

Tese de Doutorado

**Teoria de Perturbações Invariantes de Calibre em
Cenários de Cosmologia Quântica e sua Confrontação com
as Observações**

EMANUEL JOSÉ CAPECHI DE PINHO

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RUA DR. XAVIER SIGAUD 150, RIO DE JANEIRO - RJ**

DEZEMBRO DE 2006

ORIENTADOR: NELSON PINTO NETO

“The result, therefore, of this physical enquiry, is that we find no vestige of a beginning, no prospect of an end.”

James Hutton, considerado o fundador da geologia moderna, em 1788.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | v |
| Resumo | vii |
| Abstract | viii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Aspectos Conceituais | 5 |
| 2.1 Quantização de Sistemas Vinculados | 5 |
| 2.1.1 Aspectos Dinâmicos de Sistemas Vinculados | 6 |
| 2.1.2 Vínculos de Primeira Classe - Transformações de Calibre | 8 |
| 2.1.3 Vínculos de Segunda Classe - Parênteses de Dirac | 9 |
| 2.1.4 Quantização | 10 |
| 2.2 O Problema da Interpretação da Mecânica Quântica | 13 |
| 2.2.1 Postulados da Interpretação Padrão da Mecânica Quântica (Copenhague) | 13 |
| 2.2.2 O Processo de Medida na Interpretação de Copenhague | 14 |
| 2.2.3 Interpretação de Bohm da Mecânica Quântica | 17 |
| 2.2.4 Sistemas de Muitos Corpos | 20 |
| 2.2.5 O Processo de Medida na Interpretação de Bohm | 21 |
| 2.3 Formalismo de Ostrogradski | 23 |
| 3 Teoria de Perturbações Cosmológicas | 26 |
| 3.1 Introdução | 26 |
| 3.2 Perturbações em relatividade geral | 27 |
| 3.2.1 Definição | 27 |
| 3.2.2 Quantidades Cinemáticas | 27 |
| 3.2.3 Dinâmica | 28 |
| 3.3 Perturbações em Universos de FLRW - Cinemática | 29 |
| 3.3.1 Modelo de Fundo | 29 |
| 3.3.2 Cinemática | 31 |
| 3.3.3 Modos escalares, vetoriais e tensoriais | 31 |
| 3.3.4 O Problema da Invariância de Calibre | 34 |
| 3.4 O conteúdo material | 35 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.1 | Campo Escalar | 35 |
| 3.4.2 | Matéria Hidrodinâmica | 37 |
| 3.5 | Perturbações em Universos de FLRW - Dinâmica | 41 |
| 3.5.1 | Matéria Hidrodinâmica | 42 |
| 3.5.2 | Universos dominados por um campo escalar | 48 |
| 4 | Cosmologia Quântica | 52 |
| 4.1 | Introdução | 52 |
| 4.2 | Método de Mini-Superespaço para Universos Dominados por um Fluido Perfeito | 54 |
| 4.3 | Quantização - A Função de Onda do Universo | 57 |
| 4.4 | Trajatórias Bohmianas | 59 |
| 5 | Teoria de Perturbações em Cosmologia Quântica | 63 |
| 5.1 | Introdução | 63 |
| 5.2 | Perturbações em Universos Dominados por um Fluido Perfeito | 65 |
| 5.3 | Quantização | 82 |
| 5.4 | Uso da interpretação de Bohm | 84 |
| 5.5 | Universos Dominados por Campo Escalar | 86 |
| 6 | Comparação com as Observações | 99 |
| 6.1 | Método Utilizando Condições de Junção | 99 |
| 6.2 | Soluções Numéricas | 106 |
| 7 | Conclusões e Perspectivas Futuras | 110 |
| A | Determinação da Ação do Setor Gravitacional até a Segunda Ordem nas Perturbações | 113 |
| B | Obtenção da Ação de um Fluido Expandida até a Segunda Ordem nas Perturbações | 116 |
| | Bibliografia | 118 |

Agradecimentos

Nenhum trabalho dessa natureza se completa pelo esforço ou talento de uma única pessoa. Ao longo do tempo que dedicamos à sua realização, diversas pessoas e entidades vão em maior ou menor grau contribuindo para que tal realização possa se dar da melhor forma possível. Abaixo, deixo um agradecimento sincero a algumas dessas pessoas de quem me lembro agora. Se porventura deixei alguém de fora desta lista, peço desculpas, na certeza de que tal falha em nada diminui a importância de sua ajuda.

Aos meus pais, por sempre se esforçarem em me dar o melhor em estudo e por sempre valorizarem o estudo e o trabalho em minha educação. Essa tese é sem dúvida o resultado de todos esses esforços. Também à minha irmã, que em vários momentos serviu de exemplo e de conselheira.

À minha namorada, Aline, que soube entender e aceitar pacientemente minhas “ausências” quando o tempo para finalizar este trabalho parecia que não ia ser suficiente. Também pelo apoio dado nos momentos em que as forças para continuar pareciam que iam acabar.

Ao Prof. Nelson Pinto Neto, um exemplo de caráter, e que tão paciente e competentemente me orientou neste trajeto, que ora termina.

Agradeço igualmente a todos os professores, da PUC-RIO e do CBPF, de quem durante todos esses anos tive o prazer de absorver um pouco, por menor que seja, dos seus conhecimentos numa ciência tão bela quanto a física.

Em particular ao ICRA-BR, em especial ao Prof. Mário Novello, que sempre acolheu e estimulou os alunos do grupo a se tornarem cientistas verdadeiramente questionadores, que aprendem a olhar adiante das teorias em voga de forma séria e competente. Espero ter atingido um mínimo que seja desse objetivo.

Aos amigos e também alunos do CBPF pela companhia e pelas intermináveis discussões onde sempre aprendia um pouco mais.

Não poderia também deixar de citar o Prof. Patrick Peter e toda a equipe do Institut d’Astrophysique de Paris (IAP), onde esse trabalho foi parcialmente elaborado, por sua hospitalidade e esclarecedoras discussões. Um agradecimento especial também à Mme. Nabila Hamdaoui, por sua presteza e boa vontade em me ajudar na inevitável burocracia.

Agradecimentos também à Maison du Brésil, em Paris, e aos amigos que lá fiz pelo ótimo ambiente e convivência propiciados. Não posso aqui deixar de agradecer também ao amigo Albano, que impediu que eu me tornasse mais um “SDF à

Paris” me acolhendo gentilmente em sua casa nos últimos dias de minha estadia na França.

Por fim agradeço ao CNPQ pelas bolsas de doutorado e doutorado sanduíche recebidas durante os primeiros 3 anos e meio desse trabalho.

Resumo

Apresentamos um formalismo através do qual as equações das perturbações sobre Universos de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker com seções espaciais planas são descritas por hamiltonianas simplificadas e invariantes de calibre. O formalismo apresentado é totalmente independente da validade das equações clássicas de Friedman, sendo aplicável a modelos de Universo advindos da cosmologia quântica. As equações obtidas são formalmente equivalentes às obtidas na abordagem tradicional, dependente das equações clássicas [34]. Como exemplo de aplicação do formalismo, essas equações são então resolvidas em um modelo quântico simples e os espectros de perturbações escalares e de ondas gravitacionais são calculados e comparados com os dados observacionais.

Abstract

We present a formalism by which the perturbations on spatially flat Friedman-Lemaître-Robertson-Walker universes are described by simplified gauge invariant hamiltonians. The present formalism is not dependent on the hypothesis of validity of the classical Friedman equations, being able to be applied to Universe models arising from quantum cosmology. The obtained equations are equivalent to the ones obtained by the traditional approach, based on the classical equations [34]. As an example, these equations are solved in a simple quantum model, and the scalar perturbations and gravitational waves spectra are then calculated and compared to the observations.

Capítulo 1

Introdução

O modelo cosmológico que se baseia na idéia de um começo para o Universo em um tempo finito no passado, o chamado *Big Bang*, seguido de uma fase inflacionária [1, 2, 3] tem grande sucesso em explicar diversos aspectos observacionais como a formação dos primeiros núcleos atômicos leves, dos primeiros átomos, das estrelas e galáxias. Explica também a origem da chamada Radiação Cósmica de Fundo (*Cosmic Microwave Background - CMB*).

A origem desse modelo remonta à observação do afastamento das galáxias, com velocidade proporcional à sua distância (Lei de Hubble), ou seja, a expansão do Universo. Se hoje ele está em expansão, no passado a densidade média deve ter sido maior, e a temperatura média também deve ter sido igualmente maior. As equações que modelam esse Universo, conhecidas como equações de Friedmann [4], indicam que em algum tempo finito no passado essa densidade deve ter divergido, assim como a temperatura. Estamos lidando na realidade com uma singularidade na teoria.

A existência na teoria de uma singularidade em um tempo finito no passado foi considerada durante muito tempo uma situação indesejável, indicadora de que a teoria poderia estar incompleta.

Na década de 60 Hawking e Penrose desenvolveram um teorema, conhecido como teorema de singularidade [5], no qual eles demonstravam que se a distribuição de matéria no espaço-tempo obedecesse a certas condições (conhecidas como condições de energia) além de outras como a ausência de vorticidade e a existência de uma geometria dinâmica, a presença de singularidades em soluções da Teoria da Relatividade Geral (TRG) seria inevitável. Isso deu grande força ao modelo do Big Bang, que até hoje é considerado o modelo padrão da cosmologia. Contribuíram também os diversos sucessos obtidos por esse modelo em explicar vários aspectos observacionais do Universo. Não se pode deixar de comentar aqui o papel importante que o desenvolvimento do paradigma inflacionário, no início dos anos 80, teve nesse sucesso. É por meio da inflação que se explicam aspectos como planeza, ausência de monopólos magnéticos, formação de estruturas e ausência de horizontes em nosso Universo observável.

Acontece que a extrapolação para tempos muito remotos da física que descreve o Universo atualmente pode ser um passo um tanto quanto delicado. Em tempos suficientemente antigos as energias envolvidas seriam tão altas que a física como nós conhecemos poderia simplesmente não ser válida. Em particular a gravitação poderia assumir comportamentos que se afastariam daqueles previstos pela TRG. Nesse contexto o teorema de singularidade perderia sua validade não sendo mais assegurada a inevitabilidade da singularidade.

Essa situação é similar ao que já ocorreu em outros momentos na física, quando teorias que continham singularidades as apresentavam por estarem sendo extrapoladas para regimes nos quais as mesmas não seriam válidas. Assim, a divergência no espectro de emissão de um corpo negro foi eliminada pela introdução da mecânica quântica e a singularidade no campo elétrico de uma carga puntiforme é resolvida pela quantização do campo eletromagnético.

Também os sucessos desse modelo não são prova irrefutável de que o mesmo seja o modelo definitivo para a descrição da evolução do Universo. Há de se lembrar que as observações comprovam este modelo até algumas frações de segundo após a suposta singularidade. Toda e qualquer afirmação feita sobre eventos ocorridos antes desse instante é mera especulação.

Isso não significa, é claro, que a tentativa de desenvolvimento de modelos para o Universo nessa escala de tempo não possa ser feita. Tal modelo será tão melhor quanto mais previsões de caráter observacional ele for capaz de fazer. A palavra final sobre qual modelo é mais adequado será dada pela confrontação dessas previsões com as observações, atuais ou futuras. Nesse sentido, o modelo do Big Bang apresenta o mérito de ter sido uma das primeiras abordagens bem-sucedidas nesse campo e ter motivado gerações de físicos a se debruçarem sobre essa questão.

No entanto o fato desse modelo apresentar a referida singularidade continua sendo, para muitos físicos, uma questão fundamental que impede a aceitação do mesmo como paradigma da cosmologia. Isso tem levado a diversas pesquisas [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] onde algumas condições para a validade do teorema de singularidade são violadas e as consequências dessas violações estudadas. Fora a questão de se esses modelos representam a verdadeira evolução do Universo ou não, há de se reconhecer a importância que essas tentativas têm ao levarem a teoria a se confrontar de alguma forma com seus limites.

Muitos desses modelos são baseados em fluidos que violam algumas das condições de energia [15]. Por questões de objetividade e concisão não discutiremos esses modelos.

Uma outra categoria de modelos que buscam a eliminação da singularidade é a baseada em mudanças no comportamento da gravitação em relação ao que é predito pela TRG. Nesse aspecto a maior aposta é na de que em algum limite a descrição clássica do campo gravitacional tenha que ser substituída por uma abordagem quântica.

Várias propostas de quantização da gravitação têm sido apresentadas [16, 17, 18, 8]. Também não vamos abordar todas elas nesse trabalho. Analisaremos apenas a chamada *quantização canônica* [8, 19, 20, 21], que leva à equação de Wheeler-de

Witt, via formalismo ADM. [22].

A quantização dos modelos cosmológicos, conhecida como *cosmologia quântica*, apresenta uma dificuldade extra: a interpretação da mecânica quântica [23]. A interpretação usualmente aceita, conhecida como interpretação de Copenhagen, é totalmente dependente de um observador clássico externo ao sistema em estudo, além de possuir um enfoque exclusivamente probabilístico e epistemológico. Todas essas características inviabilizam por completo a sua utilização para interpretar os resultados obtidos em cosmologia quântica. Assim, nesse ramo da física, a questão de qual a interpretação mais adequada da mecânica quântica, muitas vezes tratada como de relevância apenas filosófica, assume o status de questão fundamental, que sem uma resposta adequada, torna completamente sem significado qualquer resultado obtido.

Alternativas à interpretação de Copenhagen há muitas [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], que pelas razões já discutidas não serão abordadas aqui. Nesse trabalho adotaremos a interpretação de Bohm-de Broglie [31, 32, 33, 26].

Nos últimos anos a cosmologia ganhou um poderoso “laboratório” para testar seus modelos: as anisotropias da CMB. O modelo padrão consegue reproduzir muito bem essas anisotropias. É fundamental então que um modelo cosmológico não-singular seja capaz de descrever a origem e evolução dessas anisotropias em acordo com os dados experimentais, sob pena de ser abandonado se não o fizer.

Acontece que o estudo dessas anisotropias pressupõe o uso da teoria de perturbações aplicada aos modelos cosmológicos. Infelizmente quando isso é feito, o que se obtém são equações complexas, e que ainda apresentam dificuldades no que tange à quantização das mesmas e também à interpretação física dos resultados.

O modelo padrão consegue contornar essas dificuldades pelo uso das equações de movimento clássicas na ação das perturbações, além da introdução de variáveis invariantes de calibre [34]. Assim o trabalho de cálculo dos espectros de perturbação é grandemente simplificado. Em tese, tal simplificação não poderia ser feita em cosmologia quântica já que na mesma, por princípio, as equações clássicas não são válidas. Seríamos então obrigados a tratar o problema em toda a sua dificuldade.

Tal abordagem foi efetivamente tentada por Hawking *et al.* [35, 36] em 1985. Eles estudaram o espectro de perturbações gerado por Universos mantidos por um campo escalar, com curvatura espacial positiva. As dificuldades encontradas foram tais que o problema só pôde ser resolvido lançando-se mão de uma aproximação semi-clássica. Dessa forma, o problema totalmente quântico nunca foi efetivamente resolvido.

É nesse contexto que o atual trabalho se insere. Nós pretendemos mostrar uma dedução alternativa das equações simplificadas da teoria de perturbações cosmológicas na qual nenhuma menção é feita às equações de movimento do fundo. Com isso, tais equações simplificadas podem ser usadas mesmo no caso em que a gravitação se afasta de seu comportamento clássico. Vamos então aplicá-las para a determinação do espectro de perturbações em um modelo de cosmologia quântica, comparando posteriormente com as observações.

É adequado insistir na relevância de tal estudo, uma vez que se as previsões diferirem daquelas feitas pelo modelo padrão, teremos um critério observacional para excluir um ou outro modelo cosmológico. Se por outro lado as previsões coincidirem, será legítimo dizer que esses modelos de cosmologia quântica estão colocados em bases tão sólidas quanto o modelo padrão. Vale lembrar que esses modelos podem potencialmente resolver todas as questões levantadas pelo modelo padrão sem a necessidade de recorrermos a uma fase inflacionária. Mesmo que tal não fosse verdade, a inflação não é incompatível com a maioria dos modelos cosmológico-quânticos.

Dessa forma o trabalho desenvolvido permite que os modelos da cosmologia quântica sejam retirados do terreno da mera especulação e elevados ao status de teoria científica.

A tese está organizada como segue: no capítulo 2 alguns tópicos considerados relevantes são discutidos. A abordagem será altamente instrumental, sem preocupações excessivas com rigor matemático ou demonstrações formais de resultados. No capítulo 3 discutiremos a teoria de perturbações no modelo padrão. No capítulo 4 apresentaremos as idéias básicas que dão suporte à cosmologia quântica apresentando um modelo simples que servirá como nosso “laboratório” nos capítulos 5 e 6. No primeiro destes capítulos, que se constituem no trabalho original da tese, vamos mostrar como as complicadas equações da teoria de perturbações cosmológicas podem ser simplificadas sem nunca fazer menção às equações da ordem zero. No capítulo 6 o modelo de cosmologia quântica desenvolvido anteriormente será usado para a determinação do espectro de perturbações, o qual poderá então ser comparado com as previsões do modelo padrão e com as observações.

O capítulo 7 encerra esse trabalho com algumas conclusões e comentários finais além de perspectivas futuras da pesquisa aqui desenvolvida.

Por fim comentamos que, exceto onde explicitamente dito o contrário, todos os resultados aqui apresentados serão aplicáveis a Universos espacialmente planos.

Capítulo 2

Aspectos Conceituais

2.1 Quantização de Sistemas Vinculados

Ao se estudar a dinâmica quântica de um sistema físico parte-se de uma lagrangiana construída a partir de critérios cinemáticos ou de forma a gerar equações de movimento já conhecidas na teoria clássica. Uma vez conhecida tal lagrangiana, pode-se quantizar diretamente a teoria (Quantização Funcional) [37, 38] ou construir, ainda no âmbito da mecânica clássica, um espaço de fase onde, a partir da lagrangiana, construímos uma hamiltoniana. A partir deste espaço podemos proceder à Quantização Canônica da teoria [39]. Os detalhes da passagem lagrangiana - hamiltoniana, bem como da construção do espaço de fase e de sua estrutura simplética (Parênteses de Poisson) não serão aqui abordados por fugirem ao escopo da presente tese. Tampouco será abordada aqui a questão da quantização funcional, por ser o trabalho por ora desenvolvido baseado na abordagem canônica do processo de quantização.

No entanto, em alguns sistemas físicos, a passagem da lagrangiana para a hamiltoniana e a construção do espaço de fase da teoria podem apresentar algumas complicações. É nosso objetivo neste capítulo abordar o tratamento destes casos, por se tratar de material considerado fundamental para o entendimento do desenvolvimento da tese. Para maiores detalhes veja [40, 41].

Suponhamos que se tenha uma lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ ¹, onde q_i representa um dos N graus de liberdade da teoria. Se ocorrer de o jacobiano de $\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$ se anular, então nós diremos que o sistema em questão é *vinculado* (as razões para este nome ficarão claras no que segue). Como o momentum canonicamente conjugado à variável q_i é definido por $\partial L / \partial \dot{q}_i$ então a condição anterior para que o sistema seja vinculado é traduzida por $\|\partial p_i / \partial \dot{q}_j\|$. O fato de tal determinante se anular significa que existe pelo menos um momentum p_i (ou pelo menos uma combinação linear de p_i 's) que não depende de nenhum \dot{q} . Ou seja, não se pode inverter alguns dos

¹Vamos, por simplicidade, trabalhar com graus de liberdade discretos. A generalização para graus de liberdade contínuos, e com propriedades de transformação escalares, vetoriais ou tensoriais é imediata

p_i 's para se obter $\dot{q}_j(p_i)$. A existência de um p_i , ou de uma combinação de p_i 's, que não é função de nenhum \dot{q} significa a existência de uma função $\phi_i(q_j, p_j) = 0$.

O significado da existência de tal função não é, em geral, o de uma identidade entre as variáveis q_i e p_i , posto que tais variáveis são consideradas, na construção do espaço de fase, como independentes ². Tais funções, que definem hipersuperfícies $\phi = \text{constante}$ no espaço de fase, representam na realidade restrições sobre quais regiões desse espaço são acessíveis ao sistema físico. Assim, o sistema só pode seguir trajetórias $(q_i(t), p_i(t))$ que estejam inteiramente contidas nas regiões do espaço de fase que satisfaçam simultaneamente a todas as condições $\phi_i = 0$. Claro está que tais condições reduzem o número de graus de liberdade efetivos do sistema, já que num sistema com N variáveis, a existência de n condições $\phi = 0$ implica que o conhecimento de apenas $N - n$ variáveis determina univocamente o ponto do espaço de fase onde se encontra o sistema. As outras n variáveis estão então fixadas pelas n condições $\phi = 0$ e pelas $N - n$ variáveis conhecidas. Diz-se então que cada ϕ representa um *vínculo* entre as variáveis do problema, o que justifica a terminologia de sistema vinculado adotada.

Comentário sobre notação: visando a reforçar o fato de que a condição $\phi = 0$ não representa uma identidade entre as variáveis, mas uma restrição sobre as regiões do espaço de fase acessíveis ao sistema, usa-se a notação $\phi \approx 0$, que se lê “*fracamente zero*”, no lugar de $\phi = 0$.

Uma outra situação que pode acontecer³ é a de não se poder obter todos os \dot{q}_i como função de p_j e q_j , no espaço de fase. Se isso ocorrer então a evolução dinâmica de tal q_i não é fixada pela teoria, se tornando arbitrária. Esta variável está, portanto, “disponível”, podendo ser escolhido como melhor convir à descrição do sistema. Temos então uma liberdade de calibre na teoria.

2.1.1 Aspectos Dinâmicos de Sistemas Vinculados

Sabemos que as equações clássicas são obtidas pela extremização da ação

$$\int dt \left[p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) - H(q_j, p_j, t) \right]. \quad (2.1)$$

Sabemos também do estudo do cálculo que para proceder à extremização de uma função sujeita a vínculos devemos proceder somando a ela os vínculos, através dos multiplicadores de Lagrange. Ou seja, em (2.1) a hamiltoniana passará a ser dada por

$$\tilde{H} = H + \sum_i \lambda_i \phi_i$$

onde os λ_i 's são funções no espaço de fase ainda indeterminadas, que fazem o papel de multiplicadores de Lagrange.

²No entanto, como veremos, em algumas situações particulares pode-se considerar algumas dessas funções como verdadeiras identidades

³Como veremos mais a frente, tal situação ocorre quando a teoria possui os chamados vínculos de primeira classe.

Dizer que as trajetórias descritas pelo sistema físico têm que estar restritas às regiões do espaço de fase onde todas as condições $\phi_i \approx 0$ são satisfeitas equivale a dizer que estas condições devem ser preservadas pela evolução dinâmica do sistema. Então, essa exigência equivale a

$$\{\phi_i, \tilde{H}\} \approx 0 \quad (2.2)$$

para cada ϕ_i .

Note que exigimos que a expressão acima seja fracamente zero. De fato não é necessário que $\{\phi_i, \tilde{H}\}$ seja identicamente nulo, basta que ele se anule nas regiões do espaço de fase efetivamente atravessadas pelas trajetórias do sistema físico.

A condição (2.2) sempre leva a uma das 4 possibilidades abaixo:

1. A equação $\{\phi_i, \tilde{H}\} \approx 0$ não tem solução. Nesse caso não há nenhuma região no espaço de fase que a satisfaça, e o sistema não pode ser realizado fisicamente.
2. A equação $\{\phi_i, \tilde{H}\} \approx 0$ é identicamente satisfeita. Nesse caso a conservação desse particular ϕ_i não acrescenta nenhuma informação nova à descrição do sistema.
3. A condição $\{\phi_i, \tilde{H}\} \approx 0$ gera uma equação que envolve um ou mais λ_i . Nesse caso o conjunto de todas essas expressões determina os multiplicadores de Lagrange envolvidos.
4. A condição $\{\phi_i, \tilde{H}\} \approx 0$ gera uma nova restrição para as regiões do espaço de fase acessíveis ao sistema. Temos então um novo vínculo. Nesse caso devemos repetir a condição (2.2) para este vínculo. O processo então se repete até que nenhum novo vínculo seja obtido.

É conveniente, nesse ponto introduzir uma nomenclatura. Chama-se *vínculos primários* aqueles obtidos diretamente da lagrangiana. Àqueles obtidos a partir da conservação de outros vínculos (situação 4 acima) dá-se o nome de *vínculos secundários*.

Os vínculos de uma teoria podem ainda ser classificados em vínculos *de primeira* ou *de segunda classes* [40, 41]. O critério utilizado em tal classificação é o parêntese de Poisson do vínculo com todos os outros vínculos.

Por vínculo de primeira classe entende-se aquele cujo parêntese de Poisson com todos os outros vínculos é fracamente zero, ou seja

$$\{\phi_i, \phi_j\} = C_{ij}^k \phi_k \approx 0.$$

Se houver pelo menos um vínculo ϕ_j tal que $\{\phi_i, \phi_j\}$ não seja fracamente zero, então ϕ_i (e reciprocamente ϕ_j) será de segunda classe.

2.1.2 Vínculos de Primeira Classe - Transformações de Calibre

Seja ϕ_i um vínculo primário de primeira classe. Tomemos um segundo vínculo ϕ_j . Sendo ϕ_i um vínculo primário, haverá na hamiltoniana um termo $\lambda_i\phi_i$ (sem soma em i). Como ϕ_i é um vínculo de primeira classe, então $\{\phi_i, \phi_j\} \approx 0$ para qualquer j . Logo, nenhuma das expressões obtidas a partir da conservação dos outros vínculos poderá envolver o multiplicador λ_i . Isso significa que este multiplicador não é determinado pela teoria.

Pelo exposto acima, a teoria não impõe nenhuma restrição sobre λ_i . Qualquer que seja o seu valor, a dinâmica da teoria permanecerá inalterada. Temos, portanto, uma liberdade na escolha do particular λ_i utilizado. Dizemos que há uma *liberdade de calibre* na teoria. Para fixarmos esse multiplicador de Lagrange devemos impor uma nova condição na teoria, γ_i , arbitrária a menos da exigência de que $\{\gamma_i, \phi_i\}$ não seja fracamente zero. A conservação de γ_i determinará assim o multiplicador λ_i . A condição γ_i é chamada *condição de calibre*.

Pelo que acabamos de ver, está claro que vínculos primários de primeira classe estão associados a liberdades de calibre na teoria. Já a questão dos vínculos secundários de primeira classe não é clara, pela discussão feita acima. Como tais vínculos possuem, por definição, parênteses de Poisson fracamente zero com todos os outros vínculos, podemos somá-los à hamiltoniana através de novos multiplicadores de Lagrange, sem que isso altere a conservação dos outros vínculos. Dessa forma, teríamos novos multiplicadores de Lagrange não fixados e, portanto, novas liberdades de calibre. De fato, pode-se mostrar [40] que também os vínculos secundários de primeira classe são geradores de transformações de calibre.

Voltando à questão da escolha da condição de calibre γ_i , deve estar claro que, sendo ela uma condição arbitrária, poderíamos mudá-la, escolhendo uma nova condição $\bar{\gamma}_i$. Tal mudança é chamada *transformação de calibre*. De forma geral, uma transformação de calibre modificará a trajetória do sistema no espaço de fase, modificando as funções $q_i(t)$ e $p_i(t)$. A nova função $\bar{q}_i(t)$ ($\bar{p}_i(t)$) será dada por $\bar{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$ ($\bar{p}_i(t) = p_i(t) + \delta p_i(t)$) onde $\delta q_i = \sum_j \{q_i, \phi_j\} \epsilon_j$ ($\delta p_i = \sum_j \{p_i, \phi_j\} \epsilon_j$) sendo ϕ_j vínculos de primeira classe e ϵ_j parâmetros da transformação em questão.

Obviamente, espera-se que as previsões de carácter observacional de uma teoria não sejam sensíveis a particulares escolhas arbitrárias de calibre. As quantidades observáveis de uma teoria devem, portanto ser invariantes de calibre, ou seja, devem ter parênteses de Poisson fracamente zero com todos os vínculos de primeira classe.

Por fim, como vimos, cada liberdade de calibre da teoria permite a escolha de uma condição de calibre, ou seja, uma nova restrição sobre o sistema. Deve estar claro que cada restrição implica na redução de uma variável canônica na teoria. Dessa forma um vínculo de primeira classe corresponde, na prática, à redução de duas variáveis canônicas: uma do próprio vínculo e outra da condição de calibre.

Podemos então resumir o que foi dito em relação aos vínculos de primeira classe em

Definição Sejam ϕ_i e ϕ_j dois de um conjunto de n vínculos de uma teoria. ϕ_i é dito de primeira classe se

$$\{\phi_i, \phi_j\} \approx 0$$

para todo j

Corolários

- Todo vínculo de primeira classe gera uma liberdade de calibre na teoria,
- Cada vínculo de primeira classe implica na redução de duas variáveis canônicas na teoria
- Um observável A da teoria deve satisfazer a $\{A, \phi_i\} \approx 0$ para todo ϕ_i de primeira classe.

2.1.3 Vínculos de Segunda Classe - Parênteses de Dirac

Se o vínculo ϕ_i tiver um parêntese de Poisson não fracamente zero com outro vínculo ϕ_j ele (e também ϕ_j) será dito de segunda classe. Nesse caso a conservação de ϕ_j fixará o multiplicador de Lagrange λ_j . Ou seja, não há indeterminação nenhuma associada ao vínculo ϕ_i . Dessa forma, vínculos de segunda classe não geram liberdades de calibre.

Calculando a derivada no tempo do vínculo de segunda classe ϕ_i obtemos

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H + \sum_j \lambda_j \phi_j\} = \{\phi_i, H\} + \sum_j \lambda_j C_{ij}.$$

Na expressão acima C_{ij} é um elemento genérico da matriz formada pelos parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe independentes

$$C_{ij} =: \{\phi_i, \phi_j\}. \quad (2.3)$$

Exigindo que tal derivada temporal se anule, para garantir a conservação de ϕ_i , então teremos que o multiplicador de lagrange λ_k será dado por

$$\lambda_k = - \sum_i C_{ki}^{-1} \{\phi_i, H\},$$

onde estamos admitindo que a matriz C_{ij} possui uma inversa, o que será confirmado logo abaixo. Da expressão acima vem que a derivada temporal total de uma quantidade qualquer A será dada por

$$\dot{A} = \{A, H + \sum_i \lambda_i \phi_i\} = \{A, H\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} C_{ij}^{-1} \{\phi_j, H\} =: \{A, H\}^D$$

onde definimos a quantidade

$$\{A, B\}^D =: \{A, B\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} C_{ij}^{-1} \{\phi_j, B\}, \quad (2.4)$$

conhecida como *Parêntese de Dirac*.

Uma consequência fundamental da definição do parêntese de Dirac, é que podemos desconsiderar os vínculos de segunda classe na expressão da hamiltoniana, desde que troquemos, em todas as equações de movimento, os parêntese de Poisson pelos de Dirac. Isso é fácil de ver se calcularmos a derivada temporal total de um vínculo de segunda classe em uma teoria que só possua tais vínculos.

Uma outra consequência importante da definição acima é a de que o parêntese de Dirac entre uma quantidade qualquer A e um vínculo de segunda classe ϕ_k é nulo

$$\{A, \phi_k\}^D = \{A, \phi_k\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} C_{ij}^{-1} \{\phi_j, \phi_k\} = \{A, \phi_k\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} C_{ij}^{-1} C_{jk} = 0.$$

Aproveitamos aqui para comentar sobre uma sutileza associada aos vínculos de segunda classe. Para isso, imaginemos que tenhamos um sistema físico com número ímpar de vínculos de segunda classe. Se levarmos em conta que o espaço de fase tem sempre um número par de variáveis, e que cada vínculo de segunda classe diminui uma variável da teoria, concluiremos que um número ímpar de vínculos de segunda classe leva a um espaço de fase com um número ímpar de variáveis canônicas efetivas, o que é um contra-senso. Isso sugere que não pode haver um número ímpar de vínculos de segunda classe em nenhuma teoria.

Vamos olhar mais cuidadosamente o que acontece em tal situação. Sendo ímpar o número de vínculos de segunda classe, então a matriz C_{ij} (equação (2.3)) será uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar. Pode-se mostrar sem dificuldade que tais matrizes possuem determinante nulo, não sendo portanto inversíveis. Nesse caso a expressão (2.4) não pode ser utilizada. Porém, tendo a matriz C_{ij} determinante nulo, haverá alguma transformação linear que, atuando no espaço dos vínculos de segunda classe irá levá-la a uma forma onde toda uma linha se anula. Isso leva à conclusão imediata de que haverá uma combinação linear de vínculos de segunda classe que possuirá parêntese de Poisson nulos com todos os outros vínculos, representando essa combinação linear, na realidade, um outro vínculo de primeira classe. Assim o número de vínculos de segunda classe foi, de fato reduzido de um, resultando em um número par de tais vínculos e resolvendo as dificuldades acima discutidas. Isso mostra também que em qualquer sistema físico, a matriz C_{ij} sempre deverá ter determinante não nulo, sendo então sempre inversível.

Na prática, o que os resultados acima demonstram é que sempre que tivermos vínculos de segunda classe em uma teoria, poderemos tratá-los como verdadeiras identidades entre as variáveis, desde que construamos a álgebra de nosso espaço de fase a partir de uma álgebra de parêntese de Dirac, e não a partir dos parêntese de Poisson.

2.1.4 Quantização

Vamos terminar esta seção discutindo como proceder à quantização de sistemas vinculados. O método de quantização utilizado será o canônico.

Embora não seja esse o nosso objetivo, vamos rever sucintamente o processo de quantização canônica, para então vermos o que muda quando acrescentamos vínculos à teoria. O processo de quantização canônica consiste em

1. Construir um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Os elementos desse espaço, denotados por $|\psi\rangle$, representarão possíveis estados para o sistema físico em estudo. Sobre este espaço deve-se definir um produto interno $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle)^*$ satisfazendo $0 \leq (|\psi\rangle, |\psi\rangle) < \infty$
2. Associar às variáveis clássicas q e p os operadores lineares auto-adjuntos \hat{Q} e \hat{P} . Às funções $f(q, p)$ ficam associadas, naturalmente, funções operatoriais $\hat{f}(\hat{Q}, \hat{P})$. Neste ponto podemos enfrentar problemas de ordenamento de operadores que não comutam.
3. Criar uma álgebra não comutativa sobre \mathcal{H} , obtida a partir dos parênteses de Poisson da teoria clássica. Assim, por exemplo, se $\{q, p\} = 1$ então $[\hat{Q}, \hat{P}] = \iota$.
4. A dinâmica será dada por um operador auto-adjunto, a hamiltoniana \hat{H} , associado à hamiltoniana clássica H . Podemos então encarar a evolução dinâmica do sistema segundo a visão de Heisenberg, na qual o estado $|\psi\rangle$ é invariante e os operadores \hat{A} evoluem no tempo como

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} - \iota[\hat{A}, \hat{H}]$$

ou segundo a visão de Schroedinger, na qual os operadores são invariantes e o estado evolui como

$$\iota \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle.$$

Se, no entanto, houver vínculos na teoria devemos tratá-los adequadamente no esquema acima. No que se refere aos vínculos de primeira classe, a primeira tentativa seria de transformá-los em identidades operatoriais através da imposição de

$$\hat{\phi}_i = 0. \tag{2.5}$$

Se tal igualdade valesse, o comutador entre um de tais vínculos e uma função operatorial qualquer no espaço de Hilbert deveria também se anular, o que contradiria a expressão obtida a partir da transformação dos parênteses de Poisson em comutadores

$$[\hat{A}, \hat{\phi}_i] \leftrightarrow \iota\{A, \phi_i\}.$$

já que em geral $\{A, \phi_i\}$ não se anula. Claramente a proposta (2.5) não funciona. A opção correta nesses casos é de exigir que o vínculo de primeira classe aniquile o estado do sistema

$$\hat{\phi}_i|\psi\rangle = 0.$$

Nesse caso, o comutador entre dois vínculos de primeira classe quânticos obedeceria a

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]|\psi\rangle = iC_{ij}^k \hat{\phi}_k |\psi\rangle \approx 0,$$

em acordo com o fato de o parêntese de Poisson entre eles se anular fracamente. Note que os vínculos de primeira classe representavam classicamente restrições sobre os estados acessíveis ao sistema físico e que quanticamente tais vínculos representam restrições sobre os estados quânticos que podem ser ocupados pelo sistema.

No caso de haver vínculos de segunda classe, o processo de quantização se torna mais sutil. Se escolhêssemos a álgebra de comutadores a partir da álgebra dos parênteses de Poisson, e impuséssemos que o sistema físico deve ser descrito por um estado sujeito a

$$\hat{\phi}_i |\psi\rangle = 0, \quad (2.6)$$

como fizemos com os vínculos de primeira classe, teríamos uma inconsistência na teoria. Para ver isso, suponhamos que haja dois vínculos de segunda classe, ϕ_i e ϕ_j , tais que o parêntese de Poisson entre eles seja dado por

$$\{\phi_i, \phi_j\} = C_{ij}. \quad (2.7)$$

O comutador entre tais operadores seria então

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j] = i\hat{C}_{ij}. \quad (2.8)$$

Impondo a condição (2.6), teríamos, no entanto, que o comutador entre tais vínculos deveria se anular

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]|\psi\rangle = 0$$

o que só poderia ser satisfeito se $\hat{C}_{ij}|\psi\rangle = 0$, o que em geral não é verdade. Se alternativamente impuséssemos a condição (2.5) para os vínculos de segunda classe, novamente cairíamos na inconsistência apontada para o caso dos vínculos de primeira classe, ou seja, de que os seus comutadores com qualquer função de \hat{Q} e \hat{P} deveriam se anular, contrariando a expressão obtida a partir dos parênteses de Poisson. Para contornar tais dificuldades, quantizamos a teoria criando a álgebra dos comutadores a partir dos parênteses de Dirac e aí sim impomos a condição (2.5). Como tais parênteses entre vínculos de segunda classe e qualquer quantidade do espaço de fase se anulam, também o comutador equivalente se anulará, consistentemente com (2.5). Isso significa que podemos encarar os vínculos de segunda classe de uma teoria quântica como identidades entre os operadores e não como restrições sobre os estados físicos. Lembremo-nos que também na teoria clássica, ao utilizarmos os parênteses de Dirac, podemos pensar nos vínculos de segunda classe como identidades e não como simples restrições sobre as regiões do espaço de fase acessíveis ao sistema.

2.2 O Problema da Interpretação da Mecânica Quântica

2.2.1 Postulados da Interpretação Padrão da Mecânica Quântica (Copenhagen)

Vamos apresentar um resumo da interpretação de Copenhagen [42, 43, 44, 45] da mecânica quântica, utilizada pela maioria dos físicos. Nossa análise não entrará a fundo em questões excessivamente técnicas pois as mesmas nos desviariam de nosso objetivo principal nesta seção, que é o de mostrar que tal interpretação possui contradições internas que, embora não prejudiquem a sua aplicação como um algoritmo eficiente na predição de resultados experimentais em praticamente todas as áreas da física, inviabilizam por completo a sua utilização de forma consistente na cosmologia quântica. Pressupõe-se durante toda esta seção que o leitor esteja familiarizado com o formalismo matricial da mecânica quântica.

Os postulados da interpretação de Copenhagen são, portanto:

1. O estado de um sistema físico é completamente descrito por um vetor no espaço de Hilbert, que denotaremos por $|\psi\rangle$.
2. Observáveis são descritos por operadores auto-adjuntos nesse espaço de Hilbert.
3. A dinâmica do sistema é descrita pela equação de Schroedinger

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

onde H é o operador hamiltoniano, construído a partir da hamiltoniana clássica (Visão de Schroedinger da mecânica quântica).

4. Os possíveis resultados de uma medida do observável \mathcal{A} são os auto-valores do operador \hat{A} associado.
5. A probabilidade de, em uma medida do observável \mathcal{A} , obtermos um particular valor a_i será $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$ onde $|a_i\rangle$ é o auto-vetor de \hat{A} associado ao auto-valor a_i ⁴.
6. Após a medida de \mathcal{A} , o sistema é deixado no auto-estado $|a_i\rangle$ associado ao auto-valor a_i obtido na medida, independentemente de qual era o estado anterior do sistema.

Note que os três últimos postulados dão um destaque especial ao processo de medida. Em função deste aspecto, vamos analisar com mais detalhes o que ocorre na medida de um observável.

