), em ferromagnetos de Ising e em vidros de spins de Ising.

Para o primeiro sistema, a nossa análise mostrou que os principais efeitos do campo aleatório consistem em diminuir a fase ferromagnética e, nos casos onde há transição de primeira ordem, reduzir a extensão desta linha. Para aleatoriedades suficientemente grandes, as fronteiras

críticas de primeira ordem são totalmente transformadas em fronteiras contínuas; para aleatoriedades ainda maiores, a fase ferromagnética pode ser completamente destruída.

Para o vidro de spins, a nossa análise mostrou que, para um dado valor fixo de  $\sigma$ , poderíamos ter várias situações fisicamente relevantes. Para valores pequenos de  $H_o$ , temos uma transição completamente contínua; para uma pequena faixa de valores de  $H_o$ , temos dois pontos tricríticos, ou seja, uma parte da fronteira crítica é de primeira ordem e duas partes são contínuas; para valores maiores de  $H_o$ , passamos a ter apenas um ponto tricrítico, ligando uma fronteira de transição de primeira ordem a uma fronteira contínua. Se considerarmos valores crescentes de  $\sigma$ , notaremos que a fase independente aumenta, e a ferromagnética diminui, enquanto que as fases vidro de spins e ferromagnética mista são achatadas para a região de baixas temperaturas. Além disso, para um sistema com média nula nas interações ( $J_o = 0$ ), verificamos que a introdução do campo aleatório provoca uma mudança na concavidade da linha de Almeida-Thouless, e a região de instabilidade é reduzida com o aumento da largura das gaussianas ( $\sigma$ ).

Esperamos que alguns dos nossos resultados teóricos possam ser aplicados, pelo menos qualitativamente, a sistemas reais. Em particular, podemos ressaltar as seguintes comparações:

- A conversão da fronteira crítica de primeira ordem em contínua, devido à introdução do campo magnético aleatório, pode explicar um efeito similar verificado no antiferromagneto diluído  $Fe_xMg_{1-x}Cl_2$ ;

- A mudança na concavidade da linha AT, também pela introdução do campo magnético aleatório, pode explicar uma mudança de concavidade observada experimentalmente no diagrama de fases de antiferromagnetos diluídos do tipo  $Fe_xZn_{1-x}F_2$ .

Como problemas em aberto, relacionados diretamente com os modelos estudados neste trabalho, podemos mencionar:

- O estudo destes modelos na presença de campos aleatórios obedecendo outras distribuições de probabilidades;
- A investigação do vidro de spins utilizando o procedimento de quebra de simetria de réplicas;
- A utilização da distribuição de probabilidades do tipo gaussiana dupla em sistemas com variáveis de spins mais próximas da realidade (xy, Heisenberg).

É importante observar que a utilização de uma distribuição de probabilidades do tipo gaussiana dupla, para o estudo de um sistema com campos magnéticos aleatórios, deve se aproximar bem mais de uma situação física real do que a distribuição bimodal. Consideramos que o presente estudo tenha levado a resultados relevantes, com possibilidades de comparação com experimentos, mesmo tendo em vista que o problema tenha sido abordado com a técnica mais simples possível, a teoria do campo médio.

# Apêndice A

## Análise da Estabilidade da Solução com Simetria de Réplicas

Neste apêndice, discutiremos em detalhes a estabilidade da solução utilizada para o modelo SK na presença da distribuição do tipo gaussiana dupla, estudado no capítulo 3. A análise para o caso apresentado na seção 2.4 é análoga.

### A.1 Análise da Estabilidade

A equação relevante para este caso é a energia livre por spin da seção 3.2,

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{(\beta \sigma)^2}{2} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}), \quad (\text{A.1})$$

em que

$$g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) = \frac{\beta J_o}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha, \beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{2} \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}^+) - \frac{1}{2} \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}^-), \quad (\text{A.2})$$



e  $H_{\text{eff}}^{\pm}$  são os “hamiltonianos efetivo”

$$H_{\text{eff}}^{\pm} = \beta J_o \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha,\beta)} q^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} + (\beta\sigma)^2 \sum_{(\alpha,\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} \pm \beta H_o \sum_{\alpha} S^{\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Para analisar as condições que nos dão um mínimo da eq. (A.1), expandimos a função  $g(m^{\alpha}, q^{\alpha\beta})$  em torno da solução com simetria de réplicas, ou seja, se consideramos

$$m^{\alpha} = m + \epsilon^{\alpha} \quad (\text{A.4})$$

$$q^{\alpha\beta} = q + \eta^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.5})$$

para  $\epsilon^{\alpha}$  e  $\eta^{\alpha\beta}$  pequenos, temos

$$\begin{aligned} g(m^{\alpha}, q^{\alpha\beta}) &= g_o + \frac{\partial g}{\partial m^{\alpha}} \epsilon^{\alpha} + \frac{\partial g}{\partial q^{\alpha\beta}} \eta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^{\alpha} \partial m^{\beta}} \epsilon^{\alpha} \epsilon^{\beta} + \frac{1}{2} \\ &\times \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^{\alpha} \partial q^{\alpha\beta}} \epsilon^{\delta} \eta^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

em que  $g_o = g(m, q)$ . Como estamos interessados no mínimo da função  $g$ , as suas derivadas primeiras são nulas, de modo que a eq. (A.6) se torna

$$\begin{aligned} g(m^{\alpha}, q^{\alpha\beta}) &= g_o + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^{\alpha} \partial m^{\beta}} \epsilon^{\alpha} \epsilon^{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial m^{\alpha} \partial q^{\alpha\beta}} \epsilon^{\delta} \eta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Podemos então definir uma matriz de estabilidade  $\mathbf{G}$ , cujos elementos são dados por

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g}{\partial m^{\alpha} \partial m^{\beta}}, \quad (\text{A.8})$$

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial m^{\gamma}}, \quad (\text{A.9})$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}}. \quad (\text{A.10})$$

Vamos calcular então as derivadas segundas das equações acima. Desenvolveremos em detalhes a mais complicada delas; os cálculos das demais são similares. Temos então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} &= \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial g}{\partial q^{\gamma\delta}} \right) = \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\beta}} \left( (\beta J)^2 q^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^+)^{-1} (\beta J)^2 \text{Tr } S^\gamma S^\delta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^+ - \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \times \left. (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^-)^{-1} (\beta J)^2 \text{Tr } S^\gamma S^\delta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^- \right) = (\beta J)^2 \left( \delta_{\alpha\beta, \gamma\delta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\beta}} \langle S^\gamma S^\delta \rangle_+ \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\beta}} \langle S^\gamma S^\delta \rangle_- \right) = (\beta J)^2 \left[ \delta_{\alpha\beta, \gamma\delta} - \frac{1}{2} \left( - (\beta J)^2 \text{Tr } S^\alpha S^\beta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^+ \text{Tr } S^\gamma S^\delta \right. \right. \\
&\quad \times \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^+ (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^+)^{-2} + (\beta J)^2 \text{Tr } S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^+ (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^+)^{-1} \left. \right) - \frac{1}{2} \\
&\quad \times \left( - (\beta J)^2 \text{Tr } S^\alpha S^\beta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^- \text{Tr } S^\gamma S^\delta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^- (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^-)^{-2} + (\beta J)^2 \text{Tr } S^\alpha S^\beta \right. \\
&\quad \left. \times S^\gamma S^\delta \exp \mathcal{H}_{\text{eff}}^- (\text{Tr exp } \mathcal{H}_{\text{eff}}^-)^{-1} \right) \left. \right] = (\beta J)^2 \left[ \delta_{\alpha\beta, \gamma\delta} - \frac{1}{2} (\beta J)^2 (\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_+ \right. \\
&\quad \left. - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ \langle S^\gamma S^\delta \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_- - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- \langle S^\gamma S^\delta \rangle_- \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial m^\gamma} &= -\frac{1}{2} \beta J_o (\beta J)^2 (\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_+ - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ \langle S^\gamma \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_- \\
&\quad - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- \langle S^\gamma \rangle_-),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial m^\alpha \partial m^\beta} &= \beta J_o \left\{ \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \beta J_o (\langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ - \langle S^\alpha \rangle_+ \langle S^\beta \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- \right. \\
&\quad \left. - \langle S^\alpha \rangle_- \langle S^\beta \rangle_-) \right\},
\end{aligned}$$

onde as médias  $\langle \rangle_\pm$  acima são efetuadas em relação aos “hamiltonianos efetivos”  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^\pm$  dados na eq. (A.3) e os índices  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são quaisquer.

