

Tese de Mestrado

UMA ABORDAGEM FUNCIONAL
NO MODELO DE DICKE GENERALIZADO

André Luís Leite de Lemos

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 2007



Tese de Mestrado submetida ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas sob orientação do
Professor **Doutor Nami Fux Svaiter**
para a obtenção do título de
Mestre em Física por **André Luís Leite de Lemos**.

2007

Dedico esta tese aos meus pais Emir e Marlene.

Agradecimentos

- Ao meu irmão Emir Filho por ter me aturado nos momentos de pressão e dado apoio moral quando precisava.
- Ao meu amigo e colega de trabalho Martin Aparício, pelas discussões e grande ajuda neste trabalho.
- Aos meus amigos do CBPF, especialmente, Murilo Rangel, Nuno Peregrino, Mineiro, Felipe Poulis, Carlos Bonilla, Michael Neil, Aline Araújo, Carlos Ospina, Victor Vasquez, Alexis Hernandez, Rafael Peres, Rafael Aranha, Gabriel Menezes e Marcela Campista.
- Ao meu orientador Nami Fux Svaiter por ter me recebido em seu grupo de pesquisas e me motivado com este trabalho.
- Aos professores Helayel e Sebastião, pela amizade e por terem ministrados excelentes cursos.
- Ao CNPQ pelo apoio financeiro fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.
- À todos aqueles que contribuíram direta e indiretamente para este trabalho.

Resumo

Neste tese, primeiramente discutimos Hamiltonianas que descrevem campos bosônicos interagindo com sistemas de dois níveis. Nos concentraremos no modelo de Dicke, onde N átomos de dois níveis são acoplados com apenas um modo do campo bosônico. Para estudar o sistema reduzido, assumimos que os sistemas de dois níveis atuam como um reservatório térmico ($N \rightarrow \infty$). Usando métodos de integração funcional, definimos o modelo de Dicke fermiônico. É bem conhecido que o sistema exibe uma transição de fase de segunda ordem com a presença de um condensado. Sem assumir a "rotating-wave approximation", introduzindo constantes de acoplamento distintas entre o campo bosônico e o reservatório, g_1 e g_2 para os termos ressonantes e anti-ressonantes respectivamente, definimos o modelo de Dicke fermiônico generalizado. Essa abordagem nos permite identificar a contribuição de cada um dos processos físicos reais e virtuais na formação do condensado. Calculamos a temperatura crítica de transição e apresentamos o espectro das excitações coletivas bosônicas do modelo para o caso geral ($g_1 \neq 0$ e $g_2 \neq 0$). Mostraremos a existência de uma transição de fase quântica quando as constantes de acoplamento satisfazem $g_1 + g_2 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$ onde ω_0 é a frequência do modo do campo e Ω é o gap de energia entre os auto-estados de energia dos qubits. Nos restringimos a situação particular, apresentando o espectro das excitações coletivas bosônicas, para o caso $g_1 \neq 0$ e $g_2 = 0$, recuperando os resultados já conhecidos e também para $g_2 \neq 0$ e $g_1 = 0$. Neste último caso surge uma transição de fase superradiante. Esta situação mostra que é possível gerarmos um condensado com superradiância em um sistema de N qubits acoplados com um modo do campo bosônico onde apenas processos virtuais são introduzidos na Hamiltoniana de interação.

Abstract

First we study two-level system-Bose field Hamiltonians. Then, we consider the Dicke model, where N two-level systems are coupled with one mode of a Bose field. To study the reduced system, we assume that the two-level systems act as a thermal reservoir ($N \rightarrow \infty$). Using functional integral methods, we define the fermion Dicke model. It is well known that the system exhibits a phase transition with the presence of a condensate. Without adopt the rotating-wave approximation, introducing different Bose-field-bath coupling constants, g_1 and g_2 for rotating and counter-rotating wave terms respectively, we define the generalized fermion Dicke model. This approach allow us to identify the contribution of each of the processes, real ones and virtual ones in the formation of the condensate. We evaluate the critical transition temperature and present the spectrum of the collective Bose excitations for the general case ($g_1 \neq 0$ and $g_2 \neq 0$). There is quantum critical behavior when the coupling constants g_1 and g_2 satisfy $g_1 + g_2 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$, where ω_0 is the frequency of the field mode and Ω is the energy gap between energy eigenstates of the qubits. We present the spectrum of the collective Bose excitations, for the case $g_1 \neq 0$ and $g_2 = 0$, recovering the well known results and also $g_1 = 0$ and $g_2 \neq 0$. In the last case, it appears a quantum phase transition at the critical coupling $g_2 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$, and for larger then the critical coupling the system enter in a superradiant phase with a Goldstone mode. We conclude that it is possible to have condensate with superradiant phase in a system of N qubits coupled to a single mode bosonic field where only virtual processes contribute.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria quântica de campos a temperatura finita	11
2.1	Introdução	11
2.2	A função de partição para campos bosônicos e condensação de Bose-Einstein	12
2.3	A função de partição para campos fermiônicos	24
3	Método funcional em sistemas Hamiltonianos	31
3.1	Descrição Hamiltoniana: Sistema de 2 níveis interagindo com campo bosônico	31
3.2	O espaço de Hilbert para o modelo de Dicke fermiônico	38
3.3	Integração funcional para o modelo de Dicke fermiônico generalizado	43
4	Conclusões	57
5	Apêndice	60
5.1	Apêndice A	60
5.2	Apêndice B	63
	Bibliografia	66

Capítulo 1

Introdução

No tratamento quântico de sistemas arbitrários, a evolução temporal de sistemas fechados é descrita por um grupo de operadores unitários definidos por um parâmetro. Com isso, as equações de movimento desses sistemas são simétricas com relação a reversão temporal.

Para explicar a irreversibilidade que encontramos na maioria dos sistemas físicos, precisamos estudar a dinâmica quântica de um sistema que não pode ser representada em termos de uma evolução temporal unitária. Quando um sistema descrito por poucos graus de liberdade interage com o meio, a evolução temporal deste sistema não pode ser representada por uma dinâmica Hamiltoniana unitária. Esse sistema é chamado de sistema quântico aberto. Sistemas quânticos acoplados com um banho térmico são situações típicas que podemos encontrar em física. Em qualquer sistema onde a evolução temporal é irreversível, a influência do reservatório, no qual é caracterizado por um número infi-

nitamente grande de graus de liberdade é fundamental. Nós também encontramos este tipo de situação, por exemplo quando um sistema com poucos graus de liberdade interage com um campo eletromagnético. Uma situação especial que ilustra bem o caso acima é o caso de um sistema quântico de dois níveis fracamente acoplado a um campo bosônico quantizado. Para este modelo simples, se o acoplamento entre o sistema de dois níveis e o campo bosônico for fraco, a dinâmica reduzida do sistema aberto pode ser descrita pelas "Master Equations".

Este sistema de dois níveis é conhecido como qubit, o bloco elementar de construção do computador quântico. Embora eles sejam bastante promissores, uma vez que tiram vantagem da dimensionalidade do espaço de Hilbert dos estados quânticos, eles nunca foram construídos. Existem muitos problemas que precisamos resolver para construir um computador cujos processos computacionais funcionam em um nível quântico. O ruído produzido pelas interações com o meio é o maior problema.

Note que um sistema descrito pela coordenada generalizada \mathbf{q} em um poço duplo de potencial, com dois mínimos distintos, o estado excitado e o estado fundamental são efetivamente descritos por um espaço de Hilbert bidimensional. Embora exista uma probabilidade diferente de zero de tunelamento entre esses dois poços, em algum limite esta probabilidade é exponencialmente pequena e o tunelamento não mistura os estados, fundamental e excitado.

Estudaremos a dinâmica de um sistema isolado composto por um sub-sistema quântico

S acoplado a um reservatório **R**. O reservatório é caracterizado por um número infinitamente grande de graus de liberdade comparado ao sub-sistema **S** que possui poucos graus de liberdade. A interação entre o sistema **S** e o reservatório gera correlações entre eles, afetando com isso a evolução temporal do estado quântico do sub-sistema **S**. Sendo assim o sub-sistema **S** não pode ser representado por uma dinâmica Hamiltoniana unitária. Sendo mais preciso, a evolução irreversível de um sistema aberto é consequência da interação do sistema com o reservatório que contém um número infinito de graus de liberdade.

É importante mencionar que existe uma variedade de modelos teóricos de reservatório. A primeira situação é quando o sistema **S** é acoplado com um número infinito de osciladores harmônicos. Nesta situação, existem dois tipos de reservatório de interesse comum. O primeiro é o reservatório térmico onde assumimos que os osciladores harmônicos estão em equilíbrio térmico a uma temperatura β^{-1} . O segundo tipo é o reservatório "squeezed". O modelo específico de sistema-reservatório no qual é apropriado para estudar várias situações interessantes é quando o banho térmico de osciladores harmônicos é constituído por um campo bosônico livre e também na presença de estruturas macroscópicas.

Estamos, particularmente, interessados em considerar a situação de um sistema de átomos idênticos de dois níveis interagindo com um campo quantizado bosônico. A situação mais discutida na literatura é de um sistema de átomos interagindo com um reservatório que consiste de um campo eletromagnético confinado. É o caso do campo eletromagnético em cavidades descrito por um conjunto de frequências numeráveis [1]

[2]. Um exemplo particular é o modelo de Jaynes-Cummings [3] [4], no qual o campo eletromagnético é confinado em uma cavidade retendo apenas um modo do campo. Para realizarmos o modelo, consideramos apenas um sistema de dois níveis na presença de um campo bosônico quantizado na cavidade. Assumindo que a frequência ω_0 de um dos modos da cavidade é praticamente ressonante com a frequência Ω do sistema de dois níveis, este tipo de situação gera o seguinte modelo. O sistema de dois níveis efetivamente interage apenas com aquele modo, e todos os outros modos não acoplam com o sistema de dois níveis.

Seguiremos discutindo a interação entre um modo do campo bosônico com um reservatório de idênticos sistemas de dois níveis (qubits). Gostariamos de enfatizar que neste trabalho não fazemos nenhuma distinção entre unidade elementar de informação quântica, o qubit e o sistema de dois níveis. Existem dois caminhos para obter informação sobre a dinâmica de sistemas reduzidos. O primeiro consiste em eliminar os graus de liberdade do reservatório usando o método das "Master Equations", introduzindo o operador densidade reduzido [5] [6]. Gostariamos de enfatizar que muitas suposições devem ser assumidas para obter as "Master Equations". Primeiramente a "rotating-wave approximation" é assumida. Em segundo a interação entre o campo bosônico e os qubits é assumido ser fraca e finalmente o reservatório de qubits precisa ter um denso e amplo espectro de frequências distribuídas.

Outra maneira de obter informação sobre a dinâmica do sistema reduzido é usando

o método de integração funcional [7]. A integração sobre os graus de liberdade do reservatório pode ser feita exatamente devido a natureza do reservatório. O acoplamento entre os N qubits e o campo bosônico é linear, o que é verdade para um número interessante de casos. Gostaríamos de ressaltar que métodos funcionais foram aplicados não somente ao modelo de Dicke [8] mas também a outros modelos por muitos outros autores. Este método nos possibilita obter informação com relação ao sistema reduzido. O método de integração funcional é um meio alternativo e não-perturbativo de eliminação dos graus de liberdade do reservatório.

Ainda que métodos funcionais tenham sido usados em diferentes áreas da física, como é o exemplo da teoria quântica de campos e mecânica estatística, no passado esta técnica não tinha sido muito utilizado em ótica quântica. Uma exceção é o trabalho de Zardecki [9]. Outro trabalho que merece destaque é o de Hillary e Zubaire [10]. Neste trabalho o formalismo de integrais de trajetória em ótica quântica foi desenvolvido, onde sistemas com poucos graus de liberdades bosônicos foram estudados. Usando a representação de estados coerentes de Schrodinger-Glauber-Sudarshan [11] [12] [13] [14] [15] dos modos, esses autores estudaram o propagador de um sistema com um único modo e também o caso de N modos do campo bosônico. Desde que, no modelo de Dicke, o acoplamento entre os N qubits e um único modo do campo bosônico quantizado seja linear, para analisar o comportamento não-analítico de quantidades termodinâmicas, a integração sobre os graus de liberdade do reservatório pode ser feita exatamente.

Para aplicar o formalismo de integrais de trajetória com métodos funcionais como uma técnica para investigar a termodinâmica do modelo de Dicke, dois passos são necessários. Primeiro temos que substituir as matrizes de Pauli do modelo de Dicke por uma combinação linear de operadores fermiônicos para definirmos o modelo de Dicke fermiônico [16] [17]. Segundo, o limite $N \rightarrow \infty$, onde N é o número de qubits, deve ser tomado [18] [19]. Com isso, estudando o modelo de Dicke fermiônico sem assumir a "rotating-wave approximation" estamos interessados em calcular a temperatura crítica de transição do modelo e mostrar a contribuição de cada processo, reais e virtuais na formação do condensado.

Dois comentários devem ser feitos. Primeiramente em sistemas de ótica-quântica, os termos anti-ressonantes são geralmente ignorados. O segundo ponto que é importante comentar é como a nossa linha de pesquisa de estudar a contribuição dos processos reais e virtuais na transição de fase superradiante tem paralelo com as discussões da literatura onde tenta-se separar as contribuições das flutuações do vácuo e as auto-interações nos processos radiativos. Muitos autores [20] [21] [22] usaram o esquema de Heisenberg para identificar as flutuações do vácuo e as contribuições de auto-interação nos processos radiativos nos átomos. Embora foram feitas algumas tentativas de separar as contribuições das flutuações do vácuo e a reação radiativa no decaimento espontâneo [23] [24], Dalibard e outros autores [25] [26] discutiram como a magnitude desses efeitos separados podem depender do ordenamento particular escolhido para os operadores de criação e destruição

de quanta do campo.