⁴por simplicidade estamos considerando nesta seção um observável com espectro discreto e não degenerado.

2.2.2 O Processo de Medida na Interpretação de Copenhagen

Suponhamos inicialmente que tenhamos um sistema descrito por um estado $|\psi_i\rangle$, que é um auto-vetor do observável \mathcal{A} que se deseja medir [46, 47]. Se admitimos que o aparato experimental, sendo composto também por átomos, está sujeito às mesmas leis físicas que o sistema sob medição então poderemos atribuir-lhe um estado físico em um correspondente espaço de Hilbert, que designaremos por $|\phi_0\rangle$. Dessa forma o estado total do sistema mais aparato ⁵ será

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle |\phi_0\rangle. \quad (2.9)$$

Para que o aparato possa medir o valor do observável \mathcal{A} no sistema em questão é preciso que os dois sejam, de alguma forma, postos em interação mútua. A forma particular que a hamiltoniana de interação terá não é relevante para nossa discussão. O que nos interessa é que após um tempo finito a interação cesse (a medida esteja terminada) e o estado do sistema completo seja, pelo menos aproximadamente, dado por

$$|\Psi_f\rangle = |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle, \quad (2.10)$$

sem soma em i . Ou seja, o efeito de tal interação foi manter o sistema inalterado, enquanto o aparato foi levado a um estado que denotamos por $|\phi_i\rangle$ que é de alguma forma correlacionado ao auto-valor a_i do observável \mathcal{A} do qual $|\psi_i\rangle$ é auto-estado. Sendo os estados $|\phi_0\rangle$ e $|\phi_i\rangle$ associados a diferentes valores de algum parâmetro macroscópico do aparato (a posição de um ponteiro, por exemplo) e não havendo superposição apreciável entre as diferentes funções de onda $|\phi_i\rangle$, teremos uma leitura direta no aparato de uma informação da qual se poderá inferir o valor de a_i . O leitor deve se convencer que, embora extremamente simplificada e idealizada, a análise acima já contém em si os elementos essenciais do que se pode chamar “a medida do observável \mathcal{A} ”.

Mas o que acontece se o estado inicial do sistema não for um auto-estado do observável \mathcal{A} a ser medido? Suponhamos que tal estado inicial seja:

$$|\psi_0\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \quad \sum_i |c_i|^2 = 1$$

e $|\psi_i\rangle$ sejam os auto-estados de \hat{A} . O estado do sistema completo será então

$$|\Psi_i\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle |\phi_0\rangle.$$

Após a interação entre o sistema e o aparato, e levando em conta que a passagem de (2.9) para (2.10) é linear, o sistema completo estará no estado

$$|\Psi_f\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle. \quad (2.11)$$

⁵Ao sistema formado pelo aparato mais o sistema sob medição daremos o nome de sistema completo

Vemos agora que o aparato não está mais em um único estado $|\phi_i\rangle$ a partir do qual possamos ler um valor de a_i . Ele está na realidade em uma superposição de estados associados a diferentes valores desse observável. Numa tal situação teríamos algo como uma interferência entre “ponteiros” no aparelho de medida, o que obviamente não ocorre. Rigorosamente, não há nem mesmo um único a_i a ser lido, visto que o próprio sistema não está em um auto-estado associado a um único a_i . Tampouco podemos agora pensar no aparato como “desconectado” do sistema sob medida, já que o estado que descreve o sistema completo não é um produto tensorial de estados associados a cada uma de suas partes separadamente.

O ponto de vista adotado pela interpretação de Copenhagen é de que, em princípio, o aparato não deveria ser descrito pela mecânica quântica. O aparato experimental, mesmo sendo um sistema físico composto por átomos, deve sempre ser analisado pelas leis da mecânica clássica. Isso, em princípio, resolve o problema da superposição de estados na equação, bem como a questão da independência entre o aparato e o sistema. A pergunta sobre qual o valor de a_i a ser indicado pelo aparato clássico se resolve então através do postulado 6. No processo de medida, segundo esse postulado, o sistema colapsa para um particular estado $|\psi_i\rangle$ associado a um particular auto-valor $|a_i\rangle$, sendo esse o valor encontrado na medida de \mathcal{A} .

A razão de tal colapso e o momento exato em que ele ocorre são questões não respondidas nessa abordagem da mecânica quântica. Nota-se, em particular, que esse colapso não é descrito pela lei dinâmica básica postulada pela teoria, a equação de Schroedinger, não sendo então unitário. Nota-se também que, se repetirmos a medida em um sistema identicamente preparado, nada nos garante que o resultado da medida será novamente o valor a_i . Tudo o que a teoria tem a nos dizer é que em um número suficientemente grande de medidas de \mathcal{A} , a frequência de a_i será dada por $|\langle \psi_i | \psi_0 \rangle|^2$. No entanto, a razão pela qual é obtido um particular valor a_i e não outro em cada medida são questões não respondidas, nem mesmo num nível conceitual, nesta abordagem da mecânica quântica.

Toda essa situação é extremamente insatisfatória do ponto de vista conceitual. Em primeiro lugar, não é confortável pensar que uma teoria que pretenda ser a teoria fundamental na descrição do comportamento de átomos e moléculas precise pressupor uma classe de objetos que, apesar de formados por esses mesmos átomos e moléculas, não são por ela descritos. Essa situação se torna ainda mais insustentável se pensarmos que podemos utilizar um segundo aparato experimental para efetuar medidas sobre o primeiro, que passaria então a ser adequadamente descrito pela mecânica quântica apenas pela mudança de instrumento de medida para objeto medido, uma mudança que não existe de fato, já que em qualquer das situações descritas o objeto em questão está em interação com outro sistema físico, a distinção entre “medido” e “medidor” não tendo nada além de um caráter subjetivo.

Altamente insatisfatória é também a necessidade de se postular um colapso da função de onda para poder dar sentido ao resultado do processo de medida. Tal colapso, como já comentamos acima, não é descrito pela equação de Schroedinger

e, de fato, a interpretação silencia sobre o que concretamente leva ao colapso da função de onda durante o processo de interação entre dois sistemas físicos, dos quais, subjetivamente, convencionamos chamar um de “instrumento de medida”. A interação do sistema observado com o ambiente macroscópico que o cerca durante a medida pode levar à chamada “descoerência” [48, 49, 50, 51, 52], onde os termos fora da diagonal da matriz densidade reduzida que descreve o sistema se anulam, representando a eliminação da interferência entre diferentes auto-estados de um observável. Isso pode, em princípio, ser uma resposta à questão de porque após uma medida o aparato se comporta classicamente, sem fenômenos de interferência. Mas não responde porque um determinado auto-estado especificamente foi obtido.

Por fim, a interpretação de Copenhagen é insatisfatória por dar um enfoque muito grande ao processo de medida na formulação de seus postulados. Sem dúvida os processos que levam à obtenção de dados experimentais são da mais alta importância para uma teoria física, tanto no julgamento de se a mesma pode ser aceita como boa descrição da natureza, como também como guias na formulação de novas teorias. No entanto, não é razoável admitir que o processo de medida faça parte explicitamente da formulação dos postulados de uma teoria, como ocorre com a interpretação de Copenhagen.

Não obstante os problemas apresentados, a interpretação de Copenhagen vem sendo utilizada como interpretação padrão da mecânica quântica nos últimos 50 anos. De fato, para fins de previsão de resultados experimentais não se pode negar o sucesso de tal formulação. Entretanto, a necessidade de um observador externo ao sistema em estudo para dar sentido à teoria inviabiliza o seu uso quando o objeto em estudo se constitui no próprio Universo, entendido como “tudo o que existe”. Também, a argumentação probabilística carece de sentido neste caso, pois não se pode falar em um “ensemble de Universos”. E essa é justamente a situação encontrada na cosmologia quântica.

Claro, poder-se-ia argumentar que, a partir do momento em que todas as previsões da teoria se confirmam experimentalmente, não teríamos razões para questionar a sua validade. Poder-se-ia argumentar que todos os problemas anteriormente apontados não passariam de concepções errôneas sobre a natureza de uma teoria física. Em particular, a inconsistência da mesma com a cosmologia quântica seria uma indicação da inviabilidade desta última. No entanto, o papel da comunidade científica é o de analisar todas as possibilidades e selecionar dentre elas a que melhor se adequa aos fatos. Neste sentido, se for possível encontrar uma interpretação da mecânica quântica que reproduza igualmente todos os dados experimentais e não apresente as inconsistências e inconvenientes teóricos aqui apontados, será legítimo considerá-la como descrição da natureza mais adequada aos fatos e, portanto, preferível à interpretação de Copenhagen.

Vamos então estudar uma interpretação alternativa da mecânica quântica, a *interpretação de Bohm-de Broglie* [31, 32, 33], ou *interpretação causal*, que de fato atinge tal objetivo. Outras interpretações existem, tais como a *interpretação de vários mundos* [24, 25], a *mecânica quântica não linear* [30] e a das *histórias consistentes* [23, 27, 28, 29], que também alegam atingir os objetivos acima descritos.

No entanto, não as abordaremos em nosso trabalho, por ser o mesmo baseado apenas na interpretação de Bohm.

2.2.3 Interpretação de Bohm da Mecânica Quântica

Ao contrário da interpretação de Copenhagen, a interpretação de Bohm é uma interpretação *ontológica*, ou seja, nessa interpretação os processos físicos ocorrem independentemente de qualquer observador ou processo externo ao sistema em estudo. Por isso já podemos perceber que a interpretação de Bohm não apresenta a inconsistência com a cosmologia quântica apresentada pela interpretação de Copenhagen: para Bohm, podemos dizer que o Universo existe por si só, sem precisarmos supor qualquer tipo de processo físico ou observador externo a ele.

Vamos então apresentar os postulados básicos dessa interpretação:

1. O sistema físico é composto por uma função de onda $\psi(\vec{x}, t)$ e por uma partícula que segue uma trajetória bem definida $\vec{x}(t)$.
2. A dinâmica da função de onda é dada pela equação de Schroedinger
3. A probabilidade de, no instante t , a partícula estar em uma região d^3x em torno do ponto \vec{x} será

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x.$$

Observe que pelo postulado 1 de Bohm, a função de onda existe como ente constituinte da realidade objetiva inerente aos processos físicos. Também a partícula existe e segue uma trajetória bem definida.

Tudo isso é contrário à interpretação de Copenhagen, que afirmava que tudo que se pode conhecer sobre o sistema é o vetor $|\psi\rangle$ (de onde se obtém a função de onda pela projeção $\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ nos “auto-estados” do operador de posição \hat{X}). Naquela interpretação a função de onda não tinha uma existência objetiva, servindo apenas como uma ferramenta de cálculo abstrata de onde se obtinha a densidade de probabilidade $|\psi(x, t)|^2$. Tampouco tinha existência objetiva a partícula, sobre a qual qualquer afirmação só faria sentido no contexto de uma medida. Em particular, isso inviabilizava a existência de uma trajetória $x(t)$.

Para aplicarmos a interpretação de Bohm, vamos escrever a função de onda como $\psi(x, t) = R(x, t)e^{iS(x, t)}$ onde R e S são funções reais. Imediatamente obtemos que a densidade de probabilidade será $R(x, t)^2$. Substituindo na equação de Schroedinger para uma partícula não-relativística ⁶:

$$i\frac{d}{dt}\psi(x, t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) + V(x, t)\psi(x, t)$$

e separando as partes real e imaginária dessa equação vem, após algumas manipulações algébricas,

⁶Por simplicidade vamos trabalhar com partículas não relativísticas em uma dimensão. A generalização para três dimensões ou para teoria de campos é trivial [53].

- Parte real

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right]^2 + V(x, t) + Q(x, t) = -\frac{\partial S(x, t)}{\partial t}, \quad (2.12)$$

onde

$$Q(x, t) = -\frac{1}{2mR(x, t)} \frac{\partial^2 R(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

é chamado de *potencial quântico*, por razões que ficarão claras no que segue.

- Parte Imaginária

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0.$$

A primeira dessas equações pode ser reconhecida como a equação de Hamilton-Jacobi, diferindo da versão clássica dessa equação pela presença do termo extra de potencial Q (daí o nome de potencial quântico dado a esse termo). A segunda equação corresponde à equação de conservação de probabilidade, onde o fluxo de probabilidade é dado por

$$J(x, t) = \frac{\mathcal{P}(x, t)}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

e a densidade de probabilidade por

$$\mathcal{P}(x, t) = R^2(x, t),$$

em acordo com o postulado 3 da interpretação. Essa última equação, em conjunto com a equação de Hamilton-Jacobi, nos permite identificar a velocidade da partícula como

$$v(x, t) =: \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

e o momentum como

$$p(x, t) = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

Note que esta última equação define, rigorosamente falando, um campo $p(x, t)$. O momentum da partícula de fato será dado pelo cálculo de $p(x, t)$ ao longo da trajetória da partícula.

O método da interpretação se resume, portanto a

1. resolver a equação de Schroedinger, obtendo $\psi(x, t)$.
2. Escrever $\psi = Re^{iS}$.
3. Calcular as trajetórias a partir de $v(x, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}$. Observe que uma vez que se conhece ψ as trajetórias são univocamente determinadas pelas condições iniciais, através de uma equação de primeira ordem.
4. Calcular R^2 e, se necessário, Q . Este último pode muitas vezes ser usado como uma ferramenta poderosa na interpretação dos resultados da interpretação e para obter o limite clássico.

Pode-se mostrar que tal algoritmo reproduz os resultados experimentais, tanto quanto a interpretação de Copenhagen. A discussão desse ponto nos levaria muito longe de nosso objetivo. Ao leitor interessado recomendamos o livro de Peter Holland [33].

Um ponto muito importante na interpretação de Bohm é a existência dos chamados *nós*, que são definidos como as regiões onde $R = 0$. Como ψ se anula nestes pontos, S fica aí indefinido. Como consequência, as trajetórias não podem passar por estas regiões. Na prática, isso significa que uma partícula que inicialmente se encontre entre tais regiões ficará aí confinada, a menos é claro que a subsequente evolução temporal de ψ leve tais nós a deixarem de existir.

Um outro aspecto que merece ser comentado aqui é a existência das chamadas *ondas vazias*, que são funções de onda que não estão associadas a nenhuma partícula. Tais ondas surgem quando a função de onda é composta pela superposição de vários pacotes, de tamanho finito e que não possuem superposição apreciável espacialmente. Nesse caso, surgem vários nós, entre os diferentes pacotes, e, uma partícula que esteja dentro de um destes pacotes ficará lá confinada. Dessa forma todos os outros pacotes estarão literalmente vazios, ou seja, sem nenhuma partícula. A relevância desse tipo de situação é de que como no ponto onde se encontra a partícula os outros pacotes que compõem a função de onda são desprezíveis, a função de onda efetivamente atuante sobre a partícula será o próprio pacote que a contém. Dessa forma, a dinâmica da partícula será determinada apenas por esse pacote, ou seja, tudo se passa como se as ondas vazias tivessem sido efetivamente desligadas, podendo ser completamente ignoradas, no que se refere à dinâmica da partícula, pelo menos enquanto durar o confinamento desta dentro do pacote atual.

Uma outra característica nova trazida por essa interpretação é a chamada *dependência de contexto*. Classicamente, esperaríamos que, uma vez fixadas as condições iniciais e o potencial a que estão submetidas as partículas, as trajetórias destas estariam univocamente determinadas. Quanticamente, porém, 2 sistemas que possuam as mesmas condições iniciais para as partículas e o mesmo potencial podem ainda diferir nas suas funções de onda. Como consequência, o potencial quântico será diferente e as trajetórias seguidas por essas partículas poderão ser muito diferentes, apesar das mesmas condições iniciais e do mesmo potencial clássico.

Por fim, comentamos sobre dois aspectos importantes do potencial quântico. Primeiramente, notamos de (2.13) que Q não depende da intensidade de ψ , mas apenas de sua forma funcional. As consequências desse fato serão de fundamental importância na análise de sistemas de muitos corpos. Um outro aspecto importante se refere ao limite clássico da teoria: a partícula vai seguir uma trajetória clássica sempre que Q puder ser desprezado na equação (2.12). Dessa forma, temos um critério único e claro sobre o limite clássico na interpretação de Bohm, contrariamente ao que ocorre na interpretação de Copenhagen.

2.2.4 Sistemas de Muitos Corpos

Suponhamos que o sistema físico em estudo seja composto por duas partículas de coordenadas x_1 e x_2 ⁷.

Se, em um primeiro momento, admitirmos que a função de onda total possa ser escrita como

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \psi_1(x_1, t)\psi_2(x_2, t), \quad (2.14)$$

então será trivial verificar que

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, t) &= R_1(x_1, t)R_2(x_2, t) \\ S(x_1, x_2, t) &= S_1(x_1, t) + S_2(x_2, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Desta segunda equação podemos obter, aplicando a interpretação de Bohm, que as velocidades de cada partícula serão dadas por

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial S_1(x_1, t)}{\partial x_1} \\ v_2(x, t) &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial S_2(x_2, t)}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

exatamente as expressões obtidas para o caso de uma partícula, apenas replicada para cada uma das partículas constituintes do sistema. Ou seja, para uma função de onda da forma (2.14), concretamente um produto tensorial, obtemos que a quantização da teoria não introduz nenhuma interdependência extra entre as partículas, além daquela que já existiria no caso clássico ⁸. Dizemos que as partículas não estão correlacionadas.

A independência entre as partículas pode ser vista também nos efeitos do potencial quântico. Calculando-o para a função de onda (2.14) obtemos

$$Q(x_1, x_2, t) = Q_1(x_1, t) + Q_2(x_2, t), \quad (2.17)$$

onde

$$Q_i(x_i, t) = -\frac{1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} R_i(x_i, t).$$

Vemos assim que para a função de onda (2.14) o potencial quântico se decompõe em duas componentes independentes, um para cada partícula. Novamente as duas partículas são independentes em suas dinâmicas quânticas.

No entanto a situação será completamente diferente se a função de onda do sistema não for um produto tensorial, mas uma combinação linear de tais produtos, como em

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \sum_{i,j} \psi_1^{(i)}(x_1, t)\psi_2^{(j)}(x_2, t)a_{ij}. \quad (2.18)$$

⁷A generalização para o caso de mais de duas partículas é trivial.

⁸Obviamente pode haver um potencial clássico que implique uma interação entre as partículas. Mas tal situação já existiria classicamente. A quantização não introduz nenhuma correlação nova na teoria. Este é o ponto principal deste argumento.

onde os conjuntos de funções $\psi_1^{(i)}(x_1, t)$ e $\psi_2^{(j)}(x_2, t)$ formam bases nos seus respectivos espaços de Hilbert.

Nesse caso, as quantidades R e S não se decompõem em expressões tão simples como em (2.15). Por consequência, as velocidades não serão mais dadas por (2.16) e nem o potencial quântico se decomporá como (2.17).

Se agora calcularmos

$$v_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2m_1} \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_1},$$

obteremos uma função v_1 que dependerá não apenas das coordenadas da partícula 1, mas também das coordenadas da partícula 2. Igualmente, para o potencial quântico

$$Q(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} R(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} R(x_1, x_2, t) \quad (2.19)$$

deveremos especificar não apenas as coordenadas da partícula 1 mas também as da partícula 2 para podermos obter o potencial quântico a que está sujeita a primeira.

Temos, como consequência de tal situação, que as duas partículas estão correlacionadas. Note que tal situação ocorrerá mesmo se classicamente não houver interação entre elas. Esse tipo de correlação quântica, aqui vista sob o ponto de vista da interpretação de Bohm, é conhecido na literatura como *emaranhamento*, estando presente mesmo na interpretação de Copenhagen (o exemplo mais conhecido deste tipo de correlação é o chamado *experimento EPR*). Note também que, como o potencial quântico não depende da intensidade da função de onda mas de sua forma funcional, o requerimento de que $\psi(x_1, x_2, t)$ seja pequeno, mas finito, para x_2 muito diferente de x_1 não tem nenhum efeito para eliminar a influência de uma partícula sobre a outra através do potencial quântico. A conclusão a que chegamos é que para uma função de onda do tipo (2.18) as partículas estão sujeitas a uma correlação não local.

2.2.5 O Processo de Medida na Interpretação de Bohm

Suponha que um sistema no qual se deseja medir um observável \mathcal{A} seja descrito pela função de onda $\psi(x, t)$

$$\psi(x, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(x), \quad (2.20)$$

onde $\psi_i(x)$ são as auto-funções do operador \hat{A} associado ao observável \mathcal{A} , e que o aparato experimental seja descrito pela função de onda $\phi_0(y, t)$. A partir desses dados, e assumindo que antes do processo de medida os dois sistemas não estejam correlacionados, a função de onda total será

$$\Psi(x, y, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(x) \phi_0(y, t).$$

Pela discussão anterior sobre o processo de medida na interpretação de Copenhagen, sabemos que, após esse processo, o estado do sistema será dado por (2.11)

Se não houver superposição espacial entre as funções de onda $\phi_i(y, t)$, obtidas a partir de $|\phi_i\rangle$, a função de onda total se dividirá em pacotes que não se sobrepõem (mesmo que haja superposição entre as funções $\psi_i(x, t)$), cada um associado a um diferente valor de a_i . Como o aparato de medida vai seguir uma única particular trajetória $y(t)$, o sistema como um todo terá sua dinâmica regida pela particular função de onda $c_i\phi_i(y, t)\psi_i(x, t)$ que contém $y(t)$. Ou seja, após o processo de medida, a variável y do aparato estará correlacionada a um valor de a_i do sistema sobre o qual a medida foi realizada, de tal forma que o conhecimento de y permite o conhecimento de a_i . Toda a dinâmica subsequente ao processo de medida será determinada unicamente pela função de onda $c_i\phi_i(y, t)\psi_i(x, t)$, que evoluirá dinamicamente pela hamiltoniana livre, ou seja, sem o termo de interação. Dessa forma, todas as outras funções de onda terão se tornado dinamicamente inativas, irrelevantes para a descrição do sistema (ondas vazias). A partícula que constitui o sistema sob observação também seguirá uma única trajetória, obtida a partir da função de onda $\psi_i(x, t)$. A particular trajetória escolhida e, portanto, o particular valor de a_i obtido na medida são então determinados em última análise pelas condições iniciais do sistema. É a partícula, em função dessas condições, quem escolhe essa trajetória entre todas as possibilidades. Este resultado reproduz o colapso da função de onda de forma totalmente consistente e sem nenhum postulado adicional. A redução da superposição de ondas inicial a uma auto-função do observável sob medida decorre, na interpretação de Bohm, das próprias leis dinâmicas da mecânica quântica.

Também, pela discussão anterior, fica evidente que os únicos valores que podem ser obtidos na medida do observável \mathcal{A} são seus auto-valores a_i , resultado esse que também concorda com os dados experimentais, sem no entanto, representar um postulado adicional da teoria.

Pode-se mostrar também [33] que num ensemble de sistemas identicamente preparados no estado (2.20), a probabilidade de obtermos o auto-valor a_i na medida do observável \mathcal{A} é dada por $|c_i|^2$. A demonstração desse ponto envolve conceitos que não foram aqui discutidos por questões de concisão.

Um ponto que, embora importante, sobre ele apenas apresentaremos um comentário, já que a discussão em detalhes nos afastaria de nossos objetivos, é a questão de se a subsequente evolução dinâmica do sistema não poderia levar as funções de onda vazias a se sobreporem à função de onda que contém a trajetória do sistema. Se tal fato ocorresse, então não poderíamos considerar as outras funções de onda em (2.11) como fisicamente irrelevantes. No entanto, pode-se argumentar no sentido de que tal processo é altamente improvável [31, 32, 33], através da idéia de descoerência.

Por fim notamos que como, após a medida, o sistema total é efetivamente descrito pela função de onda $c_i\phi_i(y, t)\psi_i(x, t)$, um produto tensorial de funções associadas respectivamente ao aparato e ao sistema, então estes não estarão mais correlacionados.

Em resumo, mostramos nesta seção, de forma instrumental e sem preocupações extremas com rigor matemático, que a interpretação de Bohm, por ser uma interpretação de natureza ontológica, não apresenta as inconsistências da interpretação de Copenhagen para descrever o processo de medida. Isso significa que nessa interpretação a equação de Schroedinger vale sempre e não é necessário supor a dicotomia entre observador e observado, ambos são tratados de forma unificada. Assim, ela pode ser aplicada à cosmologia quântica consistentemente. Também é capaz de reproduzir os resultados dos processos de medida sem a necessidade de postulados extras sobre a natureza destes processos, que passam então a ser encarados, de forma muito mais natural, como uma classe particular de interações entre sistemas físicos.

2.3 Formalismo de Ostrogradski

Tipicamente as teorias físicas têm sua dinâmica dada por lagrangianas que envolvem derivadas de, no máximo, primeira ordem das variáveis dinâmicas.

No entanto, há teorias onde aparecem, na lagrangiana, derivadas de ordem superior à primeira. Em geral, a obtenção das equações de Euler-Lagrange para tais sistemas não apresenta maiores dificuldades, podendo ser obtidas por uma generalização trivial do procedimento utilizado no caso de teorias com derivadas primeiras apenas. Tal trivialidade é perdida quando se trata da construção de um espaço de fase para a teoria.

Suponha então que se tenha uma lagrangiana $L(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)$ ⁹. As equações de Euler-Lagrange serão

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

O formalismo de Ostrogradski [54] consiste em considerar as variáveis q e \dot{q} como independentes, e a partir dessa independência definir duas novas variáveis

$$\begin{aligned} q_1 &=: q \\ q_2 &=: \dot{q}. \end{aligned}$$

A essas novas variáveis estão associados os momenta p_1 e p_2 dados por

$$\begin{aligned} p_2 &=: \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \\ p_1 &= \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} p_2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dessa forma, já temos as variáveis com as quais construir o espaço de fase. O passo seguinte é construir a Hamiltoniana da teoria sobre esse espaço. Para

⁹Por simplicidade analisaremos o caso de teorias cuja ordem mais alta de derivação é a segunda. Esse caso contém em si todos os elementos que precisamos para discutir o formalismo e corresponde ao caso com o qual vamos efetivamente lidar no trabalho em questão. A generalização para ordens mais altas é trivial. Para detalhes indicamos o artigo de de Urries [54].

tanto precisamos apenas efetuar a transformação de Legendre de $L(q_1, q_2, \dot{q}_2, t)$ para $H(q_1, p_1, q_2, p_2, t)$

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) = p_1 q_2 + p_2 \dot{q}_2 - L(q_1, q_2, \dot{q}_2, t),$$

onde \dot{q}_1 e \dot{q}_2 são encarados como funções de q_1, p_1, q_2, p_2 e t .

Se agora calcularmos as quantidades $\partial H/\partial q_i, \partial H/\partial p_i$, obteremos, usando (2.21)

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_1} &= p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{d}{dt} p_1 \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} &= p_1 + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} = -\frac{d}{dt} p_2 \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} &= q_2 + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_1} = q_2 = \dot{q}_1 \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \dot{q}_2 + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_2} = \dot{q}_2\end{aligned}$$

de onde se vê que a hamiltoniana obtida pelo procedimento acima efetivamente gera as equações clássicas de movimento para o conjunto de variáveis q_1, q_2, p_1 e p_2 .

Vejamus um exemplo concreto de aplicação desse formalismo. Tomemos como lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \ddot{q}^2 + \frac{1}{2} a^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} b^2 q^2 \quad (2.22)$$

onde a e b são constantes.

A equação de Euler-Lagrange será

$$q^{(4)} - a^2 \ddot{q} + b^2 q = 0 \quad (2.23)$$

onde denotamos por $q^{(i)}$ as derivadas de ordem i de q ($i > 2$).

Aplicando o formalismo de Ostrogradski

$$\begin{aligned}q_1 &=: q \\ q_2 &=: \dot{q},\end{aligned} \quad (2.24)$$

vamos re-escrever a lagrangiana (2.22) como

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} a^2 q_2^2 + \frac{1}{2} b^2 q_1^2.$$

A partir de (2.21) vem

$$\begin{aligned}p_2 &= \dot{q}_2 \\ p_1 &= a^2 q_2 - \dot{p}_2.\end{aligned} \quad (2.25)$$

A Hamiltoniana será

$$H = p_1 q_2 + \frac{1}{2} p_2^2 - \frac{1}{2} a^2 q_2^2 - \frac{1}{2} b^2 q_1^2.$$

Note que no cálculo da hamiltoniana não fizemos uso explícito da expressão para p_1 .

Verifiquemos que essa hamiltoniana gera as equações corretas de movimento. Calculando $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ e $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$ vem

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= -p_1 + a^2 q_2 \\ \dot{p}_1 &= b^2 q_1.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Observe que as três primeiras equações correspondem às de número (2.24) e (2.25), podendo ser encaradas como nada além de definições de q_2 , p_2 e p_1 . Assim, esperamos que a equação dinâmica da teoria seja a última das equações (2.26). De fato, usando-se as três equações anteriores pode-se mostrar que essa equação é igual a

$$a^2 \ddot{q}_1 - q_1^{(4)} - b^2 q_1 = 0$$

que corresponde à equação (2.23), se lembrarmos que $q_1 = q$.

Capítulo 3

Teoria de Perturbações Cosmológicas

3.1 Introdução

Como é sabido, a solução de Friedmann descreve a evolução de um Universo que é, em todo tempo, homogêneo e isotrópico. Claramente, tal cenário não comporta por si só a distribuição atual de matéria, onde regiões de densidade mais alta (aglomerados de galáxias, galáxias, estrelas, etc) estão cercadas por regiões vazias de matéria.

A origem de tais estruturas pode ser estudada, no contexto do modelo padrão, utilizando-nos do conceito de *instabilidade de Jeans* [55]. Em linhas gerais tal instabilidade deve-se ao fato de a gravitação ser uma interação estritamente atrativa. Dessa forma, se em um ponto ocorre um aumento de densidade, o campo gravitacional em torno desse ponto sofrerá também um aumento, levando à atração de mais matéria, com um conseqüente novo aumento de densidade aí. O processo prossegue, de forma que ao final de algum tempo forma-se uma região de alta densidade cercada por regiões de densidade mais baixa. Tal processo, tendo ocorrido ao longo de toda a evolução do Universo pode, em princípio, explicar a origem das estruturas hoje observadas. A origem das flutuações primordiais, que deram início a esse mecanismo, pode ser atribuída a flutuações quânticas do campo gravitacional e do conteúdo material.

Sendo $\rho_0(t)$ a densidade média do Universo e $\rho(\vec{x}, t)$ a densidade em um ponto particular, definimos a quantidade $\delta\rho(\vec{x}, t)$ como

$$\delta\rho(\vec{x}, t) =: \rho(\vec{x}, t) - \rho_0(t).$$

Podemos decompor $\delta\rho(\vec{x}, t)$ em modos normais

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta\rho_{\vec{k}}(t) f_{\vec{k}}(\vec{x})$$

onde $f_{\vec{k}}(\vec{x})$ é uma base de funções. Os modos associados a k pequeno (grandes comprimentos de onda) representam então estruturas em larga escala.

A dinâmica das quantidades $\delta\rho_{\vec{k}}(t)$ é, no entanto, extremamente complicada de ser estudada devido à não linearidade inerente à teoria da relatividade geral. Entretanto, enquanto $\delta\rho_{\vec{k}}(t)$ for suficientemente pequeno, poderemos lançar mão de aproximações lineares para estudar sua evolução temporal. A esta teoria dá-se o nome de *teoria de perturbações cosmológicas*. É nosso objetivo neste capítulo apresentar os principais resultados e métodos dessa teoria.

Para esse estudo, vamos, inicialmente, descrever a cinemática das perturbações em relatividade geral. Em seguida estudaremos a dinâmica das mesmas tentando manter a generalidade dos resultados. O passo seguinte consiste em aplicar os resultados obtidos aos modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), discutindo aí a questão da invariância de calibre. O conteúdo material é analisado em seguida. Mostraremos por fim como o uso das equações de movimento do espaço-tempo de fundo pode levar a simplificações das equações que regem a dinâmica das perturbações.

3.2 Perturbações em relatividade geral

3.2.1 Definição

Seja $\mathbf{g}^{(0)}$ o tensor métrico de um espaço-tempo. Seja $\tilde{\mathbf{g}}$ um outro tensor métrico que pode ser construído sobre esse espaço-tempo. Se, para quaisquer vetores \mathbf{V} e \mathbf{W} sobre esta variedade, a diferença

$$\mathbf{h}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) =: \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) - \mathbf{g}^{(0)}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$$

for infinitesimal, então diremos que \mathbf{h} é uma perturbação de $\mathbf{g}^{(0)}$, sendo esta última denominada *métrica de fundo*.

3.2.2 Quantidades Cinemáticas

Pela definição acima está claro que, em um sistema de coordenadas qualquer

$$h_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}.$$

Vamos, por enquanto, deixar de lado a questão da invariância de calibre.

Seja V^μ a velocidade própria de um observador genérico na geometria de fundo

$$V^\mu V^\nu g_{\mu\nu}^{(0)} = 1$$

então podemos decompor o tensor $h_{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} 2\phi &= h_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \\ A_\alpha &= h_{\mu\nu} V^\mu P^\nu{}_\alpha \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= h_{\mu\nu} P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta \end{aligned}$$

Nas expressões acima, $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} - V_\mu V_\nu$ representa o projetor no espaço de repouso local do observador V^μ e índices são elevados e abaixados através da métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$

3.2.3 Dinâmica

Estamos interessados, como dito, no estudo da dinâmica das perturbações em seu regime linear. Para tanto, é necessária uma ação que seja quadrática nas quantidades $h_{\mu\nu}$. A ação da Relatividade Geral é dada por (setor gravitacional apenas)

$$S_{gr} = -\frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.1)$$

onde a quantidade l , que coincide com o comprimento de Planck em unidades naturais ($\hbar = 1$ e $c = 1$), é definida por

$$l = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}.$$

Devemos então expandir em série de Taylor a expressão (3.1) em torno da métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$, guardando apenas os termos até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$. Dessa forma a ação S_{gr} será dada por

$$S_{gr} = S_{gr}^{(0)} + \delta_1 S_{gr} + \delta_2 S_{gr}$$

onde $\delta_1 S_{gr}$ e $\delta_2 S_{gr}$ representam correções de ordem 1 e 2 em $h_{\mu\nu}$, respectivamente.

Na equação acima $S_{gr}^{(0)}$ representa a ação (3.1) calculada a partir da métrica de fundo, e gera as equações de movimento dessa teoria ¹.

Com relação a $\delta_1 S_{gr}$, a mesma pode ser feita identicamente nula pelo uso das equações de movimento de ordem zero.

Por fim, $\delta_2 S_{gr}$ é a ação que gera as equações lineares da teoria. A sua expressão é

$$\begin{aligned} \delta_2 S_{gr} = & -\frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[-h^{\sigma\mu}{}_{;\mu} h^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + h^{\sigma\mu}{}_{;\mu} h_{;\sigma} + \frac{3}{4} h^{\sigma\mu;\nu} h_{\sigma\mu;\nu} \right. \\ & - h^{\sigma\mu} h_{\sigma}{}^{\nu}{}_{;\nu\mu} + h^{\sigma\mu} h_{;\sigma\mu} + h^{\sigma\mu} h_{\sigma\mu}{}^{;\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{4} h_{;\mu} h^{;\mu} + \frac{1}{2} h h^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} h h^{;\mu}{}_{\mu} - h_{\nu\rho} h_{\nu}{}^{\mu}{}_{;\rho\mu} - \frac{1}{2} h^{\nu\mu;\epsilon} h_{\nu\epsilon;\mu} + h_{\alpha}{}^{\nu} h^{\alpha\rho} R_{\nu\rho}^{(0)} - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(0)} \\ & \left. + \frac{1}{8} h^2 R^{(0)} - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} R^{(0)} \right], \end{aligned}$$

com $R_{\mu\nu}^{(0)}$ e $R^{(0)}$ sendo respectivamente o tensor de Ricci e o escalar de curvatura da geometria de fundo. As fórmulas utilizadas para a obtenção desta equação estão dadas no apêndice A.

Na ação acima podemos, após algumas integrais por partes, eliminar os termos

¹Logicamente as equações corretas devem ser obtidas a partir da ação total, ou seja a ação do setor gravitacional mais a matéria. Nós vamos analisar o conteúdo material mais adiante.

de derivada segunda, obtendo

$$\begin{aligned}
\delta_2 S_{gr} = & \frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{4} h^{\mu\nu;\alpha} h_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2} h_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2} h_{;\mu} h^{\mu\nu}{}_{;\nu} \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} h_{;\mu} h^{i\mu} - \frac{1}{2} h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{6} (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h^2) R^{(0)} \right] \\
& - \frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[-\frac{3}{2} h^{\sigma\mu} h_{\sigma}{}^{\nu}{}_{;\nu} + h^{\sigma\mu} h_{;\sigma} + h^{\sigma\nu} h_{\sigma\nu}{}^{;\mu} - \frac{1}{2} h^{\nu\mu;\sigma} h_{\nu\sigma} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} h h^{\nu\mu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2} h h^{i\mu}{}_{;\mu} \right] \quad (3.2)
\end{aligned}$$

onde a última integral pode ser desprezada por ser igual, via Teorema de Gauss, a um termo de superfície, que não altera as equações de movimento da teoria. Nessa expressão $W_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}$ representa o tensor de Weyl da ordem zero.

3.3 Perturbações em Universos de FLRW - Cinemática

Vamos agora particularizar nossa discussão, restringindo-a a perturbações sobre um espaço-tempo do tipo FLRW

3.3.1 Modelo de Fundo

Tomemos como espaço-tempo de fundo um que seja folheável por hipersuperfícies globais do tipo espaço e maximalmente simétricas. Pode-se mostrar que a métrica desse espaço-tempo pode ser escrita como

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.3)$$

onde γ_{ij} é uma métrica positivo-definida, independente de t , homogênea e isotrópica, caracterizada por uma curvatura constante K [56]. Se K é não-nulo, pode-se sempre escolher o sistema de unidades de forma a levá-la a assumir um dos valores ± 1 , conforme o sinal de K .

A função $N(t)$ corresponde à função lapso do formalismo ADM [22] e não é determinada pela teoria mostrando a arbitrariedade na escolha da coordenada temporal em Relatividade Geral.

As escolhas mais comuns para $N(t)$ são $N = a$ e $N = 1$. A coordenada temporal da primeira é conhecida como tempo conforme, η . No segundo caso, a coordenada temporal corresponde ao tempo próprio ao longo da linha de mundo de um observador comóvel com as hipersuperfícies espaciais. Essa coordenada recebe o nome de tempo cósmico, τ .

As conexões não-nulas da métrica (3.3) são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}}{N} \\
\Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \\
\Gamma_{jk}^0 &= \frac{\dot{a}a}{N^2} \gamma_{ij} \\
\Gamma_{jk}^i &= {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde δ_j^i é a delta de Kroenecker e ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$ são as conexões calculadas a partir da métrica γ_{ij} .

O escalar de curvatura é dado por

$$R = 6 \left(\frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} - \frac{\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{K}{a^2} \right)$$

e as componentes não-nulas do tensor de Einstein valem

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right) \\
G_{ij} &= \left(-\frac{2\ddot{a}a}{N^2} + \frac{2\dot{a}\dot{N}a}{N^3} - \frac{\dot{a}^2}{N^2} - K \right) \gamma_{ij}.
\end{aligned}$$

O tensor de Weyl desta geometria é identicamente nulo.

