

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

TESE DE DOUTORADO

MÉTODOS DE TEORIA QUÂNTICA DOS
CAMPOS APLICADOS AO MODELO DE
GINZBURG-LANDAU DA
SUPERCONDUTIVIDADE

Luciano Melo Abreu

Rio de Janeiro, junho de 2005

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

TESE DE DOUTORADO

MÉTODOS DE TEORIA QUÂNTICA DOS
CAMPOS APLICADOS AO MODELO DE
GINZBURG-LANDAU DA
SUPERCONDUTIVIDADE

Luciano Melo Abreu

Orientador: Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

Co-orientador: Claude de la Lande de Calan

Tese apresentada ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas para a obtenção
do título de doutor em física.

Rio de Janeiro, junho, 2005

Resumo

A presente tese é consagrada à utilização dos métodos desenvolvidos na teoria quântica de campos na análise do modelo de Ginzburg-Landau da supercondutividade. Em sua representação funcional, o mencionado modelo apresenta-se de grande préstimo no estudo desta classe de fenômenos críticos, e em particular, nos aspectos relacionados à compactificação e a multicriticalidade.

Inicia-se este estudo com um breve panorama da teoria de Ginzburg-Landau e discutindo-se, em seguida, a sua formulação em um espaço parcialmente compactificado, com a utilização de métodos de continuação analítica. Com o modelo em três dimensões, considera-se os casos particulares de uma, duas ou três dimensões compactificadas, que correspondem respectivamente ao sistema estando na forma de um filme, um fio e uma caixa. Neste âmbito, a dependência do comportamento crítico no comprimento das dimensões compactificadas é então analisada.

O exame prossegue com a análise das flutuações magnéticas no modelo de Ginzburg-Landau com uma dimensão compactificada, sendo feita a confrontação com os dados experimentais. Neste cenário, a teoria das transições de fase de primeira ordem em supercondutores do tipo I é considerada, assim como a situação de materiais do tipo II em campos magnéticos externos.

Finalmente, a multicriticalidade é discutida no modelo de Ginzburg-Landau em uma versão com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, com o campo de calibre. A análise do grupo de renormalização é desenvolvida em ambas as situações da expansão em ε e da dimensão fixa. A existência dos pontos fixos é então examinada, obtendo-se os expoentes críticos relevantes.

Abstract

The present thesis is consecrated to the use of the methods developed in the quantum field theory in the analysis of the Ginzburg-Landau model of superconductivity. In its functional representation, the mentioned model is useful in the study of this class of critical phenomena, and in particular, the aspects related to the compactification and the multicriticality.

This study starts with a brief review of the Ginzburg-Landau theory and, after that, its formularization in a space partially compactified, with the use of methods of analytical continuation. With the model in three dimensions, one considers the particular cases of one, two or three compactified dimensions, that correspond respectively to the system being in the form of a film, a wire and a box. In this scope, the dependence of the critical behavior in the length of confined dimensions is then analyzed.

The examination continues with the analysis of the magnetic fluctuations in the of Ginzburg-Landau model with a compactified dimension, being made the confrontation with the experimental data. In this scene, the theory of the first-order phase transitions in superconductors of type-I is considered, as well as the situation of materials of type-II in external magnetic fields.

Finally, the multicriticality is argued in the model of Ginzburg-Landau in a version $O(n_1) \oplus O(n_2)$ -symmetric considering the gauge field. The analysis of the renormalization group is developed in both the situations of the expansion in ε and the fixed dimension. The existence of the fixed points then is examined, as well as calculations of the relevant critical exponents are also carried out.

Dedico esta tese aos meus pais Virgílio e Eliana
e à minha esposa Roberta.

Agradecimentos

A Adolfo Malbouisson e Claude de Calan, pela orientação e solicitude.

A Antônio Augusto Alves Júnior, pelos muitos debates e pela revisão criteriosa desta tese.

A Itzhak Roditi, pelas discussões estimulantes.

Aos dedicados funcionários do CBPF, em especial Mirian Coutinho, José de Almeida Ricardo, Simone de Castro, Zélia Rabelo de Quadros e Sônia da Silva Ferreira.

A todos os amigos e colegas do CBPF e CPHT-Ecole Polytechnique, pelas muitas discussões.

À minha família, o meu porto seguro.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Aspectos gerais sobre o modelo de Ginzburg-Landau	5
2.1	O parâmetro de ordem e o hamiltoniano do modelo de Ginzburg-Landau	5
2.2	O método da integração funcional	8
2.3	A teoria de Landau e suas correções	11
2.3.1	A aproximação de Landau	12
2.3.2	A correção à aproximação de Landau	13
2.3.3	Os expoentes críticos e o comprimento de correlação	14
2.4	Renormalização	16
2.5	O grupo de renormalização	18
3	As condições de fronteira no modelo de Ginzburg-Landau	23
3.1	O efeito da compactificação	23
3.2	O método da regularização zeta	25
3.3	O comportamento crítico em filmes, fios e cubos	27
3.3.1	Filmes	27
3.3.2	Fios e cubos	29
3.4	Discussão	31
4	As flutuações magnéticas e o campo magnético externo no modelo de Ginzburg-Landau com uma dimensão compactificada	34
4.1	As flutuações magnéticas e o potencial efetivo gaussiano	35

4.1.1	O potencial termodinâmico efetivo gaussiano	35
4.1.2	A compactificação e o comportamento crítico	36
4.1.3	Comparação com os resultados experimentais e discussão	38
4.2	As flutuações magnéticas e o efeito Halperin-Lubensky-Ma	41
4.2.1	A energia livre dependente das condições de fronteira	42
4.2.2	O comportamento crítico e discussão	44
4.3	A presença do campo magnético externo com o modelo de Ginzburg-Landau compactificado no limite n grande	48
4.3.1	O limite n grande e a compactificação	48
4.3.2	O comportamento crítico e discussão	51
5	O modelo de Ginzburg-Landau multicrítico na presença de flutuações magnéticas	55
5.1	Introdução	56
5.2	O modelo	59
5.3	A expansão em ε	62
5.3.1	A análise do grupo de renormalização	62
5.3.2	Os expoentes críticos	69
5.4	A abordagem da dimensão fixa	72
5.5	Discussão	76
6	Conclusões e perspectivas	79
	Apêndices	84
A	O tratamento da função zeta de Epstein-Hurwitz	84
B	O tratamento das equações críticas para fios e cubos	87
C	O cálculo do potencial efetivo gaussiano e da equação de gap	91
	Referências Bibliográficas	94

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos fenômenos críticos é um tema de grande relevância na física. Uma classe destes fenômenos que tem sido objeto de grande investigação é a supercondutividade [1]. Uma descrição fenomenológica consistente das transições supercondutoras é obtida a partir do modelo de Ginzburg-Landau [2]. Introduzido em 1950, este modelo é construído a partir de um parâmetro de ordem com validade na vizinhança do ponto crítico, que descreve a densidade dos elétrons supercondutores, e de um potencial vetorial das flutuações magnéticas independentes do tempo.

A despeito do sucesso da teoria microscópica de Bardeen, Cooper e Schriffer, introduzida em 1957 [3], a teoria de Ginzburg-Landau tem se apresentado de grande utilidade, sendo objeto de grande investigação até o presente momento. Um exemplo é no estudo dos supercondutores do tipo II [4–13], em que a teoria microscópica mencionada é inadequada.

Ao longo do tempo observou-se a grande utilidade de métodos típicos da teoria quântica de campos no tratamento do modelo de Ginzburg-Landau, tais como o cálculo funcional e a análise via o grupo de renormalização [14]. Estes desenvolvimentos têm permitido estabelecer analogias em diferentes contextos, entre os fenômenos críticos e modelos da teoria quântica de campos [15].

Uma das primeiras utilizações do grupo de renormalização no modelo de Ginzburg-Landau foi proposta por Halperin, Lubensky e Ma [16], que concluíram que o ponto fixo carregado não é estável no infravermelho na primeira ordem da teoria de per-

turbações, caso o parâmetro de ordem tenha duas componentes reais, sugerindo assim uma transição de fase de primeira ordem. Contudo, o resultado teórico não foi comprovado experimentalmente, pois o intervalo de temperatura no qual este tipo de transição deveria ser observada é da ordem de nK. No entanto, ainda é objeto de discussão a existência de um ponto crítico carregado na análise do grupo de renormalização em ordens maiores [1, 13, 17–19].

De outro modo, efeitos das fronteiras espaciais nas propriedades dos materiais supercondutores têm sido também tema de grande investigação, tanto do ponto de vista experimental quanto teórico [2, 20–37]. Neste sentido, a existência das transições de fase devem ser, em princípio, associadas aos parâmetros espaciais que quebram a invariância translacional. Em particular, o trabalho pioneiro de Ginzburg-Landau tratou de materiais supercondutores na forma de filmes finos [2], bem como em [20–31]; por outro lado, em [32, 33] o estudo é feito para amostras na forma de fio, enquanto que em [34–37] é analisado o caso dos grãos supercondutores. Nestes casos, observa-se efeitos relevantes, como a diminuição do valor da temperatura crítica com o decréscimo das dimensões espaciais do material, estas estando abaixo da escala de μm .

Desta forma, com o intuito de contribuir no estudo da supercondutividade em materiais com dimensões compactificadas, questões a respeito da formulação do modelo de Ginzburg-Landau na presença de condições de fronteira se mostram pertinentes, sobretudo a partir da utilização do método da regularização zeta [38–42]. Tais métodos têm sido também utilizados em teoria quântica de campos no tratamento de sistemas confinados, como por exemplo o efeito Casimir [43].

De um outro ponto de vista, uma versão generalizada do modelo de Ginzburg-Landau com uma simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$ tem sido empregada na caracterização de sistemas que apresentam comportamento multicrítico. Tal comportamento emerge em sistemas que apresentam competição entre tipos de ordenamento distintos. Alguns exemplos são os antiferromagnetos anisotrópicos em um campo magnético externo uniforme [44–46], os cristais líquidos [47] e a cromodinâmica quântica, com o potencial

químico bariônico não-nulo [48].

Um outro exemplo de multicriticalidade ocorre no cenário dos materiais com base em cupratos de alta temperatura crítica. Estes materiais têm a vantagem de possuir uma região crítica mais larga em relação àqueles ordinários, podendo chegar até a ordem de vários K, o que permite um maior acesso experimental à região carregada [49]. Por outro lado, estes sistemas têm sido analisados via uma teoria de bósons escravos com um campo de calibre [50–53], visando o entendimento da rede de vórtices. Assim, um elétron no plano do CuO_2 é considerado como um composto de quase-partículas fermiônicas carregando o spin e bosônicas conduzindo a carga. Neste contexto, a ocorrência da fase supercondutora implica na condensação simultânea das mencionadas quase-partículas.

Com efeito, questões surgem a respeito de possíveis extensões da análise do modelo de Ginzburg-Landau com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$ na presença de flutuações magnéticas, como por exemplo a possível existência de um ponto fixo estável carregado.

Desta maneira, tomando-se como motivação tudo o que foi dito acima, a presente tese discute diferentes aspectos da supercondutividade a partir da aplicação dos métodos da teoria quântica de campos aplicados ao estudo do modelo de Ginzburg-Landau. Sendo assim, o conteúdo deste trabalho é organizado da forma a seguir.

No capítulo 2 é oferecida uma breve revisão do modelo de Ginzburg-Landau, bem como a apresentação do ferramental básico necessário aos capítulos seguintes. Nele são discutidos o hamiltoniano de Ginzburg-Landau, o método funcional, a aproximação de Landau e suas correções, bem como o grupo de renormalização.

As idéias desenvolvidas neste trabalho começam a ser apresentadas no capítulo 3, onde é tratado o comportamento crítico do modelo com a correção de primeira ordem, levando-se também em consideração condições de fronteira engendradas pela compactificação das dimensões. Neste sentido, analisa-se o modelo restrito a um espaço parcialmente compactificado, com a exposição do método das funções zeta de Epstein multidimensionais. Assim, sendo o modelo definido em três dimensões, considera-se os casos particulares de uma, duas ou três dimensões compactificadas, que correspondem

respectivamente ao sistema estando na forma de um filme, um fio de seção transversal quadrada e uma caixa cúbica. No contexto da fenomenologia, discute-se o comportamento crítico de supercondutores do tipo I em função dos comprimentos das dimensões compactificadas [54].

No capítulo 4, as flutuações magnéticas no modelo com uma dimensão compactificada são analisadas, com a análise do seu comportamento crítico e comparação com as experiências existentes para materiais supercondutores do tipo I [55]. Outro ponto examinado é a teoria de Halperin-Lubensky-Ma, que é esta revisitada em um cenário com fronteiras [56]. Na parte final, considera-se a supercondutividade do tipo II via o modelo compactificado no limite N grande e na presença de campo magnético externo [57].

O capítulo 5 é dedicado ao estudo do comportamento multicrítico do modelo de Ginzburg-Landau em uma versão com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, contendo $(n_1/2 + n_2/2)$ parâmetros de ordem complexos acoplados ao potencial vetorial representando as flutuações magnéticas. Desenvolve-se então a análise do grupo de renormalização na aproximação de primeira ordem em ambas as situações da expansão em ε e da dimensão fixa. Neste contexto, a existência dos pontos fixos é examinada, e os expoentes críticos são obtidos [58].

Finalmente, no capítulo 6 sintetiza-se os resultados expostos nesta tese, bem como apresenta-se perspectivas de possíveis extensões dos trabalhos realizados.

Capítulo 2

Aspectos gerais sobre o modelo de Ginzburg-Landau

Este capítulo é devotado a uma breve apresentação do modelo de Ginzburg-Landau [2, 14, 59–61], bem como a introdução do ferramental básico necessário aos capítulos seguintes. Assim, discute-se o parâmetro de ordem e o hamiltoniano do modelo na seção 2.1. Em seguida, aproveitando-se a similaridade entre este modelo e o $\lambda\phi^4$ da teoria quântica de campos, introduz-se na seção 2.2 o método da integração funcional, com algumas aplicações na seção 2.3, que são a aproximação de Landau e a correção de primeira ordem. Na seção 2.4 a renormalização é discutida, tendo-se por fim, na seção 2.5 uma análise sobre o grupo de renormalização e sua utilidade no cálculo dos expoentes críticos via a expansão em ε .

2.1 O parâmetro de ordem e o hamiltoniano do modelo de Ginzburg-Landau

Sistemas em equilíbrio na vizinhança de uma transição de fase são sujeitos a fenômenos cooperativos de larga escala. Como consequência, este sistema pode ser avaliado a partir das suas propriedades coletivas, tornando-se independente dos detalhes da sua estrutura microscópica. Sendo assim, é natural que a descrição de sistemas próximos

do ponto da transição, também denominado ponto crítico, seja realizada a partir de teorias contínuas.

Um exemplo é a transição ferromagnética [60], que pode ser interpretada a partir de uma cadeia de sítios de um espaçamento a entre eles. Como existe um momento magnético associado a cada sítio, em baixas temperaturas a agitação térmica desta cadeia é pequena, verificando-se uma tendência de alinhamento dos constituintes em uma dada direção, produzindo uma magnetização não-nula. Contudo, em uma certa temperatura, denominada temperatura crítica, o aumento da agitação térmica destrói esta configuração e o sistema torna-se paramagnético. Assim, na região próxima da temperatura crítica, denominada região crítica, as correlações entre os sítios são de alcance muito maior que a , o que sugere a utilização de modelos contínuos.

Neste sentido, a magnetização pode ser descrita por um conjunto de variáveis interpretadas como distribuições espaciais com um certo peso estatístico. Tal conjunto, usualmente referido como parâmetro de ordem, descreve o grau de ordenamento do sistema em estudo. Sendo assim, cada variável deve ser definida sobre um dado domínio e variar continuamente na reta real.

Em um cenário mais geral das transições de fase, a identificação destas variáveis é vinculada ao tipo de fenômeno que se quer estudar. Além disso, diferentes sistemas podem apresentar propriedades em comum, justificando a formulação do modelo da maneira mais geral possível. Sendo assim, uma proposta relevante tendo em vista estes aspectos é o modelo de Ginzburg-Landau [2, 60].

Introduzindo-se formalmente este modelo, seja \mathcal{E} o espaço sobre o qual está definido o sistema em estudo, cujos pontos são denotados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, com d sendo a dimensão de \mathcal{E} . O parâmetro de ordem do sistema é definido sobre \mathcal{E} como uma função suave bem comportada tal que

$$\begin{aligned} \phi &: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{R} \\ &: \mathbf{x} \longmapsto \phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde é ϕ uma função real.

Em geral, o parâmetro de ordem tem n componentes, sendo que neste capítulo

adota-se $n = 1$ e $\mathcal{E} = \mathfrak{R}^d$. Nesta tese utiliza-se tanto a terminologia da teoria quântica de campos como aquela própria dos estudos em fenômenos críticos. Neste sentido, o parâmetro de ordem por vezes pode também ser chamado de campo.

Um sistema físico na vizinhança da criticalidade tem um conjunto de estados ou configurações possíveis. Neste panorama, define-se como função característica do sistema o hamiltoniano, que associa um número real a uma configuração do parâmetro de ordem. Este objeto é referido como hamiltoniano de Ginzburg-Landau, sendo definido como um funcional do modo

$$\begin{aligned} H_{GL} &: \mathfrak{R} \times \mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{R} \\ &: (\phi, \mathcal{R}) \mapsto H_{GL}(\phi, \mathcal{R}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

dado explicitamente na forma

$$H_{GL}(\phi, \mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^d \mathbf{x} \mathcal{H}_{GL}(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}); \mathbf{x}), \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{H}_{GL}(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}); \mathbf{x})$ é a densidade de hamiltoniano de Ginzburg-Landau,

$$\mathcal{H}_{GL}(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}); \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}r_0\phi^2 + \frac{1}{4!}u_0(\phi^2)^2, \quad (2.4)$$

sendo $u_0 > 0$.

Assim, as configurações possíveis do sistema são descritas com as soluções da equação

$$\delta H(\phi, \mathcal{R}) = 0. \quad (2.5)$$

sob a condição

$$\delta \phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{R}} = 0. \quad (2.6)$$

onde $\partial \mathcal{R}$ é a fronteira de \mathcal{R} . Deste modo, as soluções possíveis são obtidas a partir das equações de estado,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{GL}}{\partial \phi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}_{GL}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) = 0, \quad (2.7)$$

onde $i = 1, \dots, d$.

Este modelo estabelece de antemão que a dependência na temperatura aparece através do termo $r_0 = r_0(T)$. Um detalhe relevante, considerando-se o caso de uma

teoria a n componentes, é a invariância de H_{GL} frente ao grupo de simetria interna do parâmetro de ordem, que no caso deste ter n componentes é o $O(n)$.

Finalizando-se esta seção, é conveniente observar que o inverso do operador local do termo quadrático na eq.(2.4), define a função $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, que no espaço conjugado dos momentos é dada por

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^2 + r_0}, \quad (2.8)$$

em que $p = |\mathbf{p}|$. O objeto $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é denominado função de correlação de dois pontos e sua interpretação física está relacionada à medida da influência exercida por um dado ponto do sistema. Frequentemente tal função também é denominada de propagador, termo familiar no contexto da teoria quântica de campos.

2.2 O método da integração funcional

O panorama desenvolvido na seção anterior sugere o tratamento sistemático do modelo empregando-se técnicas típicas do cálculo com funcionais. Esta percepção é reforçada, por exemplo, pela equivalência entre os estudos de fenômenos críticos baseados em modelos da mecânica estatística e a formulação funcional da teoria quântica de campos em espaços euclidianos.

Seja então uma fonte ou um campo externo $J(\mathbf{x})$, com as mesmas características de um campo na eq.(2.1). A função de partição na presença de um campo externo é definida a partir de

$$\begin{aligned} Z &: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \\ &: J \longmapsto Z(J), \end{aligned} \quad (2.9)$$

cuja expressão é explicitamente dada por

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -H_{GL}(\phi, \mathcal{R}) + \int_{\mathcal{R}} d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right\}, \quad (2.10)$$

onde o fator $\mathcal{D}\phi$ denota a medida no espaço das funções e o fator de normalização é $\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\phi \exp [-H_{GL}]$. Note-se que no panorama da teoria quântica de campos $Z(J)$ é equivalente ao funcional gerador das funções de correlação.

Outra possibilidade consiste em definir o funcional $Z(J)$ através de

$$Z(J) = \mathcal{N} \exp \left\{ - \int d^d \mathbf{x} \left(\left[\frac{u_0}{4!} \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x})} \right]^2 \right)^2 \right\} Z_G(J), \quad (2.11)$$

onde o expoente no lado direito da equação representa o termo em ϕ^4 . Note-se que Z_G é o funcional gerador, que depende somente do termo de fonte e da parte quadrática em ϕ do hamiltoniano de Ginzburg-Landau. A utilidade desta expressão tornar-se-á clara no contexto da teoria de perturbações.

Assim, após uma translação em ϕ por um fator $\int d^d \mathbf{y} \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J(\mathbf{y})$, obtém-se

$$Z_G(J) = \mathcal{N}' \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} J(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J(\mathbf{x}) \right\}. \quad (2.12)$$

Convenciona-se nos cálculos seguintes $\mathcal{N}' = 1$.

A motivação para definir $Z(J)$ na forma dada pela eq. (2.11) provém da idéia de que a partir das derivadas sucessivas de $Z(J)$ em relação a J gera-se todas as funções de correlação possíveis, dadas como

$$Z^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \left. \frac{\delta^N Z(J)}{\delta J(\mathbf{x}_1) \dots \delta J(\mathbf{x}_N)} \right|_{J=0}. \quad (2.13)$$

Em particular, tem-se

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left. \frac{\delta^2 Z_G(J)}{\delta J(\mathbf{x}) \delta J(\mathbf{y})} \right|_{J=0}. \quad (2.14)$$

Deste modo, o propagador tem um papel fundamental nesta formulação, pois mostra-se a partir da eq.(2.11) que as funções $Z^{(N)}$ são escritas como produtos da função $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, o que permite elevar este objeto à categoria de elemento básico. Com efeito, as funções $Z^{(N)}$ produzem expressões que podem ser fatorizadas em um produto da seguinte maneira

$$F_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_R) F_2(\mathbf{x}_{R+1}, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (2.15)$$

Com isso, pode-se definir um procedimento de obter somente funções conexas, as quais produzem as informações de fato relevantes. Assim, introduz-se um outro funcional gerador a partir de $Z(J)$, do modo

$$W(J) = \ln Z(J). \quad (2.16)$$

Este funcional é identificado com a energia livre de Gibbs. Neste sentido, as funções de correlação conexas são dadas por

$$W^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{\delta^N W(J)}{\delta J(\mathbf{x}_1) \dots \delta J(\mathbf{x}_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.17)$$

Entretanto, verifica-se novamente ser factível uma nova redução na quantidade das funções relevantes, obtendo-se um conjunto de objetos mais fundamentais. Com este objetivo, seja então $\varphi(\mathbf{x})$ um campo que é o mínimo absoluto da combinação

$$H'_{GL} = H_{GL} - \int d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

ou seja,

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\delta H_{GL}}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\varphi}. \quad (2.19)$$

Assim, pode-se introduzir o potencial termodinâmico $\Gamma(\varphi)$ através da seguinte transformação de Legendre da energia livre $W(J)$,

$$\Gamma(\varphi) - \int d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) + W(J) = 0. \quad (2.20)$$

onde

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\delta W(J)}{\delta J(\mathbf{x})}. \quad (2.21)$$

No cenário da teoria quântica de campos $\Gamma(\varphi)$ é equivalente ao funcional gerador dos vértices próprios. Note-se que tomando-se $J = 0$,

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J(\mathbf{x})} \Big|_{J=0} = W^{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

A quantidade φ_0 representa a configuração do parâmetro de ordem que minimiza o hamiltoniano H_{GL} .

Em adição, convém definir funções de correlação a partir de

$$\Gamma_{i_1, \dots, i_N}^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{\delta^N W(J)}{\delta \varphi_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta \varphi_{i_N}(\mathbf{x}_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.23)$$

Os objetos $\Gamma^{(N)}$ têm a propriedade de gerar funções irreduzíveis pela exclusão de um único propagador, isto é, não podem tornar-se desconexas pela eliminação de uma função de dois pontos.

2.3 A teoria de Landau e suas correções

A forma do hamiltoniano de Ginzburg-Landau [60,61] dificulta o cálculo da função de partição devido ao termo linear em ϕ^4 , o que leva à adoção de métodos aproximativos para analisar as predições do modelo. Deste modo, mostra-se nesta seção como o potencial termodinâmico pode ser descrito por uma expansão do tipo semi-clássica.

Considere-se então uma expansão da eq.(2.18) em torno de φ , sendo $\phi - \varphi = c\psi$ o deslocamento no campo original, onde c um parâmetro adimensional que denota a ordem de expansão¹. Explicitamente, tem-se

$$H'_{GL}(\phi) = H'_{GL}(\varphi) + \frac{\hbar}{2} \left. \frac{d^2 H'_{GL}}{d\phi d\phi} \right|_{\phi=\varphi} \psi\psi + \frac{\hbar^3}{3!} \left. \frac{d^3 H'_{GL}}{d\phi d\phi d\phi} \right|_{\phi=\varphi} \psi\psi\psi + \dots \quad (2.24)$$

Conseqüentemente, a integração funcional na eq.(2.10) é realizada sobre o espaço de configuração de ψ , supondo-se que o expoente tem um fator multiplicativo $1/\hbar$.

Observando-se a contribuição de primeira ordem não-nula, claramente percebe-se uma integral funcional gaussiana em ψ . Por conseguinte, a energia livre definida por $W = \hbar \ln Z$, transforma-se em

$$W(J) = -H_{GL}(\varphi) + \int d^d \mathbf{x} J \cdot \varphi - \frac{\hbar}{2} \text{tr} \ln D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + O(\hbar^2), \quad (2.25)$$

onde

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + r_0 + \frac{u_0}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.26)$$

Destarte, é possível denotar o potencial termodinâmico na forma

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi) + c\Gamma_1(\varphi) + O(c^2), \quad (2.27)$$

onde $\Gamma_0(\varphi) = H_{GL}(\varphi)$ e

$$\Gamma_1(\varphi) \equiv \frac{1}{2} \text{tr} \left[\ln D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \ln D(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\varphi=0} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[1 + \frac{u_0}{2} \varphi^2 \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right]. \quad (2.28)$$

Desta maneira, $\Gamma(\varphi)$ é expandido em potências de c . Têm-se ainda que na hipótese de $\varphi \approx \varphi_0$, com φ_0 sendo uniforme, a eq.(2.28) torna-se

$$\Gamma_1(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln \left[1 + \frac{u_0}{2} \varphi_0^2 \Delta(\mathbf{k}) \right]. \quad (2.29)$$

¹No contexto da expansão semi-clássica da mecânica quântica, $c = \hbar$, onde \hbar é a constante de Planck

2.3.1 A aproximação de Landau

A aproximação de Landau [60], também denominada de campo médio, consiste em considerar o campo φ como sendo uniforme, levando-se em conta somente o primeiro termo da eq.(2.27). Deste modo, a equação de estado torna-se

$$\frac{\partial H_{GL}}{\partial \varphi_0} = r_0 \varphi_0 + \frac{u_0}{6} \varphi_0^3 = 0. \quad (2.30)$$

Com r_0 sendo positivo, a única solução possível é $\varphi_0 = 0$. Entretanto, admitindo-se que r_0 é negativo abaixo de uma certa temperatura T_{c0} , ocorre uma solução não-trivial da eq.(2.30). Este fenômeno é denominado quebra espontânea de simetria, e a referida solução é dita representar a fase de quebra de simetria².

De maneira concreta, na vizinhança da criticalidade, com a temperatura T estando próxima de T_{c0} , define-se

$$r_0(T) = \alpha (T - T_{c0}), \quad (2.31)$$

com $\alpha > 0$. Logo as soluções de (2.30) são

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_{c0} \\ \pm \left(-\frac{6r_0}{u_0}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{se } T < T_{c0} \end{cases} \quad (2.32)$$

Cabe neste momento a interpretação física do quadro anterior. Percebe-se que com a variação da temperatura na vizinhança de T_{c0} o parâmetro de ordem permanece contínuo. Assim, T_{c0} é denominada temperatura crítica da transição de fase, e φ_0 representa a fase em que sistema físico em questão se encontra. Tem-se que $\varphi_0 = 0$ denota a fase desordenada e $\varphi_0 \neq 0$, a fase ordenada. Transições deste tipo são também designadas como transições de fase de segunda ordem.