Podemos então identificar 7 tipos de elementos distintos na matriz  $\mathbf{G}$ , dependendo das

possíveis escolhas para os índices de réplicas, a saber,

$$G_{\alpha\alpha} = \beta J_o \left\{ 1 - \frac{1}{2} \beta J_o (2 - \langle S^\alpha \rangle_+^2 - \langle S^\alpha \rangle_-^2) \right\} = A, \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} (\beta J_o)^2 \left\{ \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ - \langle S^\alpha \rangle_+^2 + \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- - \langle S^\alpha \rangle_-^2 \right\} \\ &= B, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$G_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} = (\beta J)^2 \left[ 2 - \frac{1}{2} (\beta J)^2 (1 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2) \right] = P,$$

$$G_{(\alpha\beta)(\alpha\delta)} = -\frac{1}{2} (\beta J)^4 \left[ \langle S^\beta S^\delta \rangle_+ - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 + \langle S^\beta S^\delta \rangle_- - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2 \right] = Q,$$

$$\begin{aligned} G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} &= -\frac{1}{2} (\beta J)^4 \left[ \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_+ - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_- \right. \\ &\quad \left. - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2 \right] = R, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \beta J_o (\beta J)^2 (\langle S^\beta \rangle_+ - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ \langle S^\alpha \rangle_+ + \langle S^\beta \rangle_- \\ &\quad - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- \langle S^\alpha \rangle_-) = C, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} G_{\gamma(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \beta J_o (\beta J)^2 (\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_+ - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+ \langle S^\gamma \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_- \\ &\quad - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_- \langle S^\gamma \rangle_-) = D, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

lembrando que, nas equações acima, os índices  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são todos distintos.

Agora, para determinar os autovetores e autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ , vamos seguir o procedimento análogo ao utilizado em [35]. Devemos explorar a simetria da matriz sob a permutação dos  $n$  índices, lembrando que  $n$  é o número de réplicas do sistema. A ordem da matriz é  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , e sendo essa matriz real e simétrica, esse é exatamente o número de autovetores independentes.

Os autovetores  $\vec{\mu}$  de  $\mathbf{G}$  têm a seguinte forma

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \{\epsilon^{(\alpha)}\} \\ \{\eta^{(\alpha\beta)}\} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

em que  $\{\epsilon^{(\alpha)}\}$  e  $\{\eta^{(\alpha\beta)}\}$  são vetores coluna com  $n$  e  $\frac{1}{2}n(n-1)$  elementos, respectivamente.

A equação de autovalores é

$$\mathbf{G}\vec{\mu} = \lambda\vec{\mu}. \quad (\text{A.17})$$

Primeiro, consideraremos o autovetor  $\vec{\mu}_1$ , com elementos dados por

$$\epsilon^{(\alpha)} = a, \quad \forall \alpha \quad (\text{A.18})$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = b, \quad \forall (\alpha\beta) \quad (\text{A.19})$$

Substituindo na equação de autovalores, obtemos

$$Aa + (n-1)Ba + (n-1)Cb + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)Db = \lambda_1 a, \quad (\text{A.20})$$

$$2Ca + (n-2)Da + Pb + 2(n-2)Qb + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)Rb = \lambda_1 b. \quad (\text{A.21})$$

Rearranjando os termos, ficamos com

$$[A + (n-1)B - \lambda_1]a + [(n-1)C + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)D]b = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$[2C + (n-2)D]a + [P + 2(n-2)Q + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)R - \lambda_1]b = 0, \quad (\text{A.23})$$

para as quais temos dois autovalores não degenerados,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{1}{2}\{[A + (n-1)B + P + 2(n-2)Q + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)R] \\ & \pm [(A + (n-1)B - P - 2(n-2)Q - \frac{1}{2}(n-2)(n-3)R)^2 \\ & + 2(n-1)(2C + (n-2)D)^2]^{1/2}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Em seguida consideraremos vetores  $\vec{\mu}_2$  da forma

$$\epsilon^{(\alpha)} = a, \quad \alpha = \theta, \quad (\text{A.25})$$

$$\epsilon^{(\alpha)} = b, \quad \alpha \neq \theta, \quad (\text{A.26})$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = c, \quad \alpha \text{ ou } \beta = \theta, \quad (\text{A.27})$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = d, \quad \alpha, \beta \neq \theta. \quad (\text{A.28})$$

Substituindo na equação de autovalores, obtemos

$$Aa + (n-1)Bb + (n-1)Cc + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)Dd = \lambda_2 a, \quad (\text{A.29})$$

$$Ca + Cb + (n-2)Db + Pc + 2(n-2)Qc + (n-2)Qd + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)Rd = \lambda_2 c. \quad (\text{A.30})$$

Para garantir a ortogonalidade dos autovetores  $\vec{\mu}_1$  e  $\vec{\mu}_2$ , ou seja, para termos  $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 = 0$ , devemos ter

$$a = (1-n)b, \quad (\text{A.31})$$

$$c = \left(1 - \frac{1}{2}n\right)d. \quad (\text{A.32})$$

Assim, substituindo esse resultado nas eqs. (A.29) e (A.30), chegamos a

$$[A - \lambda_2 - B]a + (n-1)(C-D)c = 0, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{n-2}{n-1}(C-D)a + [P + (n-4)Q - (n-3)R - \lambda_2]c = 0, \quad (\text{A.34})$$

que possui dois outros autovalores,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\{[A - B + P + (n - 4)Q - (n - 3)R] \pm [(A - B - P - (n - 4)Q + (n - 3)R)^2 + 4(n - 2)(C - D)^2]^{1/2}\}, \quad (\text{A.35})$$

com degenerescência  $n - 1$ .

Finalmente, temos a terceira classe de autovalores, a saber

$$\epsilon^{(\alpha)} = a, \quad \alpha = \theta \quad \text{ou} \quad \nu, \quad (\text{A.36})$$

$$\epsilon^{(\alpha)} = b, \quad \alpha \neq \theta, \nu, \quad (\text{A.37})$$

$$\eta^{(\theta\nu)} = c, \quad \alpha = \theta \quad \text{e} \quad \beta = \nu, \quad (\text{A.38})$$

$$\eta^{(\alpha\theta)} = \eta^{(\alpha\nu)} = d, \quad \alpha \neq \theta, \nu, \quad (\text{A.39})$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = e, \quad \alpha \neq \theta \quad \text{e} \quad \beta \neq \nu. \quad (\text{A.40})$$

Substituindo na equação de autovalores, obtemos

$$\begin{aligned} Aa + Ba + (n - 2)Bb + Cc + (n - 2)Cd + (n - 2)Dd + \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)De &= \lambda_3 a, \\ 2Ca + (n - 2)Db + Pc + 2(n - 2)Qd + \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)Re &= \lambda_3 c. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

A ortogonalidade dos autovetores,  $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 = 0$ ,  $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_3 = 0$  e  $\vec{\mu}_2 \cdot \vec{\mu}_3 = 0$ , nos dá  $a = b = 0$  e  $c = (2 - n)d$  e  $d = \frac{1}{2}(3 - n)e$ . Substituindo estes resultados nas equações acima, a primeira das eqs. (A.41) é satisfeita trivialmente (resultando em  $0 = 0$ ), enquanto que a segunda nos dá que

$$\lambda_3 = P - 2Q + R, \quad (\text{A.42})$$

com degenerescência  $\frac{1}{2}n(n-3)$ .

