

Tese de Mestrado

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS NA PRESENÇA DE
HORIZONTE DE EVENTOS

Carlos Augusto Domingues Zarro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Rio de Janeiro, Junho de 2006

Tese de Mestrado submetida ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas sob orientação do
Professor **Dr. Nami Fux Svaiter**
para a obtenção do título de
Mestre em Física por **Carlos Augusto Domingues Zarro**.

2006

Ao Professor Nami Fux Svaiter
À grande amiga Thaís dos Santos Chiappetta Nogueira Salgado
(in memoriam)

Agradecimentos

A Deus, pela maravilha de dar ao ser humano a oportunidade de vislumbrar a beleza da Natureza. À Nossa Senhora de Fátima, minha devoção. A minha guia, a qual muito peço e sempre sou correspondido.

A minha família: minha avó Maria Teresa, minha mãe Regina, meu tio Luiz, meu padrasto Gilberto e minha madrinha Fátima pelos conselhos e ajuda principalmente quando tudo parecia dar errado. Uma homenagem póstuma especial ao meu “pai”(avô) Cândido.

Ao meu irmão Manuel Fragoso Júnior, pela grande ajuda, e por ter sacrificado-se algumas vezes para ajudar-me, como foi para fazer o pôster para ser apresentado no ENFPC.

À minha grande amiga Thaís, que infelizmente não poderá ver o desfecho dessa tese.

Aos meus amigos do CEFET/RJ, Luiz Henrique, Jorge, Iuki, Fábio “Fabato”, Alexandre Pires, Ana Paula, Evelyn, Henrique, Ricardo — sem palavras para expressar minha gratidão.

Ao pessoal do Fundão: Bernardo “Cambaxirra”, Bruno Mintz, Léo Grigório, Rogério, Bruno Lazarotto, Álvaro, Pedro Vianna, Bruno “Pallacito” Moraes e Roberto “Le Petit Robert” Pereira.

Aos universitários do Movimento Comunhão e Libertação (CLU) em especial aqueles da Escola de Comunidade no CCS: Carlinhos (Gutão), Enrico, Cassiano, Tatiana, Marcela.

Ao excelente corpo docente do Fundão: em especial os professores Clóvis Wotzasek, Henrique Boschi, Eduardo Marino, Luis Felipe Canto, por toda ajuda, conselhos e paciência.

Àqueles que são candidatos a beatificação: aturaram-me 4 anos no fundão, 2 no CBPF e ainda dividem sala comigo: Felipe Poulis e Marcela Campista.

Aos amigos do CBPF, em especial os da sala de computação da Estatística: Diogo, Sílvio

e Nuno. Ao pessoal do “ICRA”, Tovar, Érico, Gabriel Menezes, Andrezinho e Rafael Perez. Aos peruanos Martín Aparício, Victor e os colombianos Carlos Ospina e Carlos Bonilla, pela oportunidade de aprender ainda mais espanhol. A maioria destes tornou o meu período aqui mais palatável.

Aos professores dos cursos que fiz no CBPF Roditti e Lígia, pela paciência. Ao rubro-negro Sebastião Alves Dias, “Tião”, não somente por ser um grande professor e dar excelentes cursos, mas um ser humano fantástico.

Aos funcionários do CBPF, em especial os da Biblioteca e da secretaria do LAFEX e do ICRA, pela paciência e ajuda recebida, não só neste Mestrado, mas no período de Vocação e Iniciação Científica.

Quanto à parte técnica desta tese, agradeço aos Professores Maurício Calvão e Sérgio Jorás da UFRJ, pela profunda reflexão que a discussão que tiveram comigo sobre o trabalho apresentado no Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, que foram os resultados principais desta tese, levou-me. Ao pós-doutorando Gustavo Barbosa por algumas discussões relevantes.

Ao Professor Nami F. Svaiter, por ter aceito-me como aluno e sempre estar disponível para discutir diversos assuntos relacionados não só à tese, mas as ciências de maneira geral.

À Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de Mestrado.

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades,
Muda-se o ser, muda-se a confiança;
Todo o mundo é composto de mudança,
Tomando sempre novas qualidades.

Continuamente vemos novidades,
Diferentes em tudo da esperança;
Do mal ficam as mágoas na lembrança,
E do bem, se algum houve, as saudades.

O tempo cobre o chão de verde manto,
Que já coberto foi de neve fria,
E em mim converte em choro o doce canto.

E, afora este mudar-se cada dia,
Outra mudança faz de mor espanto:
Que não se muda já como soía.

Luís de Camões

Tudo o que faço ou medito
Fica sempre na metade.
Querendo, quero o infinito.
Fazendo, nada é verdade.

Que nojo de mim me fica
Ao olhar para o que faço!
Minha alma é lúdica e rica,
E eu sou um mar de sargaço —

Um mar onde bóiam lentos
Fragmentos de um mar de além...
Vontades ou pensamentos?
Não o sei e sei-o bem.

Fernando Pessoa

Resumo

O objetivo principal desta tese é investigar a teoria quântica de campos de um campo escalar na presença de horizontes de eventos. Mais especificamente no espaço-tempo de Rindler, tanto na assinatura Lorentziana quanto na sua continuação analítica para métrica de assinatura Euclideana. Para a TQC em métrica de assinatura Lorentziana fizemos um pequeno resumo dos principais resultados e técnicas. No caso das técnicas em assinatura Euclideana, para espaços de Rindler, generalizamos dois resultados: o primeiro foi obtido por Christensen e Duff [**Nucl. Phys. B 146** (1978)] . O segundo resultado foi a generalização de um novo resultado proposto por Lee [**Nucl. Phys. B 264** (1986)].

Abstract

In this thesis we investigate scalar field quantum field theory in the presence of event horizons. More specifically in the Rindler's spacetime, in Lorentzian signature metric as well as in Euclidean signature metric. For a Lorentzian signature metric, we resume the techniques and results. In the case of Euclidean signature metrics, for the Rindler's Euclidean Space we generalize two results: the first result was obtained by Christensen and Duf [**Nucl. Phys. B 146** (1978)]. The second result was obtained by Lee [**Nucl. Phys. B 264** (1986)].

Conteúdo

1	Introdução: TQC em Espaços Curvos	1
2	TQC em Espaço de Rindler: Versão Lorentziana	6
2.1	Espaço-tempo de Rindler	6
2.1.1	O sistema de coordenadas de Rindler	8
2.2	Teoria quântica de campos em espaços de Rindler	12
2.2.1	A construção de Fulling	13
2.2.2	Cálculo do propagador de Feynman	19
2.2.3	Um análogo do efeito Hawking — cálculo de Davies	22
2.2.4	Correlação entre os espaços Rindler-R e Rindler-L — método de Unruh	28
2.2.5	Detectores de partículas	33
3	TQC em Espaço de Rindler: Versão Euclideana	38
3.1	Espaço de Rindler Euclideano	39
3.2	Generalização do resultado de Christensen & Duff	40
3.2.1	Generalização para campos com massa	42
3.2.2	Generalização para campos sem massa	44
3.3	Generalizando o resultado de Lee	47
3.3.1	Campo sem massa $d = 2$	52
3.3.2	Campo sem massa $d \geq 3$	53
3.3.3	Campo com massa $d \geq 2$	53
3.3.4	A interpretação de Lee	54
3.3.5	Discussão dos resultados	56
3.4	Introduzindo Interação — demonstração de Unruh-Weiss	58

4	Conclusões e perspectivas	61
A	Notações e Conceitos Fundamentais	63
A.1	Notações	63
A.2	TQC em espaços curvos: Aspectos Gerais	64
A.2.1	Construção do espaço de Hilbert	64
A.2.2	Espaço-tempo clássico	65
A.2.3	Operadores de campo	66
A.2.4	As equações de onda	66
A.2.5	Relações de Comutação	67
A.2.6	Espaços de Fock	68
A.2.7	Coeficientes de Bogoliubov	71
A.2.8	Propagadores	74
A.3	Especialização para Espaços-tempo Estáticos	80
A.3.1	Solução da Equação de Klein-Gordon	81
A.3.2	A construção dos propagadores	83
A.3.3	Estados térmicos numa caixa	85
A.3.4	Estados térmicos em todo o espaço	90
A.4	A natureza das divergências em TQC	90
A.4.1	Divergência ultravioleta	90
A.4.2	Divergência infravermelha	90
A.5	O Conceito de Homotopia	91
A.5.1	Caminhos e laços	91
A.5.2	Homotopia	91
A.5.3	Grupo Fundamental	92
B	Resumo do trabalho apresentado na XXVI ENFPC	94

Lista de Figuras

2.1	Linha de universo de um observador uniformemente acelerado com aceleração própria $\pm g$	8
2.2	O espaço de Minkowski dividido em 4 sistemas de coordenadas (as coordenadas triviais são omitidas)	9
2.3	A estrutura do sistema de coordenadas de Milne e Rindler	10
2.4	Situação física usada no cálculo de Davies	25
2.5	Diagrama de Penrose do espaço de Rindler	28
3.1	Espaço Euclideano de Rindler	39
3.2	$\mathcal{G}_R^{2\pi}$ escrito como \mathcal{G}_M^∞ mais os termos extras	55
3.3	Exemplo de como seria o diagrama de Feynman para o diagrama peixe	56

Capítulo 1

Introdução: TQC em Espaços Curvos

A teoria quântica de campos (TQC) é a melhor teoria que temos em mãos para a descrição dos processos fundamentais envolvendo partículas elementares. Para uma exposição bastante agradável da história da TQC até 1948 recomenda-se [1].

Nos anos 70, a TQC alcança um período áureo, coroada com a demonstração de t'Hooft e Veltman da renormalização das teorias de Yang-Mills, em particular a cromodinâmica quântica (QCD) [2], que descreve a força nuclear forte. Na mesma época Gross, Pultizer e Wilczek descobriram a liberdade assintótica na interação forte [3, 4].

A princípio a quantização de um campo é feita em torno de um espaço-tempo dado, o espaço plano de Minkowski. Na década de 30, quando a TQC ainda estava sendo construída, formulou-se a chamada eletrodinâmica semi-clássica, onde o campo eletromagnético é tratado como um campo clássico e está acoplado a uma corrente $\langle j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle$, obtido através de um produto de campos fermiônicos (ψ e $\bar{\psi}$). Ou seja a quantização é somente feita sobre os campos de Fermi. É interessante notar que os resultados obtidos concordam com os resultados obtidos na QED [5]. Num contexto envolvendo a gravitação, pode-se aplicar este método considerando

que os campos de matéria são quantizados sobre um espaço-tempo fixo. Justifica-se então o nome de *gravitação semi-clássica* ou teoria quântica de campos em espaços curvos (TQC em espaços curvos). Com este procedimento espera-se que este modelo seja uma boa aproximação para uma possível teoria de gravitação quântica, pelo menos ao nível de um laço [6]. A equação básica da TQC em espaços curvos será:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (1.1)$$

Da expressão acima vemos que o valor esperado do vácuo do tensor momento-energia associado aos campos de matéria renormalizado $\langle T_{\mu\nu} \rangle_R$ age como fonte das equações de campo gravitacional (representado aqui pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, de forma que vê-se por que o cálculo do valor esperado no vácuo do tensor momento-energia associado aos campos de matéria ($\langle T_{\mu\nu} \rangle$), e sua renormalização, é de extrema importância em TQC em espaços curvos. Na equação acima G_B representa a constante gravitacional universal.

Voltando um pouco para traz no tempo a história da TQC em espaços curvos começa em 1932, com a investigação por parte de Schrödinger da equação de onda num universo em expansão. Na década de 50, Möller, Utyama, DeWitt, entre outros, começaram a publicar, ainda de forma incipiente trabalhos em TQC em espaços curvos. Posteriormente Parker [7] estuda se partículas são criadas pela expansão do universo e chegou à conclusões interessantes: partículas são criadas pelo universo em expansão e o conceito de partícula deixa de ser fundamental, pois depende das isometrias do espaço-tempo.

Em 1972, Fulling mostra que o vácuo associado a um observador uniformemente acelerado

não é o mesmo vácuo definido por um observador inercial que implementa a quantização de um campo clássico no espaço-tempo de Minkowski [8]. Desta forma podemos concluir que um observador acelerado mede partículas no vácuo usual de Minkowski. Vale a pena ressaltar que as partículas escalares satisfazem a distribuição de Bose-Einstein com temperatura diretamente proporcional à aceleração própria do observador.

Em 1974, Hawking [9, 10], demonstra que buracos negros emitiriam radiação com temperatura bem definida: esta é inversamente proporcional a massa do buraco negro. Porém note que este é um sistema instável do ponto de vista termodinâmico[6]: se um buraco negro absorve radiação térmica do ambiente, sua massa aumenta e por conseguinte sua temperatura *diminui*. Assim o buraco negro diminuiria sua temperatura absorvendo cada vez mais radiação térmica (observe que o calor específico é negativo (isto é característico de sistemas físicos auto-gravitantes) e assim sua massa aumentaria indefinidamente).

Independentemente, Davies [11] e Unruh [12] mostraram que o problema estudado por Hawking encontra analogia perfeita no caso do problema já estudado por Fulling. Um observador acelerado mede uma temperatura proporcional a sua aceleração[11, 12, 13, 14] — este é o *Efeito Unruh-Davies*. Para tal, Unruh é obrigado a introduzir o que seria um detector de “partículas”: um átomo de dois níveis, onde se calcula o espectro de potência através de um análogo ao teorema de Wiener-Kintchine da mecânica estatística. A principal diferença entre este detector e o proposto na óptica quântica por Glauber e Nussenzveig é que este não usa a aproximação da onda girante (RWA) e por isso é capaz de medir as flutuações do vácuo[15]. Entre os principais resultados destes artigos, um ponto que é bastante enfatizado é que os campos

são então as entidades fundamentais e não as partículas[16].

Outra linha histórica bastante estudada foi a da renormalização do valor esperado do tensor momento-energia associados a campos. Seu interesse transcende a TQC em espaços curvos e estende-se ao problema da TQC na presença de fronteiras clássicas[17]. As principais técnicas para se obter resultados físicos[13]: soma de modos, desenvolvido por Parker e Fulling; “point-splitting”, desenvolvido por deWitt e Davies; Pauli-Villars, desenvolvido por Bernard e Duncan; regularização dimensional, desenvolvido por Duncan e Brown e finalmente a regularização por função zeta espectral, desenvolvido por Hawking.

Atualmente, mesmo sem o “*glamour*” de outrora, ainda é uma área de profundo interesse, principalmente quando aplicado a Cosmologia, termodinâmica de buracos negros e em sistemas gravitacionais fora do equilíbrio. É interessante notar que existem críticas profundas para esta aproximação. Duff sugere [18] que como o campo gravitacional tem estrutura não abeliana, a gravitação entraria de forma não trivial em qualquer ordem de distância e tempo, gerando efeitos quânticos notáveis. Numa outra direção sabemos que a própria TQC quando introduzida de uma simples interação já deixa de ser bem definida do ponto de vista matemático. Um exemplo clássico é o chamado “problema da carga zero de Moscou”[6] que estabelece que a única QED bem definida matematicamente seria a teoria livre. Deixaremos então esses problemas matemáticos fundamentais e admitiremos que a teoria é correta pelo menos na aproximação de um laço. Para uma introdução a TQC em espaços curvos em variedades com assinatura Lorentziana consulte [13, 19, 20].

O objetivo principal desta tese é investigar a teoria quântica de campos associada a um

campo escalar na presença de horizontes de eventos. Mais especificamente no espaço-tempo de Rindler, tanto na assinatura Lorentziana quanto na sua continuação analítica para métrica de assinatura Euclideana. Para a TQC em métrica de assinatura Lorentziana fizemos um pequeno resumo dos principais resultados e técnicas. No caso das técnicas em assinatura Lorentziana, para espaços de Rindler, generalizamos dois resultados (Capítulo 3): o primeiro foi obtido por Christensen e Duff [21]. O segundo resultado foi a generalização de um novo resultado proposto por Lee [22].

Capítulo 2

TQC em Espaço de Rindler: Versão Lorentziana

Neste capítulo vamos estudar TQC em espaços de Rindler na sua versão Lorentziana. Começaremos investigando a solução de Rindler e depois as técnicas de quantização implementadas nos anos 70. Os principais trabalhos desta época são o feito por Fulling [8] onde ele demonstra que é possível uma quantização num espaço de Rindler; os trabalhos de Davies [11] e Unruh [12] em dois artigos que demonstram que o estado de vácuo de Minkowski não passa de um estado térmico de Rindler com temperatura proporcional à aceleração própria (Efeito Unruh-Davies); finalmente o trabalho de Candelas e Raine [23] que calculam o propagador de Feynman para a TQC em Rindler.

2.1 Espaço-tempo de Rindler

Lembremos de algumas definições simples de Relatividade Restrita. Esta seção baseada no capítulo 6 de [24]). A aceleração própria é definida como:

$$a = \frac{du}{d\tau} \quad (2.1)$$

onde τ é o tempo próprio e $u = \frac{dx}{d\tau}$ é a 4-velocidade do observador. No referencial próprio do observador $u = (1, \vec{0})$ então $u^\mu u_\mu = 1$. Derivando esta relação com respeito a τ obteremos então que $u \cdot a = 0$. Nosso problema é obter a linha de universo para um observador com aceleração própria constante g , na direção x . Temos a terceira relação $a^\mu a_\mu = g^2$. O sistema a ser resolvido é:

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad (2.2)$$

$$u^\mu a_\mu = 0 \quad (2.3)$$

$$a^\mu a_\mu = g^2 \quad (2.4)$$

Pode-se colocá-lo facilmente na forma:

$$\frac{du^0}{d\tau} = \pm g u^1 \quad (2.5)$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = \pm g u^0 \quad (2.6)$$

A integração das equações anteriores definem a seguinte linha de universo:

$$t = \pm g^{-1} \sinh g\tau \quad x^1 = \pm g^{-1} \cosh g\tau \quad (2.7)$$

que representam os dois ramos da hipérbole desenhada na figura 2.1:

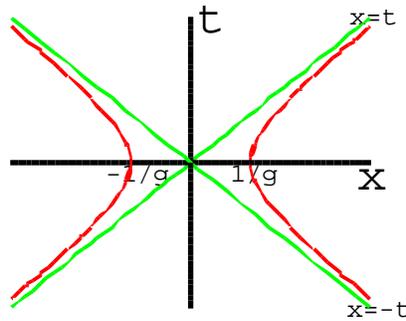


Figura 2.1: Linha de universo de um observador uniformemente acelerado com aceleração própria $\pm g$

Na figura 2.1, as retas $x = \pm t$ são as assíntotas das hipérbolas. Fisicamente, o ramo direito da hipérbole representa um observador que é acelerado constantemente da velocidade¹ $-c$ em $t = -\infty$ até a velocidade c em $t = \infty$. Analogamente, o ramo esquerdo da hipérbole representa um observador que é desacelerado constantemente da velocidade c em $t = -\infty$ até a velocidade $-c$ em $t = \infty$.

2.1.1 O sistema de coordenadas de Rindler

Já conhecia-se que o movimento de uma partícula relativística com aceleração própria constante g é uma hipérbole na década de 30, porém um sistema de coordenadas adaptado a esse observador só apareceu na literatura em 1966 num trabalho de Rindler[25], no contexto da relação entre esse espaço-tempo e a solução exterior de Kruskal, que descreve a máxima extensão analítica de um buraco negro de Schwarzschild. As transformações de coordenadas de Rindler d-dimensional $(\tau, \xi, \vec{x}_\perp)$ a partir das coordenadas cartesianas de Minkowski $(x^0, x^1, \vec{x}_\perp)$ são:

¹lembre-se que estamos usando $c = 1$

$$x^0 = \xi \sinh\tau \quad x^1 = \xi \cosh\tau \quad x^i = x^i_{\perp} \quad (i = 2, \dots, d-1) \quad (2.8)$$

Facilmente chegamos ao elemento de linha:

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2 - d\vec{x}_{\perp}^2 \quad (2.9)$$

Apesar do sistema de coordenadas de Rindler não estar definido globalmente é possível encontrar outras três transformações para cobrir todo o espaço-tempo de Minkowski, em outras palavras são necessários quatro sistemas de coordenadas, representados na figura 2.2.

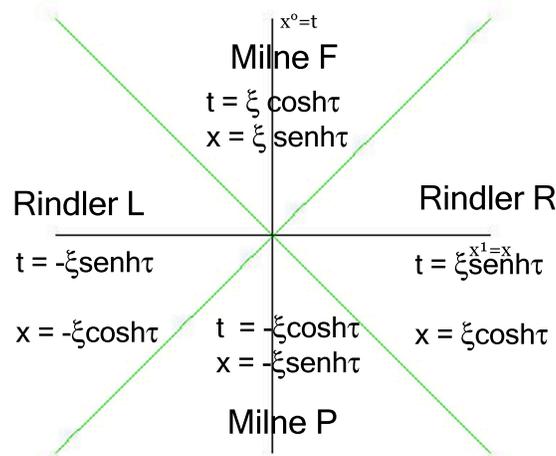


Figura 2.2: O espaço de Minkowski dividido em 4 sistemas de coordenadas (as coordenadas triviais são omitidas)

O vetor $B = \partial_{\tau}$ é vetor de Killing do tipo-tempo na métrica de Rindler. Em coordenadas de Minkowski temos $B = x^1\partial_0 + x^0\partial_1$, que é um gerador de “boosts” no espaço-tempo de Minkowski. Para relacionar este espaço à solução obtida anteriormente, observemos que a

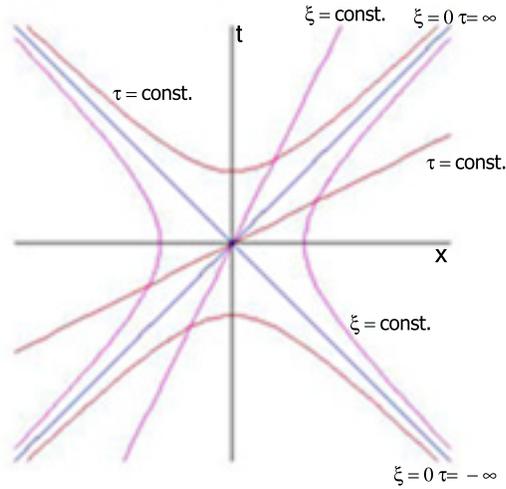


Figura 2.3: A estrutura do sistema de coordenadas de Milne e Rindler

equação do fluxo gerado pelo vetor de Killing tipo-tempo² é:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = B^\mu(x(\lambda)) \quad (2.10)$$

Seja $\xi = g^{-1} = \text{const}$, $\vec{x}_\perp = \text{const}$. Obtemos que o tempo próprio η relaciona-se com o tempo de Rindler $\tau = g\eta$ e a linha de universo pode ser obtida como na seção anterior:

$$t(\eta) = \frac{1}{g} \sinh(g\eta) \quad x(\eta) = \frac{1}{g} \cosh(g\eta) \quad (2.11)$$

Isto é exatamente a linha de universo de um observador com aceleração própria g . Da equação (2.10) temos:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= x \\ \frac{dx}{d\lambda} &= t \end{aligned} \quad (2.12)$$

² λ é o parâmetro do fluxo

Pela semelhança com o sistema (2.5) temos $\lambda = \tau = g\eta$.