Um ponto relevante nesta abordagem é que a descrição do comportamento das fases do sistema independe dos seus detalhes microscópicos, supõe-se somente a forma do hamiltoniano. Os aspectos particulares são levados em conta apenas na obtenção das constantes α e u_0 . Estas características garantem a aplicabilidade do modelo de Ginzburg-Landau a diversos fenômenos próximos do ponto crítico, revelando um

²A orientação dos momentos dos sítios em uma direção particular do espaço representa um fenômeno típico de quebra espontânea de simetria

comportamento universal das quantidades termodinâmicas pertinentes em relação à dependência em $(T - T_{c0})$.

A aproximação de Landau é aplicável a situações com flutuações desprezíveis em φ próximas do ponto crítico. Sistemas desta classe são, por exemplo, supercondutores do tipo I e certos ferromagnetos. No primeiro caso, o parâmetro de ordem é interpretado como a densidade de pares de Cooper, os quais apresentam o efeito Meissner de maneira uniforme [1,3]. Em relação aos ferromagnetos, a quantidade relevante é a magnetização total ao longo do eixo do magnetização preferencial [60].

No entanto, a aproximação de Landau torna-se inconsistente se o sistema apresenta flutuações apreciáveis em relação a φ_0 . Este é o caso, por exemplo, tanto da transição superfluida no hélio-4, dos supercondutores do tipo II, sendo que neste último efeito Meissner coexiste com uma rede de fluxos magnéticos no interior da amostra.

Observa-se ainda que uma simples mudança na expressão do hamiltoniano, permite o aparecimento de transições descontínuas entre as fases ordenada e desordenada, denominadas transições de fase de primeira ordem. Pode-se, a título de exemplo, supor que $\Gamma_0(\varphi_0)$ na eq.(2.27) seja escrito na forma

$$\Gamma_0(\varphi_0) = V \left[+\frac{1}{2}r_0\phi^2 + \frac{1}{4!}u_0\phi^4 + \frac{1}{6!}v_0\phi^6 \right], \quad (2.33)$$

onde $u_0 < 0$, $v_0 > 0$ e V é o volume total. Verifica-se em $T_1 > T_{c0}$ que $\Gamma_1(\varphi_0)$ passa a ter dois mínimos secundários em $\varphi_0 \neq 0$, além do mínimo estável em $\varphi_0 = 0$. Entretanto, na temperatura $T_E > T_{c0}$ esses mínimos são igualmente estáveis, nos quais $\Gamma_0(\varphi_0) = 0$. Finalmente, em T_{c0} observa-se somente dois mínimos em $\varphi_0 \neq 0$.

Posto de outra forma, a fase $\varphi_0 = 0$ é estável para $T \geq T_E$, metaestável para $T_E \geq T \geq T_{c0}$ e instável para $T < T_{c0}$. Esta análise funciona de maneira recíproca no caso de $\varphi_0 \neq 0$. Sendo assim, conclui-se que o parâmetro de ordem comporta-se de maneira descontínua na transição.

2.3.2 A correção à aproximação de Landau

Considerando-se agora o termo na eq.(2.27) que corrige a aproximação de Landau, é possível definir um novo parâmetro que gera a dependência na temperatura $r(T)$ a

partir de

$$\left. \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varphi_0^2} \right|_{\varphi_0=0} = r_0(T) + \frac{u_0}{2} \Delta(0) = r(T). \quad (2.34)$$

onde $c = 1$. Esta expressão introduz uma nova temperatura crítica T_c , que difere de T_{c0} de tal forma que $r(T) = \alpha'(T - T_c)$, sendo a criticalidade definida por $r(T) = 0$.

Pode-se também inferir da eq.(2.34) que $T_c < T_{c0}$, pois $r(T_{c0}) > 0$. Contudo, a definição de $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ depende de $r_0(T)$, o qual torna-se negativo para $T < T_{c0}$, deixando a integração presente na definição de $\Delta(0)$ em (2.8) mal definida. Porém, dentro da integração, $r_0(T)$ pode ser substituído por $r(T)$ com um erro na ordem u_0^2 . Assim, a eq.(2.34) se transforma em

$$r(T) = r_0(T) + \frac{u_0}{2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + r}. \quad (2.35)$$

Esta expressão também é chamada de equação de *gap*. Atente-se ao fato de que a subtração desta última equação por ela mesma a $T = T_c$ implica em

$$r(T) = \alpha(T - T_c) - r \frac{u_0}{2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + r)}. \quad (2.36)$$

Para $d > 4$, a integral acima é convergente no infravermelho mesmo com $r = 0$. Entretanto, na situação $d < 4$ a integral diverge no ponto crítico, e modelo torna-se novamente mal definido. Não obstante, convém buscar um intervalo de temperatura ΔT em torno de T_c , fora do qual o modelo continua válido em $d < 4$, através da condição

$$u_0 \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + r)} \ll 1. \quad (2.37)$$

Esta expressão é referida como o critério de Ginzburg. A correção à aproximação continua sendo aplicável no caso dos supercondutores, pois nesta situação ΔT é tão pequeno que não pode ser detectado experimentalmente.

2.3.3 Os expoentes críticos e o comprimento de correlação

Conforme discutido anteriormente, sistemas descritos pelo modelo de Ginzburg-Landau apresentam um comportamento universal na dependência das quantidades termodinâmicas em relação a $(T - T_c)$. Cada uma destas quantidades é caracterizada por uma potência

de $(T - T_c)$. Estas potências são denominadas de expoentes críticos, e o conjunto dos expoentes críticos descreve o comportamento termodinâmico de um sistema na vizinhança da criticalidade.

Considere-se a função de correlação de dois pontos, dada pela eq.(2.8). Adotando-se $\mathbf{y} = 0$, $r_0 \rightarrow r$, a integração dos momentos produz

$$\Delta(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\xi}}, \quad (2.38)$$

onde o coeficiente de correlação ξ é tal que

$$\xi = [r(T)]^{-\frac{1}{2}} \propto (T - T_c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

Observe-se que ξ diverge para T tendendo a T_c , significando que as correlações estendem-se sobre todas as regiões possíveis, conduzindo à inexistência de uma escala de comprimento, o que implica na invariância do sistema sob as transformações de escala ³.

Observando-se a eq.(2.38), nota-se que $T > T_c$, ξ tem valor pequeno e a função de correlação entre dois pontos tende a zero. Por outro lado, para $T \sim T_c$ tem-se que ξ tende a divergir, fazendo $\Delta(\mathbf{x})$ tender ao seu valor máximo, o que gera correlações de longo alcance. Deste modo, o domínio de consistência do modelo é definido na situação em que ξ é grande o suficiente em relação à escala microscópica, justificando a utilização de uma teoria contínua. Um exemplo é a cadeia de sítios com spin, na qual a distância a entre dois sítios adjacentes aparece na criticalidade como $a \ll \xi$.

Voltando-se à eq. (2.38), é possível escrever

$$\Delta(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}} f\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\xi}\right), \quad (2.40)$$

onde η é o expoente denominado dimensão anômala e $\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}$, com ν sendo o expoente crítico característico do comprimento de correlação.

Na aproximação de Landau, os expoentes η e ν têm valores 0 e 1/2 respectivamente. Porém, pode-se obter valores mais precisos destes parâmetros que concordam com os

³A quantidade ξ é equivalente ao inverso da massa no contexto da teoria quântica de campos, o que permite uma analogia do modelo de Ginzburg-Landau na criticalidade com a teoria $\lambda\phi^4$ não-massiva.

dados experimentais, analisando-se as correções de ordens maiores através da análise do grupo de renormalização. Por fim, note-se que a partir destes pode-se calcular outras quantidades termodinâmicas relevantes, como por exemplo o calor específico, caracterizado pelo expoente α , e a susceptibilidade magnética, caracterizada por γ , e assim sucessivamente [59].

2.4 Renormalização

A presença de divergências ultravioletas torna o objeto dado na eq.(2.29) mal definido, acarretando em dificuldades que podem ser contornadas implementando-se um corte Λ na integral. Procedimentos deste tipo são aplicados rotineiramente em teoria quântica de campos, sendo conhecidos como renormalização [59, 62, 63].

O procedimento de renormalização consiste na absorção dos infinitos, via uma redefinição dos parâmetros r_0 e u_0 , através da adição de certos contra-termos ao hamiltoniano, relacionando-se os parâmetros originais r_0 e u_0 aos correspondentes renormalizados e finitos r e u , eliminando-se assim as divergências nas predições do modelo.

Considere-se então a densidade de hamiltoniano dada na eq.(2.4) em termos das quantidades não-renormalizadas r_0 , u_0 e ϕ_0 , e sejam $\Gamma^{(N)}$ e $\Gamma_R^{(N)}$ as funções não-renormalizadas e renormalizadas, respectivamente, relacionadas da seguinte forma

$$\Gamma_R^{(N)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; u, r) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_\phi^{\frac{N}{2}}(u, r, \Lambda) \Gamma^{(N)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; u_0, r_0, \Lambda), \quad (2.41)$$

onde Z_ϕ é denominada constante de renormalização do campo, sendo o elemento necessário para tornar as funções de correlação finitas, podendo inclusive ser introduzida via a seguinte normalização do campo,

$$\phi_0 = Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi. \quad (2.42)$$

A fim de relacionar u e r aos seus equivalentes não-renormalizados, considere-se a seguinte relação entre a densidade de hamiltoniano original e a renormalizada,

$$\mathcal{H}_{GL,R}(\phi; r, g) = \mathcal{H}_{GL}(Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi; Z_\phi r, Z_\phi^2 u), \quad (2.43)$$

onde g é uma constante de acoplamento adimensional, satisfazendo

$$g = u \mu^{-\varepsilon}, \quad (2.44)$$

sendo μ uma escala arbitrária e $\varepsilon = 4 - d$. Assim, partindo-se da eq.(2.43), obtém-se as quantidades renormalizadas com

$$r_0 = Z_\phi^{-1} Z_r r, \quad u_0 = Z_\phi^{-2} Z_g g, \quad (2.45)$$

onde foram introduzidas as constantes Z_r e Z_g relativas à renormalização de r_0 e u_0 , respectivamente.

Tendo-se em conta que as funções de correlação renormalizadas devem ser expressas em termos dos parâmetros u e r , impõe-se as seguintes condições de normalização

$$\Gamma_R^{(2)}(p=0) = r, \quad (2.46)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = 1, \quad (2.47)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1 = \dots = p_4 = 0) = g \mu^\varepsilon, \quad (2.48)$$

onde $p = |\mathbf{p}|$. As equações acima fixam a relação entre as funções de correlação e as quantidades r , u e Z_ϕ .

Observe-se que as condições de normalização são arbitrárias. De fato, diferentes escolhas modificam os contratermos por quantidades finitas, levando à reparametrização da teoria, porém mantendo a invariância global da mesma.

Ademais, com o intuito de contornar o problema das divergências infravermelhas, fixa-se os momentos externos como sendo não-nulos, o que implica na reescrita das eqs.(2.46)-(2.48) como

$$\Gamma_R^{(2)}(p=0) = 0, \quad (2.49)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p) \right|_{p^2=\mu^2} = 1, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) \Big|_{PS} = g \mu^\varepsilon, \quad (2.51)$$

onde PS é o ponto de simetria definido por

$$PS : \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \frac{\mu^2}{4} (4\delta_{ij} - 1); \quad (2.52)$$

Nesta forma, a teoria renormalizada dependerá dos parâmetros g e μ .

A determinação das constantes de renormalização e das quantidades renormalizadas pode ser realizada utilizando-se o método de subtração minimal. Este esquema é particularmente útil se a técnica de regularização utilizada é a regularização dimensional [62, 63] (também conhecida como expansão em ε).

O procedimento de subtração minimal consiste em introduzir contra-termos, com intuito de remover os pólos em $\varepsilon = 4 - d$ nas funções de correlação que permanecem divergentes após a regularização dimensional. Assim, é possível demonstrar-se que no caso do modelo de Ginzburg-Landau na aproximação da primeira ordem na constante g , as constantes de renormalização são dadas por

$$Z_\phi = 1 + O(\bar{g}^2), \quad Z_g = 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\bar{g} + O(\bar{g}^2), \quad Z_{\phi^2} = 1 + \frac{\bar{g}}{2\varepsilon} + O(\bar{g}^2), \quad (2.53)$$

onde

$$\bar{g} = N_d g; \quad N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}, \quad (2.54)$$

e adotou-se $r = 0$.

2.5 O grupo de renormalização

A arbitrariedade associada à dependência no parâmetro de escala μ é apenas aparente, uma vez que é possível construir o modelo com invariância manifesta sob o re-escalamento do mesmo. A expressão matemática desta invariância é explicitada pelas equações do grupo de renormalização [64, 65]⁴. Aplicações bem conhecidas das equações de Callan-Symanzik podem ser vistas no cenário da física estatística, relacionadas aos estudos das transições de fase contínuas [67].

No contexto da análise do grupo de renormalização, é conveniente definir um termo adicional de fonte no expoente da integração funcional em (2.10),

$$\int d^d \mathbf{x} t(\mathbf{x}) \phi^2, \quad (2.55)$$

⁴O termo grupo de renormalização foi originalmente introduzido com o objetivo de manifestar a invariância da teoria quântica de campos sob os diferentes procedimentos da renormalização [66].

com t representando uma fonte de inserções ϕ^2 . Tal termo possibilita definir funções de correlação com L inserções⁵, e são denotadas por

$$\Gamma^{(N,L)}(p_i; q_j), \quad (2.56)$$

onde $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, L$.

Vê-se também que as inserções ϕ^2 definem uma constante de renormalização adicional, dada por $\bar{Z}_{\phi^2} = Z_{\phi^2} Z_\phi^{-1}$. Deste modo, também é necessário introduzir a condição de normalização, que no caso $r = 0$, é

$$\Gamma_R^{(2,1)}(p_1, p_2; q) \Big|_{\bar{P}S} = 1, \quad (2.57)$$

onde

$$\bar{P}S : \mathbf{p}_i^2 = \frac{3\mu^2}{4}, \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = -\frac{\mu^2}{4}, \quad q^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \mu^2. \quad (2.58)$$

Assim, no cenário do modelo de Ginzburg-Landau, renormalizado com $d < 4$ a $r = 0$, tem-se

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(N,L)}(p_i; q_j; u_0, \Lambda) \Big|_{u_0, \Lambda} = 0. \quad (2.59)$$

Levando-se em consideração a eq.(2.41), obtém-se as equações de Callan-Symanzik como

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g, \varepsilon) - \frac{N}{2} \eta(g, \varepsilon) - L \eta_2(g, \varepsilon) \right] \Gamma_R^{(N,L)}(p_i; q_j; g, \mu) = 0, \quad (2.60)$$

onde

$$\beta(g, \varepsilon) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{dg}{d\mu} \Big|_{u_0, \Lambda}, \quad \eta(g, \varepsilon) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{d \ln Z_\phi}{d\mu} \Big|_{u_0, \Lambda}, \quad \eta_2(g, \varepsilon) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{d \bar{Z}_{\phi^2}}{d\mu} \Big|_{u_0, \Lambda}. \quad (2.61)$$

A interpretação física para a eq.(2.60) é baseada na independência da escolha do parâmetro μ , sendo que a sua variação é compensada com mudanças nas funções do grupo de renormalização.

Com o auxílio das eqs. (2.45) e (2.53), a função beta no modelo de Ginzburg-Landau na primeira ordem é determinada na forma

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \frac{3}{2} g^2 + O(g^3), \quad (2.62)$$

⁵A fonte t também pode ser tomada como sendo uma constante. A sua semelhança com o parâmetro r leva a interpretá-la como $t \propto (T - T_c)$.

onde beta foi multiplicada por N_d e depois realizou-se a substituição \bar{g} por g . Os zeros da função beta são os pontos fixos do fluxo da constante de acoplamento, explicitados por $g_1^* = 0$ e $g_2^* = \frac{2\varepsilon}{3}$.

Uma questão pertinente é a análise do comportamento da função beta com o re-escalamento de μ por um fator $s : \mu \rightarrow s\mu$. Assim, a constante g torna-se $g(s)$, sendo $g(1) = g$ e beta em (2.62) reescrita como

$$\beta(g(s)) = s \frac{dg(s)}{ds}. \quad (2.63)$$

Na região $g(1) < g_2^*$, tem-se $s \frac{dg(s)}{ds} < 0$ e a diminuição de s conduz $g(s)$ a g_2^* . De modo contrário, assumindo inicialmente $g(1) > g_2^*$, $s \frac{dg(s)}{ds} > 0$, e $s \rightarrow 0$ leva $g(s)$ também na direção de g_2^* .

Desta forma, observa-se a convergência para o fator de escala tendendo a zero, caracterizando a estabilidade do ponto fixo no infravermelho. O ponto fixo trivial converge para o fluxo de $g(s)$ no limite $s \rightarrow \infty$, estabelecendo a estabilidade do ponto fixo no ultravioleta. Evidentemente a derivada $\beta'(g^*)$ governa a estabilidade dos pontos fixos, onde $\beta'(g^*) > 0$ significa g^* estável no infravermelho, e $\beta'(g^*) < 0$ manifesta a estabilidade no ultravioleta de g^* .

Em se tratando de fenômenos críticos, o aumento no valor do comprimento de correlação caracteriza a existência de fenômenos coletivos em larga escala, e define a região de domínio crítico. Portanto, no espaço dos momentos é relevante considerar a situação $p \rightarrow 0$. Assim, na teoria renormalizada, μ emerge como a única escala utilizada, e conseqüentemente pode-se impor nos momentos externos das funções de correlação a condição $sp_i \ll \mu$, com o fator s tendendo a zero. Conclui-se então que uma transição de fase contínua é descrita pelo ponto fixo estável no infravermelho, evidenciando-se g_2^* como o ponto fixo associado às transições de fase de segunda ordem.

Com o intuito de obter os expoentes críticos através da análise do grupo de renormalização, mostra-se que a partir do re-escalamento $s : p_i \rightarrow sp_i$ e da análise dimensional obtém-se

$$\Gamma_R^{(N,L)}(sp_i; sq_j; g, \mu) \stackrel{s \rightarrow 0}{\propto} s^{d - Nd_\phi - Ld_{\phi^2}}, \quad (2.64)$$

onde

$$d_\phi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{\eta(g^*, \varepsilon)}{2}; \quad d_{\phi^2} = 2 + \eta_2(g^*, \varepsilon). \quad (2.65)$$

sendo d_ϕ e d_{ϕ^2} interpretadas como dimensões anômalas do campo ϕ e da inserção ϕ^2 , respectivamente.

Em particular, considerando-se $N = 2$ e $L = 0$, tem-se

$$\Gamma_R^{(2)}(sp) \stackrel{s \rightarrow 0}{\propto} s^{2-\eta(g^*, \varepsilon)}, \quad (2.66)$$

o que permite identificar o expoente crítico η com $\eta(g^*, \varepsilon)$.

De outra maneira, pode-se obter heurísticamente o expoente crítico ν , observando-se as funções de correlação

$$\Gamma_R^N(p_i; t, g, \mu) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{t^L}{L!} \Gamma_R^N(p_i; q_j; g, \mu). \quad (2.67)$$

Procedendo-se como na determinação de η , obtém-se a expressão

$$\Gamma_R^N(p_i; t, g^*, \mu) \stackrel{t \rightarrow 0}{\propto} \left[\mu \left(\frac{t}{\mu} \right)^{\frac{1}{2+\eta_2(g^*, \varepsilon)}} \right]^{d-d_\phi}, \quad (2.68)$$

que no caso $N = 2$ é escrita como

$$\Gamma_R^2(p; t, g^*, \mu) \stackrel{t \rightarrow 0}{\propto} t^{\frac{2-\eta}{2+\eta_2(g^*, \varepsilon)}}. \quad (2.69)$$

A identificação do expoente ν é imediata considerando-se que $t \propto T - T_c$, resultando em

$$\nu^{-1} \equiv 2 + \eta_2(g^*, \varepsilon). \quad (2.70)$$

A eq.(2.69) permite ainda inferir o expoente da susceptibilidade magnética γ , como sendo $\gamma = \nu(2 - \eta)$. Portanto, realizando-se análises similares aos procedimentos expostos anteriormente, pode-se obter os outros expoentes que caracterizam as quantidades termodinâmicas.

As expressões resultantes dos expoentes do modelo de Ginzburg-Landau na aproximação de primeira ordem em ε são portanto

$$\eta = O(\varepsilon^2); \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + O(\varepsilon^2); \quad \gamma = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + O(\varepsilon^2). \quad (2.71)$$

Alguns comentários são relevantes neste ponto.

(i) As funções do grupo de renormalização no cenário da expansão em ε são conhecidas atualmente até a ordem ε^5 , com a consideração do parâmetro de ordem a n componentes [14, 59]. Assim, realizando-se o re-somatório das séries perturbativas e adotando-se $\varepsilon = 1$ ($d = 3$), obtém-se os valores dos expoentes críticos para diferentes valores de n , conduzindo a resultados que estão em concordância com os dados experimentais para diferentes sistemas, a saber: a transição líquido-gás no Xe, CO_2 e outros fluidos; a transição líquido-líquido em misturas de fluidos binários; a transição superfluida no hélio-4; a transição ferromagnética nos EuO e Ni e antiferromagnética no RbMnF_3 , e assim por diante [14].

(ii) No contexto da regularização dimensional, a subtração minimal em princípio é confiável para $\varepsilon \ll 1$. Entretanto, em situações nas quais d não é próximo de 4 o modelo produz resultados satisfatórios, mesmo com a convergência fraca da série. Contudo, expansão a valores maiores de ε pode ser tratada por métodos de re-somatório de séries, como por exemplo o somatório de Borel [59].

(iii) Outra expansão perturbativa que pode ser utilizada alternativamente consiste na abordagem de dimensão fixa, onde considera-se as funções do grupo de renormalização diretamente com dimensão 3. Neste caso, por outro lado, arca-se a falta de um parâmetro controlador da expansão. Métodos de re-somatório de série também são importantes neste procedimento [17].

(iv) A existência de um ponto fixo estável no infravermelho evidencia ocorrência de uma transição de segunda ordem. De fato, nestas situações, observa-se a divergência do comprimento de correlação no ponto crítico. Isto, porém, não acontece nas transições de primeira ordem, em que ξ é finito a $T = T_c$. Desta maneira, a ausência do ponto mencionado é interpretada como uma indicação de uma transição de fase de primeira ordem [16].

(v) Os pontos fixos estáveis ultravioleta são de interesse na física das altas energias. De acordo com a eq.(2.63), a constante $g(s)$ tende a zero quando s tende a infinito, gerando uma teoria assintoticamente livre [68, 69].

Capítulo 3

As condições de fronteira no modelo de Ginzburg-Landau

Neste capítulo discute-se o comportamento crítico do modelo de Ginzburg-Landau com correção de primeira ordem à aproximação de Landau, levando-se em consideração as condições de fronteira engendradas pela compactificação das dimensões [54]. Assim, na seção 3.1 analisa-se o modelo confinado. Em seguida, na seção 3.2, exhibe-se o método de regularização via funções zeta de Epstein multidimensionais. Considera-se então, na seção 3.3, o modelo nos casos particulares de uma, duas ou três dimensões compactificadas, analisa-se a dependência do comportamento crítico. Encerra-se, na seção 3.4, discutindo-se os resultados obtidos.

3.1 O efeito da compactificação

A relevância dos modelos com campos confinados dispensa apologias. De fato, o efeito Casimir e a transição supercondutora em amostras de diferentes dimensões são alguns dos exemplos proeminentes, onde o confinamento é governado por condições de contorno apropriadas. Cenários deste tipo exibem, entre outras características, a quebra da invariância de translação em uma ou mais direções espaciais.

Um método de tratar certas propriedades destes sistemas constitui-se em uma extensão do formalismo de Matsubara [42]. Originalmente proposto no contexto de teorias

de campo em temperatura finita [70, 71], este método, quando estendido adequadamente, converte-se em uma ferramenta útil no tratamento dos efeitos do confinamento nos modelos estudados nesta tese.

Considere-se o sistema definido pelo hamiltoniano (2.4), com a integração espacial definida na região $\mathcal{R} = \mathfrak{R}^{d-m} \times \mathcal{M}$, sendo \mathcal{M} um subespaço de \mathcal{E} com m dimensões construído do produto cartesiano dos intervalos $[0, L_i]$; $i = 1, \dots, m$. Sendo assim, um vetor de \mathcal{R} é denotado por

$$\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (z_1, \dots, z_m, \mathbf{y}), \quad (3.1)$$

onde \mathbf{y} é um vetor com $(d - m)$ componentes. Assim, o momento correspondente é dado por

$$\mathbf{p} = (k_1, \dots, k_m, \mathbf{q}), \quad (3.2)$$

onde \mathbf{q} tem o mesmo número de componentes que \mathbf{y} . A função de partição é escrita então como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_0^{\mathbf{L}} d^m \mathbf{z} \int d^{d-m} \mathbf{y} (-\mathcal{H}_{GL}(\phi(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \nabla \phi(\mathbf{z}, \mathbf{y})) + J(\mathbf{z}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{z}, \mathbf{y})) \right], \quad (3.3)$$

sendo $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)$. Neste ponto, supõe-se então que o parâmetro de ordem obedece às condições tipo Dirichlet-Dirichlet generalizadas, ou seja

$$\varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y})|_{\mathbf{z}=0} = \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y})|_{\mathbf{z}=\mathbf{L}}. \quad (3.4)$$

No presente contexto, φ não é escrito em termos de uma base de ondas planas. Nota-se imediatamente que na teoria quântica de campos esta característica induz a uma modificação nas regras de Feynman, visto que as integrações correspondentes a cada processo são agora limitadas ao espaço compactificado. Levando-se em conta isto, introduz-se a seguinte prescrição de compactificação no espaço dos momentos,

$$k_i \rightarrow \frac{2n_i\pi}{L_i}; \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} f(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{1}{L_1 \dots L_m} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{d-m} \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-m}} f(\{k_i\}, \mathbf{q}), \quad (3.5)$$

onde $\{a_i\} = a_1, \dots, a_m$.

A fórmula anterior pode ser interpretada como uma prescrição de Matsubara generalizada. Note-se a manutenção da invariância translacional ao longo das outras direções não-compactificadas [38]. Por exemplo, adotando-se $m = 1$ descreve-se o sistema confinado entre dois planos paralelos e infinitos separados por uma distância L .

No caso mais geral de m assumindo valores arbitrários, representa-se φ através da expansão mista de séries e integrais

$$\varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} c_{\{n_i\}} \int \frac{d^{d-m}\mathbf{q}}{(2\pi)^{d-m}} e^{-i(\sum_i k_i z_i + \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \tilde{\varphi}_l(\{k_i\}, \mathbf{q}). \quad (3.6)$$

O coeficiente $c_{\{n_i\}}$ refere-se à representação das séries de Fourier sobre as direções \mathbf{z} .

3.2 O método da regularização zeta

Afim de tratar as modificações engendradas pelo confinamento no modelo de Ginzburg-Landau, considere-se como ponto de partida a aproximação de primeira ordem no parâmetro u_0 , que permite reescrever a contribuição de primeira ordem ao potencial termodinâmico efetivo em (2.29) como

$$\Gamma_1(\varphi_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2s} \left[\frac{u\varphi_0^2}{2} \right]^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + r_0)^s}. \quad (3.7)$$

Nesta última, supondo-se que o parâmetro u_0 é finito, realizou-se a substituição de u_0 por u .

Com o intuito de trabalhar com quantidades adimensionais, define-se os parâmetros

$$c^2 = \frac{r_0}{(2\pi\mu)^2}, \quad b_i = \frac{1}{L_i\mu}, \quad g = \frac{u}{4\pi^2\mu^{4-d}}, \quad \phi_0^2 = \frac{\varphi_0^2}{\mu^{d-2}}, \quad (3.8)$$

onde μ é uma escala arbitrária. Desta maneira, escrevendo-se a expressão (3.7) em termos dos parâmetros definidos acima, e realizando-se em seguida a substituição (3.5), obtém-se

$$\Gamma_1(\phi_0, \{b_i\}) = \mu^d b_1 \dots b_m \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s} \left[\frac{g\phi_0^2}{2} \right]^s \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{d-m}\mathbf{q}'}{(b_1^2 n_1^2 + \dots + b_m^2 n_m^2 + c^2 + \mathbf{q}'^2)^s}, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{q}' = \mathbf{q}/2\pi\mu$. Dependendo dos valores de d e m , a escolha da condição de fronteira tipo Dirichlet-Dirichlet pode acarretar para $c = 0$ divergências no infravermelho. Evidentemente, estes desenvolvimentos estão em conformidade com o critério de Ginzburg.

