

Dissertação de Mestrado

**Modificações da Relatividade Geral e  
a Aceleração do Universo**

Rafael Serra Perez

Orientador: Nelson Pinto-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, Outubro 2006



## Resumo

Apresentamos uma modificação nas equações originais da Teoria da Relatividade Geral ao acrescentarmos escalares construídos a partir dos tensores de Riemann e de Weyl à lagrangiana gravitacional. As novas equações de movimento apresentam novos termos que podem se comportar como constante cosmológica em um universo levemente inhomogêneo.

# Abstract

We present an alternative to the original equations of General Relativity by including in the gravitational lagrangian a scalar constructed from the Riemann and Weyl tensors. The new field equations exhibit some new terms that may behave like a cosmological constant in a slightly non-homogeneous universe.

## Agradecimentos

Durante a elaboração desse trabalho algumas pessoas contribuíram muito para que o resultado fosse positivo. Cabe aqui mencioná-las:

- Nelson Pinto-Neto, como orientador e como professor, pela disposição, competência e simpatia;
- Meus pais, irmão e avó, pelo carinho e pelo irrestrito apoio à minha formação e à realização desse trabalho;
- Meus amigos Marco, Balbi, Heitor, Raposo, Tiquinho, Marcos, Lúcia, Miurrause, Tatiana, Aurélio, Guilherme, Brandão, Sônia e o pessoal do basquete, pela companhia e descontração no tempo livre;
- Minha namorada Lúcia pela companhia e afeto;
- Os pesquisadores do ICRA-BR e os colegas de cosmologia Érico, Tovar, Marcela, Felipe Poulis, Emanuel, Nilton e Diego, por serem os melhores companheiros de trabalho;
- Os meus colegas de CBPF: Boiúna, Maria, João Paulo, Rômulo, Gavini, Gabriel, Diogo, Nuno, Andrézinho, Murilo, Carolina e Martin, por fazerem da instituição o melhor lugar de trabalho da cidade;
- Os amigos que fiz na Física: Fernando, Maria João, Miatã e Álvaro;
- Ricardo, Myriam e Mônica, por toda a ajuda prestada;
- O CNPq, pelo apoio financeiro.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Aceleração do Universo</b>	<b>5</b>
2.1	Cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	5
2.2	Aceleração do universo . . . . .	9
2.3	Energia Escura . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Possíveis Explicações para a Aceleração do Universo</b>	<b>20</b>
3.1	Energia do Vácuo . . . . .	20
3.2	Quebra Espontânea de Simetria . . . . .	22
3.3	Considerações Numerológicas . . . . .	25
3.4	Quintessência e K-essência . . . . .	26
3.5	Gás de Chaplygin . . . . .	32
3.6	Modificação na TRG . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modificações para a Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1915, Albert Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (TRG) [1], que descrevia a gravidade como a curvatura do espaço causada por uma distribuição de matéria e/ou radiação. Uma das principais aplicações da teoria é a cosmologia, já que a evolução do universo é quase que inteiramente regida pela interação gravitacional (pois é de longo alcance e o universo é eletricamente neutro). Por possibilitar a existência de universos curvos, Einstein supôs que o universo é finito porém sem fronteiras, como a superfície de uma esfera, além de estático.

No entanto, as equações de Einstein não permitiam a existência de um universo estático. Ele então realizou uma modificação em sua teoria acrescentando um termo extra, que chamou de “constante cosmológica” ( $\Lambda$ ), que provocasse uma força repulsiva de forma a contrabalançar a atração gravitacional.

Posteriormente, V.M. Slipher e E. Hubble observaram, ao medir o desvio

espectral da luz de galáxias distantes, que o universo é dinâmico, mais precisamente em expansão. A constante cosmológica não era mais necessária, já que havia perdido a sua motivação original. Alguns anos antes, A. Friedmann havia proposto uma solução para as equações de Einstein (sem a constante cosmológica) que descrevia o universo observado. Essa solução se tornou então ponto central do modelo padrão da cosmologia.

As décadas se passaram e, em 1998, as observações do *Supernova Cosmology Project* [2] e do *High-Z Supernova Search Team* [3] se mostraram inconsistentes com um universo plano sem constante cosmológica. A análise espectral de supernovas do tipo Ia indicaram que o universo está sofrendo uma aceleração positiva. A constante cosmológica voltou a ser discutida, dessa vez por gerar um efeito repulsivo do próprio vácuo.

Combinando os dados de supernovas com a da radiação cósmica de fundo (CMB) [4], obtemos uma densidade de energia para a constante cosmológica de  $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$  e para a matéria de  $\Omega_m \simeq 0,3$ , sugerindo um universo plano e dominado por  $\Lambda$ .

Desde que  $\Lambda$  apareceu na cosmologia pela primeira vez, em 1917, até essas recentes observações, muitos progressos foram feitos na física fundamental, de forma que hoje há diversas hipóteses sobre a natureza desse novo constituinte do universo. Em qualquer caso, se estamos lidando com uma nova forma de energia, ela não pode ser detectada através de observações astronômicas e portanto é chamada de “energia escura”. Além de explicar



a aceleração do universo atual, a energia escura também pode explicar outra questão do modelo padrão que é a inflação primordial, necessária para explicar o alto grau de homogeneidade e isotropia do universo. Os modelos de energia escura provenientes da física fundamental encaram dificuldades quanto as altas energias envolvidas e fracassam em reproduzir as densidades de energia observadas. Há também modelos fenomenológicos que reproduzem o comportamento de  $\Lambda$  mas necessitam de um ajuste fino de condições iniciais para estar de acordo com as observações, além é claro de carecer de uma explicação física satisfatória.

Outra possibilidade é a modificação da TRG. Apesar de parecer radical, há o precedente do próprio Einstein ao incluir a constante cosmológica de forma a obter o universo em que se acreditava na época. Dessa vez, as observações questionam a validade das equações, tornando razoável qualquer tentativa por esse caminho. No entanto, a TRG possui alguns sucessos experimentais que não podem ser questionados assim tão imediatamente. As experiências em laboratório e a observação do desvio geodésico da luz no sistema solar mostram que a solução de Schwarzschild para a equação de Einstein é bastante precisa ao descrever a gravidade de uma distribuição esférica e estática de matéria. A própria solução de Friedmann pode ser considerada um sucesso teórico na tentativa de desvendar a evolução do universo, ainda que falte uma considerável lapidação nas arestas desse modelo. Entre os acertos do modelo de FRW podemos citar a previsão da radiação cósmica de fundo, a precisão em descrever a nucleossíntese primordial e a medição das distâncias de galáxias através do desvio para o vermelho cosmológico.

Ainda assim, o objetivo deste trabalho é procurar uma modificação para a Relatividade Geral onde desejamos obter uma dinâmica para o universo que descreva tanto a aceleração atual como um período inflacionário, sem comprometer os sucessos da teoria original. Mas antes disso, veremos um resumo do modelo dinâmico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e os principais modelos considerados atualmente para a energia escura.

# Capítulo 2

## A Aceleração do Universo

### 2.1 Cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker

O ponto central da TRG é a sua equação para a gravitação, que relaciona a geometria com o conteúdo de matéria em um espaço quadri-dimensional riemanniano [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Ou, com a constante cosmológica, escrevemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

O modelo de Friedmann é representado por uma geometria homogênea e isotrópica, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.3)$$

onde  $k$  pode assumir os valores  $-1$  (geometria hiperbólica),  $0$  (geometria plana) ou  $+1$  (geometria esférica) e  $a(t)$  é o fator de escala, dependente apenas do tempo. Considerando a matéria do universo como um fluido perfeito, e fixando  $c = 1$ , as equações de Einstein (sem a constante cosmológica) com a métrica de Friedmann ficam na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  é a pressão desse fluido cosmológico, que obedecem a relação de conservação:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) = 0 \quad (2.6)$$

Os pontos  $(\cdot)$  indicam derivada em relação à coordenada temporal  $t$ .

As equações (2.4) e (2.5) descrevem um universo em expansão desacelerada ou contração acelerada pela força atrativa da gravidade. As observações de E. Hubble, em 1929, nos mostraram que de fato o universo se expande com uma taxa que pode ser determinada pela análise espectral de galáxias distantes.

É conveniente para nós expressarmos essas equações em termos dos parâmetros observáveis  $H_0$  e  $q_0$ , que são os valores da constante de Hubble e o parâmetro de desaceleração

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \quad q_0 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (2.7)$$

medidos em  $t = t_0$ , ou seja, nos dias de hoje. Um ponto que vale a pena ser mencionado é que, até alguns anos atrás, acreditava-se que a dinâmica do universo era dominado pela energia da matéria (veremos adiante que descobertas recentes nos fizeram questionar essa afirmação). Enquanto que a densidade de energia de radiação decaí com  $a^{-4}$ , a densidade de energia da matéria ( $\propto a^{-3}$ ) passaria a ter um papel dominante à medida que o fator de escala aumentasse com a expansão do universo. Assim, haveria um domínio muito breve para a radiação ( $\sim 40$  mil anos) e um domínio da matéria até os dias de hoje. Isso nos permite fazer a aproximação  $\rho_0 \gg p_0$ , já que matéria exerce pressão  $p_m = 0$ . Então a partir das equações (2.4) e (2.5), eliminando  $\rho$ , obtemos uma relação para a curvatura espacial  $k$  em função dos observáveis  $H_0$  e  $q_0$

$$\frac{k}{a_0^2} = (2q_0 - 1) H_0^2, \quad (2.8)$$

e comparando com (2.5), obtém-se que:

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 2q_0, \quad \text{onde } \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.9)$$

O parâmetro  $\rho_c$  representa a densidade crítica de energia do universo. Caso  $\rho_c < \rho_0$ , temos que  $k = +1$ , e então o universo é espacialmente fechado, sendo finito porém sem fronteiras. Para esse universo, a densidade de energia é suficiente para que sua atração gravitacional cesse a expansão e inicie uma fase de contração. Futuramente, o universo findará em um volume muito pequeno, mais ou menos como teria sido em seus primeiros dias.