Antes de passarmos a construção da TQC em espaços de Rindler, façamos um análogo a construção de Kruskal[26, 27]. A pergunta de Kruskal é se é possível exibirmos um sistema de coordenadas que pode ser estendido além da região Rindler-R. Mostra-se que é possível. Começamos com a obtenção das geodésicas nulas em Rindler (suponhamos $\vec{x}_\perp = \text{const}$), assim:

$$-\xi^2 \dot{\tau}^2 + \dot{\xi}^2 = 0 \quad (2.13)$$

onde o ponto indica derivada com respeito ao parâmetro afim da geodésica. Integrando a equação acima obteremos que:

$$\tau = \pm \ln \xi + \text{constante} \quad (2.14)$$

onde o sinal mais indica geodésicas “outgoing”³ enquanto o sinal menos referem-se as “ingoing”⁴. As coordenadas nulas (u, v) são definidas como:

$$u = \tau - \ln \xi \quad (2.15)$$

$$v = \tau + \ln \xi \quad (2.16)$$

cujo domínio é $-\infty < u < \infty$ e $-\infty < v < \infty$.

O sistema de coordenadas obtido é:

³A tradução para o português seria que saem, divergentes.

⁴Aquelas que entram, convergentes.

$$ds^2 = e^{v-u} dudv \quad (2.17)$$

Porém a região coberta ainda é Rindler-R. Em razão desta limitação, busquemos um sistema de coordenadas associado ao espaço de Rindler que possa ser “extendido” além $\xi = 0$ [27]. Não será feita aqui esta demonstração, por economia de espaço, mas essas coordenadas existem e são dadas por:

$$U = -e^{-u} \quad (2.18)$$

$$V = e^v \quad (2.19)$$

A métrica de Rindler nesse sistema de coordenadas fica

$$ds^2 = dUdV \quad (2.20)$$

A solução correspondente ao quadrante Rindler-R é $U < 0$ e $V > 0$, porém não existe nenhuma singularidade em $U = V = 0$, logo poderemos expandir esse espaço para quaisquer valores de U e V . Definindo agora $U = x + t$ e $V = t - x$ obtemos que esse sistema de coordenadas extendido é o espaço de Minkowski.

2.2 Teoria quântica de campos em espaços de Rindler

Nosso objetivo será a construção de uma teoria de campos no espaço de Rindler. A primeira pergunta que devemos fazer-nos é: Existe uma teoria quântica de campos numa variedade in-

completa⁵? Esta pergunta é respondida afirmativamente numa forma um pouco mais formal por Candelas e Raine [23], porém Fulling num procedimento mais direto obtém a quantização para um espaço de Rindler [8]. Este é um espaço interessante para começarmos pois embora seja plano, pelo princípio da Equivalência aceleração é equivalente à gravidade, ele ainda apresenta horizonte de eventos (assíntotas da hipérboles) e conhecemos a TQC no espaço de Minkowski que cobre toda a variedade inclusive a região Rindler-R. Queremos ao final desta seção mostrar que um observador acelerado mede um espectro térmico com T proporcional a sua aceleração própria g . Este é o efeito Unruh-Davies. Começaremos com o esquema proposto por Fulling [8], depois introduziremos a construção formal de Unruh [12] e de P. C. W. Davies [11], cujo mérito é utilizar fielmente o método de S. W. Hawking para a obtenção da temperatura de buracos negros [9, 10, 28]. Por fim introduziremos a noção de detector de partículas chamado de detector de Unruh-deWitt.

2.2.1 A construção de Fulling

O método de Fulling é um método bem direto. O espaço Rindler-R é globalmente hiperbólico e suas superfícies de Cauchy⁶ são aquelas de $\tau = \text{constante}$ (Veja figura 2.3). Primeiramente deveremos obter os modos normais da equação de Klein-Gordon associada a métrica (2.9). Ela é extremamente fácil de ser obtida:

⁵Diz-se que uma variedade é incompleta quando for impossível fazer uma descrição global da mesma por um único sistema de coordenadas

⁶Uma superfície é dita de Cauchy se dados os valores do campo φ e de seu momento canonicamente conjugado π em todo ponto desta superfície, consegue-se pela solução da equação de campo obter os respectivos valores do campo e de seu momento canonicamente conjugado em qualquer instante de tempo

$$(\square + m^2)\varphi = 0$$

$$\left(\frac{\partial_\tau^2}{\xi^2} - \partial_\xi^2 - \frac{\partial_\xi}{\xi} - \partial_i^2 + m^2\right)\varphi(\tau, \xi, x_\perp^i) = 0. \quad (2.21)$$

Usando

$$\varphi(\tau, \xi, x_\perp^i) = T(\tau)X(\xi) \prod_2^{d-1} X_\perp^i(x_\perp^i),$$

obtemos, pelo método da separação de variáveis, as seguintes equações

$$\frac{d^2 T(\tau)}{d\tau^2} = -\omega^2 T(\tau) \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 X_\perp^i(x_\perp^i)}{dx_\perp^{i^2}} = -\vec{k}_\perp^2 X_\perp^i(x_\perp^i) \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + \frac{\omega^2}{\xi^2} - \mu^2\right) X(\xi) = 0 \quad (2.24)$$

onde $\mu = \sqrt{\vec{k}_\perp^2 + m^2}$. As duas primeiras equações tem solução imediata e dão os modos $T(\tau) = e^{i\omega\tau}$ e $X_\perp^i(x_\perp^i) = e^{i k_\perp^i x_\perp^i}$. A novidade encontra-se na equação (2.24). Esta equação é satisfeita pela chamada função de MacDonald, denotada por K_ν . A segunda solução desta equação é representada por I_ν , só que esta é descartada por divergir no infinito. Os modos não-normalizados podem ser escritos como:

$$u_{\vec{k}_\perp, \omega} = K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{-i\omega\tau} \quad (2.25)$$

A normalização destes modos é feita em [8, 22]. Existem duas formas de normalizar o conjunto completo acima descrito. A outra forma é usada por Svaiter [19] e Takagi [29]. Utilizando a primeira forma o modo normalizado é:

$$u_{\vec{k}_\perp, \omega} = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{-i\omega\tau} \quad (2.26)$$

O campo pode então ser escrito [8] em função dos operadores de criação ($b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger$) e aniquilação ($b_{\vec{k}_\perp, \omega}$) de cada modo \vec{k}_\perp, ω como:

$$\varphi(\tau, \xi, x_\perp^i) = \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2}k_\perp \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{u_{\vec{k}_\perp, \omega} b_{\vec{k}_\perp, \omega} + u_{\vec{k}_\perp, \omega}^* b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger\} \quad (2.27)$$

O estado de vácuo é aquele em que:

$$b_{\vec{k}_\perp, \omega} |0, F\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}_\perp, \omega \quad (2.28)$$

Este é o vácuo de Fulling, também conhecido como vácuo de Rindler $|0, R\rangle$. Para métricas estáticas, o momento canonicamente conjugado ao campo é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \varphi \quad (2.29)$$

Para espaço de Rindler temos:

$$\pi(\tau, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{\xi}{\xi^2} \partial_\tau \varphi = \frac{1}{\xi} \partial_\tau \varphi \quad (2.30)$$

Usando (2.27), obtemos que o momento canonicamente conjugado é:

$$\pi(\tau, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{-i}{\xi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \int d^{d-2} \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) \left(e^{-i\omega\tau} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} b_{\omega, \vec{k}_\perp} - e^{i\omega\tau} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} b_{\omega, \vec{k}_\perp}^\dagger \right) \quad (2.31)$$

onde $\zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi, \vec{x}_\perp) = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu\xi)$. Observemos que as hipersuperfícies $\tau = 0$ e $t = 0$

coincidem em Rindler-R, permitindo então comparar estes modos com os modos de Minkowski

e assim calcular os coeficientes de Bogoliubov. Temos então para $\tau = 0$:

$$\pi(0, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{-i}{\xi} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\omega}{2}} \int d^{d-2} \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) \left(e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} b_{\omega, \vec{k}_\perp} - e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} b_{\omega, \vec{k}_\perp}^\dagger \right) \quad (2.32)$$

Usando a condição de normalização:

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int d^{d-2} \vec{x}_\perp \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) \zeta_{\omega', \vec{k}'_\perp}(\xi) e^{i(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \cdot \vec{x}_\perp} = \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \quad (2.33)$$

e notando que $\zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) = \zeta_{\omega, -\vec{k}_\perp}(\xi)$, pode-se “inverter” as equações (2.27) e (2.32) chegando

então a expressão:

$$b_{\omega, \vec{k}_\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\omega} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int d^{d-2} \vec{x}_\perp \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \varphi(0, \xi, \vec{x}_\perp) + \right. \\ \left. + i \sqrt{\frac{1}{\omega}} \int_0^\infty d\xi \int d^{d-2} \vec{x}_\perp \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \pi(0, \xi, \vec{x}_\perp) \right\} \quad (2.34)$$

A quantização no espaço de Minkowski é a usual então só colocaremos os resultados:

$$\Phi(0, x, \vec{x}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\Omega}} \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \left\{ e^{ikx} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp} + e^{-ikx} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp}^\dagger \right\} \quad (2.35)$$

onde $\Omega = \sqrt{\vec{k}_\perp^2 + m^2}$. Observe que como as superfícies $t = 0$ e $\tau = 0$ coincidem esta também é uma expansão válida para o campo em Rindler-R, assim (note que em $\tau = 0$, $x = \xi$), então:

$$\varphi(0, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\Omega}} \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \left\{ e^{ik\xi} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp} + e^{-ik\xi} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp}^\dagger \right\} \quad (2.36)$$

Já o momento canonicamente conjugado é:

$$\Pi(0, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int dk \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \left\{ e^{ik\xi} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp} - e^{-ik\xi} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp}^\dagger \right\} \quad (2.37)$$

Notemos que o momento canonicamente conjugado associado ao espaço de Rindler é:

$$\pi(0, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{\partial \tau}{\xi} = \partial_t = \Pi(0, x, \vec{x}_\perp) \quad (2.38)$$

Então poderemos ter também:

$$\pi(0, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int dk \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \left\{ e^{ik\xi} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp} - e^{-ik\xi} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} a_{k, \vec{k}_\perp}^\dagger \right\} \quad (2.39)$$

Poderemos então substituir (2.36) e (2.39) em (2.34), usando a conhecida identidade:

$$\frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \int d^{d-2} \vec{x}_\perp e^{i(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \cdot \vec{x}_\perp} = \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \quad (2.40)$$

e isto permite-nos eliminar a integral em \vec{k}_\perp . Obtemos então:

$$b_{\omega, \vec{k}_\perp} = \int dk \alpha(\omega, k) a_{k, \vec{k}_\perp} + \int dk \beta(\omega, k) a_{k, -\vec{k}_\perp}^\dagger \quad (2.41)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov α e β são:

$$\alpha(\omega, k) = \frac{(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\xi e^{ik\xi} \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) \left[\frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} + \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \right] \quad (2.42)$$

$$\beta(\omega, k) = \frac{(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\xi e^{-ik\xi} \zeta_{\omega, \vec{k}_\perp}(\xi) \left[\frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} - \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \right] \quad (2.43)$$

Estas integrais podem ser feitas [8] o resultado é:

$$\alpha(\omega, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega(1 - e^{-2\pi\omega})}} \left(\frac{\Omega + k}{m} \right)^{\omega} \quad (2.44)$$

$$\beta(\omega, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega(e^{2\pi\omega} - 1)}} \left(\frac{\Omega + k}{m} \right)^{\omega} \quad (2.45)$$

E assim chegamos ao resultado final desta seção:

$$|\beta(\omega, k)|^2 = \frac{1}{2\pi\Omega(e^{2\pi\omega} - 1)} \quad (2.46)$$

Vamos analisar este resultado: o vácuo de Minkowski é visto por um observador acelerado como tendo $|\beta(\omega, k)|^2$ partículas escalares neutras. Este fator é proporcional à distribuição de Bose-Einstein e sugere que o vácuo de Minkowski é um estado térmico com $T = \frac{1}{2\pi}$. Recuperando a aceleração própria ($\omega \rightarrow \omega/g$), temos que o vácuo de Minkowski tem temperatura

$$T = \frac{g}{2\pi}.$$

É interessante ressaltar que Fulling, estava interessado em implementar a quantização num espaço-tempo para exibir um vácuo não-unitariamente equivalente ao vácuo de Minkowski. Na referência [8] ele faz os cálculos em duas dimensões, mas como vemos a generalização para d -dimensões não traz dificuldades, já que como são modos idênticos aos de Minkowski, eles não entram no cálculo dos coeficientes de Bogoliubov.

2.2.2 Cálculo do propagador de Feynman

Este cálculo foi feito em [23] para um campo escalar neutro com massa. A partir de (2.27), usando a definição padrão do propagador causal e o fato que

$$\langle 0, F | a_{\omega \vec{k}_\perp} a_{\omega' \vec{k}'_\perp}^\dagger | 0, F \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp)$$

teremos uma expressão fechada para o propagador.

$$\begin{aligned} G_F(\tau, \xi, \vec{x}_\perp; \tau', \xi', \vec{x}'_\perp) &= i \int_0^\infty d\omega \frac{4 \sinh(\pi\omega)}{(2\pi)^d} \int d^{d-2} \vec{k}_\perp K_{i\omega}(\mu\xi) K_{i\omega}(\mu\xi') \times \\ &\times \exp \left[i \vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp) - i\omega |\tau - \tau'| \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Observe que esta última expressão é analítica para $\Re|\tau - \tau'| > 0$ e $\Im|\tau - \tau'| < 0$. Para resolver esta integral usaremos a seguinte identidade:

$$K_{i\omega}(\mu\xi) K_{i\omega}(\mu\xi') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda\omega} K_0(\mu\gamma_1) \quad (2.48)$$

onde $\gamma_1 = \xi^2 + \xi'^2 + 2\xi\xi' \cosh \lambda$. Fazendo $u = |\tau - \tau'|$, supondo $\Im u < -\pi$, troquemos a ordem de integração:

$$\begin{aligned}
 G_F(\tau, \xi, \vec{x}_\perp; \tau', \xi', \vec{x}'_\perp) &= \\
 &= i \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi^2)} \sinh(\pi\omega) e^{-i\omega(u-\lambda)} \int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} K_0(\mu\gamma_1) \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

A primeira integral pode ser calculada [30] e seu resultado é:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi^2)} \sinh(\pi\omega) e^{-i\omega(u-\lambda)} = \frac{-1}{2\pi [(\lambda - u)^2 + \pi^2]} \quad (2.50)$$

Para continuarmos usamos a representação integral de $K_0(\mu\gamma_1)$.

$$K_0(\mu\gamma_1) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-z}{2} - \frac{\mu^2\gamma_1^2}{2z} \right] \quad (2.51)$$

A integral que queremos resolver é:

$$\int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \int_0^{\infty} \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-z}{2} - \frac{\mu^2\gamma_1^2}{2z} \right] \quad (2.52)$$

usando que $\mu^2 = \vec{k}_\perp^2 + m^2$ e invertendo a ordem de integração

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-z}{2} - \frac{m^2\gamma_1^2}{2z} \right] \int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \exp \left[\frac{-\vec{k}_\perp^2\gamma_1^2}{2z} + i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp) \right] \quad (2.53)$$

Para fazermos a integral em \vec{k}_\perp deveremos completar o quadrado no argumento da exponencial, obtendo:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-z}{2} - \frac{m^2 \gamma_1^2}{2z} - \frac{z(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{2\gamma_1^2} \right] \int \frac{d^{d-2} \vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \exp \left[\frac{-\gamma_1^2}{2z} \left(\vec{k}_\perp + \frac{i(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)z}{\gamma_1^2} \right)^2 \right] \quad (2.54)$$

A última integral é uma integral Gaussiana, bastante conhecida, assim

$$\int_0^\infty \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-z}{2} - \frac{m^2 \gamma_1^2}{2z} - \frac{z(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{2\gamma_1^2} \right] \left(\frac{z}{2\pi\gamma_1^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \quad (2.55)$$

Arrumando os termos da integral em z

$$\int_0^\infty \frac{dz}{2z} \exp \left[\frac{-1}{2} \left[z \left(\frac{\gamma_1^2 + (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{\gamma_1^2} \right) + \frac{m^2 \gamma_1^2}{z} \right] \right] \left(\frac{z}{2\pi\gamma_1^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \quad (2.56)$$

Chamando $\gamma_2 = \gamma_1^2 + (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2$ e $z = \frac{m\gamma_1^2}{\gamma_2} v$, assim a última equação escreve-se

$$\int_0^\infty \frac{dv}{2v} \left(\frac{mv}{2\pi\gamma_2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \exp \left\{ \frac{-m\gamma_2}{2} \left[v + \frac{1}{v} \right] \right\} \quad (2.57)$$

Usando a tabela de representações integrais de funções especiais [30] teremos

$$K_\nu(xz) = \frac{z^\nu}{2} \int_0^\infty \exp \left[\frac{-x}{2} \left(t + \frac{z^2}{t} \right) \right] t^{-\nu-1} \quad (2.58)$$

onde $|\arg z| < \pi/4$; $|\arg z| = \pi/4$ e $\Re \nu < 1$. Comparando os termos teremos que (2.57) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{m}{2\pi\gamma_2} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\gamma_2) \quad (2.59)$$

Falta fazer a integral em λ , que é:

$$G_F = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - u)^2 + \pi^2} \left(\frac{m}{2\pi\gamma_2} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\gamma_2) \quad (2.60)$$

O integrando contém pólos em $\lambda = u \pm i\pi$, e devem estar abaixo do contorno de integração para prolongar analiticamente a $\Im u = 0$, deveremos assegurar o contorno ficará acima dos pólos. Somente o pólo $\lambda = u + i\pi$ contribuirá para a integral acima. O cálculo do resíduo deste pólo é simples e obteremos finalmente:

$$G_F(\tau, \xi, \vec{x}_{\perp}; \tau', \xi', \vec{x}'_{\perp}) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi\sqrt{2\sigma}} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(\sqrt{2m^2\sigma}) \quad (2.61)$$

onde $(2\sigma)^2 = \xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cosh(\tau - \tau')$ é a distância geodésica do espaço de Minkowski em coordenadas de Rindler.

O propagador (2.61) é justamente o propagador de Feynmann do espaço de Minkowski em coordenadas de Rindler. Isto levou Boulware a dizer que as duas quantizações são equivalentes[31].

2.2.3 Um análogo do efeito Hawking — cálculo de Davies

Após os artigos de Hawking sobre a evaporação de buracos negros[9, 10], surge a necessidade de um entendimento do fenômeno em sistemas físicos mais simples. Davies na referência [11] repete em detalhes o cálculo feito por Hawking só que agora é um espaço de Rindler com um espelho totalmente refletor a distância a da origem do sistema de coordenadas.

Modos de Rindler sem massa

Agora queremos resolver a equação de Klein-Gordon para modos sem massa. Começemos para dimensão $d \geq 3$

$$\square\varphi(\tau, \xi, \vec{x}_\perp) = 0 \quad (2.62)$$

O procedimento será o padrão, separação de variáveis. Isto foi feito na seção anterior, os modos de frequência positiva são::

$$u_{\omega, \vec{k}_\perp} = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(k_\perp \xi) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - i\omega\tau} \quad (2.63)$$

A expansão do campo é dada pela expressão (2.27). Vamos agora obter os modos sem massa quando $d = 2$. Uma TQC sem massa em duas dimensões, tem diversos problemas de ordem matemática, pois os propagadores não decaem suficientemente rápido no infinito[32]. Se pensarmos em campos como distribuições nem todas as funções teste podem ser utilizadas[33]. Do ponto de vista físico, esta TQC é assolada pela presença de divergências infravermelhas, que não podem ser eliminadas pelos processos usuais de renormalização. Devido a simplificações matemáticas usaremos este modelo.

A equação ao qual chegamos é:

$$(\partial_\tau^2 - \xi\partial_\xi - \xi^2\partial_\xi^2)\varphi(\tau, \xi) = 0 \quad (2.64)$$

Após a separação de variáveis chegamos a:

$$\partial_\tau^2 T(\tau) = -\omega^2 T(\tau) \quad (2.65)$$

$$(\xi^2 \partial_\xi^2 + \xi \partial_\xi + \omega^2) X(\xi) = 0 \quad (2.66)$$

cuja solução é imediata:

$$u_\omega = e^{i\omega(\tau + \ln \xi)} \quad (2.67)$$

Efeito Unruh-Davies

Quando $\tau \rightarrow -\infty$ nós temos que a expansão do campo pode ser feita como em (2.27) e passa a ter a forma:

$$\varphi(\tau, \xi) = \int_0^\infty dw \left(\frac{e^{i\omega(\tau + \ln \xi)} a_\omega}{\sqrt{2\omega}} + \frac{e^{-i\omega(\tau + \ln \xi)} a_\omega^\dagger}{\sqrt{4\pi\omega}} \right) \quad (2.68)$$

Vamos estudar o campo no ponto \mathcal{O} , localizado na região com $\tau \rightarrow \infty$. Este ponto tem grande relevância na solução de Hawking [9], pois representa um observador em repouso a distância infinita do horizonte do buraco negro. O campo pode ser decomposto como:

$$\varphi(\tau, \xi) = \int dw (g_\omega b_\omega + g_\omega^* b_\omega^\dagger + h_\omega c_\omega + h_\omega^* c_\omega^\dagger) \quad (2.69)$$

onde g_ω representa as soluções que são refletidas pela parede e vão para $\xi \rightarrow \infty$ e h_ω são os modos que atravessam o horizonte de eventos. É claro que nosso interesse está nos modos que não cruzam o horizonte de eventos e são medidos em \mathcal{O} . Os operadores b_ω e c_ω são os operadores de aniquilação.

