

Campos Eletromagnéticos em Métricas
Estáticas de Fundo com Algumas Aplicações
à Astrofísica

Tese de Doutorado

José Antônio e Souza

Orientador: Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Rio de Janeiro

2007

Dedicatória

À minha avó, Maria Alzira, pela dedicação que tornou possível a construção da base para todas as minhas realizações. Valeu, vovó.

Resumo

Nesta tese estudamos a influência de um campo gravitacional estático de fundo (considerado como solução das equações de Einstein, ou seja, de uma métrica de fundo) sobre o comportamento de campos eletromagnéticos. As equações de Maxwell foram primeiro resolvidas para campos estáticos, onde apresentamos algumas soluções novas, e depois para campos de radiação, utilizando uma técnica por nós desenvolvida inicialmente para o cálculo de campos de radiação em espaço plano. Sugerimos aplicações dos resultados obtidos ao estudo de quasares e de modelos estelares. Finalmente estudamos também, na aproximação da Óptica Geométrica, a propagação da luz num modelo cosmológico de fundo para um Universo acelerado.

Abstract

We have studied, in this work, the influence of a static gravitational field (viewed as a solution of Einstein's equations, that is, as a background metric) on the behaviour of electromagnetic fields. Maxwell's equations have been first solved for the electrostatic case, and some of the solutions thus obtained are believed to be new ones. We then obtain, using a technique developed by us for obtaining radiation fields in Euclidean backgrounds, the radiation fields in three curved background metrics. Applications of the results to the study of quasars and of stellar models are suggested. Finally, we have also studied, in the geometrical optics approximation, light propagation in a background accelerated universe cosmological model.

Resumo

Relativecaj gravitaj kampoj estas fiksataj, kaj pluraj enmetitaj testaj elektromagnetaj kampoj estas studataj. Unue, novaj solvoj de Maxwellaj ekvacioj estas prezentataj. Poste, novaj kampoj de radiado estas havigataj, uzante teknikon ke ni frue kreis por plana trispaco; ni proponas uzadon de niaj kalkuloj al la analizo de kvazaroj kaj stelaj modeloj. Fine, lumo estas studata, ĉe la geometria optiko, irante en akcelata universo.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, ao Professor Antonio Teixeira, um excelente orientador, maior ainda amigo, e um dos revisores de texto mais chatos que já encontrei (ou seja, um excelente revisor). Brincadeira, Antonio!

A você, Núbia, que me deu alento e me encorajou nas horas difíceis, sendo sempre um refúgio seguro e repousante, toda minha gratidão. Valeu, Fourette!

Ao meu pai, José Roberto, pelo companheirismo e encorajamento.

Aos meus filhos Marcelo, Monique, Marco e Melina, pelas horas agradáveis que sempre passamos juntos e pela força que sempre me deram. Desde que vocês nasceram, nunca mais soube o que foi um dia de tédio em minha vida.

A todos os meus colegas de trabalho, do Instituto de Física da UFF, especialmente o Profs. José Maria e João Batista, pelo companheirismo e encorajamento, que me animaram a prosseguir.

À Valéria, pelo admirável trabalho de digitação do texto, e pela paciência com as inúmeras revisões.

À Myriam, secretária da Pós-Graduação, pela maneira dedicada e atenciosa com que atende a todos nós, alunos do CBPF.

Aos funcionários da Biblioteca, pelo atendimento sempre cordial e solícito.

A todos vocês, o meu Muito Obrigado!

Sumário

Dedicatória	<i>i</i>
Resumo	<i>ii</i>
Abstract	<i>iii</i>
Resumo	<i>iv</i>
Agradecimentos	<i>v</i>
Capítulo 1	
1.1. Introdução	1
Capítulo 2	
2.1 Equações Básicas	4
Capítulo 3	
3.1 O Método de Hadamard	6
Capítulo 4	
4.1 Cargas Pontuais Estacionárias em Métricas de Fundo Estáticas	9
4.1.1 Métrica de fundo de Schwarzschild	9
4.1.2 Métrica de fundo de Reissner-Nordström	16
4.1.3 Métricas de fundo de Einstein e de de Sitter	18
4.2 Dipolos Pontuais Estáticos em Métricas de Fundo Estáticas	20
4.2.1 O momento de dipolo elétrico	21
4.2.2 Métrica de Reissner-Nordström otimamente carregada ($m^2 = e^2$)	23
4.2.3 Métricas de fundo cosmológicas de Einstein e de de Sitter	28
4.3 Um Exemplo de Solução Magnetostática Direta	30
4.4 Análise dos Resultados Obtidos Neste Capítulo	33
Capítulo 5	
5.1 Um Método para Calcular Campos de Radiação em Teoria Eletromagnética Clássica	36

5.2 Soluções com Radiação em Métricas de Fundo Cosmológicas	40
5.2.1 O problema da propagação de perturbações eletromagnéticas em métricas de fundo	40
5.2.2 Campos eletromagnéticos com dependência temporal harmônica em métricas de fundo	45
5.2.3 Campos de radiação de dipolo elétrico na métrica de fundo cosmológica de Einstein	46
5.2.4 Campos de radiação de dipolo elétrico na métrica de fundo cosmológica de de Sitter	50
5.3 Análise dos Resultados Obtidos na Seção 5.2	52
5.4 Um Modelo Estelar Simples	59
Capítulo 6	
6.1 Considerações Gerais	70
6.2 A Expansão Acelerada do Universo	74
6.2.1 A equação de Dyer-Roeder	75
6.3 Conclusões	78
6.4 Perspectivas Futuras	80
Referências	80

Capítulo 1

1.1 Introdução

O estudo das equações de Maxwell em métricas estáticas^{[1–8],[10–16],[18–21],[25],[27–30]} e estacionárias^{[9],[17]} de fundo tem longa (e honrosa) tradição na Relatividade Geral. Na realidade, o teste experimental mais popular da teoria, o desvio dos raios luminosos por um campo gravitacional, pode ser enquadrado neste contexto, já que envolve a propagação de uma perturbação eletromagnética filiforme em um campo gravitacional de fundo de Schwarzschild. No entanto, a dedução deste resultado envolve apenas o princípio de Fermat, e não as equações de Maxwell explicitamente.

Tanto quanto sabemos, o primeiro trabalho em que as equações de Maxwell foram explicitamente resolvidas, nas condições mencionadas acima, foi o de E.T. Whittaker, em 1927^[1], onde o campo eletrostático para uma carga pontual em repouso em um campo gravitacional de fundo uniforme foi calculado em forma fechada. Entretanto, para uma carga pontual em repouso no fundo gravitacional de Schwarzschild, Whittaker só obteve uma solução em forma de série, sem contudo obter a soma desta mesma série. Logo após, em 1928, Copson^[2] utilizou a elegante teoria das soluções elementares de Hadamard^[31] e calculou pela primeira vez uma solução exata, em forma fechada, para o potencial de uma carga pontual em repouso em um fundo de Schwarzschild. No mesmo ano, J.M.

Whittaker obteve soluções análogas à de Copson para cargas pontuais em repouso nas métricas de fundo cosmológicas de Einstein e de de Sitter^[4].

Seguindo a tendência geral da pesquisa em Relatividade Geral, que diminuiu muito daquele ano até meados da década de 1960, talvez por causa do grande interesse suscitado pela Mecânica Quântica, não houve, tanto quanto sabemos, nenhum trabalho nesta linha de pesquisa até 1968, quando Israel^[5] redescobriu a solução de Whittaker. A partir daí, até os dias atuais, houve um notável aumento no interesse sobre o assunto, tendo sido publicado um grande número de trabalhos nesta área. Este interesse se deve ao fato de as soluções obtidas poderem sugerir novos testes experimentais de Relatividade Geral, além de propiciarem um melhor embasamento teórico para a análise dos buracos negros. Há também a possibilidade dos resultados serem de alguma importância na elucidação do enigma da origem da enorme quantidade de energia aparentemente irradiada pelos quasares^[30].

Neste trabalho, após uma apresentação das equações básicas no Capítulo 2 e um breve resumo do método das soluções elementares de Hadamard no Capítulo 3, passamos à exposição de várias soluções estáticas das equações de Maxwell no Capítulo 4. No Capítulo 5, após a adução de um método por nós desenvolvido para o cálculo de campos de radiação eletromagnéticos e de uma breve discussão sobre a propagação de perturbações eletromagnéticas em métricas de fundo e sobre soluções das equações de Maxwell com dependência harmônica no tempo, também em métricas de fundo, passamos a apresentar, usando o método anteriormente descrito, o cálculo dos campos de radiação de dipolo elétrico em duas métricas cosmológicas de fundo, a de Einstein e a de de Sitter. As soluções obtidas são exatas. Tanto quanto sabemos, só existem na literatura, para campos de radiação, a solução numérica de Ruffini^[11], que resolveu numericamente as equações obtidas por Tiomno, Ruffini e Vishveshwara^[10], e a solução aproximada de Tse Chin Mo e Papas^[8].

Em seguida, a partir de uma sugestão para avaliar a potência irradiada pelo sistema, no nosso caso, indicamos que os resultados obtidos podem vir a ter uma ligação com a origem da enorme quantidade de energia que parece ser irradiada pelo quasares.

Finalmente, no capítulo 6, discutimos a propagação da luz, na aproximação da Óptica Geométrica, em uma métrica cosmológica de fundo que descreve um universo acelerado, um tópico que vem recebendo, devido a alguns resultados experimentais, grande atenção nos últimos tempos. Neste capítulo obtivemos o que nos parece ser a primeira solução geral exata da equação de Dyer-Roeder para uma geometria de fundo que modela uma expansão acelerada do universo.

Capítulo 2

2.1 Equações Básicas

As equações de Maxwell, em forma covariante e na ausência de fontes, são

$$F_{\mu\nu|\lambda} + F_{\lambda\mu|\nu} + F_{\nu\lambda|\mu} = 0 , \quad (2.1)$$

$$F_{||\nu}^{\mu\nu} = 0 ,$$

(a barra dupla significando derivada covariante e a barra única derivada ordinária) ou equivalentemente, para o segundo grupo,

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{|\nu} = 0 , \quad (2.2)$$

onde g denota, como usual, o determinante de $g_{\mu\nu}$.

$F_{\mu\nu}$, é o tensor campo eletromagnético, dado por

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu|\mu} - A_{\mu|\nu} , \quad (2.3)$$

com A_μ sendo o 4-vetor potencial.

Para obter soluções, no caso mais geral, é necessário resolver o sistema de equações dado por (2.2) e pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (2.4)$$

com $T_{\mu\nu}$ dado neste caso por (utilizamos o sistema de unidades gaussiano, e a estrela significa complexo conjugado):

$$T_{\mu\nu} = \frac{c}{4\pi} \left(F_{\mu}^{*\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^{*} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) . \quad (2.5)$$

No entanto, dada a enorme dificuldade de solucionar este sistema no caso geral (podemos citar como exceções as soluções de Reissner-Nordström^{[36],[37]} e de Curzon^[38]), costuma-se tomar a geometria de uma solução particular das equações de Einstein como dada e considerar uma distribuição de cargas que afete de maneira desprezível esta geometria (cargas teste). Dizemos que a métrica é uma métrica de fundo, e que a solução das equações de Maxwell obtida desta forma é uma solução com acoplamento zero.

Mesmo nestas circunstâncias não é possível obter soluções gerais das equações de Maxwell, ainda que em condições eletrostáticas. O que se obtém são soluções representando certas distribuições de carga, explorando as simetrias da distribuição e da métrica de fundo. Após uma breve exposição do método de Hadamard para encontrar a solução elementar de uma equação diferencial parcial, no próximo capítulo, passaremos à apresentação de várias soluções das equações de Maxwell em métricas de fundo, nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

3.1 O Método de Hadamard

Não podemos aqui, por limitações de espaço, fazer justiça à elegante teoria das soluções elementares das equações diferenciais parciais, desenvolvida por Hadamard em seu livro já clássico^[31]. No entanto, com o intuito de tornar algumas partes do restante desta tese mais facilmente inteligíveis, vamos apresentar aqui as principais idéias da teoria.

Seja a equação diferencial parcial

$$f^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + h^\alpha \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} + kv = 0, \quad (3.1)$$

onde foi usada a convenção da soma, e $f^{\alpha\beta}$, h^α e k são funções analíticas das variáveis (x^1, x^2, \dots, x^m) . Considere agora uma solução de (3.1) que possua as seguintes propriedades:

- I) Seja contínua e diferenciável tanto quanto quisermos em qualquer região finita do espaço, com exceção da vizinhança de um único ponto de coordenadas (a^1, a^2, \dots, a^m) ;
 - II) Tenda para o infinito, o mais lentamente possível, quando as coordenadas tenderem para (a^1, a^2, \dots, a^m) , e também para as coordenadas dos pontos pertencentes às linhas bicaracterísticas^{[31],[40]} que passam através do ponto de coordenadas (a^1, a^2, \dots, a^m) .
- Então esta solução é chamada solução elementar da equação (3.1). Soluções que diferirem apenas por uma constante multiplicativa serão consideradas equivalentes.

Como um exemplo, podemos citar a equação de Laplace em três dimensões em coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 v = 0, \quad (3.2)$$

que é um caso particular de (3.1) com $f^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, $h^\alpha = k = 0$ e $m = 3$. Vemos facilmente que a solução que apresenta as propriedades I e II acima é

$$v(x, y, z) = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{-1/2}, \quad (3.3)$$

onde (a, b, c) são, obviamente, as coordenadas cartesianas do ponto singular referido no enunciado das propriedades I e II.

Hadamard^[31] demonstrou que, quando m é ímpar, (3.1) possui uma única solução elementar. Durante a prova do teorema de existência e unicidade da solução elementar, Hadamard também mostrou como construí-la, explicitamente. Para isto definimos a chamada variedade EDP (equação diferencial parcial), em que usamos como coordenadas as variáveis independentes (x^1, x^2, \dots, x^m) da equação (3.1), e como componentes do tensor métrico (a métrica EDP) os coeficientes das derivadas segundas, $f^{\alpha\beta}$. O elemento de linha na variedade EDP é dado então por

$$(ds)^2 = f_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.4)$$

com $f_{\alpha\sigma} f^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta$. Devemos ressaltar que a variedade EDP nada tem a ver com a variedade espaço-tempo associada ao problema físico que esteja sendo considerada na ocasião, embora os mesmos números (x^1, x^2, \dots, x^m) sejam coordenadas nas duas variedades.

Agora, na vizinhança do ponto singular, a solução elementar $G(x^i, a^i)$ pode ser expandida na forma^[31]

$$G(x^i, a^i) = \Gamma^{(1-m/2)} (U_0 + U_1\Gamma + U_2\Gamma^2 + \dots), \quad (3.5)$$

onde $\Gamma(a^i, x^i)$ denota o quadrado do comprimento do arco de geodésica que vai do ponto singular (a^1, a^2, \dots, a^m) ao ponto de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^m) , na variedade com a métrica EDP, e onde os $U_n(x^i, a^i)$ são funções analíticas das coordenadas, exceto na vizinhança do ponto singular.

U_0 é determinada pela equação

$$U_0 = \exp \left[- \int_0^s \left(f^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + h^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} - 2m \right) \frac{ds}{4s} \right], \quad (3.6)$$

onde ds é dado por (3.4) e o caminho de integração $s = s(a^i, x^i)$ é ao longo da geodésica que une o ponto singular de coordenadas a^i ao ponto de coordenadas x^i na variedade EDP. As outras funções são determinadas por relações de recorrência^[31].

Não vamos nos alongar mais aqui sobre a teoria das soluções elementares de Hadamard. O leitor atento já terá notado que elas são o que modernamente chamamos de funções de Green de um operador diferencial. A aplicação do método no próximo capítulo tornará, esperamos, mais claros os conceitos expostos neste resumo. O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar o anteriormente citado (e excelente) livro de Hadamard^[31].

Capítulo 4

Soluções Estáticas das Equações de Maxwell em Métricas de Fundo Estáticas

4.1 Cargas Pontuais Estacionárias em Métricas de Fundo Estáticas

4.1.1 Métrica de fundo de Schwarzschild^[2]

A métrica de Schwarzschild é

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2, \quad (4.1.1)$$

onde $2m$ é o raio gravitacional do corpo central de massa geométrica m , nestas coordenadas.

Considerando agora uma carga pontual estacionária colocada em $r = a (a > 2m)$, $\theta = 0$, (i.e., sobre o eixo z), a única componente não nula do quadri-potencial deve ser A_0 , e as únicas componentes não nulas de $F_{\mu\nu}$ devem ser F_{01} e F_{02} . Neste caso, a equação diferencial parcial a que A_0 (que denotaremos daqui em diante por Φ) obedece, obtida

substituindo o determinante da métrica acima em (2.2), é^[2]

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \csc \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \csc^2 \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (4.1.2)$$

Gostaríamos de aplicar a esta equação o método de Hadamard, já que ela é obviamente da forma (4.1) e parece razoável admitir, com Copson^[2], que o potencial da carga pontual no campo gravitacional de fundo dado por (4.1.1) é dado pela solução elementar de (4.1.2). Vamos então passar a um resumo do trabalho de Copson^[2].

Devemos notar, no entanto, que os coeficientes das derivadas segundas em (4.1.2) são funções das coordenadas, o que complica o cálculo das equações das geodésicas da variedade EDP, e portanto do comprimento do arco de geodésica Γ , que vai da carga pontual até o ponto cujas coordenadas na variedade EDP são idênticas às do ponto do espaço onde queremos calcular o potencial eletrostático Φ .

Seria interessante encontrarmos uma transformação de coordenadas que reduzisse os coeficientes das derivadas segundas à unidade ($f^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$), mostrando assim que a variedade EDP é, na realidade, uma variedade euclideana, onde o problema de resolver as equações das geodésicas é trivial.

Para isto, convém primeiro levar a métrica (4.1.1) para uma forma isotrópica (também dita com parte espacial conformalmente plana), ou seja, para a forma

$$(ds)^2 = A(R) (dx^0)^2 - B(R)(d\sigma)^2, \quad (4.1.3)$$

onde $(d\sigma)^2$ é a métrica plana em três dimensões, R é uma nova coordenada radial, e $A(R)$ e $B(R)$ são funções a serem determinadas. Com isto adquirimos a liberdade de efetuar transformações de coordenadas com facilidade na parte espacial da métrica.

A transformação da coordenada radial

$$r = \frac{m}{2R}(R + 1)^2 \quad (4.1.4)$$

leva a métrica a

$$(ds)^2 = \left[\frac{R-1}{R+1} \right]^2 (dx^0)^2 - \frac{m^2}{4} \left[\frac{R+1}{R} \right]^4 [(dR)^2 + R^2(d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2], \quad (4.1.5)$$

que é da forma (4.1.3), como queríamos.

Efetuada agora a transformação de coordenadas

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta \quad (4.1.6)$$

e substituindo (4.1.4) e (4.1.6) em (4.1.2), a equação diferencial para o potencial Φ assume a forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{2(2R-1)}{R^2(R^2-1)} \vec{r} \cdot \nabla \Phi = 0, \quad (4.1.7)$$

onde \vec{r} é o vetor posição no E_3 .

Conseguimos assim, com estas transformações, mostrar que a variedade EDP é na realidade o E_3 , conforme desejávamos, já que agora os coeficientes das derivadas segundas são todos iguais à unidade ($f^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$).

Vamos agora passar diretamente ao resultado de (4.1.7), obtido por Copson, para o potencial eletrostático de uma carga pontual na posição $R = A, \theta = 0$. O leitor interessado nos longos detalhes intermediários pode consultar o trabalho original de Copson^[2], de 1928:

$$\Phi(R, \theta) \propto \frac{1}{R(1+1/R)^2} \left\{ \left(\frac{1+A^2R^2-2AR\cos\theta}{A^2+R^2-AR\cos\theta} \right)^{1/2} + \left(\frac{1+A^2R^2-2AR\cos\theta}{A^2+R^2-AR\cos\theta} \right)^{-1/2} \right\} \quad (4.1.8)$$

Para termos o comportamento de Φ no limite de campos fracos lembramos que R e A são adimensionais devido a divisão pelo padrão de comprimento Gm/c^2 . Então para os campos fracos se tem

$$m \rightarrow 0, \quad R \gg 1, \quad A \gg 1; \quad (4.1.9)$$

e assim obtemos o limite

$$\lim_{m \rightarrow 0} \Phi = K_0 (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-1/2} ; \quad (4.1.10)$$

isso mostra que a solução elementar obtida pelo método de Hadamard fornece o resultado correto quando a métrica de fundo tende à de Minkowski.

Devemos notar que, neste caso limite, a constante K_0 deve ser igual à carga elétrica q . No entanto, não se deduz que ela tenha necessariamente este valor para todos os valores de m (esta é a razão do índice α colocado em K), o que já foi notado por J.M. Whittaker^[4], em 1928. Para determinação de K_m procederemos então do seguinte modo: Na próxima seção, calcularemos o potencial eletrostático gerado por um dipolo nas mesmas métricas de fundo para as quais calculamos o potencial eletrostático gerado por uma carga pontual nesta seção. O processo de cálculo do potencial de dipolo é, basicamente, uma derivação do potencial de carga pontual em relação à posição radial da carga.