A fronteira de estabilidade (linha AT) é determinada pelo autovalor  $\lambda_3$ , já que, no limite  $n = 0$ , temos  $\lambda_1 = \lambda_2 \geq 0$ . A solução com simetria de réplicas é estável para  $\lambda_3 > 0$ , tornando-se instável para  $\lambda_3 < 0$ , definindo assim a fronteira de instabilidade

$$\begin{aligned}
& (\beta J)^2 \left[ 2 - \frac{1}{2}(\beta J)^2 (1 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2) \right] - 2 \left\{ -\frac{1}{2}(\beta J)^4 \left[ \langle S^\beta S^\delta \rangle_+ \right. \right. \\
& \left. \left. - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 + \langle S^\beta S^\delta \rangle_- - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2 \right] \right\} - \frac{1}{2}(\beta J)^4 \left[ \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_+ \right. \\
& \left. - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_+^2 + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_- - \langle S^\alpha S^\beta \rangle_-^2 \right] = 0. \tag{A.43}
\end{aligned}$$

Os valores médios que aparecem na equação acima são  $m$  e  $q$ , dados respectivamente pelas eqs. (3.35) e (3.36), assim como as quantidades

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2} (\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle_-) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^3 \xi^+ \\
&+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^3 \xi^- \tag{A.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{2} (\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_+ + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle_-) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^4 \xi^+ \\
&+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^4 \xi^-, \tag{A.45}
\end{aligned}$$

lembrando que

$$\xi^\pm = \beta \left\{ J_o m + J \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z \pm H_o \right\}. \tag{A.46}$$

Sendo assim, a eq. (A.43) pode ser escrita como

$$\left( \frac{kT}{J} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \operatorname{sech}^4 \xi^-, \tag{A.47}$$

que é a linha AT procurada, de acordo com a eq. (3.37) desta dissertação.

## A.2 Expansão para Baixas Temperaturas

Vamos agora partir da eq. (A.47) e efetuar sua expansão para baixas temperaturas. Se definirmos

$$g = \left[ q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{A.48})$$

podemos reescrever a eq. (A.46) como

$$z = \frac{kT\xi^\pm - J_o m \mp H_o}{Jg}. \quad (\text{A.49})$$

A variável  $\xi^\pm$  é controlada pela  $\text{sech}^4 \xi^\pm$ , que é limitada, já que a  $\text{sech}^4 \xi^\pm \rightarrow 0$  quando  $\xi^\pm \rightarrow \pm\infty$ . Sendo assim, escrevemos

$$\exp \left[ -\frac{z^2}{2} \right] = \exp \left[ -\frac{(kT\xi^\pm - J_o m \mp H_o)^2}{2J^2g^2} \right] \cong \exp \left[ -\frac{(J_o m \pm H_o)^2}{2J^2g^2} \right], \quad (\text{A.50})$$

para  $kT\xi^\pm \ll J_o m$ , ou seja, para  $T$  pequeno. Então, substituindo este resultado na eq. (A.47),

obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{kT}{J} \right)^2 &\cong \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{kT}{Jg} \exp \left[ -\frac{(J_o m + H_o)^2}{2J^2g^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi^+ \text{sech}^4 \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{kT}{Jg} \\ &\times \exp \left[ -\frac{(J_o m - H_o)^2}{2J^2g^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi^- \text{sech}^4 \xi^-, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

As integrais na equação acima são tabeladas,

$$\int dx \text{sech}^4 x = \tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x, \quad (\text{A.52})$$



que, tomada nos limites exigidos, resulta em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{sech}^4 x = \frac{4}{3}. \quad (\text{A.53})$$

Finalmente, com esses resultados, e lembrando que para a instabilidade ocorrendo em baixas temperaturas da fase ferromagnética,  $q \rightarrow 1$  e  $m \rightarrow 1$ , de tal forma que a eq. (A.51) resulta em

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{G} \left\{ \exp \left[ -\frac{(J_o + H_o)^2}{2J^2G^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(J_o - H_o)^2}{2J^2G^2} \right] \right\}, \quad (\text{A.54})$$

em que  $G$  é dado pela eq. (3.39) da dissertação, ou seja,

$$G = \left( 1 + \left[ \frac{\sigma}{J} \right]^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A.55})$$

A eq. (A.54) corresponde à eq. (3.38) do presente trabalho.

## Apêndice B

# Expansões em Séries de Potências para a Magnetização

Neste apêndice, efetuaremos em detalhes as expansões para a magnetização em séries de potências de  $m$  utilizadas ao longo desta dissertação. Como este tipo de expansão foi realizado mais de uma vez, dividiremos este apêndice em seções.

### B.1 Ferromagneto de Ising

Este modelo foi discutido na seção 3.1. A equação relevante para esse caso é

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^-, \quad (\text{B.1})$$

lembrando que

$$\Phi^\pm = \beta(Jm + \sigma z \pm H_o). \quad (\text{B.2})$$

Vamos definir

$$\Phi_o^\pm = \beta(\sigma z \pm H_o). \quad (\text{B.3})$$

Agora, expandindo  $\tanh \Phi^\pm$  em potências de  $m$ , ficamos com

$$\begin{aligned}
\tanh \Phi^\pm &= \tanh \beta(Jm + \sigma z \pm H_o) = \tanh \Phi_o^\pm + \beta J m \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm - (\beta J)^2 m^2 \tanh \Phi_o^\pm \\
&\quad \times \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm - \frac{(\beta J)^3}{3} m^3 \{ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm - 3 \tanh^2 \Phi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm \} + \frac{(\beta J)^4}{3} m^4 \\
&\quad \times \{ 2 \tanh \Phi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm - 3 \tanh^3 \Phi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm \} + \frac{(\beta J)^5}{15} m^5 \{ 2 \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm \\
&\quad - 15 \tanh^2 \Phi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm + 15 \tanh^4 \Phi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \Phi_o^\pm \} + O(m^6). \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na eq. (B.1), obtemos

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int Dz \{ \tanh \Phi_o^+ + \beta J m \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ - (\beta J)^2 m^2 \tanh \Phi_o^+ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ - \frac{(\beta J)^3}{3} m^3 \\
&\quad \times [ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ - 3 \tanh^2 \Phi_o^+ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ ] + \frac{(\beta J)^4}{6} m^4 [ 2 \tanh \Phi_o^+ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ - 3 \tanh^3 \Phi_o^+ \\
&\quad \times \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ ] + \frac{(\beta J)^5}{15} m^5 [ 2 \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ - 15 \tanh^2 \Phi_o^+ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ + 15 \tanh^4 \Phi_o^+ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^+ ] \\
&\quad + O(m^6) \} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int Dz \{ \tanh \Phi_o^- + \beta J m \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- - (\beta J)^2 m^2 \tanh \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- \\
&\quad - \frac{(\beta J)^3}{3} m^3 [ \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- - 3 \tanh^2 \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- ] + \frac{(\beta J)^4}{6} m^4 [ 2 \tanh \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- \\
&\quad - 3 \tanh^3 \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- ] + \frac{(\beta J)^5}{15} m^5 [ 2 \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- - 15 \tanh^2 \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- \\
&\quad + 15 \tanh^4 \Phi_o^- \operatorname{sech}^2 \Phi_o^- ] + O(m^6) \}, \tag{B.5}
\end{aligned}$$

onde

$$\int Dz(\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)(\dots). \tag{B.6}$$

Efetuaremos a troca  $z \rightarrow -z$  nas integrais que apresentam o termo  $-H_o$ , ou seja, nas funções hiperbólicas com o argumento  $\Phi_o^-$ . Desta forma, as integrais que possuírem integrando

ímpar se anularão, já que o intervalo de integração é simétrico em relação a zero. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
m &= \beta J \left\{ 1 - \int Dz \tanh^2 \beta(\sigma z + H_o) \right\} m - \frac{(\beta J)^3}{3} \left\{ 1 - 4 \int Dz \tanh^2 \beta(\sigma z + H_o) \right. \\
&\quad \left. + 3 \int Dz \tanh^4 \beta(\sigma z + H_o) \right\} m^3 + \frac{(\beta J)^5}{15} \left\{ 2 - 17 \int Dz \tanh^2 \beta(\sigma z + H_o) \right. \\
&\quad \left. + 30 \int Dz \tanh^4 \beta(\sigma z + H_o) - 15 \int Dz \tanh^6 \beta(\sigma z + H_o) \right\} m^5 + O(m^7). \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

Se reescrevermos a eq. (B.7) na forma

$$m = Am + Bm^3 + Cm^5 + O(m^7), \quad (\text{B.8})$$

então teremos

$$A = \beta J \{1 - \rho_1\}, \quad (\text{B.9})$$

$$B = -\frac{(\beta J)^3}{3} \{1 - 4\rho_1 + 3\rho_2\}, \quad (\text{B.10})$$

$$C = \frac{(\beta J)^5}{15} \{2 - 17\rho_1 + 30\rho_2 - 15\rho_3\}, \quad (\text{B.11})$$

onde empregamos a notação

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^{2k} \beta(H_o + \sigma z). \quad (\text{B.12})$$

As eqs. (B.8), (B.9), (B.10), (B.11) e (B.12) correspondem às eqs. (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) desta dissertação.