O caso em que  $q_0 \leq \frac{1}{2}$  representa um espaço aberto, com  $k = 0$  para  $\rho_c = \rho_0$  e  $k = -1$  para  $\rho_c > \rho_0$ . Para esse universo, a atração gravitacional da matéria não será capaz de frear a expansão do universo. O futuro do universo promete ser um grande vazio com pequenas ilhas de matéria na forma de galáxias de estrelas anãs.

A forma dessas equações nos é conveniente quando consideramos que a densidade de energia é representada apenas por matéria bariônica e radiação. Porém, as observações atualmente apontam uma dinâmica para o universo em que esses não podem ser os únicos constituintes do universo, ao menos para a Teoria da Relatividade Geral como a conhecemos.

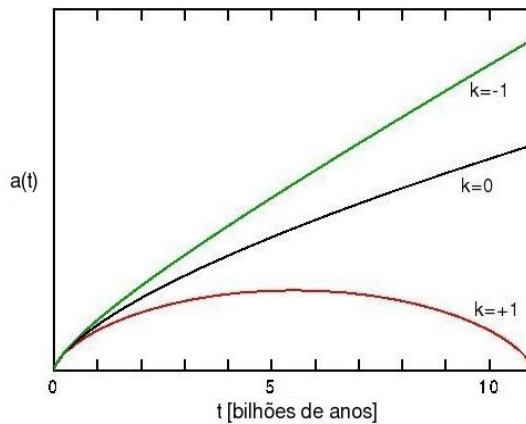


Figura 2.1: Evolução do fator de escala para cada valor de  $k$

## 2.2 Aceleração do universo

Nos últimos anos, os astrofísicos observacionais passaram a utilizar supernovas do tipo Ia para calibrar as estimativas de luminosidade de objetos celestes distantes, devido à pequena dispersão da luz dessas estrelas e porque sua luminosidade está diretamente relacionada ao seu diâmetro aparente. Esperavam, ao medirem o desvio para o vermelho dessas supernovas, obter valores de  $H_0$  e  $q_0$  para grandes distâncias.

No entanto, as observações ([2],[3]) sugeriram um cenário diferente para o universo. As medições do desvio para o vermelho das supernovas indicaram uma aceleração positiva para o fator de escala  $a(t)$ . Essas observações sugerem que deve existir um termo cosmológico positivo na equação (2.4). No lugar desse termo, que ainda não possui explicação física, podemos utilizar a constante cosmológica de Einstein da equação (2.2). Assim, obtemos a partir

da métrica de Robertson-Walker as equações:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.11)$$

Essas equações podem ser expressas em apenas uma, ao eliminarmos  $\rho$  (e fazendo que em nossa época  $\rho \gg p$ ):

$$\frac{k}{a_0^2} - \Lambda = (2q_0 - 1) H_0^2 \quad (2.12)$$

Diferente do caso sem constante cosmológica, vemos que um universo fechado ( $k = +1$ ) pode, sob certas circunstâncias, se expandir para sempre. No entanto, observações recentes da radiação cósmica de fundo indicam que o universo possui uma geometria bem próxima da plana.

Uma visão mais qualitativa sobre um universo com constante cosmológica pode ser obtida se escrevermos (2.11) na seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 + V(a) = E, \quad (2.13)$$

onde fizemos as substituições:

$$V(a) = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{\Lambda}{6}a^2 \quad \text{e} \quad E = -\frac{k}{2} \quad (2.14)$$



Em um universo dominado pela matéria, como é o caso do nosso universo na fase atual, a densidade de energia decresce com o volume:

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \quad (2.15)$$

Então, o potencial  $V(a)$  obedece a relação:

$$V(a) = -\frac{C}{a} - \frac{\Lambda}{6}a^2 \quad (2.16)$$

Temos acima uma expressão análoga ao movimento clássico unidimensional de uma partícula com energia  $E$  submetida a um potencial  $V(a)$ . Esse potencial possui a forma:

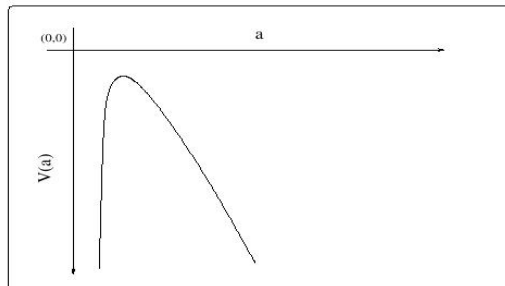


Figura 2.2: Potencial  $V(a)$

Um universo com constante cosmológica permite diversos modelos. Para  $k = +1$  temos modelos oscilatórios, modelos de *bounce*, o modelo estático de Einstein, modelos quasi-estáticos, etc. Para  $k = 0, -1$ , o valor de  $E = -\frac{k}{2}$  é sempre positivo e maior que o potencial  $V(a)$ , e portanto o movimento

não possui fronteiras. O universo se expande para sempre. Então não há modelos oscilatórios, de *bounce* ou quasi-estáticos para um universo com geometria plana ou hiberbólica. Nesse trabalho, não falaremos desses modelos, mas os citamos apenas por razões ilustrativas de como a cosmologia passou a ter diversas possibilidades desde que a aceleração do universo foi observada.

Usualmente, podemos incluir a constante cosmológica no termo de densidade de energia da equação (2.11)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.17)$$

onde

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.18)$$

é a densidade de energia de  $\Lambda$ . O termo  $\rho_m$  representa a densidade de energia da matéria como estrelas, nebulosas, matéria escura (veremos adiante), etc., e estamos tomando como desprezível a densidade de energia da radiação.

A equação (2.17) pode ser escrita em termos da densidade de energia relativa  $\Omega$

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \quad (2.19)$$

com

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad , \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \quad (2.20)$$

Com essas novas definições, obtemos para o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \quad (2.21)$$

para o universo plano, cuja densidade de energia total  $\Omega_T = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ .

Então temos:

$$q_0 = \frac{3}{2}\Omega_m - 1 \quad (2.22)$$

Dessa equação vemos que um universo plano estará acelerado se  $\Omega_m < \frac{2}{3}$ .

A constante de Hubble  $H_0$  nos apresenta ainda uma questão adicional: a idade do universo. A presença de  $\Lambda$  leva a um universo mais velho e mais de acordo com as observações. Um universo plano, com  $\Lambda = 0$ , nos dá um fator de escala  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ , e então obtemos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3} \frac{t^{-1/3}}{t^{2/3}}, \quad (2.23)$$

que nos dá:

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (2.24)$$

O valor de  $H_0$  medido atualmente ( $H_0 \approx 72$  km/s/Mpc) nos dá uma idade

de aproximadamente 9 bilhões de anos, menor do que as idades dos aglomerados globulares mais antigos ( $\sim 13$  bilhões de anos). Por outro lado, um universo plano sem constante cosmológica e vazio (uma boa aproximação caso  $\Omega_m \leq 0,2$ ), nos dá  $a \propto t$ , e então:

$$t_0 = H_0^{-1} \quad (2.25)$$

que é uma idade de no máximo 13,5 bilhões de anos. Dessas duas equações, obtemos o intervalo de tempo possível para a idade de um universo dominado por matéria:  $\frac{2}{3}H_0^{-1} \leq t_0 \leq H_0^{-1}$ . Já um universo plano com constante cosmológica e poeira nos dá uma idade [5]

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \left[ \frac{1}{2\Omega_\Lambda^{\frac{1}{2}}} \log \left( \frac{1 + \Omega_\Lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \Omega_\Lambda^{\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad (2.26)$$

que é consideravelmente maior do que a modelos com  $\Omega_\Lambda = 0$ . A idade do universo nesse caso pode até ser maior do que  $H_0^{-1}$  se  $\Omega_\Lambda > 0,71$ .

A análise espectral das supernovas Ia, combinada com dados da radiação cósmica de fundo (*WMAP* [4]), nos dá uma expectativa quanto à densidade de energia da matéria e de  $\Lambda$ . As medições atuais indicam<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Observações na década de 30 constataram, ao se medir a velocidade dos discos galácticos, que as galáxias necessitam de uma atração gravitacional muito maior do que a exercida pelos objetos visíveis para se manterem coesas. Essa atração extra foi creditada a uma forma desconhecida e invisível de matéria, responsável por 96% de toda a matéria contida nas galáxias e que foi chamada de “matéria escura fria”.

$$\begin{aligned}
\Omega_{me} &= 0,2383 \pm 0,013 && \text{para matéria escura fria} \\
\Omega_{mb} &= 0,0418 \pm 0,009 && \text{para matéria bariônica visível} \\
\Omega_{\Lambda} &= 0,72 \pm 0,04 && \text{para } \Lambda
\end{aligned} \tag{2.27}$$

o que sugere um universo muito próximo do plano ( $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} \approx 1$ ). Esses valores nos apontam para uma densidade de energia

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4 \tag{2.28}$$

e de acordo com (2.26), uma idade para o universo de aproximadamente 13,7 bilhões de anos.

## 2.3 Energia Escura

Até agora, temos chamado de  $\Lambda$  o termo responsável pela aceleração do universo. Mas esse termo não é necessariamente a constante cosmológica. A constante cosmológica é um termo geométrico constante acrescentado à mão por Einstein nas suas equações de forma a obter possibilidades de regimes estáticos ou quasi-estáticos para o universo. No entanto, é possível que fenômenos físicos também possam provocar aceleração no fluido cósmico. Veremos no capítulo seguinte que a energia do vácuo, do efeito Casimir, pode

ser reponsável por isso. Mas há também a possibilidade de uma forma de energia ou matéria ainda desconhecida seja dominante em escalas cosmológicas. Esse novo componente, que possuiria uma densidade de energia  $\Omega \approx 0,7$ , é usualmente chamado de “energia escura”, e possui algumas características incomuns:

1. Não se aglomera gravitacionalmente, pelo menos nas escalas em que observamos aglomerações de matéria bariônica ou escura;
2. Se comporta como um fluido que viola a condição de energia forte, com pressão altamente negativa. De acordo com a equação de conservação (2.6), uma densidade de energia constante nos dá  $p = -\rho$ .