Com o uso da fórmula de regularização dimensional [59], a integral sobre as dimensões não-compactificadas produz

$$\Gamma_1(\phi_0, \{b_i\}) = \mu^d b_1 \dots b_d \sum_{s=1}^{\infty} f(d, m, s) \left[\frac{g\phi_0^2}{2} \right]^s A_m^{c^2} \left(s - \frac{d-m}{2}; \{b_i\} \right), \quad (3.10)$$

onde usou-se as definições

$$f(d, m, s) = \pi^{(d-m)/2} \frac{(-1)^{s+1}}{2s\Gamma(s)} \Gamma\left(s - \frac{d-m}{2}\right) \quad (3.11)$$

e

$$A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{+\infty} (b_1^2 n_1^2 + \dots + b_m^2 n_m^2 + c^2)^{-\nu}. \quad (3.12)$$

$A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\})$ é a função zeta de Epstein-Hurwitz [40], bem definida para $Re(\nu) > m/2$. Note-se que no presente caso $Re(s) > (d-2)/2$. O objetivo de escrever esta função em uma forma mais conveniente conduz ao uso dos procedimentos descritos em [38, 40]. A metodologia empregada nesta situação está resumida no apêndice A.

Deste modo, considerando-se $\nu = s - (d-m)/2$ na eq.(A.10), e em seguida realizando-se a substituição em (3.11), obtém-se a correção de primeira ordem ao potencial termodâmico efetivo em d dimensões, com m compactificadas, na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi_0, \{L_i\}) = & \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{g\phi_0^2}{2} \right]^s h(d, s) \left[2^{s-\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(s - \frac{d}{2}\right) r_0^{\frac{d-2s}{2}} + \sum_{i=1}^m \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r_0}}{L_i n_i} \right)^{\frac{d}{2}-s} K_{\frac{d}{2}-s}(\sqrt{r_0} L_i n_i) \right. \\ & + 2 \sum_{i<j=1}^m \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}} \right)^{\frac{d}{2}-s} K_{\frac{d}{2}-s} \left(\sqrt{r_0 (L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2)} \right) + \dots \\ & \left. + 2^{m-1} \sum_{\{n_i\}=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_m^2 n_m^2}} \right)^{\frac{d}{2}-s} K_{\frac{d}{2}-s} \left(\sqrt{r_0 (L_1^2 n_1^2 + \dots + L_m^2 n_m^2)} \right) \right], \quad (3.13) \end{aligned}$$

onde

$$h(d, s) = \frac{1}{2^{d/2+s-1} \pi^{d/2}} \frac{(-1)^{s+1}}{s\Gamma(s)}. \quad (3.14)$$

De acordo com a seção 2.3.2, a equação de *gap* neste caso é obtida realizando-se a substituição da eq.(3.14) na parte da contribuição de primeira ordem em (2.34). Sendo assim, o resultado obtido é

$$\begin{aligned}
r(L_i) = & r_0 + \frac{u}{(2\pi)^{d/2}} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{L_i n_i} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(\sqrt{r} L_i n_i) \right. \\
& + 2 \sum_{i<j=1}^m \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2}} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{r (L_i^2 n_i^2 + L_j^2 n_j^2)} \right) + \dots \\
& \left. + 2^{m-1} \sum_{\{n_i\}=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + \dots + L_m^2 n_m^2}} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{r (L_1^2 n_1^2 + \dots + L_m^2 n_m^2)} \right) \right]. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Note-se que na eq.(3.15) anterior, a parcela $2^{-\frac{d}{2}-1} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) r^{(d-2)/2}$ presente inicialmente em (3.13) foi eliminada, pois para $d \geq 3$ o fator r^{d-2} anula-se na criticalidade.

Os casos particulares correspondentes a $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, com $d = 3$, sugerem que o modelo é capaz de descrever o comportamento crítico de sistemas na forma de filmes, fios ou cubos. Constata-se ainda a relação $r = r(L_i)$, o que gera uma equação tipo Dyson-Schwinger, que em geral não é solúvel por meios algébricos ordinários. Contudo, como se mostrará na próxima seção, o problema pode ser abordado na vizinhança da criticalidade sem maiores dificuldades, permitindo a obtenção da dependência explícita da temperatura crítica nas condições de fronteira.

3.3 O comportamento crítico em filmes, fios e cubos

3.3.1 Filmes

Neste ponto analisa-se o caso mais simples da compactificação, que consiste no confinamento em uma dimensão espacial do espaço tridimensional. Como já foi discutido anteriormente, esta situação modela o sistema limitado por dois planos paralelos separados por uma distância $L_1 = L$. Assim, fixando-se $m = 1$ na eq.(3.15), obtém-se

$$r(L) = r_0(L) + \frac{u}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{nL} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(nL\sqrt{r}), \quad (3.16)$$

Considerando-se o sistema na vizinhança da criticalidade, com $r \approx 0$ e L finito mas

suficientemente pequeno, pode-se utilizar a fórmula das funções de Bessel

$$K_\nu(z) \approx \frac{1}{2}\Gamma(|\nu|) \left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|} \quad (z \approx 0). \quad (3.17)$$

Escrevendo-se $r(L)$ para $d > 3$ como

$$r(L) \approx r_0(L) + \frac{u}{4\pi^{d/2}L^{d-2}}\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)\zeta(d-2) \quad (3.18)$$

onde $\zeta(d-2)$ é a função zeta de Riemann, definida para $\text{Re}\{d-2\} > 1$ como

$$\zeta(d-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{d-2}}. \quad (3.19)$$

Note-se que escolhendo-se $d = 4$, $r(L) = 0$ e trocando-se L por β na eq.(3.18), obtém-se uma expressão formalmente idêntica à equação crítica de altas temperaturas derivada em [72] no contexto da teoria quântica de campos a temperatura finita.

A fim de prover significado físico a eq.(3.18) com $d = 3$, realiza-se o procedimento de regularização considerando-se a extensão analítica da função zeta, que satisfaz a seguinte fórmula de reflexão,

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z/2)}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\pi^{z-\frac{1}{2}}\zeta(1-z), \quad (3.20)$$

permitindo escrever

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[\zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right] = \gamma, \quad (3.21)$$

onde $\gamma \approx 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni. Assim, pode-se definir um parâmetro finito para $d \approx 3$, eliminando-se o pólo neste ponto,

$$\bar{r}(L) \approx r(L) - \frac{1}{(d-3)}\frac{u}{4\pi L}, \quad (3.22)$$

Neste caso, usando-se a eq.(3.18) em (3.22) e realizando-se o limite d tendendo a 3, obtém-se a expressão para $\bar{r}(L)$ válida na vizinhança da criticalidade

$$\bar{r}(L) \approx \alpha(T - T_c(L)), \quad (3.23)$$

onde a temperatura de transição $T_c(L)$ é dada por

$$T_c(L) = T_{c0} - C_1\frac{u}{\alpha L}, \quad (3.24)$$

sendo que a constante C_1 é ¹

$$C_1 = \frac{6\gamma}{\pi} \approx 0.046 . \quad (3.25)$$

Portanto, a temperatura crítica de uma amostra na forma de filme depende de T_{c0} , que é a temperatura crítica de um sistema sem levar em conta as fronteiras.

3.3.2 Fios e cubos

Analisando-se então o caso $m = 2$, escreve-se a eq.(3.15) como

$$\begin{aligned} r(L_1, L_2) &= r_0(L_1, L_2) \\ &+ \frac{u}{(2\pi)^{d/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{nL_1}\right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(nL_1\sqrt{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{nL_2}\right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(nL_2\sqrt{r}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2}}\right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{r(L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Limitando-se à vizinhança do ponto crítico, ou seja tomando-se $r \approx 0$, e com ambos L_1 e L_2 finitos e suficientemente pequenos, e usando-se a eq.(3.17), pode-se permite reescrever (3.26) na forma

$$\begin{aligned} r(L_1, L_2) &\approx r_0(L_1, L_2) \\ &+ \frac{u}{24\pi^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \left[\left(\frac{1}{L_1^{d-2}} + \frac{1}{L_2^{d-2}}\right) \zeta(d-2) + 2E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2\right) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2\right)$ é a função zeta de Epstein generalizada, definida como

$$E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2\right) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2]^{-\left(\frac{d-2}{2}\right)}, \quad (3.28)$$

para $\text{Re}\{d\} > 3$.

Assim, levando-se em conta os desenvolvimentos do apêndice B, no caso $d = 3$ obtém-se o parâmetro r dependente das condições de fronteira na forma

$$r(L_1, L_2) \approx \alpha (T - T_c(L_1, L_2)), \quad (3.29)$$

onde a temperatura crítica é dada por

$$T_c(L_1, L_2) = T_0 - \frac{3u\gamma}{16\pi\alpha} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) - \frac{u}{4\pi\alpha} W_2\left(\frac{d-3}{2} = 0; L_1, L_2\right), \quad (3.30)$$

¹Observe-se a diferença entre o valor encontrado de C_1 na eq.(3.25) e na ref. [54].

sendo utilizada a definição

$$W_2\left(\frac{d-3}{2} = 0; L_1, L_2\right) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L_1} K_0\left(2\pi \frac{L_2}{L_1} n_1 n_2\right) + \frac{1}{L_2} K_0\left(2\pi \frac{L_1}{L_2} n_1 n_2\right) \right\}. \quad (3.31)$$

O objeto $W_2\left(\frac{d-3}{2} = 0; L_1, L_2\right)$ contém somatórios duplos e é mal definido nos limites de L_i tendendo a ∞ . Restringindo-se a partir deste ponto ao estudo das situações $L_1 = L_2$, modelando fios com seção transversal quadrada, $L_1 = L_2 = L = \sqrt{A}$, escreve-se a eq.(3.30) como

$$T_c(A) = T_0 - C_2 \frac{u}{\alpha \sqrt{A}}, \quad (3.32)$$

onde a constante C_2 tem o valor

$$C_2 = \frac{3\gamma}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} K_0(2\pi n_1 n_2) \approx 0.069. \quad (3.33)$$

Obtém-se então a temperatura crítica de um sistema na forma de um fio quadrado, verificando-se que esta grandeza decresce com a redução de \sqrt{A} .

O caso de três dimensões compactificadas corresponde a uma caixa com arestas L_1, L_2, L_3 . Tomando-se $m = 3$ nas eqs.(3.15) e usando-se (3.17) obtém-se, para L_1, L_2, L_3 suficientemente pequenos e $r \approx 0$, a expressão

$$r(L_1, L_2, L_3) \approx r_0^2(L_1, L_2, L_3) + \frac{u}{4\pi^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\zeta(d-2)}{L_i^{d-2}} + 2 \sum_{i<j=1}^3 E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_i, L_j\right) + 4E_3\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2, L_3\right) \right] \quad (3.34)$$

onde $E_3(\nu; L_1, L_2, L_3) = \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} [L_1^2 n_1^2 + L_2^2 n_2^2 + L_3^2 n_3^2]^{-\nu}$.

As funções E_2 são introduzidas na eq.(B.5).

Levando-se em conta os resultados expostos no apêndice B, o parâmetro $r(L_1, L_2, L_3)$ para $d = 3$ fica dado então por

$$r(L_1, L_2, L_3) \approx \alpha (T - T_c(L_1, L_2, L_3)), \quad (3.35)$$

sendo a temperatura crítica $T_c(L_1, L_2, L_3)$ definida como

$$T_c = T_{c0} - \frac{u}{4\pi} \left[\frac{8}{3} W_3(0; L_1, L_2, L_3) + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} + \frac{4}{3} \sum_{i<j=1}^3 W_2(0; L_i, L_j) + \frac{\pi}{18} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1+\varepsilon_{ijk})}{2} \frac{L_i}{L_j L_k} + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1+\varepsilon_{ijk})}{2} \frac{1}{L_i} W_2\left(-\frac{1}{2}; L_j, L_k\right) \right] \quad (3.36)$$

Restringindo-se então à situação na qual $L_1 = L_2 = L_3 = L$, obtém-se a temperatura crítica como

$$T_c(V) = T_0 - C_3 \frac{u}{\alpha V^{1/3}}, \quad (3.37)$$

onde a constante C_3 tem valor

$$C_3 = \frac{1}{24} + \frac{3\gamma}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi n_1 n_2}}{n_1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} K_0(2\pi n_1 n_2) + \frac{2}{\pi} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} K_0\left(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2}\right) \approx 0.115. \quad (3.38)$$

Conclui-se então que a temperatura crítica de um sistema na forma de uma caixa cúbica diminui com o decréscimo do volume.

3.4 Discussão

Em todos os casos estudados, a temperatura crítica corrigida depende linearmente do inverso do comprimento L , característico com configuração geométrica dada. De fato,

$$T_c(L) = T_{c0} - \frac{C_m u}{\alpha L}, \quad (3.39)$$

onde C_m é uma constante igual a 0.046 para um filme, 0.069 para um fio e 0.115 para um cubo.

Do ponto de vista fenomenológico, os resultados concordam qualitativamente com os dados experimentais [21, 22, 24–27, 30, 31]. Em particular, sistemas supercondutores exibem na escala de filmes finos, com espessuras inferiores a 1 μm o comportamento previsto pela expressão de $T_c(L)$. Resultados similares foram obtidos em experimentos recentes no caso de fios com seções quadradas em escalas maiores de nm^2 [32, 33]. Situações semelhantes foram também verificadas para grãos supercondutores próximos da nano-escala [34–36].

Analisando-se a fig.3.1 percebe-se que há a predição do valor mínimo de L para a existência da supercondutividade em cada configuração geométrica. Recentemente, houve a confirmação experimental deste efeito para grãos supercondutores feitos de chumbo [37], com diâmetro de 6 nm, obtendo-se neste caso um valor mínimo de L que é o maior dentre os três estudados. Assim, os valores das dimensões lineares

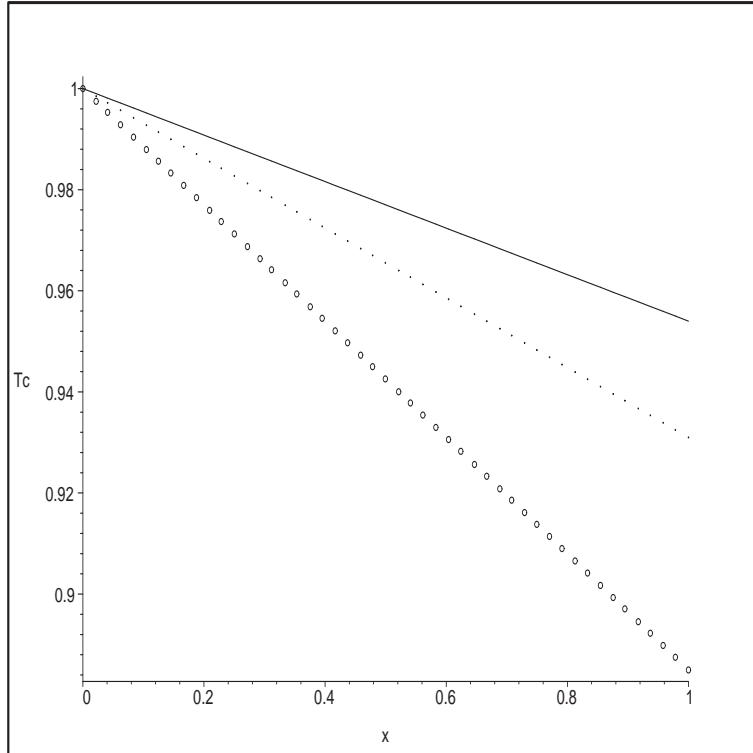


Figura 3.1: Gráfico da temperatura crítica $T_c(L)$ em função do comprimento L característico. A linha sólida representa $m = 1$, a linha pontilhada o caso $m = 2$ e a linha com círculos é $m = 3$. Supõe-se $T_{c0} = 1$, $\alpha T_{c0} = 1\xi_0$, onde ξ_0 é uma escala de comprimento arbitrário, $x = \frac{\xi_0}{L}$ e $u = 1$.

das outras duas situações ficam abaixo da escala nanométrica, assumindo magnitudes comparáveis ao raio atômico, acarretando em dificuldades na observação da supressão da supercondutividade em filmes e fios [21, 22, 24–27, 30–33].

Por outro lado, do ponto de vista microscópico, segundo modelos baseados na teoria de Bardeen, Cooper e Schrieffer [34], a presença de fronteiras modifica as correlações características do sistema com respeito às suas propriedades na ausência da compactificação espacial. Tais modificações aparecem quando o espaçamento médio entre os níveis de energia de partícula única, definido por $\tilde{d} = \frac{1}{N(E_F)V}$, onde $N(E_F)$ é a densidade de estados na superfície de Fermi, torna-se comparável à escala de energia que caracteriza as correlações em sistemas em sua forma sem fronteiras, tal como a energia de *gap* $\tilde{\Delta}$.

Assim, a supercondutividade deixa de ser possível quando $\tilde{d} > \tilde{\Delta}$, pois correlações de

emparelhamento dos elétrons manifestam-se apenas como flutuações fracas. Percebe-se então que \tilde{d} deve ter um valor não-desprezível no caso dos grãos pequenos, predizendo portanto o tamanho mínimo para a existência de supercondutividade em materiais granulares, como acontece nos resultados aqui obtidos.

Dentre os vários efeitos contemplados, resalta-se a localização dos estados eletrônicos em função das dimensões reduzidas da amostra em relação ao comprimento típico da repulsão coulombiana. Isto impossibilita a formação dos pares de Cooper, enfraquecendo a fase supercondutora. Um outro fenômeno é a chamada proximidade, que consiste na ocupação de níveis livres no substrato em que a amostra é depositada por elétrons desta última. Em vista destes fatos, o modelo aqui apresentado sugere que estes efeitos são levados em conta de uma maneira efetiva, pois a dependência nas condições de fronteira aparece da natureza topológica do sistema.

Sendo assim, uma análise detalhada do termo responsável pela dependência nas condições de fronteira é requerida para obter-se uma estimativa quantitativa dos efeitos apresentados. Neste contexto, um fato também relevante a considerar é, por exemplo, a presença das flutuações magnéticas, que constitui o tema do próximo capítulo.

Capítulo 4

As flutuações magnéticas e o campo magnético externo no modelo de Ginzburg-Landau com uma dimensão compactificada

As linhas deste capítulo são consagradas ao estudo dos efeitos das flutuações e campos externos magnéticos no modelo de Ginzburg-Landau com uma dimensão compactificada.

Assim, na seção 4.1 analisa-se o modelo confinado entre dois planos, sendo o parâmetro de ordem acoplado ao campo de flutuações magnéticas [55]. Na seção 4.2, a teoria de Halperin-Lubensky-Ma das transições de primeira ordem em supercondutores do tipo I é revisitada sob este ponto de vista [56]. Por fim, na seção 4.3 discute-se a supercondutividade do tipo II via o modelo de Ginzburg-Landau no limite de N grande, considerando-se os efeitos da presença de um campo magnético externo uniforme e independente do tempo [57].

4.1 As flutuações magnéticas e o potencial efetivo gaussiano

O estudo das transições de fase carregadas coloca a necessidade de considerar a presença das flutuações do campo magnético no material, conduzindo à introdução de uma constante de acoplamento efetiva da interação entre o parâmetro de ordem e o potencial vetorial do campo eletromagnético definido na amostra [16].

Sendo assim, considera-se como ponto de partida o modelo discutido no capítulo 3, considerando-se o caso particular de uma dimensão compactificada, sendo o potencial termodinâmico efetivo, introduzido usando-se o método variacional baseado no potencial efetivo gaussiano [55, 73–80].

4.1.1 O potencial termodinâmico efetivo gaussiano

O modelo de Ginzburg-Landau no espaço euclidiano em d dimensões acoplado às flutuações magnéticas, pode ser introduzido em estreita analogia com o modelo da teoria quântica de campos denominado eletrodinâmica escalar, ou o modelo de Higgs abeliano [81, 82]. De fato, a densidade de hamiltoniano do modelo é escrita na forma [1, 80]

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi|^2 + \frac{1}{2}r_0|\Psi|^2 + u(|\Psi|^2)^2, \quad (4.1)$$

onde Ψ é o parâmetro de ordem, que supõe-se complexo. Em adição, as componentes do campo magnético,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \mu, \nu = 1, \dots, d, \quad (4.2)$$

são relacionadas ao potencial vetorial em d dimensões por

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2. \quad (4.3)$$

Note-se que o potencial vetorial é independente do tempo.

Com o objetivo de obter somente graus de liberdade físicos, escreve-se o parâmetro de ordem Ψ em termos de dois campos reais ϕ e θ , de tal forma que

$$\Psi = \phi e^{i\theta}, \quad (4.4)$$

supondo-se ainda que as transformações de calibre são definidas por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - 1/e\nabla\theta. \quad (4.5)$$

A adoção do calibre de unitariedade transverso [80] acarreta a existência de uma componente longitudinal, \mathbf{A}_L , proporcional a $\nabla\theta$. Em função desta últimas definições, a parte real e imaginária do parâmetro de ordem são consideradas como campos independentes, escritos em função de Ψ e Ψ^* ou de ϕ e θ . Sendo assim, a integração funcional na função de partição é realizada sobre ϕ , \mathbf{A}_T e \mathbf{A}_L . Realizando-se a integração sobre a componente longitudinal do potencial vetorial obtém-se

$$Z[J] = \int D\phi DA_T \exp \left[- \int d^d\mathbf{x} \mathcal{H} + \int d^d\mathbf{x} J\phi \right], \quad (4.6)$$

onde

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}r_0\phi^2 + u\phi^4 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2\epsilon}(\nabla \cdot \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}e^2\phi^2 A^2. \quad (4.7)$$

Observe-se que foi introduzido um parâmetro fixador do calibre ϵ , que será anulado ao final dos cálculos. No que segue, usa-se \mathbf{A} para designar o potencial vetorial transverso.

O cálculo do potencial termodinâmico efetivo gaussiano está explicitado no apêndice C. Seguindo-se os procedimentos lá expostos, identifica-se a equação de *gap* na forma (C.22),

$$\bar{r} = r_0 + 12uI_0^d(\sqrt{\bar{r}}) + 2e^2I_0^d \left(\sqrt{e^2I_0^d(\sqrt{\bar{r}})} \right), \quad (4.8)$$

onde a função I_0^d designa

$$I_0^d(M) = \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + M^2}. \quad (4.9)$$

Os termos de \bar{r} que são dependentes em u e e^2 são interpretados como as correções à aproximação de ordem zero, devidas às contribuições tanto do auto-acoplamento do parâmetro de ordem quanto do acoplamento entre este e o campo magnético.

4.1.2 A compactificação e o comportamento crítico

Considere-se agora os efeitos das condições de fronteira no modelo apresentado na seção anterior. Assim, através da prescrição (3.5), a eq.(4.9) torna-se

$$I_0^d(M) = \frac{1}{4\pi^2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{q}}{q^2 + b^2n^2 + c^2}, \quad (4.10)$$

onde $q_i = k_i/2\pi$, $b = 1/L$ e $c^2 = M^2/4\pi^2$.

Deste modo, a eq.(4.10) pode ser tratada seguindo o procedimento descrito pelas eqs.(3.7)-(3.14), considerando-se em particular a eq.(3.13) com $m = 1$

$$I_0^d(M) = 2^{-\frac{d}{2}}\pi^{1-\frac{d}{2}} \left[2^{1-\frac{d}{2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) M^{-2+d} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M}{nL}\right)^{-1+\frac{d}{2}} K_{-1+\frac{d}{2}}(MLn) \right], \quad (4.11)$$

Assim, tomando-se $M = \sqrt{\bar{r}}$ e restringindo-se à vizinhança do ponto crítico, definida por $\bar{r} \approx 0$, a fórmula (3.17) permite escrever (4.11) na forma

$$I_0^d(\sqrt{\bar{r}} \approx 0) \approx \frac{\pi^{1-\frac{d}{2}}}{2} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \frac{1}{L^{d-2}} \zeta(d-2), \quad (4.12)$$

onde $\zeta(d-2)$ é dada em (3.19). Considerando-se no caso em discussão $d \lesssim 3$, a continuação analítica da dimensão no argumento da função zeta conduz à expressão

$$I_0^d(\sqrt{\bar{r}} \approx 0) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{L} \zeta(d-2). \quad (4.13)$$

A integral $I_0^d(\bar{\Delta}_0)$ que aparece na eq.(4.8) deve ser analisada cuidadosamente. Para uma dimensão $d \sim 3$, tem-se

$$I_0^d(\bar{\Delta}_0) \approx 2^{-\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} \left[2^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \bar{\Delta}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{\Delta}_0}{nL}\right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(\bar{\Delta}_0 Ln) \right]. \quad (4.14)$$

Calculando-se o somatório na equação acima, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{\Delta}_0}{nL}\right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(\bar{\Delta}_0 Ln) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{L} \ln\left(1 - e^{-\bar{\Delta}_0 L}\right). \quad (4.15)$$

Assim, tendo-se em conta que $\bar{\Delta}_0 = \sqrt{e^2 I_0^d(\sqrt{\bar{r}})}$ a eq.(4.14) torna-se

$$I_0^d\left(\sqrt{e^2 I_0^d(\sqrt{\bar{r}})}\right) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{e^2 I_0^d(\sqrt{\bar{r}})} - \sqrt{2\pi} \frac{1}{L} \ln\left(1 - e^{-\sqrt{e^2 I_0^d(\bar{r})} L}\right) \right]. \quad (4.16)$$

Note-se que no limite $\bar{r} \approx 0$, a função $I_0^d(\sqrt{\bar{m}})$, dada em (4.13), diverge para $d = 3$, anulando a contribuição do último termo da expressão anterior. Com isso, a eq.(4.16) torna-se, em $d \sim 3$,

$$I_0^d\left(\sqrt{e^2 I_0^d(\bar{r} \approx 0)}\right) \approx \frac{e}{2\pi^{1/4}\sqrt{2}} \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} \zeta^{\frac{1}{2}}(d-2). \quad (4.17)$$

Deste modo, a equação de *gap* (4.8) na vizinhança da criticalidade adquire a forma

$$\bar{r} \approx r_0 + \frac{24}{\sqrt{\pi}} u \frac{1}{L} \zeta(d-2) - \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2}} e^3 \frac{1}{L^{1/2}} \zeta^{1/2}(d-2). \quad (4.18)$$

A equação crítica correspondente, definida por $\bar{r} = 0$, é mal-definida em $d = 3$. Esta dificuldade pode ser contornada introduzindo-se um novo parâmetro \tilde{r} , através do uso do resultado contido na eq.(3.21). Sendo assim, tem-se

$$\tilde{r} = \bar{r} - \frac{24u}{\sqrt{\pi}L(d-3)} + \frac{e^3}{2\pi^{1/4}\sqrt{2}L} \sum_{p=1}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^p \gamma^{\frac{1}{2}-p} \frac{(-1)^p}{(d-3)^p}, \quad (4.19)$$

onde os $C_{\frac{1}{2}}^p$'s são os coeficientes da expansão binomial para uma potência fracionária. Assim, substituindo-se a eq.(4.19) em (4.18) e usando-se a fórmula binomial para expandir $\zeta^{1/2}(d-2) \approx [\gamma - (1/(d-3))]^{1/2}$, obtém-se para $d = 3$ a seguinte expressão

$$\tilde{r} \approx r_0 + \frac{24\gamma u}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{L} - \frac{e^3}{\pi^{1/4}\sqrt{2}} \frac{\gamma^{1/2}}{L^{1/2}}. \quad (4.20)$$

Portanto, o comportamento crítico do sistema é governado por \tilde{r} . Tomando-se $r_0 = a(T/T_{c0} - 1)$, com $a > 0$ e $\bar{r} = 0$ tem-se a equação crítica,

$$T_c(L) = \frac{T_{c0}}{a} \left[a - \frac{48u}{\pi^{1/2}} \frac{\gamma}{2L} + \frac{e^3}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{\gamma}{2L}} \right]. \quad (4.21)$$

Esta é a equação que descreve o comportamento da temperatura crítica de sistemas como um filme supercondutor em função da sua espessura L considerando as flutuações magnéticas. Claramente há duas contribuições separadas na equação crítica. A primeira provém da contribuição em primeira ordem em u , e a outra do acoplamento entre o parâmetro de ordem e o campo magnético.