A figura 2.4 representa a situação física usada no cálculo. A linha de universo do espelho é a reta $x = a$.

O método de Hawking consiste em considerar os modos de frequência puramente positiva em \mathcal{O} como tendo a forma:

$$g_\omega \sim \omega^{-1/2} e^{i\omega(\tau - \ln \xi)} \quad (2.70)$$

Deveremos então “voltar” com esses modos no tempo para $\tau \rightarrow -\infty$, onde nessa região g_ω não será um modo de frequências positivas puras mas sim uma combinação de frequências positivas e negativas dos modos u_ω da forma:

$$g_\omega = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} u_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} u_{\omega'}^*) \quad (2.71)$$

Um observador em \mathcal{O} mede o estado de vácuo adaptado a $\tau \rightarrow -\infty$ como tendo um número de partículas proporcional a $|\beta_{\omega\omega'}|^2$. Vamos calcular esse coeficiente de Bogoliubov:

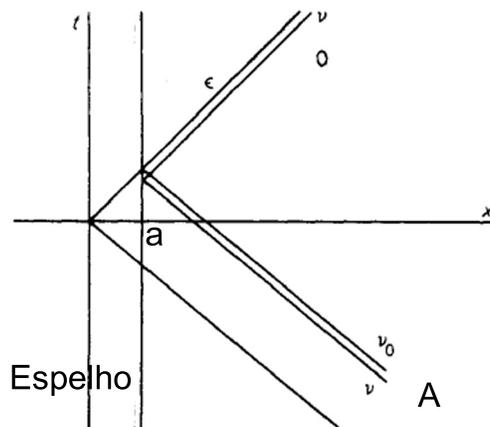


Figura 2.4: Situação física usada no cálculo de Davies

Observe que as linhas a $\pm 45^\circ$ são geodésicas nulas do espaço-tempo de Rindler, logo são representadas pela equação:

$$\xi e^{\pm\tau} = \text{constante} \quad (2.72)$$

Pela figura (2.4) a reta ν terá a equação:

$$\xi e^{-\tau} = \varepsilon \quad (2.73)$$

Estas retas são superfícies de fase constante. Para a linha ν a fase seria $-\omega \ln \varepsilon$, que diverge para $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja no horizonte futuro \mathcal{H}^+ . Introduzindo o tempo avançado $v = \tau + \ln \xi$, linhas “ingoing” terão equação $e^v = \text{constante}$. A diferença de fase entre o último raio refletido (linha ν_0) e a linha ν , permite-nos escrever:

$$\varepsilon = e^{v_0} - e^v \quad (2.74)$$

Note que estamos interessados nos modos que chegam a \mathcal{O} após serem “refletidos” pelo espelho localizado em $x = a$. Observe que a posição do espelho altera drasticamente o valor de v_0 . Como queremos estudar a região $\varepsilon \rightarrow 0$; deve satisfazer a condição $v - v_0 \ll 1$. Obtemos então facilmente

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= e^{v_0} - e^v \\
&= e^{v_0} [1 - e^{v-v_0}] \\
&\approx e^{v_0} (v - v_0)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

O modo g_ω terá fase $-\omega [v_0 + \ln(v_0 - v)]$. Se $v > v_0$ g_ω será nula, os modos “ingoing” atravessarão o horizonte de eventos. Assim a forma de g_ω nas proximidades de A será:

$$g_\omega \approx \begin{cases} \frac{(\text{constante})^{i\omega}}{\sqrt{\omega}} \exp(-i\omega \ln(v_0 - v)) & \text{se } v < v_0 \\ 0 & \text{se } v > v_0 \end{cases} \tag{2.76}$$

Assim poderemos calcular os coeficientes de Bogoliubov fazendo uma transformada de Fourier da última equação com respeito a variável v . Encontramos

$$|\alpha_{\omega\omega'}| = \frac{|\Gamma(1 - i\omega)|}{\sqrt{\omega\omega'}} \quad |\beta_{\omega\omega'}| = \frac{e^{\pi\omega} |\Gamma(1 - i\omega)|}{\sqrt{\omega\omega'}} \tag{2.77}$$

Se não tivéssemos o espelho, todos os modos atravessariam o horizonte futuro e seriam vistos por um observador em \mathcal{O} como sendo absorvidos pelo horizonte, o mesmo ocorre para $v > v_0$. Com o espelho para $v < v_0$, o observador interpretará este resultado como se os modos fossem absorvidos e posteriormente emitidos pelo horizonte. Pode-se mostrar [11] que a razão entre a taxa de absorção e a de emissão é a mesma de um corpo negro com temperatura $T = \frac{1}{2\pi}$.

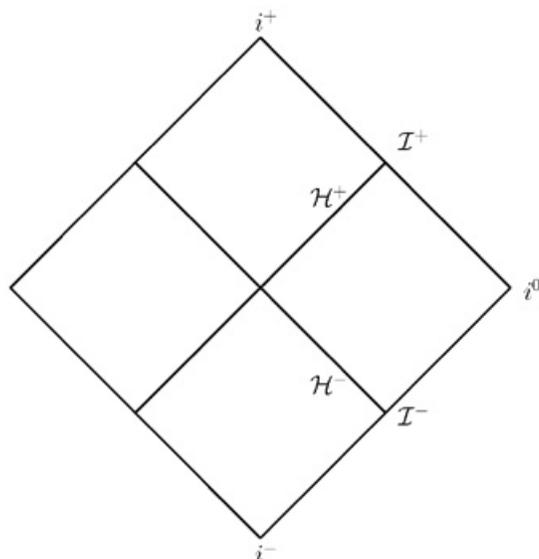


Figura 2.5: Diagrama de Penrose do espaço de Rindler

2.2.4 Correlação entre os espaços Rindler-R e Rindler-L — método de Unruh

O método de Unruh pode ser considerado original, pois depende de uma observação sagaz. Isto simplifica enormemente os cálculos matemáticos e possibilita, sem maiores argumentações, identificarmos que a temperatura é proporcional à aceleração própria do observador de Rindler. Ainda aparece uma correlação do tipo BCS (Bardeen-Cooper-Schiffer) entre os espaços Rindler-R e Rindler-L que são causalmente desconexos. Ou seja, temos acesso aos modos além do horizonte de eventos.

Uma hipersuperfície de $\tau = \text{constante}$ pode ser usada para fazer uma teoria de campo em Rindler-R. Um campo para um observador de Minkowski⁷, não ficará confinado a Rindler-R, e uma superfície de $\tau = \text{constante}$ também é uma superfície de Cauchy para este observador. Para descrevermos então o campo precisamos das contribuições dos modos Rindler-R e Rindler-L. A

⁷Um observador é dito de Minkowski se ele for inercial.

expansão do operador de campo fica escrita como:

$$\phi(t, x, \vec{x}_\perp) = \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} \left\{ b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)} u_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)} + b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)\dagger} u_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)*} + b_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)} u_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)} + b_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)\dagger} u_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)*} \right\} \quad (2.78)$$

onde os sinais (+) e (-) referem-se aos modos relativos a Rindler-R e Rindler-L. O modos de frequência positiva são:

$$u_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{-i\omega\tau} & \text{em Rindler-R} \\ 0 & \text{em Rindler-L} \end{cases} \quad (2.79)$$

$$u_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{em Rindler-R} \\ \frac{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu\xi) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{i\omega\tau} & \text{em Rindler-L} \end{cases} \quad (2.80)$$

A combinação simples destas soluções não constitui uma função inteira, pois as soluções são não analíticas nos horizontes \mathcal{H}^- e \mathcal{H}^+ . Estes horizontes estão representados na figura 3.1. Unruh estuda o comportamento dessas soluções em \mathcal{H}^- ou equivalentemente na superfície $V = 0$. Para os modos de Minkowski de frequência positiva temos que

$$u(t, x, \vec{x}_\perp) = \frac{1}{\omega(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} e^{-i\omega t + ikx} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \quad (2.81)$$

Nessa hipersuperfície fica

$$u(U, V = 0, \vec{x}_\perp) = \frac{1}{\omega(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} e^{-i\omega \frac{U}{2}} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \quad (2.82)$$

Ou seja essa função é analítica para $\Im U < 0$. Observemos que nos horizontes $\xi = 0$, então precisamos da expansão da função de Bessel para valores próximos a $\xi = 0$ e temos[29]:

$$K_{i\omega}(\mu\xi) \approx \frac{i\pi}{2 \sinh(\pi\omega)\Gamma(1+i\omega)} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{i\omega} \xi^{i\omega} + \text{c.c.} \quad (2.83)$$

Note que $\xi^{i\omega} = e^{i\omega \ln \xi}$ e isto permite-nos escrever os modos em função da exponencial dos tempos retardado e avançado $\tau \pm \ln \xi$, e assim relacioná-los com as coordenadas nulas U e V .

Usamos também que $\ln(-1) = i\pi$. Assim, mostra-se que a seguinte combinação[12, 34]:

$$v_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\omega}}} \left\{ u_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} + e^{-\pi\omega} u_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-\epsilon)*} \right\} \quad (2.84)$$

onde $\epsilon = \pm$, é analítico em todo o espaço para $\Im U < 0$ e compartilham pois, da mesma estrutura que os modos de Minkowski de frequência positiva. Eles compartilham inclusive do mesmo vácuo de Minkowski. Assim o campo descrito por um observador de Minkowski é:

$$\phi(t, x, \vec{x}_\perp) = \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} \left\{ a_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)} v_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)} + a_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)\dagger} v_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(+)*} + a_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)} v_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)} + a_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)\dagger} v_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-)*} \right\} \quad (2.85)$$

onde $a_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} |0, M\rangle = 0$ e $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} |0, F\rangle = 0$. Comparando as duas expressões para ϕ obtemos:

$$a_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\omega}}} \left[b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} - e^{-\pi\omega} b_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-\epsilon)\dagger} \right] \quad (2.86)$$

Agora poderemos verificar a seguinte expansão do vácuo de Minkowski em função das “partículas de Fulling-Rindler”.

$$\begin{aligned}
a_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} |0, M\rangle &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\omega}}} \left[b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} - e^{-\pi\omega} b_{\omega, -\vec{k}_\perp}^{(-\epsilon)\dagger} \right] |0, M\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Obteremos então:

$$|O, M\rangle = \prod_{\omega, \vec{k}_\perp} \sqrt{1 - e^{-2\pi\omega}} \sum_{n_{\omega, \vec{k}_\perp}=0}^{\infty} e^{-n_{\omega, \vec{k}_\perp} \pi\omega} |n_{\omega, \vec{k}_\perp}\rangle^{(+)} |n_{\omega, -\vec{k}_\perp}\rangle^{(-)} \tag{2.88}$$

Temos então uma correlação do tipo BCS, da teoria da supercondutividade, entre as “partículas” dentro e fora do horizonte. Um argumento interessante sobre isto é dado por Unruh e Wald em [35] e é retomado por Svaiter & Svaiter em [15]. No espaço de Minkowski não temos horizontes, então os pares criados de partículas e antipartículas (no caso do campo escalar neutro, a mesma partícula) sempre se aniquilam, porém para um observador em Rindler-R, devido a presença do horizonte de eventos, elas não aniquilam-se e uma delas é medida. Assim para um observador em Rindler-R (Rindler-L), o vácuo de Minkowski será um estado com partículas. De fato:

$$\langle 0, M | b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)\dagger} b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(\epsilon)} | 0, M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega} - 1} \tag{2.89}$$

O que mostra que o número de partículas encontrado possui um espectro térmico, como pode-se ver pela presença da distribuição de Bose-Einstein à temperatura $\frac{1}{2\pi}$.

Finalmente daremos uma demonstração bastante conclusiva da relação entre a temperatura e a aceleração própria. Um observador em Rindler-R constrói seus operadores com variáveis

definidas somente em Rindler-R. A forma geral de um operador será⁸

$$O = O^{(+)} \otimes \mathbf{I}^{(-)} \quad (2.90)$$

Assim, poderemos usar as técnicas da mecânica estatística de tomar o traço sobre os modos desconhecidos e obter o resultado. Queremos calcular o valor esperado no vácuo de Minkowski do observável O . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle 0, M | O | 0, M \rangle &= 1 - e^{-2\pi\omega} \sum_{n_1, n_2} \langle n_1 | \langle n_1 | O | n_2 \rangle | n_2 \rangle e^{-\pi(n_1+n_2)\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | O | n \rangle e^{-2\pi n\omega} (1 - e^{-2\pi\omega}) \\ &= \text{Tr } O\rho \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde ρ é igual a matriz de densidade $C e^{-\beta H_R^{(+)}}$, e $\beta = 2\pi$. Reintroduzindo a aceleração própria, concluímos que o vácuo de Minkowski é visto por um observador em Rindler-R como um estado térmico a temperatura $T = \frac{g}{2\pi}$. Podemos mostrar facilmente que:

$$H_R^{(+)} = \int_0^{\infty} d\omega \int d^{d-2} \vec{k}_{\perp} \left(n_{\omega, \vec{k}_{\perp}} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (2.92)$$

Maiores detalhes sobre esta conclusão estão em [36, 37, 38].

⁸a razão é que um operador em geral é definido sobre qualquer hipersuperfície com τ constante, assim ele compreenderá uma parte que age somente em Rindler-R e Rindler-L. Um observador de Rindler-R não pode descrever processos a princípio que estão causalmente desconexos dele (em especial em Rindler-L). Logo seu operador só agirá sobre Rindler-R, daí a razão do operador identidade em Rindler-L

2.2.5 Detectores de partículas

Unruh estuda o que seria a natureza das partículas de Fulling-Rindler. Para isto introduz o conceito de detector de partícula. Dois modelos são investigados: O primeiro seria uma caixa contendo uma partícula no estado fundamental, o detector percebe uma partícula se após um dado tempo a partícula da caixa está em outro estado. Um modelo mais real é feito. Uma caixa com um campo escalar ϕ interagindo com um outro campo escalar Φ com massa. Assim o detector mede um quantum de Φ se o campo ϕ é encontrado em algum outro estado senão o fundamental [12].

Ele chegou a duas conclusões:

- O detector de partículas irá reagir a modos com frequência positiva em relação ao tempo próprio do detector.
- O processo de detecção de um quantum de campo pelo detector corresponde tanto ao processo de absorção como o de emissão de um quantum de campo pelo detector.

Na última conclusão aparece um ingrediente novo, até então os detectores propostos por teóricos de óptica quântica, propostos por Glauber e Nussenzveig não consideram os processos de emissão de um quanta de campo pelo detector com sua posterior excitação. Isto ocorre pois eles usam a aproximação da onda girante (RWA). E é exatamente este processo que fará a diferença na medida das flutuações do vácuo.

deWitt aprimora o detector de Unruh. Constrói um sistema atômico pontual de dois níveis interagindo com o campo escalar pelo termo de interação[39]:

$$L_{int} = c_1 m(\tau) \varphi(x(\tau)) \quad (2.93)$$

onde $m(\tau)$ é o operador de monopolo e $x(\tau)$ é a linha de universo do detector parametrizada pelo tempo próprio. A construção feita aqui segue fielmente [15, 13]. O espaço de Hilbert do sistema campo + detector é

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_D + \mathcal{H}_F \quad (2.94)$$

e a Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H = H_D + H_F + H_{int} \quad (2.95)$$

O estado inicial no qual o sistema é preparado é $|\tau_i\rangle = |g\rangle \otimes |\psi_i\rangle = |g\psi_i\rangle$. Os autovalores de H_D são:

$$\begin{aligned} H_D |g\rangle &= \omega_g |g\rangle \\ H_D |e\rangle &= \omega_e |g\rangle \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde ω_g e ω_e são as energias do átomo no estado fundamental e no estado excitado respectivamente. Usaremos o quadro de interação e precisamos resolver:

$$i\partial_\tau |\tau\rangle = H_{int} |\tau\rangle \quad (2.97)$$

$$|\tau\rangle = \mathcal{U}(\tau, \tau_0) |\tau_0\rangle \quad (2.98)$$

A solução para isto é feita em cursos de Mecânica Quântica e é obtida pela série de Dyson.

Como a interação é suposta fraca, só tomaremos a primeira ordem da série de Dyson

$$\mathcal{U}(\tau, 0) = 1 - \imath \int_0^\tau d\tau' H_{int}(\tau') \quad (2.99)$$

A amplitude de probabilidade de transição do estado $|g\psi_i\rangle$ para $|e\psi_f\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} A_{|g\psi_i\rangle \rightarrow |e\psi_f\rangle} &= \langle e\psi_f | \mathcal{U}(\tau, 0) | g\psi_i \rangle \\ &= -\imath c_1 \int_0^\tau d\tau' \langle e\psi_f | m(\tau) \phi(x(\tau')) | g\psi_i \rangle \\ &= -\imath c_1 \int_0^\tau d\tau' e^{\imath E \tau'} \langle e | m(0) | g \rangle \langle \psi_f | \phi(x(\tau)) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (2.100)$$

onde $E = \omega_e - \omega_g$. A probabilidade de transição é então

$$P_{|g\psi_i\rangle \rightarrow |e\psi_f\rangle}(\tau, 0) = |\langle g\psi_i | \mathcal{U}(\tau, 0) | e\psi_f \rangle|^2 \quad (2.101)$$

Lembrando-se que podemos decompor o campo ϕ em função de suas partes de frequências positiva e negativa. Na Óptica Quântica só usa-se a parte de frequências positivas, desta forma o detector funciona apenas absorvendo partículas. Como no nosso caso estamos levando em conta tanto as partes de frequência positiva e negativa, o detector mede as flutuações do vácuo. Particularizando para $|\psi_i\rangle = |0, M\rangle$ temos:

$$P_{|g\psi_i\rangle \rightarrow |e\psi_f\rangle} = \underbrace{c_1^2 |\langle e | m(0) | g \rangle|^2}_{\text{Seletividade do Detector}} \overbrace{F(E, \tau, 0)}^{\text{Função Resposta}} \quad (2.102)$$

A seletividade do detector é intrínseca do mesmo, não dependendo da sua linha de universo. Como essa parte é sempre fixa, a função resposta conterá toda informação de relevância. A função resposta será dada pela expressão (2.103)

$$F(E, \tau, 0) = \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' e^{-iE(\tau' - \tau'')} \overbrace{\langle 0, M | \phi(x(\tau')) \phi(x(\tau'')) | 0, M \rangle}^{G^+(x(\tau), x(\tau'))} \quad (2.103)$$

Aqui temos um análogo do teorema de Wiener-Kintchine da Mecânica Estatística [40]. No caso mais geral temos:

$$F(E, \tau_f, \tau_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau'' e^{-iE(\tau' - \tau'')} D(x(\tau') x(\tau'')) \quad (2.104)$$

onde $D(x(\tau') x(\tau'')) = \langle \chi | \phi(x(\tau')) \phi(x(\tau'')) | \chi \rangle$ mede a autocorrelação do campo.

Calcularemos a probabilidade de excitarmos o detector uniformemente acelerado. Não é difícil mostrar que [34, 13, 15]

$$G^+(\tau, \xi, \vec{x}_\perp; \tau', \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{-1}{16\pi^2 \sinh^2\left(\frac{\tau - \tau'}{2}\right)} \quad (2.105)$$

Aplicando este resultado em (2.103) e obtemos então:

$$P = \frac{c_1^2}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega |\langle g | m(0) | i \rangle|^2}{e^{2\pi\omega} - 1} \quad (2.106)$$

A presença do termo $(e^{2\pi\omega} - 1)^{-1}$ sugere que o equilíbrio entre o detector uniformemente acelerado e $|0, M\rangle$ é o mesmo que obteríamos com o detector inercial imerso num banho térmico de temperatura $T = \frac{1}{2\pi}$.

Para um detector a tempo finito, sugere-se [15]. Porque a função resposta é não-nula? No interessante artigo [34], um estudo profundo sobre a natureza da medida é feito. No caso de um detector inercial a resposta é nula pois não existe emissão estimulada e a emissão espontânea é compensada pelo coeficiente de absorção. Já num detector acelerado este balanço é alterado e neste mesmo artigo é argumentado o porquê desse desbalanço ser um espectro térmico. A demonstração deste fato foge do escopo desta tese e não será incluída aqui.

Capítulo 3

TQC em Espaço de Rindler: Versão Euclideana

Neste capítulo iremos descrever os resultados principais desta tese. Primeiramente discutiremos o espaço de Rindler após a rotação de Wick para o domínio euclideano. A segunda parte é composta da discussão do resultado de Christensen e Duff e sua generalização no caso do campo escalar neutro com ou sem massa para dimensão maior que 3. Para um campo em duas dimensões teremos problemas matemáticos para campos sem massa. A última parte é composta da apresentação de um resultado devido a Lee. Ele mostra, para duas dimensões sem massa, que a função de Schwinger térmica associada ao espaço de Rindler euclideano não é idêntica à função de Schwinger a $T = 0$ associada ao espaço euclideano. A proposta fundamental desta tese é investigar se isso é uma característica geral ou se só ocorre neste caso extremamente patológico. Verificamos que este é um resultado particular e explicamos que estes termos novos encontrados já existem no espaço euclideano \mathbb{R}^2 .