Existem muitos artigos discutindo situações onde não podemos assumir a aproximação mencionada acima. Primeiramente discutindo a "rotating-wave approximation", Svaiter and Svaiter [27] [28] calcularam as taxas de transição de um sistema de dois níveis em diferentes situações cinemática assumindo um acoplamento fraco entre o qubit e o campo escalar real e sem massa. Esses autores estudaram o efeito Unruh-Davies [29] [30], onde um átomo de dois níveis acelerado mede um espectro térmico mesmo se o campo for preparado em um estado de vácuo. A origem deste efeito é a presença de um horizonte de eventos que faz com que os processos virtuais associados a observadores inerciais se transformem em processos reais quando medidos por observadores acelerados. Na referência [31], Ford e colaboradores assumiram a presença de duas placas perfeitamente refletoras nas quais modificam as flutuações do vácuo associado ao campo bosônico. O método da imagem e o formalismo de tempo imaginário [32] [33] [34], foram usados para estudar processos radiativos a temperatura finita. Nas referências [35] [36] também foram investigados processos radiativos associados ao detector de Unruh-Dewitt [30] [36] [37], na interação com o campo escalar sem massa.

Consideramos N qubits idênticos ($N \rightarrow \infty$), estudando a situação onde o sistema de qubits atua como um reservatório, enquanto apenas um modo do campo bosônico está presente. Isto define o modelo de Dicke no limite termodinâmico. Estamos interessados em estudar o regime crítico do modelo de Dicke fermiônico onde os termos anti-ressonantes

também estão presentes. Sem assumir a "rotating-wave approximation", introduzindo diferentes constantes de acoplamento, g_1 e g_2 para os termos ressonantes e anti-ressonantes respectivamente, estamos aptos a identificar a contribuição de cada processo, do tipo real e virtual na formação do condensado. Calculamos a temperatura crítica de transição e apresentamos o espectro bosônico de excitações coletivas, para o caso $g_1 \neq 0$ e $g_2 = 0$ e também $g_1 = 0$ e $g_2 \neq 0$. Em ambos os casos aparece um comportamento crítico com modos de Goldstone. Com isso, no modelo de Dicke fermiônico com os termos anti-ressonantes também é possível ter uma transição de fase quântica e uma fase superradiante. No modelo de Dicke uma transição para a fase superradiante ocorre quando o número de átomos no estado fundamental e no estado excitado são iguais e a dependência da intensidade da radiação com o número de átomos N se torna quadrática [38]. Note que na situação com N átomos irradiando independentemente, esperamos que o sistema emita espontaneamente com a intensidade proporcional a N .

Neste ponto gostaríamos de discutir brevemente resultados importantes relacionados a termodinâmica do modelo de Dicke. Resultados interessantes com o modelo foram obtidos por Hepp e Lieb [39]. Esses autores calcularam as propriedades termodinâmicas deste modelo. Eles apresentaram a energia livre do modelo no limite termodinâmico. Para um valor suficientemente grande para a constante de acoplamento entre os qubits e o modo do campo bosônico, o modelo apresenta uma transição de fase de segunda ordem da fase normal para a fase superradiante. Depois, usando representações de estados coerentes de

Schrodinger-Glauber-Sudarshan eles generalizaram alguns resultados para átomos de mais de dois níveis, e também investigaram a estabilidade do modelo com um número infinito de modos bosônicos [40]. O estudo da transição de fase no modelo de Dicke foi também apresentado por Wang e Hioe [41]. O caso onde os termos anti-ressonantes também são levados em conta foi investigado por também por Hioe [42] e Duncan [43]. Hioe estudou o modelo de Dicke generalizado com duas constantes de acoplamento diferentes usando os estados coerentes. Também um procedimento de bosonização foi empregado no estudo da transição de fase no modelo de Dicke generalizado. Empregando o mapeamento de Holstein-Primakoff [44] [45] [46], que expressa o momento angular em termos de um único modo bosônico, Emary e Brandes [47] [48] também puderam expressar o modelo de Dicke generalizado em termos de dois modos do campo bosônico. Esses autores discutiram a relação entre a transição de fase quântica e o comportamento caótico que aparece no modelo para um número N finito, onde aparece uma transição da estatística de Poisson para a estatística de Wingner-Dyson. O comportamento caótico foi discutido também por Graham e Hoherbach [49] [50] e Lewenkopf e colaboradores. [51] no modelo de Jaynes-Cummings, onde os termos anti-ressonantes estão presentes na Hamiltoniana de interação [52] [53], desde o importante artigo de Milonni e colaboradores. [54].

Uma questão que vale a pena ressaltar é se podemos realizar no laboratório o modelo de Dicke generalizado. Como foi enfatizado por Dimer e colaboradores [55] ainda permanece como um desafio apresentar um sistema físico no qual os termos anti-ressonantes são

dominantes. Esses autores propuseram que na cavidade com N qubits, apenas um modo do campo quantizado e campos clássicos (lasers), é possível obter um sistema físico que corresponde ao modelo de Dicke generalizado.

Recapitulando, nesta tese iremos abordar a interação entre um modo do campo bosônico interagindo com um reservatório de N qubits. A temperatura crítica para o modelo de Dicke fermiônico é obtida no limite ($N \rightarrow \infty$). Realizaremos o cálculo sem considerar a "rotating-wave approximation" e compararemos com o resultado já conhecido na literatura onde fora usada a "rotating-wave approximation". No primeiro capítulo faremos uma rápida revisão da teoria quântica de campos a temperatura finita onde, definiremos as funções de partição para os campos bosônicos e fermiônicos lineares e em interação. No capítulo dois discutiremos a construção da Hamiltoniana de interação do problema em questão e toda a construção do espaço de Hilbert para o modelo de Dicke fermiônico. Logo em seguida o método de integração funcional é aplicado ao modelo de Dicke fermiônico obtendo-se assim o comportamento assintótico para a função de partição do sistema para $T > T_c$. Além do cálculo da temperatura crítica do sistema, obteremos também os modos coletivos de excitação do sistema para $T > T_c$ com e sem a "rotating-wave approximation". Finalmente no terceiro e último capítulo teceremos algumas conclusões sobre os resultados obtidos. No apêndice detalharemos o cálculo usado para obter a função de partição para $T > T_c$ e a estimativa do erro da função partição usando o método de fase estacionária.

Capítulo 2

Teoria quântica de campos a temperatura finita

2.1 Introdução

A abordagem usual que é dada a teoria não relativística de muitos corpos é utilizando o método de segunda quantização [56]. Existe uma abordagem alternativa, o método de integração funcional, que mostraremos logo em seguida. É evidente, que os dois formalismos são equivalentes. Entretanto, o método funcional é preferido pela maioria dos físicos teóricos pois com este formalismo temos mais facilidade em abordar questões não perturbativas como tunelamento, instantons, teoria de gauge na rede, etc. Para as teorias de gauge esse formalismo é praticamente indispensável. Neste capítulo, derivaremos a representação via integração funcional da função de partição para teorias relativísticas interagentes. Iremos reobter alguns resultados já bem conhecidos da literatura para gases ideais relativísticos de bósons e férmions. Estas seções seguem a apresentação que se

encontra no livro do Kapusta [57].

2.2 A função de partição para campos bosônicos e condensação de Bose-Einstein

Primeiramente vamos obter a amplitude de transição para o campo bosônico para em seguida derivar a expressão para a função de partição do campo bosônico.

Seja $\hat{\phi}(\mathbf{x}, 0)$ o operador de campo na representação de Schrodinger definido em $t = 0$ e seja $\hat{\pi}(\mathbf{x}, 0)$ seu momento conjugado. Os auto-estados dos operadores de campo representados por $|\phi\rangle$ satisfazem a equação:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) |\phi\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi\rangle, \quad (2.1)$$

onde $\phi(\mathbf{x})$ é o autovalor do operador de campo, atualmente uma função de \mathbf{x} . Temos as relações de completeza [Eq.(2.2)] e ortogonalidade [Eq.(2.3)] que devem ser satisfeitas:

$$\int d\phi(\mathbf{x}) |\phi\rangle\langle\phi| = 1 \quad (2.2)$$

e

$$\langle\phi_a|\phi_b\rangle = \delta[\phi_a(\mathbf{x}) - \phi_b(\mathbf{x})]. \quad (2.3)$$

Analogamente, os auto-estados do operador de campo momento conjugado são representados por $|\pi\rangle$ e satisfazem a equação:

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, 0) |\pi\rangle = \pi(\mathbf{x}) |\pi\rangle. \quad (2.4)$$

Satisfazendo as condições de completudeza [Eq.(2.5)] e ortogonalidade [Eq.(2.6)]:

$$\int d\pi(\mathbf{x}) |\pi\rangle\langle\pi| = 1 \quad (2.5)$$

e

$$\langle\pi_a|\pi_b\rangle = \delta[\pi_a(\mathbf{x}) - \pi_b(\mathbf{x})]. \quad (2.6)$$

Assim como na mecânica quântica podíamos trabalhar tanto no espaço de configurações como no espaço dos momenta, em teoria quântica de campos podemos trabalhar tanto no espaço dos operadores de campo como no espaço dos operadores de momenta associados aos campos. Em mecânica quântica a relação entre os auto-estados dos operadores de posição e os auto-estados dos operadores de momenta é dada por:

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx}. \quad (2.7)$$

Em teoria de campos, temos a relação:

$$\langle\phi|\pi\rangle = \exp\left(i\int d^3x \pi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\right). \quad (2.8)$$

Essa é a generalização natural partindo de um número finito de graus de liberdade (N) em mecânica quântica para um número infinito de graus de liberdade em teoria quântica de campos, ou seja, $\sum_{i=1}^N p_i x_i \rightarrow \int d^3x \pi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})$. Um requerimento é que a Hamiltoniana possa ser expressa como um funcional do campo e seu momento conjugado:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}). \quad (2.9)$$

Agora vamos supor que um sistema se encontra no estado $|\phi_a\rangle$ no instante de tempo $t = 0$. Após um instante de tempo t_f terá evoluído para $e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle$. A amplitude de

transição de ir de um estado $|\phi_a\rangle$ para um outro estado $|\phi_b\rangle$ após um instante de tempo t_f é dada por $\langle\phi_b|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle$.

Em mecânica estatística estaremos interessados no caso onde o sistema retorna para seu estado original após um intervalo de tempo t_f . Com o objetivo de obter um meio prático de calcular esta amplitude, dividimos o intervalo $(0, t_f)$ em N sub-intervalos de duração $\Delta t = t_f/N$. Depois, para cada intervalo de tempo inserimos um conjunto completo de auto-estados usando as condições dadas pelas equações (2.2) e (2.5) como mostraremos a seguir:

$$\begin{aligned} \langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N\rightarrow\infty} \int \left(\prod_{i=1}^N d\pi_i d\phi_i \right) & (2.10) \\ &\times \langle\phi_a|\pi_N\rangle \langle\pi_N|e^{-iH\Delta t}|\phi_N\rangle \langle\phi_N|\pi_{N-1}\rangle \\ &\times \langle\pi_{N-1}|e^{-iH\Delta t}|\pi_{N-1}\rangle \times \dots \\ &\times \langle\phi_2|\pi_1\rangle \langle\pi_1|e^{-iH\Delta t}|\phi_1\rangle \langle\phi_1|\pi_a\rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\langle\phi_1|\phi_a\rangle = \delta(\phi_1 - \phi_a) \quad (2.11)$$

e que

$$\langle\phi_{i+1}|\pi_i\rangle = \exp\left(i \int d^3x \phi_i(\mathbf{x}) \phi_{i+1}(\mathbf{x})\right). \quad (2.12)$$

Como $\Delta t \rightarrow \infty$, então podemos expandir $\langle\phi_i|e^{-iH\Delta t}|\phi_i\rangle$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle\phi_i|e^{-iH\Delta t}|\phi_i\rangle &\simeq \langle\pi_i|(1 - iH\Delta t)|\phi_i\rangle & (2.13) \\ &= \langle\pi_i|\phi_i\rangle(1 - iH\Delta t) \end{aligned}$$

$$= (1 - i H_i \Delta t) \exp \left(-i \int d^3 x \pi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right),$$

onde H_i é dado por:

$$H_i = \int d^3 x \mathcal{H}(\pi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x})). \quad (2.14)$$

Utilizando as equações (2.11), (2.12) e (2.13), podemos reescrever a equação (2.10) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-i H t_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^N d\pi_i d\phi_i \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\times \exp \left(-i \Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3 x \left(\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) - \pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j) / \Delta t \right) \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$. Tomando o limite para o contínuo na Eq.(2.15), nós finalmente chegamos no importante resultado:

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-i H t_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\mathbf{x},0)=\phi_a(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},t_f)=\phi_a(\mathbf{x})} [d\phi] \\ &\times \exp \left(i \int_0^{t_f} dt \int d^3 x \left(\pi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t)) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Estamos aptos agora a reescrever a função de partição, associada a um campo bosônico, como uma integração funcional. Lembremos que:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} | \phi_a \rangle, \quad (2.17)$$

onde a soma é definida sobre todos os estados. Esta expressão da Eq.(2.17) tem uma aparência muito similar a amplitude de probabilidade obtida anteriormente. De fato, podemos expressar Z como uma integral sobre os campos e seus momenta conjugados fazendo uso da Eq.(2.15). Primeiramente fazemos a troca de variável definindo um tempo

imaginário $\tau = it$. Os limites de integração em τ vão de 0 à β . O traço na Eq.(2.17) assim como na Eq.(2.15) significa que devemos integrar sobre todos os campos ϕ_a . Finalmente, se o sistema admite alguma carga conservada, então devemos fazer a seguinte substituição:

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \phi) = \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi), \quad (2.18)$$

onde $\mathcal{N}(\pi, \phi)$ é a densidade de carga conservada. Com isso, chegamos à fórmula fundamental:

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periodico}} [d\phi] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \right) \right) \quad (2.19)$$

O termo periódico significa que a integração sobre os campos possui um vínculo, devendo atender a condição que $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$. Isto é consequência da operação de traço, $\phi_a(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$. Não existe restrição quanto a integração sobre π . A generalização da Eq.(2.19) para um número arbitrário de campos e cargas conservadas não oferece nenhuma dificuldade.