Apesar de  $\Lambda$ , *stricto sensu*, representar a constante cosmológica, alguns modelos de energia escura ou energia do vácuo são capazes de gerar um tensor momento-energia com efeitos semelhantes aos de  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , e assim, pouco se pode dizer sobre a natureza desse novo componente do universo, seja ele a constante cosmológica ou qualquer forma de energia. Então, ao longo desse trabalho, tomaremos a liberdade de chamar igualmente de  $\Lambda$  o termo que produza uma aceleração ao universo com o mesmo comportamento de uma aceleração gerada pela constante cosmológica.

Outro ponto que deve ser mencionado é que a aceleração do universo é um fato recente. Da equação (2.10) vemos que para valores pequenos de  $a(t)$ , o universo vive uma fase desacelerada. Somente após um longo tempo de ex-

pansão, com valores de  $a(t)$  maiores, o termo envolvendo  $\Lambda$  passou a dominar a dinâmica do universo. O desvio para o vermelho cosmológico do momento em que o universo passou da fase desacelerada para uma fase acelerada pode ser calculado, a partir de (2.10) com  $\ddot{a} = 0$

$$-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = 0, \quad (2.29)$$

onde podemos expressar  $\rho$  em termos do *redshift*  $(1+z) = a_0/a$

$$-\frac{4\pi G}{3}\rho = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0(a_0)^3}{a^3} = -\frac{\Omega_m^0 H_0^2}{2}(1+z)^3 \quad (2.30)$$

e também

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 H_0^2 (1+z)^\sigma, \quad (2.31)$$

onde  $\sigma = 3(1+w)$ . No caso da matéria,  $w = 0$  e conseqüentemente  $\sigma = 3$ . De volta à equação (2.29):

$$-\Omega_m^0 (1+z)^3 + 2\Omega_\Lambda^0 (1+z)^{3(1+w)} = 0, \quad (2.32)$$

que nos dá

$$(1+z_a)^{-3w} = 2 \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}, \quad (2.33)$$

onde  $z_a$  representa o redshift no início da aceleração. No caso da energia

escura,  $w = -1$ . Com  $\Omega_\Lambda^0 \simeq 0,7$  e  $\Omega_m^0 \simeq 0,3$ , obtemos  $z_a \simeq 0,7$ , o que de fato indica um fenômeno muito recente. Isso nos sugere que estamos vivendo em uma época especial do universo em que a densidade de energia da matéria e da energia escura são comparáveis. Essa situação é chamada de “coincidência cósmica”.

Ainda podemos verificar em que momento  $\Lambda$  passou a dominar a dinâmica do universo. Igualando as densidades de energia da matéria e de  $\Lambda$ , obtemos:

$$\Omega_m^0(1+z)^3 = \Omega_\Lambda^0(1+z)^{3(1+w)} \quad (2.34)$$

Então, o equilíbrio entre matéria e  $\Lambda$  ocorre quando o desvio para o vermelho cosmológico é

$$(1+z_{eq})^3 = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}\right)^{-\frac{1}{w}}, \quad (2.35)$$

nos dando  $z_{eq} \simeq 0,3$ . Com  $z_a > z_{eq}$ , vemos que o universo começou a acelerar quando ainda era dominado pela matéria.

O fato do universo só ter começado a acelerar recentemente não significa que  $\Lambda$  não tenha atuado durante o longo período de domínio de matéria. A aceleração só começou porque o universo agora é demasiado grande, de forma que a matéria se tornou muito rarefeita e não exerce mais a força atrativa de outrora. Assim, a densidade de energia constante de  $\Lambda$  passaria a dominar nessa época. Devemos ter isso em mente ao procurarmos can-



didatos para a energia escura. O modelo deve garantir uma densidade de energia  $\sim 10^{-47}\text{GeV}^4$ , de forma que ela passe a dominar precisamente nos dias de hoje, além de possuir uma origem relacionada ao domínio da matéria, mais precisamente ao período de formação de estruturas. Mas veremos no capítulo seguinte que os modelos propostos hoje em dia possuem severas dificuldades em contornar o problema da coincidência cósmica e dessa precisão quantitativa.

## Capítulo 3

# Possíveis Explicações para a Aceleração do Universo

Nesse capítulo, tentaremos listar algumas possibilidades de explicação física para a energia escura. No entanto, poucas são aquelas embasadas em alguma teoria bem sucedida anterior, enquanto que a maioria se resume a novas hipóteses de alguma interação física que está sendo pela primeira vez observada.

### 3.1 Energia do Vácuo

Classicamente, o vácuo é um estado fundamental com pressão e energia nulas. Porém, sabemos da Mecânica Quântica que o estado fundamental de um oscilador possui energia não-nula, pois um oscilador quântico não pode ter simultaneamente posição e velocidade iguais a zero. A energia de um

oscilador quântico no estado fundamental é  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$  e então, após segunda quantização, podemos considerar o vácuo como um *ensemble* de vários osciladores desse tipo com espectro de frequência  $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ , com energia:

$$E = \sum_k \frac{1}{2}\hbar\omega(k) \quad (3.1)$$

Ou seja, graças ao princípio de incerteza, o vácuo quântico possui energia e pressão, como demonstrado pelo efeito Casimir [6]. No entanto, a energia do vácuo quântico associada à flutuação de ponto-zero (um *loop*) é infinita, gerando assim um enorme problema para esse modelo de energia escura. Substituindo o somatório por uma integral em (3.1), obtemos [7]

$$E = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega(k) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \omega(k) d^3k = \frac{\hbar V}{4\pi^2} \int_0^\infty k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk, \quad (3.2)$$

que diverge para  $k \rightarrow \infty$ . Uma maneira de contornar esse problema seria supor que a escala de Planck nos dá um limite superior natural no ultravioleta para qualquer campo quântico. Mesmo assim, isso nos daria  $\rho \sim c^5/G^2\hbar \sim 10^{76}\text{GeV}^4$ , que é 123 ordens de grandeza superior ao valor observado de  $\rho_\Lambda \simeq 10^{-47}\text{GeV}^4$ . Um limite superior para a integral na escala da cromodinâmica quântica, apesar de inferior, ainda assim geraria uma energia 40 ordens de grandeza maior:  $\rho_{QCD} \sim 10^{-3}\text{GeV}^4$ .

Para a gravitação newtoniana, isso não chega a representar qualquer problema, já que as interações entre partículas não ocorre em função do valor do potencial, mas em função do gradiente  $\nabla V$ . Assim, poder-se-ia redefinir

$V' \rightarrow V + V_0$  de forma que  $V'$  tivesse energia nula no estado fundamental. Mas de acordo com a relatividade geral, qualquer forma de energia se acopla com a gravidade, como descreve a equação de Einstein. Assim, a energia do vácuo quântico também gera gravitação. Para sabermos como isso ocorre, precisamos obter de que forma essa energia gera um tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ . Ya.B. Zeldovich resolveu essa questão sugerindo que a equação de estado do vácuo deve ter a forma  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ , possuindo então a mesma equação de estado que a constante cosmológica, e analogamente com  $T_{\mu\nu}^{vac} = \Lambda g_{\mu\nu}$ .

Na década de 80, a criação da supersimetria deu novas esperanças àqueles que desejavam dar um fim aos valores infinitos que aparecem nesse cenário. As contribuições de férmions e bósons para a energia do vácuo possuiriam sinais opostos mas com a mesma magnitude, de forma que uma cancelasse a outra (dada a simetria entre bósons e férmions) e o problema da energia infinita se resolveria. No entanto, supersimetria só pode existir em regimes de alta temperatura (com escala de energia 1-10 TeV). Assim, um *cutoff* na escala de supersimetria nos dá uma densidade de energia  $\rho_\Lambda \sim 10^{15} \text{GeV}^4$ , ou 60 ordens de grandeza maior do que o valor observado, o que melhora mas não resolve a questão.

## 3.2 Quebra Espontânea de Simetria

O modelo de quebra espontânea de simetria [8] parte de um campo escalar com densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}, \quad (3.3)$$

com potencial  $V(\phi)$  assim definido:

$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (3.4)$$

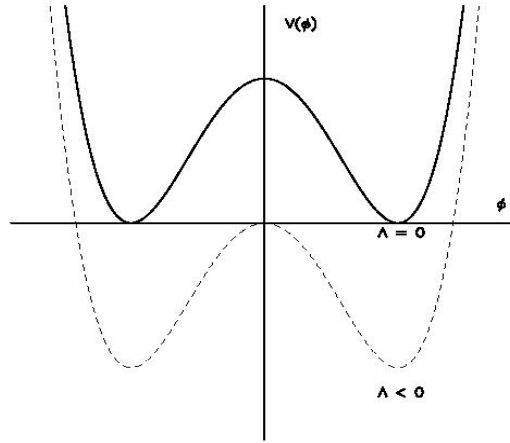


Figura 3.1: Potencial  $V(\phi)$ .

Imediatamente podemos perceber que o estado  $\phi = 0$  é instável, visto que  $V''(0) < 0$ . Assim, o sistema se assenta nos estados estáveis  $\phi = \sqrt{\mu^2/\lambda}$  ou  $\phi = -\sqrt{\mu^2/\lambda}$ , e nesses pontos não apresenta mais a simetria  $\phi \leftrightarrow -\phi$ , presente na lagrangiana.