Sendo $\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ e $p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} P^{\mu\nu}$ a densidade de energia e a pressão do fluido com tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ que dá origem à geometria, vem, utilizando um observador comóvel com as hipersuperfícies espaciais,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{N^2 K}{a^2} = l^2 N^2 \rho \tag{3.5}$$

$$\frac{-2\ddot{a}a}{N^2} + \frac{2\dot{a}\dot{N}a}{N^3} - \frac{\dot{a}^2}{N^2} - K = 3l^2 a^2 p \tag{3.6}$$

Estas equações são conhecidas como *equações de Friedmann* [4] e constituem-se nas equações de movimento do espaço-tempo de fundo. A partir de uma combinação linear destas equações podemos ainda obter a seguinte relação

$$\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{\dot{a}\dot{N}}{N^3 a} - \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{K}{a^2} = \frac{3l^2}{2} (\rho + p). \tag{3.7}$$

3.3.2 Cinemática

As quantidades ϕ , A_μ e $\epsilon_{\mu\nu}$ serão dadas por

$$\begin{aligned} 2\phi &= h_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = \frac{h_{00}}{N^2} \\ A_0 &= h_{\alpha\beta}V^\alpha P^\beta{}_0 = 0 \\ A_i &= h_{\alpha\beta}V^\alpha P^\beta{}_i = \frac{h_{0i}}{N} \\ \epsilon_{0\mu} &= h_{\alpha\beta}P^\alpha{}_0 P^\beta{}_\mu = 0 \\ \epsilon_{ij} &= h_{\alpha\beta}P^\alpha{}_i P^\beta{}_j = h_{ij}. \end{aligned}$$

É conveniente redefinirmos A_i e ϵ_{ij} como

$$\begin{aligned} A_i &= -\bar{A}_i a \\ \epsilon_{ij} &= \bar{\epsilon}_{ij} a^2. \end{aligned}$$

Assim, omitindo a barra, vem

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2N^2\phi \\ h_{0i} &= -NaA_i \\ h_{ij} &= a^2\epsilon_{ij} \end{aligned} \tag{3.8}$$

A aplicação destas decomposições à equação (3.2) (desprezando o termo de derivada total) e utilizando as conexões (3.4) para calcularmos as derivadas covariantes de $h_{\mu\nu}$ dá, para a parte gravitacional da ação expandida até segunda ordem nas perturbações

$$\begin{aligned} \delta_2 S_{gr} &= \frac{1}{6l^2} \int d^4x N \gamma^{\frac{1}{2}} a^3 \left[\frac{1}{4N^2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{4N^2} \dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{aN} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{aN} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} \right. \\ &+ \frac{\dot{a}}{a^2 N} \left(-4\phi A^i{}_{|i} + 2A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) + \frac{\dot{a}}{aN^2} \left(-\epsilon \dot{\epsilon} - 2\dot{\epsilon}\phi + 2\epsilon_{ij} \dot{\epsilon}^{ij} \right) + \frac{1}{a^2} A^{[ij} A_{|i]j} \\ &+ \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} \left(-3\epsilon\phi - 9\phi^2 + 3A^i A_i - \frac{3}{4}\epsilon^2 + \frac{3}{2}\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) - \frac{1}{4a^2} \epsilon_{ij|k} \epsilon^{ijk} \\ &\left. + \frac{1}{2a^2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \frac{1}{a^2} \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2a^2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{a^2} \phi_{|i} \epsilon^i + \frac{1}{4a^2} \epsilon_{|i} \epsilon^i \right], \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\epsilon = \epsilon_{ij} \gamma^{ij}$.

3.3.3 Modos escalares, vetoriais e tensoriais

Vamos inicialmente apresentar dois resultados que nos serão muito úteis no que se segue.

Seja ${}^{(3)}\mathcal{M}$ uma variedade tridimensional maximalmente simétrica e localmente euclidiana, de métrica γ . E seja \mathbf{A} um campo vetorial sobre essa variedade. Vamos escolher um campo escalar ϕ e um segundo campo vetorial \mathbf{V} tal que

$$A_i = \phi_{|i} + V_i \quad (3.10)$$

com V_i sujeito a

$$V^i{}_{|i} = 0, \quad (3.11)$$

onde “|” representa a derivada covariante em relação à métrica γ_{ij} e os índices são levantados e abaixados com o uso desta métrica. A questão é se a decomposição (3.10) é sempre possível, e caso o seja, se é unívoca.

Se tomarmos a divergência de (3.10), usando (3.11), obtemos

$$A^i{}_{|i} = \phi^i{}_{|i}. \quad (3.12)$$

Pode-se mostrar [57] que tal equação sempre pode ser resolvida para ϕ , a menos de uma constante. Dessa forma, dado um vetor qualquer A_i , sempre será possível encontrar-se um único ϕ dado por (3.12) e assim, um único V_i tal que a decomposição (3.10) seja verificada.

Um resultado semelhante pode ser obtido para tensores simétricos sem traço, A_{ij} . Proporemos a decomposição [57]

$$A_{ij} = D_{ij}\chi + B_{i|j} + B_{j|i} + T_{ij} \quad (3.13)$$

onde T_{ij} está sujeito a

$$\begin{aligned} T^i{}_i &= 0 \\ T^{ij}{}_{|j} &= 0 \end{aligned}$$

e D_{ij} é um operador diferencial definido por

$$D_{ij}\chi =: \chi_{|ij} - \gamma_{ij}(\chi^k{}_{|k} + 2K\chi),$$

sendo K a curvatura constante da variedade. É trivial verificar que $(D^ij\chi)_{|j} = 0$. Com isso, se tomarmos a divergência de (3.13) obteremos

$$A^{ij}{}_{|j} = (B^{i|j} + B^{j|i})_{|i}.$$

Pode-se mostrar igualmente [57] que esta equação sempre pode ser resolvida, obtendo-se assim B_i , a menos de um vetor de Killing. Se agora calcularmos o traço de (3.13) teremos

$$\chi^k{}_{|k} + 3K\chi = B^i{}_{|i}$$

de onde se obtém χ , uma vez conhecido C_i . Assim a decomposição (3.13) sempre pode ser feita de forma unívoca.

No caso de um tensor com traço não nulo, C_{ij} , podemos definir um A_{ij} sem traço por

$$A_{ij} = C_{ij} - \frac{1}{3} C^k{}_k \gamma_{ij}.$$

Usando (3.13) então vem

$$\begin{aligned} C_{ij} &= D_{ij}\chi + B_{ilj} + B_{jli} + T_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}C^k{}_k = \\ &\chi_{|ij} + B_{ilj} + B_{jli} + T_{ij} + \gamma_{ij}\left(\frac{1}{3}C^k{}_k - \chi^{lk}{}_k - 2K\chi\right). \end{aligned}$$

Através de (3.10) vem

$$C_{ij} = \chi_{|ij} + \Xi_{|ij} + V_{ilj} + V_{jli} + T_{ij} + \left(\frac{1}{3}C^k{}_k - \chi^{lk}{}_k - 2K\chi\right)\gamma_{ij}.$$

E, finalmente, por uma redefinição de variáveis vem

$$C_{ij} = 2\psi\gamma_{ij} - 2E_{|ij} - F_{ilj} - F_{jli} + w_{ij}.$$

De posse desses resultados podemos agora decompor as quantidades perturbativas como

$$\begin{aligned} A_i &= B_{|i} + S_i \\ \epsilon_{ij} &= 2\psi\gamma_{ij} - 2E_{|ij} - F_{ilj} - F_{jli} + w_{ij} \end{aligned} \quad (3.14)$$

com os vínculos

$$\begin{aligned} S^i{}_{|i} &= 0 \\ F^i{}_{|i} &= 0 \\ w^{ij}{}_{|j} &= 0 \\ w^i{}_i &= 0. \end{aligned}$$

As quantidades ϕ , B , ψ e E são conhecidas na literatura como perturbações escalares, as quantidades S_i e F_i como perturbações vetoriais e w_{ij} como tensoriais. Note que esse conjunto de variáveis apresenta o mesmo número de graus de liberdade que o tensor $h_{\mu\nu}$, ou seja, 10. De fato temos quatro escalares, dois vetores tridimensionais sujeitos cada um ao vínculo de divergência nula (dois vínculos sobre 6 variáveis, o que resulta em quatro graus de liberdade) e um tri-tensor (6 componentes) sujeito a $w^{ij}{}_{|j} = 0$ e $w^i{}_i = 0$, representando 4 vínculos e, portanto, 2 graus de liberdade, que perfaz o total de 10 graus originais. Isso mostra que as quantidades definidas formam uma representação totalmente equivalente do tensor $h_{\mu\nu}$.

3.3.4 O Problema da Invariância de Calibre

Como se sabe, a teoria da relatividade geral é construída de forma a apresentar covariância sob o grupo de mapas da variedade em si mesma [58]. Tal liberdade de escolha de coordenadas representa, de fato, uma liberdade de calibre da teoria.

Naturalmente as previsões de caráter físico, isto é, as quantidades observáveis de uma teoria, devem ser invariantes por transformações de calibre [59]. Em particular, no caso de perturbações em relatividade geral, essas devem poder ser escritas em função de quantidades que sejam invariantes de calibre, caso contrário, as mesmas carecerão de um significado físico claro.

Tomemos então uma geometria descrita pelo tensor métrico

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$$

e efetuemos um arrastamento de Lie parametrizado pelo vetor Λ^μ . A métrica no novo sistema de coordenadas será

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu;\nu} + \Lambda_{\nu;\mu} =: g_{\mu\nu}^{(0)} + \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

onde o “;” representa a derivada covariante em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e termos de ordem 2 ou superior em Λ_μ e/ou $h_{\mu\nu}$ foram desprezados. Note que podemos encarar a nova métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ como sendo a mesma métrica de fundo acrescida de novas perturbações $\bar{h}_{\mu\nu}$. Está claro portanto que o tensor $h_{\mu\nu}$ não é invariante de calibre e as quantidades ϕ , A_i e ϵ_{ij} que estamos utilizando para caracterizá-lo não representam quantidades observáveis.

Como construir a partir de $h_{\mu\nu}$ quantidades perturbativas observáveis no caso de Universos de FLRW é o que vamos mostrar nesta sub-seção. Inicialmente vamos decompor o vetor Λ^μ como

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= \alpha \\ \Lambda^i &= \beta^i. \end{aligned}$$

Aplicando a transformação (3.15) e usando (3.8) vem

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \phi + \dot{\alpha} + \frac{\dot{N}}{N}\alpha \\ \bar{A}_i &= A_i - \frac{N}{a}\alpha_{|i} + \frac{a}{N}\dot{\beta}_i \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= \epsilon_{ij} - \frac{N}{a}\beta_{i|j} - \frac{N}{a}\beta_{j|i} - 2\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{ij}\alpha. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Decompondo o vetor β_i como

$$\beta_i = \left(\lambda_{|i} + \mu_i\right)\frac{N}{a} \quad \mu^i{}_{|i} = 0$$

e usando as decomposições (3.14) obtemos, para (3.16)

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \phi + \dot{\alpha} + \frac{\dot{N}}{N}\alpha \\
\bar{B} &= B - \frac{N}{a}\alpha + \frac{\dot{N}}{N}\lambda + \dot{\lambda} - \frac{\dot{a}}{a}\lambda \\
\bar{\psi} &= \psi - \frac{\dot{a}}{a}\alpha \\
\bar{E} &= E + \frac{N}{a}\lambda \\
\bar{S}_i &= S_i + \frac{\dot{N}}{N}\mu_i + \dot{\mu}_i - \frac{\dot{a}}{a}\mu_i \\
\bar{F}_i &= F_i + \frac{N}{a}\mu_i \\
\bar{w}_{ij} &= w_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Podemos agora definir as seguintes quantidades [34]

$$\begin{aligned}
\Phi &= \phi + \frac{\dot{a}}{N}\left(B - \frac{a}{N}\dot{E}\right) + \frac{a}{N}\left(B - \frac{a}{N}\dot{E}\right) \\
\Psi &= \psi - \frac{\dot{a}}{N}\left(B - \frac{a}{N}\dot{E}\right) \\
V_i &= S_i - \frac{a}{N}\dot{F}_i
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e é fácil verificar, usando (3.17) que essas quantidades, juntamente com w_{ij} , são invariantes de calibre.

Note também que as quantidades Φ , Ψ , V_i e w_{ij} representam no total seis graus de liberdade, como era esperado, já que o vetor ξ^μ (4 componentes) pode sempre ser usado para levar 4 das 10 componentes de $h_{\mu\nu}$ a alguma forma pré-determinada, restando apenas as outras 6 para serem determinadas pela teoria. Portanto é esperado que qualquer teoria perturbativa em relatividade geral possa sempre ser escrita em termo de 6 quantidades invariantes de calibre.

Por fim, comentamos que as quantidades Φ e Ψ são conhecidas na literatura como *Potenciais de Bardeen* [60].

3.4 O conteúdo material

3.4.1 Campo Escalar

Iniciamos nossa discussão do conteúdo material analisando o caso de um campo escalar minimamente acoplado, cuja lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{V}. \tag{3.19}$$

O tensor momento-energia desse campo será

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

No caso de Universos de FLRW, consistentemente com a condição de homogeneidade e isotropia das seções espaciais, vamos impor que o campo de fundo, φ_0 , satisfaça a

$$\varphi_{0|i} = 0.$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}N^2\mathcal{V}, \\ T_{0i} &= 0, \\ T_{ij} &= a^2\gamma_{ij}\left(\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2N^2} - \frac{1}{2}\mathcal{V}\right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

de onde vem, para observadores comóveis,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2N^2} + \frac{1}{2}\mathcal{V}, \\ p &= \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2N^2} - \frac{1}{2}\mathcal{V}. \end{aligned}$$

As equações de Friedmann se tornam então

$$\frac{\dot{a}^2}{N^2 l^2 a^2} + \frac{K}{l^2 a^2} = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2N^2} + \frac{1}{2}\mathcal{V} \quad (3.21)$$

$$\frac{2\dot{a}\dot{N}}{3N^3 l^2 a} - \frac{2\ddot{a}}{3N^2 l^2 a} - \frac{\dot{a}^2}{3N^2 l^2 a^2} - \frac{K}{3l^2 a^2} = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2N^2} - \frac{1}{2}\mathcal{V} \quad (3.22)$$

e a equação de Klein-Gordon é

$$\ddot{\varphi}_0 + \left(\frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N}\right)\dot{\varphi}_0 = -\frac{N^2}{2}\mathcal{V}_\varphi \quad (3.23)$$

onde $\mathcal{V}_\varphi = \partial\mathcal{V}/\partial\varphi$. Somando as equações (3.21) e (3.22) obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{N^2 K}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{N}}{Na} = \frac{3l^2\dot{\varphi}_0^2}{2}. \quad (3.24)$$

Adicionando perturbações, o campo de fundo φ_0 será levado em φ dado por

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi. \quad (3.25)$$

Calculando a ação (3.19) até a segunda ordem nas perturbações, obtemos que a lagrangiana do campo escalar perturbado será

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{\varphi_0^2 a^3 V}{2N} - \frac{Na^3 V \mathcal{V}}{2} - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi + \frac{1}{2}\epsilon\right) \dot{\delta\varphi} + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi A^i{}_{|i} \\ &- \frac{Na^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi - \frac{1}{2}\epsilon\right) \delta\varphi + \frac{\varphi_0^2 a^3}{4N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i - \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\epsilon_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon^2\right) \\ &+ \frac{Na^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i + \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) + \frac{Na^3}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta\dot{\varphi}^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{li}\delta\varphi_{li}}{a^2}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\mathcal{V}_{\varphi\varphi}\delta\varphi^2\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da mesma forma que ocorreu com os graus de liberdade puramente gravitacionais, também aqui enfrentamos o problema da invariância de calibre. Sob um arrastamento de Lie parametrizado pelo vetor ξ^μ um campo escalar φ é levado em $\bar{\varphi}$ dado por

$$\bar{\varphi} = \varphi + \varphi_{,\mu} \xi^\mu$$

de forma que as perturbações $\delta\varphi$ podem, por esse arrastamento, ser redefinidas como

$$\bar{\delta\varphi} = \delta\varphi + \dot{\varphi}_0 \xi^0 \quad (3.27)$$

no caso de Universos de FLRW.

De posse das equações (3.27) e (3.17) é trivial verificar que a variável $\delta\varphi^{(ic)}$ definida por

$$\delta\varphi^{(ic)} = \delta\varphi + \dot{\varphi}_0 \left(B - \frac{a}{N} \dot{E} \right)$$

é invariante por transformações de calibre.

3.4.2 Matéria Hidrodinâmica

Suponhamos agora que o componente material que gera a geometria seja um fluido formado por partículas de mesma natureza, cada uma de massa m_0 . A esse fluido daremos o nome de *matéria hidrodinâmica*. Esse fluido pode ser macroscopicamente caracterizado por sua densidade de energia, sua pressão e pela relação funcional entre essas duas quantidades. Precisamos de uma forma de expressar essas quantidades em termos do fluxo das partículas que compõem este fluido.

Começemos então supondo uma folheação do espaço-tempo em tri-superfícies globais do tipo espaço. Sobre cada superfície atribuímos 3 coordenadas q^i a cada ponto. Essas coordenadas são construídas de forma a serem comóveis com as partículas do fluido. Cada hipersuperfície é identificada por um parâmetro de tempo σ ao longo das linhas de mundo de cada partícula. A esse conjunto de coordenadas damos o nome de *coordenadas lagrangianas*. Construamos agora sobre esse espaço-tempo um novo sistema de coordenadas, no qual as partículas do fluido não tenham necessariamente que estar em repouso. Denotemos estas coordenadas por x^μ . A densidade de partículas n deste fluido é dada por [34, 61]

$$n = \frac{F(q^i) \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma}}}{\sqrt{-g} J} \quad (3.28)$$

onde J é o jacobiano da mudança de coordenadas $J = \left| \frac{\partial q^i, \sigma}{\partial x^\mu} \right|$ e F é uma função das coordenadas lagrangianas que determina a distribuição espacial de partículas nessas coordenadas. Precisamos agora de uma relação entre a densidade de energia e a densidade de partículas. Para tanto, definamos as quantidades ρ e π através de

[61]

$$\frac{d\rho}{\rho + p} =: \frac{dn}{n}$$

$$\rho =: n(m_0 + \pi). \quad (3.29)$$

Nas expressões acima, $p = p(\rho)$ representa a pressão do fluido. A primeira destas equações implica em uma constante de integração que será fixada pelo requerimento de que $nm_0 = \epsilon$ se $p = 0$. Esta condição, substituída na segunda equação leva a $\pi = 0$ se $p = 0$. Diferenciando esta segunda equação, e usando a primeira obtemos, após algumas manipulações algébricas simples,

$$\pi(n) = \int^n \frac{1}{n'} \frac{dp}{dn'} dn' - \frac{p}{n}.$$

Fock [61] interpreta, em um contexto newtoniano, este π como uma energia potencial por partícula. Mantendo essa interpretação, a equação (3.29) permite que interpretemos a quantidade $\rho(n)$ como a densidade de energia do fluido.

Por fim, se pudermos inverter a relação $\rho(n)$ para escrevermos $n(\rho)$, poderemos obter $p(\rho)$

$$dp = \frac{dp}{dn} \frac{dn}{d\rho} d\rho = \frac{dp}{d\rho} d\rho.$$

A quantidade $dp/d\rho$ corresponde ao quadrado da velocidade adiabática do som no fluido

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Um caso de extrema importância para nosso interesse é aquele no qual c_s^2 é uma constante, a qual designaremos por λ

$$p = \lambda\epsilon.$$

Este fluido é conhecido como *fluido perfeito*.

Terminamos assim a digressão que nos permitiu obter a densidade de energia e a densidade de partículas em função das quantidades que caracterizam o fluxo das partículas do fluido. Voltemos agora à análise dos aspectos cinemáticos e dinâmicos da matéria hidrodinâmica tomada como fonte da geometria do espaço-tempo.

A ação é dada por

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \rho$$

e, sabendo-se que para uma lagrangiana

$$L = \int d^4x \sqrt{-g} \xi$$

o tensor momento-energia é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\xi)}{\delta g^{\mu\nu}},$$

podemos usar (3.28) para obter

$$\frac{\delta n}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{n}{2} (g^{\mu\nu} - V_\mu V_\nu)$$

e daí obter, através de (3.29), que o tensor momento-energia desse fluido é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu},$$

exatamente o tensor momento-energia de um fluido perfeito, confirmando nossa interpretação inicial de ρ como a densidade de energia do fluido.

No caso de o espaço-tempo ser do tipo FLRW devemos, consistentemente com a hipótese de isotropia das seções espaciais, exigir que as partículas sejam comóveis com as hipersuperfícies que folheiam o espaço-tempo. Isso significa que o sistema de coordenadas (x^i, t) que temos utilizado em nossas análises prévias das perturbações e do espaço-tempo de fundo corresponde ao próprio sistema de coordenadas lagrangiano anteriormente definido, de forma que o jacobiano J na equação (3.28) é igual a 1. Ainda podemos identificar o parâmetro σ com a coordenada t , de onde vem $\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma}} = N$. Finalmente, de acordo com a hipótese de homogeneidade, devemos exigir $F(a^i) = \text{constante}$. Assim, a densidade de partículas será dada por

$$n = \frac{F}{a^3}$$

exibindo o conhecido comportamento com o inverso do volume das seções espaciais. Note que n só depende de t através de a , não apresentando nenhuma dependência explícita do tempo.

Estamos agora em condições de adicionar perturbações ao fluido. As perturbações serão caracterizadas pelo deslocamento das partículas de suas posições em um espaço homogêneo e isotrópico. Assim, uma partícula que originalmente possuía coordenadas x_0^μ , passará a ter coordenadas $x^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu$, onde ξ^μ é um campo vetorial infinitesimal.

Se efetuarmos um arrastamento de Lie, parametrizado pelo vetor Λ^μ o efeito será obviamente o mesmo da perturbação ξ^μ definida acima. Dessa forma temos, também neste caso, que buscar uma variável invariante de calibre para caracterização das perturbações.

Sob um arrastamento de Lie que desloque as partículas ao longo de Λ^μ , as coordenadas perturbadas serão levadas em

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \Lambda^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu + \Lambda^\mu =: x_0^\mu + \bar{\xi}^\mu$$

de onde vemos que podemos redefinir a variável perturbativa como sendo $\bar{\xi}^\mu = \xi^\mu + \Lambda^\mu$.

Decompondo tanto ξ^μ como Λ^μ em 3 + 1 como

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \chi \\ \xi^i &= \chi^i \\ \Lambda^0 &= \alpha \\ \Lambda^i &= \beta^i\end{aligned}$$

e para as componentes espaciais aplicando a decomposição (3.10) vem que sob um arrastamento de Lie as perturbações se transformam como

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \chi + \alpha \\ \bar{\xi} &= \xi - \frac{N}{a}\lambda \\ \bar{\eta}^j &= \eta^j - \frac{N}{a}\mu^j,\end{aligned}$$

onde $\chi^i = \xi^{li} + \eta^i$ e $\beta^i = -\frac{N}{a}(\lambda^i + \mu^i)$ e $\eta^i|_i = \mu^i|_i = 0$ como usual. As quantidades invariantes de calibre serão então

$$\begin{aligned}\chi^{(ic)} &= \chi + \frac{a}{N}\left(B - \frac{a}{N}\dot{E}\right) \\ \xi^{(ic)} &= \xi - E \\ \eta^{i(ic)} &= \eta^i - F^i.\end{aligned}$$

Podemos agora, de posse de todos os resultados anteriores, calcular a densidade de partículas no fluido perturbado. A primeira coisa que devemos levar em consideração neste cálculo é que como as partículas sofrem deslocamentos a partir de suas posições “não perturbadas”, elas não são mais comóveis com as hipersuperfícies maximalmente simétricas. Como resultado, o sistema de coordenadas comóvel com estas hipersuperfícies não é mais lagrangiano, e o jacobiano da transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas será

$$\tilde{J} = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial a^i, \sigma}\right) = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) = 1 + \xi^\mu{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\xi^\mu{}_{,\mu}\xi^\nu{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\xi^\mu{}_{,\nu}\xi^\nu{}_{,\mu}.$$

Em segundo lugar, como a perturbação leva o ponto x_0^μ no ponto $x_0^\mu + \xi^\mu$, devemos expandir a métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e seu determinante

$$\tilde{g} = g\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right)$$

em série de Taylor. Substituindo todas essas expressões em (3.28), vem

$$\tilde{\rho}(x_0 + \xi) = \frac{F(q^i) \sqrt{\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial(x_0^\mu + \xi^\mu)}{\partial\sigma} \frac{\partial(x_0^\nu + \xi^\nu)}{\partial\sigma}}}{\sqrt{-\tilde{g}(x_0 + \xi)}\tilde{J}}.$$

Por fim, expandindo de volta para o ponto x_0 vem [34]

$$\tilde{n}(x_0) = \tilde{n}(x) - \frac{\partial n}{\partial x_0^\mu} \xi^\mu - \frac{\partial}{\partial x_0^\nu} \left[\delta_1 n(x_0 + \xi) - \frac{\partial n_0}{\partial x_0^\mu} \xi^\mu \right] \xi^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n_0}{\partial x_0^\mu \partial x_0^\nu} \xi^\mu \xi^\nu$$

O resultado de todos esses cálculos é

$$\begin{aligned} \tilde{n}(x_0) = n_0 & \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon - \chi^i{}_{|i} + \dot{\chi}^i{}_{|i} \chi + \chi^i{}_{|j} \dot{\chi}^j{}_{|i} - \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i - \frac{1}{2} \frac{a^2}{N^2} \gamma_{ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - \frac{1}{2} A_i A^i \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij} + \frac{1}{8} \epsilon^2 + \chi_{|i} \dot{\chi}^i + \frac{1}{2} \dot{\chi}^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^i{}_{|j} \chi^j{}_{|i} - \frac{1}{2} \epsilon \chi^i{}_{|i} \right]. \end{aligned}$$

Para detalhes, ver apêndice B.

De posse da densidade de partículas, podemos calcular a densidade de energia. A partir da definição de ρ , dada por (3.29), obtemos

$$\delta\rho = \frac{\rho_0 + p_0}{n} \delta n,$$

onde o subscrito 0 representa as quantidades do fundo. Por fim, a ação do fluido perturbado será

$$S_m = S_m^{(0)} + \delta_1 S_m + \delta_2 S_m$$

onde

$$\begin{aligned} S_m^{(0)} &= - \int d^4 x \sqrt{-g} \rho_0 \\ \delta_1 S_m &= -Na^3 \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi - \frac{1}{2} \epsilon \right) - Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon - \chi^i{}_{|i} \right) \\ \delta_2 S_m &= - \int d^4 x Na^3 \gamma^{\frac{1}{2}} \left\{ \rho_0 \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + p_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \phi \chi^i{}_{|i} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\rho_0 + p_0) \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) + \frac{1}{2} c_s^2 (\rho_0 + p_0) \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \dot{\chi}^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.5 Perturbações em Universos de FLRW - Dinâmica

Conforme discutimos na introdução deste capítulo, estamos interessados em estudar a dinâmica das perturbações em seu regime linear, tendo como origem das perturbações flutuações quânticas do campo gravitacional e do conteúdo material. Faz-se necessário então estudar a quantização da teoria linear das perturbações.

Rigorosamente, as perturbações são graus de liberdade do campo gravitacional e da matéria da mesma forma que os graus de liberdade de ordem zero. No entanto, a técnica tradicionalmente adotada para o estudo dessas perturbações consiste em estabelecer uma dicotomia entre o fundo e estas perturbações - enquanto estas são estudadas no contexto de uma teoria quântica, o fundo é tratado como advindo do

modelo padrão da cosmologia, o que pressupõe a validade das equações de movimento clássicas para estes graus de liberdade. Essa é uma situação incompleta, e é esperado que uma abordagem totalmente quântica seja possível. O desenvolvimento de tal abordagem é o tema principal deste trabalho, e voltaremos a ele mais adiante. Por enquanto, vamos apresentar um resumo da técnica padrão de estudo da teoria de perturbações cosmológicas aplicadas ao modelo padrão.

O fato de a dinâmica do espaço-tempo de fundo já ser conhecida *a priori* dispensa a necessidade de levarmos em conta os termos de ordem zero na ação da teoria. Como as equações para a ordem zero são tomadas como válidas, podemos utilizá-las para simplificar a ação das ordens mais altas na expansão perturbativa da ação. Em particular, pode-se sempre anular os termos de primeira ordem nessa ação pelo uso de tais equações. Assim, estamos interessados essencialmente nos termos de ordem 2 da expansão, uma vez que termos de ordem mais alta dariam origem a termos quadráticos ou de ordem maior que 2 nas equações de movimento, retirando a teoria de seu regime linear. Vamos então estudar os casos de perturbações em Universos dominados por matéria hidrodinâmica ou por um campo escalar.

3.5.1 Matéria Hidrodinâmica

Somando os termos de ordem 2 nas equações (3.30) e (3.9) obtemos que a lagrangiana total para as perturbações deve ser escrita como (ordem 2 apenas)

$$\begin{aligned}
L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right. \\
& - \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_i \epsilon^i + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^i \left. \right] + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 \\
& - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} + \frac{a \dot{a}^2}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4} \epsilon^2 + 3A^i A_i + \frac{3}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) \\
& - \frac{2a \dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) + \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon} \right) \\
& - Na^3 \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) - Na^3 p_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon\phi + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + \frac{1}{2} Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) \\
& - \frac{1}{2} c_s^2 Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right). \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Esta é a forma mais geral da lagrangiana para perturbações em Universos dominados por matéria hidrodinâmica.

No entanto, além da nítida complexidade envolvida em se tentar encontrar soluções analíticas para as equações de movimento dessa teoria, há também o inconveniente de a mesma estar escrita em termos de variáveis que não são invariantes por transformações de calibre, o que torna a interpretação física dos re-

sultados pouco clara. Acrescente-se a essas dificuldades o fato de a ação acima representar a ação de campos sobre um espaço-tempo (FLRW) que não possui um vetor de Killing do tipo tempo, o que gera dificuldades também no momento de quantizar a teoria.

Para contornarmos as dificuldades comentadas, podemos lançar mão da hipótese de que o fundo obedece às equações de movimento clássicas. Assim, se na lagrangiana acima integrarmos por partes os termos em $\epsilon_{ij}\epsilon^{ij}$ e $\epsilon\dot{\epsilon}$, e usarmos a equação (3.6) para expressarmos os termos de derivada segunda do fator de escala em função da pressão e da derivada primeira de a , obteremos que esta lagrangiana se torna

$$\begin{aligned}
L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^i \right] + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 \\
& + \frac{a\dot{a}^2}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi + 3A^i A_i \right) - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) \\
& - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} - Na^3 \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i \right. \\
& - \left. \phi \chi^i{}_{|i} \right) - Na^3 p_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon\phi - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + \frac{1}{2} Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i \right. \\
& \left. + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) - \frac{1}{2} c_s^2 Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde desprezamos o seguinte termo de derivada total:

$$\left[\frac{a^2 \dot{a}}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) \right]. \tag{3.33}$$

O uso da equação (3.5) permite uma segunda simplificação, levando a lagrangiana (3.32) a assumir a forma

$$\begin{aligned}
L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^i \right] + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 \\
& - \frac{a\dot{a}^2}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} \\
& - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} - Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon\phi - \phi \chi^i{}_{|i} \right) \\
& + \frac{1}{2} Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) \\
& - \frac{1}{2} c_s^2 Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Essa lagrangiana pode ser ainda mais simplificada se decomposermos as perturbações em modos tensoriais, vetoriais e escalares e pela restrição ao caso de um fluido perfeito como fonte da geometria de fundo.

Em um primeiro momento, como estamos lidando com uma lagrangiana quadrática nas variáveis perturbativas, é esperado que, por conta da decomposição a que acabamos de nos referir, apareçam na ação além de termos envolvendo produto de modos tensor-tensor, vetor-vetor e escalar-escalar, outros envolvendo produtos do tipo tensor-vetor, tensor-escalar e vetor-escalar. Acontece que estes termos cruzados podem sempre ser convertidos em termos de derivadas totais, que podem ser desprezadas por não afetarem as equações de movimento. Como exemplo disso, citamos um termo do tipo $w^{ij}S_{ij}$. Ele pode, por uma integral por partes, ser escrito como

$$w^{ij}S_{ij} = \left(w^{ij}S_i \right)_{|j} - w^{ij}{}_{|j}S_i.$$

Como os modos tensoriais estão sujeitos a $w^{ij}{}_{|j} = 0$ o último termo a direita se anula identicamente, restando apenas o termo de derivada total, que, como dissemos, pode ser desprezado. Análise similar a essa pode ser feita para todos os termos cruzados a que nos referimos, de forma que os mesmos não contribuem para as equações de movimento. Assim, a lagrangiana (3.34) se desacopla em três: uma puramente tensorial, uma vetorial e uma escalar.

Tal desacoplamento já era, na realidade, esperado, uma vez que estamos lidando com uma teoria linear, em que não pode haver interação mútua entre os diferentes setores.

Dessa forma, no setor tensorial teremos a seguinte lagrangiana

$$L^T = \frac{a^3}{24l^2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{w}^{ij} \dot{w}_{ij} - \frac{Na}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl}.$$

Essa expressão pode ser ainda mais simplificada se efetuarmos a seguinte mudança de variável

$$w_{ij} = \frac{\sqrt{12}l}{a} \mu_{ij}$$

levando a lagrangiana a assumir a forma²

$$\frac{a}{2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\mu}_{ij} \dot{\mu}^{ij} - \frac{N}{2a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \mu_{ijkl} \mu^{ijkl} + \left(\frac{\ddot{a}}{2N} - \frac{\dot{N}\dot{a}}{2N^2} + \frac{\dot{a}^2}{2a^2} \right) \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \mu_{ij} \mu^{ij}.$$

Note que a lagrangiana acima, além de extremamente simples, está escrita em termos de variáveis que são invariantes de calibre e, ainda representa, se escolhermos $N = a$, a dinâmica de um campo sobre um espaço-tempo de Minkowski, o que torna a sua quantização muito mais simples. A única dificuldade que temos que enfrentar neste caso é o potencial $\frac{\ddot{a}}{2a}$, dependente do tempo.

²Nesta passagem desprezamos o termo de derivada total $(-\frac{\dot{a}}{2N} \mu_{ij} \mu^{ij})$

A equação de movimento clássica das perturbações tensoriais será ($N = a$)

$$\ddot{\mu}_{ij} - \mu_{ij}{}^{,k}{}_{,k} - \frac{\ddot{a}}{a}\mu_{ij} = 0.$$

Se decomposermos essas perturbações em modos normais,

$$\mu_{ij} = \sum_{\vec{k}} \mu_{(\vec{k})} f_{ij}^{(\vec{k})}$$

onde $f_{ij}^{(\vec{k})}$ representam uma base ortogonal de funções tensoriais, obteremos, omitindo o índice \vec{k} por simplicidade notacional

$$\ddot{\mu} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\mu = 0.$$

A equação acima, embora clássica, pode ser usada para estudarmos a dinâmica quântica das perturbações tensoriais se encararmos μ como um operador dependente do tempo (visão de Heisenberg).

No setor vetorial a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} L^{(V)} = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} S^{,ij} S_{[i|j]} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} S_{,ij} \dot{F}^{,ij} + \frac{a^3}{12l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{F}^{,ij} F_{,ij} \\ & + \frac{1}{2} Na^3 (\lambda + 1) \epsilon_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{N} \dot{\eta}^i + S^i \right) \left(\frac{a}{N} \dot{\eta}_i + S_i \right). \end{aligned}$$

Esta lagrangiana apresenta todas as dificuldades já comentadas. No entanto, se a re-escrevermos utilizando as seguintes variáveis invariantes de calibre

$$\eta^{i(ic)} = \eta^i + F^i$$

$$V_i = S_i - \frac{a}{N} \dot{F}_i$$

ela será levada a assumir a seguinte forma

$$\begin{aligned} L^V = & \frac{Na}{12l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} V^{,ij} V_{,ij} \\ & + \frac{1}{2} Na^3 (\lambda + 1) \epsilon_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{N} \dot{\eta}^{i(ic)} + V^i \right) \left(\frac{a}{N} \dot{\eta}_i^{(ic)} + V_i \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se agora definirmos a variável invariante de calibre

$$\varphi^i = \frac{a^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\lambda + 1) \epsilon_0}}{\sqrt{6} \sqrt{\lambda}} \left(\frac{a}{N} \dot{\eta}^{i(ic)} + V^i \right)$$

a lagrangiana assume finalmente a forma

$$L^V = \frac{Na}{12l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} V^{,ij} V_{,ij} + 3Nl^2 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi^i \varphi_i.$$

Não é difícil verificar que as equações de movimento para as perturbações vetoriais serão

$$\frac{a}{N}\dot{\eta}^i + V^i = \frac{C^i}{a^4 \varepsilon_0 \gamma^{\frac{1}{2}} (\lambda + 1)}$$

$$\frac{a^2}{6l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} V^{ij} = C^i$$

onde C^i é uma constante. Ou seja, as perturbações vetoriais V^i não apresentam dinâmica, evoluindo cinematicamente com $1/a^2$ [62]

A análise no setor escalar não é tão simples quanto as anteriores. Após algumas integrais por partes a lagrangiana escalar é colocada na forma

$$L^E = \frac{Na}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i) - \frac{2a^2}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) F^i{}_i$$

$$- \frac{Na^3 \lambda (\lambda + 1) \varepsilon_0}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i + \frac{1}{\lambda} \phi \right)^2$$

$$+ \frac{Na^3 (\lambda + 1) \varepsilon_0}{2\lambda} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 - \frac{a^3}{Nl^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} Na^3 (\lambda + 1) \varepsilon_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)}{}_i + F^i \right) \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}_i^{(ic)} + F_i \right)$$

onde F é definido por

$$F = B - \frac{a}{N} \dot{E}.$$

As equações de movimento clássicas derivadas dessa lagrangiana são

$$\psi^i{}_i - \frac{\dot{a}}{N} F^i{}_i + \frac{3\dot{a}a}{N^2} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) - \frac{3l^2}{2} a^2 (\lambda + 1) \varepsilon_0 \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i \right) = 0$$

$$\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi + \frac{3l^2}{2} Na (\lambda + 1) \varepsilon_0 \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)} + F \right) = 0$$

$$\ddot{\psi} + \left(3\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N} \right) \dot{\psi} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\dot{a}\dot{N}}{Na} + \frac{2\ddot{a}}{a} \right) \phi + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{N^2}{3a^2} (\phi - \psi)^i{}_i$$

$$- \frac{3l^2}{2} N^2 \lambda (\lambda + 1) \varepsilon_0 \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i \right) + \frac{N}{3a^3} \left(a^2 F^i{}_i \right) = 0$$

$$\left[a^4 (\lambda + 1) \varepsilon_0 \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)} + F \right) \right] + Na^3 \lambda (\lambda + 1) \varepsilon_0 \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i + \frac{1}{\lambda} \phi \right) = 0. \quad (3.36)$$

Derivando no tempo a segunda destas equações e usando a terceira, novamente a segunda e (3.7) podemos obter a seguinte relação

$$(\phi - \psi) + \frac{a}{N} (a^2 F) = 0$$

de onde podemos concluir, expressando ϕ e ψ em função dos potenciais de Bardeen Φ e Ψ (equações (3.18)),

$$\Phi = \Psi.$$

Voltando à lagrangiana escalar, notamos que a mesma também apresenta todas as dificuldades já comentadas. Para contornarmos essas dificuldades vamos, inicialmente, definir um potencial velocidade φ [34] através de

$$\varphi = \frac{\sqrt{6}la^2 \sqrt{(\lambda + 1)\epsilon_0}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)} + F \right)$$

Em termos desta variável, a lagrangiana do setor escalar passa a ser expressa como

$$\begin{aligned} L^E = & \frac{Na}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i \right) - \frac{2a^2}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) F^i{}_i \\ & - \frac{a^3}{Nl^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right)^2 - \frac{Na^3(\lambda + 1)\epsilon_0}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[\lambda \left(3\psi - \xi^i{}_{(ic)} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\phi \left(3\psi - \xi^i{}_{(ic)} \right) \right] + \frac{N\lambda}{12l^2 a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi^i{}_i. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por fim, escolhemos $N = a$ e definimos a seguinte quantidade invariante de calibre [34]

$$v = \frac{1}{\sqrt{6}l} \left(\varphi - 2z\psi \right)$$

onde $z = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\lambda+1}{\lambda} \epsilon_0} \frac{la^3}{a}$. Usando-se a segunda das equações (3.36) e as equações clássicas do espaço-tempo de fundo, podemos levar a lagrangiana (3.37), após cálculos longos que não serão aqui descritos em detalhes [34], à seguinte forma (escolhendo $N = a$)

$$\int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \dot{v}^2 - \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{2} v^i v_i + \frac{\ddot{z}}{2z} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2.$$

Esse resultado nos mostra que também no setor escalar podemos descrever a dinâmica das perturbações através de uma lagrangiana simples, invariante de calibre e que representa a dinâmica de um campo sobre um espaço-tempo de Minkowski.