Agora, quando analisamos o comportamento do potencial de dipolo para grandes distâncias nas métricas de fundo de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, que são assintoticamente planas, devemos obter uma expressão que tenha como termo dominante a expressão usual para um dipolo elétrico na origem em uma variedade de fundo plana. Derivando então (4.1.8) em relação a A , expandindo a expressão resultante para $R \gg A$ e impondo que o termo dominante seja o de dipolo elétrico nas condições mencionadas acima, obtemos para K_m o valor

$$K_m = \frac{4qA}{4a^2 + m^2} . \quad (4.1.11)$$

Agora, na (4.1.8) vemos que a solução elementar obtida possui duas singularidades. Este fato já foi notado por Copson^[2], que argumentou que desde que a métrica (4.1.5) só representa conformalmente o mapeamento da parte espacial, com $R > 1$, da métrica de Schwarzschild sobre a parte do espaço euclídeo para o qual $R > 1$, a segunda

singularidade, que está localizada em $R < 1$, não tem nenhum interesse neste caso (a primeira singularidade, em $R = A$, $\theta = 0$, obviamente representa a posição da carga).

Linet^[13], em 1976, criticou a solução de Copson, afirmando que, a partir do teorema de Gauss, se pode concluir que a solução obtida por Copson representa o potencial gerado por duas cargas, uma dentro e outra fora do horizonte de Schwarzschild. Propôs então que fosse adicionado à solução de Copson um termo de correção, que tornaria a solução singular em apenas um ponto, $r = a$, $\theta = 0$.

Em coordenadas usuais (ou seja, com a métrica na forma (4.1.1)), a solução de Linet se escreve

$$\Phi = \frac{q}{ar} \left(\frac{(r-m)(a-m) - m^2 \cos \theta}{[(r-m)^2 + (a-m)^2 - m^2 - 2(r-m)(a-m) \cos \theta + m^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} + m \right). \quad (4.1.12)$$

Esta solução apresenta a dificuldade de ser incompatível com a forma forte do princípio da equivalência, conforme foi salientado por Piazzese e Rizzi^{[25],[19]}.

Como, pelo exposto acima, a alternativa de Linet para a eliminação da segunda singularidade não parece conveniente, propomos a seguinte interpretação para a solução de Copson:

a) É um fato bem conhecido (ver, p. ex., Landau e Lifshitz^[32]) que as equações de Maxwell em um campo gravitacional estático de fundo podem ser interpretadas como estando em uma geometria de fundo euclídeana, mas com “constante” dielétrica e permeabilidade magnética sendo funções da posição, ou seja, em meio não homogêneo.

b) No caso específico que estamos tratando, se partirmos da equação

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.1.13)$$

com $\mathbf{D} = \varepsilon(R)\mathbf{E}$ e

$$\varepsilon(R) = \frac{(R+1)^3}{R^2(R-1)}, \quad (4.1.14)$$

chegamos a

$$\nabla^2\Phi - \frac{2(2R-1)}{R^2(R^2-1)} \vec{r} \cdot \nabla\Phi = 0. \quad (4.1.15)$$

Mas esta equação é idêntica à (4.1.7); logo, poderíamos também dizer que o potencial eletrostático dado por (4.1.8) é gerado por uma carga pontual colocada em um meio dielétrico com “constante” dielétrica dada por (4.1.14). Agora, em $R = 1$, vemos que $\varepsilon \rightarrow \infty$. Como é bem conhecido, o limite $\varepsilon \rightarrow \infty$ corresponde à transição isolante-metal. Tudo se passa então como se tivéssemos uma superfície esférica condutora, em $R = 1$.

Logo a solução de Copson é correta, sendo a segunda carga mencionada por Linet a carga imagem que naturalmente deve aparecer neste caso (devemos mencionar que Copson notou o fato da superfície singular se comportar como um condutor perfeito, em seu trabalho de 1978^[18] sobre o assunto). É apropriado também mencionar que Linet baseou sua correção ao trabalho de Copson em uma expansão do potencial dado por (4.1.8) para $\varepsilon \rightarrow \infty$, que apresenta dois termos com comportamento da forma $1/R$, com sinais opostos. Isto é totalmente compatível com a interpretação da segunda carga como carga imagem, por nós proposta.

A Figura 1 mostra a forma das superfícies equipotenciais para o potencial eletrostático de uma carga pontual na métrica de fundo de Schwarzschild (4.1.1) .

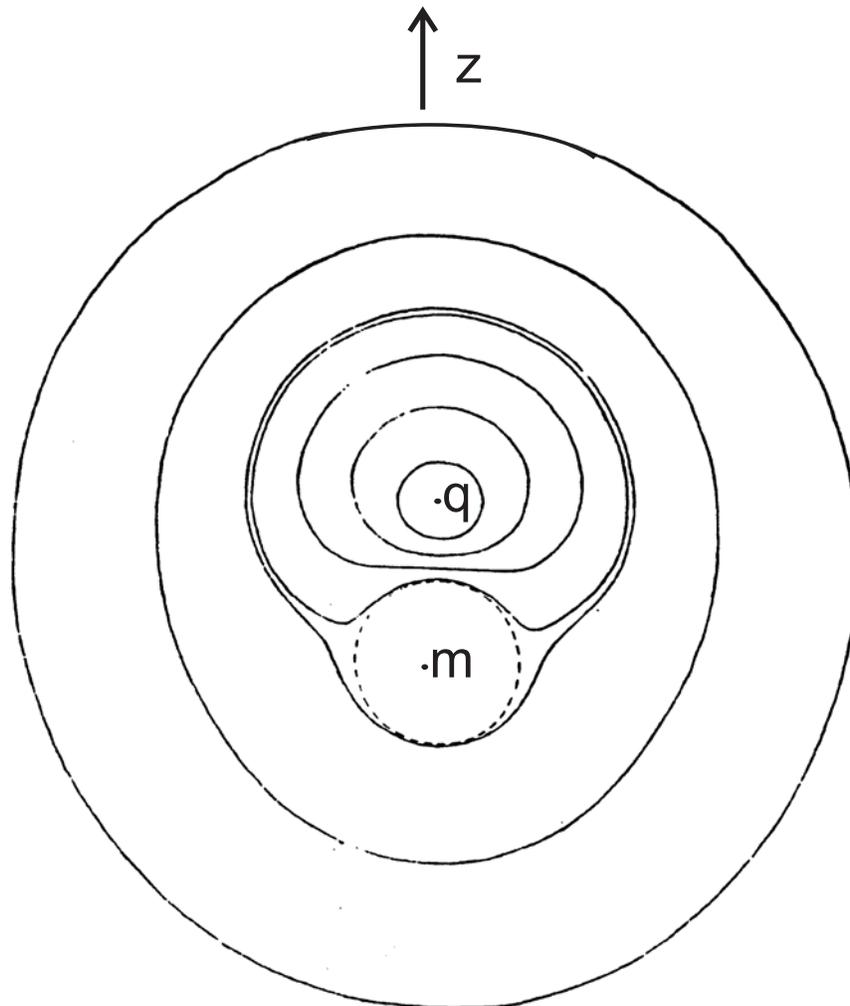


Figura 1 – Superfícies equipotenciais para carga elétrica pontual sob a influência de um campo gravitacional de fundo de Schwarzschild (4.1.1). A carga q está a uma distância $4m$ do centro da superfície singular, que é representada pela linha tracejada.

4.1.2 Métrica de fundo de Reissner-Nordström^[14]

Consideraremos agora a métrica de fundo

$$(ds^2) = \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2}\right)^{-1} (dR)^2 - R^2 [(d\theta)^2 + \text{sen}^2\theta(d\phi)^2] , \quad (4.1.16)$$

onde e é a carga do corpo central. Vamos considerar aqui o caso $m^2 > e^2$. Neste caso há dois horizontes (superfícies singulares), dados por

$$\begin{aligned} R_1 &= m + (m^2 - e^2)^{1/2} , \\ R_2 &= m - (m^2 - e^2)^{1/2} . \end{aligned}$$

Considerando agora uma carga pontual colocada em $R = a$, $\theta = 0$ ($a > R_1$), e procedendo de maneira análoga ao caso da métrica de fundo de Schwarzschild, obtemos para o potencial eletrostático a seguinte equação:

$$\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (4.1.17)$$

Seguindo Leauté e Linet^[14], vamos introduzir as transformações

$$R_s = R - R_2 \quad , \quad \Phi^s = \frac{R}{R - R_2} \Phi ; \quad (4.1.18)$$

substituindo estas relações em (4.1.17) obtemos

$$\left(1 - \frac{2M}{R_s}\right) \frac{\partial}{\partial R_s} \left(R_s^2 \frac{\partial \Phi^s}{\partial R_s}\right) + \frac{1}{\text{csc}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \Phi^s}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\text{csc}^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi^s}{\partial \phi^2} = 0 , \quad (4.1.19)$$

onde fizemos $(m^2 - e^2)^{1/2} = M$. Mas esta equação é formalmente idêntica à (4.1.2), que corresponde ao potencial eletrostático em uma métrica de fundo de Schwarzschild. Logo, uma solução neste caso pode ser imediatamente escrita para Φ^s :

$$\Phi^s = \frac{K_m r_s}{(r_s + 1)^2} \left[\left(\frac{a_s^2 r_s^2 + 1 - 2a_s r_s \cos \theta}{r_s^2 + a_s^2 - 2a_s r_s \cos \theta} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_s^2 + a_s^2 - 2a_s r_s \cos \theta}{a_s^2 r_s^2 + 1 - 2a_s r_s \cos \theta} \right)^{1/2} \right] , \quad (4.1.20)$$

com $K_M = \text{constante}$ e onde fizemos

$$R_s = \left(\frac{M}{2r_s}\right)(r_s + 1)^2 \quad , \quad a = R_2 + \left(\frac{M}{2a_s}\right)(a_s + 1)^2 \quad , \quad (4.1.21)$$

como no caso de métrica de fundo de Schwarzschild.

Efetuada agora uma transformação de coordenadas análoga àquela dada por (4.1.9) no caso da métrica de fundo de Schwarzschild, e com as mesmas observações, a constante K_M deve ter um valor formalmente idêntico ao dado por (4.1.11).

Todas as observações feitas sobre as singularidades de (4.1.8) se aplicam novamente à (4.1.20). Devemos notar que, embora a métrica de Reissner-Nordström, com $m^2 > e^2$, possua dois horizontes, apenas uma carga imagem aparece.

Isto é fisicamente razoável, já que a superfície singular externa ($R = R_1$, ou $R_s = 2M$, ou ainda $r_s = 1$) , ao se comportar como um condutor perfeito, deve blindar todos os efeitos eletrostáticos para pontos do seu interior e, portanto, a superfície singular interna não toma conhecimento da existência da carga pontual em $R = a$, $\theta = 0$.

Um caso particular interessante de (4.1.19) foi resolvido por Adler e Das^[19], a saber, o caso $m = e$ (e logo $M = 0$). O interessante neste caso particular é que um sistema de partículas carregadas com esta razão carga/massa (ou com razão $m = -e$) permanece em equilíbrio, em qualquer configuração estática.

Além disso, a situação fica tão simples que é possível integrar as equações de Maxwell diretamente em coordenadas usuais, como realmente o fizeram Adler e Das^[19]. No entanto, é ainda mais simples fazer $M = 0$ em (4.1.19), que se torna então idêntica à equação de Laplace em uma métrica de fundo de Minkowski. Vemos ainda que neste caso $R_1 = R_2 = m$, e o potencial eletrostático para uma carga pontual em $R_s = A_s$, $\theta = 0$ fica

$$\Phi^s = \frac{K}{[(R_s)^2 + (A_s)^2 - 2A_s R_s \cos \theta]^{1/2}} \quad . \quad (4.1.22)$$

Efetuada novamente uma transformação do tipo (4.1.9), ou seja, neste caso

$$\bar{R}_s = \left(\frac{m}{2}\right) R_s , \quad (4.1.23)$$

obtemos, utilizando um procedimento análogo ao da métrica de fundo de Schwarzschild para determinar a constante K ,

$$\Phi = \frac{q}{1 + m/R_s} \left[(\bar{R}_s)^2 + (\bar{A}_s)^2 - 2\bar{A}_s\bar{R}_s \cos \theta \right]^{-1/2} . \quad (4.1.24)$$

4.1.3 Métricas de fundo de Einstein e de de Sitter^[4]

Recentemente foi feita^[29] a aplicação do método de Hadamard a dois casos de métricas cosmológicas estáticas de fundo. Relembremos que ambas as métricas foram obtidas como soluções das equações de Einstein com constante cosmológica λ , i.e.,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (4.1.25)$$

Em coordenadas isotrópicas, a solução de Einstein que representa um universo estático pode ser escrita^[4]

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - \frac{1}{(1 + \mu r^2)^2} [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2] , \quad (4.1.26)$$

onde $\mu = \left(\frac{\lambda}{12}\right) > 0$. A equação diferencial para o potencial eletrostático fica então^[4]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r(1 + \mu r^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (4.1.27)$$

J.M. Whittaker^[4] mostrou que esta equação é satisfeita pela expressão

$$\Phi = k \left\{ \left[\frac{1 + \mu^2 a^2 r^2 + 2\mu a r \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2a r \cos \theta} \right]^{1/2} - \mu \left[\frac{r^2 + a^2 - 2a r \cos \theta}{1 + \mu^2 a^2 r^2 + 2\mu a r \cos \theta} \right]^{1/2} \right\} , \quad (4.1.28)$$

que é assim o potencial eletrostático de uma carga pontual em $r = a$, $\theta = 0$, na métrica de fundo cosmológica de Einstein dada por (4.1.26). Um procedimento análogo ao das métricas de fundo de Schwarzschild e de Reissner-Nordström leva ao seguinte valor para a constante k :

$$k = q . \quad (4.1.29)$$

No caso da métrica de fundo de de Sitter, que pode ser escrita^[4]

$$(ds)^2 = \left[\frac{1 - \mu r^2}{1 + \mu r^2} \right]^2 (dx^0)^2 - \frac{1}{(1 + \mu r^2)^2} [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2] , \quad (4.1.30)$$

onde $\mu = \lambda/12$, obtemos para o potencial eletrostático a equação

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r(1 - \mu r^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (4.1.31)$$

Esta equação difere de (4.1.27) somente pelo sinal de μ . Podemos então escrever imediatamente sua solução^[4]

$$\varphi = k \left\{ \left[\frac{1 + \mu^2 a^2 r^2 - 2\mu a r \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2a r \cos \theta} \right]^{1/2} + \mu \left[\frac{r^2 + a^2 - 2a r \cos \theta}{1 + \mu^2 a^2 r^2 - 2\mu a r \cos \theta} \right]^{1/2} \right\} , \quad (4.1.32)$$

onde simplesmente tomamos (4.1.28), substituindo μ por $-\mu$. Procedendo agora de maneira idêntica ao caso da métrica de fundo de Einstein, obtemos novamente para a constante k o valor

$$k = q . \quad (4.1.33)$$

Por último, queríamos lembrar que a forma da métrica de de Sitter que utilizamos aqui não é a mais conhecida, a que tem despertado nos últimos anos algum interesse pela

sua ligação com o conceito de Universo inflacionário. Esta forma é obtida a partir de^[4]

$$(ds)^2 = \left[1 - \frac{\lambda}{3} r^2\right] (dx^0)^2 - \left\{ \frac{(dr)^2}{1 - \frac{\lambda}{3} r^2} + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right\}, \quad (4.1.34)$$

fazendo as substituições

$$r' = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{3} r^2\right)^{1/2}} e^{-c\sqrt{\lambda/3} t}, \quad (4.1.35)$$

$$t' = t + \frac{\sqrt{3/\lambda}}{2c} \log_e \left(1 - \frac{\lambda}{3} r^2\right). \quad (4.1.36)$$

Então (4.1.34) toma a forma bem conhecida

$$(ds)^2 = (cdt')^2 - e^{2\sqrt{\lambda/3} ct'} \left[(dr')^2 + r'^2 (d\theta)^2 + r'^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right], \quad (4.1.37)$$

como foi mostrado independentemente por Lemaître^[41] e Robertson^[42].

A forma que utilizamos, (4.1.3), é obtida a partir de (4.1.34) fazendo

$$r = \frac{r'}{1 + \mu r'^2}, \quad \mu = \frac{\lambda}{12}. \quad (4.1.38)$$

4.2 Dipolos Pontuais Estáticos em Métricas de Fundo Estáticas^[21]

Como já foi mencionado na Introdução, o conhecimento dos campos de dipolo eletrostáticos em métricas de fundo curvas é importante, pois os resultados podem ser usados como condições limites quando efetuamos os cálculos para os campos de radiação de dipolo elétrico, nas mesmas condições.

Como o conceito de momento de dipolo elétrico, bem como o de momentos de multipolo de ordem superior, envolve considerações geométricas, devemos esperar que

o fato de a variedade de fundo ser não-euclideana conduza a modificações nas definições dos momentos de multipolo. Vamos investigar mais de perto o caso do momento de dipolo elétrico na próxima seção.

4.2.1 O momento de dipolo elétrico

Na eletrostática usual (em um fundo minkowskiano) os potenciais eletrostáticos de duas cargas pontuais (uma em $R = a$, $\theta = 0$ e a outra em $R = b$, $\theta = 0$) podem ser escritos

$$\begin{aligned}\varphi_a &= -q \sum_{l=0} \frac{a^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) , & R > b > a , \\ \varphi_b &= q \sum_{l=0} \frac{b^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) ,\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

onde escolhemos a carga em $R = a$ com o mesmo módulo mas com sinal contrário ao da carga em $R = b$. O potencial resultante em um ponto genérico será

$$\varphi(R, \theta) = q \sum_{l=0} \frac{b^l - a^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) .\tag{4.2.2}$$

Vamos fazer $b = a + \varepsilon$, onde ε é infinitésimo. Obtemos

$$b^l = (a + \varepsilon)^l = a^l + l a^{l-1} \varepsilon + O(\varepsilon^2) , \quad l > 1 .$$

Substituindo esta expressão em (4.2.2) obtemos até primeira ordem em ε

$$\varphi(R, \theta) = p_0 \sum_{l=0} \frac{l a^{l-1}}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) , \quad R > a\tag{4.2.3}$$

onde fizemos (pois $\varepsilon = \lim_{b \rightarrow a} (b - a)$)

$$p_0 = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ b \rightarrow a}} q(b - a) ,\tag{4.2.4}$$

que é suposta uma quantidade finita. Falamos então em *dipolo pontual* com momento p_0 . Vamos propor agora a seguinte generalização para o conceito de momento de dipolo

elétrico no caso de variedades de fundo curvas (ou, mais precisamente, para o seu módulo)^[21]:

$$p_0 = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ b \rightarrow a}} \left[q \int_a^b (|g_{ij} dx^i dx^j|)^{1/2} \right]. \quad (4.2.5)$$

Estamos considerando dipolos estáticos, (então a soma deve ser tomada sobre somente os índices espaciais): duas cargas pontuais de mesmo módulo e sinais contrários, uma no ponto a e a outra no ponto b .

A integral em (4.2.5) depende, obviamente, do caminho de integração. Suporemos sempre, para a e b arbitrários que a integração deve ser efetuada ao longo da geodésica mais curta que liga os pontos a e b . Agora, em todas as métricas de fundo que utilizaremos nesta tese as duas cargas pontuais que compõem o dipolo serão supostas localizadas sobre a linha $\theta = 0$ (que é uma geodésica particular para todas as métricas de fundo referidas). Além disso, todas estas métricas são diagonais. Neste caso, (4.2.5) pode ser escrita

$$p_0 = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[q \int_a^{a+\varepsilon} |g_{11}|^{1/2} dr \right]. \quad (4.2.6)$$

Utilizando o teorema do valor médio para integrais, obtemos

$$p = 0 \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} [q\varepsilon |g_{11}(y)|^{1/2}] , \quad (4.2.7)$$

desde que $|g_{11}|^{1/2}$ seja uma função contínua de y no intervalo de integração. Passando ao limite e usando (4.2.4) ficamos com

$$p = p_0 |g_{11}(a)|^{1/2} . \quad (4.2.8)$$

É importante ressaltar que ao sugerirmos (4.2.5) como generalização do conceito de momento de dipolo, tomamos como hipótese de trabalho que o conceito de carga elétrica, representado pelo coeficiente q , estivesse bem definido. Conforme ressaltamos após a

equação (4.1.16), este problema não é trivial. De novo, remetemos o leitor à análise dos resultados no final do capítulo, onde discutiremos o assunto com mais profundidade.

Passaremos agora ao cálculo da forma explícita dos potenciais de dipolo eletrostático em algumas métricas de fundo com curvatura.

4.2.2 Métrica de Reissner-Nordström otimamente carregada

$$(m^2 = e^2)$$

Repetimos, para consulta mais fácil, a métrica em questão:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{m}{R}\right)^2 (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{m}{R}\right)^{-2} (dR)^2 - R^2(d\theta)^2 - R^2 \text{sen}^2\theta (d\phi)^2 .$$

Apresentaremos aqui somente este caso, já que é o que implica nos cálculos mais simples.