4.1.3 Comparação com os resultados experimentais e discussão

O comportamento da temperatura crítica dada pela eq.(4.21) concorda qualitativamente com as observações experimentais em filmes supercondutores do tipo I, como por exemplo em amostras baseadas em nióbio [22, 25, 27, 30], chumbo [21], ligas W-Re [24], Mo-Ge [26] e MgB epitaxiais [31].

Entretanto, esforços no sentido de comparar de modo mais concreto os resultados até aqui obtidos são ainda necessários. Neste sentido, começando-se com a análise dimensional, note-se que foram adotadas as unidades naturais, comuns à teoria quântica

de campos, onde os parâmetros u e e^2 têm dimensão de massa, e a dimensão de massa ao quadrado. Deste modo, $c = \hbar = k_B = 1$. Logo, há a necessidade de relacionar este caso ao sistema de unidades SI, o que é feito a contento em [1]. Neste contexto, há um fator $1/k_B T_{c0}$ no expoente da eq.(4.6), e os campos devem ser substituídos por

$$\phi \rightarrow \phi_{new} = \sqrt{\xi_0/k_B T_{c0}} \phi, \quad A \rightarrow A_{new} = \sqrt{\xi_0/k_B T_{c0}} A, \quad (4.22)$$

e as coordenadas \mathbf{x} por $x_{new} = x/\xi_0$, onde $\xi_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_{c0}$ é o comprimento de coerência intrínseco de um dado material, com v_F sendo a velocidade de Fermi. Consequentemente, a , u e e tornam-se adimensionais, de tal maneira que estes parâmetros ficam relacionados às quantidades características do material por [1]

$$a = 1, \quad u = \frac{3\xi_0 k_B T_{c0}}{N(E_F) \hbar^2 v_F^2 \xi_0^2} \approx 111.08 \left(\frac{T_{c0}}{T_F} \right)^2, \quad e = \frac{2\bar{e}}{\hbar c} \sqrt{k_B T_{c0} \xi_0} \approx 2.59 \sqrt{\frac{\alpha v_F}{c}}, \quad (4.23)$$

onde T_F é a temperatura de Fermi, α a constante de estrutura fina, $N(E_F)$ a densidade de estados na superfície de Fermi, e \bar{e} a carga de um elétron. Neste sentido, a espessura L em (4.21) deve ser reescrita como $L_{new} = L/\xi_0$. Assim, a substituição de (4.23) em (4.21) produz a temperatura crítica em termos diretamente relacionados às quantidades características de uma dada amostra.

No entanto, constata-se que até agora foi suposto que o material em estudo é ideal, isto é, não contém impurezas em sua constituição. Em um caso mais concreto, as amostras possuem impurezas, o que gera a reconsideração do comprimento de coerência e das constantes de acoplamento, do modo

$$\xi_0 \rightarrow r^{1/2} \xi_0, \quad u \rightarrow 2r^{-3/2} u, \quad e \rightarrow r^{1/4} e, \quad (4.24)$$

onde $r \sim 0.18C^{-1}$, com $C = \xi_0/\tilde{l}$, sendo \tilde{l} o caminho livre médio do elétron [1]. A expressão para r é válida no limite de ξ_0 maior que \tilde{l} . Supõe-se que a presença de impurezas não afeta o caráter usual da transição da fase normal à supercondutora.

Desta maneira, a eq.(4.21) é reescrita como

$$T_c = T_{c0} \left[1 - \frac{9646.2C\xi_0 t_{0F}^2}{L} + \frac{7.87 \times 10^{-4} (\xi_0 v_{Fc}^3)^{\frac{1}{2}}}{C\sqrt{L}} \right], \quad (4.25)$$

onde $t_{0F} = T_{c0}/T_F$ e $v_{Fc} = v_F/c$.

Considerando-se um caso concreto de material supercondutor, toma-se uma amostra feita de nióbio, o qual é caracterizado pelas quantidades $v_F = 1.37 \times 10^6 \text{ m/s}$, $T_{c0} = 9.3^\circ\text{K}$ e $T_F = 6.18 \times 10^4^\circ\text{K}$. Supondo-se $C \sim 100$, o segundo coeficiente entre os colchetes na eq.(4.25) tem magnitude 10^4 maior que o terceiro coeficiente, e visto que a espessura varia em um intervalo da ordem ou abaixo de μm , a contribuição das flutuações de gauge são relativamente pequenas.

A fig.4.1 mostra o gráfico da eq.(4.25) para o nióbio em dois casos: (i) amostras cujos parâmetros relevantes têm os valores $C \sim 100$, $T_{c0} = 9.3^\circ\text{K}$ e (ii) amostras com $C \sim 200$ e $T_{c0} = 8.4^\circ\text{K}$. Observe-se a concordância entre as curvas construídas a partir da eq. (4.25) e os resultados experimentais das refs. [25] e [30].

Deve-se notar que a escolha do parâmetro $C \sim 100$ concorda com os resultados de [25], enquanto $C \sim 200$ está de acordo com [30]. Neste contexto, a interpretação de tal diferença é que o segundo exemplo contém mais impurezas que o primeiro por C ter um valor maior, pois o caminho livre do elétron é menor, o que de fato acontece em [25] e [30].

Destarte, o panorama aqui discutido apresenta-se como um caminho alternativo de introduzir fenomenologicamente as correções que levam em conta os efeitos microscópicos que aparecem em supercondutores do tipo I, como a proximidade, e a localização, discutidas na seção 3.4.

Finalmente, observa-se que a eq.(4.21) sugere uma espessura mínima do filme, abaixo da qual a transição de fase supercondutora não acontece. Contudo, a exemplo do que já foi comentado na seção 3.4, nota-se extrapolando os resultados das refs. [21–31] e de (4.21) que não é provável que tal fenômeno aconteça, pois ele apareceria em escala da ordem de uma camada de filme muito próxima do limite de quase duas dimensões, onde a localização e proximidade são provavelmente bem estimuladas, o que foge do escopo deste trabalho.

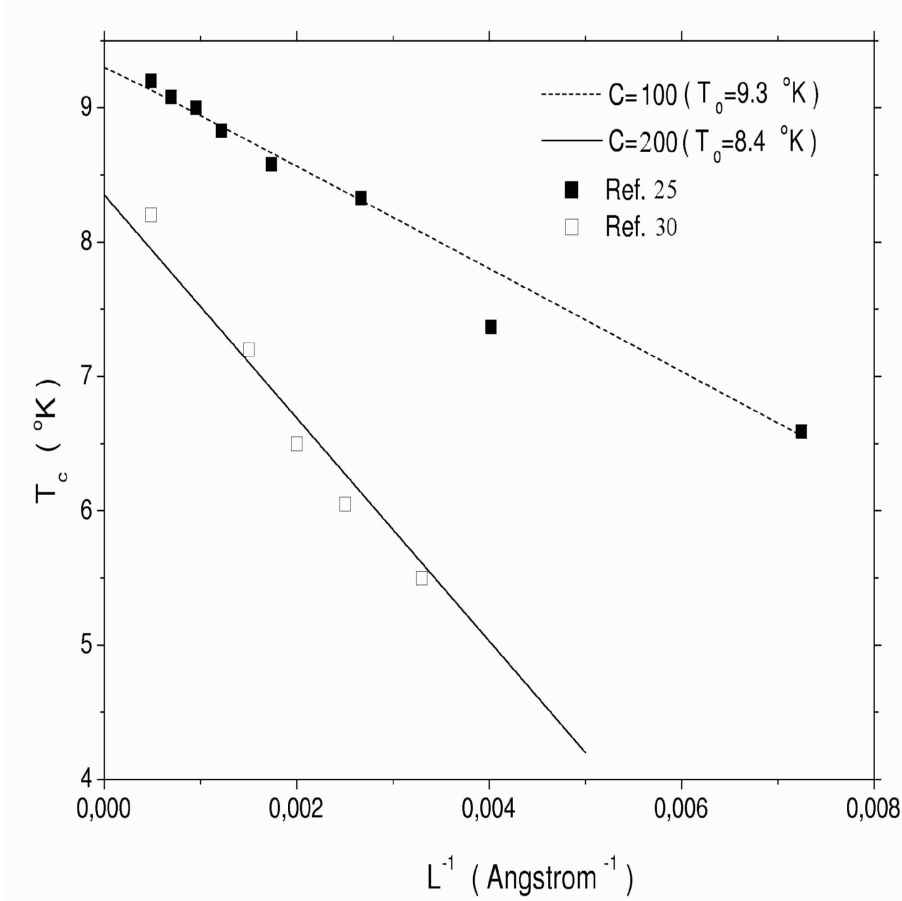


Figura 4.1: Gráfico da temperatura crítica T_c definida pela eq. (4.25), tomando $C \sim 100$ e $T_{c0} = 9.3^\circ K$ em um caso e $C \sim 200$ e $T_{c0} = 8.4^\circ K$ na outra situação. Dados experimentais foram obtidos das refs. [25], representados por quadrados sólidos e [30], representados por quadrados sem preenchimento.

4.2 As flutuações magnéticas e o efeito Halperin-Lubensky-Ma

O efeito Halperin-Lubensky-Ma foi sugerido há cerca de três décadas atrás [16], predizendo uma transição de fase supercondutora fracamente de primeira ordem. Este fato emerge considerando no modelo de Ginzburg-Landau a interação entre as flutuações magnéticas intrínsecas e o parâmetro de ordem. Contudo, o intervalo de temperatura associado ao mencionado efeito é muito pequeno, o que o torna muito difícil de ser detectado experimentalmente. Em adição, isto tem sido tema de debate nos últimos

anos no contexto de filmes supercondutores do tipo I, e em particular a refs. [83–85] sugerem um estímulo da transição de primeira ordem em filmes supercondutores em relação a materiais ideais, sem uma forma definida.

Com o fito de ter um melhor entendimento do efeito Halperin-Lubbenky-Ma em filmes, busca-se nesta seção a descrição deste efeito via a abordagem introduzida no capítulo anterior, em particular na seção 3.3.1. Deste modo, leva-se em conta as flutuações magnéticas e considera-se o parâmetro de ordem como uniforme, como a aproximação feita no capítulo 2. Também investiga-se a dependência em L das quantidades termodinâmicas relevantes, bem como discute-se a plausibilidade dos resultados apresentados.

4.2.1 A energia livre dependente das condições de fronteira

Seja então a densidade de hamiltoniano explicitada na eq.(4.1), com a substituição de u por $\lambda/8$). Seguindo o procedimento, a notação e o sistema de unidades introduzidos da seção 4.1, chega-se a uma expressão da função de partição Z explicitada na eq.(4.6). A partir deste ponto, porém, aqui é adotado um caminho dissemelhante ao da seção 4.1. Supõe-se a aproximação na qual o parâmetro de ordem é espacialmente uniforme, isto é $\phi(\mathbf{x}) \approx \phi = \text{const.}$. Assim, a realização da integração funcional sobre o campo de calibre transversal produz a seguinte densidade de energia livre $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi) = W/V$,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}r_0\phi^2 + \frac{\lambda}{8}\phi^4 + V(\phi), \quad (4.26)$$

onde

$$V(\phi) = \frac{1}{2V} \text{tr} \ln \{ [(-\nabla^2 + e^2\phi^2) \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \} \quad (4.27)$$

é a contribuição advinda da integração das componentes do campo de calibre.

Para situações nas quais o modelo obedece às condições de fronteira, como é o caso considerado, e supondo-se que o sistema é submetido a uma transição de fase de primeira ordem, a eq.(4.27) é tratada seguindo a discussão em [40], onde o termo correspondendo a $V(\phi)$ em (4.27) deve ser escrito do modo

$$V(\phi, l) = -\frac{1}{2l} \eta'(0; \phi, l). \quad (4.28)$$

onde o símbolo primo significa a derivação com respeito ao primeiro argumento em η , e l representa o comprimento L na sua forma adimensional, $l = L/\xi_0$. A função η está associada aos autovalores do operador dado pela eq.(4.27) com a compactificação de uma dimensão,

$$\eta(s; \phi, l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2 + \mathbf{k}^2 + e^2 \phi^2 \right]^{-s}. \quad (4.29)$$

Pode-se efetuar a integração na equação acima com a ajuda da técnica da regularização dimensional, o que implica em

$$\eta(s; c, l) = \left(\frac{\pi}{l^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{l}{2\pi} \right)^{2s} A_1^{c^2} \left(s - \frac{d-1}{2}; w_1 \right), \quad (4.30)$$

onde $A_1^{c^2} \left(s - \frac{d-1}{2}; w_1 \right)$ é definida na eq.(3.12), só que neste caso em particular $m = 1$ e $c^2 = (e\phi l/2\pi)^2$.

Nota-se que a função $\eta(s; c, l)$ em (4.30) pode ser estendida analiticamente a todos os valores de d . Para valores de d ímpares, a continuação analítica de $V(\phi, l)$ tem a seguinte forma [40],

$$V(c, l) = -\frac{1}{2l} \left(\frac{\pi}{l^2} \right)^p \frac{(-1)^p}{p!} Z_1' c^2 (-p; w_1), \quad (4.31)$$

onde $p = \frac{d-1}{2}$. Para pequenos valores de c^2 , $c^2 \ll 1$, utiliza-se a expansão binomial para a função $A_1^{c^2}$ com o intuito de expandir em potências do parâmetro de ordem ϕ ,

$$A_1^{c^2}(q; w_1) = c^{-2q} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} T(q, j) Z_1(q + j; w_1) c^{2j}, \quad (4.32)$$

sendo $T(q, j) = \frac{\Gamma(q+j)}{\Gamma(q)}$, e

$$A_m(\nu; \{w_i\}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} ' [w_1^2 n_1^2 + \dots + w_m^2 n_m^2]^{-\nu}. \quad (4.33)$$

O primo em (4.33) representa a exclusão do termo $\{n_i\} = 0$ no somatório. Para $m = 1$ e $w_1 = 1$, pode-se facilmente inferir que $A_1(\nu, w_1 = 1)$ é relacionada à função zeta de Riemann, $\zeta(\nu)$, por

$$A_1(\nu, w_1) = 2\zeta(2\nu). \quad (4.34)$$

Com isso, a derivada de $A_1^{c^2}(q; w_1 = 1)$ em (4.32) com respeito a q produz a seguinte expressão,

$$A_1^{c^2 < 1}(q; w_1 = 1) = -2c^{-2q} \ln c + 2 \sum_{j=0}^{\infty} c^{2j} \frac{(-1)^j}{j!} \times \{T'(q, j)\zeta(2q + 2j) + 2T(q, j)\zeta'(2q + 2j)\}. \quad (4.35)$$

Leva-se em consideração na expansão em (4.35) somente os termos dependentes de c^2 até a segunda ordem, o que é consistente com o espírito do modelo de Ginzburg-Landau, pois termos em ϕ^6, ϕ^8, \dots , são considerados irrelevantes na vizinhança da transição. Assim, a eq.(4.31) torna-se

$$V(c, l) \approx -\frac{(-\pi)^p}{p!2l^{2p+1}} \{-2c^{2p} \ln c - 2c^2 [\zeta(-2p + 2) - 2p\zeta'(-2p + 2)] + c^4 [(-2p + 1)\zeta(-2p + 4) - 2p(-p + 1)\zeta'(-2p + 4)]\}. \quad (4.36)$$

Portanto, assumindo-se o caso particular $d = 3$ e escrevendo-se c explicitamente em termos de ϕ e l , obtém-se a expressão final para a densidade de energia livre efetiva,

$$\mathcal{F}(\phi; l) \approx \frac{1}{2}r\phi^2 + \frac{u}{8}\phi^4 - v\phi^2 \ln \phi, \quad (4.37)$$

onde

$$r = r_0 + v(1 - 2 \ln el), \quad u = \lambda - \frac{e^4 l}{24\pi}, \quad v = \frac{e^2}{4\pi l}. \quad (4.38)$$

Note-se que a condição de concavidade para a energia livre (4.37) restringe o modelo a valores de u estritamente positivos. Isto implica, usando a expressão para u em (4.38), no limite superior para L ,

$$l^{max} = \frac{24\pi\lambda}{e^4}. \quad (4.39)$$

É também relevante mencionar que a eq.(4.37) tem a mesma dependência formal no parâmetro de ordem ϕ da expressão equivalente em [83]. Ela descreve uma transição de primeira ordem em sistemas na forma de filme.

4.2.2 O comportamento crítico e discussão

Tendo-se agora como objetivo o entendimento da dependência em l da transição de fase, pode-se analisar o comportamento do sistema a partir da eq.(4.37). Considerando

a primeira derivação de \mathcal{F} com respeito a ϕ , tem-se

$$\mathcal{F}' = \phi g, \quad (4.40)$$

onde a função

$$g = r - v + \frac{u}{2}\phi^2 - v \ln \phi. \quad (4.41)$$

Consequentemente, a equação de estado, $\mathcal{F}' = 0$, possui duas soluções: $\phi \equiv \phi_{0N} = 0$, a qual descreve a fase normal, e as soluções positivas advindas de $g = 0$, que correspondem à fase quebrada, denotadas como ϕ_{0B} .

Além disso, as soluções produzem mínimos em \mathcal{F} , sendo estes estáveis se obedecerem à condição $\mathcal{F}''(\phi_0) > 0$. Assim, já que $\mathcal{F}'' = g'\phi + g$, vê-se que a fase normal é sempre estável. De outro modo, na fase supercondutora $\phi_{0B} > 0$ e $g'(\phi_{0B}) > 0$, o que gera $\phi_{0B} > \sqrt{\frac{2v}{u}}$.

Em adição, pode-se obter um valor particular de ϕ_{0B} para o qual a energia livre anula-se. Escrevendo-se \mathcal{F} em termos de g , dado pela eq.(4.41), obtém-se para $\mathcal{F}(\phi_{0B}) = 0$ o valor

$$\phi_{0BE} = 2\sqrt{\frac{v}{u}}. \quad (4.42)$$

Observa-se que os valores ϕ_{0N} e ϕ_{0BE} implicam em $\mathcal{F} = 0$. Esta situação corresponde ao ponto de equilíbrio da transição, o qual representa o ponto crítico da transição de primeira ordem.

Deste modo, pode-se obter o valor do coeficiente r no ponto de equilíbrio da transição, $\mathcal{F}(\phi_{0BE}) = 0$, dado por

$$r_E = v \left(\ln \frac{4v}{u} - 1 \right). \quad (4.43)$$

Com isso, o uso da eq.(4.38) e da dependência de u e v em $l(= L/\xi_0)$ implica na expressão para a temperatura de transição dependente de l ,

$$T_E(l) = T_{c0} \left[1 + \frac{e^2}{4\pi l} \left(\ln \frac{24e^4 l}{24\pi\lambda - e^4 l} - 2 \right) \right]. \quad (4.44)$$

Uma estimativa quantitativa da eq.(4.44) é obtida rememorando as expressões tridimensionais para as constantes de acoplamento dadas em (4.23). Considera-se como

exemplo uma amostra de alumínio e seus valores característicos tabelados,

$$T_{c0} = 1.19^{\circ}K, T_F = 13.6 \times 10^4 K, v_F = 2 \times 10^6 m/s, \xi_0 = 1.6 \mu m. \quad (4.45)$$

Na fig.4.2 está o gráfico de $T_E(l)$ escrito em (4.44) em função de $1/l$. Assim, a eq.(4.39) informa que este modelo está restrito a filmes de espessura menores que $L_{max}^{Al} = 12.4\xi_0 \approx 18.4 \times 10^{-6}$. Em adição, em relação ao valor mínimo de L para a existência da supercondutividade, a discussão exposta na seção 3.4 continua válida.

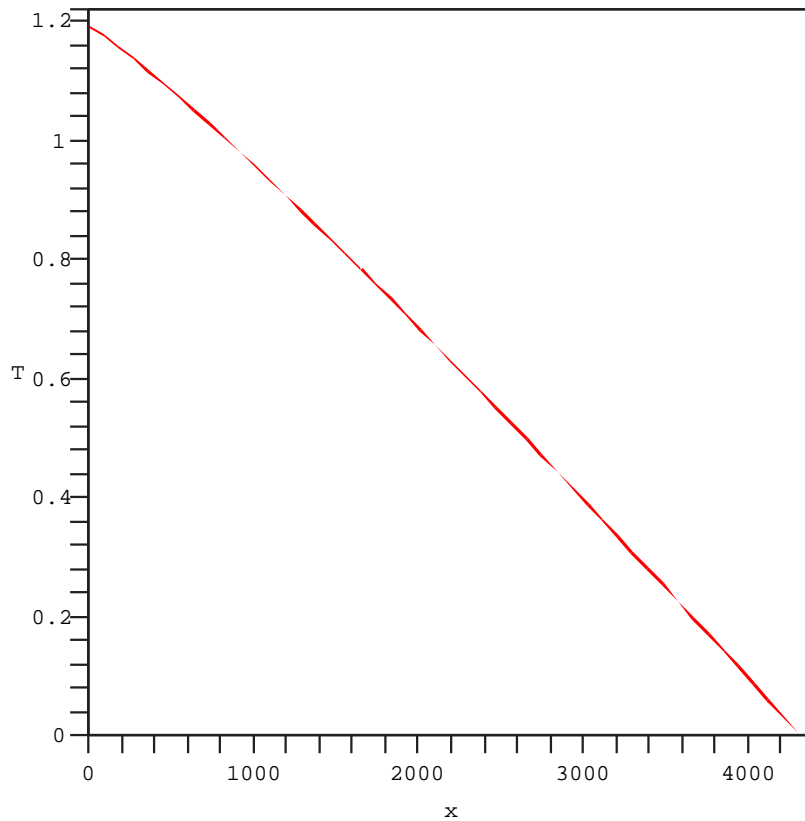


Figura 4.2: Gráfico da temperatura de transição T_E para o alumínio em função de $x = \frac{1}{l}$.

É relevante agora deduzir a expressão para o intervalo de temperatura da transição de primeira ordem, definida por

$$(\Delta T)_E = \left| \frac{L(T_E)}{\Delta C(T_E)} \right| \quad (4.46)$$

onde $L(T_E)$ é o calor latente em T_E e $\Delta C(T_E)$ é o salto do calor específico. O calor latente é obtido de

$$L(T_E) = T_E [S_{0N}(T_E) - S_{0B}(T_E)], \quad (4.47)$$

onde $S_0(T_E)$ é a entropia, definida por $S = d\mathcal{F}/dT$, em T_E entre as duas fases. O salto do calor específico provém da expressão

$$\Delta C(T_E) = T_E \left(\frac{dS_{0N}(T_E)}{dT} - \frac{dS_{0B}(T_E)}{dT} \right). \quad (4.48)$$

Portanto, o uso das eqs.(4.46)-(4.48) produzem o intervalo de temperatura

$$(\Delta T)_E = T_{c0}v \equiv \frac{T_{c0}e^2\xi_0}{4\pi L}. \quad (4.49)$$

Uma estimativa numérica pode ser realizada considerando-se o exemplo do alumínio, cuja amostra supõe-se ter $L \approx 6\xi_0$. Desta maneira,

$$(\Delta T)_E^{Al} = 6.1 \times 10^{-6} K. \quad (4.50)$$

Assim, este valor é cerca de 3.5 vezes o valor obtido em [16], com o sistema sendo tridimensional sem levar em conta as fronteiras. Contudo, lembra-se que a quantidade (ΔT) em [16] é calculada com o salto do calor específico tomado no valor T_{c0} , o que força uma diferença de um fator 1/4 de ΔC na temperatura de equilíbrio na ausência de fronteiras, como apontado em [85].

Deste modo, vê-se que a diferença entre os resultados encontrados aqui e aqueles de [16] aparecem justamente quando analisa-se a expressão da energia livre. Em [16] existe um termo ϕ^3 , o qual difere da nossa expressão obtida na eq.(4.37), que tem $\phi^2 \ln \phi$.

Portanto, a eq.(4.49) ratifica a idéia de um estímulo no intervalo de temperatura da transição para filmes, como é mencionado em [83]. Este fato possibilita em princípio maior probabilidade de uma transição de primeira ordem em filmes finos que em materiais sem fronteiras. Todavia, ressalta-se que o estímulo no valor de (ΔT) aqui encontrado sugere ser bem mais discreto que aquele apontado em [83], o qual para uma amostra de $L \approx 10\xi_0$ foi quase mil vezes o valor encontrado aqui. Um dos motivos é porque aqui a obtenção de V foi via a integração na eq.(4.29) e realizada diretamente

em duas dimensões, levando-se em conta somente o valor de todos os modos possíveis no somatório.

4.3 A presença do campo magnético externo com o modelo de Ginzburg-Landau compactificado no limite n grande

Supõe-se uma boa aproximação desprezar as flutuações magnéticas no modelo de Ginzburg-Landau quando pensa-se em supercondutores do tipo II no limite extremo, isto é, sistemas na presença de um campo magnético externo de alta magnitude. Este tema tem sido investigado por vários autores, com o mencionado modelo tanto na sua versão a uma componente quanto na de n componentes. Um panorama a respeito do estado atual deste tema pode ser visto por exemplo nas refs. [4–12]. Em particular, em [8–10] introduziu-se um modelo de Ginzburg-Landau com n componentes na presença de um campo magnético externo na ordem $\frac{1}{n}$, a qual engendrou uma transição de segunda ordem com n grande. Aqui é investigada a versão confinada do modelo em [8–10].

4.3.1 O limite n grande e a compactificação

Seja a densidade de hamiltoniano com um campo magnético externo dada por

$$\mathcal{H} = |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2 + r_0|\phi|^2 + \frac{u_0}{2n}|\phi|^4, \quad (4.51)$$

onde $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ e $r_0 = \alpha(T/T_{c0} - 1)$, e T_{c0} correspondendo à temperatura de transição nas ausências de campo externo e de fronteiras. Nas linhas que se seguem é assumido que o campo magnético é paralelo ao eixo z das coordenadas e o potencial vetor tem suas componentes dadas por $\mathbf{A} = (0, xH, \mathbf{0})$. Ademais, ϕ é também escolhido de modo a ter n componentes complexas.

No espaço ilimitado, o parâmetro de ordem é escrito em termos da base de Landau,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{dp_y}{2\pi} \int \frac{d^{d-2}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d-2}} \hat{\phi}_{l,p_y,\mathbf{p}} \chi_{l,p_y,\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (4.52)$$

onde $\chi_{l,p_y,p_z}(\mathbf{r})$ são as autofunções dos níveis de Landau dadas com os autovalores de energia, $E_l(|\mathbf{p}|) = |\mathbf{p}|^2 + (2l+1)\omega + m_0^2$, e $\omega = eH$ é a chamada frequência de cíclotron. Na equação acima \mathbf{p} é um vetor de $(d-2)$ componentes.

Considere-se então o sistema confinado entre dois planos paralelos normais ao eixo z , a uma distância L . Devido ao campo magnético, as coordenadas agora devem ser $\mathbf{r} = (z, \mathbf{z})$, onde \mathbf{z} é um vetor de $(d-3)$ dimensões, com o momento correspondente $\mathbf{k} = (k_z, \mathbf{q})$, sendo \mathbf{q} um vetor de $(d-3)$ dimensões. Sob estas condições, a função de partição modifica-se em relação aos casos estudados anteriormente, sendo escrita como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int_0^L dz \int d^{d-3}\mathbf{z} \mathcal{H}(|\phi|, |\nabla\phi|) \right). \quad (4.53)$$

O parâmetro de ordem $\phi(z, \mathbf{z})$ satisfaz as condições de fronteira (3.4), porém adaptadas a este caso. Neste sentido, a representação do campo (4.52) deve ter uma expansão de Fourier com a mistura série-integral na forma,

$$\phi(z, \mathbf{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} c_{\tilde{n}} \int \frac{dp_y}{2\pi} \int d^{d-3}\mathbf{q} b(\mathbf{q}) \tilde{\varphi}_l(\omega_{\tilde{n}}, \mathbf{q}), \quad (4.54)$$

onde $\omega_{\tilde{n}} = 2\pi\tilde{n}/L$, l é os níveis de Landau e os coeficientes $c_{\tilde{n}}$ e $b(\mathbf{q})$ correspondem, respectivamente, à representação das séries de Fourier sobre o espaço em $(d-3)$ dimensões e à representação integral de Fourier sobre o espaço \mathbf{z} . Assim, além das regras de Feynman nesta situação serem modificadas pela presença do campo externo, elas também devem levar em conta as condições de confinamento de z , através do uso de (3.5).