O tensor momento-energia desse modelo é

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.5)$$

de onde, assumindo que  $\phi$  é homogêneo e independente do tempo, obtemos:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V(\phi = \sqrt{\mu^2/\lambda}) \quad (3.6)$$

A equação acima possui a mesma forma de uma constante cosmológica efetiva  $\Lambda_{eff} = 8\pi G(V_0 - \mu^4/4\lambda)$ . No caso de  $V_0 = 0$  temos o cenário de uma constante cosmológica negativa (linha tracejada na figura 3.1). A escolha do parâmetro livre  $V_0$  deve ser feita com cuidado de forma a se obter  $\Lambda_{eff}/8\pi G \simeq 10^{-47}\text{GeV}^4$ . Assim, devemos ter  $V_0 \sim \mu^4/4\lambda$  com precisão de 47 casas decimais. Essa situação é conhecida como o “problema de ajuste fino da cosmologia”. Qualquer flutuação no valor final de  $\Lambda_{eff}$  poderia provocar situações desastrosas para a cosmologia. Se  $\Lambda_{eff}/8\pi G < -10^{-43}\text{GeV}^4$ , a constante cosmológica exerceria uma força atrativa suficiente para provocar o colapso do universo antes de atingir a idade necessária para a formação de estrelas e galáxias, e conseqüentemente para o surgimento de vida. Mas no caso de  $\Lambda_{eff}/8\pi G > 10^{-43}\text{GeV}^4$ , a força repulsiva da constante cosmológica faria com que o universo começasse a acelerar antes da formação de sistemas unidos gravitacionalmente, criando igualmente um cosmos estéril.

Essa questão de existir um estreito intervalo de condições iniciais possíveis é um problema que assombra diversos modelos de campos escalares. Esse cenário tem levado pesquisadores [9] a sugerir argumentos de natureza antrópica para justificar o modelo, ou seja, se o universo possuísse qualquer uma das inúmeras possibilidades diferentes daquela que permite vida não haveria

físicos ou astrônomos se perguntando porque o universo possui tal configuração.

Além do problema de ajuste fino, onde se desconhece qualquer simetria da natureza que imponha um valor de  $\Lambda$  tão precisamente, há ainda a questão sobre a natureza do campo escalar  $\phi$ . Não se conhece qualquer campo que possua tal homogeneidade e independência de tempo que permita a esse modelo representar o fenômeno observado da aceleração do universo.

### 3.3 Considerações Numerológicas

Esses modelos vistos nas últimas seções reproduzem de fato a energia escura, mas com dificuldades com relação ao valor das grandezas envolvidas. A necessidade de condições iniciais extremamente precisas dão um certo descrédito a essas possibilidades. No entanto, ao olharmos os resultados quantitativos, podemos imaginar se não há nenhuma constante fundamental da física envolvida de forma a nos presentear com um valor próximo do observado. Considerações desse tipo podem ser feitas de maneira puramente especulativa, por exemplo, fazendo [10]

$$\rho_\Lambda = \frac{\rho_{Pl}}{(2\pi^2)^3} e^{-2/\alpha}, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha = e^2/\hbar c$  é a constante de estrutura fina e  $\rho_{Pl}$  é a densidade de energia de Planck, com valor aproximado de  $5 \times 10^{93} g\ cm^{-3}$ . Essa consideração

numerológica nos dá um valor bem próximo do que se espera para a energia escura, com  $\rho_\Lambda \simeq 6,29 \times 10^{-30} g \text{ cm}^{-3}$ . A princípio,  $\alpha$  poderia ser uma constante fundamental relacionada à energia escura, assim como a “constante de corda” na teoria de supercordas.

Outra possibilidade é novamente explorar a conexão entre as flutuações quânticas de ponto-zero e  $\Lambda$ . De acordo com Zeldovich, após a remoção das divergências, a densidade de energia de um par virtual partícula-antipartícula interagindo gravitacionalmente é [11]

$$\rho_\Lambda \sim \frac{Gm^2}{\hbar c} m \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^3, \quad (3.8)$$

onde  $\hbar/mc = \lambda$  é a separação entre a partícula e a antipartícula. Em termos do diagrama de Feynman, isso corresponde à energia associada com o gráfico de dois *loops*. A contribuição de um par próton-antipróton resultaria em um valor muito grande para  $\rho_\Lambda$ , enquanto que a de um par elétron-pósitron daria um valor muito pequeno. Porém, é interessante notar que o par pión-antipión contribui com o valor correto:  $\rho_\Lambda \simeq 6,91 \times 10^{-30} g \text{ cm}^{-3}$ .

### 3.4 Quintessência e K-essência

Se desejamos encontrar alguma teoria física que possa gerar um termo tipo- $\Lambda$ , temos que estar cientes que ela precisará superar o problema de ajuste fino, além de descrever a dinâmica observada no universo. A constante cos-



mológica possui um valor minúsculo comparado com a escala de Planck ( $\rho_\Lambda/M_{Pl}^4 \sim 10^{-123}$ ) e eletrofraca ( $\rho_\Lambda/M_{ef}^4 \sim 10^{-55}$ ). Além disso, durante a expansão do universo, a densidade de energia da matéria decai com  $a^{-3}$  enquanto que a densidade de energia escura permanece constante, de forma que é necessário um ajuste cuidadoso com as condições iniciais para que  $\Lambda$  comece a atuar precisamente no período de formação de estruturas e a dominar nos dias atuais, e assim oferecer uma explicação para a coincidência cósmica.

Em uma abordagem diferente, podemos desejar que o fenômeno da aceleração atual do universo seja causado por um termo dinâmico, que teria sido responsável também pela inflação primordial. Dessa forma, o termo  $\Lambda$  não seria mais uma constante, como introduzido pela primeira vez por Einstein, mas variável no tempo, sendo mais um grau de liberdade dinâmico, ou talvez alguma forma desconhecida de energia / matéria, atualmente chamada de “energia escura”.

Para descrevermos quantitativamente esse novo grau de liberdade (ou nova forma de matéria), alguns modelos com um termo dinâmico tipo- $\Lambda$  foram sugeridos. Esses modelos são puramente fenomenológicos, ou seja, não são derivados de teorias físicas conhecidas, ao contrário dos modelos anteriores.

Os modelos de campo escalar são os mais fundamentais, e podem ser utilizados em cenários diferentes de FRW. Além disso, caso necessário, sua quantização pode ser feita de forma direta. Usualmente, modelos dinâmicos

são chamados “quintessência”. O caso mais simples e natural para o modelo de campo é representar um campo escalar  $\phi$  com um potencial  $V(\phi)$  minimamente acoplado com a gravidade, já que o acoplamento mínimo funciona muito bem na dinâmica inflacionária. A densidade lagrangina da quintessência é

$$\mathcal{L}_{quint} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right\}, \quad (3.9)$$

que nos dá o tensor momento-energia

$$T^0_0 \equiv \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad -\frac{1}{3} T^i_i \equiv p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.10)$$

e a equação de movimento para o campo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.11)$$

O campo escalar, ao se submeter a esse potencial, lentamente gera um termo tipo- $\Lambda$  já que  $p \simeq -\rho \simeq -V(\phi)$ , desde que  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . Potenciais que satisfazem  $V''V/(V')^2 \geq 1$  possuem a propriedade interessante em que diversas condições iniciais geram um processo evolucionário comum ao campo escalar, sugerindo uma resposta ao problema da coincidência cósmica [12]. Por exemplo, a densidade de energia do campo escalar, com o potencial  $V(\phi) = V_0/\phi^\alpha$ , é [13]

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{V_0}{\phi^\alpha} \quad (3.12)$$

e é subdominante no passado distante, como nos garante a radiação cósmica de fundo e as condições da nucleossíntese, com  $\rho_\phi < \rho_{vis}$  para  $z \gg 1$  ( $\rho_{vis}$  é a densidade de energia dos componentes conhecidos do universo, como matéria, radiação, etc.). Assumindo  $a \propto t^q$ , obtemos a equação de movimento para o campo

$$\ddot{\phi} + \frac{3q}{t}\dot{\phi} - \frac{\alpha V_0}{\phi^{1+\alpha}} = 0, \quad (3.13)$$

com solução  $\phi \propto t^p$ , com  $p = 2/(2 + \alpha)$ . Substituindo em (3.12), obtemos  $\rho_\phi \propto t^{2p-2}$ . Comparando com a densidade de energia dos componentes conhecidos  $\rho_{vis} \propto t^{-2}$ , obtemos a razão entre as duas densidades:

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_{vis}} \propto t^{\frac{4}{2+\alpha}} \quad (3.14)$$

Ou seja, o campo escalar pode vir a ser dominante em tempos recentes, mesmo não tendo dominado durante toda a história do universo, caso  $\alpha > 0$ . A época em que a quintessência passa a ser dominante pode ser ajustada através do valor de  $\alpha$ .

Outras possibilidades de potencial são  $m^2\phi^2$  [15],  $V_0 e^{-\lambda\phi}$  [16],  $V_0 \sinh^{-\alpha}(\lambda\phi)$  [17],  $V_0 e^{\lambda\phi^2}/\phi^\alpha$  [18],  $V_0 e^{M_{pl}/\phi-1}$  [19], etc.

Agora podemos trilhar o caminho inverso. Como o campo de quintessência possui uma função livre  $V(\phi)$ , é possível escolher uma forma para ela de

modo que produza um determinado valor de  $H(a)$ . Explicitamente, vamos assumir que o universo possui duas formas de energia distintas com densidade de energia  $\rho(a) = \rho_{vis}(a) + \rho_\phi(a)$ . Usando as equações de Friedmann, chegamos à seguintes expressão para o potencial [14]

$$V(a) = \frac{1}{16\pi G} H(1-Q) \left[ 6H + 2aH' - \frac{aHQ'}{1-Q} \right] \quad (3.15)$$

e para o campo

$$\phi(a) = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}} \int \frac{da}{a} \left[ aQ' - (1-Q) \frac{d \ln H^2}{d \ln a} \right], \quad (3.16)$$

onde  $Q(a) \equiv 8\pi G \rho_{vis}/3H^2$  e  $(\cdot)$  representa diferenciação em relação ao fator de escala  $a$ . Dado qualquer valor de  $H(a)$  e  $Q(a)$ , essas equações determinam os valores de  $V(a)$  e  $\phi(a)$ , e conseqüentemente, o potencial  $V(\phi)$ .