Notando que (4.1.24) pode ser escrita^[21]

$$\varphi(R, \theta) = q \sum_{l=0} \frac{(a-m)^l}{R(R-m)^l} P_l(\cos \theta) , \quad (4.2.9)$$

o potencial eletrostático para a distribuição de carga da seção anterior será

$$\varphi(R, \theta) = q \sum_{l=0} \frac{(b-m)^l - (a-m)^l}{R(R-m)^l} P_l(\cos \theta) . \quad (4.2.10)$$

Notamos que pudemos superpor os dois potenciais de carga pontual para obter (4.2.10), porque supusemos que ambas as cargas são do tipo “teste”. Se as cargas causassem qualquer perturbação na métrica de fundo esta superposição obviamente não seria correta.

Tomando agora $b = a + \varepsilon$ e deixando $q \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, (4.2.10) torna-se

$$\varphi(R, \theta) = p \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(a-m)^{l-1}}{R(R-m)^l} P_l(\cos \theta) , \quad (4.2.11)$$

onde supusemos que o limite p de $q\varepsilon$, quando $q \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, embora finito, permanece pequeno o suficiente para que o “dipolo pontual” assim obtido praticamente não perturbe a variedade de fundo.

Agora, quando $R \rightarrow a$ e $\theta \rightarrow 0$, esta expressão deve comportar-se como (4.2.3), de vez que muito próximo do dipolo o potencial deve ser independente do campo gravitacional de fundo. Esta suposição se baseia na interpretação do campo gravitacional de fundo como um meio dielétrico com “constante” dielétrica dependendo da posição, que mencionamos no final da seção 4.1.3.

Tomando então os limites de (4.2.3) e (4.2.11) quando $R \rightarrow a$ e $\theta \rightarrow 0$ e igualando-os termo a termo vem

$$\frac{p}{a^2} = \frac{p_0}{a(a-m)};$$

logo, vemos que devemos ter

$$p = p_0 \frac{a}{a-m}. \quad (4.2.12)$$

Mas esta é precisamente a relação entre p e p_0 que obtemos de (4.2.8), com g_{11} obtido de (4.1.16) com $e^2 = m^2$. Este resultado aumenta nossa confiança em (4.2.5), que nos parece ser a generalização natural do conceito de momento de dipolo elétrico, para o caso de variedades curvas. Podemos agora escrever (4.2.11) na forma

$$\varphi(R, \theta) = p \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(a-m)^l}{aR(R-m)^l} P_l(\cos \theta), \quad (4.2.13)$$

interpretando p , dado por (4.2.12), como o momento de dipolo.

Há uma diferença curiosa, entre o caso com métrica de fundo de Reissner-Nordström otimamente carregada e o com fundo de Minkowsky. De (4.2.3) vemos que o primeiro termo não nulo da série é

$$\varphi(R, \theta) = \frac{p_0 \cos \theta}{R^2}, \quad (4.2.14)$$

que é independente de a . Esta expressão é a do potencial eletrostático gerado por um dipolo na origem, e pode ser considerada uma aproximação válida para (4.2.3) quando

$R \gg a$. Já no caso da variedade de fundo considerada nesta seção, o primeiro termo de (4.2.13) é

$$\varphi(R, \theta) = p \frac{(a - m) \cos \theta}{aR(R - m)} , \quad (4.2.15)$$

que, por ser dependente de a , envolve de alguma maneira o fato do dipolo não estar na origem.

Uma característica mais interessante de (4.2.13) é que podemos calcular a soma da série em forma fechada. De fato, chamando $a - m = x$ e usando (4.1.24) e (4.2.9)^[21], obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta) &= p_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l x^{l-1}}{R(R - m)^l} P_l(\cos \theta) = \\ &= p_0 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{R(R - m)^l} P_l(\cos \theta) = \\ &= p \left(1 - \frac{m}{R}\right) \frac{(R - m) \cos \theta - (a - m)}{(\bar{R})^3} , \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

onde usamos (4.2.12) fizemos

$$\bar{R} = [(R - m)^2 + (a - m)^2 - 2(R - m)(a - m) \cos \theta]^{1/2} .$$

Notamos que (4.2.16) não é contínua ao longo da linha $\theta = 0$, tendo uma descontinuidade finita em $R = a$ ^[21].

Devemos notar também que, a rigor, a série em (4.2.16) converge apenas para $R > a$; no entanto, para $R < a$, é fácil ver que encontraríamos uma série diferente, mas que convergiria para o mesmo resultado final (4.2.16).

Esta situação é análoga à da eletrostática usual, onde temos, como é bem conhecido,

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{R'^{l+1}} P_l(\cos \theta) , & R < R' , \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R'^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) , & R > R' . \end{cases}$$

Vamos escrever agora as componentes do tensor campo eletromagnético não nulas neste caso, F_{01} e F_{02} . Usaremos uma base de tetrada, já que nesta base o significado físico das componentes é o mesmo da variedade de fundo plana (como sabemos, a base de tetrada nos dá um espaço tangente plano local). Definiremos nossa tetrada e_a^μ por

$$e_a^\mu = |g^{\mu\mu}|^{1/2} \delta_a^\mu \quad (\text{não há soma em } \mu) , \quad (4.2.17)$$

onde a é o índice de tetrada e μ o de espaço-tempo. As componentes de tetrada F_{ab} são dadas, em função das componentes naturais, por

$$F_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu F_{\mu\nu} . \quad (4.2.18)$$

Chamando agora as componentes de tetrada de F_{01} e F_{02} de E_R e E_θ respectivamente, vem

$$\begin{aligned} E_R &= -|g^{00}g^{11}|^{1/2} \varphi_{|R} , \\ E_\theta &= -|g^{00}g^{22}|^{1/2} \varphi_{|\theta} , \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} E_R &= -p_0 \left\{ \frac{(R^2 - m^2) \cos \theta - m(a - m)}{R^2(\bar{R})^3} + 3 \left(1 - \frac{m}{R}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{(a - m)(R - m)(1 + \cos^2 \theta) - [(R - m)^2 + (a - m)^2] \cos \theta}{(\bar{R})^5} \right) \right\} \quad (4.2.19) \end{aligned}$$

$$E_\theta = p_0 \left(1 - \frac{m}{R}\right) \text{sen} \theta \left\{ \frac{1}{\bar{R}^3} - \frac{3}{\bar{R}^5} (a - m) [(R - m) \cos \theta - (a - m)] \right\} . \quad (4.2.20)$$

Conhecidas as componentes não nulas do campo elétrico de dipolo, é fácil obter o campo magnético associado a um dipolo magnético disposto em condições iguais ao dipolo elétrico. Este campo magnético é obtido pela chamada transformação de dualidade, que associa ao tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ o tensor dual

$${}^*F_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} .$$

Conhecidas as componentes de tetrada elétricas E_R e E_θ , as componentes de tetrada magnéticas B_R e B_θ são simplesmente^[21]

$$B_R = \frac{\mu}{p} E_R, \quad (4.2.21)$$

$$B_\theta = \frac{\mu}{p} E_\theta,$$

onde μ é o módulo do momento magnético do dipolo localizado em $R = a$, $\theta = 0$ e orientado no sentido positivo do eixo z (para fora). As componentes de tetrada B_R e B_θ correspondem às componentes tensoriais F_{32} e F_{13} , que são então obtidas segundo

$$\begin{aligned} F_{32} &= (g_{33}g_{22})^{1/2} B_R, \\ F_{13} &= (g_{11}g_{33})^{1/2} B_\theta; \end{aligned}$$

finalmente, usando a métrica obtemos

$$\begin{aligned} F_{32} &= - \left(\frac{\mu}{p} \right) R^2 \text{sen}\theta \varphi_{|R}, \\ F_{13} &= - \left(\frac{\mu}{p} \right) g^{00} \text{sen}\theta \varphi_{|\theta}, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

de onde podemos facilmente, usando a expressão (4.2.16) para φ , obter expressões explícitas para as componentes do campo magnético.

Como no caso da carga pontual, o campo eletrostático é puramente radial (medido na base tetrada) em $R = m$, ou seja, na superfície singular desta geometria; isto é facilmente constatado fazendo-se $R = m$ em (4.2.19) e (4.2.20).

Vamos agora interpretar nossos resultados quando o dipolo se aproxima da superfície singular. De (4.2.16) é fácil ver que quando $a \rightarrow m$

$$\varphi(R, \theta) \rightarrow \frac{p \cos \theta}{R(R - m)}. \quad (4.2.23)$$

Devemos ser cuidadosos, no entanto, na interpretação física desta expressão, exceto no caso trivial em que $m = 0$ (o potencial, em um fundo plano, de um dipolo na origem). Relembramos que o processo matemático de tomar o limite envolvido na definição do “dipolo pontual” expressa o fato físico de que estamos medindo o campo a uma distância muito maior do que a separação entre as duas cargas que constituem o dipolo. Em outras palavras, “dipolo pontual” é um conceito matemático; qualquer dipolo real é formado por cargas de intensidade finita, separadas por distâncias finitas.

Agora, no caso do problema em questão, com o dipolo orientado radialmente, o módulo do momento de dipolo, dado por (4.2.12), tende claramente a infinito quando $a \rightarrow m$. Logo, dizemos que não faz sentido, no nosso caso, falar de um dipolo orientado radialmente em $a = m$. À medida que a tende a m as distâncias radiais aumentam, e torna-se cada vez mais difícil ter o ponto de observação a uma distância muito maior que a separação entre as duas cargas pontuais que constituem o dipolo.

Então, à medida que $a \rightarrow m$, chegaremos a uma situação tal que a separação entre as cargas será tão grande que teremos que considerar o campo de cada carga separadamente; utilizando então (4.1.28) com $a = m$, vemos que o campo de cada carga se torna puramente radial, à medida que elas se aproximam da superfície singular. Interpretaremos isto dizendo que ambas as cargas serão “engolidas” pelo corpo central^[21].

4.2.3 Métricas de fundo cosmológicas de Einstein e de de Sitter

No caso do fundo cosmológico de Einstein, o potencial de um dipolo estático na origem é facilmente obtido superpondo as contribuições de duas expressões do tipo (4.1.28), uma com carga positiva q em $z = r = \epsilon$ e outra com carga $-q$ em $r = 0$, onde $\epsilon > 0$ é um infinitésimo. Obtemos

$$\varphi(r, \theta) = \frac{p_0 \cos \theta}{r^2} (1 + \mu r^2)^2, p_0 = q\epsilon. \quad (4.2.24)$$

De modo análogo ao caso de uma carga pontual, o potencial eletrostático para um dipolo na origem, em um fundo cosmológico de de Sitter, é obtido de (4.2.24) trocando μ por $-\mu$:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{p_0 \cos \theta}{r^2} (1 - \mu r^2)^2. \quad (4.2.25)$$

A Figura 2 mostra as superfícies equipotenciais para um dipolo eletrostático na métrica de fundo de de Sitter.

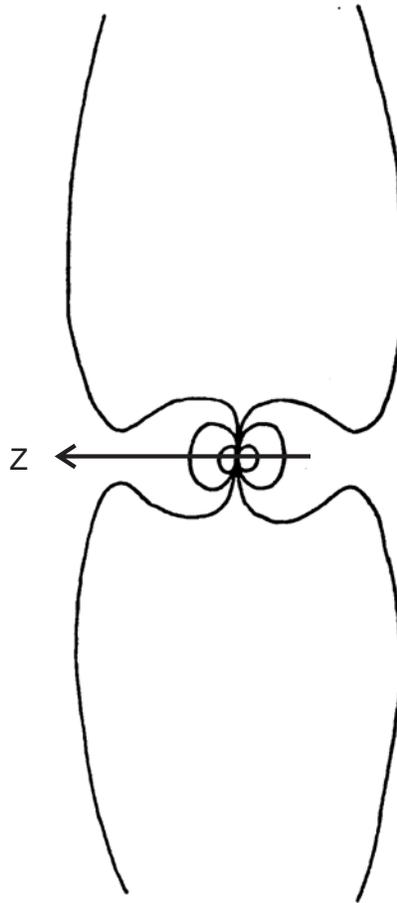


Figura 2 Superfícies equipotenciais para um dipolo elétrico pontual na métrica de fundo de de Sitter (4.1.30), colocado na origem. Notamos que próximo ao dipolo (origem) elas tendem às superfícies esféricas do espaço-tempo plano.

4.3 Um Exemplo de Solução Magnetostática Direta^[28]

Como fizemos no caso particular de um dipolo eletrostático em uma métrica de fundo de Reissner-Nordström com “carga igual à massa” (seção 4.2.2), podemos, a partir das soluções obtidas nas outras métricas de fundo, obter soluções para um dipolo magnetostático, utilizando uma rotação de dualidade^[29]. Nesta seção vamos, no entanto, apresentar um cálculo direto para um campo magnetostático, que é interessante pela sua simplicidade^[28]. Considere a métrica de fundo

$$(ds^2) = \alpha^2(R) (dx^0)^2 - \beta^2(R) [(d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2] , \quad (4.3.1)$$

$$R = (\rho^2 + z^2)^{1/2} ;$$

todas as métricas utilizadas por nós até agora podem, é óbvio, ser postas nesta forma. Vamos procurar agora uma solução das equações de Maxwell, nesta métrica de fundo, sujeita às seguintes condições:

- a) a única componente não-nula do 4-potencial é $A_3 = A_z$;
- b) A_z é função de $x^1 = \rho$ e $x^3 = z$ somente.

Com estas condições, a única componente não-nula do tensor campo eletromagnético é

$$F_{13} = -F_{31} = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} ,$$

e as equações de Maxwell se resumem a

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{-g} g^{11} g^{33} F_{13}) = 0 , \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{-g} g^{11} g^{33} F_{31}) = 0 . \quad (4.3.3)$$

Agora, (4.3.2) implica em a quantidade entre parênteses ser independente de z , enquanto (4.3.3) implica em a mesma quantidade (desde que $F_{31} = -F_{13}$) ser independente de ρ . Como as componentes do tensor métrico são também funções apenas de ρ e z , concluímos que

$$\sqrt{-g} g^{11} g^{33} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = k = \text{const.} \quad (4.3.4)$$

Substituindo agora $\sqrt{-g}$, g^{11} e g^{33} da métrica (4.3.1),

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{k}{\rho} \left| \frac{\beta(R)}{\alpha(R)} \right|. \quad (4.3.5)$$

Para interpretar (4.3.5) fisicamente, vamos fazer $\alpha = \beta = 1$, o que corresponde a fazer o campo gravitacional de fundo igual a zero. Neste caso as componentes de $F_{\mu\nu}$ têm a interpretação euclideana usual, e obtemos

$$B_\phi = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{k}{\rho}, \quad (4.3.6)$$

que é, com boa aproximação, a única componente não nula do campo magnético gerado por uma corrente retilínea, de intensidade constante, na direção z , medido em pontos para os quais ρ é muito menor que a distância às extremidades da distribuição de corrente. (Como é bem conhecido dos textos de Física Elementar, (4.3.6) seria correta em qualquer ponto somente para o caso ideal de uma distribuição retilínea infinitamente longa de corrente). Interpretaremos então (4.3.5) como expressando o campo magnético no caso de uma variedade de fundo cuja métrica é dada por (4.3.1).

Vamos agora aplicar (4.3.5) a alguns casos especiais:

a) Métrica de Schwarzschild

Em coordenadas isotrópicas, os coeficientes da métrica (4.3.1) são, neste caso, dados por^[33]

$$\alpha^2(R) = \frac{\left(R - \frac{m}{2}\right)^2}{\left(R + \frac{m}{2}\right)^2}, \quad \beta^2(R) = \frac{\left(R + \frac{m}{2}\right)^4}{R^4},$$

e obtemos, usando (4.3.5),

$$B_\phi = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{k}{\rho} \frac{\left(R + \frac{m}{2}\right)^3}{R^2 \left(R - \frac{m}{2}\right)}. \quad (4.3.7)$$

b) Métrica de Reissner-Nordström

Esta métrica pode ser posta facilmente em forma isotrópica, utilizando os métodos descritos na Ref. 33. Obtemos

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \left[\frac{1 - \frac{m^2 - e^2}{4R^2}}{1 + \frac{m}{R} + \frac{m^2 - e^2}{4R^2}} \right]^2 (dx^0)^2 \\ &\quad - \left[1 + \frac{m}{R} + \frac{m^2 - e^2}{4R^2} \right]^2 (d\sigma)^2, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

onde $(d\sigma)^2$ é, como usual, a métrica do triespço euclideano. O campo magnético fica então, neste caso,

$$B_\phi = \frac{k}{c} \frac{\left[1 + \frac{m}{R} + \frac{m^2 - e^2}{4R^2} \right]^2}{R^2 \left[1 - \frac{m^2 - e^2}{4R^2} \right]}. \quad (4.3.9)$$

Há um caso particular bem simples desta métrica, em que as duas superfícies singulares coincidem (métrica de Reissner-Nordström com “carga igual à massa”). Voltamos a lembrar que o interesse neste caso particular vem do fato de que um corpo esfericamente simétrico com esta razão carga-massa permanece em equilíbrio estável, já que a repulsão eletrostática entre as suas partes é exatamente contrabalançada pela atração gravitacional. Também, dois corpos esfericamente simétricos com esta razão carga-massa são insensitivos um ou outro, isto é, as suas interações elétrica e gravitacional se cancelam mutuamente^[21]. Obtemos o campo magnético neste caso fazendo $m^2 = e^2$ em (4.3.9), o que dá

$$B_\phi = \frac{k}{\rho} \left(1 + \frac{m}{R} \right)^2. \quad (4.3.10)$$

c) Campo gravitacional uniforme

A métrica para este caso foi obtida pela primeira vez por Whittaker^[1], e pode ser facilmente colocada em forma isotrópica. Obtemos, para $gz \geq 0$,

$$(ds)^2 = \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)^2 (dx^0)^2 - [(d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2] ; \quad (4.3.11)$$

logo, neste caso,

$$\alpha^2 = \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)^2 , \quad \beta^2 = 1 ;$$

e obtemos para o campo magnético

$$B_\phi = \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{k}{\rho}\right) . \quad (4.3.12)$$

4.4 Análise dos Resultados Obtidos Neste Capítulo

Com relação ao resultado para o potencial da carga pontual na métrica de fundo de Schwarzschild, fica bem visível na Figura 1 a influência do campo gravitacional de fundo, que se manifesta por uma acentuada distorção das superfícies equipotenciais, em relação ao seu formato quando a variedade de fundo é plana.

Nos casos cosmológicos aqui estudados, a distorção, que ocorre no caso das equipotenciais de dipolo, só é apreciável para distâncias de ordem também cosmológica. Isto já era de se esperar, já que localmente as variedades de Einstein e de de Sitter vão se confundir com as respectivas variedades tangentes planas (Figura 2).

No caso do campo magnético gerado por uma corrente retilínea (Sec. 4.3), a inspeção das Figuras 3 e 4 nos mostra que, para um valor de ρ fixo, o campo magnético é mais intenso nos pontos mais próximos às fontes do campo gravitacional. Isto ilustra a “atração” da energia armazenada no campo magnético pelo campo gravitacional, um fenômeno análogo ao “entortamento” das linhas de força do campo eletrostático de

uma carga pontual no campo gravitacional uniforme de fundo,^[1] sendo, fisicamente, um resultado razoável de se esperar.