## B.2 Vidro de Spins de Ising

Este modelo foi estudado na seção 3.2. As equações relevantes para esse caso são

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^- \quad (\text{B.13})$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \xi^-, \quad (\text{B.14})$$

lembrando que

$$\xi^\pm = \beta \left\{ J_o m + J \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z \pm H_o \right\}. \quad (\text{B.15})$$

Vamos então definir

$$\xi_o^\pm = \beta \left\{ J \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z \pm H_o \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Agora, expandimos os termos  $\tanh \xi^\pm$  da eq. (B.13) em potências de  $m$ ,

$$\begin{aligned} \tanh \xi^\pm &= \tanh \beta \left\{ J_o m + J \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z \pm H_o \right\} = \tanh \xi_o^\pm + \beta J m \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm \\ &\quad - (\beta J)^2 m^2 \tanh \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm - \frac{(\beta J)^3}{3} m^3 \{ \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm - 3 \tanh^2 \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm \} \\ &\quad + \frac{(\beta J)^4}{3} m^4 \{ 2 \tanh \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm - 3 \tanh^3 \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm \} + \frac{(\beta J)^5}{15} m^5 \\ &\quad \{ 2 \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm - 15 \tanh^2 \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm + 15 \tanh^4 \xi_o^\pm \operatorname{sech}^2 \xi_o^\pm \} + O(m^6). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Agora, substituímos este resultado na eq. (B.13) e obtemos um resultado análogo ao da eq.

(B.7), ou seja,

$$\begin{aligned} m &= \beta J \left\{ 1 - \int Dz \tanh^2 \xi_o^+ \right\} m - \frac{(\beta J)^3}{3} \left\{ 1 - 4 \int Dz \tanh^2 \xi_o^+ \right. \\ &\quad \left. + 3 \int Dz \tanh^4 \xi_o^+ \right\} m^3 + \frac{(\beta J)^5}{15} \left\{ 2 - 17 \int Dz \tanh^2 \xi_o^+ \right. \\ &\quad \left. + 30 \int Dz \tanh^4 \xi_o^+ - 15 \int Dz \tanh^6 \xi_o^+ \right\} m^5 + O(m^7). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Novamente, se reescrevermos essa equação na forma

$$m = A_1(q)m + A_3(q)m^3 + A_5(q)m^5 + O(m^7), \quad (\text{B.19})$$

temos que

$$A_1(q) = \beta J_o \{1 - \rho_1(q)\}, \quad (\text{B.20})$$

$$A_3(q) = -\frac{(\beta J_o)^3}{3} \{1 - 4\rho_1(q) + 3\rho_2(q)\}, \quad (\text{B.21})$$

$$A_5(q) = \frac{(\beta J_o)^5}{15} \{2 - 17\rho_1(q) + 30\rho_2(q) - 15\rho_3(q)\}. \quad (\text{B.22})$$

Note que estes coeficientes dependem de  $q$ , que por sua vez dependem de  $m$ . Para eliminar esta dependência, devemos expandir a eq. (B.14) em potências de  $m$ . Para isto, consideraremos

$$q = q_o + cm^2 + O(m^4), \quad (\text{B.23})$$

em que  $q_o$  corresponde ao parâmetro de vidro de spins, eq. (B.14), com  $m = 0$ , enquanto que  $c$  será determinado a seguir. Desta forma, o termo no radical da eq. (B.16) fica

$$\begin{aligned} \left(q + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2\right)^{1/2} &= \left(q_o + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2 + cm^2\right)^{1/2} = \left(q_o + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2\right)^{1/2} \\ &\times \left(1 + \frac{cm^2}{Q_o}\right)^{1/2} \simeq Q_o^{1/2} \left(1 + \frac{cm^2}{2Q_o}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

onde definimos

$$Q_o = q_o + \left(\frac{\sigma}{J}\right)^2. \quad (\text{B.25})$$

Definindo agora

$$\Xi_o^\pm = \beta(JQ_o^{1/2}z \pm H_o), \quad (\text{B.26})$$

podemos expandir os termos  $\tanh^2 \xi^\pm$  da eq. (B.14) na seguinte forma,

$$\begin{aligned} \tanh^2 \xi^\pm &= \tanh^2 \beta \left\{ J_o m + J \left( q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z \pm H_o \right\} \cong \tanh^2 \Xi_o^\pm + 2\beta J_o m \{ \tanh \Xi_o^\pm \\ &\quad - \tanh^3 \Xi_o^\pm \} + (\beta J_o)^2 m^2 \{ 1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^\pm + 3 \tanh^4 \Xi_o^\pm \} - \beta J_c Q_o^{-1/2} z m^2 \\ &\quad \times \{ \tanh \Xi_o^\pm - \tanh^3 \Xi_o^\pm \} + O(m^3). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Substituindo a eq. (B.27) na eq. (B.14), ficamos com

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \int Dz [\tanh^2 \Xi_o^+ + \tanh^2 \Xi_o^-] + \frac{1}{2} 2\beta J_o m \int Dz [\tanh \Xi_o^+ + \tanh \Xi_o^-] - \frac{1}{2} 2\beta J_o m \\ &\quad \times \int Dz [\tanh^3 \Xi_o^+ + \tanh^3 \Xi_o^-] + \frac{1}{2} (\beta J_o)^2 m^2 \int Dz [1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^+ + 3 \tanh^4 \Xi_o^+ \\ &\quad + 1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^- + 3 \tanh^4 \Xi_o^-] + \frac{1}{2} \beta J Q_o^{-1/2} m^2 \int Dz z [\tanh \Xi_o^+ + \tanh \Xi_o^-] \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta J Q_o^{-1/2} m^2 \int Dz z [\tanh^3 \Xi_o^+ + \tanh^3 \Xi_o^-]. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Trocando  $z \rightarrow -z$  nas integrais com  $\Xi_o^-$ , obtemos

$$\begin{aligned} q &= \int Dz \tanh^2 \Xi_o^+ + (\beta J_o)^2 m^2 \int Dz [1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^+ + 3 \tanh^4 \Xi_o^+] + \beta J Q_o^{-1/2} m^2 \\ &\quad \times \int Dz z [\tanh \Xi_o^+ - \tanh^3 \Xi_o^+] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Definindo agora

$$\Gamma = \int Dz [1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^+ + 3 \tanh^4 \Xi_o^+], \quad (\text{B.30})$$

a eq. (B.29) resulta em

$$\begin{aligned} q &= \int Dz \tanh^2 \Xi_o^+ + (\beta J_o)^2 m^2 \Gamma + \beta J Q_o^{-1/2} m^2 \\ &\quad \times \int Dz z [\tanh \Xi_o^+ - \tanh^3 \Xi_o^+] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Efetuada uma integração por partes nas integrais em  $z \tanh \Xi_o^+$  e  $z \tanh^3 \Xi_o^+$ ,

$$\int Dz z \tanh \Xi_o^+ = \beta J Q_o^{1/2} \int Dz [1 - \tanh^2 \Xi_o^+], \quad (\text{B.32})$$

$$\int Dz z \tanh^3 \Xi_o^+ = 3\beta J Q_o^{1/2} \int Dz [\tanh^2 \Xi_o^+ - \tanh^4 \Xi_o^+]. \quad (\text{B.33})$$