Prosseguindo, considere-se a função de correlação de quatro pontos a momento externo zero, $\Gamma_d^{(4)}$, que é relacionada ao parâmetro u_0 , como foi visto em (2.48). Nas situações anteriores deste capítulo assumiram que a constante de acoplamento inicial não é corrigida. Contudo, no contexto da expansão $1/n$, $\Gamma_d^{(4)}$ deve ser dada pela seguinte expressão:

$$\Gamma_d^{(4)}(0; L, \omega) = \frac{-u_0}{1 + nu_0 \Sigma(d, L, \omega)}, \quad (4.55)$$

onde $\Sigma(d, L, \omega)$, na aproximação de menor nível de Landau, é a integral correspondendo a

$$\Sigma(d, L, \omega) = \frac{1}{L} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} \int \frac{d^{d-3}\mathbf{q}}{(2\pi)^{d-3}} \frac{1}{[q^2 + \omega_{\tilde{n}}^2 + r + \omega]^2}. \quad (4.56)$$

A soma sobre \tilde{n} e a integral sobre q podem ser tratadas utilizando o formalismo desenvolvido na seção 3.2. Desta maneira, utilizando-se o procedimento similar ao realizado nas eqs.(3.7)-(3.14), no caso atual a eq.(3.9) deve ser substituída por

$$U = \frac{\mu^{d-2-2s}}{(2\pi)^{2s+1}} \omega b \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{d-3}\mathbf{q}}{(b^2\tilde{n}^2 + c^2 + \mathbf{q}^2)^s}, \quad (4.57)$$

onde definiu-se os parâmetros adimensionais

$$c^2 = (r + \omega)/(4\pi^2\mu^2), \quad (L\mu) = b^{-1}, \quad (4.58)$$

Assim, efetuando-se o procedimento mencionado, obtém-se

$$U = h(d, s)\omega \left[\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{2s-d+2}{2}\right) \left(\frac{r+\omega}{2\mu^2}\right)^{\frac{d-2-2s}{2}} + \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{r+\omega}}{\mu^2\tilde{n}L}\right)^{\frac{d-2}{2}-s} K_{\frac{d-2}{2}-s}(\tilde{n}L\sqrt{r+\omega}) \right], \quad (4.59)$$

onde

$$h(d, s) = \frac{\mu^{d-2-2s}}{2^{s+\frac{d-2}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)}, \quad (4.60)$$

Com isso, aplicando-se a fórmula (4.59) com $s = 2$ à integral $\Sigma(d, L, \omega)$, consegue-se

$$\Sigma(d, L, \omega) = \omega [H(d, \omega) + G(d, L, \omega)], \quad (4.61)$$

onde

$$G(d, L, \omega) = \frac{1}{2^{\frac{d+2}{2}} \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{r+\omega}}{\tilde{n}L} \right]^{\frac{d-6}{2}} K_{\frac{d-6}{2}}(\tilde{n}L\sqrt{r+\omega}), \quad (4.62)$$

e

$$H(d, \omega) \propto \Gamma\left(2 - \frac{d-2}{2}\right) \left[\frac{r+\omega}{2\mu^2} \right]^{\frac{d-6}{2}}. \quad (4.63)$$

Vê-se de (4.63) que para a dimensão par $d = 6$, $H(d, \omega)$ é divergente, devido ao pólo da função gamma. Assim, este termo deve ser subtraído a fim de obter a função $\Sigma_R(d, L, \omega)$ livre de divergências, isto é,

$$\Sigma_R(d, L, \omega) = \omega G(d, L, \omega). \quad (4.64)$$

Ademais, o termo $H(d, \omega)$ é também subtraído no caso de dimensões menores, $3 \leq d < 6$, devido à divergência na criticalidade.

Considerando-se a (4.55), vê-se que a nova constante de acoplamento $u(d, L, \omega)$ pode ser definida na ordem $1/n$ como,

$$\omega u(d, L, \omega) = \frac{\omega \lambda}{1 + \omega \lambda G(d, L, \omega)} \quad (4.65)$$

onde $\lambda = nu_0$, de acordo com a idéia da expansão $1/n$, é fixo.

4.3.2 O comportamento crítico e discussão

O comportamento crítico do sistema é feito a partir da equação de *gap* adaptada à expansão $1/n$, que é uma equação do tipo Dyson-Schwinger dependente em L e ω . Desta maneira, tem-se

$$\tilde{r} = r_0 + \omega + \frac{\omega u(d, L, \omega)}{2^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\pi}} \frac{(n+2)}{n} \frac{1}{L} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-3} \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-2} \mathbf{q}^2 + \omega_{\tilde{n}}^2 + \tilde{r}}. \quad (4.66)$$

Observe-se que $\tilde{r} = r(L, \omega) + \omega$, pois o pólo do propagador de ϕ na presença do campo externo é em $r(L, \omega) = -\omega$ [4, 5]. Assim, com o uso do procedimento que conduz a eq.(4.57) à (4.59), a expressão em (4.66) torna-se

$$\tilde{r} = r_0 + \omega + \frac{\omega u(d, L, \omega)}{2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{3}{2}}} \frac{(n+2)}{n} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\tilde{r}}}{\tilde{n}L} \right]^{\frac{d-4}{2}} K_{\frac{d-4}{2}}(\tilde{n}\sqrt{\tilde{r}}). \quad (4.67)$$

Neste contexto, a função $G(d, L, \omega)$ na eq.(4.62) torna-se

$$G(d, L, \omega) = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1} \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\tilde{r}}}{iL} \right]^{\frac{d-6}{2}} K_{\frac{d-6}{2}}(i\sqrt{\tilde{r}}L). \quad (4.68)$$

Limitando-se à vizinhança próxima da criticalidade, $\tilde{r} \approx 0$, pode-se investigar o comportamento crítico do sistema usando nas eqs.(4.65), (4.67) e (4.68) a fórmula para pequenos valores dos argumentos das funções de Bessel, explicitada na eq.(3.17). Assim, após algumas manipulações, a eq.(4.67) pode ser escrita no limite n grande do modo

$$r_0 + \omega_c + \frac{\omega_c u(d, L, \omega_c)}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) L^{4-d} \zeta(d-4) \approx 0, \quad (4.69)$$

onde $\zeta(d-4)$ é dada (3.19), definida aqui para $d > 5$. Utilizou-se o índice c para indicar que se trabalha na região da criticalidade. Deste modo, a constante $u(d, L, \omega)$ é escrita como

$$u(d, L, \omega_c) \approx \frac{\lambda}{1 + \lambda\omega_c A(d, \mu)L^{6-d}\zeta(d-6)}, \quad (4.70)$$

onde $A(d, \mu) = \frac{1}{32\pi^{\frac{3}{2}}}\Gamma(\frac{d-6}{2})$.

Para considerar-se a situação $d = 3$, pode-se realizar a continuação analítica de $\zeta(z)$ para valores do argumento $z \leq 1$, por meio da propriedade de reflexão descrita na eq.(3.20). Desta forma, considerando-se $r_0 = a(T/T_{c0} - 1)$ e $d = 3$, obtém-se

$$a\left(\frac{T_c}{T_{c0}} - 1\right) + \omega_c + \frac{1}{8\pi^3}\omega_c u(d=3, L, \omega_c)L\zeta(2) = 0. \quad (4.71)$$

Ademais, a utilização das eqs.(4.70) e (3.20) para avaliar $u(d=3, L, \omega_c)$ e dos valores tabelados das funções Γ e ζ que aparecem nas fórmulas acima, permite alcançar finalmente a equação crítica

$$a\left(\frac{T_c}{T_{c0}} - 1\right) + \omega_c + \frac{60\lambda\omega_c L}{2880\pi + \lambda\omega_c L^3} = 0, \quad (4.72)$$

com a e λ sendo os parâmetros fenomenológicos. Note-se que para $L \rightarrow \infty$ a equação acima gera a linha crítica $a\left(\frac{T_c}{T_{c0}} - 1\right) + \omega_c = 0$, a qual descreve um sistema na ausência de fronteiras.

Para uma melhor análise qualitativa da equação crítica obtida pode-se trabalhar com seguintes quantidades adimensionais, adaptando o sistema de unidades introduzido na seção 4.1 a este caso: $h \equiv \omega_c$, $t = T_c/T_{c0}$ e $l = L/\xi_0$. Com isso, a equação crítica é reescrita do modo

$$h(l, t) = \frac{1}{2Bl^3} \left\{ -60Bl - Btl^3 + Bl^3 - 2880\pi + [(60Bl + Btl^3 - Bl^3 + 2880\pi)^2 + 11520\pi Bl^3(1-t)]^{1/2} \right\}, \quad (4.73)$$

onde foram utilizados $B = \lambda\xi_0$ e $a = 1$. A superfície $h = h(l, t)$ é ilustrada na fig.4.3. Observe-se que esta abordagem utiliza a aproximação do menor nível de Landau, o que só tem significado para valores altos do campo magnético externo.

Note-se da fig. 4.3 que cada valor de l define uma linha crítica no plano $h \times t$, caracterizando o comportamento de um filme de espessura L . Verifica-se que a região

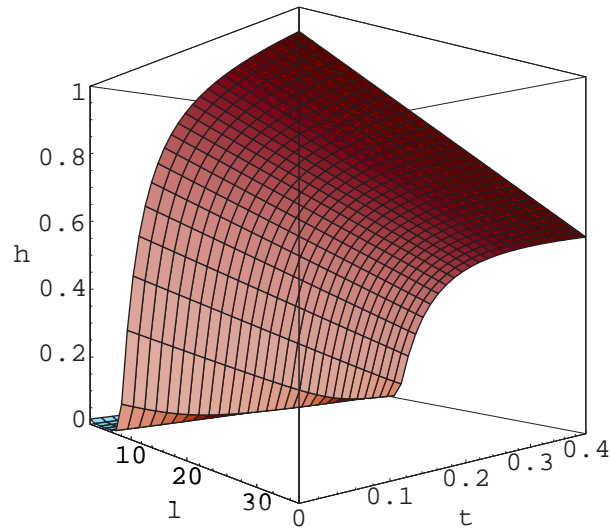


Figura 4.3: Gráfico da superfície $h = h(l, t)$ definida pela eq. (4.73), tomando $B = 10^4$.

de validade da aproximação do menor nível de Landau vai diminuindo à medida que o valor da espessura do filme decresce, o que insinua que filmes supercondutores do tipo II alcançam o limite extremo para valores de h menores. Um outro gráfico representativo desta idéia é o do campo externo reduzido a temperatura zero, h_0 , em função do inverso da da espessura do filme, mostrado na fig.4.4.

Ressalte-se que para filmes com uma espessura muito pequena, onde os efeitos proximidade e localização são altamente relevantes, pode-se alcançar a região fora do domínio de validade do modelo, como já foi observado nas seções anteriores.

Desta maneira, os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 levam à conclusão de que este modelo fenomenológico apresenta-se útil no entendimento dos fenômenos críticos na presença das condições de fronteira.

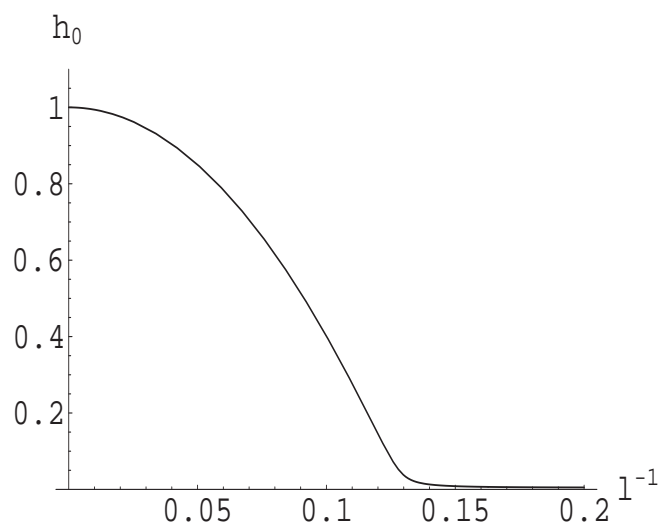


Figura 4.4: Gráfico do campo crítico reduzido a temperatura zero em função do inverso da espessura do filme reduzida, obtido da eq. (4.73) tomando $t = 0$ e $B = 10^4$.

Capítulo 5

O modelo de Ginzburg-Landau multicrítico na presença de flutuações magnéticas

Este presente capítulo é dedicado ao estudo do comportamento multicrítico do modelo de Ginzburg-Landau em uma versão com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$ contendo $(n_1/2 + n_2/2)$ parâmetros de ordem complexos acoplados ao potencial vetorial das flutuações magnéticas [58]. Desenvolve-se a análise do grupo de renormalização na aproximação de primeira ordem em ambas as situações da expansão em ε e da dimensão fixa.

Assim, na seção 5.1 discute-se a motivação deste estudo. Em seguida, na seção 5.2 é apresentado o modelo a ser tratado, bem como o seu procedimento de renormalização. Por conseguinte, na seção 5.3 trata-se da análise do grupo de renormalização via a expansão em ε , com a análise dos pontos fixos estáveis no infravermelho. Neste sentido, cálculos dos expoentes críticos são efetuados. Na seção 5.4, o explora-se o grupo de renormalização no quadro da dimensão fixa, e por fim a seção 5.5 é reservada à discussão dos resultados obtidos.

5.1 Introdução

Fenômenos multicríticos aparecem em sistemas que apresentam competição entre tipos de ordenamento distintos. Existem vários exemplos onde é possível verificá-los. Um caso típico é o hélio-4, onde os parâmetros de ordem competidores são relacionados às fases superfluida e cristalina [86]. Outro caso interessante é dos antiferromagnetos anisotrópicos em um campo magnético externo uniforme, sendo a competição entre os ordenamentos paralelo e perpendicular, os quais dependem do alinhamento do campo magnético com o eixo de anisotropia magnética [44–46]. No cenário dos materiais com base em cupratos, outras fases simultâneas à supercondutora aparecem, como a ordem ferromagnética [87]. Outro caso emblemático é em cristais líquidos, com um ponto multicrítico descrevendo a transição das fases nemática - esmética A - esmética C [47]. Em adição, a multicriticalidade também emerge no contexto da cromodinâmica quântica com o potencial químico bariônico não-nulo, cujos ordenamentos são relacionados ao parâmetros de ordem da fase de simetria quiral quebrada e da fase supercondutora da cor [48].

Um dos caminhos mais simples de caracterizar um comportamento crítico é via a aproximação de Landau. Neste quadro, inicia-se com a densidade de energia livre [88,89]

$$\mathcal{F} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[r_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2 + \frac{u_{\alpha}}{6} \varphi_{\alpha}^4 \right] + \frac{u_3}{3} \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (5.1)$$

onde φ_1 e φ_2 são parâmetros de ordem reais distintos. Com isso, mostra-se que a quantidade

$$\Delta = u_1 u_2 - u_3^2 \quad (5.2)$$

desempenha um papel fundamental no estudo das soluções da equação de estado. Se $\Delta > 0$, as fases quebradas de φ_1 e φ_2 podem coexistir, sendo este comportamento denominado tetracrítico, com uma transição de fase de segunda ordem aparecendo no diagrama de fase.

De modo contrário, para $\Delta = 0$, uma linha de divisão entre as duas diferentes fases quebradas ocorre, a qual define o chamado comportamento bicrítico. No caso $\Delta < 0$,

contudo, a linha bicrítica persiste, porém as fases ordenadas são separadas por uma transição de primeira ordem.

Na fig.5.1 é mostrado o diagrama de fase das equações de estado, definidas por

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi_\alpha} = 0, \quad (5.3)$$

das três situações possíveis. O caso da fig.5.1(a) designa a situação $\Delta > 0$, onde a fase mista representa a coexistência das duas fases, e 5.1(b) descreve o caso $\Delta = 0$, onde os dois ordenamentos são separados por uma linha. Por fim, a fig.5.1(c) simboliza $\Delta < 0$, sendo os dois ordenamentos separados pela linha sólida, porém com as linhas tracejadas delimitando a região no qual o sistema experimenta uma transição de fase de primeira ordem.

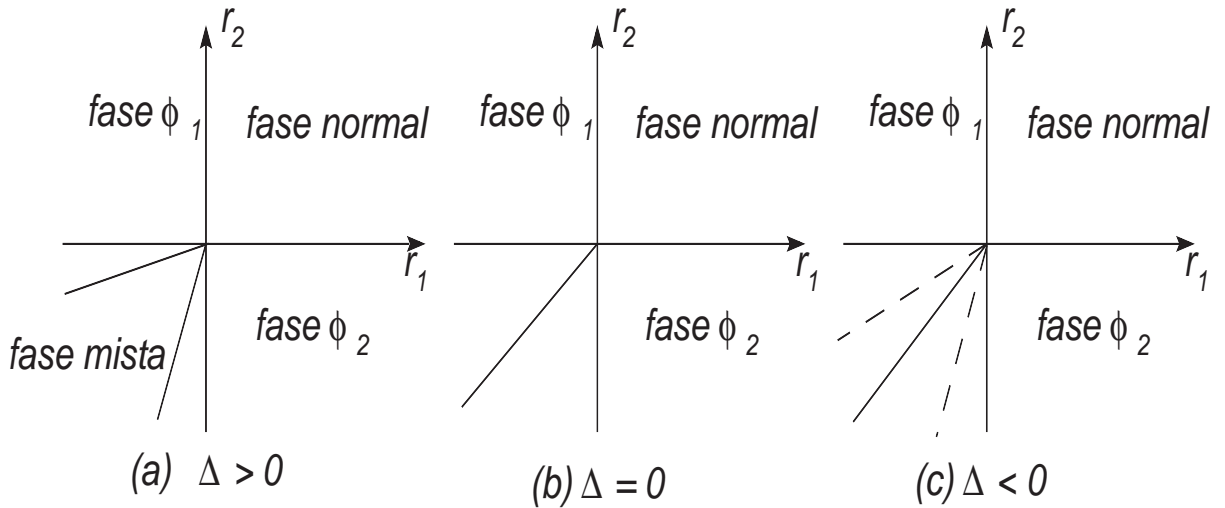


Figura 5.1: Gráficos dos diferentes diagramas de fase representando as soluções das equações de estado do sistema definido pela eq.(5.1). As linhas sólidas no terceiro quadrante dos três diagramas denotam as transições de fase de segunda ordem, enquanto aquelas tracejadas em (c) delimitam a região que ocorre uma transição de primeira ordem.

A análise do grupo de renormalização de modelos com dois tipos de ordenamento teve incício há cerca de três décadas. Em particular, nas refs. [44–46] o fenômeno do antiferromagnetismo anisotrópico foi analisado a partir de uma versão do hamiltoni-

ano de Ginzburg-Landau com uma simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, o que significa ter dois parâmetros de ordem reais com n_1 e n_2 componentes, respectivamente. Mostrou-se que para a expansão em ε na aproximação de primeira ordem, pontos fixos estáveis no infravermelho podem acontecer somente na situação $\Delta \geq 0$, o que implica em um comportamento tanto bicrítico quanto tetracrítico.

Recentemente, modelos de Ginzburg-Landau multicríticos têm sido também aplicados ao de supercondutores de alta T_c , contendo os ordenamentos antiferromagnético e supercondutor. De acordo com esta abordagem, os parâmetros de ordem das fases supercondutora, de duas componentes, e antiferromagnética, de três componentes, são interpretados como partes de uma teoria a cinco componentes, a teoria $SO(5)$ [90–95]. Em uma expansão em ε calculada até o quinto laço mostra-se que o ponto fixo $O(5)$ bicrítico é instável no infravermelho, sendo o seu comportamento multicrítico governado pelo ponto fixo tetracrítico desacoplado [96].

Modelos multicríticos descrevendo certos aspectos dos cupratos de alta T_c também têm sido desenvolvidos, estes sendo baseados em uma teoria de bósons escravos com um campo de calibre [50–53], onde o elétron no plano do CuO_2 é considerado como um composto de quase-partículas fermiônicas carregando o spin, denominadas spinons, e bosônicas conduzindo a carga, os hólons. Neste panorama, a existência da fase supercondutora requer a existência da tetracriticalidade, sendo necessária a formação de pares de spinon e condensação de hólons.

Com inspiração no interesse da caracterização do comportamento multicrítico das teorias de bósons escravos, neste capítulo realiza-se a extensão da análise do grupo de renormalização do modelo de Ginzburg-Landau, com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$ e considerando o acoplamento do potencial vetorial das flutuações magnéticas com simetria $U(1)$ aos parâmetros de ordem. Este estudo é desenvolvido na aproximação de um laço nas as abordagens da expansão em ε e da dimensão fixa. As funções beta do grupo de renormalização são obtidas, tomando-se o caso particular das constantes de acoplamento entre os dois campos escalares e o campo de calibre iguais, e em adição $n_1 = n_2 = n/2$.

5.2 O modelo

Seja a densidade de hamiltoniano de Ginzburg-Landau generalizado, com uma simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, na presença de um potencial vetorial e definido no espaço euclidiano em d dimensões, escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{GL} = & \sum_{\alpha=1}^2 \left[|(\partial_m - ie_{0\alpha} A_{0m})\phi_{0\alpha}|^2 + r_{0\alpha} |\phi_{0\alpha}|^2 + \frac{u_{0\alpha}}{6} (|\phi_{0\alpha}|^2)^2 \right] + \frac{u_{03}}{3} |\phi_{01}|^2 |\phi_{02}|^2 \\ & + \frac{1}{4} (F_{0mn})^2 + \frac{1}{2\chi} (\partial_m \cdot A_{0m})^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde os parâmetros de ordem ϕ_{01} e ϕ_{02} são complexos com n_1 e n_2 componentes reais, respectivamente, definidos por

$$\phi_{0\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_{0\alpha,1} + i\varphi_{0\alpha,2} \\ \vdots \\ \varphi_{0\alpha,n_\alpha-1} + i\varphi_{0\alpha,n_\alpha} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

denota-se $m, n, \dots = 1, 2, \dots, d$, e o termo

$$\frac{1}{4} (F_{0mn})^2 = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_0)^2 \quad (5.6)$$

descreve a energia das flutuações magnéticas, como na seção 4.1. Os índices gregos α, β, \dots na eq.(5.4) servem para denotar o tipo do campo escalar, isto é ϕ_1 ou ϕ_2 . Utiliza-se o calibre de Landau $\chi = 0$, o que gera a existência da identidade $\nabla \cdot \mathbf{A}_0 = 0$. Nota-se a presença de dois diferentes constantes de acoplamento entre os parâmetros de ordem e o potencial vetorial.

Com as constantes de acoplamento possuindo dimensão do inverso do comprimento $\varepsilon = 4 - d$, é conveniente introduzir as suas versões adimensionais,

$$g_{0i} = u_{0i} \mu^{-\varepsilon}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

$$f_{0\alpha} = e_{0\alpha}^2 \mu^{-\varepsilon}; \quad \alpha = 1, 2, \quad (5.8)$$

onde μ é uma escala arbitrária, como na seção 2.6.

Para realizar o procedimento da renormalização, será seguido o esquema da subtração minimal. O re-escalamento dos campos permite escrever a expressão relacionando a densidade de hamiltoniano normalizada à sua versão não-normalizada,

$$\mathcal{H}_R(\phi_\alpha, A_m; r_\alpha, g_i, e_\alpha) = \mathcal{H}(\phi_\alpha Z_{\phi_\alpha}^{1/2}, A_m Z_A^{1/2}; Z_{\phi_\alpha} r_\alpha Z_{\phi_\alpha}^2, g_\alpha, Z_{\phi_1} Z_{\phi_2} g_3, Z_A^{1/2} e_\alpha) \quad (5.9)$$

Consequentemente, da eq.(5.9) pode-se definir as quantidades renormalizadas por

$$r_{0\alpha} = r_\alpha Z_{r_\alpha} Z_{\phi_\alpha}^{-1}, \quad e_{0\alpha} = f_\alpha^{1/2} \mu^{\varepsilon/2} Z_A^{1/2}, \quad (5.10)$$

$$u_{0\alpha} = g_\alpha \mu^\varepsilon Z_{g_\alpha} Z_{\phi_\alpha}^{-2}, \quad u_{03} = g_3 \mu^\varepsilon Z_{g_3} Z_{\phi_1}^{-1} Z_{\phi_2}^{-1}. \quad (5.11)$$

Observe-se que em (5.10) foi utilizada a propriedade [59]

$$\partial_m - ie_{0\alpha} A_{0m} \equiv \partial_m - ie_\alpha A_m. \quad (5.12)$$

Convém escrever a eq.(5.4) em termos das componentes reais dos parâmetros de ordem dadas por (5.5). Sendo assim, as condições de renormalização para as funções correlação renormalizadas dos parâmetros de ordem são dadas por

$$\Gamma_{ij}^{(2\alpha)}(p) \Big|_{p^2=0} = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{ij}^{(2\alpha)}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = \delta_{ij}^{(\alpha)}, \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{ij;kl}^{(2\alpha,2\beta)} \Big|_{PS} = g_\alpha \mu^\varepsilon \delta^{\alpha\beta} S_{ijkl}^{(\alpha)} + \frac{g_3 \mu^\varepsilon}{3} \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{e}^\beta T_{ij;kl}^{(\alpha\beta)}, \quad (5.15)$$

$$\Gamma_{ij;kl}^{(2\alpha;1\beta)} \Big|_{\bar{PS}} = \delta^{\alpha\beta} G_{ij,kl}^{(\alpha)} + \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{e}^\beta T_{ij;kl}^{(\alpha\beta)}, \quad (5.16)$$

onde $\delta_{ij}^{(\alpha)}$ é a função delta de Kronecker, com $1 \leq i, j \leq n_\alpha$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ o tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico e $\bar{e}^\beta = (-1, 1)$, notando-se que não existe soma sobre os índices α, β repetidos, e PS e \bar{PS} denotam os pontos de simetria definidos pelas eqs.(2.52) e (2.58). Em adição, introduziu-se os tensores

$$S_{ijkl}^{(\alpha)} = \frac{1}{3} \left(\delta_{ij}^{(\alpha)} \delta_{kl}^{(\alpha)} + \delta_{ik}^{(\alpha)} \delta_{jl}^{(\alpha)} + \delta_{il}^{(\alpha)} \delta_{jk}^{(\alpha)} \right), \quad (5.17)$$

$$G_{ij,kl}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik}^{(\alpha)} \delta_{jl}^{(\alpha)} + \delta_{il}^{(\alpha)} \delta_{jk}^{(\alpha)} \right), \quad (5.18)$$

$$T_{ij;kl}^{(\alpha\beta)} = \delta_{ij}^{(\alpha)} \delta_{kl}^{(\beta)}. \quad (5.19)$$

A eq.(5.13) representa o ponto multicrítico $r_1 = r_2 = 0$. Assim, os cálculos devem ser feitos com as funções de correlação a momentos externos não-nulos. Note-se que neste cenário, as inserções do tipo φ^2 introduzidas no capítulo 2 são generalizadas como do tipo $\varphi_{\beta k} \varphi_{\beta l}$, explicitadas pela eq.(5.16). Além disso, verifica-se também que (5.15) é a condição de renormalização para todos os três acoplamentos escalares.

Utilizando-se a representação pictórica das funções de correlação [14, 59], a fig.5.2 mostra os gráficos relevantes para os cálculos das constantes de renormalização até a primeira ordem não-trivial. Observa-se que a fig.5.2(a) mostra uma contribuição para as constantes relativas aos campos escalares na primeira ordem, devido ao acoplamento entre os parâmetros de ordem e o potencial vetorial, o que não ocorre na situação da seção 2.4. Contribuições deste acoplamento também aparecem no caso das constantes de renormalização dos acoplamentos u_α e u_3 , evidenciados nas figs.5.2(c) e 5.2(d). Nestes dois casos existem também os gráficos mistos, com acoplamentos envolvendo linhas internas de diferentes tipos ($\alpha \neq \beta$), fato engendrado pela presença do termo que mistura os dois campos na eq.(5.4).