3.1 Espaço de Rindler Euclideo

A rotação de Wick no espaço de Rindler não tem nenhum problema pois o espaço de Rindler é estático. Fazemos então a rotação de Wick nos espaços de Minkowski e Rindler. O horizonte de eventos neste último é aplicado na origem do plano (Figura(3.1)).

$$\text{Minkowski} = \begin{cases} T = ix^0 \\ X = x \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{Rindler} = \begin{cases} \tau = i\theta \\ \xi = r \end{cases} \quad (3.2)$$

A transformação para o espaço Euclideo de Rindler será

$$T = r \sin \theta \quad X = r \cos \theta \quad (3.3)$$

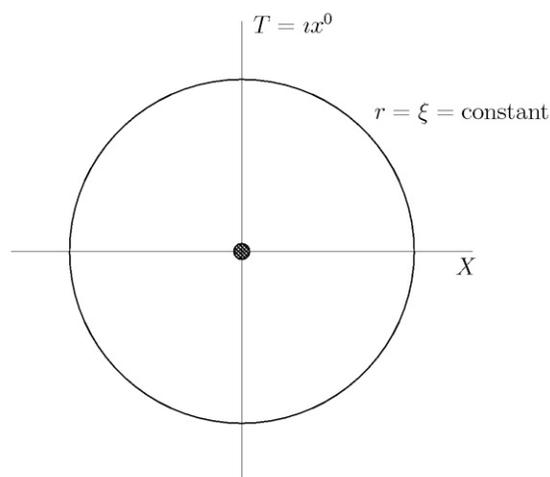


Figura 3.1: Espaço Euclideo de Rindler

O novo “horizonte” será a linha $(0, 0, \vec{x}_\perp)$, logo o grupo de homotopia deste espaço será não trivial. Não é difícil mostrar que o grupo de homotopia é $\pi_1 = \mathbb{Z}$.

Uma característica interessante deste espaço é que ele mistura os espaços-tempo causalmente desconectados Rindler-R e Rindler-L (basta ver que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ temos Rindler-R e $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ temos Rindler-L). A correlação entre esses dois espaços fica clara. Veja as referências [12, 22, 35, 38].

Vemos que teremos periodicidade no tempo imaginário θ , então poderemos conectar este resultado com a condição KMS. Esperamos que exista uma temperatura associada $\beta = \frac{1}{T} = 2\pi$. Se estivéssemos usando a forma da métrica que contém explicitamente a aceleração própria, a periodicidade seria $2\pi/g$ então teríamos uma temperatura associada $\beta = \frac{2\pi}{g}$.

3.2 Generalização do resultado de Christensen & Duff

Christensen e Duff[21] mostram a igualdade entre a função de Schwinger térmica associada ao espaço Euclidiano de Rindler e a função de Schwinger a temperatura zero associada ao espaço Euclidiano usual. Outras referências nesta mesma linha são [41, 42, 43]. Porém seu cálculo é bastante particular, embora seu resultado seja geral, como será demonstrado aqui, e de certa forma já é esperado.

Sabemos que o espaço Euclidiano de Rindler tem topologia não trivial, nesse caso o grupo de homotopia pode ser associado ao número de voltas que um laço dá ao redor do defeito $(0, 0, \vec{x}_\perp)$. Assim o verdadeiro propagador da teoria é aquele em que somamos sobre todas as classes de homotopia distintas (já bastante conhecido da TQC em espaços com topologia

não trivial [44]). Mostraremos a seguir que a função de Schwinger a temperatura zero para campos sem massa em quatro dimensões é proporcional ao quadrado da distância euclideana entre os pontos. Christensen e Duff escolhem uma curva particular onde $r = \text{constante}$. Para $r = r'$, $\vec{x}_\perp = \vec{x}'_\perp$ temos que a distância euclideana entre os pontos $(\theta, r, \vec{x}_\perp)$ e $(\theta', r', \vec{x}'_\perp)$ será $2 \operatorname{sen} \left\{ \frac{(\theta - \theta')}{2} \right\}$, então a função de Schwinger a temperatura zero associado ao espaço Euclideo é:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{(\theta - \theta')}{2} \right\}} \quad (3.4)$$

Já a distância euclideana associada a curva escolhida é o comprimento do arco que une os pontos $(\theta, r, \vec{x}_\perp)$ e $(\theta', r', \vec{x}'_\perp)$, assim a função de Schwinger a temperatura zero associada ao espaço euclideo de Rindler é:

$$\mathcal{G}_R^\infty = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\theta - \theta')^2} \quad (3.5)$$

Para relacionar estes resultados, usemos a conhecida identidade [30]:

$$\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{x}{2} \right\}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x + 2\pi n)^{-2} \quad (3.6)$$

Vê-se então que:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\theta - \theta') + 2\pi n]^{-2} \quad (3.7)$$

Por sua vez, o lado direito da última equação é o propagador de Schwinger a temperatura $\beta = 2\pi$ associado ao espaço euclideo de Rindler. Assim obtém-se o resultado:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \mathcal{G}_R^{2\pi} \quad (3.8)$$

3.2.1 Generalização para campos com massa

Nossa tarefa será generalizar este resultado para campos com massa em qualquer dimensão para quaisquer dois pontos $(\theta, r, \vec{x}_\perp)$ e $(\theta', r', \vec{x}'_\perp)$. Primeiramente note que estamos somando sobre classes de equivalência então para este fim a forma da curva não interessa, mas sim o número de voltas dadas ao redor do defeito. Deste modo, a forma da curva que liga dois pontos quaisquer é irrelevante. A periodicidade é 2π logo calcularemos:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_R^\infty(s + 2\pi n, r, \vec{x}_\perp, r', \vec{x}'_\perp) \quad (3.9)$$

onde $s = \theta - \theta'$. A função de Schwinger a temperatura zero é [33]:

$$\mathcal{G}_R^\infty(s, r, \vec{x}_\perp, r', \vec{x}'_\perp) = \sum_{\nu} \frac{\psi_\nu(r, \vec{x}_\perp) \psi_\nu(r', \vec{x}'_\perp)}{2\omega_\nu} \exp(-\omega_\nu |s|) \quad (3.10)$$

Os modos $\psi_\nu(r, \vec{x}_\perp)$ são aqueles obtidos anteriormente:

$$\psi_\nu(r, \vec{x}_\perp) = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu r) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \quad (3.11)$$

Então

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^{d-2} \vec{k}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\omega} \frac{2\omega \sinh(\pi\omega)}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(\mu r) K_{i\omega}(\mu r') e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot (\vec{x}_{\perp} - \vec{x}'_{\perp})} e^{-\omega|s+2\pi n|} \quad (3.12)$$

Como $K_{i\omega}(\mu r)$ é real e vai a zero muito rapidamente (tanto quanto uma exponencial decrescente) em $r \rightarrow \infty$. Pela presença da exponencial decrescente temos que o integrando converge uniformemente, então podemos “passar” o somatório para dentro da integral. Usando a identidade a seguir, fazemos a soma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\omega|s+2\pi n|} &= \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega} - 1}\right) e^{-\omega|s|} + \frac{e^{\omega|s|}}{e^{2\pi\omega} - 1} \\ &= \frac{\cosh(\omega(\pi - |s|))}{\sinh(\pi\omega)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

temos que a integral a ser resolvida será:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int d^{d-2} \vec{k}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(\mu r) K_{i\omega}(\mu r') e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot (\vec{x}_{\perp} - \vec{x}'_{\perp})} \cosh(\omega(\pi - |s|)) \quad (3.14)$$

A integral na variável ω pode ser feita através da fórmula [30]

$$\int_0^{\infty} dx K_{ix}(a) K_{ix}(b) \cosh[(\pi - \phi)x] = \frac{\pi}{2} K_0\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi}\right) \quad (3.15)$$

Teremos, após fazer a integral em ω :

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int \frac{d^{d-2} \vec{k}_{\perp}}{2\pi (2\pi)^{d-2}} K_0(\mu \gamma_1) e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot (\vec{x}_{\perp} - \vec{x}'_{\perp})} \quad (3.16)$$

onde $\gamma_1^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(s)$. Esta integral é feita em [23], seu resultado é:

$$\int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{2\pi(2\pi)^{d-2}} K_0(\mu\gamma_1) e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} = \left(\frac{m}{2\pi\rho}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\rho) \quad (3.17)$$

onde $\rho^2 = \gamma_1^2 + (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2$, ou seja, é a distância euclideana entre os pontos $(\theta, r, \vec{x}_\perp)$ e $(\theta', r', \vec{x}'_\perp)$. Assim chegamos ao resultado:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi\rho}\right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\rho) = \mathcal{G}_M^\infty \quad (3.18)$$

o lado direito desta equação é exatamente a função de Schwinger a temperatura zero do espaço euclideano usual[45]. Assim está generalizado o resultado de Christensen e Duff para campos escalares neutros com massa para $d \geq 2$.

3.2.2 Generalização para campos sem massa

Aqui deveremos separar os casos de $d = 2$ e $d \geq 3$.

Caso $d \geq 3$

Os modos são:

$$\psi_\nu(r, \vec{x}_\perp) = \frac{\sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu k_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \quad (3.19)$$

onde $k_\perp = \sqrt{\vec{k}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}$. A obtenção da generalização do resultado de Christensen e Duff para campos sem massa e $d \geq 3$ segue idêntica ao dos campos com massa até a eq. (3.16), neste caso não poderemos usar diretamente o resultado de [23], porém resolveremos a integral analogamente à referência. A integral a ser resolvida é:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^{d-2}\vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} K_0(k_\perp \gamma_1) \quad (3.20)$$

Para resolver a integral deveremos usar a seguinte representação da função K_0 :

$$K_0(k_\perp \gamma_1) = \int_0^\infty \frac{dz}{2z} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(z + \frac{k_\perp^2 \gamma_1^2}{z} \right) \right] \quad (3.21)$$

Substituindo este resultado na eq. (3.20) e invertendo a ordem de integração teremos:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{2(2\pi)^{d-2}z} \int d^{d-2}\vec{k}_\perp e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(z + \frac{k_\perp^2 \gamma_1^2}{z} \right) \right] \quad (3.22)$$

A integral em \vec{k}_\perp é gaussiana, para tal “completeemos o quadrado” em \vec{k}_\perp :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R^{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{2(2\pi)^{d-2}z} \exp \left[\frac{-z}{2} \left(1 + \frac{(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{\gamma_1^2} \right) \right] \times \\ &\times \int d^{d-2}\vec{k}_\perp \exp \left[\frac{-\gamma_1^2}{2z} \left(\vec{k}_\perp - \frac{z(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)}{\gamma_1^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

A função gaussiana (d-2)-dimensional é inteira então poderemos deformar a vontade o contorno de integração e o resultado é:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{2(2\pi)^{d-2}z} \exp \left[\frac{-z}{2} \left(1 + \frac{(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{\gamma_1^2} \right) \right] \left(\frac{2z\pi}{\gamma_1^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \quad (3.24)$$

Fazendo a substituição de variável $v = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{(\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2}{\gamma_1^2} \right)$ teremos:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{2^{\left(\frac{d}{2}-2\right)} \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\rho^{d-2}} \quad (3.25)$$

Assim obteremos o resultado procurado, já que o lado direito não passa de \mathcal{G}_M^∞ [45]. Assim está generalizado o resultado de Christensen e Duff para este caso.

Observe que a função de Schwinger diverge para $d=2$, isso será discutido a seguir.

Caso $d = 2$

A teoria quântica de campos em duas dimensões sem massa tem problemas sérios. No caso do espaço de Minkowski, a teoria é assolada pela presença das divergências infravermelhas [32], além do fato de termos divergências não integráveis no cálculo dos propagadores. Na versão euclidiana da TQC, temos problemas também: o propagador de Schwinger é não integrável, logo diverge. Isto deve-se ao fato de que a equação de campo após a rotação de Wick é o Laplaciano no plano. Não existe função de Green que é unicamente determinada pelo fato de ir a zero no infinito [46]. A melhor coisa que poderemos fazer é obtermos uma quantidade de interesse mais um termo que é infinito. Isto será intensamente discutido na seção posterior.

O modos de Rindler são:

$$\psi_\omega(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{i\omega} \quad (3.26)$$

onde $-\infty < \omega < \infty$. Então, substituindo estes modos na eq. (3.10) obteremos

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\omega} \left(\frac{r}{r'}\right)^{i\omega} e^{-\omega|s+2\pi n|} \quad (3.27)$$

A presença da exponencial decrescente torna o integrando uniformemente convergente e então poderemos fazer primeiro o somatório obtendo

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\cosh(\omega(\pi - s))}{4\pi\omega \sinh(\pi\omega)} \left(\frac{r}{r'}\right)^{i\omega} \quad (3.28)$$

Esta última integral diverge, porém poderemos relacioná-la com outra integral feita por Lee [22]. Este será o tema da nossa próxima seção.

3.3 Generalizando o resultado de Lee

Lee [22] demonstra que a função de Schwinger associada ao espaço Euclidiano de Rindler é:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{\text{Tr } v(2\pi - \omega)\varphi(X)v(\theta - \theta')\varphi(X')v(\theta')}{\text{Tr } v(2\pi)} \quad (3.29)$$

onde $\varphi(X)$ representa o operador de campo calculado em $\tau = 0$; $X = (r, \vec{x}_\perp)$; $v(\theta) = e^{-\theta H_R}$ e

H_R é dado pela expressão:

$$H_R = \sum_{\vec{k}_\perp, \omega} \left(b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger b_{\vec{k}_\perp, \omega} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (3.30)$$

Observe que nesta expressão não fizemos a integral e sim consideramos o espectro discreto apesar do fato de não sê-lo. Isto deve-se ao fato de que se H_R tem espectro contínuo $e^{-\beta H_R}$ pode não ser de classe de traço, isto é, pode não ser somável. Porém a razão entre o numerador e o denominador cancelam o infinito decorrente, assim a forma utilizada está justificada.

Deve-se ressaltar que esta primeira parte já representa uma generalização em relação ao cálculo de Lee, pois ele já aplica os modos do campo obtidos para 2 dimensões sem massa.

Começaremos calculando o denominador:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } v(2\pi) &= \sum_n \langle n | e^{-2\pi H_R} | n \rangle \\
 &= \sum_n e^{2\pi \sum (n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} \\
 &= \prod_{\vec{k}_\perp, \omega} \sum_n e^{-2\pi n_{\vec{k}_\perp, \omega} \omega} e^{-\pi \omega} \\
 &= \prod_{\vec{k}_\perp, \omega} \frac{1}{2} \text{csc}(\pi \omega)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $|n\rangle$ é autovetor do operador $n_{\vec{k}_\perp, \omega}$ com autovalor $n_{\vec{k}_\perp, \omega}$. Doravante usaremos a seguinte convenção para não sobrecarregar a notação: $\sum = \sum_{\vec{k}_\perp, \omega}$.

Pela propriedade ciclica do traço temos que o numerador pode ser escrito como $\text{Tr } v(2\pi - s)\varphi(X)v(s)\varphi(X')$, onde $s = \theta - \theta'$. E o numerador reduz-se a:

$$\sum_n \langle n | e^{-(2\pi-s)H_R} | n \rangle \langle n | \varphi(r) e^{-sH_R} \varphi(r') | n \rangle \tag{3.32}$$

Assim, usando a expansão do campo, a função de Schwinger será :

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \sum_n \int d\chi \int d\chi' \frac{F}{2\sqrt{\omega\omega'}} \left\{ \langle n | (ub + u^*b^\dagger)(X) e^{-sH_R} (u'b' + u'^*b'^\dagger)(X') | n \rangle \right\} \tag{3.33}$$

onde mais uma vez introduziremos simplificações tipográficas: $\int_0^\infty d\omega \int d^{d-2}\vec{k}_\perp = \int d\chi$, $u = u_{\vec{k}_\perp, \omega}$, idem para os operadores $b = b_{\vec{k}_\perp, \omega}$ e $b^\dagger = b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger$ e $F = \frac{\langle n | e^{-(2\pi-s)H_R} | n \rangle}{\text{Tr } v(2\pi)}$. Os únicos termos que restam na última equação são:

$$\sum_n \int d\chi \int d\chi' \frac{F}{2\sqrt{\omega\omega'}} \left\{ u(X)u'^*(X') \langle n | b e^{-sH_R} b'^\dagger | n \rangle + u^*(X)u'(X') \langle n | b^\dagger e^{-sH_R} b' | n \rangle \right\} \tag{3.34}$$

Usamos estas relações:

$$\begin{aligned}
 b_{\vec{k}_\perp, \omega} |n\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}_\perp, \omega}} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1\rangle \\
 b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1\rangle \\
 e^{-sHR} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1\rangle &= e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega'' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega''} + 1/2)\omega''} e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1 + 1/2)\omega} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1\rangle \\
 e^{-sHR} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1\rangle &= e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega'' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega''} + 1/2)\omega''} e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1 + 1/2)\omega} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1\rangle
 \end{aligned}$$

A função de Schwinger fica:

$$\begin{aligned}
 &\sum_n \int d\chi \int d\chi' \frac{F}{2\sqrt{\omega\omega'}} \left\{ u(X)u^*(X') \sqrt{(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1)(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1)} \times \right. \\
 &\times \langle n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1 | e^{-\sum_{\vec{k}''_\perp \neq \vec{k}'_\perp, \omega'' \neq \omega'} s(n_{\vec{k}''_\perp, \omega''} + 1/2)\omega''} e^{-s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 3/2)\omega'} |n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1\rangle + \\
 &+ u^*(X)u'(X') \sqrt{n_{\vec{k}_\perp, \omega} n_{\vec{k}'_\perp, \omega'}} \langle n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1 | e^{-\sum_{\vec{k}''_\perp \neq \vec{k}'_\perp, \omega'' \neq \omega'} s(n_{\vec{k}''_\perp, \omega''} + 1/2)\omega''} \times \\
 &\left. \times e^{-s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} - 1/2)\omega'} |n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} - 1\rangle \right\} \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Como pela condição de normalização $\langle n_{\vec{k}_\perp, \omega} \pm 1 | n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} \pm 1 \rangle = \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \delta(\omega - \omega')$,

poderemos então eliminar uma das integrais e conseguindo (renomeamos a variável muda ω''

por ω' , também para não carregar tipograficamente o texto) :

$$\begin{aligned}
 &\sum_n \int d\chi \frac{F}{2\omega} e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega'' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega''} + 1/2)\omega''} \left\{ u(X)u^*(X') (n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1) e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 3/2)\omega} + \right. \\
 &\left. + u^*(X)u(X') n_{\vec{k}_\perp, \omega} e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1/2)\omega} \right\} \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Note que o denominador de F é:

$$\begin{aligned} \langle n | e^{-\sum (2\pi-s)(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} | n \rangle = \\ e^{-(2\pi-s) \sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} e^{-2\pi(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} e^{s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Usando este resultado a função de Schwinger será:

$$\begin{aligned} \sum_n \int \frac{d\chi}{2\omega \text{Tr } v(2\pi)} e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} e^{\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} s(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} \times \\ \times e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} 2\pi(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} e^{-2\pi(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} e^{s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} \times \\ \left\{ u(X)u^*(X')(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1)e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 3/2)\omega} + u^*(X)u(X')n_{\vec{k}_\perp, \omega}e^{-s(n_{\vec{k}_\perp, \omega} - 1/2)\omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Simplificando esta expressão obteremos:

$$\begin{aligned} \sum_n \int \frac{d\chi}{2\omega \text{Tr } v(2\pi)} e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} 2\pi(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} e^{-2\pi(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} \times \\ \times \left\{ u(X)u^*(X')(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1)e^{-s\omega} + u^*(X)u(X')n_{\vec{k}_\perp, \omega}e^{s\omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Antes de fazermos o somatório em n , cabe um comentário: a função de Schwinger é simétrica então poderemos trocar X por X' no último termo. Então:

$$\begin{aligned} \sum_n \int \frac{d\chi u(X)u^*(X')}{2\omega \text{Tr } v(2\pi)} e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} 2\pi(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} e^{-2\pi(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2)\omega} \times \\ \times \left\{ (n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1)e^{-(s+\pi)\omega} + n_{\vec{k}_\perp, \omega}e^{(s-\pi)\omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

As somas em n são fáceis de serem realizadas pois são somas de séries geométricas:

$$\begin{aligned}\sum_n e^{-\alpha n} &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} \\ \sum_n n e^{-\alpha n} &= -\partial_\alpha \sum_n e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}\end{aligned}$$

Note também que:

$$\sum_n e^{-\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} 2\pi(n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2)\omega'} = \prod_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} \frac{1}{2} \csc(\pi\omega') \quad (3.41)$$

Fazendo uso destes últimos resultados, a forma quase final da função de Schwinger será:

$$\int \frac{d\chi u(X) u^*(X')}{2\omega \text{Tr } v(2\pi)} \prod_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} \frac{1}{2} \csc(\pi\omega') \left\{ \frac{e^{-(\pi+s)\omega}}{(1 - e^{2\pi\omega})^2} + \frac{e^{(s-\pi)\omega} e^{-2\pi\omega}}{(1 - e^{2\pi\omega})^2} \right\} \quad (3.42)$$

O termo entre chaves não passa de:

$$\frac{e^{-(s-\pi)\omega} + e^{(s-\pi)\omega}}{(e^{\pi\omega} - e^{-\pi\omega})^2} \quad (3.43)$$

Usando a equação (3.31) teremos finalmente que a função de Schwinger é (note o cancelamento dos produtórios, justificando a postura de considerar temporariamente os modos como discretos):

$$\int_0^\infty \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \frac{u(r, \vec{x}_\perp) u^*(r', \vec{x}'_\perp)}{2\omega} \frac{\cosh(\pi - s)\omega}{\sinh(\pi\omega)} \quad (3.44)$$

Basta que agora coloquemos os modos de acordo com a dimensão desejada e se o campo tem massa ou não. Repare que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(s+2\pi n)\omega} = \frac{\cosh(\pi - s)\omega}{\sinh(\pi\omega)} \quad (3.45)$$

Desta relação fica ainda mais visível a igualdade entre a prescrição de Lee e a prescrição usada por Christensen e Duff.