Consideremos então como caso ilustrativo um sistema composto por um campo escalar carregado Φ . O campo Φ é um campo complexo que descreve bosons com cargas positivas e negativas. A densidade Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda(\Phi^* \Phi)^2. \quad (2.20)$$

Esta teoria exibe uma simetria do grupo U(1),

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{-i\alpha}, \quad (2.21)$$

onde α é uma constante real. Esta é uma simetria global desde que o campo $\Phi(x)$ seja multiplicado por um fator de fase igual para todos os pontos do espaço-tempo.

Foi mostrado por Noether que para cada simetria continua do Lagrangeano existe a ela associado uma corrente conservada. Neste caso, a corrente pode ser encontrada fazendo α dependente de x e considerá-lo como um "campo" independente. Utilizando a transformação dada pela Eq.(2.21), temos que:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \partial_\mu \left(\Phi^* e^{i\alpha(x)} \right) \partial^\mu \left(\Phi e^{-i\alpha(x)} \right) - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2. \quad (2.22)$$

A equação de movimento para o "campo" $\alpha(x)$ é obtida via princípio variacional, dada portanto por:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} \quad (2.23)$$

Se $\partial \mathcal{L}' / \partial \alpha = 0$, conseqüentemente temos que

$$\partial \mathcal{L}' / \partial (\partial^\mu) = \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha - i \Phi \partial_\mu \Phi^* + i \Phi^* \partial_\mu \Phi \quad (2.24)$$

é uma corrente conservada. Podemos retornar a nossa teoria original sem o "campo" $\alpha(x)$ simplesmente considerando $\alpha = cte$. Com isso obtemos a densidade de corrente conservada

$$j_\mu = i (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*), \quad (2.25)$$

que satisfaz a equação de continuidade:

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (2.26)$$

É conveniente decompor Φ em uma parte real e outra imaginária.

$$\Phi = \frac{(\Phi_1 + i\Phi_2)}{\sqrt{2}}. \quad (2.27)$$

Os momenta conjugados são dados por:

$$\pi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad e \quad \pi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (2.28)$$

A densidade Hamiltoniana é então dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 + m^2 \phi_1^2 + m^2 \phi_2^2 \right) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (2.29)$$

e a carga conservada por:

$$Q = \int d^3x j_0 = \int d^3x (\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2). \quad (2.30)$$

Com isso, podemos agora escrever a função de partição do sistema. A função de partição bosônica é obtida via integração funcional por:

$$Z = \int [d\pi_1] [d\pi_2] \int_{\text{periodico}} [d\phi_1] [d\phi_2] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \right. \right. \quad (2.31) \\ \left. \left. + i\pi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2) + \mu(\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) \right) \right),$$

onde inserimos um potencial químico μ associado a carga conservada Q . A integração sobre os momenta conjugados dos campos pode ser realizada exatamente. Pode-se mostrar que após a integração sobre os momenta conjugados, a função de partição toma a forma:

$$Z = (N')^2 \int_{\text{periodico}} [d\phi_1] [d\phi_2] \exp \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} - i\mu \phi_2 \right)^2 + \right. \quad (2.32) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} + i\mu \phi_1 \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 + \\ \left. -\frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \right),$$

onde N' é um fator de normalização.

Essa expressão (2.32) não pode ser calculada de forma fechada a menos que $\lambda = 0$.

Neste caso, $\lambda = 0$, a integral passa a ser Gaussiana, portanto exatamente integrável. As componentes do campo Φ podem ser expandidas em séries de Fourier,

$$\phi_1 = 2^{\frac{1}{2}} \xi \cos \theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)) \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \quad (2.33)$$

e

$$\phi_2 = 2^{\frac{1}{2}} \xi \sin \theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)) \phi_{2;n}(\mathbf{p}). \quad (2.34)$$

Nas equações (2.33) e (2.34), ξ e θ são independentes de (\mathbf{x}, τ) e carregam consigo todo o caráter infravermelho do campo, ou seja, $\phi_{1;0}(\mathbf{p}=\mathbf{0}) = \phi_{2;0}(\mathbf{p}=\mathbf{0}) = 0$. Isso nos possibilita ter um condensado de bósons no estado de momento zero. A condensação significa que no limite do volume infinito uma fração finita de partículas reside no estado $n = 0, \mathbf{p}=\mathbf{0}$.

A ação livre do sistema é dada por:

$$S = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi. \quad (2.35)$$

Substituindo as expansões (2.33) e (2.34) na Eq.(2.35) e posteriormente fazendo uma integração por partes obtemos que a função de partição fica na forma:

$$Z = (N')^2 \left(\prod_n \prod_{\mathbf{p}} \int d\phi_{1;n}(\mathbf{p}) d\phi_{2;n}(\mathbf{p}) \right) e^S, \quad (2.36)$$

onde S é a ação expressa agora em termo dos momenta da forma:

$$S = \beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \tilde{\zeta}_{-n}(-\mathbf{p}) D \zeta_n(\mathbf{p}) \quad (2.37)$$

onde $\zeta_n(\mathbf{p})$ e $\tilde{\zeta}_{-n}(-\mathbf{p})$ são vetores dados por:

$$\zeta_n(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \\ \phi_{2;n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\tilde{\zeta}_{-n}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_{1;-n}(-\mathbf{p}) & \phi_{2;-n}(-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

e a matriz D dada por:

$$D = \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

A integral da equação (2.36) é quadrática nos campos, podendo portanto ser resolvida exatamente. Após realizarmos a integração sobre as componentes dos campos na equação (2.36) e tomarmos $\ln Z$ temos:

$$\ln Z = \beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 + \ln (\det D)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.41)$$

O segundo termo da equação (2.41) pode ser escrito como:

$$-\frac{1}{2} \ln \det D = -\frac{1}{2} \ln \left(\prod_n \prod_{\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2) \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\prod_n \prod_{\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2) \right). \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.42) na equação (2.41) obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z = \beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left(\beta^2 (\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2) \right) \\ - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left(\beta^2 (\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2) \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

podemos reescrever a equação (2.43) usando os seguintes resultados:

$$\ln \left((2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2 \right) = \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \ln \left(1 + (2\pi n)^2 \right). \quad (2.44)$$

O último termo da equação (2.44) é independente de β portanto pode ser ignorado.

Contudo sabemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\theta/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \quad (2.45)$$

Com isso temos que

$$\ln Z = - \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{\beta\omega} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right). \quad (2.46)$$

Realizando a integração sobre θ e desprezando a parte independente de β encontramos

que:

$$\ln Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{2} \beta \omega - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right). \quad (2.47)$$

De posse deste resultado, podemos reescrever a equação (2.43).

$$\ln Z = \beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 - V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\beta \omega + \ln(1 - e^{-\beta(\omega - \mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\omega + \mu)}) \right). \quad (2.48)$$

Existem algumas considerações a serem feitas com relação a equação (2.48). Primeiramente a integral sobre os momenta é convergente somente se $|\mu| \leq m$. O parâmetro

ξ aparece na expressão porém θ não, como esperaríamos da simetria do grupo $U(1)$ do Lagrangeano. Neste contexto, como o parâmetro ξ não é determinado a priori, este pode ser tratado como um parâmetro variacional relacionado a carga carregada pelas partículas do condensado. Fixando β e μ , $\ln Z$ possui um extremo com relação ao parâmetro livre ξ .

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \xi} = 2\beta V(\mu^2 - m^2)\xi = 0, \quad (2.49)$$

o que implica que $\xi = 0$, a menos que $|\mu| = m$ no caso em que ξ não seja determinado pela condição variacional dada pela equação (2.49).

Para determinar ξ no caso $|\mu| = m$, notamos que a densidade de cargas ρ é dada por:

$$\rho = \frac{T}{V} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \right)_{\mu=m} = 2m\xi^2 + \rho^*(\beta, \mu = m), \quad (2.50)$$

onde ρ^* é dado pela seguinte equação:

$$\rho^* = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1} \right). \quad (2.51)$$

O caso $|\mu| = -m$ pode ser feito analogamente. Aqui, as contribuições do condensado (modo de momento zero) e as excitações térmicas das partículas (modos de momento finito) estão separadas. Se a densidade ρ é fixada e baixamos a temperatura, μ irá aumentar até o ponto onde $\mu = m$ for alcançado. Se diminuirmos ainda mais a temperatura, então $\rho^*(\beta, \mu = m)$ será menor que ρ . Então ξ é dado por

$$\xi^2 = \frac{\rho - \rho^*(\beta, \mu = m)}{2m} \quad (2.52)$$

quando $\mu = m$ e $T < T_c$. A temperatura crítica T_c é determinada implicitamente pela equação

$$\rho = \rho^*(\beta_c, \mu = m). \quad (2.53)$$

No limite não-relativístico, obtemos o conhecido resultado

$$T_c = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{\rho}{\xi(\frac{3}{2})} \right)^{\frac{2}{3}}, \rho \ll m^3. \quad (2.54)$$

No limite ultra-relativístico temos que

$$T_c = \left(\frac{3\rho}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \rho \gg m^3. \quad (2.55)$$

No limite que $m \rightarrow 0$, também com $|\mu| \rightarrow 0$ e $T_c \rightarrow \infty$. Quando $m = 0$ então todas as cargas residem no condensado, para qualquer temperatura, e nenhuma é carregada pelas excitações térmicas.

Existe uma transição de fase de segunda ordem em T_c . Isso pode ser mostrado rigorosamente analisando cuidadosamente o comportamento do potencial químico $\mu(\rho, T)$ como função de T próximo de T_c com ρ fixo. Uma maneira mais intuitiva de ver esta transição de fase envolve a teoria geral de transições de fase de Landau [58]. O parâmetro de ordem vai a zero continuamente quando T se aproxima de T_c para $T < T_c$ e se mantém zero para $T > T_c$. Fisicamente a razão para a transição de fase é a seguinte. Em $T = 0$, todas as cargas conservadas residem no modo de momento zero de acordo com o caráter das partículas bosônicas (isto é impossível para o caso de férmions). Assim que a temperatura é elevada, algumas das cargas são excitadas para fora do condensado.

Então a temperatura se torna grande o suficiente para dissolver o condensado.

2.3 A função de partição para campos fermiônicos

Nós agora voltaremos a nossa atenção para os campos fermiônicos. Em mecânica quântica relativística temos que elétrons ou múons são descritos por espinores de 4 componentes ψ . As componentes são representadas por ψ_α onde $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Podemos representar o campo fermiônico livre pela função de onda

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \right) \sum_{\mathbf{p}} \sum_s \left(\frac{m}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(b(p, s) u(p, s) e^{-ip \cdot x} + d^*(p, s) v(p, s) e^{ip \cdot x} \right). \quad (2.56)$$

Onde $u(p, s)$ e $v(p, s)$ na equação (2.56) são espinores de ondas planas de energias positiva e negativa reespectivamente. A soma sobre \mathbf{s} refere-se a duas possíveis orientações de spin para campo fermiônico de spin $\frac{1}{2}$. Os coeficientes da expansão $b(p, s)$ e $d^*(p, s)$ são funções complexas na mecânica quântica relativística porém operadores em teoria de campos. De maneira usual, $p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. A função de onda [Eq.(2.56)] é normalizada de acordo com:

$$\int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_s \left(|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2 \right) = 1. \quad (2.57)$$

Na ausência de interações a densidade Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (2.58)$$

As matrizes de Dirac, γ^μ , que satisfazem a álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu,\nu}$, são dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Essas matrizes são todas matrizes 4x4. A equação (2.58) pode ser reescrita explicitamente na forma:

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \gamma^0 \left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi. \quad (2.61)$$

O Lagrangeano possui uma simetria global U(1) onde

$$\psi \rightarrow \psi e^{-i\alpha} \quad (2.62)$$

e

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\alpha}. \quad (2.63)$$

De acordo com o teorema de Noether existe associada a esta simetria uma corrente conservada. Para encontrar esta corrente conservada procederemos analogamente ao que fizemos

para o caso bosônico. Façamos α depender de x tratando-o como um campo independente $\alpha(x)$. Sob as transformações [Eq.(2.62)] e [Eq.(2.63)] temos que

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \alpha(x) \right) \psi. \quad (2.64)$$

Usando as equações de movimento para $\alpha(x)$, através das equações de Euler-Lagrange, encontramos a lei de conservação

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.65)$$

onde a corrente j^μ é dada por

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.66)$$

Agora fazendo α novamente constante voltamos a nossa teoria original. A carga total conservada é

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^\dagger \psi. \quad (2.67)$$

Para mecânica quântica relativística na ausência de interações, este é um resultado trivial devido a equação (2.57).