Substituindo estes resultados na eq. (B.31), ficamos com

$$\begin{aligned} q &= \int Dz \tanh^2 \Xi_o^+ + (\beta J_o)^2 m^2 \Gamma + (\beta J)^2 c m^2 \\ &\quad \times \int Dz [1 - 4 \tanh^2 \Xi_o^+ + 3 \tanh^4 \Xi_o^+] = \\ &\quad \int Dz \tanh^2 \Xi_o^+ + [(\beta J_o)^2 \Gamma + (\beta J)^2 c \Gamma] m^2 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

É importante lembrar que supomos, no início desse apêndice, a forma  $q = q_o + c m^2$ ; comparando com a eq. (B.34) obtemos

$$q_o = \int Dz \tanh^2 \Xi_o^+, \quad (\text{B.35})$$

$$c = (\beta J_o)^2 \Gamma + (\beta J)^2 c \Gamma \Rightarrow c = \frac{(\beta J_o)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma}. \quad (\text{B.36})$$

Assim, a expansão para  $q$  resulta em

$$q = q_o + \frac{(\beta J_o)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} m^2 + O(m^4), \quad (\text{B.37})$$

que corresponde à eq. (3.45) do presente trabalho.



Agora, com a expansão para  $q$  em potências de  $m$ , podemos finalmente utilizar este resultado na expansão para  $m$ , eq. (B.18), de tal maneira a eliminar a dependência em  $q$  dos coeficientes  $A_1$ ,  $A_3$  e  $A_5$ .

Primeiramente, calcularemos a correção em  $\rho_1(q)$ . Temos que

$$\rho_1(q) = \int Dz \tanh^2 \beta \left\{ J \left( q_o + cm^2 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z + H_o \right\}. \quad (\text{B.38})$$

Utilizando a eq. (B.24), expandimos o termo  $\tanh^2 \beta \{ \dots \}$  da eq. (B.38), e obtemos

$$\begin{aligned} \tanh^2 \beta \left\{ J \left( q_o + cm^2 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2} z + H_o \right\} &= \tanh^2 \beta \left[ JQ_o^{1/2} z + \frac{1}{2} JcQ_o^{-1/2} m^2 z \right. \\ &\left. + H_o \right] = \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] + m^2 \beta JcQ_o^{-1/2} z \tanh \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] \\ &\times \text{sech}^2 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] + O(m^3) = \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] + \beta JcQ_o^{-1/2} m^2 z \\ &\times \{ \tanh \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] - \tanh^3 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] \} + O(m^3). \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Utilizando este resultado na eq. (B.38), ficamos com

$$\begin{aligned} \rho_1(q_o) &= \int Dz \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] + \frac{\beta Jc}{Q_o^{1/2}} m^2 \int Dzz \tanh \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o] - \frac{\beta Jc}{Q_o^{1/2}} m^2 \\ &\times \int Dzz \tanh^3 \beta [JQ_o^{1/2} z + H_o]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Estas integrais foram calculadas anteriormente, nas eqs. (B.32) e (B.33). Finalmente, volta-

mos à eq. (B.40) e obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1(q_o) &= \int Dz \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] + (\beta J)^2 cm^2 \left\{ 1 - \int Dz \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] \right\} \\
&\quad - (\beta J)^2 cm^2 \int Dz \{ \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] - \tanh^4 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] \} = \\
&\quad \int Dz \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] + (\beta J)^2 cm^2 \int Dz \{ 1 - 4 \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z \\
&\quad + H_o] + 3 \tanh^4 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] \}. \tag{B.41}
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$q_o = \int Dz \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o], \tag{B.42}$$

$$\Gamma = \int Dz \{ 1 - 4 \tanh^2 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] + 3 \tanh^4 \beta [JQ_o^{1/2}z + H_o] \}, \tag{B.43}$$

e do resultado para o parâmetro  $c$  [ver eq. (B.36)], obtemos que

$$\rho_1(q_o) = q_o + (\beta J)^2 cm^2 \Gamma = q_o + (\beta J)^2 \left[ \frac{(\beta J_o)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} \right] m^2 \Gamma. \tag{B.44}$$

Neste apêndice, efetuaremos uma expansão da magnetização até a terceira potência em  $m$ .

O termo com  $\rho_2(q)$  na eq. (B.21) já multiplica  $m^3$ , então não é necessário expandi-lo como fizemos com  $\rho_1(q)$ . Assim, utilizando o resultado da eq. (B.44) e considerando  $\rho_2(q) = \rho_2(q_o)$ ,

a eq. (B.18) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
m &= \beta J_o \left[ 1 - q_o - \frac{(\beta J)^2 (\beta J_o)^2 \Gamma^2 m^2}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} \right] m - \frac{(\beta J_o)^3}{3} [1 - 4\rho_1(q_o) + 3\rho_2(q_o)] m^3 \\
&\quad + O(m^5) = \beta J_o (1 - q_o) m - \frac{(\beta J)^2 (\beta J_o)^2 \Gamma^2 m^2}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} m^3 - \frac{(\beta J_o)^3}{3} \Gamma m^3 = \beta J_o \\
&\quad \times (1 - q_o) m - \frac{(\beta J_o)^3}{3} \left[ \frac{1 + 2(\beta J)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} \right] m^3 + O(m^5). \tag{B.45}
\end{aligned}$$

Se reescrevermos essa equação na forma

$$m = A'_1 m + A'_3 m + O(m^5), \quad (\text{B.46})$$

concluimos que

$$A'_1 = \beta J_o(1 - q_o) = A_1(q_o) \quad (\text{B.47})$$

$$A'_3 = -\frac{(\beta J_o)^3}{3} \left[ \frac{1 + 2(\beta J)^2 \Gamma}{1 - (\beta J)^2 \Gamma} \right] \Gamma. \quad (\text{B.48})$$

Essas três últimas equações correspondem às eqs. (3.47), (3.48) e (3.49) deste trabalho.

# Apêndice C

## Expansões em Baixas Temperaturas

Neste apêndice efetuaremos as expansões em baixas temperaturas utilizadas no capítulo 3 deste trabalho.

### C.1 Ferromagneto de Ising

Consideremos a expansão da seção 3.1. As equações relevantes são

$$f = \frac{J}{2}m^2 - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \Phi^+) - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \Phi^-) \quad (\text{C.1})$$

e

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \Phi^-, \quad (\text{C.2})$$

com

$$\Phi^\pm = \beta(Jm + \sigma z \pm H_o). \quad (\text{C.3})$$

Consideremos inicialmente a magnetização, eq. (C.2); neste caso, temos,

$$\tanh \beta(Jm + \sigma z \pm H_o) \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{se } z > \Lambda^\pm \\ < 0 & \text{se } z < \Lambda^\pm \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

em que

$$\Lambda^\pm = \frac{-Jm \mp H_o}{\sigma}. \quad (\text{C.5})$$

Mas

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1. \quad (\text{C.6})$$

Utilizando este resultado, obtemos para a eq. (C.2)

$$m = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \frac{1}{e^{-2\beta\sigma(z-\Lambda^+)} + 1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \frac{1}{e^{-2\beta\sigma(z-\Lambda^-)} + 1} \quad (\text{C.7})$$

Trocando  $z \rightarrow -z$  nas integrais, ficamos com

$$m = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-z^2/2}}{e^{2\beta\sigma(z+\Lambda^+)} + 1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-z^2/2}}{e^{2\beta\sigma(z+\Lambda^-)} + 1}. \quad (\text{C.8})$$

As integrais acima podem ser escritas como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz h(z) f^\pm(z), \quad (\text{C.9})$$

em que

$$h(z) = e^{-z^2/2} \quad (\text{C.10})$$

$$f^\pm(z) = \frac{1}{e^{2\beta\sigma(z+\Lambda^\pm)} + 1}. \quad (\text{C.11})$$