3.3.1 Campo sem massa $d = 2$

Este caso foi tratado por Lee em seu artigo. Substituindo os modos de Rindler para duas dimensões sem massa (eq. (3.26)) na eq. (3.44) chegaremos a:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\cosh(\omega(\pi - s))}{4\pi\omega \sinh(\pi\omega)} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\omega} \quad (3.46)$$

Que é justamente a eq. (3.28). Esta integral diverge, porém Lee [22] consegue obter o resultado desta integral numa forma regularizada, *i.e.*, separada a parte infinita de uma parte finita:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \text{constante} - \frac{1}{2\pi} \ln \rho + \frac{1}{4\pi} \ln r + \frac{1}{4\pi} \ln r' \quad (3.47)$$

onde $\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(s)$ é a distância euclideana entre dois pontos. Voltaremos a discussão deste resultado na subseção posterior.

3.3.2 Campo sem massa $d \geq 3$

Para $d \geq 3$, para campos sem massa, usando os modos para campos sem massa dados pela eq.

(3.19), chegaremos a seguinte integral:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(k_\perp r) K_{i\omega}(k_\perp r') e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \cosh(\omega(\pi - s)) \quad (3.48)$$

Esta é justamente a integral que foi resolvida na generalização do método de Christensen e

Duff. Obtemos então o seguinte resultado:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty \quad \text{para } m = 0 \text{ e } d \geq 3 \quad (3.49)$$

3.3.3 Campo com massa $d \geq 2$

Para $d \geq 2$, para campos com massa, usando os modos para campos sem massa dados pela eq.

(3.11), chegaremos a seguinte integral:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(\mu r) K_{i\omega}(\mu r') e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \cosh(\omega(\pi - s)) \quad (3.50)$$

Esta é justamente a integral que foi resolvida na generalização do método de Christensen e

Duff. Obtemos então o seguinte resultado:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty \quad \text{para } m \neq 0 \text{ e } d \geq 2 \quad (3.51)$$

3.3.4 A interpretação de Lee

Para explicar seu resultado, Lee [22] parte do cálculo da função de Schwinger a temperatura zero no espaço Euclidiano (\mathbb{R}^d), a forma d-dimensional para campo com massa é:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \frac{1}{2\pi} \int d^d \vec{k} \frac{e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}}{\vec{k}_\perp^2 + m^2} \quad (3.52)$$

onde $\vec{x} = (T, X, \vec{x}_\perp)$. Seu valor é [45]:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi\rho} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\rho) \quad (3.53)$$

Para duas dimensões sem massa \mathcal{G}_M^∞ diverge (divergência infravermelha), poderemos extrair um termo interessante do infinito colocando a massa em 2 dimensões, resolvendo a integral e depois tomar o limite com massa zero [29, 47].

Comecemos então com a expressão em duas dimensões com massa que é:

$$\mathcal{G}_M^\infty = \frac{1}{2\pi} K_0(m\rho) \quad (3.54)$$

Usando a forma da função de Macdonald para argumentos pequenos temos:

$$\mathcal{G}_M^\infty = - \overbrace{\frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow 0} \ln m}^{\text{infinito}} - \frac{1}{2\pi} \ln \rho \quad (3.55)$$

Lee então resolve a integral (3.44), encontrando:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \text{constante} - \frac{1}{2\pi} \ln \rho + \frac{1}{4\pi} \ln(rr') \quad (3.56)$$

Assim ele identificou os termos semelhantes para afirmar:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty + C(r) + C(r')$$
(3.57)

onde $C(r) = \text{constante} + \frac{1}{4\pi} \ln(r)$. Note que este termo é proporcional a distância ao horizonte. Portanto ele identificou estes termos extras como sendo provenientes da interação com o horizonte. Este é um resultado novo, já que pelos teoremas de termalização [22, 48, 49, 50], deveríamos ter $\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty$. Assim as regras de Feynman mudariam já que estes termos extras deveriam ser considerados.

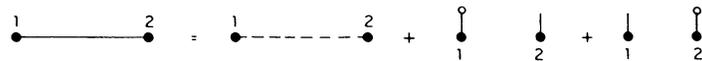


Figura 3.2: $\mathcal{G}_R^{2\pi}$ escrito como \mathcal{G}_M^∞ mais os termos extras

Seguindo a análise de Lee, ele argumenta que estes termos extras são remanescentes da situação onde temos radiação de corpo negro. Usando este resultado ele mostra que a radiação vista pelo observador de Rindler não seria puramente de corpo negro devido a presença dessa “interação” com o horizonte.

Ele também discute a introdução de um potencial $V(\varphi)$ que poderia conter também a massa. Dá um exemplo pictórico sobre como seriam os diagramas de Feynman para a teoria $\lambda\varphi^4$. Como segue-se na figura (3.3).

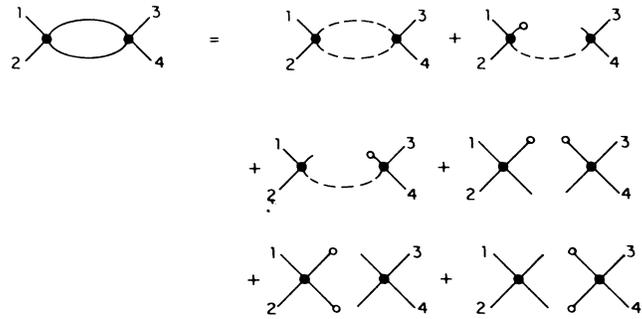


Figura 3.3: Exemplo de como seria o diagrama de Feynman para o diagrama peixe

A figura 3.2 mostra como seria a função de dois pontos para um observador de Rindler (linha contínua). Ela poderia ser construída a partir da função de dois pontos em Minkowski (linha tracejada) mais termos extras que são interpretados como provenientes da interação de cada ponto com o horizonte de eventos (segundo e terceiro termos). Para mostrar o quanto isso dificulta os cálculos de processos fundamentais, tem-se a figura 3.3 que ilustra como seria o diagrama de Feynman para o diagrama conhecido como peixe. Observe que o número de subgráficos que deverão ser adicionados aumenta consideravelmente. No lado direito, o primeiro termo representa a o diagrama peixe calculado no espaço de Minkowski. Os dois próximos termos, representam que uma das “pernas”do gráfico é eliminada e cada ponto da mesma terá interação com o horizonte. Os três últimos termos representam o processo desconexo de interação de cada ponto envolvido no processo com o horizonte de eventos.

3.3.5 Discussão dos resultados

Em todos os outros casos, além dos tratados por Lee[22], encontramos o valor esperado $\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty$. A integral para o cálculo da função de Schwinger converge, mas obviamente uma integral convergente não pode convergir para dois valores diferentes, assim os termos extras de Lee são

ausentes. Sua interpretação como sendo interação com o horizonte, embora bem interessante, não vale mais. Então, por que ele encontrou termos extras para uma teoria de campo escalar em duas dimensões sem massa?

Primeiramente deveremos lembrar-nos de que uma teoria de campo em duas dimensões sem massa é problemática. Para o caso de métrica de assinatura Lorentziana, temos a presença de divergências infravermelhas [32]. Quando o propagador de Feynman é calculado, notamos que existe uma divergência não integrável para $k = 0$ na representação dos momentos, até mesmo no espaço tempo de Minkowski. Matematicamente, as funções teste não possuem suporte em $k = 0$ [33]. Para o tratamento do campo escalar sem massa em duas dimensões no caso do espaço-tempo com métrica de assinatura Lorentziana sugere-se a referência [47].

No caso de métrica de assinatura euclideana, este caso patológico reflete-se no fato de que o Laplaciano (que é a equação de movimento rotacionada de Wick do campo) em duas dimensões não tem uma função de Green (função de Schwinger) que é unicamente determinada por ir a zero no infinito [33, 46]. Este então é um problema de teoria do Potencial. Mostraremos que os chamados "termos extras" também estão presentes no espaço Euclideano \mathbb{R}^2 .

Argumentação Ingênuo

Partiremos da eq. (3.55), poderemos então multiplicar a parte infinita por "1":

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_M^\infty &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow 0} \ln \left(\frac{m(rr')^{\frac{1}{2}}}{(rr')^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \rho \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow 0} \ln \left(m(rr')^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \rho + \frac{1}{4\pi} \ln(r) + \frac{1}{4\pi} \ln(r') \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ou seja estes termos aparecem na função de Schwinger a temperatura zero associada ao

espaço euclidiano.

Estes termos extras também aparecem na decomposição harmônica da solução fundamental em \mathbb{R}^2 [47]. Nesta referência diSessa ainda estuda a solução do campo escalar para Minkowski em duas dimensões e até mesmo neste caso patológico este resultado coincide com um resultado rigoroso demonstrado por Kay [50] que mostra que para $m = 0$ e $d = 2$, o vácuo de Minkowski pode ser visto como um estado térmico do vácuo de Fulling.

3.4 Introduzindo Interação — demonstração de Unruh-Weiss

Até aqui só demonstramos que o vácuo de Minkowski é visto como um estado térmico para o esquema de quantização de Fulling para um campo escalar neutro livre. No âmbito das teorias axiomáticas, é possível (e não é complicado) demonstrar que isto permanece válido mesmo se introduzirmos interação [48, 49, 50]. Na referência [51], Unruh e Weiss dão uma demonstração explícita deste fato para teorias Euclidianas, usando o método da Integral de Trajetória. Rasculharemos o que eles fizeram na referência citada.

Partindo da ação no espaço de Minkowski para o campo escalar φ com uma interação genérica dada por $V(\varphi)$:

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - V(\varphi) \right] \quad (3.59)$$

Poderemos escrever a ação para Rindler-R.

$$S_R = \int d\tau d\xi d^{d-2} \vec{x}_\perp \xi \left[\frac{1}{2\xi^2} (\partial_\tau \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\xi^2 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\perp \varphi)^2 - V(\varphi) \right] \quad (3.60)$$

O momento canonicamente conjugado ao campo é:

$$\pi_R = \frac{1}{\xi}(\partial_\tau \varphi) \quad (3.61)$$

Portanto, o Hamiltoniano em Rindler-R é:

$$H_R = \int d\xi d^{d-2} \vec{x}_\perp \xi \left[\frac{(\pi_R)^2}{2} + \frac{1}{2}(\partial_\xi^2 \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \varphi)^2 + V(\varphi) \right] \quad (3.62)$$

Já temos calculado H_R então vamos obter a função de partição associado ao espaço de Rindler-R $Z^R(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H_R}$.

Da referência [52] temos que a função de partição na sua forma de integral de trajetória é:

$$\begin{aligned} Z^R(\beta) = N_0 \int_{\varphi(\theta=0)=\varphi(\theta=\beta)} [d\pi_R][d\varphi] \exp \left[- \int_0^\beta d\theta \int d\xi d^{d-2} \vec{x}_\perp \times \right. \\ \left. \times \left\{ \xi \left(\frac{(\pi_R)^2}{2} + \frac{1}{2}(\partial_\xi \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \varphi)^2 + V(\varphi) \right) + i\pi_R \partial_\theta \varphi \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. A integral em π_R é gaussiana então chegamos a:

$$\begin{aligned} Z^R(\beta) = N_1 \int_{\varphi(\theta=0)=\varphi(\theta=\beta)} [d\varphi] \exp \left[- \int_0^\beta d\theta \int d\xi d^{d-2} \vec{x}_\perp \times \right. \\ \left. \times \left\{ \xi \left(\frac{(\partial_\theta)^2}{2\xi^2} + \frac{1}{2}(\partial_\xi \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \varphi)^2 + V(\varphi) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde N_1 é a nova constante de normalização. Fazemos então as seguintes transformações:

$$X = \xi \cos \theta \quad T = \xi \sin \theta \quad (3.65)$$

Isto nos leva a:

$$Z^R(\beta) = N_1 \int_{\varphi(\theta=0)=\varphi(\theta=\beta)} [d\varphi] \exp \left[- \int dT dX d^{d-2} \vec{x}_\perp \left\{ \left(\frac{1}{2} (\partial_T \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + V(\varphi) \right) \right\} \right] \quad (3.66)$$

Observemos que se $\beta = 2\pi$ a região de integração será o espaço euclidiano \mathbb{R}^d . Então:

$$Z^R(2\pi) = N_1 \int_{\varphi(\theta=0)=\varphi(\theta=\beta)} [d\varphi] \exp \left[- \int d^d x \left\{ \left(\frac{1}{2} (\nabla_d \varphi)^2 + V(\varphi) \right) \right\} \right] \quad (3.67)$$

A integral dentro da exponencial não passa de ser a ação euclidiana do campo escalar S_E do espaço de Minkowski d -dimensional a temperatura zero. Então:

$$Z^R(2\pi) = N_1 \int_{\varphi(\theta=0)=\varphi(\theta=\beta)} [d\varphi] \exp [-S_E] = Z^M(\infty) \quad (3.68)$$

Na teoria Euclideana, Z funciona como o gerador das funções de Schwinger. Logo as funções de Schwinger de n pontos do espaço Euclidiano de Rindler a temperatura $T = \frac{1}{2\pi}$ são iguais às do espaço Euclidiano a $T = 0$. Particularizando, chegaremos ao resultado já encontrado anteriormente apenas para campos livres:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty \quad (3.69)$$

Note que isto é válido para campos em interação e para $d \geq 2$. Como, nesta demonstração, não precisamos considerar se o campo tem ou não massa, verificamos a consistência do resultado obtido nas duas seções anteriores.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Primeiramente demonstrou-se a generalização do resultado de Christensen e Duff. Depois fez-se a generalização do resultado de Lee, obtendo o resultado já esperado por outros meios da igualdade entre a função de Schwinger a $\beta = 2\pi$ ao espaço euclidiano de Rindler é igual a função de Schwinger do espaço euclidiano \mathbb{R}^d a $T = 0$. A princípio isto contradiria o resultado obtido por Lee[22] para um caso particular patológico do campo escalar sem massa em duas dimensões. Assim mostra-se que os termos “extras” encontrados por Lee já existem em \mathbb{R}^2 .

Deve-se ressaltar que a igualdade $\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty$ já era um resultado conhecido na literatura, porém sua obtenção pela generalização do método de Christensen e Duff, ainda não foi feita na mesma. Apesar do artigo de Lee ter mais de 30 citações, todos eles desenvolvem suas idéias com base no seu teorema e na correlação do tipo EPR entre os modos dentro e fora do horizonte de eventos. Sua generalização, bem como a explicação dos termos “extras”, também é nova. Estes resultados foram apresentados no XXVI Encontro de Física de Partículas e Campos, realizado em São-Lourenço-MG em Outubro de 2005 [14]. Um artigo sobre o tema será submetido em breve [53].

Quando ao desenvolvimento desta tese, pelo fato de estudar um assunto básico com ênfase em fundamentos de TQC em Espaços Curvos, estas análises feitas aqui tem diversas vertentes:

- Problema da Informação e Entropia no Buraco Negro
- TQC nas proximidades do horizonte de eventos — Com o possível aparecimento de uma Teoria de Campo Conforme
- Métodos Euclidianos de TQC para o estudo da Quantização Estocástica

Os dois primeiros itens estão em voga atualmente, até com métodos externos a TQC em Espaços Curvos, como a Teoria de Cordas.

Para finalizar, o autor deste tese está colaborando com G. Menezes e N. Svaiter no estudo da implementação da Quantização Estocástica em variedades Riemannianas compactas [54].

Apêndice A

Notações e Conceitos Fundamentais

A.1 Notações

Considera-se um espaço-tempo d -dimensional, com $d - 1$ dimensões do tipo espaço e 1 dimensão do tipo tempo.

As derivadas parciais são denotadas por $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$. As derivadas covariantes são escritas como ∇_μ .

As coordenadas do espaço-tempo de Minkowski são denotadas da forma usual encontrada em livros de Gravitação: (t, x, \vec{x}_\perp) e as coordenadas de Rindler são denotadas pela d-upla $(\tau, \xi, \vec{x}_\perp)$.

Os símbolos usados na seção 3.4 são $\nabla_\perp = \sum_{i=2}^d \partial_i$, $\nabla = \partial_X + \nabla_\perp$, $\nabla_d = \partial_T + \nabla$.

Uma métrica é dita de assinatura Lorentziana se a métrica tem assinatura $(+,-,-,\dots,-)$. Uma métrica é dita de assinatura Euclideana se a métrica tem assinatura $(-,-,-,\dots,-)$.

A.2 TQC em espaços curvos: Aspectos Gerais

Vamos agora analisar os aspectos gerais da construção de uma TQC em espaços curvos. Nossa discussão será baseada no curso de G. W. Gibbons [55]

A.2.1 Construção do espaço de Hilbert

Esta parte é muito semelhante a da TQC usual. Um estado deve pertencer a algum espaço de Hilbert (denotado por \mathcal{L} ou simplesmente \mathcal{H}). Um observável é um operador auto-adjunto que atua sobre o espaço de Hilbert dos estados. Porém existe uma diferença fundamental: em geral um espaço tempo curvo não contém todas as simetrias do espaço tempo de Minkowski (representadas no grupo Poincaré). O interesse por TQC em espaços de de Sitter deve-se ao fato de ser o único espaço com curvatura não nula que contém o mesmo número de vetores de Killing do espaço tempo de Minkowski.

Poderemos usar duas prescrições possíveis para o produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Sigma} d\Sigma \sqrt{-g} g^{00} f^*(x) g(x) \quad (\text{A.1})$$

esta prescrição para o produto interno é usada em [8, 22]. A prescrição mais comum é [19, 13]:

$$\langle f, g \rangle = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} f(x) \overline{\partial_{\mu} g(x)}^* \quad (\text{A.2})$$

onde $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu} d\Sigma$, e n^{μ} é a normal direcionada para o futuro na superfície de Cauchy Σ .

É interessante aqui um comentário sobre o chamado “Problema da Representação”[56, 57, 6]. Quando fazemos a construção da TQC ordinária, começamos impondo as condições canônicas de comutação sobre um sistema com um número finito de graus de liberdade e depois fazemos a passagem para infinitos graus de liberdade, por um teorema devido a von Neumann[56], dada uma álgebra poderemos ter infinitas representações não unitariamente equivalentes¹. É interessante notar que isto já existe na TQC ordinária, porém é fundamental na TQC em espaços curvos, pois poderemos ter estados de vácuo que não são ligados por transformações unitárias, logo *a estrutura vácuo é dependente de observador, ou da representação escolhida*[8, 20, 19, 57, 13]. Esta é a base da crítica de von Neumann à técnica da segunda quantização[56].

A.2.2 Espaço-tempo clássico

Na TQC em espaços curvos deveremos ter uma métrica fixa $g_{\mu\nu}$ que na realidade depende de duas aproximações:

- estamos desprezando as flutuações do espaço-tempo, pois temos interesse em processos em que $l \gg l_P$.
- estamos desprezando os efeitos de contra-reação (*back-reaction*), embora em alguns casos eles sejam relevantes, como por exemplo, na emissão Hawking.

¹Uma representação A é dita unitariamente equivalente se ela puder ser obtida de uma outra representação B pela aplicação $A = UBU^{-1}$, onde U é um operador unitário

A.2.3 Operadores de campo

Formalmente um campo é uma distribuição que toma valores operatoriais (*operator-valued distributions*), esta definição segue-se em TQC em espaços curvos, porém para nossa alegria podemos calcular tudo sem que para isto cheguemos neste nível de rigor. Porém esta definição é essencial para um estudo profundo da teoria feito por R. M. Wald, B. S. Kay, S. A. Fulling [58, 59, 57, 20, 60].

A.2.4 As equações de onda

Só temos generalizações de equações de onda num espaço curvo qualquer para campos de spin 0, $\frac{1}{2}$ ou 1 [55, 58]. Devido a “simplicidade” de cálculo, estudaremos somente os campos escalares aqui.

Partindo de uma ação S do campo escalar neutro numa variedade curva qualquer [13, 20]:

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \{ g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \varphi \nabla_{\nu} \varphi - m^2 \varphi^2 \} \quad (\text{A.3})$$

usando a equação de Euler-Lagrange para φ chegaremos a seguinte expressão:

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu})$ é o operador de D'Alembert e $\sqrt{-g}$ é a raiz quadrada do determinante da métrica.

Uma pergunta mais matemática põe-se: esta equação possui um problema de Cauchy bem posto, isto é, dado o par (φ, π) , onde π é o momento canonicamente conjugado ao campo,

num dado instante de tempo t_0 , poderemos saber qual é o valor do par em qualquer instante posterior ou anterior. A pergunta é respondida afirmativamente se a variedade for globalmente hiperbólica e orientada temporalmente[61].

Uma variedade é globalmente hiperbólica se cada hipersuperfície do tipo espaço for interceptada por uma curva tipo-tempo apenas uma vez. Isto permite a idéia usual newtoniana de folhear o espaço-tempo por grupo de um parâmetro t . De fato estas duas definições são equivalentes. Maiores detalhes sobre isso encontram-se em [62, 20]. A esta hipersuperfície (d-1)-dimensional dá-se o nome de *superfície de Cauchy*.

Porém espaços-tempos de importância não cumprem a condição acima como os espaços de Anti de Sitter e Gödel². Ainda se o espaço-tempo possuir singularidades ou horizontes de Cauchy condições de contorno extras devem ser aplicadas. Para um resumo bem interessante do método para implementar a TQC em espaços não-globalmente hiperbólicos recomenda-se a referência [60]

Sobre os campos espinoriais sua existência é demonstrada em [63, 64] supondo-se que o espaço tempo é globalmente hiperbólico e orientado temporalmente.

A.2.5 Relações de Comutação

Herdares as relações de comutação (ou de anticomutação) no caso de bósons (férmions) só que agora estas estão definidas sobre superfícies de Cauchy. Para um campo escalar (a tempos iguais):

²este é um exemplo problemático por apresentar um horizonte cronológico

$$[\varphi(x^0, x), \pi(x^0, y)] = i\delta_\Sigma(x - y) \quad (\text{A.5})$$

onde Σ é a superfície de Cauchy escolhida.