A equação de movimento clássica para v será

$$\ddot{v} - \lambda v^i{}_i - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0.$$

E decompondo v em modos normais, essa equação se torna

$$\ddot{v} + \left(\lambda k^2 - \frac{\ddot{z}}{z} \right) v = 0.$$

Note que o uso das equações de movimento do fundo permite que escrevamos

$$z = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\lambda + 1}{\lambda}} a$$

que leva a

$$\ddot{v} + \left(\lambda k^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) v = 0 \quad (3.38)$$

exatamente a mesma equação obtida no caso tensorial, a menos do fator λ que multiplica k^2 , que pode sempre ser absorvido por uma redefinição de k (estamos nos restringindo a $\lambda > 0$).

A partir das equações (3.36) e (3.7) podemos também obter a seguinte expressão

$$\Phi^i{}_i = -\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{f^3 a^3}{\dot{a} \lambda} \left(\frac{v}{a}\right). \quad (3.39)$$

que nos permite, uma vez conhecido v , conhecer o potencial de Bardeen Φ .

Por fim, da mesma forma que no caso tensorial e vetorial, as equações (3.39) e (3.38) valem quando as perturbações escalares são quantizadas na visão de Heisenberg.

3.5.2 Universos dominados por um campo escalar

Somando as lagrangianas (3.9) e (3.26) obtemos a forma mais geral para a lagrangiana das perturbações em um Universo de FLRW dominado por um campo escalar

$$\begin{aligned} L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijl} k^l + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} \right. \\ & + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} \epsilon^{li} \left. \right) + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 \\ & + \frac{a \dot{a}^2}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4} \epsilon^2 + 3A^i A_i + \frac{3}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) \\ & + \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon} \right) - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} - \frac{a^3 \dot{\phi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta\varphi + a^2 \dot{\phi}_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi A^i{}_{|i} - \frac{Na^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi - \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta\varphi \\ & + \frac{\dot{\phi}_0^2 a^3}{4N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) + \frac{Na^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 \right. \\ & + \left. \epsilon\phi - A^i A_i + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta\varphi^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{li} \delta\varphi_{li}}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta ação sofre das mesmas dificuldades que a ação (3.31). A forma de contornar estas dificuldades segue, em linhas gerais, os mesmos passos utilizados no caso da

matéria hidrodinâmica [34]. Assim, integrando por partes os termos em $\epsilon_{ij}\dot{\epsilon}^{ij}$ e em $\epsilon\dot{\epsilon}$ em (3.40) e utilizando as equações (3.22) e (3.23) para expressar as derivadas segundas de a e de φ_0 vem

$$\begin{aligned}
L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[il]j} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} \right. \\
& + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^{li} \left. \right) + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^{ij} \epsilon_{ij} \\
& - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 - \frac{a\dot{a}^2}{2l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (3\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i) \\
& - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} \\
& + \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \right) \delta\varphi + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi A^i{}_{|i} - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta\varphi \\
& + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{4N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (3\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i) + \frac{Na^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i) \\
& + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta\dot{\varphi}^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{li} \delta\varphi_{li}}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right)
\end{aligned}$$

onde omitimos o termo de derivada total

$$\left[\frac{a^2 \dot{a}}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^2) - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi + \frac{1}{2} \epsilon) \delta\varphi \right]. \quad (3.41)$$

O uso da equação (3.21) permite levar essa lagrangiana à forma

$$\begin{aligned}
L = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[il]j} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} \right. \\
& + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^{li} \left. \right) - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 - \frac{a\dot{a}^2}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\
& - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} \\
& + \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \right) \delta\varphi + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi A^i{}_{|i} - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta\varphi \\
& + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta\dot{\varphi}^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{li} \delta\varphi_{li}}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right).
\end{aligned}$$

Também aqui, vamos decompor as perturbações em modos escalares, vetoriais e tensoriais. Novamente os termos cruzados serão desprezados, por serem redutíveis a derivadas totais, e a ação se desacoplará em três setores independentes, consistentemente com a linearidade da teoria.

No setor tensorial teremos como lagrangiana

$$L^{(T)} = -\frac{Na}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl} + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ij} w_{ij},$$

exatamente a mesma obtida para o caso hidrodinâmico. Assim, todas as conclusões obtidas para essas perturbações naquele caso permanecem válidas.

No setor vetorial temos

$$L^{(V)} = \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} S^{ij} S_{[ij]} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} S_{ij} F^{ij} + \frac{a^3}{12l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} F^{ij} F_{ij}$$

que sofre das mesmas dificuldades já comentadas no caso da matéria hidrodinâmica. Essas dificuldades podem ser contornadas pela introdução da variável invariante de calibre V_i

$$V_i = S_i - \frac{a}{N} \dot{F}_i.$$

Em termos desta variável a lagrangiana do setor vetorial assume a forma

$$\frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} V^{[ij]} V_{[ij]}$$

de onde obtemos que a equação de movimento para V_i será

$$\frac{1}{2} V^{ij}{}_{|j} \approx 0$$

que implica em

$$V^i = 0.$$

Ou seja, em um Universo dominado por um campo escalar, as perturbações vetoriais são identicamente nulas.

Por fim no setor escalar, após algumas integrais por partes, a lagrangiana assume a forma

$$\begin{aligned} L^{(E)} = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (2\psi^i \psi_i - 4\phi_i \psi^i) - \frac{a^3}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\psi}^2 - \frac{\dot{a}^2 a}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\ & - \frac{2a^2 \dot{a}}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\psi} + \frac{a^3 \dot{\phi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\dot{\phi} + 3\dot{\psi}) \delta\varphi - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta\varphi \\ & + \frac{\dot{\phi}_0^2 a^3}{2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 - \frac{2a^2}{3l^2} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi - \frac{3l^2 \dot{\phi}_0}{2} \delta\varphi \right) \left(B - \frac{a}{N} \dot{E} \right)^i{}_i \\ & + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{N^2} \delta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{a^2} \delta\varphi^i \delta\varphi_i - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right), \end{aligned}$$

que sofre de todas as dificuldades já conhecidas.

As equações de movimento serão

$$\begin{aligned} \psi^i{}_i - \frac{3\dot{a}a}{N^2} \dot{\psi} + \left(\frac{\dot{N}\dot{a}a}{N^3} - \frac{\ddot{a}a}{N^2} - \frac{2\dot{a}^2}{N^2} \right) \phi - \frac{\dot{a}}{N} F^i{}_i - \frac{3l^2 a^2}{4} \mathcal{V}_\varphi \delta\varphi - \frac{3l^2 a^2 \dot{\phi}_0}{2N^2} \delta\varphi &= 0 \\ \ddot{\psi} + \frac{N}{a^3} \left(\frac{a^3}{N} \right) \dot{\psi} + \frac{N}{a^3} \left(\frac{a^2 \dot{a}}{N} \right) \phi + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{3N^2 l^2 \mathcal{V}_\varphi}{4} \delta\varphi + \frac{N^2}{3a^2} (\phi - \psi)^i{}_i & \\ + \frac{N}{3a^3} (a^2 F^i{}_i) - \frac{3l^2 \dot{\phi}_0}{2} \delta\varphi &= 0 \\ \dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi - \frac{3l^2 \dot{\phi}_0}{2} \delta\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Derivando no tempo a última destas equações e utilizando a segunda e novamente a última, além de (3.24) podemos, de forma semelhante ao caso do fluido perfeito, obter a igualdade

$$\phi - \psi + \frac{1}{Na} \left(a^2 F^i_i \right) = 0,$$

de onde obtemos

$$\Phi = \Psi.$$

A escolha de $N = a$, a introdução da variável invariante de calibre v

$$v = a \left[\delta\varphi + \frac{a\dot{\varphi}_0}{\dot{a}} \psi \right]$$

e o uso da última das equações (3.42) e (3.24) leva essa lagrangiana, após cálculos muito longos e que também não serão detalhados aqui, à seguinte forma

$$\int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\dot{v}^2}{2} - \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{v^i v_i}{2} + \frac{\ddot{z}}{z} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{2} \quad (3.43)$$

onde termos de derivada total foram omitidos e z é dado por $z = a^2 \dot{\varphi}_0 / \dot{a}$. A equação de movimento clássica para os modos normais de v será

$$\ddot{v} + \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z} \right) v = 0.$$

A partir da última e da penúltima equações de (3.42), e de (3.24) podemos obter

$$\Phi^i_i = \frac{3l^2 a \dot{\varphi}_0^2}{2\dot{a}} \left(\frac{v}{z} \right)$$

e, também neste caso, o conhecimento de v permite o conhecimento do potencial de Bardeen Φ .

Capítulo 4

Cosmologia Quântica

4.1 Introdução

Após o final da década de 60, com o desenvolvimento por Hawking e Penrose dos chamados Teoremas de Singularidade [5] a idéia de um começo para o Universo em uma singularidade ganhou força entre os pesquisadores da área. No entanto, a existência de uma singularidade em um tempo finito no passado é por si só um problema. Tal singularidade representa um momento ao qual simplesmente não se pode aplicar nenhum método físico para descrevê-lo. A própria idéia de o Universo ser descrito por um espaço tempo geodesicamente incompleto, deveria ser encarada de forma mais razoável apenas como indicativo de um limite de validade para a teoria da Relatividade Geral e não como uma propriedade intrínseca da evolução dinâmica dele.

Acontece que os citados teoremas de singularidade têm sua validade condicionada à validade de certas hipóteses sobre o conteúdo material dominante do Universo, bem como sobre a dinâmica que rege o mesmo. Nominalmente, tais teoremas pressupõem que

1. A geometria é dinâmica.
2. A Teoria da Relatividade Geral é válida durante toda a história do Universo.
3. O conteúdo material dominante do Universo obedece, a todo instante, à condição

$$\rho + 3p \geq 0,$$

conhecida como condição de energia forte. Essa condição é, de fato, obedecida pela maioria dos fluidos atualmente conhecidos em laboratório.

4. O espaço-tempo não possui vorticidade.

Se pretendemos desenvolver um modelo cosmológico sem singularidade, temos então que violar alguma dessas condições. Vários modelos que exploram a condição

3 têm sido desenvolvidos nas últimas décadas, exibindo a desejada ausência de singularidades [15]. Em nome da concisão e da objetividade, não abordaremos tais modelos neste trabalho.

No que concerne à condição 2, também inúmeras possibilidades vêm sendo estudadas [11, 12, 13, 14, 63], tais como correções de ordem 2 ou mais da curvatura sendo adicionadas à ação, teorias com constantes fundamentais variando no tempo [64], acoplamento não-mínimo do conteúdo material com o campo gravitacional [10] ou ainda a quantização da relatividade geral.

Neste trabalho seguiremos este último caminho. As possibilidades nesse sentido também são variadas. Exemplos de modelos de gravitação quântica são a gravitação quântica com laços (*Loop Quantum Gravity-LQG*) [16, 17, 18, 65, 66], uma abordagem canônica do processo de quantização, e a teoria de cordas, esta última fortemente motivada por teorias de campos e de partículas [67]. Modelos advindos dessas teorias têm sido amplamente discutidos na literatura [11, 68, 14, 13, 63].

Nós vamos nos fixar à quantização canônica da teoria da Relatividade Geral via formalismo ADM [22] (que usa variáveis diferentes das utilizadas pela LQG).

As primeiras tentativas de quantizar canonicamente a teoria da Relatividade Geral surgiram ainda na década de 60 após o desenvolvimento por Arnowitt, Deser e Misner de um formalismo hamiltoniano para espaços-tempo globalmente folheáveis por hiper-superfícies do tipo espaço (formalismo *ADM*) [22]. A quantização de tal teoria levava no entanto a uma equação extremamente complicada de ser resolvida (a equação de *Wheeler-DeWitt*) [8], para a qual até hoje nenhuma solução exata foi encontrada. Além disso a quantização da gravitação levantava questões conceituais, tais como a ausência de uma noção de tempo e como essa noção poderia ser recuperada em uma aproximação semi-clássica, questões essas que até hoje também não foram satisfatoriamente respondidas [69].

Para contornar essas dificuldades, na década de 70, DeWitt e Misner [6, 7, 8] propuseram um método aproximativo para a solução da equação de Wheeler-de Witt, conhecido como *método de mini-superespaço* [19, 20, 21].

Denomina-se superespaço, em gravitação quântica, o espaço formado por todas as possíveis geometrias do 3-espaço. Tipicamente, o funcional de onda do campo gravitacional poderia assumir amplitudes não nulas sobre todo o superespaço. No entanto, espera-se que para a maioria das soluções fisicamente relevantes a amplitude de probabilidades determinada por esse funcional seja significativa apenas em uma certa região do superespaço, que contém todas as 3-geometrias de uma certa classe, cuja caracterização envolve a especificação das simetrias do espaço-tempo clássico. O método de quantização em mini-superespaço consiste em partir da ação mais geral para o campo gravitacional que ainda respeite tais simetrias e, a partir daí proceder à quantização canônica normalmente. Tal processo representa uma significativa redução de graus de liberdade, de forma que para a maioria dos casos estudados é possível encontrar-se soluções para o funcional de onda do campo gravitacional.

A aplicação da quantização em mini-superespaço na cosmologia, embora tecnicamente simples [70, 71], apresenta um sério inconveniente conceitual: a inter-

pretação do funcional de onda do Universo. Tradicionalmente, a interpretação dos funcionais de onda obtidos na quantização do campo gravitacional é feita através da interpretação padrão da mecânica quântica, a *Interpretação de Copenhagen*. Acontece que essa interpretação, por ter um caráter exclusivamente epistemológico, só faz sentido quando aplicada a sistemas físicos, se pressupormos a existência de um observador externo ao sistema e regido pelas leis da mecânica clássica. Tal dicotomia, por si só insatisfatória, se torna um impedimento quando o objeto de estudo é o Universo, entendido como o conjunto de tudo o que existe. Nesse caso não há como conciliar a idéia de um observador externo ao sistema para dar sentido à interpretação de Copenhagen. Assim, enquanto em outras áreas da física o chamado *problema da interpretação da mecânica quântica* assume um caráter mais filosófico, na cosmologia ele se torna fundamental, pois sem uma interpretação adequada toda a idéia de quantização do campo gravitacional carece de sentido.

Propostas de interpretações alternativas da mecânica quântica têm sido feitas ao longo do século XX. Dentre essas podemos citar a *Interpretação de Vários Mundos* [24, 25] e a *Interpretação de Bohm-de Broglie* [31, 32, 33]. Esta última é a que vamos adotar neste trabalho. Para um breve resumo dos problemas relacionados à interpretação de Copenhagen e das idéias básicas da interpretação de Bohm ver a seção correspondente no capítulo 2.

4.2 Método de Mini-Superespaço para Universos Dominados por um Fluido Perfeito

Vamos agora determinar a hamiltoniana para um fluido perfeito em Relatividade Geral. Para tanto vamos utilizar o formalismo de Fock [61, 34]. Esse formalismo já foi introduzido no capítulo anterior, onde estabelecemos as relações

$$S_m = - \int d^4x \sqrt{-g} \rho_0$$

$$\rho_0 = n(m_0 + \pi), \quad (4.1)$$

$$\pi = \int^n \frac{dp}{no'}, -\frac{p}{n} \quad (4.2)$$

$$n = \frac{F \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x_0^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_0^\nu}{\partial \sigma}}}{\sqrt{-g} J},$$

onde σ é um parâmetro ao longo das linhas de mundo das partículas que compõem o fluido, ρ é a densidade de energia desse fluido e x_0^μ são as coordenadas de cada partícula. As outras quantidades já tiveram seus significados discutidos no capítulo 3 e os mesmos não serão necessários no que segue.

De posse da ação S_m , o próximo passo seria o cálculo dos momenta P_μ associados às coordenadas x_0^μ e a partir daí calcularmos a hamiltoniana. No entanto, deve-se tomar cuidado no cálculo desses momenta.

Tomando como lagrangiana

$$S_m = \int dt L \rightarrow L = - \int d^3x \sqrt{-g} \rho_0$$

teremos que P_μ será dado por

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\mu}{dt})}. \quad (4.3)$$

Note que na expressão acima a velocidade é tomada como a derivada em relação ao tempo t , que é o tempo que aparece na integral da lagrangiana para obtenção da ação. No entanto, na lagrangiana, as velocidades que aparecem são tomadas como derivadas em relação ao parâmetro de tempo σ , que, a priori, não possui nenhuma relação funcional com o tempo coordenado t . A conclusão a que chegamos é a de que a derivada em (4.3) é identicamente nula, sendo então identicamente nulo o momentum P_μ . Isso nos dá um vínculo primário para a teoria. O outro vínculo primário é

$$P_N \approx 0.$$

Calculando a hamiltoniana do fluido mais gravitação temos

$$H = -\frac{Nl^2 P_a^2}{4aV} + \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} N a^3 \rho_0 + \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \lambda^\mu P_\mu + \lambda_N P_N. \quad (4.4)$$

Nesta expressão, V representa o volume comóvel das seções espaciais, que estamos considerando topologicamente fechadas, por hipótese (topologia não trivial, já que a geometria é plana).

A conservação do vínculo P_μ leva a

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \rho_0 \approx 0$$

condição que é identicamente satisfeita¹. Dessa forma a conservação de P_μ é identicamente satisfeita. A conservação de P_N leva a

$$H_0 =: -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} a^3 \rho_0 \approx 0,$$

cujas conservação é identicamente satisfeita. Note que nenhum multiplicador de Lagrange foi determinado. Os vínculos P_N , P_μ e H_0 são então vínculos de primeira classe e portanto geradores de transformações de calibre. O vínculo P_N é responsável única e exclusivamente pelas transformações de calibre de N . As transformações de calibre geradas pelos P_μ só atuam sobre as coordenadas x^μ , que se alteram como

$$x_0^\mu \rightarrow x_0^\mu + \epsilon^\mu$$

¹A densidade de energia ρ_0 não depende explicitamente do tempo, depende apenas do fator de escala a , que é considerado uma variável dinâmica independente.

onde ϵ^μ é um parâmetro infinitesimal arbitrário da transformação de calibre. Assim, as transformações de calibre geradas pelos P_μ representam transformações infinitesimais de coordenadas das partículas do fluido. Sendo H_0 proporcional à hamiltoniana, temos que o mesmo gera transformações de calibre associadas à uma reparametrização temporal da teoria.

Como N aparece na hamiltoniana multiplicando o vínculo de primeira classe H_0 , concluímos que ele deve ser um multiplicador de Lagrange livre da teoria, quer dizer, podemos atribuir-lhe qualquer valor, sem alterarmos o conteúdo físico da teoria. Uma outra forma de ver isso é notar que $\dot{N} = \lambda_N$ e que esse multiplicador de Lagrange não foi determinado.

Essa liberdade na escolha de N está intimamente ligada à liberdade na escolha da variável temporal t , gerada como vimos pelo vínculo H_0 . Isso fica claro se tomarmos um observador comóvel com as hipersuperfícies espaciais, para o qual a velocidade própria será

$$V^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)\delta_0^\mu$$

sendo $d\tau$ o seu tempo próprio. A condição de normalização da velocidade

$$V^\mu V_\mu = 1$$

leva então a

$$dt = \frac{1}{N}d\tau$$

e podemos ver que diferentes escolhas de N levam a diferentes escolhas de t .

Algumas escolhas comuns em cosmologia são $N = 1$, cuja variável associada, denominada tempo cósmico, é o tempo próprio τ ; e $N = a$, cuja variável associada denomina-se tempo conforme, e é usualmente representada pela letra η .

Das equações (4.2) e (4.1) e usando

$$n = \frac{F}{a^3}$$

é fácil verificar que

$$\dot{\rho}_0 = \frac{-3(\lambda + 1)\dot{a}}{a}\rho_0$$

e portanto

$$\left(a^{3(\lambda+1)}\rho_0\right) = 0$$

ou seja

$$a^3\rho_0 V = \frac{\text{constante}}{a^{3\lambda}}. \quad (4.5)$$

Usando o procedimento inverso de Routh, na hamiltoniana (4.4) podemos identificar a constante na equação (4.5) como um momentum canonicamente conjugado a uma variável cíclica. Vamos denotar essa variável por T e o seu momentum por P_T . Assim, a hamiltoniana (4.4) se torna

$$H = NH_0 + \lambda_N P_N + \int d^3x \lambda_\mu P_\mu$$

com

$$H_0 = -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} \quad P_T = a^{3(\lambda+1)} \rho_0.$$

Dessa hamiltoniana tiramos

$$\dot{T} = \frac{N}{a^{3\lambda}}$$

e pela escolha $N = a^{3\lambda}$ teremos

$$T = t + \text{constante}$$

ou seja, a variável T introduzida pelo procedimento inverso de Routh corresponderá ao próprio tempo coordenado t .

É trivial verificar que a hamiltoniana (4.4) gera as equações corretas para o fator de escala.

É adequado comentar aqui que a hamiltoniana acima pode ser obtida partindo-se do formalismo de Schutz [72, 73] que é o frequentemente utilizado em trabalhos anteriores na área de cosmologia quântica [71, 74].

4.3 Quantização - A Função de Onda do Universo

Na seção anterior obtivemos a expressão para a hamiltoniana como sendo

$$H = NH_0 + \lambda_N P_N + \lambda_\mu P_\mu$$

sendo H_0 , P_N e P_μ vínculos de primeira classe e λ_N , λ_μ e N os respectivos multiplicadores de Lagrange.

Como estamos lidando com um sistema vinculado devemos, na quantização pela prescrição de Dirac [39], exigir que a função de onda seja aniquilada pelos vínculos P_N , P_μ e H_0 . Dos dois primeiros concluímos que a função de onda não dependerá de N nem das coordenadas x_μ das partículas. A terceira condição leva à seguinte expressão

$$a^{3\lambda} H_0 \chi = 0$$

onde o fator $a^{3\lambda}$ foi introduzido por conveniência.

Na quantização a expressão acima apresentará o problema de ordenamento de operadores no primeiro termo. Escolheremos como ordenamento aquele que gera uma hamiltoniana covariante por mudanças das variáveis dinâmicas. Esse ordenamento corresponde a

$$\frac{l^2}{4V} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) = i \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (4.6)$$

que corresponde a uma equação do tipo Schroedinger descrevendo a evolução da função de onda $\psi(a, T)$ no tempo T . Como já discutido anteriormente, esse tempo corresponde ao tempo coordenado se impusermos o calibre $N = a^{3\lambda}$. A particularização desse tempo para a parametrização da evolução dinâmica do sistema foi a razão pela qual multiplicamos o vínculo H_0 por $a^{3\lambda}$.

O operador

$$\hat{H} = \frac{l^2}{4V} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \right)$$

não é hermitiano sobre todo o espaço de Hilbert, ou seja, dadas duas funções de onda ϕ e ψ , a igualdade

$$\langle \phi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \phi \rangle^* \quad (4.7)$$

pode não ser satisfeita [71]. Dado que

$$\langle \phi | \hat{H} | \psi \rangle = \int_0^a da a^{-\frac{3\lambda-1}{2}} \phi^* \frac{l^2}{4V} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a} \right),$$

onde $a^{-\frac{3\lambda-1}{2}}$ é a raiz quadrada do determinante da métrica do espaço de Hilbert, então, para que a igualdade (4.7) seja válida, devemos ter

$$\left[a^{-\frac{3\lambda-1}{2}} \left(\phi^* \frac{\partial \psi}{\partial a} - \psi \frac{\partial \phi^*}{\partial a} \right) \right]_0^\infty = 0.$$

Sob a hipótese de que as funções de onda vão a zero suficientemente rápido para $a \rightarrow \infty$, então teremos que a expressão acima se reduzirá a

$$\phi^* \frac{\partial \psi}{\partial a} - \psi \frac{\partial \phi^*}{\partial a} \Big|_{a=0} = 0.$$

Essa condição será satisfeita se todas as funções de onda do espaço de Hilbert satisfizerem à condição de contorno

$$\psi \Big|_{a=0} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial a} \Big|_{a=0} \quad (4.8)$$

com o mesmo α real para todas as funções de onda. Dessa forma obtemos um espaço de Hilbert reduzido, caracterizado pelo particular valor de α escolhido. A função de onda do Universo deverá estar contida neste espaço, para que tenhamos conservação de probabilidades.

Vamos agora resolver a equação (4.6). Inicialmente definimos a variável auxiliar x por

$$x = \frac{2\sqrt{V}}{l} \frac{2}{3(1-\lambda)} a^{\frac{3(1-\lambda)}{2}}.$$

Em termos desta variável a equação (4.6) fica

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \iota \frac{\partial \psi}{\partial T}$$

e impondo a condição inicial(ver [76], além de [75] e referências ali contidas.)

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{8}{T_0 \pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{T_0}}$$

onde T_0 é uma constante, obtemos a solução para todo T [76]

$$\psi(a, T) = \left[\frac{8T_0V}{\pi(T^2 + T_0^2)l^2} \right]^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{4T_0Va^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2(T^2+T_0^2)l^2}} e^{-i \left[\frac{4TVa^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2(T^2+T_0^2)l^2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{T_0}{T}\right) - \frac{\pi}{4} \right]} \quad (4.9)$$

e verifica-se trivialmente que

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial a} \right|_{a=0} = 0$$

satisfazendo à condição de contorno (4.8) com $\alpha \rightarrow \infty$.

4.4 Trajetórias Bohmianas

Na função de onda (4.9) podemos ler diretamente as expressões de S (fase da função) e R (módulo da função)

$$S = -\frac{4TVa^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2(T^2 + T_0^2)l^2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{T_0}{T}\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$R = \left[\frac{8T_0V}{\pi(T^2 + T_0^2)l^2} \right]^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{4T_0Va^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2(T^2+T_0^2)l^2}}.$$

Aplicando a interpretação de Bohm, obtemos

$$P_a = \frac{\partial S}{\partial a} = -\frac{4TVa^{2-3\lambda}}{3l^2(1-\lambda)(T^2 + T_0^2)}$$

de onde vem

$$\dot{a} = -\frac{a^{3\lambda-1}l^2P_a}{2V} = \frac{2Ta}{3(1-\lambda)(T^2 + T_0^2)}$$

cuja solução é

$$a(T) = a_0 \left(1 + \frac{T^2}{T_0^2} \right)^{\frac{1}{3(1-\lambda)}}. \quad (4.10)$$

Para sermos completos, vamos também apresentar a expressão do potencial quântico. Este pode ser calculado por

$$Q(a, T) = \frac{l^2}{4VR} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial R}{\partial a} \right)$$

cuja expressão para a função de onda apresentada será

$$Q(a, T) = -\frac{T_0}{2(T^2 + T_0^2)} + \frac{4T_0^2Va^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2l^2(T^2 + T_0^2)^2}.$$

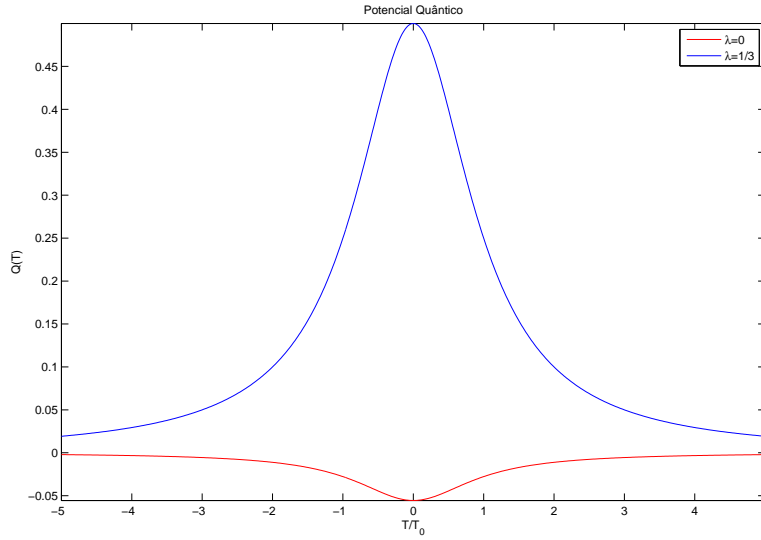


Figura 4.1: *Potencial Quântico* dado pela equação (4.11) com $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, $V = 1$ e $l = 1$.

Substituindo $a(T)$, obtemos

$$Q(T) = \frac{1}{T_0} \left[\frac{4Va_0^{3(1-\lambda)}}{9(1-\lambda)^2 l^2 T_0} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{1 + \frac{T^2}{T_0^2}}. \quad (4.11)$$

Nas figuras (4.1) e (4.2) apresentamos gráficos de $a(T)$ e $Q(T)$ e pode-se verificar que em torno de $T = 0$ o potencial quântico é máximo em módulo, coincidindo com o mínimo de a .

Vamos agora proceder à análise de alguns aspectos relevantes da trajetória bohmiana (4.10). O primeiro fato que chama a atenção é a não existência de uma singularidade, ou seja, $a(T)$ nunca é zero. Trata-se de fato de um modelo de Universo Eterno, em que não há um começo. Note que a fase $T \leq 0$, contrativa, não colapsa para uma singularidade, como seria esperado se a teoria da Relatividade Geral clássica valesse em todo tempo, pois em torno de $T = 0$ o potencial quântico domina a evolução, afastando pois as trajetórias de seu comportamento clássico. O Universo entra então na fase expansiva atual, quando, para T suficientemente grande, a dinâmica volta a ser dominada pela Relatividade Geral clássica.

Um outro aspecto importante dessas soluções é a inexistência de horizontes de partículas. Como se sabe a distância comóvel H_p desse horizonte é calculada por

$$H_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau'}{a}$$

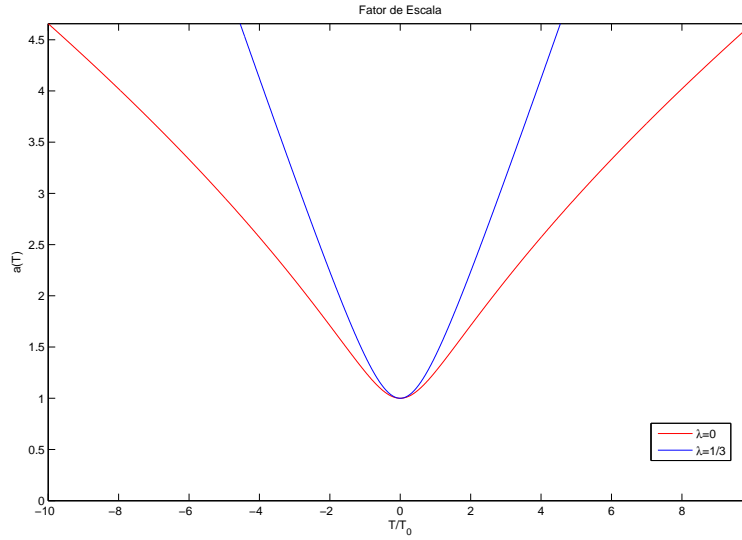


Figura 4.2: Comportamento do fator de escala (4.10) para diversos valores de λ . Nos gráficos acima usamos $a_0 = 1$ e $T_0 = 1$.

e usando $d\tau = a^{3\lambda}dT$ e (4.10) vem

$$H_p(T) = \int_{-\infty}^T dT' \left(1 + \frac{T'^2}{T_0^2}\right)^{\frac{-\lambda}{1-\lambda}}$$

e é fácil verificar que essa integral diverge para Universos dominados por fluidos com $1 > \lambda > -\frac{1}{3}$, indicando a ausência de horizontes. Essa ausência pode ser entendida como efeito da existência de um tempo infinito no passado, no qual os componentes materiais do Universo puderam se termalizar.

Comentamos que outras escolhas de condições iniciais também levam a funções de onda da forma (4.10) [71].

A análise de um modelo cosmológico quântico com poeira e radiação tornaria este capítulo desnecessariamente longo. Ao leitor interessado recomendamos a literatura no assunto (ver [74] e referências).

Também existem estudos em mini-superespaço para Universos dominados por um campo escalar mas, nesse caso, não há o aparecimento de um momentum de forma linear na hamiltoniana. Como consequência, não podemos definir uma noção de tempo para descrever a evolução desse Universo. Obtém-se, não obstante, soluções para o fator de escala sendo uma função implícita do campo escalar. Essas soluções são analíticas no caso em que o potencial do campo é identicamente nulo e numéricas caso contrário.

Por fim, embora nossa análise tenha se limitado a soluções com $K = 0$, são também conhecidas na literatura soluções para os casos $K = 1$ e $K = -1$ com fluido perfeito [71], obtendo-se para o primeiro Universos com fases de expansão

e contração que se alternam de forma cíclica, sem nunca colapsar em uma singularidade. No caso $K = -1$ obtém-se também soluções que se contraem desde $T \rightarrow -\infty$ até um valor mínimo em $T = 0$, voltando a se expandir, por força do potencial quântico, e desembocando na solução clássica quando T for suficientemente grande. Essas soluções só são analíticas no caso de radiação.

Uma propriedade atraente das soluções com $K = -1$ é a de se poder mostrar que para elas o parâmetro de densidade Ω pode se aproximar suficientemente de 1 na fase contrativa, antes do domínio do potencial quântico, e por simetria da trajetória quântica, Ω continua igualmente próximo de 1 ao final do *bounce*. Teríamos então, uma solução que inicia o período clássico de expansão arbitrariamente próxima de 1. Isso indica que esses modelos podem apresentar uma solução natural para o problema da planeza, sem a necessidade de se apelar para fases inflacionárias.

Concluimos com este capítulo portanto que a quantização em mini-superespaço da Relatividade Geral leva a modelos de Universo sem singularidade e sem horizontes, suficientemente próximas da planeza (para $K = -1$) resolvendo assim os grandes problemas da cosmologia moderna².

Resta testar a robustez de tais modelos com relação às perturbações cosmológicas e anisotropias da radiação de fundo. Esse é o tema central e original dessa tese e a ele nos dedicamos no próximo capítulo.

²Há mesmo alguns modelos de brinquedo que apresentam uma fase de aceleração tardia, representando também uma potencial alternativa para o problema da energia escura [77].

Capítulo 5

Teoria de Perturbações em Cosmologia Quântica

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores analisamos a teoria de perturbações aplicada a soluções das equações de Friedmann . Em tal análise foi mostrado que a hamiltoniana do setor das perturbações, escrita em segunda ordem nas mesmas (de forma a gerar equações de movimento lineares), além de apresentar uma grande complexidade de ordem prática no que se refere à tarefa de encontrar soluções analíticas para si, apresentava ainda problemas conceituais com relação à interpretação física das variáveis perturbativas, pois o fato das mesmas não serem invariantes de calibre não deixava claro se tratávamos de verdadeiras perturbações ou apenas de artefatos de uma transformação infinitesimal de coordenadas. Outra dificuldade que a hamiltoniana em questão apresentava era o fato de as variáveis perturbativas se comportarem como campos sobre um espaço-tempo de fundo que não possuía um vetor de Killing do tipo tempo, o que tornava difícil a quantização da teoria. A solução conhecida na literatura para tais dificuldades é baseada na utilização das equações de movimento do espaço-tempo de fundo nos termos de ordem 2 da lagrangiana perturbativa, o que, juntamente com a introdução de variáveis invariantes de calibre e com a decomposição das perturbações em modos escalares, vetoriais e tensoriais, permitia desacoplar a hamiltoniana perturbativa em 3 hamiltonianas mais simples, invariantes de calibre e que descreviam a dinâmica de campos sobre um espaço-tempo de Minkovski (no caso $K = 0$). Os efeitos dinâmicos da dependência temporal do espaço-tempo de fundo sobre as perturbações ficavam então representados em potenciais dependentes do tempo que eram responsáveis pela criação de quanta de perturbação a partir de um estado inicial de vácuo.

Tal metodologia, embora quando aplicada às soluções de Friedmann produza resultados em bom acordo com os dados experimentais, tem aplicação limitada por lançar mão das equações clássicas de movimento do espaço-tempo de fundo, presumindo que os graus de liberdade da ordem zero da teoria comportem-se como

graus de liberdade clássicos, enquanto os perturbativos são quantizados. Naturalmente, o que dá validade ao método é uma aproximação baseada na idéia de que o mesmo é aplicável apenas em instantes nos quais os graus de liberdade de ordem zero estão sendo descritos, em boa aproximação, pela mecânica clássica, perdendo a validade quando tal condição não é satisfeita. A situação é parecida com a quantização de um átomo de hidrogênio, para citar um caso concreto. Em uma primeira aproximação tratamos o problema determinando a função de onda de um elétron em um campo elétrico clássico. Posteriormente, a introdução de um tratamento totalmente quântico, quantizando inclusive o campo elétrico produz refinamentos nas previsões da teoria. Mas então cabe a pergunta: Há alguma generalização possível do método em um tratamento totalmente quântico dos modelos cosmológicos?

Tal pergunta assume uma grande relevância quando se considera que o tratamento quântico da geometria de fundo dá origem a modelos cosmológicos não singulares que se apresentam como alternativas válidas, ou pelo menos como propostas complementares, ao paradigma inflacionário da cosmologia. A robustez de tais modelos deve ser testada com relação aos dados atuais fornecidos por observações das anisotropias da radiação cósmica de fundo, bem como em relação às futuras observações de ondas gravitacionais. Para elaborar-se previsões teóricas a partir de tais modelos, o tratamento totalmente quântico das perturbações cosmológicas é fundamental.

Como no caso totalmente quântico as equações clássicas da ordem zero não são mais válidas, elas não podem ser utilizadas para resolver os problemas citados nos parágrafos anteriores. Vemo-nos obrigados a tratar o problema utilizando-nos da hamiltoniana associada à lagrangiana (3.31). De fato, como não podemos utilizar as equações de ordem zero para eliminar os termos de ordem 1, também estes deverão ser levados em consideração em um tratamento totalmente quântico, bem como os próprios termos de ordem zero. Este problema foi abordado nesta forma por Halliwell e Hawking [35], que analisaram o caso de um Universo gerado por um campo escalar e com seções espaciais de curvatura $K = +1$. As dificuldades encontradas só permitiram que o problema fosse resolvido lançando mão da aproximação semi-clássica (método WKB) para os graus de liberdade do fundo. Não é exagero dizermos então que o problema totalmente quântico nunca foi efetivamente resolvido.

Neste capítulo, que constitui o trabalho original desta tese, vamos mostrar que uma série de transformações canônicas, além da decomposição em modos escalares, vetoriais e tensoriais e da introdução de variáveis invariantes de calibre¹ podem levar a hamiltoniana das perturbações em um Universo de FLRW a se desacoplar em 3 hamiltonianas mais simples e, através da hipótese da existência de trajetórias bohmianas para o fundo mostraremos que essas hamiltonianas são unitariamente equivalentes às hamiltonianas obteníveis no método padrão [78].

¹Pela discussão apresentada no capítulo 3 deve ter ficado claro que tanto a decomposição em modos escalares, vetoriais e tensoriais quanto a definição das variáveis invariantes de calibre são baseadas em aspectos meramente cinemáticos, não dependendo portanto da validade das equações clássicas do fundo e podendo ser utilizadas na presente abordagem.

Uma vez obtidas tais hamiltonianas o espectro das perturbações será calculado no capítulo 6 para o modelo desenvolvido no capítulo 4 e os resultados comparados com dados observacionais.

5.2 Perturbações em Universos Dominados por um Fluido Perfeito

Sendo a ação dada por

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{6l^2} + \rho \right),$$

as perturbações métricas caracterizadas por

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2N^2\phi \\ h_{0i} &= -NaA_i \\ h_{ij} &= a^2\epsilon_{ij} \end{aligned}$$

e as perturbações no fluido por

$$x_0^\mu \rightarrow x^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu$$

teremos que a ação acima será levada em

$$S = S^{(0)} + \delta_1 S + \delta_2 S$$

onde $S^{(0)}$, $\delta_1 S$ e $\delta_2 S$ são respectivamente termos de ordem zero, um e dois nas perturbações. Suas expressões são

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\dot{a}^2 a}{l^2 N} - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} Na^3 \rho_0 \\ \delta_1 S &= \frac{Na^3}{6l^2} \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{6\dot{a}^2}{N^2 a^2} - 6l^2 \rho_0 \right] \phi + \left[\frac{2\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} - \frac{2\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} - 3l^2 \lambda \rho_0 \right] \epsilon + 6l^2 (\lambda + 1) \rho_0 \chi^i{}_{|i} \right\} \\ \delta_2 S &= \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{Na}{6l^2} \left(A^{ij} A_{[i|j]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^{li} \left. \right) + \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{a^3}{24l^2 N} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{a^3}{24l^2 N} \dot{\epsilon}^2 \\ &\quad + \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{a\dot{a}^2}{6l^2 N} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4}\epsilon^2 + 3A^i A_i + \frac{3}{2}\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \left(\phi A^i{}_{|i} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \left. \right) + \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon} \right) - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{6l^2} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} \\ &\quad - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} Na^3 \rho_0 \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} Na^3 p_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{8} \epsilon^2 \right. \\ &\quad - \phi \chi^i{}_{|i} \left. \right) + \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} Na^3 (\rho_0 + p_0) \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) \\ &\quad - \int d^4x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} c_s^2 Na^3 (\rho_0 + p_0) \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right). \end{aligned}$$

Quando da análise feita no capítulo 3 a ação $S^{(0)}$ foi desconsiderada pois supusemos que o espaço-tempo de fundo era clássico e já conhecido. Assim não era necessário tratar tais termos. A ação da ordem um, $\delta_1 S$, foi desconsiderada pois pelo princípio de ação estacionária, tal termo tem que se anular pelo uso das equações clássicas do fundo. Restou apenas $\delta_2 S$ para ser tratada pelo formalismo.