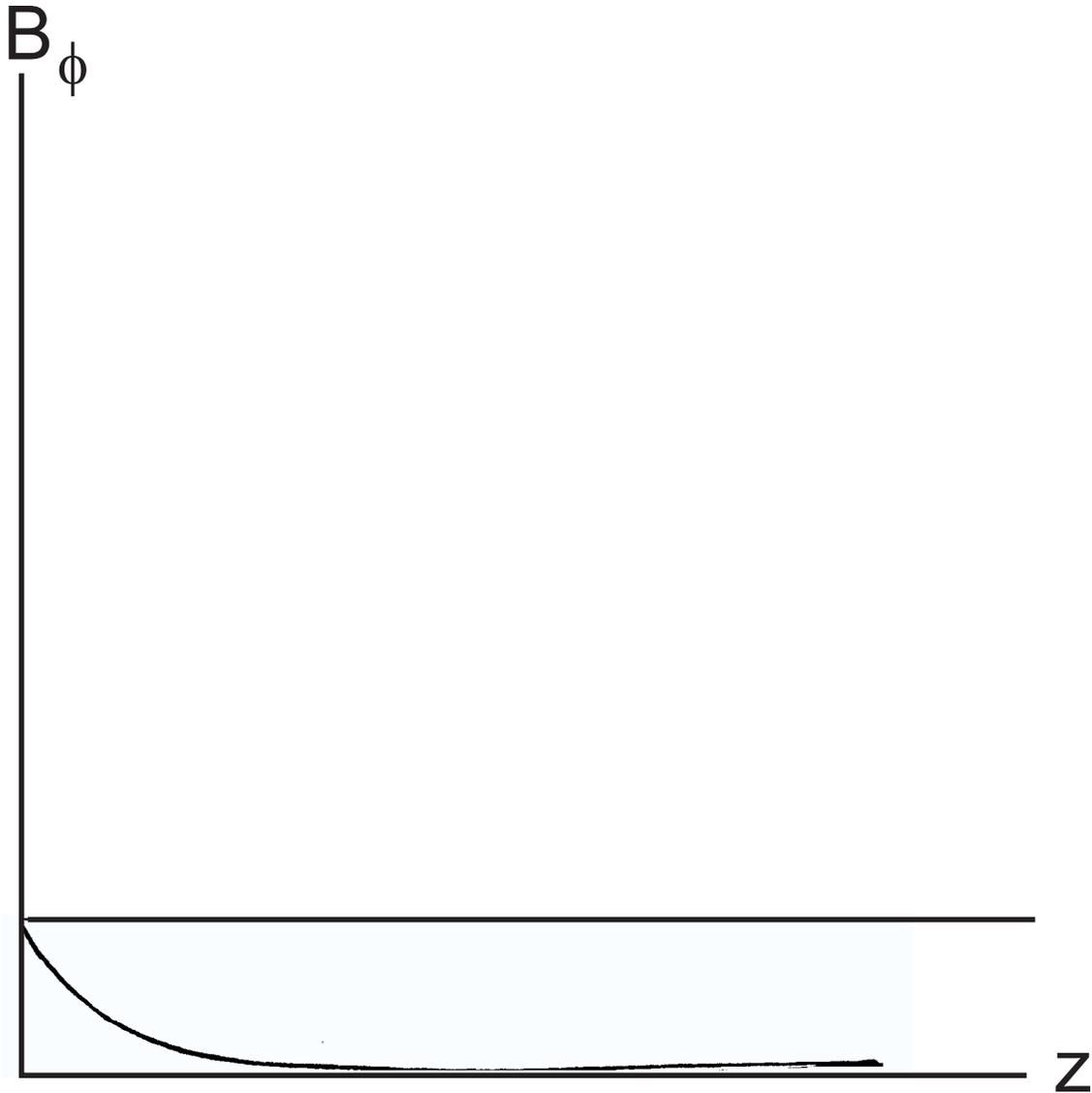


Figura 3 Campo magnético (4.3.12) de uma corrente retilínea alinhada na direção z para um campo gravitacional uniforme de fundo (4.3.11) de mesma direção, como função de z . A linha horizontal representa o campo magnético sem campo gravitacional de fundo.

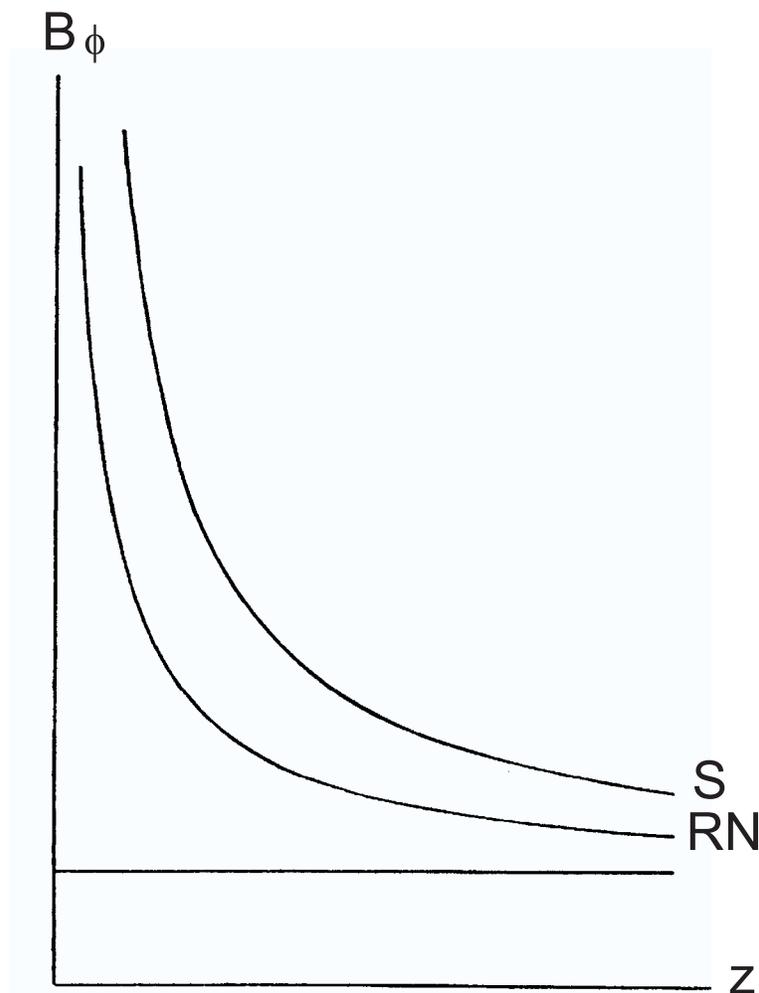


Figura 4 Campos magnéticos (4.3.7) e (4.3.8) de uma corrente retilínea no caso das métricas de fundo de Schwarzschild e Reissner-Nordström geral ($e^2 \neq m^2$), como função de z . A massa geométrica foi tomada igual à unidade. No caso de Reissner-Nordström, fizemos $a = 3/2$ e $b = 1/2$, onde a e b são os raios das superfícies singulares exterior e interior da métrica. A linha horizontal representa, novamente, o campo magnético no fundo euclidiano.

Capítulo 5

Soluções com Radiação das Equações de Maxwell em Métricas de Fundo Estáticas

5.1 Um Método para Calcular Campos de Radiação em Teoria Eletromagnética Clássica^[22]

Conforme dissemos na Introdução, a solução direta das equações de Maxwell dependentes do tempo em variedades de fundo curvas, mesmo supondo uma dependência temporal harmônica, é extremamente difícil. Na realidade, não conhecemos nenhuma solução analítica em forma fechada, exceto as que apresentaremos neste capítulo. Vamos então mostrar, nesta seção, um método para o cálculo dos campos de radiação eletromagnéticos que não envolve a solução das equações de Maxwell diretamente^[22]. Por simplicidade, calcularemos explicitamente apenas os campos de radiação de dipolo elétrico. O método já foi estendido^[34] ao cálculo dos campos de radiação de ordem multipolar superior. Possui ainda algumas motivações de ordem pedagógica que achamos interessante ressaltar. Este trabalho foi reproduzido, na íntegra, no capítulo sobre radiação gama do livro texto *Basic Concepts and Ideas in Nuclear Physics*, de K. Heide^[69].

De fato, as deduções dos campos de um dipolo elétrico oscilante que o estudante de graduação encontra em geral nos cursos sobre Teoria Eletromagnética não são muito esclarecedoras. Usualmente, envolvem suposições sobre o comportamento aproximado de elementos de corrente oscilantes (por exemplo, que o comprimento de onda da radiação emitida seja muito maior que as dimensões características do sistema radiante)^[22]. O estudante sente então uma desconfortável sensação de falta de lógica, já que somente no final dos cálculos (ou melhor, na sua interpretação) o conceito de dipolo elétrico é explicitamente mencionado.

Por outro lado, formalismos que fazem referência explícita ao dipolo elétrico desde o início, como a solução em multipolos das equações de Maxwell, são em geral muito extensos matematicamente para serem apresentados no primeiro contato que o estudante tem com a Teoria Eletromagnética no seu curso de graduação, a menos que alguns passos intermediários sejam omitidos (o que traz de volta as sensações desconfortáveis anteriormente mencionadas).

O método por nós proposto^[22] para a dedução dos potenciais do dipolo elétrico oscilante parte do conceito de dipolo, tendo ainda a seu favor a simplicidade matemática, o que é uma inegável vantagem pedagógica. Raciocinamos como se segue: supomos um “dipolo pontual” (um conceito já conhecido da Eletrostática) na origem das coordenadas, com momento de dipolo apontado na direção positiva do eixo z . Se o dipolo estiver oscilando harmonicamente com frequência angular ω , ele constituirá um elemento de corrente na direção z , localizado na origem (por dipolo oscilante queremos dizer aqui que a distância entre as cargas está oscilando harmonicamente no tempo).

Como já deve ser bem conhecido de um estudante de graduação a esta altura do curso, o potencial vetor gerado por este elemento de corrente tem a mesma direção que o referido elemento, de modo que a única componente cartesiana não-nula de \vec{A} será A_z , neste caso. Agora, da magnetostática sabemos que o potencial vetor \vec{A} gerado por um elemento de

corrente não tem nenhuma dependência angular (para uma distância radial fixada) e a oscilação harmônica das cargas não pode, é claro, alterar esta situação. Além disso, um sinal recebido por propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, com velocidade c , deve ter sido emitido num instante anterior $t - r/c$, onde r é a distância radial do dipolo ao ponto de observação. Estas considerações nos sugerem escrever A_z na forma

$$A_z(r, t) = f(r)e^{i\omega(t-r/c)}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad (5.1.1)$$

onde $f(r)$ é uma função a ser determinada.

Além da determinação de $f(r)$, temos também que determinar o potencial escalar $\varphi(R, \theta, t)$, já que precisamos conhecê-lo para podermos determinar os campos \vec{E} e \vec{B} .

Para resolvermos o problema, vamos usar o calibre de Lorentz, onde \vec{A} e φ estão ligados por (em unidades gaussianas)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (5.1.2)$$

Vamos usar também a condição que, quando muito próximos do dipolo, devemos observar um campo elétrico oscilando harmonicamente no tempo, mas com uma dependência espacial igual àquela do caso estático, pois os efeitos devidos à velocidade finita de propagação se tornam desprezíveis. Assim, o potencial escalar deve se comportar espacialmente para $r \rightarrow 0$ como

$$\phi(r, \theta, t) = p(t - r/c) \cos \theta / r^2, \quad (5.1.3)$$

onde p é a amplitude do momento de dipolo.

Agora usando (5.1.2) com

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (5.1.4)$$

com A_z dado por (5.1.1), e levando em conta a dependência temporal de $\varphi(R, \theta, t)$ na forma $e^{i\omega t}$ obtemos

$$-ik\phi = \cos\theta e^{i(\omega t - kr)} [f' - ikf] ,$$

onde fizemos $k = \omega/c$, a linha significando derivada em relação a r . Logo

$$\phi(r, \theta, t) = \cos\theta e^{i(\omega t - kr)} [(i/k)f' + f] .$$

Para obtermos $f(r)$, vamos tomar o termo dominante desta última expressão quando $r \rightarrow 0$, e igualá-lo ao potencial eletrostático. Temos então duas possibilidades:

a) O termo dominante entre chaves seria dado por f . Isso nos levaria a

$$f = \frac{p}{r^2} ;$$

mas então teríamos $f'(r) = -2p/r^3$, que tende a infinito mais rápido que $1/r^2$ quando $r \rightarrow 0$. Logo, chegaríamos a uma contradição.

b) $f'(r)$ é dominante quando $r \rightarrow 0$. Neste caso é fácil ver que obtemos

$$f(r) = \frac{ikp}{r} . \quad (5.1.5)$$

É também simples ver que, neste caso, não aparece nenhuma contradição. Aqui escolhemos o valor zero para a constante de integração, pois assim teremos o potencial nulo no infinito, que é a escolha usual neste caso.

Obtemos assim, para os potenciais,

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, t) &= p \cos\theta e^{i(\omega t - kr)} \left[(1/r^2) + (ik/r) \right] , \\ A_z(r, t) &= (ikp/r) e^{i(\omega t - kr)} . \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Podemos agora utilizar as componentes de \vec{A} em coordenadas esféricas, mais convenientes neste caso. Efetuamos a transformação bem conhecida

$$A_r = A_z \cos\theta , \quad A_\theta = -A_z \sin\theta , \quad A_\phi = 0 , \quad (5.1.7)$$

e de

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.1.8)$$

obtemos os campos de radiação utilizando o procedimento padrão^[22].

Vamos passar agora à aplicação do método descrito nesta seção ao caso de soluções das equações de Maxwell com radiação, em algumas métricas de fundo estáticas.

5.2 Soluções com Radiação em Métricas de Fundo Cosmológicas

5.2.1 O problema da propagação de perturbações eletromagnéticas em métricas de fundo

Conforme vimos na seção anterior, é importante conhecermos o tempo necessário para a radiação eletromagnética se propagar da fonte até o ponto de observação. No caso mais geral, com métrica de fundo não plana, isto envolve a suposição de que a radiação eletromagnética se propaga ao longo de geodésicas nulas, para as quais $(ds)^2 = 0$. De fato, tomemos uma métrica de fundo, colocada em forma isotrópica por simplicidade:

$$(ds)^2 = A(x^\nu) (dx^0)^2 - B(x^\nu) (d\sigma)^2. \quad (5.2.1)$$

No caso de geodésicas nulas obtemos então

$$dx^0 = cdt = \left[\frac{B(x^\nu)}{A(x^\nu)} \right]^{1/2} d\sigma, \quad (5.2.2)$$

de onde podemos obter, em princípio pelo menos, uma expressão para o intervalo de tempo (coordenada, é óbvio) mencionado acima. Einstein usou esta hipótese como base do seu famoso cálculo do desvio dos raios luminosos por um campo gravitacional, sem demonstrá-la, no entanto.

Existe é uma dificuldade evidente nesta demonstração, já que não existem raios luminosos, rigorosamente falando. O que temos na prática são feixes luminosos distribuídos por uma região tridimensional, a aproximação da Óptica Geométrica sendo válida apenas no limite de frequência infinita.

A primeira demonstração de que a radiação eletromagnética se propaga ao longo de geodésicas, no limite da Óptica Geométrica, foi feita por Laue^[39], em 1920. Partindo das equações da eletrodinâmica num campo gravitacional de fundo, ele obteve uma solução particular, correspondendo à radiação de frequência infinita; mostrou também que as trajetórias ortogonais às frente de onda, neste, caso, satisfaziam as equações diferenciais de geodésica nula; ele forneceu assim, pela primeira vez, uma demonstração da hipótese de propagação de sinais eletromagnéticos ao longo de geodésicas nulas.

A questão foi retomada por E.T. Whittaker^[3] em 1928, que argumentou que uma lei tão simples e fundamental deveria ser passível de uma demonstração sem a elaborada análise feita por Laue^[39]. Devido à sua simplicidade e elegância, achamos interessante mostrar a demonstração alternativa feita então por Whittaker, que é a seguinte.

Seja A_ν o potencial vetor associado à propagação de uma perturbação eletromagnética num campo gravitacional de fundo. Das equações de Maxwell (2.2), deduzimos facilmente que a propagação da radiação é governada por um sistema de equações diferenciais da forma

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + (\text{termos que não envolvam derivadas segundas dos } A_\sigma) = 0 . \quad (5.2.3)$$

Agora, uma superfície característica de um sistema de equações diferenciais parciais é definida como uma variedade na qual o teorema da existência e unicidade das soluções das equações diferenciais parciais falha^[40].

No nosso caso, uma característica é uma hipersuperfície tal que o conhecimento dos valores dos A_σ e suas derivadas primeiras $\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu}$ em todos os pontos da hipersuperfície é

insuficiente para determinarmos as derivadas segundas e de ordem mais alta, e portanto para especificarmos a solução univocamente. Assim, se uma hipersuperfície é uma superfície característica, é possível termos soluções distintas que coincidam sobre a hipersuperfície, no que concerne aos valores de A_σ e $\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu}$, mas que difiram quanto aos valores das derivadas segundas $\frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$.

Agora, da teoria das superfícies características, é conhecido o resultado seguinte:

“As hipersuperfícies características, $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$, de qualquer sistema de equações diferenciais parciais do tipo (5.2.3), são dadas pelas soluções da equação diferencial parcial

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0 .” \quad (5.2.4)$$

Esta última equação aparece freqüentemente em geometria diferencial, sendo, de fato, a aplicação do parâmetro diferencial de Beltrami de primeira espécie à função f , e a subsequente identificação a zero^[40]; ela é uma única equação diferencial parcial de primeira ordem, logo suas características se reduzem a curvas, para as quais é conhecido o seguinte teorema^[40]:

“As características da equação diferencial parcial (5.2.4) são as geodésicas nulas da variedade cuja métrica é dada por $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde os coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ são os associados aos coeficientes $g^{\mu\nu}$ que aparecem em (5.2.4)”.

Suponhamos que agora uma perturbação eletromagnética esteja originalmente confinada a uma região limitada do espaço, e seja $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$ a equação que representa a hipersuperfície que coincide em cada instante com a fronteira da perturbação, à medida que ela ocupa sucessivas posições com o passar do tempo.

O quadrivetor potencial A_σ e suas derivadas $\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu}$, sendo contínuos através da hipersuperfície, devem se anular sobre ela (já que são nulos fora dela) e logo, pela definição acima, a hipersuperfície que coincide com a fronteira é uma característica, ou seja: A

hipersuperfície que coincide com a fronteira de uma perturbação eletromagnética limitada espacialmente, tendo como equação $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$, é tal que f satisfaz (5.2.4).

Além disso, qualquer solução de uma equação diferencial parcial do tipo (5.2.4) consiste em um agregado de curvas características, selecionadas de acordo com alguma lei. Isto é o mesmo que dizer, pelo teorema citado anteriormente, que a fronteira, no espaço-tempo, de qualquer perturbação eletromagnética de extensão espacial limitada é um agregado de geodésicas nulas da métrica de fundo.

Agora, quando falamos de um “raio luminoso”, queremos com isto dizer que temos uma perturbação que é filiforme no espaço-tempo, ou, no espaço tridimensional, uma perturbação localizada num volume infinitesimal cuja posição varia de instante a instante. Se esta região filiforme é composta de curvas características, como provamos anteriormente, ela pode consistir, é claro, em apenas uma curva, que constitui o assim chamado “raio luminoso”. Logo,

“Um raio luminoso num campo gravitacional de fundo é uma geodésica nula no espaço-tempo”. C.Q.D.

Agora, tanto a demonstração de Laue^[40] como a de Whittaker^[3] dependem da existência do limite da Óptica Geométrica, ou seja, da frequência tendendo a infinito, que é o caso no qual faz sentido falar em “raio luminoso”.

Isto foi observado mais recentemente no trabalho de Mashhoon^[26] sobre propagação de radiação eletromagnética em campos gravitacionais de fundo. Este autor observou ainda que, de acordo com as equações de campo de Einstein, a presença de um pulso eletromagnético fraco só afeta a métrica do espaço-tempo em segunda ordem na amplitude do pulso, qualquer que seja o comprimento de onda da radiação, mas que a situação é muito diferente se levarmos em conta a natureza quântica da radiação.

De fato, considere por exemplo uma estimativa simples do potencial gravitacional newtoniano gerado por um quantum de radiação (fóton), que pode ser obtida da seguinte

maneira^[26]:

Suponha o fóton representado por um pacote de ondas de dimensão $\bar{\lambda}$, onde $\bar{\lambda}$ é o comprimento de onda (reduzido) característico da radiação. Seu potencial gravitacional newtoniano local será então aproximadamente

$$\varphi \sim \frac{G\hbar\omega}{c^2\bar{\lambda}} = c^2 (L_p/\bar{\lambda})^2, \quad (5.2.5)$$

onde L_p é o comprimento de Planck, dado por

$$L_P = \left[\frac{\hbar G}{c^3} \right]^{1/2},$$

que é da ordem de $10^{-35}m$. Logo, se $\bar{\lambda} \gg L_p$, a influência do pulso da radiação sobre o campo gravitacional de fundo pode ser desprezada. No entanto, para radiação de frequência extremamente alta, tal que $\bar{\lambda} \sim L_p$, podemos esperar que fenômenos gravitacionais quânticos desempenhem um papel importante na propagação do pulso; além disso, não poderemos mais desprezar a contribuição da radiação para o potencial gravitacional, pois a energia de cada fóton tende, é claro, a infinito quando a frequência também tende a este limite. Vemos então que a hipótese da Óptica Geométrica, que consiste em tomar o limite da frequência infinita, não é, a rigor, compatível com a hipótese de o campo gravitacional ser de fundo, ou seja, não ser afetado pela presença da radiação.

Adotaremos então uma solução de compromisso, ou seja, utilizaremos a hipótese de que a radiação eletromagnética se propaga ao longo de geodésicas nulas, supondo que a frequência, embora alta o suficiente para a aproximação da Óptica Geométrica ser razoável, não é tão alta que a contribuição da radiação para o potencial gravitacional não possa ser desprezada.

5.2.2 Campos eletromagnéticos com dependência temporal harmônica em métricas de fundo^[68]

Estudaremos adiante soluções das equações de Maxwell em métricas de fundo cosmológicas (já que somente neste caso temos simetria suficiente para obtermos o intervalo de tempo retardado necessário à obtenção das soluções que procuramos) do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW); essas métricas são da forma

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - [a(t)f(x^i)]^2 (d\sigma)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.2.6)$$

Parece-nos então apropriado investigar, primeiramente, se as equações de Maxwell admitem soluções com dependência temporal harmônica para qualquer forma de função $a(t)$. Para isto, vamos primeiro escrever o tensor campo eletromagnético como

$$F^{\mu\nu}(x^\sigma) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(x^i) e^{i\omega t}. \quad (5.2.7)$$

As equações de Maxwell (2.2) fornecem, com um $F^{\mu\nu}$ desta forma,

$$\frac{f^3}{c} \left[\left(3 \frac{\dot{a}}{a} + i\omega \right) \mathcal{F}^{\mu 0} \right] + \frac{\partial}{\partial x^k} [f^3 \mathcal{F}^{\mu k}] = 0, \quad (5.2.8)$$

onde $k = 1, 2, 3$ e o ponto significa derivada em relação a t .