A.2.6 Espaços de Fock

Para tentarmos introduzir uma interpretação de partículas devemos então partir de um espaço de Fock (para bósons) que é definido como o completamento[65]³ do espaço:

$$\mathcal{F}_0 = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \left(\bigotimes_{\text{sym}}^2 \mathcal{H} \right) \oplus \left(\bigotimes_{\text{sym}}^3 \mathcal{H} \right) \cdots \quad (\text{A.6})$$

onde $\bigotimes_{\text{sym}}^N$ representa o produto simétrico entre os N espaços de Hilbert de 1 partícula \mathcal{H} . Esta é a idéia usual de um sistema de muitos corpos, a função de onda para um sistema de bósons é o produto simétrico das funções de onda para cada partícula.

Até aí parece que as coisas estão muito bem. Porém lembremos que a solução da equação de onda (A.4) pode ser escrita como:

$$\varphi(x) = \sum_i \left\{ u_i(x) a_i + u_i^*(x) a_i^\dagger \right\} \quad (\text{A.7})$$

entenda que a soma pode virar integral se o índice relacionado ao modo for contínuo. Os modos u_i e u_i^* são as soluções da equação $(\square + m^2)u_i = 0$. Os operadores a_i e a_i^\dagger são respectivamente os operadores de aniquilação e criação. O vácuo é definido por:

³O fato de ser um completamento é apenas uma condição técnica, sem relevância para a maioria dos cálculos

$$a_i|0\rangle = 0 \quad \forall i \quad (\text{A.8})$$

De posse desses operadores poderemos ter estados gerados a partir do vácuo:

$$|n_{k_1}, \dots, n_{k_j}\rangle = \frac{(a_{k_1}^\dagger)^{n_{k_1}}}{\sqrt{n_{k_1}!}} \dots \frac{(a_{k_j}^\dagger)^{n_{k_j}}}{\sqrt{n_{k_j}!}} |0\rangle \quad (\text{A.9})$$

Agora vamos nos perguntar se este é um conceito útil. Para isto precisamos entender o que são frequências positivas e negativas. O produto interno definido em (A.2) não é positivo definido. As frequências positivas são aqueles em que este produto interno é positivo definido enquanto nas frequências negativas o produto interno é negativo definido. Poderemos ainda definir a normalização dos modos como:

$$\begin{aligned} \langle u_i(x), u_j^*(x) \rangle &= 0 \\ \langle u_i(x), u_j(x) \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle u_i^*(x), u_j^*(x) \rangle &= -\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Então os modos $\{u_i(x)\}$ são identificados como modos de frequência positiva e $\{u_i^*(x)\}$ como de frequência negativa. Nunca nos preocupamos com isso pois no espaço tempo de Minkowski temos o termo $e^{\pm i\omega t}$ nos modos, assim já temos naturalmente uma estrutura de modos de frequência positiva e negativa, cada um associado ao operador de criação e aniquilação. Num espaço tempo geral nem sempre é possível fazer de forma única esta decomposição. Isso é

fundamental na estrutura dos vácuos de um buraco negro. Porém para espaços-tempo estáticos essa decomposição é natural.

Precisamos então de critérios para definir os modos de frequência positiva e negativa. Apresentaremos dois deles[19]:

Critério de diSessa[47]

Para diSessa é necessário que se faça uma extensão analítica do espaço-tempo. Neste caso os modos de frequência positiva seriam aqueles que anulam-se quando a coordenada temporal tem limite $\lim_{t \rightarrow \infty} -it$. Isto é uma definição mais natural se pensarmos que no espaço-tempo de Minkowski, os modos de frequência positiva são proporcionais a $e^{-i\omega t}$.

Critério de Sommerfield[66]

C. M. Sommerfield começa definindo um operador D chamado de *dilatador* que funciona como Hamiltoniano na equação de Heisenberg, gerando as translações temporais no campo:

$$[\varphi, D] = i\partial_T \varphi \quad (\text{A.11})$$

Ele então define os modos de frequência positiva e negativa se o dilatador implementa uma translação temporal positiva ou negativa respectivamente.

Uma aplicação e discussão interessante (e bem acessível) desses critérios para um espaço de Milne encontra-se em [67].

A grande conclusão que chegamos nesta seção é que a definição de modos de frequência positiva e negativa e assim definindo o conceito de partícula, não é única. Assim depende da

maneira como construímos nosso espaço de Fock e pelo teorema de von Neumann eles podem não ser unitariamente equivalentes. Logo o conceito de partícula é falho, pois depende do observador[16]. Na seção seguinte esta afirmação ficará clara.

A.2.7 Coeficientes de Bogoliubov

Um conjunto ortonormal $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ no sentido de (A.10) é dito completo se qualquer solução f da equação de Klein-Gordon puder ser escrita como:

$$f = \sum_i a_i u_i + b_i u_i^* \quad (\text{A.12})$$

onde $a_i = \langle u_i, f \rangle$ e $b_i = -\langle u_i^*, f \rangle$. Dados então dois conjuntos ortonormais $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$, o campo escalar pode ser escrito como:

$$\varphi(x) = \sum_i u_i(x) a_i + u_i^*(x) a_i^\dagger \quad (\text{A.13})$$

$$\varphi(x) = \sum_j v_j(x) b_j + v_j^*(x) b_j^\dagger \quad (\text{A.14})$$

É natural perguntar-nos como relacionar cada um dos modos ortonormais completos. Este problema aparece quando temos dois sistemas de coordenadas diferentes para uma mesma região do espaço tempo, *e.g.* espaços de Rindler. Ou quando os conjuntos representam duas etapas distintas na evolução temporal de um sistema físico, *e.g.* buracos negros. Poderemos então definir os estados de vácuo relacionados aos conjuntos de modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$:

$$a_i|0, U\rangle = 0 \quad \forall i \quad (\text{A.15})$$

$$b_j|0, V\rangle = 0 \quad \forall j \quad (\text{A.16})$$

Em cada um dos casos acima como os conjuntos são completos, escrevemos:

$$v_j(x) = \sum_i \alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) \quad (\text{A.17})$$

$$u_i(x) = \sum_j \alpha_{ji}^* v_j(x) - \beta_{ji} v_j^*(x) \quad (\text{A.18})$$

Facilmente obtemos que $\alpha_{ij} = \langle v_i, u_j \rangle$ e $\beta_{ij} = -\langle v_i, u_j^* \rangle$. Esses são os chamados coeficientes de Bogoliubov. Partindo das relações de ortonormalidade (A.10), obteremos na forma matricial as seguintes relações:

$$\alpha\alpha^\dagger + \beta\beta^\dagger = I \quad (\text{A.19})$$

$$\beta\alpha^T - \alpha\beta^T = 0 \quad (\text{A.20})$$

Substituindo (A.17) e (A.18) em (A.13) e (A.14) teremos:

$$a_i = \sum_j \alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \quad (\text{A.21})$$

$$b_j = \sum_i \alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^\dagger \quad (\text{A.22})$$

Agora qual é o número de partículas associadas aos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ do vácuo associado ao conjunto $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$. Lembremos da TQC ordinária que $N = \sum_i a_i^\dagger a_i$. Usando (A.21) encontramos:

$$\langle 0, V | \sum_i a_i^\dagger a_i | 0, V \rangle = \sum_{i,j} |\beta_{ij}|^2 \quad (\text{A.23})$$

Vemos então que os dois estados de vácuo $|0, U\rangle$ e $|0, V\rangle$ são diferentes. Quando $\sum_{i,j} |\beta_{ij}|^2$ converge as representações são ditas unitariamente equivalentes, caso diverja, não-unitariamente equivalentes.

Pode-se ainda mostrar [13, 68] que os vácuos são relacionados por:

$$|0, U\rangle = \frac{1}{\langle 0, U | 0, V \rangle} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk} b_j^\dagger b_k^\dagger \right\} |0, V\rangle \quad (\text{A.24})$$

onde $V_{jk} = i \sum_l \beta_{jl}^* \alpha_{lk}^{-1}$. Esta equação mostra que a criação de partículas pelo campo gravitacional só é feita aos pares [28, 68].

Na equação (A.24) temos dois problemas[19]: $\langle 0, U | 0, V \rangle$ pode divergir e para campos bosônicos só temos a garantia de que α_{jl}^{-1} exista.

A conclusão que chegamos nas duas últimas seções é que o conceito de partícula não é mais fundamental, mas *os campos são fundamentais*. É interessante notar que isto já ocorre na TQC ordinária quando incluímos interação [20, 32].

A.2.8 Propagadores

Nosso tratamento será baseado em [61, 19, 20]. Dada uma equação de Klein-Gordon, é natural nos perguntarmos sobre a existência do operador $(\square + m^2)^{-1}$, que nos permitirá formalmente resolver as equações não-homogêneas. Infelizmente $(\square + m^2)$ é hiperbólico, então não existe uma inversa única, isto leva B. S. deWitt a chamar este tópico de *zoológico das funções de Green*. Uma razão grosseira é que os pólos desse operador encontram-se sobre o eixo real assim deveremos “contornar” o pólo, e isto é obviamente feito de maneira não-única. Partamos da equação:

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x) \quad (\text{A.25})$$

A existência desse operador inverso é demonstrada em [61]. O grande problema é que teremos somente a garantia de uma solução fraca, *i.e* no sentido das distribuições. Formalmente obteremos como solução:

$$\varphi(x) = -i\langle j(x'), G(x, x') \rangle_{x'}^* \quad (\text{A.26})$$

A integral dever ser feita na variável x' . Esta função $G(x, x')$ satisfaz as seguintes propriedades[19]:

- $G(x, x') = G(x', x)$
- $G(x, x') = 0$ se $x, x' \in \Sigma$
- $n^\mu \partial_\mu G(x, x') = \frac{\delta_\Sigma(x, x')}{\sqrt{\gamma}}$

onde n^μ é a normal unitária apontando para o futuro e $\frac{\delta_\Sigma(x,x')}{\sqrt{\gamma}}$ é a delta de Dirac sobre Σ com métrica $\gamma_{\mu\nu}$. Este $G(x, x')$ pode ser identificado como o núcleo do operador $(\square + m^2)^{-1}$, e é chamado na literatura de função de Green ou propagador.

Aplicando o método da função de Green precisamos resolver

$$(\square + m^2)G(x, x') = \delta(x, x') \quad (\text{A.27})$$

Na TQC usual resolver esta equação não nos traz problemas, basta fazer a transformada de Fourier da equação acima e chegamos de imediato a solução. Bem, o problema é que (e veremos em seção posterior) a decomposição usual em modos de Fourier, embora sempre possível não é útil num espaço-tempo curvo geral. Os modos de Fourier e^{ikx} , por exemplo, representam a invariância translacional do espaço-tempo na direção do eixo x , o que obviamente não é uma propriedade geral de um espaço-tempo.

Em TQC em espaço curvo o procedimento padrão para a obtenção da função de Green, segue a seguinte receita:

1. Resolva a equação de Klein-Gordon homogênea, em geral (se possível) pelo método da separação de variáveis, ortonormalizando os modos encontrados, obtendo um conjunto ortonormal completo $u_i(x), u_i^*(x)$.
2. Aplique estes modos em qualquer uma das fórmulas para obtermos cada uma das funções de Green

As funções de Green de utilidade em TQC são[19]:

Propagador de Pauli- Jordan

A função de Pauli-Jordan $G(x, x')$ é definida como:

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(x')] | 0 \rangle \quad (\text{A.28})$$

Satisfaz a equação

$$(\square + m^2)G(x, x') = 0 \quad (\text{A.29})$$

O suporte da função⁴ é $J^+(x) \cup J^-(x)$ ⁵. Ela é invariante por transformações de Bogoliubov.

Possui a simetria $G(x, x') = -G(x', x)$.

Em função dos modos ortonormais completos, pode ser escrita como:

$$iG(x, x') = \sum_j u_j(x)u_j^*(x') - u_j^*(x)u_j(x') \quad (\text{A.30})$$

Função de Green Avançada e Retardada

A função de Green avançada é denotada por $G_A(x, x')$ e a função de Green retardada é denotada por $G_R(x, x')$. Elas são definidas como:

$$G_R(x, x') = -\theta(x^0 - x'^0)G(x, x') \quad (\text{A.31})$$

$$G_A(x, x') = \theta(x'^0 - x^0)G(x, x') \quad (\text{A.32})$$

⁴O suporte de uma função é definido como o maior aberto onde a função é não-nula

⁵ $J^+(x)$ representa o futuro causal e $J^-(x)$ representa o passado causal

Satisfaz a equação

$$(\square + m^2)G_{A,R}(x, x') = \delta(x, x') \quad (\text{A.33})$$

O suporte da função avançada é $J^+(x)$ e a da retardada $J^-(x)$. Ela é invariante por transformações de Bogoliubov. Possui a simetria $G_A(x, x') = G_R(x', x)$.

Funções de Wightman

As função de Wightman de frequências positivas e negativas, respectivamente denotadas como

$G^+(x, x')$ e $G^-(x, x')$, são definidas como:

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle \quad (\text{A.34})$$

$$G^-(x, x') = \langle 0 | \varphi(x') \varphi(x) | 0 \rangle \quad (\text{A.35})$$

Satisfazem a equação

$$(\square + m^2)G^\pm(x, x') = \delta(x, x') \quad (\text{A.36})$$

O suporte dessas funções é toda a variedade. Elas não são invariantes por transformações de Bogoliubov. Possuem a simetria $(G^\pm(x, x'))^* = G^\pm(x', x)$.

Em função de um conjunto ortonormal completo temos:

$$G^+(x, x') = \sum_j u_j(x) u_j^*(x') \quad (\text{A.37})$$

$$G^-(x, x') = \sum_j u_j^*(x) u_j(x') \quad (\text{A.38})$$

Essas funções decompõem a função de Pauli-Jordan em parte de frequências positivas e negativas de modo imediato

$$iG(x, x') = G^+(x, x') - G^-(x, x') \quad (\text{A.39})$$

Essas funções são de extrema importância no cálculo do espectro de potência do detector de Unruh-deWitt, através de um análogo interessantíssimo do teorema de Wiener-Kintchine da Mecânica Estatística.

Propagador de Feynman

Também chamado de Propagador causal é definido como[69, 19]:

$$G_F(x, x') = i \frac{\langle 0^{out} | \mathcal{T} \varphi(x) \varphi(x') | 0^{in} \rangle}{\langle 0^{out} | 0^{in} \rangle} \quad (\text{A.40})$$

onde o símbolo \mathcal{T} significa ordenamento temporal, *i.e.*[27]

$$\mathcal{T} \varphi(x) \varphi(x') = \begin{cases} \varphi(x) \varphi(x') & \text{se } x' \notin J^+(x) \\ \varphi(x') \varphi(x) & \text{se } x \notin J^+(x') \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

Satisfaz a equação

$$(\square + m^2)G_F(x, x') = \delta(x, x') \quad (\text{A.42})$$

O suporte é toda a variedade. O propagador não é invariante por transformações de Bogoliubov. Possui a simetria $G_F(x, x')^* = G_F(x', x)$.

Se os estados de vácuo são iguais teremos a seguinte expressão para um conjunto ortonormal completo:

$$G_F(x, x') = i \sum_j \theta(x^0 - x'^0) u_j(x) u_j^*(x') - \theta(x'^0 - x^0) u_j^*(x) u_j(x') \quad (\text{A.43})$$

Função de Hadamard

É definida como:

$$iG^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{ \varphi(x), \varphi(x') \} | 0 \rangle \quad (\text{A.44})$$

Em função do conjunto ortonormal completo temos:

$$G^{(1)}(x, x') = \sum_j u_j(x) u_j^*(x') + u_j^*(x) u_j(x') \quad (\text{A.45})$$

A primeira vista pode parecer que a função de Hadamard é a mais inútil de todas, porém ao estudar formalmente a renormalização de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, chegamos a um teorema demonstrado por S.

A. Fulling, M. Sweeny e R. M. Wald [70] no qual dado um estado $|\psi\rangle$ temos:

$$G_\psi^{(1)}(x, x') = \langle \psi | \{ \varphi(x), \varphi(x') \} | \psi \rangle \quad (\text{A.46})$$

deve possuir a chamada forma de Hadamard:

$$G^{(1)}(x, x') = \frac{U}{\sigma(x, x')} + V \ln \sigma(x, x') + W \quad (\text{A.47})$$

onde $\sigma(x, x')$ é a distância geodésica entre os pontos x e x' e U , V e W são funções suaves.

Isto restringe enormemente a quantidade de estados $|\psi\rangle$ que seriam fisicamente aceitáveis[57, 70, 20, 71].

A.3 Especialização para Espaços-tempo Estáticos

Uma classe de espaços-tempo admite de forma natural a definição de frequências positivas e negativas, neste caso poderemos até definir o conceito de partícula. Isto ocorre pois estes espaços possuem vetor de Killing tipo-tempo ∂_t , e os modos sempre serão proporcionais a $e^{\pm i\omega t}$.

Definição A.1 *Uma métrica é dita estática, se em coordenadas com $t = x^0$, tipo-tempo:*

(a) $g_{\mu\nu}(x)$ não depende de t ;

(b) $g_{0j}(x) = 0$

Neste caso temos duas consequências:

(a) Existe um vetor de Killing do tipo-tempo ∂_t , onde

$$\mathcal{L}_{\partial_t} u_i(x) = -\omega u_i(x) \quad (\text{A.48})$$

isto define que $\{u_i\}$ são modos de frequência positiva.

(b) Existe uma família de hipersuperfícies ortogonais a cada vetor de Killing temporal. No caso de espaços globalmente hiperbólicos, essas superfícies são de Cauchy.

O elemento de linha de um espaço-tempo estático é:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - \gamma_{jk}dx^j dx^k \quad (\text{A.49})$$

É uma variedade localmente da forma $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ (numa variedade globalmente hiperbólica, esta identificação é global). γ é métrica da hipersuperfície (d-1)-dimensional M . A notação do livro [20] é clara $\mathcal{M} = \text{Stat}(M, \gamma, g^{-1/2})$

Foi introduzido por M. J. Perry e G. W. Gibbons[69], o conceito de métrica óptica.

Definição A.2 A métrica óptica em \mathcal{M} é definida pela métrica $g_{00}^{-1}g$, assim:

$$\mathcal{M}' = \text{Stat}(M, \gamma' = g_{00}^{-1}\gamma, 1) \quad (\text{A.50})$$

\mathcal{M} e \mathcal{M}' são conformalmente relacionadas, logo temos a mesma estrutura causal, e se \mathcal{M} for globalmente hiperbólica \mathcal{M}' o será. O nome óptico é derivado do fato de que as geodésicas de $M' = (M, \gamma')$ são projeções espaciais de geodésicas nulas em \mathcal{M} .

A.3.1 Solução da Equação de Klein-Gordon

Com a métrica (A.49) obtemos ($x^0 = t$):

$$\begin{aligned}
 \square\varphi &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t \underbrace{g^{00}\sqrt{-g}}_{\text{não depende de t}} \partial_t\varphi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\sqrt{-g}\gamma^{ij}\partial_j\partial_j\varphi \\
 &= g^{00}\partial_t^2 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\sqrt{-g}\gamma^{ij}\partial_j\varphi
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

A equação de Klein-Gordon fica então:

$$\begin{aligned}
 (\square + m^2)\varphi &= 0 \\
 -\partial_t^2\varphi &= \underbrace{\left(\frac{g_{00}}{\sqrt{-g}}\partial_i\sqrt{-g}\gamma^{ij}\partial_j + g_{00}m^2\right)}_{K\varphi} \varphi
 \end{aligned} \tag{A.52}$$

K é um operador diferencial de segunda ordem elíptico que deve satisfazer as seguintes condições[33]:

(i) K acrescido de condições de contorno adequadas deverá ser auto-adjunto para um espaço de Hilbert com produto escalar

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi^*(x)\psi(x)\sqrt{\gamma}d^{d-1}x \tag{A.53}$$

(ii) O espectro de K deverá ser não-negativo;

(iii) Zero não deverá ser autovalor de K (porém pode ser ínfimo do espectro contínuo).

Comentaremos brevemente as três condições:

(i) Condição mais natural pois queremos ter na separação de variáveis a equação de autovalores:

$$K\psi_\nu(x) = \omega_\nu^2\psi_\nu(x) \quad (\text{A.54})$$

e ω_ν deverá ser real e os modos já serem ortogonais.

(ii) Simplesmente para termos os modos de frequência positiva e negativa $e^{\mp i\omega t}$.

(iii) A exigência disto é um pouco mais sutil, K é um operador elíptico e na teoria das equações diferenciais parciais [72, 73] teremos problemas se isto ocorrer, tanto que nas demonstrações este caso deve ser estudado em separado, *e.g.* Teorema do Índice de Atiyah-Singer. Ainda, a presença deste modo de autovalor zero é condição necessária, mas não suficiente para termos divergências infravermelhas [33].

A.3.2 A construção dos propagadores

Esta seção é fortemente baseada na referência [33]. Consideremos que K tem espectro discreto puro (em alguns casos isto é condição necessária em outros é só para não carregar a notação).

Apenas para relembrar a notação usada:

$$K\psi_\nu = \omega_\nu^2\psi_\nu \quad \langle \psi_\mu | \psi_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.55})$$

A solução do campo (escalar e neutro) após a normalização (A.1) será:

$$\varphi(t, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\nu}} [\psi_\nu e^{-i\omega_\nu t} a_\nu + \psi_\nu^* e^{i\omega_\nu t} a_\nu^\dagger] \quad (\text{A.56})$$

Cabe uma observação, aqui mudamos a notação, antes x era relacionado a d-upla (t, x^1, \dots, x^{d-1}) , agora, como estamos numa variedade estática x refere-se a (d-1)-upla de M : (x^1, \dots, x^{d-1}) .

Os nossos conjunto de modos ortonormal completo será:

$$u_\nu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\nu}} \psi_\nu(x) e^{-i\omega_\nu t} \quad u_\nu^*(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\nu}} \psi_\nu^*(x) e^{i\omega_\nu t} \quad (\text{A.57})$$

De posse desses modos construíamos então os propagadores de interesse a partir das equações

(A.30), (A.37), (A.43). Usamos que $t = t_2 - t_1$:

$$\begin{aligned} [\varphi(t_2, x), \varphi(t_1, y)] &= [\varphi(t, x), \varphi(0, y)] \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\omega_\nu} \psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y) [e^{-i\omega_\nu t} - e^{i\omega_\nu t}] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

e $[\varphi(t_2, x), \varphi(t_1, y)] = 0$ se (t_2, x) e (t_1, y) são separados por intervalo tipo espaço.