Desta maneira, pode-se realizar o cálculo dos gráficos na fig.(5.2) através das conhecidas técnicas de regularização dimensional [62, 63], e as constantes de renormalização na aproximação de primeira ordem nos acoplamentos tornam-se

$$Z_{\phi_\alpha} = 1 + (d-1) B(d) f_\alpha, \quad (5.20)$$

$$g_\alpha Z_{g_\alpha} = g_\alpha + B(d) \left[\frac{(n_\alpha + 8)}{6} g_\alpha^2 + \frac{1}{6} \sum_{\beta=1}^2 \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{n}^\beta g_3^2 + \frac{3}{2} d(d-1) f_\alpha^2 \right], \quad (5.21)$$

$$g_3 Z_{g_3} = g_3 + B(d) \left[g_3 \sum_{\beta=1}^2 \frac{(n_\beta + 2)}{6} g_\beta + \frac{2}{3} g_3^2 + \frac{3}{2} d(d-1) f_1 f_2 \right], \quad (5.22)$$

$$(Z_{\phi_\alpha^2})^{\alpha\beta}_{ij;kl} = \delta^{\alpha\beta} G_{ij;kl}^{(\alpha)} + \frac{B(d)}{2} \left[\delta^{\alpha\beta} g_\alpha S_{ijkl}^{(\alpha)} + \frac{g_3}{3} \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{e}^\beta T_{ij;kl}^{(\alpha\beta)} \right], \quad (5.23)$$

$$Z_A = 1 - \frac{B(d)}{2(d-1)} \sum_{\alpha=1}^2 n_\alpha f_\alpha. \quad (5.24)$$

onde foi introduzida a função

$$B(d) = \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Gamma^2(\frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(d-2)},$$

e $\bar{n}^\beta = (-n_1, n_2)$. O índice α na eq.(5.23) denota o tipo do campo das linhas externas i, j , enquanto que β representa a inserção k, l . Nota-se as diferentes dependências tensoriais na eq.(5.23), produzidas pelos dois diferentes tipos de acoplamentos g_α e g_3 .

Neste ponto, pode-se partir para os cálculos das equações do fluxo do grupo de renormalização, as quais podem ser deduzidas das eqs.(5.20)-(5.24). Assim, nas próximas

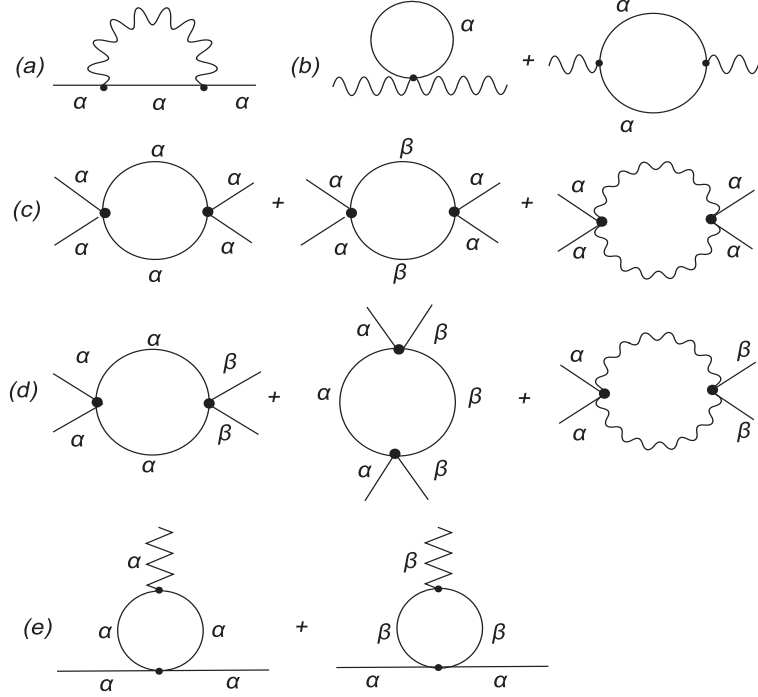


Figura 5.2: Diagramas de Feynman de primeira ordem não-trivial utilizados no cálculo de (a) Z_{ϕ_α} , (b) Z_A , (c) Z_{g_α} , (d) Z_{g_3} e (e) $Z_{\phi_\alpha^2}$. Linhas sólidas e curvilíneas representam os propagadores, isto é as funções de correlação de dois pontos, relacionados aos parâmetros de ordem e ao potencial vetorial, respectivamente. Usou-se os índices α e β para diferenciar os dois tipos de parâmetro de ordem, o que gera em (c), (d) e (e) a situação $\alpha \neq \beta$.

seções defronta-se com esta questão em diferentes abordagens: a expansão em ε e a dimensão fixa.

5.3 A expansão em ε

5.3.1 A análise do grupo de renormalização

Passa-se agora ao estudo do grupo de renormalização do modelo introduzido na seção anterior no contexto da expansão em ε , cujos preceitos já foram comentados na seção 2.5. Como no presente caso há a presença de mais de uma constante de acoplamento,

a noção da função beta do grupo de renormalização deve ser generalizada do modo

$$\beta_a = \mu \left. \frac{\partial a}{\partial \mu} \right|_0, \quad (5.25)$$

onde $|_0$ denota a derivada tomada com os acoplamentos não-renormalizados $u_{0\alpha}$, u_{03} , e $f_{0\alpha}$ fixos, e $a = (g_\alpha, g_3, f_\alpha)$. Na primeira ordem da expansão em ε , o fator $B(d)$ é escrito como

$$B(d) \rightarrow N_d \frac{1}{\varepsilon}, \quad (5.26)$$

lembrando-se que N_d é definido pela eq.(2.54).

No cenário da expansão em ε na aproximação de primeira ordem, a partir do uso das eqs.(5.10)-(5.11) e (5.20)-(5.24), pode-se escrever as funções beta na forma

$$\beta_{f_\alpha} = -\varepsilon f_\alpha + \sum_{\beta=1}^2 \frac{n_\beta}{6} f_\alpha f_\beta, \quad (5.27)$$

$$\beta_{g_\alpha} = -\varepsilon g_\alpha + \frac{(n_\alpha + 8)}{6} g_\alpha^2 + \frac{1}{6} \sum_{\beta=1}^2 \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{n}^\beta g_3^2 - 6 f_\alpha g_\alpha + 18 f_\alpha^2, \quad (5.28)$$

$$\beta_{g_3} = -\varepsilon g_3 + g_3 \sum_{\beta=1}^2 \left[\frac{(n_\beta + 2)}{6} g_\beta - 3 f_\beta \right] + \frac{2}{3} g_3^2 + 18 f_1 f_2. \quad (5.29)$$

onde realizou-se as substituições

$$N_d g_i \rightarrow g_i, \quad N_d f_\alpha \rightarrow f_\alpha. \quad (5.30)$$

Assim, percebe-se que as eqs.(5.27)-(5.29) geram cinco funções beta, com duas delas relacionadas aos acoplamentos envolvendo o potencial vetorial e as outras três aos acoplamentos envolvendo somente os parâmetros de ordem. Devido à presença das flutuações magnéticas, as soluções das funções beta com respeito às constantes de acoplamento produzem os pontos fixos denominados carregados do fluxo do grupo de renormalização.

Em particular, observa-se que as quantidades β_{f_α} , dadas na eq.(5.27), produzem soluções independentes para os acoplamentos do potencial vetorial. Desta maneira, claramente as funções beta nas eqs.(5.28) e (5.29) têm uma solução neutra e outras carregadas. O caso não-carregado é bem conhecido na literatura [46, 97].

No caso das eqs.(5.27)-(5.29), levando-se em conta possibilidade de obtenção das soluções carregadas, é conveniente considerar o caso

$$f_1 = f_2 = f, \quad n_1 = n_2 = \frac{n}{2}, \quad (5.31)$$

significando que o potencial vetorial acopla-se do mesmo modo aos dois parâmetros de ordem, estes tendo n o número total de componentes.

Conseqüentemente, esta escolha possibilita reescrever as eqs.(5.27)-(5.29) como

$$\beta_f = -\varepsilon f + \frac{n}{6} f^2, \quad (5.32)$$

$$\beta_{g_\alpha} = -\varepsilon g_\alpha + \frac{(\frac{n}{2} + 8)}{6} g_\alpha^2 + \frac{n}{12} g_3^2 - 6f g_\alpha + 18f^2, \quad (5.33)$$

$$\beta_{g_3} = -\varepsilon g_3 + \frac{(\frac{n}{2} + 2)}{6} g_3 (g_1 + g_2) + \frac{2}{3} g_3^2 - 6f g_3 + 18f^2. \quad (5.34)$$

Vê-se que o modelo restrito à escolha (5.31) reduz o número de funções beta a quatro, obtendo-se também uma simetria entre β_{g_1} e β_{g_2} em relação aos coeficientes multiplicativos.

Assim o cálculo das soluções das funções beta em (5.32)-(5.34) conduz à obtenção de seis pontos fixos não-carregados, com suas devidas denominações:

- (i) $g_1^{*(1)} = g_2^{*(1)} = g_3^{*(1)} = 0$ (gaussiano),
- (ii) $g_1^{*(2)} = \frac{12\varepsilon}{n+16}$, $g_2^{*(2)} = g_3^{*(2)} = 0$ ($O(n_1)$),
- (iii) $g_2^{*(3)} = \frac{12\varepsilon}{n+16}$, $g_1^{*(3)} = g_3^{*(3)} = 0$ ($O(n_2)$),
- (iv) $g_1^{*(4)} = g_2^{*(4)} = \frac{12\varepsilon}{n+16}$, $g_3^{*(4)} = 0$ (desacoplado),
- (v) $g_1^{*(5)} = g_2^{*(5)} = g_3^{*(5)} = \frac{6\varepsilon}{n+8}$ (isotrópico),
- (vi) $g_1^{*(6)} = g_2^{*(6)} = \frac{6n\varepsilon}{n^2+32}$, $g_3^{*(6)} = \frac{6(8-n)\varepsilon}{(n^2+32)}$ (bicônico).

Por outro lado, existem quatro pontos fixos carregados para valores de n não-negativos:

(vii)

$$g_{1\pm}^{*(7)} = g_{2\pm}^{*(7)} = \frac{12\varepsilon}{nX_{\pm}} \left[\frac{nX_{\pm}}{2(n+8)} + \frac{18X_{\pm}}{(n+8)} - 648 \right], \quad (5.35)$$

$$g_{3\pm}^{*(7)} = \frac{X_{\pm}\varepsilon}{2n(n+8)}, \quad f^{*(7)} = \frac{6\varepsilon}{n}, \quad (5.36)$$

onde introduziu-se

$$X_{\pm} = 216 + 6n \pm 6\sqrt{n^2 - 360n - 2160}.$$

Deste modo, observe-se que estas soluções são reais para $n > 365.9$.

(viii)

$$g_{1\pm}^{*(8)} = g_{2\pm}^{*(8)} = \frac{12\varepsilon}{nY_{\pm}} \left[\frac{n^2Y_{\pm}}{2(n^2+32)} + \frac{18nY_{\pm}}{(n^2+32)} - 648n + 5184 \right], \quad (5.37)$$

$$g_{3\pm}^{*(8)} = \frac{Y_{\pm}\varepsilon}{2n(n^2+32)}, \quad f^{*(8)} = \frac{6\varepsilon}{n}, \quad (5.38)$$

com a utilização de

$$Y_{\pm} = 1728 - 168n - 6n^2 \\ \pm 6\sqrt{n^4 - 376n^3 - 6704n^2 - 29952n - 138240}.$$

Assim, esta última expressão mostra que estes pontos fixos são reais para $n > 393.2$.

Note-se que nas soluções carregadas (vii) e (viii), explicitadas pelas eqs.(5.35)-(5.38), os auto-acoplamentos g_1^* e g_2^* são iguais, fato que aparece diretamente da eq.(5.31), onde os dois campos escalares têm o mesmo número de componentes.

Neste ponto, pode-se realizar o estudo da estabilidade dos pontos fixos. Lembrando o caso simples da seção 2.5 com uma única função beta, verifica-se o sinal da derivada da mencionada função com respeito à constante de acoplamento, e a situação $\beta'(g^*) > 0$ significa uma estabilidade no infravermelho.

Contudo, no presente panorama a análise de estabilidade é efetuada através do exame da positividade dos autovalores de uma dada matriz B , cujos elementos são definidos por

$$B_{ab} = \left. \frac{\partial \beta_a}{\partial b} \right|_*, \quad (5.39)$$

onde $|_*$ denota a derivação em cada ponto fixo.

Percebe-se das eqs.(5.35)-(5.38) a necessidade do auxílio de ferramentas computacionais para efetuar a análise da matriz B . Assim, uma receita para extrair os autovalores de B é a partir da equação característica,

$$\det(B - \Lambda I) = 0, \quad (5.40)$$

para cada ponto fixo.

O resultado deste estudo pode ser visto esquematicamente no diagrama de fluxo do grupo de renormalização na fig.5.3, onde considerou-se somente o plano dos pontos fixos carregados, isto é, o plano com $f^* = \frac{6\epsilon}{n}$, para $n > 393.2$ e $g_1 = g_2 = g$. As setas indicam o fluxo de s tendendo a zero, como na seção 2.5. Um ponto fixo estável no infravermelho é identificado, que explicitamente é $(g_{\alpha+}^{*(8)}, g_{3+}^{*(8)}, f^*)$, o qual é representado na figura pelo símbolo $(8)+$.

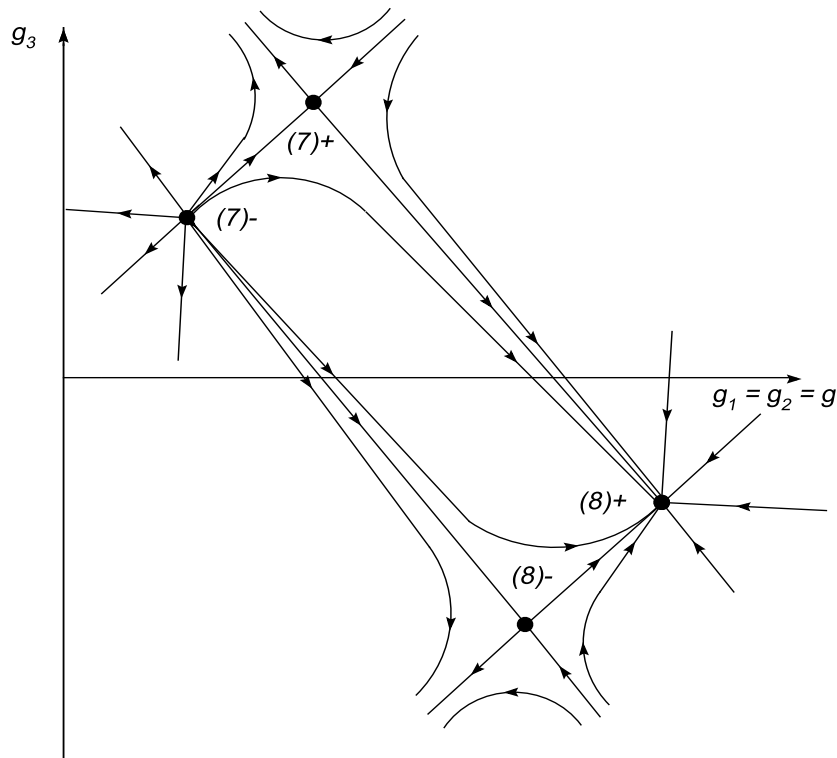


Figura 5.3: Diagrama do fluxo do grupo de renormalização para o modelo dado pela eq.(5.4). Considerou-se o plano com f^* não nulo e $n > 393.2$. Os símbolos $(7, 8)\pm$ foram utilizados para denotar os pontos fixos $(g_{\alpha\pm}^{*(7,8)}, g_{3\pm}^{*(7,8)}, f^*)$ definidos nas eqs.(5.35)-(5.38).

Ressalta-se a distinção entre este presente caso e aquele da linha tricrítica, que

aparece na situação de somente um campo escalar [17]. Esta linha separa as regiões de transição de primeira e segunda ordem. Aqui, no entanto, a linha deve ser substituída por uma hipersuperfície no espaço das constantes (g_1, g_2, g_3, f) definida pelos pontos fixos gaussiano e os carregados instáveis no infravermelho.

Além disso, observe-se que o critério dado pela eq.(5.2) para caracterizar o comportamento multicrítico, neste contexto, deve ser tomado a partir de uma expressão que seja invariante pelo grupo de renormalização [95,96], isto é,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Delta = 0. \quad (5.41)$$

Tal invariância engendra uma hipersuperfície definida por

$$g_1\beta_{g_2} + g_2\beta_{g_1} - 2g_3\beta_{g_3} = 0. \quad (5.42)$$

Além disso, convém utilizar os próprios parâmetros envolvidos na expressão acima invariantes pelo grupo de renormalização. Este fato justifica então a utilização dos pontos fixos para a obtenção de Δ . Contudo, considerando-se as condições iniciais das constantes de acoplamento localizadas na região de atração do ponto estável no infravermelho, pode-se portanto usar o ponto fixo $(8)+$ definido em (5.37) e (5.38), o que gera a quantidade $\Delta_+^{*(8)}$.

Desta maneira, analisando-se o caso particular $n = 394$, tem-se $\Delta_+^{*(8)} \approx 0.0005\epsilon$, o que sugere que o ponto fixo estável no infravermelho tem comportamento fracamente tetracrítico, tornando-se bicrítico para valores maiores de n . Observa-se também que Δ resta positivo na vizinhança próxima do ponto $(8)+$.

Ademais, neste contexto é relevante obter o parâmetro de Ginzburg-Landau, o qual caracteriza o tipo de supercondutor, e que no caso de somente um campo escalar é definido por $\kappa = \lambda/\xi$, onde ξ o comprimento de correlação, relacionado a $r(T)$ cuja forma é dada em 2.31, e λ é o comprimento de penetração do campo magnético. Pode-se mostrar que o mencionado parâmetro reduz-se a $\kappa = u/6f$ [1, 16].

No presente caso estudado, estas quantidades devem ser definidas de maneira diferente. Isto pode ser visto das soluções das equações de estado da aproximação de

Landau obtida da energia em (5.1),

$$|\phi_1|^2 = \frac{6}{\Delta} (u_3 r_2 - r_1 u_2), \quad |\phi_2|^2 = \frac{6}{\Delta} (u_3 r_1 - r_2 u_1). \quad (5.43)$$

Com isso, pode-se definir dois comprimentos de correlação como

$$\xi_1^{-2} \equiv \tilde{r}_1 \equiv - \left(r_1 - \frac{u_3}{u_2} r_2 \right), \quad (5.44)$$

$$\xi_2^{-2} \equiv \tilde{r}_2 \equiv - \left(r_2 - \frac{u_3}{u_2} r_1 \right). \quad (5.45)$$

No ponto crítico, um destes diverge e comporta-se como $\xi_2^{-2} = a(T - T_c)$. Introduz-se também o comprimento de penetração do campo magnético da maneira

$$\lambda^{-2} = \sum_{\alpha=1}^2 e_{\alpha}^2 |\phi_{\alpha}|^2, \quad (5.46)$$

Assim, na criticalidade um deles vai a zero, o que força a aparecer a divergência de λ .

Consequentemente, o parâmetro de Ginzburg-Landau torna-se escrito como

$$\kappa^2 = \frac{\lambda}{\max(\xi_1, \xi_2)} \quad (5.47)$$

Desta forma, com a utilização das eqs.(5.44)-(5.43), pode-se reescrever a eq.(5.47) em duas situações, a saber

$$\kappa^2 = \frac{\Delta}{6fg_2} \quad \text{se } \xi_1 > \xi_2, \quad (5.48)$$

$$\kappa^2 = \frac{\Delta}{6fg_1} \quad \text{se } \xi_2 > \xi_1. \quad (5.49)$$

Do mesmo modo que a quantidade Δ , é conveniente obter uma expressão para κ que seja invariante pelo grupo de renormalização. Logo, utilizando-se as eqs.(5.48) e (5.49), a observação desta invariância gera uma hipersuperfície definida por

$$\mu \frac{d}{d\mu} \kappa^2 = \frac{1}{6fg_{\alpha}} \left[g_1 \beta_{g_2} + g_2 \beta_{g_1} - 2g_3 \beta_{g_3} - \frac{\Delta}{f} \beta_f - \frac{\Delta}{g_{\alpha}} \beta_{g_{\alpha}} \right] = 0. \quad (5.50)$$

Com isso, esta expressão é satisfeita em certos casos, em particular pelos pontos fixos carregados, os quais caracterizam as constantes de acoplamento invariantes pelo grupo de renormalização.

Sendo assim, considerando-se as soluções dadas pelas eqs.(5.37) e (5.38), observa-se que (5.48) e (5.49) coincidem, visto que $g_1^* = g_2^*$. O gráfico de $\kappa_{\pm}^{*(8)}$ em função de n

é mostrado na fig.5.4. Nota-se os valores de $\kappa_{\pm}^{*(8)}$ menores que $1/\sqrt{2}$, insinuando que o modelo estaria adequado a materiais do tipo I. Contudo, isto já era de se esperar no contexto da aproximação em ε . Além disso, os valores de $\kappa_{\pm}^{*(7)}$ flutuam próximo de zero.

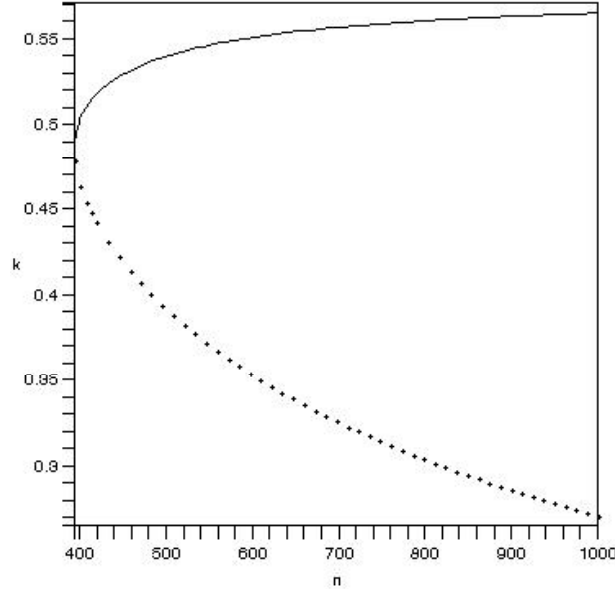


Figura 5.4: Gráfico de $\kappa_{\pm}^{*(8)}$ em função de n na expansão em ε . A linha sólida representa $\kappa_{+}^{*(8)}$, enquanto que a curva pontilhada é $\kappa_{-}^{*(8)}$.

5.3.2 Os expoentes críticos

Neste ponto já é possível deduzir os expoentes críticos, discutidos no caso mais simples de um campo escalar e sem acoplamento de calibre. Aqui, eles deverão ser generalizados.

Focalizando-se primeiramente no expoente η , que caracteriza a dimensão anômala da função de correlação de dois pontos, de fato aqui serão três η 's, definidos por

$$\eta_{\alpha} \equiv \eta_{\alpha}(a)|_{*(IR)} = \mu \left. \frac{\partial \ln Z_{\phi_{\alpha}}}{\partial \mu} \right|_{*(IR)}, \quad (5.51)$$

$$\eta_A \equiv \eta_A(a)|_{*(IR)} = \mu \left. \frac{\partial \ln Z_A}{\partial \mu} \right|_{*(IR)}, \quad (5.52)$$

onde $|_{*(IR)}$ significa as derivadas tomadas no ponto fixo estável no invravermelho. Neste sentido, com o uso das eqs.(5.20) e (5.24) na expansão em ε , os expoentes do tipo η dados em (5.51) e (5.52) tornam-se

$$\eta_\alpha = -\frac{18\varepsilon}{n}, \quad \eta_A = \varepsilon. \quad (5.53)$$

Claramente η_1 e η_2 são iguais devido à escolha (5.31). Assim, os expoentes η são não-nulos mesmo nesta aproximação, enquanto que na seção 2.5 o único η é zero. Este fato aparece devido à presença do campo de calibre. Apesar da expressão de η_α ser formalmente a mesma de [16], a qual trabalha-se somente com um parâmetro de ordem, os domínios de definição de n são diferentes, sendo na eq.(5.53) restrito a ser maior que 393.2, enquanto que na citada referência este limite inferior é ligeiramente menor, $n > 365.9$.

Considerando-se agora o expoente ν , que caracteriza o comprimento de correlação perto do ponto crítico, o cuidado deve ser maior. No caso de somente um parâmetro de ordem, ele é relacionado à dimensão anômala das inserções de ϕ^2 do modo descrito pela eq. (2.70). No entanto, na situação modelo com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, onde foram definidas inserções do tipo $\phi_{\beta k} \phi_{\beta l}$, note-se as derivadas com respeito à temperatura, por exemplo, envolvem somente inserções ϕ_1^2 ou ϕ_2^2 . Sendo assim, a quantidade $\eta^{(2)}$ deve ser generalizada à condição de uma matriz, cujos elementos $(\eta^{(2)})_{ij;kl}^{\alpha\beta}$ têm a matriz $I^{(\beta)}$ com elementos $\delta_{kl}^{(\beta)}$ como um autovetor.

Deste modo, \bar{Z}_{ϕ^2} deve ser uma matriz 2×2 com respeito aos índices α, β , cujos elementos são

$$(\bar{Z}_{\phi^2})_{ij;kl}^{\alpha\beta} \delta_{kl}^{(\beta)} = \sum_{mn} (Z_{\phi_\alpha^2})_{ij;mn}^{\alpha\beta} \left(Z_{\phi_\beta}^{-\frac{1}{2}} \right)_{mk} \left(Z_{\phi_\beta}^{-\frac{1}{2}} \right)_{nl} \delta_{kl}^{(\beta)} = \bar{Z}_{\phi^2}^{\alpha\beta} \delta_{ij}^{(\alpha)}, \quad (5.54)$$

sendo que não existe soma sobre os índices α, β repetidos. Com isso, da matriz $\eta^{(2)}$ dada por

$$(\eta^{(2)})^{\alpha\beta} = \mu \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}^{\alpha\beta}}{\partial \mu} \Big|_{*(IR)}, \quad (5.55)$$

são obtidos dois autovalores, $\eta_1^{(2)}$ e $\eta_2^{(2)}$. Estes são relacionados aos expoentes dos dois comprimentos de correlação introduzidos em (5.44) e (5.45), e como um destes diverge

no ponto crítico, o expoente ν é definido como o maior valor entre as duas quantidades ν_1 e ν_2 , dadas por

$$\nu_\alpha = \frac{1}{2 + \eta_\alpha^{(2)}}. \quad (5.56)$$

Pode-se também introduzir o expoente de cruzamento associado à instabilidade quadrática. Se por exemplo $\nu_2 > \nu_1$, o cruzamento ϕ_c é escrito do modo

$$\phi_c = \frac{\nu_2}{\nu_1}. \quad (5.57)$$

Com o fito de obter a matriz \bar{Z}_{ϕ^2} , substitui-se as eqs.(5.20) e (5.23), definidas na expansão em ε e obedecendo à (5.31), na expressão (5.54), gerando-se autovalores de $\eta^{(2)}$ escritos do modo

$$\eta_1^{(2)} = \frac{1}{12} \left\{ - \left(\frac{n}{2} + 2 \right) (g_1^* + g_2^*) + 36f^* + \left[\left(\frac{n}{2} + 2 \right)^2 (g_1^* - g_2^*)^2 + n^2 g_3^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (5.58)$$

$$\eta_1^{(2)} = \frac{1}{12} \left\{ - \left(\frac{n}{2} + 2 \right) (g_1^* + g_2^*) + 36f^* - \left[\left(\frac{n}{2} + 2 \right)^2 (g_1^* - g_2^*)^2 + n^2 g_3^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5.59)$$

Assim, a utilização do ponto fixo estável no infravermelho, dado pelas eqs.(5.37) e (5.38), em (5.58) e (5.59), e usando estes resultados em (5.56), obtêm-se as expressões

$$\nu_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon \left\{ \frac{(n+4)}{4X_+} \left[\frac{nX_+}{2(n^2+32)} + \frac{18X_+}{(n^2+32)} - 648 + \frac{5184}{n} \right] - \frac{9}{2n} - \frac{X_+}{96(n^2+32)} \right\}, \quad (5.60)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2} + \varepsilon \left\{ \frac{(n+4)}{4X_+} \left[\frac{nX_+}{2(n^2+32)} + \frac{18X_+}{(n^2+32)} - 648 + \frac{5184}{n} \right] - \frac{9}{2n} + \frac{X_+}{96(n^2+32)} \right\}, \quad (5.61)$$

Na fig.5.5 é mostrada o gráfico de ν_1 e ν_2 em função de n com $\varepsilon = 1$. Vê-se portanto que os seus valores têm maior discrepância em valores menores de n , e deduz-se que $\nu = \nu_2 > \nu_1$.