Nos casos em que \dot{a}/a for independente de t , claramente não haverá restrições às soluções de (5.2.8), no que concerne aos valores de t . Estes casos englobam as métricas de Einstein, em que $a(t) = \text{constante}$, e de de Sitter, em que $a(t) = e^{\alpha t}$, $\dot{a}/a = \alpha = \text{constante}$.

No entanto, se $a(t)$ for da forma t^n , por exemplo, onde n não precisa ser inteiro, (5.2.8) implica em

$$\frac{f^3 \mathcal{F}^{\mu 0}}{c} [3n + i\omega t] + t \frac{\partial}{\partial x^k} [f^3 \mathcal{F}^{\mu k}] = 0. \quad (5.2.9)$$

Obviamente, (5.2.9) não possui soluções para qualquer valor de t . Vemos portanto que as equações de Maxwell não possuem soluções com dependência temporal, harmônica

para qualquer forma do fator de escala $a(t)$ da métrica de fundo. Em particular, elas não têm soluções com esta dependência temporal, para métrica de fundo de FRW com fonte do tipo poeira (pressão nula), que é um caso particular de $a(t) = t^n$ com $n = 2/3$.^[68]

Vamos passar agora ao cálculo de soluções explícitas das equações de Maxwell com dependência temporal harmônica, nas duas métricas onde, como vimos, não há nenhuma restrição a esse tipo de dependência temporal.

5.2.3 Campos de radiação de dipolo elétrico na métrica de fundo cosmológica de Einstein^[30]

Com a métrica de fundo de Einstein na forma (4.1.26), o potencial de um dipolo elétrico estático na origem é

$$A_0 = \varphi_E = r^{-2} (p_0 \cos \theta) (1 + \mu r^2)^2, \quad (5.2.10)$$

o subíndice E significando estático.

As únicas componentes não nulas do tensor campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ neste caso são

$$F_{01_E} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial r} = \frac{2p_0 \cos \theta}{r^3} (1 - \mu^2 r^4), \quad (5.2.11)$$

$$F_{02_E} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial \theta} = \frac{p_0 \operatorname{sen} \theta}{r^2} (1 + \mu r^2)^2. \quad (5.2.12)$$

Vamos supor agora que temos um dipolo elétrico oscilante, na origem das coordenadas, numa variedade com métrica de fundo dada por (4.1.26). Analisando a dependência angular da métrica de Einstein, (4.1.26), e como o fator de escala neste caso é função apenas de r , vemos que devemos ter apenas três componentes não-nulas de $F_{\mu\nu}$, neste caso F_{01} , F_{02} e F_{12} , e com dependência angular igual ao caso de métrica de fundo de Minkowski.

Vamos também, levando em conta as ressalvas da seção 5.2.1, adotar a hipótese das geodésicas nulas para a propagação de sinais eletromagnéticos no universo de Einstein.

Com esta hipótese, (4.1.26) dá, para geodésicas nulas radiais,

$$(dt)^2 = c^{-2} (1 + \mu r^2)^{-2} (dr)^2 ,$$

que fornece, integrando entre 0 e r ,

$$t = \pm \frac{1}{c\sqrt{\mu}} \arctan (\sqrt{\mu} r) \quad (5.2.13)$$

para o intervalo de tempo coordenada que necessita um sinal eletromagnético para ir do dipolo oscilante na origem até a posição radial r (só o sinal positivo dá o limite de variedade plana, ($\mu \rightarrow 0$), correto).

Junto com as considerações de simetria acima, (5.2.13) sugere que podemos, por exemplo, escrever a componente F_{21} de $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{21}(r, \theta, t) = f(r) \operatorname{sen} \theta \exp \left\{ i \left[\omega t - \frac{k}{\sqrt{\mu}} \arctan (\sqrt{\mu} r) \right] \right\} , \quad k = \omega/c . \quad (5.2.14)$$

Antes de continuar, vamos observar que, nesta seção, usaremos o método da seção 5.1, ligeiramente modificado. Não vamos usar a condição de gauge de Lorentz para relacionar os potenciais e depois calcular os campos a partir destes mesmos potenciais; ao invés disso vamos usar as equações de Maxwell diretamente, a partir da hipótese (5.2.14), que nos permitirão obter a função $f(r)$ através da análise do limite estático. No caso de métricas de fundo não planas este procedimento é muito mais simples, já que obteremos os campos diretamente, sem precisarmos calculá-los a partir dos potenciais.

As equações de Maxwell (2.2) se reduzem, no caso presente, a

$$(\sqrt{-g} F^{01})_{|1} + (\sqrt{-g} F^{02})_{|2} = 0 , \quad (5.2.15)$$

$$(\sqrt{-g} F^{12})_{|2} + (\sqrt{-g} F^{10})_{|0} = 0 , \quad (5.2.16)$$

$$(\sqrt{-g} F^{20})_{|0} + (\sqrt{-g} F^{21})_{|1} = 0 . \quad (5.2.17)$$

Usando agora (5.2.17) e (5.2.14), com $\sqrt{-g}$ dada pela métrica de fundo de Einstein, obtemos

$$F_{02} = \text{sen } \theta (1 + \mu r^2) \left\{ \frac{i}{k} [2\mu r f + (1 + \mu r^2) f'] + f \right\} \exp\{\dots\} , \quad (5.2.18)$$

onde o fator entre as chaves após \exp é o mesmo que em (5.2.14), e a linha significa derivada em relação a r .

Agora, no limite estático, ou seja, quando $k \rightarrow 0$, esta expressão deve tender para o campo estático F_{02E} , dado por (5.2.12). De novo, aparecem inconsistências se alguns termos forem escolhidos como dominantes em (5.2.18), quando $k \rightarrow 0$, como já ocorreu na seção 5.1 (ver a referência 22 para detalhes). Uma análise análoga àquela feita no referido artigo nos leva então a, usando (5.2.18) com $k \rightarrow 0$ e (5.2.12),

$$\frac{p_0}{r^2} = \frac{i}{k} \left[\frac{2\mu r f}{1 + \mu r^2} + f' \right] . \quad (5.2.19)$$

Esta equação diferencial linear é facilmente integrada e ficamos com

$$f(r) = \frac{ikp_0}{1 + \mu r^2} \left(\frac{1}{r} - \mu r - C \right) , \quad C = \text{constante} , \quad (5.2.20)$$

de modo que podemos escrever, substituindo esta $f(r)$ em (5.2.14),

$$F_{21} = \frac{ikp_0 \text{sen } \theta}{1 + \mu r^2} \left(\frac{1}{r} - \mu r - C \right) \exp\{\dots\} ,$$

onde o fator entre chaves é o mesmo que em (5.2.14).

Para determinarmos a constante C , vamos comparar esta expressão com seu limite de variedade de fundo plana. Naturalmente, para isto temos primeiro que colocá-la numa base de tetrada.

Chamando \mathcal{F}_{21} a componente tetrada de F_{21} temos

$$\mathcal{F}_{21} = |g^{22}g^{11}|^{1/2} F_{21} = \frac{(1 + \mu r^2)^2}{r} F_{21} ;$$

e logo

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{F}_{21} = ikp_0 \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{C}{r} \right) \exp [i(\omega t - kr)] .$$

Agora, na variedade de fundo de Minkowski temos, para o caso de radiação de dipolo elétrico,

$$F_{21} \equiv B_\phi = p_0 \operatorname{sen} \theta \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \exp [i(\omega t - kr)] ;$$

vemos então que devemos ter $C = -ik$. Assim,

$$F_{21} = \frac{p_0 \operatorname{sen} \theta}{1 + \mu r^2} \left(\frac{ik}{r} - ik\mu r - k^2 \right) \exp \{ \dots \} . \quad (5.2.21)$$

Não é difícil agora, usando (5.2.20) em (5.2.18), calcular F_{02} . Obtemos

$$F_{02} = p_0 \operatorname{sen} \theta \left[\frac{(1 + \mu r^2)^2}{r^2} + ik \left(\frac{1}{r} - \mu r + ik \right) \right] \exp \{ \dots \} . \quad (5.2.22)$$

Novamente, usando uma base de tetrada, obtemos

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{F}_{02} = \lim_{\mu \rightarrow 0} |g^{00} g^{22}|^{1/2} F_{02} = p_0 \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \exp [i(\omega t - kr)] ,$$

que é a componente θ do campo elétrico de um dipolo elétrico oscilante numa geometria de fundo de Minkowski, como deveríamos esperar. Vemos facilmente que, se tomarmos o limite $k \rightarrow 0$ em (5.2.22), obtemos o campo estático, F_{02_E} . Mas isto só acontece se escolhermos o termo dominante, quando calcularmos $f(r)$, do modo como fizemos. Qualquer outra escolha dos termos dominantes nos levaria a uma expressão diferente de F_{02_E} no limite $k \rightarrow 0$, causando as inconsistências mencionadas anteriormente.

Usando agora a equação de Maxwell (5.2.15), para calcularmos a componente restante do campo eletromagnético, obtemos

$$F_{01} = 2p_0 \cos \theta (1 + \mu r^2) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{\mu}{r} \right) \exp \{ \dots \} . \quad (5.2.23)$$

Quando $\mu \rightarrow 0$ temos, na base de tetrada,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{F}_{01} = \lim_{\mu \rightarrow 0} |g^{00} g^{11}|^{1/2} F_{01} = 2p_0 \cos \theta \left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} \right) \exp [i(\omega t - kr)] ,$$

que é, novamente, o limite correto quando o campo gravitacional de fundo tende a zero. Quando $k \rightarrow 0$ (5.2.23) tende a (5.2.11), como era esperado.

Vamos agora calcular a componente T_0^r do tensor energia momentum associado ao campo eletromagnético que obtivemos nesta seção (no caso de campo gravitacional de fundo nulo, ela se reduz à componente do vetor de Poynting utilizada no cálculo da intensidade e da distribuição angular da radiação). Temos

$$T_0^r = \frac{c}{4\pi} \left(F^{r\alpha*} F_{\alpha 0} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta} \delta_0^r \right) , \quad (5.2.24)$$

o símbolo * representando complexo conjugado. Substituindo agora as componentes não nulas de $F_{\mu\nu}$ em (5.2.24), e tomando a metade da parte real da quantidade resultante (o que nos dá, no limite de métrica de fundo de Minkowski, a potência média irradiada por ciclo), obtemos

$$\frac{1}{2} Re T_0^r = \frac{c}{8\pi} \frac{p_0^2 k^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2} (k^2 - 4\mu) (1 + \mu r^2)^3 . \quad (5.2.25)$$

Quando $\mu \rightarrow 0$, (5.2.25) fornece, numa base de tetrada,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} Re |g^{00} g_{11}|^{1/2} T_0^r = \frac{c}{8\pi} \frac{p_0^2 k^4 \text{sen}^2 \theta}{r^2} ,$$

que é a formula bem conhecida para um dipolo elétrico irradiando no espaço tempo de Minkowski.

5.2.4 Campos de radiação de dipolo elétrico na métrica de fundo cosmológica de de Sitter^[30]

Vamos aqui novamente usar esta métrica na forma (4.1.30), ou seja

$$(ds)^2 = \frac{(1 - \mu r^2)^2}{(1 + \mu r^2)^2} (dx^0)^2 - \frac{1}{(1 + \mu r^2)^2} [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2] ,$$

$$\mu = \frac{\lambda}{12}, \lambda = \text{constante cosmológica} . \quad (5.2.26)$$

O potencial de um dipolo estático na origem é agora dado por

$$A_0 = \varphi = p_0 r^{-2} (\cos \theta) (1 - \mu r^2)^2 ,$$

e portanto (o índice E significando estático)

$$F_{01E} = \frac{2p_0 \cos \theta}{r^3} (1 - \mu^2 r^4) , \quad (5.2.27)$$

$$F_{02E} = \frac{p_0 \sin \theta}{r^2} (1 - \mu r^2)^2 . \quad (5.2.28)$$

Agora, para geodésicas nulas radiais, nesta métrica de fundo, encontramos

$$t = \frac{1}{2c\sqrt{\mu}} \log_e \left(\frac{1 + \sqrt{\mu} r}{1 - \sqrt{\mu} r} \right) . \quad (5.2.29)$$

Este resultado, junto com as mesmas considerações de simetria usadas no caso da métrica de Einstein (já que as partes espaciais das métricas de Einstein e de de Sitter são idênticas), sugere que podemos escrever

$$F_{21}(r, \theta, t) = f(r) \text{sen } \theta \exp \left\{ i \left[\omega t - \frac{k}{2\sqrt{\mu}} \log_e \left(\frac{1 + \sqrt{\mu} r}{1 - \sqrt{\mu} r} \right) \right] \right\} . \quad (5.2.30)$$

Procedendo exatamente como no caso da métrica de fundo de Einstein, chegamos às seguintes expressões para os campos:

$$F_{21} = p_0 \text{sen } \theta \left[\frac{ik(1 + \mu r^2)}{r(1 - \mu r^2)} - \frac{k^2}{1 - \mu r^2} \right] \exp\{\dots\} , \quad (5.2.31)$$

onde o fator dentro das chaves após \exp é o mesmo que em (5.2.30),

$$F_{02} = p_0 \text{sen } \theta (1 - \mu r^2)^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{ik(1 + \mu r^2)}{r(1 - \mu r^2)} - \frac{k^2}{(1 - \mu r^2)^2} \right] \exp\{\dots\} \quad (5.2.32)$$

e

$$F_{01} = 2p_0 \cos \theta \left[\frac{1 - \mu^2 r^4}{r^3} + \frac{ik(1 - \mu r^2)}{r^2} \right] \exp\{\dots\} . \quad (5.2.33)$$

Os limites destas expressões (colocadas em base de tetrada), quando $\mu \rightarrow 0$, concordam com as expressões usuais correspondentes em espaço-tempo plano. Quando $k \rightarrow 0$ obtemos (5.2.27) e (5.2.28), como era esperado.

Com esta métrica de fundo, encontramos

$$\frac{1}{2} ReT_0^r = \frac{c}{8\pi} \frac{(1 + \mu r^2)^4 (4\mu + k^2)}{(1 - \mu r^2) r^2} p_0^2 k^2 \sin^2 \theta . \quad (5.2.34)$$

De novo, quando $\mu \rightarrow 0$, encontramos o padrão de radiação usual (isto também acontece usando a componente de tetradas de T_0^r).

5.3 Análise dos Resultados Obtidos na Seção 5.2

Gostaríamos de, no presente trabalho, apresentar expressões para a potência total irradiada, tanto para a métrica de fundo de Einstein quanto para a de de Sitter. Tiomno, Ruffini e Vishveshwara^[10] utilizaram, para este cálculo, a expressão

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \int T_0^r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

numa métrica de fundo de Reissner-Nordström.

Mas esta última métrica é assintoticamente plana, logo podemos interpretar a expressão acima indo para a região assintótica. No caso de métricas de fundo cosmológicas, este procedimento obviamente não é aplicável, e parece que não devemos utilizar esta expressão.

Vamos aqui, para fazer uma análise, estudar o comportamento de (5.2.25) e (5.2.34) como função da variável r . É interessante notar que, se substituirmos (5.2.25) ou (5.2.34)

na expressão acima, o comportamento da expressão obtida é análogo ao do T_0^r dado por (5.2.25) e (5.2.34), para grandes valores de r .

Agora, no caso da métrica de fundo de Einstein vemos que (Figura 7), para distâncias radiais a partir da fonte maiores que $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$ (lembramos que, nesta métrica, $\mu = \frac{1}{4a^2}$, onde a é o raio da triesfera), o valor de T_0^r dado por (5.2.25) aumenta com r (a componente de tetrada de T_0^r tem o mesmo comportamento).

Podemos dar uma estimativa deste valor de r , usando, por exemplo, os dados fornecidos por Møller^[35]

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sim 3 \times 10^{10} \text{ anos luz ;} \quad (5.3.1)$$

note que aqui r não é coordenada cíclica na triesfera, e que pode ser maior que o raio desta. Devemos notar também que, como o valor de μ depende do valor da densidade média do universo, cujo valor experimental é conhecido com uma incerteza de três ou quatro ordens de grandeza, esta estimativa de distância é bastante grosseira.

Passando agora ao caso da métrica de fundo de de Sitter (Figura 8), vemos, de (5.2.34), que o valor de T_0^r aumenta rapidamente com r , para valores de r próximos a $1/\sqrt{\mu}$, inclusive divergindo em $r = 1/\sqrt{\mu}$, que define o bem conhecido horizonte da métrica de de Sitter. (Esta é, naturalmente, uma superfície onde o deslocamento para o vermelho torna-se infinito.) T_0^r tem, mais uma vez, o mesmo comportamento numa base de tetrada. Podemos, novamente, fazer uma estimativa da ordem de grandeza desta distância, voltando a utilizar os dados fornecidos por Møller^[35]. Obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sim 1.33 \times 10^9 \text{ anos-luz .} \quad (5.3.2)$$

Este comportamento de T_0^r nos leva a especular sobre alguma possível ligação dos resultados aqui obtidos com o problema da fonte de energia dos quasares, já que parece consensual que os grandes desvios para o vermelho da radiação recebida destes objetos

indicam que eles são objetos distantes, enquanto que parece não haver consenso acerca da origem da enorme quantidade de energia por eles irradiada.

Usando os dados de Schmidt e Green^[24], traçamos na figura 6 o gráfico das intensidades relativas (ver Tabela 1) contra distâncias, calculadas usando a relação distância-desvio para o vermelho para a métrica de de Sitter (em todos os cálculos tomamos $\mu = 2$). Escolhemos dez quasares entre os quais estão os com os maiores desvios para o vermelho na Tabela 1 do artigo de Schmidt e Green citado acima, e fizemos arbitrariamente a intensidade do quasar de menor desvio para o vermelho na nossa amostra igual à unidade.

Tabela 1

Objeto	Desvio para o vermelho	Brilhância	Distância
0003+158	0.450	1.0	0.510
1008+133	0.553	1.2	0.540
1148+549	0.969	6.1	0.600
0946+301	1.216	8.7	0.635
0117+213	1.493	13.6	0.650
1115+080	1.722	22.6	0.656
1138+040	1.876	23.0	0.663
1329+412	1.930	19.5	0.667
1247+267	2.038	45.0	0.670
1222+228	2.046	47.0	0.680

Tabela 1 *As brilhâncias relativas e as distâncias (calculadas usando a relação distância-desvio para o vermelho para a métrica de de Sitter), para os objetos com os dez maiores desvios para o vermelho no Palomar Bright Quasar Survey (Schmidt e Green, 1983).*

A Figura 6 mostra o comportamento de $\frac{1}{2} ReT_0^r$ para métrica de fundo cosmológica de Einstein, e a Figura 8 mostra o comportamento da mesma quantidade num fundo

cosmológico de de Sitter. Uma comparação entre as Figuras 6 e 8 nos leva a especular acerca de uma possível relação entre nossos resultados teóricos e a enorme quantidade de energia produzida nos quasares.

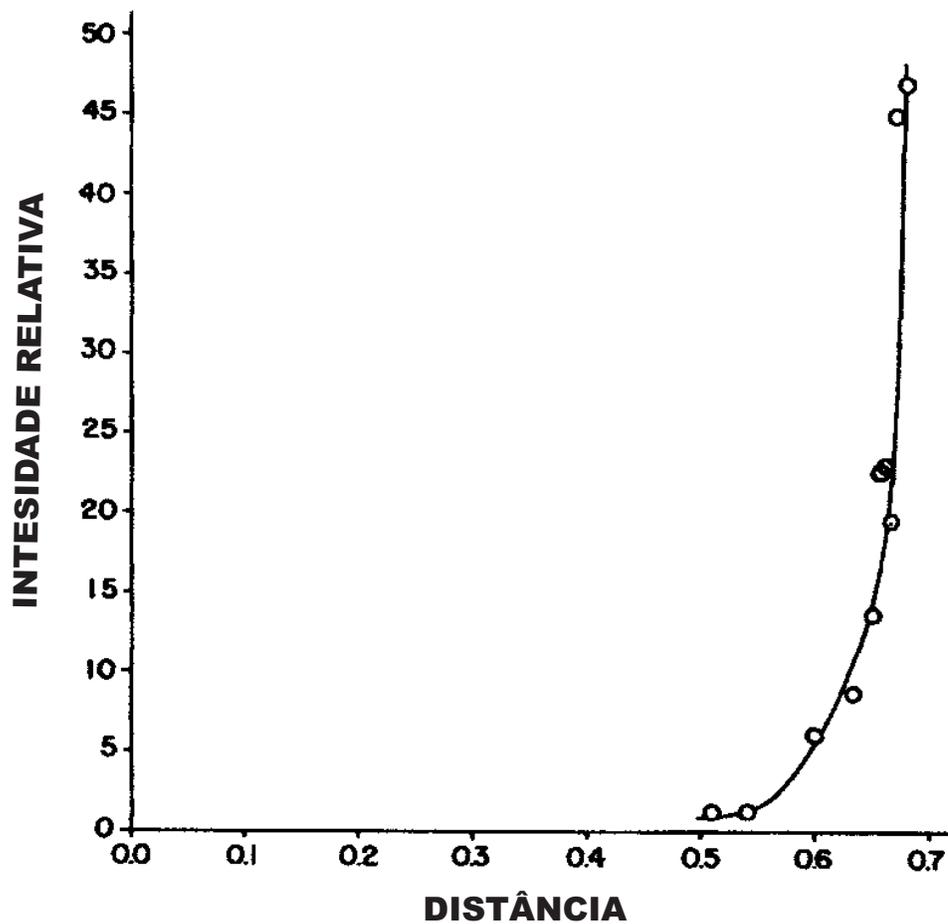


Figura 6 Intensidades relativas (medidas) em função das distâncias radiais, calculadas usando a relação distância-desvio para o vermelho da métrica de de Sitter. Fizemos $\mu = 2$.