Para teoria de campos tratamos ψ como um campo fundamental. O momento conjugado a este campo é

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} = i \psi^\dagger \quad (2.68)$$

Onde ψ e ψ^\dagger devem ser tratados como entidades independentes na formulação Hamiltoniana. A densidade Hamiltoniana tem a forma

$$\mathcal{H} = \Pi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L} = \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi - \mathcal{L} = \bar{\psi} \left(-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \right) \psi. \quad (2.69)$$

Podemos agora partir para o cálculo da função de partição para o campo fermiônico livre de interações.

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu \hat{Q})}. \quad (2.70)$$

Podemos seguir os mesmos passos que fizemos para o campo bosônico e construir a função de partição para o campo fermiônico, não interagente, via integração funcional da forma

$$Z = \int [i d\psi^\dagger][d\psi] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} \left(-\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m + \mu \gamma^0 \right) \psi \right). \quad (2.71)$$

Enfatizamos, novamente, que os campos ψ^\dagger e ψ são campos independentes nos quais precisam ser integrados independentemente. Em contraste com os campos bosônicos, não existe nenhuma vantagem em integrar o momento conjugado separadamente do campo. Outra particularidade é com relação a periodicidade do campo no tempo imaginário τ e a natureza dos campos "clássicos" $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ e $\psi^\dagger(\mathbf{x}, \tau)$ sobre os quais iremos supostamente integrar.

As relações canônicas de comutação para os férmions são

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \hbar \delta_{\alpha, \beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.72)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (2.73)$$

No limite $\hbar \rightarrow 0$, os operadores de campo são substituídos por seus auto-valores. Para o caso de bósons, esses auto-valores são funções de "c-numbers" ou campos clássicos. No caso fermiônico, no limite $\hbar \rightarrow 0$ é particularmente peculiar pois os autovalores que substituem os operadores de campo anticomutam uns com os outros. Isto está diretamente

ligado com o princípio de exclusão de Pauli e com o teorema spin-estatística. Note que a equação (2.71) sugere-nos que integremos sobre esses campos "clássicos" porém anticomutantes.

A matemática necessária para dar conta desta situação foi estudada por Grassmann. Definindo os campos como elementos da álgebra de Grassmann, a integral sobre essas variáveis que será importante para nós é

$$\int d\eta_1^\dagger d\eta_1 \dots d\eta_N^\dagger d\eta_N e^{\eta^\dagger D \eta} = \det D. \quad (2.74)$$

onde D é uma matriz $N \times N$.

Assim como no caso bosônico, é conveniente trabalharmos no espaço dos momenta.

No tempo imaginário escrevemos

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{1}{V^{1/2}} \right) \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \exp\left(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_n \tau)\right) \tilde{\psi}_{\alpha;n}(\mathbf{p}) \quad (2.75)$$

onde tanto n como \mathbf{p} podem assumir valores positivos e negativos. Uma propriedade do traço é que as funções de Green térmicas para os campos fermiônicos são anti-periódicas na temperatura.

$$G_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau, 0) = -G_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau, \beta) \quad (2.76)$$

o que quer dizer que

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = -\psi(\mathbf{x}, \beta) \quad (2.77)$$

desde que

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T. \quad (2.78)$$

A anti-periodicidade requerida para os campos fermiônicos não é de nenhuma forma inconsistente com a operação de traço da função de partição. O traço apenas significa que o sistema retorna para seu estado original depois de um "tempo" β . Como o sinal de ψ não é um observável, o lado direito da equação (2.77) descreve o mesmo estado do lado esquerdo da mesma equação. Uma analogia relevante seria o fato de que funções de onda fermiônicas mudam de sinal se uma rotação de 2π é feita em torno de algum eixo. Tanto o ângulo θ como o tempo τ são definidos em intervalos compactos.

Estamos preparados para escrever a função de partição fermiônica.

$$Z = \left(\prod_n \prod_{\mathbf{p}} \prod_{\alpha} \int i d\tilde{\psi}_{\alpha;n}^{\dagger}(\mathbf{p}) d\tilde{\psi}(\mathbf{p}) \right) e^S \quad (2.79)$$

onde a ação S é dada por

$$S = \sum_n \sum_{\mathbf{p}} i \tilde{\psi}_{\alpha;n}^{\dagger}(\mathbf{p}) D_{\alpha,\rho} \tilde{\psi}_{\alpha;n}(\mathbf{p}) \quad (2.80)$$

onde D é uma matriz da forma

$$D = -i\beta \left((-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m\gamma^0 \right). \quad (2.81)$$

Sendo assim utilizando a propriedade da álgebra de Grassmann dada pela equação (2.74)

a função de partição [Eq.(2.79)] fica na forma

$$Z = \det D \quad (2.82)$$

Na equação (2.82) a operação de determinante é para ser realizada tanto considerando os índices de Dirac como os de momenta. Usando a identidade:

$$\ln \det D = \text{Tr} \ln D \quad (2.83)$$

temos que

$$\ln Z = 2 \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left(\beta^2 \left((\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right) \right). \quad (2.84)$$

Desde que somemos sobre as frequências positivas e negativas, podemos reescrever a equação (2.84) como sendo

$$\ln Z = \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \left(\ln \left[\beta^2 \left(\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right) \right] + \ln \left[\beta^2 \left(\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right) \right] \right) \quad (2.85)$$

Usando então os mesmos passos empregados para o caso bosônico pode-se mostrar que $\ln Z$ pode ser escrito como:

$$\ln Z = 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta\omega + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)} \right) \right). \quad (2.86)$$

De imediato notamos que aparece um fator 2 multiplicativo correspondente a natureza de spin $\frac{1}{2}$ dos férmions. Um segundo ponto é que as contribuições para partículas (μ) e antipartículas ($-\mu$) aparecem separadamente. Finalmente o ponto zero de energia do vácuo também aparece nesta expressão [Eq.(2.86)].

Apenas para concluir esta seção vamos recapitular as diferenças entre bósons e férmions na formulação funcional da função de partição. Primeiramente, para férmions nós devemos integrar sobre variáveis de Grassmann ao invés de variáveis c-numbers. Com isso temos um contraste entre resultados com $Z = \det D$ para férmions e $Z = (\det D)^{-\frac{1}{2}}$ para bósons.

Capítulo 3

Método funcional em sistemas Hamiltonianos

3.1 Descrição Hamiltoniana: Sistema de 2 níveis interagindo com campo bosônico

O objetivo principal desta seção é discutir a construção de Hamiltonianas que descrevam a interação entre campos bosônicos e sistemas de dois níveis.

Consideremos então um sistema quântico bosônico \mathbf{S} , com espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{(S)}$, acoplado com um reservatório de qubits \mathbf{R} , com espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{(R)}$. Vamos assumir que o reservatório está em equilíbrio térmico a temperatura β^{-1} . O sistema quântico bosônico é um sub-sistema do sistema total definido em um espaço de Hilbert dado pelo produto tensorial $\mathcal{H}^{(S)} \otimes \mathcal{H}^{(R)}$.

Denotemos por H_S a Hamiltoniana do sistema bosônico quantizado, por H_R a Hamiltoniana livre dos N qubits e H_I a Hamiltoniana que descreve a interação entre o campo

bosônico quantizado e o reservatório de qubits. A Hamiltoniana para o sistema total pode ser escrita como sendo

$$H = H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + H_I, \quad (3.1)$$

onde I_S e I_R denotam as identidades nos espaços de Hilbert do sistema e reservatório respectivamente.

Vamos introduzir os operadores de Dicke que descrevem cada qubit. A Hamiltoniana livre do j -ésimo qubit será denotada por $H_D^{(j)}$, uma vez que estamos usando a representação de Dicke. Então temos que

$$H_D^{(j)} |i\rangle_j = \omega_i^{(j)} |i\rangle_j, \quad (3.2)$$

onde $|i\rangle_j$ são auto-estados ortogonais de energia acessíveis ao j -ésimo qubit e $\omega_i^{(j)}$ as respectivas autofrequências. Usando Eq.(3.2) e a ortonormalidade dos auto-estados de energia, podemos escrever a Hamiltoniana do j -ésimo qubit $H_D^{(j)}$ como sendo

$$H_D^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \omega_i^{(j)} (|i\rangle \langle i|)_j. \quad (3.3)$$

Vamos definir os operadores de Dicke para cada qubit por $\sigma_{(j)}^z$, $\sigma_{(j)}^+$ and $\sigma_{(j)}^-$, onde cada um desses operadores são dados respectivamente por

$$\sigma_{(j)}^z = (|2\rangle \langle 2| - |1\rangle \langle 1|)_j, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{(j)}^+ = (|2\rangle \langle 1|)_j \quad (3.5)$$

e finalmente

$$\sigma_{(j)}^- = (|1\rangle \langle 2|)_j. \quad (3.6)$$

A representação de Dicke é a segunda quantização dos qubits. Combinando Eq.(3.3) e Eq.(3.4), a Hamiltoniana do j-ésimo qubit pode ser escrita como sendo

$$H_D^{(j)} = \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \frac{1}{2} (\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)}), \quad (3.7)$$

onde o gap de energia entre os auto-estados de energia do j-ésimo qubit é dado por

$$\Omega^{(j)} = \omega_2^{(j)} - \omega_1^{(j)}. \quad (3.8)$$

Deslocando o zero de energia de $\frac{1}{2}(\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)})$ para cada qubit, a Hamiltoniana do j-ésimo qubit dada pela Eq.(3.7) pode ser reescrita como sendo

$$H_D^{(j)} = \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z. \quad (3.9)$$

Note que os operadores $\sigma_{(j)}^+$, $\sigma_{(j)}^-$ e $\sigma_{(j)}^z$ satisfazem as relações de comutação de momento angular correspondentes a operadores de spin $\frac{1}{2}$, isto é,

$$\left[\sigma_{(j)}^+, \sigma_{(j)}^- \right] = \sigma_{(j)}^z, \quad (3.10)$$

$$\left[\sigma_{(j)}^z, \sigma_{(j)}^+ \right] = 2 \sigma_{(j)}^+, \quad (3.11)$$

e finalmente

$$\left[\sigma_{(j)}^z, \sigma_{(j)}^- \right] = -2 \sigma_{(j)}^-. \quad (3.12)$$

Para introduzir o acoplamento entre o campo bosônico e os qubits, vamos assumir apenas um modo do campo bosônico e um acoplamento linear com os qubits.

Com isso, a Hamiltoniana total do j -ésimo qubit é dada por

$$\begin{aligned} I_S \otimes H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + H_I^{(j)} = \\ I_S \otimes \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + g (b + b^\dagger) \otimes (\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^-), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o segundo termo na Eq.(3.13) tem a contribuição de apenas um modo do campo bosônico quantizado e o último termo é a Hamiltoniana de interação do j -ésimo qubit com um único modo do campo bosônico. Na equação acima g é um a constante de acoplamento pequena entre o qubit e o campo bosônico quantizado. A generalização para N qubits é descrita por

$$\begin{aligned} I_S \otimes \sum_{j=1}^N H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + \sum_{j=1}^N H_I^{(j)} = \\ I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_B + (b + b^\dagger) \otimes \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^-). \end{aligned} \quad (3.14)$$

A Hamiltoniana de interação é simplificada se assumirmos o modelo de Jaynes-Cummings.

Considerando o modelo de Jaynes-Cummings para apenas um qubit, temos

$$\begin{aligned} I_S \otimes H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + H_I^{(j)} = \\ I_S \otimes \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + \frac{g}{\sqrt{N}} (b \otimes \sigma_{(j)}^+ + b^\dagger \otimes \sigma_{(j)}^-). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Um ponto importante a destacar é que na Eq.(3.15) os termos que foram ignorados nos definem a "rotating-wave approximation". Nesta aproximação ignoramos os termos que não conservam energia nos quais a emissão (absorção) de uma excitação do campo quantizado é acompanhado pela transição de um qubit do seu estado fundamental (excitado) para seu estado excitado (fundamental). A "rotating-wave approximation" ignora

termos nos quais os operadores de levantamento (abaixamento) de estado do j -ésimo qubit multiplica os operadores de criação (aniquilação) do campo bosônico.