Vamos agora empregar a expansão de Sommerfeld [44] para as integrais da eq. (C.9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz h(z)f(z) = \int_{-\infty}^{-\Lambda} dz h(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{\sigma} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Lambda), \quad (\text{C.12})$$

em que

$$a_n = \left[ 2 - \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right] 2^{2n-1} \frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \quad (\text{C.13})$$

e  $B_n$  são os números de Bernoulli, cujos primeiros são [45]

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6}, \\ B_2 &= \frac{1}{30}, \\ B_3 &= \frac{1}{42}, \\ B_4 &= \frac{1}{30}, \\ B_5 &= \frac{5}{66}. \end{aligned}$$

Utilizando esta expansão na eq. (C.8), obtemos

$$\begin{aligned} m &= -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{-\Lambda^+} dz e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{\sigma} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Lambda^+) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{-\Lambda^-} dz e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \left( \frac{kT}{\sigma} \right)^{2m} \frac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}} h(z = -\Lambda^-). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2/2}, \\ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2}, \\ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

podemos escrever

$$2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^x dz e^{-z^2/2} + \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \right] = 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^x dz e^{-z^2/2} = 2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2} = 2 - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Assim,

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{-\Lambda^+}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{\sigma} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Lambda^+) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{-\Lambda^-}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \left( \frac{kT}{\sigma} \right)^{2m} \frac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}} h(z = -\Lambda^-). \quad (\text{C.16})$$

Para  $T = 0$ , esta expressão resulta em

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right), \quad (\text{C.17})$$

que corresponde à eq. (3.12) deste trabalho. Agora, expandimos essa expressão em potências

de  $m$ , lembrando que, para pequenos argumentos,

$$\operatorname{erf}(x) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots \right), \quad (\text{C.18})$$

e obtemos

$$\operatorname{erf} \left[ \frac{Jm \pm H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right] \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{Jm \pm H_o}{\sigma\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{Jm \pm H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{Jm \pm H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right)^5 + \dots \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \pm \left( \frac{H_o}{\sigma} \right) + \left( \frac{J}{\sigma} \right) m - \left( \frac{J}{\sigma} \right)^3 m^3 \mp \left( \frac{J}{\sigma} \right)^2 \left( \frac{H_o}{\sigma} \right) m^2 - \left( \frac{J}{\sigma} \right)$$

$$\times \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^2 m \mp \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^3 + \left( \frac{J}{\sigma} \right)^5 m^5 \pm \left( \frac{J}{\sigma} \right)^4 \left( \frac{H_o}{\sigma} \right) m^4 + \left( \frac{J}{\sigma} \right)^3$$

$$\times \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^2 m^3 \pm \left( \frac{J}{\sigma} \right)^2 \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^3 m^2 + \left( \frac{J}{\sigma} \right) \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^4 m$$

$$\pm \left( \frac{H_o}{\sigma} \right)^5 + \dots \left. \right\} \quad (\text{C.19})$$

Retornando à eq. (C.17), obtemos

$$\begin{aligned}
m &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} m + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right)^3 \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} m^3 \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right)^5 \left\{ \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 - \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 + 3 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} m^5 + O(m^7). \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Se notarmos que

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} = \exp\left(-\frac{H_o^2}{2\sigma^2}\right), \tag{C.21}$$

podemos reescrever a eq. (C.20) como

$$m = am + bm^3 + cm^5 + O(m^7), \tag{C.22}$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{H_o^2}{2\sigma^2}\right) \tag{C.23}$$

$$b = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right)^3 \left\{ \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 - 1 \right\} \exp\left(-\frac{H_o^2}{2\sigma^2}\right) \tag{C.24}$$

$$c = \frac{1}{120} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{J}{\sigma}\right)^5 \left\{ \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^4 - 6 \left(\frac{H_o}{\sigma}\right)^2 + 3 \right\} \exp\left(-\frac{H_o^2}{2\sigma^2}\right). \tag{C.25}$$

Essas últimas quatro equações correspondem às eqs. (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) deste trabalho.



Agora consideremos a energia livre. Vamos, primeiro, analisar as integrais da eq. (C.1).

Seja

$$D^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \beta[Jm \pm H_o + \sigma z]). \quad (C.26)$$

Em baixas temperaturas, temos

$$\cosh \beta(Jm \pm H_o + \sigma z) \cong \frac{1}{2} \exp \beta|Jm \pm H_o + \sigma z| + \dots \quad (C.27)$$

Assim,

$$D^\pm \cong \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2/2} |Jm \pm H_o + \sigma z|. \quad (C.28)$$

O argumento da exponencial na eq. (C.27) se anula para

$$z = \frac{-Jm \mp H_o}{\sigma}. \quad (C.29)$$

Definimos então

$$v \equiv \frac{-Jm \mp H_o}{\sigma}, \quad (C.30)$$

e voltamos à eq. (C.28) para obter

$$\begin{aligned} D^\pm &= \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v dz e^{-z^2/2} \{-(Jm + \sigma z \pm H_o)\} + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_v^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \{Jm + \sigma z \pm H_o\} \\ &+ \dots = -\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 dz e^{-z^2/2} (Jm + \sigma z \pm H_o) + \int_0^v dz e^{-z^2/2} (Jm + \sigma z \pm H_o) \right\} \\ &+ \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_v^0 dz e^{-z^2/2} (Jm + \sigma z \pm H_o) + \int_0^{+\infty} dz e^{-z^2/2} (Jm + \sigma z \pm H_o) \right\} = \\ &-\frac{1}{2} \beta (Jm \pm H_o) - \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dz z e^{-z^2/2} - \frac{\beta (Jm \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v dz e^{-z^2/2} - \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_0^v dz z e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \beta (Jm \pm H_o) + \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dz z e^{-z^2/2} + \frac{\beta (Jm \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_v^0 dz e^{-z^2/2} + \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_v^0 dz z e^{-z^2/2} + \dots \end{aligned}$$

Rearrumando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
D^\pm &= -2\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dz ze^{-z^2/2} - 2\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v dz ze^{-z^2/2} + 2\frac{\beta(Jm \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v dz e^{-z^2/2} \\
&+ \dots = -2\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v dz ze^{-z^2/2} + 2\frac{\beta(Jm \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v dz e^{-z^2/2} + \dots \quad (C.31)
\end{aligned}$$

Lembremos que

$$\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x), \quad (C.32)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2/2} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (C.33)$$

$$\int_0^x dz ze^{-z^2/2} = 1 - \exp(-x^2/2). \quad (C.34)$$

Voltando à eq. (C.31), obtemos

$$\begin{aligned}
f &= \frac{J}{2}m^2 - \frac{1}{2\beta}(D^+ + D^-) = \frac{J}{2}m^2 - \frac{1}{2}(Jm + H_o)\operatorname{erf}\left(\frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \\
&\times \exp\left[-\frac{(Jm - H_o)^2}{2\sigma^2}\right] - \frac{1}{2}(Jm - H_o)\operatorname{erf}\left(\frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \\
&\times \exp\left[-\frac{(Jm + H_o)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{J}{2}m^2 - Jm\left\{\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\right. \\
&\times \operatorname{erf}\left(\frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right)\left.\right\} - H_o\left\{\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(Jm + H_o)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(Jm - H_o)^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \quad (C.35)
\end{aligned}$$

Lembrando que, para  $T = 0$ , temos [eq. (C.17)]

$$m = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (C.36)$$

obtemos da eq. (C.35)

$$f = -\frac{J}{2}m^2 - \frac{H_o}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{Jm + H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{Jm - H_o}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left( -\frac{(Jm + H_o)^2}{2\sigma^2} \right) + \exp \left( -\frac{(Jm - H_o)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} \quad (\text{C.37})$$

que corresponde à eq. (3.13) desta dissertação.