Outro tipo de campo escalar, diferente da quintessência, é o campo conhecido como “k-essência”. Esse tipo apresenta uma lagrangiana com um termo cinético não-linear, com a forma [20]

$$\mathcal{L}_k = \sqrt{-g} F(X)V(\phi), \quad (3.17)$$

onde  $X = \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi$ . O tensor momento-energia é então

$$T_{\mu\nu} = VF' \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} VF, \quad (3.18)$$

onde  $(\cdot)$  representa derivada em  $X$ . Com isso, obtemos a densidade de energia da K-essência

$$\rho_k \equiv T_0^0 = V(2F'X - F) \quad (3.19)$$

e pressão

$$p_k \equiv -\frac{1}{3} T_i^i = VF \quad (3.20)$$

Assim, temos uma equação de estado que não depende de  $V(\phi)$

$$w_k = \frac{p_k}{\rho_k} = \frac{F}{2F'X - F} = \frac{1}{F^2 \left(\frac{X}{F^2}\right)'}, \quad (3.21)$$

mas devido à arbitrariedade de  $F(X)$ , qualquer  $w_k$  pode ser descrito pela lagrangiana (3.17), podendo assim reproduzir a energia escura desde que se use uma função apropriada.

Modelos de campo escalar são puramente fenomenológicos e portanto não nos ajudam muito a entender a natureza da energia escura. Esses modelos possuem pouco poder de previsão, já que qualquer dinâmica para  $a(t)$  pode ser obtida para um potencial escolhido apropriadamente. Vimos também que duas formas diferentes de lagrangiana (quintessência e k-essência) podem nos levar a uma mesma equação de movimento, tornando difícil propor uma lagrangiana unívoca para o campo escalar. E por que o campo  $\phi$  não

se acopla com nenhum outro campo além da métrica? Além disso, temos ainda o problema de ajuste fino para o potencial  $V(\phi)$  de forma a torná-lo compatível com as observações.

### 3.5 Gás de Chaplygin

Um modelo diferente, mas interessante, de energia escura é o gás de Chaplygin [21], que possui a equação de estado

$$p_c = -\frac{A}{\rho_c}, \quad (3.22)$$

onde a densidade de energia evolui com o comportamento

$$\rho_c = \sqrt{A + B(1+z)^6} \quad (3.23)$$

Assim, quando  $z \rightarrow -1$ , temos  $\rho_c \rightarrow \sqrt{A}$  e  $p_c = -\rho_c$ . Mas no caso  $z \gg 1$ , temos que  $\rho_c \rightarrow \sqrt{B}(1+z)^3$ , de forma que o gás de Chaplygin se comporta como matéria no passado distante e como energia escura em épocas muito posteriores.

Uma forma mais geral para o gás de Chaplygin é  $p \propto -1/\rho^\alpha$ . Nesse caso, a equação de estado é

$$w(a) = -\frac{w_0}{w_0 + \frac{1-w_0}{a^{3(1+\alpha)}}}, \quad (3.24)$$

onde  $w_0$  é a equação de estado do universo atual ( $a = 1$ ). Assim, temos para pequenas escalas, quando  $a \ll 1$ , uma equação de estado  $w \simeq 0$ , de forma que o gás se comporta de maneira equivalente à poeira; para grandes escalas ( $a \gg 1$ ) obtemos  $w \simeq -1$ , sugerindo que o gás de Chaplygin exerce o mesmo papel que a energia escura. A constante  $\alpha$  pode ser ajustada para regular a época de transição entre os dois regimes.

O gás de Chaplygin também pode ser derivado de uma densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -V_0 \sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}, \quad (3.25)$$

de onde obtém-se

$$\rho = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}} \quad , \quad p = -V_0 \sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}} \quad (3.26)$$

e então recuperamos a equação (3.22), desde que  $A = V_0^2$ .

### 3.6 Modificação na TRG

Uma derivação bastante interessante para as equações de Einstein pode ser feita do princípio de Euler-Lagrange, tendo como lagrangiana da ação gra-

vitacional o escalar de curvatura  $R$  [1]. A ação puramente gravitacional é definida (com  $c = 1$ ) como

$$S_G \equiv \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g(x)} R(x) d^4x, \quad (3.27)$$

onde  $\sqrt{-g} d^4x$  é o elemento de volume covariante. A variação funcional do integrando é então

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R \delta(\sqrt{-g}) \quad (3.28)$$

A variação do tensor de Ricci é:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \quad (3.29)$$

Como  $\Gamma$  não é um tensor, podemos fazer uma transformação de coordenadas em que as conexões se anulem em um ponto. Assim, obtemos (em um ponto):

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} \quad (3.30)$$

Como  $\delta\Gamma$  representa um verdadeiro tensor, essa é uma equação tensorial. Substituindo as derivadas simples por derivadas covariantes, temos que ela é válida em todos os pontos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho} \quad (3.31)$$



Também temos:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (3.32)$$

Então o segundo termo de (3.28) é:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[ (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\rho} - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{;\nu} \right] \quad (3.33)$$

Da definição de derivada covariante  $\sqrt{-g} V^{\alpha}_{;\alpha} = (\sqrt{-g} V^{\alpha})_{,\alpha}$ , obtemos

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{,\rho} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{,\nu}, \quad (3.34)$$

que pelo teorema de Gauss só contribui para a integral na hiper-superfície de contorno, onde, do princípio variacional, temos  $\delta\Gamma = 0$ . Portanto, esses termos não influenciam na ação. Voltando agora para o terceiro termo de (3.28):

$$R \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.35)$$

Então obtemos, para  $\delta S_G = 0$ :

$$\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (3.36)$$

Devido à arbitrariedade de  $\delta g^{\mu\nu}$ , essa igualdade se mantém para o integrando

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.37)$$

que é exatamente a equação de Einstein para o vácuo. Para o caso com matéria, definimos a variação da ação  $\delta S = \delta S_G + \delta S_M$ , onde  $\delta S_M$  é:

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g(x)} T_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu}(x) d^4x \quad (3.38)$$

Finalmente temos a equação de Einstein para a gravitação com matéria

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.39)$$

que tínhamos visto no capítulo anterior. Dessa derivação a partir do princípio de Euler-Lagrange, percebemos que qualquer alteração na TRG pode ser feita ao acrescentar termos escalares que envolvem o tensor de curvatura na lagrangiana gravitacional.

Por exemplo, a adição da constante cosmológica  $\Lambda$  à equação (3.39) pode ser feita se escolhermos a seguinte lagrangiana gravitacional

$$L_G = R + 2\Lambda, \quad (3.40)$$

já que, usando (3.32), obtemos

$$\delta(\sqrt{-g} 2\Lambda) = -\sqrt{-g} \Lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

acrescentando um termo  $-\Lambda g_{\mu\nu}$  à equação (3.39).

No capítulo seguinte veremos uma lagrangiana gravitacional que contém, além do escalar de curvatura, um termo de ordem superior do tensor de Riemann ou de Weyl. Lagrangianas desse tipo geram nas equações de movimento termos capazes de reproduzir a aceleração do universo.

## Capítulo 4

# Modificações para a Teoria da Relatividade Geral

Vimos que a cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker não responde sozinha a questão da aceleração do universo e também que a matéria escura é um enigma ainda sem solução. Além disso, o modelo FRW apresenta algumas outras dificuldades. Uma delas é explicar o mecanismo que originou a formação de estruturas como aglomerados e superaglomerados de galáxias a partir de uma métrica homogênea. Para isso, supõe-se que pequenas perturbações originadas em um período inflacionário provoquem variações na densidade de energia em todo o cosmos, como observado na radiação cósmica de fundo. Outro problema é que a dinâmica descrita pelo modelo sugere a existência de uma singularidade inicial. Esse segundo problema pode vir a ser resolvido com a hipótese de que nesse período as interações quânticas seriam dominantes e gerariam um ricochete no universo.

Apesar dessas dificuldades, tomaremos o modelo FRW como uma boa apro-

ximação da cosmologia. Assim, ao procurarmos uma teoria alternativa para a gravitação, tentaremos manter as soluções de Schwarzschild e de Friedmann como soluções de quaisquer equações dessa nova teoria, além de incluir os problemas acima como características essenciais do novo modelo. O ponto de partida será o formalismo de Euler-Lagrange, onde testaremos lagrangianas com um termo escalar de ordem superior no tensor de curvatura.

Há uma interessante coincidência envolvendo um escalar de ordem superior em  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  e as soluções de Friedmann e Schwarzschild. Nessas duas geometrias o invariante topológico  $I = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$  é identicamente nulo. Esse parece um excelente ponto de partida para criarmos uma nova equação para a gravitação, onde esperamos encontrar termos extras do tipo constante cosmológica, e que tenha como soluções as geometrias de Friedmann e Schwarzschild.

Ainda que já tenhamos decidido qual o escalar que será acrescentado à lagrangiana da gravidade, não determinamos qual seria a dinâmica envolvendo o invariante  $I$ . Uma boa possibilidade seria a dinâmica de Born-Infeld, uma extensão não-linear da eletrodinâmica de Maxwell [22]. A proposta de M. Born, e de seu colaborador L. Infeld, era que os campos fundamentais da física devem ser descritos por uma dinâmica que contenha uma limitação para a intensidade máxima dos campos. Posteriormente, veio a ser descoberto que efeitos não-lineares da eletrodinâmica realmente estão presentes na escala quântica, e que podem ser descritos de acordo com a expansão em série da lagrangiana de Born-Infeld.