Um outro modelo, onde o comportamento é bastante interessante do ponto de vista físico e matemático é o caso onde a constante de acoplamento entre os N qubits e o campo bosônico depende da intensidade. Temos que

$$I_S \otimes \sum_{j=1}^N H_D^{(j)} + H_S \otimes I_R + \sum_{j=1}^N H_I^{(j)} = \quad (3.16)$$

$$I_S \otimes \sum_{j=1}^N \frac{\Omega^{(j)}}{2} \sigma_{(j)}^z + \omega_0 b^\dagger b \otimes I_R + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left(b (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^+ + b^\dagger (b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma_{(j)}^- \right).$$

Nosso objetivo agora é discutir a interação entre um sistema de N qubits idênticos com gap de energia ($\Omega = \omega_2 - \omega_1$), com um número infinito de osciladores harmônicos que definem o reservatório. Sejam a_k^\dagger e a_k os operadores de criação e aniquilação do k -ésimo oscilador harmônico de frequência ω_k . A Hamiltoniana total é dada por

$$H = I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left(a_k \otimes \sigma_{(j)}^+ + a_k^\dagger \otimes \sigma_{(j)}^- \right). \quad (3.17)$$

Na Eq.(3.17) o primeiro termo do lado direito é a Hamiltoniana livre dos N qubits idênticos, o segundo termo é a Hamiltoniana livre do reservatório e finalmente o terceiro termo é a Hamiltoniana de interação entre o reservatório e os N qubits idênticos. Notem que deslocamos o zero de energia para cada qubit, como fizemos anteriormente, e assumimos a "rotating-wave approximation", onde $g(\sqrt{N})^{-1}$ é a constante de acoplamento entre o j -ésimo qubit e o k -ésimo oscilador harmônico. Podemos também usar diferentes Hamiltonianas de interação para estudar a influência da descoerência em computadores

quânticos como foi introduzida por Di Vincenzo. Este autor propôs o seguinte modelo descrevendo um sistema de apenas um qubit acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos:

$$I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sigma^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_k (a_k^\dagger + a_k) \otimes \sigma^z, \quad (3.18)$$

onde Ω é o espaçamento usual entre os níveis de energia do qubit, a_k^\dagger e a_k são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação dos osciladores harmônicos. Notem o tipo de acoplamento bastante particular entre o reservatório e o qubit. A generalização para N qubits é dada por

$$I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k (a_k^\dagger + a_k) \otimes \sigma_{(j)}^z. \quad (3.19)$$

Outra generalização é introduzir uma constante de acoplamento dependente do modo bosônico. Desta forma, temos o seguinte modelo descrevendo um sistema de um qubit acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos.

$$I_R \otimes H_S + H_R \otimes I_S + H_I = I_R \otimes \frac{\Omega}{2} \sigma^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \otimes I_S + \sum_k (\lambda_k a_k^\dagger + \lambda_k^* a_k) \otimes \sigma^z, \quad (3.20)$$

Uma outra possibilidade é não assumir a "rotating-wave approximation" na Hamiltoniana de interação. Retornando a Eq.(3.17), sem a "rotating-wave approximation", a Hamiltoniana de interação entre os N qubits e o reservatório de osciladores harmônicos é dada

por

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sum_k \left(a_k + a_k^\dagger \right) \otimes \left(\sigma_{(j)}^+ + \sigma_{(j)}^- \right). \quad (3.21)$$

Um problema de interesse considerável é a escolha das propriedades do reservatório. Os reservatórios de comum interesse são o reservatório térmico e o reservatório "squeezed". No reservatório térmico, nós temos N osciladores harmônicos em equilíbrio térmico a temperatura β^{-1} .

Na seção seguinte estudaremos o modelo de Dicke de um modo do campo, N qubits e não assumiremos a "rotating-wave approximation". Como estamos interessados em usar métodos funcionais para estudar o comportamento crítico do modelo, é possível então escrever as matrizes de Pauli dos operadores de Dicke como combinações bilineares de operadores de Fermi definindo assim o modelo de Dicke fermiônico.

Antes de começar a estudar o modelo de Dicke, é importante salientar que Hepp e Lieb [39] provaram que no limite termodinâmico este modelo admite uma solução exata e uma transição de fase de segunda ordem da fase normal para a fase superradiante. Depois, usando uma representação de estados coerentes estes autores [40] generalizam alguns resultados de átomos de mais de dois níveis, e também investigam a estabilidade do modelo com um número infinito de modos bosônicos.

Nossa tarefa agora é mostrar que o modelo de Dicke sem assumir a "rotating-wave approximation" também apresenta uma transição de fase e apresentar o espectro de excitação bosônica coletiva do modelo. Na próxima seção iremos estudar o espaço de Hilbert

para o modelo de Dicke fermiônico.

3.2 O espaço de Hilbert para o modelo de Dicke fermiônico

Como enfatizamos anteriormente, é possível escrever as matrizes de Pauli do modelo de Dicke utilizando combinações lineares de operadores de Fermi e assim definir o modelo de Dicke fermiônico. A dimensionalidade do espaço onde as combinações de operadores de Fermi atuam é maior que a do espaço onde as matrizes de Pauli atuam, sendo assim temos um problema na eliminação dos estados espúrios. Começamos então com a Hamiltoniana do modelo de Dicke, H_D dada por

$$H_D = \omega_0 b^\dagger b \otimes I_B + I_S \otimes \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{(i)}^z + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(b \otimes \sigma_{(i)}^+ + b^\dagger \otimes \sigma_{(i)}^- \right). \quad (3.22)$$

Reparem que a Hamiltoniana H_D contém as matrizes σ usadas para obter a segunda quantização do sistema não interagente de átomos de 2 níveis e também os operadores de criação e aniquilação de um modo do campo bosônico quantizado. Outro ponto que é importante destacar é que esta Hamiltoniana que descreve a interação entre o modo do campo bosônico e os N átomos de 2 níveis, conserva a magnitude j do pseudo-spin, no nosso caso $j = \frac{N}{2}$, o que implica em

$$\left[H, J^2 \right] = 0. \quad (3.23)$$

Definindo os operadores de momentum angular como sendo

$$J_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_\alpha^i}{2}. \quad (3.24)$$

onde os σ_α 's são as matrizes de pauli, e $J_\pm = J_x \pm iJ_y$.

Além disso podemos definir o operador de paridade Π dado por

$$\Pi = e^{i\pi(b^\dagger b + J_z + j)}, \quad (3.25)$$

tal que

$$[H, \Pi] = 0, \quad (3.26)$$

Esta simetria é quebrada em uma certa temperatura crítica, como mostraremos mais a frente, originando uma transição de fase de segunda ordem. Como discutimos anteriormente, as matrizes σ^z , σ^+ e σ^- obedecem as relações de comutação usuais de momento angular.

Vamos definir os operadores α , β , α^\dagger e β^\dagger como sendo os operadores de criação e aniquilação fermiônicos respectivamente. Também podemos definir a combinação linear dos operadores de Fermi, $\alpha^\dagger\alpha - \beta^\dagger\beta$, $\alpha^\dagger\beta$ e finalmente $\beta^\dagger\alpha$. Note que σ^z , σ^+ and σ^- obedecem as mesmas relações de comutação que as apresentadas acima para a combinação bilinear de operadores de Fermi. Isso nos sugere então que podemos trocar as matrizes σ do modelo de Dicke por combinações bilineares de operadores de Fermi.

$$\sigma_{(i)}^z \longrightarrow (\alpha_i^\dagger\alpha_i - \beta_i^\dagger\beta_i), \quad (3.27)$$

$$\sigma_{(i)}^+ \longrightarrow \alpha_i^\dagger\beta_i, \quad (3.28)$$

e finalmente

$$\sigma_{(i)}^- \longrightarrow \beta_i^\dagger\alpha_i. \quad (3.29)$$

De agora em diante usaremos a notação usual ao invés da notação enfatizando o produto tensorial do espaço de Hilbert total do sistema. Com as substituições que definimos nas equações (3.27), (3.28) e (3.29), a Hamiltoniana do modelo de Dicke fermiônico pode ser escrita como sendo

$$H_F = \omega_0 b^\dagger b + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N (\alpha_i^\dagger \alpha_i - \beta_i^\dagger \beta_i) + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (b^\dagger \beta_i^\dagger \alpha_i + \alpha_i^\dagger \beta_i b). \quad (3.30)$$

Note que na equação (3.30) estamos adotando a "rotating-wave approximation". A Hamiltoniana de interação entre um modo do campo bosônico quantizado e os N qubits sem assumir a "rotating-wave approximation" é dada por

$$\frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (b^\dagger + b) (\beta_i^\dagger \alpha_i + \alpha_i^\dagger \beta_i). \quad (3.31)$$

Esta Hamiltoniana de interação inclui 4 tipos de processos correspondentes a absorção ou emissão de quanta do campo com a transição dos qubits do estado fundamental (excitado) para o estado excitado (fundamental). Sendo assim, a Hamiltoniana de interação inclui também processos virtuais ou contribuições das flutuações do vácuo.

Uma generalização possível para a equação (3.31) é introduzir duas constantes de acoplamento distintas, a primeira associada aos termos ressonantes (processos reais) e a outra associada aos termos anti-ressonantes (processos virtuais). A vantagem desse método é a possibilidade de identificar as contribuições dos processos virtuais e reais na formação do condensado bosônico.

Depois desta discussão, vamos agora analisar o espaço de Hilbert para o modelo de Dicke fermiônico. O espaço de Hilbert fermiônico para cada átomo é quadridimensional.

O espaço de Hilbert para o i -ésimo átomo é gerado pelos seguintes vetores de base. O primeiro deles é o estado de vácuo

$$\phi_0 = |0, 0\rangle_i. \quad (3.32)$$

Podemos definir mais dois vetores aplicando os operadores α_i^\dagger e β_i^\dagger no estado de vácuo, ou seja, $\alpha_i^\dagger\phi_0$ e $\beta_i^\dagger\phi_0$. Com isso temos

$$\alpha_i^\dagger|0, 0\rangle_i = |1, 0\rangle_i \quad (3.33)$$

and

$$\beta_i^\dagger|0, 0\rangle_i = |0, 1\rangle_i. \quad (3.34)$$

Finalmente, a combinação bilinear dos operadores de Fermi ($\alpha_i^\dagger\beta_i^\dagger$) atuando no estado de vácuo nos gera

$$\alpha_i^\dagger\beta_i^\dagger|0, 0\rangle_i = |1, 1\rangle_i. \quad (3.35)$$

Os vetores $|1, 0\rangle_i$ and $|0, 1\rangle_i$ geram um subespaço bi-dimensional, no qual é caracterizado pelas seguintes condições com a combinação bilinear de operadores de Fermi

$$\left(\alpha_i^\dagger\alpha_i + \beta_i^\dagger\beta_i\right)|0, 1\rangle_i = |0, 1\rangle_i \quad (3.36)$$

e

$$\left(\alpha_i^\dagger\alpha_i + \beta_i^\dagger\beta_i\right)|1, 0\rangle_i = |1, 0\rangle_i. \quad (3.37)$$

Definimos $N_i = (\alpha_i^\dagger\alpha_i + \beta_i^\dagger\beta_i)$ como operador de número fermiônico que atua no espaço de Hilbert correspondente ao i -ésimo átomo. Com o espaço de Hilbert quadridimensional

podemos construir um espaço de Hilbert físico e um espaço não físico gerados respectivamente pelos vetores $|\Psi\rangle_i$ e $|\Phi\rangle_i$. Com isso temos

$$c_1^i|0,1\rangle_i + c_2^i|1,0\rangle_i = |\Psi\rangle_i \quad (3.38)$$

e

$$d_1^i|0,0\rangle_i + d_2^i|1,1\rangle_i = |\Phi\rangle_i. \quad (3.39)$$

Em seguida iremos obter a formula que conecta a função de partição do modelo de Dicke de spin com o modelo de Dicke fermiônico. Usando a definição do operador número fermiônico para todos os qubits, e que $N_i = (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)$ nós temos então que

$$N = N_i + \sum_{j \neq i} N_j. \quad (3.40)$$

Desde que o operador número e a Hamiltoniana comutem e usando a mesma notação temos que

$$H_F = H_i + \sum_{j \neq i} H_j. \quad (3.41)$$

Usando o fato que

$$H_i|0,0\rangle_i = H_i|1,1\rangle_i = 0, \quad (3.42)$$

temos que

$$H_i|\Phi\rangle_i = 0, \quad (3.43)$$

onde $|\Phi\rangle_i$ é o vetor de estado geral no subespaço não-físico do i -ésimo qubit. O traço sobre os estados não-físicos do i -ésimo qubit vai a zero. Com isso temos

$${}_i\langle\Phi | \exp[-\beta(H_i + \sum_{j \neq i} H_j + \frac{i\pi}{2\beta}N)] | \Phi\rangle_i = \quad (3.44)$$

$${}_i\langle\Phi|\exp[-\beta(H_i + \sum_{j \neq i} H_j) + \frac{i\pi}{2}(N_i + \sum_{j \neq i} N_j)]|\Phi\rangle_i = 0. \quad (3.45)$$

Sendo assim

$$Tr \exp[-\beta(H_F + \frac{i\pi}{2}N)] = (-i)^N Tr_{phys} \exp[-\beta H_F] = (-i)^N Tr \exp[-\beta H_\sigma], \quad (3.46)$$

e podemos apresentar a relação entre a função de partição do modelo de Dicke de spin e o modelo de Dicke fermiônico.

$$Tr \exp[-\beta H_\sigma] = i^N Tr \exp[(-\beta H_F + \frac{i\pi}{2}N)]. \quad (3.47)$$

De acordo com a equação (3.47), podemos usar a Hamiltoniana fermiônica para estudar o modelo de Dicke de spin adicionando para isso um termo de fase $\frac{i\pi N}{2\beta}$, ou seja um potencial químico $\mu = \frac{i\pi N}{2\beta}$. Toda a técnica diagramática padrão para sistemas fermiônicos pode ser gerada utilizando a representação de Fourier para as funções de Green dada por

$$G = \frac{1}{i\omega_F - \epsilon - \eta} = \frac{1}{i\omega_F - \epsilon - \frac{i\pi}{2\beta}}, \quad (3.48)$$

onde $\omega_F = \frac{2\pi}{\beta}(n + 1/2)$ é a frequência de Matsubara fermiônica.