No caso presente somos obrigados a tratar $S^{(0)}$ juntamente com $\delta_2 S$, uma vez que queremos quantizar também o fundo. Com relação aos termos de ordem um, estes podem novamente ser desprezados pela hipótese de que as perturbações tenham valor médio espacial nulo, ou seja

$$\int d^3x \sqrt{-g} h_{\mu\nu} = 0 \quad e \quad \int d^3x \sqrt{-g} \delta_1 \rho.$$

Na realidade em Universos de FLRW tal hipótese pode ser relaxada, exigindo-se que apenas as perturbações escalares ϕ , ψ e ξ tenham valor médio nulo. A razão para isto está no fato de que na ação de ordem um apenas estes termos estão presentes, já que a única forma de as quantidades w_{ij} , S_i , F_i e η_i aparecerem na ação $\delta_1 S$ seria através das divergências $S^i{}_{|i}$, $F^i{}_{|i}$, $\eta^i{}_{|i}$ e $w^{ij}{}_{|ij}$ e do traço $w^i{}_{i}$, sendo que todas essas quantidades são identicamente nulas por construção. Por outro lado a exigência de que ϕ , ψ e ξ tenham valor médio nulo pode sempre ser satisfeita, sem perda de generalidade. Suponhamos o elemento de linha perturbado²

$$ds^2 = N^2(t) \left(1 + 2\phi(\vec{x}, t) \right) dt^2 - a^2(t) \left(1 - 2\psi(\vec{x}, t) \right) \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.1)$$

Decomporemos ϕ e ψ em

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \bar{\phi}(t) + \phi^{(0)}(\vec{x}, t) \\ \psi(\vec{x}, t) &= \bar{\psi}(t) + \psi^{(0)}(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

onde $\bar{\phi}(t)$ e $\bar{\psi}(t)$ são os valores médios espaciais de $\phi(\vec{x}, t)$ e $\psi(\vec{x}, t)$, supostos não nulos, e $\phi^{(0)}(\vec{x}, t)$ e $\psi^{(0)}(\vec{x}, t)$ são obviamente campos de valor médio nulo. O elemento de linha perturbado será então

$$ds^2 = N^2(t) \left(1 + 2\bar{\phi}(t) + 2\phi^{(0)}(\vec{x}, t) \right) dt^2 - a^2(t) \left(1 - 2\bar{\psi}(t) - 2\psi^{(0)}(\vec{x}, t) \right) \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) &= N(t) \left(1 + 2\bar{\phi}(t) \right) \\ \tilde{a}(t) &= a(t) \left(1 - 2\bar{\psi}(t) \right) \\ \tilde{\phi}(\vec{x}, t) &= \phi^{(0)}(\vec{x}, t) \left(1 - 2\bar{\phi}(t) \right) \\ \tilde{\psi}(\vec{x}, t) &= \psi^{(0)}(\vec{x}, t) \left(1 - 2\bar{\psi}(t) \right) \end{aligned}$$

²Somente exibimos as perturbações escalares por simplicidade notacional

fica claro que as quantidades $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ possuem valor médio zero. Com essas definições, ds^2 se torna, omitindo os “~”

$$ds^2 = N^2(t) \left(1 + 2\phi(\vec{x}, t) \right) dt^2 - a^2(t) \left(1 - 2\psi(\vec{x}, t) \right) \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

exatamente a expressão (5.1), com a diferença que agora as perturbações possuem valor médio nulo. Vamos então admitir que tais redefinições tenham sido feitas de agora em diante. Assim, as quantidades ϕ e ψ podem sempre ser consideradas como de valor médio zero, sem perda de generalidade, e os termos proporcionais a elas em $\delta_1 S$ podem sempre ser anulados. Uma análise semelhante na densidade de energia mostra que também sempre podemos considerar a perturbação na densidade de energia $\delta\varepsilon$ como tendo valor médio nulo. Deliberadamente em nossa discussão não incluímos os modos escalares E e B . A razão para isso é que se verifica por cálculo explícito que essas quantidades só aparecem em $\delta_1 S$ através de seus laplacianos $B^i{}_i$ e $E^i{}_i$; e estes termos são redutíveis, via teorema de Gauss, a termos de superfície que se anulam identicamente pela hipótese de que as seções espaciais sejam topologicamente fechadas. Assim, todas as contribuições a $\delta_1 S$ foram anuladas. Tal parcela da ação pode então ser desprezada.

A ação total, incluindo os termos de ordem zero e dois será então, usando $S = \int dtL$,

$$\begin{aligned} L = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} - Na^3 \rho_0 V + \frac{Na}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon^k{}_{|k} \right. \\ & + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^i + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^i \left. \right) + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 \\ & + \frac{a\dot{a}^2}{6l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4} \epsilon^2 + 3A^i A_i + \frac{3}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) \\ & + \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon} \right) - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} - Na^3 \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i \right. \\ & \left. - \phi \chi^i{}_{|i} \right) - Na^3 p_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + \frac{1}{2} Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i \right. \\ & \left. + 2 \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) - \frac{1}{2} c_s^2 Na^3 (\rho_0 + p_0) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

que corresponde à equação (3.31) do capítulo 3, adicionada do termo de ordem zero.

Particularizando a discussão para o caso de um fluido perfeito ($p_0 = \lambda\rho_0$),

teremos que a hamiltoniana construída a partir desta lagrangiana é

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{Nl^2 P_a^2}{4aV} + Na^3 V \rho_0 + \frac{Nl^2 P_a^2}{aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} \phi^2 + \frac{1}{24} \epsilon \phi - \frac{1}{8} A^i A_i - \frac{1}{32} \epsilon^2 \right. \\
& + \left. \frac{5}{48} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) + \frac{NP_a}{6V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi A^i{}_{|i} + \epsilon^{ij}{}_{|j} A_i) + \frac{2Nl^2 P_a}{aV} \int d^3 x \pi^{ij} \epsilon_{ij} \\
& - \frac{Nl^2 P_a}{2a^2 V} \int d^3 x \epsilon \pi + \frac{NP_a}{12V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon A^i{}_{|i} + \frac{Nl^2 P_a}{a^2 V} \int d^3 x \pi \phi + \frac{6Nl^2}{a^3} \int d^3 x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{3l^2 N}{a^3} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{Na}{4l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i{}_{|i} A^j{}_{|j} - \frac{N}{a} \int d^3 x \pi A^i{}_{|i} + \frac{N}{2a^5 (\lambda + 1) \rho_0} \int d^3 x \frac{\pi^i{}_{\chi} \pi_{\chi}{}^i}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{N}{a} \int d^3 x \pi \chi^i{}_{\chi} A_i - \frac{Na}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{i|j} A_{|i|j} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} \right. \\
& - \left. \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^{li} \right) + Na^3 \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + Na^3 \lambda \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + \frac{1}{2} Na^3 \lambda (\lambda + 1) \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

O procedimento padrão para simplificar a lagrangiana (5.2) consiste, como visto no capítulo 3, em efetuar uma integral por partes, que produz o termo (3.33), e então usar a equação de fundo (3.6) para obter a lagrangiana (3.32). Como este procedimento não pode ser aplicado em nosso caso, devemos buscar uma outra forma de simplificar nossas expressões.

Como se sabe, a soma à ação de um termo de derivada temporal total pode ser encarada, numa linguagem de espaço de fase, como uma transformação canônica cujo gerador é o próprio termo de derivada total. Esse ponto nos leva a imaginar que o termo de derivada total (3.33) possa ser utilizado para obtermos uma transformação canônica que leve a hamiltoniana (5.3) em uma forma que corresponda à hamiltoniana gerada por (3.32) acrescida dos termos de ordem zero.

De fato, se escrevermos (3.33) como

$$\mathcal{G} = -\frac{a\tilde{P}_a}{12V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right),$$

onde usamos a expressão de \dot{a} em função da variável canônica P_a , teremos o seguinte gerador de uma transformação canônica infinitesimal

$$\mathcal{F}_1 = a\tilde{P}_a - \int d^3 x \pi^{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{a\tilde{P}_a}{12V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) \tag{5.4}$$

e a transformação propriamente dita será

$$\begin{aligned}
a &= \tilde{a} + \frac{\tilde{a}}{12V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^2 \right) \\
P_a &= \tilde{P}_a - \frac{\tilde{P}_a}{12V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^2 \right) \\
\pi^{ij} &= \tilde{\pi}^{ij} - \frac{\tilde{a} \tilde{P}_a}{6V} \left(\tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{2} \tilde{\epsilon} \gamma_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

que leva a hamiltoniana a assumir a forma

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{Nl^2 P_a^2}{4aV} + Na^3 V \rho_0 + \frac{Nl^2 P_a^2}{aV^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} \phi^2 + \frac{1}{8} \epsilon \phi - \frac{1}{8} A^i A_i \right) \\
&+ \frac{NP_a}{6V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} + \epsilon^{ij}{}_{|j} A_i \right) + \frac{Nl^2 P_a}{a^2 V} \int d^3x \pi \phi + \frac{6Nl^2}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
&- \frac{3l^2 N}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{Na}{4l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i{}_{|i} A^j{}_{|j} - \frac{N}{a} \int d^3x \pi A^i{}_{|i} + \frac{N}{2a^5 (\lambda + 1) \rho_0} \int d^3x \frac{\pi_\chi^i \pi_{\chi^i}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
&- \frac{N}{a} \int d^3x \pi \chi^i A_i - \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) \\
&- \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_i \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^{li} \Big) + Na^3 \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A^i A_i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) \\
&+ Na^3 \lambda \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + \frac{1}{2} Na^3 \lambda (\lambda + 1) \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

que é exatamente a hamiltoniana obtida de (3.32), somada dos termos de ordem zero.

Deve ser reforçado o ponto de que em momento algum na discussão acima se usou nenhuma equação de movimento da ordem zero. O fato de na construção de (5.4) termos nos inspirado na forma do termo de derivada total (3.33) que surge no procedimento padrão nada tem a ver com efetivamente usar as equações de fundo. De fato, poderíamos simplesmente propor o gerador \mathcal{F}_1 , sem justificá-lo por nenhum princípio, e a passagem de (5.3) para (5.6) seria igualmente feita, claramente sem depender das equações clássicas. Se optamos por apresentar a discussão sobre a origem deste gerador foi por considerarmos mais elegante e elucidativo que assim fosse feito.

Deve estar claro então que, independentemente da dinâmica dos graus de liberdade de ordem zero, a lagrangiana (3.32) é válida pois sempre podemos efetuar uma transformação de Legendre inversa a partir de (5.6) obtendo-a como lagrangiana.

A lagrangiana (3.32) é tradicionalmente mais simplificada ainda pelo uso da equação (3.5), que a leva a (3.34). No nosso caso, um resultado semelhante pode ser obtido pela redefinição da função lapso

$$N = \tilde{N} \left[1 + \frac{1}{2V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon \phi + \phi^2 - A^i A_i \right) \right]$$

que aplicada em (3.32), somada aos termos de ordem zero, a leva a assumir exatamente a forma (3.34), adicionada dos mesmos termos.

Note que tal redefinição não possui nenhum significado físico, uma vez que N é um multiplicador de Lagrange livre da teoria. Assim nós vemos que a lagrangiana (3.34) é fisicamente indistinguível da lagrangiana (3.32), independentemente da validade das equações de movimento clássicas da ordem zero.

Se agora decomposermos as perturbações em modos tensoriais, vetoriais e escalares, da mesma forma feita anteriormente, novamente a lagrangiana (3.34) se desacoplará em 3 setores independentes nas perturbações, além, naturalmente, dos termos de ordem zero.

No setor tensorial a lagrangiana será

$$L^{(T)} = L^T = \frac{a^3}{24l^2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{w}^{ij} \dot{w}_{ij} - \frac{Na}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl} \quad (5.7)$$

exatamente a obtida na abordagem padrão da teoria de perturbações cosmológicas, reobtida aqui sem a necessidade do uso das equações de ordem zero.

A hamiltoniana associada à lagrangiana (5.7) será [79]

$$H^T = \frac{6l^2N}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{Na}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl}$$

onde π^{ij} é o momento canonicamente associado a w_{ij} . Voltaremos a analisar essa hamiltoniana no momento oportuno. No prosseguimento de nossa discussão, não vamos analisar as perturbações vetoriais pois o tratamento utilizado no capítulo 3 para estas variáveis era totalmente independente das equações de movimento clássicas. Os resultados obtidos naquele caso permanecem então válidos.

Vejam agora o que acontece no setor escalar das perturbações. A lagrangiana aqui, adicionada aos termos de ordem zero³ será dada, após algumas integrais por partes, por

$$\begin{aligned} L^E = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} - Na^3 \rho_0 V + \frac{Na}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i) - \frac{2a^2}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) F^i{}_i \\ & - \frac{a^3}{Nl^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right)^2 - \frac{Na^3 \lambda (\lambda + 1) \rho_0}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\psi - E^i{}_i - \xi^i{}_i + \frac{1}{\lambda} \phi \right)^2 \\ & + \frac{Na^3 (\lambda + 1) \rho_0}{2\lambda} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 + \frac{1}{2} Na^3 (\lambda + 1) \rho_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^i + B^i \right) \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}_i + B_i \right) \end{aligned}$$

onde $F =: B - a\dot{E}/N$, como antes. Vamos definir a variável invariante de calibre

³Como nos termos de ordem 2 aparecem derivadas do fator de escala a , o momentum que lhe é canonicamente conjugado será modificado pela presença das perturbações escalares, sendo então obrigatório considerarmos as ordens zero e dois simultaneamente quando estamos falando das perturbações escalares.

$\xi^{(ic)} = \xi + E$. Em termos desta variável, a lagrangiana escalar se torna

$$\begin{aligned} L^E = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} - Na^3 \rho_0 V + \frac{Na}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i) - \frac{2a^2}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) F^i{}_i \\ & - \frac{Na^3 \lambda (\lambda + 1) \rho_0}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i{}_i + \frac{1}{\lambda} \phi \right)^2 + \frac{Na^3 (\lambda + 1) \rho_0}{2\lambda} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\ & + \frac{1}{2} Na^3 (\lambda + 1) \rho_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)}{}_i{}_i + F^i{}_i \right) \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)}{}_i{}_i + F^i{}_i \right) - \frac{a^3}{Nl^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right)^2. \end{aligned}$$

Como as perturbações escalares deslocam as partículas do fluido ao longo do vetor irrotacional ξ^{li} , podemos encarar a quantidade ξ^{li} como a velocidade, irrotacional, das partículas do fluido em relação às suas posições não perturbadas. O fato dessa velocidade ser irrotacional nos permite definir um potencial velocidade, que tomaremos como sendo

$$\varphi = \frac{\sqrt{6} l a^2 \sqrt{(\lambda + 1) \rho_0}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{a}{N} \dot{\xi}^{(ic)} + F \right) \quad (5.8)$$

de acordo com a literatura [34]. Com essa definição a lagrangiana assume a forma

$$\begin{aligned} L^E = & \frac{Na}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i) - \frac{2a^2}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) F^i{}_i - \frac{a^3}{Nl^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right)^2 \\ & - \frac{Na^3 (\lambda + 1) \rho_0}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[\lambda \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i{}_i \right)^2 + 2\phi \left(3\psi - \xi^{(ic)}{}_i{}_i \right) \right] + \frac{N\lambda}{12l^2 a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi^i \varphi_i \end{aligned}$$

e, por causa dessa mesma definição somos agora obrigados a utilizar o formalismo de Ostrogradski na construção da hamiltoniana.

Temos então como momenta

$$\begin{aligned} P_a = & -\frac{2\dot{a}aV}{Nl^2} - \frac{4a}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi F^i{}_i - \frac{2\dot{a}a}{Nl^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 - \frac{2a^2}{Nl^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\psi} \\ P_N = & 0 \\ P_\mu = & 0 \\ \pi_\phi = & 0 \\ \pi_F = & 0 \\ \pi_\varphi = & 0 \\ \pi_\psi = & -\frac{4a^2}{6l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} F^i{}_i - \frac{2a^3}{Nl^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\psi} - \frac{2a^2 \dot{a}}{Nl^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \end{aligned}$$

Note o aparecimento dos vínculos

$$\begin{aligned} \phi_1 = & P_N \\ \phi_2 = & \pi_F \\ \phi_3 = & \pi_\phi \\ \phi_7 = & \pi_\varphi \\ \phi_9 = & P_\mu \end{aligned}$$

A hamiltoniana já acrescida dos multiplicadores de Lagrange será

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{(\lambda+1)P_T}{2a^{3\lambda}V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[\lambda \left(3\psi - \xi^{(ic) i} \right)^2 + 2\phi \left(3\psi - \xi^{(ic) i} \right) \right] \right. \\
& + \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \int d^3x \phi \pi_\psi + \frac{1}{a} \int d^3x \pi_\xi \left(\frac{\sqrt{V} \sqrt{\lambda}}{\sqrt{6l} \sqrt{(\lambda+1)P_T}} a^{-\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \varphi - F \right) \\
& - \frac{a}{l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l^2}{2a^2 \gamma^{\frac{1}{2}}} \pi_\psi + \frac{1}{3} F^i{}_i \right)^2 + \frac{\lambda}{12l^2 a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi \varphi^i{}_i + \frac{a}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi - 2\phi) \psi^i{}_i \\
& \left. + \Lambda_N P_N + \Lambda_\mu P_\mu + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi + \int d^3x \Lambda_F \pi_F + \int d^3x \Lambda_\varphi \pi_\varphi \right\}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

A conservação dos vínculos primários da teoria leva aos seguintes vínculos secundários

$$\begin{aligned}
\phi_4 &= \frac{H}{N} =: H_0 \\
\phi_5 &= \frac{1}{a} \pi_\xi + \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l^2}{2a^2 \gamma^{\frac{1}{2}}} \pi_\psi + \frac{1}{3} F^i{}_i \right)^j{}_j \\
\phi_6 &= -\frac{(\lambda+1)P_T}{a^{3\lambda}V} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\psi - \xi^{(ic) i} \right) - \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \pi_\psi + \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i \\
\phi_8 &= \frac{1}{a} \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{6l} \sqrt{(\lambda+1)P_T}} a^{-\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \pi_\xi + \frac{\lambda}{6l^2 a} \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi^i{}_i.
\end{aligned}$$

A conservação de ϕ_5 e ϕ_8 leva à fixação dos multiplicadores de Lagrange Λ_F e Λ_φ (este último não nos será necessário)

$$a\Lambda_F = \psi - \phi + \frac{l^2 P_a}{aV} F.$$

As expressões obtidas das conservações dos vínculos ϕ_4 e ϕ_6 são idênticamente satisfeitas (este último produz, após uma simples manipulação algébrica, uma expressão que é proporcional ao termo de ordem zero da hamiltoniana e, nessa ordem de aproximação, esse termo é fracamente zero). Assim, não há o aparecimento de novos vínculos na teoria.

Como $\lambda_F = \dot{F}/N$ temos

$$\frac{a}{N} \dot{F} = \psi - \phi - \frac{2\dot{a}}{N} F.$$

Esta expressão, escrita em termos dos potenciais de Bardeen leva ao conhecido resultado [34, 62]

$$\Phi = \Psi.$$

Observamos também o fato de que os multiplicadores de Lagrange λ_N , λ_ϕ e λ_μ não foram determinados, apontando para a existência de liberdades de calibre no

setor das perturbações escalares e no fundo. De fato, nós sabemos que as variáveis utilizadas até esse momento não são invariantes de calibre, portanto a existência de multiplicadores de Lagrange não determinados já era esperada. De nossa discussão no capítulo 2 deve estar claro que a teoria em estudo apresenta vínculos de primeira e de segunda classe. Concretamente, calculando os parênteses de Poisson entre os vínculos obtemos

$$\begin{aligned}\{\phi_2, \phi_5\} &= -\frac{2a}{9l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta^i{}_i \\ \{\phi_7, \phi_8\} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{6l^2 a} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta^i{}_i \\ \{\phi_6, \phi_5\} &= \frac{2}{9l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta^i{}_i \delta^j{}_j \\ \{\phi_6, \phi_8\} &= \frac{\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{6l}\sqrt{V}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta^i{}_i\end{aligned}$$

sendo $\delta^i{}_i$ o laplaciano da delta de Dirac. E teríamos ϕ_1 , ϕ_3 , ϕ_9 e ϕ_4 como vínculos de primeira classe e ϕ_2 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 e ϕ_8 como vínculos de segunda classe. A existência de um número ímpar de vínculos de segunda classe é indicadora de que na realidade há alguma combinação linear destes vínculos que irá produzir pelo menos um novo vínculo de primeira classe. De fato, se definirmos o vínculo

$$\bar{\phi}_6 = \phi_6 + \frac{1}{a} \phi_2 + \frac{\sqrt{(\lambda+1)P_T} \sqrt{6l}}{\sqrt{\lambda} \sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \phi_7,$$

teremos que o seu parêntese de Poisson com todos os outros vínculos é fracamente zero, sendo o mesmo então de primeira classe. Em resumo os vínculos de primeira classe de nossa teoria são ϕ_1 , ϕ_3 , $\bar{\phi}_6$, ϕ_9 e ϕ_4 , e os de segunda classe são ϕ_2 , ϕ_5 , ϕ_7 e ϕ_8 .

No capítulo 2, em nossa análise de sistemas vinculados, havíamos mostrado que os vínculos primários e secundários de primeira classe são geradores de transformações de calibre da teoria. Na teoria ora desenvolvida, isso é verificado, pois pode-se mostrar por cálculo direto que o parêntese de Poisson do vínculo secundário de primeira classe $\bar{\phi}_6$ com as quantidades ψ , φ e F gera as transformações de calibre corretas para essas quantidades, enquanto o vínculo ϕ_3 gera a transformação de ϕ .

É interessante nesse ponto fazermos uma análise do número de graus de liberdade desta teoria. Em princípio, contando apenas os graus perturbativos escalares, teríamos um total de 10 variáveis canônicas (as 5 variáveis, ϕ , ψ , F , ξ e φ e seus respectivos momenta). No entanto temos 4 vínculos de segunda classe e 2 de primeira no setor das perturbações (ϕ_3 e ϕ_6). Como se sabe, cada vínculo de segunda classe reduz uma variável canônica da teoria, enquanto cada vínculo de primeira classe reduz 2 variáveis. Como resultado então nossa teoria deve poder ser escrita em termos de apenas uma variável perturbativa (e seu momentum). Naturalmente, tal variável deve ser invariante de calibre, para que a teoria como um todo tenha significado físico. Se denominarmos tal variável de v , a forma mais geral para uma

lagrangiana quadrática em v que não contenha termos com derivadas de v maiores que a primeira (condições satisfeitas para todas as variáveis perturbativas em nossas lagrangianas), será

$$L = \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[\alpha_1 \dot{v}^2 + \alpha_2 v^i v_i + \alpha_3 v^2 + \alpha_4 \dot{v} v \right]$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são funções das quantidades do fundo. O último termo pode ser eliminado por integração por partes, restando apenas os 3 primeiros. A hamiltoniana associada a uma tal lagrangiana é da forma

$$H = \int d^3x \left[\beta_1 \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \gamma^{\frac{1}{2}} (\beta_2 v^i v_i + \beta_3 v^2) \right] \quad (5.10)$$

onde β_1, β_2 e β_3 são novas funções do fundo. O processo padrão de tratamento de perturbações cosmológicas consegue, usando as equações clássicas do fundo, obter a forma acima com $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ (no calibre $N = a$). Vamos mostrar a partir de agora que o mesmo pode ser feito sem o uso de tais equações.

Começamos calculando os parênteses de Dirac dessa teoria.

$$\begin{aligned} \{\xi^{(ic) i}, \varphi\}^D &= - \frac{\sqrt{6l} \sqrt{V}}{\sqrt{\lambda} \sqrt{(\lambda+1)P_T} \gamma^{\frac{1}{2}}} a^{-\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \delta \\ \{P_a, \varphi\}^D &= \frac{1}{2a} (1-3\lambda) \varphi. \end{aligned}$$

Os outros parênteses que não estão relacionados aos acima por simetrias, ou são canônicos ou são irrelevantes para nossa discussão. Se agora definirmos as variáveis

$$\begin{aligned} \varphi_{(c)} &=: a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \varphi \\ \pi_{\varphi_{(c)}} &=: - \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{6l} \sqrt{V}} \gamma^{\frac{1}{2}} (3\psi - \xi^{(ic) i}) \\ \pi_{\psi_{(c)}} &= \pi_{\psi} - \frac{3 \sqrt{\lambda} \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{6l} \sqrt{V}} \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi_{(c)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

construídas de forma que seus parênteses de Dirac sejam canônicos, então teremos para a hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= N \left[- \frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{3l^2}{a^{3\lambda}} \int d^3x \frac{\pi_{\varphi_{(c)}}^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda}{12l^2 a^{(2-3\lambda)}} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi_{(c)} \varphi_{(c) i}^i \right. \\ &\quad - \frac{3\lambda(\lambda+1)P_T}{8a^3 V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \varphi_{(c)}^2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{l \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{a^3 \sqrt{V}} \int d^3x \varphi_{(c)} \pi_{\psi_{(c)}} \\ &\quad \left. + \frac{a}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \psi \psi^i_i \right] - N \int d^3x \phi \phi_6 + \Lambda_N P_N + \Lambda_{\mu} P^{\mu} + \int d^3x \Lambda_{\phi} \pi_{\phi} \end{aligned}$$

onde já estamos considerando os vínculos de segunda classe como identidades. O vínculo ϕ_6 em termos destas variáveis será

$$\phi_6 = -\frac{\sqrt{6}l\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{V}}a^{-3\lambda}\pi_{\varphi(c)} + \frac{l^2P_a}{2a^2V}\pi_{\psi(c)} + \frac{3\sqrt{\lambda}lP_a\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{6}a^2V^{\frac{3}{2}}}\gamma^{\frac{1}{2}}\varphi_{(c)} - \frac{2a}{3l^2}\gamma^{\frac{1}{2}}\psi^i{}_i.$$

Dos vínculos de segunda classe podemos obter a seguinte identidade

$$\frac{l^2}{2a^2\gamma^{\frac{1}{2}}}\pi_{\psi(c)} + \frac{1}{3}F^i{}_i = 0$$

Se agora fizermos uma transformação canônica tendo como gerador

$$F_1 = a\tilde{P}_a + \int d^3x \left[\frac{1}{\sqrt{6}l}a^{-\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\varphi_{(c)}\pi + \psi\tilde{\pi}_\psi + \frac{2\sqrt{V}\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{l^2\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}a^{\frac{3}{2}(1-\lambda)}\psi\pi - \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2}\alpha\varphi_{(c)}^2 \right] \quad (5.12)$$

cuja forma explícita é

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} \left[1 + \frac{2\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l^2\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \int d^3x \tilde{\psi}\pi + \frac{1}{2\tilde{a}}\frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{P}_a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{6}l\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{2-3\lambda}\tilde{\psi} \right)^2 \right] \\ P_a &= \tilde{P}_a - \frac{(1-3\lambda)}{2\sqrt{6}l}\tilde{a}^{-\frac{3}{2}(1-\lambda)} \int d^3x \left(\sqrt{6}l\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\nu - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{2-3\lambda}\tilde{\psi} \right)\pi \\ &\quad + \frac{3(1-\lambda)\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l^2\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \int d^3x \tilde{\psi}\pi - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{6}l\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\nu \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{2-3\lambda}\tilde{\psi} \right)^2 \\ \pi_{\varphi(c)} &= \frac{\tilde{a}^{-\frac{1}{2}(1-3\lambda)}}{\sqrt{6}l}\pi - \alpha\sqrt{6}l\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\gamma^{\frac{1}{2}}\nu + \frac{2\alpha\sqrt{6}\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{2-3\lambda}\gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi} \\ \varphi_{(c)} &= \sqrt{6}l\tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}\nu - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{2-3\lambda}\tilde{\psi} \\ \pi_{\psi(c)} &= \tilde{\pi}_\psi + \frac{2\sqrt{(\lambda+1)P_T}\sqrt{V}}{l^2\tilde{P}_a\sqrt{\lambda}}\tilde{a}^{\frac{3}{2}(1-\lambda)}\pi \end{aligned}$$

então a hamiltoniana será levada em

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda}{2a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i + \left[-\frac{9l^2 \lambda (\lambda + 1) P_T}{4V} a^{-(2+3\lambda)} \right. \right. \\
& + 18l^4 \alpha^2 a^{1-6\lambda} + 6l^2 a^{1-3\lambda} \left(\frac{l^2 P_a}{4aV} \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{l^2 P_a^2}{8a^2 V} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} - \frac{3\lambda P_T}{2a^{1+3\lambda}} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} \right) \left. \right] \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \\
& + \frac{2\sqrt{\lambda} \sqrt{V} \sqrt{(\lambda + 1) P_T}}{l^2 P_a} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi^i i - \frac{\sqrt{\lambda} 3l^2 \sqrt{(\lambda + 1) P_T}}{2\sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(5+3\lambda)} \int d^3 x v \pi_\psi \\
& + \int d^3 x \psi \left\{ \left[\frac{72\alpha^2 (\lambda + 1) P_T V}{P_a^2 \lambda} a^{4-9\lambda} + \frac{24(\lambda + 1) P_T V}{l^2 P_a^2 \lambda} a^{2(2-3\lambda)} \left(\frac{l^2 P_a}{4aV} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{l^2 P_a^2}{8a^2 V} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} - \frac{3\lambda P_T}{2a^{1+3\lambda}} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} \right) - \frac{9[(\lambda + 1) P_T]^2}{l^2 P_a^2} a^{1-6\lambda} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi \\
& + \left[-\frac{3(1-2\lambda) \sqrt{(\lambda + 1) P_T}}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} - \frac{6\sqrt{\lambda} \sqrt{V} \sqrt{(\lambda + 1) P_T} P_T}{l^2 P_a^2} a^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} \right. \\
& + \left. \frac{6\sqrt{V} [(\lambda + 1) P_T]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda}}{l^2 P_a^2} a^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} + \frac{12\alpha \sqrt{V} \sqrt{(\lambda + 1) P_T}}{P_a \sqrt{\lambda}} a^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} \right] \pi \\
& + \left[-\frac{72l^2 \alpha^2 \sqrt{(\lambda + 1) P_T} \sqrt{V}}{P_a \sqrt{\lambda}} a^{\frac{5}{2}(1-3\lambda)} + \frac{9\sqrt{\lambda} [(\lambda + 1) P_T]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V} P_a} a^{-\frac{1}{2}(1+9\lambda)} \right. \\
& - \left. \frac{24\sqrt{(\lambda + 1) P_T} \sqrt{V}}{P_a \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(5-9\lambda)} \left(\frac{l^2 P_a}{4aV} \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{l^2 P_a^2}{8a^2 V} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} - \frac{3\lambda P_T}{2a^{1+3\lambda}} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} \right) \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v \\
& + \left[\frac{a}{3l^2} - \frac{2(\lambda + 1) P_T V}{l^4 P_a^2} a^{2-3\lambda} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i i + \frac{3(\lambda + 1) P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} \pi_\psi \left. \right\} \\
& + \left[-\frac{6l^2 \alpha}{a^{3\lambda}} - \frac{3(\lambda + 1) P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} + \frac{(1-3\lambda) l^2 P_a}{4a^2 V} \right] \int d^3 x v \pi \left. \right\} \\
& - N \int d^3 x \phi \phi_6 + \int d^3 x \lambda_\phi \pi_\phi + \lambda_N P_N + \lambda_\mu P_\mu.
\end{aligned}$$

Nas expressões acima, α é uma função de a , P_a e P_T ainda indeterminada. Podemos então usá-la de forma a anular o termo em $v\pi$. Escolhendo α como

$$\alpha = -\frac{(\lambda + 1) P_T}{2l^2 \tilde{P}_a a} + \frac{(1-3\lambda) \tilde{P}_a}{24V} a^{-(2-3\lambda)}$$

a hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda}{2a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i + \left[\frac{9[(\lambda+1)P_T]^2}{2P_a^2} a^{-(1+6\lambda)} \right. \right. \\
& - \frac{9\lambda[(\lambda+1)P_T]P_T}{2P_a^2} a^{-(1+6\lambda)} + \frac{(-4+18\lambda-18\lambda^2)l^4 P_a^2}{64a^3 V^2} + \frac{6l^2(1+3\lambda^2)P_T}{16V} a^{-(2+3\lambda)} \left. \right] \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \\
& + \frac{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{l^2 P_a} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi^i i - \frac{\sqrt{\lambda} 3l^2 \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(5+3\lambda)} \int d^3 x v \pi_\psi \\
& + \int d^3 x \psi \left\{ \left[\frac{18[(\lambda+1)P_T]^3 V}{l^4 P_a^4 \lambda} a^{(2-9\lambda)} - \frac{18[(\lambda+1)P_T]^2 P_T V}{l^4 P_a^4} a^{(2-9\lambda)} - \frac{3[(\lambda+1)P_T]^2}{l^2 P_a^2 \lambda} a^{(1-6\lambda)} \right. \right. \\
& + \frac{(-2+9\lambda-9\lambda^2)[(\lambda+1)P_T]}{8\lambda V} a^{-3\lambda} + \frac{3(3+2\lambda+3\lambda^2)[(\lambda+1)P_T]P_T}{2l^2 P_a^2 \lambda} a^{(1-6\lambda)} \left. \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi \\
& + \left[\frac{(-2+3\lambda)\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} - \frac{6\lambda\sqrt{V}\sqrt{(\lambda+1)P_T}P_T}{l^2 P_a^2 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} \right] \pi \\
& + \left[-\frac{18[(\lambda+1)P_T]^{\frac{5}{2}}\sqrt{V}}{l^2 P_a^3 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(1-15\lambda)} + \frac{18\lambda[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}P_T\sqrt{V}}{l^2 P_a^3 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(1-15\lambda)} + \frac{3[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{V}P_a} a^{-\frac{1}{2}(1+9\lambda)} \right. \\
& + \frac{(2-9\lambda+9\lambda^2)l^2 P_a \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{8V^{\frac{3}{2}}\sqrt{\lambda}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} - \frac{3(3+2\lambda+3\lambda^2)\sqrt{(\lambda+1)P_T}P_T}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}P_a} a^{-\frac{1}{2}(1+9\lambda)} \left. \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v \\
& + \left. \left[\frac{a}{3l^2} - \frac{2(\lambda+1)P_T V}{l^4 P_a^2} a^{2-3\lambda} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i i + \frac{3(\lambda+1)P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} \pi_\psi \right\} \\
& - N \int d^3 x \phi \phi_6 + \int d^3 x \lambda_\phi \pi_\phi + \lambda_N P_N + \lambda_\mu P_\mu.
\end{aligned}$$

É trivial verificar que a variável v introduzida por esta transformação canônica corresponde exatamente ao potencial de Mukhanov-Sasaki [34].

Sob esta transformação canônica o vínculo ϕ_6 é levado a

$$\begin{aligned}
\phi_6 = & \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \pi_\psi + \left(-\frac{3[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{V}P_a} a^{-\frac{1}{2}(1+9\lambda)} + \frac{l^2(1+3\lambda)P_a\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{4V^{\frac{3}{2}}\sqrt{\lambda}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} v \\
& + \left(\frac{6[(\lambda+1)P_T]^2}{\lambda P_a^2 l^2} a^{(1-6\lambda)} - \frac{(1+3\lambda)(\lambda+1)P_T}{2l^2 V \lambda} a^{-3\lambda} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \psi - \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i i.
\end{aligned}$$

Não é difícil verificar com os elementos apresentados que a variável v é invariante de calibre (como esperado): os seus parênteses de Dirac (que são iguais aos parênteses de Poisson) com os vínculos de primeira classe são fracamente nulos. O mesmo no entanto não pode ser dito de seu momentum canônico π . Essa situação é indesejável pois se estamos interessados em obter uma hamiltoniana com a forma (5.10), o momentum associado a v tem que ser linear e homogêneo em \dot{v} , logo invariante de calibre.

Para obtermos uma variável que faça o papel de um momentum canônico a v e que seja invariante de calibre, efetuamos uma segunda transformação canônica no

setor escalar⁴, gerada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & a\tilde{P}_a + \int d^3x \left\{ \psi\tilde{\pi}_\psi + v\tilde{\pi} + \frac{2a^3V\gamma^{\frac{1}{2}}}{3l^4\tilde{P}_a} \psi\psi^i{}_i + \left[\frac{6\sqrt{V}[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{l^2\tilde{P}_a^2\sqrt{\lambda}} a^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} \right. \right. \\ & - \left. \frac{(1+3\lambda)\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}}v\psi + \left[-\frac{6V[(\lambda+1)P_T]^2}{l^4\tilde{P}_a^3\lambda} a^{3(1-2\lambda)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1+3\lambda)(\lambda+1)P_T}{2l^2\tilde{P}_a\lambda} a^{2-3\lambda} \right] \gamma^{\frac{1}{2}}\psi^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

cuja forma explícita será

$$\begin{aligned} a = & \tilde{a} \left\{ 1 + \frac{12\sqrt{V}[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{l^2\tilde{P}_a^3\sqrt{\lambda}} \tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}v\tilde{\psi} + \left[-\frac{18V[(\lambda+1)P_T]^2}{l^4\tilde{P}_a^4\lambda} \tilde{a}^{2-6\lambda} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1+3\lambda)(\lambda+1)P_T}{2l^2\tilde{P}_a^2\lambda} \tilde{a}^{1-3\lambda} \right] \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}\psi^2 + \frac{2\tilde{a}^2V}{3l^4\tilde{P}_a^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\tilde{\psi}^i{}_i \right\} \\ P_a = & \tilde{P}_a + \left[\frac{9(1-3\lambda)\sqrt{V}[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{l^2\tilde{P}_a^2\sqrt{\lambda}} \tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} - \frac{(1-9\lambda^2)\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{4\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} \tilde{a}^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \right] \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{v}\tilde{\psi} \\ & + \left[-\frac{18V(1-2\lambda)[(\lambda+1)P_T]^2}{l^4\tilde{P}_a^3\lambda} \tilde{a}^{2-6\lambda} + \frac{(2+3\lambda-9\lambda^2)(\lambda+1)P_T}{2l^2\tilde{P}_a\lambda} \tilde{a}^{1-3\lambda} \right] \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}^2 \\ & + \frac{2\tilde{a}^2V}{l^4\tilde{P}_a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\tilde{\psi}^i{}_i \\ \pi = & \tilde{\pi} + \left[\frac{6\sqrt{V}[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{l^2\tilde{P}_a^2\sqrt{\lambda}} \tilde{a}^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} - \frac{(1+3\lambda)\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} \tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi} \\ \pi_\psi = & \tilde{\pi}_\psi + \left[\frac{6\sqrt{V}[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}}}{l^2\tilde{P}_a^2\sqrt{\lambda}} \tilde{a}^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} - \frac{(1+3\lambda)\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} \tilde{a}^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{v} \\ & + \left[-\frac{12V[(\lambda+1)P_T]^2}{l^4\tilde{P}_a^3\lambda} \tilde{a}^{3(1-2\lambda)} + \frac{(1+3\lambda)(\lambda+1)P_T}{l^2\tilde{P}_a\lambda} \tilde{a}^{2-3\lambda} \right] \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi} \\ & + \frac{4\tilde{a}^3V}{3l^4\tilde{P}_a} \gamma^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}^i{}_i. \end{aligned}$$

E agora temos para os vínculos de primeira classe

$$\begin{aligned} P_N & \approx 0 \\ P_\mu & \approx 0 \\ \pi_\phi & \approx 0 \\ \phi_6 & = \frac{l^2P_a}{2a^2V}\pi_\psi \approx 0 \end{aligned}$$

e podemos redefinir ϕ_6 como

$$\phi_6 = \pi_\psi$$

⁴Na realidade essa transformação faz mais do que isso, como veremos ao quantizar a teoria.