Propondo então a lagrangiana de Born-Infeld, assim definida:

$$L_G = -\frac{1}{16\pi G} \left[ R - \beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} + \beta \right], \quad (4.1)$$

E a ação se escreve:

$$S_G = \int \sqrt{-g} L_G d^4x. \quad (4.2)$$

Na lagrangiana (4.1) observamos a presença do escalar de curvatura  $R$  da TRG, mais a adição do termo extra (raiz quadrada) representando a dinâmica de Born-Infeld, com  $\beta$  sendo o valor máximo possível para o invariante topológico  $I$ . O termo  $\beta$  foi incluído de forma a anular a contribuição do termo extra quando  $I = 0$ .

A variação funcional no integrando de (4.2) é

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} L_G) &= -\delta(\sqrt{-g}) \frac{1}{16\pi G} \left[ R - \beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} + \beta \right] + \\ &\quad -\sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} \cdot \delta \left[ R - \beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} + \beta \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

e a variação do novo termo na lagrangiana é

$$\delta \left( -\beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta I}{\sqrt{\beta^2 - I}}, \quad (4.4)$$

onde  $\delta I$  pode ser obtido diretamente de sua definição

$$\begin{aligned}
\delta I &= \delta \left( R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma*} \right) \\
&= \frac{1}{2} \delta \left( \eta^{\rho\sigma\lambda\gamma} R^{\alpha\beta}_{\lambda\gamma} R_{\alpha\beta\rho\sigma} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \delta \left( \eta^{\rho\sigma\lambda\gamma} R^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma} R^{\beta}_{\alpha\rho\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

O fator  $\eta^{\rho\sigma\lambda\gamma}$  é o tensor Levi-Civita, definido por

$$\eta^{\rho\sigma\lambda\gamma} = -\frac{\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\gamma}}{\sqrt{-g}}, \tag{4.6}$$

com variação funcional

$$\delta\eta^{\rho\sigma\lambda\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma\lambda\gamma} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

Então obtemos a expressão final para  $\delta I$

$$\begin{aligned}
\delta I &= -\frac{1}{2} R^{\alpha}_{\beta}{}^{\rho\sigma*} R^{\beta}_{\alpha\rho\sigma} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 2 R^{\alpha}_{\beta}{}^{\rho\sigma*} \delta R^{\beta}_{\alpha\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2} I g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 2 R^{\alpha}_{\beta}{}^{\rho\sigma*} \delta R^{\beta}_{\alpha\rho\sigma},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

que substituindo em (4.4), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta I}{\sqrt{\beta^2 - I}} = \frac{1}{4} \frac{I}{\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{R^{\alpha}_{\beta}{}^{\rho\sigma*}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \delta R^{\beta}_{\alpha\rho\sigma} \tag{4.9}$$

Calculando apenas o segundo termo, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{R_{\beta}^{\alpha \rho \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \delta R_{\alpha \rho \sigma}^{\beta} &= -\frac{R_{\beta}^{\alpha \rho \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} (\delta \Gamma_{\alpha \sigma; \rho}^{\beta} - \delta \Gamma_{\alpha \rho; \sigma}^{\beta}) \\
&= \left[ \frac{R_{\beta}^{\alpha \rho \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{; \rho} \delta \Gamma_{\alpha \sigma}^{\beta} - \left[ \frac{R_{\beta}^{\alpha \rho \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{; \sigma} \delta \Gamma_{\alpha \rho}^{\beta}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

onde fizemos integração por partes. A variação da conexão afim  $\Gamma_{\alpha \sigma}^{\beta}$  é:

$$\begin{aligned}
\delta \Gamma_{\alpha \sigma}^{\beta} &= \frac{1}{2} \delta g^{\beta \rho} (g_{\alpha \rho, \sigma} + g_{\sigma \rho, \alpha} - g_{\alpha \sigma, \rho}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\beta \rho} (\delta g_{\alpha \rho, \sigma} + \delta g_{\sigma \rho, \alpha} - \delta g_{\alpha \sigma, \rho}) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

No entanto, temos que

$$\delta (g^{\alpha \gamma} g_{\beta \gamma}) = \delta g^{\alpha \gamma} g_{\beta \gamma} + g^{\alpha \gamma} \delta g_{\beta \gamma} = 0, \quad (4.12)$$

e então obtemos:

$$\delta g^{\alpha \gamma} = -g^{\alpha \beta} g^{\gamma \lambda} \delta g_{\beta \lambda} \quad (4.13)$$

Utilizando (4.13) em (4.11):

$$\delta \Gamma_{\alpha \sigma}^{\beta} = -g^{\beta \rho} \delta g_{\rho \gamma} \Gamma_{\alpha \sigma}^{\gamma} + \frac{1}{2} g^{\beta \rho} (\delta g_{\alpha \rho, \sigma} + \delta g_{\sigma \rho, \alpha} - \delta g_{\alpha \sigma, \rho}), \quad (4.14)$$



onde podemos usar um sistema de coordenadas que anule  $\Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma$  em um ponto. Substituindo as derivadas simples por covariantes, obtemos a equação válida para todos os pontos:

$$\delta\Gamma_{\alpha\sigma}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\rho} (\delta g_{\alpha\rho;\sigma} + \delta g_{\sigma\rho;\alpha} - \delta g_{\alpha\sigma;\rho}) \quad (4.15)$$

Então, temos para (4.10)

$$\begin{aligned} -\frac{R_{\beta}^{\alpha\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \delta R_{\alpha\rho\sigma}^\beta &= \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\rho} (\delta g_{\alpha\epsilon;\sigma} + \delta g_{\sigma\epsilon;\alpha} - \delta g_{\alpha\sigma;\epsilon}) - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma} (\delta g_{\alpha\epsilon;\rho} + \delta g_{\rho\epsilon;\alpha} - \delta g_{\alpha\rho;\epsilon}) \quad (4.16) \\ &= - \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\rho;\alpha} \delta g_{\sigma\epsilon} + \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\rho;\epsilon} \delta g_{\alpha\sigma} + \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\alpha} \delta g_{\rho\epsilon} - \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha\epsilon\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\epsilon} \delta g_{\alpha\rho}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde integramos novamente por partes. Os termos que envolviam  $\delta g_{\alpha\epsilon}$  são nulos, pois representavam uma contração com índices anti-simétricos do tensor de Riemann. Utilizando novamente a igualdade (4.13), obtemos:

$$-\frac{R_{\beta}^{\alpha\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \delta R_{\alpha\rho\sigma}^\beta = \left\{ \left[ \frac{1}{2} \frac{R_{\mu\nu}^{\alpha\rho}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\rho;\alpha} - \left[ \frac{1}{2} \frac{R_{\mu\nu}^{\epsilon\rho}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\rho;\epsilon} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha \mu \nu \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\alpha} + \left[ \frac{1}{2} \frac{R_{\mu \nu}^{\epsilon \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\epsilon} \left. \vphantom{\left[ \frac{1}{2} \frac{R^{\alpha \mu \nu \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\alpha}} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
& = - \left[ \frac{2R^{\alpha \mu \nu \sigma}}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right]_{;\sigma;\alpha} \delta g^{\mu\nu} \\
& = - \left[ \left( \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right)_{,\sigma} R^{\alpha \mu \nu \sigma} \right]_{;\alpha} \delta g^{\mu\nu} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a identidade  $R^{\alpha\beta\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , que pode ser demonstrada a partir das identidades de Bianchi [24]. De volta à expressão (4.3):

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g} L_G) & = -\sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} g_{\mu\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{I}{\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} - \left[ \left( \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - I}} \right)_{,\sigma} R^{\alpha \mu \nu \sigma} \right]_{;\alpha} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
& = -\sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} + \frac{2\beta^2 - I}{4\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{I_{,\sigma}}{(\beta^2 - I)^{\frac{3}{2}}} R^{\alpha \mu \nu \sigma} \right]_{;\alpha} \right\} \delta g^{\mu\nu} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Então, obteremos as equações de movimento para a gravitação se a condição  $\delta S = 0$  for satisfeita. Supondo a presença de matéria, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\delta S & = \delta S_M + \delta S_G \\
& = - \int \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} + \frac{2\beta^2 - I}{4\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{I_{,\sigma}}{(\beta^2 - I)^{\frac{3}{2}}} R^{\alpha \mu \nu \sigma} \right]_{;\alpha} + 8\pi G T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Como a região de integração é arbitrária, o integrando deve ser igual a zero. Assim, obtemos as equações desejadas para uma teoria alternativa da gravitação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta g_{\mu\nu} + \frac{2\beta^2 - I}{4\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} - \left[ \frac{I_{,\sigma}}{(\beta^2 - I)^{\frac{3}{2}}} R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma} \right]_{;\alpha} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.21)$$

Pode ser demonstrado que as identidades de Bianchi garantem a conservação do tensor momento-energia.

As novas equações (4.21) se reduzem à equação usual (3.39) da gravitação para a métrica de Schwarzschild, que nos dá  $I = 0$ , conservando assim todos os resultados experimentais oriundos dessa métrica. O mesmo acontece com a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, o que não nos permite então resolver os problemas do modelo padrão.