## C.2 Vidro de Spins de Ising

Consideraremos a expansão da seção 3.2.2. As equações relevantes são

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \xi^-, \quad (\text{C.38})$$

e

$$f = -\frac{\beta J^2}{4}(1-q)^2 + \frac{J_o}{2}m^2 - \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \xi^+) - \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \xi^-), \quad (\text{C.39})$$

em que

$$\xi^\pm = \beta \{ J_o m + JQ^{1/2}z \pm H_o \} \quad (\text{C.40})$$

e

$$Q = q + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2. \quad (\text{C.41})$$

Consideraremos inicialmente a magnetização. Para este caso, temos

$$\tanh \beta \{ J_o m + JQ^{1/2}z \pm H_o \} \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{se } z > \Omega^\pm \\ < 0 & \text{se } z < \Omega^\pm \end{cases} \quad (\text{C.42})$$

onde

$$\Omega^\pm = \frac{-J_o m \mp H_o}{JQ^{1/2}}. \quad (\text{C.43})$$

Mas

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1. \quad (\text{C.44})$$

Utilizando este resultado, obtemos para a eq. (C.38)

$$m = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \frac{1}{e^{-2\beta JQ^{1/2}(z-\Omega^+)} + 1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \frac{1}{e^{-2\beta JQ^{1/2}(z-\Omega^-)} + 1} \quad (\text{C.45})$$

Trocando  $z \rightarrow -z$  nas integrais, ficamos com

$$m = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-z^2/2}}{e^{2\beta JQ^{1/2}(z+\Omega^+)} + 1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-z^2/2}}{e^{2\beta JQ^{1/2}(z+\Omega^-)} + 1} \quad (\text{C.46})$$

As integrais acima podem ser escritas como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz h(z) f^\pm(z), \quad (\text{C.47})$$

em que

$$h(z) = e^{-z^2/2} \quad (\text{C.48})$$

$$f^\pm(z) = \frac{1}{e^{2\beta JQ^{1/2}(z+\Omega^\pm)} + 1} \quad (\text{C.49})$$

Vamos agora empregar novamente a expansão de Sommerfeld [44] para as integrais (C.47),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz h(z) f(z) = \int_{-\infty}^{-\Omega} dz h(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{JQ^{1/2}} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Omega), \quad (\text{C.50})$$

em que

$$a_n = \left[ 2 - \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right] 2^{2n-1} \frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \quad (\text{C.51})$$

e  $B_n$  são os nmeros de Bernoulli [45], os mesmos citados no apêndice C.1.

Utilizando então a expansão de Sommerfeld na eq. (C.46), obtemos

$$\begin{aligned} m = & -1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{-\Omega^+} dz e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{JQ^{1/2}} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Omega^+) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{-\Omega^-} dz e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \left( \frac{kT}{JQ^{1/2}} \right)^{2m} \frac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}} h(z = -\Omega^-). \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Lembrando as relações (C.15), ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2/2}, \\ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2}, \\ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} = 2 &\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^x dz e^{-z^2/2} + \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \right] = 2 \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^x dz e^{-z^2/2} = 2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} dz e^{-z^2/2} &= 2 - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} m = & \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{-\Omega^+}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \frac{kT}{JQ^{1/2}} \right)^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z = -\Omega^+) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{-\Omega^-}{\sqrt{2}} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \left( \frac{kT}{JQ^{1/2}} \right)^{2m} \frac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}} h(z = -\Omega^-). \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Para  $T = 0$ , temos que  $q = 1$ , e então

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}} \right), \quad (\text{C.55})$$

que corresponde à eq. (3.50) deste trabalho. Lembremos que

$$G = \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{J} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{C.56})$$

de acordo com a eq. (3.39). Agora expandimos a função erro em potências de  $m$ , analogamente ao que foi feito no apêndice C.1, usando a eq. (C.18),

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left[ \frac{J_o m \pm H_o}{J\sqrt{2}G} \right] &\cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{J_o m \pm H_o}{J\sqrt{2}G} - \frac{1}{3} \left( \frac{J_o m \pm H_o}{J\sqrt{2}G} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{J_o m \pm H_o}{J\sqrt{2}G} \right)^5 + \dots \right\} = \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \pm \frac{1}{G} \left( \frac{H_o}{J} \right) + \frac{1}{G} \left( \frac{J_o}{J} \right) m - \frac{1}{6G^3} \left( \frac{J_o}{J} \right)^3 m^3 \mp \frac{1}{2G^3} \left( \frac{J_o}{J} \right)^2 \right. \\ &\times \left( \frac{H_o}{J} \right) m^2 - \frac{1}{2G^3} \left( \frac{J_o}{J} \right) \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 m \mp \frac{1}{6G^3} \left( \frac{H_o}{J} \right)^3 + \frac{1}{40G^5} \\ &\times \left( \frac{J_o}{J} \right)^5 m^5 \pm \frac{1}{8G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right)^4 \left( \frac{H_o}{J} \right) m^4 + \frac{1}{4G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right)^3 \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 m^3 \\ &\pm \frac{1}{4G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right)^2 \left( \frac{H_o}{J} \right)^3 m^2 + \frac{1}{8G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right) \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 m \\ &\left. \pm \frac{1}{40G^5} \left( \frac{H_o}{J} \right)^5 + \dots \right\}. \quad (\text{C.57}) \end{aligned}$$

Assim, voltando à eq. (C.55), obtemos

$$\begin{aligned} m &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G} \left( \frac{J_o}{J} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{2G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + \frac{1}{8G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 + \dots \right\} m + \frac{1}{6G^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{J_o}{J} \right)^3 \\ &\times \left\{ \frac{1}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + \frac{1}{8G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 + \dots \right\} m^3 \\ &+ \frac{1}{120G^5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{J_o}{J} \right)^5 \left\{ \frac{1}{G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 - \frac{6}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + 3 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2G^2} \right. \\ &\left. \times \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + \frac{1}{8G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 + \dots \right\} m^5 + O(m^7). \quad (\text{C.58}) \end{aligned}$$

Se notarmos que

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + \frac{1}{8G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 + \dots \right\} = \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right), \quad (\text{C.59})$$

podemos reescrever a equação (C.58) como

$$m = a_1 m + a_3 m^3 + a_5 m^5 + O(m^7), \quad (\text{C.60})$$

em que

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G} \left( \frac{J_o}{J} \right) \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (\text{C.61})$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G^3} \left( \frac{J_o}{J} \right)^3 \left\{ \frac{1}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 - 1 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (\text{C.62})$$

$$a_5 = \frac{1}{120} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G^5} \left( \frac{J_o}{J} \right)^5 \left\{ \frac{1}{G^4} \left( \frac{H_o}{J} \right)^4 - \frac{6}{G^2} \left( \frac{H_o}{J} \right)^2 + 3 \right\} \exp \left( -\frac{H_o^2}{2J^2G^2} \right) \quad (\text{C.63})$$

Essas últimas quatro equações são as eqs. (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) desta dissertação.

Agora vamos considerar a energia livre, eq. (C.39). Seja

$$I^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln(2 \cosh \xi^\pm). \quad (\text{C.64})$$

Em baixas temperaturas,  $q \rightarrow 1$ , e

$$\cosh \beta \{ J_o m + JQ^{1/2} z \pm H_o \} \cong \frac{1}{2} \exp \beta |(J_o m + JGz \pm H_o)| + \dots \quad (\text{C.65})$$

Assim,

$$I^\pm = \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} |J_o m + JGz \pm H_o| + \dots \quad (\text{C.66})$$