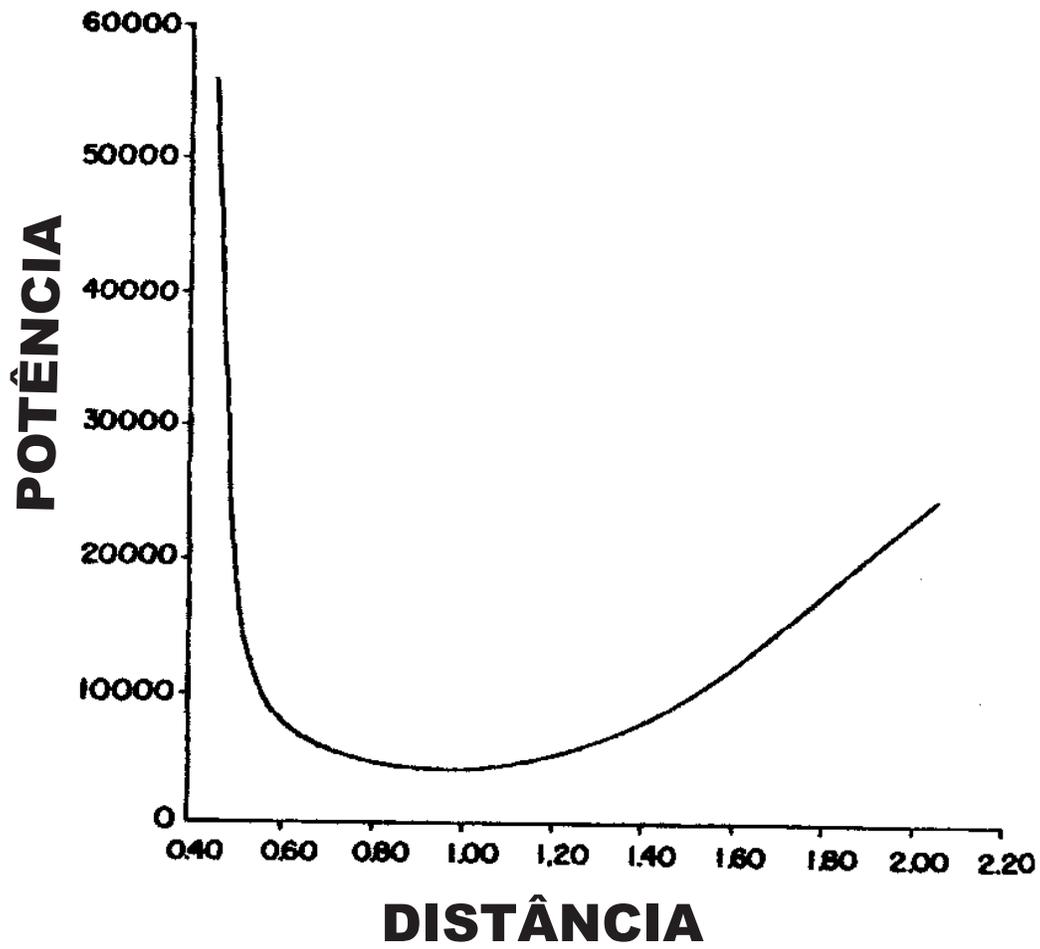


Figura 7 A quantidade $\frac{1}{2} ReT_0^r$, interpretada como potência irradiada por unidade área, como função da distância radial, para a métrica de Einstein. Também aqui fizemos $\mu = 2$.

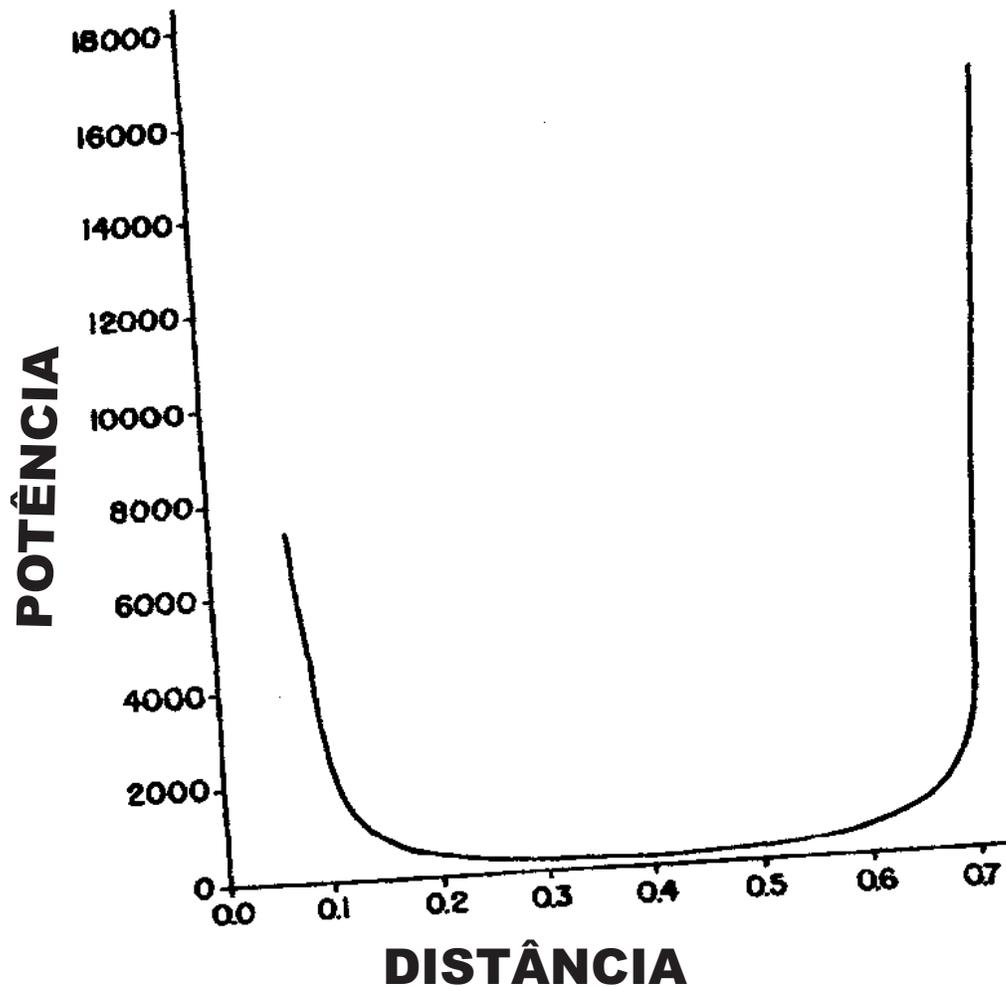


Figura 8 A quantidade $\frac{1}{2} ReT_0^r$, interpretada como potência irradiada por unidade área, em fundo cosmológico de Sitter, em função da distância radial. Novamente fizemos aqui $\mu = 2$.

Sabemos, é claro, que os modelos cosmológicos de Einstein e de de Sitter estão ambos longe de serem realistas. No entanto, ambos têm uma característica que não devemos de imediato descartar no Universo real: uma curvatura diferente de zero. Como a amplificação, em ambos os casos, cresce com μ , ou seja, com a curvatura, não é descabido admitir que o efeito possa ocorrer no Universo real.

Levando em conta esta dependência em μ dos termos responsáveis pelo aumento da densidade de energia irradiada com a distância, podemos dizer que ocorre um aumento de densidade de fluxo da radiação devido à curvatura do espaço-tempo, ou seja, ao campo gravitacional. É interessante mencionar que a amplificação de radiação eletromagnética por um fundo gravitacional já foi mencionada antes na literatura, em conexão com o espalhamento de ondas eletromagnéticas por buracos negros e, neste contexto, é chamada de espalhamento super radiante^{[8],[20],[27]}.

Queremos também alertar que não estamos, em momento algum, afirmando que obtivemos uma explicação completamente satisfatória para a origem da potência anormalmente alta irradiada pelos quasares. Apenas notamos que existe um aumento médio da intensidade com a distância que parece estar em concordância, pelo menos qualitativa, com nossos resultados teóricos. Note que, desde que não conhecemos as magnitudes intrínsecas de nenhum objeto astrofísico extragalático, qualquer fonte individual associada com um maior desvio para o vermelho pode ter uma magnitude aparente menor devido a uma menor magnitude intrínseca. Isto não entra em conflito com nosso raciocínio, já que, como dissemos antes, o comportamento *médio* é consistente com nosso modelo.

Naturalmente, deveríamos ter algum modelo para a geração de energia no interior do quasar e, para os mais distantes, pode ser que uma cooperação entre este mecanismo interno e a concentração pelo fundo cosmológico dê conta da grande quantidade de energia encontrada experimentalmente.

Gostaríamos, no entanto, de acrescentar que, em nossa opinião, quasares são galáxias jovens. Em defesa de nossa hipótese, podemos listar os seguintes fatos:

- a) Estes “objetos quase estelares” (os quasares) são encontrados apenas a partir de distâncias razoavelmente grandes de nossa galáxia, da ordem de bilhões de anos-luz. Isto significa que estamos recebendo informações sobre estes objetos que nos dizem

como eles eram a bilhões de anos no passado.

- b) Dados mais recentes obtidos, por exemplo, pelo telescópio orbital Hubble, mostram a existência de quasares com desvios para o vermelho chegando até 6, e as intensidades destes apresentam, novamente, um comportamento médio consistente com nosso modelo. Além disso, praticamente não encontramos galáxias com deslocamentos para o vermelho tão elevados.

5.4 Um Modelo Estelar Simples

Vamos agora aplicar o método, por nós desenvolvido, ao estudo da radiação emitida por um dipolo elétrico colocado no centro de uma nuvem esférica de poeira carregada^[42]. Este sistema pode ser considerado um modelo bastante rudimentar de um certo tipo de estrela: existem, na literatura, modelos estelares com carga elétrica, satisfazendo a relação $Q^2 = GM^2$. Tais modelos são conhecidos como estrelas de Majumdar-Papapetrou^[66,67].

Utilizaremos, como métrica de fundo, uma solução das equações de Einstein, acopladas com as equações de Maxwell, que representa as métricas interna e externa a uma distribuição esférica, de poeira carregada. O sistema permanece em equilíbrio sob a influência da atração gravitacional e da repulsão eletrostática entre suas partes. A condição de equilíbrio para este sistema é $Q_i = \varepsilon\sqrt{G} M_i$, onde Q_i é a carga elétrica de cada partícula e M_i é sua massa, e ε é +1 ou -1. G representa, conforme usual, a constante de gravitação newtoniana. Sistemas esfericamente simétricos cuja carga e massa obedecem esta condição costumam ser denominados “otimamente carregados”.

Vamos primeiro obter as soluções eletrostáticas interna e externa para o campo de um dipolo elétrico colocado no centro de nossa distribuição. Após isto, obteremos a solução externa para o campo de radiação da mesma fonte, usando o método por nós desenvolvido. Em seguida, deduziremos uma expressão para a potência total irradiada, e discutiremos

a possível aplicação a modelos estelares.

Podemos considerar nosso modelo, em certo sentido, como complementar àqueles que utilizam a métrica de Vaidya, que descreve fenomenologicamente o espaço-tempo gerado por um objeto colapsante. Esta métrica não é uma solução das equações acopladas de Einstein e Maxwell, mas apenas das equações de Einstein. Já em nosso modelo obtemos uma solução exata das equações de Maxwell, e é neste sentido que alegamos a complementaridade já mencionada.

Vamos agora calcular o potencial eletrostático para pontos internos à distribuição de poeira carregada. Esta variedade é descrita pela métrica

$$(ds)^2 = f^2(dx^0)^2 - \frac{1}{f^2} (d\sigma)^2, \quad (5.4.1)$$

onde $f^2(a, m) = \frac{a^3 + mr^2}{(a + m)^3}$, sendo a o raio da distribuição e $m = \frac{GM}{c^2}$, a sua massa geométrica. A expressão $(d\sigma)^2$ denota, como usual em métricas na forma isotrópica, o elemento de linha euclidiano tri-dimensional.

A transformação de coordenada radial

$$r = \frac{a^{3/2}r'}{[(a + m)^3 - mr'^2]^{1/2}} \quad (5.4.2)$$

leva o elemento de linha (5.4.1) a

$$(ds)^2 = \frac{(a' - m)^3}{a'^3 - mr'^2} (dx^0)^2 - \frac{a'^6}{[a'^3 - mr'^2]^2} (dr')^2 - r'^2(d\theta)^2 - r'^2 \sin^2\theta (d\phi)^2, \quad (5.4.3)$$

onde $a' = a + m$ é o valor de r' quando $r = a$, conforme se deduz facilmente de (5.4.2). Essa forma da métrica é conveniente para a aplicação da condição de continuidade do potencial eletrostático através da superfície da esfera de poeira carregada (daqui em diante, por simplicidade, omitiremos a linha na nova variável radial r' , bem como em a').

Agora, no caso de uma carga pontual estática na origem a única componente não nula do 4-vetor potencial é $A_0 = \varphi$ (estamos usando unidades C.G.S. gaussianas) e as equações

de Maxwell se reduzem a

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{|\nu} \equiv (\sqrt{-g} F^{01})_{|1} = 0 . \quad (5.4.4)$$

Utilizamos a métrica (5.4.3) obtemos, após cálculos simples,

$$r^2 \left(1 - \frac{mr^2}{a^3}\right)^{3/2} = cte \quad (5.4.5)$$

A integração de (5.4.5) fornece

$$\varphi = \frac{q}{r} \frac{1 - 2mr^2/a^3}{(1 - mr^2/a^3)^{1/2}} , \quad (5.4.6)$$

onde a constante de integração foi escolhida para que, no limite $m \rightarrow 0$, tenhamos $\varphi = q/r$, onde q é a carga da partícula.

Para obter o potencial de um dipolo estático na origem, vamos agora considerar uma segunda carga $-q$ em $r = \varepsilon$, $\theta = \pi$ onde ε é infinitésimo. O potencial produzido por esta nova carga é dado pela (5.4.6), com as substituições

$$q \rightarrow -q \quad , \quad r \rightarrow r + \varepsilon \cos \theta ; \quad (5.4.7)$$

relembrando que ε é um infinitésimo, chegamos ao novo potencial

$$\varphi_- = -\frac{q}{r} \frac{1 - 2m r^2/a^3}{(1 - mr^2/a^3)^{1/2}} + \frac{q}{r} \frac{\varepsilon \cos \theta}{r (1 - mr^2/a^3)^{3/2}} ; \quad (5.4.8)$$

superpondo agora (5.4.6) e (5.4.8), obtemos finalmente para o potencial de um dipolo estático na origem, orientado na direção $\theta = 0$,

$$\varphi_D(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{r^2} \left(\frac{1 - m/a}{1 - mr^2/a^3} \right)^{3/2} , \quad (5.4.9)$$

onde $p = q\varepsilon(1 - m/a)^{-3/2}$, e o subscrito D indica dipolo.

Na superfície da nuvem esférica, $r = a$, a (5.4.9) leva a

$$\varphi_D(a, \theta) = \frac{p \cos \theta}{a^2} . \quad (5.4.10)$$

Vamos agora calcular este mesmo potencial para pontos exteriores à nossa distribuição. Nesta região a métrica é, usando a mesma coordenada radial,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 (dx^0)^2 - \frac{1}{(1 - m/r)^2} (dr)^2 - r^2 (d\Omega)^2, \quad (5.4.11)$$

onde $d\Omega$ é o elemento euclideo de ângulo sólido. Agora, o potencial eletrostático para um dipolo na origem já foi obtido, quando fizemos a tender a m em nosso trabalho anterior^[21]. Temos

$$\varphi' = \frac{K \cos \theta}{r(r - m)}. \quad (5.4.12)$$

Obtemos o valor da constante K impondo a continuidade de φ quando atravessamos a superfície ($r = a$) da nuvem esférica carregada. Embora esta condição de contorno tenha sido originalmente, nos textos usuais de eletromagnetismo, para geometria de fundo, é razoável supor que ela continue válida em variedades curvas, pois o campo eletromagnético ainda é, neste último caso, obtido calculando-se as derivadas dos potenciais. Logo, uma descontinuidade no potencial implicaria numa derivada infinita, ou seja, num campo infinito, numa região onde, por hipótese, não existe nenhuma fonte singular do campo. Impondo então $\varphi = \varphi'$ em $r = a$, obtemos

$$K = p(1 - m/a). \quad (5.4.13)$$

É fácil agora calcular as componentes não nulas do tensor campo eletromagnético que, no caso estático, são

$$\begin{aligned} F_{01_E} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = K \cos \theta \frac{(2r - m)}{[r(r - m)]^2}, \\ F_{02_E} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = K \frac{\text{sen } \theta}{r(r - m)}. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

De posse das expressões das componentes do campo para $r > a$ gerado por um dipolo estático colocado no centro da distribuição esférica de poeira uniformemente carregada,

podemos agora calcular os campos de radiação de dipolo elétrico, também para pontos exteriores à distribuição.

Não seria particularmente difícil, embora fosse um pouco trabalhoso, calcular os campos estáticos e de radiação para pontos interiores à esfera de poeira. No entanto, como para objetos de interesse em astrofísica só seria possível, até hoje, medir os campos de radiação exteriores, e também porque o conhecimento dos campos interiores não é essencial para obtermos as componentes de $F_{\mu\nu}$ para $r > a$, não efetuaremos aqui este cálculo.

Vamos, como no caso da radiação em fundo cosmológico, iniciar calculando o intervalo de tempo coordenada necessário para um sinal eletromagnético ir do dipolo oscilante na origem das coordenadas (centro da distribuição) até o ponto externo de coordenada radial r . Usando a expressão (5.4.11) da métrica exterior, e considerando geodésicas nulas radiais ($ds = d\theta = d\phi = 0$), obtemos

$$T = \int dt = \frac{1}{c} \int [1 - (m/r)]^{-2} dr . \quad (5.4.15)$$

Integrando agora de a a r , e adicionando uma constante D para levar em conta o tempo condenada necessário para o pulso ir do centro até à superfície da esfera de poeira (tempo este que, é claro, não depende de r), ficamos com

$$T = \frac{1}{c} \left[2m \ln \frac{(r - m)}{(a - m)} + (r - a) \left(1 + \frac{m^2}{(r - m)(a - m)} \right) \right] + D . \quad (5.4.16)$$

Como o procedimento que vamos usar para obter os campos envolve o cálculo de derivadas, e a quantidade fisicamente mais interessante que vamos calcular, por ser a única acessível à mensuração (a potência irradiada) envolve o cálculo de uma média temporal, a constante D é eliminada ao longo destes cálculos; isso justifica nossa afirmativa anterior, pois D é a única quantidade que carrega informação sobre pontos interiores ($r < a$) que aparece nos cálculos dos campos externos.

A partir das mesmas considerações de simetria que utilizamos no caso cosmológico (pois também aqui temos simetria esférica), podemos supor que as únicas componentes de $F_{\mu\nu}$ diferentes de zero são F_{01} , F_{02} e F_{12} , e que elas tenham dependência angular idêntica à dos campos em fundo de Minkowski. Também, por analogia com o caso cosmológico, vamos supor

$$F_{21} = f(r) \operatorname{sen}\theta \exp\{ik[x^0 - cT(r)]\} , \quad (5.4.17)$$

onde $k = \omega/c$. As equações de Maxwell fora das fontes reduzem-se, então, novamente a

$$(\sqrt{-g} F^{01})_{|1} + (\sqrt{-g} F^{02})_{|2} = 0 , \quad (5.4.18)$$

$$(\sqrt{-g} F^{12})_{|2} + (\sqrt{-g} F^{10})_{|0} = 0 , \quad (5.4.19)$$

$$(\sqrt{-g} F^{20})_{|0} + (\sqrt{-g} F^{21})_{|1} = 0 . \quad (5.4.20)$$

Combinando (5.4.20) com (5.4.17), obtemos

$$F_{02} = \frac{i(r-m)^2 \operatorname{sen}\theta}{kr^2} \left[\left\{ \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 f' + 2m \left(1 - \frac{m}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2}\right) f \right\} - \right. \quad (5.4.21) \\ \left. - ickf \right] \exp\{\dots\} ,$$

onde usamos $c(1 - m/r)^2 T' = 1$, devido à (5.4.15), e onde a expressão entre chaves na exponencial é idêntica àquela em (5.4.17) e a linha denota derivada em relação a r .