Com isso a hamiltoniana será

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a} \int d^3x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda}{2a} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i - \frac{(1-3\lambda)l^2 P_T}{4V} a^{-(2+3\lambda)} v^2 \right\} \\
& + \int d^3x \left(-\frac{\sqrt{\lambda} 3l^2 \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V}} a^{-\frac{1}{2}(5+3\lambda)} v + \frac{3(\lambda+1)P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} \psi - \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \phi \right) \pi_\psi \\
& + H_0^{(0)} \int d^3x \left\{ -\frac{9(\lambda+1)P_T}{l^2 P_a^2} a^{1-3\lambda} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^2 + \frac{6\sqrt{V} \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{l^2 P_a^2 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \psi \pi \right. \\
& + \left[\frac{18[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}} \sqrt{V}}{l^2 P_a^3 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{1}{2}(1-9\lambda)} - \frac{3(1-3\lambda) \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V} \sqrt{\lambda} P_a} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi \\
& + \frac{2a^2 V}{l^4 P_a^2} \psi \psi^i \left. + \left[-\frac{9(1+2\lambda)(\lambda+1)P_T}{2P_a^2} a^{-(1+3\lambda)} + \frac{(2-9\lambda+9\lambda^2)l^2}{8Va^2} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \right\} \\
& + \int d^3x \phi \pi_\phi + \lambda_N P_N + \lambda_\mu P_\mu \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Vamos ainda fazer uma terceira transformação canônica cujo objetivo é eliminar o termo $P_T v^2$, o que vai trazer simplificações quando da quantização da teoria. O gerador dessa transformação será

$$\mathcal{F}_3 = a\tilde{P}_a + \frac{1}{a} \int d^3x v \tilde{\pi} - \frac{l^2 \tilde{P}_a}{4aV} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \tag{5.15}$$

e a forma explícita dela será

$$\begin{aligned}
a &= \tilde{a} + \frac{l^2 \tilde{a}}{4V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v}^2 \\
P_a &= \tilde{P}_a - \frac{1}{\tilde{a}} \int d^3x \tilde{v} \tilde{\pi} + \frac{l^2 \tilde{P}_a}{4V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v}^2 \\
\pi &= \frac{1}{\tilde{a}} \tilde{\pi} - \frac{l^2 \tilde{P}_a}{2V} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} \\
v &= a\tilde{v}.
\end{aligned}$$

Note que com essa transformação, o v que usamos não mais coincide com o v de Mukhanov-Sasaki.

Como consequência dessa transformação, a hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a^3} \int d^3x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} a\lambda \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \right. \\
& + \int d^3x \left\{ -\frac{\sqrt{\lambda} 3l^2 \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} v + \frac{3(\lambda+1)P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} \psi - \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \phi \right\} \pi_\psi \\
& + H_0^{(0)} \int d^3x \left\{ -\frac{9(\lambda+1)P_T}{l^2 P_a^2} a^{1-3\lambda} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^2 + \frac{6\sqrt{V} \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{l^2 P_a^2 \sqrt{\lambda}} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \psi \pi \right. \\
& + \left[\frac{18[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}} \sqrt{V}}{l^2 P_a^3 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} + \frac{(9\lambda-1) \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V} \sqrt{\lambda} P_a} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi \\
& + \left. \frac{2a^2 V}{l^4 P_a^2} \psi \psi^i{}_{,i} + \left[-\frac{9(1+2\lambda)(\lambda+1)P_T}{2P_a^2} a^{1-3\lambda} + \frac{9\lambda(\lambda-1)l^2}{8V} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \right\} \\
& + \int d^3x \lambda \phi \pi_\phi + \lambda_N P_N + \lambda_\mu P_\mu.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Assim, mostra-se sem grande dificuldade que (5.16) é exatamente igual a

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a^3} \int d^3x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + a\lambda \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i + H_0^{(0)} F^{(2)} \right\} \\
& + \int d^3x \left(F^{(1)} - \frac{N l^2 P_a}{4aV} \phi \right) \phi_6
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$ são termos de ordem 1 e 2 nas perturbações dados por

$$\begin{aligned}
F^{(1)} & = -\frac{N \sqrt{\lambda} 3l^2 \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} v + \frac{3N(\lambda+1)P_T}{P_a} a^{-(1+3\lambda)} \psi \\
F^{(2)} & = -\frac{9(\lambda+1)P_T}{l^2 P_a^2} a^{1-3\lambda} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^2 + \frac{6\sqrt{V} \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{l^2 P_a^2 \sqrt{\lambda}} a^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \psi \pi \\
& + \left[\frac{18[(\lambda+1)P_T]^{\frac{3}{2}} \sqrt{V}}{l^2 P_a^3 \sqrt{\lambda}} a^{\frac{3}{2}(1-3\lambda)} + \frac{9(\lambda-1) \sqrt{(\lambda+1)P_T}}{2\sqrt{V} \sqrt{\lambda} P_a} a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi \\
& + \frac{2a^2 V}{l^4 P_a^2} \psi \psi^i{}_{,i} + \left[-\frac{9(1+2\lambda)(\lambda+1)P_T}{2P_a^2} a^{1-3\lambda} + \frac{9\lambda(\lambda-1)l^2}{8V} \right] v^2
\end{aligned}$$

Se agora redefinirmos a função lapso como sendo

$$\tilde{N} = N \left(1 + \int d^3x F^{(2)} \right),$$

novamente uma redefinição de um multiplicador de Lagrange livre, sem consequências físicas, e redefinirmos ϕ como

$$\tilde{\phi} = \left(-\frac{Nl^2 P_a}{2a^2 V} \phi + F^{(1)} \right),$$

então a hamiltoniana (5.16) assume a sua forma mais simples

$$H = N \left(-\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} + \frac{1}{2a^3} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{a\lambda}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_{,i} \right) + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \tilde{\phi} \phi_6 + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi.$$

Alguns comentários são adequados nesse momento.

Um ponto que consideramos relevante é o de que a partir da definição de $\tilde{\phi}$, das inversas das transformações canônicas (5.13), (5.15), (5.12), das definições das variáveis canônicas (5.11) e da definição do potencial velocidade (5.8) pode-se mostrar que

$$\tilde{\phi} = \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \phi - \frac{3l^2}{2} N a (\lambda + 1) \epsilon_0 \left(\frac{a}{N} \dot{\xi} + B \right)$$

e como pelas equações de movimento clássicas das perturbações

$$\dot{\psi} = \tilde{\phi}$$

então obtemos

$$\dot{\psi} = \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \phi - \frac{3l^2}{2} N a (\lambda + 1) \epsilon_0 \left(\frac{a}{N} \dot{\xi} + B \right),$$

que equivale à equação 10.39 de [34] se impusermos o calibre $N = a$. Esta equação também foi obtida no capítulo 3, correspondendo à segunda das equações (3.36).

Aplicando as transformações canônicas ao vínculo ϕ_5 e usando que $\pi_\psi \approx 0$ vemos que o mesmo pode ser escrito, desprezando termos de ordem 3, como

$$\Phi^i{}_i = -\frac{3l^2}{2} \frac{\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} a^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} \left(\frac{\pi}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{l^2 P_a v}{2aV} \right)$$

e utilizando que $P_a = -2\dot{a}aV/Nl^2$, esta expressão é levada, após algumas manipulações algébricas simples a

$$\Phi^i{}_i = -\frac{3l^2}{2} \frac{\sqrt{(\lambda+1)P_T}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{V}} \frac{a^{\frac{1}{2}(1-3\lambda)}}{N} \left(\frac{v}{a} \right). \quad (5.18)$$

Esta equação se torna idêntica à equação 12.8 de [34] se usarmos as equações clássicas de movimento de ordem zero com o calibre $N = a$. Estamos agora em condições de quantizar a teoria.

5.3 Quantização

Quantizando a teoria, teremos que o estado do sistema será descrito por um funcional de onda $\chi(a, w_{ij}, v, \phi, \psi, T)$. Às quantidades canônicas $a, P_a, w_{ij}, \pi_{ij}, v, \pi, \phi, \pi_\phi, \psi, \pi_\psi, T$ e P_T associamos os operadores quânticos $\hat{a}, \hat{P}_a, \hat{w}_{ij}, \hat{\pi}_{ij}, \hat{v}, \hat{\pi}, \hat{\phi}, \hat{\pi}_\phi, \hat{\psi}, \hat{\pi}_\psi, \hat{T}$ e \hat{P}_T . A álgebra obedecida por estes operadores será obtida dos parênteses de Dirac (já que temos na teoria clássica vínculos de segunda classe). Como estes são canônicos, então as relações de comutação entre esses operadores serão as relações padrão da mecânica quântica, o que nos habilita a escolher para esses operadores uma “representação de posição” dada por

$$\begin{aligned}\hat{a} &= a \\ \hat{T} &= T \\ \hat{w}_{ij} &= w_{ij} \\ \hat{v} &= v \\ \hat{\psi} &= \psi \\ \hat{\phi} &= \phi \\ \hat{P}_a &= -i \frac{\partial}{\partial a} \\ \hat{P}_T &= -i \frac{\partial}{\partial T} \\ \hat{\pi}_{ij} &= -i \frac{\delta}{\delta w_{ij}} \\ \hat{\pi} &= -i \frac{\delta}{\delta v} \\ \hat{\pi}_\psi &= -i \frac{\delta}{\delta \psi} \\ \hat{\pi}_\phi &= -i \frac{\delta}{\delta \phi}.\end{aligned}$$

O funcional de onda χ deve ser anulado pelas versões operatoriais dos vínculos de primeira classe (os vínculos de segunda classe são encarados como identidades definidoras dos operadores $\hat{\pi}_F$ e \hat{F} e não nos serão necessários). A atuação dos vínculos $\hat{\pi}_\phi$ e $\hat{\pi}_\psi$ sobre o funcional de onda leva a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial \psi} &= 0\end{aligned}$$

e vemos então que o funcional de onda não depende de ψ nem de ϕ . Assim, estamos vendo a realização no domínio quântico do que já havíamos visto no caso clássico: a teoria (no setor escalar) é descrita por apenas uma variável, v . Vemos assim que o papel da transformação canônica (5.13), além de produzir um π invariante de

calibre é também o de eliminar a variável ψ dos graus de liberdade fisicamente relevantes. Isso já estava claro no caso clássico quando mostramos que a variável $\tilde{\phi}$, que era na realidade um multiplicador de Lagrange não determinado associado ao vínculo π_ψ , era igual a $\dot{\psi}$. Assim, efetivamente estávamos obtendo o resultado de que a teoria não determina ψ , que se torna então fisicamente irrelevante.

A atuação de todos os vínculos de primeira classe sobre o funcional de onda χ leva à conclusão que

$$H\chi = 0$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} & \frac{l^2}{4V} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial \chi}{\partial a} \right) - 6l^2 a^{3(\lambda-1)} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta^2 \chi}{\delta w_{ij} \delta w^{ij}} + \frac{a^{3\lambda+1}}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w_{ijkl} w^{ijkl} \chi \\ & - \frac{a^{3(\lambda-1)}}{2} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta^2 \chi}{\delta v^2} + \frac{a^{3\lambda+1} \lambda}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \chi = i \frac{\partial \chi}{\partial T}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

novamente uma equação de Schroedinger no tempo T , onde escolhemos o ordenamento dos termos de ordem zero conforme o tratamento do capítulo 4. Na expressão acima o setor vetorial foi desprezado por não apresentar dinâmica. Precisamos agora apenas resolver a equação de Schroedinger (5.19).

Tipicamente, o processo padrão de tratamento da quantização das perturbações em Universos de FLRW considera que, num dado limite, os graus de liberdade da ordem zero passam a ser descritos em boa aproximação pela mecânica clássica e, nesse limite obtemos um fator de escala, que é uma função do tempo. Essa função do tempo pode ser então substituída na equação de Schroedinger de ordem 2 para o funcional de onda das perturbações. Em um tratamento totalmente quântico, entretanto, tal abordagem não seria possível e seríamos obrigados a resolver a equação (5.19) considerando a como uma variável independente, e não como uma função do tempo. Claramente isso torna a tarefa de encontrar soluções para a equação (5.19) muito mais difícil.

No entanto, no contexto de uma interpretação ontológica da mecânica quântica (Bohm-de Broglie) nós temos uma trajetória $a(T)$ bem definida em todo tempo, mesmo no período em que o fundo é quântico, dada pela solução da equação (5.19) em ordem zero. Levando em consideração que estamos em efeito lidando com uma aproximação perturbativa, podemos lançar mão do ansatz

$$\chi(a, w_{ij}, v, T) = \chi^{(0)}(a, T) \chi^{(E)}(v, T) \chi^{(T)}(w_{ij}, T) \quad (5.20)$$

onde $\chi^{(0)}(a, T)$ é, por construção, solução dos termos de ordem zero da equação (5.19) (do tipo estudado no capítulo 4). A aplicação da interpretação de Bohm nos permite então obter uma trajetória $a(T)$, que pode ser substituída nos termos de ordem 2 da equação (5.19). Dessa forma, essa equação se desacopla em três

$$\frac{l^2}{4V} a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial \chi^{(0)}}{\partial a} \right) = i \frac{\partial \chi^{(0)}}{\partial T}$$

$$\begin{aligned}
& -6l^2 a^{3(\lambda-1)} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta^2 \chi^{(T)}}{\delta w_{ij} \delta w^{ij}} + \frac{a^{3\lambda+1}}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w_{ijk} w^{ijk} \chi^{(T)} = i \frac{\partial \chi^{(T)}}{\partial T} \\
& -\frac{a^{3(\lambda-1)}}{2} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta^2 \chi^{(E)}}{\delta v^2} + \frac{a^{3\lambda+1} \lambda}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \chi^{(E)} = i \frac{\partial \chi^{(E)}}{\partial T}.
\end{aligned}$$

Note que as 2 últimas equações são, funcionalmente, a mesma equação. Isso nos permite resolver tanto as perturbações tensoriais como as escalares de forma praticamente unificada.

Como, por construção, os termos $\partial \chi^{(T)}/\partial a$ e $\partial \chi^{(E)}/\partial a$ são identicamente nulos, a trajetória bohmiana $a(T)$ obtida corresponde exatamente à trajetória obtida no caso não perturbado. Isso nos leva à conclusão de que, dentro dos limites das aproximações envolvidas neste método, é possível encontrar-se soluções em teoria de perturbações em cosmologia quântica, sem o efeito de *back reaction*, um resultado novo comparado aos resultados conhecidos na literatura [35].

Um outro ansatz igualmente possível é

$$\chi(a, w_{ij}, v, T) = \chi^{(0)}(a, T) \tilde{\chi}[a, v, w_{ij}, T]$$

com

$$\tilde{\chi}[a, v, w_{ij}, T] = \chi_1[v, w_{ij}, T] \int da \varphi^{-2}(a, T) + \chi_2[v, w_{ij}, T].$$

Se escolhermos $\tilde{\chi}[a, v, w_{ij}, T] = \chi^{(E)}[a, v, T] \chi^{(T)}[a, w_{ij}, T]$, novamente a equação (5.19) pode se desacoplar nas mesmas 3 equações anteriormente obtidas. Entretanto, nesse caso, como os funcionais de onda das perturbações também dependem de a , está claro que as trajetórias bohmianas não serão exatamente as obtidas sem levar em conta as perturbações, ou seja, contrariamente ao ansatz anterior, este apresenta o efeito de *back reaction*. Este *back reaction* pode ser desprezado, em uma primeira aproximação, se assumirmos que as perturbações estão inicialmente em um estado de vácuo [35, 36] e que sua posterior evolução dinâmica não as retira de um regime perturbativo.

As soluções para $\chi^{(0)}(a, T)$ já foram abordadas no capítulo 4, sendo portanto já conhecidas. Na próxima seção, vamos abordar as equações para os funcionais de onda associados às perturbações.

5.4 Uso da interpretação de Bohm

De agora em diante vamos tratar indistintamente as perturbações tensoriais e escalares, distinguindo-as apenas quando necessário. Tomemos então a equação de Schroedinger

$$-\frac{a^{3(\lambda-1)}}{2} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta^2 \chi}{\delta w^2} + \frac{a^{3\lambda+1}}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^i w_i \chi = i \frac{\partial \chi}{\partial T}$$

onde w pode ser tensorial ($w \rightarrow w_{ij}\sqrt{12}$) ou escalar ($w \rightarrow v$)⁵. Através da reparametrização temporal

$$d\eta = a^{3\lambda-1}(T)dT$$

onde η representa o tempo conforme, essa equação de Schroedinger é levada a

$$-\frac{1}{2a^2} \int d^3x \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\delta^2 \chi}{\delta w^2} + \frac{a^2}{2} \int d^3x \gamma^{1/2} w^i w_i \chi = i \frac{\partial \chi}{\partial \eta}.$$

Antes de prosseguirmos, é prudente um breve comentário sobre notação. Até aqui temos adotado para as derivadas temporais o símbolo do ponto (\dot{a} , por exemplo). Essa derivada em efeito era tomada em relação ao tempo coordenado, qualquer que fosse a escolha feita para este último. Em particular, essa derivada poderia ser em relação ao tempo T ou em relação ao tempo conforme η , a distinção ficando clara pelo contexto. A partir de agora estaremos trabalhando simultaneamente com duas variáveis distintas de tempo, T e η . Para evitar-se confusão, adotaremos a notação do ponto para derivadas em relação a T ($\dot{a} = \partial a / \partial T$) enquanto as derivadas em relação a η serão identificadas por linha ($a' = \partial a / \partial \eta$).

Se agora efetuarmos a transformação unitária dependente do tempo

$$U = \exp\left\{i \left[\int d^3x \gamma^{1/2} \frac{a' w_{ij} w^{ij}}{2a} \right]\right\} \exp\left\{i \left[\int d^3x \left(\frac{w_{ij} \Pi^{ij} + \Pi^{ij} w_{ij}}{2} \right) \ln\left(\frac{\sqrt{12}}{a}\right) \right]\right\} \quad (5.21)$$

e levando em conta que sob uma transformação deste tipo a hamiltoniana se transforma como

$$\hat{H} = U \hat{H} U^{-1} + i \frac{\partial U}{\partial \eta} U^{-1}$$

teremos a nova equação de Schroedinger

$$i \frac{\partial \chi(w, \eta)}{\partial \eta} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\gamma^{1/2}} \frac{\delta^2}{\delta w^2} + \gamma^{1/2} \left[\frac{1}{2} w_k w^k - \frac{a''}{2a} w^2 \right] \right\} \chi(w, \eta).$$

Esta é exatamente a forma obtida no tratamento padrão, aqui re-obtida de forma totalmente independente da validade das equações clássicas da ordem zero. Observe que nosso resultado depende da existência de trajetórias $a(T)$, mas isso é totalmente diferente de depender da validade das equações clássicas para $a(T)$, as quais não precisaram ser especificadas. Concretamente a existência de uma função $a(T)$ bem definida é perfeitamente consistente com a quantização desse grau de liberdade, dentro da interpretação de Bohm-de Broglie.

Sob a transformação unitária (5.21) os operadores de campo são levados em

$$w \rightarrow w/a$$

$$\pi \rightarrow a\pi.$$

⁵No caso escalar há também um fator λ que multiplica o termos $w^i w_i$. Estamos omitindo este fator por simplicidade notacional.

Note que no caso específico das perturbações escalares reobtemos o potencial de Mukhanov-Sasaki como variável de quantização.

Se mudarmos para a visão de Heisenberg da mecânica quântica, obteremos que a equação de movimento para o operador w será

$$w'' - w^i{}_i - \frac{a''}{a}w = 0$$

e decompondo esse operador em modos normais⁶

$$\mu''_{(\vec{k})} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_{(\vec{k})} = 0 \quad (5.22)$$

teremos essencialmente a mesma equação obtida anteriormente, pelo procedimento de Mukhanov [34].

Assim, atingimos nosso objetivo: mostramos que as equações (5.22) podem ser consistentemente usadas independentemente da dinâmica do espaço-tempo de fundo. No máximo precisamos admitir que esse espaço-tempo existe ontologicamente, caso contrário somos obrigados a trabalhar com a equação (5.19).

A tarefa de cálculo do espectro de perturbações em Universos quânticos dominados por um fluido adiabático está agora bastante simplificada: precisamos apenas resolver a equação (5.22) usando-se para $a(T)$ a trajetória quântica em lugar da clássica.

Para a solução desta equação é necessário que se estipulem condições iniciais para o campo $\mu_{(\vec{k})}$. A nossa proposta nesse trabalho será a de utilizarmos um espectro de vácuo em $\eta \rightarrow -\infty$, como se faz usualmente. Entretanto, antes de calcularmos efetivamente os espectros de perturbações vamos analisar o caso de um universo dominado por um campo escalar.

5.5 Universos Dominados por Campo Escalar

Até aqui nossa análise tem se concentrado no caso de Universos dominados por um fluido perfeito. Vamos agora voltar nossa atenção para o caso em que o fluido dominante é um campo escalar. Para começar, vamos mostrar que podemos, sem perda de generalidade, desprezar os termos de primeira ordem nas perturbações do campo escalar quando estivermos expandindo a ação em uma série perturbativa, em Universos de FLRW.

Consideremos um campo escalar $\varphi(\vec{x}, t)$ constituído de um termo de fundo, $\varphi_0(t)$, e perturbação $\delta\varphi(\vec{x}, t)$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x}, t). \quad (5.23)$$

Essa perturbação pode sempre ser decomposta em

$$\delta\varphi(\vec{x}, t) = \langle \delta\varphi \rangle(t) + \delta\varphi^{(0)}(\vec{x}, t) \quad (5.24)$$

⁶No caso das perturbações tensoriais a decomposição será $w_{ij} = \sum_{\vec{k}} \mu_{(\vec{k})}(\eta) t_{ij}^{(\vec{k})} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ onde $t_{ij}^{(\vec{k})}$ é um tensor transverso e sem traço.

onde $\langle \delta\varphi \rangle (t)$ é o valor médio de $\delta\varphi(\vec{x}, t)$ sobre as seções espaciais, tomado como não nulo por hipótese.

$$\langle \delta\varphi \rangle (t) = \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi.$$

Claramente o valor médio de $\delta\varphi^{(0)}(\vec{x}, t)$ será zero. Através de (5.23) e (5.24) o campo escalar total passa a ser dado por

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \langle \delta\varphi \rangle (t) + \delta\varphi^{(0)}(\vec{x}, t) = \bar{\varphi}_0(t) + \delta\varphi^{(0)}(\vec{x}, t).$$

A última igualdade segue como definição de $\bar{\varphi}_0(t)$. Note que esta igualdade é, omitindo-se a barra, igual a (5.23), sendo, no entanto, o valor médio de $\delta\varphi(\vec{x}, t)$ identicamente nulo. Vamos de agora em diante admitir que as identificações acima tenham sido feitas em (5.23). Assim todo e qualquer termo da forma $\int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi$ será identicamente nulo, e poderemos desprezar os termos de primeira ordem em $\delta\varphi$ na expansão da ação.

Com esse entendimento, a lagrangiana total (ordens zero e dois) para perturbações em Universos dominados por um campo escalar será

$$\begin{aligned} L = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3 V}{2N} - \frac{Na^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} \right. \\ & + \frac{a}{N} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_{|i} \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_{|i} \epsilon^{li} \left. \right] \\ & + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 + \frac{a\dot{a}^2}{6l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (-9\phi^2 \\ & - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4}\epsilon^2 + 3A^i A_i + \frac{3}{2}\epsilon^{ij} \epsilon_{ij}) - \frac{2a\dot{a}}{3l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j}) \\ & + \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon}) - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi \\ & + \frac{1}{2} \epsilon) \delta\varphi + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi A^i{}_{|i} - \frac{Na^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi - \frac{1}{2} \epsilon) \delta\varphi \\ & + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{4N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (3\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon^2) \\ & + \frac{Na^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\phi^2 + \epsilon\phi - A^i A_i + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{4} \epsilon^2) \\ & + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta\varphi^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{li} \delta\varphi_{li}}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

A hamiltoniana associada a essa lagrangiana será

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 \mathcal{V} \mathcal{V}}{2} + \frac{l^2 P_a^2}{8aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 + \frac{l^2 P_a^2}{24aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon \phi \right. \\
& - \frac{l^2 P_a^2}{8aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i A_i + \frac{5l^2 P_a^2}{48aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{l^2 P_a^2}{32aV^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^2 \\
& + \frac{P_a}{6V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{P_\varphi^2}{4a^3V^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 - \epsilon \phi - A^i A_i - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) \\
& + \frac{P_\varphi}{a^3V} \int d^3 x \left(\phi + \frac{1}{2} \epsilon \right) \pi_\varphi - \frac{P_\varphi}{aV} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi A^i{}_{|i} + \frac{6l^2}{a^3} \int d^3 x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{3l^2}{a^3} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{l^2 P_a}{2a^2V} \int d^3 x \pi \epsilon - \frac{a}{4l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i{}_{|i} A^j{}_{|j} - \frac{1}{a} \int d^3 x \pi A^i{}_{|i} + \frac{l^2 P_a}{a^2V} \int d^3 x \pi \phi \\
& + \frac{2l^2 P_a}{a^2V} \int d^3 x \pi^{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2a^3} \int d^3 x \frac{\pi_\varphi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_i \epsilon^i + \frac{1}{4} \epsilon^i \epsilon_i \right] + \frac{a^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi - \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta \varphi \\
& - \frac{a^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 + \epsilon \phi - A^i A_i + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) + \frac{P_a}{12V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon A^i{}_{|i} \\
& \left. + \frac{a^3}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a^2} \delta \varphi^i \delta \varphi_i + \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta \varphi^2 \right) + \frac{P_a}{6V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i{}_{|i} \phi \right\}. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

No capítulo 3 havíamos mostrado o método conhecido na literatura para simplificar a lagrangiana (5.25), que através de uma integral por partes e do uso das equações de fundo (3.22) e (3.23) leva-a à seguinte forma

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3 V}{2N} - \frac{Na^3 \mathcal{V} \mathcal{V}}{2} + \frac{Na}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left[A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} \right. \\
& + \frac{a}{N} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_i \epsilon^i + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^i \left. \right] + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \\
& - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 - \frac{a \dot{a}^2}{2l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\phi^2 + \epsilon \phi - A^i A_i \right) - \frac{2a \dot{a}}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} + \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi + \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta \varphi + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi A^i{}_{|i} \\
& - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta \varphi + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{4N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\phi^2 + \epsilon \phi - A^i A_i \right) + \frac{Na^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 \right. \\
& \left. + \epsilon \phi - A^i A_i \right) + \frac{Na^3}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta \varphi^2}{N^2} - \frac{\delta \varphi^i \delta \varphi_i}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta \varphi^2 \right) - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

onde o termo de derivada total

$$\left[\frac{a^2 \dot{a}}{6l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi + \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta \varphi \right]$$

foi desprezado.

Sabendo que derivadas totais vão, no espaço de fase, gerar transformações canônicas, construímos o seguinte gerador dessas transformações

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a\tilde{P}_a + \varphi_0\tilde{P}_\varphi - \int d^3x \left(\tilde{\phi}\pi_\phi + \tilde{A}_i\pi_A^i + \tilde{\epsilon}_{ij}\pi^{ij} + \tilde{\delta}\varphi\pi_\varphi \right) \\ & - \frac{a\tilde{P}_a}{12V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}^{ij}\tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^2 \right) - \frac{\tilde{P}_\varphi}{V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\phi} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \tilde{\delta}\varphi \end{aligned}$$

sendo as transformações dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} + \frac{\tilde{a}}{12V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}^{ij}\tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^2 \right) \\ P_a &= \tilde{P}_a - \frac{\tilde{P}_a}{12V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}^{ij}\tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^2 \right) \\ \varphi_0 &= \tilde{\varphi}_0 + \frac{1}{V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\phi} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \tilde{\delta}\varphi \\ \pi_\phi &= \tilde{\pi}_\phi - \frac{\tilde{P}_\varphi}{V} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\delta}\varphi \\ \pi^{ij} &= \tilde{\pi}^{ij} - \frac{\tilde{a}\tilde{P}_a}{6V} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}\gamma^{ij} \right) - \frac{\tilde{P}_\varphi}{2V} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\delta}\varphi \gamma^{ij} \\ \pi_\varphi &= \tilde{\pi}_\varphi - \frac{\tilde{P}_\varphi}{V} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{\phi} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Sob essas transformações a hamiltoniana (5.26) é levada em

$$\begin{aligned} H = & N \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 \mathcal{V} \mathcal{V}}{2} + \frac{l^2 P_a^2}{8aV^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 + \frac{l^2 P_a^2}{8aV^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \epsilon \phi \right. \\ & - \frac{l^2 P_a^2}{8aV^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i A_i + \frac{P_a}{6V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i |_{|i} \phi + \frac{P_a}{6V} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} A_i \epsilon^{ij} |_j \\ & - \frac{P_\varphi^2}{4a^3V^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(3\phi^2 + \epsilon \phi - A^i A_i \right) + \frac{l^2 P_a}{a^2V} \int d^3x \pi \phi + \frac{3l^2 P_a}{a^3V} \int d^3x \pi \delta \varphi \\ & + \frac{P_\varphi}{2aV} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi A^i |_{|i} + \frac{6l^2}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{3l^2}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{4l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} A^i |_{|i} A^j |_j \\ & - \frac{1}{a} \int d^3x \pi A^i |_{|i} - \frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^3V^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi^2 - \frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^2V^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta \varphi + \frac{1}{2a^3} \int d^3x \frac{\pi_\varphi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{a}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} |_{|j} \epsilon_i^k |_{|k} \right. \\ & + \phi |_{|i} \epsilon^{ij} |_j - \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij} |_j - \phi |_{|i} \epsilon^i + \frac{1}{4} \epsilon^i \epsilon_i \left. \right) + a^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta \varphi - \frac{a^3 \mathcal{V}}{4} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi^2 \right. \\ & \left. + \epsilon \phi - A^i A_i \right) + \frac{a^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a^2} \delta \varphi^i \delta \varphi_{|i} + \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta \varphi^2 \right) \left. \right\} \quad (5.28) \end{aligned}$$

e pode-se verificar, por cálculo direto, que esta é a hamiltoniana associada à lagrangiana (5.27). Note que na passagem de (5.26) para (5.28) não fizemos uso das equações de movimento da ordem zero. Isso significa que a hamiltoniana (5.28) é correta independentemente da validade dessas equações. Essa conclusão se estende naturalmente à lagrangiana (5.27) que pode ser obtida de (5.28) por uma transformação de Legendre inversa.

Voltando ao capítulo 3, havíamos usado a equação (3.21) em (5.27) de forma a eliminar alguns termos, fazendo com que a lagrangiana assumisse a forma

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{l^2 N} + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3 V}{2N} - \frac{Na^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{Na}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(A^{ij} A_{[ij]} - \frac{1}{4} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{ijkl} \right. \\
& + \frac{a}{N} \dot{A}_i \epsilon^{ij}{}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ij}{}_{|j} - \phi_i \epsilon^{li} + \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon^{li} \left. \right) \\
& + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^i{}_j \epsilon_{ij} - \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^2 - \frac{a \dot{a}^2}{l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\
& - \frac{2a \dot{a}}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi A^i{}_{|i} - \frac{1}{2} A_i \epsilon^{ij}{}_{|j} \right) - \frac{a^2 \dot{a}}{3l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\epsilon} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon} A^i{}_{|i} \\
& + \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \right) \delta \varphi + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi A^i{}_{|i} - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta \varphi \\
& + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{2N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 + \frac{Na^3}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta \varphi^2}{N^2} - \frac{\delta \varphi^{li} \delta \varphi_{li}}{a^2} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta \varphi^2 \right). \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Essa mesma transformação pode ser obtida, sem o uso de equações de ordem zero, através da redefinição da função lapso

$$N = \tilde{N} \left[1 + \frac{1}{2V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} (\epsilon \phi + \phi^2 - A^i A_i) \right]. \quad (5.30)$$

Como já discutido, essa redefinição não possui significado físico. Dessa forma a lagrangiana (5.29) é fisicamente equivalente à lagrangiana (5.27), independentemente da dinâmica do fundo. Nesse ponto nós aplicamos em (5.29) a decomposição das perturbações em modos escalares, vetoriais e tensoriais, e a lagrangiana das perturbações se desacopla em 3 setores perturbativos. Nessa passagem, termos de divergência total são desprezados.

No setor tensorial temos

$$L^{(T)} = -\frac{Na}{24l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl} + \frac{a^3}{24l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ij} w_{ij}.$$

No setor vetorial temos

$$L^{(V)} = \frac{Na}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} S^{ij} S_{[ij]} - \frac{a^2}{6l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} S_{ij} F^{ij} + \frac{a^3}{12l^2 N} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} F^{ij} F_{ij}$$

e, através do uso da variável invariante de calibre

$$V_i = S_i - \frac{a}{N} \dot{F}_i$$

essa lagrangiana se simplifica para

$$\int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} V^{[i|j]} V_{[i|j]}.$$

No setor escalar, após algumas integrais por partes a lagrangiana passa a ser⁷

$$\begin{aligned} L^{(E)} = & \frac{Na}{6l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (2\psi^i \psi_i - 4\phi_i \psi^i) - \frac{a^3}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \dot{\psi}^2 - \frac{\dot{a}^2 a}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\ & - \frac{2a^2 \dot{a}}{l^2 N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \dot{\psi} + \frac{a^3 \dot{\phi}_0}{N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} (\dot{\phi} + 3\dot{\psi}) \delta\varphi - Na^3 \mathcal{V}_\varphi \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta\varphi \\ & + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{N^2} \delta\varphi^2 - \frac{1}{a^2} \delta\varphi^i \delta\varphi_i - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \right) + \frac{\dot{\phi}_0^2 a^3}{2N} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \\ & - \frac{2a^2}{3l^2} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \phi - \frac{3l^2 \dot{\phi}_0}{2} \delta\varphi \right) (B - \frac{a}{N} \dot{E})^i{}_i \end{aligned}$$

que corresponde àquela apresentada por Mukhanov *et. al.* [34], também apresentada nesta tese na equação (3.42).

As hamiltonianas associadas a essas lagrangianas serão apresentadas a seguir. No setor tensorial, a hamiltoniana será dada por

$$H^{(T)} = \frac{6l^2 N}{a^3} \int d^3x \frac{\pi^{ij} \pi_{ij}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{Na}{24l^2} \int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} w^{ijkl} w_{ijkl}$$

exatamente a mesma obtida no caso do fluido adiabático. Esse resultado já era esperado, uma vez que tanto as perturbações do campo escalar quanto as do fluido adiabático são desprovidas de componentes tensoriais. Assim, as perturbações nesse setor são devidas inteiramente ao próprio campo gravitacional, não distinguindo portanto entre diferentes fluidos.

No setor vetorial, na passagem da lagrangiana para a hamiltoniana aparece o vínculo

$$\pi_V^i \approx 0 \quad (5.31)$$

e a hamiltoniana é

$$\int d^3x \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} V_i V^{ij}{}_{|j} + \int d^3x \Lambda_i \pi^i.$$

A conservação do vínculo (5.31) dá origem ao vínculo secundário

$$V^{ij}{}_{|j} \approx 0. \quad (5.32)$$

A conservação deste vínculo determina o multiplicador de Lagrange Λ_i . Os vínculos neste setor são de segunda classe e, se descrevermos a dinâmica em termos de parênteses de Dirac (cuja forma explícita não nos é relevante), poderemos encarar esses vínculos como identidades e a hamiltoniana será então anulada.

$$H^{(V)} = 0.$$

⁷novamente definimos $F =: B - a\dot{E}/N$

Do vínculo (5.32) podemos ainda obter o conhecido resultado para perturbações vetoriais em Universos de FLRW dominados por campo escalar [62]

$$V^i = 0.$$

No setor escalar, como há na lagrangiana termos que envolvem \dot{a} e $\dot{\varphi}_0$, os momentos associados às quantidades a e φ_0 serão modificados por termos de ordem dois. Assim, a análise deve ser feita com a ordem zero simultaneamente. A hamiltoniana será

$$\begin{aligned} H = N & \left[-\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \int d^3 x \phi \pi_\psi - \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi^2 \right. \\ & + \frac{3l^2 P_\varphi}{2a^3 V} \int d^3 x \delta\varphi \pi_\psi - \frac{a^3}{l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l^2}{2a^3 \gamma^{\frac{1}{2}}} \pi_\psi + \frac{1}{3a} F^i{}_i \right)^2 + \frac{1}{2a^3} \int d^3 x \frac{\pi_\varphi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{a}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi^i \delta\varphi_i + \left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^3 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi^2 \\ & + \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^2 V^2} + a^3 \mathcal{V}_\varphi \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta\varphi - \frac{a}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i \right) \\ & \left. + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \Lambda_F \pi_F + \int d^3 x \Lambda_\phi \left(\pi_\phi - \frac{P_\varphi}{V} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi \right) \right] \end{aligned}$$

e na sua construção obtemos os vínculos primários

$$\begin{aligned} \phi_1 = P_N & \approx 0 \\ \phi_3 = \pi_\phi - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi & \approx 0 \\ \phi_2 = \pi_F & \approx 0. \end{aligned}$$

Com a intenção de simplificar a expressão do vínculo $\pi_\phi - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi \approx 0$ efetuamos a seguinte transformação canônica

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \tilde{\varphi}_0 - \frac{1}{V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\phi} \tilde{\delta\varphi} \\ \pi_\phi &= \tilde{\pi}_\phi + \frac{\tilde{P}_\varphi}{V} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\delta\varphi} \\ \pi_\varphi &= \tilde{\pi}_\varphi + \frac{\tilde{P}_\varphi}{V} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\phi} \end{aligned}$$

cujo gerador é

$$\mathcal{F} = \mathcal{I} - \frac{P_\varphi}{V} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\phi} \delta\varphi$$

sendo \mathcal{I} a transformação identidade. A hamiltoniana, após essa transformação é

dada por

$$\begin{aligned}
H = N & \left[-\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \int d^3 x \phi \pi_\psi + \frac{3l^2 P_\varphi}{2a^3 V} \int d^3 x \delta \varphi \pi_\psi \right. \\
& - \frac{a^3}{l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l^2}{2a^3 \gamma^{\frac{1}{2}}} \pi_\psi + \frac{1}{3a} F^i{}_i \right)^2 + \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^2 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \phi \delta \varphi \\
& - \frac{a}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} (\psi^i \psi_i - 2\phi^i \psi_i) + \frac{P_\varphi}{a^3 V} \int d^3 x \phi \pi_\varphi + \frac{1}{2a^3} \int d^3 x \frac{\pi_\varphi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \\
& \left. + \frac{a}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi^i \delta \varphi_i + \left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^3 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi^2 \right] \\
& + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \Lambda_F \pi_F + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi
\end{aligned}$$

A conservação dos vínculos primários leva aos vínculos secundários

$$\begin{aligned}
\phi_4 & = H/N =: H_0 \approx 0 \\
\phi_5 & = \frac{1}{3a} \pi_\psi + \frac{2a}{9l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} F^i{}_i \approx 0 \\
\phi_6 & = -\frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \pi_\psi - \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^2 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi + \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i - \frac{P_\varphi}{a^3 V} \pi_\varphi \approx 0.
\end{aligned}$$

A conservação do vínculo ϕ_5 fixa o multiplicador de Lagrange λ_F . A conservação do vínculo ϕ_4 é identicamente satisfeita. A conservação do vínculo ϕ_6 produz uma expressão que, após algumas manipulações algébricas simples é identicamente satisfeita, desprezando-se termos de ordem 3, por ser proporcional à hamiltoniana de ordem zero.

Dessa forma os vínculos da teoria são

$$\begin{aligned}
\phi_1 & = P_N \\
\phi_2 & = \pi_F \\
\phi_3 & = \pi_\phi \\
\phi_4 & = H \\
\phi_5 & = \frac{1}{3a} \pi_\psi + \frac{2a}{9l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} F^i{}_i \\
\phi_6 & = -\frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \pi_\psi - \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^2 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_\varphi}{2} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \delta \varphi + \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i - \frac{P_\varphi}{a^3 V} \pi_\varphi.
\end{aligned}$$

É trivial verificar que ϕ_1 , ϕ_3 e ϕ_4 apresentam parênteses de Poisson fracamente zero com todos os outros vínculos, sendo portanto de primeira classe. Os vínculos ϕ_2 , ϕ_5 e ϕ_6 apresentam parênteses de Poisson não nulos entre si. Como não pode haver um número ímpar de vínculos de segunda classe, definimos

$$\bar{\phi}_6 =: \phi_6 + \frac{1}{a} \phi_3$$

e resulta que esse vínculo é de primeira classe, sendo de segunda classe os vínculos ϕ_2 e ϕ_5 . Também nesse caso verifica-se que os vínculos secundários de primeira classe são geradores de transformações de calibre.