O argumeto da exponencial na eq. (C.65) se anula para

$$z = \frac{-J_o m \mp H_o}{JG}. \quad (\text{C.67})$$

Definimos então

$$w \equiv \frac{-J_o m \mp H_o}{JG}. \quad (\text{C.68})$$

Voltando então à eq. (C.66), obtemos

$$\begin{aligned} I^\pm &= \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w dz e^{-z^2/2} \{-(J_o m + JGz \pm H_o)\} + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_w^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \{J_o m + JGz \\ &\pm H_o\} + \dots = -\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 dz e^{-z^2/2} (J_o m + JGz \pm H_o) + \int_0^w dz e^{-z^2/2} (J_o m \right. \\ &+ JGz \pm H_o) \left. \right\} + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_w^0 dz e^{-z^2/2} (J_o m + JGz \pm H_o) + \int_0^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \right. \\ &\times (J_o m + JGz \pm H_o) \left. \right\} = -\frac{1}{2} \beta (J_o m \pm H_o) - \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dz z e^{-z^2/2} \\ &- \frac{\beta (J_o m \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^w dz e^{-z^2/2} - \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_0^w dz z e^{-z^2/2} + \frac{1}{2} \beta (J_o m \pm H_o) \\ &+ \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dz z e^{-z^2/2} + \frac{\beta (J_o m \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \int_w^0 dz e^{-z^2/2} + \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_w^0 dz z e^{-z^2/2} \\ &+ \dots = -2 \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dz z e^{-z^2/2} - 2 \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_0^w dz z e^{-z^2/2} + 2 \frac{\beta (J_o m \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_0^w dz e^{-z^2/2} + \dots = -2 \frac{\beta JG}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w dz z e^{-z^2/2} + 2 \frac{\beta (J_o m \pm H_o)}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_0^w dz e^{-z^2/2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Lembremos novamente que

$$\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x), \quad (\text{C.70})$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2/2} = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (\text{C.71})$$

$$\int_0^x dz z e^{-z^2/2} = 1 - \exp(-x^2/2). \quad (\text{C.72})$$



Voltando à eq. (C.39), e lembrando que nesse caso limite ( $T = 0$ ), temos  $q = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
f &= -\frac{\beta J^2}{4}(1-1)^2 + \frac{J_o}{2}m^2 - \frac{1}{2\beta}(I^+ + I^-) = \frac{J_o}{2}m^2 - \frac{1}{2}(J_o m + H_o) \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(JG) \exp\left[-\frac{(J_o m - H_o)^2}{2(JG)^2}\right] - \frac{1}{2}(J_o m - H_o) \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&\times (JG) \exp\left[-\frac{(J_o m + H_o)^2}{2(JG)^2}\right] = \frac{J_o}{2}m^2 - J_o m \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \right. \\
&\times \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}}\right) \left. \right\} - H_o \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}}\right) \right\} \\
&+ \frac{JG}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(J_o m + H_o)^2}{2(JG)^2}\right] + \exp\left[-\frac{(J_o m - H_o)^2}{2(JG)^2}\right] \right\}. \tag{C.73}
\end{aligned}$$

Lembrando também que, para  $T = 0$ ,

$$m = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}}\right), \tag{C.74}$$

obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
f &= -\frac{J_o}{2}m^2 - \frac{H_o}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{J_o m + H_o}{JG\sqrt{2}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{J_o m - H_o}{JG\sqrt{2}}\right] \right\} - \frac{JG}{\sqrt{2\pi}} \\
&\times \left\{ \exp\left[-\frac{(J_o m + H_o)^2}{2(JG)^2}\right] + \exp\left[-\frac{(J_o m - H_o)^2}{2(JG)^2}\right] \right\}, \tag{C.75}
\end{aligned}$$

que corresponde à eq. (3.51) desta dissertação.

# Bibliografia

- [1] *Spin Glasses and Random Fields*, editado por A. P. Young (World Scientific, Singapore, 1997).
- [2] Y. Imry, S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
- [3] T. Nattermann, em *Spin Glasses and Random Fields*, editado por A. P. Young (World Scientific, Singapore, 1997).
- [4] M. Aizenman, J. Wehr, Phys. Rev. Lett. **62**, 2503 (1989).
- [5] A. Aharony, Phys. Rev. B **18**, 3318 (1978).
- [6] D. Andelman, Phys. Rev. B **27**, 3079 (1983).
- [7] S. Galam, J. L. Birman, Phys. Rev. B **28**, 5322 (1983).
- [8] V. K. Saxena, Phys. Rev. B **30**, 4034 (1984).
- [9] S. Fishman, A. Aharony, J. Phys. C: Solid State Physics **12**, L729 (1979).
- [10] J. L. Cardy, Phys. Rev. B **29**, 505 (1984).
- [11] D. P. Belanger, em *Recent Progress in Random Magnets*, editado por D. H. Ryan (World Scientific, Singapore, 1992), p. 277.
- [12] M. A. Rudermann, C. Kittel, Phys. Rev. **42**, 99 (1954).
- [13] T. Kasuya, Prog. Teor. Phys. **55**, 45 (1956).
- [14] K. Yosida, Phys. Rev. **106**, 893 (1957).

- [15] V. Canella, J.A. Mydosh, Phys. Rev. B **6**, 4220 (1972).
- [16] L. E. Wenger, P. H. Keesom, Phys. Rev. B **13**, 4053 (1976).
- [17] S. Nagata, P.H. Keesom, H.R. Harrison, Phys. Rev. B **19**, 1633 (1979).
- [18] S. F. Edwards, P. W. Anderson, J. Phys. F: Metal Phys. **5**, 965 (1975).
- [19] K. Binder, A. P. Young, Rev. Mod. Phys. **58** n° 4, 801 (1986).
- [20] K. H. Fisher, J. A. Hertz, *Spin Glasses* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [21] M. Kac, Trondheim Theoretical Physics Seminar, Nordita, Publ. No. **286**.
- [22] S. F. Edwards, em *Proceedings of the Third International Conference on Amorphous Materials*, editado por R. W. Douglas e B. Ellis (Wiley, New York, 1970), p. 22.
- [23] S. F. Edwards, em *Polymer Networks*, editado por A. J. Chompff e S. Newman (Plenum, New York, 1971), p. 83.
- [24] F. C. Montenegro, A. R. King, V. Jaccarino, S. J. Han, D. P. Belanger, Phys. Rev. B **44**, 2155 (1991).
- [25] D. P. Belanger, W. E. Murray, F. C. Montenegro, A. R. King, V. Jaccarino, R. W. Erwin, Phys. Rev. B **44**, 2161 (1991).
- [26] D. Bertrand, A. R. Fert, M. C. Schmidt, F. Bensamka, S. Legrand, J. Phys. C: Solid State Physics **15**, L883 (1982).
- [27] P. zen Wong, S. von Molnar, T. T. M. Palstra, J.A. Mydosh, H. Yoshizawa, S. M. Shapiro, A. Ito, Phys. Rev. Lett. **55**, 2043 (1985).
- [28] P. zen Wong, H. Yoshizawa, S. M. Shapiro, J. Appl. Phys. **57**, 3462 (1985).
- [29] H. Yoshizawa, S. Mitsuda, H. Aruga, A. Ito, Phys. Rev. Lett. **59**, 2364 (1987).
- [30] H. Yoshizawa, S. Mitsuda, H. Aruga, A. Ito, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 1416 (1989).
- [31] T. Schneider, E. Pytte, Phys. Rev. B **15**, 1519 (1977).

- [32] D. Sherrington, S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35**, 1792 (1975).
- [33] J. Rudnick, Phys. Rev. B **22**, 3356 (1980).
- [34] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- [35] J. R. L. de Almeida, D. J. Thouless, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, N° 5, 983 (1978).
- [36] G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **43**, 1754 (1979).
- [37] G. Parisi, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 1101 (1980).
- [38] J. Kushauer, W. Kleemann, J. Magn. Magn. Mater. **140-144**, 1551 (1995).
- [39] E. Nogueira, F. D. Nobre, F. A. da Costa, S. Coutinho, Phys. Rev. E **57**, 5079 (1998).
- [40] R. F. Soares, F. D. Nobre, J. R. L. de Almeida, Phys. Rev. B **50**, 6151 (1994).
- [41] J. M. de Araújo, F. D. Nobre, A. da Costa, Phys. Rev. E **61**, 2232 (2000).
- [42] S. M. Rezende, F. C. Montenegro, U. A. Leitão, M. D. Coutinho-Filho, em *New Trends in Magnetism*, editado por M. D. Coutinho-Filho e S. M. Rezende (World Scientific, Singapore, 1989), p. 44.
- [43] V. Jaccarino, A. R. King, em *New Trends in Magnetism* (Ref. 35), p. 70.
- [44] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart e Winston, New York, 1976).
- [45] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4<sup>a</sup> edição (Academic Press, New York, 1965).