3.3 Integração funcional para o modelo de Dicke fermiônico generalizado

Após essa discussão podemos agora considerar o problema de definir a função de partição para o modelo de Dicke fermiônico definida por Z_F . Primeiramente vamos definir o quociente de duais integrais funcionais, a função de partição do modelo de Dicke fermiônico

e a função partição para o modelo de Dicke fermiônico sem a interação com o modo do campo bosônico. Estamos portanto interessados em calcular a seguinte quantidade

$$\frac{Z_F}{Z_{F_0}} = \frac{\int [d\eta] e^S}{\int [d\eta] e^{S_0}}, \quad (3.49)$$

onde S é a ação Euclideana o modelo de Dicke fermiônico generalizado e S_0 a ação Euclideana livre, sem a interação entre os N qubits e o modo do campo bosônico quantizado.

Temos então

$$S = \int_0^\beta d\tau \left(b^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} b(\tau) + \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \alpha_i(\tau) + \beta_i^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \beta_i(\tau) \right) \right) - \int_0^\beta d\tau H_F(\tau) \quad (3.50)$$

onde H_F é a Hamiltoniana completa para o modelo de Dicke fermiônico generalizado.

Note que estamos introduzindo duas constantes de acoplamento, g_1 e g_2 , para os termos ressonantes e anti-ressonantes respectivamente. A Hamiltoniana para o modelo de Dicke fermiônico generalizado é dada por

$$\begin{aligned} H_F = & \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i^*(\tau) \alpha_i(\tau) - \beta_i^*(\tau) \beta_i(\tau) \right) + \\ & + \frac{g_1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i^*(\tau) \beta_i(\tau) b(\tau) + \beta_i^*(\tau) b^*(\tau) \alpha_i(\tau) \right) + \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\beta_i^*(\tau) b(\tau) \alpha_i(\tau) + \alpha_i^*(\tau) b^*(\tau) \beta_i(\tau) \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

As integrais funcionais na equação (3.51) são integrais com respeito a funções complexas $b^*(\tau)$, $b(\tau)$ e variáveis de Grassmann $\alpha_i^*(\tau)$, $\alpha_i(\tau)$, $\beta_i^*(\tau)$ e $\beta_i(\tau)$, desde que estamos usando as condições de contorno de equilíbrio térmico. As variáveis de integração na equação (3.49) obedecem as seguintes condições de contorno: $b(\beta) = b(0)$ para os campos bosônicos e $\alpha_i(\beta) = -\alpha_i(0)$, $\beta_i(\beta) = -\beta_i(0)$ para os campos fermiônicos.

A ação livre do campo bosônico $S_0(b)$ é dada por:

$$S_0(b) = \int_0^\beta d\tau \left(b^*(\tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \tau} - \omega_0 b^*(\tau) b(\tau) \right). \quad (3.52)$$

Podemos expressar a integral de ação dada pela equação (3.50) usando a ação livre dada pela equação (3.52) mais um termo adicional que pode ser expresso na forma matricial. Com isso a ação total S é dada por

$$S = S_0(b) + \int_0^\beta d\tau \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(\tau) M(b^*, b) \rho_i(\tau), \quad (3.53)$$

onde ρ é uma matriz coluna em termos dos operadores fermiônicos dada por

$$\begin{aligned}\rho_i(\tau) &= \begin{pmatrix} \beta_i(\tau) \\ \alpha_i(\tau) \end{pmatrix}, \\ \rho_i^\dagger(\tau) &= \begin{pmatrix} \beta_i^*(\tau) & \alpha_i^*(\tau) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.54}$$

e a matriz $M(b^*, b)$, sem assumir a "rotating-wave approximation", é dada por

$$M = M(b^*, b) = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \Omega/2 & (N)^{-1/2} (g_1 b^*(\tau) + g_2 b(\tau)) \\ (N)^{-1/2} (g_1 b(\tau) + g_2 b^*(\tau)) & \partial_\tau - \Omega/2 \end{pmatrix}.\tag{3.55}$$

Esses operadores de campo $b(\tau)$ e $\rho_i(\tau)$ podem ser escritos como expansões de Fourier.

Sendo assim temos

$$b(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_{\omega} b(\omega) e^{i\omega\tau},\tag{3.56}$$

e

$$\rho_i(\tau) = \beta^{-1/2} \sum_p \rho_i(p) e^{ip\tau}.\tag{3.57}$$

nas equações acima $\omega = \frac{2\pi n}{\beta}$ e $p = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ são reespectivamente as frequências de Mat-

subara bosônica e fermiônica. Agora podemos reescrever a ação livre dada pela equação

(3.52) como sendo

$$S_0(b) = \sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)\tag{3.58}$$

e a matriz dada pela equação (3.50) como sendo

$$M_{pq}(b^*, b) = \begin{pmatrix} (ip + \Omega/2)\delta_{pq} & (N\beta)^{-1/2} \left(g_1 b^*(q-p) + g_2 b(p-q) \right) \\ (N\beta)^{-1/2} \left(g_1 b(p-q) + g_2 b^*(q-p) \right) & (ip - \Omega/2)\delta_{pq} \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

A razão entre as duas integrais funcionais Z e Z_0 pode ser expressa por

$$\frac{\int [d\eta(b)] \exp\left(\sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)\right) \int [d\eta(\rho)] \exp\left(\sum_{p,q} \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(p) M_{pq}(b^*, b) \rho_i(q)\right)}{\int [d\eta(b)] \exp\left(\sum_{\omega} (i\omega - \omega_0) b^*(\omega) b(\omega)\right) \int [d\eta(\rho)] \exp\left(\sum_{p,q} \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(p) M_{pq}(0, 0) \rho_i(q)\right)} \quad (3.60)$$

e as medidas funcionais $[d\eta(b)]$, $[d\eta(\rho)]$ são definidas da forma:

$$[d\eta(b)] = \prod_{\omega} db(\omega) db^*(\omega) \quad (3.61)$$

e

$$[d\eta(\rho)] = \prod_{i,p} d\rho_i(p) d\rho_i^\dagger(p). \quad (3.62)$$

Precisamos impor "cutoffs" sobre as frequências de Matsubara bosônica e fermiônica dessas medidas. Este procedimento é necessário para garantir que a convergência da razão entre as duas integrais funcionais dada por $\frac{Z}{Z_0}$. No final de tudo, precisamos tomar o limite desses cutoffs infinitos. As integrais com respeito aos campos fermiônicos são Gaussianas, podemos portanto integrar sobre essas variáveis de Grassmann. Com este procedimento temos que

$$\int [d\eta(\rho)] \exp\left(\sum_{p,q} \sum_{i=1}^N \rho_i^\dagger(p) M_{pq}(b^*, b) \rho_i(q)\right) = \det^N M(b^*, b). \quad (3.63)$$

As mudanças de coordenadas, como mostraremos a seguir, facilitará muito o nosso trabalho. Façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$b(\omega) \rightarrow \left(\frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b(\omega) \quad (3.64)$$

e

$$b^*(\omega) \rightarrow \left(\frac{\pi}{(\omega_0 - i\omega)} \right)^{1/2} b^*(\omega). \quad (3.65)$$

É fácil de ver que após essas mudanças de variáveis o denominador da equação (3.60), passa a ser igual a um.

$$\int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) = 1, \quad (3.66)$$

podemos portanto expressar a razão $\frac{Z}{Z_0}$ pela integral

$$\frac{Z}{Z_0} = \int [d\eta(b)] \exp\left(S_{eff}(b)\right), \quad (3.67)$$

onde $S_{eff}(b)$ é a ação efetiva do modo do campo bosônico dada por

$$S_{eff}(b) = -\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + \ln \det^N(I + A). \quad (3.68)$$

O determinante da equação acima é dado por

$$\det(I + A) = \det\left(M^{-1/2}(0,0)M(b^*,b)M^{-1/2}(0,0)\right) \quad (3.69)$$

e a matriz A é definida da seguinte forma:

$$A = A_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & B_{pq} \\ -C_{pq} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Na equação acima as quantidades B_{pq} e C_{pq} são dadas por

$$B_{pq} = \left(\frac{\pi}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{g_1 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}} + \frac{g_2 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}}\right) \left(iq - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.71)$$

$$C_{pq} = -\left(\frac{\pi}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(ip - \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{g_1 b(p-q)}{\sqrt{\omega_0 - i(p-q)}} + \frac{g_2 b^*(q-p)}{\sqrt{\omega_0 - i(q-p)}}\right) \left(iq + \frac{\Omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

Agora ao invés de um quociente de duas integrais funcionais temos apenas uma portanto podemos tomar o limite das frequências de Matsubara bosônica e fermiônica como infinito sem nenhum problema de divergência. Essa é uma boa representação para obter a expressão assintótica de $\frac{Z}{Z_0}$ para um número bastante grande de qubits ($N \rightarrow \infty$).

Para obter o comportamento assintótico das integrais funcionais podemos utilizar o método de fase estacionária. Começamos considerando uma temperatura crítica T_c tal que para $T > T_c$ temos apenas um ponto de fase estacionária enquanto para $T < T_c$ temos um círculo de fase estacionária.

Podemos investigar primeiramente a convergência da integral dada pela equação (3.67) usando a desigualdade

$$|\det(I + A)| \leq \exp\left(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AA^\dagger)\right), \quad (3.73)$$

onde $\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A)$ quer dizer que estamos tomando apenas a parte real de $\operatorname{tr}A$. A matriz A dada pela equação (3.66). Então temos que $\operatorname{tr}A = 0$ e $\operatorname{tr}(AA^\dagger) = \operatorname{tr}(BB^\dagger) + \operatorname{tr}(CC^\dagger)$.

Com isso, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
 \frac{Z}{Z_0} &\leq \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + N \operatorname{tr}(BB^\dagger) + N \operatorname{tr}(CC^\dagger)\right), \\
 &\leq \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)\left(1 - a_0(\omega)\right)b(\omega) \right. \\
 &\quad \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega)c_0(\omega)b(-\omega) + b^*(\omega)c_0(\omega)b^*(-\omega)\right)\right)
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

onde $a_0(\omega)$ e $c_0(\omega)$ são dados respectivamente por

$$a_0(\omega) = \frac{g_1^2 + g_2^2}{\beta(\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \sum_{p-q=\omega} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + q^2)^{1/2}} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + p^2)^{1/2}} \tag{3.75}$$

e

$$c_0(\omega) = \frac{\omega_0 g_1 g_2}{\beta(\omega_0^2 + \omega^2)} \sum_{p-q=\omega} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + q^2)^{1/2}} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{4} + p^2)^{1/2}} \tag{3.76}$$

Notem que no caso do modelo de Dicke generalizado, na representação fermiônica, obtemos uma integral Gaussiana que mistura as frequências positivas com as negativas.

Podemos obter o lado direito da desigualdade da equação (3.74)

$$\begin{aligned}
 \frac{Z}{Z_0} &\leq \left[\left(1 - a_0(0) + 2c_0(0)\right) \left(1 - a_0(0) - 2c_0(0)\right) \right]^{-1/2} \\
 &\quad \prod_{\omega > 0} \left[\left(1 - a_0(\omega) + 2c_0(\omega)\right) \left(1 - a_0(\omega) - 2c_0(\omega)\right) \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

O cálculo desta integral está feita com detalhes no apêndice A.

De maneira similar provada por Popov e Fedotov [19], para o caso da "rotating-wave approximation", temos que, $0 < a_0(\omega) + 2c_0(\omega) < a_0(0) + 2c_0(0)$ e $a_0(0) + 2c_0(0) = O(\omega^{-2} \ln \omega)$. Então se $a_0 + 2c_0(0) < 1$, a equação (3.77) garante a convergência de $\frac{Z}{Z_0}$.

A condição $a_0(0) + 2c_0(0) = 1$ é a equação para a temperatura de transição, então temos

que

$$a_0(0) + 2c_0(0) = \frac{(g_1 + g_2)^2}{\Omega \omega_0} \tanh\left(\frac{\beta_c \Omega}{4}\right) = 1. \quad (3.78)$$

O inverso da temperatura crítica β_c é dado por

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \tanh^{-1}\left(\frac{\Omega \omega_0}{(g_1 + g_2)^2}\right). \quad (3.79)$$

Notem que existe uma transição de fase quântica ($T_c = 0$) quando as constantes de acoplamento g_1 e g_2 satisfazem a condição

$$g_1 + g_2 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}} \quad (3.80)$$

Para grandes valores de $g_1 + g_2$ o sistema entra na fase superradiante.

Podemos obter o comportamento assintótico de $\frac{Z}{Z_0}$ para $T > T_c$ se fizermos a seguinte substituição

$$\det^N(I + A) = \det^N(I + BC) \rightarrow \exp\left(N \operatorname{tr}(BC)\right). \quad (3.81)$$

Essa substituição pode ser feita e assim podemos estimar o erro se dividirmos todo o espaço funcional em dois domínios C_1 e C_2

$$\operatorname{tr}(BC)(BC)^\dagger \leq (4N)^{-1} \mapsto C_1, \quad (3.82)$$

$$\operatorname{tr}(BC)(BC)^\dagger \geq (4N)^{-1} \mapsto C_2. \quad (3.83)$$

Denotando

$$K_N = \det^N(I + A) - \exp\left(N \operatorname{tr}(BC)\right), \quad (3.84)$$

para a razão $\frac{Z}{Z_0}$, temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} = & \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + N \operatorname{tr}(BC)\right) + \\ & + \int_{C_1} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) + \\ & + \int_{C_2} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

A primeira integral da equação acima é Gaussiana. Vamos defini-la por I_0 . Um cálculo simples nos fornece

$$\begin{aligned} I_0 = & \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a(\omega)\right) b(\omega) + \right. \\ & \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega) c(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c(\omega) b^*(-\omega)\right)\right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde $a(\omega)$ e $c(\omega)$ da equação acima são dados por

$$a(\omega) = \left(\frac{g_1^2 (\Omega - i\omega)^{-1} + g_2^2 (\Omega + i\omega)^{-1}}{(\omega_0 - i\omega)} \right) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right) \quad (3.87)$$

e

$$c(\omega) = \left(\frac{g_1 g_2 \Omega}{(\omega_0^2 + \omega^2)^{1/2} (\Omega^2 + \omega^2)} \right) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right) \quad (3.88)$$

Para recuperar o resultado obtido por Popov e Fedotov [19] temos apenas que assumir $g_2 = 0$.