A contagem dos graus de liberdade perturbativos e dos vínculos mostra que essa teoria deve poder ser escrita em função de uma única variável invariante de calibre. Antes de prosseguirmos com a construção da hamiltoniana mais simples, comentamos que os parênteses de Dirac entre as variáveis dinâmicas do setor escalar e do fundo são idênticos aos de Poisson entre as mesmas variáveis, exceto os que envolvem as quantidades F e π_F . Assim podemos encarar os vínculos ϕ_5 e ϕ_2 como identidades e a hamiltoniana se reduz a

$$\begin{aligned} H = & N \left[-\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{3l^2 P_\varphi}{2a^3 V} \int d^3 x \delta\varphi \pi_\psi - \frac{a}{3l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i \psi_i \right. \\ & + \frac{1}{2a^3} \int d^3 x \frac{\pi_\varphi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi^i \delta\varphi_i + \left. \left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^3 V^2} + \frac{a^3 \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi^2 \right] \\ & + \Lambda_N P_N - N \int d^3 x \phi \phi_6 + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi. \end{aligned}$$

Vamos agora prosseguir com a obtenção de uma hamiltoniana mais simples para o setor escalar. Começamos efetuando a seguinte transformação canônica

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} - \frac{2P_\varphi}{l^2 P_a^2} \int d^3 x \tilde{\psi} \pi - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{P}_a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{a} + \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a} \psi \right)^2 \\ P_a &= \tilde{P}_a + \int d^3 x \left(\frac{\nu}{a} + \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a} \psi \right) \pi + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{a} + \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a} \psi \right)^2 \\ \varphi_0 &= \tilde{\varphi}_0 + \frac{2}{l^2 \tilde{P}_a} \int d^3 x \tilde{\psi} \pi - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial P_\varphi} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{a} + \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a} \psi \right)^2 \\ \pi_\varphi &= \tilde{a} \pi + \alpha \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi \\ \delta\varphi &= \frac{\nu}{a} + \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a} \psi \\ \pi_\psi &= \tilde{\pi}_\psi - \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a} \pi \end{aligned}$$

cujo gerador é

$$\mathcal{F}_1 = a\tilde{P}_a + \varphi_0 \tilde{P}_\varphi + \int d^3 x \left(a\pi \delta\varphi + \psi \tilde{\pi}_\psi - \frac{2\tilde{P}_\varphi}{l^2 P_a} \psi \pi + \frac{\alpha}{2} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta\varphi^2 \right).$$

Nessas expressões, α é uma função de a , P_a e P_φ ainda indeterminada. Note que a variável ν introduzida por essa transformação corresponde à variável de

Mukhanov-Sasaki [34]. Sob essa transformação a hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \right. \\
& + \left[\left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l^2 P_a^2}{4a^4 V} - \frac{3P_\varphi^2}{2a^6 V} + \frac{3V \mathcal{V}}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P_a} \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \frac{l^2 P_a}{2a^3 V} \frac{\partial \alpha}{\partial a} - \frac{aV \mathcal{V}_\varphi}{4} \frac{\partial \alpha}{\partial P_\varphi} + \frac{\alpha^2}{2a^5} \right] \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 + \frac{3l^2 P_\varphi}{2a^4 V} \int d^3 x v \pi_\psi \\
& + \left(\frac{\alpha}{a^3} - \frac{3P_\varphi^2}{a^4 P_a V} - \frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \right) \int d^3 x v \pi + \int d^3 x \psi \left\{ \frac{3P_\varphi^2}{a^4 P_a V} \pi_\psi \right. \\
& + \left[\frac{a}{3l^2} - \frac{2P_\varphi^2}{a l^4 P_a^2} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i + \left[\frac{4P_\varphi^2}{l^4 P_a^2} \left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) - \frac{P_\varphi^2}{l^2 a^3 P_a V} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right. \\
& - \left. \frac{2P_\varphi^2}{l^4 P_a^2} \left(\frac{l^2 P_a^2}{4a^4 V} - \frac{3P_\varphi^2}{2a^6 V} + \frac{3V \mathcal{V}}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P_a} - \frac{aV \mathcal{V}_\varphi P_\varphi^2}{l^4 P_a^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P_\varphi} + \frac{2\alpha^2 P_\varphi^2}{l^4 a^5 P_a^2} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} \psi \\
& + \left[-\frac{6P_\varphi^3}{l^2 a^4 P_a^2 V} - \frac{2a^2 P_\varphi}{l^2 P_a^2} \left(\frac{l^2 P_a^2}{4a^4 V} - \frac{3P_\varphi^2}{2a^6 V} + \frac{3V \mathcal{V}}{2} \right) - \frac{P_\varphi}{a^2 V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 P_a} + \frac{2\alpha P_\varphi}{l^2 a^3 P_a} \right] \pi \\
& + \left[\frac{4P_\varphi}{l^2 P_a} \left(-\frac{9l^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} \right) - \frac{2P_\varphi}{l^2 P_a} \left(\frac{l^2 P_a^2}{4a^4 V} - \frac{3P_\varphi^2}{2a^6 V} + \frac{3V \mathcal{V}}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P_a} - \frac{P_\varphi}{a^3 V} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right. \\
& - \left. \frac{aV \mathcal{V}_\varphi P_\varphi}{l^2 P_a} \frac{\partial \alpha}{\partial P_\varphi} + \frac{2\alpha^2 P_\varphi}{l^2 a^5 P_a} \right] \gamma^{\frac{1}{2}} v - \frac{2P_\varphi}{a l^2 P_a} \gamma^{\frac{1}{2}} v^i{}_i \left. \right\} + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi - \int d^3 x \phi \phi_6
\end{aligned}$$

e o vínculo ϕ_6 se torna

$$\begin{aligned}
\phi_6 = & -\frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \pi_\psi - \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^3 V^2} + \frac{a^2 \mathcal{V}_\varphi}{2} + \frac{\alpha P_\varphi}{a^4 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} v \\
& - \frac{2P_\varphi}{l^2 P_a} \left(-\frac{3l^2 P_a P_\varphi}{2a^3 V^2} + \frac{a^2 \mathcal{V}_\varphi}{2} + \frac{\alpha P_\varphi}{a^4 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \psi + \frac{2a}{3l^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i.
\end{aligned}$$

Agora podemos escolher α de forma que o termo proporcional a $v\pi$ na hamiltoniana se anule. Assim teremos

$$\alpha = \frac{3P_\varphi^2}{a P_a V} + \frac{l^2 a P_a}{2V}.$$

Considerando-se que os vínculos ϕ_3 e ϕ_6 são os geradores das transformações de calibre da teoria, deve estar claro que v é invariante por essas transformações, o mesmo não podendo ser dito de seu momentum π . Conforme já discutido, essa situação é indesejável e, para corrigí-la, efetuamos uma terceira transformação

canônica

$$\begin{aligned}
a &= \tilde{a} - \left(\frac{\tilde{a}^4 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a^2} + \frac{12 \tilde{P}_\varphi^3}{l^2 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^3 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} \tilde{\psi} - \left(-\frac{2 \tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{a} \tilde{P}_a^2 l^2 V} + \frac{2 \tilde{a}^4 \mathcal{V}_\varphi \tilde{P}_\varphi V}{l^4 \tilde{P}_a^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{18 \tilde{P}_\varphi^4}{\tilde{a}^3 \tilde{P}_a^4 l^4 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^2 + \frac{2 \tilde{a}^3 V}{3 l^4 \tilde{P}_a^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi} \tilde{\psi}^i \\
P_a &= \tilde{P}_a + \left(-\frac{2 \tilde{P}_\varphi}{\tilde{a}^2 V} - \frac{4 \tilde{a}^3 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a} + \frac{18 \tilde{P}_\varphi^3}{l^2 \tilde{a}^4 \tilde{P}_a^2 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} \tilde{\psi} + \left(-\frac{2 \tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{a}^2 \tilde{P}_a l^2 V} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4 \tilde{a}^3 \mathcal{V}_\varphi \tilde{P}_\varphi V}{l^4 \tilde{P}_a^2} + \frac{18 \tilde{P}_\varphi^4}{\tilde{a}^4 \tilde{P}_a^3 l^4 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^2 + \frac{2 \tilde{a}^2 V}{l^4 \tilde{P}_a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi} \tilde{\psi}^i \\
\varphi_0 &= \tilde{\varphi}_0 - \left(\frac{2}{\tilde{a} V} - \frac{18 \tilde{P}_\varphi^2}{l^2 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^2 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} \tilde{\psi} - \left(\frac{4 \tilde{P}_\varphi}{\tilde{a} \tilde{P}_a l^2 V} - \frac{\tilde{a}^4 \mathcal{V}_\varphi V}{l^4 \tilde{P}_a^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{24 \tilde{P}_\varphi^3}{\tilde{a}^3 \tilde{P}_a^3 l^4 V} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^2 \\
P_\varphi &= \tilde{P}_\varphi - \frac{\tilde{a}^4 \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{l^2 \tilde{P}_a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} \tilde{\psi} - \frac{\tilde{a}^4 \tilde{P}_\varphi V \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{l^4 \tilde{P}_a^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^2 \\
\pi &= \tilde{\pi} + \left(\frac{2 \tilde{P}_\varphi}{\tilde{a} V} - \frac{\tilde{a}^4 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a} - \frac{6 \tilde{P}_\varphi^3}{l^2 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^2 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi} \\
\pi_\psi &= \tilde{\pi}_\psi + \left(\frac{2 \tilde{P}_\varphi}{\tilde{a} V} - \frac{\tilde{a}^4 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a} - \frac{6 \tilde{P}_\varphi^3}{l^2 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^2 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{v} + 2 \left(\frac{2 \tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{a} \tilde{P}_a l^2 V} - \frac{\tilde{a}^4 \mathcal{V}_\varphi \tilde{P}_\varphi V}{l^4 \tilde{P}_a^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{6 \tilde{P}_\varphi^4}{\tilde{a}^3 \tilde{P}_a^3 l^4 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi} + \frac{4 \tilde{a}^3 V}{3 l^4 \tilde{P}_a} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^i
\end{aligned}$$

gerada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= a \tilde{P}_a + \varphi_0 \tilde{P}_\varphi + \int d^3 x \left[\psi \tilde{\pi}_\psi + v \tilde{\pi} + \left(\frac{2 \tilde{P}_\varphi}{\tilde{a} V} - \frac{\tilde{a}^4 V \mathcal{V}_\varphi}{l^2 \tilde{P}_a} - \frac{6 \tilde{P}_\varphi^3}{l^2 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^2 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} v \psi \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2 \tilde{P}_\varphi^2}{l^2 \tilde{a} \tilde{P}_a V} - \frac{\tilde{a}^4 V \mathcal{V}_\varphi \tilde{P}_\varphi}{l^4 \tilde{P}_a^2} - \frac{6 \tilde{P}_\varphi^4}{l^4 \tilde{a}^3 \tilde{P}_a^3 V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^2 + \frac{2 \tilde{a}^3 V}{3 l^4 \tilde{P}_a} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi \psi^i \right].
\end{aligned}$$

Sob essa transformação o vínculo ϕ_6 é levado em

$$\phi_6 = -\frac{l^2 P_a}{2 a^2 V} \pi_\psi$$

e podemos redefiní-lo como

$$\tilde{\phi}_6 = \pi_\psi$$

e a hamiltoniana assume a forma

$$\begin{aligned}
H = N & \left\{ -\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \right. \\
& + \left(\frac{15l^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} - \frac{3l^2 \mathcal{V} a}{8} + \frac{9 \mathcal{V} P_\varphi^2}{4a P_a^2} - \frac{l^4 P_a^2}{16a^3 V^2} - \frac{27 P_\varphi^4}{4a^7 V^2 P_a^2} - \frac{3 P_\varphi \mathcal{V}_{\varphi}}{P_a} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \\
& + H_0^{(0)} \int d^3 x \psi \left[-\frac{6 P_\varphi}{l^2 a P_a^2} \pi + \frac{2a^2 V}{l^4 P_a^2} \gamma^{\frac{1}{2}} \psi^i{}_i - \frac{9 P_\varphi^2 \gamma^{\frac{1}{2}} \psi}{l^2 P_a^2 a^2 V} - \left(\frac{3a^3 V \mathcal{V}_{\varphi}}{l^2 P_a^2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{18 P_\varphi^3}{l^2 a^4 P_a^3 V} + \frac{3 P_\varphi}{a^2 P_a V} \right) \gamma^{\frac{1}{2}} v \right] + \int d^3 x \left(-\frac{l^2 P_a}{2a^2 V} \phi + \frac{3 P_\varphi^2}{a^4 P_a V} \psi + \frac{3l^2 P_\varphi}{2a^4 V} v \right) \tilde{\phi}_6 \Big\} \\
& + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Da mesma forma que no caso do fluido perfeito, a hamiltoniana acima pode ser simplificada por uma redefinição de N que leve em conta os termos de ordem 2 proporcionais a $H_0^{(0)}$ e por uma redefinição de ϕ . A forma final será então

$$\begin{aligned}
H = N & \left[-\frac{l^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3V} + \frac{a^3 V \mathcal{V}}{2} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \right. \\
& + \left. \left(\frac{15l^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} - \frac{3l^2 \mathcal{V} a}{8} + \frac{9 \mathcal{V} P_\varphi^2}{4a P_a^2} - \frac{l^4 P_a^2}{16a^3 V^2} - \frac{27 P_\varphi^4}{4a^7 V^2 P_a^2} - \frac{3 P_\varphi \mathcal{V}_{\varphi}}{P_a} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \right] \\
& + \int d^3 x \tilde{\phi} \tilde{\phi}_6 + \Lambda_N P_N + \int d^3 x \Lambda_\phi \pi_\phi
\end{aligned}$$

e se usarmos as equações clássicas de movimento poderemos mostrar que o coeficiente do termo em v^2 é exatamente igual a $-z''/2z$ no calibre $N = a$, com $z = a^2 \dot{\varphi}_0 / \dot{a}$ correspondendo então à equação (3.43).

A quantização da teoria segue agora as mesmas linhas da quantização de qualquer teoria de calibre. Impomos que o funcional de onda seja aniquilado pelas versões operatoriais dos vínculos de primeira classe. Isso nos leva como antes à conclusão de que esse funcional não depende de ϕ nem de ψ e obedece à seguinte equação

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{l^2 P_a^2}{4V} + \frac{P_\varphi^2}{2a^2 V} + \frac{a^4 V \mathcal{V}}{2} + \frac{1}{2} \int d^3 x \frac{\pi^2}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^i v_i \right. \\
& + \left. \left(\frac{15l^2 P_\varphi^2}{4a^4 V^2} + \frac{a^2 \mathcal{V}_{\varphi\varphi}}{4} - \frac{3l^2 \mathcal{V} a^2}{8} + \frac{9 \mathcal{V} P_\varphi^2}{4a^2 P_a^2} - \frac{l^4 P_a^2}{16a^2 V^2} - \frac{27 P_\varphi^4}{4a^6 V^2 P_a^2} - \frac{3a P_\varphi \mathcal{V}_{\varphi}}{P_a} \right) \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} v^2 \right. \\
& + \left. \frac{6l^2}{a^2} \int \frac{d^3 x}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \pi^{ij} \pi_{ij} + \frac{a^2}{24l^2} \int d^3 x \gamma^{\frac{1}{2}} w_{ijkl} w^{ijkl} \right] \chi = 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Em princípio poderíamos resolver essa equação impondo um ansatz do tipo imposto em (5.20) (apenas trocando a dependência em a e T por uma em a e φ_0 e supondo que as funções de onda perturbativas não dependem de φ_0), o que levaria à separação da equação de Schroedinger em 3, e escolhendo uma variável arbitrária para parametrizar a evolução das trajetórias bohmianas (nesse caso apenas se obtém soluções implícitas $a(\varphi_0)$ [14]). No entanto o tratamento deste caso está fora do escopo deste trabalho.

Capítulo 6

Comparação com as Observações

Vamos, neste capítulo, analisar o espectro de perturbações gerado pelo modelo de fundo discutido no capítulo 4 utilizando-nos do formalismo desenvolvido no capítulo 5 e compará-lo com os dados observacionais.

6.1 Método Utilizando Condições de Junção

No modelo apresentado no capítulo 4, como visto, as trajetórias bohmianas para o fator de escala são dadas por

$$a(T) = a_0 \left(1 + \frac{T^2}{T_0^2} \right)^{\frac{1}{3(1-\lambda)}}. \quad (6.1)$$

Precisamos então calcular o potencial $-a''/a$ a que os modos perturbativos estão sujeitos.

$$a' = \frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dT} \frac{dT}{d\eta} = a^{1-3\lambda} \dot{a}$$
$$a'' = \frac{da'}{d\eta} = a^{1-3\lambda} \frac{d}{dT} (a^{1-3\lambda} \dot{a}) = (1-3\lambda) a^{1-6\lambda} \dot{a}^2 + a^{2-6\lambda} \ddot{a}.$$

Daí tiramos

$$V = \frac{a''}{a} = a^{2-6\lambda} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + (1-3\lambda) \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right].$$

Substituindo (6.1) vem

$$V = \frac{2a_0^{2(1-3\lambda)}}{3(1-\lambda)T_0^2} \frac{\left[1 + \frac{1-3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{T^2}{T_0^2} \right]}{\left(1 + \frac{T^2}{T_0^2} \right)^{\frac{4}{3(1-\lambda)}}}. \quad (6.2)$$

Na figura 6.1 apresentamos o comportamento desse potencial para alguns valores de λ .

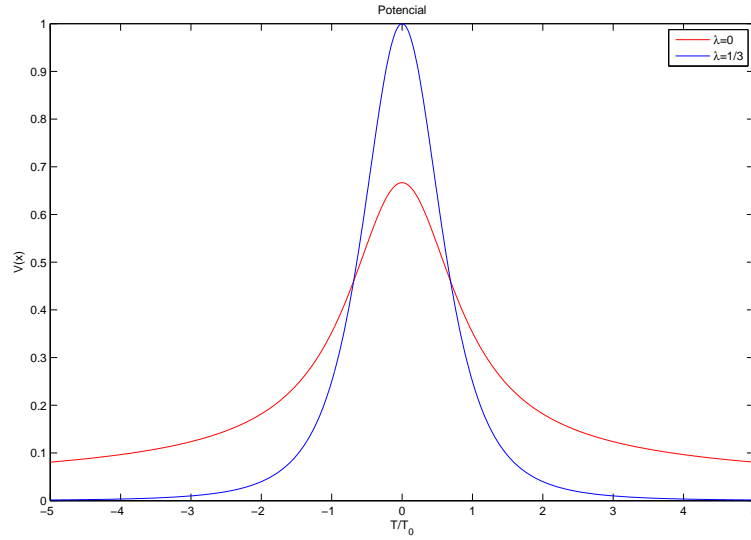


Figura 6.1: Potencial (6.2) $\lambda = 0$ e $\lambda = 1/3$. Os gráficos acima correspondem a $a_0 = 1$ e $T_0 = 1$.

Para resolver a equação de movimento para os modos (5.22) precisamos escolher condições iniciais, dadas em $T \rightarrow -\infty$ (ou equivalentemente, $\eta \rightarrow -\infty$). Por outro lado, as medidas desses espectros são realizadas hoje em dia, em um tempo T muito maior que o tempo característico T_0 do *bounce*, de forma que podemos, para efeito de cálculo, determinar os espectros em $|T| \rightarrow \infty$ ($|\eta| \rightarrow \infty$). Assim, é conveniente que estudemos o potencial $V(\eta)$ e as soluções $\mu(\eta)$ ¹ nos limites $\eta \rightarrow \pm\infty$, utilizando então o método de junção na época de início de domínio do potencial V .

O potencial V , para $\left|\frac{T}{T_0}\right| \gg 1$, pode ser aproximado, nos casos $\lambda \neq \frac{1}{3}$, por

$$V_\infty = \frac{2(1-3\lambda)a_0^{2(1-3\lambda)}}{9(1-\lambda)^2 T_0^2} \frac{T}{T_0}^{-\frac{2(1+3\lambda)}{3(1-\lambda)}}. \quad (6.3)$$

O fator de escala nesse limite é dado por

$$a_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3(1-\lambda)}}$$

de forma que o tempo conforme η está relacionado a T por

$$d\eta = a^{3\lambda-1} dT = a_0^{3\lambda-1} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2(3\lambda-1)}{3(1-\lambda)}} dT,$$

¹Estamos omitindo o subscripto (\vec{k}) por simplicidade notacional.

que leva a

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)}} = \frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \eta, \quad (6.4)$$

onde escolhemos $\eta = 0$ para $T = 0$. A substituição de (6.4) em (6.3) dá finalmente para o potencial longe do *bounce*

$$V_\infty = \frac{2(1-3\lambda)}{(1+3\lambda)^2} \frac{1}{\eta^2}. \quad (6.5)$$

Com isso a equação de movimento para as perturbações será²

$$\mu'' + \left[k^2 - \frac{2(1-3\lambda)}{(1+3\lambda)^2} \frac{1}{\eta^2} \right] \mu = 0,$$

cuja solução é

$$\mu = \sqrt{\eta} \left[A_1(k) h_n^{(1)}(k\eta) + A_2(k) h_n^{(2)}(k\eta) \right] \quad (6.6)$$

com $h_n^{(1)}(k\eta)$ e $h_n^{(2)}(k\eta)$ sendo as funções de Hankel de primeiro e segundo tipos, respectivamente, e $n = \frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}$.

Note que em princípio a solução acima não se aplica no caso $\lambda = \frac{1}{3}$. No entanto, nesse caso, como a é proporcional a T , o potencial a''/a é nulo, exatamente o resultado obtido pela expressão (6.5). Então vemos que, por continuidade do potencial em λ , a solução (6.6) também vale para $\lambda = \frac{1}{3}$.

As funções de Hankel têm um comportamento assintótico do tipo

$$h_n^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} A(n)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} B(n),$$

onde A e B são constantes.

Assim, para $\eta \rightarrow -\infty$, a solução (6.6) pode ser ainda mais aproximada por

$$\mu = \frac{\tilde{A}_1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta} + \frac{\tilde{A}_2}{\sqrt{k}} e^{-ik\eta} \quad (6.7)$$

e, impondo como condição inicial o estado de vácuo, de forma que o valor esperado do operador μ seja

$$\mu \propto \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ik\eta}$$

obtemos

$$\tilde{A}_2 \propto \text{constante} \quad \tilde{A}_1 = 0$$

²Para perturbações escalares há o fator λ que multiplica o termo em k^2 . Esse fator pode ser reabsorvido por uma redefinição de k .

que implica, via (6.7), que para tempos muito anteriores ao *bounce*

$$\mu = A_2 \sqrt{\bar{\eta}} h_n^{(2)}(k\eta) \quad (6.8)$$

Usando-se a fórmula de recorrência para funções de Hankel

$$\frac{d}{dx} h_n^{(i)}(x) = \frac{1}{2} h_{n-1}^{(i)}(x) - \frac{1}{2} h_{n+1}^{(i)}(x)$$

obtemos

$$\frac{d}{d\eta} \mu = \frac{A_2}{2\sqrt{\bar{\eta}}} h_n^{(2)}(k\eta) + \frac{kA_2 \sqrt{\bar{\eta}}}{2} h_{n-1}^{(2)}(k\eta) - \frac{kA_2 \sqrt{\bar{\eta}}}{2} h_{n+1}^{(2)}(k\eta). \quad (6.9)$$

A solução acima, como dito, vale para $\eta \rightarrow -\infty$. Há uma solução formal para a equação de movimento (5.22) dada por [75, 80]

$$\frac{\mu}{a} = C_1(k) + C_2(k) \int^\eta d\bar{\eta} \frac{1}{a^2(\bar{\eta})} - k^2 \int^\eta d\bar{\eta} \left[\frac{1}{a^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} (a\mu) \right]. \quad (6.10)$$

Essa solução pode, por iteração, ser escrita como uma série em k^2

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{a} = & C_1 \left[1 - k^2 \int^\eta d\bar{\eta} \frac{1}{a^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} a^2(\bar{\eta}) \right] + C_2 \left[\int^\eta d\bar{\eta} \frac{1}{a^2(\bar{\eta})} \right. \\ & \left. - k^2 \int^\eta d\bar{\eta} \frac{1}{a^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} a^2(\bar{\eta}) \int^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} \frac{1}{a^2(\bar{\eta})} \right] + O(k^4). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para k suficientemente pequeno, podemos desprezar os termos em ordem k^2 ou superior, e, para a trajetória (6.1) temos

$$\frac{\mu}{a} = C_1(k) + C_2(k) a_0^{3(\lambda-1)} T_0 \arctan\left(\frac{T}{T_0}\right).$$

Essa solução vale para todo T , desde que k seja suficientemente pequeno. Para $T \rightarrow -\infty$ essa solução pode ser aproximada por

$$\frac{\mu}{a} = C_1 - C_2 a_0^{3(\lambda-1)} T_0 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{T_0}{T} \right)$$

que leva a

$$\mu = \tilde{C}_1 \left[\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \eta \right]^{\frac{2}{1+3\lambda}} + \tilde{C}_2 \left[\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \eta \right]^{\frac{-1+3\lambda}{1+3\lambda}} \quad (6.12)$$

e a

$$\frac{d\mu}{d\eta} = \frac{2\tilde{C}_1}{1+3\lambda} \left[\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \right]^{\frac{2}{1+3\lambda}} \eta^{\frac{1-3\lambda}{1+3\lambda}} + \frac{(-1+3\lambda)}{1+3\lambda} \tilde{C}_2 \left[\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \right]^{\frac{-1+3\lambda}{1+3\lambda}} \eta^{\frac{-2}{1+3\lambda}} \quad (6.13)$$

com $\tilde{C}_1 = C_1 a_0 - \frac{C_2 a_0^{3\lambda-2}}{2} \pi T_0$ e $\tilde{C}_2 = -C_2 a_0^{3\lambda-2} T_0$.

Para k menor do que o valor máximo do potencial a''/a (que vale $2a_0^{2(1-3\lambda)}/[3(1-\lambda)T_0^2]$) haverá dois instantes, que denotaremos por $\pm\eta_M$, onde o fator $k^2 - a''/a$ se anulará. Para k^2 muito pequeno, teremos que nesses instantes a''/a será também muito pequeno. Dado que $1/3 > \lambda > 0$, isso ocorrerá para η suficientemente grande, de forma que poderemos usar a aproximação (6.5) para o potencial, levando a

$$k\eta_M = \frac{\sqrt{2(1-3\lambda)}}{1+3\lambda}.$$

Observe que o produto $k\eta_M$ é efetivamente independente de k . Em $\eta = -\eta_M$ as duas aproximações (6.12) e (6.8) se aplicam (para k suficientemente pequeno). Isso significa que as expressões (6.8) e (6.12), quando avaliadas em $-\eta_M$ devem se igualar, bem como (6.13) e (6.9). Ou seja, obtemos um sistema de equações que resolvido nos permite obter \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 em função de A_1 , a_0 e T_0 . Essa solução nos mostra que

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1 &\propto k^{\frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}} \\ \tilde{C}_2 &\propto k^{-\frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}}.\end{aligned}$$

É fácil verificar que nas condições em que estamos trabalhando ($1/3 \geq \lambda > 0$ e $k \ll 1$) o termo \tilde{C}_2 domina sobre o \tilde{C}_1 .

Se agora voltarmos à solução (6.10) e a analisarmos “hoje”, ou seja, fazendo $T \rightarrow \infty$, ela será dada aproximadamente por

$$\frac{\mu}{a} = C_1 + C_2 a_0^{3(\lambda-1)} T_0 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{T_0}{T} \right) = \frac{\tilde{C}_1 - \pi\tilde{C}_2}{a_0} - \frac{\tilde{C}_2 T_0}{a_0 T}.$$

O termo em $1/T$ pode ser desprezado nesse limite e, como para $k \ll 1$ o termo \tilde{C}_2 domina sobre \tilde{C}_1 , teremos

$$\frac{\mu}{a} = -\frac{\pi}{a_0} \tilde{C}_2 \propto k^{-\frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}}.$$

Para as perturbações tensoriais o espectro será dado por

$$\mathcal{P}_T = k^3 \left| \frac{\mu}{a} \right|^2$$

que leva a

$$\mathcal{P}_T = k^{n_T}$$

com

$$n_T = \frac{12\lambda}{1+3\lambda}$$

que pode, por continuidade do espectro em λ , ser aplicado ao caso $\lambda = 1/3$ (esse caso foi tratado na referência [81]). O resultado para Universos dominados por poeira ou por radiação será então

$$n_T \Big|_{poeira} = 0$$

$$n_T \Big|_{rad} = 2$$

Resultados também foram obtidos para o caso de seções espaciais curvas, dominadas por radiação. Para detalhes ver [75]

O método de junção traz consigo uma interpretação física clara. O potencial $V = a''/a$ é proporcional ao escalar de curvatura do espaço-tempo ($\sim a''/a^3$). Por outro lado, esse escalar define uma escala de comprimento característico para o Universo, l_c , que tomaremos como sendo $R \sim 1/l_c^2$. Podemos então considerar que o potencial V está associado a essa escala por

$$V \sim \frac{a^2}{l_c^2}.$$

Associado ao vetor de onda k temos o comprimento de onda, comóvel, $\lambda_c \sim 1/k$, que está relacionado ao comprimento de onda físico por $\lambda_{fis} = a\lambda$. A junção ocorre exatamente para a situação $k^2 = V$, que pode então ser interpretada como $\lambda_{fis} \sim l_c$. Assim, para tempos suficientemente afastados do *bounce*, os modos perturbativos estão com $\lambda_{fis} < l_c$. Ou seja, modos menores que o comprimento característico do Universo propagam-se como ondas livres. Isto também pode ser interpretado como consequência do fato de para escalas muito menores que a de curvatura, a física é essencialmente regida por efeitos locais, em que a Relatividade Geral não é importante.

Em princípio a solução apresentada se aplica também ao potencial de Mukhanov-Sasaki. No entanto, em teoria de perturbações cosmológicas estamos mais interessados no potencial de Bardeen Φ , que representa as flutuações da métrica, que vão dar origem às estruturas e ao espectro de anisotropias da radiação de fundo. O conhecimento de v permite que apliquemos a equação (5.18) e obtenhamos diretamente o espectro de Φ . Um cuidado deve ser tomado no entanto: a equação (5.18) envolve uma derivada de v/a . A solução apresentada para μ/a (que corresponde a v/a no caso de perturbações escalares) é uma solução constante. Isso não significa que Φ seja nulo, já que em ordens superiores de aproximação a solução μ/a apresentará correções em $k^2\eta^2$, cujas derivadas contribuirão para Φ . Devemos então voltar na equação (6.11) e calcular também os termos de ordem k^2 .

A equação (6.11), quando derivada em η e substituída a trajetória bohmiana (6.1) leva a

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{a}\right)' &= -\frac{C_1 \lambda k^2}{a^2} T_0 a_0^{1+3\lambda} \int dx (1+x^2)^{\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)}} \\ &+ \frac{C_2}{a^2} \left[1 - \lambda k^2 T_0^2 a_0^{-2+6\lambda} \int dx (1+x^2)^{\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)}} \arctan x \right] \end{aligned}$$

onde usamos a relação entre o tempo conforme e a coordenada T

$$d\eta = a^{3\lambda-1} T_0 dx$$

para mudar de variável de integração e definimos $x = T/T_0$. Como estamos interessados na determinação do potencial de Bardeen que gera as anisotropias da

radiação de fundo, ou seja em tempos já bastante posteriores ao *bounce*, podemos considerar, nas integrais acima, $x \gg 1$ e daí vem

$$\left(\frac{v}{a}\right)' = -\frac{C_2}{a_0^2} x^{-\frac{4}{3(1-\lambda)}} + \left[-C_1 T_0 a_0^{1+3\lambda} - \frac{C_2 T_0^2 a_0^{-2+6\lambda} \pi}{2}\right] \frac{3(1-\lambda) k^2}{5+3\lambda} \frac{1}{a_0^2} \lambda x^{\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)}} + \frac{\lambda C_2}{a_0^2} T_0^2 a_0^{6\lambda} \frac{3(1-\lambda) k^2}{2(1+3\lambda)} x^{\frac{-2+6\lambda}{3(1-\lambda)}}.$$

Podemos então verificar que para os valores de λ que interessam ao nosso trabalho ($0 < \lambda \leq 1/3$) o único termo que sobrevive para tempos suficientemente grandes é

$$\left(\frac{v}{a}\right)' = \left[-C_1 T_0 a_0^{1+3\lambda} - \frac{C_2 T_0^2 a_0^{-2+6\lambda} \pi}{2}\right] \frac{3(1-\lambda) k^2}{5+3\lambda} \frac{1}{a_0^2} \lambda x^{\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)}}.$$

Usando que para $x \gg 1$

$$x = \left[\frac{1+3\lambda}{3(1-\lambda)} \frac{a_0^{1-3\lambda}}{T_0} \right]^{\frac{3(1-\lambda)}{1+3\lambda}} \eta^{\frac{3(1-\lambda)}{1+3\lambda}},$$

vem

$$\left(\frac{v}{a}\right)' = -\left[C_1 + \frac{C_2 T_0 a_0^{-3(1-\lambda)} \pi}{2} \right] \frac{(1+3\lambda)\lambda}{5+3\lambda} k^2 \eta.$$

Substituindo este resultado em (5.18) e decompondo Φ em modos normais, obtemos

$$\Phi \propto \left[C_1 + \frac{C_2 T_0 a_0^{-3(1-\lambda)} \pi}{2} \right].$$

Não é difícil verificar que os termos de correção em ordem k^2 não alteram a dependência em k dos coeficientes \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 , sendo responsáveis apenas por uma mudança em suas amplitudes. Para tanto basta aproximar em (6.11) $a \propto \eta^n$, válido para η suficientemente grande. Obtém-se facilmente que as correções são proporcionais a $k^2 \eta^2$ e que no instante de junção essas correções, sendo proporcionais a $k^2 \eta_M^2$, são independentes de k . Isso significa que as dependências funcionais de \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 obtidas anteriormente continuam válidas. Assim, \tilde{C}_2 domina sobre \tilde{C}_1 e obtemos finalmente

$$\Phi \propto k^{-\frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}}.$$

Como o espectro de perturbações escalares é dado por

$$\mathcal{P}_s = \frac{2k^3}{\pi^2} |\Phi|^2$$

chegamos ao resultado

$$\mathcal{P}_s \propto k^{n_s-1}$$

com

$$n_s = 1 + \frac{12\lambda}{1+3\lambda}, \quad (6.14)$$

essencialmente o mesmo obtido para as perturbações tensoriais.

Note que o λ a que nos referimos é aquele do fluido que domina em $|x| \gg 1$. Assim, o particular fluido que realiza o *bounce* não é diretamente relevante. Na realidade o papel do *bounce* é apenas o de selecionar o modo \tilde{C}_2 como modo dominante sem efetivamente alterar a dependência funcional deste, a qual foi fixada em $-\infty$.

6.2 Soluções Numéricas

Os resultados obtidos na seção anterior pelo método de junção foram reobtidos numericamente [80]. Na solução numérica, escolheu-se um valor $\lambda = 8,4 \times 10^{-4}$, que produz um espectro com $n_s = 1,01$ segundo a equação(6.14). Este é um valor, que, embora não seja o que produz o melhor acordo com as observações do WMAP [82] ($n_s \sim 0,97$), ainda está dentro dos valores aceitáveis.

As amplitudes, tanto das perturbações escalares quanto das perturbações tensoriais têm como parâmetro livre a escala de curvatura característica do *bounce*, dada por

$$l_0 = a_0^{3\lambda} T_0$$

e, para que a amplitude do espectro de perturbações escalares esteja em acordo com os dados observacionais obtidos do WMAP é necessário que $l_0 \sim 10^3 l$, um valor muito bom do ponto de vista conceitual pois é pequeno o suficiente para que efeitos quânticos da gravitação sejam relevantes, sendo ainda grande o suficiente para que a equação de Wheeler-DeWitt não seja invalidada por uma eventual estrutura discreta do espaço-tempo (como prevista por teorias como a de cordas ou gravitação quântica com laços). Isso torna o modelo altamente consistente. Além disto, a razão entre as amplitudes das perturbações tensoriais e escalares T/S resultou nesse modelo da ordem de 10^{-3} , suficientemente pequeno para que os resultados possam ser considerados consistentes com os dados do WMAP, que consideram T/S menor que 0.21. Uma razão T/S em torno de 0.21, daria $l_0 \sim 350l$ e $\lambda \sim 8,5 \times 10^{-2}$, que leva à dependência em $k^{0,81}$, um valor muito alto. Isso nos leva a concluir que efetivamente este modelo prevê razões T/S pequenas, dando bom acordo com os dados observacionais. Uma possibilidade ainda inexplorada é a de uma pequena componente de energia escura dominando o Universo em algum ponto de sua fase contrativa, o que presumivelmente diminuiria o valor de n_s , aproximando-o ainda mais do valor mais aceito, 0,97.

Na figura (6.2) apresentamos o comportamento dos espectros escalar e tensorial, bem como da razão entre suas amplitudes, obtidos numericamente [80].

Na figura (6.3) apresentamos a evolução temporal do modo $v(x)$ para um valor de $\tilde{k} = 10^{-3}$ ($\tilde{k} =: \lambda k l_0 / a_0$) e $\lambda = 0.1$. Note que os modos escalares apresentam oscilações em sua amplitude a partir de $T \sim 10^7 T_0$ (para os valores escolhidos). Na figura (6.4) apresentamos uma comparação da amplitude de \mathcal{P}_s e \mathcal{P}_T para alguns valores selecionados de \tilde{k} . Note que os valores se tornam maiores que 1 durante o *bounce* ter se dado, o que poderia levar a uma inconsistência no nosso tratamento.

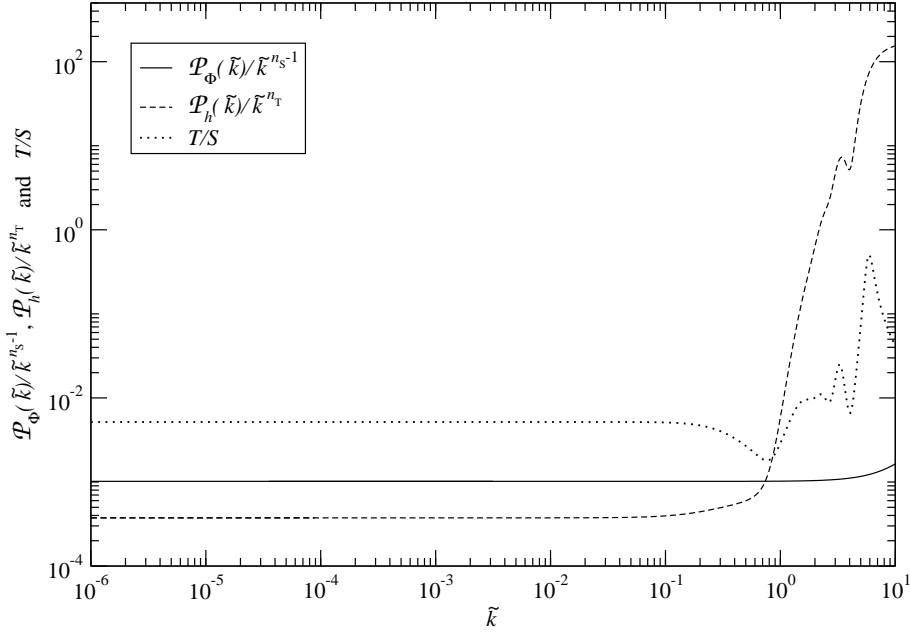


Figura 6.2: Espectros das perturbações escalares e tensoriais e razão T/S para um $\lambda = 8.5 \times 10^{-4}$ e $l_0 = 1474l$. Na figura, $\tilde{k} = \frac{\sqrt{\lambda} T_0}{a_0^{1-3\lambda}} k$

Isto pode ser resolvido por uma escolha adequada de a_0 , que ainda não foi determinado pela comparação com as observações, já que o que interessa realmente nesta análise é o potencial de Bardeen, o qual é dado por [80]

$$\Phi_k = \frac{f(x)}{\tilde{k}^2} \frac{\sqrt{\omega(\omega + 1)}}{1 - \omega} \left(\frac{l_0^{1/2} l}{a_0^{3/2}} \right),$$

onde $f(x)$ é uma função que descreve a evolução das perturbações no método numérico utilizado.