Novamente devemos ter, no limite de frequência nula (i.e., quando $k \rightarrow 0$) esta componente do campo reduzindo-se à do caso eletrostático. Usando a F_{02_E} da (5.4.14), ficamos com

$$\frac{-ikKr}{(r-m)^3} = \left[\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 f' + 2m \left(1 - \frac{m}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2}\right) f \right] . \quad (5.4.22)$$

Esta escolha para os termos dominantes quando $k \rightarrow 0$ é, novamente, a única que não nos leva a inconsistência^[22].

A solução de (5.4.22) é facilmente obtida. Ela é

$$f(r) = -\frac{ikKr^2}{(r-m)^4} \left[\frac{m}{2} - r + C(r-m)^2 \right], \quad (5.4.23)$$

onde C é uma constante de integração e K é dado por (5.4.13).

Substituindo (5.4.23) em (5.4.17), obtemos

$$F_{12} = \frac{ikKr^2}{(r-m)^2} \text{sen } \theta \left[\frac{m-2r}{2(r-m)^2} + C \right] \exp\{\dots\} \quad (5.4.24)$$

Para determinar a constante C , vamos comparar (5.4.24) com a expressão de F_{12} no caso de uma variedade de fundo de Minkowski. Temos que, é claro, primeiro escrever F_{12} em uma base de tetradas:

$$\mathcal{F}_{12} = |g^{11}g^{22}|^{1/2} F_{12} = \left(1 - \frac{m}{r}\right) \left(\frac{1}{r} F_{12}\right). \quad (5.4.25)$$

Temos assim

$$\lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{F}_{12} = K \text{sen } \theta \left[\frac{-ik}{r^2} + \frac{ikC}{r} \right] \exp\{i(\omega t - kr)\}. \quad (5.4.26)$$

Comparando com a expressão para métrica de fundo plana

$$F_{12} = B_\phi = K \text{sen } \theta \left[-\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right] \exp\{i(\omega t - kr)\}, \quad (5.4.27)$$

vemos que $C = ik$.

Podemos agora, usando (5.4.21), escrever F_{02} como

$$F_{02} = K \text{sen } \theta \left[k^2 + \frac{1}{r(r-m)} + \frac{ik(2r-m)}{2(r-m)^2} \right] \exp\{\dots\}, \quad (5.4.28)$$

e, usando (5.4.19), obter facilmente a outra componente não nula de $F_{\mu\nu}$,

$$F_{01} = \frac{K \cos \theta}{r^2} \left[\frac{2r-m}{(r-m)^2} - 2ik \right] \exp\{\dots\}. \quad (5.4.29)$$

Quando expressamos (5.4.28) e (5.4.29) na mesma base de tetrada em que colocamos (5.4.24), é fácil verificar que os limites, quando $m \rightarrow 0$, das expressões assim obtidas

coincidem com as expressões de fundo plano. Além disso, os limites destas mesmas expressões quando $k \rightarrow 0$ concordam com as expressões eletrostáticas, justificando mais uma vez nossa escolha dos termos dominantes em (5.4.21) .

Vamos agora passar ao cálculo da potência irradiada por unidade de área, que é a grandeza acessível à mensuração direta, sendo portanto de grande interesse, e também ao cálculo da potência total irradiada. Inicialmente calcularemos a componente T_0^1 do tensor energia momento associado a este campo eletromagnético. No limite da relatividade especial esta quantidade corresponde, como é bem conhecido, à componente do vetor de Poynting utilizada para obter o padrão de radiação e a potência irradiada. Temos

$$T_0^1 = \frac{c}{4\pi} F^{1\alpha*} F_{\alpha 0} ; \quad (5.4.30)$$

substituindo agora nesta expressão as componentes não nulas do tensor campo eletromagnético em nosso caso, e tomando a metade da parte real do resultado (pois estamos lidando com campos variando harmonicamente no tempo, e assim obteremos a potência media irradiada por ciclo, que é a quantidade fornecida pelos aparelhos de medida), chegamos a

$$\frac{1}{2} ReT_0^1 = \frac{c}{8\pi} \frac{k^2 K^2 \sin^2 \theta}{r^2} \left\{ k^2 + \frac{1}{r(r-m)} + \frac{(r-m/2)^2}{(r-m)^4} \right\} . \quad (5.4.31)$$

Vamos agora calcular a potência total irradiada, utilizando

$$\frac{dE}{dt} = \int T_0^1 r^2 \sin \theta d\theta d\phi , \quad (5.4.32)$$

que pode ser interpretada, na região assintótica, como o fluxo integrado usual do vetor de Poynting. Note que, quando $m \rightarrow 0$, (5.4.31) reduz-se a

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} ReT_0^1 = \frac{c}{8\pi} p_0^2 k^2 \sin^2 \theta \left[\frac{k^2}{r^2} + \frac{2}{r^4} \right] . \quad (5.4.33)$$

O segundo termo entre colchetes não contribui para a radiação, pois seu fluxo através de uma superfície esférica envolvendo a fonte tende a zero quando $r \rightarrow \infty$. Os termos

restantes nos dão a expressão costumeira para o padrão de radiação de um dipolo elétrico num fundo de Minkowski.

Observando agora (5.4.32) vemos que a potência total irradiada, medida por um observador externo à nuvem esférica, é dada por (5.4.31) multiplicada por $4\pi r^2$. Aqui aparece um comportamento interessante, devido ao fator K^2 (lembramos que K é uma função do raio da nuvem a , e de sua massa m , conforme é claro a partir de (5.4.13)). Na Figura 9 temos o gráfico de K^2 em função de a , para o valor particular $m = 2$, e para $a \geq m$.

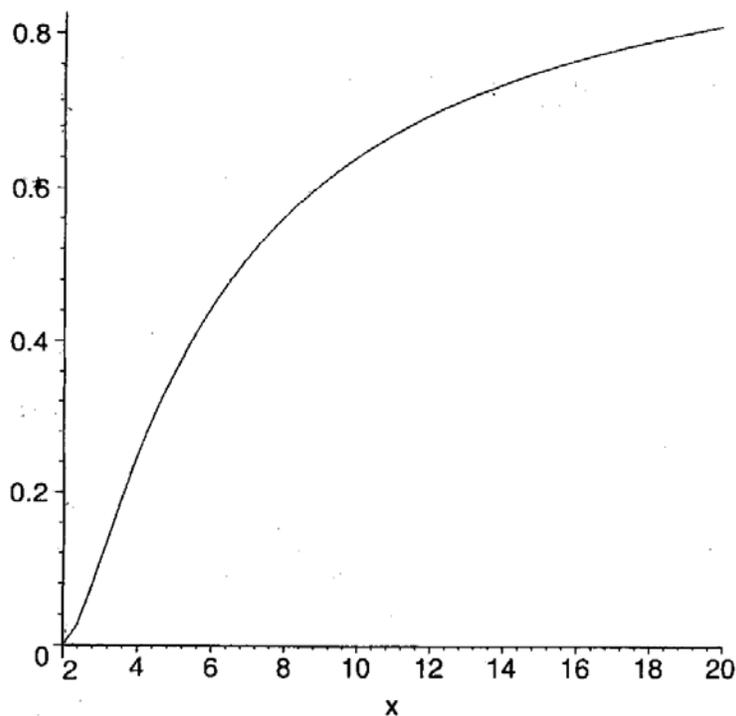


Figura 9 Gráfico da função $K^2(a)$, para $m = 2$, e $p = 1$

Vamos primeiro notar que $\lim_{a \rightarrow \infty} K^2 = 1$ e $\lim_{a \rightarrow m} K^2 = 0$. Estes dois comportamentos de K^2 sugerem a seguinte interpretação para nossa expressão da potência total irradiada: nem toda energia emitida pelo dipolo oscilante na origem alcança um observador externo. De acordo com esta interpretação vemos na Figura 9 que, para a da ordem de cinquenta raios

gravitacionais ($r = m = GM/c^2$), teremos $K \simeq 0,96$, ou seja, cerca de 96% da potência total irradiada atingiria observadores externos ($r > m$).

Por outro lado, quando a tem valores próximos ao do raio da superfície singular ($r = m$), a maior parte da energia irradiada não atingirá o exterior da nuvem esférica. Além disso, para $a = m$ nenhuma radiação será observada. Este comportamento é exatamente o que deveríamos esperar, já que para $a \leq m$ temos um buraco negro de Reissner-Nordström “otimamente carregado” ou “extremo”, que são os termos utilizados quando $Q^2 = GM^2$.

Devemos lembrar ainda que, para $a < m$, nossa expressão para a potência total irradiada não tem nenhum significado, já que ela foi deduzida usando as soluções das equações de Maxwell para $r \geq a$.

Assim, nossa interpretação dos resultados sugere haver um aprisionamento de parte da radiação emitida pelo dipolo radiante, além daquele causado pela reflexão da radiação eletromagnética, gerado pela descontinuidade no índice de refração em $r = a$.

Supondo agora que pudéssemos aplicar estas conclusões a objetos astrofísicos reais, vemos que o efeito seria desprezível na maioria dos casos. Por exemplo, no caso de uma anã branca típica, teríamos um raio da ordem de 1.000km, e um valor 100m para a massa, implicando em um raio gravitacional da ordem de 10^4 cm. Assim praticamente toda a radiação emitida a partir do seu centro alcançaria a região exterior (lembramos que reações nucleares nas regiões centrais são, atualmente, supostas serem a fonte de energia das estrelas).

O único caso em que poderíamos esperar um apreciável aprisionamento de energia seria aquele em que nossa nuvem carregada apresentasse raio e massa típicos de uma estrela de nêutrons (10km e 10^{32} g), resultando em um raio gravitacional aproximadamente igual a 600m. Vemos, a partir de nosso gráfico (Figura 9), que cerca de 19% da potência irradiada permaneceria no interior da distribuição. Se este efeito ocorrer em estrelas reais, ele pode

ter importância na análise da estabilidade do sistema, pois a pressão exercida por esta radiação pode ajudar a contrabalançar a atração gravitacional.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar outra vez que nosso modelo está longe de ser realista, pois não há evidência de nenhuma quantidade razoável de carga elétrica associada com estrelas (veja, porém, as referências [64] e [65]). No entanto, o aprisionamento da radiação parece, mesmo em nosso modelo, ser devido principalmente à descontinuidade no tensor energia momentum em $r = a$. Sendo assim, é possível supor que o efeito ocorra mesmo em modelos mais realísticos.

Capítulo 6

O Problema das Inhomogeneidades e o Universo Acelerado

6.1 Considerações Gerais

Nos últimos anos, com o lançamento dos observatórios orbitais (Hubble, Chandra, etc...), tem havido um crescimento acentuado na quantidade de dados experimentais importantes disponíveis para o estudo da Cosmologia. Dentre estes, destacaram-se recentemente os resultados das supernovas do tipo *IA*, no final da década de 1990, e que deram um certo suporte à hipótese de que o universo estaria em expansão acelerada^[44,45]. Em um artigo recente^[43], Campos e Souza mostraram que modelos cosmológicos com criação de partículas, do tipo previamente considerado por Lima *et al.*^[46,47,48,50], podem descrever tão bem um universo acelerado quanto outros modelos que, para este fim, reintroduziram a constante cosmológica, ou ainda os que propõem outros candidatos a gerar uma pressão negativa (a quintessência, por exemplo)^[42,53]. O modelo com criação de partículas possui uma característica muito atraente, qual seja, a de relacionar propriedades do Universo em escala cosmológica a fenômenos na escala de partículas elementares^[51].

Além disso, os modelos com criação de partículas apresentam uma concordância razoável com testes cinéticos, tais como as medidas de distância de luminosidade, de diâmetros angulares, e da relação contagem de galáxias-desvio para o vermelho, conforme foi ressaltado também por Lima *et al*^[50].

No caso do problema que estamos considerando nesta tese, ou seja, da propagação de radiação eletromagnética em métricas de fundo, não levamos em conta nos capítulos anteriores, quando consideramos fundos cosmológicos, a possibilidade de uma expansão acelerada. Tampouco foi levada em conta a questão das inhomogeneidades; nas aplicações à Cosmologia adotamos sempre a aproximação de um universo formado por um fluido contínuo.

Este modelo pode funcionar razoavelmente em uma escala de bilhões de anos-luz, mas é sempre uma aproximação; além disso, a existência de inhomogeneidades pode ter algumas conseqüências interessantes e, pelo menos em princípio, mensuráveis, conforme esperamos demonstrar. Vamos então, neste capítulo, tentar descrever alguns aspectos da propagação de radiação eletromagnética, na aproximação da Óptica Geométrica, em métricas cosmológicas de fundo, supondo uma expansão acelerada.

Para facilitar a compreensão vamos primeiro fazer um breve resumo sobre os modelos cosmológicos com criação de partículas, também conhecidos por ‘cosmologias de sistema aberto, (CSA)’, e sua possível relação com uma expansão acelerada do Universo.

Iniciaremos com a bem conhecida métrica de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître, que pressupõe um Universo homogêneo e isotrópico (neste capítulo adotamos a convenção $c = 1$):

$$(ds)^2 = (dt)^2 - R^2(t) \left(\frac{(dr)^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2 \right). \quad (6.1.1)$$

As equações de campo de Einstein fornecem neste caso as expressões também já

conhecidas

$$8\pi G\rho = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3 \frac{\kappa}{R^2} , \quad (6.1.2)$$

$$8\pi G (P_T + \bar{P}) = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\kappa}{R^2} .$$

A produção de partículas pode ser fenomenologicamente introduzida^[50] acoplado a estas últimas expressões uma equação de balanceamento para o número de partículas por unidade de volume, $n(t)$:

$$\dot{n} + 3 \frac{\dot{R}}{R} n = \Psi . \quad (6.1.3)$$

Nestas equações, o ponto sobre um símbolo significa, como usual, derivada em relação ao tempo. P_T é a pressão termodinâmica, ρ é a densidade de matéria-energia e Ψ é o termo de fonte que descreve, fenomenologicamente, a criação de partículas. P_c é a pressão de criação, dada por

$$P_c = -\frac{\rho + P_T}{3nH} \Psi , \quad (6.1.4)$$

quando a criação de partículas é adiabática. Para que a descrição do ambiente cosmológico fique completa, é necessária uma expressão explícita para o termo de fonte, Ψ . Vamos então combinar (6.1.2), (6.1.3) e (6.1.4) com a equação de estado $P_T = (\nu - 1)\rho$. Obtemos

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\nu - 2}{2} - \frac{\nu\Psi}{2nH} \right) (\dot{R}^2 + \kappa) = 0 , \quad (6.1.5)$$

onde ν é uma constante, e κ é a curvatura tri-dimensional. Adotaremos aqui para Ψ a expressão proposta por Lima *et al.*^[46,47,48], ou seja, vamos fazer $\Psi = 3n\beta H$. Nesta expressão, H é o parâmetro de Hubble, n , conforme definido anteriormente, é o número de partículas por unidade de volume, e β é o parâmetro de criação, que será aqui considerado constante. Lembramos ainda que, se quisermos evitar uma violação da segunda lei da

Termodinâmica ($S_{||\alpha}^\alpha > 0$), β deve ser positivo. A equação diferencial acima pode ser facilmente integrada, no caso $k = 0$. O resultado é

$$R = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3\nu(1-\beta)}}, \quad (6.1.6)$$

onde o índice 0 indica quantidades avaliadas na época atual. Vamos agora esclarecer a relação entre o modelo CSA e aquele com constante cosmológica λ . Com este objetivo, serão comparadas as produções de entropia nestes dois modelos.

No caso da CSA obtemos

$$S_{||\alpha}^\alpha = n\dot{\sigma} + \sigma\dot{\psi} = -\frac{\mu\dot{\psi}}{T}, \quad (6.1.7)$$

enquanto os modelos com λ implicam em

$$S_{||\alpha}^\alpha = -\frac{\dot{\lambda}}{8\pi GT}. \quad (6.1.8)$$

Aqui T simboliza a temperatura absoluta, $\mu = [(p + P)/n] - T\sigma$ é o potencial químico e σ é a entropia por partícula.

Percebemos então que os dois cenários podem dar conta do conteúdo de entropia do nosso modelo de Universo. Agora, como as equações de Einstein são invariantes sob reversão temporal, é extremamente difícil acomodar esta produção de entropia em modelos cosmológicos baseados apenas nestas equações, conforme foi ressaltado por Prigogine^[52].

Vamos então imaginar um processo adiabático, ou seja, supor $d\sigma/dt = 0$. Igualando, em seguida, as contribuições para a entropia por partícula devidas, respectivamente, à influência de λ e à produção de partículas, obtemos

$$\frac{\dot{\lambda}}{8\pi G} = \frac{(\nu + 1)\rho\dot{\Psi}}{n}. \quad (6.1.9)$$

Vemos então facilmente que, supondo $\Psi = 3n\beta H$, a dependência temporal de λ deve ser da forma t^{-2} . A função de Hubble é também a mesma nos dois casos, pois obtemos expressões idênticas para a evolução do fator de escala nas duas situações.

6.2 A Expansão Acelerada do Universo

Os dados obtidos a partir da observação de supernovas do tipo *IA* indicam a possibilidade de uma expansão acelerada do Universo. Este aumento na taxa de expansão é geralmente considerado um efeito de algum tipo de gravidade (em termos newtonianos) repulsiva, que poderia ser gerada por uma pressão negativa, ou por um termo cosmológico nas equações de Einstein, ou ainda por uma componente de quintaessência no conteúdo material do Universo.

Uma outra alternativa seria considerar a criação de partículas (o que naturalmente implicaria numa alteração do tensor energia-momentum) para dar conta do possível aumento da velocidade de expansão^[43]. Vamos, para tentar construir um modelo desta situação, escrever o termo de pressão no tensor energias momentum como a soma de duas parcelas: uma representando a pressão termodinâmica usual, e outra descrevendo a influência da criação de partículas. Levando em conta (6.1.6), o parâmetro de desaceleração pode ser escrito em termos da função que representa a fonte de partículas, do modo

$$q = \frac{1}{2} - \frac{4\pi m G \Psi}{H^3}, \quad (6.2.1)$$

onde m é a massa de repouso das partículas produzidas, e adotamos um modelo com curvatura tri-dimensional nula. Usando a expressão anteriormente definida para Ψ obtemos, se $\beta > 1/3$, um modelo de Universo com expansão acelerada, com fator de escala dado por (6.1.6). É interessante notar que, se levarmos em conta as melhores estimativas experimentais disponíveis para a idade dos mais antigos objetos conhecidos em nossa galáxia, bem como a melhor estimativa disponível para a constante de Hubble, e ainda os dados que sugerem a aceleração do Universo, obtemos $0,33 \leq \beta \leq 0,49$, conforme ressaltado por Campos e Souza^[43].

6.2.1 A Equação de Dyer-Roeder

A equação diferencial de Dyer-Roeder^[55] descreve um efeito conhecido como focalização de Ricci, que pode ser descrito assim: imagine uma fonte luminosa extensa e um feixe de raios, em forma de cone, ligando esta fonte a um observador. Caso exista alguma distribuição de matéria no interior deste cone, o diâmetro da fonte parecerá menor do que aquele que seria observado se a propagação dos raios ocorresse através do espaço vazio. Vamos, nesta seção, deduzir e resolver a equação de Dyer-Roeder no caso de um modelo cosmológico com criação de partículas.