As funções de Wightman:

$$\begin{aligned} G^+(t, x, y) &= \langle 0 | \varphi(t_2, x) \varphi(t_1, y) | 0 \rangle \\ &= \langle \varphi(t, x) \varphi(0, y) \rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y)}{2\omega_\nu} e^{-i\omega_\nu t} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} G^-(t, x, y) &= \langle 0 | \varphi(t_1, x) \varphi(t_2, y) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \varphi(0, x) \varphi(t, y) | 0 \rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y)}{2\omega_\nu} e^{i\omega_\nu t} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

O propagador de Feynman é:

$$\begin{aligned}
 G_F(t, x, y) &= i \langle 0 | \mathcal{T} \varphi(t_2, x) \varphi(t_1, y) | 0 \rangle \\
 &= i \begin{cases} G^+(t, x, y) & \text{se } t_2 > t_1 \\ G^-(t, x, y) & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

Assim teremos:

$$G_F(t, x, y) = i \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_{\nu}(x) \psi_{\nu}^*(y)}{2\omega_{\nu}} e^{-i\omega_{\nu}|t|} \tag{A.62}$$

Observe que os propagadores só dependem da diferença entre os tempos. Isto é característico de qualquer espaço que tenha topologia \mathbb{R}^n , ou seja é homogêneo em alguma direção, assim só a diferença entre as grandezas é importante, *e.g.* propagador de Feynman de um campo escalar na TQC ordinária.

A.3.3 Estados térmicos numa caixa

Doravante, além de $\hbar = c = 1$ usemos $k_B = 1$ e $\beta = 1/T$. Na Mecânica Estatística temos:

$$\langle A \rangle_{\beta} = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} A}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \tag{A.63}$$

Suponhamos que o Hamiltoniano H tenha espectro discreto $\{E_{\sigma}\}$, a função de partição será então:

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{Tr} e^{-\beta H} \\
 &= \sum_{\sigma} \langle E_{\sigma} | e^{-\beta H} | E_{\sigma} \rangle \\
 &= \sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}}
 \end{aligned} \tag{A.64}$$

Deveremos exigir que H seja de classe de traço ou seja:

$$\sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}} < \infty \tag{A.65}$$

Se M é compacto então K tem autovalores discretos e $e^{-\beta H}$ é de classe de traço. Já se M não for compacto, mesmo se o espectro for discreto, $\text{Tr} e^{-\beta H}$ pode divergir como mostrado num exemplo em [33].

Inicialmente vamos impor uma fronteira a nossa variedade M cujo interior Λ é compacto (se a topologia for \mathbb{R}^n basta fechar a variedade e limitá-la; porém para topologias gerais isto não é verdade, *e.g.* Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki). Esta fronteira será denotada $\partial\Lambda$. Neste caso para satisfazer a exigência **(i)** talvez seja necessário acrescentar condições de contorno extras, por exemplo, condição de Dirichlet sobre $\partial\Lambda$.

Construiremos agora as funções de Wightman a temperatura $T = 1/\beta$, definidas como:

$$\begin{aligned}
 G_+^\beta(t, x, y) &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \varphi(t_2, x) \varphi(t_1, y)] \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \varphi(t, x) \varphi(0, y)] \tag{A.66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_-^\beta(t, x, y) &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \varphi(t_1, y) \varphi(t_2, x)] \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \varphi(0, y) \varphi(t, x)] \tag{A.67}
 \end{aligned}$$

Para um campo livre numa caixa, poderemos mostrar que o Hamiltoniano pode ser escrito como[13]:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu^\dagger a_\nu + \frac{1}{2} \right) \omega_\nu \\
 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(n_\nu + \frac{1}{2} \right) \omega_\nu \tag{A.68}
 \end{aligned}$$

A função de partição será então:

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \exp \left[-\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \omega_\nu \right] \\
 &= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{n_\nu=0}^{\infty} \exp(-\beta n_\nu \omega_\nu) \right] \\
 &= \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \exp(-\beta \omega_\nu))^{-1} \tag{A.69}
 \end{aligned}$$

que obviamente converge se $\omega_\nu > 0$. De posse deste resultado calculemos grandezas de interesse:

$$\begin{aligned}
 \langle a_\nu^\dagger a_\nu \rangle_\beta &= \frac{1}{Z} \text{Tr} (e^{-\beta H} a_\nu^\dagger a_\nu) \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} e^{[-\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \omega_\nu]} n_\nu \\
 &= (1 - \exp(-\beta \omega_\nu)) \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} e^{[-\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \omega_\nu]} n_\nu \\
 &= \frac{e^{-\beta \omega_\nu}}{1 - e^{-\beta \omega_\nu}}
 \end{aligned} \tag{A.70}$$

Como $[a_\nu, a_\nu^\dagger] = 1$ então $\langle a_\nu a_\nu^\dagger \rangle_\beta = 1 + \langle a_\nu^\dagger a_\nu \rangle_\beta$.

Então a função de Wightman de frequências positivas será definida como:

$$G_+^\beta(t, x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y)}{2\omega_\nu} \{e^{-i\omega_\nu t} \langle a_\nu a_\nu^\dagger \rangle_\beta + e^{i\omega_\nu t} \langle a_\nu^\dagger a_\nu \rangle_\beta\} \tag{A.71}$$

E então obtemos:

$$G_\pm^\beta(t, x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y)}{2\omega_\nu (1 - \exp(-\beta \omega_\nu))} \{e^{\mp i\omega_\nu t} + e^{\pm i\omega_\nu t} e^{-\beta \omega_\nu}\} \tag{A.72}$$

Segue-se o Propagador de Feynman a temperatura $T = \frac{1}{\beta}$:

$$G_F^\beta(t, x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu^*(y)}{2\omega_\nu (1 - \exp(-\beta \omega_\nu))} \{e^{-i\omega_\nu |t|} + e^{i\omega_\nu |t|} e^{-\beta \omega_\nu}\} \tag{A.73}$$

Quais são os efeitos de introduzir a temperatura numa TQC? A resposta é a chamada condição KMS (Kubo-Martin-Schwinger). Vejamos esta condição: queremos calcular $\langle A(t, x) \rangle_\beta$ onde $A(t, x)$ é um operador qualquer dependendo do tempo. Lembremos que para espaços-tempo estáticos temos a seguinte condição: $A(t, x) = e^{iHt} A(0, x) e^{-iHt}$, assim:

$$\begin{aligned}
 \langle A(t) \rangle_\beta &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} A(t, x)] \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} A(t, x) e^{+\beta H} e^{-\beta H}] \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} e^{-\beta H} A(t, x) e^{+\beta H}] \\
 &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} A(t + i\beta, x)] \\
 &= \langle A(t + i\beta) \rangle_\beta
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

ou seja a temperatura induz uma periodicidade no tempo imaginário igual ao inverso da temperatura. Esta é a condição KMS. Aqui percebe-se a importância dos métodos euclidianos para um estudo mais profundo desta condição em TQC. Uma observação mais matemática: se A for ilimitado, temos que $e^{-\beta H} A$ não é, em geral, de classe de traço.

Analogamente podemos mostrar que[33, 13]:

$$\begin{aligned}
 G_+^\beta(t, x, y) &= G_-^\beta(t + i\beta, x, y) \\
 G_{(1)}^\beta(t, x, y) &= G_{(1)}^\beta(t + i\beta, x, y)
 \end{aligned} \tag{A.75}$$

E um resultado importante:

$$G_F(t, x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_F^\beta(t + in\beta, x, y) \tag{A.76}$$

O propagador de Feynman a $T = 0$ pode ser obtido a partir de qualquer propagador de Feynman a T finito, bastando que para isto some-se todos os propagadores equivalentes. Vê-se

então que o efeito da temperatura altera a topologia do espaço em questão, fazendo ter topologia não-trivial. Para um estudo dos aspectos básicos da TQC a temperatura finita sugerem-se as referências [74, 75, 76, 77].

A.3.4 Estados térmicos em todo o espaço

Façamos agora $\partial\Lambda$ tender a infinito, mas sempre tomando cuidado para que K continue cumprindo as condições **(i)-(iii)**. Não é óbvio supor que G^β no espaço limitado convirja para \tilde{G}^β em todo o espaço. Um estudo aprofundado dessa seção só pode ser feito usando métodos euclidianos, logo não será feito aqui.

A.4 A natureza das divergências em TQC

Brevemente será discutido os dois tipos de divergência em TQC.

A.4.1 Divergência ultravioleta

Viu-se que os campos são distribuições e que o produto de distribuições não são definidos do ponto de vista matemático. Do ponto de vista prático estas integrais divergem. São relacionadas então às pequenas distâncias ou equivalentemente à grandes momentos (energias).

A.4.2 Divergência infravermelha

A divergência infravermelha surge exatamente quando os campos não tem um decaimento suficientemente rápido no infinito (a grandes distâncias), ou equivalentemente, para pequenos momentos.

A.5 O Conceito de Homotopia

O conceito de homotopia está relacionado com a seguinte pergunta: “é possível deformar uma dada curva num espaço topológico qualquer X^6 em outra de forma contínua? As definições e alguns teoremas com utilidade no Capítulo 3 desta tese foram retirados da referência [73]. Este conceito permite por exemplo mostrar que um espaço com buracos é topologicamente distinto de um espaço sem buracos.

A.5.1 Caminhos e laços

Definição A.3 *Seja X um espaço topológico e seja $I = [0, 1]$. Uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow X$ é chamada de caminho com ponto inicial x_0 e com ponto final x_1 se $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Este caminho é chamado de laço com ponto base em x_0 .*

A.5.2 Homotopia

Definição A.4 *Seja $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ laços em x_0 . Eles são ditos homotópicos, denotados por $\alpha \sim \beta$, se existir uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$, tal que*

$$\begin{aligned} F(s, 0) = \alpha(s) \quad , \quad F(s, 1) = \beta(s) \quad \forall s \in I \\ F(0, t) = F(1, t) = x_0 \end{aligned} \tag{A.77}$$

A aplicação F é chamada de homotopia entre α e β .

Mostraremos agora que a relação de homotopia é uma relação de equivalência.

⁶subtender-se-á uma certa familiaridade do leitor com o conceito de espaço topológico

Proposição A.1 *A relação $\alpha \sim \beta$ é de relação de equivalência*

Demonstração:

Mostraremos que esta relação satisfaz as três propriedades de uma relação de equivalência.

Reflexividade: $\alpha \sim \alpha$. A relação de homotopia pode ser dada por $F(s, t) = \alpha(s)$ para qualquer $t \in I$.

Simetria: Seja $\alpha \sim \beta$ com a homotopia $F(s, t)$, tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$ e $F(s, 1) = \beta(s)$. então $\beta \sim \alpha$, onde a homotopia é $F(s, 1 - t)$.

Transitividade: Seja $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$. Então $\alpha \sim \gamma$. Se $F(s, t)$ é a homotopia entre α e β e $G(s, t)$ é homotopia entre β e γ , a homotopia entre α e γ será:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

A proposição está demonstrada. ■

A.5.3 Grupo Fundamental

Dado que a relação de homotopia é de equivalência. Poderemos agrupar os laços homotopicamente equivalentes em classes distintas de equivalência, denotadas por $[\alpha]$ e α é representativo da classe. Embora simples, as demonstrações são um pouco longas e por isso só serão citados sem demonstração o teorema e lema utilizados.

Definição A.5 *Seja X um espaço topológico. O conjunto de classes de laços em $x_0 \in X$ é denotado por $\pi_1(X, x_0)$ e é chamado de grupo fundamental (ou primeiro grupo de homotopia) de X em x_0 . O produto de classes de homotopia $[\alpha]$ e $[\beta]$ é definido por $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.*

Lema A.1 *O produto de classes de homotopia é independente do representativo*

Teorema A.1 *O grupo fundamental munido da operação de produto de classes de homotopia é um grupo.*

Apêndice B

Resumo do trabalho apresentado na XXVI ENFPC

Segue em anexo a referência [14].

Interacting field theory in Rindler Spacetime

N. F. Svaiter and C. A. D. Zarro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ, 22290-180, Brazil
(Received August 14, 2006)

In this paper, we are investigating the generalization of two results in Euclidean field theory for the Wick-rotated Rindler space. First, we generalize an expected result obtained by Christensen and Duff (Nucl.Phys. **B146**;11 (1978)). Second, we generalize an result obtained by Lee (Nucl.Phys. **B264**;437 (1986)), that says that the finite-temperature Schwinger function in Euclidean Rindler space is not equal to the $T = 0$ Schwinger function in Cartesian coordinates. Finally, we discuss the introduction of interaction to analyse the Feynman rules in field theory described by accelerated observers.

I. INTRODUCTION

The Minkowski vacuum described by an accelerated observer is a thermal state with temperature proportional to his proper acceleration. This assumption can be proved by many different ways: using a model of particle detector [1, 2]; using the Hawking's method on black hole evaporation [3]; computing the Feynman propagator [4] and finally using the strong results of axiomatic QFT [5, 6]. However as a thermal state satisfies the KMS condition (periodicity in the imaginary time), we can gain some extra insights in this effect going to the Euclidean domain after performing a Wick rotation in a Lorentzian signature manifold [7, 8].

In this line of investigation, Christensen and Duff [9] showed that the Euclidean Rindler space has non trivial topology (Indeed for this Euclidean manifold $\pi_1 = \mathbb{Z}$). Studying the four dimensional case and the massless free scalar field, they obtained that the zero temperature ($T = 0$) Schwinger function adapted to cartesian coordinates is equal to the Schwinger function at temperature $T = 1/2\pi$ adapted to cylindrical coordinates (Euclidean Rindler space). Our first task is to generalize their result for any dimension and for massive as well as massless scalar field.

Lee obtained [10] the following result: both Schwinger functions discussed above are not exactly the same, they differ for terms that satisfy the homogeneous Wick-rotated field equation. He obtained this result for a massless scalar field in two dimensions. As we discussed before in this paper, we generalize this result. It is a important question because the Feynman rules of field theory will be based on his result. And of course all the renormalization program of interacting field theory.

II. RINDLER'S SPACETIME

Rindlers coordinate system is naturally adapted to an observer with constant proper acceleration. Departing from the d -dimensional flat Minkowski spacetime, we can define the map [11] as

$$x^0 = \xi \sinh \tau \quad x^1 = \xi \cosh \tau \quad x^i = x^i_{\perp} \quad (i = 2, \dots, d-1) \quad (1)$$

It induces the metric

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2 - d\vec{x}_{\perp}^2 \quad (2)$$

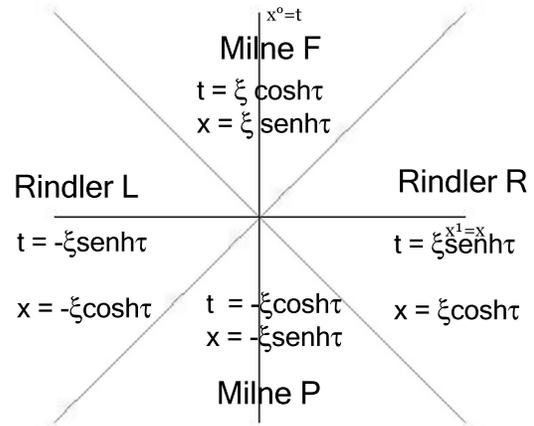


FIG. 1: The Minkowski spacetime divided into four coordinate systems (trivial coordinates are omitted)

It is a very interesting spacetime because it has an event horizon ($x^1 = \pm x^0$), it is flat and we know its covering space (Minkowski spacetime). We can relate it to the exterior solution a black hole with $M \rightarrow \infty$ or to an infinite flat Earth [12, 13].

III. QUANTUM FIELD THEORY IN RINDLER SPACETIME

Quantum field theory is easily implemented in Rindler-R (right edge) spacetime because as we see from the metric we have a time-like Killing vector field ∂_{τ} and also have a straightforward definition of negative and positive frequency modes. For simplicity we consider only the neutral massive scalar field ϕ which Lagrangian density is defined by

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\partial^{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi - m^2 \phi^2), \quad (3)$$

2

N. F. Svaiter, C. A. D. Zarro

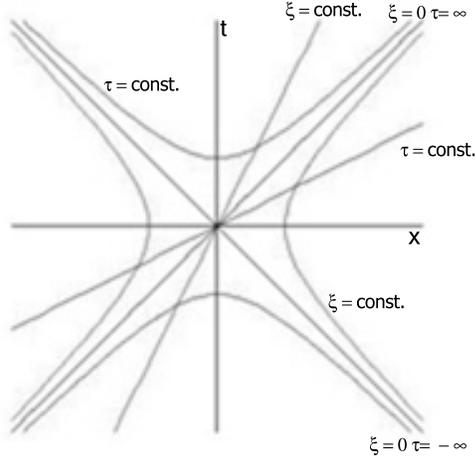


FIG. 2: The structure of Milnes and Rindlers coordinate systems

where $\sqrt{-g}$ is the square root of the metric determinant. Now we can obtain the Klein-Gordon equation adapted to Rindler spacetime. We find

$$\left[\frac{1}{\xi^2} \partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - \frac{1}{\xi} \partial_\xi - \partial_i^2 + m^2 \right] \varphi = 0. \quad (4)$$

Defining the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \varphi^*(x) \psi(x) g^{\tau\tau} \sqrt{-g} d^{d-1}x, \quad (5)$$

we obtain the normalized field modes with positive frequency

$$u_{\vec{k}_\perp, \omega}(\tau, \xi, \vec{x}_\perp) = \frac{2\omega \sinh \pi\omega}{\pi(2\pi)^{\frac{d-2}{2}}} K_{i\omega}(\mu\xi) \exp(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - i\omega\tau), \quad (6)$$

where $\mu = \sqrt{\vec{k}_\perp^2 + m^2}$. The usual expansion of the field in creation and annihilation operators is

$$\varphi(\tau, \xi, \vec{x}_\perp) = \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left\{ u_{\vec{k}_\perp, \omega} b_{\vec{k}_\perp, \omega} + u_{\vec{k}_\perp, \omega}^* b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger \right\}. \quad (7)$$

The Rindler's Hamiltonian is

$$H_R = \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \omega \left(b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger b_{\vec{k}_\perp, \omega} + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

The Fulling vacuum $|0, F\rangle$ associated to Rindler-R edge is defined by

$$b_{\vec{k}_\perp, \omega} |0, F\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}_\perp, \omega \quad (9)$$

IV. EUCLIDEAN RINDLER'S SPACE

Now let us perform a Wick rotation on Minkowski and also Rindler spacetimes. The horizon of the latter is mapped into the origin of the plane (Figure(3))

$$\text{Minkowski} = \begin{cases} T = ix^0 \\ X = x \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{Rindler} = \begin{cases} \tau = i\theta \\ \xi = r \end{cases} \quad (11)$$

The Euclidean Rindler transformations are

$$T = r \sin \theta \quad X = r \cos \theta \quad (12)$$

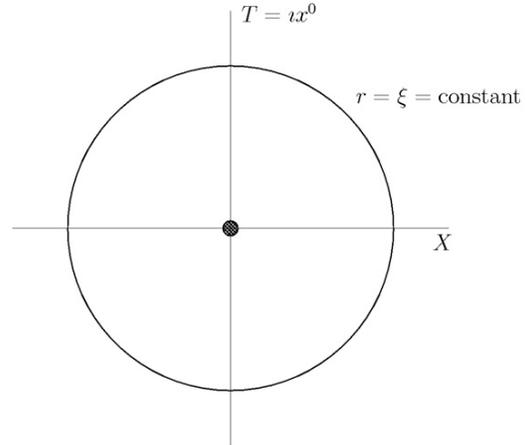


FIG. 3: Euclidean Rindler space

Another interesting feature of this space is that the spacetimes Rindler-R and Rindler-L edges are joined in this space, as we can verify immediately. This reflects clearly the BCS-correlation between these two causally disconnected spacetimes[1, 10]

We can see that we have a periodicity in the imaginary time, so we can connect this result with the KMS Condition. Then we expect that $\beta = \frac{1}{T} = 2\pi$.