Em adição, a existência de dois expoentes η em princípio gera, pelas leis de escala, dois expoentes da susceptibilidade γ ,

$$\gamma_1 = (2 - \eta_1)\nu, \quad \gamma_2 = (2 - \eta_2)\nu. \quad (5.62)$$

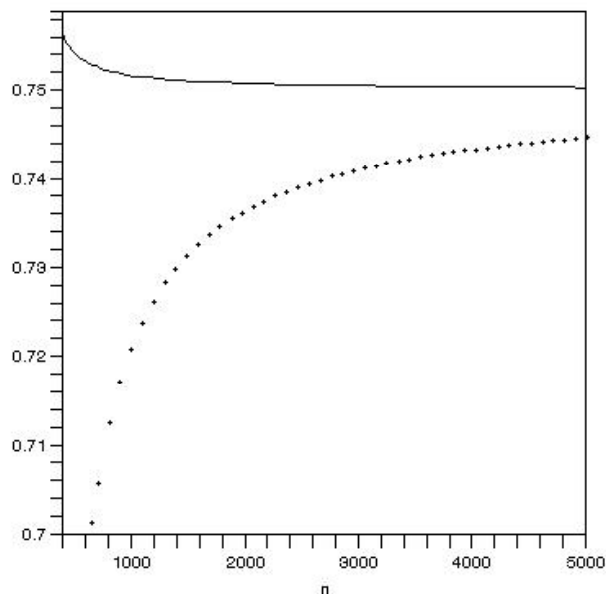


Figura 5.5: Gráfico das funções ν_1 e ν_2 calculadas via a expansão em ε em função de n , as eqs.(5.60) e (5.61). Considera-se $\varepsilon = 1$. A linha sólida representa ν_2 , enquanto que a linha pontilhada é ν_1 .

Contudo, γ_1 e γ_2 são iguais, já que na eq.(5.53) ocorre $\eta_1 = \eta_2$. Nota-se que o cálculo deste expoente é direto através das eqs.(5.53), (5.56) e (5.62), bem como o expoente de cruzamento em (5.57). Na fig.5.6 são mostrados os gráficos de ϕ_c e γ em função de n . Como esperado, para n grande γ tende a $\frac{3}{2}$, e ϕ_c a um.

5.4 A abordagem da dimensão fixa

Até o presente momento o método do grupo de renormalização foi conduzido no quadro da expansão em ε . No entanto, é também interessante saber quais são seus resultados no contexto da dimensão fixa [17, 98, 99]. Deste modo, analisa-se o modelo em um outro contexto. Assim, utiliza-se as eqs.(5.20)-(5.24) com a dimensão fixa no intervalo $d = (2, 4]$ diretamente em (5.25), o que permite escrever as funções beta na seguinte

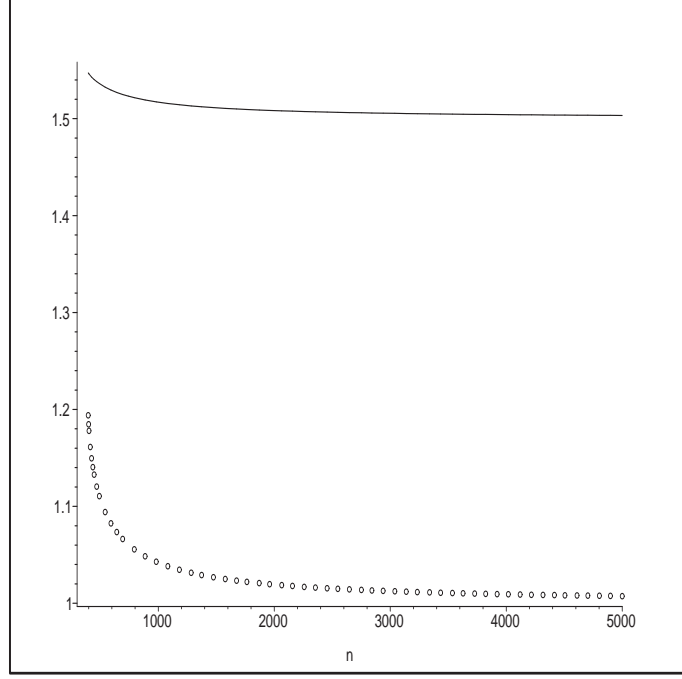


Figura 5.6: Gráfico das funções γ e ϕ_c calculadas via a expansão em ϵ em função de n , as eqs.(5.62) e (5.57). Considera-se $\epsilon = 1$. A linha sólida representa γ , enquanto que a linha com círculos é ϕ_c .

forma

$$\beta'_{f_\alpha} = -\epsilon f_\alpha \left[1 - \frac{B(d)}{2(d-1)} \sum_{\beta=1}^2 n_\beta f_\beta \right], \quad (5.63)$$

$$\beta'_{g_\alpha} = \epsilon \left\{ -g_\alpha + B(d) \left[\frac{(n_\alpha + 8)}{6} g_\alpha^2 + \frac{1}{6} \sum_{\beta=1}^2 \epsilon^{\alpha\beta} \bar{n}^\beta g_\beta^2 - 2(d-1) f_\alpha g_\alpha + \frac{3d}{2} (d-1) f_\alpha^2 \right] \right\}, \quad (5.64)$$

$$\beta'_{g_3} = \epsilon \left\{ -g_3 + B(d) \left[g_3 \sum_{\beta=1}^2 \left(\frac{(n_\beta + 2)}{6} g_\beta - (d-1) f_\beta \right) + \frac{2}{3} g_3^2 + \frac{3d}{2} (d-1) f_1 f_2 \right] \right\}, \quad (5.65)$$

onde usou-se o primo nas funções beta para diferenciá-las daquelas equivalentes na seção anterior. A opção por $d = 3$ produz $\epsilon = 1$, e a quantidade $B(d)$ definida em (5.2) torna-se

$$B(d=3) = \frac{1}{8}. \quad (5.66)$$

Em adiçã, a escolha (5.31) implica em

$$\beta'_f = -f + \frac{n}{32}f^2, \quad (5.67)$$

$$\beta'_{g_\alpha} = -g_\alpha + \frac{(\frac{n}{2} + 8)}{48}g_\alpha^2 + \frac{n}{96}g_3^2 - \frac{1}{2}fg_\alpha + \frac{9}{8}f^2, \quad (5.68)$$

$$\beta'_{g_3} = -g_3 + \frac{(\frac{n}{2} + 2)}{48}g_3(g_1 + g_2) + \frac{g_3^2}{12} - \frac{1}{2}fg_3 + \frac{9}{8}f^2. \quad (5.69)$$

Nota-se destas funções beta acima que as seis soluções não-carregadas continuam a existir, todas instáveis no infravermelho na direção f do fluxo do grupo de renormalização. No caso das soluções carregadas, elas são

$$g'_{1\pm}{}^{*(7)} = g'_{2\pm}{}^{*(7)} = g'_{3\pm}{}^{*(7)} = \frac{W_\pm}{2n(n+8)}, \quad (5.70)$$

$$f'{}^{*(7)} = \frac{32}{n}; \quad W_\pm = 768 + 48n \pm 48\sqrt{n^2 - 64n - 512}, \quad (5.71)$$

as quais são reais para $n > 71.2$, e

$$g'_{1\pm}{}^{*(8)} = g'_{2\pm}{}^{*(8)} = \frac{1}{n(n+16)} \left[96n + 1536 - \frac{4K_\pm}{n^2 + 32} + \frac{nK_\pm}{2(n^2 + 32)} \right], \quad (5.72)$$

$$g'_{3\pm}{}^{*(8)} = \frac{K_\pm}{2n(n^2 + 32)}, \quad f'{}^{*(8)} = \frac{32}{n}, \quad (5.73)$$

onde K_\pm é definido por

$$K_\pm = 6144 - 384n - 48n^2 \\ \pm 48\sqrt{n^4 - 80n^3 - 1728n^2 - 5120n - 32768}.$$

Estas soluções são reais para $n > 98.2$. Realizando-se o estudo da estabilidade infravermelha com a mesma prescriçã da seçã anterior, mostra-se que ocorre a mesma estrutura do diagrama de fluxo do grupo de renormalização dado pela fig.5.3 na situaçã $n > 98.2$, sendo $(g'_{\alpha+}{}^{*(8)}, g'_{3+}{}^{*(8)}, f'{}^{*(8)})$ o ponto fixo estável no infravermelho.

É também interessante notar que a quantidade $\Delta_+{}^{*(8)}$, para o valor particular $n = 100$, é $\Delta_+{}^{*(8)} \approx 0.57$, e comporta-se de modo decrescente com o aumento de n . Assim, este resultado sugere que a abordagem da dimensã fixa possui um comportamento tetracrítico mais evidente que no caso da expansã em ε . Os valores do parâmetro de

Ginzburg-Landau também são maiores que aqueles encontrados na seção anterior. O gráfico de $\kappa_{\pm}^{\prime*(8)}$ em função de n é mostrado na fig.5.7, tendo o relativo ao ponto fixo estável no infravermelho os maiores valores.

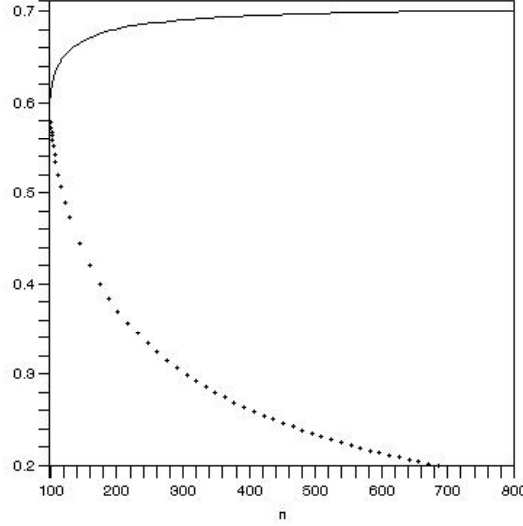


Figura 5.7: Gráfico de $\kappa_{\pm}^{\prime*(8)}$ em função de n (no quadro da dimensão fixa). A linha sólida representa $\kappa_{+}^{\prime*(8)}$, enquanto que a linha pontilhada é $\kappa_{-}^{\prime*(8)}$.

Pode-se também calcular os expoentes críticos com o uso das mesmas definições da seção prévia, o que produz

$$\eta_{\alpha} = -\frac{8}{n}, \quad \eta_A = 1. \quad (5.74)$$

Para obter os expoentes ν , ϕ e γ , usa-se a mesma prescrição explicitada nas eqs.(5.54)-(5.62), porém com (5.58) e (5.59) escritas neste contexto como

$$\eta_{1,2}^{\prime(2)} = \frac{1}{96} \left\{ -\left(\frac{n}{2} + 2\right) (g_1^{\prime*} + g_2^{\prime*}) + 24f^{\prime*} + \left[\left(\frac{n}{2} + 2\right)^2 (g_1^{\prime*} - g_2^{\prime*})^2 + n^2 g_3^{\prime*2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (5.75)$$

$$\eta_{1,2}^{\prime(2)} = \frac{1}{96} \left\{ -\left(\frac{n}{2} + 2\right) (g_1^{\prime*} + g_2^{\prime*}) + 24f^{\prime*} - \left[\left(\frac{n}{2} + 2\right)^2 (g_1^{\prime*} - g_2^{\prime*})^2 + n^2 g_3^{\prime*2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5.76)$$

Deste modo, a utilização destas expressões na eq.(5.56) gera os valores para ν_1 e ν_2 , e a fig.5.8 mostra o gráfico destas duas quantidadees com respeito a n , onde $\epsilon = 1$.

Novamente obtém-se $\nu \equiv \nu_2 > \nu_1$.

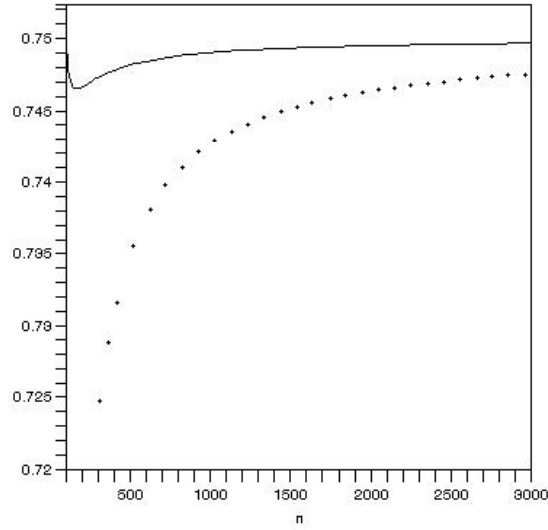


Figura 5.8: Gráfico de ν_1 e ν_2 calculadas no quadro da dimensão fixa em função de n . Escolhe-se $\epsilon = 1$. Note-se que linha sólida representa ν_2 , enquanto a linha pontilhada é ν_1 .

5.5 Discussão

Realizou-se aqui o exame do comportamento do modelo de Ginzburg-Landau multicrítico, com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$ e na presença das flutuações magnéticas, através do grupo de renormalização. Considerando-se os acoplamentos entre os dois parâmetros de ordem e o campo de calibre iguais, bem como $n_1 = n_2 = n/2$, pode-se analisar a matriz de estabilidade dos pontos fixos, sendo que na aproximação em primeira ordem não-trivial, consegue-se um ponto fixo estável no infravermelho para $n > 393.2$ na expansão em ϵ e para $n > 98.2$ na dimensão fixa em três dimensões.

Nota-se que o valor obtido para n na expansão em ϵ é ligeiramente maior que aquele encontrado no modelo com simetria $O(n)$ [16], que é de $n > 365.9$. Contudo, aqui aparecem mais três pontos fixos carregados instáveis no infravermelho que, em conjunto com aqueles não-carregados, definem uma hipersuperfície no diagrama de

fluxo do grupo de renormalização para as quatro constantes de acoplamento, sendo a interface entre as regiões de transição de fase de primeira e de segunda ordem. Em adição, os valores encontrados para o parâmetro Δ , definido pela eq.(5.2) no ponto fixo estável, indicam um comportamento tetracrítico. No entanto, na expansão em ε o parâmetro mencionado tem um valor menor que no caso da dimensão fixa.

No caso dos expoentes críticos, vê-se uma dissemelhança entre o expoente ν obtido, que é dado pela função ν_2 identificadas nas figs.5.5 e 5.8 nos dois casos estudados, e o equivalente na ref. [16]. Em adição o expoente de cruzamento ϕ_c sugere uma maior disparidade entre os valores de ν_1 e ν_2 para os valores permitidos de n menores.

Observe-se que embora este modelo tenha sido conduzido de um ponto de vista geral dos fenômenos multicríticos, pode-se interpretá-lo descrevendo a transição supercondutora, com a fase supercondutora requerendo os dois parâmetros de ordem na fase quebrada. De fato, esta noção é semelhante à das teorias de bósons escravos dos supercondutores de alta T_c . Enquanto que em geral estas teorias são em duas dimensões, pois estuda-se o plano dos cupratos, aqui extrapola-se para três dimensões. De acordo com estas teorias, os dois parâmetros de ordem representam a formação de pares de spinon e a condensação de hólons.

Desta maneira, a supercondutividade requer a condensação de ambos parâmetros de ordem das quase-partículas. Todavia, é interessante notar que aqui é considerada a situação na qual os acoplamentos entre os dois parâmetros de ordem e o campo de calibre são iguais, o que significa que ambos spinons e hólons condensam em pares, como em [50]. Esta situação é diferente em [51–53], onde considera-se a situação $f_2 = 2f_1$.

Ademais, os valores dos parâmetros de Ginzburg-Landau encontrados parecem contradizer a utilidade na descrição de supercondutores do tipo II, já que eles são menores que $1/\sqrt{2}$, embora no caso da dimensão fixa $\kappa_+^{*(8)}$ seja praticamente este valor para n grande, o que significa estar na região da supercondutividade do tipo I. Vale ressaltar que foi usado aqui a aproximação de primeira ordem não-trivial, justamente como um passo no sentido de estudos qualitativos do modelo apresentado, como em [16] no caso de um modelo com um parâmetro de ordem. Com o intuito de obter melhoramen-

tos dos resultados encontrados aqui, é interessante no futuro o uso de métodos de re-somatório [59].

Uma outra possibilidade de estender os estudos feitos neste trabalho, na situação da dimensão fixa, é introduzir diferentes pontos da renormalização para os acoplamentos do campo escalar e do campo de calibre, como em [17], com o intuito de ter um parâmetro de controle dos valores de κ e dos pontos fixos. Isto significa trabalhar com escalas diferentes obedecendo à relação $\mu^2 = c^2 q^2$, onde q é a escala para as funções de correlação com linhas externas do campo de calibre, μ para as equivalentes dos campos escalares e c é o parâmetro de controle *ad hoc*.

Uma possibilidade relevante para o futuro é analisar este modelo no panorama da teoria $SO(5)$, isto é, tomar os parâmetros de ordem representando a fase antiferromagnética e o ordenamento supercondutor. Neste caminho, um dos acoplamentos f_α deve ser zero, mais precisamente aquele que acopla o campo de calibre ao parâmetro de ordem da fase antiferromagnética. Porém este desenvolvimento deve ser acompanhado de métodos que visem o melhoramento dos resultados obtidos aqui, a fim de conseguir pontos fixos estáveis no infravermelho na região física do número de componentes, ou seja, $n < 5$, por exemplo. Portanto, procedimentos baseados em re-somatório, por exemplo, são necessários.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

No trabalho desenvolvido nos capítulos precedentes usou-se largamente os métodos matemáticos típicos de teoria quântica de campos no estudo dos fenômenos críticos. Esta abordagem permitiu, entre outros desenvolvimentos, a caracterização dos efeitos de fronteira e a multicriticalidade.

No capítulo 3, apresentou-se o modelo sujeito à condição de fronteira tipo Dirichlet-Dirichlet, definindo-se o parâmetro de ordem em um subespaço do conjunto euclideo com dimensões compactificadas e empregando-se nos cálculos a prescrição generalizada tipo Matsubara. No cálculo do potencial termodinâmico efetivo, considerando-se a primeira correção à aproximação de Landau, usou-se a regularização dimensional, recorrendo-se ao método das funções zeta do tipo Epstein-Hurwitz como ferramenta adequada ao para lidar com as dificuldades técnicas impostas pela compactificação. Por fim, usando-se o procedimento de continuação analítica, obteve-se expressões generalizadas para o potencial no modelo confinado, estudando-se em seguida o comportamento crítico correspondente.

Assim, supondo-se sempre o espaço tridimensional, discutiram-se as situações de uma, duas ou três dimensões compactificadas, que representam sistemas na forma de filme, fios ou cubos. Como resultado geral, observou-se a proporcionalidade, a menos de uma constante aditiva, da temperatura crítica com o inverso do comprimento característico do sistema em cada geometria específica. Neste ínterim, concluiu-se que o grão supercondutor apresenta o maior coeficiente angular no gráfico $T_c \times L$.

Considerando-se o caso da supercondutividade, estes resultados concordam qualitativamente com os dados experimentais na escala de materiais micrométricos na forma de filmes [21–27, 30, 31], fios [32, 33], e grãos [34–36]. A conformidade entre o modelo apresentado e os dados experimentais é atestada também pelos resultados encontrados em [34], expressando o fato de que em amostras com dimensões reduzidas a repulsão coulombiana torna o espaçamento médio entre os níveis de energia de partícula única comparáveis à energia de *gap*, destruindo a fase supercondutora. De fato, registra-se na literatura observações deste efeito em grãos pequenos [37].

Por outro lado, infere-se a partir da discussão realizada nesta tese, que a observação da supressão em amostras na forma de filmes e fios deve ser dificultada devido à dominância de efeitos microscópicos como a localização e a proximidade, que são mais pronunciados na escala nanométrica.

No capítulo 4 desenvolveu-se uma análise mais detalhada do do modelo introduzido no capítulo anterior, levando-se em consideração a presença das flutuações magnéticas e campos magnéticos externos. Assim, restringindo-se ao caso de uma dimensão compactificada, realizou-se na seção 4.1 os cálculos via o método do potencial efetivo gaussiano, o que permitiu deduzir uma equação crítica com duas contribuições separadas, uma relacionada à auto-interação do parâmetro de ordem e a outra descrevendo a interação entre o este e o campo de calibre.

Na situação de filmes supercondutores do tipo I, observou-se que a contribuição das flutuações de calibre são relativamente pequenas, verificando-se a conformidade entre as predições do modelo e os dados experimentais disponíveis.

Em seguida, analisou-se o efeito Halperin-Lubensky-Ma em sistemas na forma de filme. Na aproximação do parâmetro de ordem uniforme, investigou-se a dependência na espessura das quantidades termodinâmicas relevantes, concluindo-se que a transição de primeira ordem é induzida por um termo do tipo $\phi^2 \ln \phi$ na energia livre. No caso tridimensional sem fronteiras, este termo seria do tipo ϕ^3 [16].

Outro resultado obtido foi a determinação do intervalo da temperatura da transição de primeira ordem (ΔT) como sendo proporcional ao inverso da espessura, em con-

cordância qualitativa com os resultados encontrados em [83]. Por outro lado, o estímulo calculado aqui apresenta-se muito menor do que no estudo [83], gerando um resultado mil vezes maior que aquele previsto em [16].

Já na seção 4.3, com o intuito de analisar o comportamento crítico de filmes supercondutores do tipo II extremo, analisou-se o modelo com n componentes na presença de um campo magnético externo, na aproximação de $\frac{1}{n}$. Na aproximação do menor nível de Landau, obteve-se novamente uma equação relacionando a temperatura crítica com a espessura da amostra e a intensidade do campo magnético externo. Estes desenvolvimentos permitiram concluir que para valores cada vez menores da espessura da amostra, necessita-se de campos magnéticos externos correspondentemente menos intensos para alcançar a região do menor nível de Landau.

Em resumo, dos resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 observa-se que o modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau apresenta-se como uma ferramenta útil no entendimento dos fenômenos críticos na presença das condições de fronteira, sendo uma alternativa efetiva e relativamente simples.

No outro cenário focalizado por este trabalho, a fim de estudar fenômenos relacionados à multicriticalidade, explorou-se no capítulo 5 uma versão do modelo de Ginzburg-Landau com simetria $O(n_1) \oplus O(n_2)$, contendo $(n_1/2 + n_2/2)$ parâmetros de ordem complexos acoplados a um potencial vetorial representando as flutuações magnéticas. Neste contexto, utilizando-se técnicas de grupo de renormalização, analisou-se comportamento multicrítico tanto na abordagem da expansão em ε quanto da dimensão fixa. Expressões das quatro funções beta foram obtidas, assumindo-se que os acoplamentos entre os dois parâmetros de ordem e o campo de calibre são escolhidos iguais, bem como $n_1 = n_2 = n/2$.

As funções beta assim obtidas geraram, além dos seis pontos fixos neutros, mais quatro carregados. Analisando-se a matriz de estabilidade constatou-se a existência de um ponto fixo estável no infravermelho para $n > 393.2$ na expansão em ε e $n > 98.2$ na dimensão fixa. Concluiu-se então que o diagrama de fluxo do grupo de renormalização no espaço das constantes (g_1, g_2, g_3, f) tem uma hipersuperfície definida pelo ponto fixo

gaussiano e pelos carregados que descreve a interface entre as regiões de transição de fase de primeira e de segunda ordem.

Em adição, obteve-se que os valores encontrados para o parâmetro Δ caracterizam o ponto fixo estável no infravermelho como tetracrítico. Outro ponto discutido foi a discrepância entre os valores Δ obtidos na expansão em ε e na abordagem da dimensão fixa, o que dá margem à interpretação de que o sistema experimenta a tetracriticalidade de maneira mais incisiva no cenário da dimensão fixa. Com relação ao cálculo dos expoentes críticos, observou-se que o expoente ν nas duas abordagens consideradas tem valores diferentes daqueles obtidos na aproximação de Landau.

Uma interpretação possível da descrição da supercondutividade via o modelo multicrítico é provida pela percepção de que a fase supercondutora requer os dois parâmetros de ordem na fase quebrada. De fato, esta noção é similar àquela das teorias dos supercondutores de alta T_c , sendo que nestas últimas os parâmetros de ordem são relacionados a densidades de quase-partículas. Todavia, considerou-se aqui a situação na qual os acoplamentos entre os dois parâmetros de ordem e o campo de calibre são iguais, significando que as quase-partículas condensam-se aos pares [50]. Note-se que esta situação é discutida de forma diferente nas refs. [51–53].

Como perspectivas futuras, desenvolvimentos no sentido de obter melhoramentos nos resultados obtidos mostram-se não só pertinentes como desejáveis.

Neste sentido, possíveis extensões dos trabalhos relacionados à compactificação apontam para a formulação a partir da análise do grupo de renormalização, o que permitiria a descrição das quantidades termodinâmicas destes sistemas de forma mais consistente.

Atendo-se ao modelo de Ginzburg-Landau multicrítico, desdobramentos possíveis são a análise até a segunda ordem em ε e a utilização de métodos de re-somatório. Tais procedimentos poderiam em princípio permitir a redução significativa de n para a existência de um ponto fixo estável no infravermelho, conduzindo a resultados mais consistentes com a fenomenologia. Outro ponto a analisar é o uso de diferentes pontos de renormalização para os acoplamentos do parâmetro de ordem e do potencial vetorial

[17], com o intuito de ter um parâmetro de controle que dita a consistência do modelo. Outra perspectiva promissora é a consideração das consequências de uma formulação dual do modelo de Ginzburg-Landau multicrítico.

No cenário da supercondutividade em alta temperatura crítica, dentre outras possibilidades coloca-se o entendimento da teoria $SO(5)$ [90], levando-se em consideração o acoplamento das flutuações magnéticas ao parâmetro de ordem da supercondutividade, tendo o acoplamento do potencial vetorial ao parâmetro de ordem da fase antiferromagnética, f_1 ou f_2 , nulo. Estes desenvolvimentos devem ser acompanhados de métodos que visem o melhoramento dos resultados obtidos aqui, a fim de conseguir pontos fixos estáveis no infravermelho na região física do número de componentes, ou seja, $n = 5$. Isto em princípio permitiria uma comparação conceitualmente mais consistente com os dados experimentais [49].

Conclui-se, portanto, que o modelo de Ginzburg-Landau nas suas diferentes versões analisadas, tanto do ponto de vista dos métodos da teoria quântica de campos como da fenomenologia, continuará sendo um ramo promissor no estudo da física de fenômenos críticos.

Apêndice A

O tratamento da função zeta de Epstein-Hurwitz

É desenvolvido neste presente apêndice a técnica necessária no tratamento da função zeta de Epstein-Hurwitz, $A_m^{c^2}$, que aparece na eq. (3.12). O objetivo é obter uma expressão desta função numa forma que seja a mais conveniente possível na abordagem dos problemas propostos no capítulo 2 de compactificação das dimensões espaciais do modelo de Ginzburg-Landau. Os procedimentos empregados aqui são uma generalização daqueles descritos na ref. [40], e são semelhantes aos da ref. [42].