Como vimos anteriormente, a solução FRW parte do princípio cosmológico. Mas a existência de aglomerados de matéria no universo nos garante uma pequena inomogeneidade nessa métrica. As perturbações cosmológicas podem causar uma pequena alteração na geometria friedmanniana de fundo. Essas alterações podem gerar valores não-nulos para o invariante  $I$ . Então, para o limite  $I \ll \beta^2$ , temos que o quarto termo em (4.21) toma a forma

$$\frac{2\beta^2 - I}{4\sqrt{\beta^2 - I}} g_{\mu\nu} \simeq \frac{2\beta^2 - I}{4\beta} \left( 1 + \frac{I}{2\beta^2} \right) g_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\beta g_{\mu\nu} - \frac{I^2}{8\beta^3} g_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

enquanto que o quinto termo fica

$$-\left[\frac{I_{,\sigma}}{(\beta^2 - I)^{\frac{3}{2}}}R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma}\right]_{;\alpha} \simeq -\frac{1}{\beta^3}\left[\left(1 + \frac{3I}{2\beta^2}\right)I_{,\sigma}R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma}\right]_{;\alpha} \quad (4.23)$$

$$\simeq -\frac{1}{\beta^3}\left[I_{,\sigma}R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma}\right]_{;\alpha} \quad (4.24)$$

Assim, a equação (4.21) para pequenas perturbações na métrica FRW é:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{I^2}{8\beta^3}g_{\mu\nu} - \frac{1}{\beta^3}\left[I_{,\sigma}R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma}\right]_{;\alpha} \simeq -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

onde vemos dois termos adicionais no lado esquerdo da equação ao compararmos com a equação de Einstein original. Imediatamente, vemos que o termo  $\frac{I^2}{8\beta^3}g_{\mu\nu}$  se comporta exatamente como a constante cosmológica, e de fato é de pequena intensidade.

Porém, podemos ainda fazer outra suposição: o universo pode ter experimentado em sua história valores maiores para o escalar  $I$ , incluindo valores próximos de seu limite. Para regimes em que  $I \approx \beta^2$ , o termo  $\left[\frac{I_{,\sigma}}{(\beta^2 - I)^{\frac{3}{2}}}R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma}\right]_{;\alpha}$  da equação (4.21) pode tender a infinito, caso  $(\beta^2 - I)^{\frac{5}{2}}$  se aproxime de zero mais rapidamente do que  $I_{,\sigma}$  (já que nesse caso  $I \approx$  constante). Se ocorrer o oposto, o termo dominante nesse regime será  $\frac{2\beta^2 - I}{4\sqrt{\beta^2 - I}}g_{\mu\nu}$ . Em todo caso, um desses termos dominaria a dinâmica do universo. Valores grandes de  $I$  não são esperados na fase atual do universo, mas pode ter sido esse o caso no “início” do cosmos, o que geraria um período inflacionário. A suposição de

que  $I$  possui um valor finito nos permite dizer também que, em um cenário geral, não teria havido uma singularidade inicial.

Assim, esse modelo (com valores de  $I$  grandes no passado, mas muito pequenos no presente), apesar de simplificado, resolveria, ainda que de forma rudimentar, alguns problemas da cosmologia moderna: exibiria uma rápida expansão no passado (inflação) que amenizaria a inomogeneidade inicial e também geraria uma pequena constante cosmológica responsável pela aceleração do universo quando as inomogeneidades voltassem a ficar importantes (formação de estruturas).

Outra possibilidade de dinâmica é uma lagrangiana quadrática em  $I$  [23], que possui a vantagem de ser invariante sob paridade no escalar  $I$ . Nesse caso, mudando alguns sinais por conveniência, a lagrangiana gravitacional é:

$$L_G = -\frac{1}{16\pi G} \left[ R + \beta \sqrt{1 - \left(\frac{I}{\beta^2}\right)^2} - \beta \right] \quad (4.26)$$

A variação funcional do segundo termo é

$$\delta \left( \beta \sqrt{1 - \left(\frac{I}{\beta^2}\right)^2} \right) = -\frac{I}{\beta \sqrt{\beta^4 - I^2}} \delta I, \quad (4.27)$$

onde  $\delta I$  está expresso em (4.8). Então obtemos para  $\delta(\sqrt{-g} L_G)$

$$\delta(\sqrt{-g} L_G) = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left\{ \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{I}{\beta^2}\right)^2} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \right.$$

$$- \frac{I}{\beta \sqrt{\beta^4 - I^2}} \delta I \Big\} = \quad (4.28)$$

$$= - \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left\{ \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\beta} \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} R_{\beta}^{\alpha \rho\sigma} \delta R_{\alpha\rho\sigma}^{\beta} \right\}, \quad (4.29)$$

e, procedendo na mesma forma que o caso anterior, o termo envolvendo  $\delta R_{\alpha\rho\sigma}^{\beta}$  é:

$$\frac{2}{\beta} \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} R_{\beta}^{\alpha \rho\sigma} \delta R_{\alpha\rho\sigma}^{\beta} = \frac{4}{\beta} \left[ \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} R_{\mu\nu}^{\alpha \sigma} \right]_{;\sigma;\alpha} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.30) \\ = \frac{4}{\beta} \left[ \left( \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} \right)_{,\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha \sigma} \right]_{;\alpha} \delta g^{\mu\nu}$$

Então, a condição  $\delta S = 0$  nos dá as equações de movimento:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} g_{\mu\nu} \\ + \frac{4}{\beta} \left[ \left( \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} \right)_{,\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha \sigma} \right]_{;\alpha} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.31)$$

Novamente, temos uma equação que se reduz à equação de Einstein quando  $I = 0$ , mantendo assim a validade da solução de Schwarzschild. Pequenas perturbações na métrica FRW produzem um valor pequeno, mas não-nulo, de  $I$ . Para  $I^2 \ll \beta^4$ , o quarto termo da equação (4.31) é

$$- \frac{1}{2} \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} g_{\mu\nu} \simeq - \frac{1}{2} \beta \left( 1 + \frac{I^2}{2\beta^4} \right) g_{\mu\nu} \quad (4.32)$$

e o quinto termo fica

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\beta} \left[ \left( \frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} \right)_{,\sigma} R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma} \right]_{;\alpha} &\simeq \frac{4}{\beta^3} \left[ \left( I + \frac{I^3}{2\beta^4} \right)_{,\sigma} R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma} \right]_{;\alpha} \\
&\simeq 2 \left[ \left( \frac{I^3}{\beta^7} \right)_{,\sigma} R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma} \right]_{;\alpha} \\
&\simeq 6 \left[ \frac{I^2}{\beta^7} I_{,\sigma} R^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{*\sigma} \right]_{;\alpha}, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

que pode ser desprezado. Assim, a equação (4.31), para pequenas alterações na homogeneidade do universo, fica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{I^2}{4\beta^3} g_{\mu\nu} \simeq -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.34}$$

Essa equação possui a mesma forma que a equação de Einstein com constante cosmológica. O termo  $I^2/4\beta^3$ , por ser muito pequeno, poderia ser o responsável pela energia escura, sendo então causada pelas inhomogeneidades do universo. Assim, a aceleração do universo estaria relacionada ao período de formação de estruturas, sugerindo uma solução para a questão da coincidência cósmica.

Para o caso em que  $I^2 \approx \beta^4$  (com a suposição de ter acontecido nos primórdios do universo) vemos na equação (4.31) novamente a presença de termos divergindo para o infinito. Mais uma vez, saber qual o termo que dominaria nesse cenário depende do comportamento de  $I_{,\sigma}$ , mas em qualquer caso teremos

uma fase inflacionária. Então, temos uma lagrangiana mais apropriada para a gravitação, gerando no limite  $I \ll \beta^2$  uma pequena constante cosmológica (e sem outros termos extras), e uma fase inflacionária (com a suposição de que o universo possuía uma configuração  $I \approx \beta^2$  no passado remoto).

Uma última possibilidade seria utilizar um escalar que seja uma contração do tensor de Weyl, assim definido:

$$W_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\alpha\beta\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\rho}R_{\beta\sigma} + g_{\beta\sigma}R_{\alpha\rho} - g_{\alpha\sigma}R_{\beta\rho} - g_{\beta\rho}R_{\alpha\sigma}) + \frac{R}{6}(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}) \quad (4.35)$$

O tensor de Weyl é a parte sem traço do tensor de Riemann, e é nulo para a métrica de Friedmann, embora não o seja para a métrica de Schwarzschild. Para um escalar na forma  $Y = W_{\alpha\beta\rho\sigma}W^{\alpha\beta\rho\sigma}$ , teríamos

$$\delta Y = \delta(W_{\alpha\beta\rho\sigma}W^{\alpha\beta\rho\sigma}) = 2W^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \delta W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}, \quad (4.36)$$

onde

$$\delta W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} = \delta R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\delta^\rho_\alpha \delta R^\sigma_\beta + \delta^\sigma_\beta \delta R^\rho_\alpha - \delta^\sigma_\alpha \delta R^\rho_\beta - \delta^\rho_\beta \delta R^\sigma_\alpha) + \frac{1}{6}(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\sigma_\alpha \delta^\rho_\beta) \delta R, \quad (4.37)$$

e a partir de (4.4), substituindo  $I$  por  $Y$ , obtemos a variação do novo termo



na lagrangiana:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta Y}{\sqrt{\beta^2 - Y}} = \frac{W^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} \delta W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} \quad (4.38)$$

Como o tensor de Weyl possui traço nulo, então vemos imediatamente a partir de (4.37) que os termos de  $\delta W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}$  contendo delta de Kronecker serão nulos, restando apenas:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta Y}{\sqrt{\beta^2 - Y}} = \frac{W^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} \delta R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{W^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} \delta(g^{\sigma\eta} R^{\rho}_{\eta\alpha\beta}) \quad (4.39)$$

Procedendo de maneira idêntica aos casos com escalar  $I$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{\delta Y}{\sqrt{\beta^2 - Y}} = \left\{ \frac{W^{\alpha\beta\rho}_{\mu} R_{\alpha\beta\rho\nu}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} - 2 \left[ \frac{W^{\alpha\beta}_{\mu\nu}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} \right]_{;\alpha;\beta} \right\} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

onde pode-se provar que  $W^{\alpha\beta\rho}_{\mu} R_{\alpha\beta\rho\nu} = W^{\alpha\beta\rho}_{\mu} W_{\alpha\beta\rho\nu} = (Y/4) g_{\mu\nu}$  [24]. A equação de movimento é então

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta g_{\mu\nu} + \frac{2\beta^2 - Y}{4\sqrt{\beta^2 - Y}} g_{\mu\nu} - 2 \left[ \frac{W^{\alpha\beta}_{\mu\nu}}{\sqrt{\beta^2 - Y}} \right]_{;\alpha;\beta} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

sendo semelhante à equação (4.21). É interessante notar que para a geometria de Schwarzschild  $Y = 48(GM)^2/r^6$ , mostrando que a lagrangiana com  $Y$  apresenta modificações não só para a cosmologia mas também para modelos esfericamente simétricos. Mas como  $Y \propto r^{-6}$ , essas modificações devem gerar correções muito pequenas, de forma que podemos desprezá-las. Na métrica

de Friedmann, essa equação se reduz à própria equação de Einstein. Se desejamos encontrar algum termo que provoque uma aceleração no universo, devemos levar em conta pequenas inomogeneidades na métrica de fundo, e assim obter um valor não nulo para o tensor de Weyl. No limite  $Y \ll \beta^2$ , procedendo como nos casos anteriores, obtemos a equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{Y^2}{8\beta^3} g_{\mu\nu} - \frac{2}{\beta} W_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} \simeq -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.42)$$

onde o terceiro termo seria o responsável por um universo acelerado.