Partiremos da equação de focalização de Ricci que, no caso de uma variedade descrita por uma métrica conformemente plana, assume a forma

$$\ddot{\sqrt{A}} + \frac{1}{2} R_{\alpha\gamma} k^\alpha k^\gamma \sqrt{A} = 0, \quad (6.2.2)$$

onde o ponto sobre um símbolo indica derivada em relação ao tempo, A é a área da seção reta do feixe luminoso, e k^α é o vetor tangente ao raio luminoso^[57]. Considerando um tensor energia-momentum da forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (6.2.3)$$

onde a pressão total P inclui as contribuições da pressão termodinâmica e daquela causada pela criação de partículas, obtemos, após um cálculo direto^[57],

$$\ddot{\sqrt{A}} + 4\pi \frac{\rho + P}{H_0^2} (1+z)^2 \sqrt{A} = 0, \quad (6.2.4)$$

onde z representa, como usual, o desvio para o vermelho. Levando agora em conta (6.1.4) e (6.1.6) e após um cálculo simples, embora um pouco extenso^[57], chegamos à equação de Dyer-Roeder em uma métrica de fundo cosmológica com criação de partículas:

$$(1+z)^5 \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{7}{2} (1+z)^4 \frac{dr}{dz} + \frac{3}{2} (1-\beta) [1+z]^{3(1-\beta)} \alpha r = 0, \quad (6.2.5)$$

onde utilizamos a “distância adimensional” $r(z)$, definida por $r = (1/c)DH_0$, sendo D a distância de diâmetro angular^[57]. O parâmetro α que aparece na equação diferencial acima está relacionado à focalização de Ricci; seu valor indica a fração da matéria uniformemente distribuída no interior do feixe luminoso. Portanto, $\alpha = 0$ indicaria um universo onde toda a matéria estaria agrupada em aglomerados, enquanto com $\alpha = 1$ teríamos um universo onde todo o conteúdo material estaria distribuído de forma homogênea. Vamos agora analisar dois casos particulares interessantes.

a) Solução de (6.2.5) para α constante

É possível, após alguns arranjos algébricos, resolver (6.2.5) analiticamente, em termos de funções de Bessel, para qualquer valor constante admissível de α (é claro que, devido a sua interpretação física, este parâmetro só pode assumir valores entre 0 e 1). O resultado é^[43]

$$r(z) = (1+z)^{-5/4} \left\{ C_1 J_{\frac{\pm 5}{6\beta}}[\Delta] + C_2 Y_{\frac{\pm 5}{6\beta}}[\Delta] \right\}, \quad (6.2.6)$$

onde

$$\Delta = \left(\frac{2\alpha(1-\beta)}{3\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} (1+z)^{-\frac{3\beta}{2}}, \quad (6.2.7)$$

e J e Y são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie respectivamente. Na Figura 10.1 temos um gráfico de $r(z)$ para um modelo descrevendo um universo expandindo sem aceleração ($\beta < 1/3$), para alguns valores constantes de α . Já a Figura 10.2 ilustra o comportamento de $r(z)$, para os mesmos valores de α , no caso de uma expansão acelerada ($\beta > 1/3$).

b) Uma solução com α dependendo de z

Suponhamos agora que α (e portanto a fração da matéria que está homogeneamente distribuída) possa ser uma função do desvio para o vermelho z . Mais especificamente,

vamos analisar a equação de Dyer-Roeder para a dependência de α em função de sugerida por Linder^[58],

$$\alpha(z) = p(1+z)^q, \quad (6.2.8)$$

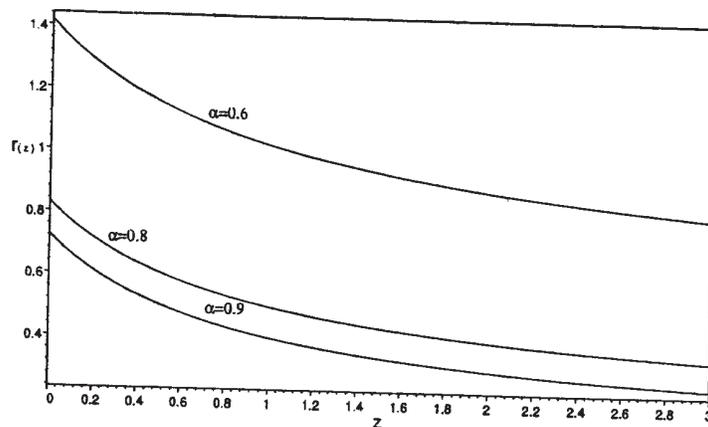


Figura 10.1 $\beta = 0, 1; C_1 = 1; C_2 = 1$.

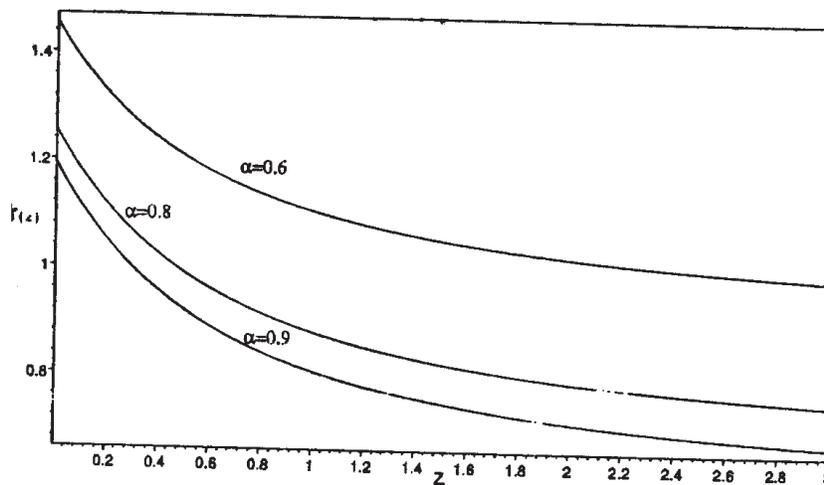


Figura 10.2 $\beta = 0, 4; C_1 = 1; C_2 = 1$.

onde p e q são constantes. Aceitando a interpretação do desvio para o vermelho como

um indicador direto de distâncias, é razoável supor que a quantidade de inomogeneidades diminua (e portanto α aumente) a medida que z aumenta (pois estaríamos observando um Universo cada vez mais jovem), o que implica em supor q positivo. É preciso também um certo cuidado de modo a manter os valores de α no intervalo entre 0 e 1. Inserindo esta expressão para α na equação de Dyer-Roeder, obtemos novamente uma equação diferencial cuja solução pode ser expressa em termos de funções de Bessel,

$$r(z) = C_1 J_A(B) + C_2 Y_A(B) , \quad (6.2.9)$$

onde

$$A = \frac{5}{2(5 - 3\beta + q)} \quad (6.2.10)$$

e

$$B = \frac{\sqrt{6(1 - \beta)p}(1 + z)^{(5-3\beta+q)/2}}{5 - 3\beta + q} . \quad (6.2.11)$$

Na Figura 10.3 está ilustrado o comportamento de $r(z)$, para dois diferentes valores do par p, q , no caso de um Universo não acelerado ($\beta < 1/3$).

Já na Figura 10.4 temos o gráfico da mesma função, para os mesmos valores de p e q , no caso de um Universo em expansão acelerada ($\beta > 1/3$).

6.3 Conclusões

Observando a Figura 10.1 (caso de Universo não acelerado), notamos que um aumento no número de inomogeneidades no caminho do feixe luminoso (que corresponde a uma diminuição no valor de α) faz com que a distância de Dyer-Roeder $r(z)$ seja maior, para um mesmo valor do desvio para o vermelho. Isto, por sua vez, implica em um valor menor para o ângulo de visada, à medida que α diminui. Podemos interpretar isto então dizendo que os objetos terão um diâmetro aparente menor do que aquele que seria observado

em um universo totalmente homogêneo ($\alpha = 1$). Na Figura 10.2 repetimos os gráficos, agora porém para um Universo acelerado. É fácil ver que temos o mesmo comportamento qualitativo, com um pequeno aumento no

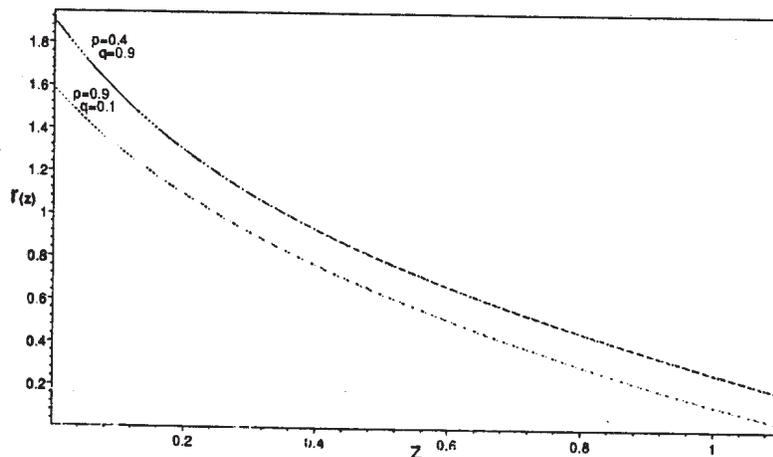


Figura 10.3 $\beta = 0,25$; $C_1 = 1$; $C_2 = -1$.

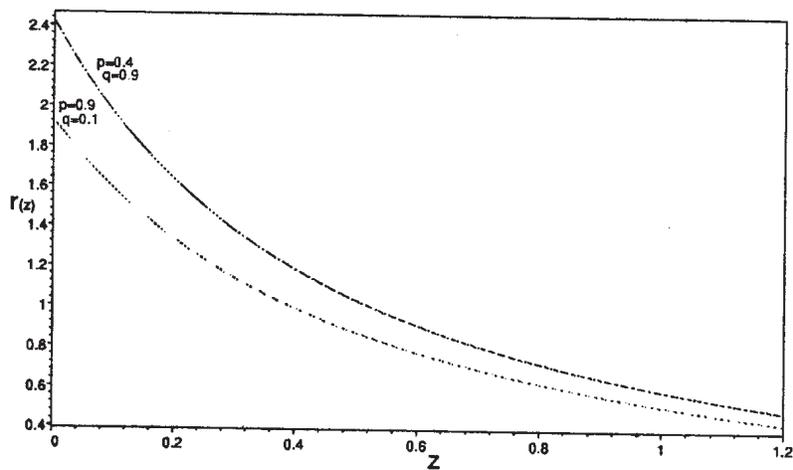


Figura 10.4 $\beta = 0,8$; $C_1 = 1$; $C_2 = 1$.

efeito. Percebe-se claramente então que a origem do efeito sobre os diâmetros angulares

está nas inomogeneidades; a aceleração, embora exerça alguma influência, não é a principal causa. O mesmo comportamento é observado, em termos qualitativos, no caso ilustrado nas Figuras. 10.3 e 10.4, onde tomamos o cuidado de manter o valor de $\alpha(z)$ dentro dos limites fisicamente aceitáveis, isto é, entre 0 e 1.

6.4 Perspectivas Futuras

No caso das soluções das equações de Maxwell em métricas de fundo, uma das possíveis aplicações futuras interessantes seria tentar obter resultados para modelos estelares mais realistas que o de Majumdar-Papapetrou. No caso das inomogeneidades, pensamos ser possível utilizar a equação de Dyer-Roeder para tentar obter estimativas do parâmetro α , através de medidas dos maiores desvios para o vermelho acessíveis aos aparelhos atuais, e também para testar a hipótese do Universo acelerado. Finalmente, as técnicas desenvolvidas nesta tese podem, em princípio, ser aplicadas a outras equações de campo em fundos gravitacionais, para obter soluções dependentes do tempo, e analisar a propagação dos campos. Uma aplicação particularmente interessante seria utilizar estas técnicas para estudar neutrinos em geometrias de fundo, com possíveis aplicações a supernovas e também ao problema dos neutrinos solares. Já fizemos um estudo preliminar do espalhamento de neutrinos por plasmas (um processo que se acredita ocorrer durante a explosão de supernovas)^[60]. Para introduzir o efeito da gravitação pretendemos utilizar a técnica de Vishveshwara *et al.*, onde foram utilizados os coeficientes de Fock-Ivanenko^[61]. Todas estas extensões encontram-se atualmente em andamento.

Referências

- [1] E.T. WHITTAKER – On Electric Phenomena in Gravitational Fields – Proc. Roy. Soc. A **116** 720 (1927).

- [2] E.T. COPSON – On Electrostatics in a Gravitational Field – Proc. Roy. Soc. A **118** 184 (1928).
- [3] E.T. WHITTAKER – Note on the Law that the Light Rays are the Null Geodesics of Gravitational Fields – Proc. Camb. Phil. Soc. **24** 32 (1928).
- [4] J.M. WHITTAKER – The Electron in a Gravitational Field – Proc. Camb. Phil. Soc. **24** 414 (1928).
- [5] W. ISRAEL – Event Horizons in Static Electrovac SpaceTimes – Comm. Math. Phys. **8** 245 (1968).
- [6] J.M. COHEN e R.M. WALD – Point Charge in the Vicinity of a Schwarzschild Black-Hole – Jour. Math. Phys. **12** 9 1845 (1971).
- [7] R. HANNI e R. RUFFINI – Lines of Force of a Point Charge Near a Schwarzschild Black-Hole – Phys. Rev. D. **8** 3259 (1973).
- [8] TSE CHIN MO e C.H. PAPAS – Electromagnetic Field and Wave Propagation in Gravitation–Phys. Rev. D. **3** 1708 (1971).
- [9] E.D. FACKERELL e J.R. IPSER – Weak Electromagnetic Fields Around a Rotating Black Hole – Phys. Rev. D. **5** 2455 (1972).
- [10] R. RUFFINI, J. TIOMNO e C.V. VISHVESHWARA – Electromagnetic Field of a Particle Moving in a Spherically Symmetric Black Hole Background – Lett. Nuovo Cim. **3** 211 (1972).
- [11] R. RUFFINI – Fully Relativistic Treatment of the Brehmstahlung Radiation from a Charge Falling in Strong-Gravitational Field – Phys. Lett. **41B** 334 (1972).

- [12] J.A. PETERSON – Magnetic Field of Current Loop Around a Schwarzschild Black-Hole – Phys. Rev. D **10** 3166 (1974) .
- [13] B. LINET – Electrostatics and Magnetostatics in the Schwarzschild Metric – J. Phys. A. **9** 1081 (1976).
- [14] B. LEAUTÉ B. LINET – Electrostatics in a ReissnerNordstrom Space–Time – Phys. Lett. **58A** 5 (1976).
- [15] T.I. GUTSUANEV – The Electromagnetic Field of a Charge Near a Singularity of the Schwarzschild Metric – I.V.U.Z., Fizika **11** 146 (1976).
- [16] T.I. GUTSUANEV e I. R. MUBARAKSHIN – The Electromagnetic Field of a Point Charge in Reissner-Nordström Space – I.V.U.Z., Fizika **8** 245 (1977).
- [17] B. LEAUTÉ – Électromagnétisme dans le Espace-Temps de Kerr – Ann. Inst. H. Poincaré **27** 167 (1977).
- [18] E.T. COPSON – Electrostatics in a Gravitational Field – Proc. Roy. Soc. Edinb. **80A** 201 (1978).
- [19] R.J. ADLER e T.K. DAS – Charged Black Hole Electrostatics – Phys. Rev. D. **14** 2474 (1976).
- [20] R.M. WALD – Construction of Metric and Vector Potential Perturbations of a Reissner Nordström Black Hole – Proc. Roy. Soc. Lond. **369A** 67 (1979).
- [21] J.A. SOUZA – Field of a Dipole in Charged Black Hole Electrostatics – Nuovo Cim. **53B** 81 (1979).
- [22] J.A. SOUZA – Alternative Derivation of the Electric Dipole Radiation Fields – Am. J. Phys. **51** 54 (1983).

- [23] R. BURBIDGE e M. BURBIDGE – Red Shifts of Quasi Stellar Objects and Related Extra Galactic Systems – Nature **222** 735 (1969).
- [24] M. SCHMIDT e R.F. GREEN – Quasar Evolution Derived from the Palomar Bright Quasar Survey and Other Complete Quasar Surveys – Ast. Jour. **269** 352 (1983).
- [25] F. PIAZZESE e G. RIZZI – On the Validity of the Strong Equivalence Principle for Charged Particles in a Schwarzschild Space Time – Gen. Rel. Grav. **18** 1111 (1986).
- [26] B. MASHHOON – Wave Propagation in a Gravitational Field – Phys. Lett. **122A** 299 (1987).
- [27] M. AHMED – An Electromagnetic Field in the Plebański Space - Time – Gen. Rel. Grav. **19** 953 (1987).
- [28] M. de FÁTIMA A. da SILVA, OTTON T. da SILVEIRA FILHO e J.A. SOUZA – Magnetic Field of a Long Wire in a Static Background Gravitational Field: A Classroom Exercise in General Relativity – Am. J. Phys. **57** 8, 735 (1989).
- [29] OTTON T. da SILVEIRA FILHO – Algumas soluções estáticas das equações de Maxwell em espaço curvo – Tese de Mestrado, Universidade Federal Fluminense (1987).
- [30] J.A. SOUZA – Electric Dipole Radiation in Einstein and de Sitter Cosmological Backgrounds and the Quasar Problem – Ast. Spa. Sci. **158** 57-66 (1989).
- [31] J. HADAMARD – Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations–Yale University Press, 75 *et seq.* (1923).
- [32] L. LANDAU e E. LIFSHITZ – Teoria do Campo – Ed. Hemus, Rio de Janeiro (1962).

- [33] R. ADLER, M. BAZIN e M. SCHIFFER – Introduction to General Relativity – McGraw Hill, NY (1972).
- [34] W. MONTEIRO da SILVA JR. – Alternative Derivation of the Axial Multipoles Radiation Fields by Lorentz Gauge – Pre-Print IF/UFRJ/84-05.
- [35] C. MØLLER – The Theory of Relativity – Oxford (1962).
- [36] G. NORDSTRÖM – On the Energy of the Gravitational Fields in Einstein’s Theory – Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap Afdel Natuurk., Amsterdam, **26** 1201-1208 (1918).
- [37] H. REISSNER – Über die Eigengravitation des Elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie – Ann. d. Phys., **50**, 106 (1916).
- [38] H.E.J. CURZON – Cylindrical Solutions of Einstein’s Gravitation Equations – Proc. Lond. Math. Soc. **23** 477 (1925).
- [39] M. von LAUE – Phys. Z. **21** 659 (1920).
- [40] G. LEMAÎTRE – J. Math. Phys. **4** 188 (1925).
- [41] H.P. ROBERTSON – Phil. Mag. **5** 839 (1928).
- [42] L.F. BLOOMFIELD TORRES e J.A. SOUZA – Electromagnetic Radiation from a Source at the Center of a Static Charged Dust Sphere – Astrophys. Spa. Sci. **204** 1-8 (1993).
- [43] M. de CAMPOS e J.A. SOUZA – The Dyer-Roeder Relation in a Universe with Particle Production – Astron. Astrophys. **422** 401-405 (2004).
- [44] A.G. RIESS *et al.* – Ap. J. **116** 1009 (1998).

- [45] S. PERLMUTTER *et al.* – Ap. J. **517** 565 (1998).
- [46] J.A.S. LIMA – Gen. Relat. Grav., **29** 805 (1997).
- [47] J.A.S. LIMA e J.S. ALCANIZ – Astron. Astrophys. **348** 1 (1999).
- [48] J.A.S. LIMA, A.S. GERMANO e L.R. ABRAMO – Phys. Rev. **53** 4287 (1996).
- [49] I. WAGA e R.C. ARCURI – Phys. Rev. D **50** 2928 (1994).
- [50] M.O. CALVÃO, J.A.S. LIMA e I. WAGA – Phys. Lett. A **162** 223 (1992).
- [51] W. Mac CREA – Proc. Roy. Soc. London A **206** 562 (1951).
- [52] I. PRIGOGINE *et al.* – Gen. Relat. Grav. **21** 767 (1989).
- [53] M.P. FREAZA, R.S. de SOUZA e I.WAGA – Phys. Rev. D **66** 103502 (2002).
- [54] W. ZINDHAL *et al.* – Phys. Rev. D **64** 063501 (2001).
- [55] C.C. DYER e R. ROEDER – Ap. J. **189** 167 (1974).
- [56] M. DEMIANSKI, R. de RITIS, A.A. MARINO e E. PIEDIPALUMBO, arXiv:astro-ph/0004376 (2000).
- [57] F. GIOVI, F. OCCHIONERO e L. AMENDOLA – Mont. Not. Roy. Ast. Soc. **325** 1097 (2000).
- [58] E.V. LINDER – Astron. J. **206** 190 (1998).
- [59] F. HOYLE, G. BURBIDGE, J.V. NARLIKAR *et al.* – Ap. J. **410** 437 (1993).
- [60] A. SERBETO e J.A. SOUZA – Stimulated Scattering of Massless Fermionic Neutrinos by Plasmas – Phys. Lett. A **258** 141-144 (1999).

- [61] C.V. VISHVESHWARA e M. KEMBHAVI – Neutrinos in Compact Objects – Phys. Rev. D **22** 2349-2360 (1980).
- [62] C.V. VISHVESHWARA – Neutrinos in the Kerr and Robertson Walker Geometries – J. of Phys. A **15** 1643-1652 (1982).
- [63] J. STUART, B. WYITHE e ABRAHAM LOEB – Magnification of Light from many Distant Quasars by Gravitational Lenses – Nature **417** 923-925 (2002).
- [64] RODRIGO PICANÇO, MANUEL MALHEIRO e SUBHARTY RAY – Charged Polytropic Stars and a Generalization of the Lane-Emden Equation – Int. J. Mod. Phys. D **13** 1441-1446 (2004).
- [65] SUBHARTY RAY, AQUINO L. ESPINDOLA, MANUEL MALHEIRO, JOSÉ P.S. LEMOS e VILSON T. ZANCHIN – Electrically Charged Compact Stars and Formation of Charged Black Holes – Phys. Rev. D **68** 084004 (2003).
- [66] S.D. MAJUMDAR – Phys. Rev. **72** 390 (1947).
- [67] A. PAPAPETROU – Proc. Roy. Ir. Acad. **A81** 191 (1947).
- [68] J.A. SOUZA – Is the Propagation of Electromagnetic Radiation in Cosmological Backgrounds in Agreement with the Standard Model? – Ast. Spa. Sci. **192** 317-320 (1992).
- [69] K. HEIDE – Basic Concepts and Ideas in Nuclear Physics, IOP Publishing Ltd (1994), pág. 183.