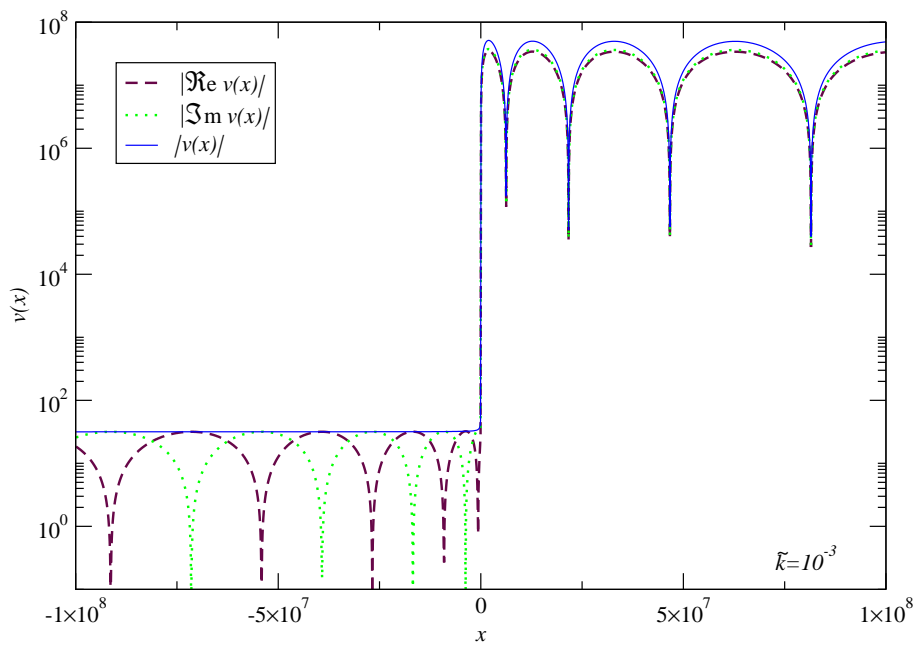


Figura 6.3: Evolução dinâmica de $|v|$ para $\tilde{k} = 10^{-3}$ e $\lambda = 0.1$. Note que $|v|$ começa a oscilar após a passagem pelo bounce.

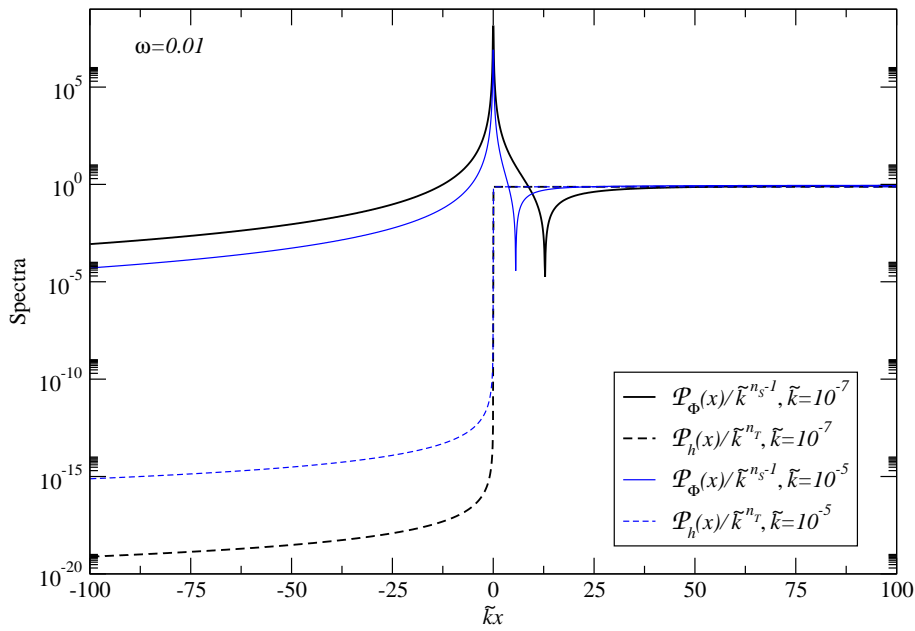


Figura 6.4: Valores de \mathcal{P}_s e \mathcal{P}_T (na figura identificado como \mathcal{P}_h) associados às perturbações escalares e tensoriais para diversos valores de \tilde{k} e $\lambda = 0.1$. Note que os valores destas quantidades se tornam maiores que 1 no bounce.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

Este trabalho mostrou que as equações simplificadas que descrevem a dinâmica das perturbações, originalmente obtidas em modelos de cosmologia clássica e por muito tempo tidas como exclusivas desses modelos, podem ser obtidas de forma totalmente independente do fato da dinâmica dos graus de liberdade da ordem zero ser clássica ou não. Isso habilita tais simplificações a serem consistentemente utilizadas nos casos em que o fundo também é quantizado.

Usamos tais equações em um modelo simplificado existente na literatura. Nesse modelo, um universo eterno, inicialmente dominado por poeira e em contração, tem sua evolução modificada por efeitos quânticos, entrando em uma fase expansiva que desemboca, para tempos suficientemente grandes, no modelo padrão da cosmologia. Mostramos que tal modelo pode representar uma boa descrição do Universo pois gera um espectro de perturbações escalares invariante de escala para k pequeno (k é o módulo do vetor de onda das perturbações), em acordo com as observações das anisotropias da CMB. Fica assim evidenciada a relevância do método desenvolvido no que concerne à comparação dos modelos da cosmologia quântica com as observações.

Outro aspecto importante sobre o qual nada comentamos no corpo da tese é o de que apesar de todos os resultados obtidos terem sido para o caso de universos espacialmente planos ($K = 0$), a simplificação demonstrada pode ser aplicada ao setor tensorial mesmo nos casos $K = -1$ e $K = +1$ [79]. Esse último gera um universo que passa por fases de expansão/contração cíclicas, sem nunca colapsar em uma singularidade, não sendo possível estabelecer condições iniciais para as perturbações sem ambiguidade. Além disso, acredita-se que a passagem das perturbações por cada *bounce* leva à criação de novos quanta perturbativos, de forma que ao final de um certo número de tais passagens a amplitude das perturbações cresça muito. Isso inviabiliza a abordagem perturbativa para tais modelos. No caso $K = -1$, no entanto, todo o processo pode ser consistentemente utilizado, pois há apenas uma transição contração/expansão, e espectros de ondas gravitacionais po-

dem ser calculados. Para as perturbações vetoriais e escalares ainda há dificuldades técnicas a serem enfrentadas no formalismo.

Os resultados obtidos abrem algumas perspectivas para a pesquisa desenvolvida. Num primeiro momento precisaríamos estender o formalismo para o caso de perturbações vetoriais e escalares em seções espaciais com $K \neq 0$ e calcularmos os espectros envolvidos. Também uma análise dos modelos dominados por campo escalar, é uma possibilidade de continuação imediata do presente trabalho. Outra questão é a possibilidade de estendermos o formalismo para modelos com dois ou mais fluidos. Também a possibilidade de estendermos o método até ordens mais altas, o que permitiria fazer previsões ainda mais precisas a serem comparadas com observações, é uma questão a ser avaliada.

Uma questão levantada pelo modelo discutido no capítulo 6 é a origem da radiação que sabidamente deve dominar o Universo em tempos posteriores ao *bounce*. Uma hipótese, que ainda precisa ser mais elaborada, é a possibilidade de perturbações de muito pequeno comprimento de onda (para as quais o espectro não é invariante de escala, segundo a figura (6.2)) darem origem, em torno do *bounce*, a mini buracos negros, cujo decaimento seria a fonte desta radiação. Uma outra possibilidade é trabalharmos com um modelo que contenha dois fluidos, incluindo aí a radiação. Neste caso, o formalismo desenvolvido deveria ser generalizado, bem como a questão das perturbações de entropia deveria ser cuidadosamente analisada. Também a possibilidade de existência de uma fase com domínio de uma componente de energia escura anteriormente ao *bounce* deve ser analisada. Essas são questões em aberto, e objetivo de futuras pesquisas no assunto.

No que se refere à questão da energia escura citada no parágrafo anterior, se tal componente realmente dominou a evolução do Universo em algum momento da fase contrativa, esse domínio deve ser transiente, uma vez que uma fase de contração acelerada não só invalidaria a imposição de condições iniciais de vácuo para as perturbações, tornando o modelo inconsistente, como poderia levar à existência de horizontes de partículas, aspecto indesejado em modelos cosmológicos. Também a existência de uma fase com $\lambda < 0$ torna inviável a redefinição de k feita quando do tratamento das perturbações escalares, fazendo necessário encontrar-se uma outra abordagem para a resolução da equação de movimento das perturbações.

Mas certamente os resultados mais relevantes deste trabalho foram mostrar que as equações simplificadas da teoria de perturbações cosmológicas semi-clássica podem ser consistentemente aplicadas em cenários de cosmologia quântica e o de mostrar a existência de um modelo cosmológico quântico que além de não apresentar singularidades (Universo Eterno) e nem horizonte de partículas, pode potencialmente resolver o problema da planeza e ser capaz de gerar um espectro de anisotropias da radiação de fundo que é invariante de escala. Esse modelo apresenta ainda uma escala característica no *bounce* que o torna perfeitamente consistente com o tratamento via equação de Wheeler-DeWitt. Em resumo, aprendemos com este modelo que não é só inflação que é capaz de gerar estruturas. Embora ainda necessite de elaboração em alguns aspectos, o modelo analisado se apresenta como uma alternativa viável ao paradigma inflacionário ou ainda como um cenário

complementar a este.

Apêndice A

Determinação da Ação do Setor Gravitacional até a Segunda Ordem nas Perturbações

Seja a métrica perturbada

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}.$$

A sua inversa será, desprezando termos de ordem 3 ou maior,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\nu.$$

Nas expressões acima os índices são elevados e abaixados com o uso da métrica de fundo $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e de sua inversa $g^{(0)\mu\nu}$.

O determinante será

$$\tilde{g} = g^{(0)} \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right)$$

e a sua raiz quadrada será

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g^{(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} h + \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right).$$

Vamos agora calcular as quantidades $\{\mu\tilde{\nu}, \alpha\}$, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta$, $\tilde{R}^\mu{}_{\nu\alpha\rho}$, $\tilde{R}_{\nu\rho}$ e \tilde{R} , sempre até a segunda ordem em $h_{\mu\nu}$.

$$\{\mu\tilde{\nu}, \alpha\} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{\mu\alpha,\nu} + \tilde{g}_{\nu\alpha,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\alpha}) = \{\mu\nu, \alpha\}^{(0)} + \frac{1}{2} (h_{\mu\alpha,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha})$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta = \tilde{g}^{\beta\alpha} \{\mu\tilde{\nu}, \alpha\} = \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\beta} + \frac{1}{2} (h^\beta{}_{\mu;\nu} + h^\beta{}_{\nu;\mu} - h_{\mu;\nu}{}^\beta) - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (h_{\alpha\nu;\mu} + h_{\alpha\mu;\nu} - h_{\mu\nu;\alpha})$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}^\mu{}_{\nu\alpha\rho} &= \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho,\alpha} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\alpha,\rho} + \tilde{\Gamma}^\epsilon_{\nu\rho}\tilde{\Gamma}^\mu_{\epsilon\alpha} - \tilde{\Gamma}^\epsilon_{\nu\alpha}\tilde{\Gamma}^\mu_{\epsilon\rho} = R^{(0)\mu}{}_{\nu\alpha\rho} + \frac{1}{2}\left(h^\mu{}_{\nu;\rho\alpha} + h^\mu{}_{\rho;\nu\alpha}\right. \\ &\quad \left.- h_{\nu\rho}{}^{;\mu}{}_\alpha - h^\mu{}_{\nu;\alpha\rho} - h^\mu{}_{\alpha;\nu\rho} + h_{\alpha\nu}{}^{;\mu}{}_\rho\right) - \frac{1}{2}h^{\mu\sigma}{}_{;\alpha}\left(h_{\sigma\nu;\rho} + h_{\sigma\rho;\nu} - h_{\rho\nu;\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}h^{\mu\sigma}{}_{;\rho}\left(h_{\sigma\nu;\alpha} + h_{\sigma\alpha;\nu} - h_{\alpha\nu;\sigma}\right) - \frac{1}{2}h^{\mu\sigma}\left(h_{\sigma\nu;\rho\alpha} + h_{\sigma\rho;\nu\alpha} - h_{\nu\rho;\sigma\alpha} - h_{\sigma\nu;\alpha\rho}\right. \\ &\quad \left.- h_{\sigma\alpha;\nu\rho} + h_{\alpha\nu;\sigma\rho}\right) + \frac{1}{4}\left[\left(h^\epsilon{}_{\nu;\rho} + h^\epsilon{}_{\rho;\nu} - h_{\rho\nu}{}^{;\epsilon}\right)\left(h^\mu{}_{\epsilon;\alpha} + h^\mu{}_{\alpha;\epsilon} - h_{\alpha\epsilon}{}^{;\mu}\right)\right. \\ &\quad \left.- \left(h^\epsilon{}_{\nu;\alpha} + h^\epsilon{}_{\alpha;\nu} - h_{\alpha\nu}{}^{;\epsilon}\right)\left(h^\mu{}_{\epsilon;\rho} + h^\mu{}_{\rho;\epsilon} - h_{\rho\epsilon}{}^{;\mu}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\nu\rho} &= \tilde{R}^\mu{}_{\nu\mu\rho} = R^{(0)}_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\left(h^\mu{}_{\nu;\rho\mu} + h^\mu{}_{\rho;\nu\mu} - h_{\nu\rho}{}^{;\mu}{}_\mu - h_{;\nu\rho}\right) - h^{\mu\sigma}{}_{;\mu}\left(h_{\sigma\nu;\rho}\right. \\ &\quad \left.+ h_{\sigma\rho;\nu} - h_{\rho\nu;\sigma}\right) - \frac{1}{2}h^{\mu\sigma}\left(h_{\sigma\nu;\rho\mu} + h_{\sigma\rho;\nu\mu} - h_{\nu\rho;\sigma\mu} - h_{\sigma\mu;\nu\rho}\right) + \frac{1}{4}h^{\mu\sigma}{}_{;\rho}h_{\mu\sigma;\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4}h_{;\epsilon}\left(h^\epsilon{}_{\nu;\rho} + h^\epsilon{}_{\rho;\nu} - h_{\nu\rho}{}^{;\epsilon}\right) - \frac{1}{4}\left(h^\epsilon{}_{\nu;\mu} - h_{\mu\nu}{}^{;\epsilon}\right)\left(h^\mu{}_{\rho;\epsilon} - h_{\epsilon\rho}{}^{;\mu}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \tilde{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R^{(0)} + h^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} - h^{;\mu}{}_\mu - h^{\sigma\mu}{}_{;\mu}h^\nu{}_{\sigma;\nu} + h^{\sigma\mu}{}_{;\mu}h_{;\sigma} + \frac{3}{4}h^{\sigma\mu;\nu}h_{\sigma\mu;\nu} \\ &\quad - h^{\mu\sigma}h_{\sigma}{}^{;\nu}{}_{;\mu} + h^{\mu\sigma}h_{;\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}h_{\mu\sigma}{}^{;\nu}{}_\nu - \frac{1}{4}h_{;\mu}h^{;\mu} - \frac{1}{2}h_{\nu\mu;\epsilon}h^{\nu\epsilon;\mu} - h^{\nu\rho}R_{\nu\rho} \\ &\quad - h^{\nu\rho}h^\mu{}_{\nu;\rho\mu} + h^\nu{}_\alpha h^{\alpha\rho}R_{\nu\rho}.\end{aligned}$$

Por fim, a ação será

$$\tilde{S} = -\frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} = S^{(0)} + \delta_1 S + \delta_2 S$$

com

$$S^{(0)} = -\frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g}R^{(0)}$$

$$\delta_1 S = \frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g}h^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^{(0)}$$

$$\begin{aligned}\delta_2 S &= -\frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}}\left(-h^{\sigma\mu}{}_{;\mu}h_{\sigma}{}^{;\nu}{}_\nu + h^{\sigma\mu}{}_{;\mu}h_{;\sigma} + \frac{3}{4}h^{\sigma\mu;\nu}h_{\sigma\mu;\nu} - h^{\sigma\mu}h_{\sigma}{}^{;\nu}{}_{;\mu}\right. \\ &\quad \left.+ h^{\mu\sigma}h_{\mu\sigma}{}^{;\nu}{}_\nu - \frac{1}{4}h_{;\mu}h^{;\mu} - \frac{1}{2}h^{\nu\mu;\epsilon}h_{\nu\epsilon;\mu} - h_{\nu}{}^\rho h^{\nu\mu}{}_{;\rho\mu} + h_{\alpha}{}^\nu h^{\alpha\rho}R_{\nu\rho}^{(0)} + \frac{1}{2}hh^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu}\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}hh^{;\mu}{}_\mu - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{8}h^2R^{(0)} - \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}R^{(0)} + h^{\mu\sigma}h_{;\mu\sigma}\right).\end{aligned}$$

Através de integrais por partes obtemos

$$\begin{aligned}\delta_2 S &= \frac{1}{6l^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}}\left[\frac{1}{4}h^{\mu\nu;\alpha}h_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2}h_{\mu}{}^\nu{}_{;\nu}h^{\mu\rho}{}_{;\rho} + \frac{1}{2}h_{;\mu}h^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{4}h_{;\mu}h^{;\mu}\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}h^{\nu\epsilon}h^{\alpha\mu}R_{\nu\alpha\epsilon\mu}^{(0)} + \frac{1}{2}\left(hh^{\alpha\beta} - h_{\mu}{}^\alpha h^{\mu\beta}\right)R_{\alpha\beta}^{(0)} + \left(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^2\right)\frac{R^{(0)}}{4}\right].\end{aligned}$$

Por fim, através de

$$R_{\nu\alpha\epsilon\mu} = W_{\nu\alpha\epsilon\mu} - \frac{1}{2} \left(g_{\nu\mu} R_{\alpha\epsilon} + R_{\nu\mu} g_{\alpha\epsilon} - g_{\nu\epsilon} R_{\alpha\mu} - R_{\nu\epsilon} g_{\alpha\mu} \right) - \frac{R}{6} \left(g_{\nu\epsilon} g_{\alpha\mu} - g_{\nu\mu} g_{\alpha\epsilon} \right),$$

a ação acima se torna

$$\begin{aligned} \delta_2 \mathcal{S} = & \frac{1}{6l^2} \int d^4 x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{4} h^{\mu\nu;\alpha} h_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2} h_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\mu\rho}{}_{;\rho} + \frac{1}{2} h_{;\mu} h^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{4} h_{;\mu} h^{;\mu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)} + \left(h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h^2 \right) \frac{R^{(0)}}{6} \right]. \end{aligned}$$

Apêndice B

Obtenção da Ação de um Fluido Expandida até a Segunda Ordem nas Perturbações

Na presença de perturbações as partículas do fluido são deslocadas de suas posições originais, x^μ , ao longo do vetor infinitesimal ξ^μ , que parametriza as perturbações.

$$\tilde{x}^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu. \quad (\text{B.1})$$

A métrica perturbada no ponto $x + \xi$ será

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x_0 + \xi) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x_0) + \tilde{g}_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu,\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta, \quad (\text{B.2})$$

cujo cálculo explícito das componentes leva a

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00}(x_0 + \xi) &= N^2\left(1 + 2\phi + 2\frac{\dot{N}}{N}\chi^0 + 4\frac{\dot{N}}{N}\phi\chi + 2\dot{\phi}\chi + 2\phi_i\chi^i + \frac{\ddot{N}}{N}\chi^2 + \frac{\dot{N}^2}{N^2}\chi^2\right) \\ \tilde{g}_{0i}(x_0 + \xi) &= -NaA_i - \dot{N}aA_i\chi - N\dot{a}A_i\chi - Na\dot{A}_i\chi - NaA_{i,j}\chi^j \\ \tilde{g}_{ij}(x_0 + \xi) &= -a^2\gamma_{ij} + a^2\epsilon_{ij} - 2\dot{a}a\gamma_{ij}\chi + 2\dot{a}a\epsilon_{ij}\chi + a^2\epsilon_{i,j,k}\chi^k - \ddot{a}a\gamma_{ij}\chi^2 - \dot{a}^2\gamma_{ij}\chi^2. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para a obtenção dessas expressões, usamos o fato que $K = 0$ e fomos para um sistema de coordenadas cartesiano, no qual $\gamma_{i,j,k} = 0$. O resultado final desses cálculos (densidade de partículas, de energia e a ação) sendo quantidades tensoriais, será válido em qualquer sistema de coordenadas.

Das expressões acima tiramos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(x_0 + \xi) \frac{\partial(x_0^\mu + \xi^\mu)}{\partial\sigma} \frac{\partial(x_0^\nu + \xi^\nu)}{\partial\sigma} &= \left(g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{\partial x_0^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x_0^\nu}{\partial\sigma}\right) \left(1 + 2\phi + 2\frac{\dot{N}}{N}\chi + 2\dot{\chi}\right. \\ &+ 4\frac{\dot{N}}{N}\phi\chi + 2\dot{\phi}\chi + 2\phi_i\chi^i + \frac{\ddot{N}}{N}\chi^2 + \frac{\dot{N}^2}{N^2}\chi^2 + 4\dot{\phi}\chi + 4\frac{\dot{N}}{N}\chi\dot{\chi} + \dot{\chi}^2 - 2\frac{a}{N}A_i\dot{\chi}^i \\ &\left. - \frac{a^2}{N^2}\gamma_{ij}\dot{\chi}^i\dot{\chi}^j\right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde escolhemos $\sigma = x^0$ e usamos que as partículas do fluido não perturbado são comóveis com as coordenadas utilizadas.

Dáí obtemos

$$\begin{aligned} \left[\tilde{g}_{\mu\nu}(x_0 + \xi) \frac{\partial(x_0^\mu + \xi^\mu)}{\partial\sigma} \frac{\partial(x_0^\nu + \xi^\nu)}{\partial\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[g_{\mu\nu}(x_0) \frac{\partial x_0^\mu}{\partial\sigma} \frac{\partial x_0^\nu}{\partial\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \phi + \frac{\dot{N}}{N}\chi \right. \\ &+ \dot{\chi} + \frac{\dot{N}}{N}\phi\chi + \dot{\phi}\chi + \phi_i\chi^i + \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\chi^2 + \phi\dot{\chi} + \frac{\dot{N}}{N}\chi\dot{\chi} - \frac{a}{N}A_i\dot{\chi}^i \\ &\left. - \frac{1}{2}\frac{a^2}{N^2}\gamma_{ij}\dot{\chi}^i\dot{\chi}^j - \frac{1}{2}\phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado temos

$$\sqrt{-g_{,\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu,\alpha} g^{\mu\nu} \quad (\text{B.6})$$

$$\sqrt{-g_{,\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(\frac{1}{2} g_{\rho\sigma,\beta} g_{\mu\nu,\alpha} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu,\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu,\alpha} g^{\mu\nu}{}_{,\beta} \right), \quad (\text{B.7})$$

que permite-nos calcular $\sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi)$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi) &= \sqrt{g^{(0)}}(x_0) \left[1 + \phi - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{\dot{N}}{N}\chi + \frac{3\dot{a}}{a}\chi - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\epsilon\phi + \frac{1}{2}A_i A^i \right. \\ &- \frac{1}{4}\epsilon_{ij}\epsilon^{ij} + \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{\dot{N}}{N}\phi\chi - \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\epsilon\chi + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi\chi - \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\chi + \dot{\phi}\chi + \phi_i\chi^i \\ &\left. - \frac{1}{2}\gamma^{ij}\epsilon_{i,j,k}\chi^k - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}\chi + 3\frac{\dot{N}\dot{a}}{Na}\chi^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\chi^2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\chi^2 + \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\chi^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

O jacobiano da transformação do sistema de coordenadas lagrangiano (a^i, λ) para o sistema euleriano $(x^\mu + \xi^\mu)$ será

$$\begin{aligned} J(x_0 + \xi) &= J_0 \left[1 + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right] = J_0 \left[1 + \dot{\chi} + \chi^i{}_{,i} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\chi^i{}_{,i}\chi^j{}_{,j} + \dot{\chi}\chi^i{}_{,i} - \chi_{,i}\dot{\chi}^i - \frac{1}{2}\chi^i{}_{,j}\chi^j{}_{,i} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde J_0 é o Jacobiano não perturbado.

O produto $\sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi)J(x_0 + \xi)$ será

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi)J(x_0 + \xi) &= \sqrt{-g^{(0)}}J_0 \left[1 + \phi - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{\dot{N}}{N}\chi + \frac{3\dot{a}}{a}\chi + \dot{\chi} + \chi^i{}_{,i} - \frac{1}{2}\phi^2 \right. \\ &- \frac{1}{2}\epsilon\phi + \frac{1}{2}A_i A^i - \frac{1}{4}\epsilon_{ij}\epsilon^{ij} + \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{\dot{N}}{N}\phi\chi - \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\epsilon\chi + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi\chi - \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\chi + \dot{\phi}\chi \\ &+ \phi_i\chi^i - \frac{1}{2}\gamma^{ij}\epsilon_{i,j,k}\chi^k - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}\chi + 3\frac{\dot{N}\dot{a}}{Na}\chi^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\chi^2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\chi^2 + \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a}\chi^2 + \phi\dot{\chi} \\ &- \frac{1}{2}\epsilon\dot{\chi} + \frac{\dot{N}}{N}\chi\dot{\chi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}\chi + \phi\chi^i{}_{,i} - \frac{1}{2}\epsilon\chi^i{}_{,i} + \frac{\dot{N}}{N}\chi\chi^i{}_{,i} + 3\frac{\dot{a}}{a}\chi\chi^i{}_{,i} + \frac{1}{2}\chi^i{}_{,i}\chi^j{}_{,j} \\ &\left. + \dot{\chi}\chi^i{}_{,i} - \chi_{,i}\dot{\chi}^i - \frac{1}{2}\chi^i{}_{,j}\chi^j{}_{,i} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e o inverso desta expressão será

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi) J(x_0 + \xi) \right]^{-1} &= \left[\sqrt{-g^{(0)}}(x_0) J_0 \right]^{-1} \left[1 - \phi + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{\dot{N}}{N} \chi - \frac{3\dot{a}}{a} \chi - \dot{\chi} \right. \\
&- \chi^i{}_{,i} + \frac{3}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \epsilon \phi - \frac{1}{2} A_i A^i + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij} + \frac{1}{8} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{N}}{N} \epsilon \chi - \phi \chi - \phi_i \chi^i + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \epsilon_{ij,k} \chi^k \\
&- \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}}{N} \chi^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} \chi^2 + \chi_{,i} \dot{\chi}^i + \frac{1}{2} \chi^i{}_{,j} \chi^j{}_{,i} + \frac{\dot{N}^2}{N^2} \chi^2 + 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \chi^2 + \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \chi^i{}_{,i} \chi^j{}_{,j} \\
&+ \frac{\dot{N}}{N} \phi \chi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \phi \chi + \phi \dot{\chi} + \phi \chi^i{}_{,i} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \epsilon \chi - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\chi} - \frac{1}{2} \epsilon \chi^i{}_{,i} + 3 \frac{\dot{N} \dot{a}}{N a} \chi^2 + \frac{\dot{N}}{N} \chi \dot{\chi} \\
&\left. + \frac{\dot{N}}{N} \chi \chi^i{}_{,i} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \chi \chi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \chi \chi^i{}_{,i} + \dot{\chi} \chi^i{}_{,i} + \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \chi \right]. \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Substituindo todas essas expressões na fórmula para a densidade de partículas vem

$$\begin{aligned}
\tilde{n}(x_0 + \xi) &= \frac{F[\tilde{g}_{\mu\nu}(x_0 + \xi) \frac{\partial(x_0^\mu + \xi^\mu)}{\partial\sigma} \frac{\partial(x_0^\nu + \xi^\nu)}{\partial\sigma}]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\tilde{g}}(x_0 + \xi) J(x_0 + \xi)} = n \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{3\dot{a}}{a} \chi - \chi^i{}_{,i} - \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i \right. \\
&- \frac{1}{2} \frac{a^2}{N^2} \gamma_{ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - \frac{1}{2} A_i A^i + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij} + \frac{1}{8} \epsilon^2 + \frac{1}{2} \epsilon_{,i} \chi^i + \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \chi - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} \chi^2 + \chi_{,i} \dot{\chi}^i \\
&\left. + \frac{1}{2} \chi^i{}_{,j} \chi^j{}_{,i} + 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \chi^2 + \frac{1}{2} \chi^i{}_{,i} \chi^j{}_{,j} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \epsilon \chi - \frac{1}{2} \epsilon \chi^i{}_{,i} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \chi \chi^i{}_{,i} \right]. \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Expandindo de volta para o ponto x_0^μ teremos

$$\begin{aligned}
\tilde{n}(x_0) &= n \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon - \chi^i{}_{|i} + \chi \dot{\chi}^i{}_{|B} + \chi^i{}_{|j} \chi^j - \frac{a}{N} A_i \dot{\chi}^i - \frac{1}{2} \frac{a^2}{N^2} \gamma_{ij} \dot{\chi}^i \dot{\chi}^j - \frac{1}{2} A_i A^i + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} \epsilon^{ij} \right. \\
&\left. + \frac{1}{8} \epsilon^2 + \chi_{|i} \dot{\chi}^i + \frac{1}{2} \chi^i{}_{|j} \chi^j{}_{|i} + \frac{1}{2} \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \frac{1}{2} \epsilon \chi^i{}_{|i} \right]. \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

A ação será por fim

$$S = S^{(0)} + \delta_1 S + \delta_2 S \quad (\text{B.14})$$

com

$$S^{(0)} = - \int d^3 x N a^3 \gamma^{\frac{1}{2}} \rho_0 \quad (\text{B.15})$$

$$\delta_1 S = - \int d^4 x N a^3 \gamma^{\frac{1}{2}} (\rho_0 + p_0) \left(\frac{1}{2} \epsilon - \chi^i{}_{|i} \right) - N a^3 \rho_0 \int d^4 x \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\phi - \frac{1}{2} \epsilon \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 S &= - \int d^4 x N a^3 \gamma^{\frac{1}{2}} \left\{ \rho_0 \left(-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} A_i A^i - \phi \chi^i{}_{|i} \right) + p_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \phi \chi^i{}_{|i} \right) \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (\rho_0 + p_0) \left(\frac{a^2}{N^2} \dot{\chi}^i \dot{\chi}_i + 2 \frac{\dot{a}}{N} A_i \dot{\chi}^i + A_i A^i \right) + \frac{1}{2} c_s^2 (\rho_0 + p_0) \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 + \chi^i{}_{|i} \chi^j{}_{|j} - \epsilon \chi^i{}_{|i} \right) \right\} \\
&\quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] A. H. Guth; *Phys. Rev.* **D28**, 347 (1981).
- [2] E.W. Kolb, M. S. Turner; *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, (1990).
- [3] V. Mukhanov; *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [4] A. Friedmann, *Z. Phys.* **10**, 377 (1922).
- [5] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, ed. Cambridge (1973).
- [6] C. W. Misner; *Phys. Rev.* **186**, 1319 (1969).
- [7] C. W. Misner; *Phys. Rev.* **186**, 1328 (1969).
- [8] B. DeWitt; *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [9] M. Mars; *Phys. Rev.* **D51**, 3989 (1995).
- [10] M. Novello, J. M. Salim; *Phys. Rev.* **D20**, 377 (1979).
- [11] J. Khouri, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok; *Phys. Rev.* **D64**, 123522 (2001), *A brief comment on the Pyrotechnic Universe*; R. Y. Donagi, J. Khouri, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok; *JHEP* **0111**, 041 (2001); J. Khouri, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok; *hep-th/0109050*, *Density Perturbations in the Ekpyrotic Scenario*.
- [12] G. Murphy, *Phys. Rev.* **D8**, 4231 (1973); V. Melnikov, S. Orlov; *Phys. Lett.* **A70**, 263 (1979); E. Elbaz, M. Novello, J. M. Salim, L. A. R. Oliveira, *Int. J. of Mod. Phys.* **D1**, 641 (1993).
- [13] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto, M. A. Sagioro Leal; *Phys. Lett.* **A241**, 229 (1998).
- [14] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, N. Pinto-Neto; *Phys. Rev.* **D62**, 083507 (2000).

- [15] Carmen Molina-París, Matt Visser; *gr-qc/9810023*, *Physics Letters* **B455**, 90 (1999).
- [16] A. Ashtekar; *Phys. Rev.* **D36**, 1587 (1987).
- [17] J. Samuel, Pramana; *J. Phys.* **28**, L429 (1987).
- [18] C. Rovelli e L. Smolin; *Nucl. Phys.* **B331**, 80 (1990).
- [19] M. P. Ryan, *lecture notes from the 6th International School on Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro (1989)*.
- [20] K. V. Kuchar, M. P. Ryan; *Phys. Rev.*, **3982** (1989).
- [21] J. J. Halliwell; *Quantum Cosmology and Baby Universes ed. por S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran e S. Weinberg, World Scientific, Cingapura (1991)*.
- [22] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner; *Gravitation: an Introduction to Current Research, ed. por L. Witten, Joun Wiley, New York (1962)*.
- [23] R. Omnès; *The Interpretation of Quantum Mechanics, Princeton University, Princeton (1994)*.
- [24] H. Everett; *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454 (1957).
- [25] F. Tipler; *Phys. Rep.* **137**, 231 (1986).
- [26] D. Bohm, B. J. Hiley; *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum theory, Routledge, London, (1993)*.
- [27] R. B. Griffiths; *Journal of St. Phys.* **36**, 219 (1984).
- [28] M. Gell-Mann, J. B. Hartle; *Complexity, Entropy and the Physics of Information ed. por W. Zurek, Addison Wesley (1990)*.
- [29] J. B. Hartle; *Proceedings of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation ed. por R. J. Gleiser, C. N. Kozameh e O. M. Moreschi, Institute of Physics Publishing, London (1993)*.
- [30] G. C. Ghiradi, A. Rimini, T. Weber; *Phys. Rev.* **D34**, 470 (1986).
- [31] D. Bohm, B. J. Hiley; *Phys. Rep.* **144**, No 6, 323 (1987).
- [32] D. J. Bohm, B. J. Hiley; *Foundations of Physics, Vol. 5, No. 1 (1975)*.
- [33] Peter R. Holland; *The Quantum Theory of Motion, ed. Cambridge (1993)*.
- [34] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger; *Phys. Rep.* **215**, Nos 5 e 6 (1992) 203-333.
- [35] J. J. Halliwell, S. W. Hawking; *Physical Review* **D31**, 8 (1985).

- [36] S. W. Hawking, R. Laflamme, G. W. Lyons; *Phys Rev* **D47**, 5342 (1993).
- [37] R. P. Feynman; *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [38] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill, New York (1965).
- [39] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yushiva University, New York (1964).
- [40] M. Henneaux e C. Teitelboim; *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton (1992).
- [41] H. Sundermeyer; *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlim (1982).
- [42] N. Bohr, *Atomic Theory and the Description on Nature*, Cambridge University Press (1934).
- [43] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley, New York, 1958.
- [44] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover, New York (1949).
- [45] J. Von Neumann, *Mathematical Foundation s of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1955).
- [46] B. S. DeWitt; *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, ed. por B.S. DeWitt e N. Graham, Princeton University Press, Princeton (1973).
- [47] B. S. DeWitt; *Physics Today* **30** (setembro, 1970).
- [48] W. H. Zurek; *Physics Today* **36** (outubro, 1991).
- [49] W. H. Zurek; *Phys. Rev.* **D24**, 1516 (1981).
- [50] W. H. Zurek; *Phys. Rev.* **D26**, 1862 (1982).
- [51] W. H. Zurek; *Phys. Rev.* **D40**, 1071 (1989).
- [52] A. O. Caldeira, A. J. Leggett; *Ann. Phys.* **149**, 374 (1983).
- [53] P. N. Kaloyerou, *Phys. Rep.* **244**, 287 (1994).
- [54] F. J. de Urries, J. Julve; *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 6949 (1998).
- [55] P. Coles, F. Lucchin; *Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, ed. Wiley (1995).
- [56] I. D. Soares; *Notas de Aula*, CBPF, 2003.
- [57] J. M. Stewart; *Class. Quantum Grav.* **7**, 1169 (1990).

- [58] James L. Anderson; “*Principles of Relativity Physics*”, ed. Elsevier Science and Technology Books (1967).
- [59] C. Rovelli; *Class. Quantum Grav.* **8** 297-316 (1991).
- [60] J. M. Bardeen; *Phys. Rev.* **D22**, 1882 (1980).
- [61] V. Fock, “*Theory of Space, Time and Gravitation*”, ed. Pergamon (1959).
- [62] R. Durrer; *Proceedings of the XIth Brazilian School of Cosmology and Gravitation* 202-240 (2004).
- [63] G. Veneziano; *Phys. Lett* **B265**, 287 (1991); M. Gasperini e G. Veneziano; *Astropart. Phys.* **1**, 317(1993); J. E. Lidsey, D. Wands, E. J. Copeland, *Phys. Rep.* **337**, 343 (2000); G. Veneziano; “*The Primordial Universe*”, *Les Houches, session LXXXI, ed. por P. Binétruy et. al. (EDP Science & Springer), Paris, 2000.*
- [64] J. Magueijo; *astro-ph/0305457, Rep. Prog. Phys.* **66** 2025 (2003).
- [65] A. Ashtekar; *Non Perturbative Canonical Gravity, IUCAA Lecture Notes, Syracuse, New York (1990).*
- [66] T. Thiemann; *Lect. Notes Phys.*, **631**, 41 (2003).
- [67] J. Polchinski; *String Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1998)*; M.B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten; “*Superstring Theory*”, *Cambridge University Press, Cambridge (1987)*; A. Lukas, B. A. Ovrut, D. Waldram, *Nucl. Phys. B532*, 43 (1998); *Phys. Rev. D57*, 7529 (1998).
- [68] A. Ashtekar, T. Panchowski e P. Singh; *Phys. Rev. Let.* **96**, 141301 (2006).
- [69] N. Pinto-Neto; *Cosmology and Gravitation II, ed. por Mário Novello, Editions Frontières (1996).*
- [70] J. B. Hartle, S. W. Hawking; *Physical Review* **D28**, 12, 2960 (1983).
- [71] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 651 (2002).
- [72] Bernard F. Schutz; *Physical Review* **D2**, 12, 2762 (1970).
- [73] Bernard F. Schutz; *Physical Review* **D4**, 12, 3559 (1971).
- [74] F. T. Falciano; *Dissertação de Mestrado, CBPF, abril de 2004.*
- [75] Patrick Peter, Emanuel J. C. Pinho, Nelson Pinto-Neto; *gr-qc/0605060, Phys.Rev.* **D73** 104017 (2006).
- [76] N. A. Lemos, *J. Math. Phys.* **37**, 1449 (1996).

- [77] N.Pinto-Neto, E. Sergio Santini; *Physics Letters* **A315**, 36 (2003).
- [78] E. J. C. Pinho, N. Pinto-Neto; *hep-th/0610192*, Scalar and Vector Perturbations in Quantum Cosmological Backgrounds.
- [79] Patrick Peter, Emanuel J. C. Pinho, Nelson Pinto-Neto; *hep-th/0509232*, *Tensor Perturbations in Quantum Cosmological Backgrounds*, *JCAP* 0507 014 (2005).
- [80] P. Peter, E. J. C. Pinho, N. Pinto-Neto; *hep-th/0610205*, *A non inflationary model with scale invariant cosmological perturbations*, *Phys. Rev.* **D75** 023516 (2007).
- [81] J. Martin, P. Peter, N. Pinto-Neto, D. J. Schwarz; *hep-th/0204222*, *Comment on "Density perturbations in the ekpyrotic scenario"*, *Phys. Rev.* **D67** 028031 (2003).
- [82] D. N. Spergel *et al.*; *astro-ph/0603449*, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*.