V. GENERALIZING CHRISTENSEN AND DUFF'S RESULT

Since the Euclidean Rindler space has non-trivial topology, in order to obtain the "true" propagator, we have to sum over all equivalent homotopy classes. This was discussed by Dowker [14]; Christensen and Duff [9] and also by Fulling and Ruijsenaars [7]. Defining the differences between imaginary times coordinates by s , they obtained the usual formula for thermal Schwinger function, *i.e.*

XXVI—ENFPC/P024

3

$$\mathcal{G}^\beta(s, x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}^\infty(s + n\beta, x, y), \quad (13)$$

where \mathcal{G}^β is the thermal Schwinger function and \mathcal{G}^∞ is the zero temperature ($T = 0$) Schwinger function. Christensen and Duff have shown that in a four-dimensional Euclidean Rindler space and for massless scalar field, we have, for points with the same proper acceleration, the following result:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_R^\infty(s + n\beta) = \mathcal{G}_M^\infty(s), \quad (14)$$

where $\mathcal{G}_M^\infty(s)$ is the $T = 0$ Schwinger function adapted for Euclidean Minkowski space. In this paper we generalize this result given in [9] in d -dimensional space and for a massive scalar field. Let us start from the definition of Schwinger function[7], given by:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R^{2\pi}(\theta - \theta', x, x') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_R^\infty(\theta - \theta' + 2\pi n, x, x') \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \frac{\sinh(\pi\omega)}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(\mu\xi) K_{i\omega}(\mu\xi') \exp(i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)) \exp(-\omega|\theta - \theta' + 2\pi n|) \end{aligned} \quad (15)$$

From now on we use $s = \theta - \theta'$, and using the identity:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\omega|s + 2\pi n|) = \frac{\cosh(\omega(\pi - |s|))}{\sinh(\pi\omega)}, \quad (16)$$

the eq. (15) reads

$$I = \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2} \vec{k}_\perp \frac{\cosh(\omega(\pi - |s|))}{\pi^2 (2\pi)^{d-2}} K_{i\omega}(\mu r) K_{i\omega}(\mu r') \exp(i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)). \quad (17)$$

To solve the integral given by eq. (17) we have to use the formula [15]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx K_{ix}(a) K_{ix}(b) \cosh[(\pi - \phi)x] &= \\ = \frac{\pi}{2} K_0 \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

After changing the integration order we get:

$$I = \int \frac{d^{d-2} \vec{k}_\perp}{2\pi (2\pi)^{d-2}} K_0(\mu\gamma_1) \exp(i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)), \quad (19)$$

where $\gamma_1^2 = \xi^2 + \xi'^2 + 2\xi\xi' \cos(s)$. From Candelas and Raine [4] we have this formula

$$\int \frac{d^{d-2} \vec{k}_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} K_0(\mu\gamma_1) = \left(\frac{m}{2\pi\gamma_2} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\gamma_2) \quad (20)$$

where $\gamma_2^2 = \gamma_1^2 + (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)^2$ is the Euclidean distance between the points $(\theta, r, \vec{x}_\perp)$ and $(\theta', r', \vec{x}'_\perp)$. So we the final result is:

$$\mathcal{G}_R^{2\pi}(\theta - \theta', x, x') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi\gamma_2} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m\gamma_2) \quad (21)$$

But this is just \mathcal{G}_M^∞ in Euclidean Rindler coordinates. Therefore we get the Unruh-Davies effect

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty \quad (22)$$

For non-massive scalar field for $d \geq 3$ we can proceed almost exactly like Candelas and Raine and we obtain[16]

$$\mathcal{G}_R^{2\pi}(\theta - \theta', x, x') = \frac{1}{2^{2-\frac{d}{2}} (2\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \frac{1}{\gamma_2^{d-2}} = \mathcal{G}_M^\infty \quad (23)$$

We can see that the former expression is singular in $d = 2$. In fact, if we try to repeat this method for $m = 0$ and $d = 2$ we get this integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\cosh(\omega(\pi - |s|))}{4\pi\omega \sinh(\pi\omega)} \left(\frac{r}{r'} \right)^{i\omega} \quad (24)$$

but it diverges, we will discuss it further later.

4

N. F. Svaiter, C. A. D. Zarro

VI. GENERALIZING T. D. LEE'S RESULT

A. Schwinger Generating Funtional in Cartesian Coordinates

We define the Schwinger generator function associated to cartesian coordinates by [10, 17]

$$\begin{aligned} Z_M^\infty[j] &= \frac{\langle 0, M, out | 0, M, in \rangle_j}{\langle 0, M, out | 0, M, in \rangle_{j=0}} \\ &= \int [d\varphi] \exp \left\{ -S[\varphi] + \int d^d x j(x) \varphi(x) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

For a free field we can show that

$$Z_{0M}^\infty[j] = \exp \left(\int d^d x \int d^d y j(x) \mathcal{G}_M^\infty(x, y) j(y) \varphi(x) \right) \quad (26)$$

B. Schwinger Genertaing Funtional in Cylindrical Coordinates

We define the Schwinger generator function associated to cylindrical coordinates by [10, 17]

$$\begin{aligned} Z_R^{2\pi}[j] &= \frac{\text{Tr}_v(2\pi)}{\text{Tr}_v(2\pi)} \\ &= \int_{\text{per}} [d\varphi] \exp \left\{ -S[\varphi] + \int d^d x j(x) \varphi(x) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

where $v(\beta) = \exp -\beta H_R$ and ‘‘per’’ means periodic in the space of functions.

For a free field we can show that the Schwinger function is

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{\text{Tr}_v(2\pi - \theta') \varphi(x') v(\theta' - \theta) \varphi(x) v(\theta)}{\text{Tr}_v(2\pi)}. \quad (28)$$

C. Lee's result

Lee, in a very interesting article [10], showed that for a massless scalar field in two dimensions, we do not have the equality between Rindlers $\beta = 2\pi$ Schwinger funtion (in cylindrical coordinates) and the usual $T = 0$ Schwinger functions

(in cartesian coordinates), but we have extra terms that satisfy the homogeneous euclidean equation. He obtained

$$\mathcal{G}_R^{2\pi}(s, r, r') = -\frac{\ln(\rho)}{2\pi} + \frac{\ln(rr')}{4\pi} \quad (29)$$

where $\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta$ is the Euclidean distance between the points (θ, r) and (θ', r') . We assume that the spectrum is discrete so, we can write the Hamiltonian (8) by a sum in the modes:

$$\begin{aligned} H_R &= \sum_{\omega, \vec{k}_\perp} \left(b_{\vec{k}_\perp, \omega}^\dagger b_{\vec{k}_\perp, \omega} + \frac{1}{2} \right) \omega \\ &= \sum_{\omega, \vec{k}_\perp} \left(n_{\vec{k}_\perp, \omega} + \frac{1}{2} \right) \omega. \end{aligned} \quad (30)$$

For a massive field in a d-dimensional Euclidean Rindler space let us first compute $\text{Tr}_v(2\pi)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_v(2\pi) &= \sum_n \langle n | e^{-2\pi H_R} | n \rangle \\ &= \sum_n e^{-2\pi \sum_{\vec{k}_\perp, \omega} (n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2) \omega} \\ &= \prod_{\vec{k}_\perp, \omega} \frac{1}{2} \csc(\pi \omega). \end{aligned} \quad (31)$$

Now we compute eq. (28). Using the cyclical property of traces:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_v(2\pi - \theta') \varphi(x') v(\theta' - \theta) \varphi(x) v(\theta) &= \\ \text{Tr}_v(2\pi - s) \varphi(x') v(s) \varphi(x) & \end{aligned} \quad (32)$$

Then $\mathcal{G}_R^{2\pi}$ is given by

$$\mathcal{G}_R^{2\pi} = \frac{\sum_n \langle n | e^{-(2\pi-s)H_R} | n \rangle \langle n | \varphi(x') e^{-sH_R} \varphi(x) | n \rangle}{\text{Tr}_v(2\pi)} \quad (33)$$

We have to use also that the field can be expanded as the eq. (7) and the modes given by eq. (6) in cylindrical coordinates. We get that eq. (33) reads

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^{d-2} \vec{k}_\perp}{2\omega \text{Tr}_v(2\pi)} u_{\vec{k}_\perp, \omega}(r, \vec{x}_\perp) u_{\vec{k}_\perp, \omega}^*(r', \vec{x}'_\perp) \\ \sum_{n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} \neq n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1/2} e^{2\pi \sum_{\vec{k}'_\perp, \omega'} (n_{\vec{k}'_\perp, \omega'} + 1/2) \omega'} \sum_{n_{\vec{k}_\perp, \omega}} \left\{ (n_{\vec{k}_\perp, \omega} + 1) e^{-(s+\pi)\omega} + n_{\vec{k}_\perp, \omega} e^{(s-\pi)\omega} \right\} e^{-2\pi n_{\vec{k}_\perp, \omega} \omega} \end{aligned} \quad (34)$$

The sum $\sum_{n_{\vec{k}_\perp, \omega}}$ can be performed easily and the sum $\sum_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega}$ is $\prod_{\vec{k}'_\perp \neq \vec{k}_\perp, \omega' \neq \omega} \frac{1}{2} \csc(\pi \omega)$. Substituting these results and

eq. (31) in eq. (34), we finally get

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R^{2\pi} &= \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2}\vec{k}_\perp \frac{u_{\vec{k}_\perp, \omega}^*(r, \vec{x}_\perp) u_{\vec{k}_\perp, \omega}^*(r', \vec{x}'_\perp)}{2\omega \sinh(\pi\omega)} \cosh((\pi-s)\omega) \\ &= \int_0^\infty d\omega \int d^{d-2}\vec{k}_\perp K_{i\omega}(\mu r) K_{i\omega}(\mu r') e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \cosh((\pi-s)\omega). \end{aligned} \quad (35)$$

We have already performed these integrals in the generalization of Christensen and Duff's result and we get $\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty$. For a massive scalar field, we do not obtain any extra terms, only the expected result. For $m = 0$ and $d \geq 3$, the calculations are the same as we did before, we only have to do $\mu \rightarrow \sqrt{\vec{k}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}$, so we get again $\mathcal{G}_R^{2\pi} = \mathcal{G}_M^\infty$.

D. Understanding these extra terms

We have obtained that for $m \neq 0$ ($d \geq 2$) or $m = 0$ ($d \neq 3$) the well known and expected result of Christensen and Duff. The new terms, interpreted as the interaction with the event horizon, are absent. Why does he find these new terms? We have to remember that he is doing a massless scalar field theory in two dimensions, and this particular case is extremely pathological. We have for the Lorentzian signature case, the presence of infrared divergences [18]. And when the Feynman propagator is computed, we note that we have a non-integrable singularity in the origin even in Minkowski spacetime. The test functions do not have support in $k = 0$ in momenta representation[7].

In the euclidean case, this pathology is reflected in the fact that the Laplacian (Wick-rotated field equation) in two dimensions does not have a Green function, that is uniquely determined by going to zero in the infinity[7, 19].

VII. INTRODUCING INTERACTIONS

We see that we are doing a field quantization at finite temperature. so it is natural to use its results. Unruh and Weiss [21] calculated the partition function Z_R^β for a scalar field in d dimensions on Euclidean Rindler coordinates with an interaction $V(\phi)$ and they proved that performing a change from cylindrical coordinates to cartesian coordinates they could only obtain Z_M^∞ if $\beta = 2\pi$. After Sewell's papers [5, 6] this was already expected.

VIII. CONCLUSIONS

We see that that the Minkowski vacuum is viewed, on restriction to Rindler-R as Rindler thermal state with $\beta = 2\pi$ even in the presence of interactions in a d-dimensional scalar field theory. We generalized of Christensen and Duff's paper and obtained the same result, that is expected because we are summing over equivalent homotopy classes, and of course this would not depend on the path chosen. The extra terms proposed by T. D. Lee are absent in the general case, so the Feynman rules are absolutely the same as the used at finite temperature QFT. the introduction of the renormalization program is straightforward since the $\beta = 2\pi$ state in Rindler spacetime is equal to Minkowski's $T = 0$.

-
- [1] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, 14(4):870, 1976.
 - [2] B. F. Svaiter; N. F. Svaiter. Inertial and noninertial particle detectors and vacuum fluctuations. *Physical Review D*, 46(12):5267, 1992.
 - [3] P. C. W. Davies. Scalar particle production in Schwarzschild and rindler metrics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 8(4):609, 1975.
 - [4] P. Candelas; D. J. Raine. Quantum field theory on incomplete manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 17(11):2101, 1976.
 - [5] G. L. Sewell. Relativity of temperature and the Hawking effect. *Physics Letters A*, 79(1):23–24, 1980.
 - [6] G. L. Sewell. Quantum fields on manifolds: PCT and gravitationally induced thermal states. *Annals of Physics*, 141:201–224, 1982.
 - [7] S. A. Fulling; S. N. M. Ruijsenaars. Temperatures, periodicity and horizons. *Physics Reports*, 152(3):135–176, 1987.
 - [8] G. W. Gibbons; M. J. Perry. Black holes and thermal green functions. *Proc. R. Soc. London A*, 358:467–494, 1978.
 - [9] S. M. Christensen; M. J. Duff. Flat space as a gravitational as a gravitational instanton. *Nuclear Physics B*, 146:11–19, 1978.
 - [10] T. D. Lee. Are black holes black bodies. *Nuclear Physics B*, 264:437–486, 1986.
 - [11] W. Rindler. Kruskal space and the uniformly accelerated frame. *American Journal of Physics*, 34:1174–1178, 1966.
 - [12] V. L. Guinzburg; P. Frolov. Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of uniformly accelerated detector. *Sov. Phys. Usp.*, 30(12):1073, 1987.
 - [13] D. Deustch D. W. Sciama, P. Candelas. Quantum field theory, horizons and thermodynamics. *Annals of Physics*, 30(3):327–366, 1981.
 - [14] J. S. Dowker. Quantum field theory on a cone. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 10(1):115, 1977.
 - [15] I. S. Gradshteyn; I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, Products*. Elsevier ISE, 2000.
 - [16] C. A. D. Zarro. *Teoria Quântica de Campos na Presença de Horizonte de Eventos*. (In Portuguese) Tese de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, to be presented in 2006.

- [17] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. The International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2002.
- [18] A. S. Wightman. *Introduction to Some Aspects of Relativistic Dynamics of Quantized Fields*. In *Cargèse Lectures in Theoretical Physics — High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory*, editado por M. Levy. Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1974.
- [19] S. L. Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, Inc., 1989.
- [20] B. S. Kay. The double wedge algebra for quantum fields on Schwarzschild and Minkowski spaces. *Communications in Mathematical Physics*, 100:87–81, 1985.
- [21] W. G. Unruh; N. Weiss. Acceleration radiation in interacting field theory. *Physical Review D*, 29(3):1656–1662, 1984.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume I Foundations. Cambridge University Press, 1995.
- [2] G. 't Hooft; M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44:189–213, 1972.
- [3] D. J. Gross; F. Wilczek. Asymptotically free gauge theories i. *Physical Review D*, 8:3633–3652, 1973.
- [4] D. J. Gross; F. Wilczek. Asymptotically free gauge theories ii. *Physical Review D*, 9:980–993, 1974.
- [5] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. International Pure & Applied Physics Series. McGraw-Hill Companies, 1969.
- [6] N. F. Svaiter. *Tópicos em Teoria Quântica de Campos*. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2006. A ser publicado nos anais da VI Escola de Inverno do CBPF.
- [7] L. Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes I. *Physical Review*, 183(5):1057–1068, 1969.
- [8] S. A. Fulling. Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time. *Physical Review D*, 7(10):2850–2862, 1973.
- [9] S. W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [10] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43:199–220, 1975.

- [11] P. C. W. Davies. Scalar particle production in schwarzschild and rindler metrics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 8(4):609, 1975.
- [12] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, 14(4):870, 1976.
- [13] N. D. Birrel; P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved spacetime*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1982.
- [14] N. F. Svaiter; C. A. D. Zarro. Interacting field theory in rindler spacetime. Anais do XXVI-Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço-MG, Brasil, 2005.
- [15] B. F. Svaiter; N. F. Svaiter. Inertial and noninertial particle detectors and vacuum fluctuations. *Physical Review D*, 46(12):5267, 1992.
- [16] P. C. W. Davies. *Particle does not exist*. In *Quantum Theory of Gravity: Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of Bryce S. De Witt*, editado por S. M. Christensen. Adam Hilger, 1984.
- [17] M. J. A. Alcalde. *Renormalização a Dois Laços do Modelo $\lambda\phi^4/4!$ sem Massa com Condições de Fronteira*. Tese de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2006.
- [18] M. J. Duff. *Inconsistency of quantum field theory in curved space-time*. In *Quantum gravity: An Oxford symposium 2*, editado por C. J. Isham; R. Penrose e D. W. Sciama. Oxford University Press, 1981.
- [19] N. F. Svaiter. *Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-tempo de Minkowski e em Espaços Curvos*. Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1989.
- [20] S. A. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1989.
- [21] S. M. Christensen; M. J. Duff. Flat space as a gravitational instanton. *Nuclear Physics B*, 146:11–19, 1978.
- [22] T. D. Lee. Are black holes black bodies. *Nuclear Physics B*, 264:437–486, 1986.

- [23] P. Candelas; D. J. Raine. Quantum field theory on incomplete manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 17(11):2101, 1976.
- [24] C. W. Misner; K. S. Thorne; J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [25] W. Rindler. Kruskal space and the uniformly accelerated frame. *American Journal of Physics*, 34:1174–1178, 1966.
- [26] M. D. Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Physical Review*, 119:1743–1745, 1960.
- [27] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [28] R. M. Wald. On particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 45:9–34, 1975.
- [29] S. Takagi. Vacuum noise and stress induced by uniform acceleration. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 88:1–142, 1986.
- [30] I. S. Gradshteyn; I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, Products*. Elsevier ISE, 2000.
- [31] D. G. Boulware. Quantum field theory in schwarzschild and rindler spaces. *Physical Review D*, 11(6):1404, 1975.
- [32] A. S. Wightman. *Introduction to Some Aspects of Relativistic Dynamics of Quantized Fields*. In *Cargèse Lectures in Theoretical Physics — High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory*, editado por M. Lévy. Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1974.
- [33] S. A. Fulling; S. N. M. Ruijsenaars. Temperatures, periodicity and horizons. *Physics Reports*, 152(3):135–176, 1987.
- [34] D. Deustch D. W. Sciama, P. Candelas. Quantum field theory, horizons and thermodynamics. *Annals of Physics*, 30(3):327–366, 1981.
- [35] W. G. Unruh; R. M. Wald. What happens when an accelerating observer detects a rindler particle. *Physical Review D*, 29(6):1047, 1984.

- [36] V. L. Guinzburg; P. Frolov. Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of uniformly accelerated detector. *Sov. Phys. Usp.*, 30(12):1073, 1987.
- [37] G. 't Hooft. The scattering matrix approach for the quantum black hole: An overview. *International Journal of Modern Physics A*, 11:4623–4688, 1996.
- [38] T. Padmanabhan. Temperatures, periodicity and horizons. *Physics Reports*, 406(2):49–125, 2005.
- [39] B. deWitt. *Quantum Gravity: the new synthesis*. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, editado por S. W. Hawking e W. Israel. Cambridge University Press, 1979.
- [40] N. Hashitsume R. Kubo, M. Toda. *Statistical Physics II : Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer, 2003.
- [41] W. Troost; H. Van Dam. Thermal effects for an accelerating observer. *Physics Letters B*, 71(1):149, 1977.
- [42] T. Padmanabhan. Temperatures, periodicity and horizons. *Modern Physics Letters A*, 17(15-17):923–945, 2002.
- [43] T. Padmanabhan. Topological interpretation of the horizon temperature. *Modern Physics Letters A*, 18:2903, 2003.
- [44] J. S. Dowker. Quantum field theory on a cone. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 10(1):115, 1977.
- [45] J. Glimm; Arthur Jaffe. *Quantum Physics — A Functional Integral Point of View*. Springer Verlag, 1987.
- [46] S. L. Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, Inc., 1989.
- [47] A. diSessa. Quantization on hyperboloids and full space-time field expansion. *Journal of Mathematical Physics*, 15:1892, 1974.
- [48] G. L. Sewell. Relativity of temperature and the Hawking effect. *Physics Letters A*, 79(1):23–24, 1980.

- [49] G. L. Sewell. Quantum fields on manifolds: PCT and gravitationally induced thermal states. *Annals of Physics*, 141:201–224, 1982.
- [50] B. S. Kay. The double wedge algebra for quantum fields on Schwarzschild and minkowski spaces. *Communications in Mathematical Physics*, 100:87–81, 1985.
- [51] W. G. Unruh; N. Weiss. Acceleration radiation in interacting field theory. *Physical Review D*, 29(3):1656–1662, 1984.
- [52] C. W. Bernard. Feynman rules for gauge theories at finite temperature. *Physical Review D*, 9:3312, 1974.
- [53] N. F. Svaiter; C. A. D. Zarro. Schwinger functions in euclidean rindler space. Artigo em preparação.
- [54] G. S. Menezes; N. F. Svaiter; C. A. D. Zarro. Stochastic quantization in compact riemannian manifolds. Artigo em preparação.
- [55] G. W. Gibbons. *Quantum Field theory in curved spacetime*. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, editada por S. W. Hawking e W. Israel. Cambridge University Press, 1979.
- [56] J. von Neumann. *Quantum Mechanics of Infinite Systems*. In *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics*, editado por M. Rédei e M. Stöltzner. Springer, 2001.
- [57] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Texts and Monographs in Physics. Springer, 1991.
- [58] R. M. Wald. Existence of the s-matrix in quantum field theory in curved space-time. *Annals of Physics*, 118:490–510, 1979.
- [59] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. The University of Chicago Press, 1989.
- [60] B. S. Kay. The principle of locality and quantum field theory on (non-globally hyperbolic) curved spacetimes. *Reviews in Mathematical Physics*, Special Issue:167–195, 1992.

- [61] Y. Choquet-Bruhat. *Hyperbolic partial differential equations on a manifold*. In *Battelle Rencontres 1967: lectures in mathematics and physics*, editado por C. deWitt-Morette e J. A. Wheeler. Benjamin, 1968.
- [62] S. W. Hawking; G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [63] R. Geroch. Spinor structure of space-times in general relativity i. *Journal of Mathematical Physics*, 9:1739, 1968.
- [64] R. Geroch. Spinor structure of space-times in general relativity ii. *Journal of Mathematical Physics*, 11:343, 1970.
- [65] A. N. Kolmogorov; S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1975.
- [66] C. M. Sommerfield. Quantization on space-time hyperboloids. *Annals of Physics*, 84:285, 1974.
- [67] R. C. Arcuri; B. F. Svaiter; N. F. Svaiter. Is the milne coordinate system a good one? *Modern Physics Letters A*, 9(1):19–27, 1994.
- [68] B. de Witt. Quantum field theory in curved spacetime. *Physics Reports C*, 19(6):295–357, 1975.
- [69] G. W. Gibbons; M. J. Perry. Black holes and thermal green functions. *Proc. R. Soc. London A*, 358:467–494, 1978.
- [70] S. A. Fulling; M. Sweeny; R. M. Wald. Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime. *Communications in Mathematical Physics*, 63:257–264, 1978.
- [71] B. S. Kay; R. M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physics Reports*, 207(2):49–136, 1991.
- [72] P. Gilkey. *The Index Theorem and the Heat Equation*. Publish or Perish, Inc., 1974.
- [73] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 1990.

- [74] N. F. Svaiter. Introdução à teoria quântica de campos a temperatura finita. Notas do curso apresentado na III Escola de Verão do CBPF, Fevereiro de 2001.
- [75] J. I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.
- [76] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1996.
- [77] H. Umezawa. *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics*. AIP Press, 1995.