Agora vamos tentar esclarecer o que significa o regime de pequenas inomogeneidades no qual fizemos aproximações nos quatro casos. Essas inomogeneidades representam um pequeno desvio da situação de perfeita homogeneidade que serve de base para o princípio cosmológico e, conseqüentemente, para a métrica de Friedmann. Podemos expressar esse desvio acrescentando uma pequena perturbação

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad (4.43)$$

onde  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  é a métrica de Friedmann plana de fundo e  $\varepsilon$  é uma pequena constante que só consideraremos até primeira ordem. Podemos supor uma perturbação linear (no calibre longitudinal) do tipo:

$$h_{\mu\nu} = 2a^2(t) \begin{pmatrix} \Phi(t, \vec{x}) & & & \\ & \Psi(t, \vec{x}) & & \\ & & \Psi(t, \vec{x}) & \\ & & & \Psi(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

O escalar  $Y = W^{\alpha\beta\rho\sigma}W_{\alpha\beta\rho\sigma}$  para essa métrica perturbada só apresenta termos envolvendo  $\varepsilon^2$  ou ordens superiores. Assim,  $Y$  só contribuiria de maneira significativa para a dinâmica de (4.42) no caso de perturbações não lineares.

No caso do invariante  $I = R^{\alpha\beta\rho\sigma}R_{\alpha\beta\rho\sigma}$ , é interessante notar que  $I = 0$ , mesmo para uma perturbação como (4.44). Uma perturbação não linear poderia resultar em um valor não nulo para  $I$ , e portanto poderíamos obter um resultado quantitativo para esse trabalho. O cálculo de  $I$  para uma perturbação desse tipo é bastante extenso, de forma que não será realizado aqui. Se algum resultado for obtido nesse cálculo, pode-se comparar os valores de  $\rho_\Lambda$

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ R - \beta \sqrt{1 - \frac{I}{\beta^2}} + \beta \right] \rightarrow \rho_\Lambda = \frac{I^2 c^2}{64\pi G \beta^3} \quad (4.45)$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ R + \beta \sqrt{1 - \left(\frac{I}{\beta^2}\right)^2} - \beta \right] \rightarrow \rho_\Lambda = \frac{I^2 c^2}{32\pi G \beta^3} \quad (4.46)$$

com o valor observado para a constante cosmológica  $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$ .

Como  $\beta$  é um parâmetro livre, podemos por exemplo tentar associá-lo a alguma constante fundamental. Por exemplo,  $\beta = l_p^{-2}$ , onde  $l_p$  é o compri-

mento de Planck ( $10^{-33}$  cm), nos dá

$$\Lambda \sim \frac{I^2}{\beta^3} = I^2 l_p^6 \sim 10^{-56} \text{cm}^{-2}, \quad (4.47)$$

o que implicaria em  $I \sim 10^{71} \text{cm}^{-4}$ . Enfim, o trabalho completo de encontrar uma relação entre perturbações não lineares na métrica de fundo e constantes fundamentais da física pode ser uma tarefa bastante difícil e trabalhosa.

# Capítulo 5

## Conclusões

O trabalho que fizemos nessa dissertação foi uma tentativa de gerar um modelo cosmológico a partir de uma modificação da Relatividade Geral que resolvesse pelo menos uma das dificuldades relacionadas ao modelo padrão, sem recorrer a campos extras, formas exóticas de matéria e energia, e outras tentativas do gênero. Os nossos esforços foram mais voltados para tentar explicar o problema da aceleração do universo, já que esse parece ser o maior desafio atual.

Assim, propusemos diversas lagrangianas para a gravitação, onde incluímos um escalar construído a partir do tensor de Riemann ou de Weyl. O que obtivemos foram equações de movimento onde se encontram termos capazes de provocar uma aceleração de pequena intensidade a um universo quase homogêneo. Além disso, as modificações foram capazes de criar um cenário rudimentar de inflação em todos os casos, de forma que uma possível explicação para a ausência de singularidade inicial e para o alto grau de isotropia da CMB possa também provir desses modelos.

No entanto, algumas dificuldades se apresentaram. Primeiramente, é difícil conciliar o grau de inhomogeneidade do espaço com a densidade de energia associada à energia escura observada atualmente. Essa comparação depende de um parâmetro livre  $\beta$  que deve ser ajustado com possíveis observações e do valor perturbado do escalar utilizado na lagrangiana, que é difícil de ser calculado. Outro problema é a presença de termos com derivadas superiores do tensor métrico na lagrangiana. Isso gera instabilidades na hamiltoniana associada, de acordo com o teorema de Ostrogradsky [25], já que a dependência nesses termos não pode ser eliminada por integração por partes. De fato, notamos a presença de derivadas quartas nas equações de movimento encontradas. Dessa forma, devemos tratar essas equações apenas como teorias efetivas da gravitação.

A lagrangiana (4.26) pode ser considerada a melhor tentativa. A equação de movimento que dela resulta, no limite de pequenas perturbações, é similar à equação de Einstein com constante cosmológica (veja (4.34)), sem termos com derivadas superiores. Esse modelo então nos diz que a aceleração do universo é causada pela inhomogeneidade do espaço, representada por um valor não nulo de  $I$ , justificando assim a coincidência cósmica. O universo, em sua fase atual, possui um alto grau de homogeneidade, o que daria um valor muito pequeno para a energia  $\rho_\Lambda$  explicitada em (4.46).

Para essa mesma lagrangiana, pode-se ainda fazer a hipótese de que o universo era enormemente inhomogêneo no “início” do cosmos ( $t \sim 10^{-35}$ ), de

forma que  $I^2 \approx \beta^4$ . Assim, a equação (4.31) apresenta termos cuja intensidade tende ao infinito e que dominariam a dinâmica do universo. Esses termos seriam os responsáveis pelo período inflacionário. O limite superior para o valor de  $I$  pode também impossibilitar o caso de uma singularidade inicial.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, ed. John Wiley & Sons, Inc., New York (1972)
- [2] S.J. Perlmutter *et al.*, *Astroph.J.* 517, 565 (1999)
- [3] A.G. Riess *et al.*, *Astron.J.* 116 1009-1038 (1998)
- [4] D.N. Spergel *et al.*, astro-ph/0603449
- [5] E.W. Kolb e M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley (1990)
- [6] H.B.G. Casimir, *Proc.K.Ned.Akad.Wet.* 51 635 (1948)
- [7] V. Sahni e A.A. Starobinsky, *Int.J.Mod.Phys. D9* 373-444 (2000)
- [8] S. Weinberg, *Rev.Mod.Phys.* 61, 1 (1989)
- [9] H. Martel, P. Shapiro e S. Weinberg, *Astroph.J.* 492, 29 (1998); J. Garriga e A. Vilenkin, *Phys.Rev. D61* 083502 (2000)
- [10] A.A. Starobinsky, *Gravit. & Cosm.* 4, Suppl. 88 (1998)
- [11] Ya.B. Zeldovich, *Sov.Phys. - Uspekhi* 11, 381 (1968)



- [12] V. Sahni, *Class.Quant.Grav.* 19 3435-3448 (2002)
- [13] B. Ratra e P.J.E. Peebles, *Phys.Rev.* D37, 3406 (1988)
- [14] T. Padmanabhan, astro-ph/0603114
- [15] J. Frieman, C.T. Hill, A. Stebbins e I. Waga, *Phys.Rev.Lett.* 75, 2077 (1995)
- [16] C. Wetterich, *Nucl.Phys. B* 302, 668 (1988); P.G. Ferreira e M. Joyce, *Phys.Rev.Lett.* 79, 4740 (1997)
- [17] L.A. Ureña-López e T. Matos, *Phys.Rev.* D62, 081302 (2000)
- [18] P. Brax e J. Martin, *Phys.Lett. B* 468. 40 (1999); P. Brax e J. Martin, *Phys.Rev.* D61, 103502 (2000)
- [19] I. Zlatev, L. Wang e P.J. Steinhardt, *Phys.Rev.Lett.* 82, 896 (1999); P.J. Steinhardt, L. Wang e I. Zlatev, *Phys.Rev.* D59 123504 (1999)
- [20] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov e P.J. Steinhardt, *Phys.Rev.* D63 103510 (2001)
- [21] V. Sahni, *XIth Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, ed. M. Novello e S. Bergliaffa (2004)
- [22] M. Born e L. Infeld, *Nature* 132, 970 (1933)
- [23] M. Novello e N. Pinto-Neto, CBPF-NF-002/87 (1987)
- [24] N. Pinto-Neto, *Equações Alternativas da Gravitação - Tese de Mestrado*, ed. CBPF, Rio de Janeiro (1983)
- [25] R.P. Woodard, astro-ph/0601672