Voltando para o caso geral temos que I_0 , analogamente a integral da equação (3.74), é dado por

$$I_0 = I_0(\omega = 0) \prod_{\omega > 0} \left[c(\omega)^2 - \left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) \right]^{-1}, \quad (3.89)$$

onde $I_0(\omega = 0)$ é a contribuição do condensado dada por

$$I_0(\omega = 0) = \left[\left(1 - a(0) + 2c(0)\right) \left(1 - a(0) - 2c(0)\right) \right]^{-1/2} \quad (3.90)$$

Agora podemos estimar o erro de I_0 , calculando a soma do segundo e terceiro termos da equação (3.73) como mostrado no apêndice B. O erro é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{16}{\epsilon^2 N} \left[\left(1 - (1 + \epsilon)(a_0(0) - 2c_0(0))\right) \left(1 - (1 + \epsilon)(a_0(0) + 2c_0(0))\right) \right]^{-1/2} \\ & \prod_{\omega > 0} \left[\left(1 - (1 + \epsilon)(a_0(\omega) - 2c_0(\omega))\right) \left(1 - (1 + \epsilon)(a_0(\omega) + 2c_0(\omega))\right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Se temos que $T \geq T_c + \delta$, $\delta > 0$ então

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \left[\left(1 - a(0) + 2c(0)\right) \left(1 - a(0) - 2c(0)\right) \right]^{-1/2} \\ & \prod_{\omega > 0} \left[\left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) - c^2(\omega) \right]^{-1} + O(N^{-1}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

onde o termo $O(N^{-1})$ é estimado como mostra o Apêndice B. Podemos também encontrar o espectro de excitação coletiva usando a equação:

$$c(\omega)^2 - \left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) = 0, \quad (3.93)$$

e fazendo a continuação analítica ($i\omega \rightarrow E$), obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 1 = & - \left[\frac{g_1^4 + g_2^4}{(\omega_0^2 - E^2)(\Omega^2 - E^2)} \right] \tanh^2 \left(\frac{\Omega}{4T_c} \right) + \\
 & - \left[\frac{g_1^2 g_2^2}{(\omega_0^2 - E^2)} \left(\frac{1}{(\Omega - E)^2} + \frac{1}{(\Omega + E)^2} - \frac{4\Omega^2}{(\Omega^2 - E^2)^2} \right) \right] \tanh^2 \left(\frac{\Omega}{4T_c} \right) + \\
 & + \left[\frac{g_1^2(\Omega - E)^{-1} + g_2^2(\Omega + E)^{-1}}{(\omega_0 - E)} + \frac{g_1^2(\Omega + E)^{-1} + g_2^2(\Omega - E)^{-1}}{(\omega_0 + E)} \right] \tanh \left(\frac{\Omega}{4T_c} \right)
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

A equação acima, para $T = T_c$, admite 2 raízes.

$$E_1 = 0 \tag{3.95}$$

e

$$E_2 = \left(\frac{g_1(\omega_0 + \Omega)^2 + g_2(\omega_0 - \Omega)^2}{g_1 + g_2} \right)^2. \tag{3.96}$$

O estado de energia zero é o modo de Goldstone. Agora, vamos apresentar a temperatura crítica e o espectro bosônico de excitações coletivas do modelo com a "rotating-wave approximation", onde $g_1 \neq 0$ e $g_2 = 0$. O resultado obtido por Popov e Fedotov é recuperado, onde a equação

$$a(0) = 1 \tag{3.97}$$

e

$$\frac{g_1^2}{\omega_0 \Omega} \tanh \left(\frac{\Omega}{4T_c} \right) = 1. \tag{3.98}$$

fornece o inverso da temperatura crítica, β_c . Dada por

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \tanh^{-1} \left(\frac{\omega_0 \Omega}{g_1^2} \right). \quad (3.99)$$

Neste caso, também existe uma transição de fase quântica ($T_c = 0$), isto é, uma transição de fase quando $g_1 = (\omega_0 \Omega)^{\frac{1}{2}}$. Para g_1 grande existe uma fase superradiante. O espectro bosônico das excitações coletivas neste caso é

$$E_1 = 0, \quad (3.100)$$

e

$$E_2 = \Omega + \omega_0. \quad (3.101)$$

É possível também termos um condensado com superradiância em um sistema de N qubits acoplados com um único modo do campo bosônico onde apenas processos virtuais contribuem. No caso onde consideramos somente os termos anti-ressonantes na Hamiltoniana de interação, ou seja, $g_1 = 0$ e $g_2 \neq 0$, o inverso da temperatura crítica, β_c é dado por

$$\beta_c = \frac{4}{\Omega} \tanh^{-1} \left(\frac{\omega_0 \Omega}{g_2^2} \right). \quad (3.102)$$

O espectro bosônico das excitações coletivas dado por

$$E_1 = 0 \quad (3.103)$$

e

$$E_2 = |\omega_0 - \Omega|. \quad (3.104)$$

Um comentário importante a respeito do espectro bosônico das excitações coletivas. Em ambos os casos, usando ou não a "rotating-wave approximation", existe uma transição de fase. No caso da "rotating-wave approximation" $g_1 \neq 0$ e $g_2 = 0$, existe um modo de Goldstone ($E = 0$). No caso onde consideramos puramente os processos virtuais $g_1 = 0$ e $g_2 \neq 0$, também existe um modo de Goldstone. A existência dos modos de Goldstone e a energia do outro modo foram apresentadas para ambos os casos mencionados acima. O espectro no caso geral é dado pelo modo de Goldstone e também por um modo de energia diferente de zero dado pela equação (3.96). É interessante que obtivemos um comportamento crítico em ambas situações ($g_1 \neq 0, g_2 = 0$ e $g_1 = 0, g_2 \neq 0$), onde o condensado tem modos de Goldstone, com um estado superradiante. Com isso nós mostramos que é possível termos condensado com superradiância em um sistema com N qubits acoplados com um modo do campo bosônico onde apenas processos virtuais contribuem.

Capítulo 4

Conclusões

No presente trabalho primeiramente discutimos Hamiltonianas de interação entre campo bosônico e átomos de dois níveis. Estudando o caso onde átomos idênticos de dois níveis atuam como reservatório ($N \rightarrow \infty$), investigamos a termodinâmica do modelo de Dicke usando o formalismo de integrais de trajetória com o método de integração funcional. Consideramos a questão de como os termos anti-ressonantes da Hamiltoniana de interação contribuem na formação do condensado com transição de fase superradiante no modelo.

Trocando as matrizes de Pauli do modelo por uma combinação linear de operadores de Fermi definimos o modelo de Dicke fermiônico. Sem assumir a aproximação de ondas girantes, com as constantes de acoplamento g_1 e g_2 para os termos ressonantes e anti-ressonantes respectivamente, definimos o modelo de Dicke fermiônico generalizado. Estudamos o regime crítico deste modelo obtendo a temperatura crítica de transição e apresentando o espectro bosônico de excitações coletivas, para o caso geral ($g_1 \neq 0$,

$g_2 \neq 0$) e também para os casos com $(g_1 \neq 0, g_2 = 0)$ e $(g_1 = 0, g_2 \neq 0)$. Nosso resultado mostra que é possível termos um condensado com superradiância em um sistema com N qubits acoplados com um modo do campo bosônico onde apenas processos virtuais contribuem.

É importante perceber que a energia do modo não-Goldstone da equação (3.101) é sempre maior que a energia do modo não-Goldstone da equação (3.104), isto é, no sistema onde o condensado aparece devido aos processos virtuais. Nossa conclusão dos resultados acima é que ambos os processos, reais e virtuais, geram contribuições diferentes na formação do condensado.

Existem muitas continuações diferentes para esse trabalho. A primeira é estudar efeitos de tamanho finito no modelo de Dicke fermiônico generalizado. Parma et al [67] consideraram N qubits interagindo com o reservatório supondo que os qubits tem suas posições fixas na presença de certo comprimento de correlação, característico do reservatório. Um sistema de tamanho finito também pode ter domínios de fronteira com muitos graus de liberdade, o que faz do problema um caso bastante interessante. Outra possibilidade é investigar o modelo introduzido por Di Vincenzo, definido pela equação (3.18) usando também métodos de integração funcional. É bem conhecido que este modelo permite uma solução analítica e exata e também exhibe a destruição da coerência quântica sem decaimento de população.

Finalmente, o modelo definido pela equação (3.16), com acoplamento entre os N qubits

e o modo do campo bosônico, caracterizado pela constante de acoplamento dependente da intensidade da radiação também pode ser discutido usando as técnicas convencionais de métodos funcionais. A generalização deste modelo com a introdução dos termos anti-ressonantes deve também ser investigado. Uma questão que deve ser ressaltada é a presença da transição de fase quântica e também do comportamento caótico para N finito, onde a transição entre os comportamentos de Poisson e Wigner-Dyson na estatística do espaçamento das energias ocorre. A questão que foi discutida na literatura é com relação a função de distribuição do espaçamento entre as auto-energias adjacentes em um número grande de sistemas. Para sistemas onde a dinâmica clássica é integrável, um comportamento que obedeça a estatística de Poisson da distribuição dos espaçamentos entre os níveis de energia dos vizinhos mais próximos é esperado, isto é a regra do espaçamento para níveis aleatórios. Alguns sistemas, as auto-energias não seguem a lei de Poisson, porém comportam-se como auto-valores de uma matriz randômica com os elementos de matriz de acordo com o ensemble adequado.

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Apêndice A

Neste apêndice mostraremos como obtivemos o resultado do primeiro termo do lado direito da equação (3.74). A integral I_0 é dada por

$$I_0 = \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega)\right) b(\omega) + \right. \quad (5.1) \\ \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega)\right)\right).$$

Separando o termo de frequência $\omega = 0$ dos demais termos, é fácil verificar que a integral I_0 pode ser reescrita como sendo

$$I_0 = I_0(\omega = 0) \int \prod_{\omega > 0} db^*(\omega) db(\omega) \exp\left(-\pi \sum_{\omega > 0} b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega)\right) b(\omega)\right) + \quad (5.2) \\ \int \prod_{\omega > 0} db^*(-\omega) db(-\omega) \exp\left(-\pi \sum_{\omega > 0} b^*(-\omega) \left(1 - a_0(-\omega)\right) b(-\omega) + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_{\omega > 0} \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega)\right)\right).$$

onde $I_0(\omega = 0)$ é dada por

$$I_0(\omega = 0) = \int db^*(0) db(0) \exp\left(-\pi b^*(0) \left(1 - a_0(0)\right) b(0) + \right. \\ \left. + \pi \left(b(0) c_0(0) b(0) + b^*(0) c_0(0) b^*(0)\right)\right). \quad (5.3)$$

Façamos as seguintes trocas de variáveis:

$$b(0) \longrightarrow \frac{x + iy}{\sqrt{2}} \quad (5.4)$$

e

$$b^*(0) \longrightarrow \frac{x - iy}{\sqrt{2}} \quad (5.5)$$

Sendo assim, $I_0(\omega = 0)$ pode ser expressa da forma

$$I_0(\omega = 0) = \frac{1}{2} \int (dx^2 + dy^2) \exp\left[-\pi \left(\frac{1 - a_0(0)}{2} - c_0(0)\right) (x^2 + y^2)\right] \\ = \left[\left(1 - a_0(0) + 2c_0(0)\right) \left(1 - a_0(0) - 2c_0(0)\right)\right]^{-1/2}. \quad (5.6)$$

O que nos resta agora é calcular a integral

$$\int \prod_{\omega > 0} db^*(\omega) db(\omega) \exp\left(-\pi \sum_{\omega > 0} b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega)\right) b(\omega)\right) + \quad (5.7) \\ \int \prod_{\omega > 0} db^*(-\omega) db(-\omega) \exp\left(-\pi \sum_{\omega > 0} b^*(-\omega) \left(1 - a_0(-\omega)\right) b(-\omega) + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_{\omega > 0} \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega)\right)\right).$$

Para facilitar os cálculos fazemos as seguintes redefinições:

$$\bar{b}(\omega) = b^*(\omega), \quad (5.8)$$

$$A(\omega) = 1 - a(\omega), \quad (5.9)$$

$$\bar{z}(\omega) = 2c(\omega)b(-\omega), \quad (5.10)$$

$$z(\omega) = 2c(\omega)b^*(-\omega) \quad (5.11)$$

e finalmente

$$B(\omega) = \frac{1 - a(-\omega)}{4c^2(\omega)}. \quad (5.12)$$

Desta forma temos que integral da equação (5.7) pode ser expressa por

$$\begin{aligned} I = & \int \prod_{\omega>0} d\bar{b}(\omega) b(\omega) \exp\left(-\pi \sum_{\omega>0} \bar{b}(\omega)A(\omega)b(\omega)\right) \\ & \int \prod_{\omega>0} \frac{d\bar{z}(\omega)z(\omega)}{4c^2(\omega)} \exp\left(-\pi \sum_{\omega>0} \left(\bar{z}(\omega)B(\omega)z(\omega)\right) + \right. \\ & \left. + \pi \sum_{\omega>0} \left(\bar{z}(\omega)b(\omega) + z(\omega)\bar{b}(\omega)\right)\right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Podemos calcular a segunda integral da equação (5.13) o que nos fornece

$$\frac{4c^2(\omega)}{1 - a(-\omega)} \exp\left(\pi \sum_{\omega>0} \bar{b}(\omega)B^{-1}(\omega)b(\omega)\right) \quad (5.14)$$

Com isso podemos reescrever I da forma

$$I = \int \prod_{\omega>0} \frac{db(\omega)d\bar{b}(\omega)}{1 - a(-\omega)} \exp\left(-\pi \sum_{\omega>0} \bar{b}(\omega)\left(A(\omega) - B^{-1}(\omega)\right)b(\omega)\right) \quad (5.15)$$

Novamente, temos uma integral Gaussiana, com isso após a integração obtemos

$$\left(\frac{1}{1 - a(-\omega)}\right) \left(\frac{1}{A(\omega) - B^{-1}(\omega)}\right) \quad (5.16)$$

Fazendo as devidas substituições e um pouco de álgebra trivial chegamos ao seguinte

resultado:

$$I = I_0(\omega = 0) \prod_{\omega>0} \left[\left(1 - a(\omega)\right) \left(1 - a(-\omega)\right) - c^2(\omega) \right]^{-1} \quad (5.17)$$

5.2 Apêndice B

Neste apêndice faremos com detalhes a estimativa da soma das integrais sobre os domínios C_1 e C_2 da equação (3.74).