Iniciando a marcha, as funções $A_m^{c^2}$ podem ser estendidas de um modo geral a todo o plano complexo de s , da maneira

$$\begin{aligned} A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\}) &= \frac{1}{c^{2\nu}} + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{n_i=1}^{\infty} (b_i^2 n_i^2 + c^2)^{-\nu} + 2^2 \sum_{i < j=1}^m \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} (b_i^2 n_i^2 + b_j^2 n_j^2 + c^2)^{-\nu} \\ &+ \cdots + 2^m \sum_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty} (b_1^2 n_1^2 + \cdots + b_m^2 n_m^2 + c^2)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Na seqüência, é de grande utilidade o uso da identidade

$$\frac{1}{\Delta^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\Delta t}. \quad (\text{A.2})$$

Neste sentido, a eq.(A.1) torna-se

$$A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-c^2 t} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^m T_1(t, b_i) + \right. \\ \left. + 2^2 \sum_{i,j=1}^m T_2(t, b_i, b_j) + \cdots + 2^m T_m(t, b_1, \dots, b_m) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde

$$T_1(t, b_i) = \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-b_i n_i^2 t}, \quad (\text{A.4})$$

$$T_j(t, b_1, \dots, b_j) = T_{j-1}(t, b_1, \dots, b_{j-1}) T_1(t, b_j) \quad , j = 2, \dots, m. \quad (\text{A.5})$$

O próximo passo seguinte é considerar a seguinte propriedade das funções T_1 ,

$$T_1(t, b_i) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{b_i t}} \left[\frac{1}{2} + S\left(\frac{\pi^2}{a_i t}\right) \right], \quad (\text{A.6})$$

sendo $S(x)$ uma função dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}. \quad (\text{A.7})$$

Assim, a partir da eq.(A.6), nota-se após manipulações longas porém imediatas que a eq.(A.3) torna-se

$$A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\}) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{b_1 \cdots b_m} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{(\nu-\frac{b}{2})-1} e^{-c^2 t} \\ \times \left[1 + 2 \sum_{i=1}^m S\left(\frac{\pi^2}{b_i t}\right) + 2^2 \sum_{i<j=1}^m S\left(\frac{\pi^2}{b_i t}\right) S\left(\frac{\pi^2}{b_j t}\right) \right. \\ \left. + \cdots + 2^m \prod_{i=1}^m S\left(\frac{\pi^2}{b_i t}\right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

A etapa final para obtenção da expressão conveniente para $A_m^{c^2}$ é levar em conta a forma explícita de $S(x)$ em (A.7) e a seguinte representação para as funções de Bessel de terceira espécie K_ν ,

$$2(a/b)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{ab}) = \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-(a/x)-bx}, \quad (\text{A.9})$$

Portanto, após mais algumas ações, a eq.(A.8) fica escrita como

$$\begin{aligned}
A_m^{c^2}(\nu; \{b_i\}) &= \frac{2^{\nu-\frac{m}{2}+1} \pi^{2\nu-\frac{m}{2}}}{b_1 \cdots b_d \Gamma(\nu)} \left[2^{\nu-\frac{m}{2}-1} \Gamma\left(\nu - \frac{m}{2}\right) (2\pi c)^{m-2\nu} \right. \\
&+ 2 \sum_{i=1}^m \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{n_i}{2\pi c b_i} \right)^{\nu-\frac{m}{2}} K_{\nu-\frac{m}{2}}\left(\frac{2\pi c n_i}{b_i}\right) + \cdots \\
&+ 2^m \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{n_1^2}{b_1^2} + \cdots + \frac{n_m^2}{b_m^2}} \right)^{\nu-\frac{m}{2}} \\
&\left. \times K_{\nu-\frac{m}{2}}\left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{b_1^2} + \cdots + \frac{n_m^2}{b_m^2}}\right) \right]. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Esta é a forma da função zeta de Epstein-Hurwitz que tem utilidade no presente contexto.

Apêndice B

O tratamento das equações críticas para fios e cubos

Este apêndice expõe as manipulações algébricas do cálculo das equações críticas do modelo de Ginzburg-Landau da seção 3.3.2, no caso de duas e três dimensões compactificadas.

Analisando inicialmente o caso de duas dimensões compactificadas, $m = 2$, a equação crítica é dada pela eq.(3.27). É relevante notar que é possível construir as continuações analíticas e relações de recorrência para as funções zeta de Epstein multidimensionais, definidas na eq.(3.28), o que permite escrevê-las em termos de funções de Kelvin e zeta de Riemann.

Começando com a continuação analítica para a função zeta de Epstein-Hurwitz [38, 40],

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + p^2)^{-\nu} = -\frac{1}{2}p^{-2\nu} + \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{2\nu-1}\Gamma(\nu)} \left[\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi pn)^{\nu-\frac{1}{2}} K_{\nu-\frac{1}{2}}(2\pi pn) \right], \quad (\text{B.1})$$

e utilizando-a na realização de um dos somatórios em (3.28), a questão que aparece imediatamente é qual soma deve ser primeiro avaliada. Conforme é feito na ref. [100], qualquer somatório que escolhe-se primeiramente efetuar, a simetria manifesta $L_1 \leftrightarrow L_2$ em (3.28) é perdida. Assim, com o fito de preservar esta simetria, procura-se adotar aqui uma expressão simetrizada generalizada para o caso de muitas variáveis.

Neste sentido, para deduzir uma continuação analítica e relações de recorrência simetrizadas para as funções de Epstein multidimensionais, assume-se que estas são dadas por

$$E_m(\nu; \{L_i\}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} [\sigma_1^2 n_1^2 + \cdots + \sigma_m^2 n_m^2]^{-\nu}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\sigma_i = \sigma(L_i)$, com σ correndo no conjunto de todas as permutações dos parâmetros L_1, \dots, L_m , e os somatórios sobre n_1, \dots, n_m sendo tomados na dada ordem. Desta maneira, aplicando (B.2) para executar o somatório sobre n_m , consegue-se

$$\begin{aligned} E_m(\nu; \{L_i\}) &= -\frac{1}{2m!} \sum_{i=1}^m E_{m-1}(\nu; \dots, \widehat{L}_i, \dots) \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{2m! \Gamma(\nu)} \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{L_i} E_{m-1}\left(\nu - \frac{1}{2}; \dots, \widehat{L}_i, \dots\right) \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}}{m! \Gamma(\nu)} W_m\left(\nu - \frac{1}{2}, \{L_i\}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde o chapéu sobre o parâmetro L_i nas funções E_{m-1} significa que ele é excluído do conjunto $\{L_i\}$, sendo os outros os $(m-1)$ parâmetros de E_{m-1} , e

$$W_m(\eta; \{L_i\}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{L_i} \sum_{\{n_i\}=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_i}{L_i \sqrt{(\dots + \widehat{L}_i^2 n_i^2 + \dots)}} \right)^{\eta} K_{\eta} \left(\frac{2\pi n_i}{L_i} \sqrt{(\dots + \widehat{L}_i^2 n_i^2 + \dots)} \right), \quad (\text{B.4})$$

com $(\dots + \widehat{L}_i^2 n_i^2 + \dots)$ representando o somatório $\sum_{j=1}^m L_j^2 n_j^2 - L_i^2 n_i^2$. Em particular, observando que $E_1(\nu; L_j) = L_j^{-2\nu} \zeta(2\nu)$, encontra-se

$$\begin{aligned} E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_1^2, L_2^2\right) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{L_1^{d-2}} + \frac{1}{L_2^{d-2}} \right) \zeta(d-2) \\ &+ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d-3}{2})}{4\Gamma(\frac{d-2}{2})} \left(\frac{1}{L_1 L_2^{d-3}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{L_1^{d-3} L_2} \right) \zeta(d-3) + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} W_2\left(\frac{d-3}{2}; L_1, L_2\right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

que é uma função meromórfica de d e simétrica nos parâmetros L_1 e L_2 como eq.(3.28) sugere.

Na seqüência, o uso da expressão (B.5) em (3.27) implica em

$$\begin{aligned}
r(L_1, L_2) \approx & \bar{m}_0^2(L_1, L_2) + \frac{3\lambda}{\pi^{d/2}} \left[\left(\frac{1}{L_1^{d-2}} + \frac{1}{L_2^{d-2}} \right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \zeta(d-2) \right. \\
& + \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{L_1 L_2^{d-3}} + \frac{1}{L_1^{d-3} L_2} \right) \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \zeta(d-3) \\
& \left. + 2\sqrt{\pi} W_2\left(\frac{d-3}{2}; L_1, L_2\right) \right]. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Esta expressão não apresenta problemas para $3 < D < 4$, mas para $D = 3$ o primeiro e o segundo termos entre os colchetes são divergentes devido às funções zeta e gamma, respectivamente. Contudo, pode-se tratar estas divergências lembrando a propriedade explicitada na eq. (3.21) e usando a expansão de $\Gamma(\frac{d-3}{2})$ ao redor de $d = 3$,

$$\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \approx \frac{2}{d-3} + \Gamma'(1), \tag{B.7}$$

$\Gamma'(z)$ sendo a derivada da função gamma com respeito a z . Para $z = 1$, ela coincide com a função digamma de Euler $\psi(1)$, a qual tem o valor $\psi(1) = -\gamma$. É importante notar, entretanto, que diferentemente do caso tratado na seção 3.3.1, onde um procedimento de renormalização foi necessário, aqui estes dois termos divergentes que foram gerados pelo uso de (3.21) e (B.7) cancelam-se entre eles. Com isso, a renormalização torna-se desnecessária. Deste modo, para $d = 3$ o parâmetro $r(L_1, L_2)$ escrito na eq.(3.27) adquire a forma

$$r(L_1, L_2) \approx \alpha (T - T_c(L_1, L_2)), \tag{B.8}$$

com a temperatura crítica dependente das condições de fronteira dada por

$$T_c(L_1, L_2) = T_{c0} - \frac{3\lambda\gamma}{16\pi\alpha} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) - \frac{\lambda}{4\pi\alpha} W_2(0; L_1, L_2), \tag{B.9}$$

com a função $W_2(0; L_1, L_2)$ sendo

$$W_2(0; L_1, L_2) = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L_1} K_0 \left(2\pi \frac{L_2}{L_1} n_1 n_2 \right) + \frac{1}{L_2} K_0 \left(2\pi \frac{L_1}{L_2} n_1 n_2 \right) \right\}. \tag{B.10}$$

Portanto, a eq.(B.9) representa a equação crítica para o caso de duas das três dimensões do sistema sendo compactificadas.

Passa-se agora à situação de três dimensões compactificadas, $m = 3$, cuja equação crítica é dada pela eq. (3.34). Observando que a estrutura analítica da função

$E_3\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2, L_3\right)$ pode ser obtida das relações de recorrência simetrizadas gerais definidas por (B.3) e (B.4), então

$$\begin{aligned}
E_3\left(\frac{d-2}{2}; L_1, L_2, L_3\right) &= -\frac{1}{6} \sum_{i < j=1}^3 + E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_i, L_j\right) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)}{6 \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)} \\
&\times \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1 + \varepsilon_{ijk})}{2} \frac{1}{L_i} E_2\left(\frac{d-2}{2}; L_j, L_k\right) \\
&+ \frac{2\sqrt{\pi}}{3 \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)} W_3\left(\frac{d-3}{2}; L_1, L_2, L_3\right), \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde ε_{ijk} é o símbolo totalmente anti-simétrico e a função W_3 é um caso particular de (B.4). Assim, com o uso de (B.5) e (B.11), o parâmetro r dependente das fronteiras pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
r(L_1, L_2, L_3) &\approx r_0^2(L_1, L_2, L_3) + \frac{\lambda}{4\pi^{d/2}} \left[\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i^{d-2}} \zeta(d-2) \right. \\
&+ \frac{\sqrt{\pi}}{6} \zeta(r-3) \sum_{i < j=1}^3 \left(\frac{1}{L_i^{d-3} L_j} + \frac{1}{L_j^{d-3} L_i} \right) \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \\
&+ \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \sum_{i < j=1}^3 W_2\left(\frac{d-3}{2}; L_i, L_j\right) + \frac{\pi}{6} \zeta(d-4) \Gamma\left(\frac{d-4}{2}\right) \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1 + \varepsilon_{ijk})}{2} \\
&\times \frac{1}{L_i} \left(\frac{1}{L_j^{d-4} L_k} + \frac{1}{L_k^{d-4} L_j} \right) + \frac{2\pi}{3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1 + \varepsilon_{ijk})}{2} \frac{1}{L_i} W_2\left(\frac{d-4}{2}; L_j, L_k\right) \\
&\left. + \frac{8\sqrt{\pi}}{3} W_3\left(\frac{d-3}{2}; L_1, L_2, L_3\right) \right] \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Percebe-se que os dois primeiros termos entre os colchetes em (B.12) diverge para $d \rightarrow 3$ devido aos pólos das funções gamma e zeta. Entretanto, como aconteceu no caso de $m = 2$ acima estudado, é possível mostrar que estas divergências cancelam-se. Desta maneira, após algumas manipulações, para $d = 3$ a eq.(B.12) torna-se

$$\begin{aligned}
r(L_1, L_2, L_3) &\approx r_0^2(L_1, L_2, L_3) + \frac{\lambda}{4\pi} \left[\frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} + \frac{4}{3} \sum_{i < j=1}^3 W_2(0; L_i, L_j) + \right. \\
&+ \frac{\pi}{18} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1 + \varepsilon_{ijk})}{2} \frac{L_i}{L_j L_k} + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{(1 + \varepsilon_{ijk})}{2} \frac{1}{L_i} W_2\left(-\frac{1}{2}; L_j, L_k\right) \\
&\left. + \frac{8}{3} W_3(0; L_1, L_2, L_3) \right]. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Esta é a equação crítica para o caso das três dimensões do sistema compactificadas.

Apêndice C

O cálculo do potencial efetivo gaussiano e da equação de gap

Estas linhas são dedicadas à demonstração do cálculo do potencial termodinâmico efetivo da seção 4.1, o qual leva em conta as flutuações do campo de calibre abeliano, e é calculado via o método variacional dito potencial efetivo gaussiano [73–80]. É obtida também a equação de gap que dita o comportamento crítico do sistema neste contexto.

Iniciando, o potencial efetivo gaussiano pode ser obtido da eq.(4.6) realizando um deslocamento no campo escalar, $\phi = \tilde{\phi} + \varphi$, o que permite escrever \mathcal{H} da maneira

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \quad (\text{C.1})$$

com \mathcal{H}_0 sendo a parte livre e \mathcal{H}_{int} a parte de interação, dados respectivamente por

$$\mathcal{H}_0 = \left[\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\tilde{\phi}^2 \right] + \left[\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}\Delta^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2\epsilon}(\nabla \cdot \mathbf{A})^2 \right], \quad (\text{C.2})$$

e

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{n=0}^4 v_n \tilde{\phi}^n + \frac{1}{2}(e^2\varphi^2 - \Delta^2) A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2\tilde{\phi}A_\mu A^\mu\varphi + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu\varphi^2, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$v_0 = \frac{1}{2}r_0\varphi^2 + \lambda\varphi^4, \quad v_1 = r_0\varphi + 4\lambda\varphi^3, \quad v_2 = \frac{1}{2}r_0\varphi^2 + 6\lambda\varphi^2 - \frac{1}{2}\Omega^2, \quad (\text{C.4})$$

$$v_3 = 4\lambda\varphi, \quad v_4 = \lambda. \quad (\text{C.5})$$

É claro das eqs.(C.1)-(C.3) que \mathcal{H} descreve dois campos interagentes, um campo escalar real ϕ de termo de massa Ω e um campo de calibre vetorial \mathbf{A} de massa Δ . Nota-se que Ω e Δ são os parâmetros variacionais com respeito aos quais minimizar-se-á o potencial efetivo, sendo desta forma obtido o potencial efetivo gaussiano.

Prosseguindo, o potencial termodinâmico efetivo pode ser obtido pela teoria de perturbações até a primeira ordem, já visitado na seção 2.3. Assim, a utilização das eqs.(4.6), (C.2) e (C.3) implica em

$$V_{eff}[\varphi] = I_1^d(\Omega) + 2I_1^d(\Delta) + \frac{1}{2}r_0\varphi^2 + \lambda\varphi^4 + \frac{1}{2} [r_0 - \Omega^2 + 12\lambda\varphi^2 + 6\lambda I_0^d(\Omega)] I_0^d(\Omega) + [e^2 (\varphi^2 + I_0^d(\Omega)) - \Delta^2] I_0^d(\Delta), \quad (C.6)$$

onde

$$I_0^d(M) = \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + M^2}, \quad (C.7)$$

$$I_1^d(M) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + M^2), \quad (C.8)$$

com $k = (k_1, \dots, k_d)$ sendo o momento definido em d dimensões.

O potencial efetivo é derivado a partir do seguinte requerimento: $V_{eff}[\varphi]$ deve ser estacionário pela variações de Δ e Ω . Isto significa que certos valores $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Delta}$ devem ser dados de modo que

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega^2=\bar{\Omega}^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \Delta^2} \right|_{\Delta^2=\bar{\Delta}^2} = 0, \quad (C.9)$$

sejam simultaneamente satisfeitas. Assim, estas condições geram as seguintes equações de gap:

$$\bar{\Omega}^2 = r_0 + 12\lambda\varphi^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}), \quad (C.10)$$

$$\bar{\Delta}^2 = e^2\varphi^2 + e^2 I_0^d(\bar{\Omega}). \quad (C.11)$$

Na seqüência, substituindo Ω e Δ na eq. (C.6) pelas soluções $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Delta}$, de (C.10) e (C.11), consegue-se imediatamente a expressão para o potencial efetivo gaussiano,

$$\bar{V}_{eff}[\varphi] = I_1^d(\bar{\Omega}) + 2I_1^d(\bar{\Delta}) + \frac{1}{2}r_0\varphi^2 + \lambda\varphi^4 - 3\lambda[I_0^d(\bar{\Omega})]^2 - e^2 I_0^d(\bar{\Omega})I_0^d(\bar{\Delta}). \quad (C.12)$$

Nota-se que as eqs.(C.10) e (C.11) formam um par de equações acopladas, as quais são resolvidas por métodos numéricos. Contudo, no contexto estudado o interesse é somente na vizinhança da criticalidade.

Em seguida, deseja-se compor uma expressão para o termo massivo \bar{r} , obtido da segunda derivada do potencial efetivo gaussiano no ponto $\varphi = 0$, pois em princípio o sistema está sendo analisado na vizinhança da fase desordenada, $T \geq T_c$. No entanto, vê-se que no cálculo das derivadas de \bar{V}_{eff} com respeito a φ deve-se levar em conta que $\bar{\Omega}^2$ e $\bar{\Delta}^2$ em (C.10) e (C.11) também dependem de φ de acordo com as seguintes relações

$$\frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi} = \frac{24\lambda\varphi - e^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \frac{d\bar{\Delta}^2}{d\varphi}}{1 + 6\lambda I_{-1}^d(\bar{\Omega})}, \quad (C.13)$$

$$\frac{d\bar{\Delta}^2}{d\varphi} = 2e^2\varphi - \frac{1}{2}e^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi}, \quad (C.14)$$

onde

$$I_{-1}^d(M) = 2 \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + M^2)^2}. \quad (C.15)$$

Deste modo, a substituição de (C.14) em (C.13) gera

$$\frac{d\bar{\Omega}^2}{d\varphi} = \frac{[24\lambda - 2e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] \varphi}{1 + [6\lambda - \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Omega})] I_{-1}^d(\bar{\Omega})}, \quad (C.16)$$

e a segunda derivada de \bar{V}_{eff} em relação a φ produz

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}_{eff}}{d\varphi^2} &= r_0 + 12\lambda\varphi^2 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}) + 2e^4 \varphi^2 I_{-1}^d(\bar{\Delta}) \\ &\quad - \frac{[6\lambda + \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] [24\lambda - 2e^4 I_{-1}^d(\bar{\Delta})] \varphi^2}{1 + [6\lambda - \frac{1}{2}e^4 I_{-1}^d(\bar{\Omega})] I_{-1}^d(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (C.17)$$

Define-se a fórmula para \bar{r} é como

$$\bar{r} \equiv \left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = r_0 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}_0) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}_0), \quad (C.18)$$

onde $\bar{\Omega}_0$ e $\bar{\Delta}_0$ são respectivamente as soluções para $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Delta}$ a $\varphi = 0$, isto é

$$\bar{\Omega}_0^2 = r_0 + 12\lambda I_0^d(\bar{\Omega}_0) + 2e^2 I_0^d(\bar{\Delta}_0), \quad (C.19)$$

$$\bar{\Delta}_0^2 = e^2 I_0^d(\bar{\Omega}_0). \quad (C.20)$$

Conseqüentemente, de (C.18) e (C.19) tem-se simplesmente

$$\bar{r} = \bar{\Omega}_0^2. \quad (\text{C.21})$$

Portanto, a equação de gap (C.18) obedece a uma equação do tipo Dyson-Schwinger gaussiana, ou seja,

$$\bar{r} = r_0 + 12\lambda I_0^d(\sqrt{\bar{r}}) + 2e^2 I_0^d \left(\sqrt{e^2 I_0^d(\sqrt{\bar{r}})} \right). \quad (\text{C.22})$$

Esta é a equação que controla o comportamento crítico do sistema, e é de fundamental importância na seção 4.2.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Kleinert *Gauge Fields in Condensed Matter: Inhomogeneous Superconductors, Granular and Quantum Effects* Vol. 1: Superflow and Vortex Lines (World Scientific, Singapore, 1989).
- [2] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **20**, 1064 (1950).
- [3] L. C. J. Bardeen and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [4] I. D. Lawrie, *Phys. Rev. B* **50**, 9456 (1994).
- [5] I. D. Lawrie, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 131 (1997).
- [6] D. R. N. E. Brézin and A. Thiaville, *Phys. Rev. B* **31**, 7124 (1985).
- [7] A. J. B. M. A. Moore, T.J. Newman and S. K. Chin, *Phys. Rev. B* **58**, 936 (1998).
- [8] L. Radzihovsky, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4722 (1995).
- [9] L. Radzihovsky, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4451 (1996).
- [10] I. F. Herbut and Z. Tesanovic, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4450 (1996).
- [11] A. P. C. M. C. de Calan and F. S. Nogueira, *Phys. Rev. B* **64**, 212502 (2001).
- [12] A. P. C. Malbouisson, *Phys. Rev. B* **66**, 092502 (2002).
- [13] F. S. Nogueira and H. Kleinert, *Field Theoretical Approaches to the Superconducting Phase Transition in Order, Disorder, and Criticality - Advanced Problems of Phase Transition Theory* (World Scientific, Singapore, 2004).

- [14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1995).
- [15] K. G. Wilson, J. B., and Kogut, Phys. Rep. **12C**, 75 (1974).
- [16] T. C. L. L. Halperin and S.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1974).
- [17] I. Herbut and Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. **76**, 4588 (1996).
- [18] S. Kolnberger and R. Folk, Phys. Rev. B **41**, 4083 (1992).
- [19] R. Folk and Y. Holovatch, J. Phys. A **29**, 3409 (1996).
- [20] L. N. Cooper, Phys. Rev. Lett. **6**, 689 (1961).
- [21] O. F. K. M. Strongin, R. S. Thompson and J. E. Crow, Phys. Rev. B **1**, 1078 (1970).
- [22] J. H. Quateman, Phys. Rev. B **34**, 1948 (1986).
- [23] J. Simonin, Phys. Rev. B **33**, 7830 (1986).
- [24] P. C. H. Raffy, R. B. Laibowitz and S. Maekawa, Phys. Rev. B **28**, 6607 (1983).
- [25] M. I. J. Kodama and H. Hirai, Appl. Phys. **54**, 4050 (1983).
- [26] J. M. Graybeal and M. R. Beasley, Phys. Rev. B **29**, 4167 (1984).
- [27] S. I. Park and T. H. Geballe, Physica **135B**, 108 (1985).
- [28] D. V. Shopova and T. P. Todorov, J. Phys.: Cond. Matt. **15**, 5783 (2003).
- [29] D. D. C. P. W. A. D. P. Young, M. Moldovan and J. Y. Chan, Phys. Rev. B **68**, 020501(R) (2003).
- [30] J. T. C. M. S. M. Minhaj, S. Meepagala and L. E. Wenger, Phys. Rev. B **49**, 15235 (1994).
- [31] J. E. J. X. X. X. S. Y. X. Q. L. A. V. Pogrebnyakov, J. M. Redwing and V. Vaithyanathan, Appl. Phys. Lett. **82**, 4319 (2003).

- [32] C. L. A. Bezryadin and M. Tinkham, *Nature* **404**, 971 (2000).
- [33] C. L. N. Markovic and M. Tinkham, *Physica C* **387**, 44 (2003).
- [34] D. C. R. J. von Delft, *Phys. Rep.* **345**, 61 (2001).
- [35] J. von Delft, *Ann. Phys. (Leipzig)* **10**, 219 (2001).
- [36] A. P. C. M. L. M. Abreu and I. Roditi, *Physica A* **331**, 99 (2004).
- [37] R. P.-B. S. Reich, G. Leitner and M. Schechter, *Phys. Rev. B* **91**, 147001 (2003).
- [38] E. R. A. Elizalde, *J. Math. Phys.* **30**, 1133 (1989).
- [39] A. Elizalde, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 931 (1989).
- [40] A. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [41] L. H. Ford and N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **51**, 6981 (1995).
- [42] J. M. C. M. A. P. C. Malbouisson and A. E. Santana, *Nucl. Phys.* **B631**, 83 (2002).
- [43] C. A. Lutken and F. Ravndal, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L793 (1988).
- [44] M. E. Fisher and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 1350 (1974).
- [45] J. M. K. D. R. Nelson and M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **33**, 813 (1974).
- [46] D. R. N. J. M. Kosterlitz and M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **13**, 412 (1976).
- [47] G. Grinstein and J. Toner, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2386 (1983).
- [48] B. S. S. Chandrasekharan, V. Chudnovsky and U.-J. Wiese, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **94**, 449 (2001).
- [49] K. C. E. P. R. B. T. Schneider, R. Khasanov and H. Keller, *J. Phys.-Condes. Matter* **16**, L437 (2004).

- [50] J. Ye and S. Sachdev, Phys. Rev. B **44**, 10173 (1991).
- [51] S. Sachdev, Phys. Rev. B **45**, 389 (1992).
- [52] N. Nagaosa and P. Lee, Phys. Rev. B **45**, 996 (1992).
- [53] M. Franz and Z. Tesanovic, Phys. Rev. B **63**, 064516 (2000).
- [54] A. P. C. M. J. M. C. M. A. E. S. L. M. Abreu, C. de Calan, J. Math. Phys. **46**, 012304 (2005).
- [55] L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, and I. Roditi, Eur. Phys. J. B **37**, 515 (2004).
- [56] L. M. Abreu, C. de Calan, and A. P. C. Malbouisson, Phys. Lett. A **333**, 316 (2004).
- [57] L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, Phys. Rev. B **67** (2003).
- [58] A. P. C. M. L. M. Abreu, C. de Calan, submetido ao Phys. Rev. B .
- [59] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, 1996).
- [60] M. L. Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford University Press, New York, 1991).
- [61] D. J. Amit, *Field Theory, The Renormalization Groups, And Critical Phenomena* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984).
- [62] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).
- [63] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1990).
- [64] C. G. C. Jr., Phys. Rev D **2**, 1541 (1970).
- [65] K. Symanzik, Commun. in Math. Phys. **18**, 227 (1970).

- [66] M. Gell-Mann and F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
- [67] K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **28**, 548 (1972).
- [68] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [69] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [70] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [71] J. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (University Press Cambridge, 1996).
- [72] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [73] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984).
- [74] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **32**, 1389 (1985).
- [75] P. M. Stevenson and I. Roditi, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1986).
- [76] I. Roditi, Phys. Lett. B **169**, 264 (1986).
- [77] A. Okopińska, Phys. Rev. D **35**, 1835 (1987).
- [78] I. Stancu and P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **42**, 2710 (1990).
- [79] I. S. Ibañez-Meier and P. M. Stevenson, Z. Phys. C **70**, 307 (1996).
- [80] R. P. M. Camarda, G. G. N. Angilella and F. Siringo, Eur. Phys. J. B **33**, 273 (2003).
- [81] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [82] P. W. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [83] D. V. S. F. Folk and D. I. Uzunov, Phys. Lett. A **281**, 197 (2001).
- [84] D. I. U. D. V. Shopova, T. P. Todorov, Mod. Phys. Lett. B **17**, 1 (2002).
- [85] D. V. Shopova and T. P. Todorov, e-print arXiv **cond-mat/0305586** (2003).

- [86] K.-S. Liu and M. E. Fisher, *J. Low Temp. Phys.* **10**, 655 (1972).
- [87] A. Aharony, e-print arXiv **cond-mat/0201576** (2002).
- [88] J.-C. Toledano and P. Toledano, *The Landau theory of phase transitions : application to structural, incommensurate, magnetic, and liquid crystal systems* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [89] F. Wegner, *Solid State Commun.* **12**, 785 (1973).
- [90] S.-C. Zang, *Science* **275**, 1089 (1997).
- [91] E. A. W. H. S.-C. Zang, J.-P. Hu and A. Auerbach, *Phys. Rev. B* **60**, 13070 (1999).
- [92] C. Burgess and C. Lütken, *Phys. Rev. B* **57**, 8642 (1998).
- [93] S. Murakami and N. Nagaosa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 2395 (2000).
- [94] J.-P. Hu and S.-C. Zhang, *Physica C* **341**, 93 (2000).
- [95] A. P. M. Hasenbusch and E. Vicari, e-print arXiv , cond.
- [96] A. P. P. Calabrese and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **67**, 054505 (2003).
- [97] J. L. G. E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B* **10**, 892 (1974).
- [98] I. D. Lawrie, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 979 (1997).
- [99] I. Herbut and Z. Tesanovic, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 980 (1997).
- [100] K. Kirsten, *J. Math. Phys.* **35**, 459 (1994).