Como mencionamos anteriormente no capítulo 3, usamos o método de fase estacionária para poder obter o comportamento assintótico da função de partição para $T > T_c$.

Mostramos portanto que $\frac{Z}{Z_0}$ para $T > T_c$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} = & \int [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega) + N \operatorname{tr}(BC)\right) + \\ & + \int_{C_1} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right) + \\ & + \int_{C_2} [d\rho(b)] K_N \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega)b(\omega)\right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

O terceiro termo do lado direito da equação (5.19) não pode exceder a

$$2 \int_{C_2} [d\eta(b)] \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega)\right) b(\omega) + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega)c_0(\omega)b(-\omega) + b^*(\omega)c_0(\omega)b^*(-\omega)\right)\right), \quad (5.19)$$

desde que ambos os termos $\det^N(I + A)$ e $\exp(N \operatorname{tr} BC)$ não excedão a

$$\exp\left(\frac{N}{2} \operatorname{tr}(BB^\dagger + CC^\dagger)\right) = \exp\left(\pi \sum_{\omega} \left(a_0(\omega)b^*(\omega)b(\omega) + c_0(\omega)b(\omega)b(-\omega) + c_0(\omega)b^*(\omega)b^*(-\omega)\right)\right). \quad (5.20)$$

Portanto podemos estimar a equação (5.19) usando

$$\begin{aligned} 8N \int_{C_2} [d\eta(b)] \operatorname{tr}\left(BC(BC)^\dagger\right) \exp\left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega)\right) b(\omega) + \right. \\ \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega)c_0(\omega)b(-\omega) + b^*(\omega)c_0(\omega)b^*(-\omega)\right)\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde usamos a condição (3.72) que define o domínio C_2 .

Agora vamos estimar o segundo termo do lado direito da equação (3.74). Temos que

$$K_N = \prod_i (1 + \lambda_i)^N - \prod_i e^{N\lambda_i} = (e^x - 1) \prod_i e^{N\lambda_i}, \quad (5.22)$$

onde λ_i são os autovalores do operador BC,

$$X = N \sum_i \left(\ln(1 + \lambda_i) - \lambda_i \right). \quad (5.23)$$

No domínio C_1 temos

$$\sum_i |\lambda_i|^2 \leq \text{tr} BC(BC)^\dagger \leq (4N)^{-1} \leq \frac{1}{4}. \quad (5.24)$$

Portanto todos os $|\lambda_i|$ não excedem a $\frac{1}{2}$, e com isso podemos estimar X da seguinte forma

$$|X| \leq N \sum_i |\lambda_i|^2 \leq N \text{tr} BC(BC)^\dagger \leq \frac{1}{4} \quad (5.25)$$

Então temos a seguinte estimativa

$$\left| \prod_i e^{N\lambda_i} \right| \leq \exp \left(\pi \sum_\omega a_0(\omega) b^*(\omega) b(\omega) \right), \quad (5.26)$$

$$|e^X - 1| \leq e^{|X|} - 1 \leq |X| e^{|X|} \leq e^{1/4} N \text{tr} BC(BC)^\dagger. \quad (5.27)$$

Isso nos permite estimar a soma do segundo com o terceiro termo do lado direito da equação (3.74)

$$\begin{aligned} e^{1/4} N \int_{C_1} [d\eta(b)] \text{tr} \left(BC(BC)^\dagger \right) \exp \left(-\pi \sum_\omega b^*(\omega) \left(1 - a_0(\omega) \right) b(\omega) + \right. \\ \left. + \pi \sum_\omega \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega) \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8N \int_{C_2} [d\eta(b)] \operatorname{tr} \left(BC(BC)^\dagger \right) \exp \left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) (1 - a_0(\omega)) b(\omega) + \right. \\
& \quad \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega) \right) \right) \leq \\
& \leq 8N \int [d\eta(b)] \operatorname{tr} \left(BC(BC)^\dagger \right) \exp \left(-\pi \sum_{\omega} b^*(\omega) (1 - a_0(\omega)) b(\omega) + \right. \\
& \quad \left. + \pi \sum_{\omega} \left(b(\omega) c_0(\omega) b(-\omega) + b^*(\omega) c_0(\omega) b^*(-\omega) \right) \right). \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Usando a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
8N \operatorname{tr} \left(BC(BC)^\dagger \right) & \leq 2N \operatorname{tr} \left(B^\dagger B + CC^\dagger \right)^2 \leq \\
& \leq \frac{16}{\epsilon^2 N} \exp \left(\frac{\epsilon}{2} N \operatorname{tr} \left(B^\dagger B + CC^\dagger \right) \right) = \\
& = \frac{16}{\epsilon^2 N} \exp \left(\epsilon \sum_{\omega} \left(a_0(\omega) b^*(\omega) b(\omega) + c_0(\omega) b(\omega) b(-\omega) + c_0(\omega) b^*(\omega) b^*(-\omega) \right) \right)
\end{aligned} \quad (5.29)$$

onde ϵ é um número arbitrário, positivo e muito pequeno.

Sendo assim concluimos que o termo de correção dado pela soma dos dois últimos termos do lado direito da equação (3.74) é dado por

$$\begin{aligned}
& \frac{16}{\epsilon^2 N} \left[\left(1 - (1 + \epsilon) (a_0(0) - 2c_0(0)) \right) \left(1 - (1 + \epsilon) (a_0(0) + 2c_0(0)) \right) \right]^{-1/2} \\
& \prod_{\omega > 0} \left[\left(1 - (1 + \epsilon) (a_0(\omega) - 2c_0(\omega)) \right) \left(1 - (1 + \epsilon) (a_0(\omega) + 2c_0(\omega)) \right) \right]^{-1}
\end{aligned} \quad (5.30)$$

Bibliografia

- [1] D. Meshede, Phys. Rep. **211**, 201 (1991).
- [2] P. Meystre, Phys. Rep. **219**, 243 (1992).
- [3] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. I. E. E. **51**, 89 (1963).
- [4] P. L. Knight and L. Allen, " *Concepts in Quantum Optics*", Pergamon Press Inc. N.Y. (1983).
- [5] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).
- [6] K. Blum, " *Density Matrix Theory and Applications*", Plenum Press, N. Y. (1981).
- [7] V. N. Popov, " *Functional Integrals and Collective Excitations*", Cambridge University Press (1987).
- [8] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [9] A. Zardecki, Phys. Rev. **A22**, 1664 (1980).
- [10] M. Hillery and M. S. Zubaire, Phys. Rev. **A26**, 451 (1982).

- [11] E. Schrodinger, *Naturwiss* **14**, 664 (1926).
- [12] R. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).
- [13] R. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [14] R. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [15] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 227 (1963).
- [16] J. Kondo, *Physica* **125B**, 279 (1984).
- [17] L. D. Chiang and S. Chakravarty, *Phys. Rev.* **B**, 154 (1985).
- [18] V. N. Popov and S. A. Fedotov, *Theor. Math. Phys.* **51**, 363 (1982).
- [19] V. N. Popov and S. A. Fedotov, *Sov. Phys. JETP.* **67**, 535 (1988).
- [20] J. R. Ackerhart, P. L. Knight and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett* **30**, 456 (1976).
- [21] P. W. Milonni, J. R. Ackerhart and W. A. Smith, *Phys. Rev. Lett* **31**, 958 (1976).
- [22] P. W. Milonni and W. A. Smith, *Phys. Rev.* **A11**, 814 (1976).
- [23] B. Fain, *N. Cimento* **B68**, 73 (1982).
- [24] J. R. Ackerhart and J. H. Eberly, *Phys. Rev.* **D10**, 3350 (1974).
- [25] J. Dalibard, J. Dupont Roc and C. Cohen Tannoudji, *J. Phys.* **43**, 1617 (1982).
- [26] J. Dalibard, J. Dupont Roc and C. Cohen Tannoudji, *J. Phys.* **45**, 637 (1984).

- [27] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D46**, 5267 (1992).
- [28] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D47**, 4802 (1993) (erratum).
- [29] P. C. W. Davies, J. Phys. Rev. **A8**, 365 (1975).
- [30] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976).
- [31] L. H. Ford, N. F. Svaiter and M. L. Lyra, Phys. Rev. **A49**, 1378 (1994).
- [32] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1959).
- [33] P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [34] S. A. Fulling and S. N. M. Ruijsennars, Phys. Rep. **152**, 135 (1987).
- [35] V. A. De Lorenci, R. De Paola and N. F. Svaiter, Class. Quant. Grav. **20**, 4241 (2000).
- [36] R. De Paola and N. F. Svaiter, Class. Quant. Grav. **18**, 1799 (2001).
- [37] B. S. Dewitt, Phys. Rep. **196**, 295 (1976).
- [38] V. B. Kir'yanov and V. S. Yarunin, Theor. Math. Phys. **43**, 340 (1980).
- [39] K. Hepp and E. H. Lieb, Ann. Phys. **76**, 360 (1973).
- [40] K. Hepp and E. H. Lieb, Phys. Rev. **A**, 2517 (1973).
- [41] Y. K. Wang and F. T. Hioe, Phys. Rev. Lett. **7**, 831 (1973).

- [42] F. T. Hioe, Phys. Rev. **A8**, 1440 (1973).
- [43] G. Comer Duncan, Rev. **A8**, 418 (1974).
- [44] T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1949).
- [45] L. R. Meccand and N. Papanicolau, Phys. Rev. **B28**, 1663 (1983)
- [46] M. Hillery and L. D. Mlodinow, Phys. Rev. **A31**, 797 (1985).
- [47] C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. Lett **90**, 044101 (2003).
- [48] C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. **E67**, 066203 (2003).
- [49] R. Graham and M. Hoherbach, Phys. Lett. **101A**, 61 (1984).
- [50] R. Graham and M. Hoherbach, Phys. Rev. Lett. **57**, 1378 (1986).
- [51] C. H. Levenkopf, M. C. Nemes, V. Marvulle, M. P. Pato and W. F. Wreszinski, Phys. Lett. **A115**, 113 (1991).
- [52] L. Muller, J. Stolze, H Leschke and P. Nagel, Phys. Rev. **A44**, 1022 (1991).
- [53] G. A. Finney and J. Gra-Banacloche, Phys. Rev. **A50**, 2040 (1994).
- [54] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt and H. W. Galbraith, Phys. Rev. Lett. **50**, 966 (1983).
- [55] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins and H. J. Carmichael, Phys. Rev. **A75**, 013804 (2007).

- [56] Fetter A.L., Walecka J.D., ” *Quantum Theory of Many-Particle Systems*”, McGraw-Hill (1971).
- [57] Joseph I. Kapusta, ” *Finite-Temperature Field Theory*”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1989).
- [58] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, ” *Statistical Physics (2nd ed.)*”, Addison-Wesley, Reading, MA (1969).
- [59] R. Kulllock and N. F. Svaiter, ” *A Continuously Observed Two-level System Interacting with a Vacuum Field*”, quant-ph/0703167 (2007).
- [60] Y. I. Yoo and J. H. Eberly, Phys. Rep. **118**, 239 (1985).
- [61] A. Joshi and R. R. Puri, Phys. Rev. **A42**, 4336 (1990).
- [62] A. H. Toor and M. S. Zubairy, Phys. Rev. **A45**, 4951 (1992).
- [63] B. Buck and C. V. Sukumar, Phys. Lett. **81A**, 132 (1981).
- [64] B. Buck and C. V. Sukumar, J. Phys. **A17**, 885 (1984).
- [65] V. Buzek, Phys. Rev. **A39**, 3196 (1989).
- [66] D. P. DiVicenzo, Phys. Rev. **A51**, 1015 (1995).
- [67] G. M. Parma, K.-A. Seiominen and A. K. Ekert, Proc. R. Soc. Lond. **A452**, 567 (1996).